MATH 60604
Modélisation statistique
§ 5a - Introduction aux données corrélées et longitudinales

Léo Belzile

HEC Montréal
Département de sciences de la décision

Modifications du modèle de régression linéaire ordinaire

- Le but de ce chapitre est de voir comment prendre en compte la dépendance entre observations.
- On se cantonne à la modélisation de la matrice de covariance pour prendre en compte la dépendance entre observations (pour les données longitudinales et groupées) et l'hétéroscédasticité de groupe.

Quand les données ne sont pas indépendantes

- Si les observations sont positivement corrélées, les erreurs-type estimés sont **trop petites**.
- On détecte des différences significatives qui ne le sont pas en réalité (erreur de type I enflée, ou faux positifs plus fréquents).

Sources de corrélation

Généralement, la corrélation entre observations provient de

- dépendance temporelle, catégorisée en
  - données longitudinales: mesures répétées sur des individus (séries courtes)
  - séries chronologiques: observations à plusieurs périodes (séries longues). Ces données nécessitent des modèles adaptés qui ne sont pas couverts dans ce cours.
- données groupées: données sur des sujets qui ne sont pas indépendants (familles, groupes, etc.)

Moments de vecteurs aléatoires

- Soit un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y}$ de dimension n.
  - Dans la situation qui nous intéresse, un tel vecteur sera habituellement composé des mesures répétées sur un individu ou bien d'observations d'un groupe d'individus.
- L'espérance (ou moyenne théorique) d'un tel vecteur est $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{Y}\right)$ calculée terme par terme, $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{Y}\right) = (\mathrm{E}\left(Y_1\right), \ldots, \mathrm{E}\left(Y_n\right))$.
- On note aussi la variance de la ie composante $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left(Y_i\right)$.
- De même, la covariance entre la ie et la je composante est $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)$.

Matrice de covariance

Pour un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y}$, on définit la matrice de covariance comme étant la matrice symétrique $n \times n$

$$\mathsf{Cov}\left(\boldsymbol{Y}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \ddots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

- Le ie élément de la diagonale de $\mathsf{Cov}\left(\boldsymbol{Y}\right)$ est la variance de Y_i.
- Cette matrice est symmétrique, avec $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Matrice de corrélation

- La corrélation entre Y_i et Y_j est donnée par:

$$\rho_{ij} = \mathrm{Corr}\left(Y_i, Y_j\right) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

- La matrice de corrélation de $\boldsymbol{Y}$ est définie comme étant la matrice symétrique $n \times n$ qui contient un sur la diagonale et les corrélations hors diagonale,

$$\mathrm{Corr}\left(\boldsymbol{Y}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \ddots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Modélisation de la covariance entre observations

Un des traits principaux des données corrélées et longitudinales est la nécessité de tenir compte de la corrélation intra-classe.

- cela reviendra souvent à modéliser la matrice de covariance des observations d'un même groupe (ou d'un même individu dans le cas de mesures répétées).

Études longitudinales sur des sujets indépendants

- Das ce type d'études, plusieurs mesures (habituellement à différents moments dans le temps) sont prises sur les mêmes individus.
  - on nomme ces données mesures répétées ou données longitudinales; les économètres parlent plutôt de données de panel.
- Les individus sont indépendants les uns des autres, mais les mesures pour un même sujet ne sont pas indépendantes.
- Un fichier de données pour de telles études a typiquement ce format:

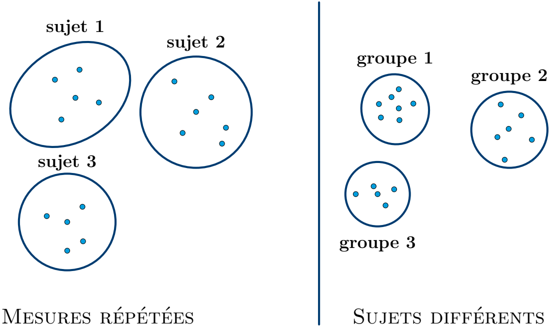
sujet	temps	score	sexe
1	1	5	0
1	2	6	0
1	3	4	0
2	1	2	1
2	2	4	1
2	3	7	1

Études sur des sujets non indépendants

- Dans ce type d'étude, les sujets sont échantillonnés à l'intérieur d'un groupe.
- Voici plusieurs exemples:
  - sujets échantillonnés dans plusieurs ménages (familles),
  - sujets échantillonnés dans plusieurs entreprises,
  - sujets échantillonnées dans des écoles, dans des hôpitaux, etc.
- Dans tous ces cas, il y a de la corrélation entre les mesures des sujets appartenant au même groupe (famille, école, entreprise).

Les données corrélées sont des données groupées

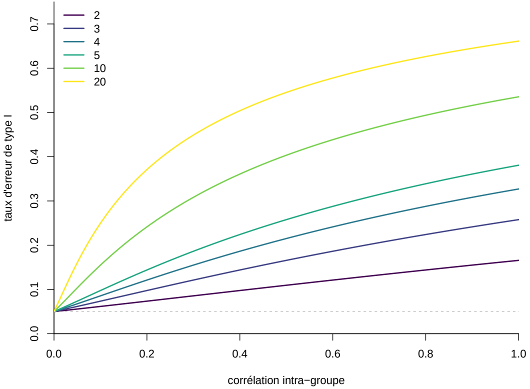
- On peut toujours considérer les données corrélées comme étant des données groupées avec de la corrélation intra-groupe.
- Dans le cas de données longitudinales, le groupe est le sujet lui-même et on a donc plusieurs observations par groupe.
- Dans les autres cas, les groupes sont les ménages, les écoles, les hôpitaux, les entreprises, etc.



Dans tous les cas, un point égale une ligne du fichier de données.

Que se passe-t-il si on ignore la corrélation intra-groupes?

- Supposons que nous avons des données groupées et que nous voulons faire un test-t pour un échantillon sur ces données à niveau 5%.
- La figure suivante montre quelle est la vraie probabilité d'erreur de type I (qu'on pense être de 5%) en fonction de la corrélation intra-groupe pour différentes valeurs de la taille des groupes m.



Inflation de l’erreur de type I pour les données corrélées

- Il est frappant de voir à quel point la probabilité d’erreur de type I augmente rapidement avec la corrélation et qu’elle augmente d’autant plus vite que le nombre d’observations par groupe est grand.
- La conclusion tirée du test-t n’est pas valide si on ne tient pas compte de la corrélation intra-groupe.
- La distortion du niveau illustre que l’inférence statistique n’est généralement plus valide lorsqu’elle découle d’une méthode supposant l’indépendance entre les observations et que ce n’est pas vérifiée.