

MATH 60604
Modélisation statistique
§ 6c - Modèles linéaires mixtes

Léo Belzile

HEC Montréal
Département de sciences de la décision

Introduction aux modèles à effets aléatoires

Les modèles à effets aléatoires permettent d'inclure une corrélation intra-groupe et de faire des prédictions par groupe en plus d'inclure un effet de groupe au niveau de la population.

- La principale caractéristique des **modèles linéaires mixtes** est de permettre l'inclusion d'**effets aléatoires**, soit des paramètres qui varient d'un groupe à l'autre (ou d'une personne à l'autre pour les données répétées).
- Bien que l'on permette à chaque groupe d'avoir un effet différent, la moyenne de ces effets est nulle.

Modèles avec effets aléatoires

- Lorsque une variable explicative est modélisée à l'aide d'un effet aléatoire, on suppose que l'effet total de cette variable est une combinaison de:
 1. un effet commun à toute la population
 2. un effet propre aux sujets d'un groupe.
- Par exemple, dans le cas de mesures répétées sur des individus, l'effet d'une variable pourrait être formé d'un effet commun à tous les individus de la population et d'un effet unique et différent pour chaque individu.
- Dans notre exemple sur la mobilisation des employés d'une unité, l'effet de l'ancienneté pourrait être formé d'un effet commun à tous les employés de l'entreprise et d'un effet unique et différent pour chaque unité.

Modèle linéaire mixte (formulation hiérarchique)

Le modèle linéaire mixte s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i \mid \mathcal{B}_i = \mathbf{b}_i &\sim \text{No}_{n_i}(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i, \mathbf{R}_i) \\ \mathcal{B}_i &\sim \text{No}_q(\mathbf{0}_q, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned}$$

- La réponse du groupe i , \mathbf{Y}_i suit une loi normale conditionnellement aux **effets aléatoires** \mathcal{B}_i .
- On appelle désormais les coefficients $\boldsymbol{\beta}$ associés à la matrice du modèle \mathbf{X}_i des **effets fixes**.

Modèle linéaire mixte: effets fixes

On peut écrire le modèle linéaire mixte comme

$$[\mathbf{Y}_i \mid \mathcal{B}_i = \mathbf{b}_i] = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

où

- $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})^\top$ est le vecteur de taille n_i contenant les réponses du groupe i .
- \mathbf{X}_i est la matrice $n_i \times (p + 1)$ de variables explicatives du groupe i , dont la ie ligne est $\mathbf{X}_{ij} = (1, X_{ij1}, \dots, X_{ijp})^\top$.
 - La première colonne correspond à l'ordonnée à l'origine (vecteur de uns).
 - Les autres colonnes de \mathbf{X}_i encodent chacune une variable explicative.
- $\boldsymbol{\beta}$ est le $(p + 1)$ vecteur d'effets **fixes**.

Modèles linéaires mixtes: effets aléatoires

On peut écrire le modèle linéaire mixte comme

$$[\mathbf{Y}_i \mid \mathcal{B}_i = \mathbf{b}_i] = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

où

- \mathbf{Z}_i est une matrice $n_i \times q$ qui contient un **sous-ensemble** des colonnes de \mathbf{X}_i .
 - Les colonnes de \mathbf{Z}_i sont associées aux **effets aléatoires**.
 - S'il n'y a pas d'effet aléatoire, $q = 0$ et on recouvre le modèle linéaire usuel.
- $\mathcal{B}_i = \mathbf{b}_i$ est un q vecteur d'effets aléatoires propres au groupe i
- ε_i est un n_i vecteur d'erreurs pour le groupe i .

Forme générale pour les modèles mixtes

Dans le modèle linéaire mixte, à la fois \mathbf{B}_i et ε_i sont des vecteurs aléatoires. On suppose que

- les effets aléatoires \mathbf{B}_i et \mathbf{B}_j ($i \neq j$) sont indépendants entre eux.
- les effets aléatoires \mathbf{B}_i sont indépendants des erreurs ε_j .
- les aléas ε_i sont indépendants les uns des autres et ne dépendent pas des variables explicatives.
- à la fois \mathbf{B}_i et ε_i ont espérance zéro

$$E(\mathbf{B}_i) = \mathbf{0}_{n_i}, \quad E(\varepsilon_i | \mathbf{X}_i) = \mathbf{0}_{n_i}$$

Moyenne et variance conditionnelles et marginales

On spécifie des modèles de covariance pour les effets aléatoires et les erreurs,

$$\text{Cov}(\mathbf{B}_i) = \mathbf{\Omega}, \quad \text{Cov}(\varepsilon_i) = \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, m$$

La moyenne et la variance **conditionnelles** de \mathbf{Y}_i sont

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i \mid \mathbf{X}_i, \mathbf{B}_i = \mathbf{b}_i) = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i \mathbf{b}_i, \quad \text{Cov}(\mathbf{Y}_i \mid \mathbf{X}_i, \mathbf{B}_i = \mathbf{b}_i) = \mathbf{R}_i$$

tandis que la moyenne et la variance **marginales** de \mathbf{Y}_i sont

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i \mid \mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}, \quad \text{Cov}(\mathbf{Y}_i \mid \mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{\Omega} \mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i.$$

Paramètres d'un modèle mixte

Les paramètres du modèle à estimer sont

- le vecteur d'effets fixes, β
- les paramètres ψ de la covariance marginale Σ de \mathbf{Y} , qui découle de la structure de covariance des aléas et des effets aléatoires.

Effets groupes aléatoires

- Avec un modèle linéaire mixte, la moyenne conditionnelle $E(Y_{ij} \mid \mathbf{X}_i, \mathbf{b}_i)$ peut être interprétée comme une **prédiction** de la valeur de Y_{ij} après avoir pris en compte les effets spécifiques à un groupe.
- Quand on ajoute un effet aléatoire pour une variable groupe, on peut toujours estimer l'effet de variables fixes dans ce groupe.

Prédiction

- On peut prédire \mathcal{B}_i par sa moyenne conditionnelle sachant \mathbf{Y}_i ,

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}_i \mid \mathbf{Y}_i) = \mathbf{\Omega} \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \beta)$$

où

$$\mathbf{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{\Omega} \mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i.$$

- On peut remplacer (ψ, β) par leurs estimés $(\hat{\psi}, \hat{\beta})$ pour obtenir une prédiction de l'effet aléatoire

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \hat{\mathbf{\Omega}} \mathbf{Z}_i^\top \hat{\mathbf{\Sigma}}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta})$$

Effet fixe ou aléatoire?

- Il n'y a pas de consensus sur la définition d'effets fixes et aléatoires...
- De manière générale, la différence entre les deux est
 - les **effets fixes** sont utilisés quand on a peu de groupes et beaucoup de valeurs au sein de chaque groupe. On s'intéresse à l'effet au sein du groupe (m petit, n_i grands).
 - les **effets aléatoires** sont employés dans les cas de figure où il y a suffisamment de niveaux et de variabilité pour estimer de manière fiable la variance de l'effet aléatoire; on ne s'intéresse pas au niveau du groupe (m grand, n_i petit, variabilité).