

- 3.1 On considère trois modèles de régression emboîtés afin de modéliser le nombre d'accidents de voiture selon la région (region). La variable catégorielle niveaux de risque (risque) a 3 niveaux et le nombre d'années d'expérience (expe) au volant est un facteur à 4 niveaux.

Modèle	variables	$p+1$	$\ell(\hat{\beta})$	AIC	BIC
M ₁	risque	3	-244.566	495.132	510.362
M ₂	risque + region	★	-151.620	★	★
M ₃	risque + region + expe	10	-139.734	299.468	350.235

Table 1: Mesures d'adéquation de trois modèles emboîtés avec les covariables, le nombre de coefficients du modèle ($p+1$), la valeur de la log-vraisemblance évaluée au maximum de vraisemblance ($\ell(\hat{\beta})$) et les critères d'information.

Quelle est la différence entre le AIC et le BIC du modèle M₂ (en valeur absolue)?

- 3.2 Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si sa fonction de masse est

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, \dots$$

- Écrivez la vraisemblance et la log-vraisemblance d'un échantillon aléatoire de taille n si les observations sont indépendantes.
 - Dérivez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre p .
 - Calculez l'information observée.
 - Supposons qu'on a un échantillon de 15 observations, $\{5, 6, 3, 7, 1, 2, 11, 8, 7, 34, 1, 7, 10, 1, 0\}$, dont la somme est 103. Calculez l'estimé du maximum de vraisemblance et son erreur-type approximative.
 - Calculez la statistique du rapport de vraisemblance et la statistique de Wald pour un test à niveau 5% de l'hypothèse $\mathcal{H}_0: p_0 = 0.1$ contre l'alternative bilatérale $\mathcal{H}_a: p_0 \neq 0.1$.
- 3.3 On considère le temps avant défaillance de machines sur la base de leur niveau de corrosion w . Spécifiquement, le temps avant défaillance, T , est modélisé à l'aide d'une loi exponentielle de densité $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, mais d'intensité $\lambda = aw^b$; si $b = 0$, le temps de défaillance moyen est constant et vaut $E(T_i) = a^{-1}$. On suppose que les n observations sont indépendantes et que les niveaux de corrosion w_i sont supposés connus (donc fixes). [Coles (2001)]

- Écrivez la log-vraisemblance du modèle
- Dérivez les matrices d'informations observées et de Fisher.
- Montrez que la log-vraisemblance profilée pour b est

$$\ell_p(b) = n \ln(\hat{a}_b) + b \sum_{i=1}^n \ln(w_i) - \hat{a}_b \sum_{i=1}^n w_i^b t_i,$$

et dérivez une formule explicite pour l'estimateur du maximum de vraisemblance partiel \hat{a}_b .