

Données manquantes et régression multinomiale

Analyse multidimensionnelle appliquée

Léo Belzile

HEC Montréal

- Les données manquantes réduisent la quantité d'information disponible et augmentent l'incertitude.
- On ne peut pas les ignorer (étude des cas complets) sans biaiser les interprétations et réduire la quantité d'information disponible.
- On considère des méthodes d'imputation qui remplacent les valeurs manquantes.

Plusieurs champs d'une base de donnée peuvent être manquants

- non-réponse
- valeurs erronées (erreur d'encodage)
- perte de suivi et censure
- plusieurs versions de formulaires (question optionnelles)

Pourquoi s'en préoccuper?

La plupart des procédures ne gèrent que les cas complets (toute observation avec des valeurs manquantes est éliminée).

Les données manquantes réduisent l'information disponible.

Sans traitement adéquat, les estimations seront biaisées.

- van Buuren, S. (2018). Flexible imputation of missing data, CRC Press, 2e édition.
- Little, R. et D. Rubin (2019). Statistical Analysis with Missing Data, Wiley, 3e édition
- Schafer, J. L. (1997). Analysis of Incomplete Multivariate Data. Chapman & Hall / CRC.

Les valeurs manquantes dans un contexte de prédictions sont couvertes dans le cours MATH 6O6OO.

Cas 1: Données manquantes de façon complètement aléatoire (missing completely at random)

La probabilité que la valeur soit manquante ne dépend ni de la valeur, ni de celles des autres variables.

Exemple: questionnaire trop long, la personne ne répond pas à tout (sans lien avec les questions posées).

Hypothèse souvent irréaliste en pratique.

Cas 2: données manquantes de façon aléatoire (missing at random): la probabilité que la valeur soit manquante ne dépend pas de la valeur une fois qu'on a contrôlé pour les autres variables.

Exemple: les hommes sont plus susceptibles dans l'ensemble de divulguer leur âge que les femmes.

Cas 3: données manquantes de façon non-aléatoire (missing not at random): la probabilité que la mesure soit manquante dépend de la valeur elle-même, pas déterminable avec d'autres variables

Exemple: une personne transgenre ne répond pas à la question genre (si seulement deux choix, homme/femme) et aucune autre question ne se rattache au genre ou à l'identité sexuelle.

Comment déterminer le type de données manquantes

Une personne ne divulgue pas son salaire? Données manquante de manière aléatoire ou non aléatoire?

Hypothèse pas testable, dépend du contexte et des variables auxiliaires disponibles.

Les données manquantes ont souvent une valeur logique:

- un client qui n'a pas de carte de crédit a un solde de 0!

D'où l'importance des validations d'usage et du nettoyage préliminaire de la base de données.

Types de schémas de données manquantes

Matrice $n \times p$ (observations en lignes, variables en colonnes).

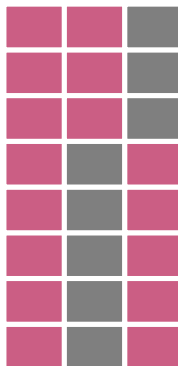
unidimensionnel



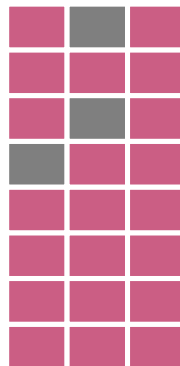
monotone



appariement



général



Les cases grises représentent des valeurs manquantes. Illustration adapté de la Figure 4.1 de van Buuren (2022)

Retirer les observations avec données manquantes pour conserver les cas complets.

- Valide uniquement pour complètement aléatoire.
- On perd de la précision en utilisant moins d'observations.

Méthode par défaut dans les logiciels.

Imputation: remplacer les valeurs manquantes par une valeur judicieuse pour combler les trous.

Le concept d'imputation est à la fois séduisant et dangereux.
(Dempster et Rubin, 1983)

Par exemple, on remplacer la valeur manquante par la moyenne (variables continues) ou le mode (variables catégorielles).

Approche pas recommandée (pourquoi?)

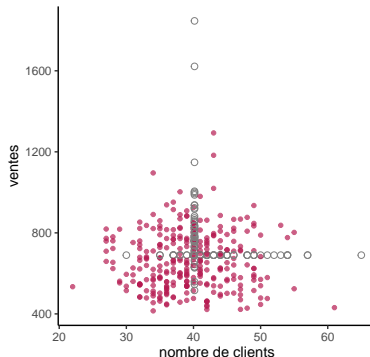
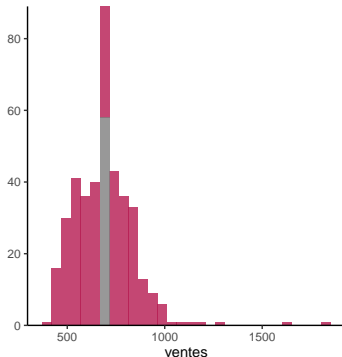
Faut-il toujours imputer?

Il faut utiliser son jugement.

Une observation imputée ne remplacera jamais une vraie observation.

- Si la proportion d'observations manquantes est petite (moins de 5%), on pourrait faire une analyse avec les cas complets (et valider au besoin en utilisant l'imputation multiple).
- Si la proportion de valeurs manquantes est 30% et que cette proportion baisse à 3% lorsque vous éliminez quelques variables peu importantes pour votre étude, alors procédez à leur élimination.

Dilution de la relation (corrélation) entre variables explicatives.
Réduction de la variabilité.



- Les données manquantes réduisent la quantité d'information disponible et augmentent l'incertitude.
- On ne peut pas les ignorer (étude des cas complets) sans biaiser les interprétations et réduire la quantité d'information disponible.
- On distingue plusieurs types de mécanismes qui génèrent des données manquantes.
- Nous couvrirons les méthodes d'imputation dans le cadre de la régression logistique.

Considérons le cas d'une régression logistique pour une variable explicative binaire.

Plutôt que d'assigner à la classe la plus probable, une prédiction aléatoire simule une variable 0/1 avec probabilité $(1 - \hat{p}_i, \hat{p}_i)$.

```
1 pred <- 0.3 #probabilité de succès  
2 rbinom(n = 15, size = 1, prob = pred)
```

```
[1] 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0
```

On ne tient pas compte du fait que des valeurs ont été remplacées (on fait comme si c'était de vraies observations).

On sous-évalue encore une fois la variabilité des données

- les écarts-type des estimations sont trop petits.

Inspection des valeurs manquantes

Il est donc nécessaire d'examiner la configuration des valeurs manquantes avant de faire quoi que ce soit.

```
1 data(manquantes, package = 'hecmulti')
2 summary(manquantes)
3 # Pourcentage de valeurs manquantes
4 apply(manquantes, 2, function(x){mean(is.na(x))})
5 # Voir les configurations de valeurs manquantes
6 md.pattern(manquantes) # graphique diapo suivante
```

Table 1: Nombre et pourcentage de valeurs manquantes par variable.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	y
nombre	192	49	0	184	0	0	0
pourcentage	38.4	9.8	0	36.8	0	0	0

Configuration des valeurs manquantes

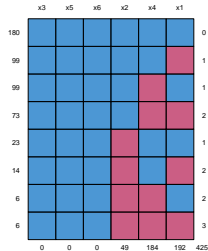
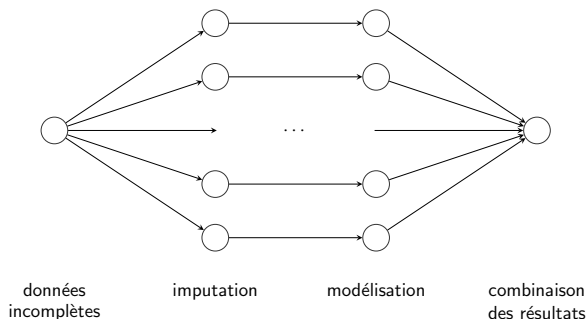


Figure 1: Configurations des valeurs manquantes pour manquantes.

Imputation multiple

Valides pour les données manquantes de manière aléatoire et complètement aléatoires (MAR et MCAR).

1. Procéder à plusieurs imputations aléatoires pour obtenir un échantillon complet (*mice*)
2. Ajuster le modèle d'intérêt avec chaque échantillon (*with*).
3. Combiner les résultats obtenus (*pool* et *summary*)



Considérons un seul paramètre θ (ex: coefficient d'une régression) et supposons qu'on procède à K imputations.

On estime les paramètres du modèle séparément pour chacun des K ensembles de données imputés, disons

- $\hat{\theta}_k$ pour l'estimation du paramètre θ dans l'échantillon k et
- $\hat{\sigma}_k^2 = \text{Va}(\hat{\theta}_k)$ pour l'estimation de la variance de $\hat{\theta}_k$.

L'estimation finale de θ , dénotée $\hat{\theta}$, est obtenue tout simplement en faisant la moyenne des estimations de tous les modèles, c'est-à-dire,

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\theta}_1 + \dots + \hat{\theta}_K}{K}.$$

Une estimation ajustée de la variance de $\hat{\theta}$ est

$$\text{Va}(\hat{\theta}) = W + \frac{K+1}{K}B,$$

où

$$W = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^2 = \frac{\hat{\sigma}_1^2 + \dots + \hat{\sigma}_K^2}{K},$$

$$B = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k - \hat{\theta})^2.$$

- W est la moyenne des variances (variance intra-groupe) et
- B la variance des moyennes (variance inter-groupe).

Des formules analogues existent pour les degrés de liberté, les valeurs- p , etc. ainsi que pour la cas multidimensionnel (plusieurs paramètres).

Si on procédait à une seule imputation (même en ajoutant une part d'aléatoire pour essayer de reproduire la variabilité des données), on ne serait pas en mesure d'estimer la variance inter-groupe de l'estimateur.

On peut estimer la fraction de l'information manquante sur θ avec $(1 + 1/K)B/Va(\hat{\theta})$.

Imputation multiple par équations chaînées (MICE)

Avec p variables X_1, \dots, X_p , spécifier un ensemble de modèles conditionnels pour chaque variable X_j en fonction de

- toutes les autres variables, X_{-j}
 - les valeurs observées pour cette variable, $X_{j,obs}$
1. Initialisation: remplir les trous avec des données au hasard parmi $X_{j,obs}$ pour $X_{j,man}$
 2. À l'itération t , pour chaque variable $j = 1, \dots, p$, à tour de rôle:
 - a) tirage aléatoire des paramètres $\phi_j^{(t)}$ du modèle pour $X_{j,man}$ conditionnel à $X_{-j}^{(t-1)}$ et $X_{j,obs}$
 - b) échantillonnage de nouvelles observations $X_{j,man}^{(t)}$ du modèle avec paramètres $\phi_j^{(t)}$ conditionnel à $X_{-j}^{(t-1)}$ et $X_{j,obs}$
 3. Répéter le cycle

Imputation multiple avec mice

```
1 library(mice)
2 # Intensif en calcul, réduire "m" si nécessaire
3 impdata <- mice(
4   data = manquantes,
5   # argument "method" pour le modèle
6   # dépend du type des variables, par ex.
7   # régression logistique pour données binaires
8   m = 50, # nombre d'imputations
9   seed = 60602, # germe aléatoire
10  printFlag = FALSE)
11 # Extraite une copie (m=1,..., 50) imputée
12 complete(data = impdata,
13           action = 1) #no de la copie
```

```
1 # ajuste le modèle avec les données imputées
2 adj_im <- with(
3   data = impdata,
4   expr = glm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6,
5             family = binomial))
6 # combinaison des résultats
7 fit <- pool(adj_im)
8 summary(fit)
```

terme	estimation	erreur-type	stat	ddl	valeur-p
(Intercept)	-2.86	1.08	-2.65	327.28	0.009
x12	-0.90	0.58	-1.55	172.63	0.124
x13	-0.53	0.59	-0.90	164.98	0.372
x14	-0.76	0.55	-1.39	241.12	0.166
x15	-0.58	0.64	-0.91	176.76	0.365
x22	-0.03	0.44	-0.07	403.25	0.944
x23	-0.65	0.49	-1.34	353.29	0.181
x24	-2.60	0.65	-4.00	271.66	<1e-04
x25	-1.32	0.72	-1.84	283.49	0.066
x3	1.61	0.31	5.19	300.31	<1e-04
x4	2.56	0.42	6.14	185.05	<1e-04
x5	0.11	0.02	5.27	436.59	<1e-04
x62	-1.41	0.37	-3.83	408.17	1e-04
x63	-2.58	0.41	-6.24	399.50	<1e-04

- Les données manquantes réduisent la quantité d'information disponible et augmentent l'incertitude.
- On ne peut pas les ignorer (étude des cas complets) sans biaiser les interprétations et réduire la quantité d'information disponible.
- Pour bien capturer l'incertitude et ne pas modifier les relations entre variables, il faut utiliser une méthode aléatoire.
- Avec l'algorithme MICE, on utilise un modèle conditionnel pour chaque variable à tour de rôle

L'imputation multiple est préférée à l'imputation simple car elle permet d'estimer l'incertitude sous-jacente en raison des données manquantes.

- On procède à l'imputation plusieurs fois (avec un modèle conditionnel, prédictions différentes chaque fois)
- on crée plusieurs copies
- ajuste le modèle sur chacune et
- combine les résultats

Traitement spécial pour erreurs-type, degrés de liberté, valeurs- p et intervalles de confiance.

On considère une variable réponse catégorielle avec $K \geq 2$ modalités.

Objectif: modéliser la probabilité de chaque catégorie de la variable réponse.

Soit la probabilité d'appartenir à la modalité k ,

$$p_{ik} = \Pr(Y_i = k \mid \mathbf{X}_i), \quad (k = 1, \dots, K).$$

La somme des probabilités, $p_{i0} + \dots + p_{iK}$, vaut 1.

Comme avec la régression logistique, on fixe une catégorie de référence (disons 1) et on modélise le log de la cote de chacune des autres catégories par rapport à cette référence,

$$\ln \left(\frac{p_{ij}}{p_{i1}} \right) = \eta_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{i1} + \dots + \beta_{pj}x_{ip}, \quad (j = 2, \dots, K).$$

- Avec K modalités et p variables explicatives, on obtiendra $(K - 1) \times (p + 1)$ paramètres à estimer, en incluant l'ordonnée à l'origine.

L'interprétation des paramètres se fait comme en régression logistique sauf qu'il faut y aller équation par équation.

On peut aussi exprimer le modèle en termes des probabilités,

$$\begin{aligned} p_{ik} &= \Pr(Y_i = k \mid X_i) \\ &= \frac{\exp(\eta_{ik})}{1 + \exp(\eta_{i2}) + \cdots + \exp(\eta_{iK})}, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

où η_{ij} est le prédicteur linéaire de l'individu i pour le log de la cote de $Y_i = j$ versus la référence $Y_i = 1$. On fixe $\eta_{i1} = 0$.

Les données de cet exemple sont tirées d'un sondage Ipsos réalisé pour le site de nouvelles FiveThirtyEight.

La base de données `vote` contient 5837 observations avec les pondérations associées.

Nous allons modéliser l'intention de vote, `catvote` à l'aide d'une régression logistique multinomiale.

Analyse exploratoire

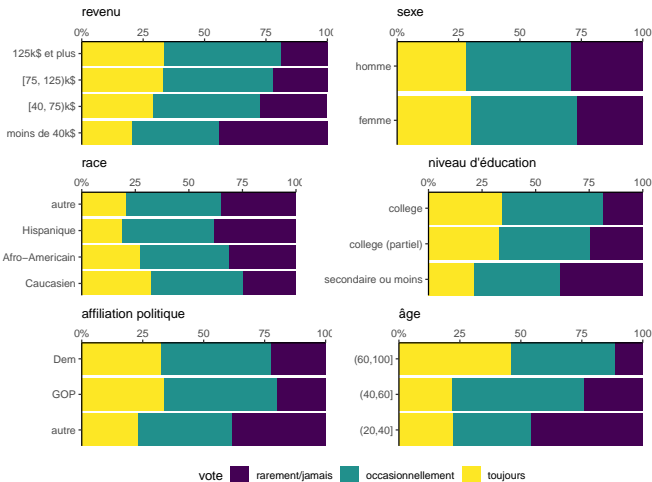


Figure 2: Proportion des modalités des variables sociodémographiques des données de participation électorale.

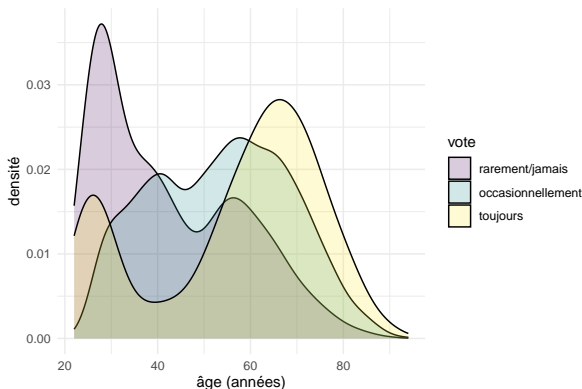


Figure 3: Fréquence de vote selon l'âge.

Notez le comportement des jeunes voteurs (bimodal). Ces personnes n'ont souvent eu qu'une seule occasion de voter...

Ajustement du modèle

La fonction `multinom` du paquet `nnet` ajuste le modèle multinomial logistique.

```
1 data(vote, package = "hecmulti")
2 levels(vote$catvote)
```

```
[1] "rarement/jamais" "occasionnellement" "toujours"
```

```
1 # Modèle multinomial
2 multi1 <- nnet::multinom(
3   catvote ~ age + sexe + race + revenu +
4   educ + affiliation,
5   data = vote,           # base de données
6   subset = age > 30,     # sous-ensemble des données
7   weights = poids,      # poids de sondage
8   trace = FALSE)        # infos sur convergence
```

```
1 # Tableau résumé de l'ajustement
2 summary(multi1)
3 # Estimations des coefficients
4 coef(multi1)
5 # Intervalles de confiance (Wald)
6 confint(multi1)
7 # Critères d'information
8 AIC(multi1)
9 BIC(multi1)
10 # Prédiction: probabilité de chaque modalité
11 predict(multi1, type = "probs")
12 # Prédiction: classe la plus susceptible
13 predict(multi1, type = "class")
```

Comparaison de modèles emboîtés

Le modèle avec uniquement l'ordonnée à l'origine possède $K - 1$ paramètres. Il retourne comme probabilité prédite la proportion empirique de chaque catégorie.

```
1 multi0 <- nnet::multinom(catvote ~ 1,  
2                           weights = poids,  
3                           subset = age > 30,  
4                           data = vote,  
5                           trace = FALSE)  
6 # Test de rapport de vraisemblance  
7 anova(multi0, multi1)
```

Resid. df	Resid. Dev	Test	Df	LR stat.	Pr(Chi)
9692	9781.07				
9668	8504.74	1 vs 2	24	1276.33	0

Pour un profil X_i donné, on peut

- calculer chacun des $K - 1$ prédicteurs linéaires $\hat{\eta}_{i2}, \dots, \hat{\eta}_{iK}$.
- écrire $p_{ik} = p_{i1} \exp(\hat{\eta}_{ik})$ (formule de la cote)
- substituer cette mesure dans l'équation $p_{i1} + \dots + p_{iK} = 1$
- isoler la prédiction numérique pour p_{i1} .
- en déduire les probabilités de succès de chaque modalité de Y .

Exemple au tableau

La prédiction du modèle est une probabilité pour chacune des K modalités.

On peut toujours classer les événements

- avec $K - 1$ points de coupure...
- ou assigner à la modalité la plus probable

Avec les prédictions, on peut comparer les observations et les prédictions à l'aide d'une matrice de confusion $K \times K$.

- Le taux de bonne classification est toujours valide
- Il existe des extensions multidimensionnelles de l'aire sous la courbe

- Contrairement à la régression logistique, le nombre de paramètres augmente rapidement avec le nombre de variables explicatives, p .
- Il y a moins d'information pour estimer les paramètres qu'une régression linéaire: prévoir de plus grandes tailles d'échantillon.
- Attention aux modalités à faible fréquence et à la répartition des variables explicatives au sein des différentes modalités.

Outre la régression multinomiale logistique, on peut également considérer la régression logistique cumulative à cotes proportionnelles.

- modèle plus parcimonieux que le modèle multinomial logistique,
- mais au prix de postulats supplémentaires...

En R, la variable réponse doit être de classe `ordered`, un facteur dont les niveaux sont ordonnés en ordre croissant.

```
1 class(hecmulti::vote$catvote)
```

```
[1] "ordered" "factor"
```

- Soit p_1, \dots, p_K les probabilités associées aux événements $Y = 1, \dots$
- On définit les points de coupure pour les K classes,

$$-\infty = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_K = \infty.$$

- Il y a $K - 1$ paramètres ζ à déduire pour identifier les probabilités puisque $p_1 + \dots + p_K = 1$.

Le modèle logistique à cote proportionnelle spécifie $K - 1$ équations logistiques; pour $k = 1, \dots, K - 1$,

$$\ln \left(\frac{\Pr(Y_i > k \mid X_i)}{\Pr(Y_i \leq k \mid X_i)} \right) = -\zeta_k + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip}.$$

- Les paramètres associés aux variables explicatives, β_1, \dots, β_p sont les mêmes pour chacune des log-cotes
- mais il y a une ordonnée à l'origine différente par rapport de cote, $-\zeta_k$.

On considère la cote de $\Pr(Y_i > k \mid X_i)$ versus $\Pr(Y_i \leq k \mid X_i)$, qui mesure à quel point il est plus probable que Y_i prenne une valeur supérieure à k par rapport à une valeur inférieure ou égale à k , avec

Pour chaque augmentation d'une unité de X_j , cette cote est multipliée par $\exp(\beta_j)$, peu importe la valeur de Y (cote proportionnelle).

Table 2: Tableau des estimations des coefficients du modèle pour réponses ordinales pour la régression logistique à cotes proportionnelles avec sexe.

effet	coefficient	erreur-type
sexe [homme]	-0.166	0.055
cst [rarement jamais occasionnellement]	-1.297	0.044
cst [occasionnellement toujours]	0.865	0.044

Les hommes de plus de 30 ans sont moins susceptibles de voter fréquemment que les femmes.

La cote catégorie plus fréquente de vote (vs moins fréquente) pour les hommes est $\exp(-0.166) = 0.847$ fois celle des femmes, soit une diminution de 15.3% de la cote.

Pour simplifier, on utilise uniquement `sexe` comme variable explicative.

```
1 # with(vote, is.ordered(catvote))
2 multi2a <- MASS::polr(
3   catvote ~ sexe,
4   data = vote,
5   subset = age > 30,
6   weights = poids,
7   method = "logistic",
8   Hess = TRUE)
9 summary(multi2a)
```

```
1 # IC pour beta_x (vraisemblance profilée)
2 confint(multi2a)
3 # On peut obtenir les intervalles de Wald
4 # avec confint.default (PAS RECOMMANDÉ)
5
6 # Critères d'information
7 AIC(multi2a); BIC(multi2a)
8 # Tableau des coefficients
9 # Coefficients (variables explicatives)
10 coef(multi2a)
11 # Négatif de l'ordonnée à l'origine:
12 multi2a$zeta
```

Si on écrit les équations pour la cote, on obtient

$$\frac{\Pr(Y = \text{rarement} \mid \text{sexe})}{\Pr(Y \geq \text{occasionnellement} \mid \text{sexe})} = \exp(-0.166\text{sexe} + 1.297)$$
$$\frac{\Pr(Y \leq \text{occasionnellement} \mid \text{sexe})}{\Pr(Y = \text{toujours} \mid \text{sexe})} = \exp(-0.166\text{sexe} - 0.865).$$

En terme de probabilité cumulée d'excéder k ,

$$\Pr(Y_i > k \mid \mathbf{X}_i) = \text{expit}(-\eta_k + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip}), \quad k = 1, \dots$$

En utilisant ces expressions, on peut obtenir la probabilité de chaque catégorie,

$$\Pr(Y_i = k \mid \mathbf{X}_i) = \Pr(Y_i > k \mid \mathbf{X}_i) - \Pr(Y_i > k - 1 \mid \mathbf{X}_i).$$

- Soit $p_1 = \Pr(Y = \text{rarement/jamais} \mid \text{femme})$, etc.
- On a $\text{expit}(\zeta_k)$ ($k = 0, \dots, K$) qui donne 0, 0.215, 0.704 et 1.
- Les différences donnent $\hat{p}_1 = 0.215$, $\hat{p}_2 = 0.489$ et $\hat{p}_3 = 0.296$.
- Un rapide calcul numérique montre que c'est bien ce que retourne les prédictions.

```
1 predict(multi2a,  
2         newdata = data.frame(sexe = factor("femme")),  
3         type = "probs")
```

Une des hypothèses de ce modèle est que les effets des variables explicatives sont les mêmes pour chaque équation.

- \mathcal{H}_0 : l'effet de chaque variable est le même pour les K logit du modèle .

Une très petite valeur- p (rejet de \mathcal{H}_0) pour ce test serait une indication que le modèle multinomial logistique serait préférable.

Test de rapport de vraisemblance

Ce test compare les deux modèles emboîtés, avec

- hypothèse nulle \mathcal{H}_0 : modèle cumulatif à cotes proportionnelles, avec $p + K - 1$ paramètres
- hypothèse alternative \mathcal{H}_a : modèle multinomial, avec $(K - 1) \times (p + 1)$ paramètres

```
1 multi2b <- nnet::multinom(catvote ~ sexe,  
2   data = vote, subset = age > 30,  
3   weights = poids, trace = FALSE)  
4 # Valeur-p du test de rapport de vraisemblance  
5 pchisq(q = deviance(multi2a) - deviance(multi2b),  
6   df = length(coef(multi2a)),  
7   lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.7886889
```

Le modèle sous \mathcal{H}_0 semble être une simplification adéquate.

Si on ajuste plutôt le modèle avec uniquement age, la valeur- p est inférieure à 10^{-5} : le modèle cumulatif à cote proportionnelles ne serait pas une simplification adéquate.

On peut également effectuer des tests pour déterminer la significativité

- la significativité globale (ordonnée à l'origine vs modèle complet)
- l'effet d'une variable explicative (modèle complet, moins une variable)

Comparaison des prédictions

Prédictions pour le modèle avec uniquement age comme variable explicative.

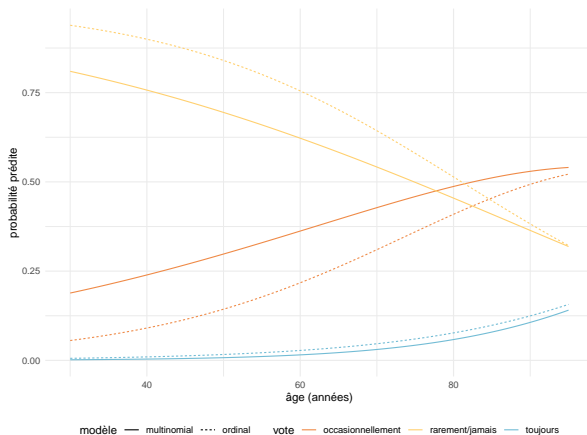


Figure 4: Probabilités prédites pour chaque modalité selon l'âge.

- La régression multinomiale logistique pour une variable catégorielle à K niveaux est une extension directe de la régression logistique pour données binaires
 - la somme des probabilités vaut 1.
 - il y a $K - 1$ équations de cote en termes des variables explicatives,
 - donc le nombre de paramètres croît rapidement.

On met beaucoup l'accent sur l'interprétation des coefficients à l'échelle de la cote.

- rapports de cote = modèle multiplicatif: la cote de catégorie k vs référence est multipliée par $\exp(\beta_{jk})$ pour chaque augmentation de X_j d'une unité.
- les coefficients manquants (cote de $Y = k$ vs $Y = l$) peut être déduits par des manipulations algébriques.

Les outils usuels d'inférence pour les modèles estimés par maximum de vraisemblance sont applicables.

- intervalles de confiance (Wald ou vraisemblance profilée)
- tests de rapport de vraisemblance
- critères d'information

Côté classification, on va règle générale assigner à la classe la plus probable.

- il existe des équivalents multidimensionnels directs à ce qu'on a couvert (matrice de confusion, taux de bonne classification, gain, etc.)
- certains concepts (sensibilité, spécificité, fonction d'efficacité du récepteur) ne sont en revanche pas applicables ou n'ont pas d'équivalent.

Le modèle cumulatif à cote proportionnelle est une simplification du modèle multinomial pour des données ordinales.

- On suppose que l'effet des variables est le même pour la cote de la survie de chaque modalité.
- Moins de paramètres, mais postulat à vérifier (via test de rapport de vraisemblance).