

# Régression logistique

## Analyse multidimensionnelle appliquée

Léo Belzile

HEC Montréal

L'exemple suivant est inspiré de l'article

Daneshvary, R. et Schwer, R. K. (2000) The Association Endorsement and Consumers' Intention to Purchase. Journal of Consumer Marketing 17, 203-213.

Objectif: Les auteurs cherchent à voir si le fait qu'un produit soit recommandé par le Professional Rodeo Cowboys Association (PRCA) a un effet sur les intentions d'achats.

On dispose de 500 observations sur les variables suivantes dans la base de données `logit1`:

- $Y$ : seriez-vous intéressé à acheter un produit recommandé par le PRCA
  - ☐ 0: non
  - ☐ 1: oui
- $X_1$ : quel genre d'emploi occupez-vous?
  - ☐ 1: à la maison
  - ☐ 2: employé
  - ☐ 3: ventes/services
  - ☐ 4: professionnel
  - ☐ 5: agriculture/ferme
- $X_2$ : revenu familial annuel
  - ☐ 1: moins de 25 000
  - ☐ 2: 25 000 à 39 999
  - ☐ 3: 40 000 à 59 999
  - ☐ 4: 60 000 à 79 999
  - ☐ 5: 80 000 et plus

- $X_3$ : sexe
  - ☐ 0: homme
  - ☐ 1: femme
- $X_4$ : avez-vous déjà fréquenté une université?
  - ☐ 0: non
  - ☐ 1: oui
- $X_5$ : âge (en années)
- $X_6$ : combien de fois avez-vous assisté à un rodéo au cours de la dernière année?
  - ☐ 1: 10 fois ou plus
  - ☐ 2: entre six et neuf fois
  - ☐ 3: cinq fois ou moins

Expliquer le comportement de la moyenne d'une variable binaire  $Y \in \{0, 1\}$  en utilisant un modèle de régression avec  $p$  variables explicatives  $X_1, \dots, X_p$ .

$$\begin{array}{ccccc} E(Y = 1 \mid X) & = & \Pr(Y = 1 \mid X) & = & p \\ \text{moyenne théorique} & & \text{probabilité de succès} & & \end{array}$$

- 1) Inférence : comprendre comment et dans quelles mesures les variables  $X$  influencent la probabilité que  $Y = 1$ .
- 2) Prédiction : développer un modèle pour prévoir des valeurs de  $Y$  ou la probabilité de succès à partir des  $X$ .

- Est-ce qu'un client potentiel va répondre favorablement à une offre promotionnelle?
- Est-ce qu'un client est satisfait du service après-vente?
- Est-ce qu'un client va faire faillite ou non au cours des trois prochaines années.

Ce cours est consacré à l'estimation et l'interprétation des paramètres du modèle dans le cas binaire.

Par convention, on désigne le résultat « 1 » par un succès et « 0 » par un échec.



# Modéliser une probabilité avec une régression linéaire?

Mauvaise idée!

- Sans contrainte, on peut obtenir des probabilités négatives ou supérieures à 1!
- les données binaires ne respectent pas le postulat d'égalité des variances
  - invalide les résultats des tests d'hypothèse pour les coefficients.

# Illustration: linéaire vs logistique

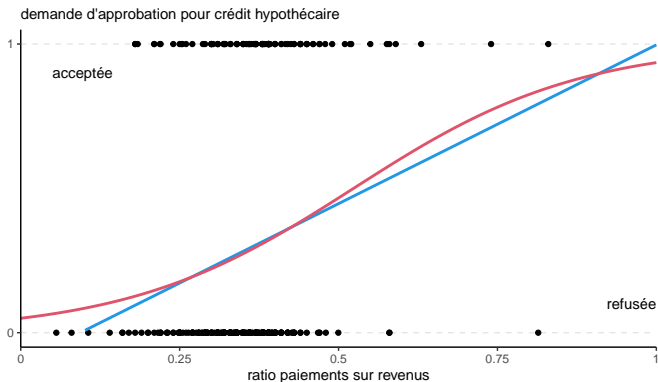


Figure 1: Données de la réserve de Boston sur l'approbation de prêts hypothécaires (1990); données tirées de Stock et Watson (2007).

Idée: appliquer une transformation au prédicteur linéaire

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p$$

pour que la prédiction soit entre zéro et un.

On considère

$$p = \text{expit}(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)} = \frac{1}{1 + \exp(-\eta)}.$$

# Courbe sigmoïde

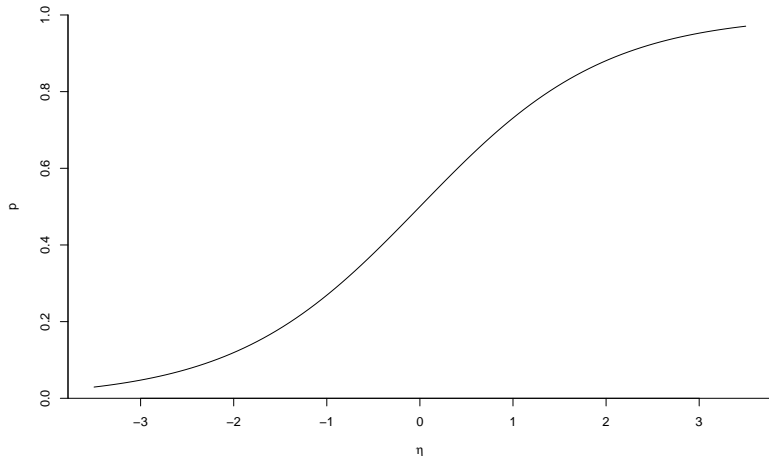


Figure 2: Valeurs ajustées du modèle de régression logistique en fonction du prédicteur linéaire  $\eta$ .

La fonction `glm` dans R ajuste un modèle linéaire généralisé (par défaut, Gaussien pour régression linéaire).

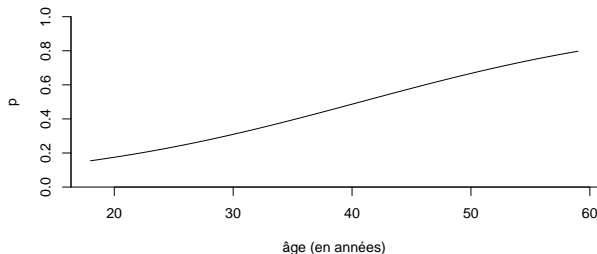
- L'argument `family=binomial(link="logit")` permet de spécifier que l'on ajuste un modèle logistique.

```
1 data(logit1, package = "hecmulti")
2 # Ajustement du modèle avec toutes
3 # les variables explicatives
4 modele1 <- glm(formula = y ~ .,
5                 family = binomial(link = "logit"),
6                 data = logit1)
```

Tableau résumé avec les coefficients (`summary`)

```
1 summary(modele1)
```

Par défaut, pour des variables 0/1, le modèle décrit la probabilité de succès.



Si le coefficient  $\beta_j$  de la variable  $X_j$  est positif, alors plus la variable augmente, plus  $\Pr(Y = 1)$  augmente.

Quelques propriétés de la fonction exponentielle:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$
- $\exp(ab) = \exp(a)^b$

Quelques propriétés de la fonction logarithmique

- $\ln(1) = 0,$
- $\ln(\exp(x)) = x$  (fonction inverse)
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$



Si on applique la transformation inverse, on obtient

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p.$$

ou, en prenant l'exponentielle de chaque côté,

$$\text{cote} = \frac{p}{1-p} = \exp(\beta_0) \cdots \exp(\beta_p X_p)$$

Modèle multiplicatif pour la cote.

La cote est utilisée dans les paris sportifs

$$\text{cote}(p) = \frac{p}{1-p} = \frac{\Pr(Y = 1 \mid X)}{\Pr(Y = 0 \mid X)}.$$

Table 1: Cote et probabilité de succès

$p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
cote	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	4	9

Le modèle ajusté en termes de cote est

$$\frac{\Pr(Y = 1 \mid X_5 = x_5)}{\Pr(Y = 0 \mid X_5 = x_5)} = \exp(-3.05) \exp(0.0749x_5).$$

- Lorsque  $x_5$  augmente d'une année, la cote est multipliée par  $\exp(0.0749) = 1.078$  peu importe la valeur de  $x_5$ .
- Pour deux personnes dont la différence d'âge
  - est d'un an, la cote de la personne plus âgée est 7.8% plus élevée
  - est de 10 ans, la cote de la personne plus âgée est 112% plus élevée (cote multipliée par  $\exp(10 \times 0.0749) = 1.078^{10} = 2.12$ )

# Modèle complet

On considère le modèle avec toutes les variables explicatives:

```
1 modele2 <- glm(  
2   formula = y ~ .,  
3   data = logit1,  
4   family = binomial)  
5 exp(coef(modele2))
```

(Intercept)	x12	x13	x14	x15
0.062	0.438	0.512	0.509	0.699
x23	x24	x25	x3	x4
0.572	0.087	0.264	3.854	6.236
x62	x63			
0.255	0.090			

Si on a plusieurs variables explicatives, les coefficients sont interprétés en modifiant une variable à la fois.

On compare deux profils identiques, sauf pour la variable en question

- toute chose étant égale par ailleurs
- *ceteris paribus*

Variable continue:

- La cote de la personne plus âgée d'un an est 1.116 fois celle de la personne plus jeune, ceteris paribus, une augmentation de 11,6%

Le rapport de cote pour les femmes ( $x_3=1$ ) versus les hommes ( $x_3=0$ ) est de  $\exp(\hat{\beta}_{x_3}) = 3.854$ :

- les femmes sont plus susceptibles de suivre les recommandations d'achat toute chose étant égale par ailleurs,
- Inversement, le rapport de cote homme/femme est de  $1/3.854=0.259$ ,

On peut donc conclure que:

- la cote des femmes est 285.4% plus élevée que celle des hommes.
- la cote des hommes est 74.1% inférieure à celle des femmes.

Toutes les comparaisons sont effectuées avec la catégorie de référence.

Pour  $x_1$ , c'est à la maison. Le rapport de cote est

$$\frac{\text{cote}\{Y \mid x_1 = 2(\text{employé}), \dots\}}{\text{cote}\{Y \mid x_1 = 1(\text{maison}), \dots\}} = \exp(\hat{\beta}_{x_1=2}) = 0.438$$

Le coefficient pour  $x_1 = 1$  est zéro, d'où  $\exp(\hat{\beta}_{x_1=1}) = 1$  (absent du tableau).

On peut ordonner les type d'emploi selon la probabilité de succès à l'aide des coefficients: ceteris paribus on obtient le classement

- employé < professionnel < ventes/service < agriculture < maison.



Si on voulait le rapport de cote professionnel vs employé, inutile de réajuster le modèle.

On peut calculer

$$\frac{\frac{\text{cote}(Y \mid X_1 = 4, \dots)}{\text{cote}(Y \mid X_1 = 1, \dots)}}{\frac{\text{cote}(Y \mid X_1 = 2, \dots)}{\text{cote}(Y \mid X_1 = 1, \dots)}} = \frac{\exp(\hat{\beta}_{X_1=4})}{\exp(\hat{\beta}_{X_1=2})} = 1.162746$$

plutôt que de changer la catégorie de référence via

```
1 logit2 <- logit1 |>
2   mutate(x1 = relevel(x1, ref = 2))
```

Pour un modèle probabiliste donné, on peut calculer la « probabilité » d'avoir obtenu les données de l'échantillon.

Si on traite cette « probabilité » comme une fonction des paramètres, on l'appelle vraisemblance.

Maximum de vraisemblance: valeurs des paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance.

- on cherche les valeurs des paramètres qui rendent les données les plus plausibles

La vraisemblance d'une observation  $Y_i \in \{0, 1\}$  (loi Bernoulli/binomiale) est

$$L(\beta; y_i) = p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} = \begin{cases} p_i & y_i = 1(\text{succès}) \\ 1 - p_i & y_i = 0(\text{échec}) \end{cases}$$

et où

$$p_i = \text{expit}(\eta_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip})}.$$

- Si les observations sont indépendantes, la probabilité conjointe d'avoir un résultat donné est le produit des probabilités pour chaque observation.
- Il n'y a pas de solution explicite pour  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_p$  dans le cas de la régression logistique: il faut maximiser la vraisemblance.

- Pour des raisons de stabilité numérique, on maximise le logarithme naturel  $\ell(\beta) = \ln L(\beta)$  de la log vraisemblance conjointe de l'échantillon (transformation monotone croissante).
- La log vraisemblance est simplement la somme des contributions individuelles.
- On utilise la log vraisemblance  $\ell$  comme mesure d'ajustement et pour construire des tests d'hypothèse.

Des estimations des coefficients  $\hat{\beta}$  découlent une estimation de  $\Pr(Y = 1)$  pour les valeurs  $X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p$  d'un individu donné,

$$\hat{p} = \text{expit}(\hat{\beta}_0 + \dots + \hat{\beta}_p x_p).$$

Un modèle avec uniquement l'ordonnée à l'origine retournera  $\hat{p}$ , la proportion empirique de succès.

Comme pour la régression linéaire, c'est la moyenne des observations.

Pour les modèles ajustés par maximum de vraisemblance.

Comparaison de modèles emboîtés

- Modèle complet (sous l'alternative) avec tous les paramètres
- Modèle restreint (sous l'hypothèse nulle) sur lequel on impose  $k \leq p$  restrictions (typiquement  $\beta_j = 0, j \in \{1, \dots, p\}$ ).





Comparons un modèle avec et sans  $X_6$ .

Variable catégorielle à trois niveaux (deux coefficients associés à  $I(X_6 = 2)$  et  $I(X_6 = 3)$ ).

```
1 modele2 <- glm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6,  
2               data = hecmulti::logit1,  
3               family = binomial(link = "logit"))  
4 modele3 <- glm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5,  
5               data = hecmulti::logit1,  
6               family = binomial(link = "logit"))
```

On test l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0 : \beta_{x_6=2} = \beta_{x_6=3} = 0$  (soit  $k = 2$  restrictions).

L'hypothèse alternative est qu'au moins un des coefficients est non-nul.

Si la valeur  $p$  est inférieure au seuil de signification, typiquement  $\alpha = 0.05$ , on rejette l'hypothèse nulle.

- on conclut que la variable explicative  $X_6$  améliore significativement l'ajustement du modèle.

Le test est basé sur la statistique

$$D = -2\{\ell(\hat{\beta}_0) - \ell(\hat{\beta})\}.$$

Cette différence  $D$ , lorsque l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est vraie, suit approximativement une loi khi-deux  $\chi_k^2$ .

# Exemple de test

```
1 # modèle 2 (alternative), modèle 3 (nulle)
2 anova(modele3, modele2, test = "LR")
```

## Analysis of Deviance Table

Model 1:  $y \sim x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

Model 2:  $y \sim x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

	Resid. Df	Resid. Dev	Df	Deviance	Pr(>Chi)
1	488	566.45			
2	486	516.20	2	50.251	1.225e-11 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
1 ## Deviance = -2*log vraisemblance
2 rvrais <- modele3$deviance - modele2$deviance
3 pchisq(rvrais, df = 2, lower.tail = FALSE) # valeur-p
```

```
[1] 1.225046e-11
```

# Tester la significativité des variables

Si un paramètre n'est pas significativement différent de 0, cela veut dire qu'il n'y a pas de lien significatif entre la variable et la réponse une fois que les autres variables sont dans le modèle.

```
1 car::Anova(modele2, type = "3")
```

Analysis of Deviance Table (Type III tests)

Response: y

	LR	Chisq	Df	Pr(>Chisq)
x1	4.291	4		0.3681
x2	32.912	4		1.245e-06 ***
x3	29.878	1		4.601e-08 ***
x4	42.957	1		5.597e-11 ***
x5	36.731	1		1.356e-09 ***
x6	50.251	2		1.225e-11 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

On peut aussi considérer des intervalles de confiance pour les coefficients individuels.

Ceux obtenus par défaut dans R sont appelés intervalles de confiance de vraisemblance profilée.

```
1 confint(modele2)      # IC pour beta
2 exp(confint(modele2)) # IC pour exp(beta)
```

Ces intervalles sont invariants aux reparamétrisation: si  $[b_i, b_s]$  est l'intervalle de vraisemblance profilée pour  $\beta$ , l'intervalle pour  $\exp(\beta)$  est simplement  $[\exp(b_i), \exp(b_s)]$ .

# Intervalles de confiance

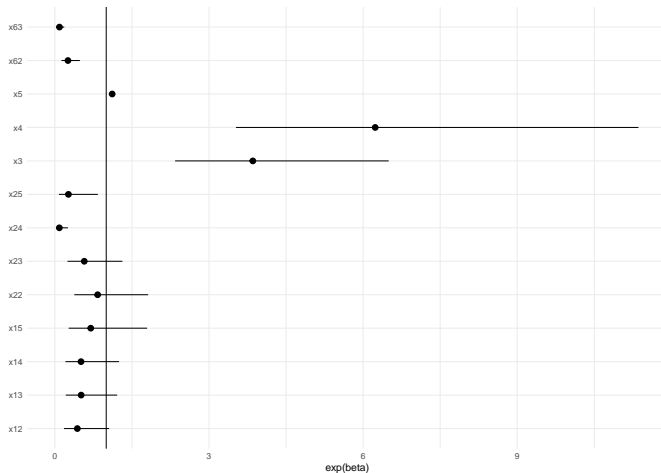


Figure 3: Intervalles de confiance profilés de niveau 95% pour les coefficients du modèle logistique (échelle exponentielle).

Comme  $\exp(\cdot)$  est une transformation monotone croissante,

$$\beta > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exp(\beta) > 1.$$

Si la valeur postulée, par exemple  $\mathcal{H}_0 : \beta_j = 0$  ou  $\exp(\beta_j) = 1$ , est dans l'intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$ , on ne rejette pas l'hypothèse nulle.



# Coefficients pour données complètes

Table 2: Modèle logistique avec toutes les variables catégorielles.

variables	cote <sup>1</sup>	IC 95% <sup>1</sup>	valeur-p
x1			0.4
1	—	—	
2	0.44	0.18, 1.06	
3	0.51	0.21, 1.21	
4	0.51	0.21, 1.25	
5	0.70	0.27, 1.80	
x2			<0.001
1	—	—	
2	0.83	0.38, 1.82	
3	0.57	0.25, 1.31	
4	0.09	0.03, 0.25	
5	0.26	0.08, 0.84	
x3			<0.001
0	—	—	
1	3.85	2.34, 6.50	

<sup>1</sup>cote = rapport de cote, IC = intervalle de confiance

Table 3: Modèle logistique avec toutes les variables catégorielles.

variables	cote <sup>1</sup>	IC 95% <sup>1</sup>	valeur-p
x4			<0.001
0	–	–	
1	6.24	3.53, 11.4	
x5	1.12	1.08, 1.16	<0.001
x6			<0.001
1	–	–	
2	0.25	0.13, 0.49	
3	0.09	0.04, 0.18	

<sup>1</sup>cote = rapport de cote, IC = intervalle de confiance

Il est difficile de départager l'effet individuel d'une variable explicative lorsqu'elle est fortement corrélée avec d'autres.

La multicollinéarité ne dépend pas de la variable réponse  $Y$ , mais de la matrice  $X$  du modèle.

Mêmes diagnostics qu'en régression linéaire: considérer les facteurs d'inflation de la variance (`car::vif`).

```
1 car::vif(modele2)
```

	GVIF	Df	$GVIF^{(1/(2*Df))}$
x1	1.698464	4	1.068457
x2	1.852841	4	1.080139
x3	1.450100	1	1.204201
x4	1.491202	1	1.221148
x5	1.219334	1	1.104234
x6	1.179133	2	1.042055

Pas d'inquiétude ici, coefficients faibles (inférieurs à 5)

Si  $Y$  est continue et qu'on cherche à estimer  $\Pr(Y > c \mid X)$  pour une valeur  $c$  donnée, il n'est pas recommandé de dichotomiser  $Y$  via

$$Y^* = \begin{cases} 1, & Y > c; \\ 0, & Y \leq c. \end{cases}$$

et d'ajuster une régression logistique.

Pourquoi? On perd de l'information.

On peut estimer plutôt une régression linéaire et prendre

$$\Pr(Y > c \mid X) = \Phi \left( \frac{\hat{\mu} - c}{\hat{\sigma}} \right),$$

où

- $\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \dots + \beta_p X_p$  est la moyenne prédite pour le profil donné,
- $\hat{\sigma}$  est l'estimation de l'écart-type
- $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale standard (pnorm)

- Une régression logistique sert à modéliser la moyenne de variables catégorielles, typiquement binaires.
- C'est un cas particulier d'un modèle de régression linéaire généralisée (GLM)

Le modèle est interprétable à l'échelle de la cote

- La cote donne le rapport probabilité de réussite (1) sur probabilité d'échec (0)
- Interprétation en terme de
  - pourcentage d'augmentation si  $\exp(\hat{\beta}) > 1$ , avec  $\exp(\hat{\beta}) - 1$ .
  - pourcentage de diminution si  $\exp(\hat{\beta}) < 1$ , avec  $1 - \exp(\hat{\beta})$



- Estimation par maximum de vraisemblance
- Tests d'hypothèse comparent modèles emboîtés
  - loi nulle asymptotique  $\chi^2$
  - degrés de liberté égal au nombre de restrictions
- Intervalles de confiance de vraisemblance profilée
  - invariants aux reparamétrisations