

El modelo de Fitzhugh-Nagumo

Neurodinámica... ¡Piensa rápido!

A. Aceves

R. Reynoso

`https://github.com/UriAceves`

`https://github.com/Ricardo08`

2 de diciembre de 2014

Resumen

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

1 Introducción

2 Modelo de FitzHugh-Nagumo

3 Puntos de equilibrio

4 Bifurcación y disparos

5 Resultados

6 Impacto

7 Bibliografía



Introducción

Modelo de FitzHugh- Nagumo

Puntos de equilibrio

Bifurcación y disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Introducción

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- El cerebro humano tiene aproximadamente 10^{11} neuronas.
- Típicamente una neurona recibe impulsos de alrededor de otras 10,000 debido a la sinapsis.



Introducción

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- El cerebro humano tiene aproximadamente 10^{11} neuronas.
- Típicamente una neurona recibe impulsos de alrededor de otras 10,000 debido a la sinapsis.
- Las neuronas son excitables porque están cerca de una transición, llamada bifurcación, que se da al pasar del "reposo" a una actividad de "spiking" sostenida.
- Existen únicamente cuatro tipos de mecanismos de bifurcación tales que producen esa transición.



Modelo de Hodgkin–Huxley

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



- En 1952 proponen Hodgkin y Huxley un modelo matemático, donde ¡la comunicación neuronal es un sistema dinámico!.
- El cual les da en 1963 el premio Nobel en fisiología.



Modelo de Hodgkin–Huxley

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



- En 1952 proponen Hodgkin y Huxley un modelo matemático, donde ¡la comunicación neuronal es un sistema dinámico!.
- El cual les da en 1963 el premio Nobel en fisiología.
- Sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias con cuatro grados de libertad, acopladas.



Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

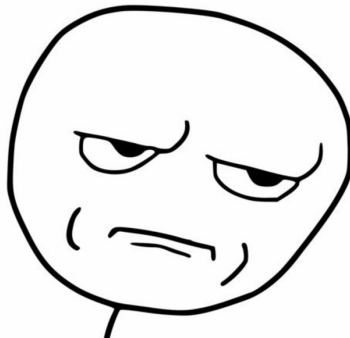
Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

NO.



Modelo de FitzHugh-Nagumo

Introducción

Modelo de FitzHugh-Nagumo

Puntos de equilibrio

Bifurcación y disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- En 1961 Fitzhugh propone su modelo como una solución alterna al sistema de ecuaciones que se presenta en Hodgkin–Huxley.
- Nagumo hace el circuito equivalente un año después.



Modelo de FitzHugh-Nagumo

Introducción

Modelo de FitzHugh-Nagumo

Puntos de equilibrio

Bifurcación y disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- En 1961 Fitzhugh propone su modelo como una solución alterna al sistema de ecuaciones que se presenta en Hodgkin–Huxley.
- Nagumo hace el circuito equivalente un año después.
- Sistema de dos dimensiones de ecuaciones diferenciales ordinarias, acopladas.



Sistema de ecuaciones diferenciales

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x - \frac{x^3}{3} + I, \\ \dot{y} &= -x + a - by,\end{aligned}\quad (1)$$

¿Quién es quién?

- I : Corriente "externa"
- x : Excitabilidad
- y : Variable que devuelve al sistema a un estado "base"
- b : Conductividad de la neurona
- a : Permeabilidad química de la membrana

Relación empírica

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

a y b son parámetros determinados experimentalmente que cumplen la siguiente desigualdad:

$$0 < \frac{3}{2}(1 - a) < b < 1,$$



Relación empírica

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

a y b son parámetros determinados experimentalmente que cumplen la siguiente desigualdad:

$$0 < \frac{3}{2}(1 - a) < b < 1,$$

Así que las parejas de parámetros que no cumplen esa desigualdad llevan a soluciones no realistas.



¿Qué pasa en un punto de equilibrio?

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

Una neurona inactiva, cuyo potencial de la membrana está en reposo. No hay cambios de estado en la neurona. Todas las corrientes internas que despolarizan a la neurona están en equilibrio con las corrientes externas que la hiperpolarizan. Dependiendo de la respuesta que tenga la neurona a pequeños cambios se determinará el tipo de punto de equilibrio.



Encontrando los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

Cargando...



Equilibrio

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 = y + x - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} &= 0 = -x + a - by,\end{aligned}\quad (2)$$



¿Dónde está?



Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

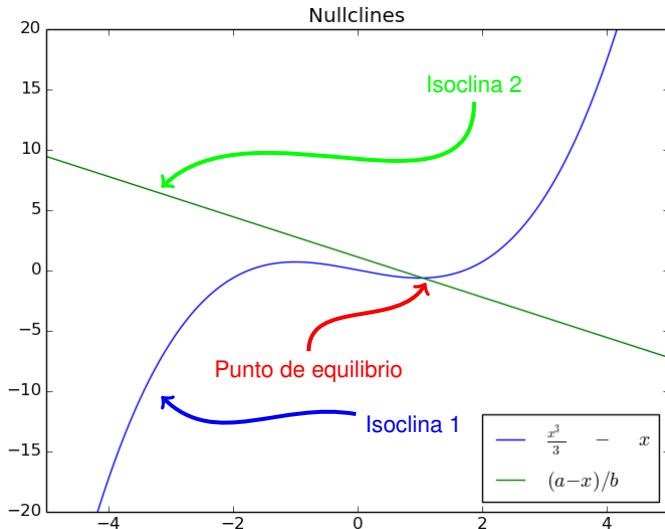
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

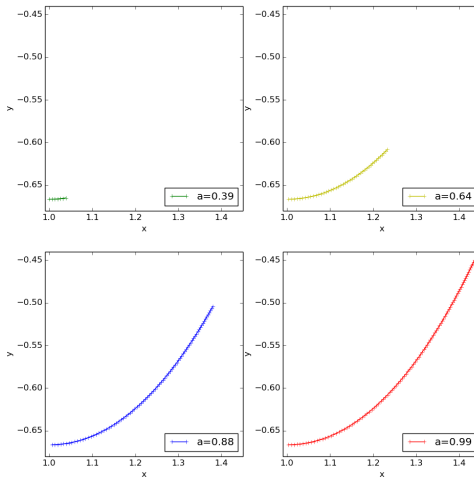
Impacto

Bibliografía



Encontrando los puntos de equilibrio

Resolvemos el sistema de ecuaciones para cada a . Cada una tendrá asociado un conjunto de puntos de equilibrio.



Variación monótonica relacionada con /

Poniendo todo sobre una misma gráfica se obtiene:

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

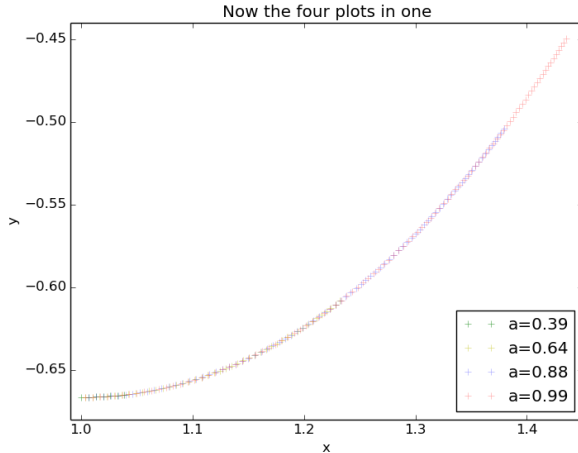
Impacto

Bibliografía



Variación monótonica relacionada con /

Poniendo todo sobre una misma gráfica se obtiene:



Prueba χ^2 de Pearson

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- La malla limita cuántos puntos de equilibrio encontramos.
- Ajustamos una curva a la distribución de puntos para extrapolar.



Prueba χ^2 de Pearson

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- La malla limita cuántos puntos de equilibrio encontramos.
- Ajustamos una curva a la distribución de puntos para extrapolar.
- Para ver qué tan bueno es el ajuste hacemos una prueba χ^2 donde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

- Aproximación buena. Menos de 0.5% de error.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

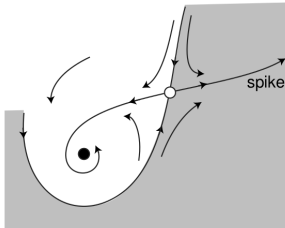
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué ocurre cuando
apagamos I?

- Los eigenvalores siempre son complejos con parte real negativa, entonces el punto de equilibrio será un atractor.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

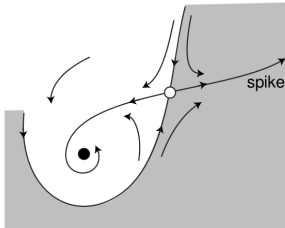
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué ocurre cuando
apagamos I?

- Los eigenvalores siempre son complejos con parte real negativa, entonces el punto de equilibrio será un atractor.
- Esto significa que las neuronas inactivas no se excitarán a menos de que se rompa el equilibrio entre las corrientes internas y externas.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

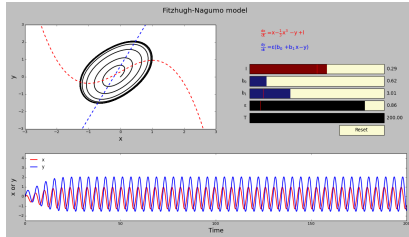
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué ocurre cuando $I \neq 0$?

- Para corrientes negativas los puntos de equilibrio se vuelven fuentes.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

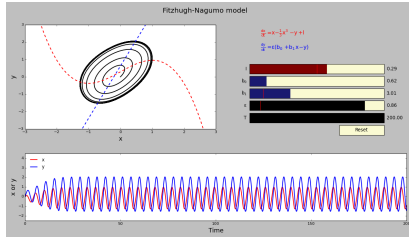
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué ocurre cuando $I \neq 0$?

- Para corrientes negativas los puntos de equilibrio se vuelven fuentes.
- Esto significa que las neuronas con cualquier cambio en su potencial se dispararán.



Clasificación de los puntos de equilibrio

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

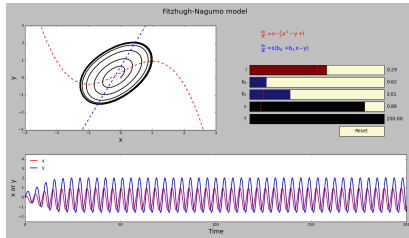
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué ocurre cuando $I \neq 0$?

- Para corrientes negativas los puntos de equilibrio se vuelven fuentes.
- Esto significa que las neuronas con cualquier cambio en su potencial se dispararán.
- ¡Se observan las bifurcaciones!



Disparos

Introducción

Modelo de FitzHugh-Nagumo

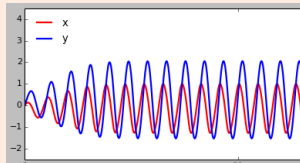
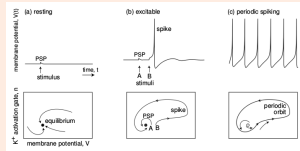
Puntos de equilibrio

Bifurcación y disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué son los disparos?

- La neurona recibe impulsos de otras (sinapsis), estos producen una corriente transmembrana eléctrica que alteran el potencial de la membrana.
- El cambio brusco y transitorio del voltaje de la membrana se propaga a otras neuronas a través del axón.



Bifurcación

Introducción

Modelo de FitzHugh-Nagumo

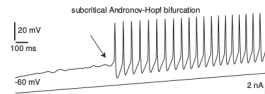
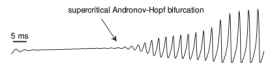
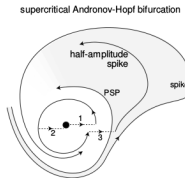
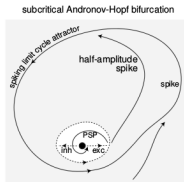
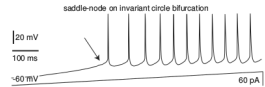
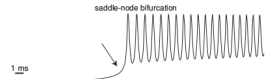
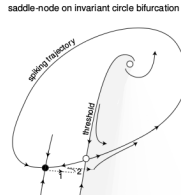
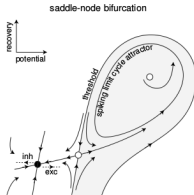
Puntos de equilibrio

Bifurcación y disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Cíclos límite

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

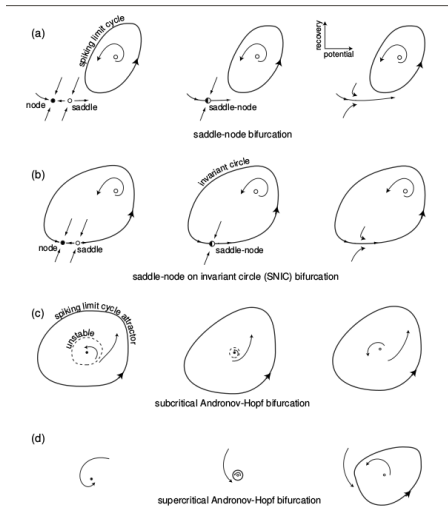
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Bifurcación de Andronov-Hopf

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

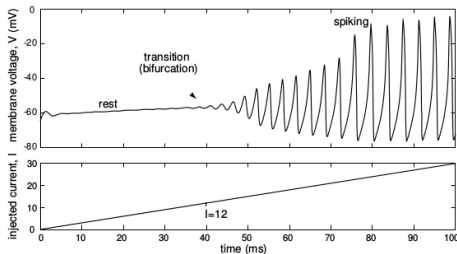
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué está ocurriendo?

Cerca de las bifurcaciones subcríticas o supercríticas de Andronov-Hopf las neuronas tienden a amortiguar las oscilación de los potenciales y actuar como resonadores. El aumento de la frecuencia puede retrasar o incluso suprimir su respuesta.



Análisis del plano fase

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

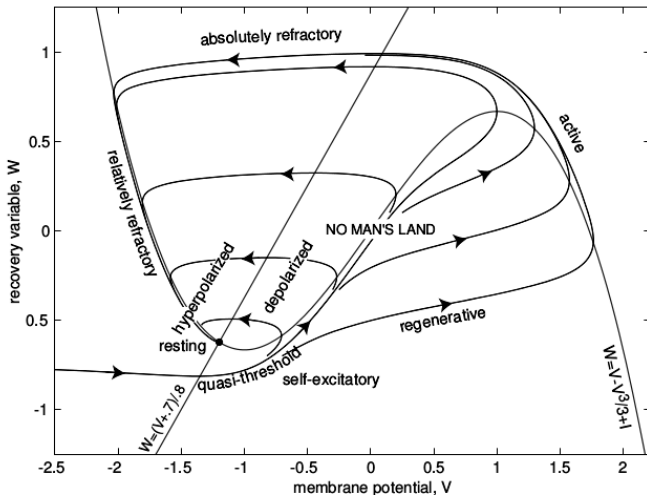
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



¿Qué hace que las neuronas se disparen?

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

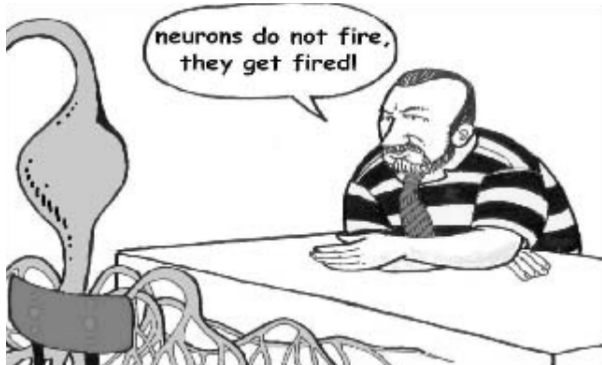
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Disparo de neuronas

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- La señal de salida puede causar inhibición o excitación.
- Si las señales que recibe una neurona exceden cierto valor, entonces causa que dispare un potencial de acción.
- Potencial de membrana neuronal común $\approx -70\text{mv}$.
- Transporte de iones.



Mecanismo

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

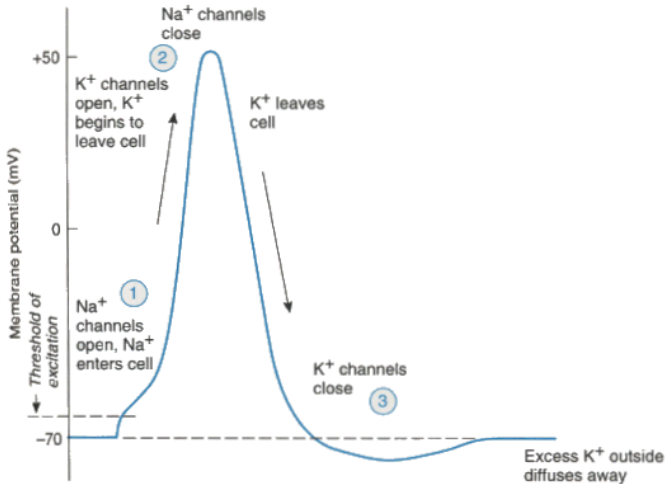
Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



Integración

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

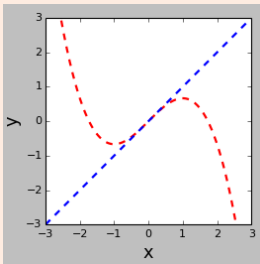
Resultados

Impacto

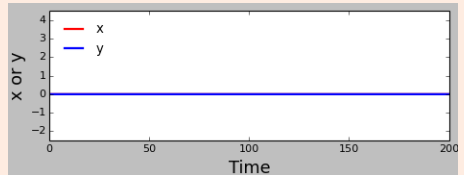
Bibliografía



Espacio fase



Actividad



Corriente externa $0 < I < 1$ ($I = 0.19$)

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

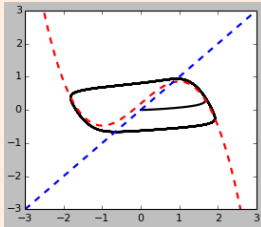
Bifurcación y
disparos

Resultados

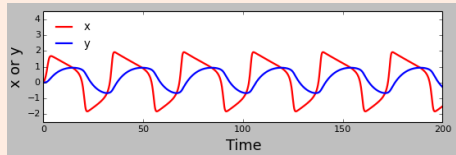
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



Corriente externa $-1 > I > 0$ ($I = -0.18$)

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

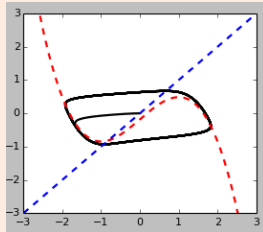
Bifurcación y
disparos

Resultados

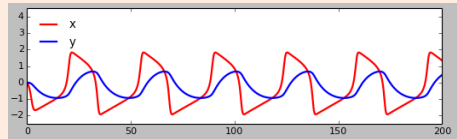
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



¿Qué pasa si la corriente externa es más grande ($I > 1$)?

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

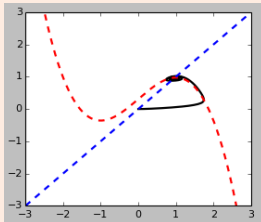
Bifurcación y
disparos

Resultados

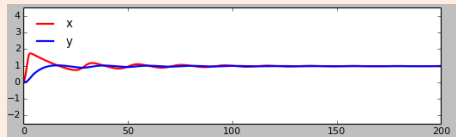
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



¿Qué pasa si la corriente externa es más grande ($|I| > 1$)?

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

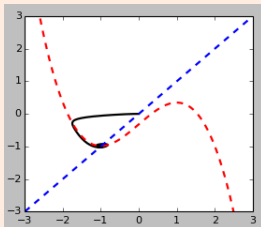
Bifurcación y
disparos

Resultados

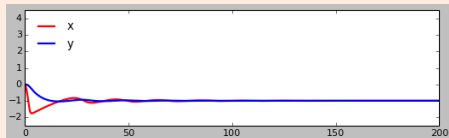
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



Jugando con el parámetro a ($I = 0.19$)

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

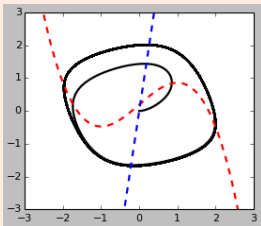
Bifurcación y
disparos

Resultados

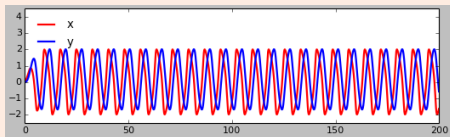
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



¿Y si movemos b ?

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

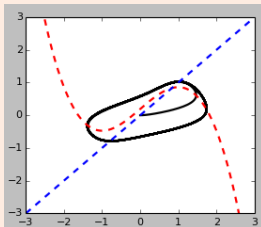
Bifurcación y
disparos

Resultados

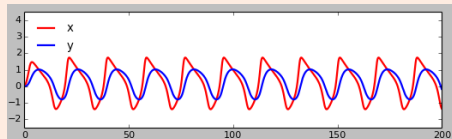
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



¿Y si movemos b ? Parte II

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

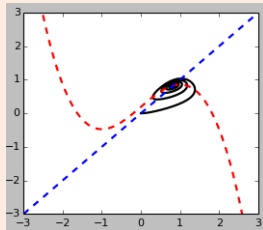
Bifurcación y
disparos

Resultados

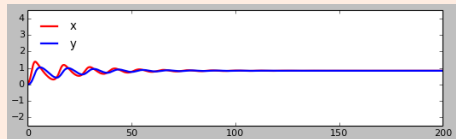
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



Variando a y b

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

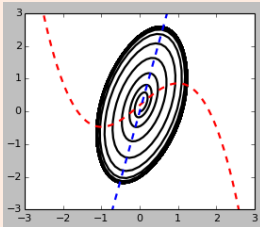
Bifurcación y
disparos

Resultados

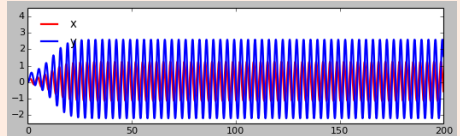
Impacto

Bibliografía

Espacio fase



Actividad



El modelo de FitzHugh-Nagumo en la historia

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- Modelo arquetípico de un sistema excitable.
- Causó que una gran cantidad de matemáticos, físicos e ingenieros entraran en la rama de la neurobiología.
- Ha sido utilizado exitosamente en modelos de dinámica cardiaca.
- Ha sido usado en el diseño de aparatos optoelectrónicos.
- Ayuda en la implementación de algunos aparatos electrónicos que muestran comportamientos similares.



Bibliografía

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- Hodgkin, A. L.; Huxley, A. F. (1952) *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*. The Journal of physiology 117 (4): 500–544.
- FitzHugh R. (1961) *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*. Biophysical J. 1:445–466.
- Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S. (1962) *An active pulse transmission line simulating nerve axon*. Proc. IRE. 50:2061–2070.



Bibliografía

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2003.
- Eugene M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience*, The MIT Press, 2007.
- N.A. Carlson, *Foundations of Physiological Psychology*. Needham Heights, 1992.
- <https://github.com/UriAceves/Neurodynamics>
- Y citando a un profesor:



Bibliografía

Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía

- Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2003.
- Eugene M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience*, The MIT Press, 2007.
- N.A. Carlson, *Foundations of Physiological Psychology*. Needham Heights, 1992.
- <https://github.com/UriAceves/Neurodynamics>
- Y citando a un profesor:
¡Google es su amigo!



Introducción

Modelo de
FitzHugh-
Nagumo

Puntos de
equilibrio

Bifurcación y
disparos

Resultados

Impacto

Bibliografía



