

# TD 5 6 7

Lea Beudin

January 24, 2021

## Abstract

## Contents

<b>1</b>	<b>Partie 1 - Densités risque neutre</b>	<b>1</b>
1.1	Obtention d'un vecteur de volatilité . . . . .	1
1.2	Techniques d'Interpolation . . . . .	2
1.3	la formule de Breeden-Litzenberger et la technique de Shimko . .	4
<b>2</b>	<b>Partie 2 - Interpolation et volatilité stochastique fractionnaire</b>	<b>8</b>
2.1	Nappe de volatilité . . . . .	8
2.2	modèle à volatilité stochastique . . . . .	9
2.3	Nappe de volatilité de volatilité . . . . .	11
2.4	Nappe de Hurst . . . . .	13
2.5	Nappe de Volatilité amélioraton . . . . .	13
2.6	Calibration d'une nappe avec les 3 paramètres . . . . .	15
2.7	UB Formula . . . . .	17
2.8	UB . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Partie 3 - Comparaison Recuit simulé et Nelder Mead</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

## 1 Partie 1 - Densités risque neutre

### 1.1 Obtention d'un vecteur de volatilité

Première étape, on transforme le vecteur de strike en un vecteur de volatilité implicite avec la formule de Black and Scholes (BS).

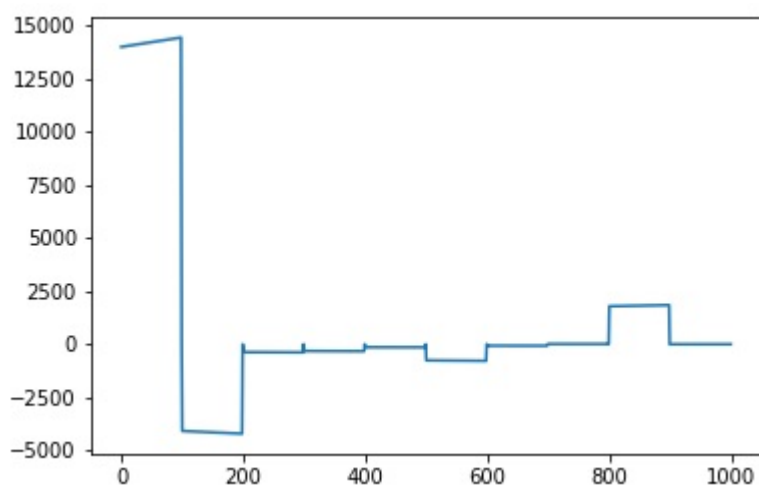
95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
12.40	9.59	8.28	7.40	6.86	6.58	6.52	6.49	6.47	6.46

On obtient le vecteur suivant :

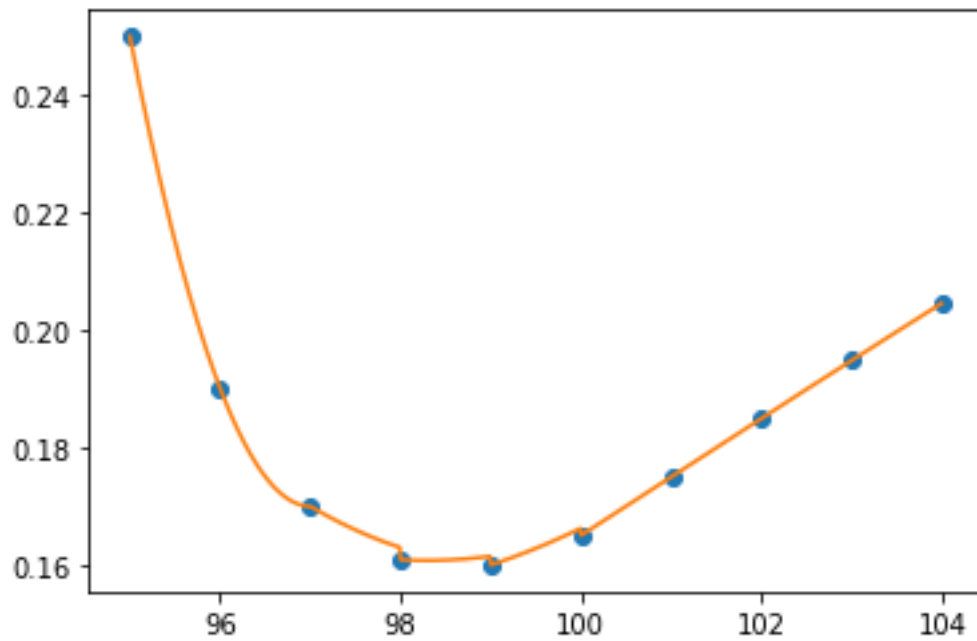
95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
0.2499	0.1900	0.1700	0.1610	0.1601	0.1651	0.1750	0.18509	0.1949	0.2046

## 1.2 Techniques d'Interpolation

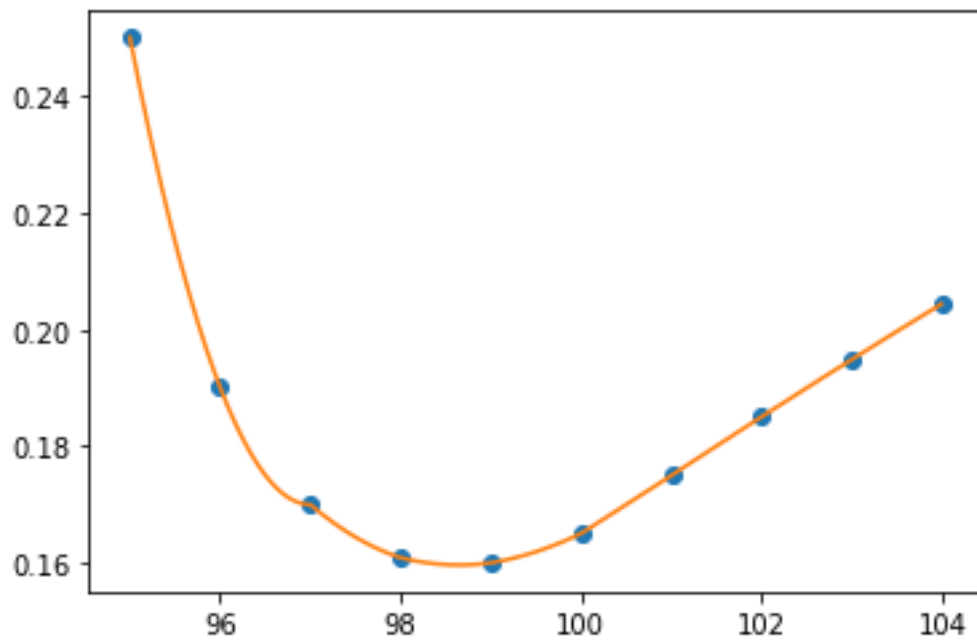
Pour obtenir une courbe de volatilité plus précise on séquence le vecteur strike avec un pas de 0.01. On obtient 900 données. Avec ce vecteur on interpole le vecteur volatilité pour obtenir 900 données de volatilité. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour cette étape. La première méthode consiste à créer 9 splines et résoudre un système pour assurer la continuité. Cette méthode n'a pas été retenue car la continuité n'est pas assurée. On obtient également des courbes en escalier.



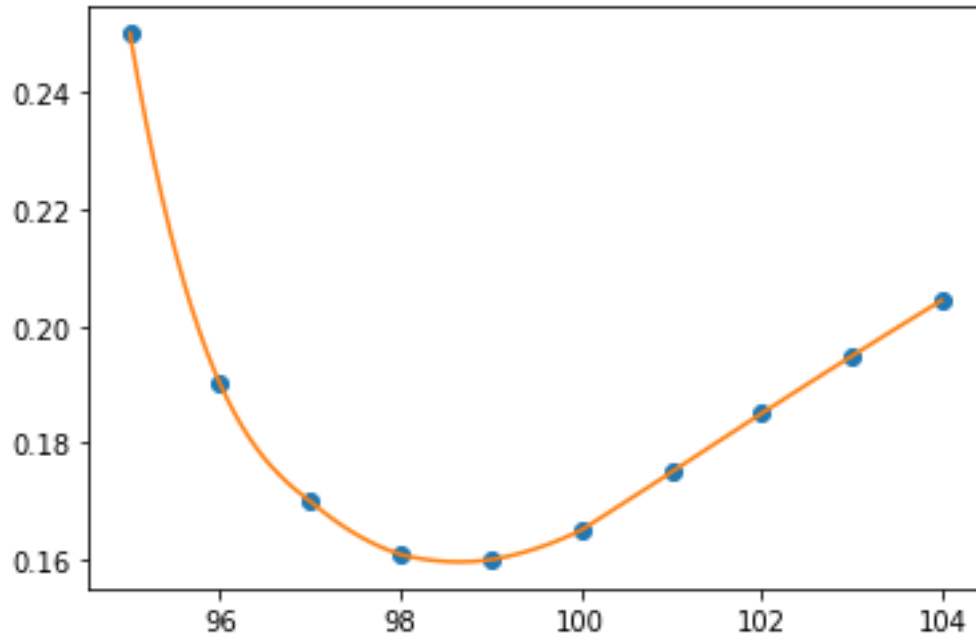
Pour avoir la meilleure interpolation j'ai utilisé un système matriciel, j'ai dû faire plusieurs essais car les premiers tests la continuité n'était pas assurée entre les points. Le premier polynôme est obtenu via une interpolation de Lagrange et permet de trouver de proche en proche les autres polynômes.



Pour améliorer la continuité entre les points j'ai ensuite utilisé la convexité. Ce qui donne des points continue sur toute la courbe, on note cependant une discontinuité visuelle en 97. Ce point est dû à la discontinuité du polynôme de lagrange et du système matricielle.

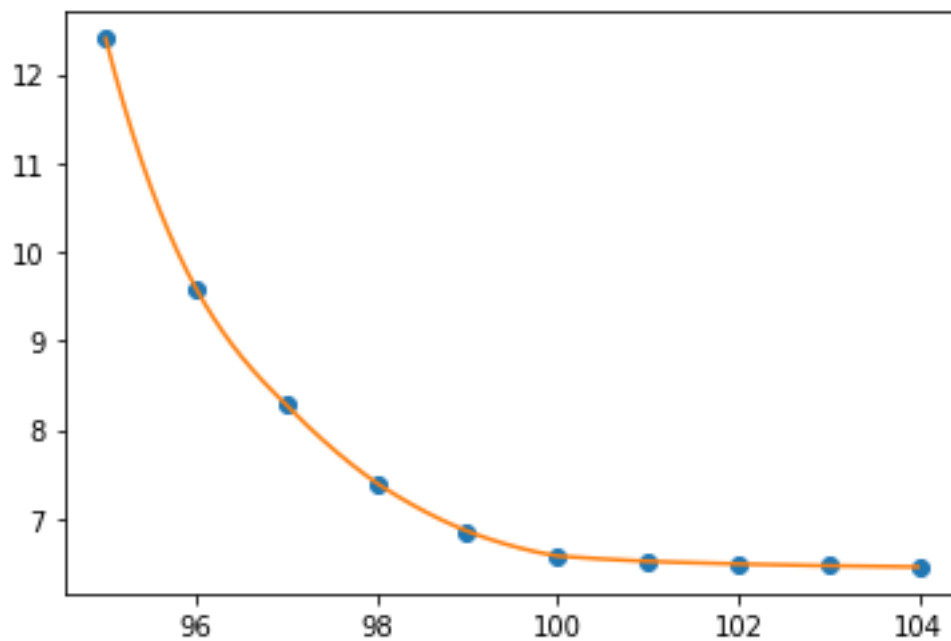


Pour avoir une courbe parfaite, j'ai préféré retirer le polynôme de lagrange et j'ai résolu un système à 4 equation afin d'avoir un polynôme de degré 3 pour résoudre le système. Ce qui donne une courbe continue :

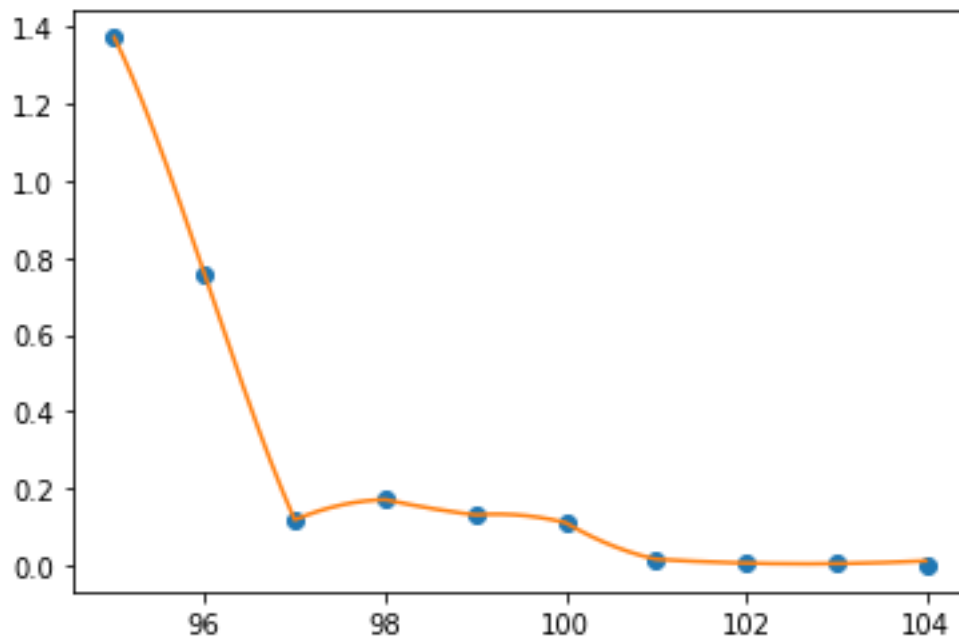


### 1.3 la formule de Breeden-Litzenberger et la technique de Shimko

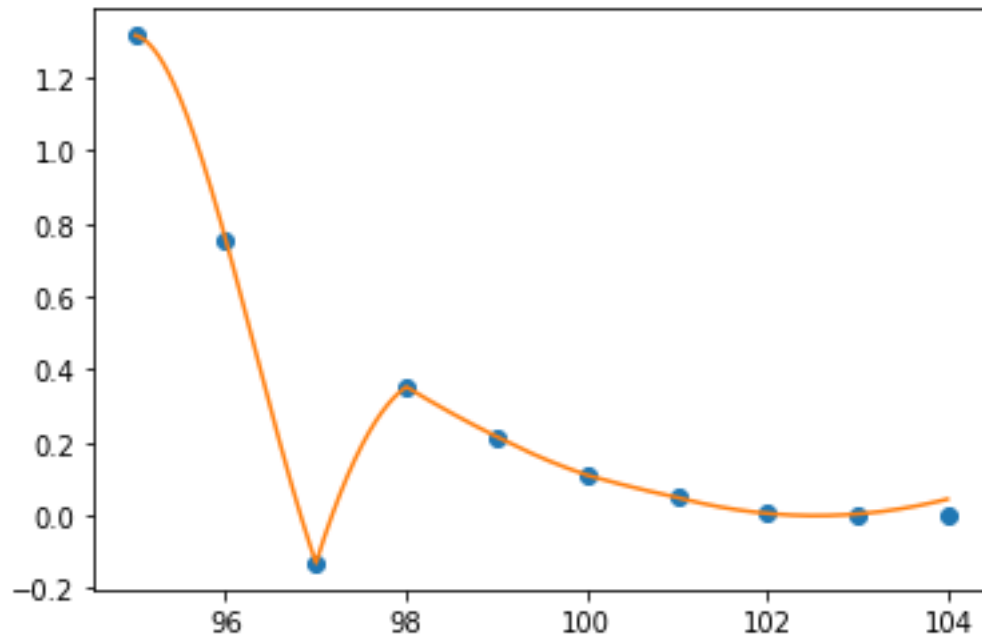
Ce vecteur nous donne 900 volatilités que l'on peut réutiliser dans la formule de Black and Scholes. On obtient un vecteur de prix:



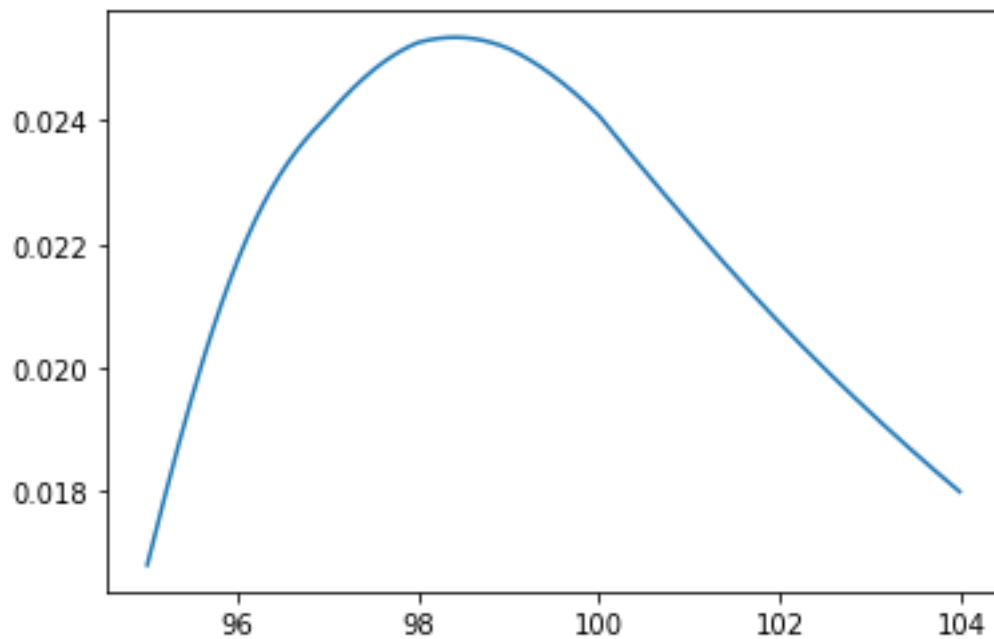
Avec ce vecteur de prix, on calcul la dérivé seconde avec la formule de la formule de Breeden-Litzenberger et la technique de Shimko on obtient la courbe de densité :



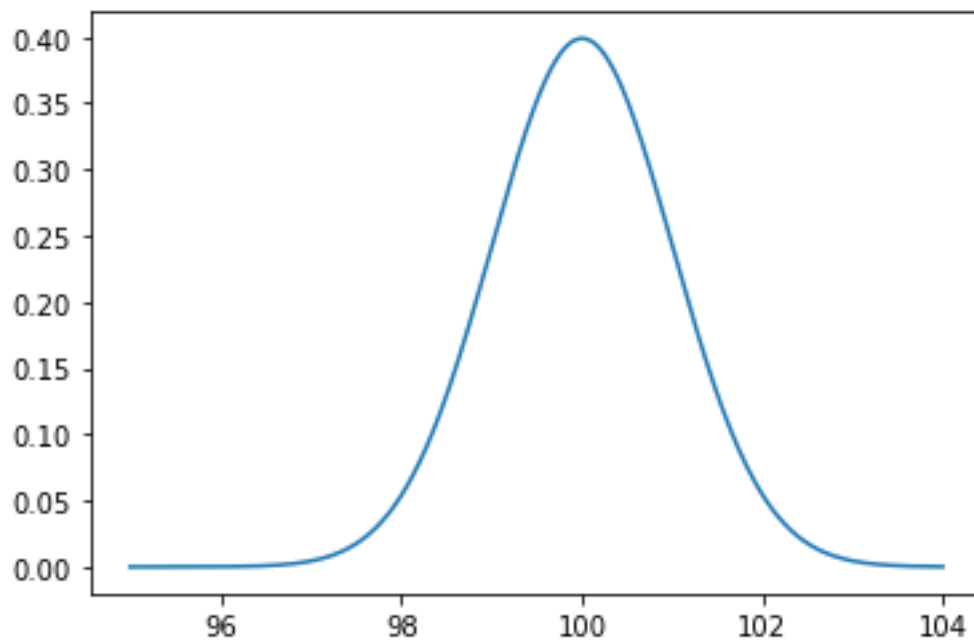
Avec un pas de 0,1 au strike on obtient :



Sans retransformer les volatilité en prix, on obtient une courbe plus fluide :



On compare celle densité avec la courbe gaussienne centrée au spot, on remarque l'asymétrie de la courbe de densité.



La gaussienne donne une courbe en forme de cloche. Avec la formule on obtient deux cloches assyetriques.

Le tirage aléatoire avec la loi de densité donne des prix proche de la réalité :

[10.362939147595938] [11.978611108257965] [9.864235860268288] [7.39333390865265]  
[11.76223691828271] [9.742880340096129] [10.437973723428179] [8.740655342356831]  
[9.802820203065089] [9.589997415796091] [11.075308001710589] [10.148252385526952]  
[10.171353295675075] [10.927019057315484] [9.665197504909592] [10.75637969028108]  
[6.952010349581826] [10.784276485916394] [9.41233061427215] [6.902384782951373]  
[10.593455209279767] [11.292529948458345] [9.41233061427215] [11.869261698703035]  
[7.373487783407569] [9.885041569445399] [8.814049756055567] [6.585194766072291]  
[9.499365972694825] [7.981170058722299] [8.890525054279173]

## 2 Partie 2 - Interpolation et volatilité stochastique fractionnaire

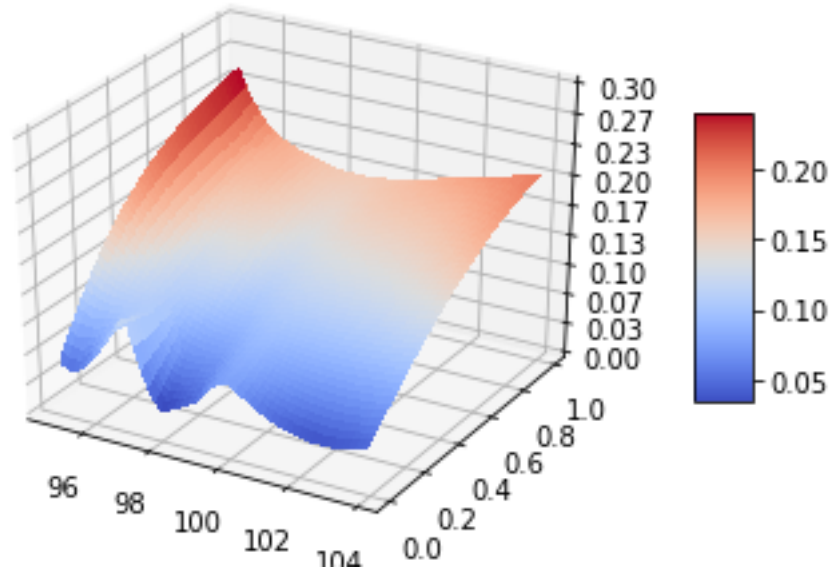
### 2.1 Nappe de volatilité

Dans cette section on crée une nappe de volatilité en rajoutant la maturité comme paramètre de la nappe. Avec les données ci-dessous, on interpole chacun des vecteurs avec un pas de 0.1 pour le strike et une interpolation de la maturité avec un pas de 0.01.

strike	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
price 12M	12.40	9.59	8.28	7.40	6.86	6.58	6.52	6.49	6.47	6.46
price 9M	11.79	8.95	8.07	7.03	6.18	6.04	5.76	5.50	5.50	5.39
price 6M	0.71	8.28	6.91	6.36	5.29	5.07	4.76	4.47	4.35	4.14
price 3M	8.67	7.14	5.98	4.93	4.09	3.99	3.43	3.01	2.72	2.53

Avec l'interpolation des 4 vecteurs on obtient une nappe de volatilité :





La première remarque que l'on peut faire sur la nappe, c'est qu'on observe un smile vers la maturité 1 an, à l'inverse proche de 0 on a deux vagues moins représentatives. Pour calculer le prix d'une option de maturité de 7 mois avec un strike de 98.3, on a une volatilité sur la nappe de 13.52%. En utilisant Black and Scholes on obtient le prix de l'option à 4.9816.

Avec la méthode de Monte Carlo, (nombre de simulation 1000 et des pas de 30) avec la vol fixé à 13.52 %, on obtient 4.9652.

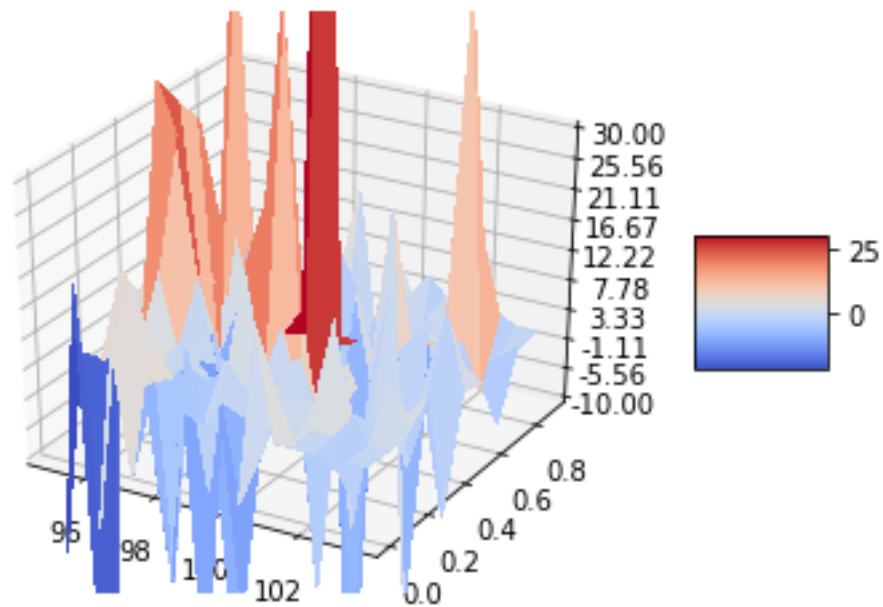
Avec Monte Carlo et le modèle stochastique de volatilité on obtient avec un exposant de Hurst de 0.25, une vol de vol de 0.2 et le retour à la moyenne de 1 on obtient un prix de 4.76, un retour à la moyenne de 1, le  $\bar{v}$  à 0.5 et  $\rho$  à 1. Il faut maintenant calibrer l'exposant de Hurst, la vol et la vol de vol.

## 2.2 modèle à volatilité stochastique

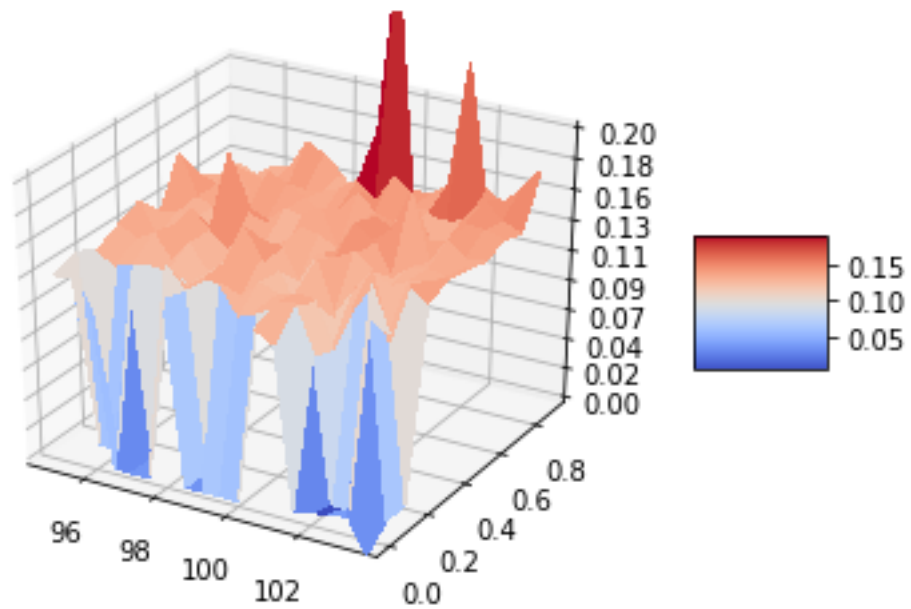
La première étape on sort une nappe de prix. Avec cette nappe de vol on utilise Nelson-Meade pour calibrer la volatilité de chaque point de la nappe. On fixe l'exposant de Hurst à 0.3. Il est très difficile de calibrer la nappe. Il faut peut-être de tirages avec peu de pas pour pouvoir calibrer la nappe ce qui est plus imprécis. Pour la suite j'ai préféré calibrer qu'un point pour faciliter la recherche.

Temps pour calculer la nappe de vol avec  $N = 40:1910$  sec.

On obtient une nappe avec des divergences (inf) sur certains points la calibration est imprécise. Il faut trouver le bon nombre  $N$  raisonnable en temps de calcul pour calibrer la nappe.  $N=100$  temps pour calibrer la nappe : 15507 sec soit 4.3 heures. Les valeurs sont souvent entre 0 et 1, pour autant il est difficile de calibrer toutes les valeurs avec un si faible échantillon. Certaines valeurs divergent. On m'appelle le Picasso de la finance :



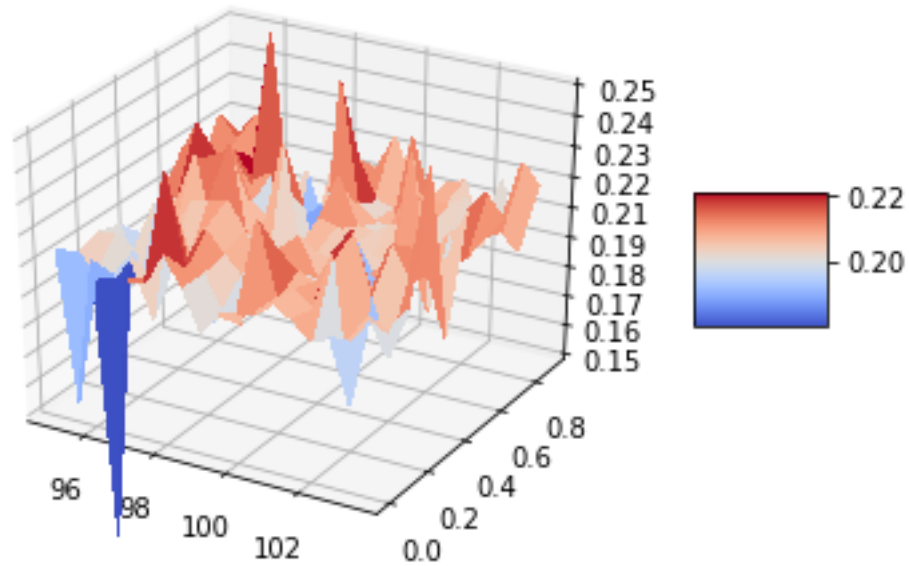
Pour améliorer les points, on pourrait recalibrer les points défaillants. Ceux par exemple au dessus de 1. En utilisant nelder mead : 5851 sec. L'algo est beaucoup plus rapide et les resultats sont plus précis. Pour avoir un temps raisonnable j'ai utilisé des pas de 0.5 de strike assez espacé mais si on calibrerait sur plus de pas et que l'on lissait la courbe on approcherait du smile observé précédemment. Pour calibrer cette nappe j'ai pris  $N=1000$  chemins.



### 2.3 Nappe de volatilité de volatilité

Détails des vol calibrées :

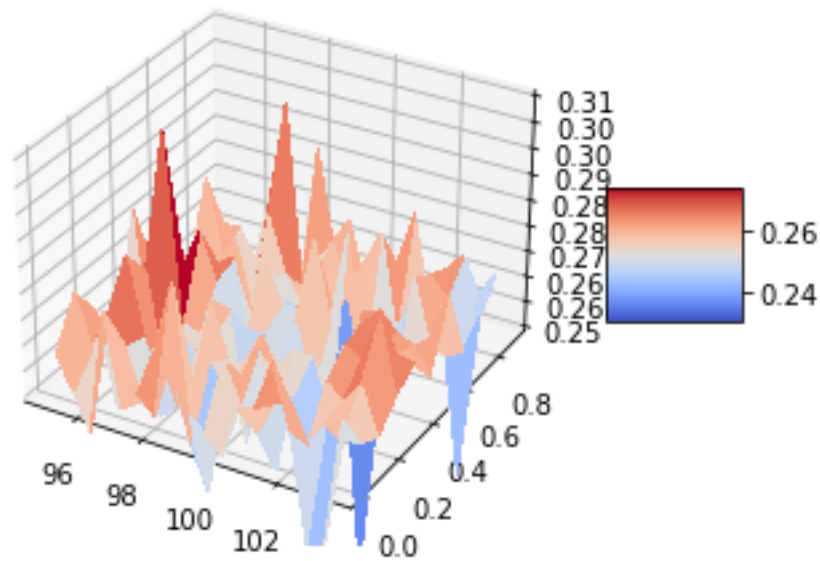
Pour calibrer les nappe suivante on gardera neldermead : 5323 sec. On obtient une nappe proche du point de départ 0.2. J'ai par la suite augmenter le nombre d'iteration de neldermead pour maximiser la convergence.



Strike\year	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
95	0.211	0.204	0.207	0.204	0.196	0.204	0.215	0.206	0.201
95.5	0.156	0.198	0.207	0.186	0.204	0.205	0.228	0.207	0.201
96	0.209	0.199	0.203	0.215	0.201	0.223	0.219	0.215	0.201
96.5	0.107	0.207	0.179	0.195	0.213	0.193	0.221	0.205	0.201
97	0.205	0.201	0.227	0.198	0.214	0.230	0.204	0.209	0.201
97.5	0.207	0.240	0.203	0.211	0.215	0.193	0.200	0.183	0.201
98	0.219	0.209	0.217	0.197	0.205	0.204	0.214	0.196	0.201
98.5	0.208	0.208	0.209	0.212	0.188	0.234	0.208	0.166	0.201
99	0.193	0.195	0.203	0.208	0.200	0.190	0.174	0.249	0.201
99.5	0.201	0.193	0.209	0.196	0.205	0.210	0.221	0.206	0.201
100	0.203	0.231	0.215	0.215	0.204	0.208	0.204	0.200	0.201
100.5	0.205	0.205	0.210	0.203	0.203	0.204	0.203	0.200	0.201
101	0.210	0.209	0.207	0.188	0.213	0.201	0.208	0.216	0.201
101.5	0.206	0.204	0.218	0.166	0.201	0.200	0.209	0.205	0.201
102	0.200	0.225	0.228	0.201	0.199	0.241	0.195	0.189	0.201
102.5	0.202	0.173	0.207	0.220	0.214	0.186	0.208	0.208	0.201
103	0.203	0.206	0.186	0.208	0.206	0.206	0.201	0.204	0.201
103.5	0.213	0.203	0.205	0.250	0.185	0.224	0.226	0.212	0.201

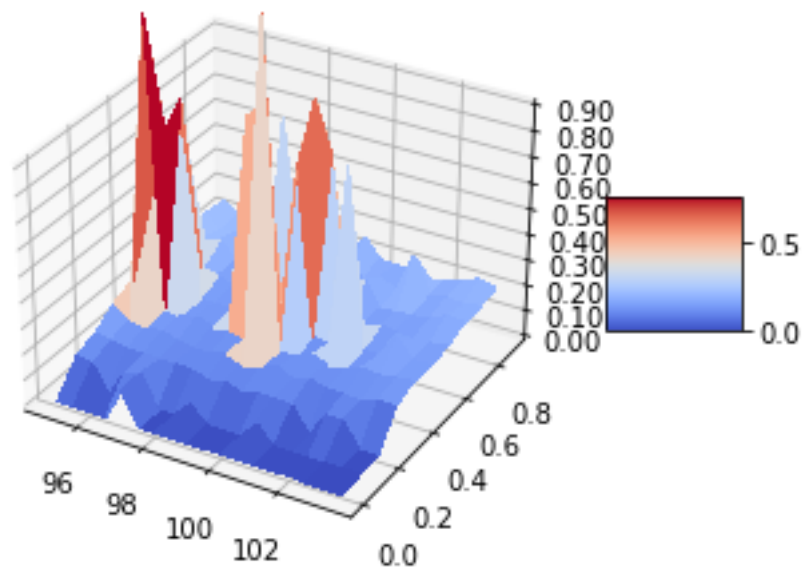
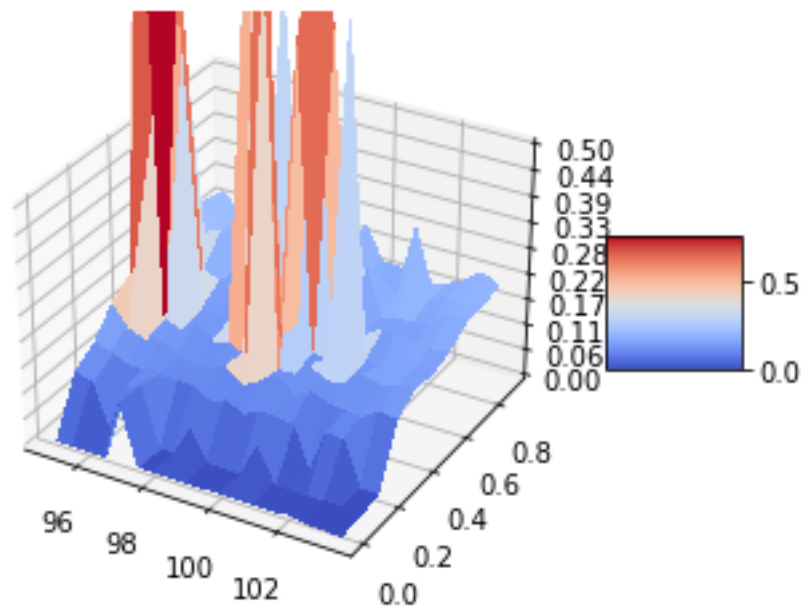
## 2.4 Nappe de Hurst

En calibrant la nappe avec les exposants de hurs 10946 sec pour N=1000 chemins :



## 2.5 Nappe de Volatilité amélioraton

Je reprends la nappe de vol, et je mets la nappe de vol trouvé dans la question 3 comme vol initiale pour chaque points ce qui donne une nappe plus réelle pour la forme. Il y a toujours quelques points à retravailler (14000 sec):



strike\Years	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
95	0.000	0.111	0.139	0.196	0.228	0.478	0.227
95.5	0.000	0.100	0.129	0.153	1.259	0.766	0.693
96	0.000	0.000	0.114	0.140	0.152	0.900	0.188
96.5	0.000	0.104	0.112	0.138	0.139	0.145	0.173
97	0.123	0.125	0.111	0.120	0.151	0.141	0.148
97.5	0.000	0.000	0.114	0.108	0.131	0.140	0.150
98	0.000	0.000	0.109	0.112	0.140	0.904	0.150
98.5	0.000	0.064	0.089	0.133	0.126	0.965	0.143
99	0.000	0.000	0.102	0.104	1.359	0.137	0.137
99.5	0.000	0.000	0.082	0.125	0.115	0.759	0.964
100	0.000	0.000	0.099	0.138	0.115	0.130	0.773
100.5	0.000	0.069	0.099	0.108	0.141	0.119	0.149
101	0.001	0.000	0.093	0.128	0.121	0.825	0.145
101.5	-0.002	0.000	0.000	0.114	0.129	0.136	0.169
102	0.003	0.000	0.099	0.109	0.152	0.135	0.157
102.5	-0.004	0.000	0.095	0.107	0.140	0.223	0.154
103	-0.006	-0.001	0.000	0.128	0.150	0.148	0.157
103.5	-0.007	-0.001	0.000	0.126	0.157	0.151	0.164

On recalcul montecarlo avec les 3 paramètres calibrés séparément:

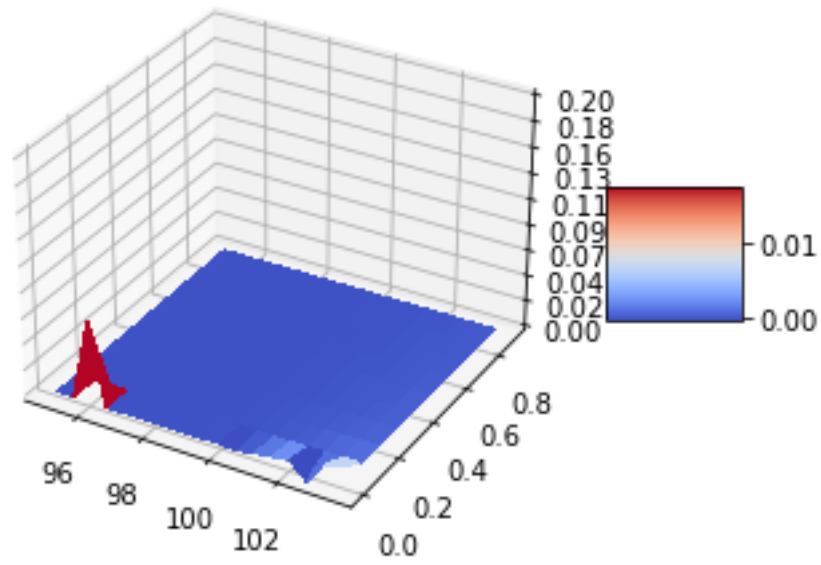
vol	volvol	hurst
0.24851	0.98518	0.9111

## 2.6 Calibration d'une nappe avec les 3 paramètres

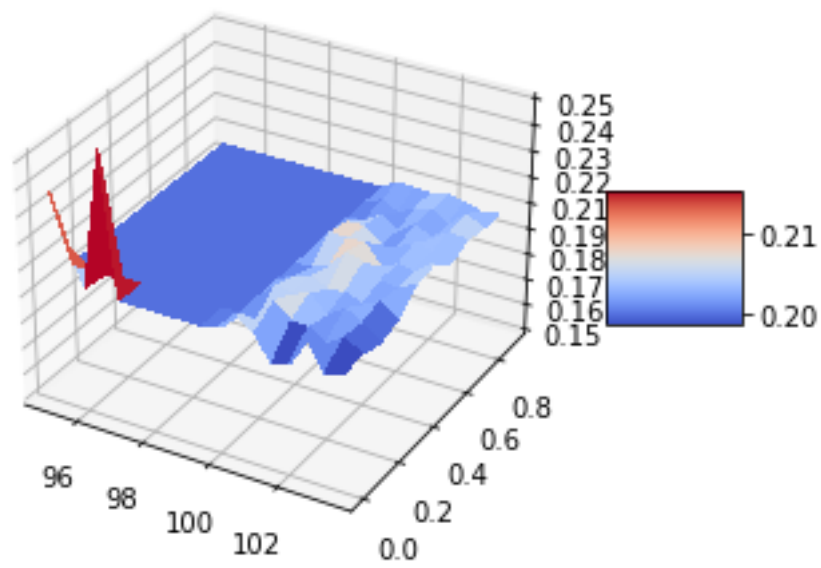
On calibre les 3 paramètres et on obtient qu'une seule nappe.

Les nappes ne sont pas bonnes, malheureusement, la partie "Calibration Nappe 3 paramètres" tourne en 5h de code, mais je n'ai pas le temps de calibrer correctement avec le bon N=500 pour avoir des nappes satisfaisantes. Je dépose le résultats en informant que si vous lancez la partie en question et que vous attendez les 5 heures, vous obtiendrez des nappes similaires aux nappes vues au dessus.

Vol :

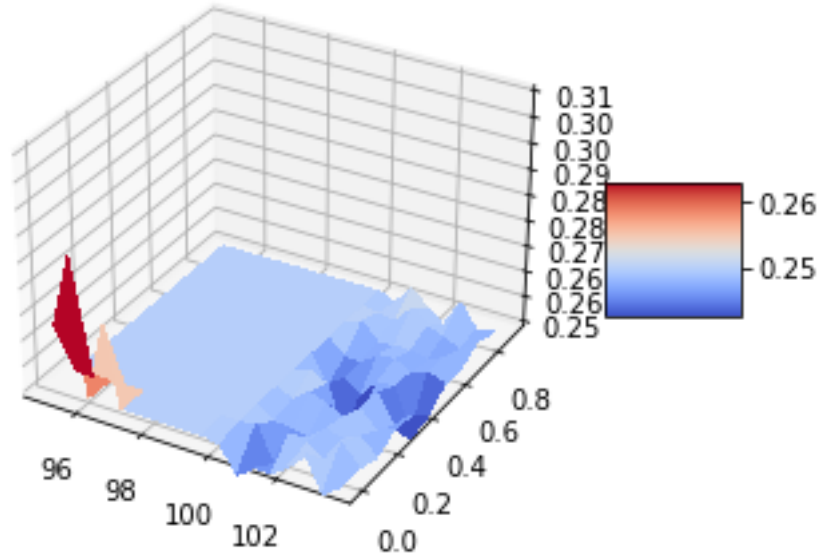


VolVol :



Hurst :





Pour le point de la nappe de strike 98.3 et de maturité 7 mois:

vol	volvol	hurst
0.24767801	0.1991829	0.262001

On obtient un prix trop loin de 6.4

Si on fixe le vbar à 0.1 et le retour à la moyenne à 1 on obtient :

vol	volvol	hurst
0.52084	0.3032	0.39232

Le prix est alors proche du prix reel de 4.9522 mais varie en fonction du nombre de chemins.

## 2.7 UB Formula

La formule utilisée dans mon code

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_t & = & \sigma_0 \exp(\theta * (\bar{\sigma} - \sigma_{t-1})t + \xi W^{(2)}) \\ S_t & = & S_0 \exp(rt + \sigma_t t W^{(1)}) \\ < W^{(2)}, W^{(1)} > & = & \rho \end{array} \right.$$

Autre possibilité

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_t & = & \sigma_{t-1} \exp(\theta * (\bar{\sigma} - \sigma_{t-1}) + \xi W^{(2)}) \\ S_t & = & S_{t-1} \exp(r\delta t + \sigma_t \delta t W^{(1)}) \\ < W^{(2)}, W^{(1)} > & = & \rho \end{array} \right.$$

## 2.8 UB

Pour calculer l'UB, je tourne l'algorithme de nelder mead sur le points 98.3 et 7 mois ce qui donne :

vol	returnmean	vbar	volvol	rho	hurst
0.24767801	1	0.1	0.26	0.35	0.19

Monte Carlo 5 params 5.3376864298738855

Avec 5 paramètres on s'approche plus de la réalité, le prix est cependant un peu trop décalé de la réalité avec  $N = 5000$  on aurait une précision plus importante.

### 3 Partie 3 - Comparaison Recuit simulé et Nelder Mead

Pour cette partie, sur les 40 options, pour comparer la performances des deux algorithmes, j'ai regardé le temps CPU que l'ordinateur prend pour estimer un point. Le mean square error est aussi une métrique qui permet d'évaluer l'accuracy de l'estimation. Le nombre d'itération donne aussi une indication sur la vitesse de convergence. En regardant les résultats, on remarque que le recuit simulé est plus lent, moins précis et utilise beaucoup d'itérations. Le mse est élevé car l'imprécision vient du nombre de chemins  $N=500$ .

Critère	Recuit	Nelder-Mead
Ittération moyenne	38.05	15.525
MSE	18	10
time CPU	64.6sec	39 sec

Pour regarder la précision en détail il faut prendre un  $N=2000$  pour avoir des prix plus précis. Si on calibre sur le point 98.3 et 7 mois avec  $N=1000$  on obtient le prix plus précis avec neldermead :

Critère	Recuit	Nelder-Mead
vol	0.1150	0.5208
volvol	0.046	0.3032
hurst	0.08	0.3923
Prix	11.49	4.952188

Pour NelderMead, on a utilisé montecarlo avec 5 paramètres en conservant la valeur du retour à la moyenne des questions précédentes à 1 et de la  $vbar$  à 0.1. J'ai aussi calibré la volvol, la vol et l'exposant de hurst ce qui donne le prix le plus juste. Neldermead n'est pas plus rapide pour cet exemple, mais le prix est plus précis.

### 4 Conclusion

Pour conclure, j'ai travaillé sur les différentes méthodes de montecarlo, la meilleures retenue est celle des 5 paramètres qui donne un prix plus précis après avoir calibré les 5 paramètres, en fixant deux paramètres, le retour à la moyenne à 1 et la  $vbar$  à 0.1 on obtient la meilleure précision avec Montecarlo avec 5 paramètres.