Universidade de São Paulo Escola de Engenharia de São Carlos Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Daiane Cristina Bortolin

Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas

Daiane Cristina Bortolin

Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas

Tese de doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos 2017 AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Bortolin, Daiane Cristina

B739r

Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas / Daiane Cristina Bortolin; orientador Marco Henrique Terra. São Carlos, 2017.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. 2. Probabilidades de transição incertas. 3. Controle robusto. 4. Realimentação de estado. 5. Equação de Riccati. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada DAIANE CRISTINA BORTOLIN.

Título da tese: "Reguladores robustos recursivos para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos com matrizes de transição incertas".

Data da defesa: 05/05/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular Marco Henrique Terra

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Associado Adriano Almeida Gonçalves Siqueira

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **João Yoshiyuki Ishihara**

(Universidade de Brasília/UnB)

Dra. Cecília de Freitas Morais

(Pós-Doutoranda/FAPESP)

Prof. Associado **Eduardo Fontoura Costa**

(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC)

AINOVAUN

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica: Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação: Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**



Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Marco Henrique Terra pela oportunidade de realizar o doutorado sob sua supervisão, pelo direcionamento e sugestões, pela atenção e paciência no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais Adélia e Roberto, e aos meus irmãos Danilo e Diego pelo carinho, incentivo, apoio e por compreenderem a minha ausência.

A Marciel pela sua amizade e por sempre me apoiar.

A todos os meus professores, da pré-escola a pós-graduação, pela dedicação e pelos valiosos ensinamentos, sem vocês esta conquista não seria possível.

Aos membros da banca examinadora, Prof. João Yoshiyuki Ishihara, Cecília de Freitas Moraes, Prof. Adriano Almeida Gonçalves Siqueira e Prof. Eduardo Fontoura Costa, pelas contribuições para o aprimoramento desta tese.

Aos colegas do Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) pelos momentos que passamos juntos, pela troca de conhecimentos e por contribuírem indiretamente com este trabalho.

À Universidade de São Paulo (USP) e à Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos (EESC) por toda infraestrutura disponibilizada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro fornecido para a realização deste trabalho.

Resumo

Bortolin, Daiane C. Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas. 174 p. Tese de doutorado — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

Esta tese aborda o problema de regulação para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos de tempo discreto com matrizes de transição incertas. Considera-se que as incertezas são limitadas em norma e os estados da cadeia de Markov podem não ser completamente observados pelo controlador. No cenário com observação completa dos estados, a solução é deduzida com base em um funcional quadrático dado em termos das probabilidades de transição incertas. Enquanto que no cenário sem observação, a solução é obtida por meio da reformulação do sistema Markoviano como um sistema determinístico, independente da cadeia de Markov. Três modelos são propostos para essa reformulação: um modelo é baseado no primeiro momento do sistema Markoviano, o segundo é obtido a partir da medida de Dirac e resulta em um sistema aumentado, e o terceiro fornece um sistema aumentado singular. Os reguladores recursivos robustos são projetados a partir de critérios de custo quadrático, dados em termos de problemas de otimização restritos. A solução é derivada da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos e apresentada em uma estrutura matricial. A recursividade é estabelecida por equações de Riccati, que se assemelham às soluções dos reguladores clássicos, para essa classe de sistemas, quando não estão sujeitos a incertezas.

Palavras-chave: Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Probabilidades de transição incertas. Controle robusto. Realimentação de estado. Equação de Riccati.

Abstract

Bortolin, Daiane C. Recursive Robust Regulators for Markovian Jump Linear Systems with Uncertain Transition Matrices. 174 p. Ph.D. Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2017.

This thesis deals with regulation problem for discrete-time Markovian jump linear systems with uncertain transition matrix. The uncertainties are assumed to be normbounded type. The states of the Markov chain can not be completely observed by the controller. In the scenario with complete observation of the states, the solution is deduced based on a quadratic functional given in terms of uncertain transition probabilities. While in the scenario without observation, the solution is obtained from reformulation of the Markovian system as a deterministic system, independent of the Markov chain. Three models are proposed for the reformulation process: a model is based on the first moment of the Markovian system, the second is obtained from Dirac measure which results in an augmented system, and the third provides a singular augmented system. Recursive robust regulators are designed from quadratic cost criteria given in terms of constrained optimization problems. The solution is derived from the robust regularized least-square approach, whose framework is given in terms of a matrix structure. The recursiveness is established by Riccati equations which resemble the solutions of standard regulators for this class of systems, when they are not subject to uncertainties.

Keywords: Markovian jump linear systems. Uncertain transition probabilities. Robust Control. State-feedback. Riccati equation.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Estrutura da tese
Figura 2.1 – Ilustração das iterações do método de funções penalidade
Figura 2.2 – Representação geométrica da solução do Exemplo 2.2
Figura 2.3 – Ilustração das iterações do mínimos quadrados regularizados robustos . 46
Figura 3.1 – Diagrama de transição de estados para o modelo macroeconômico 50
Figura 3.2 – Variação da primeira linha de \mathbb{P}^{δ}
Figura 3.3 – Representação da segunda linha de \mathbb{P}^{δ}
Figura 4.1 – Valores médios obtidos para o SLSM do Exemplo 4.1
Figura 4.2 – Média de $\ x_k\ $ para cada valor de μ
Figura 4.3 – Média de $\ \hat{x}_k\ $ para cada valor de μ
Figura 4.4 – Valores médios obtidos para o SLSM do Exemplo 4.2 80 $$
Figura 4.5 – Média de $\ x_k\ $ para cada valor de μ
Figura 4.6 – Média de $\ \hat{x}_k\ $ para cada valor de μ
Figura 5.1 – Resposta do estado q_k para o SLPM em malha fechada do Exemplo 5.1 101
Figura 5.2 – Valores de & $\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 5.1
Figura 5.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 5.2
Figura 5.4 – Resposta do estado q_k para o SLPM em malha fechada do Exemplo 5.3 100
Figura 5.5 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 5.3 106
Figura 6.1 – Evolução da trajetória de x_k (\cdots) e a sua média ($-$) 110
Figura 6.2 – Resposta do estado z_k para o SA em malha fechada do Exemplo 6.2 $$. 123
Figura 6.3 – Resposta do estado x_k para o SLSM do Exemplo 6.2
Figura 6.4 – Valores de 8 $\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 6.2
Figura 6.5 – Resposta do estado z_k para o SA em malha fechada do Exemplo 6.3 $$. 125
Figura 6.6 – Resposta do estado x_k para o SLSM do Exemplo 6.3
Figura 6.7 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 6.3

Figura 7.1 – Resultados obtidos para SAS do Exemplo 7.1	140
Figura 7.2 – Resposta do estado x_k para o SAS em malha fechada do Exemplo 7.2	
Figura 7.3 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 7.2	141
Figura 7.4 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM nominal do Exemplo 7.3	142
Figura 7.5 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM incerto do Exemplo 7.3	142
Figura 7.6 – Resposta do estado x_k para o SAS em malha fechada do Exemplo 7.4	144
Figura 7.7 – Valores de $\mathcal{E}\{\ \hat{x}_k\ \}$ para o SLSM do Exemplo 7.4	144

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Iterações do método de funções penalidade para o Exemplo 2.1 35
Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.2
Tabela 2.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.3
Tabela 3.1 – Relação entre o estado da cadeia, fase econômica e valores de a e b 50
Tabela 5.1 – Valores de κ para o Exemplo 5.3
Tabela 6.1 – Valores de κ para o Exemplo 6.3
Tabela 7.1 – Ganhos obtidos pelo SAS para o Exemplo 7.1
Tabela 7.2 – Ganhos obtidos pelo SAS para o Exemplo 7.2
Tabela 7.3 – Médias do custo do SLSM obtidas pelas abordagens determinísticas 143 $$
Tabela 7.4 – Médias do tempo de CPU de cada abordagem determinística

Lista de Algoritmos

Algoritmo 2.1 – Método de Funções Penalidade
Algoritmo 4.1 – Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs com MTI 66
Algoritmo 5.1 – Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SLPM 92
Algoritmo 6.1 – Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SA 117
Algoritmo 7.1 – Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SAS 135
Algoritmo D.1 – Gerador de Variável Aleatória Discreta
Algoritmo D.2 – Simulação da Cadeia de Markov

Lista de Abreviaturas e Siglas

LMIs Linear Matrix Inequalities

MT Matriz de Transição

MTI Matriz de Transição Incerta

MT Parc. Desc. . . . Matriz de Transição Parcialmente Desconhecida

SA Sistema Aumentado

SAS Sistema Aumentado Singular

SLPM Sistema Linear de Primeiro Momento

SLISM Sistema Linear Incerto sujeito a Saltos Markovianos

SLSM Sistema Linear sujeito a Saltos Markovianos

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais	34
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores reais n -dimensionais	34
μ	Parâmetro de penalidade	34
A^T	Transposta de A	34
$\mathbb{R}^{n,m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$	37
A^{-1}	Inversa da matriz A	37
$A \succ 0$	A é uma matriz simétrica definida positiva $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	38
$O, O_{n,m}$	Matriz nula de dimensão apropriada ou $n \times m$	38
I, I_n	Matriz identidade de dimensão apropriada ou $n \times n$	38
$\ x\ _Q$	Norma ponderada de x definida por $(x^TQx)^{\frac{1}{2}}$	41
δA	Matriz de parâmetros incertos	41
δb	Vetor de parâmetros incertos	41
Δ	Matriz de contração	41
λ	Parâmetro de minimização	42
A^{\dagger}	Pseudo-inversa da matriz A	42
diag(A,B)	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $\{A,B\}$	43
$Y^TX(\bullet)$	Expressão simplificada para Y^TXY	44
$Pr[\mathscr{C}]$	Probabilidade de ocorrência do evento $\mathscr C$	47
$\theta(k)$	Estado da cadeia de Markov no instante k	48
S	Espaço de estados da cadeia de Markov	48
p_{ij}	Probabilidade de transição do modo i para o modo j	48
\mathbb{P}	Matriz de transição	48
$\pi_{i,k}$	Distribuição de probabilidade do modo i após k -passos	48
π_k	Vetor de distribuição de probabilidade após k -passos	48
\mathbb{P}^{δ}	Matriz de transição incerta	53
p_{ij}^{δ}	Probabilidade de transição incerta do modo i para o modo j	53
$\pi_{i,k}^{\delta}$	Distribuição de probabilidade incerta do modo i após k -passos	54
$1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}}$	Medida de Dirac	56
{·}3	Valor esperado	60

(M/D)	Complemento de Shur de D em M	68
$A \succeq 0$	A é uma matriz simétrica semidefinida positiva	68
$A^{\frac{1}{2}}$	Raiz quadrada da matriz (semi) definida positiva A	71
$diag(A_i)$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $\{A_1,\ldots,A_s\}$	75
x	Norma Euclidiana de x definida por $(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$	77
$q_{\theta(k),k}$	Primeiro momento de x_k	84
$A \otimes B$	Produto de Kronecker de A por B	86
δ_A	Matriz de parâmetros incertos	88

Sumário

1	Intr	odução	25
2	Con	ceitos e Resultados Auxiliares	33
	2.1	Método de Funções Penalidade	33
	2.2	Problemas de Mínimos Quadrados	37
3	Siste	emas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos	47
	3.1	Cadeias de Markov	47
	3.2	Descrição Geral dos SLSMs	50
		3.2.1 Matrizes de Transição Incertas	52
		3.2.2 O Problema de Regulação de SLSMs	56
4	Reg	uladores Robustos Recursivos para SLSMs com MT incerta	59
	4.1	Formulação do Problema	60
	4.2	Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs	63
	4.3	Exemplos Ilustrativos	76
5	Reg	uladores Robustos Recursivos para SLSMs via Primeiro Momento	83
	5.1	Sistema Linear de Primeiro Momento	84
	5.2	Reguladores Robustos Recursivos para SLPMs	90
	5.3	Exemplos Ilustrativos	99
6	Reg	uladores Robustos Recursivos para SLSMs via Sistema Aumentado	107
	6.1	Sistema Aumentado	108
	6.2	Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Aumentados	114
	6.3	Exemplos Ilustrativos	122
7	Reg	uladores Robustos Recursivos para SLSMs via Sistema Aumentado	
	Sing	ular	127
	7.1	Sistema Aumentado Singular	127
	7.2	Reguladores Robustos Recursivos para SASs	133
	7.3	Exemplos Ilustrativos	139

8 Conclusõe	5	145
Referências		149
APÊNDICE	A Álgebra Matricial	157
APÊNDICE	B Demonstrações	161
APÊNDICE	C Equação Algébrica de Riccati	167
APÊNDICE	D Simulação da Cadeia de Markov	169
APÊNDICE	E Ganhos obtidos pelas Simulações	171

Capítulo 1

Introdução

Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSMs) são sistemas estocásticos cuja dinâmica apresenta alterações abruptas em sua estrutura em certos instantes, devido à existência de pertubações advindas do meio em que o sistema se encontra, como a mudança do cenário econômico (BLAIR; SWORDER, 1975), as falhas de comunicação entre robôs móveis (NAKAI et al., 2016), a alteração na marcha de veículos autônomos (MARCOS, 2017), entre outras. No entanto, entre esses instantes, os mesmos comportamse como os sistemas lineares usuais.

Assim, o modelo para esta classe de sistemas é composto de vários subsistemas determinísticos, denominados de modos de operação. Os instantes em que ocorrem as transições entre os modos de operação são denominados de saltos e representam as mudanças repentinas nos parâmetros do sistema. Os modos de operação se alternam de acordo com uma variável aleatória governada por uma cadeia de Markov associada a uma matriz de transição (MT). Dessa forma, a cada instante há uma certa probabilidade do sistema saltar de um modo para outro, a qual depende apenas do modo em que o sistema encontra-se naquele instante.

Esta classe de sistemas pode ser utilizada para representar aplicações reais em diversas áreas da Engenharia, Matemática, Física e Biologia. Consequentemente, os SLSMs têm atraído uma atenção considerável nas últimas décadas, em grande parte por fornecerem modelos adequados para tais aplicações, como os sistemas de controle em rede (KIM; PARK, 2009; ZHANG et al., 2013), os sistemas de potência (UGRINOVSKII; POTA, 2005), o controle de manipuladores robóticos (SIQUEIRA et al., 2011), a interação homem-robô para a reabilitação de membros inferiores (MITSCHKA et al., 2017) e a indústria manufatora de papel (KHANBAGHI et al., 2002), pois todos estes sistemas estão sujeitos a alterações repentinas de comportamento.

Desse modo, a matriz de transição tem uma importância significativa no desempenho do sistema, visto que as alterações repentinas entre os modos de operação ocorrem conforme as probabilidades de transição. Assim, devido a esta característica, o estudo para

obter modelos matemáticos que representem as probabilidades de transição de fenômenos reais tem se destacado ao longo dos anos. Um método muito utilizado é a estimação das probabilidades a partir de um conjunto de observações ou simulações. Algoritmos baseados neste método podem ser encontrados em pesquisas realizadas nas áreas de Engenharia (TUGNAIT, 1982; LUO et al., 2015), Economia (JONES, 2005), Medicina (OLARIU et al., 2017), entre outras.

Entretanto, existem algumas desvantagens na aplicação do método de estimação. O principal problema é que a estimativa depende do número de transições observadas. Desse modo, para se obter um modelo viável é necessário realizar uma grande quantidade de experimentos ou simulações. Na prática, geralmente, há poucas amostras disponíveis para obter uma estimação confiável devido à dificuldade em observar as transições e/ou pelo alto custo de produzir os experimentos.

Para contornar este problema, muitos pesquisadores incorporam a imprecisão no modelo, assumindo uma MT imprecisa ou incerta. As pesquisas relacionadas a este caso foram iniciadas a partir da década de 1980 por Hartfiel (1981) e Seneta (1984), desenvolvendo uma teoria de matemática intervalar para as cadeias de Markov não-homogêneas, denominada *Markov set-chains* (HARTFIEL, 1998). Kozine e Utkin (2002) também consideram o modelo intervalar, porém assumem que a MT é homogênea, ou seja, constante em todo o instante de tempo. Além disso, estes autores apresentaram um estudo sobre o comportamento dos limitantes das probabilidades de transição a partir de técnicas de programação linear.

Em 2006, Škulj também apresentou contribuições ao estudo sobre o comportamento dos limitantes das probabilidades de transição, mas assumindo que a cada instante de tempo é escolhida uma MT de um conjunto gerado por probabilidades intervalares. O modelo proposto foi baseado na teoria desenvolvida por Weichselberger (2000), a qual generaliza os axiomas de Kolmogorov.

Campos et al. (2004) desenvolveu um algoritmo que determina exatamente os extremos dos intervalos das probabilidades dos estados futuros das cadeias de Markov estacionárias, a partir da modificação do método apresentado por Kozine e Utkin (2002).

Uma teoria mais abrangente foi desenvolvida por Cozman (2000, 2005), denominada redes credais (em inglês, credal networks), que possibilita a representação de modelos probabilísticos imprecisos ao associarem conjuntos convexos de medidas de probabilidades com grafos direcionados acíclicos, nos quais os vértices representam variáveis aleatórias. Essas redes retratam uma extensão das redes Bayesianas, uma vez que as redes credais permitem que uma variável possa ser associada a um ou mais conjuntos convexos de distribuições de probabilidade. Além disso, a teoria de Markov set-chains pode ser considerada como um caso particular desta abordagem.

Segundo Cooman et al. (2009) essas abordagens utilizam conjuntos de probabilidades para lidar com a presença da imprecisão nas probabilidades de transição. Quando

estas probabilidades não são conhecidas, assume-se que elas pertencem a um determinado conjunto, e a análise da robustez é realizada para permitir que as probabilidades assumam os valores pertencentes a estes conjuntos. Em oposição a esta classe de metodologia, Cooman et al. (2009) apresentaram um estudo onde propõem uma nova abordagem que utiliza a definição de expectativa (ou esperança) inferior e superior, sendo que esta representação é equivalente às redes credais.

Nas pesquisas relacionadas aos SLSMs de tempo discreto, as incertezas da MT são, predominantemente, modeladas por politopos, como em Costa et al. (1997), Souza (2005) e Lun et al. (2016). Neste modelo, as probabilidades de transição pertencem a um conjunto convexo formado pela combinação de matrizes de transição que são os vértices deste conjunto.

Karan et al. (2006) e Boukas (2009) consideram o modelo de *probabilidades limitadas* para os SLSMs com cadeia de Markov homogênea, onde as probabilidades de transição são desconhecidas, mas variam entre dois limitantes conhecidos. Este modelo é equivalente ao das probabilidades intervalares.

Em 2008, Zhang e Boukas propuseram o conceito de *MT parcialmente desconhecida*, tornando a modelagem da MT incerta mais complexa que no modelo politópico. Neste caso, alguns elementos da MT são conhecidos, porém não há qualquer informação sobre os demais, de modo que são denotados pelo símbolo "?". Conjuntamente, definiram a *MT completamente desconhecida*, ou seja, quando não é possível obter informações sobre todas as probabilidades. Além disso, de acordo com Zhang e Lam (2010), este caso retrata também os sistemas chaveados com chaveamento arbitrário (LIBERZON, 2003).

Nas situações práticas, geralmente, as probabilidades de transição são determinadas por experimentos físicos ou simulações numéricas que inserem características estocásticas às probabilidades. Com base nessas características, Luan et al. (2013) introduziu uma nova abordagem que difere das anteriores por descrever as incertezas das probabilidades de transição como um processo estocástico Gaussiano. Desse modo, a informação incerta das probabilidades é quantificada pela função de densidade de probabilidade de transição Gaussiana. As matrizes de transição conhecidas e as parcialmente desconhecidas podem ser consideradas como casos especiais desta interpretação.

A teoria de *Markov set-chains* foi aplicada aos SLSMs com cadeias não-homogêneas e probabilidades intervalares por Chitraganti et al. (2013, 2016), os quais propõem uma condição suficiente para a estabilidade na média quadrática (em inglês, *mean square stability*) em termos do raio espectral de uma matriz determinística por meio da análise dos intervalos e do produto de Kronecker. Além de proporem uma condição suficiente para a estabilidade estocástica através do segundo método de Lyapunov (SLOTINE; LI, 1991), a qual foi aplicada na síntese de um controlador por realimentação de estado.

Uma representação genérica para as incertezas (politópicas, intervalares, entre outras) presentes nas probabilidades de transição foi proposta por Morais et al. (2013) e

Braga et al. (2013) em termos de parâmetros pertencentes a um simplex unitário¹, de modo que o conjunto de parâmetros incertos pertença a um produto Cartesiano de simplexos, denominado *multi-simplex*. Essa modelagem é computacionalmente mais eficiente que o modelo politópico, uma vez que é necessário um número menor de vértices para formar o conjunto de probabilidades. Além disso, esta representação permite considerar que as incertezas presentes nas matrizes de parâmetros do SLSM pertençam a um simplex adicional, de forma que todas as incertezas associadas ao sistema pertençam a um único domínio.

Para os SLSMs de tempo contínuo, várias metodologias foram propostas para modelar as taxas de transição incertas, como o domínio politópico (EL GHAOUI; AIT-RAMI, 1996), a MT parcialmente conhecida (GUO; ZHU, 2012) e as probabilidades limitadas em norma (XIONG et al., 2005). Esta última metodologia foi estendida para o caso discreto por Wan et al. (2015) e Bortolin e Terra (2015). Neste caso, as probabilidades incertas são modeladas como a soma de dois parâmetros, sendo que um é conhecido e o outro varia de acordo com uma variável cuja norma é limitada. Desta forma, pode-se considerar esta metodologia como um modelo intervalar.

A presença de incertezas, tanto nas matrizes de parâmetros quanto nas probabilidades de transição, pode afetar características importantes do sistema, como a estabilidade e o desempenho. Assim, torna-se essencial desenvolver controladores e filtros robustos que assegurem estas características aos sistemas sujeitos a incertezas.

Em relação ao projeto de controladores, para os SLSMs com observação completa dos estados da cadeia de Markov e com matrizes de transição conhecidas, o controle ótimo é determinado pela solução de um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas (BLAIR; SWORDER, 1975), sendo que o controle resulta na forma de realimentação linear de estado e depende da cadeia de Markov. Enquanto que, para os SLSMs com MTs incertas, há projetos de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) como os desenvolvidos por Gonçalves et al. (2011) e Zheng et al. (2015).

Para SLSMs sem observação dos estados da cadeia de Markov, assume-se o controle na forma de realimentação linear de estado e independente da cadeia de Markov. Neste caso, não se dispõem de resultados que determinem o controle ótimo, com exceção de um caso especial, no qual a cadeia de Markov representa um processo de Bernoulli generalizado, visto que Fioravanti et al. (2013) apresentaram condições necessárias e suficientes para o problema de controle ótimo desta classe de sistemas.

Tratando-se do caso geral, apesar das dificuldades para se determinar o controle ótimo, existem métodos de aproximação baseados em condições de otimalidade, como o método variacional (do VAL; BAŞAR, 1999) proposto para SLSMs com MTs conhecidas, e

Um simplex unitário Λ_n de dimensão n (número de parâmetros) é um conjunto definido por $\Lambda_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n\}$.

o projeto de controles baseados em LMIs (SOUZA, 2005) para sistemas com MTs incertas.

Esta tese tem por objetivo projetar reguladores robustos recursivos para SLSMs com incertezas nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição, considerando o cenário de observação completa e o de não observação dos estados da cadeia de Markov. As incertezas presentes no sistema são modeladas por limitantes em norma. O modelo proposto para as matrizes de transição incertas permite representar, em termos de limitantes em normas, os modelos usualmente considerados na literatura, tais como, domínio politópico, intervalar e as probabilidades parcial ou totalmente desconhecidas. Uma vantagem deste modelo é a simplicidade, visto que não é necessária a determinação de vértices de um conjunto convexo como no modelo politópico ou multi-simplex.

A abordagem proposta para o projeto dos controladores consiste na aplicação da técnica de *mínimos quadrados regularizados robustos*, que combina o método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas. A validade e a eficácia deste procedimento foi comprovada por Cerri (2009, 2013) a partir da reformulação do problema de controle ótimo clássico para sistemas lineares nominais, permitindo o desenvolvimento de funcionais adequados para os problemas que envolvem sistemas sujeitos a incertezas.

A principal contribuição desta tese é a obtenção de soluções recursivas baseadas em equações algébricas de Riccati para SLSMs com incertezas. Além disso, cabe ressaltar a simplicidade da demonstração das propriedades de estabilidade e convergência dos reguladores robustos, visto que as mesmas são estabelecidas por meio da equivalência com a solução clássica do problema de controle para sistemas sem a presença de incertezas.

1.1 Estrutura da Tese

Esta tese está organizada em oito capítulos. O primeiro capítulo introduz o tema abordado neste trabalho. No segundo e terceiro capítulos são apresentados os conceitos e resultados fundamentais ao projeto de reguladores. O quarto capítulo refere-se ao problema de regulação de SLSMs com observação completa dos estados da cadeia de Markov. A partir do quinto capítulo, trata-se o problema de regulação de SLSMs sem observação dos estados da cadeia de Markov. O último capítulo finaliza o trabalho com a apresentação das conclusões e perspectivas futuras. Conteúdos complementares são inseridos na forma de apêndices. Uma descrição resumida de cada capítulo é apresentada a seguir e a Figura 1.1 ilustra a organização da tese.

☐ Capítulo 2: Conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos principais resultados deste trabalho, como o método de funções penalidade para a solução de problemas de otimização restritos e o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas são apresentados. A partir desses conceitos é formulada a técnica

de mínimos quadrados regularizados robustos que fornecerá os reguladores robustos para os SLSMs com matriz de transição incerta.

- ☐ Capítulo 3: A definição de SLSMs é introduzida a partir do conceito de cadeias de Markov. A representação da matriz de transição incerta, em termos de limitantes em norma, é apresentada. O problema de regulação de SLSMs é descrito de acordo com as informações disponíveis sobre os estados da cadeia de Markov.
- □ Capítulo 4: O regulador robusto recursivo é projetado para os SLSMs com matriz de transição incerta, sob a hipótese de que o controlador tem acesso às informações da cadeia de Markov. A solução é obtida a partir de um funcional penalizado derivado da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos.
- □ Capítulo 5: Inicia-se a abordagem para os SLSMs no cenário de não observação da cadeia de Markov. Tal abordagem consiste em reformular o SLSM como um sistema determinístico, para então projetar um regulador que poderá estabilizar os sistema Markoviano. Neste capítulo, o novo sistema é obtido através do primeiro momento da variável de estado dos SLSMs. O regulador robusto recursivo será projetado a partir de um funcional quadrático penalizado e expresso em termos de blocos matriciais.
- □ Capítulo 6: Um sistema aumentado é deduzido para representar os SLSMs. Este modelo foi inspirado na abordagem determinística proposta por Costa (1994) no projeto de estimadores para SLSMs no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov. O regulador robusto recursivo derivado para o sistema aumentado fornece uma possível solução para o SLSM e uma generalização das equações algébricas de Riccati acopladas para sistemas sem saltos.
- □ Capítulo 7: O modelo adotado neste capítulo é derivado da medida de Dirac, a qual é interpretada como um parâmetro incerto. Assim, obtém-se um sistema aumentado singular com matrizes de parâmetros totalmente incertas. O regulador robusto proposto para esse sistema pode fornecer uma solução estável para o SLSM e, neste caso, tem-se uma solução para o cenário sem observação na forma de equações algébricas de Riccati acopladas.
- ☐ Capítulo 8: As conclusões sobre o trabalho desenvolvido e as sugestões para a continuidade desta pesquisa são apresentadas.

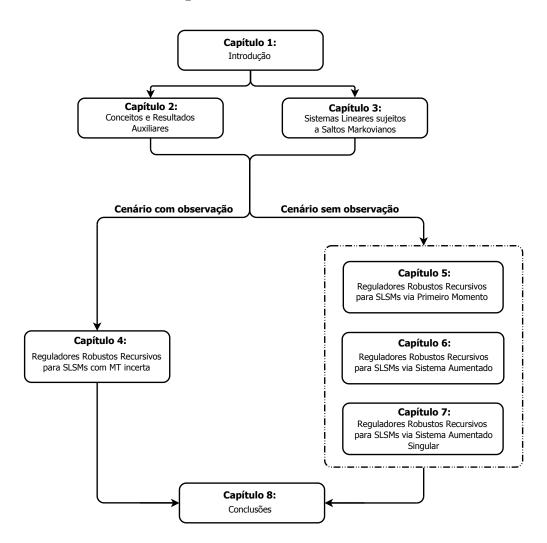


Figura 1.1 – Estrutura da tese

Capítulo 2

Conceitos e Resultados Auxiliares

Para o desenvolvimento desta tese serão utilizados conceitos relacionados com o problema de otimização de funções quadráticas sujeitas a restrições de igualdade. Uma das primeiras abordagens desenvolvidas para este problema consiste no *método de funções penalidade*, que aproxima o problema restrito por uma sequência de problemas irrestritos. Esta aproximação é realizada ao incluir o termo a ser minimizado na função objetivo por meio de um parâmetro que penaliza qualquer violação das restrições. Para valores crescentes atribuídos a este parâmetro, tem-se uma sucessão de problemas irrestritos cujas soluções correspondentes convergirão para a solução do problema restrito.

Adicionalmente, algumas variações do problema de mínimos quadrados são apresentadas. O problema de mínimos quadrados consiste em determinar a solução de sistemas de equações lineares sobredeterminados, ou seja, quando a quantidade de equações é maior que a de incógnitas. A solução para este problema pode ser encontrada por meio das equações normais e apresentada na forma de blocos matriciais.

Ao combinar o método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas obtém-se uma técnica denominada de mínimos quadrados regularizados robustos, que quando aplicada em problemas de controle e filtragem robustos possibilita determinar de forma eficiente soluções recursivas. Esta técnica será utilizada neste trabalho para deduzir os reguladores robustos para os SLSMs com matrizes de transição incertas.

2.1 Método de Funções Penalidade

Nesta seção são abordados os conceitos relacionados aos problemas de otimização não-linear sujeitos a restrições lineares de igualdade. Os resultados apresentados a seguir podem ser encontrados com maior grau de aprofundamento em Luenberger e Ye (2008), Bazaraa et al. (2006) e Nocedal e Wright (2006).

Considere o problema

$$\min f(x)$$
sujeito a $h(x) = 0$, (2.1)

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O princípio fundamental do método de funções penalidade consiste em adicionar as restrições do problema (2.1) à função objetivo por meio de um coeficiente positivo, aproximando o problema restrito (2.1) por um problema irrestrito na forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ q(\mu, x) = f(x) + \mu P(x), \tag{2.2}$$

sendo $q(\mu,x)$ a função auxiliar, $\mu > 0$ o parâmetro de penalidade e $P(x) = h(x)^T h(x)$ a função penalidade. Observe que o parâmetro de penalidade está associado ao termo h(x), de modo a penalizar qualquer violação das restrições, ou seja, sempre que $h(x) \neq 0$. Logo, μ determina o grau de penalidade e de aproximação entre os problemas.

De modo geral, o método de funções penalidade é um processo iterativo no qual, a cada passo $k \geq 0$, fixa-se o parâmetro de penalidade μ_k e determina-se a solução ótima x_k do problema (2.2). A cada iteração, o parâmetro μ_k é atualizado de modo que a sequência $\{\mu_k\}_{k=0}^{+\infty}$ seja crescente. À medida que μ_k tende ao infinito, as violações das restrições são penalizadas mais severamente, de forma que P(x) tenda a zero e, consequentemente, as soluções do problema irrestrito convergem para a solução do problema restrito (2.1).

Portanto, o método de funções penalidade consiste em minimizar uma sequência de funções objetivo auxiliares como (2.2), com valores crescentes de μ , até que a solução do problema original (2.1), com precisão suficiente, seja determinada. O Algoritmo 2.1 apresenta a formalização deste método.

Algoritmo 2.1 Método de Funções Penalidade

Inicialização: Seja $\epsilon > 0$ a precisão desejada e um escalar $\beta > 0$. Escolha um valor inicial para o parâmetro de penalidade $\mu_0 > 0$.

Passo Iterativo: Para cada $k \ge 0$, resolva o problema

minimizar
$$q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$$
,

utilizando um método de otimização não linear irrestrita, para obter a solução x_k .

Critério de parada: Se $\mu_k P(x_k) < \epsilon$, então pare. Caso contrário, faça $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$, substitua k por k+1 e retorne para o passo iterativo.

Na sequência, o Exemplo 2.1 ilustra a aplicabilidade do método de funções penalidade na solução de problemas de otimização sujeitos a restrições lineares de igualdade.

Exemplo 2.1 Considere o seguinte problema de otimização restrito

$$\min_{x,y} f(x,y) = x^2 + y^2 + 6$$

sujeito a $x + y + 3 = 0$.

Seja $P(x,y) = (x + y + 3)^2$, então a função auxiliar é dada por

$$q(\mu_k, x_k, y_k) = x_k^2 + y_k^2 + 6 + \mu_k (x_k + y_k + 3)^2.$$

Observe que a função $q(\mu_k, x_k, y_k)$ é convexa para todo valor de $\mu > 0$. Logo, uma condição necessária e suficiente para a otimalidade é que o gradiente da função auxiliar $q(\mu_k, x_k, y_k)$ seja nulo, resultando em

$$\frac{\partial q(\mu_k, x_k, y_k)}{\partial x_k} = x_k + \mu_k (x_k + y_k + 3) = 0 \quad e$$
$$\frac{\partial q(\mu_k, x_k, y_k)}{\partial y_k} = y_k + \mu_k (x_k + y_k + 3) = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações, tem-se que

$$x_k = y_k = \frac{-3\mu_k}{2\mu_k + 1}.$$

Quando k tende ao infinito, obtemos a seguinte solução ótima do problema restrito

$$x^* = y^* = -1.5$$
 com $f(x^*, y^*) = 10.5$.

A Tabela 2.1 apresenta os resultados do método de funções penalidade para $\mu_k = 10^k$ e a Figura 2.1 o comportamento das funções $f(x_k,y_k)$, $q(\mu_k,x_k,y_k)$ e $P(x_k,y_k)$. Note que, as propriedades apresentadas nos Lemas 2.1 e 2.2 são satisfeitas.

Tabela 2.1 – Iterações do método de funções penalidade para o Exemplo 2.1

k	x_k	$f(x_k,y_k)$	$q(\mu_k, x_k, y_k)$	$P(x_k,y_k)$	$\mu_k P(x_k, y_k)$
0	-1,00000	8,00000	9,00000	1,00000	1,00000
1	-1,42857	10,08163	10,28571	0,02040	0,20408
2	-1,49253	10,45533	10,47761	0,00022	0,02227
i	:	:	:	:	:
15	-1,49999	10,49999	10,49999	$1,77 \times 10^{-30}$	$1,77 \times 10^{-15}$
16	-1,50000	10,50000	10,50000	0	0
17	-1,50000	10,50000	10,50000	0	0

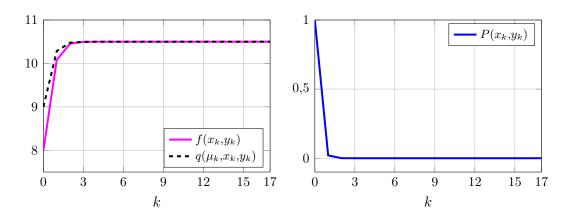


Figura 2.1 – Ilustração das iterações do método de funções penalidade

A convergência deste método é garantida pelos resultados apresentados a seguir. As demonstrações podem ser encontradas em Luenberger e Ye (2008).

Definição 2.1 Uma função $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função penalidade se satisfaz as seguintes condições:

- i. P é uma função contínua;
- *ii.* $P(x) \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- iii. P(x) = 0 se, e somente se x é viável, ou seja, h(x) = 0.

As relações entre o problema restrito e a sequencia de problemas irrestritos são descritas nos Lemas 2.1 e 2.2.

Lema 2.1 (LUENBERGER; YE, 2008) Sejam $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma sequência de parâmetros de penalidade e $q(\mu_k,x)$ a função dada por $q(\mu_k,x) = f(x) + \mu_k P(x)$. Então, são verdadeiras as sequintes propriedades:

- i. $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1});$
- *ii.* $P(x_k) \ge P(x_{k+1});$
- *iii.* $f(x_k) \le f(x_{k+1})$.

Lema 2.2 (LUENBERGER; YE, 2008) Seja x^* uma solução para o problema (2.1). Então, para cada k tem-se

$$f(x^*) \ge q(\mu_k, x_k) \ge f(x_k).$$

Definição 2.2 Um ponto x^* é um ponto limite da sequência $\{x_k\}$ se existir uma subsequência de $\{x_k\}$ que converge para x^* . Dessa maneira, x^* é um ponto limite de $\{x_k\}$ se existir um subconjunto $\mathcal K$ dos inteiros positivos tal que $\{x_k\}_{k\in\mathcal K}$ converge para x^* .

A verificação que qualquer ponto limite da sequência $\{x_k\}$ é uma solução para o problema de minimização (2.1) é dada pelo Teorema 2.1 e segue dos resultados anteriores.

Teorema 2.1 (LUENBERGER; YE, 2008) Seja $\{x_k\}$ uma sequência gerada pelo método de funções penalidade. Então, qualquer ponto limite da sequência é uma solução para (2.1).

2.2 Problemas de Mínimos Quadrados

Nesta seção será apresentada a metodologia de solução de problemas de mínimos quadrados, a qual se baseia em uma estrutura apresentada na forma de blocos matriciais. A combinação do método de função penalidade com esta metodologia aplicada ao problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas fornece a técnica de mínimos quadrados regularizados robustos, que pode ser aplicada em problemas de controle e filtragem robustos.

2.2.1 Mínimos Quadrados Ponderados

Considere o problema de otimização

$$\min_{x} J(x) \tag{2.3}$$

com a função quadrática dada por

$$J(x) = ||Ax - b||_W^2 = (Ax - b)^T W (Ax - b),$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{n,n}$ (matriz de ponderação) simétrica e definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ matriz conhecida, $b \in \mathbb{R}^n$ vetor conhecido e $x \in \mathbb{R}^m$ vetor de incógnitas. A solução ótima do problema (2.3) é apresentada no Lema 2.3, cuja demonstração pode ser encontrada em Kailath et al. (2000).

Lema 2.3 (KAILATH et al., 2000) Um vetor x^* é uma solução mínima quadrática ponderada do problema (2.3) se, e somente se, ele satisfaz a equação normal

$$A^T W A x^* = A^T W b.$$

Quando A tem posto coluna pleno, existe uma única solução mínima quadrática ponderada x^* dada por

$$x^* = \left(A^T W A\right)^{-1} A^T W b,$$

e o valor mínimo da função J(x) pode ser reescrito como

$$J(x^*) = \|A x^* - b\|_W^2 = b^T \left[W - W A \left(A^T W A \right)^{-1} A^T W \right] b.$$

O próximo resultado estabelece algumas equivalências com relação à estrutura matricial da solução do problema (2.3), permitindo obter a solução do problema de mínimos quadrados ponderados a partir de blocos matriciais.

Lema 2.4 (CERRI, 2009) Suponha que $W = W^T \succ 0$. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:

i.
$$x^* \in \arg \min_{x} \{(Ax - b)^T W (Ax - b)\};$$

ii. $x = x^*$ é uma solução de $A^TWAx = A^TWb$;

Se A é posto coluna pleno, então a única solução para a equação de (ii) e o custo ótimo são dados por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & b \\ I & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ O \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Mínimos Quadrados Ponderados Restrito

Considere o problema de determinar a solução ótima z^* para

$$\min_{z} F(z) = \|Mz - w\|_{V}^{2}$$
sujeito a $Nz = y$, (2.4)

sendo $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ (matriz de ponderação) simétrica e definida positiva, $M \in \mathbb{R}^{n,m}$ e $N \in \mathbb{R}^{k,m}$ matrizes conhecidas, $w \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$ vetores conhecidos e $z \in \mathbb{R}^m$ vetor de incógnitas. Associado a (2.4), tem-se para cada $\mu > 0$, o seguinte problema de minimização irrestrito

$$\min_{x_{\mu}} J(x_{\mu}) = (Ax_{\mu} - b)^{T} W_{\mu} (Ax_{\mu} - b)$$
sendo $x_{\mu} := z$, $A := \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$, $W_{\mu} := \begin{bmatrix} V & O \\ O & \mu I \end{bmatrix}$ e $b := \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$. (2.5)

A solução ótima do problema (2.4) é apresentada na Lema 2.5, a qual é obtida a partir da minimização de um funcional penalizado e dada sob a forma do Lema 2.4. A demonstração pode ser encontrada em Cerri (2013).

Lema 2.5 (CERRI et al., 2010; CERRI, 2013) Considere os problemas de otimização (2.4) e (2.5). Suponha que a matriz $A = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno. Então,

i. para cada μ > 0, a solução ótima x_{μ}^* e valor mínimo $J(x_{\mu}^*)$ referentes ao problema de minimização sem restrição (2.5) são dados por

$$\begin{bmatrix} x_{\mu}^* \\ J(x_{\mu}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & b \\ I & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{\mu}^{-1} & A \\ A^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ O \end{bmatrix};$$

ii. quando a matriz N tem posto linha pleno, a solução ótima $z^* = \lim_{\mu \to +\infty} x_{\mu}^*$ e o valor mínimo $F(z^*) = \lim_{\mu \to +\infty} J(x_{\mu}^*)$ referentes ao problema de minimização (2.4) são dados por

$$\begin{bmatrix} z^* \\ F(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & w \\ O & y \\ I & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & O & M \\ O & O & N \\ M^T & N^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ y \\ O \end{bmatrix}.$$

O Exemplo 2.2 ilustra a aplicabilidade da Lema 2.5 na solução de problemas de minimização com restrição de igualdade.

Exemplo 2.2 Considere o problema de minimização restrita do Exemplo 2.1,

$$\min_{x,y} F(x,y) = x^2 + y^2 + 6$$

sujeito a $x + y + 3 = 0$.

Observe que este problema pode ser reescrito na forma de um problema de mínimos quadrados ponderados restrito

$$\begin{split} \min_{\mathcal{Z}} \ F(\mathcal{Z}) &= (\mathcal{M}\,\mathcal{Z} - \mathcal{W})^T\,\mathcal{V}\,(\mathcal{M}\,\mathcal{Z} - \mathcal{W}) \\ \text{sujeito a} \ \mathcal{N}\,\mathcal{Z} &= \mathcal{Y}, \end{split}$$

quando são feitas as sequintes identificações:

$$\mathcal{Z} \leftarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathcal{M} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{W} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{V} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{N} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \ e \ \mathcal{Y} \leftarrow -3.$$

A solução ótima pode ser determinada iterativamente a partir dos valores atribuídos ao parâmetro de penalidade μ , conforme o item (i) do Lema 2.5. Dessa forma, a solução $X^* = (x^*, y^*)$ é dada através dos seguintes blocos matriciais:

$$\begin{bmatrix} \chi_{\mu,k}^* \\ J(\chi_{\mu,k}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\mu_k^{-1}} & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A Tabela 2.2 apresenta os resultados obtidos por este método para $\mu_k = 10^k$. Note que, os valores encontrados para as variáveis x_k e y_k são semelhantes aos apresentados na Tabela 2.1 para o método de funções penalidade. Além disso, tem-se que $J(\mathfrak{X}_{\mu,k}) = q(\mu_k, x_k, y_k)$, comprovando a equivalência entre os métodos.

k	$x_{\mu,k}$	$y_{\mu,k}$	$F(x_{\mu,k},y_{\mu,k})$	$J(\mathfrak{X}_{\mu,k})$
0	-1,00000	-1,00000	8,00000	9,00000
1	-1,42857	-1,42857	10,08163	10,28571
2	-1,49253	-1,49253	10,45533	10,47761
:	:	:	:	:
15	-1,49999	-1,49999	10,49999	10,49999
16	-1,50000	-1,50000	10,50000	10,50000
17	-1,50000	-1,50000	10,50000	10,50000

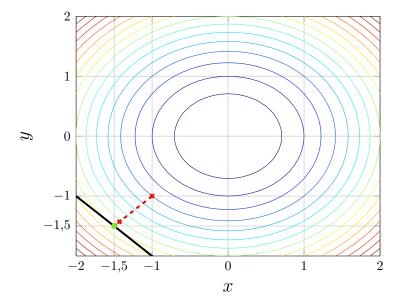
Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.2

No entanto, a solução ótima (x^*, y^*) também pode ser obtida em apenas um passo, quando $\mu \to \infty$, como no item (ii) do Lema 2.5. Logo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ F(x^*, y^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,50 \\ -1,50 \\ 10,50 \end{bmatrix}.$$

A Figura 2.2 mostra a representação geométrica do problema de minimização restrita, apresentado as curvas de níveis da função objetivo F(x,y), a restrição (em preto), os pontos (x_k,y_k) (em vermelho) e a solução ótima (em verde).

Figura 2.2 – Representação geométrica da solução do Exemplo 2.2



2.2.3 Mínimos Quadrados Regularizados

Considere o problema de minimização definido por

$$\min_{x} J(x), \tag{2.6}$$

com a função J(x) dada por um funcional quadrático regularizado da forma

$$J(x) = ||x||_Q^2 + ||Ax - b||_W^2$$

= $x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b),$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ (matriz de regularização) simétrica e definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n,n}$ simétrica e definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ matriz conhecida, $b \in \mathbb{R}^n$ vetor conhecido e $x \in \mathbb{R}^m$ vetor de incógnitas. A solução ótima do problema (2.6) é apresentada no Lema 2.6, cuja demonstração pode ser encontrada em Kailath et al. (2000).

Lema 2.6 (KAILATH et al., 2000) A solução ótima do problema (2.6) é dada por

$$x^* = \left(Q + A^T W A\right)^{-1} A^T W b,$$

e o valor mínimo da função J(x) pode ser reescrito como

$$J(x^*) = b^T (W^{-1} + AQA^T)^{-1} b.$$

2.2.4 Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas

Considere o problema de mínimos quadrados regularizados definido em (2.6). Suponha que a matriz A e o vetor b estejam sob a influência de incertezas δA e δb , respectivamente. Assim, o problema de otimização passa a ser definido como

$$\min_{x} \max_{\delta A, \delta b} J(x), \tag{2.7}$$

com a função J(x) dada por

$$J(x) = ||x||_Q^2 + ||(A + \delta A)x - (b + \delta b)||_W^2$$

= $x^T Q x + [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]^T W [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]$

cujas incertezas paramétricas δA e δb são modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_A & E_b \end{bmatrix},$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ (matriz de regularização) simétrica e definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n,n}$ simétrica e definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ matriz conhecida, $b \in \mathbb{R}^n$ vetor conhecido, $\{\delta A, \delta b\}$ matrizes de pertubação, $\{H, E_A, E_b\}$ matrizes conhecidas de dimensões compatíveis, Δ uma matriz de contração arbitrária ($\|\Delta\| \le 1$) e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita. A solução ótima do problema (2.7) é apresentada no Teorema 2.2, cuja demonstração pode ser encontrada em Sayed e Nascimento (1999).

Teorema 2.2 (SAYED; NASCIMENTO, 1999; SAYED, 2001) O problema (2.7) admite uma única solução x* dada por

$$x^* = \left(\widehat{Q} + A^T \widehat{W} A\right)^{-1} \left(A^T \widehat{W} b + \widehat{\lambda} E_A^T E_b\right),$$

sendo que as matrizes de ponderação modificadas \widehat{Q} e \widehat{W} são dadas por

$$\widehat{Q} := Q + \widehat{\lambda} E_A^T E_A,$$

$$\widehat{W} := W + W H (\widehat{\lambda} I - H^T W H)^{\dagger} H^T W,$$

 $e \hat{\lambda}$ é um parâmetro escalar não-negativo determinado a partir do problema de minimização

$$\hat{\lambda} \in \arg \min_{\lambda > \|H^T W H\|} \Gamma(\lambda),$$

sendo a função $\Gamma(\lambda)$ definida por

$$\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_{Q(\lambda)}^2 + \lambda \|E_A x(\lambda) - E_b\|^2 + \|A x(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2$$

com

$$Q(\lambda) := Q + \lambda E_A^T E_A,$$

$$W(\lambda) := W + W H (\lambda I - H^T W H)^{\dagger} H^T W,$$

$$x(\lambda) := (Q(\lambda) + A^T W(\lambda) A)^{-1} (A^T W(\lambda) b + \lambda E_A^T E_b).$$

O Lema 2.7 apresenta a solução ótima em uma estrutura na forma de blocos matriciais.

Lema 2.7 (CERRI, 2013) Suponha $Q \succ 0$ e $W \succ 0$. A solução x^* do problema (2.7) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & b \\ O & E_b \\ I & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & O & O & I \\ O & \widehat{W}^{-1} & O & A \\ O & O & \widehat{\lambda}^{-1}I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ b \\ E_b \\ O \end{bmatrix},$$

sendo \widehat{W} e $\widehat{\lambda}$ definidos de acordo com o Teorema 2.2.

2.2.5 Mínimos Quadrados Regularizados Robustos

Considere o problema de determinar a solução ótima z^* para

$$\min_{z} \max_{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y} F(z) = ||z||_{U}^{2} + ||(M + \delta M)z - (w + \delta w)||_{V}^{2}
\text{sujeito a} (N + \delta N)z = y + \delta y,$$
(2.8)

com $M \in \mathbb{R}^{r,s}$ e $N \in \mathbb{R}^{l,s}$ matrizes conhecidas, $w \in \mathbb{R}^r$ e $y \in \mathbb{R}^l$ vetores de medida, $z \in \mathbb{R}^s$ um vetor desconhecido, $U \succ 0$ e $V \succ 0$ matrizes de ponderação e $\{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y\}$ são incertezas modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta M \ \delta w \end{bmatrix} = L_1 \triangle_1 \ \begin{bmatrix} E_M \ E_w \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \delta N \ \delta y \end{bmatrix} = L_2 \triangle_2 \ \begin{bmatrix} E_N \ E_y \end{bmatrix},$$

sendo $\{L_1, L_2\}$ matrizes não-nulas, $\{\triangle_1, \triangle_2\}$ matrizes de contração arbitrárias e $\{E_M, E_w, E_N, E_y\}$ matrizes conhecidas. Associado com (2.8), tem-se para cada parâmetro de penalidade $\mu > 0$ o seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{x_{\mu}} \max_{\delta A, \delta b} J(x_{\mu}) = \|x_{\mu}\|_{Q}^{2} + \|(A + \delta A) x_{\mu} - (b + \delta b)\|_{W_{\mu}}^{2}$$

$$\operatorname{com} \left[\delta A \, \delta b\right] = H \, \Delta \, \left[E_{A} \, E_{b}\right]$$
(2.9)

sendo
$$x_{\mu} = z$$
, $Q = U$, $A = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$, $\delta A = \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$, $\delta b = \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix}$, (2.10)

$$W_{\mu} = \begin{bmatrix} V & O \\ O & \mu I_{l} \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} L_{1} & O \\ O & L_{2} \end{bmatrix}, \ \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{1} & O \\ O & \Delta_{2} \end{bmatrix}, \ E_{A} = \begin{bmatrix} E_{M} \\ E_{N} \end{bmatrix} \ e \ E_{b} = \begin{bmatrix} E_{w} \\ E_{y} \end{bmatrix}.$$

Observe que o problema irrestrito (2.9) na forma de mínimos quadrados regularizados com incertezas é uma aproximação do problema restrito (2.8) obtido a partir do método de funções penalidade. Além disso, o problema (2.8) é uma generalização do problema considerado por Cerri e Terra (2017), visto que assumimos a existência de parâmetros incertos na função objetivo.

O Lema 2.8 apresenta a solução ótima para o problema restrito (2.8) obtida por uma estrutura matricial derivada do Lema 2.7.

Lema 2.8 Considere os problemas de otimização (2.8) e (2.9). Suponha que a matriz $\begin{bmatrix} I_s \\ A \\ E_A \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno. Então,

i. para cada μ > 0, a solução ótima x_{μ}^{*} e o valor mínimo $J(x_{\mu}^{*})$ referentes ao problema irrestrito (2.9) são dados por

$$\begin{bmatrix} x_{\mu}^{*} \\ J(x_{\mu}^{*}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & b \\ O & E_{b} \\ I_{s} & 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} Q^{-1} & O & O & I_{s} \\ O & \widehat{W}_{\mu}^{-1} & O & A \\ O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I & E_{A} \\ I_{s} & A^{T} & E_{A}^{T} & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ b \\ E_{b} \\ O \end{bmatrix}$$
(2.11)

onde

$$\begin{split} \widehat{W}_{\mu}^{-1} &= diag \left(V^{-1} - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} L_1 L_1^T, \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} L_2 L_2^T \right) \\ e \ \widehat{\lambda}_{\mu} &= (1 + \alpha) \, || diag (L_1^T V L_1, \, \mu L_2^T L_2) ||, \, \, para \, \, algum \, \, \alpha > 0; \end{split}$$

ii. quando a matriz $\begin{bmatrix} N \\ E_M \\ E_N \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, a solução ótima $z^* = \lim_{\mu \to +\infty} x_{\mu}^*$ e o valor mínimo $F(z^*) = \lim_{\mu \to +\infty} J(x_{\mu}^*)$ referentes ao problema restrito (2.8) são dados por

$$\begin{bmatrix} z^* \\ F(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ O & w \\ O & y \\ O & E_w \\ O & E_y \\ I_s & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U^{-1} & O & O & O & O & I_s \\ O & V^{-1} & O & O & O & M \\ O & O & O & O & O & N \\ O & O & O & O & O & E_M \\ O & O & O & O & O & E_N \\ I_s & M^T & N^T & E_M^T & E_N^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ w \\ y \\ E_w \\ E_y \\ O \end{bmatrix}.$$
(2.12)

Demonstração.

i. Considere o parâmetro de penalidade $\mu > 0$, a função penalidade

$$P(x_{\mu}) = \left[(N + \delta N)x_{\mu} - (y + \delta y) \right]^{T} \mu \left[(N + \delta N)x_{\mu} - (y + \delta y) \right]$$

e a função auxiliar

$$J(x_{\mu}) = F(x_{\mu}) + \mu P(x_{\mu})$$

$$= x_{\mu}^{T} U x_{\mu} + \left[(M + \delta M) x_{\mu} - (w + \delta w) \right]^{T} V \left[(M + \delta M) x_{\mu} - (w + \delta w) \right] + \left[(N + \delta N) x_{\mu} - (y + \delta y) \right]^{T} \mu \left[(N + \delta N) x_{\mu} - (y + \delta y) \right]$$

em que $x_{\mu} := z$. Observe que $J(x_{\mu})$ pode ser reescrito como

$$J(x_{\mu}) = x_{\mu}^{T} U x_{\mu} + \left(\begin{bmatrix} M + \delta M \\ N + \delta N \end{bmatrix} x_{\mu} - \begin{bmatrix} w + \delta w \\ y + \delta y \end{bmatrix} \right)^{T} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} (\bullet).$$

Assim, o problema restrito (2.8) pode ser aproximado pelo problema irrestrito (2.9) por meio do método de funções penalidade. Para cada $\mu > 0$, a solução do problema irrestrito é obtida pela aplicação do Lema 2.7 com as identificações em (2.10), resultando em (2.11). Além disso, considera-se a aproximação proposta por Sayed (2001) para $\hat{\lambda}$, na qual não se realiza a minimização da função $\Gamma(\lambda)$, assumindo $\hat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) ||diag(L_1^T V L_1, \mu L_2^T L_2)||$, para algum $\alpha > 0$.

ii. Pelo Teorema 2.1, a solução ótima do problema restrito é obtida a partir do problema irrestrito quando μ tende ao infinito. Além disso, de acordo com o Teorema 2.2 temse que $\hat{\lambda} \in (||H^TWH||,\infty)$ para cada $\mu \in (0,\infty)$. Dessa forma, quando $\mu \to \infty$ temse que $\hat{\lambda} \to \infty$. Consequentemente, obtém-se a solução ótima z^* independente das variáveis μ e $\hat{\lambda}$. A invertibilidade do bloco matricial na expressão (2.12) permanece garantida pelo Lema A.5 à medida que $\mu \to \infty$.

O Exemplo 2.3 ilustra a aplicabilidade do Lema 2.8 na solução de problemas de otimização com parâmetros incertos.

Exemplo 2.3 Considere o seguinte problema de otimização restrito com incertezas

$$\min_{x,y,z} \max_{\alpha,\beta} F(x,y,z) = (1+9\alpha^2) x^2 + y^2 + (1+\alpha^2) z^2 + 6\alpha^2 xz +$$

Observe que este problema pode ser reescrito na forma de mínimos quadrados regularizados com incertezas

$$\min_{\mathcal{Z}} \max_{\delta \mathcal{M}, \delta \mathcal{W}, \delta \mathcal{N}, \delta \mathcal{Y}} F(\mathcal{Z}) = \|\mathcal{Z}\|_{\mathcal{U}}^2 + \|(\mathcal{M} + \delta \mathcal{M})\mathcal{Z} - (\mathcal{W} + \delta \mathcal{W})\|_{\mathcal{V}}^2$$

$$sujeito \ a \quad (\mathcal{N} + \delta \mathcal{N})\mathcal{Z} = \mathcal{Y} + \delta \mathcal{Y},$$

quando são feitas as seguintes identificações:

$$\mathcal{Z} \leftarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathcal{U} \leftarrow I_3, \ \mathcal{M} \leftarrow O_{2,3}, \ \delta \mathcal{M} \leftarrow \begin{bmatrix} 3\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{W} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \delta \mathcal{W} \leftarrow O_{2,1},$$

$$\mathcal{V} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathcal{N} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \delta \mathcal{N} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{Y} \leftarrow -1, \ \delta \mathcal{Y} \leftarrow -2\beta, \ L_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ L_2 \leftarrow 1,$$

$$\triangle_1 \leftarrow \frac{\alpha}{2}, \ \triangle_2 \leftarrow \beta, \ E_{\mathcal{M}} \leftarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ E_{\mathcal{W}} \leftarrow 0, \ E_{\mathcal{N}} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ e \ E_{\mathcal{Y}} \leftarrow -2.$$

A solução ótima pode ser determinada iterativamente a partir dos valores atribuídos ao parâmetro de penalidade μ , conforme o item (i) do Lema 2.8. Dessa forma, a solução $\mathfrak{X}=(x^*,y^*,z^*)$ é dada através dos seguintes blocos matriciais:

$$\begin{bmatrix} \chi_{\mu,k}^* \\ J(\chi_{\mu,k}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{3,3} & O_{3,1} \\ O_{5,3} & -1 \\ O_{5,3} & -2 \\ I_3 & O_{3,1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_3 & O_{3,5} & I_3 \\ 1 - \widehat{\lambda}_{\mu,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ O_{5,3} & 0 & 0 & \mu_k^{-1} - \widehat{\lambda}_{\mu,k}^{-1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\lambda}_{\mu,k}^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\lambda}_{\mu,k}^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & O_{3,5} & O_{3,3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O_{3,1} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ O_{3,1} \end{bmatrix}.$$

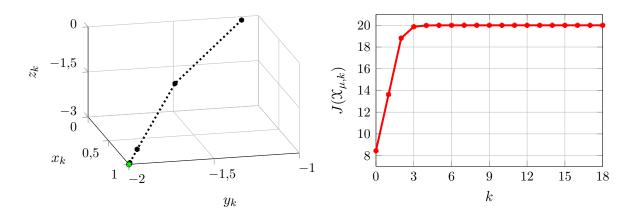
A Tabela 2.3 apresenta os resultados obtidos pelo método de mínimos quadrados regularizados robustos para $\mu_k = 10^k \ e \ \widehat{\lambda}_{\mu,k} = 1,5 ||diag(1, \mu_k)||$.

k	$x_{\mu,k}$	$y_{\mu,k}$	$z_{\mu,k}$	$J(\mathfrak{X}_{\mu,k})$
0	0,02706	-1,10567	-0,06958	8,44716
1	$0,\!45005$	-1,59786	-1,32803	13,62990
2	$0,\!89753$	-1,92740	-2,68811	18,81668
÷	:	:	:	:
16	0,99999	-1,99999	-2,99999	19,99999
17	1,00000	-2,00000	-3,00000	20,00000
18	1,00000	-2,00000	-3,00000	20,00000

Tabela 2.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.3

A Figura 2.3 mostra a representação geométrica das iterações do método de mínimos quadrados regularizados robustos, apresentando os pontos (x_k, y_k, z_k) (em preto), a solução ótima (em verde) e o comportamento da função $J(X_{\mu,k})$.

Figura 2.3 – Ilustração das iterações do mínimos quadrados regularizados robustos



No entanto, a solução ótima (x^*, y^*, z^*) também pode ser obtida em apenas um passo, quando $\mu \to \infty$, como no item (ii) do Lema 2.8. Logo, tem-se que

Capítulo $\it 3$

Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos

Neste capítulo introduzimos as principais características das *Cadeias de Markov*, que são um caso particular de processos estocásticos cuja probabilidade condicional de qualquer evento futuro depende apenas do evento atual, de modo que a sequência de eventos passados não exercem influência no evento futuro. Os conceitos apresentados podem ser encontrados com maior grau de aprofundamento em Clarke e Disney (1970) e Çinlar (1975).

Posteriormente, descrevemos de maneira geral os Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos, que formam uma classe de sistemas dinâmicos compostos por mais de um modo de operação, sendo que a alternância entre eles depende de uma cadeia de Markov associada a uma matriz de transição.

Neste trabalho, assumimos que as probabilidades de transição entre os modos de operação do sistema não podem ser determinadas com precisão e propomos um modelo para a sua representação em termos de limitantes em norma. Este modelo possibilita representar, de modo geral, as incertezas usualmente consideradas na literatura e obter soluções para o problema de controle com menor grau de complexidade quando comparadas com o modelo politópico (OLIVEIRA et al., 2009; TODOROV; FRAGOSO, 2016).

O problema de regulação de estados, que constitui o tópico principal desta tese, é contextualizado para os SLSMs de acordo com as informações disponíveis sobre a variável aleatória que representa a cadeia de Markov.

3.1 Cadeias de Markov

Considere que $(\Omega, \mathscr{F}, Pr)$ denota o espaço de probabilidades fundamental, onde Ω representa o espaço amostral, \mathscr{F} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e Pr uma medida de probabilidade em \mathscr{F} . Um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias, $\theta(k)$, indexadas por um parâmetro k de um conjunto arbitrário \mathscr{K} ($\mathscr{K} \neq \emptyset$), sendo representado

por $\Theta = \{\theta(k), k \in \mathcal{K}\}$. Os valores numéricos $i \in \mathcal{S} = \{1, ..., s\}$ que $\theta(k)$ pode assumir é denominado de estado do processo; além disso, $\theta(k) = i$ representa que o processo está no estado i no "instante" k. O conjunto \mathcal{S} é chamado de espaço de estados e o conjunto \mathcal{K} é o espaço de parâmetros e está contido no conjunto dos reais.

Um processo estocástico é considerado uma cadeia de Markov quando seu espaço de estados é discreto e possui a propriedade Markoviana, ou seja, para cada $k \in \mathcal{K}$ dado um valor para $\theta(k)$, os valores de $\theta(k+1)$ não são influenciados pelos valores de $\theta(k-t)$, $t=1,\ldots,k$, e nem de quaisquer outras variáveis, exceto $\theta(k)$. Assim, a cadeia de Markov é uma sequência de variáveis aleatórias tal que para qualquer k, o estado futuro $\theta(k+1)$ do processo independe dos estados passados $\theta(0), \theta(1), \ldots, \theta(k-1)$ contanto que o estado presente $\theta(k)$ seja conhecido. Este processo estocástico também é denominado de processo sem memória (em inglês, memoryless process), visto que os estados passados não são considerados.

Seja $Pr[\theta(k)=i]$ a probabilidade de $\theta(k)$ estar em um determinado estado i, no "instante" $k \in \mathcal{K} = \{0,1,\ldots N\}$. Então, pela propriedade Markoviana temos que a probabilidade de θ estar no estado $j \in \mathcal{S}$ no "instante" k+1 sabendo-se que θ está no estado $i \in \mathcal{S}$ no "instante" k é dada pela probabilidade condicional:

$$p_{ij}(k) = Pr[\theta(k+1) = j | \theta(0) = i_0, \theta(1) = i_1, \dots, \theta(k) = i]$$
$$= Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i]$$

sendo que $i_0, i_1, \ldots \in S$.

Observação 3.1 Se a probabilidade de transição não depender do valor de k, tem-se $p_{ij}(k) = p_{ij}$. Neste caso, a cadeia de Markov é chamada de homogênea ou estacionária.

As probabilidades de transição entre estados em um "instante" p_{ij} , podem ser representadas por meio de uma matriz denominada matriz de probabilidades de transição ou, simplesmente, matriz de transição, a qual é denotada por $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{s,s}$ onde s é a quantidade de estados da cadeia. Cada linha $i \in \mathbb{S}$ dessa matriz representa o estado atual e cada coluna $j \in \mathbb{S}$ representa o estado futuro do processo. Além disso, a matriz \mathbb{P} é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix},$$

em que $p_{ij} \in [0,1]$ e $\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$.

Definição 3.1

 \square A probabilidade inicial da variável aleatória θ estar no estado $i \in S$ é dada por $\pi_{i,0} = Pr[\theta(0) = i]$. O vetor $\pi_0 = [\pi_{1,0} \dots \pi_{s,0}]$ é denominado vetor de distribuição de probabilidade inicial.

3.1. Cadeias de Markov 49

 \square O vetor $\pi_k = [\pi_{1,k} \quad \pi_{2,k} \quad \dots \quad \pi_{s,k}]$ com $\pi_{i,k} = Pr[\theta(k) = i]$, $i \in S$, é denominado vetor de distribuição de probabilidades após k-passos e pode ser determinado pelo vetor de condições iniciais π_0 e pela k-ésima potência da matriz \mathbb{P} , isto é, $\pi_k = \pi_0 \mathbb{P}^k$.

 \square Quando existir, a probabilidade de regime permanente para o estado $i \in S$ é dada por

$$\pi_{i,\infty} = \lim_{k \to \infty} \pi_{i,k}.$$

Exemplo 3.1 (Modelo macroeconômico)

Considere um sistema econômico baseado no modelo multiplicador-acelerador de Samuelson (1939), o qual relaciona as despesas governamentais com a renda nacional. Neste modelo, a renda nacional Y_k no período k é definida como a soma de três componentes: consumo C_k , investimento privado I_k e gastos do governo u_k .

$$Y_k = C_k + I_k + u_k.$$

Considere que os gastos do governo u_k são exógenos e o consumo corrente C_k é estritamente proporcional à renda no período anterior Y_{k-1} , ou seja,

$$C_k = a Y_{k-1},$$

onde $a \in (0,1)$ representa a propensão marginal a consumir. Já o investimento, considerase do tipo induzido, sendo uma função da tendência vigente dos gastos de consumo e, portanto, uma função das alterações na renda nacional. Assim, tem-se que

$$I_k = b (C_k - C_{k-1})$$

= $ab (Y_{k-1} - Y_{k-2}),$

sendo b o coeficiente de aceleração e ab > 0 a proporção entre o capital existente e os rendimentos. Portanto, a renda nacional pode ser reescrita como

$$Y_k = a(1+b)Y_{k-1} - abY_{k-2} + u_k.$$

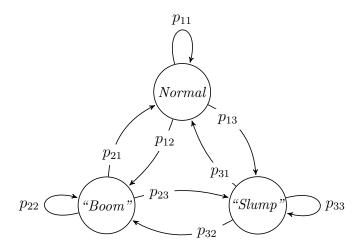
Note que a renda nacional de um país pode ser afetada pelos valores atribuídos aos coeficientes a e b. Desta forma, as diferentes combinações entre a e b definem o ciclo econômico de um país. Blair e Sworder (1975) com base nos dados obtidos do Departamento do Comércio dos Estados Unidos da América (EUA) no período de 1929 a 1971 determinaram três diferentes fases do ciclo econômico: normal, "boom" (auge) e "slump" (crise). Cada fase deste ciclo foi associada a um estado da cadeia de Markov conforme apresentado na Tabela 3.1¹ e esquematizado na Figura 3.1, onde estão representadas as probabilidades de transição.

Considera-se os valores associados com os adotados por Costa et al. (1999).

Estado	Fase econômica	a	b
$\theta(k) = 1$	Normal	0,7	3,572
$\theta(k) = 2$	"Boom"	0,2	21,5
$\theta(k) = 3$	"Slump"	0,1	-53

Tabela 3.1 – Relação entre o estado da cadeia, fase econômica e valores de a e b

Figura 3.1 – Diagrama de transição de estados para o modelo macroeconômico



3.2 Descrição Geral dos SLSMs

Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos representam uma classe de sistemas dinâmicos cujos parâmetros alteram-se de forma abrupta em certos instantes aleatórios e se comportam como sistemas lineares usuais entre estes instantes. Estas alterações são governadas por uma variável aleatória $\theta(k)$, que evolui de acordo com uma cadeia de Markov associada a uma matriz de transição, ou seja, a cada instante de tempo k o sistema está associado a um determinado estado da cadeia, o qual também é denominado como $modo\ de\ operação$.

Os SLSMs abordados neste trabalho são representados pelo sistema discreto no tempo descrito por

$$x_{k+1} = (F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)}) x_k + (G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)}) u_k, \ \forall k \ge 0, \ \theta(0) \sim \pi_0$$
 (3.1)

sendo o par $(x_k, \theta(k))$ o estado do sistema e u_k a entrada de controle, uma variável cujo valor podemos definir ou projetar de forma a minimizar um critério associado ao sistema dinâmico. As matrizes de parâmetros $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são conhecidas ou nominais. Enquanto que as matrizes $\delta F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são desconhecidas ou incertas.

As matrizes de parâmetros dependem da variável aleatória $\theta(k)$ que admite valores no conjunto S o qual contém s modos de operação do SLSM (3.1). Sempre que $\theta(k) = i$, o sistema evolui de acordo com o modo i sendo $F_{\theta(k)} = F_i$ uma matriz tomada de um conjunto conhecido de matrizes $F = (F_1, \dots, F_s)$. As demais matrizes dependentes de $\theta(k)$ são consideradas de maneira análoga.

Exemplo 3.2 Considere o modelo macroeconômico apresentado no Exemplo 3.1. O modelo multiplicador-acelerador de Samuelson pode ser representado como um sistema dinâmico. Para tal, basta definir a renda nacional como o estado do sistema e as despesas governamentais como a entrada de controle. Assim, tem-se que

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k$$

$$endo x_{k+1} = \begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ Y_k \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a(1+b) \end{bmatrix} e G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(3.2)$$

sendo

Conforme apresentado na Tabela 3.1, para cada valor atribuído aos coeficientes a e b tem-se uma fase do ciclo econômico associada a um estado da cadeia de Markov. Assim, para o sistema dinâmico (3.2) tem-se uma matriz de parâmetros F distinta para cada fase do ciclo econômico

Normal:
$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,5 & 3,2 \end{bmatrix}$$
;
"Boom": $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4,3 & 4,5 \end{bmatrix}$;
"Slump": $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5,3 & -5,2 \end{bmatrix}$.

Dessa maneira, quando a economia está em uma fase no período k, por exemplo, na fase normal, a renda nacional é descrita pela equação dinâmica $x_{k+1} = F_1 x_k + G u_k$ e assim analogamente para as demais fases. Portanto, o sistema dinâmico que descreve a renda nacional é um SLSM.

No entanto, na maioria dos casos os coeficientes a e b não são conhecidos com precisão devido às oscilações na economia. Nesse contexto, considere que para os EUA a propensão marginal a consumir e o coeficiente acelerador não sejam conhecidos com exatidão, mas que seja possível determinar uma faixa de valores para cada coeficiente em cada fase. Assim, para cada fase, a matriz F também não será exata, mas pode ser modelada como a soma de duas matrizes: uma de valores conhecidos ou nominais $F_{\theta(k)}$, e outra com valores imprecisos ou incertos $\delta F_{\theta(k)}$. Portanto, nesse caso, a renda nacional é representada pelo seguinte sistema linear incerto sujeito a saltos Markovianos (SLISM)

$$x_{k+1} = \left(F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)}\right) x_k + G u_k$$

com os sequintes parâmetros²

Normal:
$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}$$
 $e \ \delta F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \Delta_1, \ \Delta_1 \in (-1,1);$

"Boom": $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}$ $e \ \delta F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \Delta_2, \ \Delta_2 \in (-1,1);$

"Slump": $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.3 & -5.2 \end{bmatrix}$ $e \ \delta F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \Delta_3, \ \Delta_3 \in (-1,1).$

3.2.1 Matrizes de Transição Incertas

Nos SLSMs, a matriz de transição desempenha um papel essencial no comportamento do sistema, visto que pode afetar as características dinâmicas, como a estabilidade (veja o Exemplo 6.1). Na literatura de sistemas Markovianos, a maior parte das pesquisas assume que as probabilidades de transição entre os modos de operação são completamente conhecidas. Entretanto, em problemas práticos, obter informações precisas sobre essas probabilidades pode ser uma tarefa árdua, de alto custo e/ou despender muito tempo. Dessa forma, muitos pesquisadores têm incorporado algum tipo de imprecisão/incerteza na matriz de transição, assim vários modelos para representar as probabilidades incertas podem ser encontrados na literatura, sendo que os mais utilizados são:

□ *Domínios politópicos:* a matriz de transição pertence a um conjunto convexo cujos vértices também são matrizes de transição. De modo geral, tem-se o conjunto

$$\Lambda = \left\{ \mathbb{P} \mid \mathbb{P} = \sum_{\ell=1}^{\eta} \alpha_{\ell} \, \mathbb{P}^{\ell} \, \operatorname{com} \, \alpha_{\ell} \ge 0 \, \operatorname{e} \, \sum_{\ell=1}^{\eta} \alpha_{\ell} = 1 \right\}.$$

Para exemplificar, considere a matriz de transição $\mathbb P$ pertencente ao politopo Λ com dois vértices dados por

$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

Logo, toda matriz de probabilidades \mathbb{P} que satisfaça $\mathbb{P} = \alpha_1 \mathbb{P}^1 + \alpha_2 \mathbb{P}^2$, com $\alpha_1 \in [0; 1]$ e $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, pertence ao conjunto Λ .

□ Probabilidades intervalares ou limitadas: as probabilidades de transição são definidas em intervalos cujos limitantes são conhecidos, ou seja, considera-se $0 \le \underline{p_{ij}} \le p_{ij} \le \overline{p_{ij}} \le 1$, como a MT dada por

$$\mathbb{P} = \left[\begin{array}{cc} [0,35;0,45] & [0,55;0,65] \\ [0,25;0,35] & [0,65;0,75] \end{array} \right].$$

Considera-se os valores adotados por Lu et al. (2013). Note que, para $\Delta_{\theta(k)} = -1$ e $\Delta_{\theta(k)} = 1$ obtém-se os vértices da combinação convexa considerada por Lu et al. (2013).

☐ Probabilidades parcialmente (des)conhecidas: apenas algumas probabilidades de transição são conhecidas, sendo que os elementos desconhecidos são representados pelo símbolo "?", como ilustrado pela matriz a seguir,

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & ? & ? \\ ? & ? & 0.4 \\ ? & 0.2 & ? \end{bmatrix}.$$

☐ Matriz de transição (completamente) desconhecida: não há informações disponíveis sobre as probabilidades de transição. Neste caso, todos os elementos da MT são denotados por "?", como na matriz dada por

$$\mathbb{P} = \left[\begin{array}{cc} ? & ? \\ ? & ? \end{array} \right].$$

Cabe ressaltar que uma mesma matriz de transição, pode ser representada por dois ou mais modelos distintos. Por exemplo, a MT completamente desconhecida pode ser modelada por probabilidades intervalares, visto que pela definição tem-se que $p_{ij} \in [0;1]$ para todo $i,j \in S$.

Neste trabalho, considera-se que as probabilidades de transição associadas à cadeia de Markov podem ser completamente conhecidas ou possuir algum tipo de incerteza. Assumiremos três classes de MT: conhecida, parcialmente desconhecida $p_{ij} \in [\underline{p_{ij}}, \overline{p_{ij}}] \subset [0;1]$ (probabilidades em domínio politópico, limitadas ou com alguns elementos desconhecidos) e desconhecida $p_{ij} \in [0;1]$.

Para representar as MTs, propomos um modelo em termos de limitantes em norma, o qual possibilita modelar os diferentes tipos de incertezas geralmente considerados na literatura. Dessa forma, assumimos que a matriz de transição é representada por

$$\mathbb{P}^{\delta} := \left[\mathbb{P} + \delta \mathbb{P} \right] = \left[p_{ij} + \delta p_{ij} \right] \in \mathbb{R}^{s,s}, \tag{3.3}$$

sendo \mathbb{P} uma matriz de parâmetros nominais e $\delta \mathbb{P}$ uma matriz de incertezas. As probabilidades incertas δp_{ij} são modeladas da seguinte forma:

$$\delta p_{ij} = h_{ij} \, \Delta_{ij} \, e_{ij}, \tag{3.4}$$

em que h_{ij} , e_{ij} são escalares conhecidos e Δ_{ij} é um escalar pertencente ao intervalo $[\underline{\gamma}_{ij}, \overline{\gamma}_{ij}]$. As probabilidades de transição do modo i no instante k para o modo j no instante k+1 satisfazem as seguintes condições:

$$p_{ij}^{\delta} = Pr \left[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i \right] = p_{ij} + \delta p_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{s} (p_{ij} + \delta p_{ij}) = 1 \quad \text{e} \quad 0 \le p_{ij} + \delta p_{ij} \le 1.$$
(3.5)

Considera-se que as probabilidades de distribuição da cadeia de Markov também não são conhecidas exatamente e satisfazem as seguintes condições:

$$\pi_{i,k}^{\delta} = Pr \left[\theta(k) = i \right] = \pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k},$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k} \right) = 1 \quad \text{e} \quad 0 \le \pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k} \le 1,$$
(3.6)

sendo $\pi_{i,k}$ escalares conhecidos e $\delta \pi_{i,k}$ escalares incertos modelados como

$$\delta \pi_{i,k} = m_{i,k} \, \overline{\Delta}_{i,k} \, n_{i,k}, \tag{3.7}$$

em que $m_{i,k}$ e $n_{i,k}$ são escalares conhecidos e $\overline{\Delta}_{i,k}$ é um escalar pertencente ao intervalo $[\underline{\eta}_{i,k},\overline{\eta}_{i,k}]$. O vetor de distribuição do estado da cadeia de Markov π_k é definido como $\pi_k = \pi_0 \mathbb{P}^k$, quando a matriz de transição é conhecida. Para as matrizes de transição incertas, o vetor π_k^{δ} pode ser determinado, por exemplo, pelo *Cálculo dos Vértices* (HARTFIEL, 1998), *Método Hi-Lo* (HARTFIEL, 1998) ou *Simulação de Monte Carlo* (SAMUELS, 2001). Assuma que

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = \alpha_i, \quad \sum_{j=1}^{s} \delta p_{ij} = 1 - \alpha_i,$$

$$\sum_{i=1}^{s} \pi_{i,k} = \beta_{i,k} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{s} \delta \pi_{i,k} = 1 - \beta_{i,k}$$
(3.8)

com $\alpha_i, \beta_{i,k} \in [0,1], \forall i \in S$. Note que, quando $\alpha_i = 1, \forall i \in S$, a MT é conhecida e quando $\alpha_i \in [0,1), \forall i \in S$, é incerta. O Exemplo 3.3 ilustra o modelo adotado para representar a MT incerta, considerando dois tipos de probabilidades: parcial e completamente desconhecida.

Exemplo 3.3 Considere a matriz de transição incerta de um SLSM com três modos de operação dada por

$$\mathbb{P}^{\delta} = \begin{bmatrix} [0,2;0,4] & [0,6;0,8] & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & 0,3 & ? \end{bmatrix},$$

sendo que p_{11}^{δ} , p_{12}^{δ} são elementos limitados e o símbolo "?" representa os elementos desconhecidos. Assim, as probabilidades da primeira e terceira linhas são parcialmente conhecidas e da segunda linha são desconhecidas.

Para a representação conforme o modelo em (3.3), assumimos as matrizes \mathbb{P} (nominal) e $\delta \mathbb{P}$ (incerta) com os seguintes parâmetros:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,1\Delta_{11} & 0,1\Delta_{12} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ 1,75\Delta_{31} & 0 & 1,75\Delta_{33} \end{bmatrix}$$

com

$$-1 \le \Delta_{11} \le 1$$
, $\Delta_{12} = 1 - \Delta_{11}$, $0 \le \Delta_{21} \le 1$, $0 \le \Delta_{22} \le 1 - \Delta_{21}$, $\Delta_{23} = 1 - (\Delta_{21} + \Delta_{22})$, $0 \le \Delta_{31} \le 0.4$ e $\Delta_{33} = 0.4 - \Delta_{31}$.

Observe que as probabilidades desconhecidas, denotadas por "?", podem ser representadas por limitantes inferiores e superiores, visto que os limites de cada elemento podem ser inferidos da definição de matriz estocástica, ou seja, $p_{ij} \in [0;1]$ e $\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$, para todo $i \in S$. Assim, tem-se que

$$\delta p_{2j} \in [0; 1], \ \forall j \in \mathbb{S} \ e \ \delta p_{3j} \in [0; 0, 7], \ j = \{1, 3\}.$$

Note ainda que os escalares Δ_{ij} , $\forall i,j \in S$, fornecem a variação entre os limites de cada probabilidade, sendo assegurada a condição $\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$. A Figura 3.2 exibe a variação dos elementos da primeira linha de \mathbb{P}^{δ} de acordo com os valores atribuídos a Δ_{11} .

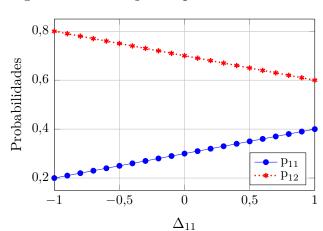


Figura 3.2 – Variação da primeira linha de \mathbb{P}^{δ}

A Figura 3.3 ilustra a intersecção do cubo formado pela variação de cada elemento da segunda linha de \mathbb{P}^{δ} com o plano que representa a condição $\sum_{j=1}^{s} p_{2j}^{\delta} = 1$.

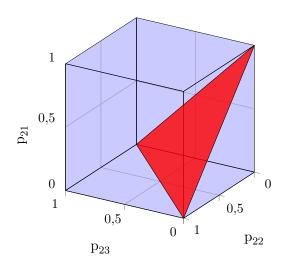


Figura 3.3 – Representação da segunda linha de \mathbb{P}^{δ}

3.2.2 O Problema de Regulação de SLSMs

A regulação consiste na minimização de um índice de desempenho (ou função custo) associado ao sistema dinâmico. A solução deste problema fornece uma lei de controle, que mantém o sistema dinâmico o mais próximo possível de um ponto de operação desejado, mesmo na presença de possíveis distúrbios, de forma a melhorar o comportamento dinâmico do sistema.

A regulação dos estados tem por objetivo manter o sistema em uma condição fixa de operação, sendo dada na forma de malha fechada cujo ponto de operação desejado é nulo. Nesse regulador, a entrada de controle é obtida pela multiplicação entre uma matriz de ganhos e as variáveis de estados do sistema. Quando essa lei de controle é aplicada ao sistema, o índice de desempenho é minimizado.

Para os SLSMs, o problema de regulação deve considerar a disponibilidade de informações sobre os estados do sistema, pois a cadeia de Markov pode ser completamente observada, parcialmente observada ou totalmente não observada.

No caso em que $(x_k, \theta(k))$ são completamente acessíveis, a solução é dada na forma de ganhos de realimentação lineares dependentes dos modos de operação, ou seja,

$$u_k = K_{\theta(k),k} x_k,$$

sendo que para os SLSMs com MTs conhecidas os ganhos são obtidos por meio de equações algébricas de Riccati acopladas (BLAIR; SWORDER, 1975; CHIZECK et al., 1986). Enquanto que, para os SLSMs com MTs incertas as abordagens propostas são predominantemente dadas em termos de LMIs (SOUZA, 2006; BOUKAS, 2009).

Quando apenas uma parte dos estados da cadeia de Markov é observada, o controle pode ser projetado na forma de agrupamentos (em inglês, *clusters*) de estados (do VAL et al., 2002), assim tem-se uma lei de controle na forma

$$u_k = \left(\sum_{j=1}^s K_j \mathbb{1}_{\{\theta(k) \in \mathfrak{X}_j\}}\right) x_k,$$

onde $\mathfrak X$ representa o conjunto de estados observados e $\mathbb I_{\mathbb C}$ a medida de Dirac do conjunto $\mathbb C$ definida por

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ se } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por fim, quando os modos de operação $\theta(k)$ não são observados, não é possível associar leis de realimentação a cada estado da cadeia de Markov, assim um único ganho refere-se a todos os estados em cada instante de tempo k (do VAL; BAŞAR, 1999), desse modo tem-se

$$u_k = K_k x_k$$
.

No cenário sem observação, ou com observação parcial dos estados da cadeia de Markov, não há resultados que permitam calcular uma lei de controle tal que o índice de

desempenho seja o mínimo global. Apenas existem métodos numéricos como o algoritmo baseado no método variacional (do VAL; BAŞAR, 1999), as abordagens em termos de LMIs (do VAL et al., 2002; SOUZA, 2005), a estratégia de observação indireta (SILVA et al., 2011; BORTOLIN, 2012) ou utiliza-se um detector que emite sinais informando sobre o modo de operação atual do sistema (COSTA et al., 2015). Uma exceção a este problema é o caso particular em que a MT associada à cadeia de Markov apresenta linhas idênticas, $p_{ij} = p_j$ para todo $j \in \mathcal{S}$, no qual a cadeia se reduz a um processo de Bernoulli generalizado. Para este caso, há resultados que apresentam condições necessárias e suficientes expressas em termos de LMIs para os controles H_2 e H_∞ (FIORAVANTI et al., 2013; COSTA et al., 2015).

Nesta tese, daremos ênfase ao problema de regulação de SLSMs com matrizes de transição e de parâmetros incertas nos cenários de observação completa e de não observação do estado Markoviano. As soluções obtidas para os dois cenários são dadas em termos de equações algébricas de Riccati em uma estrutura de blocos matriciais, derivadas da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos.

Capítulo 4

Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs com MT incerta

Neste capítulo, considera-se o problema de regulação de SLSMs com MT incerta no cenário de observação completa do estado da cadeia de Markov com uma abordagem distinta daquelas existentes na literatura, as quais são dadas em termos de LMIs (SOUZA, 2006; ZHANG; BOUKAS, 2009).

A abordagem consiste em definir o problema de controle robusto de forma similar à versão clássica. Estratégia semelhante à de Cerri (2013), que propôs uma solução alternativa e equivalente para o problema de controle ótimo de SLSMs nominais, a qual foi estendida para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas.

Dessa forma, assume-se um problema de otimização não-linear restrito, no qual deseja-se minimizar um índice de desempenho quadrático associado ao SLSM sob a máxima influência das incertezas presentes nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição.

A solução para este problema é obtida pela combinação do método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas, por meio da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Subseção 2.2.5). A partir da minimização conjunta da entrada de controle u_k e do estado x_{k+1} .

O regulador robusto recursivo desenvolvido é dado por equações algébricas de Riccati acopladas, que são apresentadas na forma de blocos matriciais em um arranjo simétrico, sendo que as mesmas representam uma generalização das equações determinadas por Cerri (2013).

Assim, essa abordagem permite obter uma versão robusta e geral para os reguladores lineares quadráticos recursivos por meio das equações algébricas de Riccati acopladas, de tal modo que a estabilidade e a convergência são estabelecidas pela equivalência com regulador linear quadrático clássico.

4.1 Formulação do Problema

Considere o SLSM de tempo discreto

$$x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k, \ \forall k \ge 0, \ \theta(0) \sim \pi_0,$$
 (4.1)

que assume dois possíveis modelos para as matrizes de parâmetros:

Caso A: SLSM nominal

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} \ e \ \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)},$$

Caso B: SLSM incerto

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)},$$

sendo o par $(x_k, \theta(k))$ o estado do sistema e u_k a entrada de controle. As matrizes $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são conhecidas e as matrizes de incertezas $\delta F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são modeladas da seguinte forma:

$$\left[\delta F_{\theta(k)} \ \delta G_{\theta(k)}\right] = H_{\theta(k)} \ \Delta_{\theta(k)} \left[E_{F_{\theta(k)}} \ E_{G_{\theta(k)}} \right]$$

para todo $k \geq 0$, em que $H_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,t}$ (matriz não-nula), $E_{F_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$, $E_{G_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ são matrizes conhecidas e $\Delta_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{t,\ell}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\theta(k)}|| \leq 1$. A cadeia de Markov é indexada por $\theta(k)$ com distribuição inicial π_0 e associada à matriz de transição incerta \mathbb{P}^{δ} , definida em (3.3). Assumimos o cenário de observação completa do estado do sistema, ou seja, $\theta(k)$ e x_k são conhecidos.

O índice de desempenho associado ao sistema (4.1) é uma função custo quadrática definida por

$$J_N(\theta, x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q_{\theta(k)} x_k + u_k^T R_{\theta(k)} u_k \right) + x_N^T P_{\theta(N), N} x_N$$
 (4.2)

com uma lei de controle linear de realimentação de estado na forma

$$u_k = K_{\theta(k),k} x_k \text{ com } k \ge 0,$$

sendo que a matriz $K_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{m,n}$ é denominada de ganho e as matrizes $Q_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $R_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $P_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{n,n}$, chamadas de ponderação, são simétricas e definidas positivas. Como o par $(x_k, \theta(k))$ é um processo estocástico, então o custo $J_N(\theta, x, u)$ como definido em (4.2) é uma variável aleatória, assim considera-se o seu valor esperado a ser calculado

$$\mathcal{E}\left\{J_N(\theta, x, u) \mid \mathcal{O}_0\right\} \tag{4.3}$$

com $\mathcal{O}_0 = \{\theta(0) = i, x_0\}$. A formulação clássica do problema de regulação, para SLSMs nominais com matrizes de transição conhecidas, consiste em determinar uma sequência de

controle ótimo $\mathcal{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ que minimize o custo esperado (4.3) sujeito a restrição (4.1, caso A), ou seja,

$$\min_{u_k} \ \mathcal{E}\Big\{J_N(\theta,x,u)\,\Big|\, \mathfrak{O}_0\Big\}$$
 sujeito a $x_{k+1}=F_{\theta(k)}\,x_k+G_{\theta(k)}\,u_k.$

A solução para este problema é bem conhecida na literatura e consiste no Regulador Linear Quadrático (veja por exemplo Blair e Sworder (1975) e Chizeck et al. (1986)), o qual é obtido por meio do método de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995). No entanto, Cerri (2013, Cap. 2) propôs uma nova abordagem para este problema, no qual inclui-se no problema de minimização o estado x_{k+1} , sendo que a solução é obtida pela técnica de mínimos quadrados regularizados robustos a partir de uma estrutura de blocos matriciais. A equivalência entre a solução obtida com a solução clássica tornou válida a aplicação desta abordagem em problemas gerais de controle, de modo que Cerri (2013, Cap. 3) projetou um regulador robusto para os SLSMs sujeitos a incertezas paramétricas, redefinindo o problema de minimização a fim de obter a melhor ação do controle sob a máxima influência das incertezas, resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{\theta(k)}, \delta G_{\theta(k)}} \mathcal{E} \Big\{ J_N(\theta, x, u) \Big| \mathcal{O}_0 \Big\}$$
sujeito a $x_{k+1} = \Big(F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)} \Big) x_k + \Big(G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)} \Big) u_k,$

sendo que a solução obtida pela técnica de mínimos quadrados regularizados robustos fornece uma versão robusta do regulador linear quadrático, através de um conjunto de equações de Riccati.

Seguindo esta linha de pesquisa, neste trabalho são propostos reguladores robustos recursivos para SLSMs nominais e incertos, a partir do problema de minimização do par (x_{k+1},u_k) e da maximização da influência das incertezas relacionadas às probabilidades de transição e/ou às matrizes de parâmetros, sendo que a solução será obtida pela aplicação do método de programação dinâmica e da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos. Dessa forma, considere o problema de otimização:

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathbb{P}, \delta F_{\theta(k)}, \delta G_{\theta(k)}} \mathcal{J}_k(\theta, x, u)
\text{sujeito a } x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k, \tag{4.4}$$

sendo $\mathcal{J}_k(\theta,x,u)$ a função valor que minimiza o custo (4.3), definida por

$$\mathcal{J}_k(\theta, x, u) = x_{k+1}^T \Psi_{\theta(k)}^{\delta}{}_{k+1} x_{k+1} + x_k^T Q_{\theta(k)} x_k + u_k^T R_{\theta(k)} u_k \tag{4.5}$$

com $\Psi_{\theta(k),k+1}^{\delta} = \Psi_{\theta(k),k+1} + \delta \Psi_{\theta(k),k+1} \in \mathbb{R}^{n,n}$,

$$\Psi_{\theta(k),k+1} = \sum_{j=1}^{s} p_{\theta(k)j} P_{j,k+1} \quad e \quad \delta \Psi_{\theta(k),k+1} = \sum_{j=1}^{s} \delta p_{\theta(k)j} P_{j,k+1}$$

onde $P_{j,k+1}$ é calculada iterativamente pelas equações de Riccati para todo $j \in S$ e $k \geq 0$. Observe que, para todo $\theta(k) = i \in S$, o operador $\delta \Psi_{\theta(k),k+1}$ pode ser escrito na forma matricial conforme os seguintes passos:

$$\delta\Psi_{i,k+1} = \sum_{j=1}^{s} \delta p_{ij} P_{j,k+1}
= \delta p_{i1} P_{1,k+1} + \delta p_{i2} P_{2,k+1} + \dots + \delta p_{is} P_{s,k+1}
= (\delta p_{i1})^{1/2} P_{1,k+1} (\delta p_{i1})^{1/2} + (\delta p_{i2})^{1/2} P_{2,k+1} (\delta p_{i2})^{1/2} + \dots + (\delta p_{is})^{1/2} P_{s,k+1} (\delta p_{is})^{1/2}
= \left[(\delta p_{i1})^{1/2} I_n \quad (\delta p_{i2})^{1/2} I_n \quad \dots \quad (\delta p_{is})^{1/2} I_n \right] \begin{bmatrix} P_{1,k+1} & O & \dots & O \\ O & P_{2,k+1} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & P_{2,k+1} & \dots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\delta p_{i1})^{1/2} I_n \\ (\delta p_{i2})^{1/2} I_n \\ \vdots \\ (\delta p_{ik})^{1/2} I_n \end{bmatrix}.$$

Definindo a notação,

$$\delta_{\mathbf{p}_{i}}^{T} = \left[(\delta p_{i1})^{1/2} I_{n} \quad (\delta p_{i2})^{1/2} I_{n} \quad \dots \quad (\delta p_{is})^{1/2} I_{n} \right] \in \mathbb{R}^{n,sn} \text{ e}$$

$$\mathcal{P}_{k+1} = diag(P_{1,k+1}, P_{2,k+1}, \dots, P_{s,k+1}) \in \mathbb{R}^{sn,sn},$$

para todo $\theta(k) = i$, tem-se que

$$\begin{split} \Psi_{i,k+1}^{\delta} &= \Psi_{i,k+1} + \delta \Psi_{i,k+1} \\ &= \Psi_{i,k+1} + \delta_{\mathbf{p}_i}^T \ \mathcal{P}_{k+1} \ \delta_{\mathbf{p}_i}. \end{split}$$

Considere que a matriz incerta $\delta_{\mathbf{p}_i}$ é modelada da seguinte forma

$$\delta_{\mathbf{p}_i} = H_{\mathbf{p}_i} \, \Delta_{\mathbf{p}_i} \, E_{\mathbf{p}_i},$$

sendo

$$H_{\mathbf{p}_{i}} = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{i1}} I_{n} & O & \dots & O \\ O & \sqrt{h_{i2}} I_{n} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \sqrt{h_{is}} I_{n} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{\mathbf{p}_{i}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta_{i1}} I_{n} \\ \sqrt{\Delta_{i2}} I_{n} \\ \vdots \\ \sqrt{\Delta_{is}} I_{n} \end{bmatrix} e \quad E_{\mathbf{p}_{i}} = \sqrt{e_{i}} I_{n} \quad (4.6)$$

para todo $\theta(k) = i$, em que $H_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{sn,sn}$ e $E_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{n,n}$ são matrizes conhecidas, $\Delta_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{sn,n}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\mathbf{p}_i}|| \le 1$ e os elementos h_{ij} , Δ_{ij} e $e_i = e_{ij}$ são escalares positivos como definidos em (3.4). Dessa forma, a função (4.5) pode ser reescrita como

$$\mathcal{J}_{k}(\theta, x, u) = x_{k+1}^{T} \left(\Psi_{\theta(k), k+1} + \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^{T} \mathcal{P}_{k+1} \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \right) x_{k+1} + x_{k}^{T} Q_{\theta(k)} x_{k} + u_{k}^{T} R_{\theta(k)} u_{k}. \tag{4.7}$$

O problema de otimização restrito definido em (4.4), com a função (4.7), pode ser aproximado por um problema irrestrito, aplicando o método de funções penalidade. Assim, para $\mu > 0$ fixado, tem-se o seguinte problema

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}, \delta F_{\theta(k)}, \delta G_{\theta(k)}} \mathfrak{J}_{\mu, k}(\theta(k), x_{k+1}, u_k),$$

sendo a função auxiliar $\mathfrak{J}_{\mu,k}(\theta(k),x_{k+1},u_k)$ dada por

$$\mathfrak{J}_{\mu,k}(\theta(k), x_{k+1}, u_k) = x_{k+1}^T \left(\Psi_{\theta(k),k+1} + \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \mathcal{P}_{k+1} \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \right) x_{k+1} + x_k^T Q_{\theta(k)} x_k + u_k^T R_{\theta(k)} u_k + \left(x_{k+1} - \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k - \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k \right)^T \mu \quad \left(\bullet \right).$$

Portanto, o problema de regulação robusta consiste em obter a sequência ótima $\{(x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)\}_{k=0}^{N-1}$, sob a máxima influência das incertezas, que resolve o problema de otimização irrestrito definido da seguinte forma.

Problema de Controle Robusto 4.1

Para cada $\mu > 0$ fixado, determinar a sequência ótima $\{(x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)\}_{k=0}^{N-1}$ segundo o problema de otimização

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}, \delta F_{\theta(k)}, \delta G_{\theta(k)}} \mathfrak{J}_{\mu, k}(\theta(k), x_{k+1}, u_k),$$

para cada k = N - 1, ..., 0 e $\theta(k) = i \in S$, sendo $\mathfrak{J}_{\mu,k}(\theta(k), x_{k+1}, u_k)$ o funcional quadrático regularizado penalizado incerto definido por

$$\mathfrak{J}_{\mu,k}(\theta(k),x_{k+1},u_k) = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1} & O \\ O & R_{\theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & O \\ I_n & -\mathfrak{G}_{\theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -I_n \\ \mathfrak{F}_{\theta(k)} \end{bmatrix} x_k T \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{k+1} & O & O \\ O & Q_{\theta(k)} & O \\ O & O & \mu I_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix},$$

sendo $\Psi_{\theta(k),k+1} = \sum_{j=1}^{s} p_{\theta(k)j} P_{j,k+1}, \ \mathcal{P}_{k+1} = diag(P_{i,k+1}), \ R_{\theta(k)} \succ 0 \ e \ Q_{\theta(k)} \succ 0.$

4.2 Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs

Nesta seção, propõe-se um regulador robusto recursivo para o SLSM, obtido por meio da combinação do método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Subseção 2.2.5), sendo que as propriedades de estabilidade e convergência assemelham-se às encontradas para a solução clássica de SLSM na ausência de incertezas (veja Blair e Sworder (1975) e Chizeck et al. (1986)).

O Problema 4.1 representa um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.2.4) quando são feitas as seguintes identificações:

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \ Q \leftarrow \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1} & O \\ O & R_{\theta(k)} \end{bmatrix}, \ A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \\ I_n - G_{\theta(k)} \end{bmatrix}, \ b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -I_n \\ F_{\theta(k)} \end{bmatrix} x_k, \tag{4.8-a}$$

 $W_{\mu} \leftarrow diag(\mathcal{P}_{k+1}, Q_{\theta(k)}, \mu I_n)$ e as demais matrizes são dadas de acordo com o SLSM:

\square SLSM nominal

$$\delta A \leftarrow \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \end{bmatrix} x_k, \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \\ O \\ O \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \Delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}},$$

$$E_A \leftarrow \begin{bmatrix} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad E_b \leftarrow O.$$

$$(4.8-b)$$

□ SLSM incerto

$$\delta A \leftarrow \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & O \\ O & -\delta G_{\theta(k)} \end{bmatrix}, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ \delta F_{\theta(k)} \end{bmatrix} x_k, \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & O \\ O & H_{\theta(k)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & \Delta_{\theta(k)} \end{bmatrix}, \quad E_A \leftarrow \begin{bmatrix} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & -E_{G_{\theta(k)}} \end{bmatrix} \text{ e } E_b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ E_{F_{\theta(k)}} \end{bmatrix}.$$

$$(4.8-c)$$

O resultado a seguir apresenta uma estrutura na forma de blocos matriciais que determina o estado $x_{\mu,k+1}$, a entrada de controle $u_{\mu,k}$ e o funcional $\mathfrak{J}_{\mu,k}$ para cada valor atribuído ao parâmetro μ .

Lema 4.1 Considere o Problema 4.1 com $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ fixados. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda})$ é semidefinida positiva e $\hat{E}_{\theta(k)}$ é definida positiva com

$$\widehat{E}_{\theta(k)} = I_n - E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}, \ \forall k \ge 0.$$
 (4.9)

Então, a solução ótima $(x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)$ para cada $k\geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \\ P_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} x_k,$$

sendo que as matrizes $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \\ P_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & -I_n \\ O & O & \widehat{F}_{\theta(k)} \\ I_n & O & O \\ O & I_m & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} & O & O & O & I_n & O \\ O & R_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O & I_m \\ O & O & Q_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O \\ O & O & O & \Sigma_{\theta(k)} \ \widehat{I}_{\theta(k)} - \widehat{G}_{\theta(k)} \\ I_n & O & O & \widehat{I}_{\theta(k)}^T & O & O \\ O & I_m & O & -\widehat{G}_{\theta(k)}^T & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ -I_n \\ \widehat{F}_{\theta(k)} \\ O \\ O \end{bmatrix}, (4.10)$$

com as matrizes $\hat{F}_{\theta(k)}$, $\hat{G}_{\theta(k)}$, $\hat{I}_{\theta(k)}$ e $\Sigma_{\theta(k)}$ dadas de acordo com os seguintes casos:

\square SLSM nominal

$$\widehat{F}_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} F_{\theta(k)} \\ O \end{bmatrix}, \quad \widehat{G}_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} G_{\theta(k)} \\ O \end{bmatrix}, \quad \widehat{I}_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} I_n \\ E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} \Phi(\mu) & O \\ O & \widehat{\lambda}^{-1} I_n \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\mu) = \mu^{-1} I_n \quad e \quad \widehat{\lambda} > 0.$$

□ SLSM incerto

$$\begin{split} \widehat{F}_{\theta(k)} &= \begin{bmatrix} F_{\theta(k)} \\ O \\ E_{F_{\theta(k)}} \end{bmatrix}, \ \widehat{G}_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} G_{\theta(k)} \\ O \\ E_{G_{\theta(k)}} \end{bmatrix}, \ \widehat{I}_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} I_n \\ E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \\ O \end{bmatrix}, \ \Sigma_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O \\ O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_n & O \\ O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} \end{bmatrix}, \\ \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) &= \mu^{-1} I_n - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} H_{\theta(k)} H_{\theta(k)}^T & e \ \widehat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) \ \left\| \mu H_{\theta(k)}^T H_{\theta(k)} \right\|, \ para \ algum \ \alpha > 0. \end{split}$$

Demonstração. Aplicando o item (i) do Lema 2.8 com as identificações estabelecidas em (4.8) segue que

sendo $\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T$ e as matrizes $\widehat{F}_{\theta(k)}$, $\widehat{G}_{\theta(k)}$, $\widehat{I}_{\theta(k)}$ e $\Sigma_{\theta(k)}$ dadas de acordo com o enunciado do Lema 4.1. O parâmetro $\widehat{\lambda}$ é dado por

$$\widehat{\lambda} = \begin{cases} (1 + \alpha) || H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \mathcal{P}_{k+1} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} ||, \text{ para o SLSM nominal,} \\ (1 + \alpha) || diag(H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \mathcal{P}_{k+1} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}, \mu H_{\theta(k)}^T H_{\theta(k)}) ||, \text{ para o SLSM incerto.} \end{cases}$$

Como a função $\Gamma(\lambda)$, definida no Teorema 2.2, independe da matriz $\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda})$ (veja a demonstração no Apêndice B.1), então $\widehat{\lambda}$ independe de \mathcal{P}_{k+1} . Desta forma, pode-se considerar

$$\hat{\lambda} > 0$$
, para o SLSM nominal e
$$\hat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) ||\mu H_{\theta(k)}^T H_{\theta(k)}||, \text{ para o SLSM incerto.}$$

Consequentemente, a solução não depende da matriz $\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda})$, conforme pode ser verificado nos Teoremas 4.1 e 4.2. Assim, é possível eliminar as linhas e a coluna referentes a $\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda})$ em (4.11), resultando em (4.10).

Observação 4.1 A condição $\widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ é estipulada para garantir a recursividade da solução fornecida pelo Lema 4.1, maiores detalhes serão apresentados na solução algébrica do regulador (Subseção 4.2.1).

O procedimento para o obtenção da solução do SLSM com MT incerta no cenário de observação de $\theta(k)$ é apresentado no Algoritmo 4.1. Observe que a penalidade imposta pelos parâmetros μ e $\hat{\lambda}$ esta associada ao nível de robustez do regulador.

Algoritmo 4.1 Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs com MTI

Modelo: Defina o tipo de sistema: SLSM nominal ou incerto.

Condições iniciais: Defina $\mu > 0, x_0, \pi_0, \Theta, N$ e $P_{\theta(N),N} \succ 0$.

Passo 1: Para todo $k = N - 1, \dots, 0$:

- Calcule

$$\Psi_{\theta(k),k+1} = \sum_{j=1}^{s} p_{\theta(k)j} P_{j,k+1} \text{ e } \mathcal{P}_{k+1} = diag(P_{j,k+1}).$$

- Defina $\hat{\lambda}$ tal que $\hat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ de acordo com (4.9).
- Determine $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ via (4.10).

Passo 2: Obtenha para cada k = 0, ..., N-1:

$$\begin{bmatrix} x_{\mu,k+1}^* \\ u_{u,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} x_k.$$

O Lema 4.2 apresenta uma forma de determinar as matrizes $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ quando as matrizes de ponderação são semidefinidas positivas. Observe que, neste caso, não é necessário calcular as inversas das matrizes $\Psi_{\theta(k),k+1}$, $R_{\theta(k)}$ e $Q_{\theta(k)}$.

Lema 4.2 Considere o Problema 4.1 com $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ fixados. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda})$ é semidefinida positiva e $\hat{E}_{\theta(k)}$ é definida positiva com

$$\widehat{E}_{\theta(k)} = I_n - E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}, \ \forall k \ge 0.$$

Então, a solução ótima $(x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)$ para cada $k\geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \\ P_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} x_k,$$

sendo que as matrizes $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ são determinadas por meio de

com as matrizes $\hat{F}_{\theta(k)}$, $\hat{G}_{\theta(k)}$, $\hat{I}_{\theta(k)}$ e $\Sigma_{\theta(k)}$ dadas de acordo com Lema 4.1.

Demonstração. Considere a prova do Lema 4.1 para a obtenção de (4.10). A partir de (4.10) tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} & O & O & O & I_n & O \\ O & R_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O & I_m \\ O & O & Q_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O \\ O & O & O & \Sigma_{\theta(k)} & \widehat{I}_{\theta(k)} & -\widehat{G}_{\theta(k)} \\ I_n & O & O & \widehat{I}_{\theta(k)}^T & O & O \\ O & I_m & O & -\widehat{G}_{\theta(k)}^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ -I_n \\ \widehat{F}_{\theta(k)} \\ O \\ O \end{bmatrix}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} X_1 + X_5 = O,
R_{\theta(k)}^{-1} X_2 + X_6 = O,
Q_{\theta(k)}^{-1} X_3 = -I_n,
\Sigma_{\theta(k)} X_4 + \hat{I}_{\theta(k)} X_5 - \hat{G}_{\theta(k)} X_6 = \hat{F}_{\theta(k)},
X_1 + \hat{I}_{\theta(k)}^T X_4 = O,
X_2 - \hat{G}_{\theta(k)}^T X_4 = O.$$
(4.12)

Definindo a notação, $\overline{X}_1=\Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}X_1,$ $\overline{X}_2=R_{\theta(k)}^{-1}X_2$ e $\overline{X}_3=Q_{\theta(k)}^{-1}X_3$, obtém-se que

$$X_1 - \Psi_{\theta(k),k+1}\overline{X}_1 = O,$$

$$X_2 - R_{\theta(k)}\overline{X}_2 = O,$$

$$X_3 - Q_{\theta(k)}\overline{X}_3 = O.$$

$$(4.13)$$

Combinando (4.12) com (4.13), tem-se um novo sistema de equações que resulta em,

Portanto, é possível reescrever (4.10) como

onde as matrizes $P_{\theta(N),N}$, $R_{\theta(k)}$ e $Q_{\theta(k)}$ podem ser semidefinidas positivas.

4.2.1Estabilidade e Convergência

A estabilidade e a convergência da solução proposta no Lema 4.1 são estabelecidas a partir da equivalência com a solução clássica do problema de controle ótimo para SLSMs sem a presença de incertezas. Este procedimento de demonstração é dual ao utilizado por Sayed (2001) e Zhou (2010) na análise do desempenho de estimativas robustas. Os resultados a seguir apresentam a solução algébrica robusta recursiva obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (4.10).

Lema 4.3 Suponha que $R_{\theta(k)} \succ 0$ e $\hat{E}_{\theta(k)} \succ 0$. Então, a matriz

$$M_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} \Phi(\mu) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T & \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \\ E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} & \widehat{\lambda}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \end{bmatrix}$$

é não-singular.

Demonstração. O bloco matricial $D_{\theta(k)} = \hat{\lambda}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T$ é não singular. De fato, como $\Psi_{\theta(k),k+1} \succ 0$ e $E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} = e_{\theta(k)} I_n \succ 0$, então $E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \succ 0$ (Lema A.3). Logo, pela propriedade de positividade (Lema A.4), $D_{\theta(k)}$ é definida positiva e, portanto não-singular.

O complemento de Schur 1 de $D_{\theta(k)}$ em $M_{\theta(k)}$ é não singular. Observe que,

$$(M_{\theta(k)}/D_{\theta(k)}) = \Phi(\mu) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} \hat{E}_{\theta(k)} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T.$$

Sabemos que $\Phi(\mu) \succeq 0$, $\Psi_{\theta(k)} \succ 0$, $\widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ e $R_{\theta(k)} \succ 0$. Assim, a matriz $\Phi(\mu) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} \widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ e pela propriedade de positividade (Lema A.2) tem-se que $G_{\theta(k)}R_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^T \succeq 0$. Logo, $(M_{\theta(k)}/D_{\theta(k)}) \succ 0$ (Lema A.4). Pelo complemento de Schur (Lema A.7), temos que $M_{\theta(k)} \succ 0$ e, portanto, não-singular.

Teorema 4.1 (SLSM nominal) Considere o Problema 4.1. Suponha que $\hat{E}_{\theta(k)} \succ 0$. Então, a solução algébrica robusta recursiva para cada $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ é dada por

$$L_{\mu,\theta(k),k} = \left[I_n - \Phi(\mu) \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right)^{-1} \right] F_{\theta(k)} + G_{\theta(k)} K_{\mu,\theta(k),k},$$

$$K_{\mu,\theta(k),k} = - \left(R_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)} \right)^{-1} G_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)},$$

$$P_{\mu,\theta(k),k} = F_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)} - F_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)} \left(R_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)} \right)^{-1} \times G_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)},$$

$$\frac{sendo \ \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} = \left(\Phi(\mu) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} \widehat{E}_{\theta(k)}\right)^{-1} \ e \ \widehat{E}_{\theta(k)} \ definido \ em \ (4.9).}{\text{Veja detalhes no Apêndice A.2.}}$$

Demonstração. A solução algébrica robusta do Problema 4.1, definido a partir do SLSM nominal (4.1, caso A), é obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (4.11). De fato, considere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} & O & O & O & O & I_n & O \\ O & R_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O & O & O & I_n & O \\ O & O & \Phi(\mathcal{P},\widehat{\lambda}) & O & O & O & O & O \\ O & O & O & Q_{\theta(k)}^{-1} & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \Phi(\mu) & O & I_n & -G_{\theta(k)} \\ O & O & O & O & O & \widehat{\lambda}^{-1}I_n & E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ I_n & O & O & O & I_n & E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T & O & O \\ O & I_m & O & O & -G_{\theta(k)}^T & O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix},$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}X_1 + X_7 = O, (4.14-a)$$

$$R_{\theta(k)}^{-1}X_2 + X_8 = O, (4.14-b)$$

$$\Phi(\mathcal{P},\widehat{\lambda})X_3 = O, \tag{4.14-c}$$

$$Q_{\theta(k)}^{-1}X_4 = -I_n, (4.14-d)$$

$$\Phi(\mu)X_5 + X_7 - G_{\theta(k)}X_8 = F_{\theta(k)}, \tag{4.14-e}$$

$$\hat{\lambda}^{-1} X_6 + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} X_7 = O,$$
 (4.14-f)

$$X_1 + X_5 + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T X_6 = O,$$
 (4.14-g)

$$X_2 - G_{\theta(k)}^T X_5 = O. (4.14-h)$$

Combinando (4.14-b) e (4.14-h), tem-se

$$X_8 = -R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T X_5, \tag{4.15}$$

que junto com (4.14-a), (4.14-e), (4.14-f) e (4.14-g) fornecem

$$M_{\theta(k)} \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\theta(k)} \\ O \end{bmatrix},$$
 (4.16)

com $M_{\theta(k)}$ definido conforme o Lema 4.3. Como a inversa de $M_{\theta(k)}$ está garantida pelo Lema 4.3, podemos aplicar a Fórmula da Inversão de Banachiewicz (Lema A.6) e obter a solução do sistema de equações (4.16). Logo,

$$X_5 = \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T\right)^{-1} F_{\theta(k)}, \tag{4.17}$$

sendo

$$\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} = \left(\Phi(\mu) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} \widehat{E}_{\theta(k)}\right)^{-1} e
\widehat{E}_{\theta(k)} = I_n - E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T\right)^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}.$$

De (4.15) e (4.17), tem-se

$$X_8 = -R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \left(\hat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right)^{-1} F_{\theta(k)}. \tag{4.18}$$

Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes (Lema A.9) em (4.18), resulta em

$$X_8 = -\left(R_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)}\right)^{-1} G_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)}. \tag{4.19}$$

A partir de (4.14-e) e (4.19), obtém-se

$$X_{7} = F_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}X_{8} - \Phi(\mu)X_{5}$$

$$= \left[I_{n} - \Phi(\mu) \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)}R_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^{T}\right)^{-1}\right]F_{\theta(k)} - G_{\theta(k)} \times \left(R_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}^{T}\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}G_{\theta(k)}\right)^{-1}G_{\theta(k)}^{T}\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}F_{\theta(k)}.$$

De (4.11) tem-se que as matrizes $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \\ P_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & I_n & O \\ O & O & O & O & O & O & I_m \\ O & O & O & -I_n & F_{\theta(k)}^T & O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_7 \\ X_8 \\ -X_4 + F_{\theta(k)}^T X_5 \end{bmatrix}.$$

Logo, $L_{\mu,\theta(k),k}=X_7$ e $K_{\mu,\theta(k),k}=X_8$. De (4.14-d) e (4.17), segue que

$$P_{\mu,\theta(k),k} = Q_{\theta(k)} + F_{\theta(k)}^T \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right)^{-1} F_{\theta(k)}. \tag{4.20}$$

Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (4.20), resulta em

$$P_{\mu,\theta(k),k} = F_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)} - F_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)} \left(R_{\theta(k)} + G_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} G_{\theta(k)} \right)^{-1} \times G_{\theta(k)}^T \hat{\Psi}_{\theta(k),k+1} F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)}.$$

Observe que a solução algébrica robusta recursiva para o SLSM nominal independe da matriz $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$. Assim, é possível obter a solução via (4.10) ao invés de (4.11).

O Lema 4.4 apresenta um resultado preliminar, necessário para obter a solução algébrica robusta recursiva para SLSM com MT incerta e incertezas paramétricas.

Lema 4.4 Suponha que $R_{\theta(k)} \succ 0$, $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$ e $\widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$. Então,

i. $\overline{R}_{\theta(k)} = R_{\theta(k)}^{-1} - R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} \ \acute{e} \ sim\acute{e}trica \ e \ definida \ positiva.$

ii. a matriz

$$N_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} M_{\theta(k)} & G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \\ & O \\ E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \end{bmatrix},$$

com $M_{\theta(k)}$ definido no Lema 4.3, é não-singular.

Demonstração.

i. Considere $\overline{R}_{\theta(k)} = R_{\theta(k)}^{-1} - R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1}$. Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) tem-se que

$$\overline{R}_{\theta(k)} = \left(R_{\theta(k)} + \widehat{\lambda}_{\mu} E_{G_{\theta(k)}}^T E_{G_{\theta(k)}} \right)^{-1}.$$

Por hipótese, $\hat{\lambda}_{\mu} > 0$ e $R_{\theta(k)} \succ 0$. Além disso, $E_{G_{\theta(k)}}^T E_{G_{\theta(k)}} \succeq 0$ (Lema A.1). Portanto, pela propriedade de positividade (Lema A.4) a matriz $\overline{R}_{\theta(k)}$ é simétrica e definida positiva.

ii. O bloco matricial $D_{\theta(k)} = \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_n + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T$ é não-singular conforme a demonstração do Lema 4.3. Além disso, o bloco matricial $E_{\theta(k)} = \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T$ também é não-singular. De fato, como $R_{\theta(k)} \succ 0$ então $E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \succeq 0$ (Lema A.2). Logo, pela propriedade de positividade (Lema A.4) tem-se que $E_{\theta(k)} \succ 0$. Assim, o bloco matricial $S_{\theta(k)} = diag(D_{\theta(k)}, E_{\theta(k)})$ é não-singular.

O complemento de Schur de $S_{\theta(k)}$ em $N_{\theta(k)}$ é não-singular. Observe que,

$$(N_{\theta(k)}/S_{\theta(k)}) = \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \Psi_{\theta(k), k+1}^{-1} \widehat{E}_{\theta(k)} + G_{\theta(k)} \overline{R}_{\theta(k)} G_{\theta(k)}^T.$$

Sabemos que $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$, $\widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ e $\overline{R}_{\theta(k)} \succ 0$. Assim, $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \Psi_{\theta(k), k+1}^{-1} \widehat{E}_{\theta(k)} \succ 0$ e pela propriedade de positividade (Lema A.2) tem-se que $G_{\theta(k)} \overline{R}_{\theta(k)} G_{\theta(k)}^T \succeq 0$. Logo, $(N_{\theta(k)}/S_{\theta(k)}) \succ 0$ (Lema A.4). Pelo complemento de Schur (Lema A.10), temos que que $N_{\theta(k)} \succ 0$ e, portanto, não-singular.

Teorema 4.2 (SLSM incerto) Considere o Problema 4.1. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$ e $\hat{E}_{\theta(k)} \succ 0$. Então, a solução algébrica robusta recursiva para cada $\mu > 0$ é dada por

$$L_{\mu,\theta(k),k} = \left[I_n - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + \overline{G}_{\theta(k)} \overline{G}_{\theta(k)}^T \right)^{-1} \right] \overline{F}_{\theta(k)} + \overline{G}_{\theta(k)} \times \left(I_m + \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)},$$

$$K_{\mu,\theta(k),k} = \overline{R}_{\theta(k)}^{1/2} \left(I_m + \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} - R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \times \left(\widehat{\lambda}_{\mu} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}},$$

$$P_{\mu,\theta(k),k} = \overline{F}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} - \overline{F}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \left(I_m + \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \times \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} + \overline{Q}_{\theta(k)},$$

 $sendo \ \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} = \left(\Phi(\mu,\widehat{\lambda}_{\mu}) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}\widehat{E}_{\theta(k)}\right)^{-1}, \ \widehat{E}_{\theta(k)} \ definido \ em \ (4.9), \ \overline{G}_{\theta(k)} = G_{\theta(k)}\overline{R}_{\theta(k)}^{1/2}, \ \overline{R}_{\theta(k)} \ conforme \ o \ Lema \ 4.3 \ e \ os \ blocos \ matriciais$

$$\overline{F}_{\theta(k)} = F_{\theta(k)} - G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}} e^{-1} \overline{Q}_{\theta(k)} = Q_{\theta(k)} + E_{F_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}}.$$

Demonstração. A solução algébrica robusta do Problema 4.1, definido a partir do SLSM incerto (4.1, caso B), é obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (4.11). De fato, considere o sistema de equações

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}X_1 + X_8 = O, \tag{4.21-a}$$

$$R_{\theta(k)}^{-1}X_2 + X_9 = O, (4.21-b)$$

$$\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda}_u) X_3 = O, \tag{4.21-c}$$

$$Q_{\theta(k)}^{-1}X_4 = -I_n, (4.21-d)$$

$$\Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu}) X_5 + X_8 - G_{\theta(k)} X_9 = F_{\theta(k)}, \tag{4.21-e}$$

$$\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_6 + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} X_8 = O, \tag{4.21-f}$$

$$\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_7 - E_{G_{\theta(k)}} X_9 = E_{F_{\theta(k)}}, \tag{4.21-g}$$

$$X_1 + X_5 + E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T X_6 = O,$$
 (4.21-h)

$$X_2 - G_{\theta(k)}^T X_5 - E_{G_{\theta(k)}}^T X_7 = O. (4.21-i)$$

Combinando (4.21-b) e (4.21-i), tem-se

$$X_9 = -R_{\theta(k)}^{-1} \left(G_{\theta(k)}^T X_5 + E_{G_{\theta(k)}}^T X_7 \right), \tag{4.22}$$

que junto com (4.21-a), (4.21-e), (4.21-f), (4.21-g) e (4.21-h) fornecem

$$N_{\theta(k)} \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\theta(k)} \\ O \\ E_{F_{\theta(k)}} \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

com $N_{\theta(k)}$ definido conforme o Lema 4.4. Como a inversa de $N_{\theta(k)}$ está garantida pelo Lema 4.4, podemos obter a solução do sistema de equações (4.23) pelo Lema A.10. Logo,

$$X_{5} = \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)}\overline{R}_{\theta(k)}G_{\theta(k)}^{T}\right)^{-1}\overline{F}_{\theta(k)} e$$

$$X_{7} = \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}}R_{\theta(k)}^{-1}E_{G_{\theta(k)}}^{T}\right)^{-1} \left(E_{F_{\theta(k)}} - E_{G_{\theta(k)}}R_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^{T}X_{5}\right),$$

$$(4.24)$$

sendo $\overline{R}_{\theta(k)}$ conforme o Lema 4.4,

$$\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} = \left(\Phi(\mu,\widehat{\lambda}_{\mu}) + \Psi_{\theta(k),k+1}^{-1}\widehat{E}_{\theta(k)}\right)^{-1} e$$

$$\overline{F}_{\theta(k)} = F_{\theta(k)} - G_{\theta(k)}R_{\theta(k)}^{-1}E_{G_{\theta(k)}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}}R_{\theta(k)}^{-1}E_{G_{\theta(k)}}^{T}\right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}}.$$

De (4.22) e (4.24), tem-se

$$X_{9} = -\overline{R}_{\theta(k)}G_{\theta(k)}^{T} \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + G_{\theta(k)}\overline{R}_{\theta(k)}G_{\theta(k)}^{T}\right)^{-1} \overline{F}_{\theta(k)} - R_{\theta(k)}^{-1}E_{G_{\theta(k)}}^{T} \times \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}}R_{\theta(k)}^{-1}E_{G_{\theta(k)}}^{T}\right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}}.$$
(4.25)

Definindo $\overline{G}_{\theta(k)} = G_{\theta(k)} \overline{R}_{\theta(k)}^{1/2}$ e aplicando o Lema de Inversão de Matrizes (Lema A.9) em (4.25), obtém-se

$$X_{9} = -\overline{R}_{\theta(k)}^{1/2} \left(I_{m} + \overline{G}_{\theta(k)}^{T} \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \overline{G}_{\theta(k)}^{T} \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} - R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^{T} \times \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^{T} \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}}.$$
(4.26)

A partir de (4.21-e) e (4.26), resulta em

$$\begin{split} X_8 &= F_{\theta(k)} + G_{\theta(k)} X_9 - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) X_5 \\ &= \left[I_n - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k), k+1}^{-1} + \overline{G}_{\theta(k)} \overline{G}_{\theta(k)}^T \right)^{-1} \right] \overline{F}_{\theta(k)} + \overline{G}_{\theta(k)} \times \\ & \left(I_m + \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k), k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k), k+1} \overline{F}_{\theta(k)}. \end{split}$$

De (4.11) tem-se que as matrizes $L_{\mu,\theta(k),k}$, $K_{\mu,\theta(k),k}$ e $P_{\mu,\theta(k),k}$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} L_{\mu,\theta(k),k} \\ K_{\mu,\theta(k),k} \\ P_{\mu,\theta(k),k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & I_n & O \\ O & O & O & O & O & O & I_n & O \\ O & O & O & -I_n & F_{\theta(k)}^T & O & E_{F_{\theta(k)}}^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_8 \\ X_9 \\ -X_4 + F_{\theta(k)}^T X_5 + E_{F_{\theta(k)}}^T X_7 \end{bmatrix}.$$

Logo, $L_{\mu,\theta(k),k} = X_8$ e $K_{\mu,\theta(k),k} = X_9$. De (4.21-d) e (4.24), obtém-se

$$P_{\mu,\theta(k),k} = Q_{\theta(k)} + E_{F_{\theta(k)}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^{T} \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}} + \overline{F}_{\theta(k)}^{T} \left(\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}^{-1} + \overline{G}_{\theta(k)} I_{m} \overline{G}_{\theta(k)}^{T} \right)^{-1} \overline{F}_{\theta(k)}. \tag{4.27}$$

Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (4.27), resulta em

$$P_{\mu,\theta(k),k} = \overline{F}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} - \overline{F}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \left(I_m + \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{G}_{\theta(k)} \right)^{-1} \times \overline{G}_{\theta(k)}^T \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \overline{F}_{\theta(k)} + \overline{Q}_{\theta(k)},$$

sendo
$$\overline{Q}_{\theta(k)} = Q_{\theta(k)} + E_{F_{\theta(k)}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{\ell} + E_{G_{\theta(k)}} R_{\theta(k)}^{-1} E_{G_{\theta(k)}}^T \right)^{-1} E_{F_{\theta(k)}}.$$

Observe que a solução algébrica robusta recursiva para o SLSM incerto independe da matriz $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}_{\mu})$. Assim, é possível obter a solução via (4.10) ao invés de (4.11).

Observação 4.2

i. Quando $\hat{\lambda} \to \infty$ tem-se que $\hat{E}_{\theta(k)} \to O$. De fato, para $\theta(k) = i$ obtém-se

$$\widehat{E}_{i} = I_{n} - E_{\mathbf{p}_{i}}^{T} \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_{n} + E_{\mathbf{p}_{i}} \Psi_{i,k+1}^{-1} E_{\mathbf{p}_{i}}^{T} \right)^{-1} E_{\mathbf{p}_{i}} \Psi_{i,k+1}^{-1}
\stackrel{(4.6)}{=} I_{n} - e_{i} \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_{n} + e_{i} \Psi_{i,k+1}^{-1} \right)^{-1} \Psi_{i,k+1}^{-1}
\widehat{\lambda} \stackrel{\to}{=} \Sigma_{n} - e_{i} \left(e_{i} \Psi_{i,k+1}^{-1} \right)^{-1} \Psi_{i,k+1}^{-1}
= I_{n} - e_{i} \left(e_{i}^{-1} \Psi_{i,k+1} \right) \Psi_{i,k+1}^{-1} = O.$$

Logo, $\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} \to \Phi(\mu,\widehat{\lambda})$ e, para o SLSM nominal, tem-se

$$P_{\mu,\theta(k),k} = F_{\theta(k)}^T \left[\mu^{-1} I_n - \mu^{-2} G_{\theta(k)} \left(R_{\theta(k)} + \mu^{-1} G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)} \right)^{-1} G_{\theta(k)}^T \right] F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)},$$

ou seja, $P_{\mu,\theta(k),k}$ é constante para todo $k \geq 0$. De modo análogo, obtém-se que $P_{\mu,\theta(k),k}$ também é constante para o SLSM incerto. Portanto, para que a solução exista, o parâmetro $\hat{\lambda}$ deve satisfazer a condição $\hat{E}_{\theta(k)} \succ 0$.

ii. Se a matriz de transição nominal é nula ($\mathbb{P} = O$), então tem-se que $\Psi_{\theta(k),k+1} = O$ e $\widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1} = \Phi(\mu,\widehat{\lambda})$. Logo, pela análise do item (i), $P_{\mu,\theta(k),k}$ é constante para todo $k \geq 0$. Portanto, como $P_{\mu,\theta(k),k}$ perde a sua característica recursiva, a abordagem proposta não é viável para este caso.

Os Teoremas 4.1 e 4.2 mostram que a solução proposta no Lema 4.1, através de um arranjo matricial, pode ser escrita na forma de equações algébricas de Riccati acopladas clássicas. De fato, considere a equação de Riccati para os SLSMs (veja detalhes em Blair e Sworder (1975) e Chizeck et al. (1986))

$$P_{\theta(k)} = A_{\theta(k)}^{T} \Psi_{\theta(k),k+1} A_{\theta(k)} - A_{\theta(k)}^{T} \Psi_{\theta(k),k+1} B_{\theta(k)} \left(\Re_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}^{T} \Psi_{\theta(k),k+1} B_{\theta(k)} \right)^{-1} \times B_{\theta(k)}^{T} \Psi_{\theta(k),k+1} A_{\theta(k)} + \Omega_{\theta(k)}$$

e as seguintes identificações com a versão robusta apresentada no Teorema 4.1

$$P_{\theta(k)} \leftarrow P_{\mu,\theta(k),k}, \quad A_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)}, \quad \Psi_{\theta(k),k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}, \quad B_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)},$$

$$\mathcal{R}_{\theta(k)} \leftarrow R_{\theta(k)} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_{\theta(k)} \leftarrow Q_{\theta(k)}$$

e no Teorema 4.2

$$\begin{split} P_{\theta(k)} \leftarrow P_{\mu,\theta(k),k}, & A_{\theta(k)} \leftarrow \overline{F}_{\theta(k)}, & \Psi_{\theta(k),k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{\theta(k),k+1}, & B_{\theta(k)} \leftarrow \overline{G}_{\theta(k)}, \\ & \mathcal{R}_{\theta(k)} \leftarrow I_m & \text{e} & \mathcal{Q}_{\theta(k)} \leftarrow \overline{Q}_{\theta(k)}. \end{split}$$

Devido a esta equivalência, as condições de estabilidade e convergência para o regulador robusto de SLSM sujeito a incertezas são baseadas nas do problema de regulação clássico. Observe que a equação algébrica de Riccati clássica é um caso particular da solução encontrada para SLSM nominal pelo arranjo matricial, basta considerar $\mu \to \infty$ e $\delta \mathbb{P} = O$. Similarmente, a solução obtida por Cerri (2013) é um caso particular da solução encontrada para o SLSM incerto, quando $\mu \to \infty$ e $\delta \mathbb{P} = O$. Além disso, se $\delta F_{\theta(k)} = O$ e $\delta G_{\theta(k)} = O$, então a equação clássica também é um caso particular da solução encontrada para o SLSM incerto.

A estabilidade e a convergência da solução clássica obtida para o problema do regulador linear quadrático de SLSMs nominais (4.1, Caso A) com matriz de transição conhecida são asseguradas pelos resultados apresentados a seguir.

Definição 4.1 Diz-se que o sistema linear sujeito a saltos Markovianos (4.1, Caso A) com $u_k \equiv 0$ é estável na média quadrática (MS-estável, do inglês, Mean Square Stable) se para quaisquer condições iniciais $x_0 \in \theta(0)$ existir $\bar{x} \in \bar{X}$ (independente de $x_0 \in \theta(0)$ tais que:

$$\|\mathcal{E}\{x_k\} - \bar{x}\| \to 0 \quad e \quad \|\mathcal{E}\{x_k x_k^T\} - \overline{X}\| \to 0 \quad quando \quad k \to \infty.$$

Definição 4.2 Sejam $F = (F_1, ..., F_s)$ e $G = (G_1, ..., G_s)$. Diz-se que o par (F,G) é estabilizável na média quadrática (MS-estabilizável, do inglês, Mean Square Stabilizable) se existir um conjunto de matrizes $K = (K_1, ..., K_s)$ tal que L = F + BK é estável na média quadrática. Nesse caso, diz-se que K estabiliza o par (F,G).

Definição 4.3 Suponha que $Q_{\theta(k)}$ possa ser escrita como $C_{\theta(k)}^T C_{\theta(k)}$ e seja $C = (C_1, \ldots, C_s)$. O par (C,F) é detectável na média quadrática (MS-detectável, do inglês, Mean Square Detectable) se existir um conjunto de matrizes $M = (M_1, \ldots, M_s)$ tal que o raio espectral da matriz

$$\mathcal{A}_M = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n^2}) \operatorname{diag}(\Gamma_i \otimes \Gamma_i), \ \operatorname{com} \ \Gamma_i = F_i + M_i C_i,$$

é menor que 1.

Definição 4.4 Diz-se que $P = (P_1, ..., P_s)$ é uma solução estabilizante na média quadrática para as equações algébricas de Riccati acopladas (4.28) se ela satisfaz, para cada $i \in S$.

$$P_{i} = F_{i}^{T} \Psi_{i} F_{i} - F_{i}^{T} \Psi_{i} G_{i} \left(R_{i} + G_{i}^{T} \Psi_{i} G_{i} \right)^{-1} G_{i}^{T} \Psi_{i} F_{i} + Q_{i}, \tag{4.28}$$

e o raio espectral da matriz

$$\mathcal{A}_K = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n^2}) \operatorname{diag}(L_i \otimes L_i),$$

$$\operatorname{com} \ L_i = F_i + G_i \, K_i \ e \ K_i = -\left(R_i + G_i^T \Psi_i G_i\right)^{-1} G_i^T \Psi_i F_i,$$

é menor que 1.

Corolário 4.1 (COSTA et al., 2005) Se (F,G) é um par estabilizável e (C,F) é um par detectável então a solução estabilizante para (4.28) existe.

Teorema 4.3 (COSTA et al., 2005) Suponha que o par (F,G) é estabilizável, então para qualquer condição inicial $\bar{P} = (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s) \succeq 0$, o conjunto de matrizes $P_k = (P_{1,k}, \dots, P_{s,k})$ converge para uma solução semidefinida positiva $P = (P_1, \dots, P_s)$ de (4.28) quando k tende ao infinito. Além disso, se o par (C,F) é detectável, então existe uma única solução semidefinida positiva P para (4.28) e essa solução é a única solução estabilizante na média quadrática.

4.3 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a aplicação do regulador robusto recursivo para SLSMs com matrizes de transição incertas. Para tal, o Algoritmo 4.1 foi implementado no software $MATLAB^{\circledR}$ na versão 9.2.0.538062 (R2017a) em um computador com a seguinte configuração: processador $Intel^{\circledR}$ $Core^{TM}$ i5 com frequência de 2.6GHz, memória RAM de 8GB e sistema operacional $Windows^{\circledR}$ 8.1.

Observe que a aplicação do Algoritmo 4.1 está condicionada à verificação de que $||\Delta|| \le 1$ como definido na Subseção 2.2.4. Quando esta condição não é satisfeita, considera-se um escalar $\kappa \ge 1$, de modo que $||\Delta|| \le \kappa$. Para assegurar a equivalência com o problema analisado, tem-se as seguintes identificações de acordo com o modelo em (4.8):

$$\Delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}}{\kappa}, \quad \Delta_{\theta(k)} \leftarrow \frac{\Delta_{\theta(k)}}{\kappa},$$

$$E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \leftarrow \kappa E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}, \quad E_{F_{\theta(k)}} \leftarrow \kappa E_{F_{\theta(k)}} \quad \text{e} \quad E_{G_{\theta(k)}} \leftarrow \kappa E_{G_{\theta(k)}}.$$

Simulações de Monte Carlo foram realizadas para ilustrar o comportamento dos sistemas considerados, sendo que a variável $\theta(k)$ foi gerada de acordo com o vetor de distribuição inicial e com a matriz de transição². Para cada realização, foram atribuídos

² O algoritmo utilizado é apresentado no Apêndice D.

valores para as incertezas Δ , sorteados aleatoriamente com distribuição uniforme, a fim de obter as matrizes $\delta \mathbb{P}$, δF e δG e, consequentemente, o estado x_k .

Exemplo 4.1 (SLSM nominal) Considere o SLSM (4.1, caso A) com três modos de operação cujas matrizes de parâmetros, adaptadas de Blair e Sworder (1975) e Costa et al. (1999), são dadas por

$$F_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}, F_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}, F_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.3 & -5.2 \end{bmatrix}, G_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall i = 1,2,3,$$

$$Q_{1} = \begin{bmatrix} 3,6001 & -3,8001 \\ -3,8001 & 4,8700 \end{bmatrix}, Q_{2} = \begin{bmatrix} 10,0002 & -3,0002 \\ -3,0002 & 8,0000 \end{bmatrix}, Q_{3} = \begin{bmatrix} 5,0001 & -4,5001 \\ -4,5001 & 4,5002 \end{bmatrix},$$

$$R_{1} = 2,6002, R_{2} = 1,1651 \ e \ R_{3} = 1,1109.$$

A matriz de transição não é precisamente conhecida, mas pertence a um domínio politópico modelado por limitantes em norma da seguinte forma

$$\mathbb{P}^{\delta} = \left[\mathbb{P} + \delta \mathbb{P} \right],$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.11 & 0.10 \\ 0.27 & 0.35 & 0.20 \\ 0.23 & 0.07 & 0.52 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.96\Delta_1 & 0.48\Delta_2 & 0.48\Delta_2 \\ 0.36\Delta_2 & 0.72\Delta_1 & 0.36\Delta_2 \\ 0.36\Delta_2 & 0.36\Delta_2 & 0.72\Delta_1 \end{bmatrix}$$

com $\Delta_1 \in [0;0,25]$ e $\Delta_2 = 1 - \Delta_1$. Observe que as matrizes de transição obtidas quando $\Delta_1 = 0$ e $\Delta_1 = 0,25$ são os vértices do politopo considerado por Costa et al. (1999) e Lu et al. (2013). Os valores para os parâmetros incertos de $\delta \mathbf{p}_i$ são dados por:

$$h_{11} = 0.24$$
, $h_{12} = h_{13} = 0.12$, $h_{21} = h_{23} = h_{31} = h_{32} = 0.18$, $h_{22} = h_{33} = 0.36$, $e_1 = 4$ $e_2 = e_3 = 2$.

Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 4.1:

$$\kappa = 1, \quad \mu^{-1} = 0, \quad \hat{\lambda} = 1,5, \quad N = 20,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}^T, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.30 & 0.54 \end{bmatrix} \quad e \quad P_{i,N} = I_2, \quad \forall i = 1,2,3.$$

Simulações de Monte Carlo foram realizadas considerando o regulador robusto apresentado no Algoritmo 4.1 e o SLSM real, ou seja,

$$\hat{x}_{k+1} = F_{\theta(k)} \, \hat{x}_k + G_{\theta(k)} \, u_k \quad com \quad u_k = K^*_{\mu,\theta(k),k} \, \hat{x}_k.$$

Na Figura 4.1 são apresentados os valores médios $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ e $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que as médias tendem a zero conforme o horizonte k aumenta.

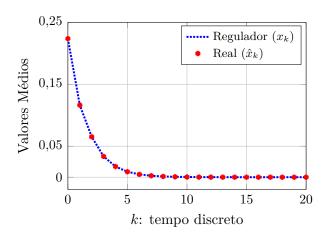
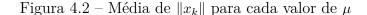


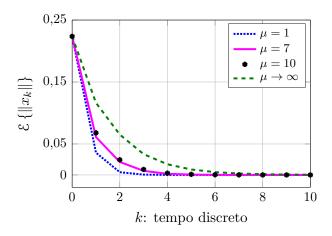
Figura 4.1 – Valores médios obtidos para o SLSM do Exemplo 4.1

Os ganhos de realimentação e as soluções das equações de Riccati obtidos pelo regulador robusto recursivo são dados por

$$\begin{split} K_1^* &= \begin{bmatrix} 2{,}33389 & -2{,}54254 \end{bmatrix}, \ K_2^* &= \begin{bmatrix} 4{,}17167 & -3{,}83216 \end{bmatrix}, \ K_3^* &= \begin{bmatrix} -5{,}16372 & 5{,}66614 \end{bmatrix}, \\ P_1^* &= \begin{bmatrix} 18{,}77157 & -20{,}32793 \\ -20{,}32793 & 37{,}84411 \end{bmatrix}, \ P_2^* &= \begin{bmatrix} 30{,}90001 & -22{,}19908 \\ -22{,}19908 & 40{,}14449 \end{bmatrix}, \\ e \ P_3^* &= \begin{bmatrix} 35{,}40294 & -37{,}86106 \\ -37{,}86106 & 53{,}04053 \end{bmatrix}. \end{split}$$

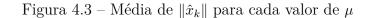
Na Figura 4.2 é apresentado o valor de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ de acordo com as soluções obtidas pelo regulador robusto para cada valor de μ . Observe que as médias tendem a zero para qualquer valor atribuído ao parâmetro de penalidade μ .

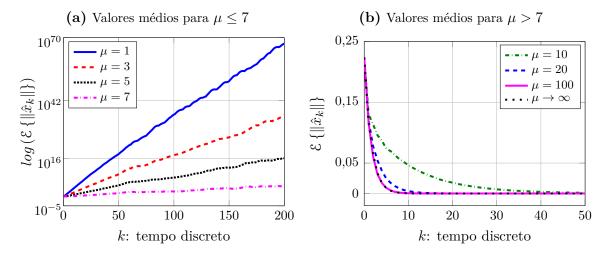




Na Figura 4.3 é ilustrado o comportamento dos valores médios do SLSM real $\mathbb{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ de acordo com as soluções $K_{\mu,\theta(k),k}$ obtidas pelo regulador robusto para cada

valor de μ . Observe na Figura 4.3(a) que para $\mu \leq 7$ tem-se $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\} \to \infty$. No entanto, na Figura 4.3(b), os valores médios tendem a zero para valores crescentes de μ . Além disso, as médias tendem para a solução ótima, ou seja, para o valor médio obtido quando $\mu \to \infty$.





Exemplo 4.2 (SLSM Incerto) Considere o SLSM (4.1, caso B) com três modos de operação, sendo que as matrizes de parâmetros nominais são dadas no Exemplo 4.1, juntamente com a matriz de transição. Os parâmetros das matrizes incertas são dados por

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad E_{F_1} = E_{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_{F_3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},$$
 $E_{G_1} = 0.6, \quad E_{G_2} = 1 \quad e \quad E_{G_3} = 0.5.$

Observe que as matrizes de parâmetros $\mathfrak{F}_{\theta(k)}$ obtidas quando $\Delta_i = -1$ e $\Delta_i = 1$ são os vértices do politopo considerado por Lu et al. (2013).

Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 4.1:

$$\kappa = 1$$
, $\mu = 10^{14}$, $\alpha = 0.5$, $N = 20$ e $P_{i,N} = I_2$, $\forall i = 1,2,3$.

Simulações de Monte Carlo foram realizadas considerando o regulador robusto apresentado no Algoritmo 4.1 e o SLISM real, ou seja,

$$\hat{x}_{k+1} = (F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)}) \hat{x}_k + (G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)}) u_k \quad com \quad u_k = K_{\mu,\theta(k),k}^* \hat{x}_k.$$

Na Figura 4.4 são apresentados os valores de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ e $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que as médias tendem a zero conforme o horizonte k aumenta.

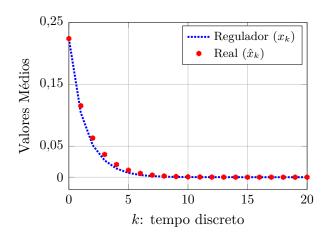


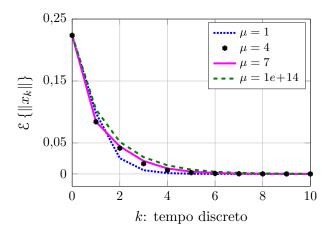
Figura 4.4 – Valores médios obtidos para o SLSM do Exemplo 4.2

Os ganhos de realimentação e as soluções das equações de Riccati obtidos pelo regulador robusto recursivo são dados por

$$\begin{split} K_{\mu,1}^* = & \left[2,42802 \quad -2,66341 \right], \quad K_{\mu,2}^* = \left[3,91189 \quad -3,51692 \right], \quad K_{\mu,3}^* = \left[-5,19070 \quad 5,66505 \right], \\ P_{\mu,1}^* = & 10^{13} \begin{bmatrix} 0,92130 & -0,97426 \\ -0,97426 & 2,37671 \end{bmatrix}, \quad P_{\mu,2}^* = & 10^{13} \begin{bmatrix} 3,90495 & -3,59095 \\ -3,59095 & 4,10834 \end{bmatrix}, \\ e \quad P_{\mu,3}^* = & 10^{13} \begin{bmatrix} 1,96845 & -2,09830 \\ -2,09830 & 3,12863 \end{bmatrix}. \end{split}$$

Na Figura 4.5 é apresentado o valor de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ de acordo com as soluções obtidas pelo regulador robusto para cada valor de μ . Observe que as médias tendem a zero para qualquer valor atribuído ao parâmetro de penalidade μ .

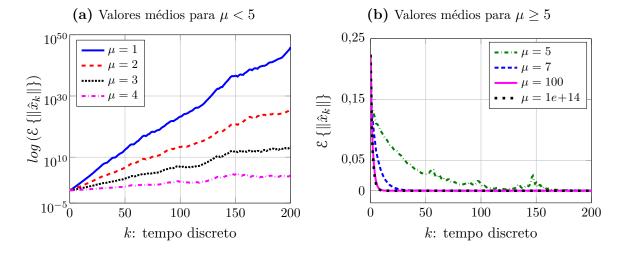
Figura 4.5 – Média de $||x_k||$ para cada valor de μ



Na Figura 4.6 são ilustrados os valores médios do SLSM real $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ de acordo com as soluções $K_{\mu,\theta(k),k}$ obtidas pelo regulador robusto para cada valor de μ . Observe na

Figura 4.6(a) que para $\mu < 5$ as médias tendem ao infinito. No entanto, na Figura 4.6(b) tem-se $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}\to 0$ para valores crescentes de μ . Além disso, as médias tendem para a solução ótima, ou seja, para o valor médio obtido quando $\mu \to \infty$.

Figura 4.6 – Média de $\|\hat{x}_k\|$ para cada valor de μ



Capítulo 5

Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via Primeiro Momento

Neste capítulo, inicia-se a abordagem do problema de regulação de SLSMs no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov, adotando uma metodologia distinta daquelas existentes na literatura, que podem ser dadas em termos de LMIs (do VAL et al., 2002; TODOROV; FRAGOSO, 2016) ou por métodos numéricos, como o método variacional (do VAL; BAŞAR, 1999).

A metodologia proposta consiste em reformular o SLSM como um sistema determinístico independente da cadeia de Markov. Para então, projetar um regulador recursivo por meio de um problema de otimização não-linear, no qual deseja-se determinar a melhor ação do controle sob a máxima influência das incertezas presentes nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição.

A solução para este problema é obtida por meio de uma estrutura na forma de blocos matriciais, derivada da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Subseção 2.2.5). Essa formulação se assemelha ao regulador proposto por Cerri (2009) para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado, cujas condições de existência são bem definidas e similares às definidas para o regulador clássico.

Neste trabalho, o sistema determinístico equivalente ao SLSM foi obtido a partir de três modelos distintos. O primeiro, apresentado neste capítulo, é fundamentado no primeiro momento da variável de estado do SLSM, definindo o sistema linear de primeiro momento (SLPM).

O SLPM que representa o SLSM na ausência de incertezas foi abordado em Costa et al. (2005) na análise da estabilidade do sistema. No entanto, este modelo será revisitado, no contexto de problemas de regulação, com a finalidade de auxiliar o desenvolvimento dos SLPMs modelados a partir de SLSMs com incertezas.

5.1 Sistema Linear de Primeiro Momento

Considere o SLSM de tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} \, x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} \, u_k, \ \forall k \ge 0 \\ y_k = \mathcal{C}_{\theta(k)} \, x_k + \mathcal{D}_{\theta(k)} \, u_k, \ \theta(0) \sim \pi_0 \end{cases}$$
 (5.1)

que assume dois possíveis modelos para as matrizes de parâmetros:

Caso A: SLSM nominal

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} \ e \ \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)},$$

Caso B: SLSM incerto

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)},$$

sendo o par $(x_k, \theta(k))$ o estado do sistema, u_k a entrada de controle e y_k a variável de observação. As matrizes $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,n}$ e $\mathcal{D}_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,m}$ são conhecidas e as matrizes de incertezas $\delta F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são modeladas da seguinte forma:

$$\left[\delta F_{\theta(k)} \ \delta G_{\theta(k)}\right] = H_{\theta(k)} \ \Delta_{\theta(k)} \ \left[E_{F_{\theta(k)}} \ E_{G_{\theta(k)}}\right]$$

para todo $k \geq 0$, em que $H_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,t}$ (matriz não-nula), $E_{F_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$, $E_{G_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ são matrizes conhecidas e $\Delta_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{t,\ell}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\theta(k)}|| \leq 1$. A cadeia de Markov é indexada por $\theta(k)$ com distribuição inicial π_0 e associada à matriz de transição incerta \mathbb{P}^{δ} , definida em (3.3).

Neste capítulo, considera-se o cenário de observação parcial do estado do sistema, ou seja, x_k é observado, mas não se tem acesso à cadeia de Markov $\theta(k)$, com exceção da distribuição inicial π_0 que pode ser completamente conhecida ou possuir algum tipo de incerteza. Dessa forma, o problema em questão consiste em projetar controladores por realimentação de estado independentes dos modos de operação, obtendo-se uma sequência de controle admissível $\mathfrak{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ que estabiliza o SLSM sob a hipótese de existir incertezas nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição.

Com esta finalidade, propõe-se uma abordagem determinística do problema, reformulando o SLSM como um sistema independente da cadeia de Markov a partir do valor esperado da variável de estado do sistema. Assim, considere o primeiro momento do SLSM definido por

$$q_{i,k} = \mathcal{E}\left\{x_k 1_{\{\theta(k)=i\}}\right\}, \ \forall \ k \ge 0 \ \mathrm{e} \ i \in \mathcal{S},$$

sendo $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ a medida de Dirac do conjunto \mathcal{C} definida por

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ se } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
 (5.2)

Note que para qualquer $i \in \mathcal{S}$, tem-se que $\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 1$ se $\theta(k) = i$, e 0 caso contrário. Assumindo que $\theta(k) = i$ e $\theta(k+1) = j$, é possível estabelecer uma equação recursiva para $q_{i,k}$ a partir do valor esperado da equação de estado (5.1) de acordo com as seguintes etapas:

$$\begin{split} q_{j,k+1} &= \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} \, 1\!\!1_{\!\{\theta(k+1) = j\}} \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} \, 1\!\!1_{\!\{\theta(k+1) = j, \theta(k) = i\}} \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} | \theta(k+1) = j, \theta(k) = i \Big\} \, \Pr \left[\theta(k+1) = j, \theta(k) = i \right]. \end{split}$$

Aplicando as seguintes propriedades

$$Pr[\theta(k+1) = j, \theta(k) = i] = Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i] Pr[\theta(k) = i] e$$
 (5.3-a)
 $Pr[\theta(k) = i] = \mathcal{E}\{\mathbb{1}_{\{\theta(k) = i\}}\},$ (5.3-b)

segue que

$$\begin{split} q_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} | \theta(k+1) = j, \theta(k) = i \Big\} \ Pr \left[\theta(k+1) = j, \theta(k) = i \right] \\ &\stackrel{(5.3\text{-a})}{=} \sum_{i=1}^{s} \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} | \theta(k+1) = j, \theta(k) = i \Big\} \ Pr \left[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i \right] \ Pr \left[\theta(k) = i \right] \\ &\stackrel{(5.3\text{-b})}{=} \sum_{i=1}^{s} \mathcal{E} \Big\{ x_{k+1} 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} | \theta(k+1) = j \Big\} \ Pr \left[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i \right] \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \sum_{i=1}^{s} \mathcal{E} \Big\{ \left(\mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k \right) 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} | \theta(k+1) = j \Big\} \ Pr \left[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i \right] \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left(\mathcal{F}_{i} q_{i,k} + \mathcal{G}_{i} \ \mathcal{E} \Big\{ u_k 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} | \theta(k+1) = j \Big\} \right) \ p_{ij}^{\delta}. \end{split}$$

Como u_k independe de $\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}$, tem-se

$$\begin{split} \mathcal{E}\Big\{u_k 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} | \theta(k+1) = j\Big\} &= \mathcal{E}\Big\{u_k | \theta(k+1) = j, \theta(k) = i\Big\} \ Pr\left[\theta(k) = i\right] \\ &= u_k \, Pr\left[\theta(k) = i\right] \\ &= u_k \, \pi_{i\,k}^{\delta}. \end{split}$$

Portanto, $q_{j,k+1}$ pode ser reescrito como

$$q_{j,k+1} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} \left(\mathcal{F}_i \, q_{i,k} + \pi_{i,k}^{\delta} \, \mathcal{G}_i \, u_k \right), \ \forall j \in \mathcal{S}.$$
 (5.4)

A partir da forma matricial do sistema de equações formado por (5.4) definimos o sistema linear de primeiro momento da seguinte forma:

$$q_{k+1} = \mathcal{A}_{k}^{\delta} q_{k} + \mathcal{B}_{k}^{\delta} u_{k}, \tag{5.5}$$

$$endo \qquad q_{k} = \begin{bmatrix} q_{1,k} \\ q_{2,k} \\ \vdots \\ q_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{k}^{\delta} = \begin{bmatrix} p_{11}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & p_{21}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & p_{s1}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \\ p_{12}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & p_{22}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & p_{s2}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & p_{2s}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & p_{ss}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{k}^{\delta} = \begin{bmatrix} p_{11}^{\delta} \pi_{1,k}^{\delta} I_{n} & p_{21}^{\delta} \pi_{2,k}^{\delta} I_{n} & \dots & p_{s1}^{\delta} \pi_{s,k}^{\delta} I_{n} \\ p_{12}^{\delta} \pi_{1,k}^{\delta} I_{n} & p_{22}^{\delta} \pi_{2,k}^{\delta} I_{n} & \dots & p_{s2}^{\delta} \pi_{s,k}^{\delta} I_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s}^{\delta} \pi_{1,k}^{\delta} I_{n} & p_{2s}^{\delta} \pi_{2,k}^{\delta} I_{n} & \dots & p_{ss}^{\delta} \pi_{s,k}^{\delta} I_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1} \\ g_{2} \\ \vdots \\ g_{s} \end{bmatrix}.$$

O sistema dinâmico (5.5) representa uma formulação geral do modelo. Na sequência, as matrizes de parâmetros serão definidas de acordo com o SLSM (nominal ou incerto) e com a MT (conhecida ou incerta).

Caso A: SLSM nominal

Considere o SLSM nominal (5.1, caso A),

$$x_{k+1} = F_{\theta(k)} x_k + G_{\theta(k)} u_k. \tag{5.6}$$

As matrizes de parâmetros do SLPM (5.5) que representam o sistema (5.6) são definidas de acordo com o tipo de matriz de transição considerada. Assim, têm-se os seguintes casos:

 \Box **A.1:** MT conhecida

$$q_{k+1} = \mathcal{A} \, q_k + \mathcal{B}_k \, u_k, \tag{5.7}$$

 \Box **A.2:** MT incerta

$$q_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} q_k + \mathcal{B}_k^{\delta} u_k, \tag{5.8}$$

com
$$\mathcal{A}_k^{\delta} = \mathcal{A} + \delta \mathcal{A}_k$$
, $\mathcal{B}_k^{\delta} = \mathcal{B}_k + \delta \mathcal{B}_k$ sendo
$$\mathcal{A} = (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \mathbb{F}_d, \quad \mathcal{B}_k = (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \Pi_k \, \mathbb{G}, \quad \mathbb{F}_d = diag(F_i),$$
$$\Pi_k = \left(diag(\pi_{i,k}) \otimes I_n \right) \, \text{ e } \, \mathbb{G} = \left[G_1^T \, \dots \, G_s^T \right]^T.$$

As matrizes de parâmetros incertos em (5.8) são modeladas da seguinte forma

$$\delta \mathcal{A}_k = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{A}_k} E_{\mathcal{A}} \quad \text{e} \quad \delta \mathcal{B}_k = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{B}_k} E_{\mathcal{B}_k}$$

sendo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \dots O & \mathbf{h}_{21} \dots O & \dots & \mathbf{h}_{s1} \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \mathbf{h}_{1s} & O & \dots & \mathbf{h}_{2s} \dots & O & \dots & \mathbf{h}_{ss} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn,s^{2}n},$$

$$E_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \dots & \mathbf{a}_{1s} & O & & & \\ & \mathbf{a}_{21} \dots & \mathbf{a}_{2s} & O & & \\ O & & \mathbf{a}_{s1} \dots & \mathbf{a}_{ss} \end{bmatrix}^{T} \in \mathbb{R}^{s^{2}n,sn},$$

$$E_{\mathcal{B}_{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} \dots & \mathbf{b}_{1s} \dots & \mathbf{b}_{s1} \dots & \mathbf{b}_{ss} \end{bmatrix}^{T} \in \mathbb{R}^{3s^{2}n,m},$$

$$\Delta_{\mathcal{A}_{k}} = diag(\Delta_{\mathcal{A},11}, \dots, \Delta_{\mathcal{A},1s}, \dots, \Delta_{\mathcal{A},s1}, \dots, \Delta_{\mathcal{A},ss}) \in \mathbb{R}^{s^{2}n,s^{2}n},$$

$$\Delta_{\mathcal{B}_{k}} = diag(\Delta_{\mathcal{B}11}, \dots, \Delta_{\mathcal{B},1s}, \dots, \Delta_{\mathcal{B},s1}, \dots, \Delta_{\mathcal{B},ss}) \in \mathbb{R}^{s^{2}n,3s^{2}n}$$

com os elementos dados por

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= I_n, \quad \mathbf{a}_{ij} = h_{ij} e_{ij} F_i^T, \quad \mathbf{b}_{ij} = \left[p_{ij} m_{i,k} n_{i,k} G_i^T \ h_{ij} e_{ij} \pi_{i,k} G_i^T \ h_{ij} e_{ij} m_{i,k} n_{i,k} G_i^T \right], \\ \Delta_{\mathcal{A},ij} &= \Delta_{ij} I_n \quad \mathrm{e} \quad \Delta_{\mathcal{B},ij} = \left[\overline{\Delta}_{i,k} I_n \ \Delta_{ij} I_n \ \Delta_{ij} \overline{\Delta}_{i,k} I_n \right], \end{split}$$

sendo p_{ij} as probabilidades de transição nominais, h_{ij} , Δ_{ij} , e_{ij} , $m_{i,k}$, $\overline{\Delta}_{i,k}$ e $n_{i,k}$ são escalares tais que $\delta p_{ij} = h_{ij} \Delta_{ij} e_{ij}$ e $\delta \pi_{i,k} = m_{i,k} \Delta_{i,k} n_{i,k}$, como definidos em (3.4) e (3.7).

Caso B: SLSM incerto

Considere o SLSM incerto (5.1, caso B),

$$x_{k+1} = \left(F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)}\right) x_k + \left(G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)}\right) u_k. \tag{5.10}$$

Assim, o SLPM (5.5) que representa o sistema (5.10) é definido como

$$q_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} q_k + \mathcal{B}_k^{\delta} u_k \tag{5.11}$$

com $\mathcal{A}_k^{\delta} = \mathcal{A} + \delta \mathcal{A}_k$ e $\mathcal{B}_k^{\delta} = \mathcal{B}_k + \delta \mathcal{B}_k$, sendo

$$\mathcal{A} = (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \mathbb{F}_d, \quad \mathcal{B}_k = (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \Pi_k \, \mathbb{G}, \quad \mathbb{F}_d = diag(F_i),$$
$$\Pi_k = \left(diag(\pi_{i,k}) \otimes I_n \right) \quad \text{e} \quad \mathbb{G} = \left[G_1^T \, \dots \, G_s^T \right]^T.$$

As matrizes de parâmetros incertos são modeladas da seguinte forma

$$\delta \mathcal{A}_k = \mathcal{H} \, \Delta_{\mathcal{A}_k} \, E_{\mathcal{A}} \ \, \mathrm{e} \ \, \delta \mathcal{B}_k = \mathcal{H} \, \Delta_{\mathcal{B}_k} \, E_{\mathcal{B}_k},$$

sendo que os elementos das matrizes \mathcal{H} , $\Delta_{\mathcal{A}_k}$, $\Delta_{\mathcal{B}_k}$, $E_{\mathcal{A}}$ e $E_{\mathcal{B}_k}$ são distribuídos de modo análogo às matrizes do Caso A.2 (5.9) e dados de acordo com o tipo de matriz de transição considerada:

\Box **B.1:** MT conhecida

Considere as matrizes $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{sn,s^2t}$, $\Delta_{\mathcal{A}_k} = \Delta_{\mathcal{B}_k} \in \mathbb{R}^{s^2t,s^2\ell}$, $E_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{s^2\ell,sn}$ e $E_{\mathcal{B}_k} \in \mathbb{R}^{s^2\ell,m}$ com os seguintes elementos:

$$\mathbf{h}_{ij} = p_{ij}H_i, \quad \Delta_{\mathcal{A},ij} = \Delta_{\mathcal{B},ij} = \Delta_i, \quad \mathbf{a}_{ij} = E_{F_i}^T \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{b}_{ij} = \pi_{i,k}E_{G_i}^T;$$

\Box **B.2:** MT incerta

Considere as matrizes $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{sn,s^2n}$, $\Delta_{\mathcal{A}_k} \in \mathbb{R}^{s^2n,s^2(n+2t)}$, $E_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{s^2(n+2\ell),sn}$, $\Delta_{\mathcal{B}_k} \in \mathbb{R}^{s^2n,s^2(3n+4t)}$ e $E_{\mathcal{B}_k} \in \mathbb{R}^{s^2(3n+4\ell),m}$ com os seguintes elementos:

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= I_n, \quad \Delta_{\mathcal{A},ij} = \left[\Delta_{ij} I_n \ H_i \Delta_i \ H_i \Delta_i \Delta_{ij} \right], \quad \mathbf{a}_{ij} = \left[h_{ij} e_{ij} F_i^T \ p_{ij} E_{F_i}^T \ h_{ij} e_{ij} E_{F_i}^T \right], \\ \Delta_{\mathcal{B},ij} &= \left[\overline{\Delta}_i I_n \ \Delta_{ij} \overline{\Lambda}_i \Delta_i \overline{\Delta}_i I_n \ \overline{\Delta}_i H_i \Delta_i \ H_i \Delta_i \ \Delta_{ij} H_i \Delta_i \ \Delta_{ij} \overline{\Delta}_i H_i \Delta_i \right], \\ \mathbf{b}_{ij} &= \left[b^1 \quad b^2 \right], \quad b^1 &= \left[p_{ij} m_i n_i G_i^T \ h_{ij} e_{ij} \pi_{i,k} G_i^T \ m_i e_{ij} h_{ij} n_i G_i^T \right], \\ \mathbf{e} \quad b^2 &= \left[p_{ij} m_i n_i E_{G_i}^T \quad p_{ij} \pi_{i,k} E_{G_i}^T \quad \pi_{i,k} h_{ij} e_{ij} E_{G_i}^T \quad h_{ij} e_{ij} m_i n_i E_{G_i}^T \right]; \end{split}$$

sendo p_{ij} as probabilidades de transição nominais, h_{ij} , Δ_{ij} , e_{ij} , $m_{i,k}$, $\overline{\Delta}_{i,k}$ e $n_{i,k}$ são escalares tais que $\delta p_{ij} = h_{ij} \Delta_{ij} e_{ij}$ e $\delta \pi_{i,k} = m_{i,k} \Delta_{i,k} n_{i,k}$, como definidos em (3.4) e (3.7).

5.1.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte custo de N estágios associado ao SLPM (5.5)

$$J_N(q, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[q_k^T \mathcal{Q} q_k + u_k^T \left(\delta_{\mathcal{R}_k}^T \mathcal{R} \delta_{\mathcal{R}_k} \right) u_k \right] + q_N^T \mathcal{P}_N q_N,$$

sendo $\mathcal{P}_N \in \mathbb{R}^{sn,sn}$, $\mathcal{Q} = diag(Q_{\theta(k)})$, $\mathcal{R} = diag(R_{\theta(k)})$ matrizes simétricas e definidas positivas, $Q_{\theta(k)} = \mathcal{C}_{\theta(k)}^T \mathcal{C}_{\theta(k)} \succ 0$, $R_{\theta(k)} = \mathcal{D}_{\theta(k)}^T \mathcal{D}_{\theta(k)} \succ 0$ e o parâmetro incerto $\delta_{\mathcal{R}_k}$ definido como

$$\delta_{\mathcal{R}_k} = H_{\mathcal{R}} \, \Delta_{\mathcal{R}_k} \, E_{\mathcal{R}} \tag{5.12}$$

com
$$H_{\mathcal{R}} = I_{sm}$$
, $E_{\mathcal{R}} = I_m$ e $\Delta_{\mathcal{R}_k} = \left[\mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_m \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} I_m \dots \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_m \right]^T$.

Considere o problema de minimização do par (q_{k+1},u_k) e da maximização da influência das incertezas relacionadas à matriz de ponderação \Re e/ou às matrizes de parâmetros do SLPM. Assim, tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{q_{k+1}, u_k} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} J_N(q, u)
\text{sujeito a} \quad q_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} q_k + \mathcal{B}_k^{\delta} u_k,$$
(5.13)

com uma lei de controle linear de realimentação de estado na forma

$$u_k = \mathcal{K}_k q_k, \ \forall k > 0.$$

Note que este modelo independe da variável estocástica $\theta(k)$, permitindo uma interpretação determinística do problema. Além disso, a entrada de controle u_k satisfaz, simultaneamente, o SLPM e o SLSM (5.1) para todo instante de tempo k.

O problema de otimização (5.13) pode ser resolvido recursivamente por meio do método de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995) através dos seguintes problemas de otimização

$$\min_{q_1, u_0} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta_{\mathcal{A}_k}, \delta_{\mathcal{B}_k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,0} \left(q_1, u_0 \right) + \min_{q_2, u_1} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta_{\mathcal{A}_k}, \delta_{\mathcal{B}_k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,1} \left(q_2, u_1 \right) + \dots + \right\} \right\} \right\} \tag{5.14}$$

$$\min_{q_t, u_{t-1}} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} \left\{ \mathcal{J}_{\mu, t-1} \left(q_t, u_{t-1} \right) + \ldots + \min_{q_N, u_{N-1}} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} \left\{ \mathcal{J}_{\mu, N-1} \left(q_N, u_{N-1} \right) \right\} \right\} \right\},$$

sendo que o funcional $\mathcal{J}_{\mu,k}(q_{k+1},u_k)$ é obtido pela aplicação do método de funções penalidade em cada instante $k \geq 0$. Assim, tem-se

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(q_{k+1}, u_k) = q_{k+1}^T \, \mathcal{P}_{k+1} \, q_{k+1} + q_k^T \, \mathcal{Q} \, q_k + u_k^T \, (\delta_{\mathcal{R}_k}^T \, \mathcal{R} \, \delta_{\mathcal{R}_k}) \, u_k + \left(q_{k+1} - \mathcal{A}_k^{\delta} \, q_k - \mathcal{B}_k^{\delta} \, u_k \right)^T \, \mu \, \left(q_{k+1} - \mathcal{A}_k^{\delta} \, q_k - \mathcal{B}_k^{\delta} \, u_k \right). \quad (5.15)$$

A solução para o problema (5.14) será obtida iterativamente pela otimização do funcional (5.15) a cada instante k, ou seja, através do seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{q_{k+1}, u_k} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta\mathcal{A}_k, \delta\mathcal{B}_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(q_{k+1}, u_k), \ \forall k \ge 0.$$

Portanto, o problema de regulação robusta para o SLPM consiste em obter a solução ótima $(q_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)$, sob a máxima influência das incertezas, que resolve o problema de otimização irrestrito definido da seguinte forma.

Problema de Controle Robusto 5.1

Para cada $\mu > 0$ fixado, determinar a sequência ótima $\{(q_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)\}_{k=0}^{N-1}$ segundo o problema de otimização

$$\min_{q_{k+1}, u_k} \max_{\delta_{\mathcal{R}_k}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(q_{k+1}, u_k),$$

para cada k = N - 1, ..., 0, sendo $\mathfrak{J}_{\mu,k}(q_{k+1}, u_k)$ o funcional quadrático regularizado penalizado incerto definido por

$$\begin{split} &\mathcal{J}_{\mu,k}(q_{k+1},u_k) = q_{k+1}^T \, \mathcal{P}_{k+1} \, q_{k+1} \, + \\ & \left(\begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ O & O \\ I & -\mathcal{B}^{\delta} \end{bmatrix} \, \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ A^{\delta} \end{bmatrix} \, q_k \right)^T \, \begin{bmatrix} \mathcal{R} & O & O \\ O & \mathcal{Q} & O \\ O & O & \mu I \end{bmatrix} \, \left(\begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ O & O \\ I & -\mathcal{B}^{\delta} \end{bmatrix} \, \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ A^{\delta} \end{bmatrix} \, q_k \right), \end{split}$$

sendo $\mathfrak{P}_{k+1} \succ 0$, $\mathfrak{R} \succ 0$ $e \mathfrak{Q} \succ 0$.

5.2 Reguladores Robustos Recursivos para SLPMs

Nesta seção, propõe-se um regulador robusto recursivo para o SLPM, o qual também poderá fornecer uma solução para o SLSM. Este regulador será obtido por meio da combinação do método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Subseção 2.2.5), sendo que as propriedades de estabilidade e convergência assemelham-se às encontradas para a solução clássica de sistemas lineares sem incertezas (veja Lancaster e Rodman (1995)).

O Problema 5.1 representa um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.2.4) quando são feitas as seguintes identificações:

$$Q \leftarrow \mathcal{P}_{k+1}, \ W_{\mu} \leftarrow diag(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mu I_{sn}),$$

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \\ I_{sn} - \mathcal{B}_k \end{bmatrix}, \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ O & O \\ O - \delta \mathcal{B}_k \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} q_k, \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ \delta \mathcal{A}_k \end{bmatrix} q_k$$
(5.16-a)

e as matrizes H, E_A e E_b são definidas de acordo com o SLPM:

□ SLPM nominal (5.7)

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathcal{R}} \\ O \\ O \end{bmatrix}, \ \Delta \leftarrow \Delta_{\mathcal{R}_k}, \ E_A \leftarrow \begin{bmatrix} O & E_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \ \text{e} \ E_b \leftarrow O.$$
 (5.16-b)

□ SLPM incerto (5.8, 5.11)

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathcal{R}} & O \\ O & O \\ O & \mathcal{H} \end{bmatrix}, E_A \leftarrow \begin{bmatrix} O & E_{\mathcal{R}} \\ O & O \\ O - E_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix}, E_b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ E_{\mathcal{A}} \\ O \end{bmatrix} \text{ e } \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{\mathcal{R}_k} & O & O \\ O & \Delta_{\mathcal{A}_k} & \Delta_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix}. \quad (5.16\text{-c})$$

O resultado a seguir apresenta uma estrutura na forma de blocos matriciais que determina o primeiro momento $q_{\mu,k+1}$, a entrada de controle $u_{\mu,k}$ e o funcional $\mathcal{J}_{\mu,k}$ para cada valor atribuído ao parâmetro μ .

Lema 5.1 Considere o Problema 5.1 com $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ fixados. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda})$ é semidefinida positiva. Então, a solução ótima $(q_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)$ para cada $k \geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} q_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn} & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & q_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{J}_{\mu,k} \end{bmatrix} q_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & -I_{sn} \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_{sn} & O & O \\ O & I_{m} & O \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} & O & O & I_{sn} & O \\ O & \mathcal{Q}^{-1} & O & O & O \\ O & O & \Sigma & \widehat{I} & -\widehat{\mathcal{B}}_{k} \\ I_{sn} & O & \widehat{I}^{T} & O & O \\ O & O & -\widehat{\mathcal{B}}_{k}^{T} & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix},$$
 (5.17)

com as matrizes \widehat{A} , \widehat{B}_k , \widehat{I} e Σ dadas de acordo com os seguintes casos:

□ SLPM nominal

$$\widehat{\mathcal{A}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ O \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_k \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{B}_k \\ E_{\mathcal{R}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{I} \leftarrow \begin{bmatrix} I_{sn} \\ O \end{bmatrix}, \quad \Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \mu^{-1}I_{sn} & O \\ O & \widehat{\lambda}^{-1}I_m \end{bmatrix} \quad e \quad \widehat{\lambda} > 0.$$

□ SLPM incerto

$$\widehat{\mathcal{A}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ O \\ E_{\mathcal{A}} \\ O \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_k \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{B}_k \\ E_{\mathcal{R}} \\ O \\ E_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{I} \leftarrow \begin{bmatrix} I_{sn} \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix}, \quad \Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O & O \\ O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_m & O & O \\ O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I & O \\ O & O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) = \mu^{-1} I_{sn} - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} \mathcal{H} \mathcal{H}^{T} \quad e \quad \widehat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) \|\mu \mathcal{H}^{T} \mathcal{H}\|, \text{ para algum } \alpha > 0.$$

Demonstração. Aplicando o item (i) do Lema 2.8 com as identificações estabelecidas em (5.16) segue que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & -I_{sn} \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_{sn} & O & O \\ O & I_{m} & O \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & \Phi(\mathcal{R},\widehat{\lambda}) & O & O & O & O \\ O & O & Q^{-1} & O & O & O \\ O & O & O & \widehat{\Sigma} & \widehat{I} & -\widehat{\mathcal{B}}_{k} \\ I_{sn} & O & O & \widehat{I}^{T} & O & O \\ O & O & O & -\widehat{\mathcal{B}}_{k}^{T} & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ -I_{sn} \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix},$$
(5.18)

sendo $\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{R}^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathcal{R}} H_{\mathcal{R}}^T$ e as matrizes $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{B}}_k$, \widehat{I} e Σ dadas de acordo com o enunciado do Lema 5.1. O parâmetro $\widehat{\lambda}$ é dado por

$$\widehat{\lambda} = \begin{cases} (1 + \alpha) ||H_{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} H_{\mathcal{R}}||, \text{ para o SLPM nominal,} \\ (1 + \alpha) ||diag(H_{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} H_{\mathcal{R}}, \mu \mathcal{H}^T \mathcal{H})||, \text{ para o SLPM incerto.} \end{cases}$$

Como a função $\Gamma(\lambda)$, definida no Teorema 2.2, independe da matriz¹ $\Phi(\mathcal{R}, \hat{\lambda})$, então $\hat{\lambda}$ independe de \mathcal{R} . Desta forma, pode-se considerar

$$\hat{\lambda} > 0$$
, para o SLPM nominal e

$$\hat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) ||\mu \mathcal{H}^T \mathcal{H}||, \text{ para o SLPM incerto.}$$

A prova é análoga à do regulador para SLSMs no cenário de observação completa da cadeia de Markov, veja Apêndice B.1

Consequentemente, a solução não depende da matriz $\Phi(\mathcal{R}, \hat{\lambda})$, conforme pode ser verificado nos Teoremas 5.1 e 5.2. Assim, é possível eliminar as linhas e a coluna referentes a $\Phi(\mathcal{R}, \hat{\lambda})$ em (5.18), resultando em (5.17).

No Algoritmo 5.1 é apresentado o procedimento para o obtenção da solução ótima do SLPM, sendo que a sequência de entradas de controle $u_{\mu,k}^*$ também pode ser uma solução para o SLSM no cenário de não observação da cadeia de Markov. Observe que a penalidade imposta pelos parâmetros μ e $\hat{\lambda}$ esta associada ao nível de robustez do regulador apresentado no Lema 5.1.

Algoritmo 5.1 Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SLPM

SLSM:

- Defina o tipo de sistema: SLSM nominal ou incerto.
- Escolha a MT: conhecida ou incerta.
- Obtenha os parâmetros do SLPM: \mathcal{A} , \mathcal{B}_k , \mathcal{Q} , \mathcal{R} , \mathcal{H} , $E_{\mathcal{A}}$, $E_{\mathcal{B}_k}$, $H_{\mathcal{R}} \in E_{\mathcal{R}}$.

$$\mathcal{L}_{\mu,k}, \ \mathcal{K}_{\mu,k} \in \mathcal{P}_{\mu,k} \text{ via } (5.17)$$

$$SLPM \begin{cases} Condiçoes inicials: \\ - \text{ Defina } N, x_0, \ \mu > 0, \ \widehat{\lambda} \in \mathcal{P}_N \succ 0. \\ - \text{ Escolha os valores de } \overline{\Delta}_{i,k}, \ i \in \mathbb{S}, \ \text{e obtenha } \delta \pi_0. \\ - \text{ Calcule } q_{i,0} = \pi_{i,0}^{\delta} x_0. \end{cases}$$

$$Passo 1: \text{ Determine para todo } k = N - 1, \dots, 0:$$

$$\mathcal{L}_{\mu,k}, \ \mathcal{K}_{\mu,k} \in \mathcal{P}_{\mu,k} \text{ via } (5.17)$$

$$Passo 2: \text{ Obtenha para cada } k = 0, \dots, N - 1:$$

$$\begin{bmatrix} q_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \end{bmatrix} q_k. \tag{5.19}$$

SLSM: Calcule para cada k = 0, ..., N-1:

$$\hat{x}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} \, \hat{x}_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} \, u_k^*$$
$$\operatorname{com} \, u_k^* = \mathcal{K}_{\mu,k} \, q_k.$$

O Lema 5.2 apresenta uma forma de determinar as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k},~\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ quando \mathcal{P}_N e \mathcal{Q} são semidefinidas positivas. Observe que, neste caso, não é necessário calcular as inversas das matrizes $\mathcal{P}_{\mu,k+1}$ e \mathcal{Q} .

Lema 5.2 Considere o Problema 5.1 com $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ fixados. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda})$ é semidefinida positiva. Então, a solução ótima $(q_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)$ para cada $k \geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} q_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn} & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & q_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{D}_{\mu,k} \end{bmatrix} q_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}, \, \mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & -I_{sn} \\ O & O & O \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_{sn} & O & O \\ O & I_{m} & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} O & I_{sn} & O & O & O & I_{sn} & O \\ I_{sn} & -\mathcal{P}_{\mu,k+1} & O & O & O & O & O \\ O & O & O & I_{sn} & O & O & O \\ O & O & O & I_{sn} & O & O & O \\ O & O & O & O & \sum \hat{I} & -\widehat{\mathcal{B}}_{k} \\ I_{sn} & O & O & O & \widehat{\mathcal{A}}_{k}^T & O & O \\ O & O & O & O & -\widehat{\mathcal{B}}_{k}^T & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix},$$

com as matrizes \widehat{A} , \widehat{B}_k , \widehat{I} e Σ dadas de acordo com o Lema 5.1.

Demonstração. A prova é análoga à do Lema 4.2.

5.2.1 Estabilidade e Convergência

A estabilidade e a convergência da solução proposta no Lema 5.1 são estabelecidas a partir da equivalência com a solução clássica do problema de controle ótimo para sistemas lineares de tempo discreto sem a presença de incertezas. Este procedimento de demonstração é dual ao utilizado por Sayed (2001) e Zhou (2010) na análise do desempenho de estimativas robustas. Os resultados a seguir apresentam a solução algébrica robusta recursiva obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (5.17).

Teorema 5.1 (SLPM nominal) Considere o Problema 5.1 definido para o sistema (5.7). A solução algébrica robusta recursiva para cada $\mu > 0$ e $\hat{\lambda} > 0$ é dada por

$$\mathcal{L}_{\mu,k} = \left[I_{sn} - \mu^{-1} \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k \mathcal{B}_k^T \right)^{-1} \right] \mathcal{A} - \mathcal{B}_k \left(\widehat{\lambda} I_m + \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \right)^{-1} \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A},$$

$$\mathcal{K}_{\mu,k} = - \left(\widehat{\lambda} I_m + \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \right)^{-1} \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A},$$

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{A}^T \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \left(\widehat{\lambda} I_m + \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \right)^{-1} \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \mathcal{A} + \mathcal{Q},$$

$$com \ \widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\mu^{-1} I_{sn} + \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} \right)^{-1}.$$

Demonstração. A solução algébrica robusta do Problema 5.1, definido para o SLPM (5.7), é obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (5.18). De fato, consi-

dere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} & O & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & \Phi(\mathcal{R},\widehat{\lambda}) & O & O & O & O & O \\ O & O & \mathcal{Q}^{-1} & O & O & O & O \\ O & O & O & \mu^{-1}I_{sn} & O & I_{sn} & -\mathcal{B}_k \\ O & O & O & O & \widehat{\lambda}^{-1}I_m & O & E_{\mathcal{R}} \\ I_{sn} & O & O & I_{sn} & O & O & O \\ O & O & O & -\mathcal{B}_k^T & E_{\mathcal{R}}^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ -I_n \\ \mathcal{A} \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix},$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\mathcal{P}_{u,k+1}^{-1}X_1 + X_6 = O, (5.20-a)$$

$$\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda})X_2 = -I_n, \tag{5.20-b}$$

$$Q^{-1}X_3 = O, (5.20-c)$$

$$\mu^{-1}X_4 + X_6 - \mathcal{B}_k X_7 = \mathcal{A}, \tag{5.20-d}$$

$$\widehat{\lambda}^{-1}X_5 + E_{\mathcal{R}}X_7 = O, (5.20-e)$$

$$X_1 + X_4 = O, (5.20-f)$$

$$-\mathcal{B}_k^T X_4 + E_{\mathcal{R}}^T X_5 = O. {(5.20-g)}$$

Combinando (5.20-a), (5.20-d) e (5.20-f), tem-se

$$\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} X_4 - \mathcal{B}_k X_7 = \mathcal{A}, \tag{5.21}$$

sendo $\widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\mu^{-1}I_{sn} + \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1}\right)^{-1}$. Pela definição de $\delta_{\mathcal{R}_k}$, em (5.12), tem-se que $E_{\mathcal{R}} = I_m$. Então (5.20-e) e (5.20-g) podem ser reescritas como

$$\hat{\lambda}^{-1}I_m X_5 + X_7 = O, - \mathcal{B}_k^T X_4 + X_5 = O.$$
 (5.22)

Segue de (5.22) que

$$X_7 = -\hat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k^T X_4. \tag{5.23}$$

De (5.21) e (5.23), obtém-se

$$X_4 = \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}_k \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k^T\right)^{-1} \mathcal{A}. \tag{5.24}$$

Substituindo (5.24) em (5.23), resulta em

$$X_7 = -\hat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k^T \left(\hat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}_k \hat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k^T \right)^{-1} \mathcal{A}. \tag{5.25}$$

Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes (Lema A.9) em (5.25), obtém-se

$$X_7 = -\left(\hat{\lambda}I_m + \mathcal{B}_k^T \hat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k\right)^{-1} \mathcal{B}_k^T \hat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A}. \tag{5.26}$$

Combinando (5.20-d), (5.24) e (5.26), tem-se

$$X_{6} = \mathcal{A} - \mu^{-1} X_{4} + \mathcal{B}_{k} X_{7}$$

$$= \left[I_{sn} - \mu^{-1} I_{sn} \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_{k} \mathcal{B}_{k}^{T} \right)^{-1} \right] \mathcal{A} - \mathcal{B}_{k} \left(\widehat{\lambda} I_{m} + \mathcal{B}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_{k} \right)^{-1} \mathcal{B}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A}.$$

De (5.17) tem-se que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & O & O & O & O & I_{m} \\ O & O & -I_{sn} & \mathcal{A}^T & O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_6 \\ X_7 \\ -I_{sn}X_3 + \mathcal{A}^T X_4 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathcal{L}_{\mu,k} = X_6$ e $\mathcal{K}_{\mu,k} = X_7$. De (5.20-c) e (5.24), segue que

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{A}^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}_k \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{B}_k^T \right)^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{Q}.$$
 (5.27)

Finalmente, aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (5.27) resulta em

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{A}^T \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \left(\widehat{\lambda} I_m + \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{B}_k \right)^{-1} \mathcal{B}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \mathcal{A} + \mathcal{Q}.$$

Observe que a solução algébrica robusta recursiva para o SLPM nominal independe da matriz $\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda})$. Assim, é possível obter a solução via (5.17) ao invés de (5.18).

O Lema 5.3 apresenta um resultado preliminar, necessário para obter a solução algébrica robusta recursiva para o SLPM sujeito a incertezas paramétricas.

Lema 5.3 Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$. Então,

 $i. \ \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) = \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_m - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k} E_{\mathcal{B}_k}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{B}_k} \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} \ \acute{e} \ sim\acute{e}trica \ e \ definida \ positiva.$

Demonstração.

i. Considere $\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) = \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_m - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}_k} \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{B}_k} \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}$. Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) tem-se que

$$\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) = (\widehat{\lambda}_{\mu} I_m + \widehat{\lambda}_{\mu} E_{\mathcal{B}_k}^T E_{\mathcal{B}_k})^{-1}.$$

Por hipótese, $\hat{\lambda}_{\mu} > 0$. Além disso, $E_{\mathcal{B}_k}^T E_{\mathcal{B}_k} \succeq 0$ (Lema A.1). Portanto, pela propriedade de positividade (Lema A.4) a matriz $\varphi(\hat{\lambda}_{\mu})$ é simétrica e definida positiva.

ii. O bloco matricial $D = \hat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + \hat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k} E_{\mathcal{B}_k}^T$ é não-singular. De fato, como $\hat{\lambda}_{\mu} > 0$ e $E_{\mathcal{B}_k}^T E_{\mathcal{B}_k} \succeq 0$, pela propriedade de positividade (Lema A.4) tem-se que $D \succ 0$ e, portanto, não-singular.

O complemento de Schur 2 de D em M é não-singular. Observe que,

$$(M/D) = \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathcal{P}_{\mu, k+1}^{-1} + \mathcal{B}_{k} \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \ \mathcal{B}_{k}^{T}.$$

Sabemos que $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$, $\mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} \succ 0$ e $\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \succ 0$. Logo, pela propriedade de positividade (Lema A.2) tem-se $\mathcal{B}_{k}\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})\mathcal{B}_{k}^{T} \succeq 0$. Assim, $(M/D) \succ 0$ (Lema A.4). Pelo complemento de Schur (Lema A.7), temos que $M \succ 0$ e, portanto, não-singular.

Teorema 5.2 (SLPM incerto) Considere o Problema 5.1 definido para os sistemas (5.8) e (5.11). Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) \succeq 0$. Então, a solução algébrica robusta recursiva para cada $\mu > 0$ é dada por

$$\mathcal{L}_{\mu,k} = \left[I_{sn} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \overline{\mathcal{B}}_{k} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \right)^{-1} \right] \mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_{k} \left(I_{m} + \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_{k} \right)^{T} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A},$$

$$\mathcal{K}_{\mu,k} = -\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})^{\frac{1}{2}} \left(I_{m} + \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_{k} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A},$$

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{A}^{T} \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_{k} \left(I_{m} + \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_{k} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \mathcal{A} + \overline{\mathcal{Q}},$$

 $com \ \overline{\mathcal{B}}_{k} = \mathcal{B}_{k} \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})^{\frac{1}{2}}, \ \overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} + \widehat{\lambda}_{\mu} E_{\mathcal{A}}^{T} E_{\mathcal{A}}, \ \widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathcal{P}_{\mu, k+1}^{-1}\right)^{-1} \ e \ \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \ definido \ not \ Lema \ 5.3.$

Demonstração. A solução algébrica robusta do Problema 5.1, definido para os SLPMs (5.8) e (5.11), é obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (5.18). De fato, considere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1} & O & O & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & \Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & Q^{-1} & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O & O & I_{sn} & -\mathcal{B}_{k} \\ O & O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I_{m} & O & O & O & E_{\mathcal{R}} \\ O & O & O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I & O & O & O \\ O & O & O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I & O & -E_{\mathcal{B}_{k}} \\ I_{sn} & O & O & I_{sn} & O & O & O & O \\ O & O & O & -\mathcal{B}_{k}^{T} & E_{\mathcal{R}}^{T} & O & -E_{\mathcal{B}_{k}}^{T} & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1} \\ X_{2} \\ X_{3} \\ X_{4} \\ X_{5} \\ X_{6} \\ X_{7} \\ X_{8} \\ X_{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ O \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\mathcal{P}_{\mu,k+1}^{-1}X_1 + X_8 = O, (5.28-a)$$

$$\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda}_{\mu}) X_2 = -I_{sn}, \tag{5.28-b}$$

$$Q^{-1}X_3 = O, (5.28-c)$$

² Veja detalhes no Apêndice A.

$$\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) X_4 + X_8 - \mathcal{B}_k X_9 = \mathcal{A}, \tag{5.28-d}$$

$$\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_5 + E_{\mathcal{R}} X_9 = O, \tag{5.28-e}$$

$$\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_6 = E_{\mathcal{A}},\tag{5.28-f}$$

$$\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_7 - E_{\mathcal{B}_k} X_9 = O, \tag{5.28-g}$$

$$X_1 + X_4 = O, (5.28-h)$$

$$-\mathcal{B}_k^T X_4 + E_{\Re}^T X_5 - E_{\Re}^T X_7 = O. {(5.28-i)}$$

Pela definição de $\delta_{\mathcal{R}_k}$, em (5.12), temos que $E_{\mathcal{R}} = I_m$. Logo, (5.28-e) e (5.28-i) podem ser reescritas como

$$\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_m X_5 + X_9 = O, - \mathcal{B}_k^T X_4 + X_5 - E_{\mathcal{B}_k}^T X_7 = O.$$
 (5.29)

Segue de (5.29) que

$$X_9 = -\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} \left(\mathcal{B}_k^T X_4 + E_{\mathcal{B}}^T X_7 \right), \tag{5.30}$$

que junto com (5.28-a), (5.28-d), (5.28-g) e (5.28-h) fornecem

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathcal{P}_{\mu, k+1}^{-1} + \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} \mathcal{B}_{k} \mathcal{B}_{k}^{T} & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} \mathcal{B}_{k} E_{\mathcal{B}}^{T} \\ \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_{k}^{T} & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}} E_{\mathcal{B}}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{4} \\ X_{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ O \end{bmatrix}.$$
 (5.31)

Como a inversa do bloco matricial está garantida pelo Lema 5.3, podemos aplicar a Fórmula da Inversão de Banachiewicz (Lema A.6) e obter a solução do sistema de equações (5.31). Logo,

$$X_4 = \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}_k \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \mathcal{B}_k^T\right)^{-1} \mathcal{A} \quad e$$

$$X_7 = -\left(\widehat{\lambda}_{\mu} I + \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k} E_{\mathcal{B}_k}^T\right)^{-1} \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} E_{\mathcal{B}_k} \mathcal{B}_k^T X_4,$$

$$(5.32)$$

sendo $\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})$ conforme o Lema 5.3 e

$$\widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathcal{P}_{\mu, k+1}^{-1}\right)^{-1}.$$

De (5.30) e (5.32) tem-se

$$X_9 = -\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \, \mathcal{B}_k^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}_k \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu}) \mathcal{B}_k^T \right)^{-1} \, \mathcal{A}. \tag{5.33}$$

Definindo $\overline{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})^{\frac{1}{2}}$ e aplicando o *Lema de Inversão de Matrizes* (Lema A.9) em (5.33), obtém-se

$$X_9 = -\varphi(\widehat{\lambda}_{\mu})^{\frac{1}{2}} \left(I_m + \overline{\mathcal{B}}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_k \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A}. \tag{5.34}$$

De (5.28-d), (5.32) e (5.34), resulta que

$$X_{8} = \mathcal{A} + \mathcal{B}_{k} X_{9} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) X_{4}$$

$$= \left[I_{sn} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \overline{\mathcal{B}}_{k} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \right)^{-1} \right] \mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_{k} \left(I_{m} + \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_{k} \right)^{T} \overline{\mathcal{B}}_{k}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{A}.$$

De (5.17) tem-se que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}, \, \mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são dadas por

Logo,
$$\mathcal{L}_{\mu,k} = X_8 \text{ e } \mathcal{K}_{\mu,k} = X_9$$
. De (5.28-c), (5.28-f) e (5.32), obtém-se
$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{Q} + \mathcal{A}^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \overline{\mathcal{B}}_k \overline{\mathcal{B}}_k^T \right)^{-1} \mathcal{A} + \widehat{\lambda}_{\mu} E_{\mathcal{A}}^T E_{\mathcal{A}}.$$
 (5.35)

Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (5.35), resulta em

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{A}^T \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_k \left(I_m + \overline{\mathcal{B}}_k^T \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}}_k \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}_k \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \mathcal{A} + \overline{\mathcal{Q}}$$

 $\operatorname{com} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \widehat{\lambda}_{\mu} E_{\mathcal{A}}^T E_{\mathcal{A}}.$

Observe que a solução algébrica robusta recursiva para o SLPM incerto independe da matriz $\Phi(\mathcal{R}, \hat{\lambda}_{\mu})$. Assim, é possível obter a solução via (5.17) ao invés de (5.18).

Observação 5.1 Se a matriz de transição nominal é nula ($\mathbb{P} = O$), então as matrizes de parâmetros \mathcal{A} e \mathcal{B} são nulas. Logo, $\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{Q}$ (SLPM nominal) e $\mathcal{P}_{\mu,k} = \overline{\mathcal{Q}}$ (SLPM incerto) para todo $k \geq 0$. Portanto, como $\mathcal{P}_{\mu,k}$ perde a sua característica recursiva, a abordagem via SLPM não é viável para este caso.

Os Teoremas 5.1 e 5.2 mostram que a solução proposta no Lema 5.1, através de um arranjo matricial, pode ser escrita na forma de equações algébricas de Riccati clássicas. De fato, considere a equação de Riccati para sistemas lineares (veja detalhes em Lancaster e Rodman (1995))

$$P_k = A_k^T \left[P_{k+1} - P_{k+1} B_k \left(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} \right] A_k + Q_k$$

e as seguintes identificações com a versão robusta apresentada no Teorema 5.1

$$P_k \leftarrow \mathcal{P}_{\mu,k}, \ P_{k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{k+1}, \ A_k \leftarrow \mathcal{A}, \ B_k \leftarrow \mathcal{B}_k, \ R_k \leftarrow \widehat{\lambda} I_m \ e \ Q_k \leftarrow \mathcal{Q},$$

e no Teorema 5.2

$$P_k \leftarrow \mathcal{P}_{\mu,k}, \ P_{k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{k+1}, \ A_k \leftarrow \mathcal{A}, \ B_k \leftarrow \overline{\mathcal{B}}_k, \ R_k \leftarrow I_m \in Q_k \leftarrow \overline{\mathbb{Q}}.$$

Devido a esta equivalência, as condições de estabilidade e convergência para o regulador robusto via SLPM são baseadas nas do problema de regulação clássico (veja Apêndice C). Observe que a equação algébrica de Riccati clássica é um caso particular da solução encontrada para SLPM nominal pelo arranjo matricial, basta considerar $\mu \to \infty$ e $R_k = \hat{\lambda} I_m$. Além disso, o SLPM nominal também é um caso particular do SLPM incerto, basta considerar $\delta \mathbb{P} = O$ e/ou as incertezas paramétricas $\delta \mathcal{A} = O$ e $\delta \mathcal{B} = O$.

No entanto, o fato do regulador robusto obter a solução ótima para o SLPM não implica que a mesma também será ótima para o SLSM como demonstrado por Costa et al. (2005, pg. 35) para o caso nominal e ilustrado no Exemplo 5.3.

5.3 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a aplicação do regulador robusto recursivo para SLSM via SLPM. Para tal, o Algoritmo 5.1 foi implementado no software $MATLAB^{\circledR}$ na versão 9.2.0.538062 (R2017a) em um computador com a seguinte configuração: processador $Intel^{\circledR}$ $Core^{TM}$ i5 com frequência de 2.6GHz, memória RAM de 8GB e sistema operacional $Windows^{\circledR}$ 8.1.

Observe que a aplicação do Algoritmo 5.1 está condicionada à verificação de que $||\Delta|| \le 1$ como definido na Subseção 2.2.4. Quando esta condição não é satisfeita, considera-se um escalar $\kappa \ge 1$, de modo que $||\Delta|| \le \kappa$. Para assegurar a equivalência com o problema analisado, tem-se as seguintes identificações de acordo com o modelo em (5.16):

$$\Delta_{\mathcal{A}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathcal{A}_k}}{\kappa}, \quad \Delta_{\mathcal{B}_k} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathcal{B}_k}}{\kappa}, \quad \Delta_{\mathcal{R}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathcal{R}_k}}{\kappa},$$

$$E_{\mathcal{A}} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{A}}, \quad E_{\mathcal{B}_k} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{B}_k} \quad \text{e} \quad E_{\mathcal{R}} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{R}}.$$

Simulações de Monte Carlo foram realizadas para ilustrar o comportamento dos sistemas considerados, sendo que a variável $\theta(k)$ foi gerada de acordo com o vetor de distribuição inicial e com a matriz de transição³. Para cada realização, foram atribuídos valores para as incertezas Δ , sorteados aleatoriamente com distribuição uniforme, a fim de obter as matrizes $\delta \mathbb{P}$, δF e δG , o vetor $\delta \pi$ e, consequentemente, os estados q_k e \hat{x}_k .

Além disso, consideramos que $\pi_k^{\delta} = \pi_{\infty}^{\delta}$, para todo $k \geq 1$. Quando a matriz de transição é incerta, as distribuições em regime permanente (Definição 3.1) são determinadas pelo Método Hi-Lo (HARTFIEL, 1998) e modeladas por limitantes em norma. Os ganhos obtidos pelas simulações estão disponíveis no Apêndice E.

O algoritmo utilizado é apresentado no Apêndice D.

Exemplo 5.1 Considere o SLSM (5.1) com três modos de operação cujas matrizes de parâmetros, adaptadas de Boukas e Liu (2001), são dadas por

$$F_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}, \quad F_{2} = \begin{bmatrix} 1,13 & 0 \\ 0,16 & 0,478 \end{bmatrix}, \quad F_{3} = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,13 \\ 0,16 & 1,14 \end{bmatrix}, \quad G_{1} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0 \\ 0,10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{2} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad G_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad H_{1} = \begin{bmatrix} 1,47 \\ 0,77 \end{bmatrix}, \quad H_{2} = \begin{bmatrix} 0,60 \\ 1,05 \end{bmatrix}, \quad H_{3} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,63 \end{bmatrix},$$

$$E_{F_{1}} = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad E_{F_{2}} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,12 \end{bmatrix}, \quad E_{F_{3}} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,15 \end{bmatrix}, \quad E_{G_{1}} = \begin{bmatrix} 0,26 & 0,95 \end{bmatrix},$$

$$E_{G_{2}} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,40 \end{bmatrix}, \quad E_{G_{3}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,10 \end{bmatrix}, \quad C_{1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{3} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad D_{2} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \quad e \quad D_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ -0,2 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Com relação a matriz de transição \mathbb{P}^{δ} , dois casos serão considerados:

\Box MT conhecida

$$\mathbb{P}^{\delta} = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

□ MT parcialmente desconhecida

$$\mathbb{P}^{\delta} = \left[\mathbb{P} + \delta \mathbb{P} \right]$$

sendo
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0.45 \\ 0 & 0.25 & 0.65 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta \mathbb{P} = 0.2 \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & 0 \\ 0 & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ 0 & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

com

$$0 \le \Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{32} \le 0.5,$$

$$\Delta_{12} = 0.5 - \Delta_{11}, \quad \Delta_{23} = 0.5 - \Delta_{22}$$

$$e \quad \Delta_{33} = 0.5 - \Delta_{32}.$$

Os valores para os parâmetros incertos de δp_{ij} são dados por:

$$h_{ij} = 0.4$$
 e $e_{ij} = 0.5 \ \forall i,j = 1,2,3$
 $exceto$ $h_{13} = h_{21} = h_{31} = e_{13} = e_{21} = e_{31} = 0.$

Além disso, consideramos as distribuições em regime permanente $\pi_k^{\delta} = \pi_{\infty}^{\delta}$, para todo $k \geq 1$, modeladas da seguinte forma:

$$\pi_{\infty}^{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3125 + 0.25\overline{\Delta}_{2,\infty} & 0.5625 + 0.25\overline{\Delta}_{3,\infty} \end{bmatrix}$$

com

$$0 \le \overline{\Delta}_{2,\infty} \le 0.5 \quad e \quad \overline{\Delta}_{3,\infty} = 1 - \overline{\Delta}_{2,\infty},$$

sendo os valores para os parâmetros de $\delta \pi_{\infty}$ dados por:

$$m_{1,\infty} = n_{1,\infty} = 0$$

$$e \ m_{i,\infty} = n_{i,\infty} = 0.5, \ \forall i = 2.3.$$

Consideramos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 5.1:

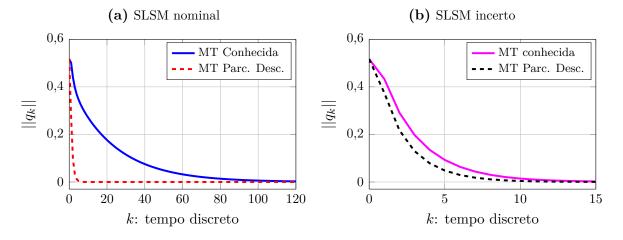
$$\kappa = 1, \ \mu = 10^7, \ N = 150, \ \mathcal{P}_N = I_6,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^T \ e \ \pi_0 = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.30 & 0.52 \end{bmatrix},$$

com $\hat{\lambda} = 1.5$ para o SLPM nominal e, $\alpha = 0.5$ para o SLPM incerto.

Na Figura 5.1 é apresentado o comportamento da norma do estado q_k para o SLPM em malha fechada de acordo com o SLSM considerado, sendo obtido através de (5.19). Observar que todas as trajetórias convergem para zero conforme o horizonte k aumenta.

Figura 5.1 – Resposta do estado q_k para o SLPM em malha fechada do Exemplo 5.1



Na Figura 5.1 são ilustrados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Verifique que todas as estimativas tendem a zero conforme o horizonte k aumenta. Portanto, a solução obtida pelo regulador robusto para o SLPM pode ser uma solução adequada para o SLSM com matrizes de transição conhecidas ou parcialmente desconhecidas no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

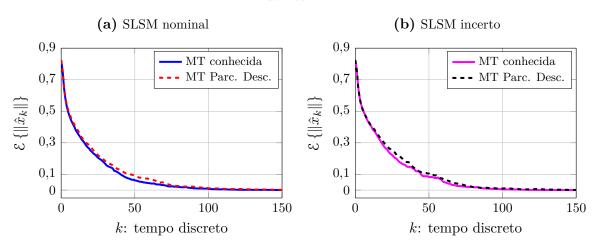


Figura 5.2 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM do Exemplo 5.1

Exemplo 5.2 Considere o SLSM (5.1) com quatro modos de operação cujas matrizes de parâmetros, adaptadas de Zhang e Boukas (2009), são dadas por

$$F_{1} = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.40 \\ 0.80 & -0.80 \end{bmatrix}, \quad F_{2} = \begin{bmatrix} 0.08 & -0.26 \\ 0.80 & -1.12 \end{bmatrix}, \quad F_{3} = \begin{bmatrix} 0.16 & -0.08 \\ 0.80 & -0.96 \end{bmatrix}, \quad F_{4} = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.18 \\ 0.80 & -0.88 \end{bmatrix},$$

$$G_{1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad G_{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{4} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad H_{1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_{2} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$H_{3} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.3 \end{bmatrix}, \quad H_{4} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad E_{F_{1}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_{F_{2}} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_{F_{3}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$E_{F_{4}} = \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_{G_{1}} = 0.1, \quad E_{G_{2}} = 0.3, \quad E_{G_{3}} = 0.5, \quad E_{G_{4}} = 0.2,$$

$$C_{i} = I_{2} \quad e \quad D_{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{T}, \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

Consideramos que a matriz de transição é totalmente desconhecida, ou seja, $p_{ij}^{\delta} = ?$ para todo $i,j \in S$. No entanto, pela definição de probabilidade tem-se a condição $p_{ij}^{\delta} \in [0;1]$. Logo, é possível reescrevê-la em termos de limitantes em norma, considerando o seguinte modelo:

$$\mathbb{P}^{\delta} = \left[\mathbb{P} + \delta \mathbb{P} \right],$$

$$sendo \qquad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta \mathbb{P} = 0.5 \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{bmatrix}$$

com

$$\Delta_{ii} \in [-1; 1], \quad 0 \le \Delta_{12} \le 1 - \Delta_{11}, \quad 0 \le \Delta_{13} \le 1 - (\Delta_{11} + \Delta_{12}),$$

$$0 \le \Delta_{23} \le 1 - (\Delta_{21} + \Delta_{22}), \quad 0 \le \Delta_{23} \le 1 - (\Delta_{21} + \Delta_{22}),$$

$$\Delta_{43} \le 1 - (\Delta_{41} + \Delta_{42} + \Delta_{44}), \quad 0 \le \Delta_{i1} \le 1 - \Delta_{ii}, \ \forall i = 2, 3, 4,$$

$$0 \le \Delta_{i2} \le 1 - (\Delta_{i1} + \Delta_{ii}), \ \forall i = 3, 4, \quad e \quad \Delta_{i4} = 1 - (\Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3}), \ \forall i = 1, 2, 3.$$

Os valores para os parâmetros incertos de δp_{ij} são dados por:

$$h_{ij} = 0.25$$
 e $e_{ij} = 2$, $\forall i, j = 1, \dots, 4$.

Além disso, consideramos as distribuições em regime permanente $\pi_k^{\delta} = \pi_{\infty}^{\delta}$, para todo $k \geq 1$, modeladas da seguinte forma:

$$\pi_{\infty}^{\delta} = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5\overline{\Delta}_{1,\infty} & 0.5\overline{\Delta}_{2,\infty} & 0.5\overline{\Delta}_{3,\infty} & 0.5\overline{\Delta}_{4,\infty}, \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Delta}_{1,\infty} \in [-1;1], \ 0 \le \overline{\Delta}_{2,\infty} \le 1 - \overline{\Delta}_{1,\infty},
0 \le \overline{\Delta}_{3,\infty} \le 1 - (\overline{\Delta}_{1,\infty} + \overline{\Delta}_{2,\infty}) \ e \ \overline{\Delta}_{4,\infty} = 1 - (\overline{\Delta}_{1,\infty} + \overline{\Delta}_{2,\infty} + \overline{\Delta}_{3,\infty}),$$

sendo os valores para os parâmetros de $\delta \pi_{\infty}$ dados por:

$$m_{i,\infty} = 5$$
 e $n_{i,\infty} = 0,1$, $\forall i = 1, \dots, 4$.

Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 5.1:

$$\mu = 10^{11}, \ \alpha = 0.5, \ N = 30, \ \mathcal{P}_N = I_8,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^T, \ \pi_0 = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.30 & 0.25 & 0.31 \end{bmatrix}$$

$$e \ \kappa = \begin{cases} 2.4, \ para \ o \ SLPM \ nominal, \\ 2.5, \ para \ o \ SLPM \ incerto. \end{cases}$$

Na Figura 5.3 é apresentada a norma da trajetória de q_k e a média de $\|\hat{x}_k\|$ para cada SLSM considerado. Observe que tanto o estado do SLPM quanto a média do SLSM tendem a zero conforme o horizonte k aumenta. Portanto, a solução obtida pelo regulador robusto para o SLPM pode ser uma solução adequada para o SLSM com matrizes de transição desconhecidas no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

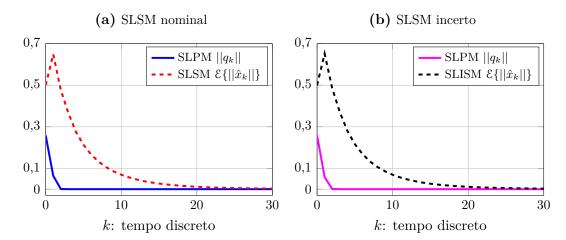


Figura 5.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 5.2

Exemplo 5.3 Considere o SLSM (5.1) com três modos de operação cujas matrizes de parâmetros, adaptadas de Blair e Sworder (1975) e Costa et al. (1999), são dadas por

$$F_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}, F_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}, F_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.3 & -5.2 \end{bmatrix}, G_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall i = 1,2,3,$$

$$H_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, E_{F_{1}} = E_{F_{2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, E_{F_{3}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, E_{G_{i}} = 0, \forall i = 1,2,3,$$

$$C_{1} = \begin{bmatrix} 1.5477 & -1.0976 \\ -1.0976 & 1.9145 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{2} = \begin{bmatrix} 3.1212 & -0.5082 \\ -0.5082 & 2.7824 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{3} = \begin{bmatrix} 1.8385 & -1.2728 \\ -1.2728 & 1.6971 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6125 \end{bmatrix}, D_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0794 \end{bmatrix}, D_{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0540 \end{bmatrix}.$$

Com relação a matriz de transição \mathbb{P}^{δ} , dois casos serão considerados:

□ MT conhecida

$$\mathbb{P}^{\delta} = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

\square MT parcialmente desconhecida⁴

$$\mathbb{P}^{\delta} = \mathbb{P} + \delta \mathbb{P},$$
 sendo
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.64 \end{bmatrix} \quad e \quad \delta \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.40\Delta_{22} & 1.40\Delta_{23} \\ 0.72\Delta_{31} & 0.72\Delta_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

⁴ Considera-se a matriz de transição adotada por Zhang et al. (2010, Partially known - case II).

com

$$\Delta_{22}, \Delta_{31} \in [0; 0.5], \quad \Delta_{23} = 0.5 - \Delta_{22} \quad e \quad \Delta_{32} = 0.5 - \Delta_{31}.$$

Os valores para os parâmetros incertos de δp_{ij} são dados por:

$$h_{22} = h_{23} = 2$$
, $e_{22} = e_{23} = 0.7$, $h_{31} = h_{32} = 3$, $e_{31} = e_{32} = 0.24$, $h_{21} = h_{33} = e_{21} = e_{33} = 0$ $e_{31} = e_{11} = 0 \ \forall j = 1,2,3$.

Além disso, consideramos as distribuições em regime permanente $\pi_k^{\delta} = \pi_{\infty}^{\delta}$, para todo $k \geq 1$, modeladas da seguinte forma:

$$\pi_{\infty}^{\delta} = \begin{bmatrix} 0.21 + 0.30\overline{\Delta}_{1,\infty} & 0.04 + 0.42\overline{\Delta}_{2,\infty} & 0.33 + 0.12\overline{\Delta}_{3,\infty} \end{bmatrix}$$

$$m_{1,\infty} = 0.1$$
, $m_{2,\infty} = 0.7$, $m_{3,\infty} = 0.3$, $n_{1,\infty} = 3$, $n_{2,\infty} = 0.6$ e $n_{3,\infty} = 0.4$.

Consideramos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 5.1:

$$\mu = 10^{10}, \ N = 100, \ \mathcal{P}_N = I_6, \ x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \ e \ \pi_0 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.30 & 0.54 \end{bmatrix},$$

com $\hat{\lambda} = 1,5$ para o SLPM nominal e, $\alpha = 0,5$ para o SLPM incerto. Os valores atribuídos a κ são apresentados na Tabela 5.1 de acordo com os SLSMs considerados.

Tabela 5.1 – Valores de κ para o Exemplo 5.3

Modelo	κ
SLSM nominal com MT conhecida	1,0
SLSM nominal com MT parc. desc.	5,2
SLSM incerto com MT conhecida	1,0
SLSM incerto com MT parc. desc.	5,3

Na Figura 5.4 é apresentado o comportamento da norma do estado q_k para SLPM em malha fechada de acordo com o SLSM considerado. Note que todas as trajetórias convergem para zero conforme o horizonte k aumenta.

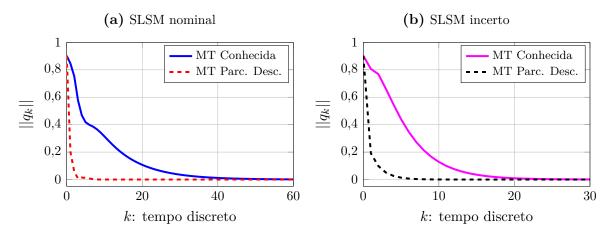
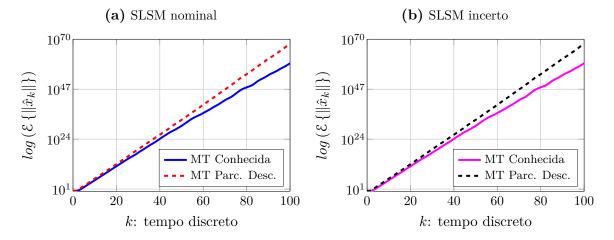


Figura 5.4 – Resposta do estado q_k para o SLPM em malha fechada do Exemplo 5.3

Na Figura 5.5 são apresentados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\} \to \infty$ conforme o horizonte $k \to \infty$. Portanto, o fato do regulador robusto obter uma solução adequada para o SLPM não implica que a mesma também será para o SLSM.

Figura 5.5 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM do Exemplo 5.3



Capítulo heta

Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via Sistema Aumentado

Na teoria de filtragem para SLSMs, o problema de estimação da variável de estado x_k no cenário sem observação da cadeia de Markov foi abordado por Costa (1994), o qual desenvolveu um filtro linear recursivo baseado no critério de mínimo erro médio quadrático (MMSE, do inglês, *Minimum Mean Square Error*), a partir da estimativa de $x_k \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}$ ao invés de estimar diretamente a variável de estado x_k . Nesse modelo, obtém-se um filtro de ordem sn, sendo s a quantidade de modos de operação do sistema e n a dimensão da variável x_k . A principal vantagem desse modelo é a obtenção de um filtro linear simples de implementar, sendo que os ganhos podem ser determinados de modo off-line.

Inspirados no modelo de Costa (1994), propomos um segundo modelo para a representação do SLSM como um sistema linear determinístico, o qual será reescrito com base na variável auxiliar $z_{i,k} = x_k \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}$, sendo que a expressão resultante considera os termos relacionados à medida de Dirac¹ como parâmetros incertos. Desta forma, obtém-se um sistema determinístico de ordem aumentada, no qual as matrizes de parâmetros estão sujeitas a incertezas.

A lei de controle para este novo sistema é determinada pela técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Subseção 2.2.5), semelhante à abordagem proposta por Cerri (2009) para sistema lineares de tempo discreto no espaço de estados. O regulador robusto recursivo desenvolvido para o sistema aumentado é dado por equações algébricas de Riccati, que são apresentadas na forma de blocos matriciais, e que representam uma generalização da equação robusta determinada por Cerri (2009).

¹ Definida em (5.2).

6.1 Sistema Aumentado

Considere o SLSM de tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k, \ \forall k \ge 0 \\ y_k = \mathcal{C}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{D}_{\theta(k)} u_k, \ \theta(0) \sim \pi_0 \end{cases}$$

$$(6.1)$$

que assume dois possíveis modelos para as matrizes de parâmetros:

Caso A: SLSM nominal

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)}$$
 e $\mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)}$,

Caso B: SLSM incerto

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)},$$

sendo o par $(x_k, \theta(k))$ o estado do sistema, u_k a entrada de controle e y_k a variável de observação. As matrizes $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,n}$ e $\mathcal{D}_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,m}$ são conhecidas e as matrizes de incertezas $\delta F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são modeladas da seguinte forma:

$$\left[\delta F_{\theta(k)} \ \delta G_{\theta(k)}\right] = H_{\theta(k)} \Delta_{\theta(k)} \left[E_{F_{\theta(k)}} \ E_{G_{\theta(k)}}\right]$$

para todo $k \geq 0$, em que $H_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,t}$ (matriz não-nula), $E_{F_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$, $E_{G_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ são matrizes conhecidas e $\Delta_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{t,\ell}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\theta(k)}|| \leq 1$. A cadeia de Markov é indexada por $\theta(k)$ com distribuição inicial π_0 e associada à matriz de transição incerta \mathbb{P}^{δ} , definida em (3.3).

Neste capítulo, considera-se o cenário de observação parcial do estado do sistema, ou seja, x_k é observado, mas não se tem acesso à cadeia de Markov $\theta(k)$, com exceção da distribuição inicial π_0 . Dessa forma, o problema em questão consiste em projetar controladores por realimentação de estado independentes dos modos de operação, obtendo-se uma sequência de controle admissível $\mathcal{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ que estabiliza o SLSM sob a hipótese de existir incertezas nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição.

Com esta finalidade, propõe-se uma abordagem determinística do problema, reformulando o SLSM como um sistema independente da cadeia de Markov a partir da medida de Dirac, semelhante à abordagem determinística proposta por Costa (1994). Para a obtenção deste novo sistema, define-se as variáveis auxiliares

$$z_{i,k} = x_k \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \in \mathbb{R}^n, \quad v_{i,k} = u_k \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \in \mathbb{R}^m,$$

$$z_k = \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn} \quad \text{e} \quad v_k = \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ \vdots \\ v_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sm},$$

$$(6.2)$$

6.1. Sistema Aumentado 109

com $\mathbb{I}_{\{\bullet\}}$ denotando a medida de Dirac, definida em (5.2). As variáveis z_k e v_k serão o estado e a entrada de controle do sistema aumentado, respectivamente. A partir de (6.2) é possível escrever a versão aumentada do SLSM (6.1) de acordo com os seguintes passos:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}_{i} x_{k} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} + \sum_{i=1}^{s} \mathcal{G}_{i} u_{k} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}_{i} z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} \mathcal{G}_{i} v_{i,k}.$$
(6.3)

A partir de (6.2) e (6.3) é possível estabelecer uma equação recursiva para $z_{j,k+1}$ da seguinte forma

$$z_{j,k+1} = x_{k+1} \mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}_{i} z_{i,k}\right) \mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} + \left(\sum_{i=1}^{s} \mathcal{G}_{i} v_{i,k}\right) \mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}.$$
(6.4)

Adicionando e subtraindo o termo

$$\sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} \, \mathcal{F}_{i} \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} \, \mathcal{G}_{i} \, v_{i,k}$$

em (6.4), a variável $z_{j,k+1}$ pode ser reescrita como

$$z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, \mathcal{F}_i \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} (\mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij}) \, \mathcal{F}_i \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, \mathcal{G}_i \, v_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} (\mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij}) \, \mathcal{G}_i \, v_{i,k}, \quad \forall j \in \mathbb{S}. \quad (6.5)$$

A partir da forma matricial do sistema de equações formado por (6.5) definimos o sistema aumentado (SA):

$$z_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} z_k + \mathcal{B}_k^{\delta} v_k, \tag{6.6}$$

sendo

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} z_{1,k+1} \\ z_{2,k+1} \\ \vdots \\ z_{s,k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{k}^{\delta} = \begin{bmatrix} t_{11}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & t_{21}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & t_{s1}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \\ t_{12}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & t_{22}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & t_{s2}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1s}^{\delta} \mathcal{F}_{1} & t_{2s}^{\delta} \mathcal{F}_{2} & \dots & t_{ss}^{\delta} \mathcal{F}_{s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{k}^{\delta} = \begin{bmatrix} t_{11}^{\delta} \mathcal{G}_{1} & t_{21}^{\delta} \mathcal{G}_{2} & \dots & t_{s1}^{\delta} \mathcal{G}_{s} \\ t_{12}^{\delta} \mathcal{G}_{1} & t_{22}^{\delta} \mathcal{G}_{2} & \dots & t_{s2}^{\delta} \mathcal{G}_{s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1s}^{\delta} \mathcal{G}_{1} & t_{2s}^{\delta} \mathcal{G}_{2} & \dots & t_{ss}^{\delta} \mathcal{G}_{s} \end{bmatrix}$$

com $t_{ij}^{\delta} = p_{ij} + (\mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij})$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$. Observe que,

$$t_{ij}^{\delta} = p_{ij} + (\mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij}) = \mathbb{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}.$$

No entanto, consideramos $t_{ij}^{\delta} = p_{ij} + (\mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij})$ ao invés de $t_{ij}^{\delta} = \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=j\}}$, pelo fato de introduzir no modelo determinístico as informações relacionadas às probabilidades de transição, que descrevem o comportamento da cadeia de Markov e, consequentemente, influenciam no desempenho do sistema conforme analisado por Costa et al. (2005, Ch. 3) e ilustrado no Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1 Considere o exemplo de Costa et al. (2005, Ex. 3.14) no qual é apresentado o seguinte SLSM

$$x_{k+1} = F_{\theta(k)} x_k, \ \forall k \ge 0, \ \theta(0) \sim \pi_0$$

com dois modos de operação sendo

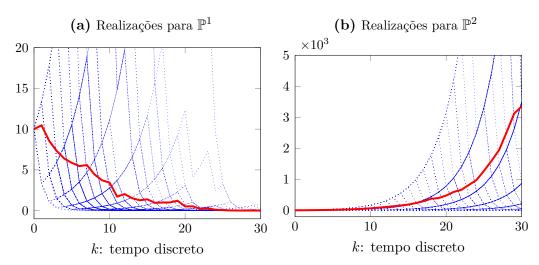
$$F_1 = \frac{4}{3} \ e \ F_2 = \frac{1}{3}.$$

Adotam-se as seguintes matrizes de transição

$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 6.1 estão ilustradas 150 trajetórias de x_k (uma para cada realização de θ) e a sua média $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ para cada matriz de transição considerada, com $x_0 = 10$ e $\pi_0 = [0,7 \quad 0,3]$. Observe que o SLSM é estável quando considera-se a matriz de transição \mathbb{P}^1 , visto que $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ tende a zero quando $k \to \infty$. Entretanto, o SLSM é instável para a matriz de transição \mathbb{P}^2 . Isto ocorre pelo fato da probabilidade de visitar o modo instável $\theta(k) = 1$ ($F_1 \approx 1,33$) ser maior em \mathbb{P}^2 , evidenciando a relação entre as probabilidades de transição com o comportamento do sistema.

Figura 6.1 – Evolução da trajetória de $x_k (\cdots)$ e a sua média (—)



Observe ainda que a formulação do sistema aumentado independe das probabilidades de transição incertas δp_{ij} . Além disso, o termo $(\mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij})$ pode ser considerado como um parâmetro incerto visto que o processo Markoviano $\theta(k)$ não é observado.

O sistema aumentado (6.6) representa uma formulação geral do modelo. Na sequência, as matrizes de parâmetros serão definidas de acordo com o SLSM (nominal ou incerto).

6.1. Sistema Aumentado 111

Caso A: SLSM nominal

Considere o SLSM (6.1, caso A). Deste modo, a variável $z_{j,k+1}$ em (6.5) pode ser escrita como

$$\begin{split} z_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, F_i \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} \left(1\!\!1_{\!\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij} \right) F_i \, z_{i,k} \, + \\ &\qquad \qquad \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, G_i \, v_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} \left(1\!\!1_{\!\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij} \right) G_i \, v_{i,k}. \end{split}$$

Logo, o sistema aumentado é definido por

$$z_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} z_k + \mathcal{B}_k^{\delta} v_k,$$

sendo $\mathcal{A}_k^\delta=\mathcal{A}+\delta\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k^\delta=\mathcal{B}+\delta\mathcal{B}_k$ e os parâmetros incertos são modelados da seguinte forma

$$\left[\delta \mathcal{A}_k \ \delta \mathcal{B}_k\right] = H_{\mathcal{T}} \, \Delta_{\mathcal{T}_{k+1}} \left[E_{\mathcal{A}} \ E_{\mathcal{B}} \right]$$

com as matrizes dadas por

$$\mathcal{A} = (\mathbb{P}^{T} \otimes I_{n}) \, \mathbb{F}_{d}, \quad \mathcal{B} = (\mathbb{P}^{T} \otimes I_{n}) \, \mathbb{G}_{d}, \quad H_{\mathfrak{T}} = I_{sn}, \quad \Delta_{\mathfrak{T}_{k+1}} = \left[(\mathfrak{T}_{k+1} - \mathbb{P}^{T}) \otimes I_{n} \right],$$

$$E_{\mathcal{A}} = \mathbb{F}_{d}, \quad E_{\mathcal{B}} = \mathbb{G}_{d}, \quad \mathbb{F}_{d} = diag(F_{i}), \quad \mathbb{G}_{d} = diag(G_{i}) \quad e$$

$$\mathfrak{T}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=1\}} & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=1\}} & \cdots & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=2\}} \\ \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=2\}} & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=2\}} & \cdots & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=s\}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=s\}} & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=s\}} & \cdots & \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=s\}} \end{bmatrix}.$$

Caso B: SLSM incerto

Considere o SLSM (6.1, caso B). Deste modo, a variável $z_{j,k+1}$ em (6.5) pode ser escrita como

$$\begin{split} z_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, F_i \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} \left[\left(1\!\!1_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij} \right) F_i + 1\!\!1_{\{\theta(k+1)=j\}} \, \delta F_i \right] \, z_{i,k} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \, G_i \, v_{i,k} \, + \\ &\qquad \qquad \sum_{i=1}^{s} \left[\left(1\!\!1_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij} \right) G_i + 1\!\!1_{\{\theta(k+1)=j\}} \, \delta G_i \right] v_{i,k}. \end{split}$$

Logo, o sistema aumentado é definido por

$$z_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} z_k + \mathcal{B}_k^{\delta} v_k,$$

sendo $\mathcal{A}_k^{\delta}=\mathcal{A}+\delta\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k^{\delta}=\mathcal{B}+\delta\mathcal{B}_k$ e os parâmetros incertos são modelados da seguinte forma

$$\left[\delta \mathcal{A}_k \ \delta \mathcal{B}_k\right] = H_{\mathcal{T}} \Delta_{\mathcal{T}_{k+1}} \left[E_{\mathcal{A}} \ E_{\mathcal{B}}\right]$$

com as matrizes dadas por

$$\begin{split} \mathcal{A} &= (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \mathbb{F}_d, \quad \mathcal{B} = (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \, \mathbb{G}_d, \quad \mathbb{F}_d = diag(F_i), \quad \mathbb{G}_d = diag(G_i), \\ \mathcal{H}_{\mathcal{T}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \, \dots \, O & \mathbf{h}_{12} \, \dots \, O & \dots \, \mathbf{h}_{1s} \, \dots \, O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \, \dots \, \mathbf{h}_{s1} & O & \dots \, \mathbf{h}_{s2} \, \dots \, O & \dots \, \mathbf{h}_{ss} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn,s^2(n+t)}, \\ E_{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \, \dots \, \mathbf{a}_{1s} & O & & & \\ & \mathbf{a}_{21} \, \dots \, \mathbf{a}_{2s} & O & & \\ & O & & \mathbf{a}_{s1} \, \dots \, \mathbf{a}_{ss} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{s^2(n+\ell),sn}, \\ E_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} \, \dots \, \mathbf{b}_{1s} & O & & & \\ & O & & \mathbf{b}_{21} \, \dots \, \mathbf{b}_{2s} & O & \\ & O & & & \mathbf{b}_{s1} \, \dots \, \mathbf{b}_{ss} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{s^2(n+\ell),sm}, \end{split}$$

$$\Delta_{\mathfrak{I}_{k+1}} = diag(\Delta_{\mathfrak{I},11}, \dots, \Delta_{\mathfrak{I},1s}, \dots, \Delta_{\mathfrak{I},s1}, \dots, \Delta_{\mathfrak{I},ss}) \in \mathbb{R}^{s^2(n+t), s^2(n+\ell)}$$

e os elementos dados por

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= \begin{bmatrix} I_n & H_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} F_i^T & E_{F_i}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ij} = \begin{bmatrix} G_i^T & E_{G_i}^T \end{bmatrix} \\ & \quad \mathbf{e} \quad \Delta_{\mathfrak{I},ij} = diag\Big((\mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=j\}} - p_{ij})I_n, \, \mathbb{I}_{\{\theta(k+1)=j\}}\Delta_i\Big). \end{split}$$

6.1.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte custo de N estágios associado ao sistema aumentado (6.6)

$$J_N(z,v) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(z_k^T \, \mathcal{Q} \, z_k + v_k^T \, \mathcal{R} \, v_k \right) + z_N^T \, \mathbb{X}_N \, z_N \tag{6.7}$$

se a MT é conhecida, e

$$J_N(z,v) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(z_k^T \mathcal{Q} z_k + v_k^T \mathcal{R} v_k \right) + z_N^T \left(\mathbb{X}_N + \delta \mathbf{P}^T \mathscr{P}_N \delta \mathbf{P} \right) z_N$$
 (6.8)

se a MT é parcialmente desconhecida, sendo

$$X_{N} = diag(\Psi_{i,N}), \quad \Psi_{i,N} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} P_{j,N}, \quad \mathcal{P}_{N} = diag(P_{j,N}) \in \mathbb{R}^{sn,sn},$$

$$P_{j,N} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \mathcal{R} = diag(R_{i}), \quad \mathcal{Q} = diag(Q_{i}), \quad R_{i} = \mathcal{D}_{i}^{T} \mathcal{D}_{i} \succ 0,$$

$$Q_{i} = \mathcal{C}_{i}^{T} \mathcal{C}_{i} \succ 0, \quad \mathscr{P}_{N} = diag(\mathcal{P}_{N}, \mathcal{P}_{N}, \dots, \mathcal{P}_{N}) \in \mathbb{R}^{s^{2}n, s^{2}n},$$

$$(6.9)$$

6.1. Sistema Aumentado 113

e a matriz incerta $\delta \mathbf{P}$ é modelada da seguinte forma

$$\delta \mathbf{P} = H_{\mathbf{P}} \, \Delta_{\mathbf{P}} \, E_{\mathbf{P}}$$

com $H_{\mathbf{P}} = diag(H_{\mathbf{p}_1}, \dots, H_{\mathbf{p}_s}), \ \Delta_{\mathbf{P}} = diag(\Delta_{\mathbf{p}_1}, \dots, \Delta_{\mathbf{p}_s}), \ E_{\mathbf{P}} = diag(E_{\mathbf{p}_1}, \dots, E_{\mathbf{p}_s})$ sendo

$$H_{\mathbf{p}_{i}} = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{i1}} I_{n} & O & \dots & O \\ O & \sqrt{h_{i2}} I_{n} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \sqrt{h_{is}} I_{n} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{\mathbf{p}_{i}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta_{i1}} I_{n} \\ \sqrt{\Delta_{i2}} I_{n} \\ \vdots \\ \sqrt{\Delta_{is}} I_{n} \end{bmatrix} e E_{\mathbf{p}_{i}} = \sqrt{e_{i}} I_{n}$$
(6.10)

em que $H_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{sn,sn}$ e $E_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{n,n}$ são matrizes conhecidas, $\Delta_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{sn,n}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\mathbf{p}_i}|| \leq 1$ e os elementos h_{ij} , Δ_{ij} e $e_i = e_{ij}$ são escalares positivos tais que $\delta p_i j = h_{ij} \Delta_{ij} e_i$.

Considere o problema de minimização do par (z_{k+1},v_k) e da maximização da influência das incertezas relacionadas às probabilidades de transição $(\delta \mathbf{P})$ e/ou às matrizes de parâmetros do SA. Assim, tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\substack{z_{k+1}, v_k \\ \text{sujeito a}}} \max_{\substack{\delta \mathbf{P}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k \\ }} J_N(z, v)
\text{sujeito a} z_{k+1} = \mathcal{A}_k^{\delta} z_k + \mathcal{B}_k^{\delta} v_k,$$
(6.11)

com uma lei de controle linear de realimentação de estado na forma

$$v_k = \mathcal{K}_k z_k, \ \forall k \ge 0.$$

Note que a formulação da equação dinâmica do sistema aumentado independe das probabilidades de transição incertas δp_{ij} , mas a versão aumentada do funcional quadrático $J_N(z,v)$ considera cada tipo de MT (conhecida ou parcialmente desconhecida).

O problema de otimização (6.11) pode ser resolvido recursivamente por meio do método de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995) através dos seguintes problemas de otimização

$$\min_{z_{1},v_{0}} \max_{\delta \mathbf{P},\delta \mathcal{A}_{k},\delta \mathcal{B}_{k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,0}(z_{1},v_{0}) + \min_{z_{2},v_{1}} \max_{\delta \mathbf{P},\delta \mathcal{A}_{k},\delta \mathcal{B}_{k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,1}(z_{2},v_{1}) + \ldots + \min_{z_{t},v_{t-1}} \max_{\delta \mathbf{P},\delta \mathcal{A}_{k},\delta \mathcal{B}_{k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,t-1}(z_{t},v_{t-1}) + \ldots + \min_{z_{N},v_{N-1}} \max_{\delta \mathbf{P},\delta \mathcal{A}_{k},\delta \mathcal{B}_{k}} \left\{ \mathcal{J}_{\mu,N-1}(z_{N},v_{N-1}) \right\} \right\} \right\}, \quad (6.12)$$

sendo que o funcional $\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1},v_k)$ é obtido pela aplicação do método de funções penalidade em cada passo $k \geq 0$. Assim, tem-se

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k) = z_{k+1}^T \, \mathcal{X}_{k+1} \, z_{k+1} + z_k^T \, \mathcal{Q} \, z_k + v_k^T \, \mathcal{R} \, v_k + \left(z_{k+1} - \mathcal{A}_k^{\delta} \, z_k - \mathcal{B}_k^{\delta} \, v_k \right)^T \, \mu \, \left(\bullet \right), \quad (6.13)$$

com $\mathfrak{X}_{k+1} = \mathbb{X}_{k+1}$ se a MT é conhecida, e $\mathfrak{X}_{k+1} = \mathbb{X}_{k+1} + \delta \mathbf{P}^T \mathscr{P}_{k+1} \delta \mathbf{P}$ se a MT é parcialmente conhecida.

A solução para o problema (6.12) será obtida iterativamente pela otimização do funcional (6.13) em cada passo k, ou seja, através do seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{z_{k+1},v_k} \max_{\delta \mathbf{P}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} \mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k), \ \forall k \ge 0.$$

Portanto, o problema de regulação robusta para o sistema aumentado consiste em obter a solução ótima $(z_{\mu,k+1}^*,v_{\mu,k}^*)$, sob a máxima influência das incertezas, que resolve o problema de otimização irrestrito definido da seguinte forma.

Problema de Controle Robusto 6.1

Para cada $\mu > 0$ fixado, determinar a sequência ótima $\{z_{\mu,k+1}^*, v_{\mu,k}^*\}_{k=0}^{N-1}$ segundo o problema de otimização

$$\min_{z_{k+1}, v_k} \max_{\delta \mathbf{P}, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, v_k)$$
(6.14)

para cada k = N - 1, ..., 0, sendo $\mathfrak{J}_{\mu,k}$ o funcional quadrático regularizado penalizado incerto definido por

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1},v_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{k+1} & O \\ O & \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O \\ I_{sn} & -\mathcal{B}_k^{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{sn} \\ \mathcal{A}_k^{\delta} \end{bmatrix} z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & O \\ O & \mu I_{sn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}$$

se a MT é conhecida, e

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1},v_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{k+1} & O \\ O & \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{P} & O \\ O & O \\ I_{sn} & -\mathcal{B}_k^{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ \mathcal{A}_k^{\delta} \end{bmatrix} z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathscr{P}_{k+1} & O & O \\ O & \mathcal{Q} & O \\ O & O & \mu I_{sn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}$$

se a MT é parcialmente conhecida.

6.2 Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Aumentados

Nesta seção, propõe-se um regulador robusto recursivo para o sistema aumentado, o qual também poderá fornecer uma solução para o SLSM. Este regulador será obtido

por meio da combinação do método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Subseção 2.2.5), sendo que as propriedades de estabilidade e convergência assemelham-se às encontradas para a solução clássica de sistemas lineares sem incertezas (veja Lancaster e Rodman (1995)).

O Problema 6.1 representa um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.2.4) quando são feitas as seguintes identificações:

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}, \ Q \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{k+1} & O \\ O & \mathcal{R} \end{bmatrix},$$
 (6.15-a)

sendo que as demais matrizes são dadas de acordo o tipo de matriz de transição:

\square MT conhecida

$$W_{\mu} \leftarrow \begin{bmatrix} \Omega & O \\ O & \mu I_{sn} \end{bmatrix}, \ A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ I_{sn} & -\mathcal{B} \end{bmatrix}, \ \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & -\delta \mathcal{B}_k \end{bmatrix}, \ b \leftarrow \begin{bmatrix} -I_{sn} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} z_k,$$

$$\delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ \delta \mathcal{A}_k \end{bmatrix} z_k, \ H \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ H_{\mathcal{T}} \end{bmatrix}, \ \Delta \leftarrow \Delta_{\mathcal{T}_{k+1}}, \ E_A \leftarrow \begin{bmatrix} O & -E_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \ \text{e} \ E_b \leftarrow E_{\mathcal{A}}.$$

$$(6.15-b)$$

□ MT parcialmente desconhecida

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \\ I_{sn} - \mathcal{B} \end{bmatrix}, \ \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} \delta \mathbf{P} & O \\ O & O \\ O - \delta \mathcal{B}_k \end{bmatrix}, \ b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -I_{sn} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} z_k, \ \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ \delta \mathcal{A}_k \end{bmatrix} z_k,$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathbf{P}} & O \\ O & O \\ O & H_{\mathcal{T}} \end{bmatrix}, \ E_b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \ E_A \leftarrow diag(E_{\mathbf{P}}, -E_{\mathcal{B}}),$$

$$\Delta \leftarrow diag(\Delta_{\mathbf{P}}, \Delta_{\mathcal{T}_{k+1}}) \ e \ W_{\mu} \leftarrow diag(\mathscr{P}_{k+1}, \mathcal{Q}, \mu I_{sn}).$$

$$(6.15-c)$$

O resultado a seguir apresenta uma estrutura na forma de blocos matriciais que determina o estado $z_{\mu,k+1}$, a entrada de controle $v_{\mu,k}$ e o funcional $\mathcal{J}_{\mu,k}$ para cada valor atribuído ao parâmetro μ .

Lema 6.1 Considere o Problema 6.1 com $\mu > 0$ fixado. Suponha que $\Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu})$ é semide-finida positiva e \hat{E}_{k+1} é definida positiva com

$$\widehat{E}_{k+1} = I_{sn} - E_{\mathbf{P}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{sn} + E_{\mathbf{P}} \mathbb{X}_{k+1}^{-1} E_{\mathbf{P}}^{T} \right)^{-1} E_{\mathbf{P}} \mathbb{X}_{k+1}^{-1}.$$
(6.16)

Então, a solução ótima $(z_{\mu,k+1}^*,v_{\mu,k}^*)$ para cada $k\geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} z_{\mu,k+1}^* \\ v_{\mu,k}^* \\ \mathfrak{Z}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn} & O & O \\ O & I_{sm} & O \\ O & O & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathfrak{K}_{\mu,k} \\ \mathfrak{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} z_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & -I_{sn} \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_{sn} & O & O \\ O & I_{sm} & O \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{k+1}^{-1} & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & \mathcal{R}^{-1} & O & O & O & I_{sm} \\ O & O & \mathcal{Q}^{-1} & O & O & O \\ O & O & O & \Sigma & \widehat{I} & -\widehat{\mathcal{B}} \\ I_{sn} & O & O & \widehat{I}^{T} & O & O \\ O & I_{sm} & O & -\widehat{\mathcal{B}}^{T} & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ -I_{sn} \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix},$$
(6.17)

com as matrizes \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{I} e Σ dadas de acordo com os seguintes casos:

\Box MT conhecida

$$\widehat{\mathcal{A}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{B}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ E_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{I} \leftarrow \begin{bmatrix} I_{sn} \\ O \end{bmatrix} \quad e \quad \Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O \\ O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I \end{bmatrix};$$

☐ MT parcialmente desconhecida

$$\widehat{\mathcal{A}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ O \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \ \widehat{\mathcal{B}} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ O \\ E_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, \ \widehat{I} \leftarrow \begin{bmatrix} I_{sn} \\ E_{\mathbf{P}} \\ O \end{bmatrix} \ e \ \Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & O \\ O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{sn} & O \\ O & O & \widehat{\lambda}_{u}^{-1} I \end{bmatrix};$$

 $em \ que \ \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) = \mu^{-1}I_{sn} - \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}H_{\mathfrak{I}}H_{\mathfrak{I}}^{T} \ e \ \widehat{\lambda}_{\mu} = (1+\alpha) \, \|\mu H_{\mathfrak{I}}^{T}H_{\mathfrak{I}}\|, \ para \ algum \ \alpha > 0.$

Demonstração.

☐ MT conhecida

Decorre da aplicação do item (i) do Lema 2.8 com as identificações estabelecidas em (6.15).

☐ MT parcialmente desconhecida

A prova é análoga à do regulador robusto para o SLSM incerto com MT incerta no cenário de observação completa dos estados da cadeia de Markov (Lema 4.1).

Observe que, neste caso também é possível assumir $\hat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) ||\mu H_{\mathfrak{T}}^T H_{\mathfrak{T}}||$ ao invés de $\hat{\lambda}_{\mu} = (1 + \alpha) ||diag(H_{\mathbf{P}}^T \mathscr{P}_{k+1} H_{\mathbf{P}}, \mu H_{\mathfrak{T}}^T H_{\mathfrak{T}})||$, pois a função $\Gamma(\lambda)$, definida no Teorema 2.2, independe da matriz $\Phi(\mathscr{P}, \hat{\lambda}) = \mathscr{P}_{\mu, k+1}^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} H_{\mathbf{P}} H_{\mathbf{P}}^T$.

Consequentemente, a solução não depende da matriz $\Phi(\mathscr{P}, \widehat{\lambda})$, conforme pode ser verificado no Teorema 6.1. Assim, é possível eliminar as linhas e a coluna referentes a $\Phi(\mathscr{P}, \widehat{\lambda})$, obtendo (6.17).

A condição $\widehat{E}_{k+1} \succ 0$ é estipulada para garantir a recursividade da solução fornecida, maiores detalhes serão apresentados na solução algébrica do regulador (Subseção 6.2.1).

No Algoritmo 6.1 é apresentado o procedimento para o obtenção da solução ótima do sistema aumentado, sendo que a sequência de entradas de controle para o SLSM é obtida pela definição (6.2), ou seja,

$$u_k = \sum_{i=1}^{s} v_{i,k} \iff v_{i,k} = u_k \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}.$$

Observe que a penalidade imposta pelos parâmetros μ e $\hat{\lambda}$ esta associada ao nível de robustez do regulador apresentado no Lema 6.1.

Algoritmo 6.1 Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SA

SLSM

- Defina o tipo de sistema: SLSM nominal ou incerto.
- Escolha a MT: conhecida ou parcialmente desconhecida.
- Obtenha os parâmetros do SA: \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} , $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.

Condições iniciais: Defina $N, \mu > 0$ e $P_{\theta(N),N} > 0$.

Passo 1: Para todo $k = N - 1, \dots, 0$:

$$\Psi_{i,k+1} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} P_{j,k+1}, \ \forall i \in \mathcal{S},$$

$$\mathbb{X}_{k+1} = diag(\Psi_{i,k+1}) \text{ e}$$

$$\mathscr{P}_{\mu,k+1} = diag(\mathcal{P}_{\mu,k+1}, \dots, \mathcal{P}_{\mu,k+1}).$$

- Defina $\hat{\lambda}$ tal que $\hat{E}_{k+1} \succ 0$ de acordo com (6.16) quando a MT é parcialmente desconhecida.
- Determine $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ via (6.17). Passo 2: Obtenha para cada $k = 0, \dots, N-1$: $\begin{bmatrix} z_{\mu,k+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \end{bmatrix}_{z_{\mu,k}}$

$$\begin{bmatrix} z_{\mu,k+1}^* \\ v_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \end{bmatrix} z_k. \tag{6.18}$$

SLSM: Calcule para cada k = 0, ..., N - 1:

$$x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k^*$$
$$com \ u_k^* = \sum_{i=1}^s v_{\mu,i,k}^*.$$

O Lema 6.2 apresenta uma forma de determinar as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ quando as matrizes de ponderação são semidefinidas positivas. Observe que, neste caso, não é necessário calcular as inversas das matrizes \mathbb{X}_{k+1} , \mathcal{R} e \mathcal{Q} .

Lema 6.2 Considere o Problema 6.1 com $\mu > 0$ fixado. Suponha que $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu})$ é semide-finida positiva e \widehat{E}_{k+1} é definida positiva com

$$\widehat{E}_{k+1} = I_{sn} - E_{\mathbf{P}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I_{sn} + E_{\mathbf{P}} \mathbb{X}_{k+1}^{-1} E_{\mathbf{P}}^{T} \right)^{-1} E_{\mathbf{P}} \mathbb{X}_{k+1}^{-1}.$$

Então, a solução ótima $(z_{\mu,k+1}^*,v_{\mu,k}^*)$ para cada $k\geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} z_{\mu,k+1}^* \\ v_{\mu,k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn} & O & O \\ O & I_{sm} & O \\ O & O & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{J}_{\mu,k} \end{bmatrix} z_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu,k}$, $\mathcal{K}_{\mu,k}$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ são determinadas por meio de

com as matrizes \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{I} e Σ dadas de acordo com o Lema 6.1.

Demonstração. A prova é análoga à do Lema 4.2.

6.2.1 Estabilidade e Convergência

A estabilidade e a convergência da solução proposta no Lema 6.1 são estabelecidas a partir da equivalência com a solução clássica do problema de controle ótimo para sistemas lineares de tempo discreto sem a presença de incertezas. Este procedimento de demonstração é dual ao utilizado por Sayed (2001) e Zhou (2010) na análise do desempenho de estimativas robustas. Os resultados a seguir apresentam a solução algébrica robusta recursiva obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (6.17).

Lema 6.3 Suponha que $\mathcal{R} \succ 0$ e $\Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$. Então,

i.
$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1}$$
 é simétrica e definida positiva.

Demonstração. A prova é análoga à do Lema 5.3.

Teorema 6.1 Considere o Problema 6.1. Suponha que $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \succeq 0$ e $\widehat{E}(k+1) \succ 0$. Então, a solução algébrica robusta recursiva para cada $\mu > 0$ é dada por

$$\mathcal{L}_{\mu,k} = \left[I_{sn} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \overline{\mathcal{B}} \overline{\mathcal{B}}^{T} \right)^{-1} \right] \overline{\mathcal{A}} - \overline{\mathcal{B}} \left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{A}},
\mathcal{K}_{\mu,k} = -\overline{\mathcal{R}}^{\frac{1}{2}} \left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{A}} - \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^{T} \right)^{-1} E_{\mathcal{A}},
\mathcal{P}_{\mu,k} = \overline{\mathcal{A}}^{T} \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{Q}},$$

sendo $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B}\overline{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{\mathbb{R}}$ conforme definido no Lema 6.3,

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T}\right)^{-1} E_{\mathcal{A}},$$

$$\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} + E_{\mathcal{A}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T}\right)^{-1} E_{\mathcal{A}} \quad e$$

$$\widehat{\Psi}_{k+1} = \begin{cases} \left(\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathbb{X}_{k+1}^{-1}\right)^{-1}, & para \ a \ MT \ conhecida, \\ \left(\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathbb{X}_{k+1}^{-1}\widehat{E}_{k+1}\right)^{-1}, & para \ a \ MT \ parc. \ desc.. \end{cases}$$

Demonstração.

\square MT conhecida

A solução algébrica robusta do Problema 6.1, definido a partir do funcional (6.7), é obtida por meio de manipulações das expressões apresentadas em (6.17). De fato, considere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}_{k+1}^{-1} & O & O & O & O & I_{sn} & O \\ O & \mathbb{R}^{-1} & O & O & O & O & I_{sm} \\ O & O & \mathbb{Q}^{-1} & O & O & O & O \\ O & O & O & \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) & O & I_{sn} & -\mathbb{B} \\ O & O & O & O & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I & O & -E_{\mathcal{B}} \\ I_{sn} & O & O & I_{sn} & O & O \\ O & I_{sm} & O & -\mathbb{B}^{T} & -E_{\mathcal{B}}^{T} & O & O \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1} \\ X_{2} \\ X_{3} \\ X_{4} \\ X_{5} \\ X_{6} \\ O \\ O \end{bmatrix}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$X_{k+1}^{-1}X_1 + X_6 = O, (6.19-a)$$

$$\mathcal{R}^{-1}X_2 + X_7 = O, (6.19-b)$$

$$Q^{-1}X_3 = -I_{sn}, (6.19-c)$$

$$\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) X_4 + X_6 - \mathcal{B} X_7 = \mathcal{A}, \tag{6.19-d}$$

$$\hat{\lambda}_{\mu}^{-1} X_5 - E_{\mathcal{B}} X_7 = E_{\mathcal{A}},$$
(6.19-e)

$$X_1 + X_4 = O, (6.19-f)$$

$$X_2 - \mathcal{B}^T X_4 - E_{\mathcal{B}}^T X_5 = O. {(6.19-g)}$$

Combinando (6.19-b) e (6.19-g), tem-se

$$X_7 = -\Re^{-1} \left(\Re^T X_4 + E_{\mathcal{B}}^T X_5 \right), \tag{6.20}$$

que junto com (6.19-a), (6.19-d), (6.19-e) e (6.19-f) fornecem

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathbb{X}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{T} & \mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T} \\ E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{T} & \widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{4} \\ X_{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}.$$
 (6.21)

Como a inversa do bloco matricial está garantida pelo Lema 6.3, podemos aplicar a Fórmula da Inversão de Banachiewicz (Lema A.6) e obter a solução do sistema de equações (6.21). Logo,

$$X_{4} = \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}\mathcal{B}^{T}\right)^{-1}\overline{\mathcal{A}} \quad e$$

$$X_{5} = \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T}\right)^{-1} \left(E_{\mathcal{A}} - E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^{T}X_{4}\right),$$
(6.22)

sendo $\overline{\mathbb{R}}$ conforme o Lema 6.3,

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T} \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^{T}\right)^{-1} E_{\mathcal{A}} \quad e$$

$$\widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu}) + \mathbb{X}_{k+1}^{-1}\right)^{-1}.$$

A partir de (6.20) e (6.22), tem-se

$$X_7 = -\overline{\mathcal{R}}\mathcal{B}^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}\mathcal{B}^T\right)^{-1}\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1}I + E_{\mathcal{B}}\mathcal{R}^{-1}E_{\mathcal{B}}^T\right)^{-1}E_{\mathcal{A}}.$$
 (6.23)

Definindo $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\overline{\mathcal{R}}^{\frac{1}{2}}$ e aplicando o *Lema de Inversão de Matrizes* (Lema A.9) em (6.23), obtém-se

$$X_7 = -\overline{\mathcal{R}}^{\frac{1}{2}} \left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{A}} - \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{A}}.$$

$$(6.24)$$

De (6.19-d) e (6.24), resulta que

$$X_{6} = \mathcal{A} + \mathcal{B}X_{7} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu})X_{4}$$

$$= \left[I_{sn} - \Phi(\mu, \widehat{\lambda}_{\mu})\left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \overline{\mathcal{B}}\overline{\mathcal{B}}^{T}\right)^{-1}\right]\overline{\mathcal{A}} - \overline{\mathcal{B}}\left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^{T}\widehat{\Psi}_{k+1}\overline{\mathcal{B}}\right)^{-1}\overline{\mathcal{B}}^{T}\widehat{\Psi}_{k+1}\overline{\mathcal{A}}.$$

De (6.17) tem-se que as matrizes $\mathcal{L}_{\mu}(k)$, $\mathcal{K}_{\mu}(k)$ e $\mathcal{P}_{\mu}(k)$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu,k} \\ \mathcal{K}_{\mu,k} \\ \mathcal{P}_{\mu,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \ O & O & O & O & I_{sn} & O \\ O \ O & O & O & O & I_{sm} \\ O \ O - I_{sn} \ \mathcal{A}^T \ E_{\mathcal{A}}^T \ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_6 \\ X_7 \\ -I_{sn}X_3 + \mathcal{A}^T X_4 + E_{\mathcal{A}}^T X_5 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathcal{L}_{\mu,k} = X_6$ e $\mathcal{K}_{\mu,k} = X_7$. De (6.19-c) e (6.22), obtém-se

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \mathcal{Q} + \overline{\mathcal{A}}^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \mathcal{B} \overline{\mathcal{R}} \mathcal{B}^T \right)^{-1} \overline{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{A}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{A}}.$$
(6.25)

Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (6.25), resulta em

$$\mathcal{P}_{\mu,k} = \overline{\mathcal{A}}^T \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \left(I_{sm} + \overline{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \overline{\mathcal{B}} \right)^{-1} \overline{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \right] \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{Q}}$$

$$\operatorname{com} \ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + E_{\mathcal{A}}^T \left(\widehat{\lambda}_{\mu}^{-1} I + E_{\mathcal{B}} \mathcal{R}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{A}}.$$

☐ MT parcialmente desconhecida

A prova para a solução algébrica robusta do Problema 6.1, definido a partir do funcional (6.8), é análoga à demonstração do Teorema 4.2.

Observação 6.1

- i. Similar ao regulador robusto proposto para o cenário de observação completa (Capítulo 4), quando $\hat{\lambda}_{\mu} \to \infty$ tem-se que $\hat{E}_{k+1} \to O$. (veja detalhes no Apêndice B.3). Logo, $\hat{\Psi} \to \Phi(\mu, \hat{\lambda}_{\mu})$ e $\mathcal{P}_{\mu,k}$ é constante para todo k. Portanto, para que a solução exista, o parâmetro $\hat{\lambda}_{\mu}$ deve satisfazer a condição $\hat{E}_{k+1} \succ 0$.
- ii. Se a matriz de transição nominal é nula ($\mathbb{P} = O$), então as matrizes de parâmetros A e \mathbb{B} são nulas. Logo, $\mathbb{P}_{\mu,k} = \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $k \geq 0$. Portanto, como $\mathbb{P}_{\mu,k}$ perde a sua característica recursiva, a abordagem via SA não é viável para este caso.

O Teorema 6.1 mostra que a solução proposta no Lema 6.1, através de um arranjo matricial, pode ser escrita na forma de equações algébricas de Riccati clássicas. De fato, considere a equação de Riccati para sistemas lineares (veja detalhes em Lancaster e Rodman (1995))

$$P_k = A_k^T \left[P_{k+1} - P_{k+1} B_k \left(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} \right] A_k + Q_k$$

e as seguintes identificações com a versão robusta apresentada no Teorema 6.1

$$P_k \leftarrow \mathcal{P}_{\mu,k}, \ P_{k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{k+1}, \ A_k \leftarrow \overline{\mathcal{A}}, \ B_k \leftarrow \overline{\mathcal{B}}, \ R_k \leftarrow I_{sm} \in Q_k \leftarrow \overline{\mathcal{Q}}.$$

Devido a esta equivalência, as condições de estabilidade e convergência para o regulador robusto via sistema aumentado são baseadas nas do problema de regulação clássico (veja Apêndice C). Observe que a solução para o sistema aumentado, modelado para MTs conhecidas, é equivalente ao regulador robusto proposto por Cerri (2009), sendo que a equação algébrica de Riccati clássica é um caso particular da solução encontrada para SA pelo arranjo matricial, se $E_A = O$, $E_B = O$, $R_k = I_{sm}$ com $\mu \to \infty$. Além disso, essas soluções também são casos particulares do regulador robusto definido para a MT parcialmente conhecida, basta também considerar $E_P = O$.

Similar aos reguladores via SLPM, o fato do regulador robusto obter a solução ótima para o SA não implica que a mesma também será ótima para o SLSM como ilustrado no Exemplo 6.3.

6.3 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a aplicação do regulador robusto recursivo para SLSM via SA. Para tal, o Algoritmo 6.1 foi implementado no software $MATLAB^{\circledR}$ na versão 9.2.0.538062 (R2017a) em um computador com a seguinte configuração: processador $Intel^{\circledR}$ $Core^{TM}$ i5 com frequência de 2.6GHz, memória RAM de 8GB e sistema operacional $Windows^{\circledR}$ 8.1.

Observe que a aplicação do Algoritmo 6.1 está condicionada à verificação de que $||\Delta|| \le 1$ como definido na Subseção 2.2.4. Quando esta condição não é satisfeita, considera-se um escalar $\kappa \ge 1$, de modo que $||\Delta|| \le \kappa$. Para assegurar a equivalência com o problema analisado, tem-se as seguintes identificações de acordo com o modelo em (6.15):

$$\Delta_{\mathbf{P}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathbf{P}}}{\kappa}, \ \Delta_{\mathfrak{I}_{k+1}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathfrak{I}_{k+1}}}{\kappa},$$
 $E_{\mathbf{P}} \leftarrow \kappa E_{\mathbf{P}}, \ E_{\mathcal{A}} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{A}} \ e \ E_{\mathcal{B}} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{B}}.$

Simulações de Monte Carlo foram realizadas para ilustrar o comportamento dos sistemas considerados, sendo que a variável $\theta(k)$ foi gerada de acordo com o vetor de distribuição inicial e com a matriz de transição². Para cada realização, foram atribuídos valores para as incertezas Δ , sorteados aleatoriamente com distribuição uniforme, a fim de obter as matrizes $\delta \mathbb{P}$, δF e δG e, consequentemente, os estados z_k e x_k . Os ganhos obtidos pelas simulações estão disponíveis no Apêndice E.

² O algoritmo utilizado é apresentado no Apêndice D.

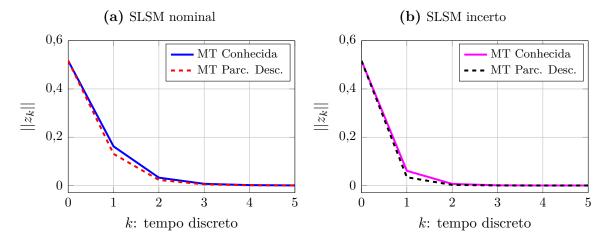
Exemplo 6.2 Considere o SLSM (6.1), sendo que as matrizes de parâmetros são dadas no Exemplo 5.1, juntamente com as matrizes de transição adotadas. Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 6.1:

$$\mu = 10^7$$
, $\alpha = 0.5$, $N = 150$, $z_{i,0} = \pi_{i,0} x_0$, $P_{\theta(N),N} = I_2$,

com $\kappa = 2$ para o SLSM nominal e, $\kappa = 1$ para o SLSM incerto.

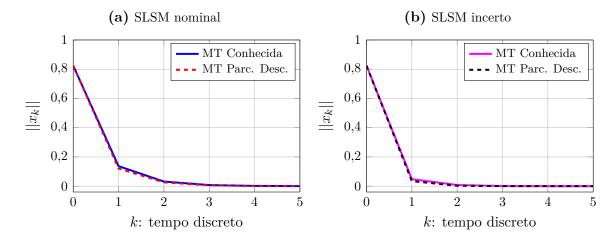
Na Figura 6.2 é apresentado o comportamento da norma do estado z_k para o SA em malha fechada de acordo com o SLSM considerado, sendo obtido através de (6.18). Note que as trajetórias convergem para zero conforme k aumenta.

Figura 6.2 – Resposta do estado z_k para o SA em malha fechada do Exemplo 6.2



Na Figura 6.3 é apresentado o comportamento do estado x_k para os SLSMs considerados, sendo obtido por meio da definição (6.2), ou seja, $x_k = \sum_{i=1}^s z_{i,k}$. Logo, como as trajetórias de $z_k \to 0$, então tem-se que $x_k \to 0$.

Figura 6.3 – Resposta do estado x_k para o SLSM do Exemplo 6.2

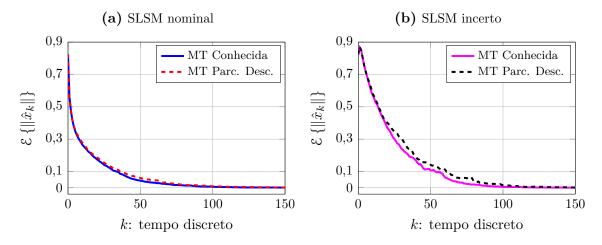


Na Figura 6.4 são ilustrados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs reais, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov, sendo

$$\hat{x}_k = \mathcal{F}_{\theta(k)} \, \hat{x}_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} \, u_k \quad com \quad u_k = \sum_{i=1}^s v_{\mu,i,k}^*.$$

Observe que todas as médias convergem para zero conforme o horizonte k aumenta. Portanto, a solução obtida pelo regulador robusto para o SA pode ser uma solução adequada para o SLSM com matrizes de transição conhecidas ou parcialmente desconhecidas no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

Figura 6.4 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM do Exemplo 6.2



Exemplo 6.3 Considere o SLSM (6.1), sendo que as matrizes de parâmetros são dadas no Exemplo 5.3, juntamente com as matrizes de transição adotadas. Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 6.1:

$$\mu = 10^{10}$$
, $\hat{\lambda} = 0.5$, $N = 100$, $z_{i,0} = \pi_{i,0} x_0$, $P_{\theta(N),N} = I_2$,

sendo que os valores atribuídos a κ são apresentados na Tabela 6.1 de acordo com o SLSM considerado.

Tabela 6.1 – Valores de κ para o Exemplo 6.3

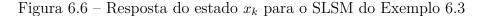
Modelo	
SLSM nominal com MT conhecida	1,7
SLSM nominal com MT parc. desc.	1,8
SLSM incerto com MT conhecida	1,0
SLSM incerto com MT parc. desc.	1,0

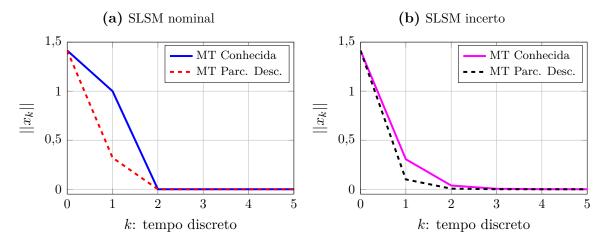
Na Figura 6.5 é apresentado o comportamento da norma do estado z_k para o SA em malha fechada de acordo com o SLSM considerado. Note que todas as trajetórias convergem para zero para um instante de tempo, relativamente, pequeno.

(a) SLSM nominal (b) SLSM incerto 1 MT Conhecida MT Conhecida 0,8 0,8 MT Parc. Desc MT Parc. Desc. 0,60,6 $||z_k||$ $||z_k||$ 0,40,40,2 0,20 03 1 2 3 k: tempo discreto k: tempo discreto

Figura 6.5 – Resposta do estado z_k para o SA em malha fechada do Exemplo 6.3

Na Figura 6.6 é apresentado o comportamento do estado x_k para os SLSMs considerados, sendo obtido por meio da definição (6.2), ou seja, $x_k = \sum_{i=1}^s z_{i,k}$. Observe que x_k independe dos valores atribuídos a $\theta(k)$. Logo, como as trajetórias de z_k são estáveis, então as de x_k também serão.



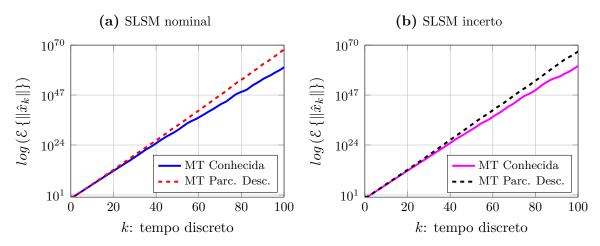


Na Figura 6.7 são apresentados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov, sendo

$$\hat{x}_k = \mathcal{F}_{\theta(k)} \, \hat{x}_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} \, u_k \quad com \quad u_k = \sum_{i=1}^s v_{\mu,i,k}^*.$$

Observe que $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}\to\infty$ conforme o horizonte k aumenta. Portanto, o fato do regulador robusto obter uma solução adequada para o SA não implica que a mesma também será para o SLSM.

Figura 6.7 – Valores de
 $\mathcal{E}\left\{\|\hat{x}_k\|\right\}$ para o SLSM do Exemplo 6.3



Capítulo 7

Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via Sistema Aumentado Singular

Nesse capítulo é apresentado um terceiro modelo para obter o sistema linear determinístico que representa o SLSM no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov. Este modelo consiste em reescrever o SLSM em termos da medida de Dirac¹ $\mathbb{I}_{\{\theta(k)=i\}}$, porém de uma forma distinta da apresentada no Capítulo 6, pois neste caso não utiliza-se a variável auxiliar $z_{i,k} = x_k \mathbb{I}_{\{\theta(k)=i\}}$. Desse modo, o estado do sistema aumentado e do SLSM são os mesmos, assim como, a entrada de controle.

A solução para este problema também é dada pela técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Subseção 2.2.5), semelhante à abordagem proposta por Cerri (2009) para sistema lineares de tempo discreto no espaço de estados.

A principal vantagem dessa formulação é a possibilidade de se obter uma solução recursiva em termos de equações algébricas de Riccati para os SLSMs no cenário sem observação da cadeia de Markov, quando o regulador robusto para o sistema aumentado fornece um ganho de realimentação que estabiliza o SLSM.

7.1 Sistema Aumentado Singular

Considere o SLSM de tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} u_k, \ \forall k \ge 0 \\ y_k = \mathcal{C}_{\theta(k)} x_k + \mathcal{D}_{\theta(k)} u_k, \ \theta(0) \sim \pi_0 \end{cases}$$

$$(7.1)$$

que assume dois possíveis modelos para as matrizes de parâmetros:

¹ Definida em (5.2).

Caso A: SLSM nominal

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)}$$
 e $\mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)}$,

Caso B: SLSM incerto

$$\mathfrak{F}_{\theta(k)} \leftarrow F_{\theta(k)} + \delta F_{\theta(k)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{G}_{\theta(k)} \leftarrow G_{\theta(k)} + \delta G_{\theta(k)},$$

sendo o par $(x_k, \theta(k))$ o estado do sistema, u_k a entrada de controle e y_k a variável de observação. As matrizes $F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,n}$ e $\mathcal{D}_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{r,m}$ são conhecidas e as matrizes de incertezas $\delta F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\delta G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,m}$ são modeladas da seguinte forma

$$\left[\delta F_{\theta(k)} \ \delta G_{\theta(k)}\right] = H_{\theta(k)} \ \Delta_{\theta(k)} \left[E_{F_{\theta(k)}} \ E_{G_{\theta(k)}} \right]$$

para todo $k \geq 0$, em que $H_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n,t}$ (matriz não-nula), $E_{F_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$, $E_{G_{\theta(k)}} \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ são matrizes conhecidas e $\Delta_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{t,\ell}$ é uma matriz de contração tal que $||\Delta_{\theta(k)}|| \leq 1$. A cadeia de Markov é indexada por $\theta(k)$ com distribuição inicial π_0 e associada à matriz de transição incerta \mathbb{P}^{δ} , definida em (3.3).

Neste capítulo, considera-se o cenário de observação parcial do estado do sistema, ou seja, x_k é observado, mas não se tem acesso à cadeia de Markov $\theta(k)$, com exceção da distribuição inicial π_0 . Dessa forma, o problema em questão consiste em projetar controladores por realimentação de estado independentes dos modos de operação, obtendo-se uma sequência de controle admissível $\mathfrak{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$, com uma lei de controle linear na forma

$$u_k = K_k x_k, \ \forall k \ge 0,$$

sendo que a matriz $K_k \in \mathbb{R}^{m,n}$ denominada de ganho de realimentação deve estabilizar o SLSM sob a hipótese de existir incertezas nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição.

Com esta finalidade, propõe-se uma abordagem determinística do problema, reformulando o SLSM como um sistema independente da cadeia de Markov a partir da medida de Dirac $\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$, definida em (5.2). Assim, o SLSM (7.1) pode ser reescrito em termos da função indicadora da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{s} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}\right) x_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}_{i} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}\right) x_{k} + \left(\sum_{i=1}^{s} \mathcal{G}_{i} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}\right) u_{k}. \tag{7.2}$$

Pré e pós multiplicando (7.2) pelas probabilidades de transição p_{ij}^{δ} tem-se que

$$\left(\sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}}\right) x_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} \mathcal{F}_{i}\right) x_{k} + \left(\sum_{i=1}^{s} p_{ij}^{\delta} 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} \mathcal{G}_{i}\right) u_{k}, \ \forall j \in \mathcal{S}.$$

$$(7.3)$$

Observe que a medida de Dirac $\mathbb{I}_{\{\theta(k)=i\}}$ pode ser considerada como um parâmetro incerto, visto que não há informações disponíveis sobre o estado da cadeia de Markov $\theta(k)$. Assim, a partir da forma matricial do sistema de equações formado por (7.3) definimos um sistema dinâmico sujeito a incertezas paramétricas que denominamos de Sistema Aumentado Singular (SAS), o qual é representado da seguinte forma:

$$\delta E_k x_{k+1} = \delta \mathcal{A}_k x_k + \delta \mathcal{B}_k u_k, \tag{7.4}$$

$$\text{sendo} \quad \delta E_k = \mathfrak{M}_k \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{A}_k = \mathfrak{M}_k \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{F}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{F}_s \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{B}_k = \mathfrak{M}_k \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_1 \\ \mathfrak{G}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{G}_s \end{bmatrix} \text{ com }$$

$$\mathfrak{M}_k = \begin{bmatrix} p_{11}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_n & p_{21}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} I_n & \dots & p_{s1}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_n \\ p_{12}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_n & p_{22}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} I_n & \dots & p_{s2}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_n & p_{2s}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} I_n & \dots & p_{ss}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_n \end{bmatrix}.$$

Note que o sistema determinístico totalmente incerto obtido, na verdade, é quasisingular, pois há a possibilidade de obter um sistema não-singular ao multiplicar os termos de (7.4) por $(\delta E_k^T \delta E_k)^{-1} \delta E_k^T$. A garantia da invertibilidade da matriz $\delta E_k^T \delta E_k$ decorre da definição da matriz δE_k .

De fato, tem-se que

$$\delta E_k = \mathcal{M}_k \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_{11}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} + p_{21}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} + \dots + p_{s1}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}}) I_n \\ (p_{12}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} + p_{22}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} + \dots + p_{s2}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}}) I_n \\ \vdots \\ (p_{1s}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} + p_{2s}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} + \dots + p_{ss}^{\delta} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}}) I_n \end{bmatrix}.$$

Definindo a notação, $\mathbf{p}_j^\delta = \sum_{i=1}^s p_{ij}^\delta 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}}$ para todo $j\in \mathcal{S},$ segue que

$$\delta E_k = \begin{bmatrix} \mathtt{p}_1^{\delta} I_n \\ \mathtt{p}_2^{\delta} I_n \\ \vdots \\ \mathtt{p}_s^{\delta} I_n \end{bmatrix}.$$

Logo, obtém-se que

$$\delta E_k^T \, \delta E_k = \left[(\mathbf{p}_1^{\delta})^2 \, + \, (\mathbf{p}_2^{\delta})^2 \, + \, \dots \, + \, (\mathbf{p}_s^{\delta})^2 \right] I_n.$$

Pela seguinte condição de probabilidades de transição $\sum_{i=1}^{s}p_{ij}^{\delta}=1,$ tem-se que

$$(p_1^{\delta})^2 + (p_2^{\delta})^2 + \ldots + (p_s^{\delta})^2 \neq 0.$$

Assim, $\delta E_k^T \, \delta E_k$ é uma matriz definida positiva e, portanto, não-singular.

A importância da formulação do sistema aumentado singular (7.4) está no fato de introduzir no modelo determinístico as informações relacionadas às probabilidades de transição, que descrevem a cadeia de Markov e, consequentemente, influenciam o comportamento do sistema conforme analisado por Costa et al. (2005, Ch. 3) e ilustrado no Exemplo 6.1.

O sistema aumentado singular (7.4) representa uma formulação geral do modelo. Na sequência, as matrizes de parâmetros serão definidas de acordo com o SLSM (nominal ou incerto) e com a MT (conhecida ou incerta).

Caso A: SLSM nominal

Considere o SLSM (7.1, caso A). Deste modo, o SAS é definido como

$$\delta E_k \ x_{k+1} = \delta \mathcal{A}_k x_k + \delta \mathcal{B}_k u_k$$

com as matrizes de incertezas modelas da seguinte forma

$$\left[\delta E_k \, \delta \mathcal{A}_k \, \delta \mathcal{B}_k\right] = H_{\mathcal{M}} \, \Delta_{\mathcal{M}_k} \, \left[E_E \, E_{\mathcal{A}} \, E_{\mathcal{B}} \right] \tag{7.5}$$

sendo

$$H_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \dots O & \mathbf{h}_{21} \dots O & \dots & \mathbf{h}_{s1} \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \mathbf{h}_{1s} & O & \dots & \mathbf{h}_{2s} \dots & O & \dots & \mathbf{h}_{ss} \end{bmatrix},$$

$$E_{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} \dots & \mathbf{e}_{1s} \dots & \mathbf{e}_{s1} \dots & \mathbf{e}_{ss} \end{bmatrix}^{T},$$

$$E_{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \dots & \mathbf{a}_{1s} \dots & \mathbf{a}_{s1} \dots & \mathbf{a}_{ss} \end{bmatrix}^{T},$$

$$E_{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} \dots & \mathbf{b}_{1s} \dots & \mathbf{b}_{s1} \dots & \mathbf{b}_{ss} \end{bmatrix}^{T},$$

$$\Delta_{\mathcal{M}_{k}} = diag\left(\Delta_{\mathcal{M},11}, \dots, \Delta_{\mathcal{M},1s}, \dots, \Delta_{\mathcal{M},s1}, \dots, \Delta_{\mathcal{M},ss}\right),$$

$$(7.6)$$

e os elementos definidos de acordo com a MT (conhecida ou incerta).

\Box **A.1:** MT conhecida

Considere as matrizes $H_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{sn,s^2n}$, $\Delta_{\mathcal{M}_k} \in \mathbb{R}^{s^2n,s^2n}$, $E_E \in \mathbb{R}^{s^2n,n}$, $E_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{s^2n,n}$ e $E_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{s^2n,m}$ com os seguintes elementos:

$$\mathbf{h}_{ij} = I_n, \quad \mathbf{e}_{ij} = p_{ij}I_n, \quad \mathbf{a}_{ij} = p_{ij}F_i^T, \quad \mathbf{b}_{ij} = p_{ij}G_i^T \quad \mathbf{e} \quad \Delta_{\mathbb{M},ij} = 1\!\!1_{\{\theta(k)=i\}} I_n;$$

\Box **A.2:** MT incerta

Considere as matrizes $H_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{sn,2ns^2}$, $\Delta_{\mathcal{M}_k} \in \mathbb{R}^{2ns^2,2ns^2}$, $E_E \in \mathbb{R}^{2ns^2,n}$, $E_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{2ns^2,n}$ e $E_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{2ns^2,m}$ com os seguintes elementos:

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= \begin{bmatrix} I_n \ h_{ij} I_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{ij} = \begin{bmatrix} p_{ij} I_n \ e_{ij} I_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} p_{ij} F_i^T \ e_{ij} F_i^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{ij} &= \begin{bmatrix} p_{ij} G_i^T \ e_{ij} G_i^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \Delta_{\mathbb{M},ij} = diag \left(\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} \ I_n, \, \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} \ \Delta_{ij} I_n \right); \end{split}$$

sendo p_{ij} as probabilidades de transição nominais, h_{ij} , Δ_{ij} e e_{ij} são escalares tais que $\delta p_{ij} = h_{ij} \, \Delta_{ij} \, e_{ij}$, como definidos na Seção 3.2.1.

Caso B: SLSM incerto

Considere o SLSM incerto (7.1, caso B). As matrizes de parâmetros incertos do SAS são modeladas de modo análogo às matrizes do Caso A (7.5-7.6), sendo que os elementos das matrizes $H_{\mathcal{M}}$, $\Delta_{\mathcal{M}_k}$, E_E , $E_{\mathcal{A}}$ e $E_{\mathcal{B}}$ são dados de acordo com o tipo de matriz de transição considerada:

\Box **B.1:** MT conhecida

Considere as matrizes $H_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{sn,s^2(n+t)}$, $\Delta_{\mathcal{M}_k} \in \mathbb{R}^{s^2(n+t),s^2(n+\ell)}$, $E_E \in \mathbb{R}^{s^2(n+\ell),n}$, $E_E \in \mathbb{R}^{s^2(n+\ell),n}$ com os seguintes elementos:

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= \left[I_n \ H_i\right], \ \mathbf{e}_{ij} = \left[p_{ij}I_n \ O_{n,\ell}\right], \ \mathbf{a}_{ij} = \left[p_{ij}F_i^T \ p_{ij}E_{F_i}^T\right], \\ \mathbf{b}_{ij} &= \left[p_{ij}G_i^T \ p_{ij}E_{G_i}^T\right] \ \mathbf{e} \ \Delta_{\mathbb{M},ij} = diag\left(\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}I_n, \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}\Delta_i\right); \end{split}$$

\Box **B.2:** MT incerta

Considere as matrizes $H_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{sn,2s^2(n+t)}$, $\Delta_{\mathcal{M}_k} \in \mathbb{R}^{2s^2(n+t),2s^2(n+\ell)}$, $E_E \in \mathbb{R}^{2s^2(n+\ell),n}$, $E_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{2s^2(n+\ell),n}$ e $E_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{2s^2(n+\ell),m}$ com os seguintes elementos:

$$\begin{split} \mathbf{h}_{ij} &= \left[I_n \ H_i \ h_{ij} I_n \ h_{ij} H_i \right], \quad \mathbf{e}_{ij} = \left[p_{ij} I_n \ O_{n,\ell} \ e_{ij} I_n \ O_{n,\ell} \right], \\ \mathbf{a}_{ij} &= \left[p_{ij} F_i^T \ p_{ij} E_{F_i}^T \ e_{ij} F_i^T \ e_{ij} E_{F_i} \right], \quad \mathbf{b}_{ij} = \left[p_{ij} G_i^T \ p_{ij} E_{G_i}^T \ e_{ij} G_i^T \ e_{ij} E_{G_i}^T \right], \\ \mathbf{e} \quad \Delta_{\mathcal{M},ij} &= diag \Big(\mathbbm{1}_{\{\theta(k)=i\}} I_n, \mathbbm{1}_{\{\theta(k)=i\}} \Delta_i, \mathbbm{1}_{\{\theta(k)=i\}} \Delta_{ij} I_n, \mathbbm{1}_{\{\theta(k)=i\}} \Delta_{ij} \Delta_i \Big) \,; \end{split}$$

sendo p_{ij} as probabilidades de transição nominais, h_{ij} , Δ_{ij} e e_{ij} são escalares tais que $\delta p_{ij} = h_{ij} \Delta_{ij} e_{ij}$, como definido na Seção 3.2.1.

7.1.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte custo de N estágios associado ao SAS (7.4)

$$J_N(x,u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k^T \left(\delta_{\Omega_k}^T \Omega \delta_{\Omega_k} \right) x_k + u_k^T \left(\delta_{\mathcal{R}_k}^T \mathcal{R} \delta_{\mathcal{R}_k} \right) u_k \right] + x_N^T \mathcal{P}_N x_N,$$

sendo $\mathcal{P}_N \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathcal{Q} = diag(Q_{\theta(k)})$, $\mathcal{R} = diag(R_{\theta(k)})$ matrizes simétricas e definidas positivas, $Q_{\theta(k)} = \mathcal{C}_{\theta(k)}^T \mathcal{C}_{\theta(k)} \succ 0$, $R_{\theta(k)} = \mathcal{D}_{\theta(k)}^T \mathcal{D}_{\theta(k)} \succ 0$, o parâmetro incerto $\delta_{\mathcal{R}_k}$ definido em (5.12) e $\delta_{\mathcal{Q}_k}$ é modelado da seguinte forma:

$$\delta_{\mathcal{Q}_{h}} = H_{\mathcal{Q}} \Delta_{\mathcal{Q}_{h}} E_{\mathcal{Q}} \tag{7.7}$$

com $H_{\Omega} = I_{sn}$, $E_{\Omega} = I_n$ e $\Delta_{\Omega_k} = \left[\mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_n \, \mathbb{1}_{\{\theta(k)=2\}} I_n \, \dots \, \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_n \right]^T$.

Considere o problema de minimização do par (x_{k+1},u_k) e da maximização da influência das incertezas relacionadas às matrizes de ponderação Q e \mathcal{R} e às matrizes de parâmetros do SAS. Assim, tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta} J_N(x_{k+1}, u_k)$$
sujeito a $\delta E_k x_{k+1} = \delta A_k x_k + \delta B_k u_k$,
$$(7.8)$$

sendo $\delta = \{\delta_{\Omega_k}, \delta_{\mathcal{R}_k}, \delta E_k, \delta \mathcal{A}_k, \delta \mathcal{B}_k\}$, e com uma lei de controle linear de realimentação de estado na forma

$$u_k = \mathfrak{K}_k x_k, \ \forall k \ge 0.$$

Note que, pela formulação considerada, a sequência (x_{k+1},u_k) pertencente ao SAS, também pertence ao SLSM (7.1) e, consequentemente, tem-se $K_k = \mathcal{K}_k$.

O problema de otimização (7.8) pode ser resolvido recursivamente por meio do método de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995) através dos seguintes problemas de otimização

$$\min_{x_{1},u_{0}} \max_{\delta} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,0}(x_{1},u_{0}) + \min_{x_{2},u_{1}} \max_{\delta} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,1}(x_{2},u_{1}) + \ldots + \min_{x_{t},u_{t-1}} \max_{\delta} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,t-1}(x_{t},u_{t-1}) + \ldots + \min_{x_{N},u_{N-1}} \max_{\delta} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,N-1}(x_{N},u_{N-1}) \right\} \right\} \right\}, (7.9)$$

sendo que o funcional $\mathfrak{J}_{\mu,k}(x_{k+1},u_k)$ é obtido pela aplicação do método de funções penalidade em cada passo $k\geq 0$. Assim, tem-se

$$\mathfrak{J}_{\mu,k}(x_{k+1}, u_k) = x_{k+1}^T \, \mathcal{P}_{k+1} \, x_{k+1} + x_k^T \left(\delta_{\mathcal{Q}_k}^T \, \mathcal{Q} \, \delta_{\mathcal{Q}_k} \right) x_k + u_k^T \left(\delta_{\mathcal{R}_k}^T \, \mathcal{R} \, \delta_{\mathcal{R}_k} \right) u_k + \left(\delta E_k \, x_{k+1} - \delta \mathcal{A}_k \, x_k - \delta \mathcal{B}_k \, u_k \right)^T \mu \quad \left(\bullet \right). \quad (7.10)$$

A solução para o problema (7.9) será obtida iterativamente pela otimização do funcional (7.10) em cada passo k, ou seja, através do seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta} \, \mathfrak{J}_{\mu, k}(x_{k+1}, u_k), \, \forall k \ge 0.$$

Portanto, o problema de regulação robusta para o SAS consiste em obter a solução ótima $(x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*)$, sob a máxima influência das incertezas, que resolve o problema de otimização irrestrito definido da seguinte forma.

Problema de Controle Robusto 7.1

Para cada $\mu > 0$ fixado, determinar a sequência ótima $\left\{ (x_{\mu,k+1}^*,u_{\mu,k}^*) \right\}_{k=0}^{N-1}$ segundo o problema de otimização

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta} \, \mathfrak{J}_{\mu, k}(x_{k+1}, u_k),$$

para cada $k=N-1,\ldots,0$, sendo $\mathfrak{J}_{\mu,k}$ o funcional quadrático regularizado penalizado incerto definido por

$$\mathfrak{J}_{\mu,k}\left(x_{k+1},u_{k}\right) = x_{k+1}^{T}\,\mathfrak{P}_{k+1}\,x_{k+1} + \\ \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} O & \delta_{\mathfrak{R}_{k}} \\ O & O \\ \delta E_{k} & -\delta \mathfrak{B}_{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -\delta_{\Omega_{k}} \\ \delta \mathcal{A}_{k} \end{bmatrix} x_{k} \end{pmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \mathfrak{R} & O & O \\ O & \mathfrak{Q} & O \\ O & O & \mu I_{n} \end{bmatrix} \quad \left(\bullet \right)$$

sendo $\mathcal{P}_{k+1} \succ 0$, $\mathcal{R} \succ 0$ $e \ \mathcal{Q} \succ 0$.

7.2 Reguladores Robustos Recursivos para SASs

Nesta seção, propõe-se um regulador robusto recursivo para o SAS, o qual também poderá fornecer uma solução para o SLSM. Este regulador será obtido por meio da combinação do método de funções penalidade com o problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Subseção 2.2.5), sendo que as propriedades de estabilidade e convergência assemelham-se às encontradas para a solução clássica de sistemas lineares sem incertezas (veja Lancaster e Rodman (1995)).

O Problema 7.1 representa um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.2.4) quando são feitas as seguintes identificações:

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ O & O \\ \delta E_k - \delta \mathcal{B}_k \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \end{bmatrix} x_k, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -\delta_{\Omega_k} \\ \delta \mathcal{A} \end{bmatrix} x_k,$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} H_{\mathcal{R}} & O & O \\ O & H_{\Omega} & O \\ O & O & H_{\mathcal{M}} \end{bmatrix}, \quad E_A \leftarrow \begin{bmatrix} O & E_{\mathcal{R}} \\ O & O \\ E_E - E_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, \quad E_b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -E_{\Omega} \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix},$$

$$Q \leftarrow \mathcal{P}_{k+1}, \quad W_{\mu} \leftarrow diag(\mathcal{R}, \Omega, \mu I_n) \quad e \quad \Delta \leftarrow diag(\Delta_{\mathcal{R}_k}, \Delta_{\Omega_k}, \Delta_{\Omega_k}).$$

$$(7.11)$$

O resultado a seguir apresenta uma estrutura na forma de blocos matriciais que determina o estado $x_{\lambda,k+1}$, a entrada de controle $u_{\lambda,k}$ e o funcional $\mathfrak{J}_{\lambda,k}$ para cada valor atribuído ao parâmetro $\lambda > 0$.

Lema 7.1 Considere o Problema 7.1 com $\hat{\lambda} > 0$ fixado. A solução ótima $(x^*_{\lambda,k+1}, u^*_{\lambda,k})$ para cada $k \geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\lambda,k+1}^* \\ u_{\lambda,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\lambda,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathfrak{K}_{\lambda,k} \\ \mathfrak{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} x_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\lambda,k}$, $\mathcal{K}_{\lambda,k}$ e $\mathcal{P}_{\lambda,k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \\ \mathcal{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_n & O & O \\ O & I_m & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\lambda,k+1}^{-1} & O & I_n & O \\ O & \Sigma & \widehat{E} & -\widehat{\mathcal{B}} \\ I_n & \widehat{E}^T & O & O \\ O & -\widehat{\mathcal{B}}^T & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix}, \tag{7.12}$$

com os blocos matriciais

$$\widehat{E} \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ E_E \end{bmatrix}, \ \widehat{A} \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -E_{\Omega} \\ E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \ \widehat{B} \leftarrow \begin{bmatrix} E_{\mathcal{R}} \\ O \\ -E_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, \ \Sigma \leftarrow \begin{bmatrix} \widehat{\lambda}^{-1}I & O & O \\ O & \widehat{\lambda}^{-1}I_m & O \\ O & O & \widehat{\lambda}^{-1}I_n \end{bmatrix} \ e \ \widehat{\lambda} > 0.$$

Demonstração. Aplicando o item (i) do Lema 2.8 com as identificações estabelecidas em (7.11) segue que

sendo $\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{R}^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathcal{R}} H_{\mathcal{R}}^T$, $\Phi(\mathcal{Q}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{Q}^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathcal{Q}} H_{\mathcal{Q}}^T$, $\Phi(\mu, \widehat{\lambda}) = \mu^{-1} I_n - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathcal{M}} H_{\mathcal{M}}^T$ e as matrizes \widehat{E} , $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{B}}$, e Σ dadas de acordo com o enunciado do Lema 7.1. O parâmetro $\widehat{\lambda}$ é dado por

$$\hat{\lambda} = (1 + \alpha) || diag(H_{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} H_{\mathcal{R}}, H_{\mathcal{Q}}^T \mathcal{Q} H_{\mathcal{Q}}, \mu H_{\mathcal{M}}^T H_{\mathcal{M}}) ||.$$

Como a função $\Gamma(\lambda)$, definida no Teorema 2.2, independe das matrizes $\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda})$, $\Phi(\mathcal{Q}, \widehat{\lambda})$ e $\Phi(\mu, \widehat{\lambda})$ (veja a demonstração no Apêndice B.2), então $\widehat{\lambda}$ independe de \mathcal{R} , \mathcal{Q} e μ . Desta forma, pode-se considerar

$$\hat{\lambda} > 0$$
.

Consequentemente, a solução não depende das matrizes \mathcal{R} e \mathcal{Q} , e do parâmetro de penalidade μ , conforme pode ser verificado no Teorema 7.1. Assim, é possível eliminar as linhas e as colunas referentes a $\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda})$, $\Phi(\mathcal{Q}, \widehat{\lambda})$ e $\Phi(\mu, \widehat{\lambda})$ em (7.13), resultando em (7.12).

No Algoritmo 7.1 é apresentado o procedimento para o obtenção da solução ótima do SAS, sendo que a sequência $(x_{\lambda,k+1}^*,u_{\lambda,k}^*)$ também pode ser uma solução para o SLSM no cenário de não observação da cadeia de Markov. Observe que o parâmetro $\hat{\lambda}$ está associado ao nível de robustez do regulador apresentado no Lema 7.1.

Algoritmo 7.1 Reguladores Robustos Recursivos para SLSMs via SAS

SLSM:

- Defina o tipo de sistema: SLSM nominal ou incerto.
- Escolha a MT: conhecida ou incerta.
- Obtenha os parâmetros do SAS: Q, \Re , H_{\Re} , E_E , E_{\Re} , E_{\Re} , $H_{\mathbb{Q}}$, $E_{\mathbb{Q}}$, H_{\Re} e E_{\Re} .

 $SAS \begin{cases} Condições \ iniciais: \ Defina \ N, \ x_0, \ \widehat{\lambda} \in \mathcal{P}_N \succ 0. \\ Passo \ 1: \ Determine \ para \ todo \ k = N-1, \dots, 0: \\ \mathcal{L}_{\lambda,k}, \ \mathcal{K}_{\lambda,k} \in \mathcal{P}_{\lambda,k} \ via \ (7.12). \\ Passo \ 2: \ Obtenha \ para \ cada \ k = 0, \dots, N-1: \\ \begin{bmatrix} x_{\lambda,k+1}^* \\ u_{\lambda,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \end{bmatrix} x_k. \end{cases}$ (7.14)

SLSM: Calcule para cada k = 0, ..., N-1:

$$\hat{x}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k)} \, \hat{x}_k + \mathcal{G}_{\theta(k)} \, \hat{u}_k^*$$
$$\operatorname{com} \, \hat{u}_k^* = \mathcal{K}_{\lambda,k} \, \hat{x}_k.$$

O Lema 7.2 apresenta uma forma de determinar as matrizes $\mathcal{L}_{\lambda,k}$, $\mathcal{K}_{\lambda,k}$ e $\mathcal{P}_{\lambda,k}$ quando $\mathcal{P}_N \succeq 0$. Observe que, neste caso, não é necessário calcular a inversa da matriz $\mathcal{P}_{\lambda,k+1}$.

Lema 7.2 Considere o Problema 7.1 com $\hat{\lambda} > 0$ fixado. A solução ótima $(x_{\lambda,k+1}^*, u_{\lambda,k}^*)$ para cada $k \geq 0$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\lambda,k+1}^* \\ u_{\lambda,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\lambda,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathfrak{K}_{\lambda,k} \\ \mathfrak{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} x_k,$$

sendo que as matrizes $\mathcal{L}_{\lambda,k}$, $\mathcal{K}_{\lambda,k}$ e $\mathcal{P}_{\lambda,k}$ são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \\ \mathcal{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & \widehat{\mathcal{A}} \\ I_n & O & O \\ O & I_m & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} O & I_n & O & I_n & O \\ I_n & -\mathcal{P}_{\lambda,k+1} & O & O & O \\ O & O & \Sigma & \widehat{E} & -\widehat{\mathcal{B}} \\ I_n & O & \widehat{E}^T & O & O \\ O & O & -\widehat{\mathcal{B}}^T & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ \widehat{\mathcal{A}} \\ O \\ O \end{bmatrix},$$

com os blocos matriciais \hat{E} , \hat{A} , \hat{B} e Σ dados de acordo com o Lema 7.1.

Demonstração. A prova é análoga à do Lema 4.2.

7.2.1 Estabilidade e Convergência

A estabilidade e a convergência da solução proposta no Lema 7.1 são estabelecidas a partir da equivalência com a solução clássica do problema de controle ótimo para sistemas lineares de tempo discreto sem a presença de incertezas. Este procedimento de demonstração é dual ao utilizado por Sayed (2001) e Zhou (2010) na análise do desempenho de estimativas robustas. O resultado a seguir apresenta a solução algébrica robusta recursiva obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (7.12).

Teorema 7.1 Considere o Problema 7.1. A solução algébrica robusta recursiva para cada $\hat{\lambda}$ é dada por

$$\mathcal{L}_{\lambda,k} = \left(E_E^T E_E\right)^{-1} E_E^T \left\{ \left[I - \widehat{\lambda}^{-1} \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \widehat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}} E_{\mathcal{B}}^T\right)^{-1}\right] E_{\mathcal{A}} - E_{\mathcal{B}} \left(\widehat{\lambda} I_m + E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}}\right)^{-1} \times \right. \\ \left. E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{A}}\right\},$$

$$\mathcal{K}_{\lambda,k} = -\left(\widehat{\lambda} I_m + E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}}\right)^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{P}_{\lambda,k} = E_{\mathcal{A}}^T \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}} \left(\widehat{\lambda} I_m + E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}}\right)^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \widehat{\Psi}_{k+1}\right] E_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{Q}},$$

$$sendo \ \widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\widehat{\lambda}^{-1} I + E_E \mathcal{P}_{\lambda,k+1}^{-1} E_E^T\right)^{-1} e \ \overline{\mathcal{Q}} = \widehat{\lambda} I_n.$$

Demonstração. A solução algébrica robusta do Problema 7.1 é obtida a partir de manipulações das expressões apresentadas em (7.13). De fato, considere o sistema de equações

e o conjunto de equações equivalente,

$$\mathcal{P}_{\lambda,k+1}^{-1} X_1 + X_8 = O, \tag{7.15-a}$$

$$\Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda}) X_2 = O, \tag{7.15-b}$$

$$\Phi(\Omega, \hat{\lambda})X_3 = O, \tag{7.15-c}$$

$$\Phi(\mu, \hat{\lambda}) X_4 = O, \tag{7.15-d}$$

$$\widehat{\lambda}^{-1}X_5 + E_{\mathcal{R}}X_9 = O, (7.15-e)$$

$$\hat{\lambda}^{-1}X_6 = -E_{\mathcal{Q}},\tag{7.15-f}$$

$$\hat{\lambda}^{-1}X_7 + E_E X_8 - E_B X_9 = E_A,$$
 (7.15-g)

$$X_1 + E_E^T X_7 = O, (7.15-h)$$

$$E_{\mathcal{R}}^T X_5 - E_{\mathcal{R}}^T X_7 = O. (7.15-i)$$

Combinando (7.15-a), (7.15-g) e (7.15-h), tem-se

$$\hat{\Psi}_{k+1}^{-1} X_7 - E_{\mathcal{B}} X_9 = E_{\mathcal{A}} \tag{7.16}$$

sendo $\widehat{\Psi}_{k+1} = \left(\widehat{\lambda}^{-1}I_{sn} + E_E \mathcal{P}_{\lambda,k+1}^{-1} E_E^T\right)^{-1}$. Pela definição de $\delta_{\mathcal{R}_k}$, em (5.12), tem-se que $E_{\mathcal{R}} = I_m$. Então, (7.15-e) e (7.15-i) podem ser reescritas como

$$\hat{\lambda}^{-1} X_5 + X_9 = O, X_5 - E_{\mathcal{B}}^T X_7 = O.$$
 (7.17)

Segue de (7.17) que

$$X_9 = -\hat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T X_7. \tag{7.18}$$

De (7.16) e (7.18), obtém-se

$$X_7 = \left(\hat{\Psi}_{k+1}^{-1} + E_{\mathcal{B}}\hat{\lambda}^{-1}E_{\mathcal{B}}^T\right)^{-1}E_{\mathcal{A}}.$$
 (7.19)

Substituindo (7.19) em (7.18), resulta em

$$X_9 = -\hat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \left(\hat{\Psi}_{k+1}^{-1} + E_{\mathcal{B}} \hat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{A}}. \tag{7.20}$$

Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes (Lema A.9) em (7.20), obtém-se

$$X_9 = -\left(\hat{\lambda}I_m + E_{\mathcal{B}}^T \hat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}}\right)^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \hat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{A}}.$$
 (7.21)

Como a matriz $E_E E_E^T$ é não-singular, segue de (7.15-g) que

$$E_E X_8 = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} X_9 - \hat{\lambda}^{-1} X_7$$

$$X_8 = (E_E E_E^T)^{-1} E_E^T (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} X_9 - \hat{\lambda}^{-1} X_7),$$

que junto com (7.19) e (7.21), resulta em

$$X_{8} = (E_{E}^{T} E_{E})^{-1} E_{E}^{T} \left\{ \left[I - \hat{\lambda}^{-1} \left(\hat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \hat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}} E_{\mathcal{B}}^{T} \right)^{-1} \right] E_{\mathcal{A}} - E_{\mathcal{B}} \left(\hat{\lambda} I_{m} + E_{\mathcal{B}}^{T} \hat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}} \right)^{-1} \times E_{\mathcal{B}}^{T} \hat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{A}} \right\}.$$

De (7.12) tem-se que as matrizes $\mathcal{L}_{\lambda,k},~\mathcal{K}_{\lambda,k}$ e $\mathcal{P}_{\lambda,k}$ são dadas por

Logo,
$$\mathcal{L}_{\lambda,k} = X_8 \text{ e } \mathcal{K}_{\lambda,k} = X_9$$
. De (7.19) e (7.15-f), tem-se
$$\mathcal{P}_{\lambda,k} = E_{\mathcal{A}}^T \left(\widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + E_{\mathcal{B}} \widehat{\lambda}^{-1} E_{\mathcal{B}}^T \right)^{-1} E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{Q}}^T \widehat{\lambda} E_{\mathcal{Q}}. \tag{7.22}$$

Finalmente, aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.8) em (7.22) resulta em

$$\mathcal{P}_{\lambda,k} = E_{\mathcal{A}}^{T} \left[\widehat{\Psi}_{k+1} - \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}} \left(\widehat{\lambda} I_{m} + E_{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} E_{\mathcal{B}} \right)^{-1} E_{\mathcal{B}}^{T} \widehat{\Psi}_{k+1} \right] E_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{Q}}$$

sendo $\overline{\mathbb{Q}} = \widehat{\lambda} E_{\mathbb{Q}}^T E_{\mathbb{Q}} \stackrel{(7.7)}{=} \widehat{\lambda} I_n.$

O Teorema 7.1 mostra que a solução proposta no Lema 7.1, através de um arranjo matricial, pode ser escrita na forma de equações algébricas de Riccati clássicas. De fato, considere a equação algébrica de Riccati para sistemas lineares (veja detalhes em Lancaster e Rodman (1995))

$$P_k = A_k^T \left[P_{k+1} - P_{k+1} B_k \left(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k \right)^{-1} B_k^T P_{k+1} \right] A_k + Q_k$$

e as seguintes identificações com a versão robusta apresentada no Teorema 7.1

$$P_k \leftarrow \mathcal{P}_{\lambda,k}, \ P_{k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{k+1}, \ A_k \leftarrow E_{\mathcal{A}}, \ B_k \leftarrow E_{\mathcal{B}}, \ R_k \leftarrow \widehat{\lambda} I_m \ e \ Q_k \leftarrow \widehat{\lambda} I_n.$$

Devido a esta equivalência, as condições de estabilidade e convergência para o regulador robusto via SAS são baseadas nas do problema de regulação clássico (veja Apêndice C). Observe que apesar do SAS possuir apenas matrizes de parâmetros afetadas por algum tipo de incerteza, a solução obtida pelo regulador robusto se assemelha às equações algébricas de Riccati para sistemas lineares sem incertezas.

Similar aos reguladores via SLPM e SA, o fato do regulador robusto obter a solução ótima para o SAS não implica que a mesma também será ótima para o SLSM como ilustrado no Exemplo 7.4. Contudo, quando a solução do SAS também é uma solução para o SLSM, tem-se que \mathcal{P}_k é uma equação de algébrica de Riccati para o SLSM no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

7.3 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a aplicação do regulador robusto recursivo para SLSM via SAS. Para tal, o Algoritmo 7.1 foi implementado no software $MATLAB^{\circledR}$ na versão 9.2.0.538062 (R2017a) em um computador com a seguinte configuração: processador $Intel^{\circledR}$ $Core^{TM}$ i5 com frequência de 2.6GHz, memória RAM de 8GB e sistema operacional $Windows^{\circledR}$ 8.1.

Observe que a aplicação do Algoritmo 7.1 está condicionada à verificação de $||\Delta|| \le 1$ como definido em na Subseção 2.2.4. Quando esta condição não é satisfeita, considera-se um escalar $\kappa \ge 1$, de modo que $||\Delta|| \le \kappa$. Para assegurar a equivalência com o problema analisado, tem-se as seguintes identificações de acordo com o modelo em (7.11):

$$\begin{split} \Delta_{\mathbb{M}_k} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathbb{M}_k}}{\kappa}, & \Delta_{\mathbb{R}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathbb{R}}}{\kappa}, & \Delta_{\mathbb{Q}} \leftarrow \frac{\Delta_{\mathbb{Q}}}{\kappa}, \\ E_E \leftarrow \kappa E_E, & E_{\mathcal{A}} \leftarrow \kappa E_{\mathcal{A}}, & E_{\mathbb{B}} \leftarrow \kappa E_{\mathbb{B}}, & E_{\mathbb{R}} \leftarrow \kappa E_{\mathbb{R}} \text{ e } E_{\mathbb{Q}} \leftarrow \kappa E_{\mathbb{Q}}. \end{split}$$

Simulações de Monte Carlo foram realizadas para ilustrar o comportamento dos sistemas considerados, sendo que a variável $\theta(k)$ foi gerada de acordo com o vetor de distribuição inicial e com a matriz de transição². Para cada realização, foram atribuídos valores para as incertezas Δ , sorteados aleatoriamente com distribuição uniforme, a fim de obter as matrizes $\delta \mathbb{P}$, δF e δG e, consequentemente, os estados x_k e \hat{x}_k .

Exemplo 7.1 Considere o SLSM (7.1), sendo que as matrizes de parâmetros são dadas no Exemplo 5.2, juntamente com o modelo considerado para a matriz de transição desconhecida. Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 7.1:

$$\kappa=2, \quad \widehat{\lambda}=1,5, \quad N=30 \quad e \quad \mathfrak{P}_N=I_2.$$

Na Figura 7.1 é apresentada a norma da trajetória de x_k e a média de $\|\hat{x}_k\|$ para cada SLSM considerado, baseada em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que tanto o estado do SAS quanto a média do SLSM tendem a zero conforme o horizonte k aumenta. Portanto, a solução obtida pelo regulador robusto para o SAS pode ser uma solução adequada para o SLSM com matrizes de transição desconhecidas no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

² O algoritmo utilizado é apresentado no Apêndice D.

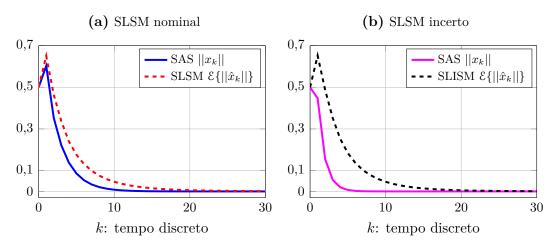


Figura 7.1 – Resultados obtidos para SAS do Exemplo 7.1

Os ganhos obtidos pelo regulador robusto recursivo para o SLSM via SAS são apresentados na Tabela 7.1 de acordo com cada caso considerado, sendo que os mesmos satisfazem simultaneamente o SAS e o SLSM.

Tabela 7.1 – Ganhos obtidos pelo SAS para o Exemplo 7.1

	SLSM nominal	SLSM incerto
Ganhos	$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} 0.01373 & -0.03592 \end{bmatrix}$	$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} -0.01941 & -0.02799 \end{bmatrix}$

Exemplo 7.2 Considere o SLSM (7.1), sendo que as matrizes de parâmetros são dadas no Exemplo 5.1, juntamente com as matrizes de transição adotadas. Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 7.1:

$$\kappa = 1, \ \hat{\lambda} = 1.5, \ N = 150 \ e \ \mathcal{P}_N = I_2.$$

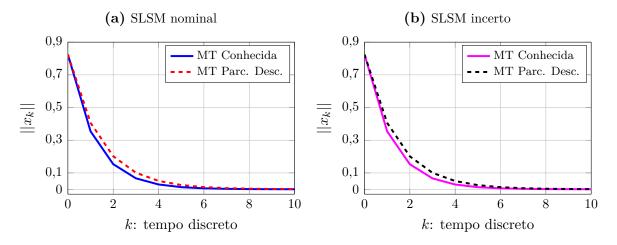
Os ganhos obtidos pelo regulador robusto recursivo para o SLSM via SAS são apresentados na Tabela 7.2 de acordo com cada caso considerado, sendo que os mesmos satisfazem simultaneamente o SAS e o SLSM.

Tabela 7.2 – Ganhos obtidos pelo SAS para o Exemplo 7.2

SLSM/MT	Ganhos		
	MT Conhecida	MT Parc. Desc.	
SLSM nominal	$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} -0.10909 & -0.04819 \\ -0.01696 & 0.03549 \end{bmatrix}$	$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} -0.16738 & -0.06756 \\ -0.02097 & 0.04845 \end{bmatrix}$	
SLSM incerto	$\mathcal{K}_{\lambda}^* = \begin{bmatrix} -0.19250 & -0.06815 \\ -0.11367 & 0.00158 \end{bmatrix}$	$\mathcal{K}_{\lambda}^* = \begin{bmatrix} -0.29910 & -0.09893 \\ -0.13877 & 0.00167 \end{bmatrix}$	

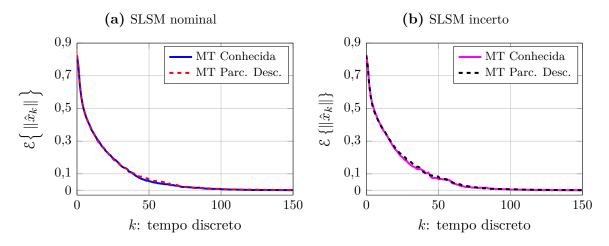
Na Figura 7.2 é apresentado o comportamento da norma do estado x_k para o SAS, obtido através de (7.14). Note que todas as curvas convergem para zero conforme k aumenta.

Figura 7.2 – Resposta do estado x_k para o SAS em malha fechada do Exemplo 7.2



Na Figura 7.3 são ilustrados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que todas as média convergem para zero conforme o horizonte k aumenta. Portanto, a solução obtida pelo regulador robusto para o SAS pode ser uma solução adequada para o SLSM com matrizes de transição conhecidas ou parcialmente desconhecidas no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov.

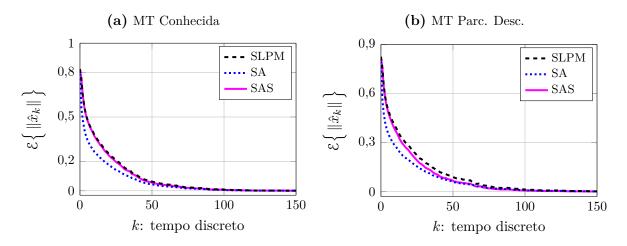
Figura 7.3 – Valores de $\mathcal{E}\left\{\|\hat{x}_k\|\right\}$ para o SLSM do Exemplo 7.2



Exemplo 7.3 (Comparação entre as abordagens determinísticas) O objetivo deste exemplo é comparar os resultados obtidos pelos três modelos determinísticos aplicados ao SLSM no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov. Para tal, consideramse os resultados obtidos nos Exemplos 5.1, 6.2 e 7.2.

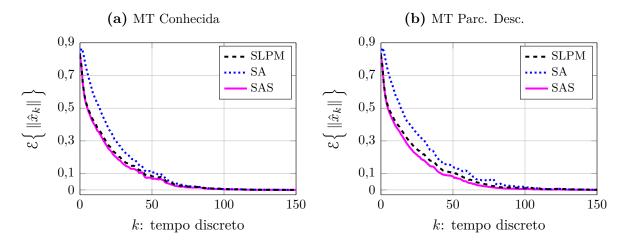
Na Figura 7.4 são apresentados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM nominal de acordo com cada matriz de transição considerada, sendo que os mesmos foram obtidos via SLPM, SA e SAS. Pode ser observado que para a matriz de transição conhecida, as médias do SLPM e do SAS são equivalentes, enquanto que, para o caso incerto, as médias são distintas, sendo que as obtidas pelo SA tem um comportamento mais suave em relação aos demais sistemas.

Figura 7.4 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM nominal do Exemplo 7.3



Na Figura 7.5 são ilustrados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM incerto de acordo com cada matriz de transição considerada, sendo que os mesmos foram obtidos via SLPM, SA e SAS. Observe que as médias obtidas pelo SAS têm um comportamento suave acentuado em relação aos demais sistemas, sendo próxima das obtidas pelo SLPM.

Figura 7.5 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM incerto do Exemplo 7.3



Associado ao SLSM, considere o índice de desempenho $J_N(\theta,x,u)$ definido por

$$J_N(\theta, x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q_{\theta(k)} x_k + u_k^T R_{\theta(k)} u_k \right) + x_N^T P_{\theta(N), N} x_N,$$

em que $Q_{\theta(k)} = \mathcal{C}_{\theta(k)}^T \mathcal{C}_{\theta(k)}$, $R_{\theta(k)} = \mathcal{D}_{\theta(k)}^T \mathcal{D}_{\theta(k)}$ e $P_{\theta(N),N} = I_2$. Na Tabela 7.3 são ilustradas as médias do custo ótimo $J_N^*(\theta,\hat{x},u)$ obtidas por meio de cada abordagem determinística. Observe que, o SAS destaca-se por obter as menores médias em todos os casos, enquanto que, o SA fornece os maiores valores.

Tabela 7.3 – Médias do custo do SLSM obtidas pelas abordagens determinísticas

${ m Modelo/Abordagem}$		Custo $\mathcal{E}\left\{J_{150}^*(\theta,\hat{x},u)\right\}$		
		SLPM	$\mathbf{S}\mathbf{A}$	SAS
MT Conhecida	SLSM nominal SLSM incerto	,	,	,
MT Parc. Desc.	SLSM nominal SLSM incerto	0,30991 1,04462	,	$0,22174 \\ 0,64711$

Na Tabela 7.4 são apresentadas as médias dos tempos de CPU despendidos por cada abordagem determinística para determinar o ganho de realimentação. Note que para os SLSMs com matriz de transição conhecida, o SLPM e o SAS apresentaram o melhor desempenho, sendo que o SAS destaca-se no caso em que SLSM está sujeito à incertezas paramétricas. Em relação à matriz de transição parcialmente desconhecida, o SAS apresentou o melhor desempenho para o SLSM nominal e incerto, com o menor tempo de CPU despendido em relação ás demais abordagens.

Tabela 7.4 – Médias do tempo de CPU de cada abordagem determinística

Modelo/Abordagem		Tempo de CPU (segundos)			
		SLPM	SA	SAS	
MT Conhecida	SLSM nominal SLSM incerto	0,06430 0,10183	,	0,04867 $0,05022$	
MT Parc. Desc.	SLSM nominal SLSM incerto	,	0,30972 0,45454	0,05730 $0,08936$	

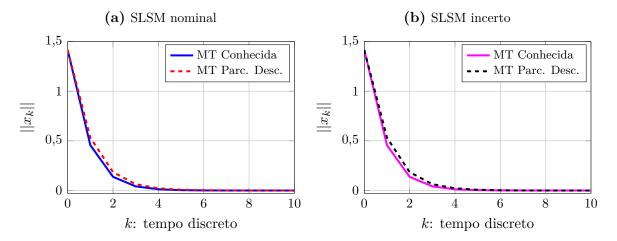
A partir dos resultados obtidos neste exemplo é possível concluir que as abordagens determinísticas podem fornecer soluções viáveis para o SLSM no cenário sem observação dos estados da cadeia de Markov, visto que as médias das trajetórias convergiram ao longo do horizonte (Figuras 7.4 e 7.5). Além disso, a abordagem via SAS apresentou o melhor desempenho, uma vez que as médias das trajetórias têm um comportamento suave, com custos ótimos e tempos de CPU menores que as demais abordagens determinísticas.

Exemplo 7.4 Considere o SLSM (7.1), sendo que as matrizes de parâmetros são dadas no Exemplo 5.3, juntamente com as matrizes de transição adotadas. Assumimos as seguintes condições iniciais para o Algoritmo 7.1:

$$\kappa = 1, \ \hat{\lambda} = 1.5, \ N = 100, \ e \ \mathcal{P}_N = I_2.$$

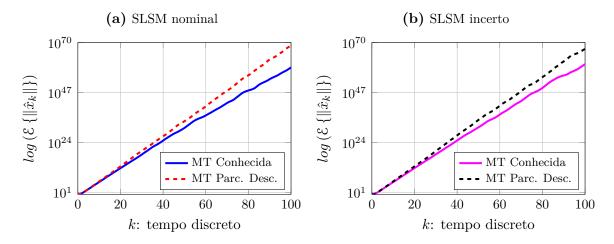
Os ganhos obtidos pelas simulações estão disponíveis no Apêndice E. Na Figura 7.6 é apresentado o comportamento da norma do estado x_k para o SAS, obtido através de (7.14). Note que todas as sequências de pontos convergem para zero conforme k aumenta.

Figura 7.6 – Resposta do estado x_k para o SAS em malha fechada do Exemplo 7.4



Na Figura 7.7 são apresentados os valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para os SLSMs, baseados em 10.000 realizações da cadeia de Markov. Observe que as médias tendem ao infinito conforme o horizonte k aumenta. Portanto, o fato do regulador robusto obter uma solução adequada para o SAS não implica que a mesma também será para o SLSM.

Figura 7.7 – Valores de $\mathcal{E}\{\|\hat{x}_k\|\}$ para o SLSM do Exemplo 7.4



Capítulo 8

Conclusões

Esta tese considerou o desenvolvimento e a simulação de reguladores robustos recursivos para SLSMs de tempo discreto com matrizes de transição incertas e sob a influência de incertezas paramétricas.

Inicialmente, propomos um modelo para representar as matrizes de transição incertas, considerando os diversos tipos de incertezas geralmente adotados na literatura, tais como, matrizes pertencentes a um domínio politópico, com elementos limitados ou desconhecidos. Nesse modelo, as probabilidades de transição são dadas em termos de limitantes em norma, sendo que os parâmetros incertos (Δ) garantem que as propriedades estocásticas serão satisfeitas. Este modelo geral permite o desenvolvimento de um único controlador robusto capaz de lidar com o problema de regulação de SLSMs com incertezas de qualquer tipo.

Para o projeto de controladores foram considerados dois cenários de acordo com as informações disponíveis sobre a cadeia de Markov: completamente observado e totalmente não observado. No cenário completamente observado, a solução foi obtida pela técnica de mínimos quadrados regularizados robustos, sendo que a minimização é realizada em termos das variáveis de controle e do estado futuro.

A solução do problema de controle robusto de SLSMs com presença de incertezas é baseada na extensão do caso nominal, sendo determinada pela minimização de um funcional penalizado sob a máxima influência das incertezas (da matriz de transição e/ou de parâmetros) e apresentada em uma estrutura de blocos matriciais. Esta solução se diferencia das demais, geralmente obtidas por LMIs, devido à sua característica recursiva, vinculada às equações algébricas de Riccati. Desta forma, o regulador robusto recursivo projetado fornece uma versão robusta, que generaliza as equações algébricas de Riccati clássicas.

No cenário de não observação da cadeia de Markov, propomos uma abordagem que consiste em reescrever o SLSM como um sistema linear determinístico equivalente, sendo que o regulador fornecerá uma lei de controle para o sistema determinístico, a qual poderá ser uma solução para o SLSM. O regulador robusto recursivo é projetado de modo

semelhante ao do cenário completamente observado, por meio da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos, porém não é indexado pela cadeia de Markov.

O sistema determinístico foi obtido a partir de três modelos. O primeiro foi baseado no primeiro momento da variável de estado do SLSM, resultando no sistema linear de primeiro momento. Neste caso, a possível solução para o sistema Markoviano é dada por uma sequência de entradas de controle, visto que não é possível determinar os ganhos de realimentação.

O segundo modelo é inspirado no sistema aumentado proposto por Costa (1994) para a estimação de estados de SLSMs no cenário sem observação da cadeia de Markov, onde a estimativa é realizada a partir de uma variável auxiliar ao invés de estimar a variável de estado do sistema. O regulador robusto recursivo desenvolvido para o sistema aumentado é dado em termos de equações algébricas de Riccati apresentadas em blocos matriciais, as quais representam uma versão robusta e geral das equações algébricas de Riccati clássicas para os sistemas lineares sem saltos. A possível solução para o SLSM também é dada na forma de uma sequência de entradas de controle, não sendo possível determinar uma matriz de ganhos de realimentação.

O terceiro, e último, modelo é formulado a partir da medida de Dirac, a qual é considerada como um parâmetro de incerteza. Neste caso, o regulador robusto recursivo determina uma possível solução para o SLSM dada na forma de ganhos de realimentação e baseada em equações algébricas de Riccati. Portanto, esta abordagem se difere das demais por determinar os ganhos e, principalmente, por viabilizar a determinação de equações algébricas de Riccati tanto para os SLSMs nominais quanto para os sujeitos a incertezas por meio de um algoritmo de fácil implementação. Além disso, neste caso a solução depende somente do parâmetro de minimização λ , devido ao fato do sistema possuir apenas parâmetros incertos.

As abordagens propostas para o problema de regulação de SLSMs com presença de incertezas representam uma alternativa viável, cujas soluções são recursivas e assemelhamse às respectivas equações algébricas de Riccati nominais clássicas. Esta semelhança permite que as propriedades de estabilidade e convergência dos reguladores propostos sejam equivalentes às das equações clássicas.

Portanto, a principal contribuição desta tese é o projeto de controladores recursivos para SLSMs sob a influência de incertezas (nas matrizes de parâmetros e/ou nas probabilidades de transição) cuja solução é obtida por um conjunto de equações algébricas de Riccati que corresponde à solução clássica conceituada na literatura.

Para complementar este estudo, acreditamos que seja interessante a realização de experimentos numéricos, nos quais as abordagens propostas poderão ser comparadas com as existentes na literatura, possibilitando a análise do desempenho de acordo com as propriedades dos SLSMs (estabilidade, observabilidade e/ou controlabilidade) e com o tipo de matriz de transição (nominal ou incerta), de modo a determinar classes de

aplicação em situações práticas, como no controle de robôs móveis em formação sujeitos
a falhas. Com a finalidade de estender os resultados obtidos, sugerimos
□ a extensão da abordagem para SLSMs com MT incertas no cenário em que a cadeia de Markov é parcialmente observada;
$\hfill \square$ a extensão da abordagem para SLSMs singulares e/ou com atrasos;
$\hfill \Box$ e o estudo de estimativas de estados para SLSMs com MT incertas.

sistemas em que um método apresente um desempenho melhor que outro. Além da sua

- ABADIR, K. M.; MAGNUS, J. R. *Matrix Algebra*. New York: Cambridge University Press, 2005. (Econometric Exercises, v. 1).
- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. Penalty and barrier functions. In:
 ______. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 3rd. ed. Hoboken, New Jersey:
 Wiley-Interscience, 2006. cap. 9.
- BERTSEKAS, D. P. Dynamic Programming and Optimal Control. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1995.
- BLAIR, W. P.; SWORDER, D. D. Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 21, n. 5, p. 833–841, 1975.
- BORTOLIN, D. C. Métodos Numéricos para o Controle Linear Quadrático com Saltos e Observação Parcial de Estado. Dissertação (Mestrado) Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, S. P., 2012.
- BORTOLIN, D. C.; TERRA, M. H. Recursive robust regulator for Markovian jump linear systems subject to uncertain transition probabilities. In: *European Control Conference (ECC)*. Linz, Austria: IEEE, 2015. p. 3215–3219.
- BOUKAS, E. K. H_{∞} control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities. *Optimal Control Applications and Methods*, John Wiley & Sons, v. 30, n. 5, p. 477–494, 2009.
- BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K. Robust H_{∞} control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 12, p. 1918–1924, Dec. 2001.
- BRAGA, M. F.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stability and stabilization of discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix. In: *American Control Conference (ACC)*. Washington, DC, USA: IEEE, 2013. p. 6784–6789.
- CAMPOS, J. C. T. Filtragem Robusta para Sistemas Singulares Discretos no Tempo. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S. P., 2004.

CAMPOS, M. A.; DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; KREINOVICH, V. Computing 2-Step Predictions for Interval-Valued Finite Stationary Markov Chains. Departmental Technical Reports, University of Texas at El Paso, 2004. Technical Report: UTEP-CS-03-20a. Paper 382.

- CERRI, J. P. Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estado. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S. P., 2009.
- CERRI, J. P. Controle e Filtragem para Sistemas Lineares Discretos Incertos sujeitos a Saltos Markovianos. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S. P., 2013.
- CERRI, J. P.; TERRA, M. H. Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. *Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 62, n. 11, p. 6004 6011, 2017.
- CERRI, J. P.; TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y. Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems via penalty game approach. In: 49th Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010. p. 597–602.
- CHITRAGANTI, S.; ABERKANE, S.; AUBRUN, C. Mean square stability of non-homogeneous Markov jump linear systems using interval analysis. In: *European Control Conference (ECC)*. Zurich, Switzerland: IEEE, 2013. p. 3724–3729.
- _____. Stochastic stabilization of a discrete-time inhomogeneous Markov jump linear system with interval transition probability matrix. In: 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol). Barcelona, Spain: IEEE, 2016. p. 838–842.
- CHIZECK, H. J.; WILLSKY, A. S.; CASTANON, D. Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control. *International Journal of Control*, v. 43, n. 1, p. 213–231, 1986.
- ÇINLAR, E. *Introduction to Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1975.
- CLARKE, A. B.; DISNEY, R. L. Probability and Random Processes for Engineers and Scientists. New York: John Wiley & Sons, 1970.
- COOMAN, G.; HERMANS, F.; QUAEGHEBEUR, E. Imprecise Markov chains and their limit behaviour. In: *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2009. v. 23, n. 04.
- COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 8, p. 1685–1689, Aug 1994.
- COSTA, O. L. V.; ASSUMPÇÃO FILHO, E. O.; BOUKAS, E. K.; MARQUES, R. P. Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear systems. *Automatica*, v. 35, n. 4, p. 617–626, 1999.
- COSTA, O. L. V.; DO VAL, J. B. R.; GEROMEL, J. C. A convex programming approach to H_2 control of discrete-time Markovian jump linear systems. *International Journal of Control*, v. 66, n. 4, p. 557–580, 1997.

COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, D. M.; MARQUES, R. P. Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. New York: Springer-Verlag, 2005.

- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. A detector-based approach for the H_2 control of Markov jump linear systems with partial information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 60, n. 5, p. 1219–1234, May 2015.
- COZMAN, F. G. Credal networks. Artificial Intelligence, v. 120, n. 2, p. 199 233, 2000.
- _____. Graphical models for imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 39, n. 2, p. 167 184, 2005.
- do VAL, J. B. R.; BAŞAR, T. Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 23, n. 8, p. 1099–1131, Aug. 1999.
- do VAL, J. B. R.; GEROMEL, J. C.; GONÇALVES, A. P. C. The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state. *Automatica*, v. 38, n. 2, p. 343 349, 2002.
- EL GHAOUI, L.; AIT-RAMI, M. Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via LMIs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 6, n. 9-10, p. 1015–1022, 1996.
- FIORAVANTI, A. R.; GONÇALVES, A. P. C.; GEROMEL, J. C. Optimal H_2 and H_{∞} mode-independent control for generalized Bernoulli jump systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, ASME International, v. 136, n. 1, p. 011004, Sep. 2013.
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; AL-RADHAWI, M. A.; GEROMEL, J. C. H_{∞} state feedback control of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *IFAC Proceedings Volumes*, Milano, Italy, v. 44, n. 1, p. 12620–12625, 2011. 18th IFAC World Congress.
- GUO, Y.; ZHU, F. New results on stability and stabilization of Markovian jump systems with partly known transition probabilities. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2012, 2012.
- HÄGGSTRÖM, O. Computer simulation of Markov chains. In: _____. Finite Markov Chains and Algorithmic Applications. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002. (London Mathematical Society Student Texts), cap. 3.
- HARTFIEL, D. J. On the limiting set of stochastic products $xA_1 \cdots A_k$. Proceedings of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, v. 81, n. 2, p. 201–206, 1981.
- _____. Markov Set-Chains. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1998. (Lecture Notes in Mathematics 1695).
- JONES, M. T. Estimating Markov transition matrices using proportions data: an application to credit risk. *IMF Working Paper*, p. 1–27, 2005. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=888088.

KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. Deterministic least-squares problems. In:

_____. Linear Estimation. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000. cap. 2.

- KARAN, M.; SHI, P.; KAYA, C. Y. Transition probability bounds for the stochastic stability robustness of continuous- and discrete-time Markovian jump linear systems. *Automatica*, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 42, n. 12, p. 2159–2168, dec. 2006.
- KHANBAGHI, M.; MALHAME, R. P.; PERRIER, M. Optimal white water and broke recirculation policies in paper mills via jump linear quadratic control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 10, n. 4, p. 578–588, jul 2002.
- KIM, S. H.; PARK, P. Networked-based robust H_{∞} control design using multiple levels of network traffic. *Automatica*, v. 45, n. 3, p. 764 770, 2009.
- KOZINE, I. O.; UTKIN, V. L. Interval-valued finite Markov chains. *Reliable Computing*, v. 8, n. 2, p. 97–113, 2002.
- LANCASTER, P.; RODMAN, L. *Algebraic Riccati Equations*. Oxford: Clarendon Press, 1995. (Oxford Science Publications).
- LIBERZON, D. Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2003. (Systems & Control: Foundations & Applications).
- LU, J.; LI, D.; XI, Y. Constrained model predictive control synthesis for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems. *IET Control Theory Applications*, v. 7, n. 5, p. 707–719, march 2013.
- LUAN, X.; ZHAO, S.; LIU, F. H_{∞} control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 58, n. 6, p. 1566–1572, june 2013.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. Penalty and barrier methods. In: _____. Linear and Nonlinear Programming. 3rd. ed. New York: Springer, 2008. (International series in operations research & management science 116), cap. 13.
- LUN, Y. Z.; D'INNOCENZO, A.; BENEDETTO, M. D. D. On stability of time-inhomogeneous Markov jump linear systems. In: 55th Conference on Decision and Control (CDC). Las Vegas, USA: IEEE, 2016. p. 5527–5532.
- LUO, X.; JIU, B.; CHEN, S.; GE, Q. ML estimation of transition probabilities for an unknown maneuvering emitter tracking. *Signal Processing*, v. 109, p. 248 260, 2015.
- MARCOS, L. B. Controle de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos Aplicado em Veículos Autônomos. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P., 2017.
- MITSCHKA, C. M.; TERRA, M. H.; SIQUEIRA, A. A. G. Markovian theory applied for the development of control strategies in rehabilitation robotics. In: *American Control Conference (ACC)*. Seattle, WA, USA: IEEE, 2017. p. 1797–1802.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Brief paper H_2 control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix: improved linear matrix inequality relaxations and multi-simplex modelling. *IET Control Theory Applications*, v. 7, n. 12, p. 1665–1674, aug. 2013.

NAKAI, M. E.; INOUE, R. S.; TERRA, M. H.; GRASSI, V. Wheeled mobile robot formation using recursive robust regulator with discrete-time Markov linear system. In: XIII Latin American Robotics Symposium and IV Brazilian Robotics Symposium (LARS/SBR). Recife, Brazil: IEEE, 2016. p. 175–180.

- NIKOUKHAH, R.; WILLSKY, A. S.; LEVY, B. C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 37, n. 9, p. 1325–1342, sep. 1992.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. Penalty and augmented Lagrangian methods. In: _____. *Numerical Optimization*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 2006. (Springer series in Operations Research and Financial Engineering), cap. 17.
- OLARIU, E.; CADWELL, K. K.; HANCOCK, E.; TRUEMAN, D.; CHEVROU-SEVERAC, H. Current recommendations on the estimation of transition probabilities in Markov cohort models for use in health care decision-making: a targeted literature review. *ClinicoEconomics and Outcomes Research (CEOR)*, Dove Press, v. 9, p. 537–546, 2017.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; VARGAS, A. N.; do VAL, J. B. R.; PERES, P. L. D. Robust stability, H₂ analysis and stabilisation of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain probability matrix. *International Journal of Control*, v. 82, n. 3, p. 470–481, 2009.
- SAMUELS, C. L. Markov set-chains as models of plant succession. PhD Thesis. University of Tennessee, Knoxville, 2001.
- SAMUELSON, P. A. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *The Review of Economics and Statistics*, JSTOR, v. 21, n. 2, p. 75–78, 1939.
- SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 7, p. 998–1013, jul. 2001.
- SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertanties. In: GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. (Ed.). *Robustness in Identification and Control.* London: Springer-Verlag, 1999. v. 245, p. 159 173.
- SENETA, E. On the limiting set of nonnegative matrix products. Statistics & Probability Letters, v. 2, n. 3, p. 159 163, 1984.
- SILVA, C. A.; BORTOLIN, D. C.; COSTA, E. F. An algorithm for the long run average cost problem for linear systems with indirect observation of Markov jump parameters. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier BV, Milano, ITA, v. 44, n. 1, p. 12668–12673, jan. 2011. 18th IFAC World Congress.
- SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H.; BERGERMAN, M. Markov jump linear systems-based control. In: _____. Robust Control of Robots. London: Springer-Verlag, 2011. cap. 6.

ŠKULJ, D. Finite discrete time Markov chains with interval probabilities. In: LAWRY, J.; MIRANDA, E.; BUGARIN, A.; LI, S.; GIL, M. A.; GRZEGORZEWSKI, P.; HYRNIEWICZ, O. (Ed.). Soft Methods for Integrated Uncertainty Modelling. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. p. 299–306.

- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. Applied Nonlinear Control. New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1991.
- SOUZA, C. E. Mode-independent H_{∞} control of discrete-time Markovian jump linear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier BV, Prague, Czech Republic, v. 38, n. 1, p. 13–18, 2005. 16th IFAC World Congress.
- _____. Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 5, p. 836–841, 2006.
- TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. New methods for mode-independent robust control of Markov jump linear systems. Systems & Control Letters, v. 90, p. 38-44, 2016.
- TUGNAIT, J. Adaptive estimation and identification for discrete systems with Markov jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 27, n. 5, p. 1054–1065, oct. 1982.
- UGRINOVSKII, V.; POTA, H. R. Decentralized control of power systems via robust control of uncertain Markov jump parameter systems. *International Journal of Control*, v. 78, n. 9, p. 662–677, 2005.
- WAN, X.; XU, L.; FANG, H.; LING, G. Robust non-fragile H_{∞} state estimation for discrete-time genetic regulatory networks with Markov jump delays and uncertain transition probabilities. *Neurocomputing*, v. 154, p. 162 173, 2015.
- WEICHSELBERGER, K. The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 24, n. 2, p. 149 170, 2000.
- XIONG, J.; LAM, J.; GAO, H.; HO, D. W. C. On robust stabilization of Markovian jump systems with uncertain switching probabilities. *Automatica*, v. 41, n. 5, p. 897–903, 2005.
- ZHANG, F. The Schur Complement and Its Applications. New York: Springer, 2005. (Numerical Methods and Algorithms, v. 4).
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K. Discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities: H_{∞} filtering problem. In: American Control Conference (ACC). Seattle, WA, USA: IEEE, 2008. p. 2272–2277.
- _____. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica*, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 45, n. 2, p. 463–468, feb. 2009.
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K.; BARON, L.; KARIMI, H. R. Fault detection for discrete-time Markov jump linear systems with partially known transition probabilities. *International Journal of Control*, v. 83, n. 8, p. 1564–1572, 2010.

ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network-induced constraints in networked control systems - a survey. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 9, n. 1, p. 403–416, feb. 2013.

- ZHANG, L.; LAM, J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 7, p. 1695–1701, 2010.
- ZHENG, C.; FAN, X.; HU, M.; YANG, Y.; JIN, Y. Finite-time control for Markov jump systems with partly known transition probabilities and time-varying polytopic uncertainties. In: HU, X.; XIA, Y.; ZHANG, Y.; ZHAO, D. (Ed.). *Advances in Neural Networks ISNN 2015*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 11–18.
- ZHOU, T. On the convergence and stability of a robust state estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 3, p. 708–714, march 2010.

APÊNDICE A

Álgebra Matricial

Neste apêndice são apresentados alguns conceitos e resultados da álgebra matricial que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações podem ser encontradas em Abadir e Magnus (2005), Zhang (2005) e Campos (2004).

A.1 Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas

Definição A.1 Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é dita definida positiva $(A \succ 0)$ se $x^TAx > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$. Se $x^TAx \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então A é dita semidefinida positiva $(A \succeq 0)$. Similarmente, A é definida negativa $(A \prec 0)$ se $x^TAx < 0$ para todo $x \neq 0$ e semidefinida negativa $(A \preceq 0)$ se $x^TAx \leq 0$ para todo x. Caso a matriz simétrica A não se encaixe em nenhuma das definições acima, então ela é dita indefinida.

Corolário A.1 Uma matriz definida positiva é não-singular.

Teorema A.1 A matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é definida positiva se e somente se A^{-1} é definida positiva.

Lema A.1 Seja $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ então A^TA e AA^T são semidefinidas positivas.

Lema A.2 Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz definida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Então, B^TAB é semidefinida positiva.

Lema A.3 (Positividade de B^TAB) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz simétrica e $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz não-singular. Então,

- i. $B^TAB \succ 0$ se e somente se $A \succ 0$.
- ii. $B^TAB \succeq 0$ se e somente se $A \succeq 0$.

Lema A.4 (Positividade de A + B) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz simétrica e semidefinida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Então,

- i. A + B > 0 somente se B > 0.
- *ii.* $A + B \succeq 0$ somente se $B \succeq 0$.

Lema A.5 (NIKOUKHAH et al., 1992) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz simétrica e semidefinida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então, se [AB] tem posto linha pleno, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$$

é invertível.

A.2 Complemento de Schur

Definição A.2 Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{m,n}$, $D \in \mathbb{R}^{m,m}$ $e M \in \mathbb{R}^{(n+m),(n+m)}$ a matriz particionada definida por

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

- i. Se A é não-singular, o complemento de Schur de A em M é definido por $(M/A) = D CA^{-1}B$.
- ii. Se D é não-singular, o complemento de Schur de D em M é definido por $(M/D) = A BD^{-1}C$.

Lema A.6 (Fórmula da Inversão de Banachiewicz) Seja M a matriz particionada dada por (A.1). Suponha que D e M sejam não-singulares. Então, (M/D) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

Lema A.7 Sejam $D \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $D \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m),(n+m)}$ a matriz particionada dada por (A.1). Então,

- i. $M \succ 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succ 0$.
- *ii.* $M \succeq 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succeq 0$.

Lema A.8 (Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m,n}$. Suponha que A, C, (A + BCD) e $(C^{-1} + DA^{-1}B)$ sejam não-singulares. Então,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

Lema A.9 Suponha que as matrizes A, C, $(A+BC^{-1}D)$ e $(C+DA^{-1}B)^{-1}$ são invertíveis. Então, a seguinte relação é válida

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}.$$

Lema A.10 Considere a matriz simétrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & D & O \\ C^T & O & E \end{bmatrix}.$$

Suponha que D e E sejam não-singulares. Então, o complemento de Schur de S= diag(D,E) em M é não singular, M é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/S)^{-1} & -(M/S)^{-1}BD^{-1} & -(M/S)^{-1}CE^{-1} \\ -D^{-1}B^T(M/S)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}B^T(M/S)^{-1}BD^{-1} & D^{-1}B^T(M/S)^{-1}CE^{-1} \\ -E^{-1}C^T(M/S)^{-1} & E^{-1}C^T(M/S)^{-1}BD^{-1} & E^{-1} + E^{-1}C^T(M/S)^{-1}CE^{-1} \end{bmatrix}.$$

A.3 Produto de Kronecker

Definição A.3 Sejam $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p,q}$. O Produto de Kronecker de A por B é a matriz de dimensão $mp \times nq$, definida por

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{ccc} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{array} \right].$$

Propiedades A.1 (ABADIR; MAGNUS, 2005) Considere as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B, C \in \mathbb{R}^{p,q}$. Então,

i. $\alpha \otimes A = \alpha A = A\alpha = A \otimes \alpha$, sendo α é um escalar;

ii.
$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$
;

iii.
$$(B+C)\otimes A=(B\otimes A)+(C\otimes A);$$

iv.
$$A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C).$$

APÊNDICE B

Demonstrações

Neste apêndice são apresentadas algumas demonstrações de resultados complementares obtidos no desenvolvimento dos reguladores robustos recursivos.

B.1 Determinação da Função $\Gamma(\lambda)$ para o Cenário de Observação Completa da Cadeia de Markov

A demonstração apresentada a seguir mostra que a função $\Gamma(\lambda)$, considerada no projeto do Regulador Robusto Recursivo para SLSMs com MT Incerta (Capítulo 4), independe da matriz $\Phi(\mathcal{P}, \widehat{\lambda}) = \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \widehat{\lambda}^{-1} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} H_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T$.

Pelo Teorema 2.2, a função $\Gamma(\lambda)$ é definida por

$$\Gamma(\lambda) = \|x(\lambda)\|_{Q(\lambda)}^{2} + \lambda \|E_{A}x(\lambda) - E_{b}\|^{2} + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^{2}$$

com

$$Q(\lambda) = Q + \lambda E_A^T E_A,$$

$$W(\lambda) = W + WH (\lambda I - H^T WH)^{\dagger} H^T W,$$

$$x(\lambda) = (Q(\lambda) + A^T W(\lambda)A)^{-1} (A^T W(\lambda)b + \lambda E_A^T E_b).$$

A partir das identificações em (4.8-a) e (4.8-b), considerando o SLSM nominal com MTI, obtém-se que

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1} + \lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} & O \\ O & R_{\theta(k)} \end{bmatrix}, \quad W(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi(\mathcal{P},\lambda)^{-1} & O & O \\ O & Q_{\theta(k)} & O \\ O & O & \mu I_n \end{bmatrix}$$

$$e \quad x(\lambda) = \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1} + \lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} + \mu I_n & -\mu G_{\theta(k)} \\ -\mu G_{\theta(k)}^T & R_{\theta(k)} + \mu G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu F_{\theta(k)} \\ -\mu G_{\theta(k)}^T F_{\theta(k)} \end{bmatrix}.$$

Agora, será provado que a matriz

$$T_{\theta(k)} = \begin{bmatrix} \Psi_{\theta(k),k+1} + \lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} + \mu I_n & -\mu G_{\theta(k)} \\ -\mu G_{\theta(k)}^T & R_{\theta(k)} + \mu G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)} \end{bmatrix}$$

é não-singular.

Note que o bloco matricial $D_{\theta(k)} = R_{\theta(k)} + \mu G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)}$ é não-singular. De fato, por hipótese tem-se que $\mu > 0$ e $R_{\theta(k)} \succ 0$. Pelo Lema A.1, obtém-se que $G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)} \succeq 0$. Pela propriedade de positividade (Lema A.4) tem-se que $D_{\theta(k)} \succ 0$ e, portanto não-singular.

O complemento de Schur de $D_{\theta(k)}$ em $T_{\theta(k)}$ é não-singular. Observe que

$$(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)}) = \Psi_{\theta(k),k+1} + \lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} + \mu I_n - \mu G_{\theta(k)} \left(R_{\theta(k)} + \mu G_{\theta(k)}^T G_{\theta(k)} \right)^{-1} \mu G_{\theta(k)}^T$$

$$\stackrel{Lema}{=} {}^{A.8} \Psi_{\theta(k),k+1} + \lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} + \left(\mu^{-1} I_n + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right)^{-1}.$$

O bloco matricial $G_{\theta(k)}R_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^T$ é semidefinido positivo (Lema A.2) e, pela propriedade de positividade (Lema A.4) tem-se $\mu^{-1}I_n + G_{\theta(k)}R_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^T \succ 0$.

Sabemos que $\lambda > 0$, $\Psi_{\theta(k),k+1} \succ 0$ e $E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} = e_{\theta(k)}I_n \succ 0$. Assim, pelo Lema A.4 tem-se $(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)}) \succ 0$. Pela propriedade de complemento de Schur (Lema A.7) tem-se que $T_{\theta(k)} \succ 0$ e, portanto não-singular.

Como a matriz $T_{\theta(k)}$ é não-singular, podemos aplicar a Fórmula da Inversão de Banachiewicz (Lema A.6) e obter a matriz $T_{\theta(k)}^{-1}$. Assim, segue que

$$T_{\theta(k)}^{-1} = \begin{bmatrix} (T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1} & \mu(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1}G_{\theta(k)}D_{\theta(k)}^{-1} \\ \mu D_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^T(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1} & D_{\theta(k)}^{-1} + \mu^2 D_{\theta(k)}^{-1}G_{\theta(k)}^T(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1}G_{\theta(k)}D_{\theta(k)}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{split} x(\lambda) &= \begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = T_{\theta(k)}^{-1} \begin{bmatrix} \mu F_{\theta(k)} \\ -\mu G_{\theta(k)}^T F_{\theta(k)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1} \left(\mu^{-1} I_n + G_{\theta(k)} R_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right)^{-1} F_{\theta(k)} \\ \mu D_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \left[(T_{\theta(k)}/D_{\theta(k)})^{-1} \left(\mu I - \mu^2 G_{\theta(k)} D_{\theta(k)}^{-1} G_{\theta(k)}^T \right) - I \right] F_{\theta(k)} \end{bmatrix}. \end{split}$$

Finalmente, tem-se que

$$\Gamma(\lambda) = x_1(\lambda)^T \left(\Psi_{\theta(k),k+1} + 2\lambda E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}}^T E_{\mathbf{p}_{\theta(k)}} \right) x_1(\lambda) + x_2(\lambda)^T R_{\theta(k)} x_2(\lambda) + \left(x_1(\lambda) - G_{\theta(k)} x_2(\lambda) - F_{\theta(k)} \right)^T \mu \left(\bullet \right) + Q_{\theta(k)}.$$

Portanto, a função $\Gamma(\lambda)$, definida a partir do SLSM nominal com MTI, não depende da matriz $\Phi(\mathcal{P},\lambda)$.

A demonstração para a função $\Gamma(\lambda)$ definida a partir do SLSM incerto com MTI é análoga.

B.2 Determinação da Função $\Gamma(\lambda)$ para o Sistema Aumentado Singular

A demonstração apresentada a seguir mostra que a função $\Gamma(\lambda)$, considerada no projeto do Regulador Robusto Recursivo para SLSMs via Sistema Aumentado Singular (Capítulo 7), independe das matrizes

$$\Phi(\mathcal{R},\lambda) = \mathcal{R}^{-1} - \lambda^{-1}H_{\mathcal{R}}H_{\mathcal{R}}^T, \quad \Phi(\mathcal{Q},\lambda) = \mathcal{Q}^{-1} - \lambda^{-1}H_{\mathcal{Q}}H_{\mathcal{Q}}^T \quad \text{e} \quad \Phi(\mu,\lambda) = \mu^{-1}I_n - \lambda^{-1}H_{\mathcal{M}}H_{\mathcal{M}}^T.$$

Pelo Teorema 2.2, a função $\Gamma(\lambda)$ é definida por

$$\Gamma(\lambda) = \|x(\lambda)\|_{Q(\lambda)}^{2} + \lambda \|E_{A}x(\lambda) - E_{b}\|^{2} + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^{2}$$

com

$$Q(\lambda) = Q + \lambda E_A^T E_A,$$

$$W(\lambda) = W + WH (\lambda I - H^T WH)^{\dagger} H^T W,$$

$$x(\lambda) = (Q(\lambda) + A^T W(\lambda)A)^{-1} (A^T W(\lambda)b + \lambda E_A^T E_b).$$

A partir das identificações em (7.11) e de (5.12) obtém-se que

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} + \lambda E_E^T E_E & -\lambda E_E^T E_{\mathcal{B}} \\ -\lambda E_{\mathcal{B}}^T E_E & \lambda (E_{\mathcal{B}}^T E_{\mathcal{B}} + I_m) \end{bmatrix}, \quad W(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi(\mathcal{R}, \widehat{\lambda})^{-1} & O & O \\ O & \Phi(\mathcal{Q}, \widehat{\lambda})^{-1} & O \\ O & O & \Phi(\mu, \widehat{\lambda})^{-1} \end{bmatrix}$$
$$e \quad x(\lambda) = Q(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda E_E^T E_{\mathcal{A}} \\ -\lambda E_{\mathcal{B}}^T E_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}.$$

A matriz $Q(\lambda)$ é não-singular. De fato, o bloco matricial $D = \lambda(E_{\mathbb{B}}^T E_{\mathbb{B}} + I_m)$ é não-singular, visto que $\lambda > 0$ e $E_{\mathbb{B}}^T E_{\mathbb{B}} \succeq 0$. Pela propriedade da positividade (Lema A.4), tem-se que $D \succ 0$ e, portanto não-singular.

O complemento de Schur de D em $Q(\lambda)$ é não-singular. Observe que

$$(Q(\lambda)/D) = \mathcal{P}_{k+1} + \lambda E_E^T E_E - \lambda E_E^T E_{\mathcal{B}} \left(\lambda E_{\mathcal{B}}^T E_{\mathcal{B}} + \lambda I_m\right)^{-1} \lambda E_{\mathcal{B}}^T E_E.$$

O bloco matricial $D = \lambda(E_{\mathbb{B}}^T E_{\mathbb{B}} + I_m)$ é definido positivo. Logo, $\lambda^2 E_E^T E_{\mathbb{B}} D^{-1} E_{\mathbb{B}}^T E_E$ é semidefinida positiva (Lema A.2). Sabemos que $\mathcal{P}_{k+1} \succ 0$ e $\lambda E_E^T E_E \succ 0$. Assim, pela propriedade da positividade (Lema A.4), tem-se que $(Q(\lambda)/D) \succ 0$. Pela propriedade de complemento de Schur (Lema A.7) tem-se que $Q(\lambda) \succ 0$ e, portanto não-singular.

Como a matriz $Q(\lambda)$ é não-singular, podemos aplicar a Fórmula da Inversão de Banachiewicz (Lema A.6) e obter a matriz $Q(\lambda)^{-1}$. Assim, segue que

$$Q(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} (Q(\lambda)/D)^{-1} & \lambda(Q(\lambda)/D)^{-1} E_E^T E_{\mathcal{B}} D^{-1} \\ \lambda D^{-1} E_{\mathcal{B}}^T E_E (Q(\lambda)/D)^{-1} & D^{-1} + \lambda^2 D^{-1} E_{\mathcal{B}}^T E_E (Q(\lambda)/D)^{-1} E_E^T E_{\mathcal{B}} D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$x(\lambda) = \begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = Q(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda E_E^T E_A \\ -\lambda E_B^T E_A \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda (Q(\lambda)/D)^{-1} E_E^T (I - \lambda E_B D^{-1} E_B^T) E_A \\ \lambda D^{-1} E_B^T [\lambda E_E (Q(\lambda)/D)^{-1} E_E^T (I - E_B D^{-1} E_B^T) - I] E_A \end{bmatrix}.$$

Das identificações em (7.11), tem-se que A e b são nulas. Logo,

$$\Gamma(\lambda) = \|x(\lambda)\|_{Q(\lambda)}^2 + \lambda \|E_A x(\lambda) - E_b\|^2.$$

Assim, segue que

$$\Gamma(\lambda) = x_1(\lambda)^T \left(\mathcal{P}_{k+1} + \lambda E_E^T E_E \right) x_1(\lambda) - x_1(\lambda)^T \left(\lambda E_E^T E_{\mathcal{B}} \right) x_2(\lambda) -$$

$$x_2(\lambda)^T \left(\lambda E_{\mathcal{B}}^T E_E \right) x_1(\lambda) + x_2(\lambda)^T \left(\lambda E_{\mathcal{B}}^T E_{\mathcal{B}} + 2\lambda I_m \right) x_2(\lambda) +$$

$$\left(E_E x_1(\lambda) - E_{\mathcal{B}} x_2(\lambda) - E_{\mathcal{A}} \right)^T \lambda \left(\bullet \right) + \lambda E_{\mathcal{Q}}^T E_{\mathcal{Q}}.$$

Portanto, a função $\Gamma(\lambda)$, definida a partir das identificações do sistema aumentado singular, não depende das matrizes $\Phi(\mathcal{R},\lambda)$, $\Phi(\mathcal{Q},\lambda)$ e $\Phi(\mu,\lambda)$. Observe ainda que esta função também independe do parâmetro de penalidade μ .

B.3 Análise de \widehat{E}_{k+1}

A demonstração apresentada a seguir justifica a condição $\widehat{E}_{k+1} \succ 0$ considerada no projeto do Regulador Robusto Recursivo para SLSMs via Sistema Aumentado (Capítulo 6).

De
$$(6.9)$$
 e (6.10) tem-se que

$$\mathbb{X}_{k+1} = diag(\Psi_{i,k+1}), \quad E_{\mathbf{P}} = diag(E_{\mathbf{p}_1}, \dots, E_{\mathbf{p}_s}) \quad e \quad E_{\mathbf{p}_i} = \sqrt{e_i} I_n, \ \forall i \in \mathcal{S}.$$

Logo,

$$\begin{split} \widehat{E}_{k+1} &= I_{sn} - E_{\mathbf{P}}^T \left(\widehat{\lambda}^{-1} I_{sn} + E_{\mathbf{P}} \ \mathbb{X}_{k+1}^{-1} E_{\mathbf{P}}^T \right)^{-1} E_{\mathbf{P}} \mathbb{X}_{k+1}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O \dots I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{e_1} I_n \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots \sqrt{e_s} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\lambda}^{-1} I_n + e_1 \Psi_1^{-1} \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots \widehat{\lambda}^{-1} I_n + e_s \Psi_s^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \begin{bmatrix} \sqrt{e_1} \Psi_1^{-1} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \sqrt{e_s} \Psi_s^{-1} \end{bmatrix} \end{split}$$

$$\widehat{\lambda} \stackrel{\sim}{=} \begin{bmatrix} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O \dots I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{e_1} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots \sqrt{e_s} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \Psi_1^{-1} \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots e_s \Psi_s^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{e_1} \Psi_1^{-1} \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots \sqrt{e_s} \Psi_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{e_1} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \sqrt{e_s} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^{-1} \sqrt{e_1} I_n \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & e_s^{-1} \sqrt{e_s} I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \dots O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O \end{bmatrix}.$$

Portanto, se $\hat{\lambda} \to \infty$ então $\hat{E}_{k+1} \to O$.

APÊNDICE C

Equação Algébrica de Riccati

Neste apêndice são apresentados alguns conceitos e resultados sobre a estabilidade e a convergência da solução clássica obtida para o problema do regulador linear quadrático de sistemas lineares nominais de tempo discreto no espaço de estados.

Considere o sistema linear

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k (C.1)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, com uma lei de controle na forma $u_k = K_k x_k$, sendo $K \in \mathbb{R}^{m,n}$ o ganho de realimentação.

Definição C.1 O par (A,B) é controlável se, e somente se

$$posto \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Teorema C.1 (LANCASTER; RODMAN, 1995) O sistema (C.1) é controlável se e somente se o par (A,B) é controlável.

Proposição C.1 (LANCASTER; RODMAN, 1995) Seja $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matriz simétrica semidefinida positiva que Q possa ser escrita como C^TC . Então, o par (C,A) é observável se e somente se o par (A^T,C^T) é controlável.

Teorema C.2 (LANCASTER; RODMAN, 1995) O sistema (C.1) é observável se e somente se o par (C,A) é observável.

Definição C.2 Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ é estável se todos os seus autovalores pertencem ao disco unitário aberto.

Definição C.3 O par (A,B) é estabilizável se existir uma matriz de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m,n}$ tal que L = A + BK é estável.

Teorema C.3 (LANCASTER; RODMAN, 1995) Seja (A,B) um par controlável. Então, o par (A,B) é estabilizável.

Definição C.4 Uma solução P da equação algébrica de Riccati

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

é estabilizante (quase estabilizante) se todos os autovalores da matriz

$$L = A - G(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

pertencem ao disco unitário aberto (fechado).

Teorema C.4 (BERTSEKAS, 1995) Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ uma matrize simétrica semidefinida positiva e $R \in \mathbb{R}^{m,m}$ uma matriz simétrica definida positiva. Considere a equação algébrica de Riccati

$$P_{k+1} = A^{T} \left[P_k - P_k B (R + B^{T} P_k B)^{-1} B^{T} P_k \right] A + Q,$$

para k = 0, 1, ..., onde a condição inicial P_0 é uma matriz semidefinida positiva arbitrária. Assuma que o par (A,B) é controlável, Q pode ser escrita como C^TC e o par (A,C) é observável. Então,

i. existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que para toda matriz simétrica semidefinida positiva inicial P_0 , tem-se

$$\lim_{k \to \infty} P_k = P.$$

Além disso, P é a única solução da equação matricial algébrica

$$P = A^{T} [P - PB(R + B^{T}PB)^{-1}B^{T}P] A + Q,$$

dentro da classe de matrizes simétricas semidefinidas positivas;

ii. o sistema em malha fechada correspondente é estável, isso é, os autovalores da matriz

$$L = A + BK$$
,

em que

$$K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A,$$

estão estritamente dentro do círculo unitário.

APÊNDICE D

Simulação da Cadeia de Markov

Neste apêndice é apresentado o algoritmo que simula uma realização da cadeia Markov, baseado em Häggström (2002).

O Algoritmo D.1 seleciona um número pertencente ao conjunto de estados $S = \{1, 2, ..., s\}$ de acordo com as probabilidades $q_1, q_2, ..., q_s$ atribuídas a cada estado.

Algoritmo D.1 Gerador de Variável Aleatória Discreta

- 1. Seja $q = [q_1 \dots q_s]$ um vetor de probabilidades de dimensão s.
- 2. Gere um valor u com distribuição uniforme no intervalo [0;1].
- 3. Inicie o processo com i = 0.
- 4. Para cada $\ell = 1, \ldots, s$, determine i tal que

$$i=i+\ell\ \varphi(u)$$
 sendo
$$\varphi(u)=\left\{\begin{array}{l} 1,\ \text{se}\ \sum_{j=1}^\ell q_j-q_\ell\leq u\ \text{e}\ u<\sum_{j=1}^\ell q_j,\\ 0,\ \text{caso contrário}. \end{array}\right.$$

Considere uma cadeia de Markov Θ com espaço de estados $S = \{1, 2, ..., s\}$, vetor de distribuição inicial π_0 e matriz de transição $\mathbb{P} = [p_{ij}]$. O Algoritmo D.2 simula o processo estocástico $\Theta = \{\theta(0), \theta(1), ..., \theta(N-1)\}$, sendo que a transição dos estados ocorre por meio do Algoritmo D.1, o qual indica o estado futuro a partir das probabilidades da linha da matriz de transição referentes ao estado corrente i.

Algoritmo D.2 Simulação da Cadeia de Markov

- 1. Considere π_0 , $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ e N o tamanho da amostra a ser gerada.
- **2.** Para cada $k = 0, 1, \dots, N 1$,
 - Faça $q=\pi_0$ se k=0, ou $q=p_i$ caso contrário.
 - Determine i via Algoritmo D.1.
 - Estabeleça $\theta(k) = i$.

APÊNDICE E

Ganhos obtidos pelas Simulações

Neste apêndice são apresentados os ganhos obtidos pelas simulações do Regulador Robusto Recursivo via Sistema Linear de Primeiro Momento (Capítulo 5), Sistema Aumentado (Capítulo 6) e Sistema Aumentado Singular (Capítulo 7).

Exemplo 5.1

□ SLSM nominal com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.34341 & 0.01387 & -0.49325 & 0.02870 & -0.12980 & 0.02742 \\ -0.40525 & 0.10315 & -0.77159 & 0.10168 & -0.20398 & 0.19233 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM nominal com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -1,15969 & -0,09342 & -0,92514 & -0,08402 & -0,19634 & -0,31395 \\ -1,06672 & 0,50159 & -0,47009 & 0,63560 & 0,17720 & 1,90052 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM incerto com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -1,57180 & -0,28346 & -1,39453 & -0,15048 & -0,31959 & -0,48609 \\ -1,27213 & -0,13708 & -1,03313 & -0,01492 & -0,19142 & -0,06344 \end{bmatrix}.$$

☐ SLSM incerto com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.62900 & -0.10318 & -0.50156 & -0.05989 & -0.10996 & -0.19495 \\ -0.49824 & 0.08052 & -0.27830 & 0.15083 & 0.01829 & 0.46232 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.2

□ SLSM nominal com MT desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0.30900 & 0.43688 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

☐ SLSM incerto com MT desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.22055 & 0.24575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.3

□ SLSM nominal com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 1{,}78412 & -1{,}67329 & 3{,}50607 & -2{,}97394 & -7{,}79311 & 8{,}88254 \end{bmatrix}.$$

☐ SLSM nominal com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.41680 & -0.46605 & 0.15941 & -0.13673 & -1.54001 & 1.51187 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM incerto com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 1,83621 & -1,67180 & 3,37772 & -2,81198 & -6,80368 & 7,77845 \end{bmatrix}.$$

 $\hfill \square$ SLSM incerto com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0.30734 & -0.33407 & 0.12965 & -0.10959 & -1.01837 & 1.0031 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.2

□ SLSM nominal com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} -4,73752 & -6,31497 & -0,00000 & -0,00000 & -0,07852 & -0,21679 \\ 1,89500 & 2,52598 & 0,00000 & 0,00000 & 0,03141 & 0,08671 \\ 0,14968 & -0,17962 & -6,44999 & -2,39000 & -0,22189 & -0,61263 \\ -0,21977 & 0,26373 & 1,60000 & 4,77999 & 0,32579 & 0,89947 \\ -0,01868 & 0,02242 & 0,00000 & 0,00000 & -0,28646 & 2,70041 \\ -0,03737 & 0,04485 & 0,00000 & 0,00000 & -0,57293 & 5,40082 \end{bmatrix}$$

□ SLSM nominal com MT parcialmente desconhecida

$$\mathfrak{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} -4,85013 & -6,17983 & -0,00000 & -0,00000 & -0,07369 & -0,20345 \\ 1,94005 & 2,47193 & 0,00000 & 0,00000 & 0,02947 & 0,08138 \\ 0,08005 & -0,09606 & -6,44999 & -2,39000 & -0,20709 & -0,57176 \\ -0,27903 & 0,33483 & 1,60000 & 4,77999 & 0,26558 & 0,73325 \\ -0,05085 & 0,06102 & -0,00000 & 0,00000 & -0,31210 & 2,62961 \\ -0,10170 & 0,12204 & -0,00000 & 0,00000 & -0,62421 & 5,25922 \end{bmatrix}$$

□ SLSM incerto com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} -4,98321 & -6,02014 & 0,00330 & -0,02745 & -0,02655 & -0,07820 \\ 1,24803 & 1,59498 & -0,00090 & 0,00751 & 0,00726 & 0,02140 \\ -0,00663 & 0,00796 & -6,57547 & -1,34659 & -0,05752 & -0,15003 \\ -0,00139 & 0,00167 & 2,06644 & 0,90106 & 0,03732 & 0,10320 \\ -0,01041 & 0,01249 & -0,00160 & 0,01337 & 0,16297 & 1,94419 \\ -0,02082 & 0,02498 & -0,00321 & 0,02675 & 0,32595 & 3,88839 \end{bmatrix}$$

□ SLSM incerto com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} -5,00603 & -5,99275 & 0,00243 & -0,02023 & -0,02618 & -0,07111 \\ 1,25428 & 1,58749 & -0,00066 & 0,00553 & 0,00716 & 0,01946 \\ -0,01858 & 0,02229 & -6,57635 & -1,33924 & -0,05743 & -0,14108 \\ 0,00641 & -0,00770 & 2,06709 & 0,89566 & 0,03666 & 0,09528 \\ -0,00987 & 0,01184 & -0,00141 & 0,01180 & 0,16084 & 1,93774 \\ -0,01974 & 0,02368 & -0,00283 & 0,02360 & 0,32168 & 3,87549 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.3

□ SLSM nominal com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 2,49999 & -3,19999 & 0,00000 & 0,00000 & -0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 4,29999 & -4,49999 & -0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -5,29999 & 5,19999 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM nominal com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 2,49999 & -3,19999 & 0,00000 & 0,00000 & -0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 4,29999 & -4,49999 & 0,00000 & -0,00000 \\ 0,00000 & -0,00000 & -0,00000 & -0,00000 & -5,29999 & 5,19999 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM incerto com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 2,49999 & -3,18848 & 0,00000 & 0,00696 & -0,00000 & 0,00623 \\ 0,00000 & 0,00696 & 4,29999 & -4,49160 & -0,00000 & 0,00588 \\ 0,00000 & 0,00623 & 0,00000 & 0,00588 & -5,29999 & 5,21125 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM incerto com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\mu}^{*} = \begin{bmatrix} 2,49999 & -3,18965 & 0,00000 & 0,00454 & -0,00000 & 0,00044 \\ 0,00000 & 0,00458 & 4,29999 & -4,49794 & 0,00000 & -0,00001 \\ 0,00000 & 0,00028 & -0,00000 & -0,00008 & -5,29999 & 5,20193 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.4

☐ SLSM nominal com MT conhecida

$$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} 0.09009 & -0.11602 \end{bmatrix}.$$

□ SLSM nominal com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}_{\lambda}^{*} = \begin{bmatrix} 0.88093 & -0.83645 \end{bmatrix}.$$

 $\hfill \square$ SLSM incerto com MT conhecida

$$\mathcal{K}^*_{\lambda} = \begin{bmatrix} 0.09010 & -0.11579 \end{bmatrix}.$$

 $\hfill \square$ SLSM incerto com MT parcialmente desconhecida

$$\mathcal{K}^*_{\lambda} = \begin{bmatrix} 0.88114 & -0.83627 \end{bmatrix}.$$