数学科生の為の(超圧縮版)解析力学

@Lbfuvab

1 運動方程式から Euler-Lagrange 方程式へ

この節では, Newton の運動方程式から Euler-Lagrange 方程式を導出する事を行う．物理的な意義はともかく, Newton の運動方程式という $\mathbb{R}^3$ 上だけの方程式よりも一般の多様体上における (=座標表示に依らない) 偏微分方程式である Euler-Lagrange 方程式の方が数学科生にとって嬉しいのは間違いない.

定義 1
N を正の整数とする．各 $i = 1, \ldots, N$ に対して $m^i > 0$ を正の実数とする．また, 同様に各 i に対して $c^i = (c^{i,1}, c^{i,2}, c^{i,3}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を C^∞ 関数とし, $\mathbf{c} = (c^i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3N}$ と略記する.

この時, 与えられた C^∞ 関数 $F^i : T\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $(i = 1, \ldots, N)$ に対する常微分方程式系

$$m^i \frac{d^2 c^i}{dt^2} = F^i(\mathbf{c}, \dot{\mathbf{c}}, t)$$

を Newton の運動方程式という.

Remark
力 F^i を所与のものとしていいのか, 実際のところ著者には分からない．しかしながら, そういった議論に立ち入る知識も経験もないのでバッサリと割愛する.

さて, いささか天下りが過ぎるが Lagrangian の定義を行おう.

定義 2
M を多様体とし, $L : TM \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする.

- $c : \mathbb{R} \to M$ に対し, L に対する Euler-Lagrange 方程式を

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(c, \dot{c}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(c, \dot{c})\right) = 0$$

  と定める．ただし, (x^i) は M のある局所座標とし, $(\dot{x}^i)$ は (x^i) によって定まる TM のファイバー方向の座標とする．すなわち, ベクトル場 $v = v^i\,(\partial/\partial x^i)$ に対しては $\dot{x}^i(v) = v^i$ である.
- 実数 $t_1 < t_2$ と M の点 $p_1, p_2 \in M$ に対して道の空間 $\Omega(\{t_i\}, \{p_i\})$ を

$$\Omega(\{t_i\}, \{p_i\}) := \{c : [t_1, t_2] \to M \mid \text{c は } C^\infty \text{ 級かつ } c(t_i) = p_i\}$$

  と定める．また, この集合に $c \in \Omega(\{t_i\}, \{p_i\})$ における接空間が

$$T_c\Omega(\{t_i\}, \{p_i\}) := \left\{ v \in C^\infty([t_1, t_2], c^*TM) \,\middle|\, v(t_1) = v(t_2) = 0 \right\}$$

  となるように Fréchet 多様体としての構造を定めておく.
- L に対する Lagrangian $I_L : \Omega(\{t_i\}, \{p_i\}) \to \mathbb{R}$ を

$$I_L(c) := \int_{t_1}^{t_2} L(c, \dot{c}) dt$$

  このとき, I_L に対して L を Lagrangian 密度と呼ぶ.

以下の命題は, Lagrangian と Euler-Lagrange 方程式の関係を示している.

命題 3

M,L などを定義 2 の通りとする.

このとき, $c \in \Omega(\{t_i\},\{p_i\})$ が Euler-Lagrange 方程式を満たす事と c において I_L の微分が消える事は同値である. 特に, Euler-Lagrange 方程式は局所座標の取り方に依らない.

証明. M のある座標近傍 (x^i) に台を持つベクトル場 $v = v^i\partial_{x^i} \in T_c\Omega(\{t_i\},\{p_i\})$ に対して $\nabla_v I_L$ を計算してみよう. $c_s : [t_1,t_2]\times[-\varepsilon,\varepsilon] \to M$ を $c_0 = c$ かつ $\partial_s(c_s)|_{s=0} = v$ なる曲線の滑らかな族とする. すると

$$\begin{aligned}
\nabla_v(I_L) &= \partial_s\left(\int_{t_1}^{t_2} L(c_s,\dot{c}_s)dt\right)\Big|_{s=0} \\
&= \left(\int_{t_1}^{t_2} \partial_s L(c_s,\dot{c}_s)dt\right)\Big|_{s=0} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(v^i\partial_{x^i}L(c,\dot{c}) + \dot{v}^i\partial_{\dot{x}^i}L(c,\dot{c})\right)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(v^i\partial_{x^i}L(c,\dot{c}) - v^i\partial_t\Big(\partial_{\dot{x}^i}L(c,\dot{c})\Big)\right)dt \quad (\because \text{部分積分}) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} v^i\left(\partial_{x^i}L(c,\dot{c}) - \partial_t\Big(\partial_{\dot{x}^i}L(c,\dot{c})\Big)\right)dt
\end{aligned}$$

となる. よってこの様な任意の $v \in T_c\Omega(\{t_i\},\{p_i\})$ について $\nabla_v I_L = 0$ となることと c が Euler-Lagrange 方程式を満たすことは同値となる. 一般の $v \in T_c\Omega(\{t_i\},\{p_i\})$ については 1 の分割によって先ほどの場合に帰着される. □

さて, Lagrangian と Newton の運動方程式を結び付けよう. まず (我々は現実の物理にはあまり興味がないので) 簡単の為に以下の仮定を置くこととする.

- ニュートンの運動方程式における力の項 $F^i(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$ は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ のみに依存する関数である. 特に, $\partial F^i/\partial t = \partial F^i/\partial\dot{\mathbf{x}} = 0$ が成立する.
- ある C^∞ 関数 $U : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ が存在して $\partial U/\partial x^i = -F^i$ が成立する. ただし, x^i は $\mathbb{R}^{3N}$ における座標 $x^{i,1}, x^{i,2}, x^{i,3}$ の略記とする.

この時, 次の定理が成立する.

定理 4

$N, c^i, \mathbf{c}, F^i, U$ などを定義 1 及び上記仮定の通りとする. この時, $L : T\mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ を

$$L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) := \sum_i \frac{1}{2}m^i|\dot{x}^i|^2 - U(\mathbf{x})$$

と定める.

この時, $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3N}$ が Newton の運動方程式を満たす事と L についての Euler-Lagrange 方程式が成り立つ事は同値である.

証明. ただの計算なので略す. □

2 Hamilton ベクトル場の概説

symplectic 幾何の話を軽く思い出しておく．次の 3 つの命題は基本的である．証明に関しては適当な教科書 (da Silva 等) を参照してほしい．

命題 5

M^n を任意の多様体とする．この時 T^*M は自然な symplectic 多様体の構造を持つ．実際, M の局所座標 $(x^i)_{i=1,\dots,n}$ から定まる標準的な T^*M の局所座標 $(x^i, \xi_j)_{i,j=1,\dots,n}$ を取った時, $\omega := dx^i \wedge d\xi_i$ と定まる 2-form は M 上で well-defined であり symplectic 形式を定める．ただし, (ξ_i) は $\alpha = \alpha_i dx^i$ に対して $\xi_i(\alpha) = \alpha_i$ となるファイバー座標である．

命題 6

(M^{2n}, ω) を symplectic 多様体とする．M の任意の点に対し, その座標近傍 $(U; y^1, \dots, y^n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ であって $\omega = dy^i \wedge d\eta_i$ となるものが存在する．また, この条件を満たす局所座標を正準座標と呼ぶ．

命題 7

(M^{2n}, ω) を symplectic 多様体とする．$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を $\{f, g\} := \omega^\dagger(df, dg)$ と定める．ただし, $\omega^\dagger \in \Gamma(M, TM \otimes TM)$ は ω から決まる T^*M 上の非退化な交代形式とする．この時, $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ は Lie 環となる．また, $X_f := \omega^\dagger(df)$ として定まる線形写像 $X_\bullet : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は Lie 環の準同型であり, $\mathrm{Ker}(X_\bullet)$ は局所定数関数の全体である．

上の命題たちを基に, 次の定義をする．

定義 8

(M^{2n}, ω) を連結な symplectic 多様体とし, $H \in C^\infty(M)$ とする．この時, X_H を H を Hamiltonian とする Hamilton ベクトル場と言い, X_H の積分曲線の事を Hamilton 方程式の解と言う．

Remark

T^*M において曲線 $\gamma = (q, p) : \mathbb{R} \to T^*M$ の Hamilton 方程式は

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \ \ \partial_{\xi_i} H \\ \dot{p}_i = -\partial_{x^i} H \end{cases}$$

となり古典的な Hamilton 方程式と一致する．

運動の対称性を記述するための定義を行う．

定義 9

(M, ω) を symplectic 多様体とし, G を Lie 群とする．

- G の滑らかな作用 $\varphi : G \times M \to M$ が定まっており, 任意の $g \in G$ について $(\varphi_g)^*\omega = \omega$ であるとき (M, ω) は G-作用を持つという．
- (M, ω) が G-作用 $\varphi : G \times M \to M$ を持つと仮定する．この時, 滑らかな写像 $\mu : M \to \mathrm{Lie}(G)^*$ が以下の条件を満たすとき μ を運動量写像と呼ぶ．
  (1) μ は G-同変である．ただし, $\mathrm{Lie}(G)^*$ には G の随伴作用の双対によって作用を定める．
  (2) 任意の $a \in \mathrm{Lie}(G)$ に対して $\omega^\dagger(d\imath < \mu, a >) = \varphi_*(a)$ が成立する．ただし, $\varphi_*(a)$ は a が φ によって定める M 上のベクトル場とする．

さて、次の定理は Noether の定理の symplectic 幾何における定式化である.

定理 10

G を Lie 群, (M^{2n}, ω) を G-作用を持つ symplectic 多様体とし, $H : M \to \mathbb{R}$ を G-不変な C^∞-級関数とする. 今, M 上の G-作用に対する運動量写像 $\mu : M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(G), \mathbb{R})$ が存在するならば, H を Hamiltonian とする Hamilton 方程式のそれぞれの解の上で μ は定数となる.

証明. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を Hamilton 方程式の任意の解とし, $a \in \mathrm{Lie}(G)$ を任意の元とする. この先 $\imath < \mu, a >$ を μ_a と略記することとする. このとき, 定義より $\partial_t \mu_a(c(t)) = \imath < d\mu_a, \partial_t c >= \imath < d\mu_a, X_H >= \omega^\dagger(d\mu_a, dH) = \imath < \varphi_* a, dH >$ が成立する. しかし H は G-不変なので $\imath < \varphi_* a, dH >= 0$ が成立する. $a \in \mathrm{Lie}(G)$ は任意であったので命題を得る. □

更に, 運動量写像に関する古典的だが重要な結果として可換 Lie 群である $\mathbb{R}^n$-作用に対応した次の Arnold-Liouville の定理が存在する.

定理 11

(M^{2n}, ω) を symplectic 多様体とする. また, 滑らかな関数 $H = (H_i) : M \to \mathbb{R}^n$ が任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して $\{H_i, H_j\} = 0$ を満たしているとする. この時, 与えられた $a \in \mathbb{R}^n$ に対し, $H^{-1}(a)$ の各点 p において $(dH)_p$ が単射ならば $H^{-1}(a)$ は Lagrange 部分多様体であり, 更にその時 $H^{-1}(a)$ のコンパクトな連結成分は n 次元トーラスと同相である.

証明. 多様体論の簡単な議論から, 与えられた点 $a \in \mathbb{R}^n$ のファイバー $H^{-1}(a)$ の各点 p について $(dH)_p$ が単射ならば $H^{-1}(a)$ は部分多様体であることは明らかである. この時に $H^{-1}(a)$ のコンパクトな連結成分の 1 つを N と書くこととする. すると X_{H_i} は N 上のベクトル場の可換な組で TN を生成している. 連結性より組 $\{X_{H_i}\}$ から生成される積分多様体は N 自身と一致する. 故に N は $\mathbb{R}^n$ を離散部分群で割った商 Lie 群と微分同相になるが, その様な多様体でコンパクトなものは明らかに n 次元トーラスのみである. □

3 Legendre 変換

Legendre 変換は Lagrangian による解析力学から Hamiltonian による解析力学を得る重要な変換である. 実際にはそれに留まらない重要性を持つようであるが, 残念なことに筆者は詳しく知らない.

3.1 1 点上の Legendre 変換

ベクトル空間を 1 点空間上のベクトル束と思い, まずこの場合に Legendre 変換を定義しよう.

(V, g_V) を (有限次元) 内積空間とする. まず一様な狭義凸関数を定義しておく.

定義 12

ある C^∞-級の狭義凸関数 $L : V \to \mathbb{R}$ に対してある正の実数 $C > 0$ が存在して

$$C^{-1} g_V < \mathrm{Hess}(f)_v < C g_V \quad (\forall v \in V)$$

が成立するとき一様な狭義凸関数という.

この時, 次の定理が成り立つ.

定理 13 (Legendre 変換)
一様な狭義凸関数 $L : V \to \mathbb{R}$ に対して, 次が成立する.

(1) 写像 $R_L : V \to V^*$ を $R_L(v) := dL_v \in T_v^*V \simeq V^*$ と定める. このとき, R_L は微分同相である.
(2) 関数 $H_L : V^* \to \mathbb{R}$ を $H_L(\xi) := -\min\{L(v) - \imath < \xi, v >| \; v \in V\}$ として定める. このとき, H_L は well-defined であって $H_L(R_L(v)) = \imath < R_L(v), v > -L(v)$ が成立する. 特に, H_L は C^∞ 級の関数である.
(3) 関数 H_L は一様な狭義凸関数であり, ${R_L}^{-1} = R_{H_L}$ 及び $L = H_{H_L}$ が成立する.

証明. 以下, $\xi \in V^*$ に対して $L_\xi(v) := L(v) - \imath < \xi, v >$ と書くこととする. L が一様な狭義凸関数であるので L_ξ も一様な狭義凸関数である. (1) を示そう. L は一様な狭義凸関数なので $\mathrm{Hess}(L)_v > 0$ が任意の $v \in V$ について成立する. 簡単な計算から $d(R_L)_v \in \mathrm{Hom}(V, V^*) \simeq \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{R})$ は $\mathrm{Hess}(L)_v > 0$ と一致するので R_L の微分は任意の点で消えていない. 故に R_L は局所微分同相である. 全射性と単射性は L_ξ が任意の $\xi \in V^*$ について一様な狭義凸関数であることから簡単に従う.

(2) を示そう. $H_L(R_L(v)) = -\min\{L(y) - \imath < R_L(v), y >| \; y \in V\}$ であり $R_L(v) = dL_v$ なので $y = v$ で最小値を取る. 故に $H_L(R_L(v)) = \imath < R_L(v), v > -L(v)$ が成立する. R_L は微分同相であり $\imath < R_L(v), v > -L(v)$ は滑らかなので H_L も滑らかな関数とわかる.

(3) を示そう. 簡単のために R_L の逆関数を $v = v(\xi)$ と書くこととする. また $dL_v = \xi$ とその微分 $(\mathrm{Hess}(L)_v)dv = d\xi$ に注意しておく. まず H_L の一階導関数を計算すると $\partial^i H_L(\xi) = v^i(\xi) + \imath < \xi, \partial^i v(\xi) > -\partial_k L(v(\xi))\partial^i v^k(\xi) = v^i(\xi)$ となる. これは $R_{H_L} = (R_L)^{-1}$ を示している. 続いて H_L の二階導関数を計算すると $\partial^j \partial^i H_L(\xi) = \partial^j v^i(\xi) = (\mathrm{Hess}(L)_v^{-1})^{ij}$ となる. ここで $\mathrm{Hess}(L)_v$ についての一様性の仮定を使えば $C^{-1} g_{V^*} < \mathrm{Hess}(H_L)_\xi < C g_{V^*}$ となるから H_L も一様な狭義凸関数である. 残りの $L = H_{H_L}$ は今までの計算を使えば直ちに従う. □

3.2 Legendre 変換

前小節の話を接束に適応し, Lagrangian による力学系から Hamiltonian による力学系を得よう.

(M, g) をリーマン多様体, $L : TM \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数であって各ファイバー (T_pM, g_p) 上で一様な狭義凸関数なるものとする. この時, 各ファイバー毎に Legendre 変換を行い $H_L : T^*M \to \mathbb{R}$ を得る. この状況で次の定理が成り立つ.

定理 14
$c : \mathbb{R} \to M$ を C^∞ 関数とする. $(c, \dot{c})$ が Euler-Lagrange 方程式を満たす時, $(c, R_L(c, \dot{c}))$ が $H = H_L$ を Hamiltonian とする Hamilton 方程式の解となる. 逆に曲線 $\gamma = (q, p) : \mathbb{R} \to T^*M$ が Hamilton 方程式の解である時, TM 上の曲線 $(q, R_H(q, p))$ は $(q, \dot{q})$ と一致し Euler-Lagrange 方程式の解を満たす.

証明. 局所座標 (x^i) を固定し, 空間方向, TM 方向, T^*M 方向の微分をそれぞれ $\underline{d}$, $\dot{d}$, $\tilde{d}$ と表すこととする. ただし, この微分は適宜に適当な意味のテンソルを定めることとする. 更に証明中の Hessian は TM もしくは TM^* の方向のみを意味することとする. Euler-Lagrange 方程式から Hamilton 方程式を導く. まず定理 13 より $\tilde{d}H(c, R_L(\dot{c})) = \dot{c}$ なので自明に $\partial_t c = \tilde{d}H(c, R_L(\dot{c}))$ が成立する. 続いて $\partial_t R_L(c, \dot{c}) = \underline{d}\dot{d}L \cdot \dot{c} + \mathrm{Hess}(L) \cdot \ddot{c}$ は常に成立し, Euler-Lagrange 方程式より $\mathrm{Hess}(L) \cdot \ddot{c} = \dot{d}L - \underline{d}\dot{d}L \cdot \dot{c}$ なので結局 $\partial_t R_L(c, \dot{c}) = \underline{d}L$ となる. 一方 $\underline{d}H(c, R_L(\dot{c})) = -\underline{d}L$ はいつでも成立するので結局 $\partial_t R_L(c, \dot{c}) = -\underline{d}H$ が成立し Hamilton 方程式を得る.

逆に $\gamma = (q, p)$ が Hamilton 方程式を満たすときを考える. Hamilton 方程式の定義より $\dot{q} = R_H(q, p)$

は明らか．先ほどと同様に $\partial_t R_L(q,\dot{q}) = \underline{d}\dot{d}L\cdot\dot{q} + \mathrm{Hess}(L)\cdot\ddot{q}$ であり, $\partial_t R_L(q,\dot{q}) = -\underline{d}H = \underline{d}L$ なので $\underline{d}L = \underline{d}\dot{d}L\cdot\dot{q} + \mathrm{Hess}(L)\cdot\ddot{q}$ となる．両辺を整理すると $\underline{d}L - (\underline{d}\dot{d}L\cdot\dot{q} + \mathrm{Hess}(L)\cdot\ddot{q}) = \underline{d}L - \partial_t(\dot{d}L(q,\dot{q}))0$ 即ち Euler-Lagrange 方程式を得る． □

Remark

$R_L = (\partial L/\partial\dot{x}^i)d\dot{x}^i$ に注意すれば, 前小節の $H(R_L(\dot{x})) = \imath < R_L(\dot{x}), \dot{x} > -L(\dot{x})$ という表記から $H = \dot{x}^i\partial_{\dot{x}^i}L - L$ という見慣れた表示を得る．更に $L = (1/2)\sum_i m^i|\dot{x}^i|^2 - U(x)$ である時, $p_i = R_{L,i}(\dot{c}) = m_i\dot{c}^i$ 及び $H(x,\xi) = (1/2)\sum_i |\xi_i|^2/m_i + U(x)$ という物理の本の最初のほうに載っている式が得られる．

4 測地線について

測地線はしばしばリーマン多様体上の「直線」であるというような言い方がなされる。この節では、測地線がユークリッド空間の直線と同じく自由粒子の運動として実現されることを見る．まず (M,g) をリーマン多様体とし, 接束 TM 上の Lagrangian 密度 $L(p,v)$ を $L(p,v) = (1/2)g_p(v,v)$ と定めておく．この時に Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x^i}(\mathbf{c},\dot{\mathbf{c}}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}(\mathbf{c},\dot{\mathbf{c}})) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk})\,\dot{c}^j\,\dot{c}^k - \frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{c}^j) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk})\,\dot{c}^j\,\dot{c}^k - (\partial_k g_{ij})\dot{c}^j\,\dot{c}^k - g_{ij}\ddot{c}^j
\end{aligned}$$

となっている．これを整理すると

$$\ddot{c}^i + \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk})\dot{c}^j\,\dot{c}^k = 0$$

となり測地線の方程式を得る．命題の形でまとめておくと

命題 15

(M,g) をリーマン多様体とし, 接束 TM 上の Lagrangian 密度 $L(p,v)$ を $L(p,v) = (1/2)g_p(v,v)$ と定める．この時, Euler-Lagrange 方程式と測地線の方程式は一致する．

5 剛体の運動について

この節では $\mathbb{R}^N$ における有限個の質点からなる剛体の運動について考察する．K を $K > N$ なる自然数として, K 個の質点からなる運動を考える．i 番目の質点の質量を $m_i > 0$, 運動の軌跡を $p_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ とする．また総質量を $M := \sum m_i$, 重心を $p_M := M^{-1}\sum m_i p_i$ と書くこととする．更に $a_i := p_i(0) - p_M(0)$ と書くこととする．この時に次の仮定を定める．

- 任意の i,j と $t \geq 0$ に対して $|p_i(t) - p_j(t)| = |p_i(0) - p_j(0)|$ が成立する．
- $p_1(0),\ldots,p_K(0)$ は一般の位置にある．

すると以下の命題が成立する．証明はただの計算なので略する．

命題 16

ある $A : [0,\infty) \to SO(N)$ が一意に存在して

$$p_i(t) := p_M + A(t) \cdot a_i$$

が成立する.

この命題から剛体の運動における相空間は $\mathbb{R}^N \times SO(N)$ となることが分かる. 続いて、この相空間の上に乗せるべき計量を考える. また, $\dot{p}_M := dp_M/dt$ 及び $\dot{A} := A^{-1} \cdot dA/dt$ なる略記法を採用する. 後者は左不変ベクトル場による $TSO(N)$ の自明化と整合的にするためである. 計量とはつまり運動エネルギーの 2 倍のことであるので, 運動エネルギーの 2 倍を計算すると

$$\begin{aligned}\sum m_i|\dot{p}_i|^2 &= \sum_i m_i|\dot{p}_M + \dot{A}A \cdot a_i|^2 \\ &= M|\dot{p}_M|^2 + \sum_i 2\Big\langle \dot{p}_M, A\dot{A} \cdot (\sum m_i a_i)\Big\rangle + \sum_i m_i|A\dot{A} \cdot a_i|^2 \\ &= M|\dot{p}_M|^2 + \sum_i m_i|\dot{A} \cdot a_i|^2\end{aligned}$$

と直積計量が得られる. また, これは $\mathbb{R}^N$ については通常の計量の定数倍であり, $SO(N)$ については左不変計量である. この左不変計量は慣性モーメントと呼ばれている. Lie 群の左不変計量による測地線は左不変ベクトル場による積分曲線と一致することを用いれば, N 次元剛体の運動は比較的理解しやすい対象となる.

参考文献

[1] John M. Lee, “Riemannian Manifolds”, Springer-Verlag New York.

[2] Ana Cannas da Silva, “Lectures on Symplectic Geometry”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[3] 山本義隆, 中村孔一, “解析力学 I”, 朝倉書店

[4] 田崎晴明, “熱力学”, 培風館