ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°7 - 2020
Sistema de ecuaciones no lineales y minimización

1. **Implemente** una función con nombre `Func1` que evalúe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y opcionalmente también su derivada $F'(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, donde

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 e^{-x_1} + 3x_2 + \sin(x_3) - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_1^2 + 2x_2 e^{-x_1} + 2x_3 - 2 \end{bmatrix}.$$

La misma debe permitir ejecutarse como `F = Func1(x)` o `F = Func1(x, [1,0])` (calcula solo $F(x)$), `_, DF = Func1(x, [0,1])` (calcula solo $F'(x)$) o ambas `F, DF = Func1(x, [1,1])`. Evite realizar operaciones innecesarias.

2. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $\bar{x}$ con derivada $F'(\bar{x})$ invertible. Demuestre que existen $\varepsilon > 0$ y $c > 0$ tales que

$$\|x - \bar{x}\|_2 \leq c\|F(x)\|_2, \qquad \forall\, x \in B(\bar{x}, \varepsilon).$$

3. **Implemente** dos funciones con nombre `sol_newton` y `sol_newton_trun` que ejecuten el método de Newton y el Newton truncado, respectivamente. Deberan tener como entrada: una función `Fun` (como la del ejercicio 1), un punto inicial x^0, una tolerancia de error ϵ y una cantidad máxima de iteraciones $k_{\text{máx}}$. Verifique su funcionamiento hallando la raíz de la función del ejercicio 1.

4. Para poder obtener la posición de un dispositivo GPS, es necesario realizar un proceso conocido como "triangulación". En el caso de encontrar al dispositivo en 3 coordenadas, se puede conocer su distancia a 3 satélites o antenas diferentes. Encontrar la posición (x, y, z), implica resolver el sistema:

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = d_i, \quad i = 1, 2, 3$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de los satélites usados para triangular y d_i es la distancia del dispositivo a cada satélite. Resolver el problema de triangulación para los siguientes datos, con diferentes puntos iniciales, entre ellos $[1, 1, 1]$:

x	y	z	d
1	0	0	9.33
2.4	1.1	3.4	7.77
-1	-0.4	0	11.07

5. Determine si puede o no existir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable que tenga un único punto estacionario que sea minimizador local pero no minimizador global de f en $\mathbb{R}$.

6. Sean $n \geq 2$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1 - x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

Demuestre que $\bar{x} = 0$ es el único punto estacionario de f en $\mathbb{R}^n$, que es un minimizador local estricto de f y que no es un minimizador global de f en $\mathbb{R}^n$.

7. **Implemente** las reglas de búsqueda lineal de Armijo y de Goldstein en las funciones `regla_armijo` y `regla_goldstein`. Deben tener como entrada f, x, d, ϕ_0, ϕ_0'; donde f debe retornar $f(x), \nabla f(x), \nabla^2 f(x)$ al ejecutar $f(x, \text{der})$ (der=[1,0,0] por defecto), $\phi_0 = f(x)$ y $\phi_0' = \nabla f(x)^T d < 0$. Deben retornar $x^+ = x + \alpha d$.

8. Sea $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\xi \in [0,1]$ y para $p, q \in \mathbb{R}^n$ defina

$$W_+ = W + \frac{pp^T}{p^Tq} - \frac{Wqq^TW}{\tau} + \xi\tau vv^T \quad \text{donde } v = \frac{p}{p^Tq} - \frac{Wq}{\tau},\ \tau = q^TWq.$$

   Demuestre que W_+ es simétrica y que W_+ es definida positiva si y solo si $p^Tq > 0$.

9. **Implemente** los métodos de minimización no lineal de Cauchy, Newton y BFGS en las funciones `min_cauchy`, `min_newton` y `min_bfgs`. Deben tener como entrada f, x_0, ϵ, $k_{\text{máx}}$ y *regla*; donde f es la función a minimizar, x_0 el punto inicial, ϵ la tolerancia del error, $k_{\text{máx}}$ la cantidad máxima de iteraciones y *regla* la función de regla a utilizar.

10. Un productor cosecha x_i toneladas de maní, almacena $(1-u_i)x_i$ toneladas de su producción e invierte u_ix_i. Con esto la producción de la próxima cosecha será $x_{i+1} = x_i + \omega u_i x_i$ con $\omega > 0$. Encuentre una estrategia óptima $u_0, \ldots, u_{N-1}$ que, comenzando con 3.5 toneladas, maximice lo almacenado a lo largo de $N = 10$ cosechas, o sea

$$x_N + \sum_{i=0}^{N-1}(1-u_i)x_i.$$

   Resuelva este problema tomando $\omega = 0.2$ y utilizando los tres métodos del ítem anterior.