ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°4 - 2021
Cuadrados mínimos

1. Resuelva el siguiente sistema lineal usando rotaciones de Givens y reflexiones de Householder
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una reflexión Q tal que $Qx = y$ para vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$.

3. **Implemente** las siguientes funciones en `Python` que realizan una descomposición QR. Deben tener como entrada una matriz A y como salida Q y R.
    a) `qrgivens` que utilice rotaciones de Givens.
    b) `qrhholder` que utilice reflexiones de Householder.
    c) `qrgschmidt` que utilice ortogonalización de Gram-Schmidt.

4. Sea $V \in R^{m\times n}$ definida por $v_{ij} = p_j^{i-1}$ con $p_j = \frac{j}{n}$, i.e., una matriz de Vandermonde. Calcule $\|I_m - Q^TQ\|_2$ para distintos valores de m y n, para las matrices Q dadas por el proceso de Gram-Schmidt y por descomposición QR por reflectores.

5. **Implemente** una función en `Python` llamada `qrgivensp` que utilice rotaciones de Givens con permutación de columnas. Debe tener como entrada la matriz A y como salida Q, R y P.

6. Demuestre que si $R \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}^{m-n+1}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ tales que
$$A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$
con A de rango completo, entonces $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2 - (v^Td/\|v\|_2)^2$

7. **Implemente** una función en `Python` llamada `sol_cuadmin` que dadas A y b retorne $\bar{x}$ solución del problema de cuadrados mínimos, i.e.,
$$\underset{x}{\text{minimizar}}\ \|Ax - b\|_2^2.$$
Utilice la función del ejercicio 5 y resuelva un sistema triangular.

8. Se desea hallar la recta que ajuste los datos $(x_i, y_i) = (i, i)$ para $i = 1, \ldots, 9$ y $(x_{10}, y_{10}) = (10, 0)$.
    a) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_2^2$ usando `sol_cuadmin` del ejercicio 7.
    b) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_1$ usando `scipy.optimize.linprog`.
    c) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_\infty$ usando `scipy.optimize.linprog`.
    d) Grafique simultaneamente las tres rectas y los datos.

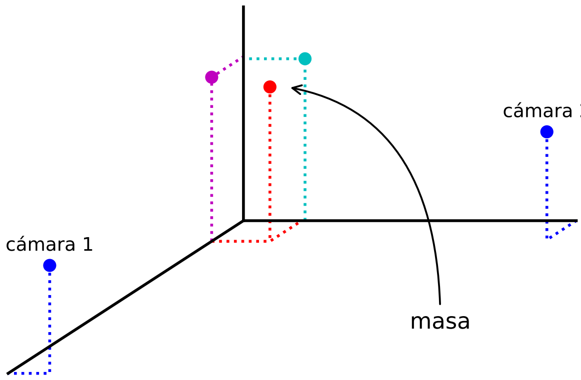
9. Se desea contar con un modelo para pronosticar el comportamiento de un sistema desconocido. Para ello, contamos con valores de entrada $u(t)$ y de salida $y(t)$ para tiempos $t = 0, \ldots, N$. Una estrategia, consiste en suponer que la salida depende de las últimas $\tau + 1$ entradas, o sea,
$$y(t) \approx h_0u(t) + h_1u(t-1) + \cdots + +h_\tau u(t-\tau), \quad \text{para } t = \tau, \ldots, N.$$
Descargue el archivo `dryer2.dat` (datos de una secadora industrial obtenidos de DaISy) donde los datos t, $u(t)$, $y(t)$ están en las columnas 1, 2 y 5, respectivamente.

a) Grafique conjuntamente $u(t)$ e $y(t)$.

b) Entrene su modelo con $\tau = 100$ y $N = 500$.

c) Grafique su estimación $y_{\text{est}}(t)$ junto a $y(t)$ para $t > N$.

10. Se desea detectar la posición en tres dimensiones de una masa no uniforme. Se cuenta con información de la imagen de dos cámaras posicionadas como indica la figura. Tomando como unidad 1m, las cámaras están situadas a 0.5 de la pared lateral, 2 de la pared del frente y 1.5 de altura. Tomando la esquina como el origen de coordenadas, desde la cámara 1 el centro de la masa está en la posición $(0.35, 1.43)$ y desde la cámara 2 en la posición $(-0.28, 1.55)$. Note que desde la cámara 2 el eje x tiene orientación negativa.



Determine la posición espacial de la masa como solución de un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas.