Definición:

$x^t A x \geq 0$ semidef pos

Si A es simétrica $\Rightarrow$

es ortonormalmente

diagonalizable:

$\exists Q$ ortonormal : $Q^t Q = I$

y $Q^t A Q = D$ diagonal

5. Pruebe que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, las siguientes son equivalentes:

a) A es definida positiva,

b) todos los autovalores de A son positivos,

c) para todo conjunto de índices $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, n\}$, las submatrices $A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ son definidas positivas.

A def pos $\Rightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i$

$x^t A x > 0$, λ autovalor $v_\lambda \neq 0$

$\Rightarrow v_\lambda^t A v_\lambda = v_\lambda^t \lambda v = \lambda \underbrace{\|v_\lambda\|_2}_{>0}$

$\Rightarrow \lambda > 0$ $\qquad$ a) $\Rightarrow$ b) ✓

c) $\Rightarrow$ a)

Directo $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$

$A_{\mathcal{I}\mathcal{I}} = A \Rightarrow A$ def pos ✓

b) $\Rightarrow$ c)

Sabemos $\exists\, Q$ ortonormal tq

$Q^t A Q = D \Rightarrow A = Q D Q^t$

$A_{I I}$

$A e_i = a^i$ $\qquad e_j^t A = a_j$

$e_j^t A e_i = A_{ji}$ $\quad 2\times n \; n\times n \; n\times 2$ $\quad 2\times 2$

$I = \{i, j\}$

$$I_I = \begin{bmatrix} e^i & e^j \end{bmatrix}_{n\times 2} \Rightarrow I_I^t A I_I = A_{II} = \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{bmatrix}$$

$y \neq 0 \in \mathbb{R}^{\#I}$

$$y^t A_{II}\, y = y^t I_I^t A I_I\, y =$$

$$= y^t I_I^t Q D (Q^t I_I\, y) = z^t D z > 0$$

$\uparrow$

Q rango completo

$y \neq 0$

$\Rightarrow A_{II}$ def pos

b) $\Rightarrow$ a) ✓