

**ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°7 - 2021**  
**Sistema de ecuaciones no lineales y minimización**

1. **Implemente** una función con nombre `Fun_tres` que evalúe  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y opcionalmente también su derivada  $F'(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , donde

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 e^{-x_1} + 3x_2 + \sin(x_3) - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_1^2 + 2x_2 e^{-x_1} + 2x_3 - 2 \end{bmatrix}.$$

La misma debe permitir calcular solo  $F(x)$ , solo  $F'(x)$  o ambas. Use la sintaxis `F, DF = Fun_tres(x, valfun=True, derfun=False)`. De esta manera `F = Fun_tres(x)` o `F = Fun_tres(x, valfun = True, derfun = False)` (calcula solo  $F(x)$ ), `_, DF = Fun_tres(x, derfun = True)` (calcula solo  $F'(x)$ ) o ambas `F, DF = Fun_tres(x, valfun = True, derfun = True)`. Evite realizar operaciones innecesarias.

2. Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable en  $\bar{x}$  con derivada  $F'(\bar{x})$  invertible. Demuestre que existen  $\varepsilon > 0$  y  $c > 0$  tales que

$$\|x - \bar{x}\|_2 \leq c \|F(x) - F(\bar{x})\|_2, \quad \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon).$$

3. **Implemente** dos funciones con nombre `sol_newton` y `sol_newton_trun` que ejecuten el método de Newton y el Newton truncado, respectivamente. Deberan tener como entrada: una función `func` (como la del ejercicio 1), un punto inicial  $x^0$ , una tolerancia de error  $\epsilon$  y una cantidad máxima de iteraciones  $m$ . Verifique su funcionamiento hallando la raíz de la función del ejercicio 1.
4. Utilizar el método de Newton para encontrar los puntos de intersección de la parábola  $x_2 = x_1^2 - x_1$  y la elipse  $x_1^2/16 + x_2^2 = 1$ . Mostrar ambos gráficos al mismo tiempo y los puntos de intersección estimados con el método de Newton.
5. Determine si puede o no existir una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable que tenga un único punto estacionario que sea minimizador local pero no minimizador global de  $f$  en  $\mathbb{R}$ .
6. Sean  $n \geq 2$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = (1 - x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

- a) Demuestre que  $\bar{x} = 0$  es el único punto estacionario de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ , que es un minimizador local estricto de  $f$  y que no es un minimizador global de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ .
- b) **Implemente** esta función en Python con el nombre `fun_mlocal` para que retorne opcionalmente  $f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$  y  $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Use la sintaxis `f = fun_mlocal(x, valfun=True, gradfun=False, hesfun=False)` (valores por defecto), `f, df = fun_mlocal(x, valfun = True, gradfun = True)`, o `f, df, d2f = fun_mlocal(x, valfun = True, gradfun = True, hesfun=True)`. Evite realizar operaciones innecesarias.
7. **Implemente** las reglas de búsqueda lineal de Armijo y de Goldstein en las funciones `regla_armijo` y `regla_goldstein`. Deben tener como entrada  $f$ ,  $x$ ,  $d$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi'_0$ ; donde  $f$  debe retornar  $f(x)$ ,  $\nabla f(x)$ ,  $\nabla^2 f(x)$  como en el ejercicio 6b,  $\phi_0 = f(x)$  y  $\phi'_0 = \nabla f(x)^T d < 0$ . Deben retornar  $x^+ = x + \alpha d$ .

8. Sea  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica definida positiva,  $\xi \in [0, 1]$  y para  $p, q \in \mathbb{R}^n$  defina

$$W_+ = W + \frac{pp^T}{p^T q} - \frac{Wqq^T W}{\tau} + \xi \tau vv^T \quad \text{donde } v = \frac{p}{p^T q} - \frac{Wq}{\tau}, \quad \tau = q^T W q.$$

Demuestre que  $W_+$  es simétrica y que  $W_+$  es definida positiva si y solo si  $p^T q > 0$ .

9. **Implemente** los métodos de minimización no lineal de Cauchy, Newton y BFGS en las funciones `min_cauchy`, `min_newton` y `min_bfgs`. Deben tener como entrada  $f$ ,  $x_0$ ,  $\epsilon$ ,  $m$  y *regla*; donde  $f$  es la función a minimizar,  $x_0$  el punto inicial,  $\epsilon$  la tolerancia del error,  $m$  la cantidad máxima de iteraciones y *regla* la función de regla a utilizar.
10. Suponga que se tiene un conjunto de datos  $\{(x^1, y_1), \dots, (x^d, y_d)\}$  donde  $x^k \in \mathbb{R}^n$  (características) y que pertenecen a dos grupos, digamos  $y_k = 1$  o  $y_k = -1$  (rótulos). Se desea hallar  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$  tal que el hiperplano  $\mathcal{H}_{w,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x \rangle = b\}$  separe estos grupos. Para ello, resolveremos el problema

$$\underset{(w,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}{\text{minimizar}} \sum_{k=1}^d \log \left( 1 + \exp(-(\langle w, x^k \rangle - b)y_k) \right).$$

Genere un conjunto de datos con  $x^k \in \mathbb{R}^2$  y resuelva el problema usando los métodos del ejercicio 9. Grafique los datos junto al hiperplano separador.

11. Un productor cosecha  $x_i$  toneladas de maní, almacena  $(1 - u_i)x_i$  toneladas de su producción e invierte  $u_i x_i$ . Con esto la producción de la próxima cosecha será  $x_{i+1} = x_i + \omega u_i x_i$  con  $\omega > 0$ . Encuentre una estrategia óptima  $u_0, \dots, u_{N-1}$  que, comenzando con 3.5 toneladas, maximice lo almacenado a lo largo de  $N = 10$  cosechas penalizando el no cumplimiento de  $u_i \in [0, 1]$  mediante la función  $\psi(t) = \rho(\min\{t, \max\{0, t - 1\}\})^4$ . O sea, se debe maximizar

$$x_N + \sum_{i=0}^{N-1} (1 - u_i)x_i - \sum_{i=0}^{N-1} \psi(u_i).$$

Resuelva este problema tomando  $\omega = 0.2$ ,  $\rho = 10^3, 10^5$  y utilizando los tres métodos del ejercicio 9.