

**ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°5 - 2021**  
**Valores singulares y Autovalores**

1. Demuestre que si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene valores singulares  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ , entonces  $\|(A^T A)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-2}$ ,  $\|(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = \sigma_n^{-1}$ ,  $\|A(A^T A)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$  y  $\|A(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = 1$ .
2. Demuestre que dados  $\varepsilon > 0$  y  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $r < \min\{m, n\}$ , existe  $A_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $\min\{m, n\}$  tal que  $\|A - A_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$ .
3. Dada  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , defina  $B(\lambda) = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T$  con  $\lambda > 0$ . Demuestre que si  $p = \min\{m, n\}$ ,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$  son los valores singulares de  $A$  y  $A^\dagger$  es su pseudo inversa, entonces

$$\|B(\lambda) - A^\dagger\|_2 = \frac{\lambda}{\sigma_r(\sigma_r^2 + \lambda)}.$$

Concluya que  $B(\lambda) \rightarrow A^\dagger$  si  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

NOTA: Para ejercicios 4 al 6 pueden obtener la descomposición SVD con Numpy (`np.linalg.svd`)

4. **Implemente** una función llamada `cuad_min_svd` que reciba una matriz  $A$  y un vector  $b$  y resuelva el problema de cuadrados mínimos  $\min \|Ax - b\|_2^2$  mediante la descomposición SVD, dando como salida  $x$  y  $\|Ax - b\|_2$ . Probar la implementación leyendo `A` y `b` desde `A_p5e4` y `b_p5e4` en <https://github.com/lbiedma/an2famaf2020/blob/master/datos/>, respectivamente. Comparar la norma 2 de esta solución, con la solución obtenida mediante cuadrados mínimos con QR.
5. **Implemente** una función llamada `im_aprox_svd` que reciba como entradas una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y una tolerancia `tol` y que realice lo siguiente:
  - Obtener la descomposición SVD de  $A$ ,
  - Para  $k \in \{1, \dots, \min\{m, n\}\}$ , calcular la norma de  $A - A_k$ , donde  $A_k$  es la aproximación hasta el valor singular  $k$  de  $A$ .
  - Detener este proceso si se consigue que  $\|A - A_k\|_\infty$  sea menor que `tol` (Nota: Este número puede no ser pequeño).
  - Mostrar ambas matrices en pantalla como imágenes (usar `plt.imshow`).
  - Probar la función implementada con la matriz en <https://github.com/lbiedma/an2famaf2020/blob/master/datos/p5e5.txt>, con `tol=2000`.
6. **Reducción de Dimensionalidad para Visualización:** El archivo <https://github.com/lbiedma/an2famaf2020/blob/master/datos/iris.data> contiene un conjunto de datos de plantas de la familia Iris, donde la última columna indica a qué variedad de Iris pertenece la planta estudiada (0-setosa, 1-versicolour o 2-virginica). Para cada planta se obtuvieron 4 atributos (longitud y ancho del sépalo, longitud y ancho del pétalo, respectivamente). Conseguir la descomposición SVD de la matriz de los datos (sin la columna de la clase) y graficar los puntos formados por las primeras dos columnas de  $U$  (un punto por fila). Colorear cada punto de acuerdo a la clase que le corresponde.
7. **Implemente** una función llamada `autjacobi`, que utilice el método de Jacobi para hallar los autovalores de una matriz simétrica  $A$ . La función debe tener como entrada  $A$ , una tolerancia  $\epsilon$  y una cantidad máxima de iteraciones  $m$  (por defecto,  $\epsilon = 10^{-10}$  y  $m = 500$ ).
8. **Implemente** una función llamada `dvsingulares` que utilice la función del ejercicio 7 y la descomposición QR con permutación de columnas para obtener la descomposición en valores singulares de una matriz  $A$ . Debe retornar  $U$ ,  $\Sigma$  y  $V$ .

9. **Implemente** las siguientes funciones para encontrar un autovalor  $\rho$  con su autovector  $q$  utilizando método de las potencias. Deben tener como entrada una matriz  $A$ , un vector inicial  $q^0$ , una tolerancia  $\epsilon$  y una cantidad máxima de iteraciones  $m$  (por defecto,  $\epsilon = 10^{-10}$  y  $m = 500$ ).

- a) `autpotenciasinf` que utilice norma infinito.
- b) `autpotencias2` que utilice norma 2.
- c) `autrayleigh` que utilice la iteración del cociente de Rayleigh.

10. **Dinámica Poblacional.** Sea  $n_i^t$  la cantidad de individuos en la faja etaria  $i$  al final del año  $t$ ,  $s_i$  la porción de individuos de la faja  $i$  que pasan anualmente a la faja  $i + 1$  y  $f_i$  la tasa de fecundidad per cápita de la faja  $i$ . Entonces la dinámica de la población cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} n_1^{t+1} &= f_1 n_1^t + \dots + f_p n_p^t \\ n_i^{t+1} &= s_i n_{i-1}^t \quad \text{para } i = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

De manera vectorial esta dinámica puede escribirse como  $n^{t+1} = L n^t$  donde  $L$  es llamada matriz de Leslie. Con el autovalor dominante  $\lambda_1$  de esta matriz se obtiene que si  $\lambda_1 < 1$  la población decrece exponencialmente,  $\lambda_1 > 1$  la población crece exponencialmente y  $\lambda_1 = 1$  la población es estable e igual al autovector asociado.

Determine el comportamiento de la población de esta especie:

edad	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
$f_i$	0.0	0.2	0.9	0.9	0.9	0.8	0.3
$s_i$	0.3	0.7	0.9	0.9	0.9	0.6	0.0
$n_i^0$	10	2	8	5	12	0	1

11. Sea  $p$  un polinomio tal que  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Demuestre que las raíces de  $p$  son los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

12. Sea  $H$  Hessenberg superior tal que  $H = Q^T A Q$ . Demuestre que si  $A$  es simétrica entonces  $H$  es tridiagonal.
13. **Implemente** una función llamada `fhess` que retorne la forma de Hessenberg de una matriz. Debe tener como entrada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $p \in \{0, 1\}$ . Como salida  $Q$  ortogonal y  $H$  Hessenberg superior tal que  $H = Q^T A Q$ . Si  $p = 0$  reflexiones de Householder (por defecto), si  $p = 1$  se usarán rotaciones de Givens.
14. **Implemente** una función llamada `autqr`, que ejecute el método de iteraciones QR para hallar los autovalores de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , comenzando con una reducción en su forma de Hessenberg y utilizando luego rotaciones de Givens. Debe tener como entrada una matriz  $A$ , una tolerancia  $\epsilon$  y una cantidad máxima de iteraciones  $m$  (por defecto,  $\epsilon = 10^{-10}$  y  $m = 500$ ).