ANÁLISIS NUMÉRICO II — Recuperatorio Parcial N°2 - 2017

1. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva y $b \in \mathbb{R}^n$. Se define

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x,$$

cuyo mínimo será $\bar{x}$. Se define también

$$E(x) =< A(x-\bar{x}), (x-\bar{x}) > .$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, determinar el paso óptimo para el método del máximo descenso ($p = -\nabla f(x)$).

2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

   a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y triangular superior, entonces las iteraciones producidas por Jacobi y Gauss-Seidel, aplicadas a un sistema $Ax = b$, son iguales para el mismo vector inicial x_0.

   b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal, entonces $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$.

   c) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con autovalor λ y supongamos que ρ no es un autovalor de A. Entonces $\|A-\rho\| \leq |\lambda - \rho|$.

3. Suponga que quiere resolver el sistema $Ax = b$ aplicando descomposición QR, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con la siguiente estructura:

$$A = \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \dots & \star \\ \star & \star & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \end{bmatrix},$$

es decir, A es triangular superior pero, además, su subdiagonal es distinta de cero (se dice que A es una matriz de Hessenberg).

   a) Si se quiere efectuar la menor cantidad de operaciones, ¿es conveniente realizar la descomposición mediante rotaciones de Givens o reflexiones de Householder? Justificar.

   b) Programar el método elegido y utilizarlo para resolver el siguiente sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$