ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°1 - 2021
Sistemas triangulares y descomposición de Cholesky

1. Considere las matrices A, B y C particionadas como se indica:

$$A = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Muestre que $AB = C$ y $A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} = C_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

2. Sea $A = [a^1 \ \dots \ a^m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Demuestre que si $b = Ax$ entonces $b = \sum_{j=1}^{m} x_j a^j$.

3.
   a) **Implemente** dos funciones en `Python` que resuelvan $Ax = b$, donde A es una matriz triangular inferior. Deben utilizar el método de sustitución hacia adelante por filas y columnas, y llamarse `sol_trinffil` y `sol_trinfcol`, respectivamente, con A y b como entradas y x como salida. Además, la implementación debe verificar la existencia de ceros en las primeras entradas del vector b y evitar cálculos innecesarios.

   b) Implemente dos funciones en `Python`, llamadas `sol_trsupfil` y `sol_trsupcol`, análogas a las anteriores pero cuando A es una matriz triangular superior.

   c) Verifique sus funciones resolviendo los sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Calcule el número de operaciones de los 4 algoritmos del ejercicio 3.

5. Pruebe que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, las siguientes son equivalentes:

   a) A es definida positiva,

   b) todos los autovalores de A son positivos,

   c) para todo conjunto de índices $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, las submatrices $A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ son definidas positivas.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_j}, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Demuestre que si A_{11} es no singular, entonces la matriz $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ (llamada complemento de Schur de A_{11} en A) es definida positiva.

7. **Implemente** una función en `Python` (llamada `nivel`) que reciba una lista de números positivos como input. La función debe generar una matriz 2×2 simétrica y definida positiva aleatoria A y graficar las curvas de nivel de la función $f(x) = x^T Ax$ correspondientes a los números de la lista de entrada (usar la función `contour` de `matplotlib.pyplot`).

8. Demuestre que:

   a) si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva y $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m, entonces $A = X^T BX \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es definida positiva.

   b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica semidefinida positiva y con núcleo cero, entonces A es definida positiva.

9. Demuestre que si A es simétrica definida positiva, existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con entradas positivas tales que $A = LDL^T$.

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

    a) Pruebe que A es simétrica y definida positiva.

    b) Calcule el factor de Cholesky G de A.

    c) Encuentre otras tres matrices triangulares superiores R tales que $A = R^T R$.

11. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas definidas positivas, y calcule el factor de Cholesky cuando sea posible:

    $$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

12. **Implemente** una función en `Python` (llamada `cholesky`) que calcule el factor de Cholesky de A.

13. Determine el número de flops del algoritmo del ejercicio 12 y utilícelo para encontrar el factor de Cholesky de

    $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

    de dimensión $n = 100$ y $n = 1000$.

14. **Implemente** una función en `Python` llamada `sol_defpos` que resuelva el sistema $Ax = b$ para A definida positiva, mediante una descomposición de Cholesky y la resolución de dos sistemas triangulares.

15. Utilice la función del ejercicio 14 para resolver $Ax = b$ con A del ejercicio 13 con $n = 500$ y $b_j = \exp(-(j-c)^2/100)$, para los valores $c = n/10,\ n/2,\ 9n/10$. Para cada caso grafique b y x.

16. Se define, para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \circ B$ como $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (el producto elemento a elemento). Demuestre que:

    a) Si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sus columnas son d_k, entonces $(DD^T) \circ B = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{diag}(d_k) B \operatorname{diag}(d_k)$

    b) Si A y B son simétricas definidas positivas, $A \circ B$ es simétrica definida positiva.

    c) Si $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_d x^d$ con $c_i \geq 0\ \forall i$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica semidefinida positiva y se define $Y = f(X)$ como:

    $$Y_{ij} = f(X_{ij}), \ \ i, j = 1, \ldots, n$$

    entonces Y es semidefinida positiva.