ANÁLISIS NUMÉRICO II — Parcial N°2 - 2022

18-11-2022

1. *a*) Suponer que $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal y triangular superior. Probar que B debe ser diagonal con entradas $+/-1$.

   b) Suponer que $Q_1R_1 = Q_2R_2$, con Q_1 y Q_2 ortogonales, y que R_1 y R_2 son triangulares superiores y no singulares. Mostrar que hay una matriz diagonal con entradas $+/-1$ tal que $R_2 = DR_1$ y $Q_1 = Q_2D$.

2. Sea $A \in^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $Ax^* = b$ y $V = [v^1 \dots v^m] \in^{n\times m}$ de rango m. Demuestre que $\bar{x} = x^0 + V\bar{\alpha}$ es solución de $\underset{x\in x^0+\mathrm{Im}(V)}{\text{minimizar}} \ \dfrac{1}{2}\|x-x^*\|_A^2$ **si y solo si** $\bar{\alpha}$ es solución de $\underset{\alpha\in^m}{\text{minimizar}} \ f(x^0+V\alpha)$ donde $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$.

3. Un método iterativo alternativo a Richardson es SOR (Successive Over Relaxation). Si $A = L + D + U$, entonces la iteración propuesta es:

$$x^{(k+1)} = (D+\omega L)^{-1}\big(\omega b - [\omega U + (\omega-1)D]x^{(k)}\big)$$

o, vista por elemento de x:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

con ω entre 0 y 2.

- **Implemente** una función, `sol_sor` que resuelva un sistema lineal con el esquema **SOR**. Las entradas deben ser A, b, ω, x^0, tolerancia de error ϵ y máximo de iteraciones m. La salida debe ser x aproximación de la solución.
- Resolver el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

  con `sol_sor` y `sol_richardson`, con $x_0 = 0$, $m = 100$, $\epsilon = 1e-5$ y $\omega = 0.5$. ¿Cuál método incurre en la menor cantidad de iteraciones?