

**ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°3 - 2022**  
**Normas**

1. Demuestre que para  $p \geq 1$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  vale  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$  y  $\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ . Concluya que

a)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ .

b)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ .

c)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ .

2. Demuestre que  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ .

3. Grafique la bola unidad  $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$  para  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

4. a) Dada una norma vectorial  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$ , ¿qué condiciones debe cumplir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m > n$  para que la función  $\|\cdot\|_A$  definida por  $\|x\|_A = \|Ax\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  sea una norma vectorial?.

b) Para  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y definida positiva, se define  $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$ . Demuestre que  $\|\cdot\|_A$  es una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$  y que  $\sqrt{\lambda_{\min}(A)} \|x\|_2 \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\lambda_{\max}(A)} \|x\|_2$ , con  $\lambda_{\min}(A)$ ,  $\lambda_{\max}(A)$  el mínimo y máximo autovalor de  $A$ . ¿Qué ocurre si  $A = I$ ?

5. La distancia Euclídea de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  al conjunto  $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$  puede definirse como

$$d(x) = \|\max\{0, x\}\|_2,$$

donde el máximo es tomado coordenada a coordenada.

a) Demuestre que  $d$  cumple la desigualdad triangular.

b) Encuentre una norma  $\|\cdot\|$ , tal que al cambiar  $\|\cdot\|_2$  por  $\|\cdot\|$ ,  $d$  no cumpla la desigualdad triangular.

6. Sea  $\|\cdot\|$  una norma vectorial y sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Pruebe que la norma matricial inducida por  $\|\cdot\|$  satisface que:

a) es efectivamente una norma matricial.

b)  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

c)  $\exists x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  tal que  $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$ .

d)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  (submultiplicatividad).

e) Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular, entonces  $\|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$ .

f)  $\rho(A) \leq \|A\|$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \det(A - \lambda I) = 0\}$ .

7. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces  $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1, \|y\|_2=1} y^T A x$ .

8. Demuestre que  $\|A\|_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$  es una norma matricial en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , pero no es submultiplicativa.

9. Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , demuestre que:

a)  $\|A\|_{\max} \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{mn} \|A\|_{\max}$ .

b)  $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$ .

c)  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$ .

10. Muestre que si  $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces

$$\left\| A \left( I - \frac{ss^T}{s^T s} \right) \right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{\|As\|_2^2}{\|s\|_2^2}.$$

11. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- a)  $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$ ,
- b)  $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ , para toda  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\|\cdot\|$  submultiplicativa,
- c) Si  $A$  es una matriz ortogonal, entonces  $\kappa_2(A) = 1$ .

12. Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}.$$

El vector  $\hat{x} = [20.97, -18.99]^T$  es una mala aproximación de la solución. Pruebe que los residuos  $r_1(\hat{x})$ ,  $r_2(\hat{x})$  y  $r_\infty(\hat{x})$  son sin embargo pequeños. Así vemos que en un sistema mal condicionado casi no hay relación entre el tamaño del residuo y la exactitud de la solución.

13. Sea  $A = \begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix}$ .

- a) Calcule  $A^{-1}$  y  $\kappa_\infty(A)$ .
- b) Encuentre  $b, \vartheta, x$  y  $\zeta$  tales que  $Ax = b$ ,  $A(x + \zeta) = b + \vartheta$ ,  $\frac{\|\vartheta\|_\infty}{\|b\|_\infty}$  sea pequeño y  $\frac{\|\zeta\|_\infty}{\|x\|_\infty}$  sea grande.
- c) Encuentre  $b, \vartheta, x$  y  $\zeta$  tales que  $Ax = b$ ,  $A(x + \zeta) = b + \vartheta$ ,  $\frac{\|\zeta\|_\infty}{\|x\|_\infty}$  sea pequeño y  $\frac{\|\vartheta\|_\infty}{\|b\|_\infty}$  sea grande.

14. a) Sea  $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Utilice **Python** para graficar  $\det(A(\epsilon))$  y  $\kappa_2(A(\epsilon))$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- b) Sea  $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$ . Utilice **Python** para graficar  $\det(A(\epsilon))$  y  $\kappa_2(A(\epsilon))$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- c) Implemente una función que, dado un  $\epsilon$  como entrada, grafique la esfera unidad con norma 2 en  $\mathbb{R}^2$  y su transformación a través de las matrices de los ítems anteriores. El gráfico debería mostrar las 3 esferas en la misma figura. Ejecutarla para  $\epsilon \in \{0.25, 0.125, 0.0625, 1e-5\}$ .