

**ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°4 - 2022**  
**Cuadrados mínimos**

1. Resuelva el siguiente sistema lineal usando rotaciones de Givens y reflexiones de Householder

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una reflexión  $Q$  tal que  $Qx = y$  para vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  con  $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ .
3. **Implemente** las siguientes funciones en **Python** que realizan una descomposición QR. Deben tener como entrada una matriz  $A$  y como salida  $Q$  y  $R$ .

a) `qrgivens` que utilice rotaciones de Givens.

b) `qrholder` que utilice reflexiones de Householder.

4. **Implemente** una función en **Python** llamada `qrgivensp` que utilice rotaciones de Givens con permutación de columnas. Debe tener como entrada la matriz  $A$  y como salida  $Q$ ,  $R$  y  $P$ .

5. Demuestre que si  $R \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ ,  $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $d \in \mathbb{R}^{m-n+1}$  tales que

$$A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

con  $A$  de rango completo, entonces  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2 - (v^T d / \|v\|_2)^2$

6. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $\phi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ . Demuestre que:

a) existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  solución de minimizar  $\phi(x)$ ,

b)  $\bar{x}$  es solución del problema si y solo si  $A^T A \bar{x} = A^T b$ .

7. **Implemente** una función en **Python** llamada `sol_cuadmin` que dadas  $A$  y  $b$  retorne  $\bar{x}$  solución del problema de cuadrados mínimos, i.e.,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2.$$

Utilice la función del ejercicio 4 y resuelva un sistema triangular.

8. Sea  $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$ . Utilice **Python** para resolver el sistema lineal  $A(\epsilon)x = [1, 1, 1]$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  de dos formas distintas:

a) Utilizando la ecuación normal ( $A^T A x = A^T b$ ) y resolviendo el sistema lineal mediante LU.

b) Utilizando la descomposición QR con la implementación de `sol_cuadmin`.

9. Encuentre  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  solución de minimizar  $\|Ax - b\|_2^2$  para  $A \in \mathbb{R}^{n \times (n-2)}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$  con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & \ddots & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

usando los algoritmos de QR y Cholesky, para  $n = 100$  y  $n = 1000$ .

10. Se desea hallar la recta que ajuste los datos  $(x_i, y_i) = (i, i)$  para  $i = 1, \dots, 9$  y  $(x_{10}, y_{10}) = (10, 0)$ .
- a) Encuentre la solución de minimizar  $\|Ax - b\|_2^2$  usando `sol_cuadmin` del ejercicio 7.
  - b) Encuentre la solución de minimizar  $\|Ax - b\|_1$  usando `scipy.optimize.linprog`.
  - c) Encuentre la solución de minimizar  $\|Ax - b\|_\infty$  usando `scipy.optimize.linprog`.
  - d) Grafique simultaneamente las tres rectas y los datos.
11. Se desea contar con un modelo para pronosticar el comportamiento de un sistema desconocido. Para ello, contamos con valores de entrada  $u(t)$  y de salida  $y(t)$  para tiempos  $t = 0, \dots, N$ . Una estrategia, consiste en suponer que la salida depende de las últimas  $\tau + 1$  entradas, o sea,

$$y(t) \approx h_0 u(t) + h_1 u(t-1) + \dots + h_\tau u(t-\tau), \quad \text{para } t = \tau, \dots, N.$$

Descargue el archivo `dryer2.dat` (datos de una secadora industrial obtenidos de [DaISy](#)) donde los datos  $t$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  están en las columnas 1, 2 y 5, respectivamente.

- a) Grafique conjuntamente  $u(t)$  e  $y(t)$ .
- b) Entrene su modelo con  $\tau = 100$  y  $N = 500$ .
- c) Grafique su estimación  $y_{\text{est}}(t)$  junto a  $y(t)$  para  $t > N$ .