

**ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°1 - 2022**  
**Sistemas triangulares y descomposición de Cholesky**

1. Considere las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  particionadas como se indica:

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 \end{array} \right], \quad C = \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Muestre que  $AB = C$  y  $A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} = C_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ .

2. Sea  $A = [a^1 \dots a^m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Demuestre que si  $b = Ax$  entonces  $b = \sum_{j=1}^m x_j a^j$ .
3. a) **Implemente** dos funciones en **Python** que resuelvan  $Ax = b$ , donde  $A$  es una matriz triangular inferior. Deben utilizar el método de sustitución hacia adelante por filas y columnas, y llamarse `sol_trinffil` y `sol_trinfcil`, respectivamente, con  $A$  y  $b$  como entradas y  $x$  como salida. Además, la implementación debe verificar la existencia de ceros en las primeras entradas del vector  $b$  y evitar cálculos innecesarios.
- b) Implemente dos funciones en **Python**, llamadas `sol_trsupfil` y `sol_trsupcol`, análogas a las anteriores pero cuando  $A$  es una matriz triangular superior.
- c) Verifique sus funciones resolviendo los sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Calcule el número de operaciones de los 4 algoritmos del ejercicio 3.
5. Pruebe que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- a)  $A$  es definida positiva,
- b) todos los autovalores de  $A$  son positivos,
- c) para todo conjunto de índices  $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$ , las submatrices  $A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$  son definidas positivas.
6. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y definida positiva tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Demuestre que si  $A_{11}$  es no singular, entonces la matriz  $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  (llamada complemento de Schur de  $A_{11}$  en  $A$ ) es definida positiva.

7. **Implemente** una función en **Python** (llamada `nivel`) que reciba una lista de números positivos como input. La función debe generar una matriz  $2 \times 2$  simétrica y definida positiva aleatoria  $A$  y graficar las curvas de nivel de la función  $f(x) = x^T Ax$  correspondientes a los números de la lista de entrada (usar la función `contour` de `matplotlib.pyplot`).

8. Demuestre que:

- a) si  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva y  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tiene rango  $m$ , entonces  $A = X^T B X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es definida positiva.
- b) Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica semidefinida positiva y con núcleo cero, entonces  $A$  es definida positiva.

9. Demuestre que si  $A$  es simétrica definida positiva, existen  $L$  triangular inferior con unos en la diagonal y  $D$  diagonal con entradas positivas tales que  $A = LDL^T$ .

10. Sea  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ .

- a) Pruebe que  $A$  es simétrica y definida positiva.
- b) Calcule el factor de Cholesky  $G$  de  $A$ .
- c) Encuentre otras tres matrices triangulares superiores  $R$  tales que  $A = R^T R$ .

11. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas definidas positivas, y calcule el factor de Cholesky cuando sea posible:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

12. **Implemente** una función en **Python** (llamada `cholesky`) que calcule el factor de Cholesky de  $A$ .

13. Determine el número de flops del algoritmo del ejercicio 12 y utilícelo para encontrar el factor de Cholesky de

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

de dimensión  $n = 100$  y  $n = 1000$ .

14. **Implemente** una función en **Python** llamada `sol_defpos` que resuelva el sistema  $Ax = b$  para  $A$  definida positiva, mediante una descomposición de Cholesky y la resolución de dos sistemas triangulares.

15. Utilice la función del ejercicio 14 para resolver  $Ax = b$  con  $A$  del ejercicio 13 con  $n = 500$  y  $b_j = \exp(-(j - c)^2/100)$ , para los valores  $c = n/10, n/2, 9n/10$ . Para cada caso grafique  $b$  y  $x$ .

16. Se define, para  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \circ B$  como  $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$  (el producto elemento a elemento). Demuestre que:

- a) Si  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sus columnas son  $d_k$ , entonces  $(DD^T) \circ B = \sum_{k=1}^n \text{diag}(d_k) B \text{diag}(d_k)$
- b) Si  $A$  y  $B$  son simétricas definidas positivas,  $A \circ B$  es simétrica definida positiva.
- c) Si  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_dx^d$  con  $c_i \geq 0 \forall i$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica semidefinida positiva y se define  $Y = f(X)$  como:

$$Y_{ij} = f(X_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

entonces  $Y$  es semidefinida positiva.