ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°3 - 2021
Normas

1. Demuestre que para $p \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ y $\|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Concluya que
   a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
   b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.
   c) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
2. Demuestre que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.
3. Grafique la bola unidad $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ para $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.
4. *a*) Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, ¿qué condiciones debe cumplir una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$ para que la función $\|\cdot\|_A$ definida por $\|x\|_A = \|Ax\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ sea una norma vectorial?.
   b) Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, se define $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$. Demuestre que $\|\cdot\|_A$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$ y que $\sqrt{\lambda_{\text{mín}}(A)}\|x\|_2 \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A)}\|x\|_2$, con $\lambda_{\text{mín}}(A)$, $\lambda_{\text{máx}}(A)$ el mínimo y máximo autovalor de A. ¿Qué ocurre si $A = I$?.
5. La distancia Euclídea de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0,\ i = 1, \dots, n\}$ puede definirse como
   $$d(x) = \|\operatorname{máx}\{0, x\}\|_2,$$
   donde el máximo es tomado coordenada a coordenada.
   a) Demuestre que d cumple la desigualdad triangular.
   b) Encuentre una norma $\|\cdot\|$, tal que al cambiar $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|$, d no cumpla la desigualdad triangular.
6. Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial y sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Pruebe que la norma matricial inducida por $\|\cdot\|$ satisface que:
   a) es efectivamente una norma matricial.
   b) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   c) $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$.
   d) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (submultiplicatividad).
   e) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, entonces $\|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$.
   f) $\rho(A) \leq \|A\|$, $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $\rho(A) = \operatorname{máx}\{|\lambda| \mid \det(A - \lambda I) = 0\}$.
7. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\|A\|_2 = \underset{\|x\|_2=1}{\operatorname{máx}} \|Ax\|_2 = \underset{\|x\|_2=1,\, \|y\|_2=1}{\operatorname{máx}} y^T Ax$.
8. Demuestre que $\|A\|_{\text{máx}} = \underset{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}{\operatorname{máx}} |a_{ij}|$ es una norma matricial en $\mathbb{R}^{m\times n}$, pero no es submultiplicativa.
9. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demueste que:
   a) $\|A\|_{\text{máx}} \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{mn}\|A\|_{\text{máx}}$.
   b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$.
   c) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$.

10. Muestre que si $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

$$\left\| A\left(I - \frac{ss^T}{s^T s}\right)\right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{\|As\|_2^2}{\|s\|_2^2}.$$

11. Pruebe las siguientes afirmaciones:

    a) $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$,

    b) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$, para toda A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\|\cdot\|$ submultiplicativa,

    c) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\kappa_2(A) = 1$.

12. Considere el sistema
$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}.$$
El vector $\hat{x} = [20.97,\ -18.99]^T$ es una mala aproximación de la solución. Pruebe que los residuos $r_1(\hat{x})$, $r_2(\hat{x})$ y $r_\infty(\hat{x})$ son sin embargo pequeños. Así vemos que en un sistema mal condicionado casi no hay relación entre el tamaño del residuo y la exactitud de la solución.

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix}$.

    a) Calcule A^{-1} y $\kappa_\infty(A)$.

    b) Encuentre b, ϑ, x y ζ tales que $Ax = b$, $A(x+\zeta) = b+\vartheta$, $\dfrac{\|\vartheta\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ sea pequeño y $\dfrac{\|\zeta\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ sea grande.

    c) Encuentre b, ϑ, x y ζ tales que $Ax = b$, $A(x+\zeta) = b+\vartheta$, $\dfrac{\|\zeta\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ sea pequeño y $\dfrac{\|\vartheta\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ sea grande.

14. *a*) Sea $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Utilice `Python` para graficar $\det(A(\epsilon))$ y $\kappa_2(A(\epsilon))$ cuando $\epsilon \to 0$.

    b) Sea $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$. Utilice `Python` para graficar $\det(A(\epsilon))$ y $\kappa_2(A(\epsilon))$ cuando $\epsilon \to 0$.

    c) Implemente una función que, dado un ϵ como entrada, grafique la esfera unidad con norma 2 en $\mathbb{R}^2$ y su transformación a través de las matrices de los items anteriores. El gráfico debería mostrar las 3 esferas en la misma figura. Ejecutarla para $\epsilon \in \{0.25, 0.125, 0.0625, 1\mathrm{e}-5\}$.