ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°5 - 2022
Métodos iterativos para sistemas lineales

1. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$ y $x^* = A^{-1}b$, sean

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_A^2, \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_{A^{-1}}^2, \qquad f_3(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

Calcule el gradiente de cada función. Concluya que estas funciones difieren en a lo sumo una constante.

2. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $Ax^* = b$, sean

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_{A^TA}^2, \qquad g_2(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, \qquad g_3(x) = \frac{1}{2}x^T A^T Ax - x^T A^T b.$$

Calcule el gradiente de cada función. Concluya que estas funciones difieren en a lo sumo una constante.

3. Sea A simétrica y definida positiva, verificar que la ecuación $< x, y >_A = x^T Ay$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea A una matriz simétrica y definida positiva en $\mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $Q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$.

   a) Demostrar que $\nabla Q(x) = Ax - b$ y $\nabla^2 Q(x) = A$.
   b) Demostrar que el valor mínimo de Q es $b^T A^{-1} b$.

5. Sea A simétrica definida positiva. Demuestre que las direcciones A-conjugadas son linealmente independientes.

6. Sea A una matriz definida positiva y simétrica, y b un vector fijo. Para todo x, el vector residuo se define como $r = b - Ax$, y el vector error $e = x - A^{-1}b$. Demostrar que el A-producto interno entre el vector error y el vector residuo es negativo, a menos que $Ax = b$.

7. Sea $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva y $b \in \mathbb{R}^n$. Probar que en el método del gradiente con paso óptimo se satisface:

$$q(x^{(k+1)}) = q(x^{(k)}) - \frac{\|r^{(k)}\|_2^4}{< r^{(k)}, Ar^{(k)} >}.$$

8. **Implemente** una función, llamada `sol_gradopt`, que ejecute el método del gradiente con paso óptimo.

9. **Implemente** una función, llamada `sol_Richardson`, que ejecute el método del gradiente con paso constante óptimo (método de Richarson).

10. **Implemente** una función, llamada `sol_gradcon`, que ejecute el método de los gradientes conjugados.

11. Usar las implementaciones de los tres ejercicios anteriores para resolver los siguientes sistemas $Ax = b$. Analizar los resultados obtenidos.

   a)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -5/6 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Para $n = 5, 10, 15, 20$, definimos la matriz A por $A(i,i) = 4$ para $i = 1, \dots, n$ y (-1) en todos los elementos de la subdiagonal y de la supradiagonal, y el vector b, con todos sus elementos iguales a 1.

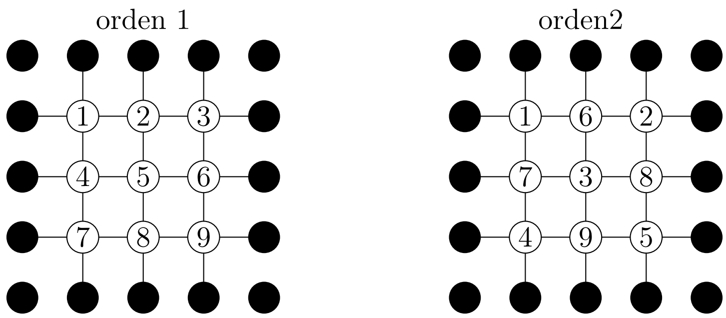
d) Igual al item anterior, reemplazando el elemento $A(1,1)$ por 10, 100 y 1000.

e) A es la matriz de Hilbert: $a_{ij} = (i+j+1)^{-1}, 1 \leq i,j \leq n$ y $b_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

12. Se desea determinar la temperatura en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ sabiendo que la temperatura en la frontera es dada por una función g. Tomando una grilla cuadrada de n nodos equiespaciados, el problema se reduce a encontrar $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de elementos u_{ij} que cumplan

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0 \quad &\text{para} \quad i,j = 2, \dots, n-1, \\ u_{1j} = g(0, \xi_j) \text{ y } u_{nj} = g(1, \xi_j) \quad &\text{para} \quad j = 1, \dots, n, \\ u_{i1} = g(\xi_i, 0) \text{ y } u_{in} = g(\xi_i, 1) \quad &\text{para} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

con $h = 1/(n-1)$ y $\xi_j = (j-1)h$. Este problema es equivalente a resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde $A \in \mathbb{R}^{(n-2)^2\times(n-2)^2}$ y $x, b \in \mathbb{R}^{(n-2)^2}$. Note que existen $(n-2)^2!$ formas de ordenar las incógnitas $\{u_{ij}\}_{i,j=2}^{n-1,n-1}$ en las componentes de x. Por ejemplo:



Cuadro 1: Grafo de $U \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ con orden por filas (1) y tablero de damas (2)

Escriba una función llamada `calor_2d` con entrada n y salidas A y b para el orden 1. Para la frontera utilice g que vale 100 en el borde izquierdo y 0 en los otros bordes. Construya la matriz utilizando `scipy.sparse.csr_matrix`.

Resuelva el sistema y compare los tiempos de ejecución de todos los métodos de los ejercicios 8, 9 y 10 al resolver $Ax = b$ dadas por el ejercicio 12 para $n = 50$ y $n = 100$.