ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°3 - 2025
Normas

1. Demuestre que para $p \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ y $\|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Concluya que

   a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
   b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.
   c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.
   d) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

2. Grafique la bola unidad $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ para $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

3. *a)* Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, ¿qué condiciones debe cumplir una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$ para que la función $\|\cdot\|_A$ definida por $\|x\|_A = \|Ax\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ sea una norma vectorial?.
   b) Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, se define $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$. Demuestre que $\|\cdot\|_A$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$ y que $\sqrt{\lambda_{\text{mín}}(A)}\|x\|_2 \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\lambda_{\text{máx}}(A)}\|x\|_2$, con $\lambda_{\text{mín}}(A)$, $\lambda_{\text{máx}}(A)$ el mínimo y máximo autovalor de A. ¿Qué ocurre si $A = I$?.

4. Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial y sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Pruebe que la norma matricial inducida por $\|\cdot\|$ satisface que:

   a) es efectivamente una norma matricial.
   b) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   c) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (submultiplicatividad).

5. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1,\, \|y\|_2=1} y^T Ax$.

6. Demuestre que $\|A\|_{\text{máx}} = \max\limits_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|$ es una norma matricial en $\mathbb{R}^{m\times n}$, pero no es submultiplicativa.

7. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demueste que:

   a) $\|A\|_{\text{máx}} \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{mn}\|A\|_{\text{máx}}$.
   b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$.
   c) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$.

8. Muestre que si $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

$$\left\| A\left(I - \frac{ss^T}{s^Ts}\right)\right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{\|As\|_2^2}{\|s\|_2^2}.$$

9. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$,
   b) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$, para toda A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\|\cdot\|$ submultiplicativa,
   c) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\kappa_2(A) = 1$.

10. *a)* Sea $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$. Graficar sus determinantes y números de condición cuando $\epsilon \to 0$.
    b) **Implemente** una función que, dado un ϵ como entrada, grafique la esfera unidad con norma 2 en $\mathbb{R}^2$ y su transformación a través de las matrices de los items anteriores. El gráfico debería mostrar las 3 esferas en la misma figura. Ejecutarla para $\epsilon \in \{0.25, 0.125, 0.0625, 1\text{e}-5\}$.