ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°5 - 2025
Valores singulares

1. Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene valores singulares $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$, entonces $\|(A^TA)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-2}$, $\|(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = \sigma_n^{-1}$, $\|A(A^TA)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$ y $\|A(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = 1$.

2. Demuestre que dados $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $r < \min\{m,n\}$, existe $A_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $\min\{m,n\}$ tal que $\|A - A_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$.

3. Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, defina $B(\lambda) = (A^TA + \lambda I)^{-1}A^T$ con $\lambda > 0$. Demuestre que si $p = \min\{m,n\}$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0$ son los valores singulares de A y $A^\dagger$ es su pseudo inversa, entonces
$$\|B(\lambda) - A^\dagger\|_2 = \frac{\lambda}{\sigma_r(\sigma_r^2 + \lambda)}.$$
   Concluya que $B(\lambda) \to A^\dagger$ si $\lambda \to 0^+$.

NOTA: Para ejercicios 4 al 6 pueden obtener la descomposición SVD con Numpy (`np.linalg.svd`)

4. **Implemente** una función llamada `cuad_min_svd` que reciba una matriz A y un vector b y resuelva el problema de cuadrados mínimos min $\|Ax - b\|_2^2$ mediante la descomposición SVD, dando como salida x y $\|Ax - b\|_2$. Probar la implementación leyendo A y b desde `A_p5e4.txt` y `b_p5e4.txt`, respectivamente. Comparar la norma 2 de esta solución, con la solución obtenida mediante cuadrados mínimos con QR.

5. **Implemente** una función llamada `im_aprox_svd` que reciba como entradas una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y una tolerancia `tol` (este número puede no ser pequeño) y que realice lo siguiente:

   - Obtener la descomposición SVD de A,
   - Hallar $k \in \{1, \ldots, \min\{m,n\}\}$ tal que $\sigma_{k+1} \leq$ `tol`.
   - Calcular $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u^i (v^i)^T$, aproximación hasta el valor singular k de A. Note que $\|A - A_k\|_2 \leq$ `tol`.
   - Mostrar ambas matrices en pantalla como imágenes (usar `plt.imshow`).
   - Probar la función implementada con la matriz en `p5e5.txt`, con `tol`$= 2000$.

6. **Reducción de Dimensionalidad para Visualización:** El archivo `iris.data` contiene un conjunto de datos de plantas de la familia Iris, donde la última columna indica a qué variedad de Iris pertenece la planta estudiada (0-setosa, 1-versicolour o 2-virginica). Para cada planta se obtuvieron 4 atributos (longitud y ancho del sépalo, longitud y ancho del pétalo, respectivamente). Conseguir la descomposición SVD de la matriz de los datos (sin la columna de la clase) y graficar los puntos formados por las primeras dos columnas de U (un punto por fila). Colorear cada punto de acuerdo a la clase que le corresponde.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango r. Si $U = [u^1 \ldots u^m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v^1 \ldots v^n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y Σ diagonal con entradas $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ corresponden a la descompsición SVD de A, entonces la matriz $A^\dagger$ (pseudoinversa de A) satisface
$$A^\dagger u^i = \begin{cases} v^i \sigma_i^{-1} & i = 1, \ldots, r \\ 0 & i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$