

ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°1 - 2025
Matrices por bloques, sistemas triangulares y descomposición de Cholesky

1. Considere las matrices A , B y C particionadas como se indica:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 \end{array} \right], \quad C = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Muestre que $AB = C$ y $A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} = C_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

2. Sean $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, m\}$ y $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$ conjuntos de índices. Definir una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en **Python** con $m = 9$ filas y $n = 6$ columnas.

Sugerencia: emplear la librería **Numpy** para generar a la matriz ya sea utilizando `np.random` o `np.range`.

- a) Dada la matriz A , imprimir

- i. todos los elementos de la columna n y fila $m - 1$,
- ii. todos los elementos de la columna n hasta (sin contar) $m - 2$ y fila $m - 1$ hasta (sin contar) $n - 2$,
- iii. todos los elementos de la columna $m - n$ desde $n - 2$ hasta (sin contar) $m - 2$.
- iv. todos los elementos del bloque indexado por $\mathcal{I} = \{n, \dots, m - 1\}$ y $\mathcal{J} = \{2, \dots, n - 1\}$.

- b) Implemente en **Python** un generador de matrices en bloques de A , es decir, retornar $A_{\mathcal{I}_j \mathcal{J}_j}$ con $\mathcal{I}_j = \{1, \dots, j\}$ para $j = 1, \dots, m$.

3. Considere las siguiente matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) Construya en **Python** la siguiente matriz por bloques

$$C = \begin{bmatrix} A & -I & 0 \\ -I & B & -I \\ 0 & -I & A \end{bmatrix},$$

donde I es la matriz identidad.

- b) Para cada caso encontrar X_i , con $i = 1, 2, 3$, tal que para cada bloque de C satisfase

$$X_1^T C X_1 = \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & B \end{bmatrix}, \quad X_2^T C X_2 = B, \quad \text{y} \quad X_3^T C X_3 = \begin{bmatrix} B & -I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$

- c) Sean los conjuntos de índices $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{1, \dots, 9\}$. Utilice **Numpy** y concluya que

- i. $X_1^T C X_1$ esta indexado por $\mathcal{I}_1 = \{1, \dots, 6\}$ y $\mathcal{J}_1 = \{1, \dots, 6\}$,
- ii. $X_2^T C X_2$ esta indexado por $\mathcal{I}_2 = \{4, \dots, 6\}$ y $\mathcal{J}_2 = \{4, \dots, 6\}$,
- iii. $X_3^T C X_3$ esta indexado por $\mathcal{I}_3 = \{6, \dots, 9\}$ y $\mathcal{J}_3 = \{6, \dots, 9\}$.

4. a) Sea $A = [a^1 \dots a^m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Demuestre que si $b = Ax$ entonces $b = \sum_{j=1}^m x_j a^j$.
 b) Sean $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ las n columnas de A y $b_*^1, \dots, b_*^n \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ las n filas de B . Demuestre que $AB = \sum_{i=1}^n a^i b_*^i$.

5. a) **Implemente** dos funciones en `Python` que resuelvan $Ax = b$, donde A es una matriz triangular inferior. Deben utilizar el método de sustitución hacia adelante por filas y columnas, y llamarse `sol_trinffil` y `sol_trinfcil`, respectivamente, con A y b como entradas y x como salida. Además, la implementación debe verificar la existencia de ceros en las primeras entradas del vector b y evitar cálculos innecesarios.
- b) Implemente dos funciones en `Python`, llamadas `sol_trsupfil` y `sol_trsupcol`, análogas a las anteriores pero cuando A es una matriz triangular superior.
- c) Verifique sus funciones resolviendo los sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Pruebe que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, las siguientes son equivalentes:

- A es definida positiva,
- todos los autovalores de A son positivos,
- para todo conjunto de índices $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, las submatrices $A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ son definidas positivas.

7. Demuestre que:

- si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva y $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tiene rango m , entonces $A = X^T B X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es definida positiva.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica semidefinida positiva y con núcleo cero, entonces A es definida positiva.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Demuestre que si A_{11} es no singular, entonces la matriz $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ (llamada complemento de Schur de A_{11} en A) es definida positiva.

9. **Implemente** una función en `Python` (llamada `nivel`) que reciba una lista de números positivos como input. La función debe generar una matriz 2×2 simétrica y definida positiva aleatoria A y graficar las curvas de nivel de la función $f(x) = x^T A x$ correspondientes a los números de la lista de entrada (usar la función `contour` de `matplotlib.pyplot`).
10. Demuestre que si A es simétrica definida positiva, existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con entradas positivas tales que $A = LDL^T$.

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

- Pruebe que A es simétrica y definida positiva.
- Calcule el factor de Cholesky G de A .

c) Encuentre otras tres matrices triangulares superiores R tales que $A = R^T R$.

12. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas definidas positivas, y calcule el factor de Cholesky cuando sea posible:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

13. **Implemente** una función en **Python** (llamada `cholesky`) que calcule el factor de Cholesky de A . Testeé el funcionamiento del algoritmo con la siguiente matriz

$$B^* = \begin{bmatrix} B & -I & 0 \\ -I & B & -I \\ 0 & -I & B \end{bmatrix},$$

donde B es la matriz definida en el ejercicio 3 e I es la matriz identidad.

14. **Implemente** una función en **Python** llamada `sol_defpos` que resuelva el sistema $Ax = b$ para A definida positiva, mediante una descomposición de Cholesky y la resolución de dos sistemas triangulares.

15. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

de dimensión $n \times n$. Utilice la función del ejercicio 14 para resolver $Ax = b$ para un $n = 500$ y $b_j = \exp(-(j - c)^2/100)$, para los valores $c = n/10, n/2, 9n/10$. Para cada caso grafique b y x .

16. Se define, para $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \circ B$ como $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (el producto elemento a elemento). Demuestre que:

- Si $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sus columnas son d_k , entonces $(DD^T) \circ B = \sum_{k=1}^n \text{diag}(d_k) B \text{diag}(d_k)$
- Si A y B son simétricas definidas positivas, $A \circ B$ es simétrica definida positiva.
- Si $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_dx^d$ con $c_i \geq 0 \forall i$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica semidefinida positiva y se define $Y = f(X)$ como:

$$Y_{ij} = f(X_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

entonces Y es semidefinida positiva.