Segundo Parcial

`Nombre:` ______________________________

1. Determinar los autovalores, el determinante y los valores singulares de un reflector de Householder.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz con la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star \end{bmatrix},$$

es decir, triangular superior con su última fila no nula.

   a) Dar el conteo operacional de realizar la descomposición QR de esta matriz utilizando rotaciones de Givens teniendo en cuenta su estructura.

   b) Implementar este método. La función debe llamarse `qr_sa` y debe recibir como entrada la matriz A y retornar las matrices Q y R de su descomposición.

   c) Probar este método con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Verdadero o Falso. Justificar

   a) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es no singular y $A = U\Sigma V^T$ su descomposición SVD. Entonces la SVD de $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$

   b) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y r el rango de A. Existen las matrices ortogonales $\hat{U} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, y una matriz $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ con $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ y $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$ tales que $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$

   c) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $A = U\Sigma V^T$ su descomposición SVD. Si $A = A^\dagger$ entonces todos sus valores singulares son unos, es decir, $\sigma_i = 1 \ \forall\, i = 1, \dots, \min\{m, n\}$.

4. El número de condición de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede estimarse, en norma 2, como

$$\kappa_2(A) \approx \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|.$$

   a) Describir un algoritmo que, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, estime $\kappa_2(A)$ aproximando λ_1 y λ_n mediante el método de iteraciones QR.

   b) Implementar el algoritmo en `Python` y ejecutarlo con la siguiente matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$