Primer Parcial

Nombre: ____________________

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\mathrm{Ker}(A)$ es nulo, encontrar una base del núcleo de $B = [A\ A]$.

2. Se quiere resolver un sistema de la forma $Ax = b$, donde A es simétrica, definida positiva y tiene estructura de “flecha":

$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \star & \ddots & 0 & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

es decir, A es diagonal excepto por su última fila y su última columna, las cuales pueden ser diferentes de cero.

   a) Determinar la cantidad de operaciones necesarias para obtener la descomposición de Cholesky de A, aprovechando su estructura.

   b) Implementar el algoritmo en `Python` y utilizarlo para resolver $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 243 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 28 \\ 82 \\ 247 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva, y sea $A = G^T G$ su descomposición de Cholesky. Mostrar que existe la descomposción LU de A y que es única. Dar los factores de L y U en términos de G.

4. Considerar la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

   a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para evitar pivots nulos al realizar la descomposición LU.

   b) Implementar una función en `Python` cuyas entradas sean los números a, b y c. La función debe verificar las condiciones y devolver los factores L y U. Caso contrario, imprimir el mensaje "no se satisfacen las condiciones".

5. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular:

   a) Si $||.||$ es una norma inducida, entonces $\|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$,

   b) $\kappa_F(A) \geq \sqrt{n}$.