ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°1 - 2025
Matrices por bloques, sistemas triangulares y descomposición de Cholesky

1. Considere las matrices A, B y C particionadas como se indica:

$$A = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ \hline -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

   Muestre que $AB = C$ y $A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} = C_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

2. Sean $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, m\}$ y $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$ conjuntos de índices. Definir una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en `Python` con $m = 9$ filas y $n = 6$ columnas.

   Sugerencia: emplear la librería `Numpy` para generar a la matriz ya sea utilizando `np.random` o `np.range`.

   a) Dada la matriz A, imprimir
      - i. todos los elementos de la columna n y fila $m - 1$,
      - ii. todos los elementos de la columna n hasta (sin contar) $m - 2$ y fila $m - 1$ hasta (sin contar) $n - 2$,
      - iii. todos los elementos de la columna $m - n$ desde $n - 2$ hasta (sin contar) $m - 2$.
      - iv. todos los elementos del bloque indexado por $\mathcal{I} = \{n, \dots, m-1\}$ y $\mathcal{J} = \{2, \dots, n-1\}$.

   b) Implemente en `Python` un generador de matrices en bloques de A, es decir, retornar $A_{\mathcal{I}_j\mathcal{I}_j}$ con $\mathcal{I}_j = \{1, \dots, j\}$ para $j = 1, \dots, \text{mín}(m, n)$.

3. Considere las siguiente matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) Construya en `Python` la siguiente matriz por bloques

$$C = \begin{bmatrix} A & -I & 0 \\ -I & B & -I \\ 0 & -I & A \end{bmatrix},$$

   donde I es la matriz identidad.

   b) Para cada caso encontrar X_i, con $i = 1, 2, 3$, tal que para cada bloque de C satisfase

$$X_1^T C X_1 = \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & B \end{bmatrix}, \quad X_2^T C X_2 = B, \quad \text{y} \quad X_3^T C X_3 = \begin{bmatrix} B & -I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$

   c) Sean los conjuntos de índices $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{1, \dots, 9\}$. Utilice `Numpy` y concluya que
      - i. $X_1^T C X_1$ esta indexado por $\mathcal{I}_1 = \{1, \dots, 6\}$ y $\mathcal{J}_1 = \{1, \dots, 6\}$,
      - ii. $X_2^T C X_2$ esta indexado por $\mathcal{I}_2 = \{4, \dots, 6\}$ y $\mathcal{J}_2 = \{4, \dots, 6\}$,
      - iii. $X_3^T C X_3$ esta indexado por $\mathcal{I}_3 = \{4, \dots, 9\}$ y $\mathcal{J}_3 = \{4, \dots, 9\}$.

4. *a*) Sea $A = [a^1 \ \dots \ a^m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Demuestre que si $b = Ax$ entonces $b = \sum_{j=1}^{m} x_j a^j$.

   b) Sean $a^1, \ \dots \ , a^n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ las n columnas de A y $b_*^1, \ \dots \ , b_*^n \in \mathbb{R}^{1\times m}$ las n filas de B. Demuestre que $AB = \sum_{i=1}^{n} a^i b_*^i$.

5. *a*) **Implemente** dos funciones en `Python` que resuelvan $Ax = b$, donde A es una matriz triangular inferior. Deben utilizar el método de sustitución hacia adelante por filas y columnas, y llamarse `sol_trinffil` y `sol_trinfcol`, respectivamente, con A y b como entradas y x como salida. Además, la implementación debe verificar la existencia de ceros en las primeras entradas del vector b y evitar cálculos innecesarios.

   b) Implemente dos funciones en `Python`, llamadas `sol_trsupfil` y `sol_trsupcol`, análogas a las anteriores pero cuando A es una matriz triangular superior.

   c) Verifique sus funciones resolviendo los sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Pruebe que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, las siguientes son equivalentes:

   a) A es definida positiva,

   b) todos los autovalores de A son positivos,

   c) para todo conjunto de índices $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, las submatrices $A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$ son definidas positivas.

7. Demuestre que:

   a) si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva y $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m, entonces $A = X^T B X \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es definida positiva.

   b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica semidefinida positiva y con núcleo cero, entonces A es definida positiva.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad n_1 + n_2 = n.$$

   Demuestre que si A_{11} es no singular, entonces la matriz $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ (llamada complemento de Schur de A_{11} en A) es definida positiva.

9. **Implemente** una función en `Python` (llamada `nivel`) que reciba una lista de números positivos como input. La función debe generar una matriz 2×2 simétrica y definida positiva aleatoria A y graficar las curvas de nivel de la función $f(x) = x^T Ax$ correspondientes a los números de la lista de entrada (usar la función `contour` de `matplotlib.pyplot`).

10. Demuestre que si A es simétrica definida positiva, existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con entradas positivas tales que $A = LDL^T$.

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

   a) Pruebe que A es simétrica y definida positiva.

   b) Calcule el factor de Cholesky G de A.

c) Encuentre otras tres matrices triangulares superiores R tales que $A = R^T R$.

12. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas definidas positivas, y calcule el factor de Cholesky cuando sea posible:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

13. **Implemente** una función en `Python` (llamada `cholesky`) que calcule el factor de Cholesky de A. Testeé el funcionamiento del algoritmo con la siguiente matriz

$$B^* = \begin{bmatrix} B & -I & 0 \\ -I & B & -I \\ 0 & -I & B \end{bmatrix},$$

donde B es la matriz definida en el ejercicio 3 e I es la matriz identidad.

14. **Implemente** una función en `Python` llamada `sol_defpos` que resuelva el sistema $Ax = b$ para A definida positiva, mediante una descomposición de Cholesky y la resolución de dos sistemas triangulares.

15. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

de dimensión $n \times n$. Utilice la función del ejercicio 14 para resolver $Ax = b$ para un $n = 500$ y $b_j = \exp(-(j-c)^2/100)$, para los valores $c = n/10,\ n/2,\ 9n/10$. Para cada caso grafique b y x.

16. Se define, para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \circ B$ como $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (el producto elemento a elemento). Demuestre que:

a) Si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sus columnas son d_k, entonces $(DD^T) \circ B = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{diag}(d_k) B \operatorname{diag}(d_k)$

b) Si A y B son simétricas definidas positivas, $A \circ B$ es simétrica definida positiva.

c) Si $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_d x^d$ con $c_i \geq 0\ \forall i$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica semidefinida positiva y se define $Y = f(X)$ como:

$$Y_{ij} = f(X_{ij}),\ \ i, j = 1, \ldots, n$$

entonces Y es semidefinida positiva.