PRÁCTICO 5

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Ejercicio 1. Desarrolle un método para generar una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad es

a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{2-x/3}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6(x+3)}{35} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{6x^2}{35} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(4x)}{4} & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } 0 < x \leq \frac{15}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Ejercicio 2.

a) Desarrolle métodos para generar las siguientes variables aleatorias

i) Distribución Pareto

$$f(x) = ax^{-(a+1)} \quad 1 \leq x < \infty, \quad a > 0$$

ii) Distribución Erlang

$$f(x) = \frac{x^{k-1}\exp(-x/\mu)}{(k-1)!\mu^k} \quad 0 \leq x < \infty, \quad \mu > 0, \quad k \text{ entero}$$

iii) Distribución Weibull

$$f(x) = \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1}\exp(-(x/\lambda)^{\beta}) \quad 0 \leq x, \quad \lambda > 0, \quad \beta > 0$$

Ayuda: la distribución Pareto y la distribución Weibull tienen distribución acumulada F con forma cerrada, por lo cual puede aplicarse el método de la transformada Inversa. La distribución de Erlang pertenece a la familia de las Gammas. Puede simularse por rechazo o como suma de exponenciales.

b) Estime la media de cada variable con 10.000 repeticiones, usando los parámetros $a = 2, \quad \mu = 2, \quad k = 2, \quad \lambda = 1, \quad \beta = 2$. Busque en la web los valores de las esperanzas para cada variable con estos parámetros (cuidado con las parametrizaciones) y compare los valores obtenidos.

Ejercicio 3. *Método de la composición:*

a) Suponga que es relativamente fácil generar n variables aleatorias a partir de sus distribuciones de probabilidad $F_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Implemente un método para generar una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x).$$

donde $p_i,\ i = 1, \ldots, n$, son números no negativos cuya suma es 1.

b) Genere datos usando tres exponenciales independientes con media 3, 5 y 7 respectivamente y $p = (0.5, 0.3, 0.2)$. Calcule la esperanza exacta de la mezcla y estime con 10.000 repeticiones. Tenga cuidado con la parametrización que este usando!!

Ejercicio 4. Desarrolle un método para generar la variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \int_0^{\infty} x^y e^{-y} dy\,,\ \ 0 \leq x \leq 1\,.$$

Piense en el método de composición del ejercicio anterior. En particular, sea F la función de distribución de X y suponga que la distribución condicional de X dado $Y = y$ es

$$P(X \leq x | Y = y) = x^y\,,\ \ 0 \leq x \leq 1\,.$$

Ejercicio 5.

a) Considere que es sencillo generar una variable aleatoria a partir de cualquiera de las distribuciones F_i, $i = 1, \ldots, n$. Explique cómo generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

i) $F_M(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

ii) $F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(x))$

Sugerencia: Si X_i, $i = 1, \ldots, n$, son variables aleatorias independientes, donde X_i tiene distribución F_i, ¿cuál variable aleatoria tiene como distribución a F en cada caso?

b) Genere una muestra de 10 valores de las variables M y m con distribuciones F_M y F_m si X_i son exponenciales independientes con parámetros 1, 2 y 3 respectivamente.

Ejercicio 6. Utilice el método del rechazo y los resultados del ejercicio anterior para desarrollar otros dos métodos, además del método de la transformada inversa, para generar una variable aleatoria con distribución de probabilidad

$$F(x) = x^n\,,\ \ 0 \leq x \leq 1\,.$$

Analice la eficiencia de los tres métodos para generar la variable a partir de F.

Ejercicio 7.

a) Desarrolle dos métodos para generar una variable aleatoria X con densidad de probabilidad:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

i) Aplicando Transformada inversa.
ii) Aplicando el método de aceptación y rechazo con una variable uniforme.

b) Compare la eficiencia de ambos métodos realizando 10.000 simulaciones y comparando el promedio de los valores obtenidos. Compruebe que se obtiene un valor aproximado del valor esperado de X.

c) Estime la probabilidad $P(X \leq 2)$ y compárela con el valor real.

Ejercicio 8.

a) Sean U y V dos variables aleatorias uniformes en $(0,1)$ e independientes. Pruebe que la variable $X = U + V$ tiene una densidad *triangular*:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) Desarrolle tres algoritmos que simulen la variable X:

i) Usando la propiedad que X es suma de dos uniformes.
ii) Aplicando transformada inversa.
iii) Con el método de rechazo.

c) Compare la eficiencia de los tres algoritmos. Para cada caso, estimar el valor esperado promediando 10.000 valores simulados, ¿Para qué valor x_0 se cumple que $P(X > x_0) = 0.125$?

d) Compare la proporción de veces que el algoritmo devuelve un número mayor que x_0 con esta probabilidad.

Ejercicio 9. Escriba tres programas para generar un variable aleatoria normal patrón, usando

a) generación de variables exponenciales según el ejemplo $5f$ del libro *Simulacion* de S. M. Ross,

b) el método polar,

c) el método de razón entre uniformes.

Pruebe los códigos calculando la media muestral y varianza muestral de 10.000 valores generados con los tres métodos.

Ejercicio 10. Sea en par (X,Y) uniformemente distribuído en un círculo de radio 1. Muestre que si R es la distancia del punto (X,Y) al centro del círculo, entonces R^2 está uniformemente distribuida en el intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 11. Una variable aleatoria X tiene distribución de Cauchy con parámetro $\lambda > 0$ si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\pi\left(1 + \left(x/\lambda\right)^2\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Implemente el método de razón entre uniformes para simular X con parámetro $\lambda = 1$. Para esto:

1. Pruebe que el conjunto $C_f = \{(u,v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$ es el semicírculo derecho centrado en $(0,0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.

2. Desarrolle un algoritmo CAUCHY( ) que genere pares (U,V) con distribución uniforme en C_f, y devuelva $X = V/U$. Entonces X tiene la distribución deseada. ¿Es necesario utilizar el valor de π?

b) Pruebe que si X tiene distribución de Cauchy con parámetro 1, entonces λX tiene distribución de Cauchy con parámetro λ.

c) Utilice esta propiedad para modificar el algoritmo anterior, e implementar CAUCHY(LAMDA) que simule una variable X con distribución de Cauchy de parámetro λ.

d) Realice 10.000 simulaciones y calcule la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.

Ejercicio 12. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy de parámetro λ.

a) Calcule la función de distribución acumulada F_X.

b) Simule X aplicando el método de transformada inversa.

c) Indique si es posible generar X por el método de aceptación y rechazo, rechazando con una variable aleatoria normal.

d) Realice 10000 simulaciones y calcular la proporción de veces que el resultado cae en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, para $\lambda = 1$, $\lambda = 2.5$ y $\lambda = 0.3$. Compare con la probabilidad teórica.

e) Compare la eficiencia de este algoritmo con el *método de razón entre uniformes*.

Ejercicio 13. Escriba un programa que calcule el número de eventos y sus tiempos de arribo en las primeras T unidades de tiempo de un proceso de Poisson homogéneo con parámetro λ.

Ejercicio 14. Los autobuses que llevan los aficionados a un encuentro deportivo llegan a destino de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de cinco por hora. La capacidad de los autobuses es una variable aleatoria que toma valores en el conjunto: $\{20, 21, \ldots, 40\}$ con igual probabilidad. A su vez, las capacidades de dos autobuses distintos son variables independientes. Escriba un algoritmo para simular la llegada de aficionados al encuentro en el instante $t = 1$ hora.

Ejercicio 15.

a) Escriba un programa que utilice el algoritmo del adelgazamiento para generar el numero de eventos y las primeras unidades de tiempo de un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

i)
$$\lambda(t) = 3 + \frac{4}{t+1}, \qquad 0 \leq t \leq 3$$

ii)
$$\lambda(t) = (t-2)^2 - 5t + 17, \qquad 0 \leq t \leq 5$$

iii)
$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 - \frac{t}{6} & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en los intervalos indicados.

b) Indique una forma de mejorar el algoritmo de adelgazamiento para estos ejemplos usando al menos 3 intervalos.