PRÁCTICO 3

NÚMEROS ALEATORIOS Y MÉTODO DE MONTE CARLO.

Ejercicio 1. Para el estudio mediante simulación es necesario generar muchos números aleatorios en la computadora. Estos corresponden a variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $(0,1)$. Existen en la literatura varias rutinas portables, optimizadas para generar enormes cantidades de números pseudo-aleatorios con velocidad razonable.

a) Determinar el período de la secuencia de von Neumann generada a partir de la semilla:

i) 3009 ii) 7600 iii) 1234 iv) 4321

b) Dar el valor de c y de a para que cada generador tenga período máximo.

$$y_{i+1} = 5y_i + c \mod (2^5), \qquad x_{i+1} = ax_i \mod (31)$$

Considerar el generador $z_i = y_i + x_i \mod (2^5)$ y calcular su período.

Representar en tres gráficos separados pares (y_i, y_{i+1}), (x_i, x_{i+1}) y (z_i, z_{i+1}).

c) Indicar en cuáles de los siguientes casos el generador

$$y_{i+1} = ay_i + c \mod (M)$$

genera una secuencia de período máximo.

- $a = 125$, $c = 3$, $M = 2^9$
- $a = 123$, $c = 3$, $M = 2^9$
- $a = 5$, $c = 0$, $M = 71$
- $a = 7$, $c = 0$, $M = 71$

d) Utilice el generador RANDU

$$u_i = a \cdot u_{i-1} \mod (M), \qquad a = 2^{16} + 3, \quad M = 2^{31},$$

para generar puntos aleatorios en el cubo $[0,M) \times [0,M] \times [0,M)$, de la forma:

$$(u_1, u_2, u_3), (u_4, u_5, u_6), \ldots$$

y estimar el porcentaje de puntos que caen en la esfera centrada en $(M/2, M/2, M/2)$ de radio $M/10$.

Repetir el procedimiento con el generador

$$y_i = a \cdot y_{i-1} \mod (M), \qquad a = 7^5, \quad M = 2^{31} - 1.$$

¿Cuál de los dos generadores estima mejor el valor real?

Ejercicio 2. Se propone el siguiente juego en el cual todas las variables aleatorias que se generan son **independientes** e idénticamente distribuidas $\mathcal{U}(0,1)$: Se simula la variable aleatoria U. Si $U < \frac{1}{2}$, se suman dos nuevos números aleatorios $W_1 + W_2$. Pero si $U \geq \frac{1}{2}$, se suman tres números aleatorios. El resultado de la suma, en cualquiera de los casos, es una variable aleatoria X. Se gana en el juego si $X \geq 1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.

b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de ganar, esto es, la fracción de veces que se gana en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \geq 1]$					

Ejercicio 3. Las maquinas tragamonedas usualmente generan un premio cuando hay un acierto. Supongamos que se genera el acierto con el siguiente esquema: se genera un número aleatorio, y

i) si es menor a un tercio, se suman dos nuevos números aleatorios

ii) si es mayor o igual a un tercio, se suman tres números aleatorios .

Si el resultado de la suma es menor o igual a 2, se genera un acierto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar?.

b) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de acertar, esto es, la fracción de veces que se acierta en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$P[X \leq 2]$					

Ejercicio 4. Un supermercado posee 3 cajas, de las cuales, por una cuestión de ubicación, el 40 % de los clientes eligen la caja 1 para pagar, el 32 % la caja 2, y el 28 % la caja 3. El tiempo que espera una persona para ser atendida en cada caja distribuye exponencial con medias de 3, 4 y 5 minutos respectivamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere menos de 4 minutos para ser atendido?

b) Si el cliente tuvo que esperar más de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente haya elegido cada una de las cajas?

c) Simule el problema y estime las probabilidades anteriores con 1000 iteraciones.

Ejercicio 5. Calcule exactamente el valor de las siguientes integrales. Mediante una simulación de Monte Carlo con n iteraciones, calcule a su vez un valor aproximado y compare con el valor exacto.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} dx$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x\left(1+x^2\right)^{-2} dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 e^{(x+y)^2} dx\right] dy$

f) $\int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-(x+y)}\, dy\right] dx$

Ayuda: Sea: $I_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x \\ 0 & \text{si } y \geq x \end{cases}$. Utilice esta función para igualar la integral del item **f)** a otra cuyos términos vayan de 0 a ∞.

Completar la siguiente tabla:

n	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	**(f)**	$\longleftarrow$ integral
100							
1000							
10000							
100000							
1000000							

Ejercicio 6. Es posible aproximar el valor de π calculando el área de un círculo de radio 1 centrado en 0. Para eso, se necesitan generar N puntos aleatorios en la caja $[-1,1]\times[-1,1]$ y contar la cantidad de veces que los mismos caen dentro del círculo. El cociente entre este número y N, multiplicado por 4 (el área del cuadrado donde está contenido el círculo) es una aproximación de π.

Completar la siguiente tabla con los valores obtenidos para distintos N y compararlos con `numpy.pi` o `math.pi`:

n	π
1000	
10000	
100000	

Ejercicio 7. Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0,1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{ n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\}$$

Es decir, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar $E[N]$ generando n valores de N y completar la siguiente tabla:

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) Calcular el valor exacto de $E[N]$.

Ejercicio 8. Para $U_1, U_2, \ldots$ números aleatorios, se define:

$$N = \text{Máximo}\left\{ n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-3} \right\}$$

donde: $\prod_{i=1}^{0} U_i = 1$. Mediante n simulaciones determinar:

a)

n	100	1000	10000	100000	1000000
$E[N]$					

b) $P(N = i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, usando $n = 1000000$.

Ejercicio 9. Un juego consiste en dos pasos. En el primer paso se tira un dado convencional. Si sale 1 o 6 tira un nuevo dado y se le otorga al jugador como puntaje el doble del resultado obtenido en esta nueva tirada; pero si sale 2, 3, 4 o 5 en la primer tirada, el jugador debería tirar dos nuevos dados, y recibiría como puntaje la suma de los dados. Si el puntaje del jugador excede los 6 puntos entonces gana.

a) Realizar un cálculo teórico de la probabilidad de que un jugador gane.

b) Estime la probabilidad de que un jugador gane mediante una simulación.