

Métodos Numéricos 93.07 Curso 2020 - Promen 1

Esta lista de enunciados tiene dos partes. En la primera parte (sección 1) se presentan tres problemas de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con solución conocida. Se propone realizar algunos experimentos numéricos tendientes a verificar alguna característica de los métodos numéricos presentados en el curso para aproximar la solución de esta clase de problemas. Cada grupo tendrá asignado uno de estos problemas que se presentan.

En la sección 2 se listan tres problemas donde se propone obtener la aproximación a la solución de un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que modela la evolución de un proceso o sistema con el tiempo. Se solicita obtener aproximaciones de esa evolución así como realizar experimentos numéricos para determinar la longitud del intervalo de integración y el tamaño del paso de integración. Cada grupo tendrá asignado uno de estos problemas.

Asignación de la tarea.

Se publican en este documento 6 ejercicios: 3 en la primera sección y 3 en la segunda. Para conocer cuál es el ejercicio de cada sección que corresponde a cada grupo tomen el mayor número de legajo M de los componentes del grupo. Si el resto de dividir M por 3 es r entonces el número de ejercicio asignado es $r + 1$. Consignen en la carilla de su presentación la ejecución del código siguiente en *Octave*:

```
rem(max(G),3) + 1
```

donde G es el vector con los números de legajo de los miembros del grupo. Por ejemplo:

```
G=[62576 60286 60761 59386];  
ejercicio = rem(max(G),3)+1  
ejercicio = 3
```

En este ejemplo el grupo debe presentar la solución al ejercicio 3 de cada una de las dos secciones.

Recomendaciones para la presentación.

Para la realización y entrega del **Promen** se propone que formen grupos de entre tres y cinco alumnos. Se deberá presentar un informe escrito sobre el proyecto. Los proyectos se evaluarán tomando en cuenta los siguientes puntos:

- Redacción y forma.

- Resolución.
- Resultados.

Los informes deberán ser entregados en formato pdf. Cada trabajo tendrá un Primer Autor y los restantes integrantes como Co-Autores. La designación del orden de autoría queda a cargo de los autores. Se pide que incluyan email (del ITBA) del Primer Autor.

Sobre el informe.

El informe escrito deberá contener:

1. **Título del informe:** Puede ser un título de fantasía a elección de los autores o bien el tema o método numérico que se implemente para resolver el problema.
2. **Nombre(s) (o iniciales), apellido y número de legajo** de cada uno de los autores, indiquen claramente el primer autor con email (del ITBA).
3. **Enunciado completo del ejercicio** o situación a plantear y resolver.
4. **Redacción** Se recomienda el uso de la primera persona del plural en la redacción. No mezclen varias personas a lo largo de la redacción. Revisen con cuidado el uso de los signos de puntuación. Usen algún editor de ecuaciones para escribir expresiones matemáticas. Usen letra itálica para las variables que se mencionen en un texto. Numeren aquellas expresiones que sea necesario referenciar o aclarar en el texto.
5. **Planteo del problema y resultados obtenidos:** Los resultados obtenidos deben ser presentados con claridad y precisión, en cuanto a los resultados numéricos se debe considerar el número de decimales en acuerdo con precisión establecida o bien con el número de decimales que resulte adecuado en el contexto en que la variable se mide. Se recomienda la presentación de resultados usando tablas y/o gráficos. En el caso de las tablas (arreglos de de tipo matricial con resultados numéricos) los resultados deben presentarse con el número de cifras significativas en acuerdo con la cota del error con que fueron obtenidos. Las tablas deberán estar numeradas consecutivamente con números arábigos y tener una leyenda aclaratoria. Las figuras (gráficos, fotos, mapas, curvas y otras imágenes) deberán estar numeradas consecutivamente con números arábigos y llevar un epígrafe que las describa brevemente. No alcanza con solo mostrar figuras, sino que deberán estar explicadas en el texto. El documento que presenten tendrá entonces: texto, expresiones matemáticas (algunas de ellas numeradas para poder ser referenciadas en el texto), **tablas** (numeradas y referenciadas en el texto) y **figuras** (numeradas y referenciadas en el texto).

En los gráficos se deben colocar leyendas cuando se representan más de una curva o serie de puntos. Deben colocar rótulos en los ejes vertical y horizontal de un gráfico cartesiano con la variable que se representa. Incluyan en el texto ó en un apéndice los códigos de *Matlab* utilizados y la invocación de línea de comando que se haya realizado para responder a los requerimientos del problema.

6. **Conclusiones:** deberán interpretar los resultados (no repetirlos). No es imprescindible incluir una sección de conclusiones. Suele resultar ventajoso combinar resultados y conclusiones en una sola sección para minimizar la repetición.
7. **Códigos desarrollados:** Los códigos desarrollados para responder a las preguntas propuestas deben estar debidamente documentados con comentarios aclaratorios. Se recomienda incluirlos como apéndice de la presentación e indicar en el trabajo las invocaciones que dan por resultado las tablas o gráficos solicitados.

Las citas bibliográficas en el texto deberán presentarse por autor(es) y año. Si se cita a mas de dos autores, deberá indicarse al primer autor, seguido de *et al* y el año. Por ejemplo:

J. H. Mathews, K. D. Fink : *Métodos numéricos con Matlab*, Prentice Hall, 2000.

1. Un problema de valor inicial con solución conocida.

1. **Ejercicio 1:** $y'(t) = \frac{2t \exp(-t) - (t+2)y(t)}{t+1}$, $t \in [0, 5]$, $y(0) = 10$. La solución del problema es $y(t) = \frac{(10+t^2) \exp(-t)}{t+1}$.
2. **Ejercicio 2:** $y'(t) = y(t)(5 - y(t)) - 4$, $t \in [0, 3]$, $y(0) = 3$. La solución del problema es $y(t) = \frac{8 + \exp(-3t)}{2 + \exp(-3t)}$.
3. **Ejercicio 3:** $y'(t) = (-\frac{3}{4} + \cos^2(t))y(t)$, $t \in [0, 4]$, $y(0) = 3$. La solución del problema es $y(t) = 3 \exp(0.25(-t + \sin(2t)))$.

Actividades a realizar: Con el ejercicio que le corresponda al grupo se solicita realizar las actividades que se indican a continuación. Con T se denota el extremo derecho del intervalo de valores de la variable independiente indicado en cada caso.

1. Obtenga un valor del paso de integración h_E de manera tal que el error global en T sea menor que 10^{-4} . Considere valores de h de la forma $\frac{T}{2^r}$ para r tomando los valores de 1 a 8. Realice la elección de h_E usando los métodos de *Heun* y *Runge-Kutta* de orden 4. Presente también una tabla con los valores de h y la aproximación de $y(T)$ redondeada en 5 decimales por ambos métodos.
2. Considere nuevamente la colección de valores de h del ítem anterior. Ejecute la estrategia *adelante - atrás* en $[0, T]$ hasta obtener una aproximación del valor inicial del problema con error menor que 10^{-6} . Use el método de *Runge-Kutta* de orden 4. Reseñe en una tabla los resultados del experimento numérico.
3. Represente gráficamente el error global en $t = T$ para valores de h de la forma propuesta en el primer ítem. Para el error global recuerde que se conoce la solución del problema y entonces se puede calcular el error global. Use los métodos de *Heun* y *Runge-Kutta* de orden 4 para aproximar el valor de $y(T)$. Realice el gráfico usando escalas logarítmicas en los dos ejes y superponiendo los errores globales por ambos métodos. Genere un

cálculo que ponga en evidencia el orden del error global de cada uno de estos métodos. Por ejemplo puede generar los cocientes incrementales entre puntos contiguos en la tabla donde reseñe el logaritmo del error global en función del logaritmo del paso h de integración.

4. **Sobre el uso de lsode en Octave** El procedimiento `lsode` de Octave implementa un procedimiento de aproximación de la solución de problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias. El uso básico del procedimiento está mostrado en un ejemplo de la presentación de la primera clase sobre este tema en el curso. Utilizando este procedimiento obtenga por ensayo un valor del paso h , de un conjunto de valores equiespaciados de t , para generar una aproximación a la solución del problema en $[0, T]$ de manera que el máximo error global en todo el intervalo sea menor que 10^{-5} . El método implementado por este procedimiento no es ninguno de los presentados en este curso. Represente gráficamente la aproximación obtenida para la solución del problema inicial en $[0, T]$.

2. Un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

2.1 Una reacción autocatalítica oscilatoria: The Brusselator :

El denominado *Brusselator* es un mecanismo de reacción química autocatalítica y oscilatoria. Una reacción autocatalítica es una en la cual las especies que reaccionan modifican la velocidad de producción de la reacción. En muchas de estas reacciones se puede observar una dinámica muy complicada que incluye múltiples estados estacionarios o periódicos.

La dinámica y la química de reacciones oscilatorias ha comenzado a ser objeto de estudio hace poco más de 50 años, empezando con el trabajo de Boris Belousov quién observó reacciones oscilatorias con cambios muy evidentes en el color de la solución donde se desarrolla la reacción. En 1961, diez años después de los trabajos iniciales de Belousov un nuevo trabajo fue iniciado por A. M. Zhabotinskii. Él reprodujo los resultados de Belousov y comenzó a experimentar con sistemas similares donde las reacciones oscilatorias autocatalíticas eran analizadas midiendo cambios en las propiedades ópticas y eléctricas de la solución en la que tenía lugar dicha reacción.

Las concentraciones de las dos especies de interés de la reacción autocatalítica denominada *The Brusselator* (en forma adimensional), son solución del siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - (b+1)x + ax^2y \\ \dot{y} &= bx - ax^2y,\end{aligned}$$

donde los parámetros a y b son constantes positivas.

1. Presente una breve introducción de no más de una página sobre este tipo de reacciones autocatalíticas y en particular de ésta que se denomina *The Brusselator*.

2. Verificar que el sistema de ecuaciones diferenciales presentado tiene un punto de equilibrio. Un punto de equilibrio es una solución constante (X, Y) que reemplazada en el sistema lo satisface. Si la condición inicial se toma igual a (X, Y) entonces el estado del sistema se conserva así para todo instante posterior. Si se linealiza el sistema de ecuaciones en torno de ese punto de equilibrio se tiene lo que se denomina un atractor si $b < a + 1$ y si $b > a + 1$ un repulsor (al respecto de este tipo de análisis puede verse por ejemplo: Blanchard et al: *Ecuaciones diferenciales*, (pág. 312), Thomson, 1999). Para el punto de equilibrio atractor se verifica que ante un apartamiento del punto de equilibrio entonces las funciones $x(t)$ e $y(t)$ evolucionan hacia el punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. Usando el procedimiento `lsode` de *Octave* obtenga la aproximación a la solución para el caso $a = b = 3$, en el intervalo $[0, 10]$ y paso $h = 0.01$ con la condición inicial $[1.01, 1.01]$. Represente gráficamente x e y en función de t así como y en función de x (plano de las fases). Observe que se considera una condición inicial *muy próxima* a la de equilibrio. Comente lo observado a *largo plazo* con el estado del proceso.
3. Obtener la solución aproximada de $x(t)$ e $y(t)$, hacer representaciones gráficas de la evolución temporal y en el plano de fases (y en función de x) para los siguientes pares (a, b) : $(1, 1)$, $(1, 1.5)$, $(1, 2)$, $(1, 2.5)$, considere condiciones iniciales positivas y diferentes de la solución de equilibrio. Para los gráficos en el plano de las fases superponga las aproximaciones a la solución correspondientes para al menos 6 condiciones iniciales distintas. Para $b > 2$ se puede observar *un ciclo límite*, una solución periódica. Para obtener la aproximación de la solución del problema de valor inicial habrá que experimentar acerca de la longitud del intervalo de integración y el tamaño del paso de integración constante h . Comente los experimentos que se realice para elegir el intervalo de integración y el paso constante h cuando utilice el *método RK4* para aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Para la elección del paso de integración utilice la estrategia h y $h/2$ para lograr que la distancia entre las aproximaciones que realice por esta estrategia sea menor que 10^{-3} .
4. Para el caso $b = 3$ obtenga aproximadamente el período de la solución periódica. Para estimar ese período utilice el procedimiento `periodo` mostrado en el apéndice con la aproximación obtenida para $x(t)$ una vez pasado el período transitorio. Tal vez sea conveniente experimentar con la elección de las condiciones iniciales para poder minimizar la duración del transitorio.
5. Genere una tabla con el período de $x(t)$ para b variando de 3 a 6 en pasos de 0.5. Para poder responder en forma adecuada tendrá que considerar el extremo del intervalo de integración alrededor de 100.

Comentario sobre la implementación en Octave: Para la implementación de la función que calcula las derivadas de las funciones incógnitas será muy difícil hacerlo mediante la definición en el formato anónimo en la línea de comando. Habrá que hacerlo mediante el procedimiento `function` en línea de comando o bien con una función definida en un archivo `.m`. Consultar el apéndice de este documento y ayudas disponibles al tiempo de la publicación de los enunciados de estos trabajos grupales.

2.2 Un modelo matemático aproximado para la pandemia COVID 19: El modelo SEIR

El modelado matemático intenta integrar en un esquema formal de análisis los aspectos relevantes de una porción de la realidad y traducirlos en forma de expresiones y ecuaciones matemáticas. Salvo en procesos muy sencillos lo que se obtenga nunca va a ser exacto dado que el modelo, no necesariamente, puede captar toda la realidad ni todas las variables involucradas, ni incorporar todos los datos iniciales de los que se parte. Pero sí puede tener una utilidad predictiva del proceso bajo estudio.

En particular, y es lo que ocurre con el desarrollo de las epidemias, es lo que intentaremos mostrar aquí mediante el modelo epidemiológico **SEIR** que se adapta a la epidemia de coronavirus **COVID-19**.

El modelo **SEIR** es una adaptación del modelo **SIR**, propuesto por W. O. Kermack y A. G. McKendrick en 1927. En una población de tamaño fijo N en la que se ha desatado una epidemia que se propaga mediante contagio, en un tiempo t los individuos pueden estar en cuatro estados distintos: Susceptibles: $S(t)$, Expuestos: $E(t)$, Infectados: $I(t)$, y Recuperados: $R(t)$ (el modelo **SEIR** lleva el nombre de las cuatro variables de estado del proceso). La variable t se supone continua y las cuatro funciones también son continuas (se supone que N es grande) y que las cantidades de individuos en cada estado no son discretas.

El modelo **SEIR** se adapta bien al comportamiento de la epidemia del coronavirus dado que, en esta enfermedad, además de a los susceptibles de ser infectados, a los ya infectados y a los recuperados, conviene también tener en cuenta a los expuestos, esto es, individuos que portan la enfermedad pero que, al hallarse en su periodo de incubación, no muestran síntomas y aún no pueden infectar a otros (hay que ser precisos con lo que estamos denotando): si un individuo no presenta síntomas pero sí puede contagiar a otros lo contabilizamos en $I(t)$, no en $E(t)$.

Este modelo tiene tres parámetros: β , llamado tasa de transmisión, de manera que $1/\beta$ se relaciona con la probabilidad de que un susceptible se infecte cuando entra en contacto con un infectado; γ , llamado tasa de recuperación, de manera que el periodo medio de recuperación es $1/\gamma$; y σ , de forma que $1/\sigma$ es el tiempo promedio de incubación. Los dos primeros parámetros definen el parámetro $R_0 = \beta/\gamma$ que se llama tasa básica de reproducción y representa el número de nuevos infectados producidos por un infectado si toda la población es susceptible.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal de este modelo **SEIR** para la evolución de las poblaciones S , E , I y R es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\beta S(t) I(t)/N \\ \dot{E}(t) &= \beta S(t) I(t)/N - \sigma E(t) \\ \dot{I}(t) &= \sigma E(t) - \gamma I(t) \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t),\end{aligned}$$

Este modelo tiene la propiedad que $S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ es constante para todo instante t como puede verificarse sumando las 3 ecuaciones; la derivada de la suma de las tres funciones es nula para todo t . No se consideran fallecimientos (o bien se consideran dentro de los recuperados).

1. Para modelizar la evolución del coronavirus **COVID-19** tomaremos como valor para los parámetros (en 1/día) los siguientes: $\gamma = 1/5$, $\sigma = 1/7$ y $N = 100000$. Lo más complicado es estimar β ; en particular, porque no se sabe cuántas personas infectadas

asintomáticas hay que puedan estar infectando a otros. Las condiciones iniciales son $I(0) = 2$, $S(0) = 99998$, $E(0) = R(0) = 0$ y el tiempo se mide en días. Usando el *método de Runge-Kutta de orden 4* obtenga aproximaciones y represente gráficamente las cuatro funciones suponiendo que $\beta = 1$ (con lo que resulta $R_0 = 5$). Comente experimentos realizados para elegir el intervalo de integración y el paso de integración. Por ejemplo ponga algún criterio como querer observar la evolución hasta que el número de infectados sea menor que 10. Para la elección del paso de integración h use la estrategia de comparar las aproximaciones obtenidas con paso h y paso $h/2$.

2. Con las aproximaciones consideradas en el ítem anterior estime la duración de la epidemia, el máximo de infectados y el número de susceptibles no contagiados al final de la epidemia. Analice el tiempo de duración y el máximo número de infectados para los siguientes valores de β : 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 y 0.8. Reseñe esas determinaciones en una tabla.
3. En el ítem anterior se supuso que la tasa de infección β es constante. Este parámetro se puede modificar en el tiempo si se adoptan medidas de protección y aislamiento, y si la población las acepta y cumple. Hay muchas propuestas para modelar esas políticas y comportamientos. Uno de esos modelos para el parámetro es el siguiente:

$$\beta(t) = \beta_0 (1 - r(t)) (1 - u(t)/N)^M$$

donde β_0 es la tasa de infección sin ninguna adopción de medidas, $r(t)$ (tomando valores entre 0 y 1) es el resultado de las acciones institucionales para la contención, $u(t)$ es una medida de la sensación pública de riesgo al presentarse casos críticos y fallecimientos, y M mide la intensidad de la reacción de las personas.

La función $r(t)$ es una función escalonada ya que las medidas se toman en momentos concretos. La idea del factor $(1 - u(t)/N)^M$ con un valor *grande* de M , cuando la presunción de riesgo es mucha, el factor es muy cercano a 0, la gente se aísla incluso voluntariamente y $\beta(t)$ es muy pequeño; por el contrario, el factor es cercano a 1 y tiene escasa influencia si la preocupación social es poca. Una estimación para $r(t)$ puede ser suponer que el 5% de los casos son graves y, así tomar $u(t) = 0.05 I(t)$ y un valor elevado de M , por ejemplo $M = 100$.

Con las suposiciones comentadas y tomando $\beta_0 = 1$ y $r(t) = 0.5$ (para todo t) estime la duración de la epidemia, el máximo de infectados y el número de susceptibles no contagiados al final de la epidemia. Represente gráficamente las 4 funciones características. Represente también en un gráfico aparte la función $\beta(t)$.

Comente las diferencias con el caso en que el factor β se consideró constante. Tenga en cuenta que para poder ver la evolución de la epidemia tendrá que considerar un intervalo de tiempo de mayor longitud que el del ítem anterior.

4. Para seguir experimentando con este modelo veamos como evolucionan las cuatro funciones $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ si se modifican los valores de α y que las medidas de contención no se apliquen desde el comienzo de la epidemia. Con las condiciones iniciales ya establecidas en los apartados anteriores, y los valores de los parámetros γ y σ , represente gráficamente cada una de las cuatro funciones por separado. En cada gráfico represente la evolución para tres escenarios distintos:

a) Sin medidas de contención y suponiendo $\beta(t) = 1$.

b) Se aplican medidas no muy severas ($\alpha = 0.4$) pero a partir de $t = 20$ días

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 20 \\ 0.6 (1 - 0.05 I(t)/N)^{100} & \text{si } t \geq 20 \end{cases}$$

c) Se aplican medidas severas ($\alpha = 0.7$) a partir de $t = 20$ días

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 20 \\ 0.3 (1 - 0.05 I(t)/N)^{100} & \text{si } t \geq 20 \end{cases}$$

Tenga en cuenta que para poder comparar la evolución de la epidemia tendrá que considerar un intervalo de tiempo de mayor longitud que el del que corresponde al caso en que $\beta = 1$. Esto se debe a que las medidas de contención retrasan la ocurrencia del *pico de infectados* y prolongan la duración de la epidemia.

Comentario sobre la implementación en Octave: Para la implementación de la función que calcula las derivadas de las funciones incógnitas será muy difícil hacerlo mediante la definición en el formato anónimo en la línea de comando. Habrá que hacerlo mediante el procedimiento `function` en línea de comando o bien con una función definida en un archivo `.m`. Consultar el apéndice de este documento y ayudas disponibles al tiempo de la publicación de los enunciados de estos trabajos grupales.

2.3 Un sistema de precalentamiento de petróleo:

El petróleo crudo no es directamente utilizable, salvo a veces como combustible. Para obtener sus diversos subproductos es necesario refinarlo, resultando, por centenares, los productos acabados y las sustancias más diversas. El petróleo crudo es una mezcla de diversas sustancias, fundamentalmente hidrocarburos, que son sustancias constituidas por C e H que tienen diferentes puntos de ebullición. Su separación se logra mediante el proceso llamado *destilación fraccionada* que se realiza en las refinerías.

El petróleo crudo es depositado en los tanques de almacenamiento, en donde permanece por varios días para sedimentar y drenar el agua que normalmente contiene. Posteriormente es mezclado con otros crudos sin agua y es bombeado hacia la planta para su refinación. Antes de ingresar a la *torre de destilación* el petróleo pasa por un proceso de *precalentamiento*.

Un posible sistema de precalentamiento consiste en tres tanques en serie (la salida de uno de ellos es entrada para el siguiente) en los que se calienta el petróleo antes de ingresar al proceso de destilación. Cada tanque se llena inicialmente con una masa M de petróleo a temperatura T_0 . Un flujo de vapor saturado a temperatura T_V ingresa en cada tanque y se condensa en serpentinas a través de las cuales intercambia calor con el petróleo dentro del tanque. El petróleo ingresa al primer tanque con un caudal W constante a temperatura T_0 . Ese mismo caudal W es el de ingreso a los dos subsiguientes y de salida del último. Esto determina que en el planteo del problema no sea necesario considerar ecuaciones relacionadas al balance de flujos de masa ya que la masa es constante en cada tanque y los caudales de ingreso y egreso son iguales.

El contenido de los tanques están siempre bien mezclado de manera tal que la temperatura T_i , $i = 1, 2, 3$ de cada tanque no depende de la posición pero si del tiempo en el transitorio

de comienzo de operación del sistema. La temperatura del petróleo a la salida del sistema es T_3 , que es la del interior del tercer tanque. La capacidad calorífica C_p del petróleo es aproximadamente $2KJ/Kg$ pero en un modelo mas detallado depende de la temperatura en la forma $C_p = C_1 + C_2 T$. Un planteo termodinámico muy sencillo permite obtener el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para la evolución en el tiempo de las temperaturas T_1 , T_2 y T_3 :

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= \frac{W C_p (T_0 - T_1) + U_A(T_V - T_1)}{M C_p} \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{W C_p (T_1 - T_2) + U_A(T_V - T_2)}{M C_p} \\ \frac{dT_3}{dt} &= \frac{W C_p (T_2 - T_3) + U_A(T_V - T_3)}{M C_p}.\end{aligned}\tag{1}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es lineal si se considera que C_p es constante y no lineal si se asume que depende de la temperatura del tanque. El régimen estacionario de temperaturas se alcanza (en tiempo no finito) cuando se igualan en cada tanque los flujos de calor de ingreso y egreso. Para obtener ese estado de temperaturas hay que resolver el sistema de ecuaciones (no lineal si se asume que C_p depende de la temperatura en cada tanque) que resulta de suponer que T_1 , T_2 y T_3 son constantes y por consiguiente con derivada nula.

1. **Análisis del caso lineal).** Supongamos que $W = 100 Kg/min$, $T_0 = 20^\circ C$, $M = 1000 Kg$, $T_V = 250^\circ C$, $U_A = 10KJ/(min^\circ C)$ y $C_p = 1,63 (KJ/(Kg^\circ C))$. Represente gráficamente la temperatura T_3 (a la salida del sistema de precalentamiento) como función del tiempo. Realice experimentos numéricos para elegir un intervalo conveniente de integración así como el paso de integración constante h cuando use el método de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Para elegir el valor del paso de integración constante h utilice la estrategia h y $h/2$. Para la elección del intervalo de integración considere que sea tal que la variación de la temperatura al final del intervalo sea inferior a medio grado respecto de la de régimen permanente. Para obtener esta solución estacionaria o de régimen permanente tendrá que resolver un sistema de ecuaciones lineales obtenido al poner la condición que las derivadas de las tres temperaturas respecto del tiempo sea cero. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales en *Octave* puede usar el producto entre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y el vector columna de términos independientes. Represente gráficamente esa temperatura de régimen estacionario a la salida del tercer tanque si W toma al menos 20 valores en el intervalo $(50, 200)$ tomando a T_0 igual a 20. Observe que aquí tendrá que resolver el sistema de ecuaciones lineales al menos 20 veces (una con cada valor de W). Represente gráficamente esa temperatura de régimen estacionario a la salida del tercer tanque si $W = 100 Kg/min$ y se toman al menos 10 valores en el intervalo $(200, 300)$ para T_0 . Observe que tendrá que resolver el sistema de ecuaciones lineales al menos 10 veces (una con cada valor de T_0).

2. **Análisis del régimen transitorio (caso no-lineal).** Supongamos, nuevamente, que $W = 100 \text{ Kg/min}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $M = 1000 \text{ Kg}$, $U_A = 10 \text{ KJ}/(\text{min}^\circ\text{C})$ y $C_p = 1.63 + 0.034 \text{ T}$ ($\text{KJ}/(\text{Kg}^\circ\text{C})$). Aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con la condición inicial $T_i(0) = 20^\circ\text{C}$, $i : 1, 2, 3$ para los siguientes valores de $T_V : 200^\circ\text{C}, 250^\circ\text{C}$ y 300°C . En cada caso estime el tiempo en que la temperatura T_3 alcanza el 90% del valor de régimen estacionario. Para determinar la solución de régimen estacionario considere tomar un intervalo de integración amplio como para que la temperatura T_3 tenga al final de ese intervalo una variación entre valores consecutivos inferior a un décimo de grado. *Nota:* Para aproximar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales use el método de *Runge-Kutta de orden 4*. Para elegir el valor del paso de integración constante h utilice la estrategia h y $h/2$.

Comentario sobre la implementación en Octave: Para la implementación de la función que calcula las derivadas de las funciones incógnitas será muy difícil hacerlo mediante la definición en el formato anónimo en la línea de comando. Habrá que hacerlo mediante el procedimiento `function` en línea de comando o bien con una función definida en un archivo `.m`. Consultar el apéndice de este documento y ayudas disponibles al tiempo de la publicación de los enunciados de estos trabajos grupales.

3. Apéndice:

El procedimiento periodo

El procedimiento `periodo` determina aproximadamente el período de oscilación de un movimiento oscilatorio a partir del registro de la posición en instantes igualmente espaciados en varios ciclos. Se determina el lapso de tiempo entre dos pasajes por la posición de equilibrio en un mismo sentido en varios ciclos y luego se promedian. A continuación se muestra el código y un ejemplo de uso. Para tener en cuenta: la precisión de determinación del período tiene como límite el paso de tiempo entre valores consecutivos (por ejemplo el paso h de integración en el problema en el que buscan determinar aproximadamente el período).

```
function p = periodo(r,h)
% r es un vector con las posiciones y
% h es el paso de tiempo entre valores de r
T=[];r = r-mean(r);
for k = 1:length(r)-1
    if r(k+1)*r(k)<0
        T = [T;k*h];
    end
end
T=T(1:2:end);
p=mean(diff(T));
```

En el siguiente ejemplo de uso se considera un vector con valores de $\sin(t)$ en el intervalo $(0, 40)$ con paso $h = 0.0001$.

```
tt = 0:0.0001:40;g = sin(tt);
periodo(g,0.0001)
ans = 6.2832
ans/(2*pi)
ans = 1.0000
```

El procedimiento RK4 en Octave para sistemas de ecuaciones diferenciales

Este código que sigue implementa en *Octave* el método RK4 para un sistema de ecuaciones diferenciales. Está incorporado un argumento de entrada (P) extra que permite introducir en la invocación del procedimiento el pasaje de los eventuales parámetros de los que dependa la función que calcula las derivadas de las incógnitas del sistema de ecuaciones. El uso del comando `feval` permite usar por igual funciones definidas en forma anónima en la línea de comando así como funciones en línea de comando (usando la definición `function` o bien una función definida en un archivo `.m` generado en el entorno del editor.

```
function [T Y]=rk4p(f,a,b,ya,M,P)
h=(b-a)/M;
T=zeros(M+1,1);
Y=zeros(M+1,length(ya));
T(1)=a;
Y(1,:)=ya;
for j=1:M
    T(j+1)=T(j)+h;
    K1=h*feval(f,T(j),Y(j,:),P);
    K2=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j,:)+K1/2,P);
    K3=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j,:)+K2/2,P);
    K4=h*feval(f,T(j+1),Y(j,:)+K3,P);
    Y(j+1,:)=Y(j,:)+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
end
```

A continuación se muestran invocaciones del procedimiento con las dos maneras de definir la función que calcula las derivadas de las funciones incógnita.

Si el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 0.2 y,\end{aligned}$$

y las condiciones iniciales fuesen $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, con $t \in [0, 20]$ entonces el siguiente código en línea de comando permite obtener la solución aproximada con paso $h = 0.02$,

```
fmine=@(t,X,P) [ X(2)    -X(1)-.2*X(2)]; % se define la función en la forma anónima
[t,X]=rk4p(fmine,0,20,[1 0],1000,[]); % se invoca la función con su nombre
plot(t,X)
```

Observe que en este caso no fue necesario transferir a **fmne** parámetros y así el último argumento en **rk4p** fue el vector vacío [].

Si fuese necesario pasar parámetros ó realizar cálculos, comparaciones u otras operaciones entonces se impone definir la función como un procedimiento usando la definición con **function**.

Por ejemplo si el sistema de ecuaciones diferenciales fuese:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ax - by + cu(t-d)\end{aligned}$$

donde a , b , c y d son parámetros y $u(t)$ es la función que vale 1 si $t \geq 0$ y 0 si $t < 0$. El vector de parámetros **P** tendrá 4 componentes. A continuación se muestra la definición de la función que calcula las derivadas de las incógnitas y la invocación del procedimiento **rk4p** con el vector de parámetros con 4 valores específicos de los parámetros. Se puede ingresar en la línea de comando tanto la definición de la función que calcula las derivadas como la invocación del procedimiento **rk4p**:

```
function s=fyo(t,X,P)
s(1)=X(2);
s(2)=-P(1)*X(1)-P(2)*X(2)+P(3)*(t>=P(4));
end
[t,X]=rk4p('fyo',0,30,[10 0],500,[0.5 0.4 20 10]);
plot(t,X)
```

En este ejemplo la derivada de las funciones incógnitas depende de cuatro parámetros (habrá que tener cuidado en el orden en que se presentan los cuatro elementos del vector **P**). Lo mas importante es tener en cuenta que al haber definido la función como un procedimiento (con **function** en la línea de comando o bien como archivo **.m**) ese argumento de **rk4p** se debe invocar como una cadena de caracteres (un texto) y debe escribirse entre comillas.