

RAPPORT DE STAGE

MASTER 2 MODÉLISATION ET CALCUL HAUTE
PERFORMANCE

Equations de Saint-Venant : singularités et conditions limites

Encadrants :

David LANNES

Fabien MARCHE

Auteur :

Harris Ludwig BOUDI

Enseignant référent :

Yves COUDIERE

Rapporteur :

Mario RICCHIOTTO

Février à Juillet 2018

université
de **BORDEAUX**



I n s t i t u t d e
M a t h é m a t i q u e s d e
B o r d e a u x

Table des matières

I	Introduction	4
0.1	Environnement du stage	4
0.2	Contexte scientifique	6
II	Equations d'Euler incompressibles	7
1	Formulation	7
2	Equations adimensionnées	8
3	Approximation d'ordre $O(\mu)$: Equations de Saint-Venant	10
3.1	Formulation en dimension 1	11
3.2	Ajout du terme de topographie	12
4	Les équations de Green-Naghdi	12
III	Méthodes numériques	16
4.1	Schémas Volumes-Finis	16
4.1.1	Schéma "well-balanced" pour la topographie	17
4.2	Cas tests	19
4.2.1	Rupture de barrage sur fond mouillé	19
4.2.2	Effondrement d'une gaussienne	21
IV	Etudes des conditions aux limites	22
4.3	Invariants de Riemann	22
4.4	Méthodes de reconstruction linéaire	24
4.4.1	Débit entrant dans un domaine	25
4.4.2	Génération d'une onde sinusoïdale	26
4.5	Etudes de singularités	27
4.5.1	Méthodes de décomposition	27
V	Conclusions et perspectives	29

Remerciements :

En premier lieu, je tiens à remercier de son immense gentillesse et patience à mon égard David Lannes mon encadrant ainsi que de m'avoir permis d'effectuer ce stage avec un accompagnement des plus exemplaire durant la tenue de celui-ci.

Un grand merci également à Fabien Marche pour ses conseils très utiles pour mener un travail de recherches tant du point de vue de la bibliographie que du code ainsi que sa bienveillance.

Sans oublier Yves Coudière d'avoir accepté d'être mon référent pour ce stage et de ses conseils bienveillants.

Je n'oublie pas également les nombreux doctorants de l'IMB, Krisztian, Orlando et tant d'autres qui m'ont éclairci de leurs savoirs et expériences.

Mes remerciements également à tous les personnels du laboratoire surtout le département informatique pour leurs aides précieuses dans l'accomplissement de ce stage.

Première partie

Introduction

0.1 Environnement du stage

L'institut de Mathématiques de Bordeaux(IMB) est une unité mixte de recherche (UMR 5251) CNRS - Université de Bordeaux - Bordeaux INP.

Laboratoire d'accueil de l'École Doctorale de Mathématiques et Informatique, l'IMB regroupe l'essentiel de la recherche en mathématiques du site bordelais. Il collabore également avec Inria et le CEA. Les membres de l'IMB sont ainsi affectés à l'UF Mathématiques et Interactions, à l'ENSEIRB-MATMECA, à l'IUT Bordeaux à l'ESPE d'Aquitaine, ou à l'ENSC.

La recherche de l'IMB tourne autour de huit équipes et mon stage s'est déroulé au sein de 8 équipes :

L'équipe Analyse (responsable : K. Kellay)

L'équipe Calcul scientifique et Modélisation (responsable : R. Turpault)

L'équipe EDP et Physique mathématique (responsable : D. Lannes)

L'équipe Géométrie (responsable : L. Bessières)

L'équipe Image Optimisation et Probabilités (responsable : J. Bigot)

L'équipe Mathématiques pour la dynamique des populations (responsable : P. Magal)

L'équipe Optimisation Mathématique Modèle Aléatoire et Statistique (responsable : F. Vanderbeck)

L'équipe Théorie des Nombres (responsable : O. Brinon)

Mon stage s'est déroulé au sein de l'équipe EDP et Physique Mathématique, ce stage a été proposé par David Lannes et co-encadré par Fabien Marche de l'INRIA - Bordeaux de l'équipe Lemon qui sont des chercheurs qui travaillent sur le thème "MathOcean".

Au fil des séminaires où j'ai pu assister sur ce thème, je me suis rendu compte des travaux immenses qui ont été effectués et les réseaux de chercheurs qui se penchent sur ce sujet.

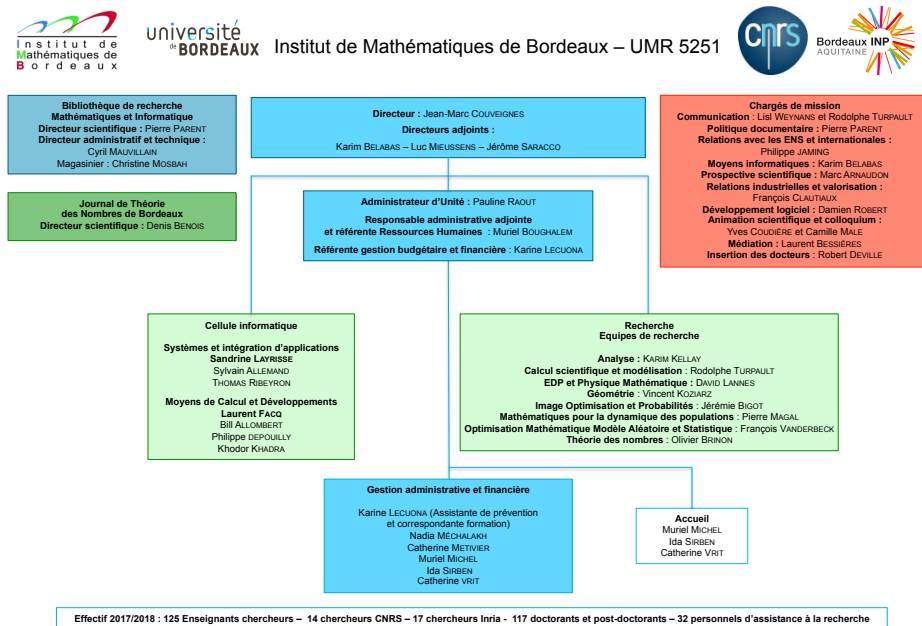


FIGURE 1 – Organigramme de l'IMB pour l'année 2018(Source :<https://www.math.u-bordeaux.fr/imb/spip.php>)

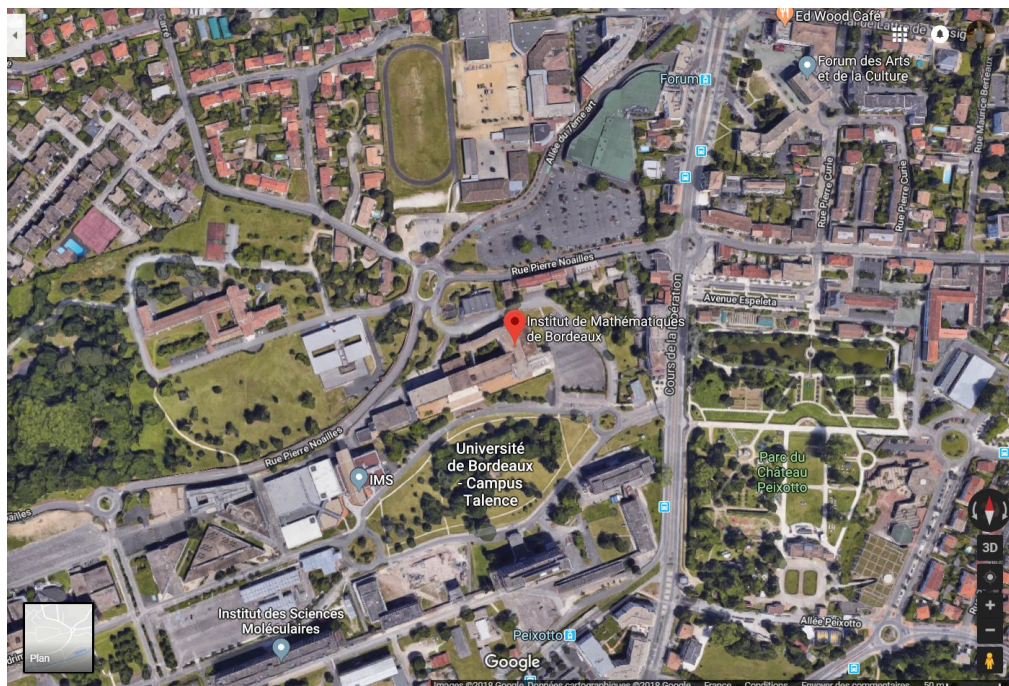


FIGURE 2 – Vue par satellite du laboratoire(Source :Google Maps)

0.2 Contexte scientifique

La simulation des vagues en "régime eau peu profonde" font l'objet de nombreuses recherches, nous observons fréquemment ce phénomène dans la nature et très souvent nous cherchons à épouser au mieux notre modèle et les observations. Dans ce cadre d'études, plusieurs variables sont à prendre en considération, notamment la hauteur h de la vague, la vitesse u du fluide ainsi que la topographie Z du fond ou communément appelée bathymétrie(cf. Fig.1) et les équations utilisées sont dérivées de la physique. Très usutés, des schémas volumes finis sont mis en oeuvre pour résoudre des problèmes en équations hyperboliques mais pour cela nous avons besoin d'imposer des conditions sur les bords de notre domaine d'études pour avoir un schéma qui converge. Dans la plupart des cas, nous connaissons les valeurs sur certaines variables. Durant ce stage, nous nous proposons d'étudier des méthodes permettant de traiter ces conditions limites et les singularités sur les équations de Saint-Venant.

Mots clés : Saint-Venant, Volumes-Finis, Conditions limites, Newton-Raphson.

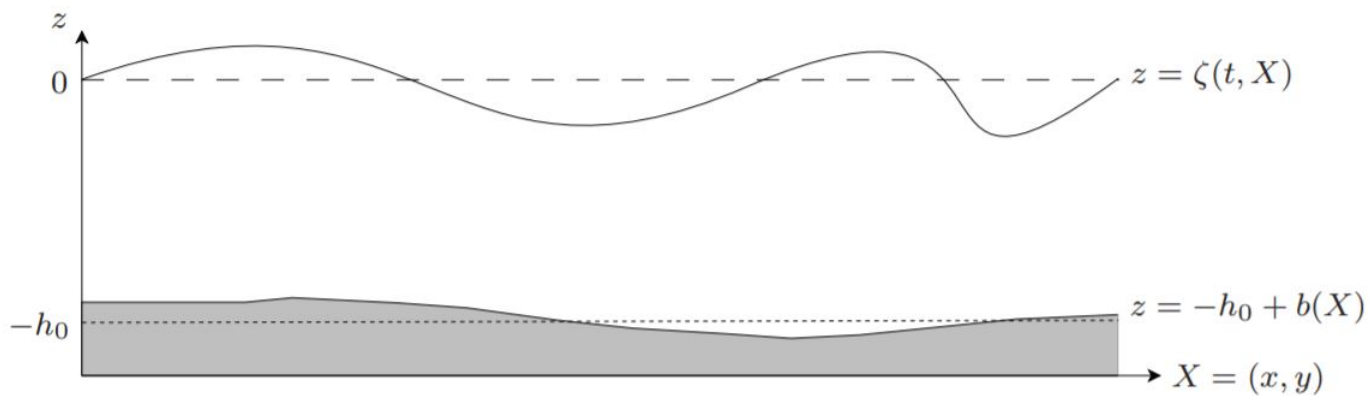


FIGURE 3 – Domaine et variables d'études

Deuxième partie

Equations d'Euler incompressibles

1 Formulation

Les équations décrivant le mouvement d'un fluide incompressible, non-visqueux de densité ρ et délimité par une surface libre d'équation $\{z = \zeta(t, X)\}$ ($X \in \mathbb{R}^2$) et un fond immobile sont données par les équations d'Euler à surface libre. En notant respectivement $U = (V^T, w)^T$ et P la vitesse ainsi que la pression, ces équations s'écrivent,

$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla_{X,z})U = -\frac{1}{\rho} \nabla_{X,z} P - g e_z \\ \nabla_{X,z} \cdot U = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dans $\Omega = \{(X, z) \in \mathbb{R}^{2+1}, -H_0 + b(X) < z < \zeta(t, X)\}$; elles sont complétées par les conditions au bord à la surface(surf.) et au fond(bott.).

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - U|_{surf} \cdot N = 0 & (\text{avec } N = (-\nabla \zeta^T, 1)) \\ P|_{surf} = \text{const.} \\ U|_{bott} \cdot N_b = 0 & (\text{avec } N_b = (-\nabla b^T, 1)) \end{cases} \quad (2)$$

En prenant la condition limite sur la surface et en le transformant comme une équation de conservation de masse, nous obtenons :

$$\partial_t \zeta + \nabla \cdot (h \bar{V}) = 0 \quad (3)$$

Avec

$$\bar{V} = \frac{1}{h} \int_{-H_0+b(X)}^{\zeta(t,X)} V(t, X, z) \, dz \quad \text{et} \quad h(t, X) = \zeta(t, X) + H_0 - b(X)$$

Preuve :

Nous avons la condition limite $\partial_t \zeta - U|_{surf} \cdot N = 0$ dans (2)

Nous allons réécrire $-U|_{surf} \cdot N$

Ce qui fait,

$$- (V(t, X, \zeta(t, X)), w(t, X, \zeta(t, X))) \cdot (-\nabla_X \zeta(t, X), 1)$$

$$= \nabla_X \zeta(t, X) \cdot V(t, X, \zeta(t, X)) - w(t, X, \zeta(t, X))$$

En utilisant le fait que $\nabla_{X,z}.U = 0$,

Donc,

$$\begin{aligned}
&= \int_{-H_0+b(X)}^{\zeta(t,X)} \partial_x u(t, X, z) \, dz - \partial_x(-H_0 + b(X))u(t, X, -H_0 + b(X)) \\
&\quad + \partial_x(\zeta(t, X))u(t, X, \zeta(t, X)) + \int_{-H_0+b(X)}^{\zeta(t,X)} \partial_y v(t, X, z) \, dz \\
&- \partial_y(-H_0 + b(X))v(t, X, -H_0 + b(X)) + \partial_y(\zeta(t, X))v(t, X, \zeta(t, X))
\end{aligned}$$

Avec,

$$\nabla.(h\bar{V}) = \partial_x \left(\int_{-H_0+b(X)}^{\zeta(t,X)} u(t, X, z) \, dz \right) + \partial_y \left(\int_{-H_0+b(X)}^{\zeta(t,X)} v(t, X, z) \, dz \right)$$

Alors nous obtenons finalement,

$$\partial_t \zeta + \nabla.(h\bar{V}) = 0$$

2 Equations adimensionnées

Les équations d'Euler sont réputées difficiles à résoudre tant analytiquement que numériquement. Pour y remédier, des hypothèses sont introduites. Nous allons introduire des paramètres qui vont être des indicateurs sur l'ordre de l'erreur commise sur l'approximation des équations d'Euler et le type de régime. Ces paramètres sont $\epsilon = \frac{a_{surf}}{H_0}$, $\beta = \frac{a_{bott}}{H_0}$ et $\mu = \frac{H_0^2}{L^2}$ avec a_{surf} l'amplitude de la vague, a_{bott} l'amplitude de la vague du fond, H_0 la profondeur et L la largeur du domaine d'études. Les trois paramètres sont respectivement appelés paramètre d'amplitude, paramètre de topographie et paramètre de profondeur.

L'hypothèse « eau peu profonde » nous emmène à poser $\mu \ll 1$.

Dans ce rapport, l'erreur commise sur l'approximation des équations d'Euler est seulement exprimée en fonction de ce paramètre μ :

Dans cette partie nous allons faire un changement de variables donc les adimensionner.

Prenons les variables suivantes,

$$\tilde{z} = \frac{z}{H_0}, \quad \tilde{X} = \frac{X}{L}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{a_{surf}}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{a_{bott}}$$

Pour les variables de temps, de vélocité et de pression, nous avons :

Rappelons les notations suivantes,

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_0}$$

Avec,

$$V_0 = a\sqrt{\frac{g}{H_0}}, \quad w_0 = \frac{aL}{H_0}\sqrt{\frac{g}{H_0}}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{L}{\sqrt{gH_0}}, \quad P_0 = \rho g H_0$$

Ensuite viennent les notations,

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}V \\ w \end{pmatrix}, \quad \nabla^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\nabla \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad N^\mu = \begin{pmatrix} -\epsilon\sqrt{\mu}\nabla\zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$curl^\mu = \nabla^\mu \times, \quad div^\mu = (\nabla^\mu)^T, \quad \underline{U}^\mu = (\sqrt{\mu}\underline{V}^T, w)^T := U|_{z=\epsilon\zeta}^\mu$$

Finalement, les conditions limites (2) deviennent,

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h\bar{V}) = 0 \\ P|_{surf} = 0 \\ U|_{z=-1+\beta b}^\mu \cdot N_b^\mu = 0 \quad (\text{avec } N_b^\mu = (-\epsilon\sqrt{\mu}\nabla b^T, 1)^T) \end{cases} \quad (4)$$

Nous pouvons décomposer la vitesse horizontale en $V(t, X, z) = \bar{V}(t, X) + \sqrt{\mu}V^*(t, X, z)$.

Le terme $V^*(t, X, z)$ que nous pourrions négliger par la suite.

En intégrant suivant l'axe verticale la composante horizontale de la première équation (1), nous avons(en enlevant les tildes) :

$$\partial_t(V) + \epsilon(V \cdot \nabla + w\partial_z)V = -\frac{1}{\epsilon}\nabla P$$

En intégrant cette équation sur le domaine $\Omega = \{(X, z) \in \mathbb{R}^{2+1}, -1 + \beta b(X) < z < \epsilon\zeta(t, X)\}$, nous obtenons :

$$\partial_t(\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} V) + \epsilon \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} (V \cdot \nabla)V + \epsilon \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} w\partial_z V = -\frac{1}{\epsilon} \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla P$$

En faisant une intégration par parties, nous avons :

$$\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} w\partial_z V = [Vw]_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} - \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} V\partial_z w$$

Or, nous savons que $div^\mu U^\mu = 0$ et donc $\partial_z w = -\mu\nabla \cdot V$ Donc il vient,

$$\partial_t(\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} V) + \epsilon \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} (V \cdot \nabla)V + \epsilon \mu \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} V(\nabla \cdot V) = -\frac{1}{\epsilon} \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla P$$

Enfin, nous pouvons écrire :

$$\partial_t(h\bar{V}) + \epsilon \nabla \cdot \left(\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} V \otimes V \right) + \frac{1}{\epsilon} \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} \nabla P = 0$$

Ce qui donne ensuite en utilisant la décomposition de V :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla_X \cdot (h\bar{V}) = 0 \\ \partial_t(h\bar{V}) + \epsilon \nabla \cdot (h\bar{V} \otimes \bar{V}) + \epsilon \mu \nabla \cdot \left(\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} V^* \otimes V^* \right) + \frac{1}{\epsilon} \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} \nabla P = 0 \end{cases} \quad (5)$$

3 Approximation d'ordre $O(\mu)$: Equations de Saint-Venant

La composante verticale de l'équation (1) donne,

$$\partial_t w + \epsilon (V \cdot \nabla) w + \frac{\epsilon}{\mu} \partial_z w = -\frac{1}{\epsilon} (\partial_z P + 1)$$

Nous savons que $P = 0$ à la surface, nous pouvons également écrire :

$$P = \int_z^{\epsilon \zeta(t,X)} (-\partial_z P)$$

Donc nous pouvons écrire,

$$P(t, X, z) = (\epsilon \zeta(t, X) - z) + \epsilon \int_z^{\epsilon \zeta(t,X)} (\partial_t w + \epsilon (V \cdot \nabla_X) w + \frac{\epsilon}{\mu} \partial_z w)$$

$$\nabla P = \epsilon \nabla \zeta \quad + \quad \epsilon \nabla \int_z^{\epsilon \zeta(t,X)} (\partial_t w + \epsilon V \cdot \nabla w + \frac{\epsilon}{\mu} w \partial_z w)$$

$$\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} \nabla P = \epsilon h \nabla \zeta \quad + \quad \epsilon \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} \nabla \int_z^{\epsilon \zeta(t,X)} (\partial_t w + \epsilon V \cdot \nabla w + \frac{\epsilon}{\mu} w \partial_z w)$$

Le premier terme à droite de l'égalité correspond à la pression hydrostatique et le second est de l'ordre de $O(\mu)$.

Donc,

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon \zeta(t,X)} \nabla P = h \nabla \zeta \quad + \quad O(\mu)$$

Alors les équations de Saint-Venant adimensionnées s'écrivent,

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla_X \cdot (h \bar{V}) = 0 \\ \partial_t (h \bar{V}) + h \nabla \zeta + \epsilon \nabla \cdot (h \bar{V} \otimes \bar{V}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

3.1 Formulation en dimension 1

Nous allons étudier les équations de Saint-Venant en dimension 1. Dans cette partie, nous noterons la topographie $Z(x) = -H_0 + b(x)$ et u la vitesse moyenne. Ainsi nous prenons en premier lieu une topographie plane c'est-à-dire $Z'(x) = 0$.

En prenant comme nouvelle variable $Q = hu$ le débit, le problème se pose comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Notons par $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ Q \end{pmatrix}$ et $F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ \frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$

Ainsi, nous avons :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x (F(\mathbf{U})) = 0 \quad (8)$$

Ensuite en mettant sous forme non-conservative ces équations, nous avons :

$$\partial_t \mathbf{U} + A(\mathbf{U}) \partial_x (\mathbf{U}) = 0 \text{ telle que,}$$

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{h^2} + gh & 2\frac{Q}{h} \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de A,

$$|A - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 - \frac{2Q}{h} \lambda + \frac{Q^2}{h^2} - gh \text{ polynôme caractéristique}$$

$$\Delta' = gh$$

Alors, les deux valeurs propres sont $\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$ et $\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$,

admettant respectivement pour vecteurs propres,

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{pmatrix}$$

3.2 Ajout du terme de topographie

Dans cette partie nous allons prendre en compte la topographie du fond, en développant la deuxième équation de Saint-Venant, il vient :

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow u\partial_t(h) + h\partial_t(u) + u\partial_x(hu) + hu\partial_x(hu) + gh\partial_x(h) = 0$$

$$\text{or, } \partial_t(h) = -\partial_x(hu) \text{ , alors,}$$

$$\Rightarrow -u\partial_x(hu) + h\partial_t(u) + u\partial_x(hu) + hu\partial_x(u) + gh\partial_x(h) = 0$$

$$\Rightarrow h\partial_t(u) + hu\partial_x(u) + gh\partial_x(h) = 0$$

En divisant par h nous obtenons,

$$\partial_t(u) + \partial_x(\frac{1}{2}u^2 + gh) = 0 \text{ or } h = \zeta - Z$$

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t u + \partial_x(\frac{1}{2}u^2 + g(h + Z)) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Nous pouvons également écrire la seconde équation comme :

$$\partial_t Q + \partial_x(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) = -gh\partial_x(Z)$$

$(h + Z = C^{ste}, u = 0)$ sont des états stationnaires pour ce système d'équations.

Elle admet également pour valeurs propres λ_1 et λ_2 .

4 Les équations de Green-Naghdi

Maintenant, nous allons voir une approximation d'ordre $O(\mu^2)$ des équations d'Euler. Nous considérons ici le fluide comme irrotationnel.

Les conditions limites adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{curl}^\mu U^\mu = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ \text{div}^\mu U^\mu = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ U_b^\mu \cdot N_b^\mu = 0 & \text{au fond} \end{cases} \quad (10)$$

Ensuite, en écrivant :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\bar{V} + \mu V^* \\ \mu\tilde{w} \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $\partial_z \bar{V} = 0$, (10) devient :

$$\begin{aligned}
\partial_z V^* - \sqrt{\mu} \nabla \tilde{w} &= 0 \quad \text{sur } \Omega_t \\
\nabla^\perp \cdot \bar{V} + \sqrt{\mu} \nabla^\perp \cdot V^* &= 0 \quad \text{sur } \Omega_t \\
\nabla \cdot \bar{V} + \sqrt{\mu} \nabla \cdot V^* + \partial_z \tilde{w} &= 0 \quad \text{sur } \Omega_t \\
\tilde{w} - \beta \nabla b \cdot (\bar{V} + \sqrt{\mu} V_b^*) &= 0 \quad \text{au fond}
\end{aligned} \tag{11}$$

Avec la troisième et la dernière ligne de (11), nous obtenons :

$$\tilde{w} = -\nabla \cdot [(1 + z - \beta b) \bar{V}] - \sqrt{\mu} \nabla \cdot \int_{-1+\beta b}^z V^*$$

Le remplaçant dans la première équation, il vient :

$$\partial_z V^* = \sqrt{\mu} \nabla \tilde{w}$$

Alors,

$$V^* = \sqrt{\mu} \left(\int_z^{\epsilon \zeta} \nabla \nabla \cdot [(1 + z' - \beta b) \bar{V}] dz' \right)^* + \mu \left(\int_z^{\epsilon \zeta} \nabla \nabla \cdot \int_{-1+\beta b}^z V^* \right)^*$$

En définissant les opérateurs $T[\beta b, \epsilon \zeta] W = \int_{-1+\beta b}^{\epsilon \zeta} \nabla \nabla \cdot W$ et $T^*[\beta b, \epsilon \zeta] W = (T[\beta b, \epsilon \zeta])^*$

Nous pouvons alors écrire,

$$(1 - \mu T^*) V^* = \sqrt{\mu} T^* \bar{V}$$

$$V^* = \sqrt{\mu} T^* \bar{V} + O(\mu^{\frac{3}{2}})$$

$$\text{Or, } V = \bar{V} + O(\mu)$$

$$V = \bar{V} + \mu T^* \bar{V} + O(\mu^2)$$

\bar{V} ne dépend plus de z , nous pouvons écrire :

$$T^* \bar{V} = -\frac{1}{2} \left((z + 1 - \beta b)^2 - \frac{h^2}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \bar{V} + \beta \left(z - \epsilon \zeta + \frac{1}{2} h \right) [\nabla b \cdot \nabla \bar{V} + \nabla(\nabla b \cdot \bar{V})]$$

Au final,

$$w = O(\mu)$$

$$w = -\mu \nabla \cdot [(1 + z - \beta b) \bar{V}] + O(\mu^2)$$

En reprenant ensuite,

$$\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla P = \epsilon h \nabla \zeta \quad + \quad \epsilon \int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla \int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} (\partial_t w + \epsilon V \cdot \nabla w + \frac{\epsilon}{\mu} w \partial_z w)$$

Prenons la seconde partie de l'intégrale et enlevons d'abord l'opérateur de moyenne $\int_{-1+\beta b(X)}^{\epsilon\zeta(t,X)} (\cdot)$

Donc il reste, $\int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla (\partial_t w + \epsilon V \cdot \nabla w + \frac{\epsilon}{\mu} w \partial_z w)$

$$\int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} (\partial_t (\nabla w) + \epsilon \nabla (V \cdot \nabla w) + \frac{\epsilon}{\mu} \nabla (w \partial_z w))$$

Redécoupons encore cette intégrale en trois,

$$I_1 = \partial_t (\int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla w), \quad I_2 = \int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla (V \cdot \nabla w) \quad \text{et} \quad I_3 = \int_z^{\epsilon\zeta(t,X)} \nabla (w \partial_z w)$$

Nous avons en développant, $w = -\mu \nabla \cdot \bar{V} - \mu \nabla \cdot (z \bar{V}) + \beta \mu \nabla \cdot (b \bar{V})$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = -\mu \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) (\epsilon \zeta - z) - \mu \frac{(\epsilon \zeta - z)^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) + \beta \mu (\epsilon \zeta - z) \nabla (\nabla \cdot (b \bar{V})) \\ I_2 = -\mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{V})] (\epsilon \zeta - z) - \mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla ((\nabla \bar{V}))] \frac{(\epsilon \zeta - z)^2}{2} + \beta \mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot (b \bar{V}))] (\epsilon \zeta - z) \\ I_3 = \mu^2 (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot \bar{V}) (\epsilon \zeta - z) + \mu^2 (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot \bar{V}) \frac{(\epsilon \zeta - z)^2}{2} - \beta \mu (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot (b \bar{V})) (\epsilon \zeta - z) \end{array} \right.$$

Maintenant, nous intégrons l'opérateur moyenne, les trois termes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) \frac{(1 - \beta b)^2}{2} + \mu \frac{(1 - \beta b)^3}{6} \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) - \beta \mu \frac{(1 - \beta b)^2}{2} \nabla (\nabla \cdot (b \bar{V})) \\ \epsilon \mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{V})] \frac{(1 - \beta b)^2}{2} + \epsilon \mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla ((\nabla \bar{V}))] \frac{(1 - \beta b)^3}{6} - \beta \epsilon \mu \nabla [\bar{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot (b \bar{V}))] \frac{(1 - \beta b)^2}{2} \\ - \epsilon \mu (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot \bar{V}) \frac{(1 - \beta b)^2}{2} - \epsilon \mu (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot \bar{V}) \frac{(1 - \beta b)^3}{6} + \epsilon \beta (\nabla \cdot \bar{V}) (\nabla \cdot (b \bar{V})) \frac{(1 - \beta b)^2}{2} \end{array} \right.$$

En rappelant que, $\nabla \cdot (b \bar{V}) = (\partial_1 b) \bar{V} + (\partial_1 \bar{V}) b + (\partial_2 b) \bar{V} + (\partial_2 \bar{V}) b$

Alors les équations de Green-Naghdi s'énoncent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta \quad + \quad \nabla_X \cdot (h \bar{V}) = 0 \\ \partial_t (h \bar{V}) \quad + \quad h \nabla \zeta \quad + \quad h \mu \mathcal{T} (\partial_t \bar{V} + \epsilon \bar{V} \cdot \nabla \bar{V}) + \epsilon h \mathcal{S}_1 (\bar{V}) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

Les opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{S}_1 sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}V = \frac{-1}{3h} \nabla(h^3 \nabla \cdot V) + \frac{1}{2h} [\nabla(h^2 \nabla b \cdot V) - h^2 \nabla b \nabla \cdot V] + \nabla b \nabla b \cdot V \\ V^\perp = (-V_2, V_1)^\perp \\ \mathcal{S}_1(V) = -2\mathcal{R}_1(\partial_1 V \cdot \partial_2 V^\perp + (\nabla \cdot V)^2) + \mathcal{R}_2(V \cdot (V \cdot \nabla) \nabla b) \end{array} \right.$$

Avec, $\mathcal{R}_1 = -\frac{1}{3h} \nabla(h^3 w) - \frac{h}{2} w \nabla b$, $\mathcal{R}_2 = \frac{1}{2h} \nabla(h^2 w) + w \nabla b$

Troisième partie

Méthodes numériques

Dans l'application numérique, nous ne traiterons que le cas Saint-Venant. Il n'est pas envisageable de connaître analytiquement la solution des équations de Saint-Venant, donc une résolution numérique doit être mise en place. Celle-ci englobe à la fois de trouver la solution discrète de \mathbf{U} ainsi que de gérer les conditions limites.

4.1 Schémas Volumes-Finis

Sous la forme (8), nous voyons que l'on a la forme d'un système de lois de conservations.

Les méthodes volumes finis sont particulièrement bien adaptées pour ce genre de système d'équations.

L'idée de base des schémas Volumes-Finis est de diviser le domaine spatial considéré en cellules(ou encore "volumes de contrôles") et de former des équations discrètes à partir de la forme intégrale des équations, écrite pour chaque cellule. Pour construire la partition en cellules, on choisit un pas de maillage $\Delta x > 0$, et on définit

$$\mathcal{C}_i =]x_0 + (i - \frac{1}{2})\Delta x, x_0 + (i + \frac{1}{2})\Delta x[,$$

dont le point milieu est $x_i = x_0 + i\Delta x$. x_0 est ici un réel fixé. En appelant $x_{i-\frac{1}{2}} = x_0 + (i - \frac{1}{2})\Delta x$ et $x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + (i + \frac{1}{2})\Delta x$ les extrémités de la cellule \mathcal{C}_i . De même nous avons un pas de discrétisation en temps Δt avec $t^n = n\Delta t$. on peut écrire la relation de conservation intégrale pour cette cellule et dans un intervalle de temps sous la forme

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \partial_t(\mathbf{U}(t, x)) dt \right) dx + \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x(F(\mathbf{U}(t, x))) dx \right) dt = 0$$

En posant $\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(t^n, x) dx$ et $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} F(\mathbf{U}(t, x_{i+\frac{1}{2}})) dt$.

Alors le schéma s'écrit,

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (13)$$

Ce schéma est dit conservatif également.

\mathbf{U}_i^n est l'approximation de $\mathbf{U}(t^n, x_i)$ qui est constante par cellule, $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$ représente l'approximation du flux à l'interface. Les différents schémas Volumes-Finis portent le choix de ce flux.

Dans ce rapport, nous utiliserons le flux HLL(Harten, Lax , Van-Leer)

Définition du flux à l'interface (Schéma HLL) :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} F(\mathbf{U}_i^n) & \text{si } 0 \leq \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- \\ \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^+ F(\mathbf{U}_i^n) - \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- F(\mathbf{U}_{i+1}^n) + \lambda_{i+\frac{1}{2}}^+ \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n)}{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^+ - \lambda_{i+\frac{1}{2}}^-} & \text{si } \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- \leq 0 \leq \lambda_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ F(\mathbf{U}_{i+1}^n) & \text{si } 0 \geq \lambda_{i+\frac{1}{2}}^+ \end{cases} \quad (14)$$

Avec, $\lambda_{i+\frac{1}{2}}^+$ et $\lambda_{i+\frac{1}{2}}^-$ des estimations locales de la plus grande et la plus petite valeurs propres à l'interface.

4.1.1 Schéma "well-balanced" pour la topographie

Les schémas "well-balanced" sont conçus pour préserver les états stationnaires $u = 0$ et $h + Z = 0$.

Soit $T = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x(Z) \end{pmatrix}$, tel que :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x(F(\mathbf{U})) = T(\text{terme source})$$

Nous modifions les schéma numérique (13) pour obtenir un schéma tenant compte du saut de topographie :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\mathcal{F}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n)) = T_i \quad (15)$$

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_i(Z_{i+1} - Z_i) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{U}_{i+1/2+}$ et $\mathbf{U}_{i+1/2-}$ sont les valeurs aux interfaces obtenues par une reconstruction hydrostatique. Nous allons utiliser le fait que les écoulements proches d'un état stationnaire sont presque hydrostatiques(i.e $u \ll \sqrt{gh}$).

Ceci implique pour un h^* vérifiant l'état d'équilibre au repos :

$\partial_x(g\frac{(h^*)^2}{2})) = -gh^*\partial_x(Z)$, d'où en intégrant sur une cellule, nous obtenons la discrétisation pour le terme de topographie :

$$-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} gh^*\partial_x(Z) = g\frac{(h^*)_{i+1/2-}^2}{2} - g\frac{(h^*)_{i-1/2+}^2}{2}$$

Avec,

$$(h^*)_{i+1/2-} = h_i + Z_i - Z_{i+\frac{1}{2}}, (h^*)_{i+1/2+} = h_{i+1} + Z_{i+1} - Z_{i+\frac{1}{2}}$$

Pour la topographie,

$$Z_{i+\frac{1}{2}} = \max(Z_i, Z_{i+1})$$

Ensuite, pour préserver la positivité de la hauteur d'eau :

$$h_{i+1/2-} = \max(0, h_{i+1/2-}) \text{ et } h_{i+1/2+} = \max(0, h_{i+1/2+})$$

Nous obtenons,

$$U_{i+1/2-} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2-} \\ (h_{i+1/2-})u_i \end{pmatrix} \text{ et } U_{i+1/2+} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2+} \\ (h_{i+1/2+})u_i \end{pmatrix}$$

4.2 Cas tests

Nous avons en notre possession un code Fortran pour Saint-Venant développé. Le code en question traite des cas que nous allons voir par la suite. Ce code utilise la résolution par schéma volume fini avec le flux HLL.

4.2.1 Rupture de barrage sur fond mouillé

Une rupture de barrage correspond à un problème où la hauteur d'eau initiale est discontinue telle que $h_L > h_R$. $(h, Q)(0, x) = \begin{cases} (h_L, 0) & \text{si } x \leq 0 \\ (h_R, 0) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Nous connaissons la solution analytique de ce problème, elle est auto-similaire (i.e en fonction de $\frac{x}{t}$) composée de trois états constants, (h_L, Q_L) , (h_1, Q_1) et (h_R, Q_R) .

L'état \mathbf{U}_1 est relié à \mathbf{U}_L par une détente parabolique d'équation $h(x, t) = \frac{1}{9g}(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2$ et se déplaçant à une vitesse $u(t, x) = -\sqrt{gh_L}t$.

De même, l'état \mathbf{U}_1 est relié à \mathbf{U}_R est relié par un choc (discontinuité) se déplaçant à la vitesse $s = \frac{h_1 u_1}{h_1 - h_R}$

L'état intermédiaire se calcule en résolvant l'équation non-linéaire suivante,

$$u_L - (h_1 - h_L)\sqrt{g\frac{h_1 + h_L}{2h_1 h_L}} = u_R - 2(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_R})$$

Nous avons mis en oeuvre ce test sur le code Saint-Venant et voici les résultats pour,

$$h(t = 0, x) = \begin{cases} 2m & \text{si } x \leq 0 \\ 1m & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

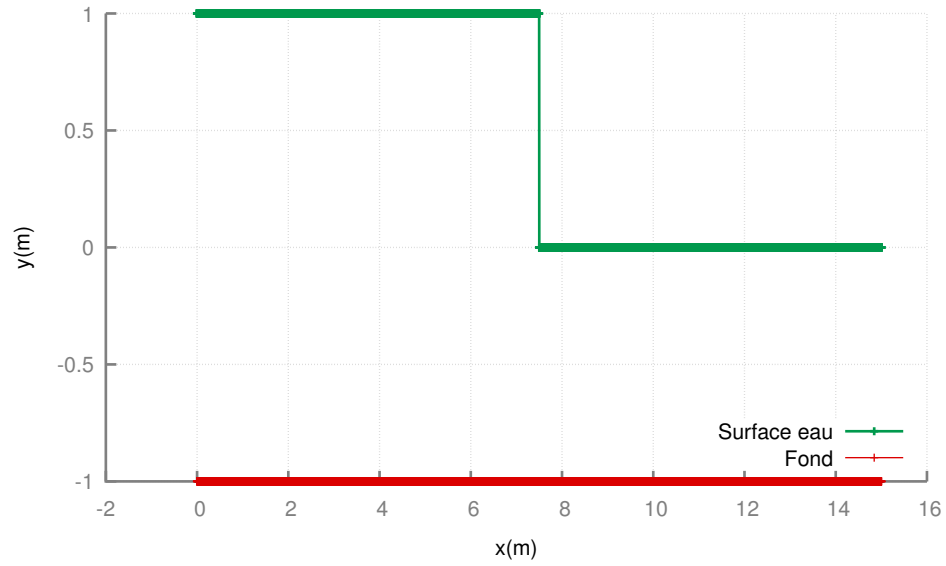


FIGURE 4 – Etat avant la rupture(solution numérique)

Le domaine a été découpé en $Nbx = 7500$ mailles en espace.

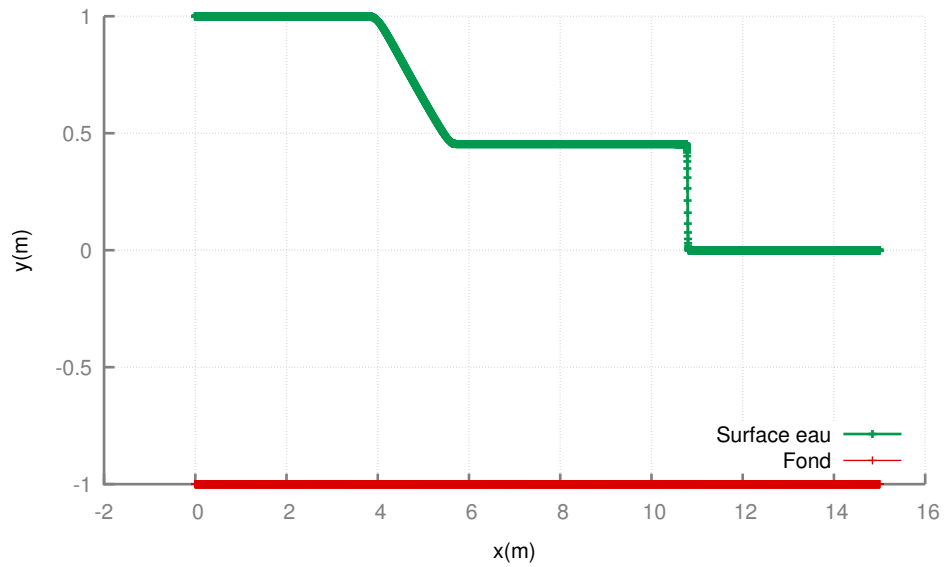


FIGURE 5 – Surface d'eau : état intermédiaire(solution numérique)

4.2.2 Effondrement d'une gaussienne

Nous allons voir dans cette partie la simulation de la propagation d'une vague.

Nous admettons un fond plat. Ensuite nous imposons des conditions aux bords du domaine, ici cela sera une condition "solid wall" à gauche et à droite.

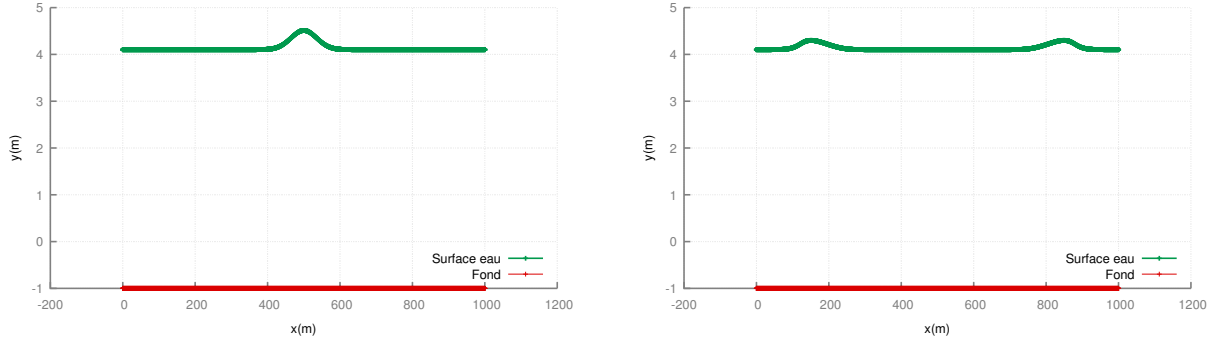


FIGURE 6 – Effondrement d'une gaussienne(Nbx = 5000 mailles en espace)

Ici, le profil de la surface libre est une gaussienne d'amplitude maximale partant de la surface libre fixée à $a_{surf} = 0.1(\frac{500}{g} - 1)m$, la largeur du domaine de simulation est égal à $L = 1000m$ donc nous sommes dans le régime « eau peu profonde ». Le fond étant plat, nous observons deux ondes se former, l'une allant vers la gauche et l'autre dans la direction opposée jusqu'à atteindre une surface plane fixée.

Ici, pour les conditions limites du type "solid wall", sur le bord gauche nous imposons $h_i^n = h_{i+1}^n$ et $u_i^n = -u_{i+1}^n$, sur le bord droit $h_i^n = h_{i-1}^n$ et $u_i^n = -u_{i-1}^n$ (Conditions de réflexion des ondes)

Quatrième partie

Etudes des conditions aux limites

Les équations sont résolues numériquement par des schémas du type volume fini. Comme nous venons de le montrer au chapitre précédent, ce schéma numérique nécessite un calcul du flux à l'interface. Nous allons maintenant aborder comment traiter conditions limites qui sont essentielles dans l'implémentation d'un schéma.

Dès lors nous pouvons poser le problème comme suit,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x(F(\mathbf{U})) = 0 \\ \mathbf{U}(0, x) = f(x) \\ \mathbf{U}(t, 0) = g(t) \end{cases}$$

Nous prenons $x = 0$ comme bord pour simplifier.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser les structures des équations en elles-mêmes.

4.3 Invariants de Riemann

Dans cette partie, nous allons voir que les équations de Saint-Venant sont en fait équivalentes à deux équations de transport.

Nous allons transformer le système (8) par changement de base,

Soit la matrice de changement de base,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u + \sqrt{gh} & u - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{gh}} \begin{pmatrix} u - \sqrt{gh} & -1 \\ -u - \sqrt{gh} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$P^{-1}(\partial_t U) + DP^{-1}(\partial_x(U)) = 0, \quad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} u + \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u - \sqrt{gh} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale.

D'où,

$$\begin{cases} \partial_t(u + 2\sqrt{gh}) + (u + \sqrt{gh})\partial_x(u + 2\sqrt{gh}) = 0 \\ \partial_t(u - 2\sqrt{gh}) + (u - \sqrt{gh})\partial_x(u - 2\sqrt{gh}) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Nous avons les quantités $u + 2\sqrt{gh}$ et $u - 2\sqrt{gh}$ qui sont constantes respectivement le long des courbes vérifiant $\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{gh}$ ainsi que $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{gh}$. Ces valeurs sont appelées invariants de Riemann.

Si $L = u - 2\sqrt{gh}$, $R = u + 2\sqrt{gh}$ alors $\nabla L.r_2^T = 0$ et $\nabla R.r_1^T = 0$ qui sont donc les mêmes invariants de Riemann pour Saint-Venant avec topographie.

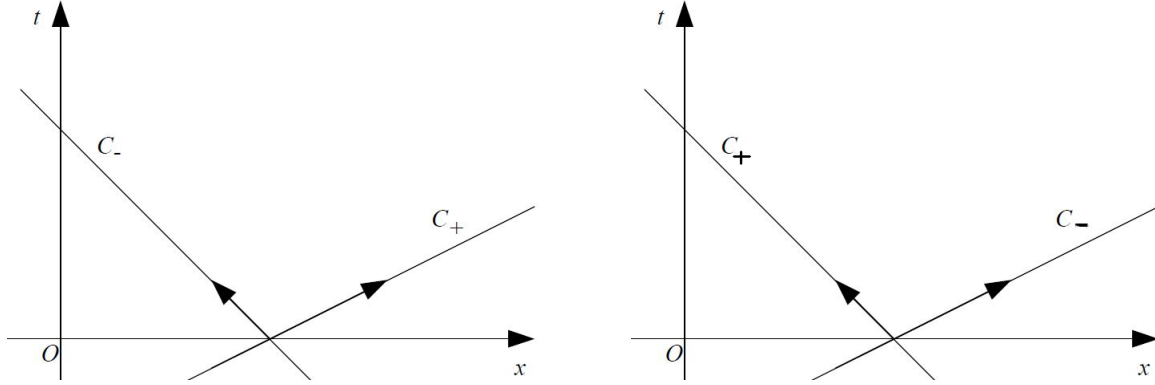


FIGURE 7 – Courbes caractéristiques sur lesquelles les invariants de Riemann sont des constantes (régime fluvial à gauche et torrentiel à droite)

Connaître les structures des équations ne suffit pas pour traiter les conditions aux bords, il faut aussi savoir le type des écoulements. Nous distinguons trois types d'écoulements selon les relations liant u et h .

Fluvial : $u < \sqrt{gh}$

Torrentiel : $u > \sqrt{gh}$

Critique : $u = \sqrt{gh}$

Notons par $C_- = u(t, x) - \sqrt{gh}$ et $C_+(t, x) = u(t, x) + \sqrt{gh}$ (t, x) les deux vitesses et nous voyons sur la figure 7 les flux entrants et sortants sur chaque bord pour différents types d'écoulements. Donc l'invariant que l'on utilise pour pouvoir imposer les conditions limites.

4.4 Méthodes de reconstruction linéaire

Nous avons le régime suivant $|u| < \sqrt{gh}$ qui est dit fluvial. En observant la monotonie des courbes caractéristiques et en les projetant sur le plan où x est en abscisse et t en ordonnée, nous pouvons déduire quelle courbe passe dans le domaine de discrétisation.

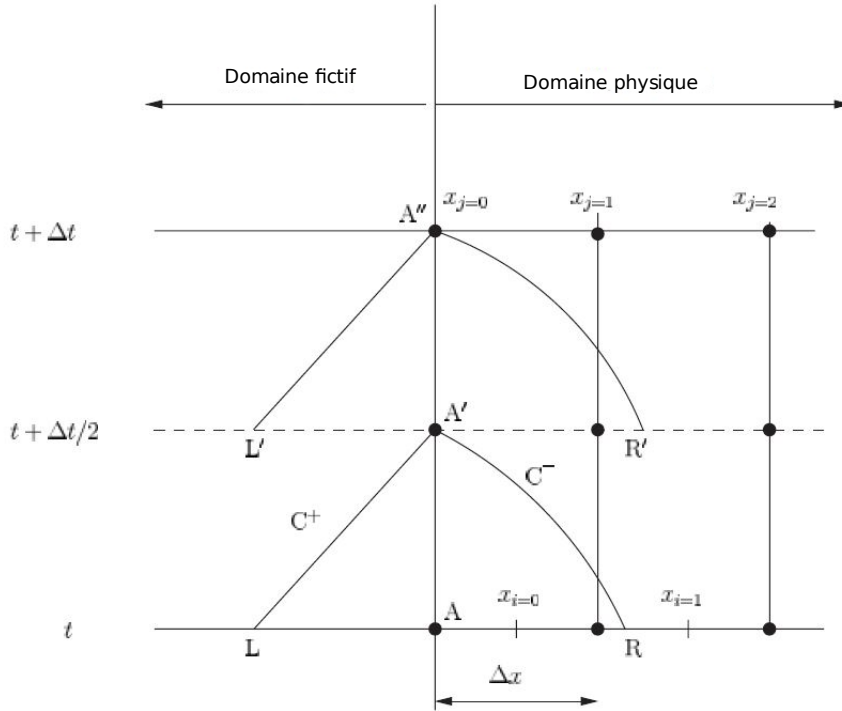


FIGURE 8 – Plan $x - t$ et courbes caractéristiques

Ainsi, nous pouvons appliquer une méthode d'interpolation linéaire tenant compte des valeurs de u et de h des noeuds voisins. Ici, focalisons-nous sur le bord gauche donc la courbe C_- passe dans le domaine. La méthode repose sur l'approximation d'intégrale de vitesse $\int_{t-\Delta t}^t x'(s)$ alors nous pouvons écrire à l'ordre 2 par un schéma dit des trapèzes avec $x(t - \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{2}(x'(t) + x'(t - \Delta t)) + O(\Delta t^2)$.

En réécrivant nous obtenons $x_R - x_A + \frac{\Delta t}{2}(u_R - \sqrt{gh_R}) = O(\Delta t^2)$

Ensuite, nous appliquons un schéma à deux étapes pour obtenir :

$$x_R - x_A + \frac{\Delta t}{4}(u_R - \sqrt{gh_R} + u_{A'} - \sqrt{gh_{A'}}) = O(\Delta t^3)$$

Si on note par $R_L^+ = u_L + 2\sqrt{gh}$ et $R_R^- = u_R - 2\sqrt{gh}$.

$$\text{Alors } u_{A'} = \frac{R_L^+ + R_R^-}{2} \text{ et } h_{A'} = \frac{(R_R^- - R_L^+)^2}{16g}$$

Notons par $f(x_R)$ cette fonction donc l'équation s'écrit $f(x_R) = 0$.

Parmi les méthodes disponibles dans la recherche d'un minimum d'une fonction, nous choisissons la méthode de Newton-Raphson. L'algorithme consiste à itérer sur x jusqu'à trouver un zéro de la fonction suivant le schéma itératif $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Après, une interpolation linéaire est nécessaire pour évaluer les valeurs de chaque va-

riables i.e u_R , h_R , $u_{A'}$ et $h_{A'}$.

Ensuite, nous évaluons l'invariant De Riemann $R(t, x)$ au point x_R trouvé. Pour les cas tests suivants, nous avons utilisé l'approximation des intégrales à l'ordre 1 :

$$x_R - x_A + \Delta t(u_R(t, x_R) - \sqrt{gh_R(t, x_R)}) = O(\Delta t^2).$$

4.4.1 Débit entrant dans un domaine

Dans cette partie, nous allons prendre en compte un écoulement fluvial avec terme de topographie. Pour mettre en oeuvre notre méthode, nous allons imposer des conditions à droite et à gauche.

Nous allons partir d'un profil initial :

$$\begin{cases} h(t = 0, x) = 1 \\ Z(t, x) = -10(x - 0.4)(x - 0.6) \end{cases}$$

Nous imposons $Q = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ à gauche et $h = 1 \text{ m}$ à droite.

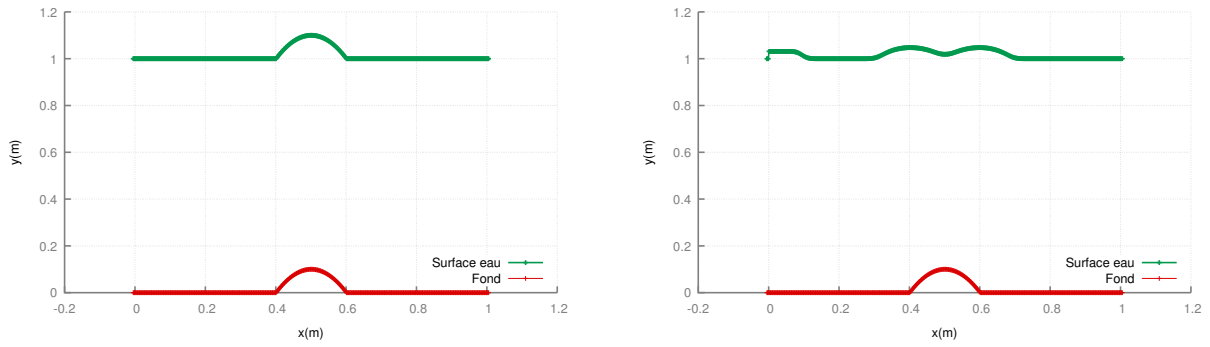


FIGURE 9 – Profil de surface initiale et intermédiaire

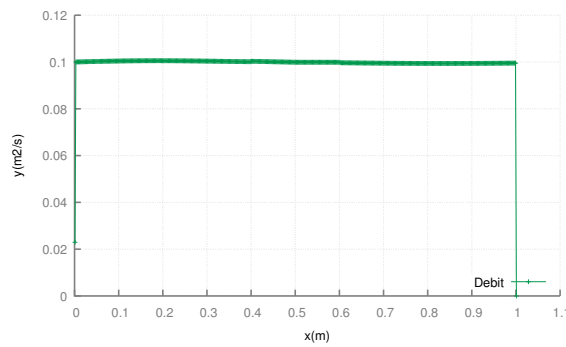


FIGURE 10 – Débit final

Nous observons l'entrée d'eau à gauche et le schéma a préservé le type de l'écoulement initial(i.e $u < \sqrt{gh}$) qui est fluvial.

4.4.2 Génération d'une onde sinusoïdale

Dans cette partie, nous allons générer une sinusoïde à droite du domaine. Pour cela, nous imposons $h(t, x) = 1 + 0.1\cos(\omega t)$ et $Q = 0$ à gauche avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation en radian/s et T la période en s(seconde). Voici les résultats que nous obtenons pour la surface d'eau et le débit.

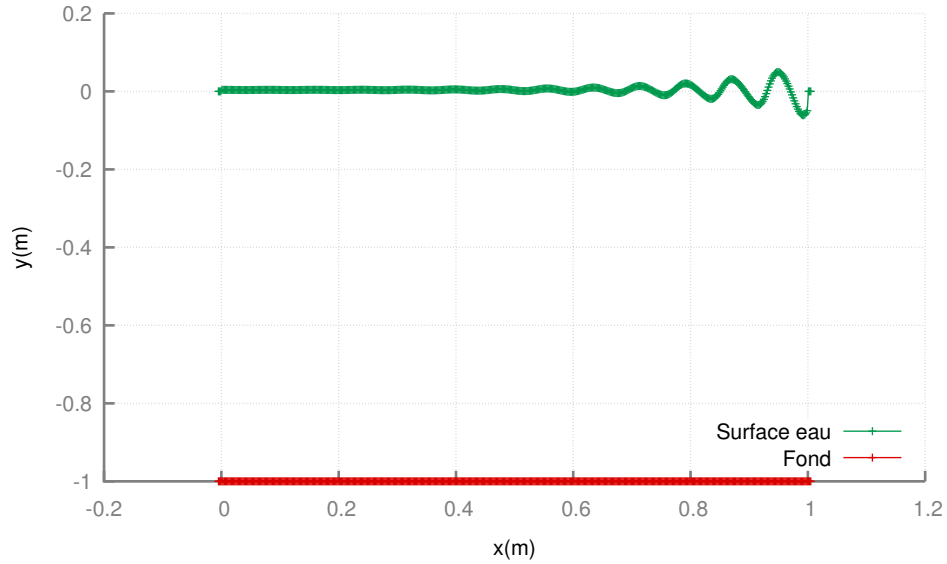


FIGURE 11 – Surface de l'eau

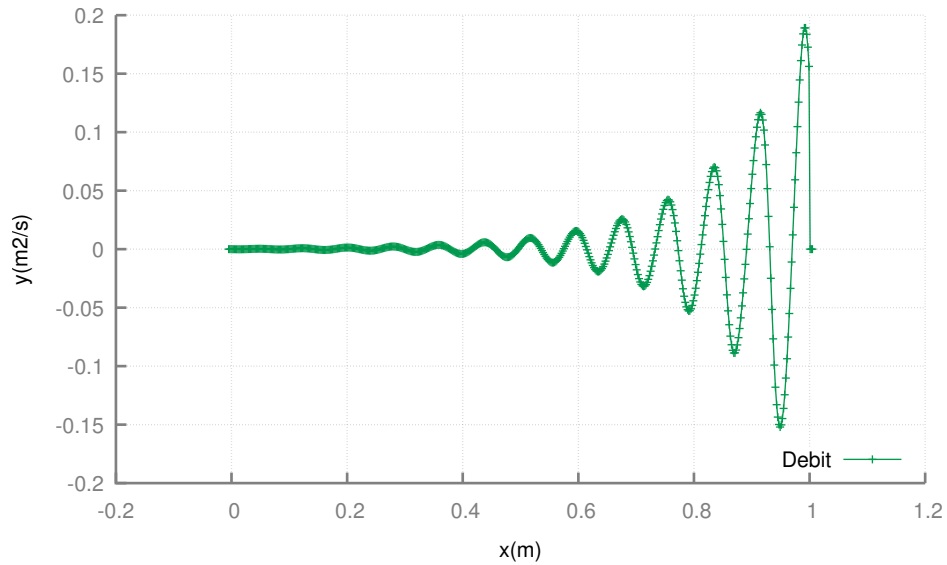


FIGURE 12 – Débit périodique

Nous voyons les graphiques des deux variables qui atteignent les deux un régime périodique avec une singularité à droite.

4.5 Etudes de singularités

Nous allons voir dans cette partie un exemple des limites du schéma numérique proposé : le cas d'une topographie discontinue. En effet, nous observons une singularité au niveau de la surface d'eau et des ondes réfléchies (Voir image ci-bas).

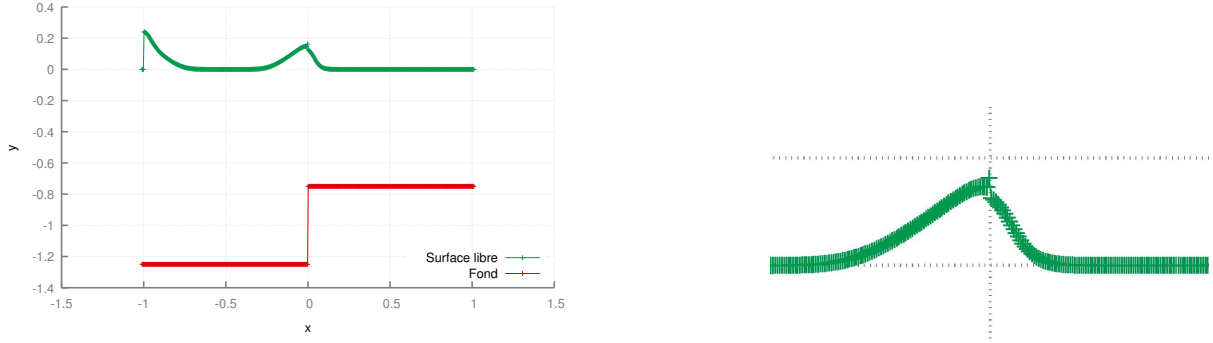


FIGURE 13 – Discontinuité surface (à gauche taille réelle, à droite image zoomée)

4.5.1 Méthodes de décomposition

Dans un premier temps, nous pouvons résoudre ce problème en séparant les deux états gauche et droite.

$$\begin{cases} \partial_t U^d + \partial_x(F(U^d)) = 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \partial_t U^g + \partial_x(F(U^g)) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En procédant à un changement de variables $\tilde{U}^g(t, x) = U^g(t, -x)$ et en mettant les équations sous forme non-conservative, nous avons :

$$\begin{cases} \partial_t U^d + A^d(U^d) \partial_x(U^d) = 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \partial_t \tilde{U}^g + -\tilde{A}^g(\tilde{U}^g) \partial_x(\tilde{U}^g) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi, nous avons une nouvelle matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ diagonale par blocs de la forme,

$$M(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} A^d(U^d) & 0 \\ 0 & -\tilde{A}^g(U^g) \end{bmatrix}, \quad \text{cette fois-ci } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} h^d \\ Q^d \\ \tilde{h}^g \\ \tilde{Q}^g \end{pmatrix}$$

Avec une condition de transmission s'écrivant $h^d(t, x = 0) = \tilde{h}^g(t, x = 0)$ et $Q^d(t, x = 0) = \tilde{Q}^g(t, x = 0)$

Pour la partie gauche donc avec le changement de variables, l'équation régissant les conditions limites d'écrivent comme suit :

$$\partial_t(\tilde{u}^g(t, -x) + 2\sqrt{g\tilde{h}^g(t, -x)}) + (\tilde{u}^g(t, -x) + \sqrt{g\tilde{h}^g(t, -x)})\partial_x(\tilde{u}^g(t, -x) + 2\sqrt{g\tilde{h}^g(t, -x)})$$

Ce qui donne en séparant en deux sous-parties le problème.

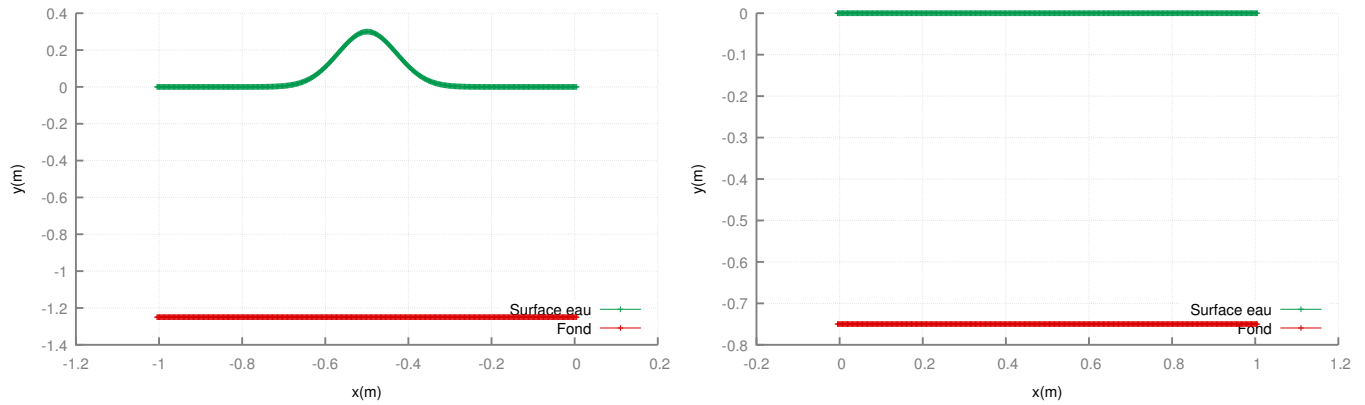


FIGURE 14 – Séparation du problème en deux(Profils initiaux)

Nous pouvons également lisser la discontinuité, ici nous prenons la fonction tangente hyperbolique. Plus nous affinons la courbe vers la discontinuité plus les discontinuités disparaissent(cf. figure 15)

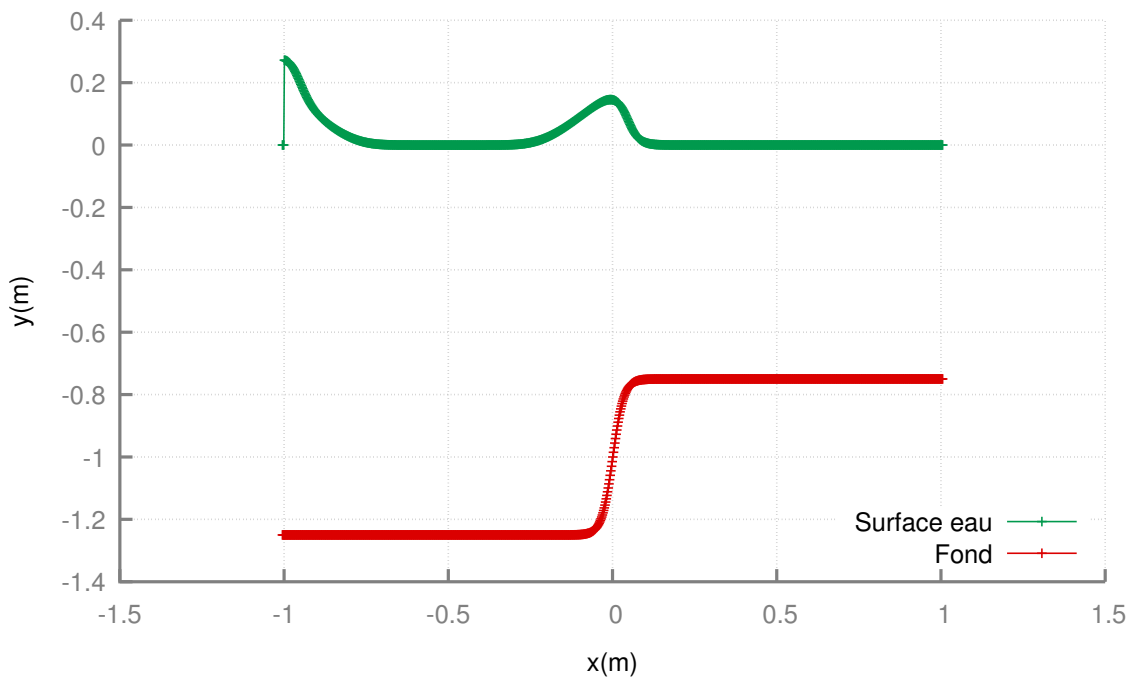


FIGURE 15 – Affinage de la topographie

Cinquième partie

Conclusions et perspectives

D'abord j'aimerais commencer par dire que ce stage m'a donné l'opportunité d'appliquer les connaissances acquises durant mes heures de cours et d'en absorber d'autres notamment l'activité de recherche.

Ensuite, sur les démarches que nous avons suivi tout au long du stage, plusieurs conclusions peuvent être tirées.

Premièrement, nous retrouvons les structures des équations de Saint-Venant dans les simulations comme le transport de deux invariants ce qui nous a aidé à pouvoir mettre en oeuvre le traitement des bords.

Ensuite, le code Saint-Venant sur lequel nous nous sommes basés durant ce stage donne de très bons résultats en terme d'approximation du système d'équations.

Les équations de Saint-Venant sont d'ordre $O(\mu)$, les éventuelles pistes sont de traiter les conditions limites pour les équations de Green-Naghdi qui ont fait l'objet du sujet de stage initial, voir une extension 2D du thème de ce stage pour Saint-Venant.

Ainsi, des continuités sont à prévoir notamment dans la mise en place du traitement de bord d'ordre 3 et l'appliquer au problème de décomposition de domaine couplé Saint-Venant - Green-Naghdi.

Références

- [1] Angel Castro, David Lannes, Fully nonlinear long-wave models in presence of vorticity *J.Fluid Mech.* (2014),vol. 759,pp. 642-675.
- [2] F .Marche , P.Bonneton, P.Fabrie et N.Seguin, Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes *Int. J. Numer. Fluids.* 2007 ; 53 :867-894
- [3] R .Cienfuegos , E.Barthélemy, P.Bonneton, A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part II : Boundary conditions and validation *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2007 ; 53 :1423–1455
- [4] T .Gallouët , J-M.Hérard, N.Seguin, Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography *Computers and Fluids* 32(2003); 479–513
- [5] M-O .Bristeau , B.Coussin, Boundary Conditions for Shallow Water Equations solved by kinetic schemes *Rapport de Recherche numero 4282* ; Octobre 2001
- [6] P .Bonneton , F.Chazel, D.Lannes,F.Marche,M.Tissier A splitting approach for fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi Model *Journal of Computational Physics* 230(2011); 1479–1498
- [7] F .Marche, Approximation numérique des équations aux dérivées partielles hyperboliques *Institut de Modélisation de Montpellier, cours version 2015* ;