

université de BORDEAUX

Collège Sciences et technologies

RAPPORT PROJET TUTEUR

Licence 3 Mathématiques parcours Ingénierie-Mathématiques

APPROXIMATION PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉES POUR L'ÉLECTROCARDIOGRAMME

Harris Ludwig Boudi
&
Romuald Makosso Nombo

Encadrant:

Monsieur Yves Coudière

Remerciement à

Monsieur Yves Coudière qui nous a accordé son temps et qui nous a apporté une aide précieuse dans notre projet.

Sommaire

1) Introduction	3
2) Problématique.....	3
2.1) Présentation du sujet	3
2.2) Attente Mathématiques & numérique	3
3) Approche Mathématiques et numérique.....	8
3.1) Procédé et Approche Mathématiques.....	8
3.1.a) Procédé.....	8
3.1.b) calcul des polynômes P_k	10
3.2) Approche numérique	13
3.2.a) Décomposition de Cholesky	14
3.2.b) Résultats	14
4) Interprétation Des Résultats.....	21
4.1) Évaluation Graphique.....	21
4.2) Commentaires sur la méthode de résolution.....	22
5) Conclusion	23

1) Introduction:

Dans le cadre de nos études en licence 3 à l'université de Bordeaux collège sciences et technologies département de Mathématiques parcours Mathématiques ingénierie, un projet tutoré doit être réalisé. Il est choisi parmi tous ceux qui sont proposés. Il a pour but d'évaluer nos compétences sur l'application des Mathématiques dans un cadre professionnel.

Ce rapport sera présenté en deux parties principales. La première partie sera la présentation du sujet. La deuxième portera sur la description des outils Mathématiques et numériques utilisés.

2) Problématique:

2.1) Présentation du sujet:

Situé au sein du thorax, entre les deux poumons, le cœur est un muscle creux de la grosseur d'un poing, pesant environ 300 grammes chez l'adulte.

Le cœur a la forme grossière d'une pyramide renversée à trois faces. De sa base s'échappent deux gros vaisseaux :

- l'artère pulmonaire, qui relie le cœur aux poumons,
- l'aorte qui le relie à tout le reste du corps : organes, viscères, muscles, tissus.

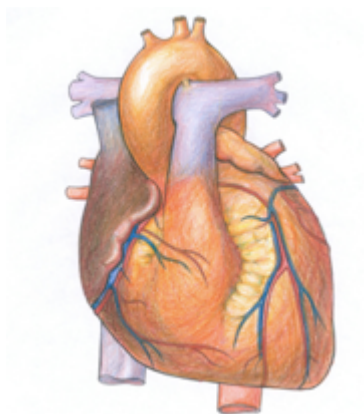


figure 1

Vu en coupe, le cœur se compose de quatre cavités, couplées deux par deux, qui forment le cœur droit et le cœur gauche, soit **deux pompes juxtaposées et synchronisées**.

Chacun des deux cœurs est constitué d'une petite cavité, l'oreillette, ayant un rôle de réception du sang. Au gré des pressions régnant dans les cavités, elle se contracte pour se vider dans un espace plus volumineux et musclé, le ventricule, qui éjecte le sang dans une artère.

La circulation se fait à sens unique grâce aux **valves cardiaques** qui, telles des clapets s'ouvrent et se ferment alternativement. Au nombre de quatre, elles siègent pour deux d'entre elles entre les oreillettes et les ventricules (les valves mitrale et tricuspide). Les deux autres sont situées entre les ventricules et l'artère correspondante (valve aortique et valve pulmonaire).

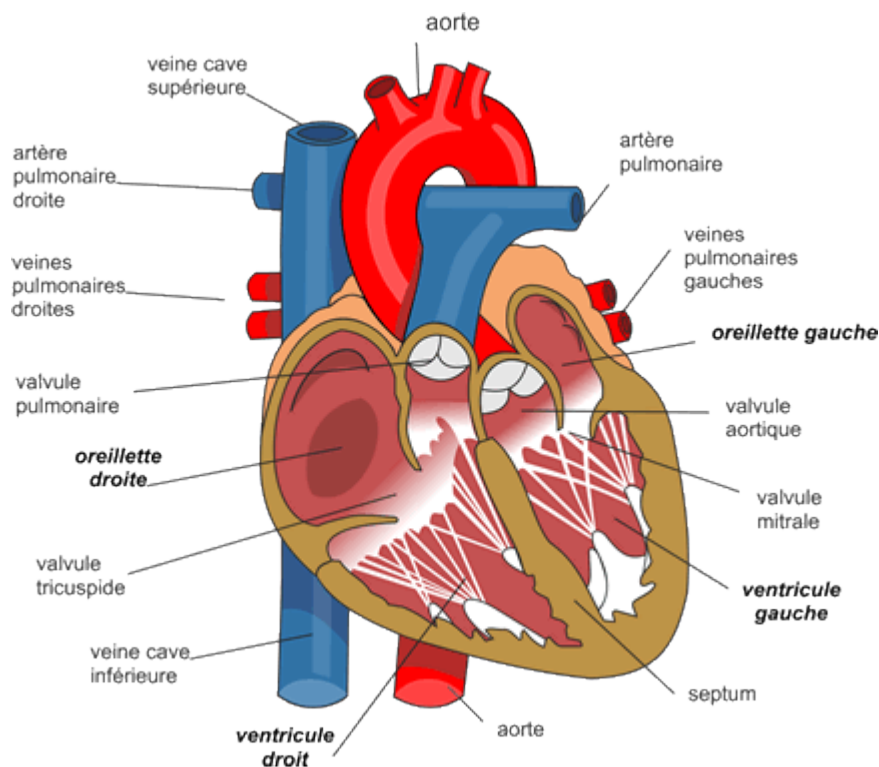


figure 2

Le **cœur** droit comprend l'oreillette droite, placée au dessus du ventricule droit. Entre les deux se trouve la valvule tricuspide (*à trois feuillets*).

Le cœur droit assure la récupération du sang veineux, le sang *bleu* appauvri en oxygène et riche en oxyde de carbone, de retour des tissus et organes qu'il a nourris. Cette récupération s'effectue grâce à deux vaisseaux raccordés à l'oreillette : la veine cave inférieure, venant de la partie du corps située au dessous du cœur, et la veine cave supérieure venant de la partie du corps située au dessus.

Le **cœur gauche** est constitué par l'oreillette gauche qui surmonte le ventricule gauche. Entre les deux se situe la valvule mitrale (en forme de mitre d'évêque renversée).

Le cœur gauche est chargé de propulser le sang dans tout l'organisme grâce à l'aorte, artère maîtresse qui naît du ventricule gauche. En amont, le sang **rouge**, revenu des poumons où il s'est oxygéné, se déverse dans l'oreillette gauche en empruntant les veines pulmonaires, avant de passer dans le ventricule gauche à travers la valvule mitrale ouverte. Il est finalement éjecté par le ventricule dans l'aorte, qu'il atteint après avoir franchi la valvule aortique.

Il fonctionne grâce à un système électrique spécial.

Le muscle qui fait battre le cœur, et qui s'appelle le muscle cardiaque, est différent de tous les autres muscles dans le corps ; en effet, les cellules des muscles ordinaires se contractent lorsqu'elles sont stimulées par le système nerveux, alors que les cellules du muscle cardiaque se contractent d'elles-mêmes. Ces cellules ont la capacité de générer et de faire circuler leur propre courant électrique. Bien que chaque cellule possède cette faculté, aucune d'elles ne se contracte indépendamment des autres car sinon elles fonctionneraient à l'encontre des instructions du système électrique qui les contrôle.

À chaque battement cardiaque, ces cellules se contractent et une impulsion électrique traverse le cœur. Cette onde fait contracter le muscle cardiaque afin qu'il expulse le sang du cœur. Un électrocardiogramme (E.C.G) mesure et enregistre l'activité électrique qui traverse le cœur. Un médecin peut déterminer si l'activité électrique ainsi observée est normale ou irrégulière. Un E.C.G vous sera peut-être recommandé si vous êtes atteint d'arythmie ou que vous souffrez de douleurs à la poitrine ou de palpitations. Des résultats anormaux d'E.C.G permettent de détecter différents problèmes cardiaques.

2.2) Attente Mathématiques et numérique:

Dans certaines situations, on cherche à dériver numériquement ces signaux électriques cardiaques, comme l'électrocardiogramme (E.C.G). Cela pose des problèmes à cause de la stabilité de la dérivation numérique et du bruit présent dans les signaux.

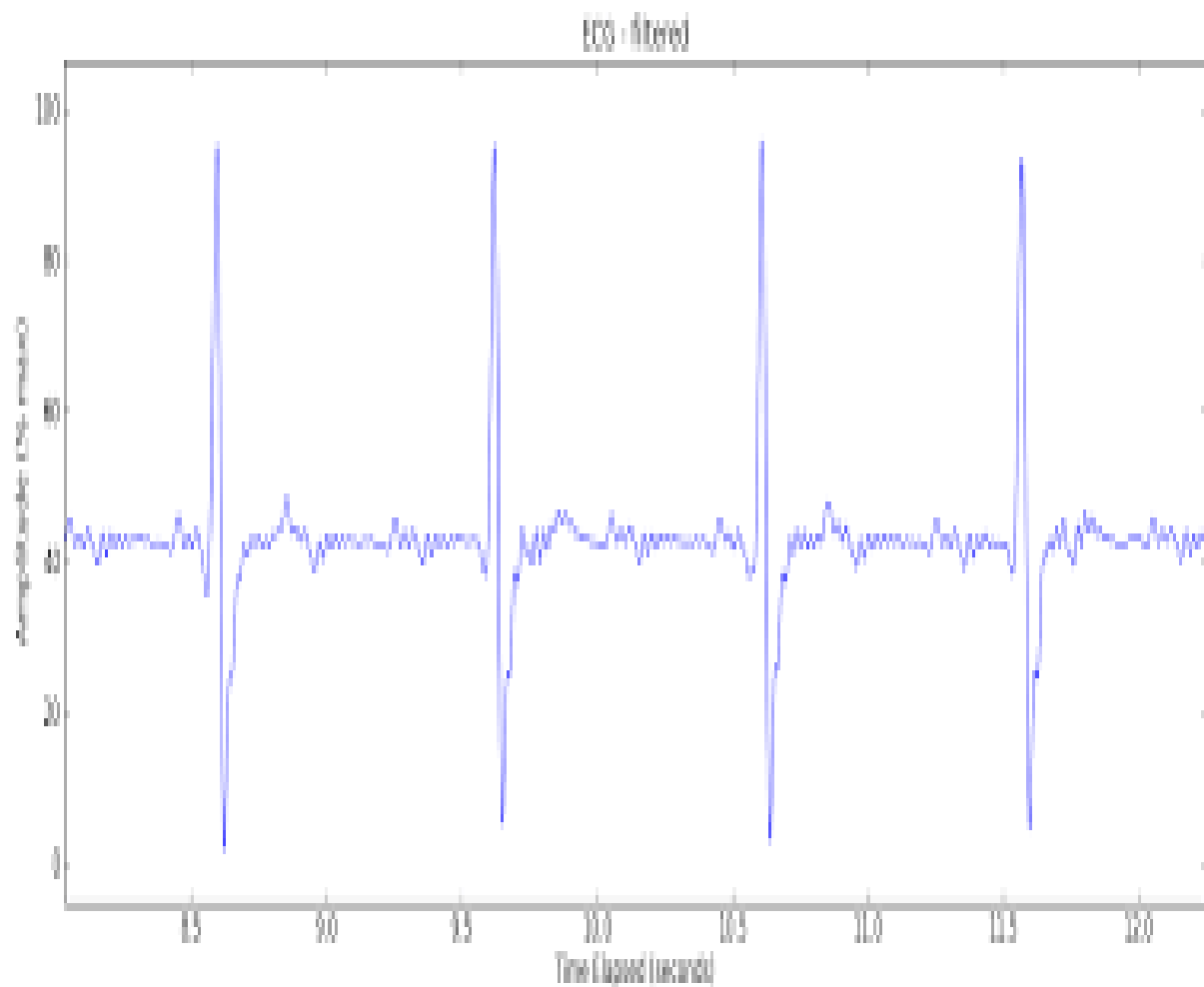


Figure 3 Exemple de signal E.C.G clinique

Nous allons donc comprendre, mettre en oeuvre et évaluer l'intérêt pour ce problème, de plusieurs méthodes d'approximations de fonctions du type moindre carrés. Il s'agit de techniques qui reposent sur l'approximation polynomiale de fonctions et font intervenir la résolution de systèmes linéaires de petite taille.

3) Approche Mathématiques & Numérique:

3.1) Procédé et approche Mathématiques:

3.1.a) Procédé:

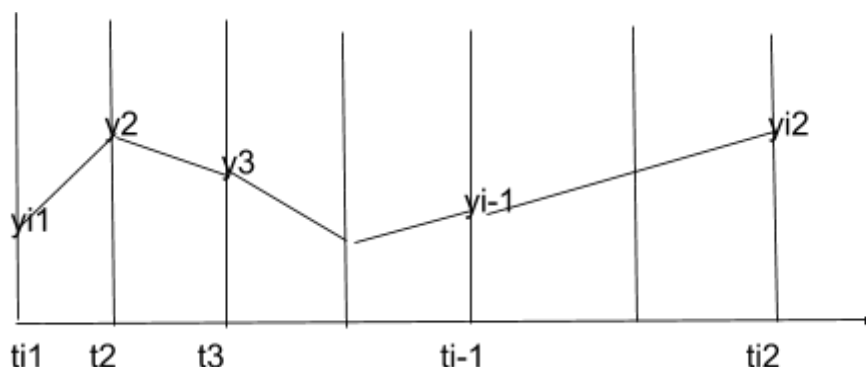
Les signaux sont la donnée de couple (t_i, f_i) de réels supposés approcher une fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La méthode des moindres carrés consiste à approcher la valeur $f(x)$ de la fonction f en x (x appartenant à \mathbb{R}) par $P(X)$ où P est un polynôme de degré m (fixé) qui minimise

$$J(q) = \sum_i |q(x_i) - f_i|^2 \text{ pour tout } q \text{ polynôme de degré au plus } m.$$

Dans notre cas, nous aurons douze couples de réels à approcher où les t_i représentent le temps exprimé en ms ($1 \leq i \leq 60.000$). Et les f_i sont les tensions du courant électrique qui circulent dans le coeur (exprimée en millivolt).

Pour cela nous allons lire dans un fichier les données fournies par l'E.C.G

figure4



et lisser la courbe représentative des données

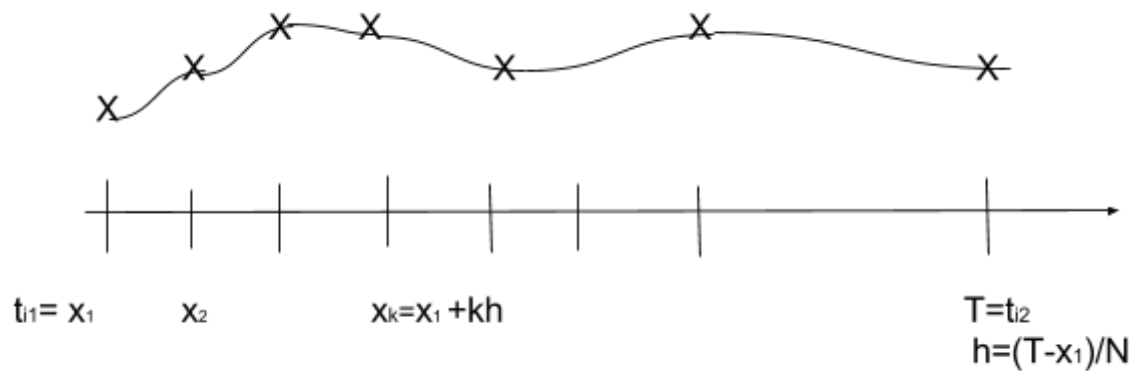


figure 5

Nous aurons ainsi en entrée un fichier avec les données (fichier_donnees.txt) i_1 , i_2 , N le nombre de division de $[t_{i1}, t_{i2}]$, d le degré du polynôme Z_0 la distance pour laquelle le poids est nul et en sortie un fichier qui contiendra les données

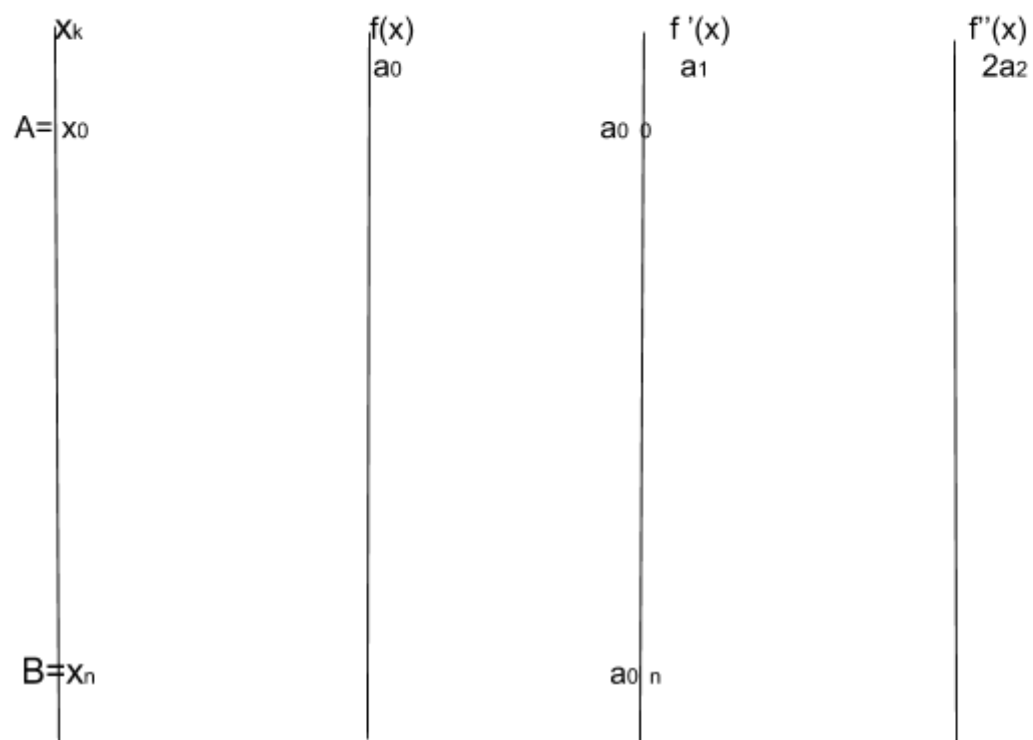


figure6

3.1.b) Calcul des polynômes P_k :

On cherche un polynôme P_k de degré minimal d qui vaut a_0 au point x_k

$$P_k(x) = a_0 + a_1(x-x_k) + a_2(x-x_k)^2 + \dots + a_d(x-x_k)^d$$

qui va minimiser $J(a) = \frac{1}{2} (\sum_i w(t_i - x_k) |p_k(t_i) - y_i|^2)$

où le poids $W(z)=1$ si $|z| \leq z_0$ et 0 sinon.

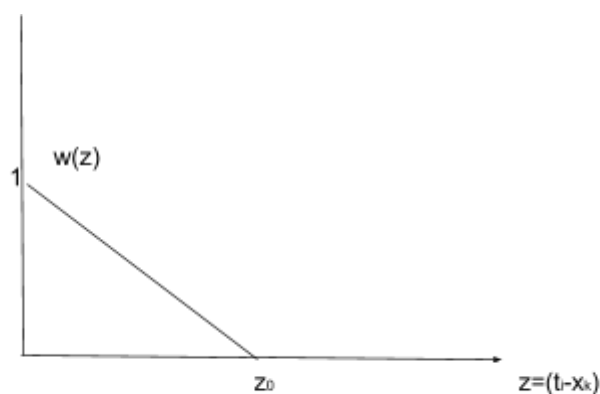


figure 7

On pose $T=[t_0, \dots, t_{60000}]$, $h = (t(i_1) - t(i_2))/N$, $X = T(i_1) + [0:N]*h = [x_0, \dots, x_N]$

et on a l'algorithme

faire pour $k=0$ à N

*construire p_k , ie

calculer $a=[a_0, \dots, a_d]$

*écrire $T(i_1) + k*h, a_0, a_1, 2*a_2$

fin.

On a $J(a) = \frac{1}{2} (\sum_i w(t_i - x_k) |p_k(t_i) - y_i|^2)$ pour $w(T(i) - x_k) > 0$ c'est à dire si $|T(i) - x_k| > z_0$, lorsque $i=i_1$ à i_2 on a $T(i)=i$ ce qui nous ramène à $-z_0 < i - x_k < z_0$

d'où $x_k - z_0 < i < x_k + z_0$

Donc $J(a) = \frac{1}{2} (\sum_{i=i_1 \text{ à } i_2} w(t_i - x_k) |p_k(t_i) - y_i|^2)$ où $w(t_i - x_k) = 1$

$$= \frac{1}{2} (\sum_{i=i_1 \text{ à } i_2} |p_k(i) - y_i|^2)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Pi a - Y, \Pi a - Y \rangle_w$$

où

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & (t_{i1}-x_k) & \dots & (t_{i1}-x_k)^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (t_{i2}-x_k) & \dots & (t_{i2}-x_k)^d \end{pmatrix}$$

$$Y = [y_{i1}, \dots, y_{i2}]^t \text{ et } a = [a_0, \dots, a_d]^t$$

$$\text{or } \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$$\text{donc } J(a) = \frac{1}{2} \|\Pi a - Y\|_w^2$$

$$= \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi a - Y)$$

$$\text{ici } \Omega = \begin{pmatrix} w_{i1} & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & & \\ & & w_3 & 0 \\ & & & 0 & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & w_{i2} \end{pmatrix}$$

$$\text{au point } a, \delta a \text{ et pour } \lambda \neq 0 \text{ on a rappelle } \frac{J(a+\lambda \delta a) - J(a)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \nabla J(a)^t \delta a$$

et on calcule pour tout δa

$$\begin{aligned} J(a+\lambda \delta a) - J(a) &= \frac{1}{2} (\Pi (a+\lambda \delta a) - Y)^t \Omega (\Pi (a+\lambda \delta a) - Y) - \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi a - Y) \quad (*) \\ &= \frac{1}{2} ((\Pi a - Y)^t + (\lambda \Pi \delta a)^t) \Omega (\Pi a - Y + \lambda \Pi \delta a) - \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi a - Y) \\ &= \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi a - Y + \lambda \Pi \delta a) + (\lambda \Pi \delta a)^t \Omega (\Pi a - Y + \lambda \Pi \delta a) - \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi a - Y) \end{aligned}$$

on factorisant par $\frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega$ et en développant $(\lambda \Pi \delta a)^t \Omega (\Pi a - Y + \lambda \Pi \delta a)$ on obtient alors

$$\begin{aligned} J(a+\lambda \delta a) - J(a) &= \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega [\Pi a - Y + \lambda \Pi \delta a - (\Pi a - Y)] + (\lambda \Pi \delta a)^t \Omega (\Pi a - Y) + (\lambda \Pi \delta a)^t \Omega (\lambda \Pi \delta a) \\ &= \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\lambda \Pi \delta a) + \lambda^2 / 2 (\Pi \delta a)^t \Omega (\Pi \delta a) + \lambda / 2 (\Pi \delta a)^t \Omega (\Pi a - Y) \end{aligned}$$

on sait que Ω est une matrice symétrique défini positive donc pour tout vecteur u et v appartenant à \mathbb{R}^{d+1} on a $u^t \Omega v = v^t \Omega u$.

Ce qui nous amènes à écrire que

$$\lambda / 2 (\Pi \delta a)^t \Omega (\Pi a - Y) = \frac{1}{2} (\Pi a - Y)^t \Omega (\lambda \Pi \delta a)$$

En remplaçant cette expression dans (1) on a

$$J(a+\lambda \delta a) - J(a) = \lambda (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi \delta a) + \lambda^2 / 2 (\Pi \delta a)^t \Omega (\Pi \delta a) \quad (**)$$

en divisant (**) par λ , en le faisant tendre vers 0 et avec ce qui a été rappelé précédemment à la page 10 on obtient que

$$\nabla J(a)^t \delta a = (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi) \delta a$$

par identification on a

$$\nabla J(a)^t = (\Pi a - Y)^t \Omega (\Pi)$$

De plus $J(a)$ admet un minimum en a si $\nabla J(a)^t = 0$

c'est à dire

$$(\Pi a - Y)^t \Omega \Pi = 0$$

$$(\Pi a - Y)^t \Omega \Pi)^t = 0^t$$

$$\Pi^t \Omega (\Pi a - Y) = 0$$

on doit donc résoudre le système

$$\Pi^t \Omega \Pi a = \Pi^t \Omega Y$$

il est facile de voir que la matrice $\Pi^t \Omega \Pi$ est symétrique car

$$(\Pi^t \Omega \Pi)^t = \Pi^t \Omega \Pi^t$$

De plus pour tout $X \in \mathbb{R}^{d+1}$ on a $X^t \Omega X = \sum_i w_i |x_i|^2 \geq w_{\min} \|X\|^2$

en posant $X = \Pi a$

on a bien que $(a \Pi)^t \Omega (\Pi a) \geq w_{\min} \|\Pi a\|^2 \geq 0$

et $(a \Pi)^t \Omega (\Pi a) = 0 \Leftrightarrow \Pi a = 0$ c'est à dire $a = 0$

donc la matrice $\Pi^t \Omega \Pi$ est symétrique définie positive de plus Π est inversible car c'est une Matrice de Vandermonde.

Nous pouvons donc résoudre ce système de taille $(d+1, d+1)$ par différentes méthodes.

3.2) Approche numérique:

Pour résoudre le système trouvé précédemment nous pouvons utiliser différentes méthodes dont la décomposition Cholesky alternative.

Cette méthode est utilisée en analyse numérique pour résoudre des systèmes de la forme $AX=B$ où A est une matrice symétrique définie positive de taille $n \times n$, B et X sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Dans notre cas on rappelle que $A = \Pi^t \Omega \Pi$, $X = a$ et $B = \Pi^t \Omega Y$

3.2.a) Décomposition de Cholesky:

La décomposition de Cholesky alternative va nous permettre d'écrire

A sous la forme LDL^t

où D est une matrice diagonale, et L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale.

et on a:

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 D_{kk}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk} \right), \quad \text{pour } i > j.$$

Alors on a $A=LDL^t$

et on résout $LZ=B$ avec $Z= DL^tX$

en faisant une descente

puis $Dy=z$, $y=L^tX$

et on fait _une remonté en résolvant $L^tX=y$ et on obtient X .

3.2.b) Résultats:

En prenant $t_{i1}=500, t_{i2}=1000, N=100$ et $d=10$, et en résolvant les systèmes par la décomposition de Cholesky, on a tracé quatre graphes.

Le premier représente (figure 8) le graphe de l'E.C.G entre $[t_{i1} \ t_{i2}]$, le deuxième (figure 9) est le lissage du premier par l'approximation des moindres carrés, le troisième (figure 10) est la dérivée et la quatrième (figure 11) est la dérivée seconde

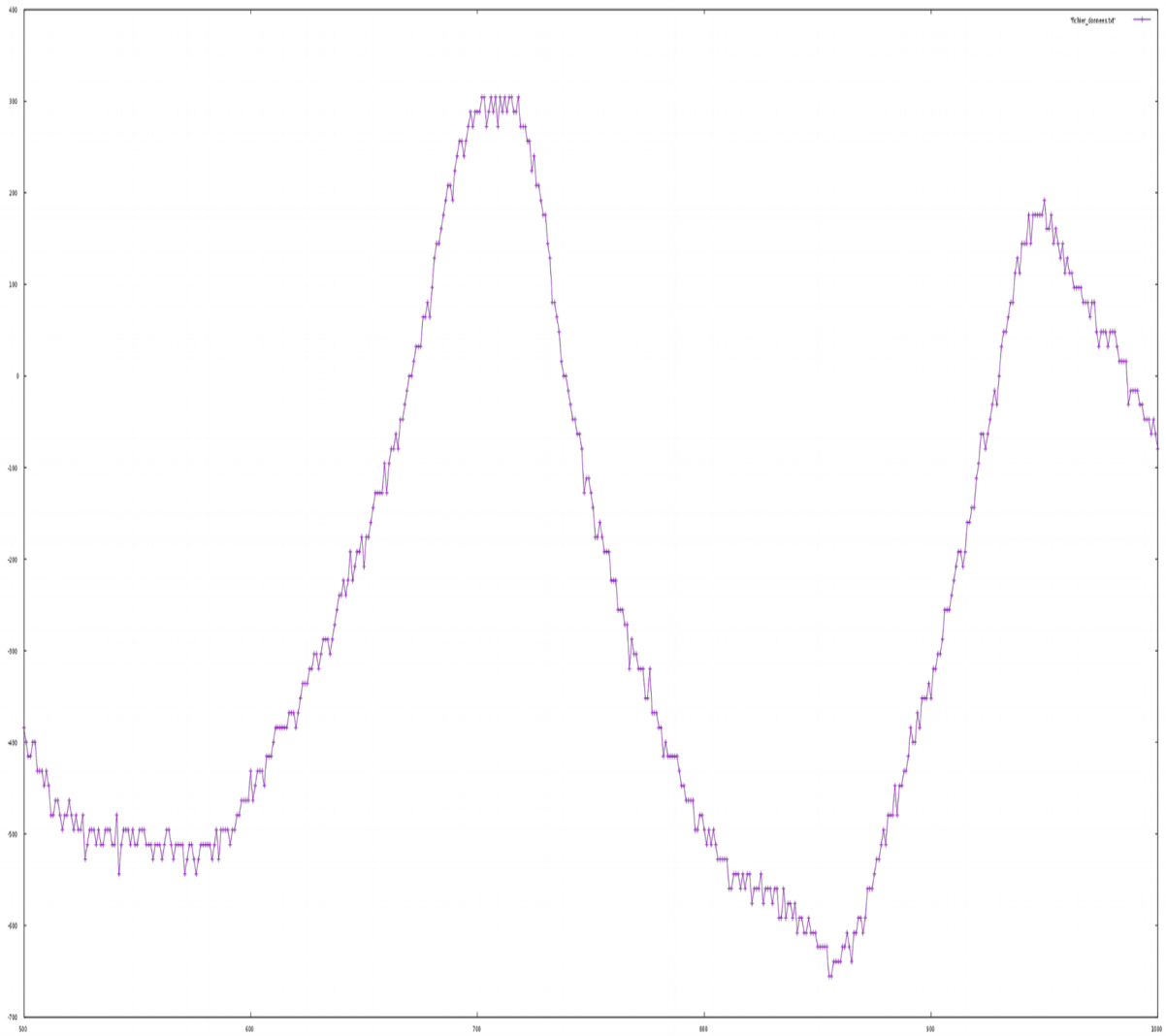


figure 8

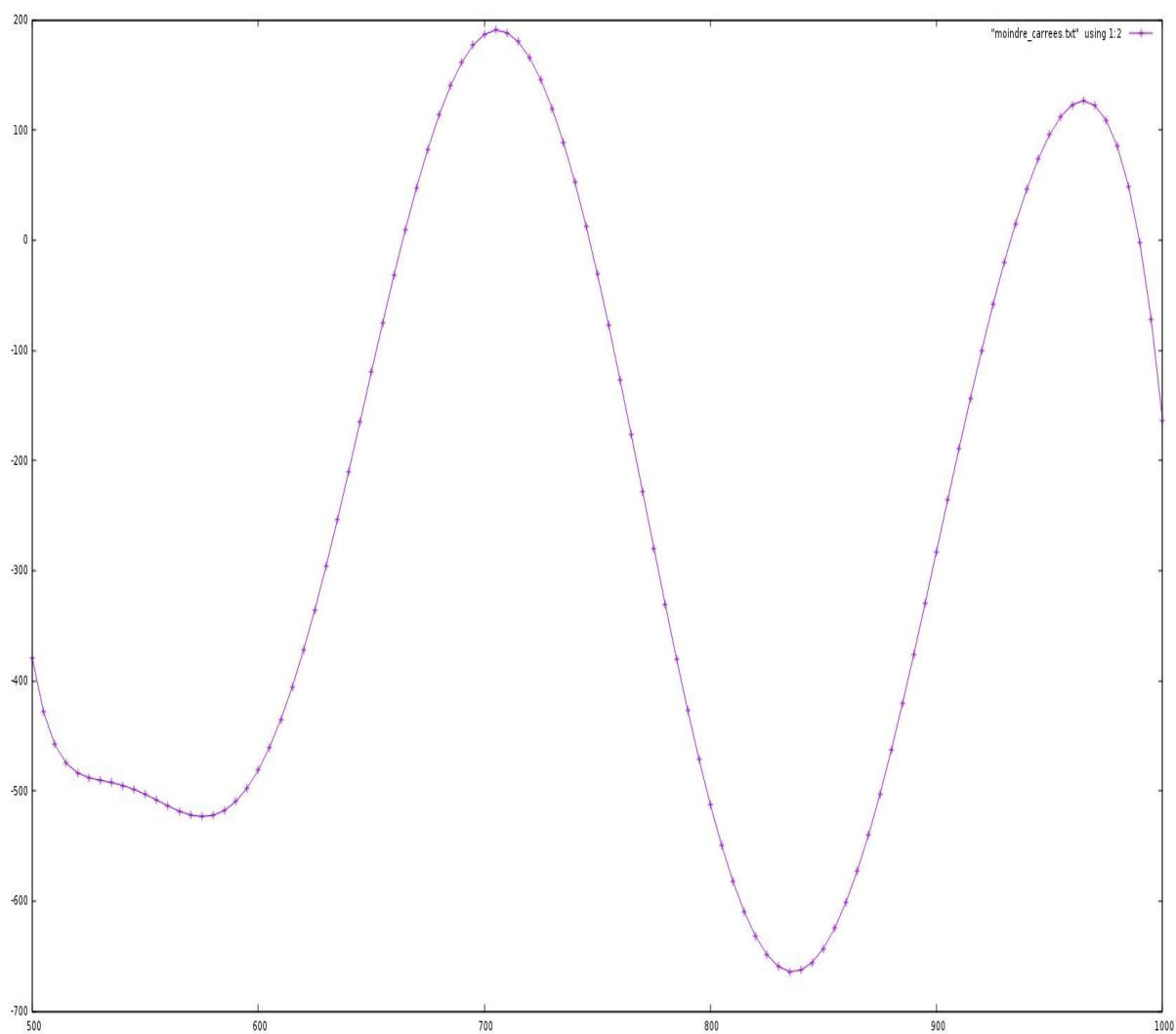


figure 9

—

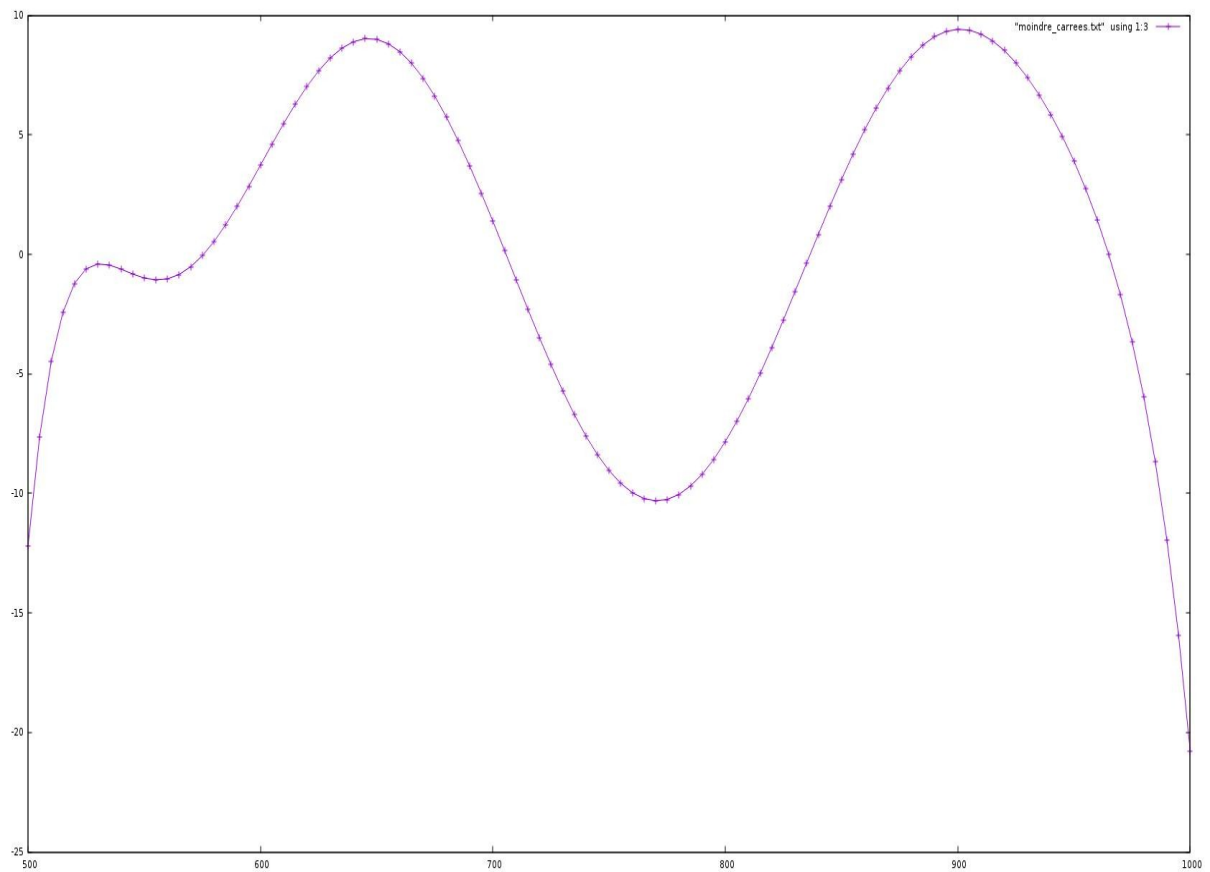


figure 10

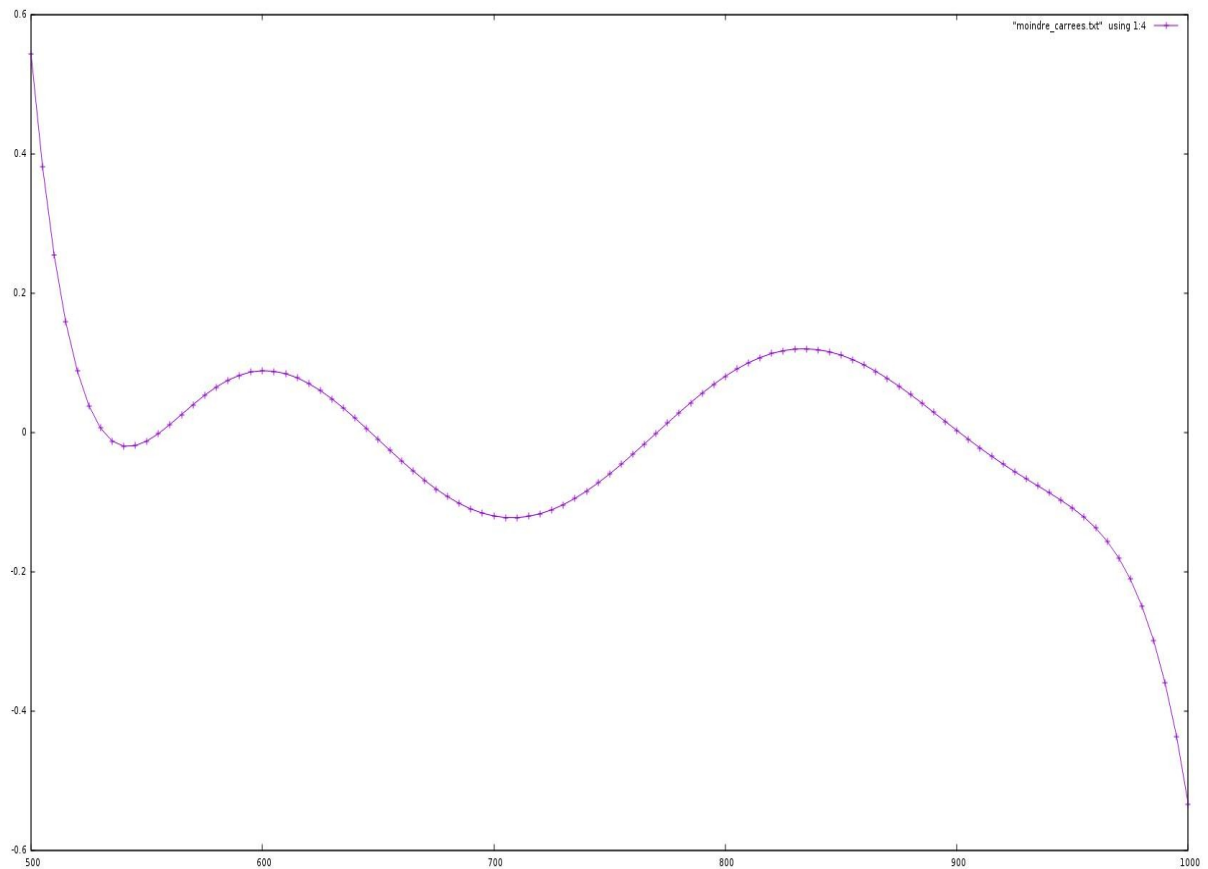


figure 11

Lorsque l'on prend $t_{i1}=400$, $t_{i2}=2800$, $d=10$, $N=200$ on obtient ,

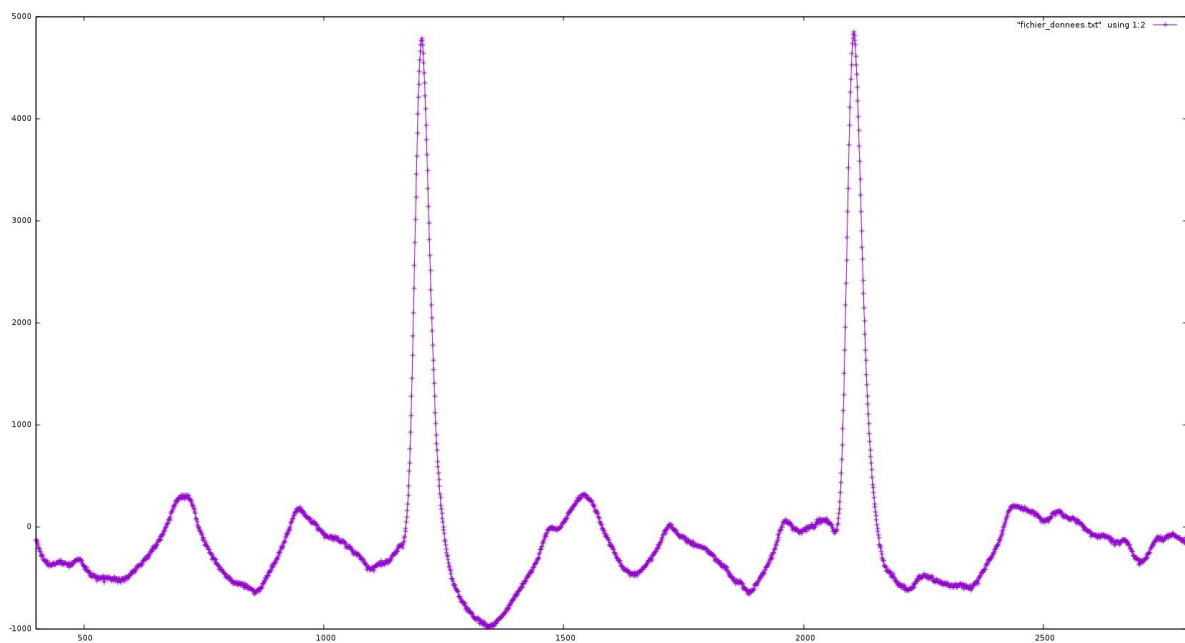


figure12 graphe de L'E.C.G

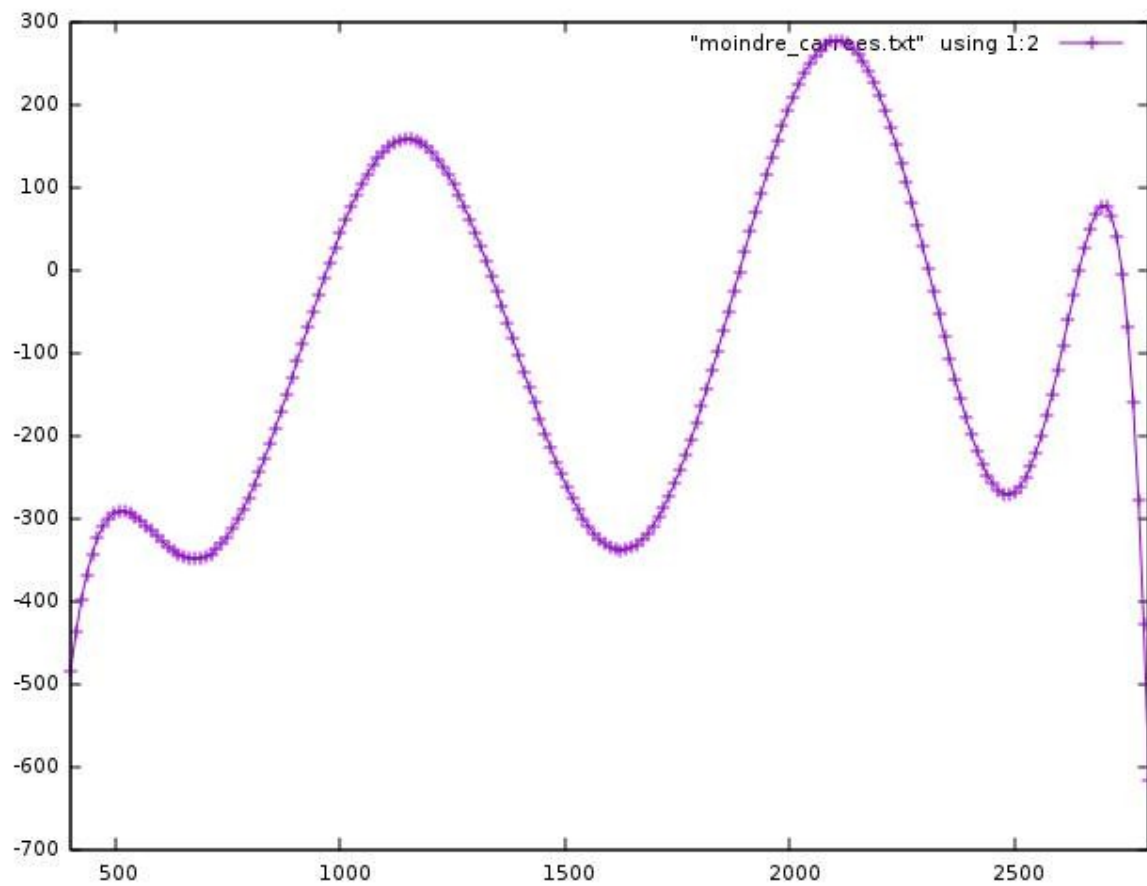


figure 13 Lissage du graphe de l'E.C.G

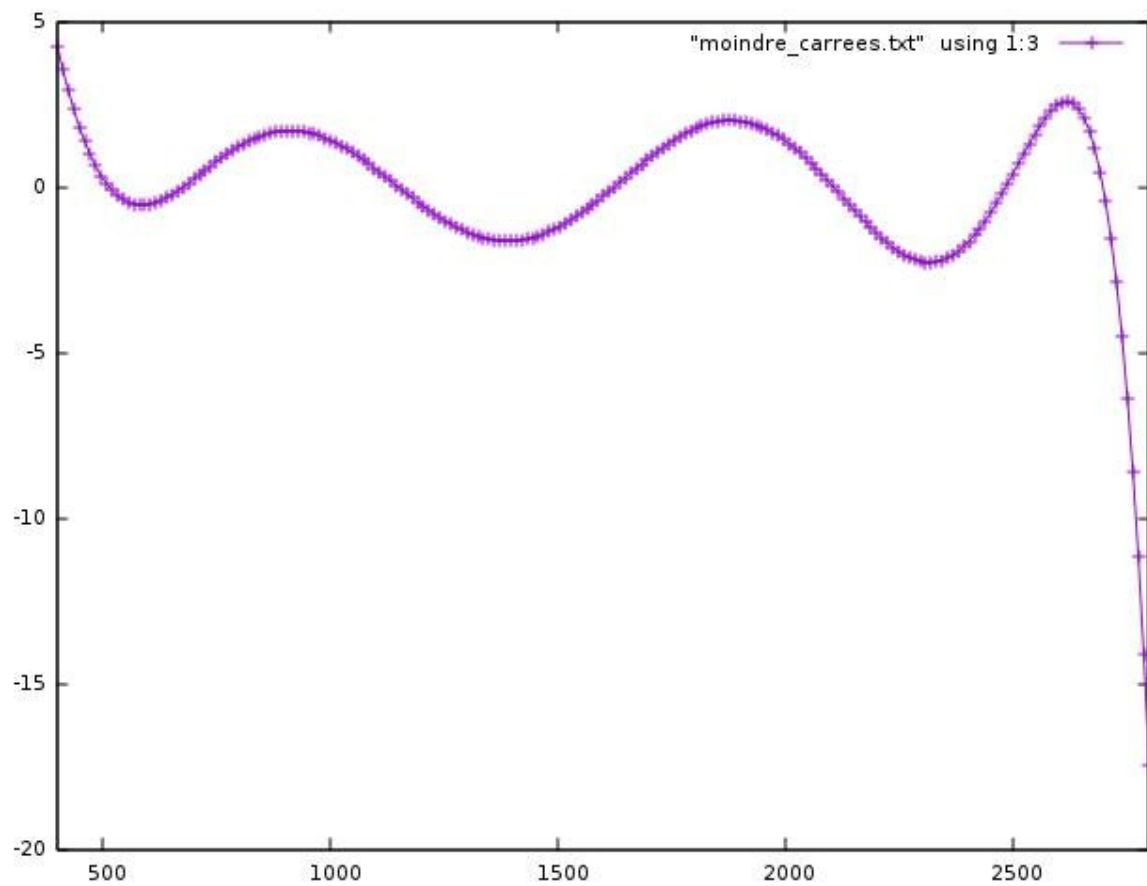


figure 14 dérivée première

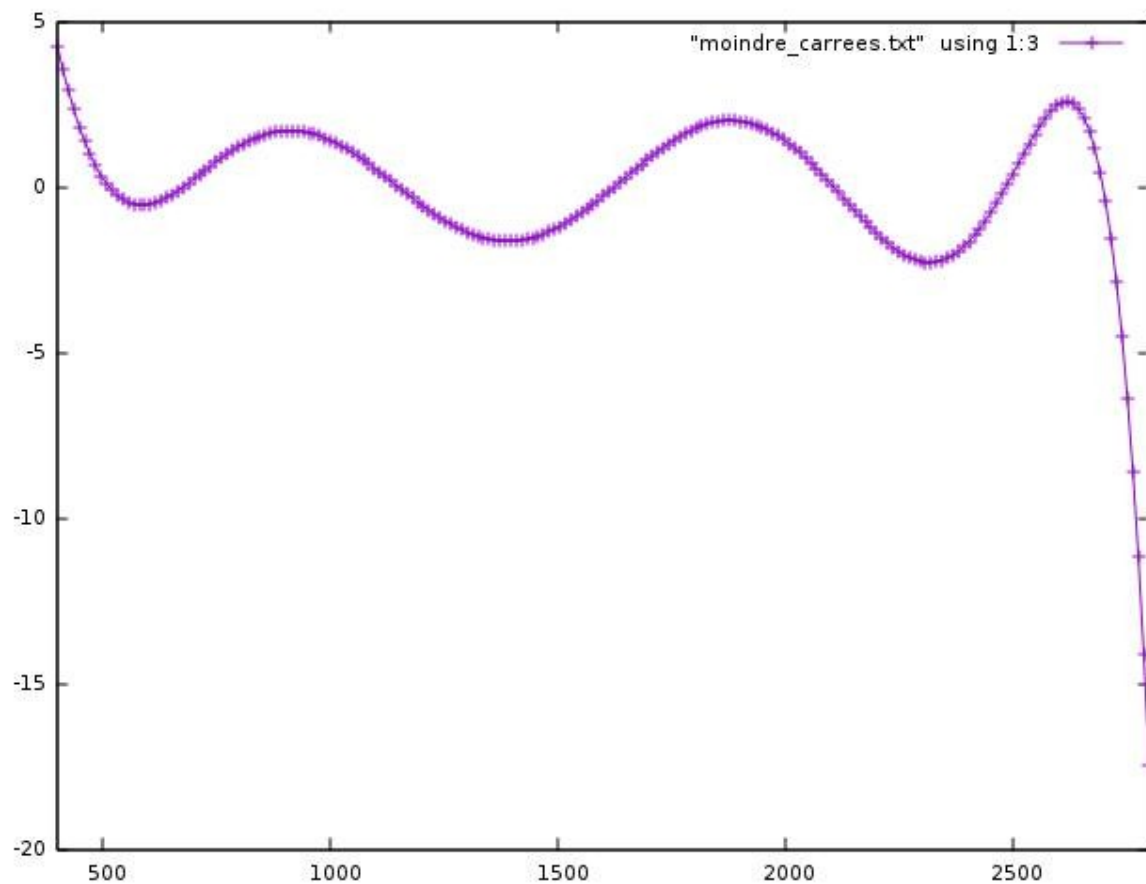


figure15 dérivée seconde

4) Interprétation des résultats:

4.1) Évaluation graphique :

Nous savons que douze voies existent, ceci à cause de la position du cœur par rapport aux électrodes.



figure 16

DI : mesure bipolaire entre bras droit(-) et bras gauche(+).

DII : mesure bipolaire entre bras droit(-) et jambe gauche(+).

DIII : mesure bipolaire entre bras gauche(-) et jambe gauche(+)

aVR : mesure unipolaire sur le bras droit.

aVL : mesure unipolaire sur le bras gauche.

aVF : mesure unipolaire sur la jambe gauche.

La figure 12 désigne le graphe pour DI, de ce graphe on tire que la période ou la révolution cardiaque correspond à $T = 2800 - 400$ donc $T = 2,4$ s.

Ainsi plus l'intervalle de temps est grand plus les valeurs approchées des y_i sont faussées comme nous le montre la figure 13, mais par contre en prenant des petits intervalles de temps du type $[500 ; 1000]$ (cf figure 8 & figure 9).

Pour les degrés compris entre $[10;20]$, l'approximation est optimale.

4.2) Commentaire sur la méthode de résolution:

De loin la méthode de Cholesky est la plus appropriée, non seulement la matrice est symétrique et définie positive mais aussi sur la complexité en temps de l'algorithme.

Par contre certaines méthodes itératives sont totalement inadaptées; comme par exemple la méthode du gradient, même si la matrice est symétrique et définie positive, le rayon spectral est supérieur ou égal à 1.

Soit A la matrice de taille $n \times n$, B de taille $n \times n$ la matrice d'itération et $c \in \mathbb{R}^n$:

$$x^{(k+1)} = Bx^k + c$$

$$\rho(B) = (\text{Cond}(A) - 1/\text{Cond}(A) + 1)^2 = (\lambda(n) - \lambda(1)/\lambda(n) + \lambda(1))^2$$

Avec ρ le rayon spectral, Cond le conditionnement de A , $\lambda(n)$ et $\lambda(1)$ sont respectivement le maximum et le minimum des valeurs propres de A en valeur absolue.

D'où pour certaines séries de données la méthode du gradient diverge ($\Lambda(n) \gg \Lambda(1)$)
donc $\varrho(B) = 1$.

5) Conclusion:

Ce projet nous a apporté , une vision pratique des Mathématiques et une nouvelle pour approfondir nos connaissances et capacités. La plupart du travail a été fait dans un langage de programmation Fortran 90 que nous maîtrisons assez bien .

D'autre part, le sujet du projet est très intéressant parce que l'approximation des moindres carres pour l'électrocardiogramme offre un moyen d'accéder à l'inaccessible. Grâce à cette méthode, les médecins peuvent voir ce qui reste invisible lors d'un examen (ECG) . C'est l'un des rôles que jouent les Mathématiques et l'informatique dans le milieu de la médecine.