Matematica discreta

23 settembre 2024

Indice

Capitolo 1

Funzioni tra insiemi finiti

1.1 Introduzione

Dati due insiemi finiti $D = \widehat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ e $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ detti rispettivamente dominio e codominio, si definisce *funzione* da D in C e si denota con il simbolo:

$$f : D \to C \tag{1.1}$$

una legge che associa ad ogni elemento del dominio uno e un solo elemento del codominio; la funzione può essere descritta specificando i valori $f(i)$ assunti per ciascun elemento $i \in D$ del dominio. Ricordiamo che una funzione f si dice:

- *suriettiva* se:
$$\forall a \in C, \exists i \in D : f(i) = a$$
- *iniettiva* se:
$$i \neq j \implies f(i) \neq f(j) \qquad i, j \in D$$
- *biettiva* se è suriettiva ed iniettiva.

Determinate proprietà ed operazioni coinvolgenti le funzioni possono esser talvolta di difficile visualizzazione e torna utile utilizzare dei modelli di rappresentazione concreta per le funzioni; due sono particolarmente utili in calcolo combinatorio, i *modelli dell'occupazione e delle parole*.

1.1.1 Modello dell'occupazione

Il dominio D è rappresentato da un insieme di biglie distinguibili che vengono distribuite in un insieme di scatole (il codominio) distinguibili.

```
   *                 |_| (scatola a)
  #
    °                |_| (scatola b)
  x
    @                |_| (scatola c)

 Dominio               Codominio
```

Una data distribuzione rappresenta univocamente una funzione $f : D \to C$ e viceversa; ad esempio la distribuzione `*#°` in a, `x` in b e `@` in c si ottiene mediante la funzione definita come $f(*) = a, f(\#) = a, \ldots, f(@) = c$.
La funzione è:

- suriettiva: se ogni scatola contiene *almeno una* biglia;
- iniettiva: se ogni scatola contiene *al massimo* una biglia;
- biettiva: se ogni scatola contiene *una e una sola* biglia.

1.1.2 Modello delle parole

Il dominio D è rappresentato dall'insieme delle caselle di una parola nelle quali vengono scritte le lettere dell'alfabeto, che rappresentano il codominio C.

```
                  a b c d e f g
|_|_|_|_|        h i l m n o p q
                  r s t u v z

 Dominio            Codominio
```

Una data parola rappresenta una funzione f dall'insieme D a C; ad esempio se identifichiamo delle caselle con un indice la parola casa è rappresentata dalla funzione $f(1) = c, \ldots f(4) = a$.
La funzione è:

- suriettiva: se nella parola appaiono *tutte le lettere* dell'alfabeto;
- iniettiva: se la parola è formata da *lettere diverse* tra loro, ovvero non ci sono doppie;
- biettiva: nella parola appaiono *tutte le lettere* dell'alfabeto, ma *senza ripetizioni.*

1.2 Numero di funzioni tra insiemi finiti

Vogliamo ora contare il numero delle funzioni possibili tra due fissati insiemi finiti D (di n elementi) e C (di m elementi); detto numero dipenderà dalle cardinalità di tali insiemi e dalla presenza di vincoli richiesti come caratteristiche delle funzioni.

1.2.1 Numero di funzioni

Il numero delle funzioni da un insieme di n elementi ad un insieme di m elementi è:

$$m^n \tag{1.2}$$

Per dimostrarlo possiamo considerare il modello dell'occupazione: il dominio è rappresentato da n biglie (numerate $1, 2, \ldots, n$) ed il codominio da m scatole (numerate $1, 2, \ldots, m$). Dobbiamo determinare il numero di modi di distribuire le n biglie nelle m scatole.
Prendiamo in considerazione la prima biglia: essa potrà essere distribuita in m

modi diversi (quante sono le scatole); così avviene anche per la seconda, terza sino all'n-esima e quindi il numero delle distribuzioni in oggetto risulta[1] essere:

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ volte}} = m^n$$

1.2.2 Numero di funzioni iniettive

Se richiediamo che le funzioni presentino il vincolo di essere iniettive, il numero di funzioni iniettive da un insieme di n elementi in un insieme di m elementi è

$$(m)_n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{1.3}$$

L'intero $(m)_n$ si definisce *fattoriale decrescente* da m ad n.
Di fatto il modo più intuitivo di chiamarlo sarebbe fattoriale decrescente da m *di n termini* (i fattori della moltiplicazione sono infatti in numero n).

Dimostriamo la precedente facendo uso del modello delle parole: dobbiamo determinare il numero di parole lunghe n che si posso scrivere avendo a disposizione m lettere e senza poter ripetere nessuna lettera nella parola.
Prendiamo in considerazione la prima casella della parola, si potrà scrivere una qualunque delle m lettere, essendo tutte disponibili; per la seconda casella le lettere a disposizione sono $m-1$, per la terza $m-2$ e così via. Quindi il numero di parole in oggetto[2] è:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = (m)_n$$

1.3 Alcuni principi generali

1.3.1 Principio di somma

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_p$ insiemi finiti a due a due disgiunti; allora la somma delle loro cardinalità è uguale alla cardinalità della loro unione. Indicando con $|A_i|$ la cardinalità dell'insieme i-esimo si ha:

$$\sum_{i=1}^{p} |A_i| = \left| \bigcup_{i=1}^{p} A_i \right| \tag{1.4}$$

1.3.2 Principio del doppio conteggio

Siano A e B due insiemi finiti e sia $R \subseteq A \times B$ una relazione tra A e B (ovvero un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano). Possiamo calcolare la cardinalità di R ossia il numero delle coppie che formano detta relazione, in due modi:

[1] Facendo alternativamente ricorso al modello delle parole si tratta di determinare il numero di parole lunghe n che si possono scrivere avendo a disposizione m lettere; con ragionamenti speculari si giunge al medesimo risultato.

[2] Considerando alternativamente il modello dell'occupazione dobbiamo determinare il numero di modi di distribuire le n biglie nelle m scatole in modo tale che in ogni scatola ci sia al massimo una miglia. Con ragionamenti speculari si giunge al medesimo risultato.

- possiamo fissare l'attenzione sugli elementi dell'insieme A e contare per ogni $a \in A$ il numero delle coppie $(a, b) \in R$ e sommare rispetto al variare di a in A:
$$|R| = \sum_{a \in A} |\{b \in B; (a, b) \in R\}| \tag{1.5}$$

- possiamo fissare alternativamente l'attenzione sugli elementi dell'insieme B e contare per ogni $b \in B$ il numero delle coppie $(a, b) \in R$ e sommare rispetto al variare di b in B:
$$|R| = \sum_{b \in B} |\{a \in A; (a, b) \in R\}| \tag{1.6}$$

Si ha dunque per definizione che:

$$\sum_{b \in B} |\{a \in A; (a, b) \in R\}| = \sum_{a \in A} |\{b \in B; (a, b) \in R\}| \tag{1.7}$$

Per un'applicazione si veda la sezione 1.5.

1.3.3 Principio dell'overcounting

Si tratta di un caso particolare della precedente: se R è una funzione k a 1 da Z a P cioè tale che ogni elemento di P abbia esattamente k corrispondenti nel dominio Z, allora il principio del doppio conteggio porge l'identità:

$$|Z| = k \cdot |P| \tag{1.8}$$

ossia

$$|P| = \frac{|Z|}{k}$$

Questo principio è anche detto *regola del pastore*: se definiamo Z come l'insieme di tutte le zampe delle pecore di un gregge e P l'insieme delle pecore di quel gregge (ogni pecora ha ovviamente quattro zampe), vediamo che per ottenere il numero di pecore possiamo contare le zampe e dividere per quattro.

Coefficiente binomiale Utilizzando il principio del pastore possiamo dimostrare che il coefficiente binomiale, definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1.9}$$

è il numero di sottoinsiemi di cardinalità k (anche detti k-sottoinsiemi) formati a partire da un insieme di cardinalità n.
Sia $F : A \to B$ una funzione che associa:

- l'insieme A delle funzioni iniettive da $\widehat{k}$ a S (si pensi al modello delle parole: $\widehat{k}$ sta a significare una sequenza di k slot liberi);

- con l'insieme B formato da tutti i sottoinsiemi di k elementi di S (l'insieme di parole da k lettere non ripetute).

In altre parole, la funzione F associa ad ogni funzione iniettiva di A la sua immagine, un sottoinsieme di k elementi che costituisce esso stesso un elemento di B.
Per ogni elemento di B però esistono $k!$ funzioni iniettive di A che hanno dato quel sottoinsieme di k elementi di S come immagine[3] e pertanto la funzione F è una funzione $k!$ a 1; quindi il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di S si calcola dividendo il totale delle funzioni iniettive da $\widehat{k}$ a S per il numero di funzioni iniettive corrispondenti ad ogni sottoinsieme di cardinalità k di S e cioè $k!$. Perciò:

$$\binom{n}{k} = |B| = \frac{|A|}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

1.4 Parole e funzioni crescenti

1.4.1 Parole crescenti

Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un *alfabeto ordinato* tale che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$; una parola $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ di lunghezza k è detta crescente se e solo se ogni lettera che appare in essa è strettamente maggiore della lettera che la precede. Da questo deriva che non vi possano essere doppie.
Esiste una biiezione tra:

- l'insieme delle parole *crescenti* di lunghezza k formate da un alfabeto di cardinalità n;
- l'insieme dei k-sottoinsiemi dell'n-insieme delle lettere dell'alfabeto.

Infatti, si pensi a una parola crescente di lunghezza k formata da un alfabeto di cardinalità n. A questa parola possiamo associare il k-sottoinsieme formato dalle sue lettere;

- la corrispondenza così creata è iniettiva: non è che una parola diversa, sempre strettamente crescente, conduca al medesimo set di lettere;
- la corrispondenza è anche suriettiva: *ogni* insieme di k-lettere così estratto è legabile ad una parola del domino (basta scriverle nel giusto ordine).

Dalla biezione deriva che le parole crescenti di lunghezza k su un alfabeto di n lettere sono $\binom{n}{k}$ (ovvero funzionando la biezione i due insiemi hanno la stessa cardinalità).

1.4.2 Funzioni crescenti

Supponiamo che due insiemi A e B siano *totalmente ordinati.* Una funzione $f : A \to B$ si dice crescente se

$$a < b \implies f(a) < f(b), \qquad \forall a, b \in A \tag{1.10}$$

[3] Si pensi alle permutazione dei medesimi k elementi che, non essendo importante l'ordine ma solo l'appartenenza all'insieme, definiscono tutte un medesimo risultato

Data una funzione $f : A \to B$ con A e B totalmente ordinati e $|A| = k$ e $|B| = n$ possiamo ricorrere al modello delle parole per rappresentarla. Una parola è crescente se e solo se l'elemento nella casella i-esima è maggiore dell'elemento della casella $(i-1)$-esima, cioè $f(i) > f(i-1)$ per ogni $i = 2, 3, \ldots, k$.

Esiste una biiezione tra le funzioni crescenti e le parole crescenti, pertanto il numero di funzioni crescenti da un insieme A ad un insieme B totalmente ordinati corrisponde alla cardinalità delle parole crescenti lunghe k prese da un alfabeto di cardinalità n, ovvero $\binom{n}{k}$. In sintesi/conclusione esiste biezione e medesima cardinalità tra le seguenti:

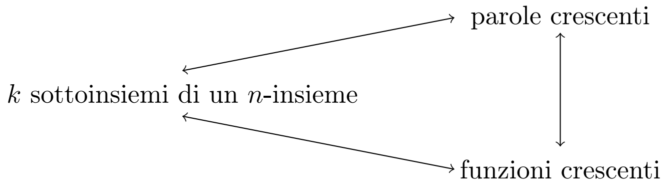


Figura 1.1: Relazioni biettive

1.5 Una applicazione del principio del doppio conteggio

Sia X un insieme di cardinalità n. Indichiamo con S_h la collezione di sottoinsiemi di X aventi cardinalità h

$$S_h = \{A \subseteq X : |A| = h\}$$

e consideriamo la relazione di inclusione

$$\mathscr{R} = |\{(A, B) \in S_{h-1} \times S_h ; A \subseteq B\}|$$

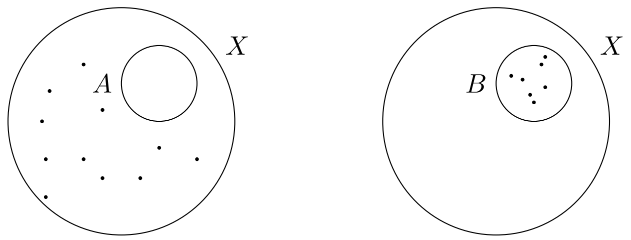
Ora per il principio del doppio conteggio vale la

$$\sum_{A \in S_{h-1}} |\{B \in S_h ; A \subseteq B\}| = \sum_{B \in S_h} |\{A \in S_{h-1} ; A \subseteq B\}| \tag{1.11}$$

Per capire quanto vale $|\{B \in S_h ; A \subseteq B\}|$ visualizziamo graficamente l'insieme A (uno dei possibili) e X.

Il numero di insiemi B tali che A sia un loro sottoinsieme si ottiene contando gli insiemi che si ottengono aggiungendo ad A un elemento appartenente ad X ma non ad A; essi sono $n - (h - 1)$.
Analogamente per capire quanto vale $|\{A \in S_{h-1} ; A \subseteq B\}|$ visualizziamo graficamente l'insieme B e X.
Il numero di insiemi A tali che siano sottoinsiemi di B si ottiene contando gli insiemi che si ottengono togliendo a B un suo elemento. Essi sono h.
Quindi dalla 1.11 si ha

$$|S_{h-1}| \, (n - (h - 1)) = |S_h| \, (h)$$



(a) (b)

ad esempio al primo membro abbiamo moltiplicato il numero di insiemi di cardinalità $h-1$ (equivalenti ad A) per il numero di modi di aggiungere un elementi a questo insieme, mentre al secondo membro il numero di insiemi equivalenti a B (cardinalità h) con il numero di modi di togliere un elemento.
Elaborando otteniamo una definizione ricorsiva della cardinalità:

$$|S_h| = \frac{n-(h-1)}{h} \cdot |S_{h-1}|$$

e sviluppando iterativamente abbiamo:

$$\begin{aligned}
|S_h| &= \frac{n-(h-1)}{h} \cdot |S_{h-1}| \\
&= \frac{n-(h-1)}{h} \cdot \frac{n-(h-2)}{h-1} \cdot |S_{h-2}| \\
&= \dots \\
&= \frac{n-(h-1)}{h} \cdot \frac{n-(h-2)}{h-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(h-h)}{h-(h-1)} \cdot |S_{h-h}| \\
&= \frac{n-(h-1)}{h} \cdot \frac{n-(h-2)}{h-1} \cdot \dots \cdot \frac{n}{1} \cdot 1
\end{aligned}$$

$|S_h|$ è il numero di insiemi di h elementi che si possono identificare pescandone gli elementi da un insieme di cardinalità n ossia il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$. In questo modo abbiamo ritrovato la formula esplicita per il coefficiente binomiale.

Capitolo 2

Multiinsiemi

2.1 Il problema delle file

Supponiamo di voler distribuire k biglie distinguibili in n file di lunghezza libera/non determinata a priori (ne impostata uguale per tutte le file). Il fatto che le biglie siano distinguibili fa sì che due biglie poste nella medesima fila in ordine danno luogo ad un esito diverso.
Il numero di modi di farlo è:

$$(n + k - 1)_k \tag{2.1}$$

Dimostrazione Sia L_k l'insieme delle distribuzioni di k biglie in n file con $k, n \in \mathbb{N}$; siamo interessati alla cardinalità $|L_k|$. La dimostrazione si basa sul derivare una definizione ricorsiva di $|L_k|$.
Iniziamo considerando una generica distribuzione dell'insieme L_{k-1}:

```
-------------------------
| i_1 | i_2 | ... | i_n |
-------------------------

        Le n file
```

dove i_j è il numero di biglie nella fila j-esima, con $j = 1, 2, \ldots, n$. Ovviamente:

- la somma dei conteggi per fila restituisce il numero di biglie distribuite, ovvero:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = k - 1$$

- si possono avere dei coefficienti i_j nulli (che corrispondono a file "vuote").

Comunque sia, una volta assegnata una generica distribuzione delle prime $k - 1$ biglie, possiamo ottenere una distribuzione di tutte le k biglie inserendo la k-esima in una qualsiasi delle n file precedentemente formate. Questa può essere inserita nella prima fila in $i_1 + 1$ maniere differenti[1], nella seconda fila in $i_2 + 1$ maniere e così via. Ne consegue che il numero di configurazioni possibili è:

$$(i_1 + 1) + (i_2 + 1) + \ldots + (i_n + 1) = n + (k - 1)$$

[1] Al primo posto, tra il primo e il secondo elemento, ..., all'ultimo posto

Poiché ogni distribuzione di k biglie può essere ottenuta usando il processo prima descritto per una specifica distribuzione delle prime $k-1$ biglie, sussiste la seguente relazione ricorsiva:

$$|L_k| = (n+k-1) \cdot |L_{k-1}| \tag{2.2}$$

che espansa conduce a:

$$\begin{aligned}
|L_k| &= (n+k-1) \cdot |L_{k-1}| \\
&= (n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot |L_{k-2}| \\
&= \dots \\
&= (n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot |L_1| \\
&= (n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n \\
&= (n+k-1)_k
\end{aligned}$$

Alcune cose da notare: il numero di termini nella moltiplicazione è k (pari al numero di biglie da porre nelle file), ed $|L_1| = n$ è il numero di modi di distribuire una biglia in n file (ancora vuote, stiamo facendo il percorso al contrario).

2.2 Fattoriale crescente

L'intero naturale:

$$\langle n \rangle_k = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-2) \cdot (n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \tag{2.3}$$

viene chiamato *fattoriale crescente* da n a k.
Di fatto, anche per questo secondo, il modo più intuitivo di chiamarlo sarebbe fattoriale crescente da *n di k termini* (i fattori della moltiplicazione sono anche qui in numero k).
Infine, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, vale la seguente:

$$(n+k-1)_k = \langle n \rangle_k \tag{2.4}$$

quindi il numero di file può essere calcolato anche attraverso un fattoriale crescente (forse mnemonicamente più compatto).

2.3 Multiinsiemi

Intuitivamente, la nozione di multiinsieme formalizza l'idea di sottoinsieme *con ripetizione*; in termini probabilistici elementari il concetto di multiinsieme rappresenta il processo di campionamento con reimmissione (mentre il concetto di sottoinsieme rappresenta il processo di campionamento senza reimmissione).

Consideriamo un insieme (classico, senza ripetizioni) D di cardinalità n che funge da dominio; si definisce *multiinsieme* su D una *funzione* $M : D \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni $a \in D$ la sua *molteplicità*, indicata con $M(a)$, stante a significare quante volte tale elemento debba essere ripetuto nella generazione di un ipotetico insieme (che ammetta ripetizioni).
La cardinalità k del multiinsieme è definita come:

$$k = \sum_{a \in D} M(a) \tag{2.5}$$

e si dice che M è un k-multiinsieme di D.

2.4 Coefficienti multiinsiemistici

Dati due interi naturali n e k il *coefficiente multiinsiemistico*, definito come:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{\langle n \rangle_k}{k!} \tag{2.6}$$

rappresenta il numero dei k-multiinsiemi che si possono formare a partire da un insieme dominio di cardinalità n.

Dimostrazione La derivazione della 2.6 si basa sulla 2.1 e sull'utilizzo del principio del pastore. Supponendo di aver k biglie da disporre in n file:

- notiamo che se consideriamo l'insieme $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ ogni distribuzione di k biglie sulle n file è rappresentata da un k-multiinsieme su D. Pertanto i multiinsiemi complessivamente possibili avranno inizialmente la cardinalità del problema delle file $(n + k - 1)_k = \langle n \rangle_k$;

- tuttavia a contrario del problema delle file qui non ci interessa in alcun modo l'ordinamento: dato un k-multiinsieme su D ci sono $k!$ distribuzioni (permutazioni delle file estratte) che lo individuano

Pertanto per la regola del pastore risulta:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{(n + k - 1)_k}{k!} = \frac{\langle n \rangle_k}{k!} \tag{2.7}$$

Si noti il parallelismo:

$$\binom{n}{k} = \text{numero dei } k\text{-sottoinsiemi di un } n\text{-insieme} = \frac{(n)_k}{k!}$$
$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \text{numero dei } k\text{-multiinsiemi di un } n\text{-insieme} = \frac{\langle n \rangle_k}{k!}$$

Si noti infine che:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{\langle n \rangle_k}{k!} = \frac{(n + k - 1)_k}{k!} = \binom{n + k - 1}{k} \tag{2.8}$$

2.5 Parole e funzioni non decrescenti

2.5.1 Parole non decrescenti

Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un *alfabeto ordinato* tale che $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$; una parola $a_{i_1} a_{i_2}, \ldots a_{i_k}$ di lunghezza k è detta non decrescente se e solo se ogni lettera che appare in essa è maggiore o uguale della lettera che la precede (quindi qui si ammettono lettere ripetute, a patto che siano tra loro limitrofe). Esiste una biiezione tra:

- l'insieme delle parole non decrescenti di lunghezza k formate da un alfabeto di cardinalità n;

- l'insieme dei k-multiinsiemi dell'n-insieme delle lettere dell'alfabeto.

Infatti si pensi a una parola non decrescente di lunghezza k formata da un alfabeto di cardinalità n. A questa parola possiamo associare il k-multiinsieme formato dalle sue lettere (con relative molteplicità):

- la corrispondenza così creata è iniettiva: due parole non decrescenti lunghe k sono associate allo stesso multiinsieme solamente se sono uguali;
- la corrispondenza è anche suriettiva: ogni multiinsieme di k lettere formate da un alfabeto di n è associabile ad una parola di k lettere non decrescente (basta scriverle nell'ordine giusto).

Dalla biezione deriva che le parole non decrescenti di lunghezza k su un alfabeto di n lettere sono $\left\langle\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\rangle$ (ovvero funzionando la biezione i due insiemi hanno la stessa cardinalità).

2.5.2 Funzioni non decrescenti

Supponiamo che due insiemi A e B siano *totalmente ordinati*. Una funzione $f : A \to B$ si dice non decrescente se

$$a < b \implies f(a) \leq f(b), \qquad \forall a, b \in A \tag{2.9}$$

Data una funzione $f : A \to B$ con A e B totalmente ordinati e $|A| = k$ e $|B| = n$ possiamo ricorrere al modello delle parole per rappresentarla. Una parola è non decrescente se e solo se l'elemento nella casella i-esima è maggiore dell'elemento della casella $(i-1)$-esima, cioè $f(i) \geq f(i-1)$ per ogni $i = 2, 3, \ldots, k$.

Esiste una biiezione tra le funzioni non decrescenti e le parole non decrescenti, pertanto il numero di funzioni non decrescenti da un insieme A ad un insieme B totalmente ordinati corrisponde alla cardinalità delle parole non decrescenti lunghe k prese da un alfabeto di cardinalità n, ovvero $\left\langle\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\rangle$.
In sintesi/conclusione esiste biezione e medesima cardinalità tra le seguenti:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{parole non decrescenti} \arrow[dd, leftrightarrow] \\
k \text{ multiinsiemi di un } n\text{-insieme} \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
 & \text{funzioni non decrescenti}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Relazioni biettive

Capitolo 3

Equazioni a soluzioni intere non negative

3.1 Introduzione

Sia:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{3.1}$$

una equazione in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con $k \in \mathbb{N}$. Siamo interessati a studiare la cardinalità dell'insieme delle soluzioni intere naturali dell'equazione 3.1, vale a dire il numero delle n-ple ordinate:

$$(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{N}^n \tag{3.2}$$

che la soddisfano. In particolare ci interessa conoscere la cardinalità dell'insieme delle soluzioni:

1. in assenza di ulteriori vincoli;
2. che soddisfano un vincolo tipo presenza/assenza:
$$\underline{x}_i \in \{0, 1\}\,, \quad \forall i \tag{3.3}$$
3. che soddisfano un vincolo di ammontare minimo:
$$\underline{x}_i \geq a_i, \quad a_i \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

A fini applicativi le cardinalità di cui sopra possono essere interpretate usando il modello dell'occupazione: consideriamo k biglie indistinguibili[1] e n scatole distinguibili in cui distribuirle. Interpretiamo:

- una generica x_i della 3.1 come la scatola i-esima;
- una $\underline{x}_i$ di una particolare soluzione appartenente all'insieme 3.2 come il numero di biglie poste nella i-esima scatola di una data distribuzione.

[1] L'indistinguibilità delle biglie comporta il fatto che a noi non interessa sapere quali biglie cadono in una scatola, ma solo quante

3.2 Cardinalità delle soluzioni

3.2.1 In assenza di vincoli

In assenza di vincoli specifici, esiste biiezione tra l'insieme dei k-multiinsiemi di un insieme $\widehat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e l'insieme delle soluzioni della 3.1; è sufficiente leggere ogni $\underline{x}_i$ come la molteplicità dell'elemento i-esimo di $\widehat{n}$. Dalla biiezione deriva che il numero delle soluzioni della 3.1 senza ulteriori vincoli è dato da:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k} \tag{3.5}$$

3.2.1.1 Applicazione: statistica di Bose - Einstein

Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *distinguibili* è:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

La dimostrazione è immediata vista la corrispondenza biiettiva le distribuzioni in esame e le soluzioni 3.2 dell'equazione 3.1.

3.2.1.2 Applicazione: considerando biglie distinguibili ...

Notiamo che se le biglie fossero *distinguibili* il problema avrebbe per soluzione l'intero n^k (numero di funzioni qualsiasi da un k-dominio ad un n-codominio).

3.2.2 Sotto vincolo tipo presenza/assenza

Consideriamo invece ora la famiglia delle soluzioni 3.2 dell'equazione 3.1, soggette però ora all'ulteriore vincolo 3.3. Esiste un'ovvia biiezione con l'insieme dei k-sottoinsiemi di $\widehat{n}$; è sufficiente leggere ogni $\underline{x}_i$ come *presenza* (se 1) o *assenza* (se 0) dell'elemento i nel sottoinsieme.
Da questa biiezione deriva che il numero delle soluzioni della 3.1 sottoposte al vincolo 3.3 è dato da:

$$\binom{n}{k} \tag{3.6}$$

3.2.2.1 Applicazione: statistica di Fermi - Dirac

Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *indistinguibili* così che in ogni scatola ci sia al massimo una biglia è:

$$\binom{n}{k}$$

La dimostrazione deriva dalla biezione tra le distribuzioni in esame e le soluzioni della 3.1 sottoposte alla condizione 3.3. Infatti, come prima, x_i rappresenta la scatola i-esima e $\underline{x}_i = 1$ indica la presenza in tale scatola di una biglia mentre $\underline{x}_i = 0$ ne indica l'assenza.

3.2.2.2 Applicazione: considerando biglie distinguibili ...

Notiamo che se le biglie fossero *distinguibili* il problema avrebbe per soluzione l'intero $(n)_k$ (numero di funzioni iniettive da un k-dominio ad un n-codominio).

3.2.3 Sotto vincolo di ammontare minimo

Consideriamo ora la famiglia delle soluzioni 3.2 dell'equazione 3.1, soggette però ora all'ulteriore vincolo 3.4. La loro numerosità è:

$$\binom{n+k-1-a_1-a_2-\ldots-a_n}{n-1} \tag{3.7}$$

Il problema sembra complesso; per ottenere qualcosa di familiare è sufficiente operare una sostituzione di variabili nell'equazione originaria. Ponendo:

$$z_i = x_i - a_i$$

ovvero definendo z_i come il "surplus" della scatola i-esima rispetto all'ammontare minimo richiesto, la 3.1 si può riscrivere come (alternativamente facendo somma membro a membro degli z_i) :

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n \tag{3.8}$$

Qui è come se avessimo n scatole (per le quali è già rispettato il vincolo minimo) e ci dobbiamo preoccupare solamente di distribuire il surplus, senza particolari vincoli, di fatto riconducendo il problema alla statistica di Bose-Einstein. Pertanto le soluzioni di quest'ultima sono:

$$\begin{aligned}\left\langle {n \atop k-a_1-a_2-\ldots-a_n} \right\rangle &= \binom{n+k-a_1-a_2-\ldots-a_n-1}{k-a_1-a_2-\ldots-a_n} \\ &= \binom{n+k-1-a_1-a_2-\ldots-a_n}{n-1}\end{aligned}$$

3.2.3.1 Applicazione 1: distribuzione biglie

Il numero di modi di distribuire k biglie *indistinguibili* in n scatole *distinguibili* così che in ogni scatola x_i ci sia *almeno* $a_i \in \mathbb{N}$ biglie è:

$$\left\langle {n \atop k-a_1-a_2-\ldots-a_n} \right\rangle \tag{3.9}$$

perché vi è, ancora una volta, biiezione tra queste distribuzioni e le soluzioni della 3.1 soggette al vincolo 3.4.

3.2.3.2 Applicazione 2: il problema di Gergonne

Si determini il numero di k-sottoinsiemi di $\widehat{n}$ tali che fra due qualsiasi elementi di S ci siano almeno m elementi di $\widehat{n}$ non appartenenti ad S.
Per risolvere il problema, dato un k-sottoinsieme S di $\widehat{n}$ scriveremo:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$$

ove si suppone che $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$, con $s_i \in \widehat{n}$.
Per ogni k-sottoinsieme S si può costruire la sequenza di interi:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1 - 0 - 1 \\ x_2 &= s_2 - s_1 - 1 \\ \ldots &= \ldots \\ x_k &= s_k - s_{k-1} - 1 \\ x_{k+1} &= n - s_k \end{aligned}$$

dove x_i rappresenta il numero di elementi di $\widehat{n} = \{1, \ldots, n\}$ che vi sono tra s_i ed s_{i-1} e non appartengono ad S[2]. Ora, sommando membro a membro le definizioni di cui sopra si ha:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k \tag{3.10}$$

Dato un sottoinsieme $S = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$, esso sarà del tipo richiesto dal problema di Gergonne solo se[3]:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq m,\ \ldots\ x_k \geq m,\ x_{k+1} \geq 0 \tag{3.11}$$

Pertanto si tratta di trovare le (cardinalità delle) soluzioni dell'equazione 3.10 sottoposta ai vincoli di minima specificati da 3.11.
Applicando la logica della 3.7, si ottiene:

$$\begin{aligned}\left\langle {k+1 \atop (n-k)-m(k-1)} \right\rangle &= \binom{k+1+n-k-m(k-1)-1}{n-k-m(k-1)} \\ &= \binom{n-m(k-1)}{n-k-m(k-1)} \\ &= \binom{n-mk+m}{k}\end{aligned}$$

dove al "numeratore" abbiamo sempre il numero di scatole mentre al "denominatore" l'ammontare di biglie a distribuire una volta sottratti i vincoli di minima.

3.2.3.3 Applicazione 3: esempi di utilizzo del problema di Gergonne

Si supponga d'avere un mazzo di 13 carte da Poker. Si vuole calcolare la probabilità che prese quattro carte a caso, tra queste non ve ne siano due consecutive.

Si tratta di contare il numero di sottoinsiemi di 4 ($= k$) carte prese dal mazzo di 13 ($= n$) tali che la distanza tra due carte qualsiasi non sia mai inferiore a 2 (quindi $m = 1$). Il problema di Gergonne ha già fornito la soluzione e cioè:

$$\binom{n-mk+m}{k} = \binom{13-1\cdot 4+1}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

Quindi il numero di sottoinsiemi di 4 carte presi dal mazzo di 13 senza carte consecutive è 210. Il totale di sottoinsiemi di 4 carte senza vincoli è:

$$\binom{n}{k} = \binom{13}{4} = 715$$

La probabilità di avere 4 carte non consecutive è quindi:

$$\frac{210}{715} = 0.2937$$

[2]Ad eccezione di x_1 ed x_n che misurano rispettivamente la distanza del primo elemento di S dal primo di $\widehat{n}$ (ovvero 1), e la distanza dell'ultimo di S dall'ultimo di $\widehat{n}$ (ovvero n), contando in entrambi i casi l'elemento di partenza o di arrivo.

[3]Si noti come negli estremi di fatto non vi è un vincolo minimo e se $x_1 = 0$ (rispettivamente $x_{k+1} = 0$) si sta prendendo proprio l'estremo di $\widehat{n}$.

Capitolo 4

Composizione di un insieme finito e coefficiente multinomiale

4.1 Composizione di un insieme finito

Dato un insieme finito D, si dice **composizione** di D in m parti una m-pla ordinata[1] $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ dove:

$$A_i \subseteq D, \forall i$$
$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = D$$
$$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Gli elementi A_i si dicono **blocchi** della composizione. Data una composizione in m blocchi $X = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ siano:

$$h_i = |A_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4.1}$$

le cardinalità dei suoi blocchi. Si definisce **tipo** della composizione l'm-pla ordinata:

$$(h_1, h_2, \ldots, h_m) \tag{4.2}$$

Ogni funzione f da un insieme finito D all'insieme $\widehat{m}$ identifica una composizione dell'insieme D in m parti ponendo

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

dove:

$$A_i = \left\{f^{-1}(i);\ i \in C\right\}$$

con C ad indicare il codominio.
Per un esempio con $m = 3$ e $D = \{a, b, c, d, e\}$, si veda la figura 4.1. Viceversa, data una composizione dell'insieme D in m parti, ad essa resta associata una e una sola funzione f da D a $\widehat{m}$ (fig 4.2).

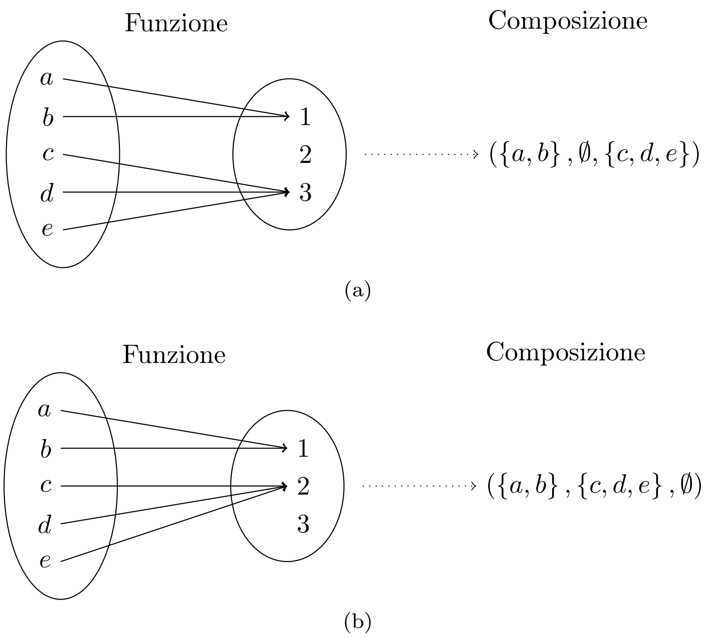


Figura 4.1: Funzione e composizione

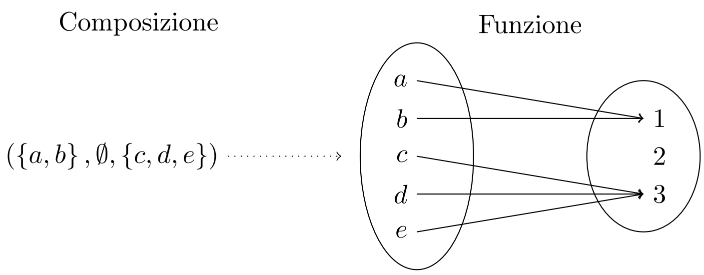


Figura 4.2: Composizione e funzione

Dunque, dal momento che esiste una biiezione tra funzioni e composizioni esisterà una biiezione anche tra composizioni in k parti di un insieme di cardinalità n e distribuzioni di n biglie in k scatole.

[1]Si noti che $(\{a,c\}, \emptyset, \{d,e\}, \{f\})$ è una composizione di $\{a,b,c,d,e,f\}$ in quattro parti diversa dalla composizione $(\{a,c\}, \{d,e\}, \emptyset, \{f\})$; hanno ordine diverso.

4.2 Coefficiente multinomiale

Dato un intero naturale n e una m-pla ordinata $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ con $\sum_i h_i = n$, il coefficiente multinomiale è definito[2] come:

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} = \frac{n!}{h_1! \cdot h_2! \cdot \ldots \cdot h_m!} \tag{4.4}$$

e rappresenta il numero delle composizioni di un insieme di n elementi in m parti aventi *ordinatamente* cardinalità $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

Dimostrazione mediante il principio del pastore In base alla discussione precedente il coefficiente multinomiale sarà anche uguale al numero di modi di distribuire n biglie in m scatole, in maniera tale che nella fila i-esima vi siano h_i biglie, con $i = 1, 2, \ldots, m$.
Se noi non consideriamo la suddivisione in file ma vogliamo sapere solo in quanti modi possiamo mettere le n biglie nelle file, poste una di seguito all'altra, questo valore è $n!$, cioè il numero di permutazioni di n elementi. Dato che tuttavia non ci interessa l'ordine nelle file (sono scatole) e considerato che nella prima scatola ci sono h_1 biglie, ci saranno $h_1!$ permutazioni delle stesse nella prima fila/scatolaci danno lo stesso risultato.Questo ragionamento vale per tutte le file e per tutte le scatole.
Per il principio del pastore avremo quindi che il numero di modi di sistemare n biglie in m scatole così che nella prima scatola ci siano h_1 biglie, nella seconda h_2 e così via sono:

$$\frac{n!}{h_1! \cdot h_2! \cdot \ldots \cdot h_m!}$$

Dimostrazione mediante forma ricorsiva Una dimostrazione alternativa può essere fatta focalizzando l'attenzione sulla prima fila ed esprimendo il coefficiente multinomiale mediante una ricorsione moltiplicativa:

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} = \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n - h_1}{h_2, h_3, \ldots, h_m} \tag{4.5}$$

Il primo binomiale corrisponde al numero di modi di mettere h_1 biglie nella prima fila prendendole da un insieme di n biglie. Per le restanti file abbiamo a disposizione $(n - h_1)$ biglie da sistemare come al solito (secondo membro del prodotto). Il ragionamento si può ora estendere, reiterando per m volte (il numero di file):

$$\begin{aligned}
\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} &= \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n - h_1}{h_2} \cdot \binom{n - h_1 - h_2}{h_3, h_4, \ldots, h_m} \cdot \ldots \cdot \binom{n - h_1 - h_2 - \ldots h_{m-1}}{h_m} \\
&= \frac{n!}{h_1! \cdot (n - h_1)!} \cdot \frac{(n - h_1)!}{h_2! \cdot (n - h_1 - h_2)!} \cdot \frac{(n - h_1 - h_2)!}{h_3! \cdot (n - h_1 - h_2 - h_3)!} \cdot \ldots \\
&= \frac{n!}{h_1! \cdot h_2! \cdot \ldots \cdot h_m}
\end{aligned}$$

[2] Si noti che per $m = 2$ il coefficiente multinomiale diventa binomiale, infatti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{n-k} \tag{4.3}$$

4.2.1 Coefficiente multinomiale: definizione ricorsiva

È disponibile anche una definizione (ricorsiva) del coefficiente multinomiale come sommatoria:

$$\binom{n}{h_1, h_2, \ldots, h_m} = \sum_{i=1}^{m} \binom{n-1}{h_1, h_2, \ldots, h_i - 1, \ldots, h_m} \tag{4.6}$$

con $n > 0$ e $n_i \neq 0, \; \forall i = 1, \ldots, m$.

Dimostrazione Applichiamo il modello dell'occupazione in cui consideriamo n biglie da disporre in r scatole in modo tale che nella generica scatola i ve ne siano n_i.
Prendiamo in considerazione una biglia in particolare. Questa biglia può ovviamente essere inserita in qualunque scatola; ipotizziamo che vada nella prima.
Ora le $n-1$ biglie rimanenti possono essere collocate nelle r scatole, tenendo solo presente che nella prima scatola non ci sono più n_1 posti vuoti ma bensì $n_1 - 1$. Pertanto potremo distribuire queste $n-1$ in:

$$\binom{n-1}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r}$$

modi.
Abbiamo così ottenuto un insieme composto da tutti i possibili modi di mettere le biglie nelle scatole, con la caratteristica comune che tutti hanno la biglia presa in esame nella prima scatola. Il ragionamento può essere reiterato supponendo di mettere la biglia scelta nella seconda scatola, poi nella terza ecc.
Che relazione c'è tra i vari insiemi ottenuti? Si tratta di insiemi disgiunti, e la loro unione è formata da tutte le possibili distribuzione di n biglie in r scatole; pertanto la somma delle cardinalità è uguale alla cardinalità dell'unione. E con questo termina la dimostrazione.

Capitolo 5

Partizioni

5.1 Partizioni

Dato un insieme D se ne consideri l'insieme delle parti $\mathcal{P}(D)$. Diciamo che un sottoinsieme $X = \{A_i \subseteq D; i \in I\}$ di elementi di $\mathcal{P}(D)$ è una **partizione** di D se valgono[1]:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = D$$

$$A_i \neq \emptyset, \quad \forall i$$

Gli elementi A_i si dicono **blocchi** della partizione X. Se X è una partizione di D costituita da k blocchi si dice che X è una $k-$partizione.
Si osservi che se D è l'insieme vuoto esiste un'unica partizione di D, la *partizione vuota*. Se, viceversa, l'insieme D non è vuoto, tra le sue possibili partizioni ne esistono sempre due estreme: la n-partizione dell'n-insieme:

$$\{\{x\}\,;\ x \in D\}$$

ovvero un insieme di insiemi ciascuno di un solo elemento di D, e la 1-partizione dell'n-insieme:

$$\{D\}$$

5.2 Relazioni di equivalenza e partizioni

Dato un insieme D, una **relazione di equivalenza** $\mathscr{R}$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $D \times D$ tale che, per ogni $a, b, c \in D$ risulta:

$$a\mathscr{R}a \qquad \text{riflessività} \tag{5.1}$$

$$a\mathscr{R}b \implies b\mathscr{R}a \qquad \text{simmetria} \tag{5.2}$$

$$a\mathscr{R}b, b\mathscr{R}c \implies a\mathscr{R}c \qquad \text{transitività} \tag{5.3}$$

[1] Le differenze rispetto ad una composizione sono il fatto che nelle partizioni non si ammette che un blocco sia l'insieme vuoto, mentre nelle composizioni sì; inoltre nelle composizioni è esplicito un ordinamento tra blocchi mentre qui non vi è ordinamento.

Dato un elemento $x \in D$ si definisce **classe di equivalenza** dell'elemento x il sottoinsieme:

$$[x]_{\mathscr{R}} = \{y \in D : y\mathscr{R}x\} \tag{5.4}$$

Date due classi di equivalenza risulta:

$$[x]_{\mathscr{R}} = [y]_{\mathscr{R}} \iff x\mathscr{R}y \tag{5.5}$$

L'insieme delle classi di equivalenza della relazione $\mathscr{R}$ fornisce una partizione dell'insieme D.
Viceversa, data una partizione dell'insieme D resta definita una relazione di equivalenza su D imponendo che due elementi stiano in relazione se e solo se appartengono ad un medesimo blocco della partizione.
Pertanto si realizza una biiezione tra l'insieme delle relazioni di equivalenza sull'insieme D e l'insieme delle partizioni dell'insieme D.

5.3 Numeri di Stirling di seconda specie

Il numero di k-partizioni possibili di un n-insieme è chiamato numero di Stirling di seconda specie ed è indicato come:

$$S(n,k) \qquad \text{con } n,k \in \mathbb{N} \tag{5.6}$$

I numeri di Stirling possono essere definiti in maniera ricorsiva come:

$$\begin{cases} S(n,0) = \delta_{n,0} \\ S(n,1) = S(n,n) = 1 \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k) \qquad 1 < k < n \end{cases}$$

Le prime due identità sono ovviamente vere per il significato combinatorio di $S(n,k)$[2]. Per dimostrare la relazione di ricorrenza usiamo un ragionamento combinatorio. $S(n,k)$ è il numero di k-partizioni di un n-insieme. Ogni partizione di n elementi in k blocchi può essere pensata come generata dalle partizioni di $n-1$ elementi in due modi:

- considerando una partizione dei primi $n-1$ elementi in $k-1$ blocchi: possiamo poi ottenere da questa una k-partizione di n elementi aggiungendo ad essa una nuova classe costituita dal solo n-esimo elemento. Le k-partizioni dell'n-insieme così costruite saranno:

$$S(n-1,k-1)$$

- considerando una partizione di $n-1$ elementi in k blocchi: possiamo poi ottenere da questa una partizione di n elementi in k blocchi aggiungendo l'n-esimo elemento ad uno qualsiasi dei k blocchi della stessa. Questo si

[2]Nella prima, si fa utilizzo della delta di Kronecker, ovvero una funzione indicatrice così definita:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \tag{5.7}$$

In questo caso, in altre parole $\delta_{n,0} = 1$ se $n = 0$; viceversa sarà $= 0$ altrimenti

	k							
n	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	0	0	0	0	0	...
2	0	1	1	0	0	0	0	...
3	0	1	3	1	0	0	0	...
4	0	1	7	6	1	0	0	...
5	0	1	15	25	10	1	0	...
6	0	1	31	90	65	15	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabella 5.1: Triangolo di Stirling

può fare, ovviamente, in k modi. Le k-partizioni dell'n-insieme costruite così saranno:

$$k \cdot S(n-1, k)$$

La precedente ricorrenza lineare permette di scrivere la tabella 5.1, chiamata *triangolo di Stirling*, che fornisce i numeri di Stirling di seconda specie per i primi sei valori di n e k. Si noti che "non può" essere $k > n$ (il numero di partizioni deve essere al massimo pari al numero di elementi disponibili, altrimenti non vi sono modi (0) per soddisfare la richiesta.

Forma chiusa Esiste anche una forma chiusa[3] per i numeri di Stirling di seconda specie:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} \cdot (-1)^{k-i} \cdot i^n \right] \tag{5.8}$$

5.4 Funzioni suriettive

Consideriamo una funzione suriettiva $f : \widehat{n} \to \widehat{k}$. Esiste, come mostrato nel capitolo precedente, una corrispondenza biiettiva tra le funzioni suriettive di questo tipo e le composizioni così costruite:

$$\left(f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k)\right)$$

intendendo con $f^{-1}(1)$, ad esempio, l'insieme degli elementi di $\widehat{n}$ che nella funzione hanno come immagine 1. Inoltre a contrario dello scorso capitolo, essendo la funzione f suriettiva è chiaro che ogni f^{-1} sarà non vuoto (mentre nelle composizioni si ammetteva che elementi della n-upla fossero vuoti).

Ad ogni composizione di questo tipo si può associare una partizione dell'insieme $\widehat{n}$ così determinata:

$$\left\{f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k)\right\}$$

È immediato notare che la funzione che associa ad ogni composizione, del tipo visto, una partizione come questa è una funzione $k!$ a 1; infatti ci saranno $k!$

[3]La formula 5.8 può essere dimostrata mediante il principio di inversione di Moebius, oppure il principio di inclusione/esclusione, o ancora il calcolo umbrale.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

Tabella 5.2: Numeri di Bell per $n \leq 9$

composizioni associate alla stessa partizione. Questo perché nelle composizioni, a contrario delle partizioni ha una rilevanza l'ordine; facendo però permutare i k blocchi di una data composizione abbiamo sempre comunque la stessa partizione.

Da quanto detto si evince che il numero di k-partizioni dell'insieme $\widehat{n}$ ossia $S(n,k)$ è dato dal numero di composizioni di $\widehat{n}$ in k blocchi (che corrisponde al numero di funzioni suriettive da $\widehat{n}$ a $\widehat{k}$) diviso per $k!$:

$$S(n,k) = \frac{\left| f : \widehat{n} \to \widehat{k} \right|}{k!} \tag{5.9}$$

da cui

$$\left| f : \widehat{n} \to \widehat{k} \right| = S(n,k) \cdot k! \tag{5.10}$$

ovvero il numero di funzioni suriettive da $\widehat{n}$ a $\widehat{k}$ (equivalentemente di composizioni di un n-insieme in k blocchi) si può calcolare moltiplicando il numero di Stirling di seconda specie per il fattoriale di k.

5.5 I numeri di Bell

Il numero di possibili partizioni di un n-insieme (per tutti i possibili $k \leq n$) si chiama numero di Bell, si indica con B_n ed è definito come:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = S(n,1) + S(n,2) + \ldots + S(n,n) \tag{5.11}$$

I numeri di Bell soddisfano la seguente definizione ricorsiva:

$$\begin{aligned} &B_0 = 1 \\ &B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \end{aligned}$$

Per dimostrarla pensiamo al primo degli $(n+1)$ elementi di un $(n+1)$-insieme; questo apparterrà ad un blocco formato da $n-k+1$ elementi con $k = 0, \ldots, n$; nello stesso blocco dobbiamo disporre altri $n-k$ elementi che possiamo scegliere in $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ modi fra tutti i rimanenti elementi. Ora, questo blocco è completamente definito e sono rimasti liberi k elementi che possono essere partizionati in B_k modi.
Facendo, quindi variare k da 0 a n otteniamo la definizione ricorsiva; grazie alla formula ricorsiva è facile verificare i primi dieci valori di B_n, riportati in tabella 5.2.

5.6 Coefficienti di Faà di Bruno

Sia X una partizione dell'insieme D; se X contiene c_1 blocchi di cardinalità 1, c_2 blocchi di cardinalità 2, ..., c_n blocchi di cardinalità n, diciamo che X è di tipo:

$$1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$$

Ovviamente

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot c_i = n$$

Il numero di partizioni di un n-insieme del tipo $1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$ è detto coefficiente di Faà di Bruno ed è definito come

$$P(n; 1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}) = \frac{n!}{1!^{c_1} \cdot 2!^{c_2} \cdot \ldots \cdot n!^{c_n}} \cdot \frac{1}{c_1! \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot c_n!} \tag{5.12}$$

Infatti ogni partizione di un insieme di tipo $1^{c_1}2^{c_2}3^{c_3}\dots$ può essere generata come segue; si consideri una qualunque *composizione* dell'insieme D avente tipo

$$\begin{aligned} &h_1 = h_2 = \ldots = h_{c_1} = 1 \\ &h_{c_1+1} = h_{c_1+2} = \ldots = h_{c_1+c_2} = 2 \qquad\qquad (@) \\ &\ldots \end{aligned}$$

e si dimentichi l'ordine tra i blocchi.
Ovviamente in questo modo si genera una partizione del tipo voluto; tuttavia si pone la domanda di quante diverse composizioni di questo tipo generino la medesima partizione. La risposta segue dalla seguente osservazione: possiamo riordinare arbitrariamente i primi c_1 blocchi della composizione, i successivi c_2 blocchi della composizione e così via.
Quindi il numero delle composizioni di tipo assegnato che danno origine alla medesima partizione è:

$$c_1! \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot c_n!$$

TODO: Non ho capito perché riordina i blocchi solo entro gruppo di cardinalità uguale e non completamente: in questo secondo caso il coefficiente multinomiale sarebbe da dividere ulteriormente per $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)!$ invece che per $c_1! \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot c_n!$

Ricordando che il numero delle composizioni del tipo (@) è dato dal coefficiente multinomiale

$$\binom{n}{\underbrace{1,\ldots,1}_{c_1 \text{ volte}},\underbrace{2,\ldots,2}_{c_2 \text{ volte}},\underbrace{3,\ldots,3}_{c_3 \text{ volte}},\ldots,\underbrace{n,\ldots,n}_{c_n \text{ volte}}}$$

Per il principio del pastore il numero di partizioni del tipo $1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$ si otterrà quindi dividendo quest'ultimo coefficiente multinomiale per $c_1! \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot c_n!$, ottenendo così la formula 5.12.

5.6.1 Proprietà

Vediamo alcune proprietà dei coefficienti di Faà di Bruno:

- il coefficiente è non nullo solo se la somma delle cardinalità risulta nell'n complessivo:

$$P(n; 1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}) \neq 0 \iff c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + nc_n = n \tag{5.13}$$

- possiamo vedere i numeri di Stirling di secondo tipo come una particolare sommatoria dei coefficienti di Faà di Bruno:

$$S(n,k) = \sum_{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=k} P(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) \tag{5.14}$$

- possiamo vedere anche i numeri di Bell come una particolare sommatoria dei coefficienti di Faà di Bruno:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=k} P(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) \\ &= \sum_{c_1+2c_2+3c_3+\ldots+nc_n=n} P(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) \end{aligned}$$

Capitolo 6

Permutazioni

6.1 Permutazioni

Dato un n-insieme S finito, ogni funzione $f : S \to S$ biettiva si dice permutazione di S. Il numero di permutazioni di un n-insieme S è dunque:

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{6.1}$$

6.2 Grafi orientati

Un **grafo orientato** (o diretto) G è una coppia ordinata (D, A) dove D è l'insieme dei nodi e A è un insieme di coppie ordinate di nodi ciascuna detta *arco*. Esempi di grafi diretti si trovano in figura 6.1

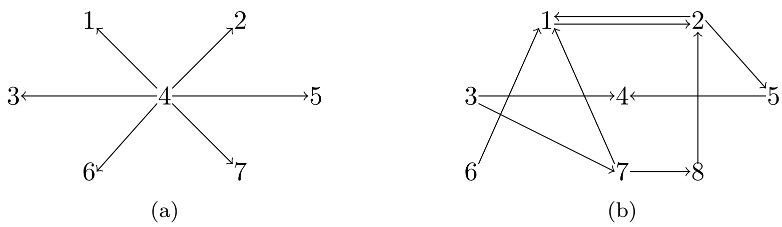


Figura 6.1: Esempi di grafi orientati

6.2.1 Grafici ciclici

Un grafo orientato si dice ciclico (es. figura 6.2) se:

1. ogni vertice ha esattamente un lato in entrata e uno in uscita;

2. tra due vertici arbitrari x_i e x_j vi è sempre un cammino (coerente con le frecce) che porta da x_i a x_j.

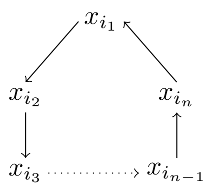
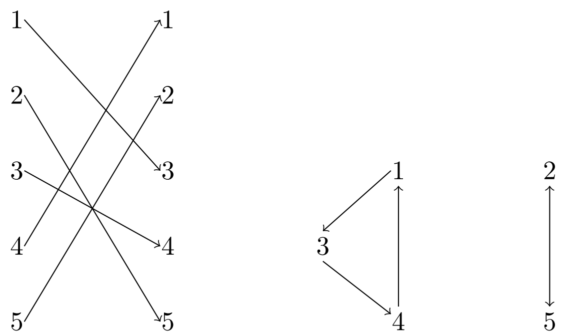


Figura 6.2: Grafico ciclico

6.2.2 Grafi di permutazione

È possibile rappresentare una permutazione mediante un grafo orientato, che prende il nome di *grafo di permutazione*. In figura 6.3 la permutazione f è



(a) Permutazione (b) Grafo

Figura 6.3: Permutazione e grafo ad essa associato

rappresentata mediante un grafo diretto $f = (S, E)$ in cui S è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati orientati; si noti che, essendo f una funzione biiettiva, la cardinalità di S è uguale alla cardinalità di E.
Un **grafo di permutazione**:

- è caratterizzato dal fatto che ogni vertice ha esattamente una freccia in entrata e una freccia in uscita;
- è di fatto un'unione di grafici ciclici disgiunti, detti **componenti connesse**. Nell'esempio sono componenti connesse i due grafici composti rispettivamente dai nodi 1,3 e 4 (non considerando il nodo di partenza, la prima componente) e dai nodi 2 e 5 (seconda componente).

6.3 n-cicli e loro cardinalità

Una data permutazione di un n-insieme $\{x_1, \ldots, x_n\}$ si dice n-**ciclo** se il grafo associato è ciclico.

Considerato il grafico un n-ciclo, possiamo scegliere in n modi un suo vertice x_{i_j} e formare la parola ottenuta scrivendo x_{i_j} in prima posizione, $x_{i_{j+1}}$ in seconda posizione e continuando secondo l'ordine delle frecce: ogni parola così definita è detta **rappresentazione parola** dell'n-ciclo considerato.

$$\begin{tikzcd}
 & & & x_{i_1} \arrow[dl] & \\
x_1 x_2 \dots x_n \arrow[rr, "f"] & & x_{i_2} \arrow[d] & & x_{i_n} \arrow[ul] \\
 & & x_{i_3} \arrow[rr, dotted] & & x_{i_{n-1}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 6.4: Funzione che associa ad una parola un n-ciclo

Il numero degli n-cicli possibili a partire da un dominio di n elementi è:

$$(n-1)! \tag{6.2}$$

Infatti, si consideri la funzione f che associa ad ogni parola $x_1\, x_2\, \dots\, x_n$ l'n-ciclo (fig 6.4); questa funzione è di tipo n a 1. Applicando il principio del pastore al numero di parole senza *ripetizione* di lunghezza n su un alfabeto di cardinalità n si ottiene che il numero degli n-cicli è dato da:

$$\frac{(n)_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ad esempio considerando la parola "ciao" essa è associata al 4-ciclo `C->I->A->O->C`, al quale sono associate anche le parole "iaoc", "aoci" e "ocia"; pertanto la funzione considerata e di tipo 4 a 1. Per trovare la cardinalità dell'insieme dei 4-cicli (ad esempio comprendente `C->I->A->O->C` e `I->C->A->O->I` ecc) dividiamo la cardinalità del dominio 4! per la n-arietà (4) della funzione, per cui $4!/4 = 3! = (4-1)!$

6.4 Numero permutazioni di k cicli disgiunti

Il numero delle permutazioni di un n-insieme generate da k cicli disgiunti è indicato dal simbolo:

$$C(n,k)$$

ed è definito ricorsivamente come:

$$\begin{cases} C(n,0) = \delta_{n,0} \\ C(0,k) = \delta_{0,k} \\ C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\cdot C(n-1,k) \qquad n,k>0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Per dimostrare la forma ricorsiva, analogamente a quanto fatto per i numeri di Stirling di seconda specie, anche qui possiamo distinguere due casi:

- consideriamo una permutazione dei primi $n-1$ elementi che sono prodotto di $k-1$ cicli disgiunti; possiamo ottenere da questa una permutazione di n elementi in k cicli aggiungendo ad essa un nuovo ciclo costituito dal solo n-esimo elemento. Le permutazioni di n elementi che sono prodotto da k cicli costruite in questo modo saranno perciò:

$$C(n-1,k-1)$$

- consideriamo una permutazione di $n-1$ elementi che sono prodotto di k cicli: possiamo ottenere da questa una permutazione di n elementi prodotto di k cicli aggiungendo l'n-esimo elemento in uno qualsiasi dei k cicli e, in ogni ciclo, tra due qualsiasi elementi. Questo si può fare ovviamente in $(n-1)$ modi. Le permutazioni di n elementi che sono prodotto di k cicli costruite in questo modo saranno perciò:

$$(n-1) \cdot C(n-1, k)$$

6.5 Coefficienti di Cauchy

Sia P una permutazione dell'n-insieme D; se P contiene c_1 cicli di ordine 1, c_2 cicli di ordine 2, ..., c_n cicli di ordine n, diciamo che P è di tipo:

$$1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$$

con:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot c_i = n$$

Dato un n-insieme, il numero delle permutazioni di tipo $1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$ è detto coefficiente di Cauchy ed è definito[1] come:

$$Q(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) = \frac{n!}{1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}} \cdot \frac{1}{c_1! c_2! \ldots c_n!} \qquad n > 0 \tag{6.4}$$

Infatti, considerando l'insieme dei vertici del grafo resta definita una partizione di esso avente per blocchi i sottoinsiemi di vertici appartenenti alle varie componenti connesse del grafo; tale partizione sarà di tipo

$$1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$$

Per ognuna di queste partizioni si potranno definire:

$$(1-1)!^{c_1} \cdot (2-1)!^{c_2} \cdot \ldots \cdot (n-1)!^{c_n} \tag{6.5}$$

permutazioni, in virtù della 6.2 (ovvero quelli di sopra sono il numero di configurazioni di freccine entro blocchi disgiunti della permutazione).
Quindi per il principio del pastore, al fine di trovare il numero di permutazioni dobbiamo effettuare una moltiplicazione delle partizioni per la 6.5:

$$\begin{aligned} Q(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) &= P(n; 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}) \cdot 0!^{c_1} \cdot 1!^{c_2} \cdot \ldots \cdot (n-1)!^{c_n} \\ &= \frac{n!}{1!^{c_1} 2!^{c_2} \ldots n!^{c_n}} \cdot \frac{1}{c_1! c_2! \ldots c_n!} \cdot 0!^{c_1} \cdot 1!^{c_2} \cdot \ldots \cdot (n-1)!^{c_n} \\ &= \frac{n!}{1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}} \cdot \frac{1}{c_1! \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot c_n!} \end{aligned}$$

[1] Si noti come i coefficienti di Cauchy siano l'analogo dei coefficienti di Faà di Bruno riferiti alle permutazioni anziché alle partizioni.

6.5.1 Proprietà

Alcune proprietà dei coefficienti di Cauchy:

$$Q(n;1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}) \neq 0 \iff c_1+2c_2+3c_3+\ldots+nc_n = n$$

$$C(n,k) = \sum_{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=k} Q(n;1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n})$$

$$\begin{aligned}
n! &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=k} Q(n;1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n})\\
&= \sum_{c_1+2c_2+3c_3+\ldots+nc_n=n} Q(n;1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n})
\end{aligned}$$

6.6 Numeri di Stirling di prima specie

Sia $n \in \mathbb{N}$. Ricordiamo che il polinomio fattoriale di n fattori è

$$(x)_n = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1) \tag{6.6}$$

Si dicono numeri di Stirling di prima specie, e vengono indicati con $s(n,k)$ per $n,k \in \mathbb{N}$, i numeri che rispettano la seguente:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\cdot x^k \tag{6.7}$$

6.6.1 Formula ricorsiva

Deriviamo una formula ricorsiva:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k &= (x)_n\\
&= (x)_{n-1}\cdot(x-n+1)\\
&= x\cdot(x)_{n-1} - (n-1)\cdot(x)_{n-1}\\
&= x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left[s(n-1,k)\cdot x^k\right] - (n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left[s(n-1,k)\cdot x^k\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[s(n-1,k)\cdot x^{k+1}\right] - \sum_{k=0}^{n-1}\left[(n-1)\cdot s(n-1,k)\cdot x^k\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[s(n-1,k)\cdot x^{k+1} - (n-1)\cdot s(n-1,k)\cdot x^k\right]
\end{aligned}$$

Ora, se $s(n-1,k)$ è il coefficiente di x^{k+1}, allora il coefficiente di x^k è $s(n-1,k-1)$; effettuando la sostituzione e raccogliendo x^k si giunge alla:

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} \left[s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \right] x^k$$

Dunque dall'unicità dei coefficienti di espansione del polinomio $(x)_n$ rispetto alla base delle potenze deriva la seguente definizione ricorsiva dei numeri di Stirling di prima specie:

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \qquad n,k \in \mathbb{N}$$

Inoltre si ha ovviamente

$$\begin{cases} s(n,0) = 0 \quad n \geq 1 \\ s(n,n) = s(0,0) = 1 \end{cases}$$

6.6.2 Relazione con $C(n,k)$

I numeri di Stirling di prima specie coincidono, a meno di un segno alternante, con i numeri $C(n,k)$ visti in precedenza. Precisamente si ha:

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) \qquad n,k \in \mathbb{N} \tag{6.8}$$

Per dimostrarlo, posto un generico numero t come

$$t(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k)$$

si osserva che

$$\begin{cases} t(n,0) = 0 \quad n \geq 1 \\ t(n,n) = t(0,0) = 1 \end{cases}$$

Inoltre definizione ricorsiva 6.3 si ottiene:

$$\begin{aligned} t(n,k) &= (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) \\ &= (-1)^{n-k} \cdot [C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot C(n-1,k)] \\ &= (-1)^{n-k} \cdot C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot (-1)^{n-k} \cdot C(n-1,k) \\ &= t(n-1,k-1) + (n-1) \cdot (-1)(-1)^{n-1-k} \cdot C(n-1,k) \\ &= t(n-1,k-1) - (n-1) \cdot t(n-1,k) \end{aligned}$$

Dunque i numeri $t(n,k)$ soddisfano le stesse condizioni iniziali e la stessa ricorsione dei numeri $s(n,k)$. Da ciò segue l'asserto, ossia:

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \cdot C(n,k)$$

6.7 Numeri di Stirling di seconda specie

Riprendendoli un attimo, i numeri di Stirling di seconda specie sono i coefficienti di espansione delle potenze rispetto alla base dei fattori decrescenti:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot (x)_k$$

Per dimostrarlo indichiamo con $T(n,k)$ i coefficienti di espansione delle potenze rispetto alla base dei fattoriali decrescenti, cioè poniamo:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} T(n,k) \cdot (x)_k$$

Osserviamo che per $n > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T(n,k)(x)_k &= x^n \\
&= x \cdot x^{n-1} \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k) \cdot (x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k) \cdot (x)_k \cdot x
\end{aligned}$$

Ora, osservando che dall'equivalenza

$$x \cdot (x)_k - k \cdot (x)_k = (x)_k \cdot (x-k) = (x)_{k+1}$$

segue

$$x \cdot (x)_k = k \cdot (x)_k + (x)_{k+1}$$

riprendiamo lo sviluppo effettuando una sostituzione e spezzando la sommatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T(n,k)(x)_k &= \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k)(x)_{k-1} + \sum_{k=0}^{n} T(n-1,k)k(x)_k \\
&= \sum \left[T(n-1,k-1) + kT(n-1,k)\right](x)_k
\end{aligned}$$

E analogamente a quanto visto in precedenza segue la ricorsione

$$T(n,k) = T(n-1,k-1) + k \cdot T(n-1,k) \qquad n,k \in \mathbb{N} \tag{6.9}$$

che è la stessa dei numeri di Stirling di seconda specie. Poiché anche le condizioni iniziali coincidono si ha:

$$S(n,k) = T(n,k) \qquad n,k \in \mathbb{N} \tag{6.10}$$

Capitolo 7

Metodi del crivello

7.1 Il principio di inversione di Moebius (caso insiemistico)

7.1.1 Osservazioni preliminari

Alcune osservazioni preliminari.

Osservazione 1 Sia $k, n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{7.1}$$

Per dimostrarlo basta osservare[1] che:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n$$

Osservazione 2 Siano A, B sottoinsiemi di un insieme finito S, con $A \subseteq B$. Allora la sommatoria così definita[2]:

$$\sum_{A \subseteq \overline{C} \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{7.2}$$

TODO: Non so come esprimere la sommatoria con doppio pedice degli appunti in latex; per ora mi accontento di marcare con una linea sopra, ad esempio $\overline{C}$, l'insieme che "varia" nella sommatoria.

Per dimostrarlo, consideriamo solo il caso $A \neq B$[3]. Sia $|B| = n$, $|A| = k$. Se $C \subset B$ ha cardinalità h e $C \supset A$ allora C si può scrivere[4] *in modo unico* nella

[1] L'osservazione deriva direttamente dalla

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ponendo $a = 1$ e $b = -1$.

[2] Alcune sommatorie particolari nel seguito; a livello di **notazione**, si pone una linea sopra l'insieme per il quale si cicla nella sommatoria

[3] Se invece $A = B$ la sommatoria si riduce ad un unico termine: -$1^0 = 1$

[4] Si noti che $\dot\cup$ sta a indicare l'operatore di unione disgiunta tra insiemi, che consiste nell'unione con esclusione degli elementi che si trovano nell'intersezione dei due. Ad esempio:

$$A \dot\cup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

forma:

$$C = A \dot{\cup} C'$$

dove C' è il complemento di A a C, è anche $C' \subseteq B \setminus A$, e infine ha cardinalità $|C'| = t = h - k$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{A \subseteq \overline{C} \subseteq B} (-1)^{|B|-|C|} &= \sum_{\overline{C'} \subseteq B \setminus A} (-1)^{|B|-|A|-\left|C'\right|} \\
&= \sum_{t=0}^{n-k} \sum_{\substack{\overline{C'} \subseteq B \setminus A \\ \left|C'\right|=t}} (-1)^{|B|-|A|-t} \\
&= \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} (-1)^{n-k-t} \\
&= (-1)^{n-k} \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^{-t} \cdot \binom{n-k}{t} \\
&= (-1)^{n-k} \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^{t} \cdot \binom{n-k}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio in base alla 7.1, essendo $n - k > 0$.

7.1.2 Principio di inversione

Sia S un insieme finito, $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S, e consideriamo due insiemi $A, B \in \mathcal{P}(S)$, $A \subseteq B$. Siano ora $f, g : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che sussista[5] la relazione:

$$\sum_{\overline{A} \subseteq B} f(A) = g(B), \quad \forall B \in \mathcal{P}(S) \tag{7.3}$$

Vale allora la "relazione inversa":

$$f(B) = \sum_{\overline{A} \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A), \quad \forall B \in \mathcal{P}(S) \tag{7.4}$$

Dimostrazione Consideriamo le funzioni

$$\xi, \delta : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R} \tag{7.5}$$

così definite:

$$\xi(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \subseteq B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[5]Una interpretazione: la f è una funzione incognita di cui non ho una descrizione/forma esplicita ma conosco solo che associa un numero ad un sottoinsieme di S e che le somme di questi numeri provenienti dai vari $\overline{A} \subseteq B$ risultano nell'applicazione di g a B (anche questa una funzione che associa ad un insieme un numero). La funzione f può essere vista come l'equivalente dell'incognita in una equazione tipo $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ mentre k è $g(B)$. L'idea è che se conosco g posso ricostruire f.

$$\delta(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che l'osservazione preliminare 2 può allora esser riformulata come segue: per ogni $A, B \in \mathcal{P}(S)$, si ha:

$$\sum_{C \subseteq B} \xi(A,C) \cdot (-1)^{|B|-|C|} = \delta(A,B) \tag{7.6}$$

In altre parole si considera un terzo insieme ausiliario C, che è $\subseteq B$ e nel suo variare può essere subset, uguale o includere A. Quello che effettivamente si fa nella 7.6 è considerare tutti i subset di B e includere il rispettivo termine nella sommatoria solo se sono anche supset di A.
Ora si consideri la seconda parte della relazione inversa 7.4; la sviluppiamo considerando 7.3, uno scambio di ordine delle somme e al penultimo passaggio l'utilizzo di 7.6:

$$\begin{aligned}
\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A) &= \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot \sum_{C \subseteq A} f(C) \\
&= \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot \sum_{C} \xi(C,A) \cdot f(C) \\
&= \sum_{A \subseteq B} \sum_{C} (-1)^{|B|-|A|} \cdot \xi(C,A) \cdot f(C) \\
&= \sum_{C} \sum_{A \subseteq B} f(C) \cdot \xi(C,A) \cdot (-1)^{|B|-|A|} \\
&= \sum_{C} f(C) \cdot \sum_{A \subseteq B} \xi(C,A) \cdot (-1)^{|B|-|A|} \\
&= \sum_{C} f(C) \cdot \delta(C,B) \\
&= f(B)
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

7.1.3 Principio duale

In maniera del tutto analoga si può provare il *principio duale*: sia S un insieme finito e $\mathcal{P}(S)$ insieme delle parti di S. Siano $f, g : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che sussista la relazione:

$$\sum_{A \supseteq B} f(A) = g(B), \quad \forall B \in \mathcal{P}(S) \tag{7.7}$$

Vale allora la "relazione inversa":

$$f(B) = \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \cdot g(A), \quad \forall B \in \mathcal{P}(S) \tag{7.8}$$

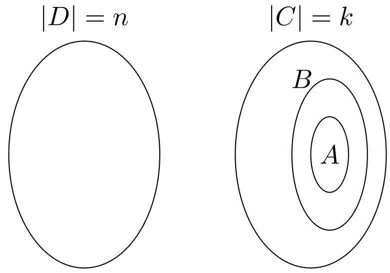
7.2 Applicazioni

7.2.1 Numero di funzioni suriettive

Il numero delle funzioni *suriettive* da un n-insieme D su un k-insieme C è dato da:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-1)^{k-i} \cdot i^n \tag{7.9}$$

Dimostrazione Sia $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un n-insieme, $C = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ un k-insieme.



Sia $A \subseteq B \subseteq C$ e consideriamo le funzioni da D in C (vedi figura); nello specifico consideriamo i seguenti insiemi di funzioni:

$$\{F : D \to C;\ \mathrm{Im}(F) \subseteq B\} = \dot{\bigcup_{A \subseteq B}} \{F : D \to C;\ \mathrm{Im}(F) = A\} \tag{7.10}$$

L'equazione di sopra esprime il fatto che l'insieme delle funzioni qualsiasi da D su B (qualsiasi poiché $\mathrm{Im}(F) \subseteq B$) possa essere visto come l'unione (disgiunta) delle funzioni suriettive su A (ovvero con $\mathrm{Im}(F) = A$), per tutti gli $A \subseteq B$.
Se passiamo alle cardinalità degli insiemi della 7.10, si ha che:

$$|\{F : D \to C;\ \mathrm{Im}(F) \subseteq B\}| = \sum_{A \subseteq B} |\{F : D \to C;\ \mathrm{Im}(F) = A\}| \tag{7.11}$$

Se ora definiamo le funzioni $f, g : \mathcal{P}(C) \to \mathbb{R}$ come:

$$f(A) = \#\text{ funzioni } \textit{suriettive} \text{ da } D \text{ su } A, \forall A \in \mathcal{P}(C)$$
$$g(B) = \#\text{ funzioni } \textit{qualsiasi} \text{ da } D \text{ su } B, \forall B \in \mathcal{P}(C)$$

in base ai ragionamenti di cui sopra la 7.11 si può riscrivere come:

$$g(B) = \sum_{A \subseteq B} f(A), \quad \forall B \in \mathcal{P}(C)$$

Pertanto, in virtù del principio di inversione, si ha allora:

$$f(B) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} \cdot g(A), \qquad \forall B \in \mathcal{P}(C)$$

In particolare per $B = C$, il numero di funzioni *suriettive* da un n-insieme D su un k-insieme C è:

$$\begin{aligned} f(C) &= \sum_{A \subseteq C} (-1)^{|C|-|A|} \cdot g(A) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{|A|=i} (-1)^{k-i} \cdot i^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-1)^{k-i} \cdot i^n \end{aligned}$$

Numeri di Stirling di seconda specie Corollario di quanto precede; per definizione

$$S(n,k) = \#\text{ partizioni di un } n\text{-insieme in } k \text{ blocchi}$$

Allora

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \cdot i^n$$

7.2.2 Problema della concordanza generalizzato

Sia:

- $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un insieme di n elementi;
- $\mathscr{S}_n$ l'insieme di tutte le permutazioni di un insieme n elementi;
- un punto fisso, nell'ambito delle permutazioni, un elemento del dominio che nella permutazione ha come immagine se stesso (in un grafo è rappresentato da un cappio);
- $\mathrm{Fix}(\delta)$, l'insieme dei punti fissi di una permutazione δ

Il problema delle concordanze generalizzato si pone di determinare quante sono le permutazioni di n elementi che hanno k punti fissi. Si considerino i seguenti insiemi di permutazioni:

$$\big\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) \supseteq B\big\}$$
$$\big\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) = A\big\}$$

ipotizzando $|B| = k$, $|A| = h$; questi rappresentano rispettivamente l'insieme delle permutazioni che hanno *almeno* k punti fissi (appartenenti all'insieme B) e l'insieme delle permutazioni che *esattamente* h punti fissi (dell'insieme A, da pensare come insieme variabile a piacere).
Si ha, $\forall B \in \mathcal{P}(S)$:

$$\big\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) \supseteq B\big\} = \dot{\bigcup_{A \supseteq B}} \big\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) = A\big\}$$

Passando alle cardinalità:

$$\underbrace{\left|\left\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) \supseteq B\right\}\right|}_{g(B)} = \sum_{A \supseteq B} \underbrace{\left|\left\{\delta \in \mathscr{S}_n; \mathrm{Fix}(\delta) = A\right\}\right|}_{f(A)}$$

Ovvero si ha, $\forall B \in \mathcal{P}(S)$:

$$g(B) = \sum_{A \supseteq B} f(A)$$

Interpretiamo $g(B)$ come la funzione che restituisce il numero di permutazioni di un n-insieme che hanno *almeno* k punti fissi, mentre $f(A)$ quella che restituisce il numero di permutazioni che hanno *esattamente* h punti fissi (dati da A). Segue, per il principio duale, che

$$\begin{aligned} f(B) &= \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \cdot g(A) \\ &= \sum_{h=k}^{n} \sum_{\substack{A \supseteq B \\ |A|=h}} (-1)^{h-k} \cdot (n-h)! \\ &= \sum_{h=k}^{n} \binom{n}{h} (-1)^{h-k} \cdot (n-h)! \end{aligned}$$

In questa, $f(B)$ fornisce il numero di permutazioni di un n-insieme aventi esattamente k punti fissi (già scelti), mentre $g(A)$ il numero di permutazioni aventi *almeno* h punti fissi;. Si noti che per sviluppare quest'ultima scriviamo il numero di permutazioni che hanno *esattamente* h punti fissi, ovvero $(n-h)!$, all'interno di un ciclo crescente per h (per un valore minimo pari a k , dato che $A \supseteq B$). Infine, per il numero di permutazioni di un n-insieme aventi k punti fissi arbitrari si ha:

$$\begin{aligned} \#\left\{\delta \in \mathscr{S}_n; |\mathrm{Fix}(\delta)| = k\right\} &= \binom{n}{k} \cdot f(B) \\ &= \binom{n}{k} \cdot \sum_{h=k}^{n} \binom{n-k}{h-k} \cdot (-1)^{h-k} \cdot (n-h)! \\ &= \frac{n!}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \sum_{h=k}^{n} \frac{\cancel{(n-k)!}}{(h-k)! \cdot \cancel{(n-h)!}} \cdot (-1)^{h-k} \cdot \cancel{(n-h)!} \\ &= \frac{n!}{k!} \sum_{h=k}^{n} \frac{(-1)^{h-k}}{(h-k)!} \end{aligned}$$

Al secondo passaggio, entro sommatoria vi è ancora $g(A)$ (almeno h punti fissi): k sono già stati scelti fuori sommatoria, si tratta di scegliere i rimanenti $h-k$ dagli $n-k$ disponibili.

TODO: Mia interpretazione, da confermare.

Assenza di punti fissi Come corollario si può notare che la probabilità di non avere punti fissi ($k=0$) in una permutazione di n-elementi è:

$$\frac{\frac{n!}{1} \cdot \sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^h}{(h)!}}{n!} = \sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^h}{h!}$$

che per $n \to \infty$ tende a e^{-1}.

7.2.3 Principio di inclusione/esclusione

Sia Ω un insieme finito e $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sottoinsiemi *fissati* di Ω. Posto $\widehat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ definiamo una funzione $f : \mathcal{P}(\widehat{n}) \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $B \subseteq \widehat{n}$

NB: Cambio di notazione effettuato rispetto agli appunti: $f \to g$, $g \to f$, $T \to B$, $S \to A$, per facilitare la memorizzazione (rendendo più coerente con l'esposizione del principio duale). Anche nel seguito si segue questa convenzione.

$$f(B) = \left| \bigcap_{i \in B} S_i \cap \bigcap_{i \notin B} S_i^c \right|$$

Pertanto definiamo

$$f(B) = \# \{x \in \Omega;\ x \in S_i, \forall i \in B \wedge x \notin S_i, \forall i \notin B\}$$

come il numero di elementi che sono al contempo presenti in un set di sottoinsiemi di Ω "indicizzati dagli indici" di $B \subseteq \widehat{n}$ ed assenti negli insiemi indicizzati dagli $\widehat{n} \setminus B$.
Si noti che $f(\emptyset) = |\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} S_i|$; è la funzione f la nostra "incognita", e in particolar modo siamo interessati a quantificare il numero di elementi non presenti in alcuno dei sottoinsiemi arbitrari, ovvero $f(\emptyset)$.
Ora basta farsi uno schemino per convincersi che se definiamo la funzione g su B come:

$$g(B) = \left| \bigcap_{i \in B} S_i \right|$$

ovvero come la cardinalità dell'insieme degli elementi comuni a tutti i sottoinsiemi indicizzati in B (da cui $g(\emptyset) = |\Omega|$), si ha che:

$$g(B) = \sum_{A \supseteq B} f(A)$$

ovvero la cardinalità degli elementi comuni può essere vista come sommatoria degli elementi comuni agli insiemi indicizzati da A e assenti negli insiemi $\widehat{n} \setminus A$, per $B \subseteq A \subseteq \widehat{n}$.
Applicando allora il principio duale si ha:

$$\begin{aligned} f(B) &= \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} g(A) \\ &= \sum_{A \supseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| \end{aligned}$$

Per $B = \emptyset$, risulta:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \sum_{A \supseteq \emptyset} (-1)^{|A|} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| \end{aligned}$$

Infine, ponendo:

$$A_k = \sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right|$$

arriviamo alla cd **formula di Sylvester**:

$$f(\emptyset) = \left| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_k$$

7.3 Esercizi

7.3.1 Problema 1

Sia $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un alfabeto di n lettere. Quante sono le parole ω di lunghezza $2n$ tali che:

1. ogni lettera compaia esattamente 2 volte;
2. due caselle consecutive non siano mai occupate dalla stessa lettera.

Soluzione Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ sia

$$\Omega_n = \{\omega; \omega \text{ di lunghezza } 2n \text{ che soddisfi la condizione } 1\}$$

E la cardinalità di questo insieme è:

$$|\Omega_n| = \binom{2n}{2, \ldots, 2} = \frac{2n!}{2^n}$$

Da questa dobbiamo togliere quelli che non soddisfano la seconda condizione, ovvero indicando con Ψ_n la nostra incognita si ha:

$$\Psi_n = |\{\omega \in \Omega_n; \omega \text{ soddisfa la condizione } 2\}|$$

Per ogni $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$ definiamo l'i-insieme delle parole dove l'i-esima lettera coincide con l'$i+1$-esima

$$S_i = \{\omega = x_1 x_2 \ldots x_{2n}; x_i = x_{i+1}\}$$

Allora la soluzione è:

$$\Psi_n = \left| \Omega_n \setminus \bigcup_{i=1}^{2n-1} S_i \right|$$

ovvero si toglie dall'insieme universo l'insieme delle parole che hanno (almeno) due lettere vicine uguali.
Applicando il principio di inclusione/esclusione:

$$\Psi_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \left(\sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| \right) \tag{7.12}$$

A fini interpretativi:

- $\bigcap_{i \in A} S_i$ rappresenta l'insieme delle parole che hanno delle doppie a partire dalla i-esima lettera con $i \in A \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$
- $\sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right|$ è il numero di parole che hanno k doppie.

Si noti ora:

1. se $|A| = k > n$ (cardinalità degli indici da dove parte una doppia è maggiore della metà della parola), oppure $|A| = k \leq n$ ma A *contiene due indici interi consecutivi*, allora
$$\bigcap_{i \in A} S_i = \emptyset$$
in quanto poniamo in intersezione parole che hanno 3 (o più) lettere uguali vicine;

2. se $|A| = k \leq n$ ed A *non contiene* due interi consecutivi allora
$$\left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| = (n)_k \binom{2n-2k}{2, 2, \ldots, 2} = (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}$$
In altre parole ci sono $(n)_k$ modi di assegnare/lettere assegnabili i/ai k indici; assegnati gli indici della doppia la lettera che segue è già vincolata e rimangono da assegnare $2n - 2k$ lettere da assegnare;

3. le k-ple $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ di tipo 3 sono esattamente
$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k}$$
(caso particolare di Gergonne)

4. Perciò dalla 1), 2), 3) e 4) risulta
$$\sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| = \begin{cases} \binom{2n-k}{k} \cdot (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} & \text{se } k \leq n \\ 0 \quad \text{se } k > n \end{cases} \tag{7.13}$$

TODO: Mia interpretazione, da confermare.

TODO: perché il coefficiente multinomiale? Cosa significa ridurre delle permutazioni di $n-k$ coppie di elementi

In conclusione a partire dalla 7.12 risulta

$$\begin{aligned}\Psi_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n-k)_k}{k!(2n-2k)!} \cdot (n)_k \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)!}{k! 2^{n-k}} (n)_k\end{aligned}$$

Quindi ad esempio $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 2$, $\Psi_3 = 30$.

7.3.2 Problema 2 (funzione ϕ di Eulero)

Si tratta di una applicazione del teorema di inclusione/esclusione.
Sia $n \in \mathbb{Z}^+$, $\widehat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sia $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{i_r}$ la presentazione di n come prodotto di potenze dei fattori primi diversi da 1 (unica a meno dell'ordine). Sia

$$\phi(n) = \# \text{ degli interi positivi } m \leq n \text{ tali che M.C.D(m,n)} = 1$$

detti "primi con n".
Allora

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{r-1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

In altre parole, se conosciamo la scomposizione in fattori primi di un numero n possiamo determinare efficientemente quanti sono i numeri $m \leq n$ che sono primi con n (ovvero hanno come divisore comune solo 1).

Dimostrazione Per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$ poniamo $S_i = \{m \in \widehat{n}; p_i | m\}$, intendendo con $p_i | m$ che m è divisibile per p_i. Dal principio di inclusione/esclusione si ha che il numero di numeri $m \leq n$ non divisibili per alcuno dei divisori n è:

$$\phi(n) = \left| \widehat{n} \setminus \bigcup_{i=1}^{r} S_i \right| = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \sum_{|A|=k} \left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| \qquad (7.14)$$

con $A \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$. Ora se $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ si ha:

$$\left| \bigcap_{i \in A} S_i \right| = |\{m \in \widehat{n}; \text{ m è divisibile per } p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}\}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}}$$

La formula 7.14 diviene allora

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n \cdot \left[1 - \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{p_i} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{r} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{\substack{i,j,h=0 \\ i<j<h}}^{r} \frac{1}{p_i p_j p_h} + \sum_{\substack{i,j,h,k=0 \\ i<j<h<k}}^{r} \frac{1}{p_i p_j p_h p_k} - \ldots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \ldots p_r} \right] \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{r-1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\end{aligned}$$

Esempio 1 Considerando $n = 250 = 2 \cdot 5^3$, e senza perdita di generalità $p_1 = 2$, $p_2 = 5$. Perciò

$$\phi(250) = 250 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$$

Esempio 2 $n = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$$\phi(1000) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400$$

Esercizio Sian $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tali che $MCD(m,n) = 1$; si provi che $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.
Soluzione: per ipotesi avremo $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$ ed $m = q_1^{j_1} q_2^{j_2} \dots q_h^{j_h}$ con p_s, q_t primi, $p_s \neq q_t$ per ogni $s = 1, 2, \dots k$, $t = 1, 2, \dots, h$. Abbiamo:

$$\phi(m \cdot n) = m \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdot \dots \left(1 - \frac{1}{q_h}\right) = \phi(m) \cdot \phi(n)$$

Esercizio Ripercorriamo il precedente procedimento generale in un caso concreto: sia $n = 60$, calcolare:

$$\phi(n) = \# \left\{m \in \mathbb{Z}^+ ; m \leq n,\, MCD(m,n) = 1\right\}$$

Soluzione: si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; poniamo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 5$ da cui $60 = p_1^2 p_2 p_3$. Siano $S_1 = \left\{m \in \widehat{60}; 2|m\right\}$, $S_2 = \left\{m \in \widehat{60}; 3|m\right\}$, $S_3 = \left\{m \in \widehat{60}; 5|m\right\}$, da cui $S_1 \cap S_2 = \left\{m \in \widehat{60}; 2|m \text{ e } 3|m\right\}$, $S_1 \cap S_3 = \left\{m \in \widehat{60}; 2|m \text{ e } 5|m\right\}$, $S_2 \cap S_3 = \left\{m \in \widehat{60}; 3|m \text{ e } 5|m\right\}$ e $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left\{m \in \widehat{60}; 2|m \text{ e } 3|m \text{ e } 5|m\right\}$.
Ovviamente $\Omega = \{m \in \mathbb{Z}^+ ; m \leq n = 60\}$ e la soluzione è data da $\phi(60) = \left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^3 S_i\right|$. Dalla formula di Sylvester abbiamo

$$\phi(60) = |\Omega| - |S_1| - |S_2| - |S_3| + |S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\phi(60) &= 60 - \frac{60}{2} - \frac{60}{3} - \frac{60}{5} + \frac{60}{2 \cdot 3} + \frac{60}{2 \cdot 5} + \frac{60}{3 \cdot 5} - \frac{60}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\
&= 60 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5}\right) \\
&= 60 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= 60 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \\
&= 16
\end{aligned}$$

7.3.3 Applicazioni alle equazioni a soluzioni non negative

Ricordiamo che il numero di soluzioni intere non negative della equazione:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

col vincolo inferiore $x_1 \geq a_1$, $x_2 \geq a_2$, $\dots$, $x_n \geq a_n$ sono

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k - a_1 - a_2 - \dots a_n \end{matrix} \right\rangle = \binom{n + k - a_1 - a_2 - \ldots - 1}{n - 1}$$

La soluzione è un significativo esempio della formula di Sylvester per il principio di inclusione/esclusione.

Caso generale Quante sono le soluzioni intere non negative di

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

soggette ai vincoli superiori $\underline{x}_1 < a_1$, $\underline{x}_2 < a_2$, $\ldots$, $\underline{x}_n < a_n$?
Soluzione: sia

$$\Omega = \left\{(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^n; \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n = k\right\}$$

Per $i = 1, 2, \ldots, n$ sia

$$S_i = \{(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n);\ \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n = k,\ x_i \geq a_i\}$$

La soluzione è data da $|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i|$. Per la formula di Sylvester questa cardinalità è data da

$$\begin{aligned}\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i\right| &= \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_h}| \\ &= \sum_{h=0}^n (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leq n} \left\langle {n \atop k - a_{i_1} - a_{i_2} - \ldots - a_{i_h}} \right\rangle\end{aligned}$$

Questo risultato è noto in fisica teorica come *Statistica di Gentile (Fermi - Einstein).*

Una applicazione In quanti modi si possono disporre 5 biglie indistinguibili in 3 urne, col vincolo che le prima urna contenga al più 3 biglie, la seconda al più 1 e la terza al più 2?
Soluzione: si tratta di contare il numero di soluzioni intere non negative della equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

soggette alle condizioni $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 1$ $x_3 \leq 2$. Sia

$$\Omega = \left\{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) \in (\mathbb{Z}^+)^3; \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3 = 5\right\}$$

e siano

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3); \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3 = 5, x_1 \geq 4\} \\ S_2 &= \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3); \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3 = 5, x_2 \geq 2\} \\ S_3 &= \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3); \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3 = 5, x_3 \geq 3\}\end{aligned}$$

La soluzione è quindi data da:

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^3 S_i\right| = |\Omega| - |S_1| - |S_2| - |S_3| + |S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

Ora $|\Omega| = \left\langle {3 \atop 5} \right\rangle = 21$, $|S_1| = \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 1$, $|S_2| = \left\langle {3 \atop 3} \right\rangle = 10$, $|S_3| = \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 6$, $|S_1 \cap S_2| = |S_1 \cap S_3| = 0$, $|S_2 \cap S_3| = \left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = 1$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 0$. Perciò

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^3 S_i\right| = 21 - 3 - 10 - 6 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3$$

7.3.4 Altri esercizi

Esercizio Data una tavola circolare con $2n$ posti numerati $1, 2, \ldots, 2n$; dimostrare che il numero di modi scegliere k posti in modo che mai 2 siano adiacenti è dato da:

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

Soluzione: si tratta di applicare due volte la soluzione del problema di Gergonne. Ricordiamo che, dati m ed h il numero di h-sottoinsiemi del segmento $\widehat{m}$ che non contengono due interi consecutivi è dato da:

$$\left\langle {h+1 \atop m-h-(h-1)} \right\rangle = \left\langle {h+1 \atop m-2h+1} \right\rangle = \binom{m-h+1}{h} \tag{7.15}$$

Dobbiamo considerare due casi:

1. la k-pla considerata contiene il posto contrassegnato 1. Dobbiamo perciò considerare le $(k-1)$-parti dell'insieme $\{3, 4, \ldots, 2n-1\}$ (che ha $2n-3$ elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base alla 7.15, ponendo $m = 2n-3$, $h = k-1$ queste sono in numero di

$$\binom{2n-3-k+1+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1} \tag{7.16}$$

2. la k-pla considerata non contiene il posto contrassegnato 1. Dobbiamo perciò considerare le k-parti del segmento $\{2, 3 \ldots, 2n\}$ (che ha $2n-1$ elementi) non contenenti due interi consecutivi. In base a 7.15, ponendo $m = 2n-1$, $h = k$, queste sono in numero di

$$\binom{2n-1-k+1}{k} = \binom{2n-k}{k} \tag{7.17}$$

Perciò il numero cercato è:

$$\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} \tag{7.18}$$

Si noti ora che per $m, h \in \mathbb{Z}^+$, risulta:

$$\begin{aligned}\binom{m-h-1}{h-1} + \binom{m-h}{h} &= \frac{h(m-h-1)! + (m-h)(m-h-1)!}{h! \cdot (m-2h)!} \\ &= \frac{m}{m-h} \cdot \frac{(m-h)(m-h-1)!}{h!(m-2h)!} \\ &= \frac{m}{m-h}\binom{m-h}{h}\end{aligned}$$

ponendo $m = 2n$, $h = k$, la 7.18 diventa

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

cvd.

Problema di Menages (Lucas 1891) In quanti modi si possono disporre n signori (numerati $1, 2, \ldots, n$) e le rispettive consorti (numerate $1', 2', \ldots, n'$) attorno ad un tavolo circolare con posti numerati, in modo che nessun signore abbia al proprio fianco la consorte.
Preliminarmente consideriamo il cosiddetto *problema ridotto*: gli uomini sono già seduti nel posti dispari in ordine crescente leggendo in senso antiorario.

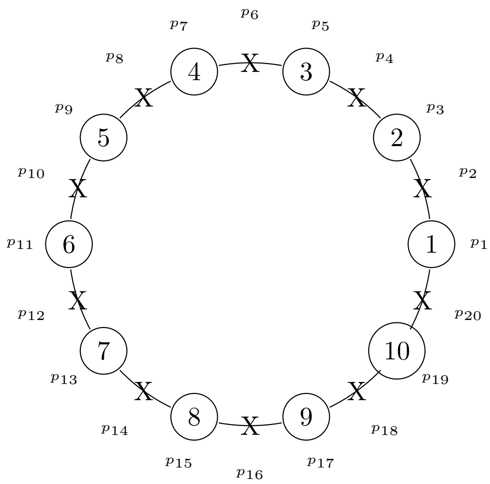


Figura 7.1: Il tavolo: $n = 10$, 20 $\widehat{posti} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{20}\}$.

In questo schema una disposizione delle signore può essere riguardata come una biiezione:

$$f : \widehat{n} = \{1, 2, \ldots n\} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \widehat{n}' = \{1', 2', \ldots n'\}$$

dove $f(i)$ = signora seduta a sinistra del signore i, per i $= 1, 2, \ldots, n$.
Per $i \in \widehat{n}$ sia:

$$A_{2i-1} = \{f : \widehat{n} \to \widehat{n}'; f(i) = i'\}$$

Per $i \in \widehat{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sia:

$$A_{2i} = \{f : \widehat{n} \to \widehat{n}'; f(i) = (i+1)'\}$$

Infine poniamo

$$A_{2n} = \{f : \widehat{n} \to \widehat{n}'; f(n) = 1'\}$$

Posto

$$\Omega = \{f : \widehat{n} \to \widehat{n}'; f \text{ biettiva}\}$$

la soluzione del problema ridotto è data da

$$U_n = \left| \Omega - \bigcup_{i=1}^{2n} A_i \right|$$

Ora per ogni $T \subseteq \widehat{2n} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ si ha

TODO: nel primo caso l'ultimo termine della successione è verosimilmente 2n+1, non "2n, 1"

$$\left|\bigcap_{j\in T} A_j\right| = \begin{cases}(n-|T|)! & \text{se } T \text{ non ha due interi consecutivi della successione } 1,2,3,\ldots,2n,1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Quindi dobbiamo risolvere il seguente problema: dato k, quante sono le k-parti di $\widehat{2n} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ che non contengono 2 interi consecutivi, nè la coppia $\{1, 2n\}$?
Le k-parti contenenti 1 non possono contenere nè 2 nè $2n$; quindi è come scegliere una $(k-1)$-pla in $\{3, \ldots, 2n-1\}$ e ciò si può fare in $\binom{2n-k-1}{k-1}$ modi.
Quelle che non contengono 1 sono ovviamente:

$$\binom{2n-k}{k}, \quad (\text{in } \{2, 3, \ldots, 2n\})$$

Quindi il numero cercato è:

$$\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

Applicando la formula di Sylvester, per $n \geq 2$, si ha quindi:

$$U_n = \sum_{k=0}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!$$

che è detta formula di Touchard (1934).

Passando dal problema ridotto a quello generale, basta osservare che i signori possono sedersi o nei posti dispari o nei posti pari, ed, in entrambi i casi, secondo una disposizione (permutazione di $\widehat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$) qualsiasi. Perciò la soluzione del problema generale è

$$2 \cdot n! \cdot U_n$$