Precalculus

18 maggio 2023

Indice

1 Teoria degli insiemi **17**
1.1 Introduzione . . . 17
1.1.1 Definizioni . . . 17
1.1.2 Rappresentazione di insieme . . . 17
1.1.3 Sottoinsiemi . . . 18
1.1.4 Insieme delle parti . . . 18
1.2 Operazioni con gli insiemi . . . 18
1.2.1 Operazioni . . . 19
1.2.2 Proprietà delle operazioni . . . 19
1.3 n-uple ordinate, prodotto cartesiano . . . 20
1.3.1 Coppia ordinata . . . 20
1.3.2 Prodotto cartesiano . . . 20
1.4 Insiemi numerici . . . 20
1.4.1 Insiemi numerici fondamentali . . . 21
1.4.2 Cardinalità degli insiemi numerici . . . 22
1.4.3 Altri insiemi numerici . . . 23
1.4.3.1 Intervalli . . . 23
1.4.3.2 Intorni . . . 23
1.4.3.3 Insiemi numerici limitati e illimitati . . . 25
1.4.3.4 Massimi, minimi . . . 25
1.4.3.5 Estremo superiore, inferiore . . . 25
1.4.3.6 Punti di accumulazione . . . 26
1.4.4 Campi ordinati . . . 26
1.4.4.1 R_1: somma . . . 26
1.4.4.2 R_2: moltiplicazione . . . 27
1.4.4.3 R_3: ordinamento . . . 27
1.4.4.4 Alcune osservazioni . . . 28
1.4.4.5 Inadeguatezza di $\mathbb{Q}$ . . . 28
1.4.4.6 R_4: assioma di continuità ed insieme dei reali . . . 28
1.4.4.7 $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^*$ . . . 29

2 Elementi di logica **31**
2.1 Logica delle proposizioni . . . 31
2.1.1 Introduzione al calcolo . . . 31
2.1.2 Connettivi . . . 32
2.1.3 Proprietà delle operazioni logiche . . . 35
2.1.4 Tautologie . . . 35
2.1.5 Regole di deduzione . . . 37

2.2 Logica dei predicati 38
2.2.1 Predicati 38
2.2.2 Operazioni sui predicati 38
2.2.3 Predicati e insiemi 38
2.2.4 Implicazione ed equivalenza logica 39
2.2.5 Quantificatori 40

3 Strutture algebriche 41
3.1 Operazioni 41
3.1.1 Definizioni e notazione 41
3.1.2 Proprietà 42
3.2 Strutture algebriche con una operazione 43
3.2.1 Gruppo 43
3.3 Strutture algebriche con due operazioni 44
3.3.1 Proprietà 44
3.3.2 Anelli 45
3.4 `TODO` 45

4 Aritmetica e Calcolo Letterale 47
4.1 Aritmetica (Dodero 1 - Capp 3-5) 47
4.1.1 Somma 47
4.1.2 Moltiplicazione 47
4.1.3 Sottrazione 48
4.1.4 Divisione 48
4.1.4.1 Divisibilità 49
4.1.4.2 Frazioni 49
4.1.5 Potenze 50
4.1.5.1 Applicazioni delle potenze 52
4.1.6 Espressioni aritmetiche 53
4.2 Calcolo letterale (Dodero 1 - Capp 9) 53
4.2.1 Monomi 53
4.2.2 Polinomi 54
4.2.2.1 Operazioni 54
4.2.2.2 Scomposizione di un polinomio in fattori 57
4.2.3 Frazioni algebriche 60
4.2.3.1 Operazioni con le frazioni algebriche 60

5 Equazioni di primo grado ad una incognita 63
5.1 Introduzione 63
5.2 Principi di equivalenza 64
5.2.1 Grado di una equazione 65
5.3 Metodi di risoluzione 65

6 Disequazioni di primo grado, valore assoluto 69
6.1 Diseguaglianze 69
6.2 Disequazioni ad una incognita 70
6.3 Principi di equivalenza 71
6.3.1 Grado di una disequazione 72
6.4 Metodi di risoluzione 72
6.4.1 Intere di primo grado e letterali 72

6.4.2 Fratte e intere di grado superiore a 1, se fattorizzabili . . 72
6.5 Sistemi di disequazioni 73
6.6 Modulo - Valore assoluto 73
6.7 Equazioni con valori assoluti contenenti l'incognita 75
6.8 Disequazioni con modulo 75
6.8.1 Disequazioni del tipo $|f(x)| \gtreqless k$, con $k \in \mathbb{R}^+$ 75
6.8.2 Altre disequazioni con modulo 76

7 Sistemi di equazioni 77
7.1 Equazioni a due incognite 77
7.2 Sistemi di equazioni lineari 78
7.2.1 Ripasso sul concetto di grado; grado di un sistema 78
7.2.2 Sistemi lineari determinati, indeterminati, impossibili . . 78
7.3 Risoluzione di un sistema e principi di equivalenza dei sistemi . . 80
7.3.1 Metodi di risoluzione, sistemi impossibili/indeterminati . 81

8 Radicali 83
8.1 Introduzione 83
8.2 Proprietà dei radicali in $\mathbb{R}$ 84
8.3 Riduzione di più radicali allo stesso indice 85
8.4 Operazioni sui radicali 86
8.5 Potenze ad esponente frazionario 88

9 Equazioni di secondo grado ad una incognita 89
9.1 Introduzione 89
9.2 Risoluzione delle equazioni incomplete 89
9.3 Risoluzione delle equazioni in forma incompleta 90
9.4 Equazioni frazionarie e letterali 91
9.5 Relazioni tra le soluzioni e i coefficienti di una equazione di secondo grado 91
9.6 Scomposizione del trinomio di secondo grado 93
9.7 `TODO` 93

10 Equazioni di grado superiore al secondo 95
10.1 Introduzione e metodo generale di risoluzione 95
10.2 Equazioni riconducibili a equazioni di primo o di secondo grado . 96
10.2.1 Equazioni biquadratiche 96
10.2.1.1 Equazioni biquadratiche incomplete 96
10.2.1.2 Equazioni biquadratiche complete 96
10.2.2 Equazioni binomie 97
10.2.3 Equazioni trinomie 97

11 Disequazioni di secondo grado ad una incognita 99
11.1 Segno di un trinomio di secondo grado 99
11.2 Disequazioni di 2° grado 100
11.2.1 Applicazioni 100

12 Equazioni/disequazioni irrazionali **103**
12.1 Equazioni irrazionali 103
12.2 Disequazioni irrazionali 105
12.2.1 Risoluzione 105
12.2.1.1 Indice pari 106
12.2.1.2 Indice dispari 107

13 Sistemi di equazioni di grado superiore al primo in R **109**
13.1 Sistemi di secondo grado 109
13.2 Sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite 110
13.3 Sistemi simmetrici 110
13.4 `TODO` 111

14 Geometria razionale - Nozioni fondamentali **113**
14.1 Concetti primitivi 113
14.2 Linee, rette e segmenti, curve 113
14.3 Superficie, piani 115
14.4 Angoli 115
14.5 Poligoni 117
14.6 Congruenza tra figure piane 118
14.7 Algebra di segmenti ed angoli 119
14.7.1 Somma algebrica di segmenti 119
14.7.2 Somma algebrica di angoli 119

15 Geometria analitica **121**
15.1 Sistema di coordinate cartesiane 121
15.1.1 A 1 dimensione 121
15.1.2 A 2 dimensioni: piano cartesiano 121
15.1.3 A 3 dimensioni: spazio cartesiano 123
15.2 Introduzione alla Geometria analitica 124
15.2.1 Equazione di un luogo geometrico nel piano cartesiano . . 124
15.3 Traslazioni del sistema di riferimento 125
15.4 Distanza tra due punti 126
15.4.1 ...nel piano cartesiano 126
15.4.2 ...nello spazio cartesiano 127
15.5 `TODO` 127

16 Relazioni **129**
16.1 Introduzione 129
16.1.1 Definizioni 129
16.1.2 Rappresentazione 130
16.2 Relazioni in un insieme 130
16.2.1 Proprietà possibili 130
16.2.2 Relazioni d'equivalenza, classi d'equivalenza 131
16.2.3 Relazioni d'ordine 132
16.3 Relazioni interne ad insiemi numerici 134

17 Funzioni 137
17.1 Definizioni e terminologia 137
17.2 Discernere tra relazioni e funzioni in base all'espressione analitica 138
17.3 Tassonomia delle funzioni numeriche 139
17.3.1 L'espressione analitica e la valutazione di una funzione matematica 139
17.3.1.1 Funzioni definite a tratti 141
17.4 Algebra delle funzioni 141
17.5 Grafico di una funzione matematica 142
17.6 Tassonomia delle funzioni matematiche 143
17.7 Zeri di una funzione 146

18 Retta 151
18.1 Equazioni e grafico della retta 151
18.1.1 Rette in varie posizioni 152
18.1.2 Retta passante per l'origine 153
18.1.3 Coefficiente angolare, rette parallele e perpendicolari . . . 154
18.1.4 Posizione reciproca di due rette: determinazione analitica 155
18.1.5 Equazione del fascio di rette 156
18.1.5.1 Equazione del fascio improprio di rette 156
18.1.5.2 Equazione fascio proprio di rette 156
18.2 Applicazioni 157
18.2.1 Equazione della retta passante per un punto con dato coefficiente angolare 157
18.2.2 Coefficiente angolare della retta passante per due punti . 157
18.2.3 Equazione della retta passante per due punti - 1 157
18.2.4 Equazione della retta passante per due punti - 2 158
18.3 Equazioni parametriche di una curva 158
18.4 Distanza di una retta dall'origine 159
18.4.1 Distanza dall'origine 159
18.4.2 Distanza da un punto arbitrario 160

19 Circonferenza 161
19.1 Equazioni della circonferenza 161
19.1.1 Circonferenze in posizioni particolari 162
19.2 Posizioni 163
19.2.1 Posizione di un punto rispetto a una circonferenza 163
19.2.2 Posizione di una retta rispetto a una circonferenza 164
19.2.3 Tangenti passanti da una curva 164
19.2.4 Posizioni reciproca di due circonferenze - Parte 1 165
19.2.5 Posizione reciproca tra due circonferenze - Parte 2 166
19.3 `TODO` 167

20 Parabola 169
20.1 Parabola con asse parallelo all'asse y 169
20.1.1 Parabola di equazione $y = ax^2$ 169
20.1.2 Parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ 171
20.1.2.1 Parabole in posizioni particolari 172
20.2 Parabola con asse parallelo all'asse x 172
20.3 Posizione reciproca tra retta e parabola 173

20.4 Applicazioni . . . 173
20.4.1 Studio di particolari curve . . . 173
20.4.1.1 Studio della curva $y = \sqrt{x}$ . . . 174
20.4.1.2 Studio della curva $y = \sqrt{x + a} + b$ . . . 174
20.4.1.3 Studio della curva $y = \sqrt{1 + x - |x|}$ . . . 175
20.4.2 Risoluzione grafica di equazioni irrazionali . . . 177
20.4.2.1 Equazione $\sqrt{2 - x} = 2x - 1$ . . . 177
20.4.2.2 Equazione $\sqrt{x - 1} = \sqrt{6x - x^2}$ . . . 177
20.5 `TODO` . . . 178

21 Ellisse 179
21.1 Ellisse in forma canonica . . . 179
21.2 Eccentricità . . . 182
21.3 Ellisse generica . . . 183
21.4 Applicazioni . . . 184

22 Iperbole 185
22.1 Iperbole riferita al centro e agli assi . . . 185
22.1.1 Iperbole con fuochi appartenenti all'asse x . . . 185
22.1.2 Iperbole con fuochi appartenenti all'asse y . . . 187
22.2 Eccentricità . . . 187
22.3 Iperbole equilatera . . . 188
22.4 Iperbole riferita a rette parallele ai suoi assi . . . 190
22.5 Applicazioni . . . 191
22.6 `TODO` . . . 192

23 Trigonometria 193
23.1 Goniometria . . . 193
23.2 Circonferenza e funzioni goniometriche . . . 193
23.3 Funzioni goniometriche mediante una di esse . . . 197
23.4 Funzioni goniometriche inverse . . . 197
23.5 Funzioni di angoli in relazione tra loro . . . 199
23.5.1 Angoli associati . . . 199
23.5.2 Angoli opposti . . . 199
23.5.3 Angoli complementari . . . 200
23.5.4 Angoli associati al complementare . . . 200
23.6 Formule goniometriche . . . 200
23.6.1 Addizione e sottrazione . . . 200
23.6.2 Duplicazione . . . 201
23.6.3 Bisezione . . . 201
23.6.4 Parametriche . . . 201
23.6.5 Prostaferesi . . . 201
23.6.6 Werner . . . 202

24 Equazioni, sistemi, disequazioni goniometriche 203
24.1 Equazioni goniometriche . . . 203
24.1.1 Equazioni elementari . . . 203
24.1.1.1 Funzioni goniometriche uguagliate a costante . . 203
24.1.1.2 Funzioni goniometriche uguagliate a funzione goniometrica . . . 204

24.1.2 Equazioni riconducibili ad equazioni elementari 205
24.1.3 Equazioni lineari in seno e coseno 205
24.1.4 Equazioni omogenee di 2° grado in seno e coseno 206
24.2 Sistemi di equazioni 207
24.3 Disequazioni 207

25 Triangoli e applicazioni trigonometria 209
25.1 Relazioni fra lati e angoli di un triangolo 209
25.1.1 Teoremi sui triangoli rettangoli 210
25.1.2 Teoremi sui triangoli qualsiasi 211
25.1.2.1 Teorema del coseno (o di Carnot) 211
25.1.2.2 Teorema dei seni 212
25.2 Applicazioni trigonometria 213
25.2.1 Coordinate polari 213
25.2.1.1 Trasformazione delle coordinate polari in cartesiane e viceversa 214
25.2.2 Rotazione degli assi cartesiani 214
25.2.3 Rototraslazione degli assi cartesiani 217
25.3 TODO 218

26 Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano 219
26.1 Introduzione 219
26.1.1 Trasformazioni di un singolo punto 219
26.1.2 Trasformazione di una curva 220
26.1.3 Trasformazioni composte 221
26.1.4 Classificazione delle trasformazioni 222
26.2 Isometrie 222
26.2.1 Simmetria 222
26.2.1.1 Simmetria centrale 222
26.2.1.2 Simmetria assiale 223
26.2.2 Traslazioni 225
26.2.3 Rotazioni 225
26.2.3.1 Rotazione con centro nell'origine degli assi . . . 226
26.3 Similitudini 226
26.3.1 Omotetie 227
26.3.1.1 Omotetie con centro nell'origine 227
26.4 Affinità 227
26.4.1 Dilatazioni 228
26.5 TODO 228

27 Applicazione delle trasformazioni geometriche 229
27.1 Applicazione ai grafici delle funzioni 229
27.1.1 Simmetria rispetto a un generico punto 229
27.1.2 Simmetria rispetto all'origine 230
27.1.3 Funzioni dispari 231
27.1.4 Simmetrie a rette parallele agli assi 232
27.1.5 Simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante. Grafico funzione inversa 232
27.1.6 Grafico di $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$ 233
27.1.7 Traslazione di grafici 234

27.1.8 Dilatazioni 234

28 Risoluzione grafica di disequazioni 235
28.1 Disequazione del tipo $f(x) > 0$ 235
28.2 Disequazione del tipo $f(x) > g(x)$ 235

29 Potenze ad esponente reale, funzione esponenziale 237
29.1 Potenze ad esponente irrazionale 238
29.1.1 Proprietà 238
29.2 Funzione esponenziale 239
29.2.1 Proprietà 240
29.2.2 Applicazioni alla teoria delle funzioni 240
29.3 Equazioni esponenziali 241
29.4 Disequazioni esponenziali 241

30 Logaritmi 243
30.1 Introduzione 243
30.1.1 Derivazione e definizioni 243
30.1.2 Proprietà dei logaritmi 245
30.1.3 Cambiamenti di base 246
30.2 La funzione logaritmica 247
30.3 Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi 248
30.4 Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi 249
30.5 Equazioni logaritmiche 249
30.6 Disequazioni logaritmiche 250

31 Vettori 251
31.1 Introduzione 251
31.1.1 Modulo, vettore nullo, versore 252
31.1.2 Componente di un vettore secondo una retta 253
31.2 Componenti cartesiane di un vettore nel piano 253
31.2.1 Modulo e direzione di un vettore nel piano 254
31.3 Vettori nello spazio 255
31.4 Algebra dei vettori - 1/2 256
31.4.1 Somma di due vettori 256
31.4.1.1 Modulo della somma 257
31.4.1.2 Proprietà somma vettori 257
31.4.2 Prodotto di vettore per scalare 258
31.4.3 Proprietà del prodotto 258
31.4.3.1 Rapporto tra vettori e versori 258
31.4.3.2 Vettore opposto 259
31.4.4 Differenza di due vettori 259
31.4.5 Versori fondamentali e “scomposizione” di un vettore . . . 259
31.4.5.1 Nello spazio 260
31.4.5.2 I benefici dell’espressione mediante i versori . . 260
31.5 Algebra dei vettori - 2/2 261
31.5.1 Prodotto scalare tra due vettori 261
31.5.1.1 Proprietà del prodotto scalare 261
31.5.1.2 Prodotto scalare nello spazio, formule simil matriciali 262

31.5.2 Prodotto vettoriale 262
31.5.3 Proprietà del prodotto vettoriale 263
31.5.4 Alcune osservazioni 263
31.5.5 Espressione cartesiana del prodotto vettoriale 264

32 Numeri complessi 265
32.1 Numeri immaginari 265
32.1.1 Regole algebriche 266
32.2 Numeri complessi 266
32.2.1 Proprietà numeri complessi 267
32.2.2 Operazioni 267
32.2.3 Esempio: risoluzione di una equazione nel campo complesso 268
32.3 Rappresentazione geometrica dei complessi 269
32.3.1 Punti nel piano cartesiano 269
32.3.2 Rappresentazione mediante vettori 270
32.4 Forma trigonometrica dei numeri complessi 271
32.4.1 Determinazione dell'argomento a partire dalle componenti 271
32.4.2 Trasformazioni della notazione 272
32.4.2.1 Da forma algebrica a trigonometrica 272
32.4.2.2 Da forma trigonometrica ad algebrica 272
32.4.3 Operazioni con complessi in forma trigonometrica 272
32.4.3.1 Prodotto 273
32.4.3.2 Potenza 273
32.4.3.3 Divisione 274
32.4.3.4 Radici n-esime 274
32.5 Teorema fondamentale dell'algebra 275
32.6 Risoluzione di equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$ 276
32.7 Numeri complessi in formula esponenziale 276
32.7.1 Formule di Eulero 277
32.8 TODO 278

33 Successioni, limiti e progressioni 279
33.1 Successioni 279
33.1.1 Proprietà di successioni 280
33.1.1.1 Successioni limitate 280
33.1.1.2 Successioni monotone 280
33.1.1.3 Proprietà definitivamente soddisfatte 281
33.2 Limiti di successioni 281
33.2.1 Successioni convergenti 281
33.2.2 Successioni divergenti 282
33.2.3 Successioni indeterminate 283
33.3 Teoremi sulle successioni monotone 284
33.4 Algebra dei limiti e teoremi per il calcolo 284
33.4.1 Algebra dei limiti 285
33.4.2 Teoremi di permanenza del segno 286
33.4.3 Teorema del confronto 287
33.4.4 Algebra dei limiti concernenti infiniti 287
33.4.5 Teoremi del confronto concernenti infiniti 289
33.5 Il numero di Nepero 289
33.6 Confronti e stime asintotiche 290

33.7 Relazione tra limiti delle successioni e delle funzioni 293
33.8 Alcune successioni notevoli e loro proprietà 294
33.8.1 Progressioni aritmetiche 294
33.8.1.1 Somma dei termini di una progressione aritmetica finita 295
33.8.2 Progressioni geometriche 296
33.8.2.1 Progressioni a termini positivi 296
33.8.2.2 Progressioni a termini di segno qualsiasi 297
33.8.2.3 Prodotto di n termini consecutivi 298
33.8.2.4 Somma dei termini di una progressione geometrica finita 298

34 Premesse all'analisi infinitesimale 299
34.1 Funzioni elementari: riepilogo ed integrazioni 299
34.1.1 Funzioni potenza 299
34.1.1.1 Funzione potenza ad esponente razionale 299
34.1.1.2 Funzione potenza ad esponente irrazionale . . . 301
34.1.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche 301
34.1.3 Funzioni parte intera e mantissa 301
34.1.4 Funzioni trigonometriche e fenomeni vibratori 302
34.1.5 Funzioni iperboliche 304
34.1.5.1 Formule goniometriche 305
34.1.6 Funzioni iperboliche inverse 306
34.2 Determinazione del dominio: riepilogo 307
34.3 Peculiarità delle funzioni: richiami ed integrazioni 308
34.3.1 Funzioni pari e dispari 308
34.3.2 Periodicità di una funzione 308
34.3.3 Composizione di funzioni 309
34.3.4 Monotonia di una funzione 309
34.4 Funzione inversa 310
34.5 `TODO` 310

35 Limiti e continuità delle funzioni 311
35.1 Introduzione 311
35.1.1 Definizione topologica 311
35.1.2 Definizione successionale 311
35.2 Tipologie di limiti 312
35.2.1 Tipologie standard 312
35.2.2 Limite destro, sinistro 312
35.2.3 Limite per eccesso e per difetto 313
35.3 Verifica di limite (definizione topologica) 313
35.3.1 Limite finito per x tendente a valore finito 314
35.3.2 Limite finito per x tendente a valore infinito 315
35.3.3 Limite infinito per x tendente a valore finito 315
35.3.4 Limite infinito per x tendente a valore infinito 316
35.4 Verifica di limite (definizione successionale) 317
35.4.1 Limite finito per x tendente ad infinito 317
35.4.2 Limite infinito per x tendente ad infinito 317
35.4.3 Limite infinito per x tendente a valore finito 318
35.4.4 Limite finito per x tendente a valore finito 318

35.5 Esistenza, unicità e non esistenza del limite 319
35.6 Teoremi sui limiti 319
35.6.1 Teoremi del confronto 320
35.6.2 Teorema della permanenza del segno 321
35.6.3 Teoremi sull'algebra dei limiti 321
35.6.3.1 Somma algebrica di funzioni 321
35.6.3.2 Prodotto di due funzioni 321
35.6.3.3 Potenza di una funzione 322
35.6.3.4 Modulo di una funzione 322
35.6.3.5 Reciproco di una funzione 322
35.6.3.6 Quoziente di due funzioni 322
35.6.3.7 Funzione opposta 323
35.6.3.8 Modulo di una funzione 323
35.7 Funzioni continue 323
35.7.1 Introduzione 323
35.7.2 Continuità delle funzioni elementari 324
35.7.3 Algebra delle funzioni continue 324
35.7.4 Limiti e continuità delle funzioni composte 325
35.7.5 Discontinuità 327
35.8 Proprietà delle funzioni continue o monotone 328
35.8.1 Proprietà delle funzioni continue 328
35.8.1.1 Teorema di esistenza degli zeri 328
35.8.1.2 Teorema di Weierstrass 328
35.8.1.3 Teorema di Darboux (dei valori intermedi) . . . 329
35.8.2 Proprietà delle funzioni monotone 329
35.8.2.1 Esistenza del limite 329
35.8.2.2 Teorema di monotonia 329
35.8.3 Continuità e invertibilità 330
35.9 Limiti di funzioni razionali 330
35.9.1 Funzioni razionali intere 330
35.9.2 Funzioni razionali fratte 330
35.10 Limiti notevoli 331
35.10.1 Limiti esponenziali e logaritmici 331
35.10.2 Limiti trigonometrici 333
35.11 Infinitesimi e infiniti: confronto e approssimazione 334
35.11.1 Infinitesimi 334
35.11.1.1 Confronto 334
35.11.1.2 Ordine e approssimazione 335
35.11.2 Infiniti 336
35.11.2.1 Confronto 336
35.11.2.2 Ordine e approssimazione 337
35.11.2.3 Gerarchia di infiniti 338
35.11.2.4 Crescita di una funzione all'infinito 338
35.12 Confronti e stime asintotiche 339
35.12.1 Utilizzo nel calcolo dei limiti 340
35.12.2 Utilizzo nei grafici 340
35.13 Sintesi metodo 341
35.13.1 Forme indefinite di immediata interpretazione 341
35.13.2 Forme indeterminate 341
35.13.2.1 Altre forme di indecisione 343

36 Derivata di una funzione 345
36.1 Introduzione . . . 345
36.1.1 Definizioni e nozioni fondamentali . . . 345
36.1.2 Significato geometrico della derivata . . . 346
36.2 Derivate fondamentali . . . 347
36.3 Teoremi sul calcolo delle derivate . . . 348
36.3.1 Algebra delle derivate . . . 348
36.3.1.1 Somma algebrica . . . 348
36.3.1.2 Prodotto . . . 349
36.3.1.3 Quoziente . . . 349
36.3.2 Derivata di funzione composta . . . 350
36.3.2.1 Definizione . . . 350
36.3.2.2 Applicazioni . . . 351
36.3.3 Derivata di funzione inversa . . . 353
36.4 Derivate di ordine superiore al primo . . . 355

37 Teoremi e applicazioni del calcolo differenziale 357
37.1 Teoremi . . . 357
37.1.1 Derivabilità in un punto . . . 357
37.1.1.1 Continuità delle funzioni derivabili . . . 357
37.1.2 Derivabilità in un intervallo . . . 358
37.1.2.1 Teorema di Rolle . . . 358
37.1.2.2 Teorema di Lagrange . . . 358
37.1.2.3 Applicazioni . . . 358
37.1.2.4 Teorema di Cauchy . . . 359
37.2 Applicazioni del calcolo differenziale . . . 360
37.2.1 Calcolo di limiti: teorema di De L'Hopital . . . 360
37.2.1.1 Applicazioni . . . 361
37.2.2 Approssimazione di funzioni . . . 362
37.2.2.1 Differenziale . . . 362
37.2.2.2 Polinomi di Mac-Laurin . . . 366
37.2.2.3 Polinomi di Taylor . . . 367
37.2.2.4 Formula di Taylor con resti di Peano e Lagrange 368
37.2.3 Monotonia di successioni . . . 370
37.2.4 Risoluzione approssimata di equazioni: il metodo di Newton370
37.2.4.1 Introduzione . . . 370
37.2.4.2 Metodo . . . 371
37.2.4.3 Esempio . . . 372
37.2.5 Ottimizzazione e ricerca dei flessi . . . 372
37.2.5.1 Massimi e minimi . . . 372
37.2.5.2 Punti di flesso . . . 373
37.2.5.3 Teoremi sui massimi e minimi relativi . . . 374
37.2.5.4 Ricerca di massimi e minimi . . . 374
37.2.5.5 Concavità di una curva e ricerca dei punti di flesso375
37.3 `TODO` . . . 376

38 Studio di funzioni 377
38.1 Asintoti 377
38.1.1 Asintoto orizzontale 377
38.1.2 Asintoto verticale 377
38.1.3 Asintoto obliquo 378
38.2 Studio della funzione derivata prima 379
38.3 Schema per lo studio di funzioni 380
38.4 Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata 381

39 Serie numeriche e di funzioni 383
39.1 Definizioni 383
39.2 Serie notevoli 385
39.2.1 Serie geometrica 385
39.2.2 Serie armonica 386
39.2.3 Serie di Mengoli 386
39.3 Alcune proprietà delle serie 386
39.4 Criteri di convergenza 387
39.4.1 Serie a termini non negativi 388
39.4.1.1 Criterio del confronto 388
39.4.1.2 Criterio del confronto asintotico 388
39.4.1.3 Criterio della radice 389
39.4.1.4 Criterio del rapporto 390
39.4.1.5 Altre serie cui questi criteri si applicano 390
39.4.2 Serie a termini di segno variabile 390
39.4.2.1 Serie a termini di segno alternato. Criterio di Leibniz 391
39.5 Introduzione alle serie di funzioni 392
39.5.1 Serie di Taylor delle trascendenti elementari 392
39.5.1.1 La serie esponenziale 392
39.5.1.2 Le serie delle funzioni trigonometriche elementari 393
39.5.1.3 Serie di potenze 393
39.6 TODO 394

40 Integrali 395
40.1 Integrali indefiniti 395
40.1.1 Integrale indefinito 395
40.1.1.1 Introduzione 395
40.1.1.2 Relazioni tra integrale indefinito, derivata e differenziale 396
40.1.1.3 Continuità ed esistenza dell'integrale indefinito . 396
40.1.1.4 Integrale indefinito come operatore lineare . . . 396
40.1.2 Integrazioni immediate 397
40.1.2.1 Funzioni costanti 397
40.1.2.2 Funzioni potenza 397
40.1.2.3 Funzioni esponenziali 398
40.1.2.4 Funzioni trigonometriche 398
40.1.2.5 Inverse delle goniometriche 399
40.1.2.6 Iperboliche 400
40.1.3 Integrazione per sostituzione 400
40.1.4 Integrazione per parti 400

40.1.5 Integrazione delle funzioni razionali fratte 401
40.1.5.1 Grado del numeratore superiore 401
40.1.5.2 Grado del numeratore inferiore 401
40.1.5.3 Funzioni razionali di e^x 404
40.1.5.4 Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$ 404
40.1.6 Integrali di funzioni trigonometriche 404
40.1.7 Integrali di particolari funzioni irrazionali 405
40.2 Integrali definiti 407
40.2.1 Introduzione 407
40.2.2 Proprietà degli integrali definiti 409
40.2.3 Teorema della media 410
40.2.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale 410
40.2.5 Formula fondamentale del calcolo integrale 410
40.2.6 Integrazione numerica 412
40.2.6.1 Metodo del punto medio 412
40.3 Integrali generalizzati 413
40.3.1 Integrazione di funzioni illimitate 413
40.3.1.1 Casistica 413
40.3.1.2 Criteri di integrabilità 414
40.3.2 Integrazione su intervalli illimitati 415
40.3.2.1 Casistica 415
40.3.2.2 Criteri di integrabilità 417
40.3.3 Integrazione di funzioni illimitate in un intervallo illimitato 417
40.3.4 Integrazione di una funzione generalmente continua . . . 417
40.4 Funzione integrale 418
40.4.1 Applicazioni: distribuzione normale 418
40.4.2 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale 419

41 Metodi dimostrativi **421**
41.1 Dimostrazioni basate su logica 421
41.2 Principio di induzione 422

Capitolo 1

Teoria degli insiemi

1.1 Introduzione

1.1.1 Definizioni

Un *insieme* consiste in una collezione di oggetti detti *elementi* dell'insieme; alcune peculiarità

- un insieme viene rappresentato con lettera maiuscola (es. A) mentre un elemento con minuscola (x);
- un elemento x può appartenere o meno ad un insieme A (senza vie di mezzo). Se vi appartiene, tale relazione di *appartenenza* è rappresentata mediante la scrittura $x \in A$ (alternativamente $x \notin A$);
- un elemento non può comparire più di una volta in un insieme;
- gli elementi di un insieme non hanno un ordine di comparizione;
- gli elementi di un insieme lo definiscono univocamente: due insiemi A e B si dicono **uguali**, e si scrive $A = B$, quando hanno esattamente gli stessi elementi.

Se gli elementi di un insieme sono in numero limitato, allora l'insieme si dice **finito**, altrimenti *infinito*. Un insieme che non ha elementi si dice **vuoto**, e si rappresenta mediante $\emptyset$ o $\{\}$.

1.1.2 Rappresentazione di insieme

Per **rappresentare** un insieme con i suoi elementi si può procedere mediante:

- rappresentazione *geometrica*, mediante diagrammi di Eulero-Venn;
- rappresentazione *estensiva*, ovvero elencare gli elementi di un insieme in maniera estesa come in:
$$A = \{a, b, c\}$$
Da notare i seguenti punti, conseguenze della definizione di uguaglianza tra insiemi:

  - l'ordine degli elementi non è importante; ad esempio, $\{1,2\} = \{2,1\}$;
  - la ripetizione (molteplicità) degli elementi è irrilevante; ad esempio, $\{1,2,2\} = \{1,1,1,2\} = \{1,2\}$.

- rappresentazione *intensiva* o mediante proprietà caratteristica: se gli elementi di un insieme sono individuabili mediante un *predicato*, ovvero una affermazione che può risultare vera o falsa, è possibile indicarli mediante questa. Se A è un insieme e $p(x)$ un predicato che ha senso per gli elementi di A, allora:
$$B = \{x \in A : p(x)\} = \{x \in A | p(x)\}$$
B racchiuderà gli elementi di A per i quali l'affermazione $p(x)$ è valida. In tal caso A si dice *insieme universo* (intendendo l'ambiente da cui trarre gli elementi x dell'insieme). Un generico insieme universo si indica con U, e nei diagrammi di Eulero-Venn si rappresenta mediante un rettangolo contenente altri insiemi.
Ad esempio l'insieme dei numeri naturali pari può essere indicato come:
$$P = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{x}{2} \in \mathbb{N} \right\}$$

1.1.3 Sottoinsiemi

Dati due insiemi A e B, si dice che **A è sottoinsieme di B**, e si scrive $A \subseteq B$ (oppure $B \supseteq A$) se ogni elemento di A è anche elemento di B:
$$A \subseteq B \iff \forall x \in A, x \in B$$
Dalla definizione deriva che $\forall A$ si ha che $\emptyset \subseteq A$, e $A \subseteq A$.
In casi come questi, A potrebbe coincidere con l'insieme B stesso o con l'insieme vuoto, continuando ad essere sottoinsieme di B.
Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ (ovvero esistono elementi di B non presenti in A) si scrive $A \subset B$ (A è *strettamente contenuto* in B); inoltre se $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$ si dice che A è **sottoinsieme proprio** di B.

1.1.4 Insieme delle parti

Dato un insieme A, si dice **insieme delle parti** $\mathcal{P}(A)$ quell'insieme che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A ($\emptyset$ ed A inclusi); in generale se A contiene n elementi il suo insieme delle parti ne contiene 2^n.
Ad esempio, l'insieme della parti di $A = \{a, b, c\}$ sarà:
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$
Si noti che si ha:
$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
Per amor di precisione $\{\emptyset\} \neq \emptyset$: il primo membro è un insieme che contiene un insieme vuoto, mentre il secondo è solo un insieme vuoto.

1.2 Operazioni con gli insiemi

Dati $A, B \subseteq U$ possiamo costruire nuovi insiemi applicando alcune operazioni insiemistiche fondamentali.

Proprietà	Unione	Intersezione
Idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Assorbimento	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Tabella 1.1: Proprietà di unione ed intersezione

1.2.1 Operazioni

L'insieme **unione** di due insiemi A e B è l'insieme, indicato $A \cup B$, formato dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A, B:

$$A \cup B = \left\{ x \in U \,\middle|\, x \in A \vee x \in B \right\}$$

L'insieme **intersezione** di A e B, indicata con $A \cap B$, è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B:

$$A \cap B = \left\{ x \in U \,\middle|\, x \in A \wedge x \in B \right\}$$

Due insiemi si dicono *disgiunti* se la loro intersezione è l'insieme vuoto, $A \cap B = \emptyset$, ovvero se non hanno elementi in comune.
Si definisce **differenza** di due insiemi A e B considerati nell'ordine, indicata da $A \setminus B$ o con $A - B$, l'insieme formato da tutti gli elementi di A che non appartengono ad B:

$$A \setminus B = A - B = \left\{ x \in A \,\middle|\, x \notin B \right\}$$

Se $A \subseteq B$, il **complementare** di un insieme A rispetto ad un altro insieme B, è l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A:

$$\complement_B A = B \setminus A \qquad A \subseteq B$$

Se l'insieme B è sottinteso (spesso avviene quando si ha U), il complementare di A si indica anche come $\complement A$ o $\bar{A}$. In base alla definizione, il complementare del complementare coincide con l'insieme dato $\bar{\bar{A}} = A$.

1.2.2 Proprietà delle operazioni

In tabella 1.1 sono riassunte le principali proprietà di unione ed intersezione.
Se $A, B \subseteq U$, alcune proprietà della complementarietà:

$$A \cup \complement_A = U$$
$$A \cap \complement_A = \emptyset$$

E infine le leggi di De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1.3 n-uple ordinate, prodotto cartesiano

Come detto, gli insiemi consistono in collezioni di elementi, i quali non sono caratterizzati dall'ordine con cui si presentano.
Se il concetto di ordine diviene importante allora si fa uso delle *n-uple ordinate* (es coppie, triplette, ...).

1.3.1 Coppia ordinata

Una coppia ordinata consiste nell'insieme di due elementi *presi in un certo ordine.* La scrittura

$$(x, y)$$

indica la coppia ordinata il cui primo elemento (o componente) è x, il secondo y. Le coppie ordinate (x, y) e (x', y') sono uguali se e solo se hanno uguali le componenti di ugual posto, ovvero $x = x$ e $y = y$.

1.3.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B chiamiamo insieme **prodotto cartesiano** di A per B, indicato con $A \times B$ l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) aventi per prima componente un elemento $a \in A$, per seconda componente un elemento $b \in B$:

$$A \times B = \big\{(a, b) \,\big|\, a \in A, b \in B\big\}$$

ad esempio se $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{0, 2, 3\}$ si ha

$$X \times Y = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3)\}$$

Il prodotto cartesiano di due insiemi può esser rappresentato mediante una tabella a doppia entrata o, soprattutto nel caso di insiemi numerici, mediante punti (o aree) sul diagramma cartesiano (un punto per ogni coppia facente parte del prodotto); ad esempio il diagramma cartesiano stesso può esser visto come il prodotto cartesiano di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
Alcune osservazioni:

- il prodotto cartesiano non è commutativo: se $A \neq B$, $A \times B \neq B \times A$;
- se almeno uno dei due insiemi è vuoto, si conviene che il prodotto cartesiano risultato sia anch'esso vuoto: $A \times \emptyset = \emptyset$.
- se A è costituito da n elementi e B da m, $A \times B$ è costituito da $n \cdot m$ coppie ordinate
- il prodotto cartesiano si può estendere agevolmente al caso di tre o più insiemi
$$A \times B \times C = \big\{(a, b, c) \,\big|\, a \in A, b \in B, c \in C\big\}$$

1.4 Insiemi numerici

Gli *insiemi numerici*, ovvero gli insiemi composti da numeri sono un particolare tipo di insieme (anche se il più importante).

1.4.1 Insiemi numerici fondamentali

Numeri naturali L'insieme dei numeri naturali (*natural numbers*) è definito come[1]

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

un insieme derivato è $\mathbb{N}_0$ ovvero l'insieme dei numeri naturali con esclusione dello 0

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus 0$$

Numeri relativi Mediante i naturali non è possibile esprimere numeri negativi; un insieme espansione di quello dei numeri naturali è quello dei numeri interi relativi (*integer numbers, o integers*), definito come

$$\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Numeri razionali Ulteriore espansione è quella dei numeri razionali, insieme così definito:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

I numeri razionali sono caratterizzati da avere una rappresentazione decimale che è finita (ovvero dopo un tot di numeri decimali ci si ferma, es 3.50, oppure se infinita presenta elementi di ripetizione come ad esempio $1/3 = 0.333..$ o $2/11 = 0.181818..$)

Numeri irrazionali Vi sono alcuni numeri che non si riescono ad esprimere mediante un numero razionale (ad esempio la $\sqrt{2}$ o π o e) per cui è stato necessario introdurre l'**insieme dei numeri irrazionali** $\mathbb{I}$, che possono esser definiti come numeri aventi una rappresentazione decimale, dopo la virgola, infinita e senza ripetizioni.

Numeri reali L'insieme successivo è quello dei **numeri reali** e può esser definito come insieme di numeri razionali e irrazionali:

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = (-\infty; +\infty) \tag{1.1}$$

Di solito, quando non si specifica in quale insieme numerico si stia lavorando, è sottinteso quello dei numeri reali.
In alcune questioni è necessario un ampliamento dell'insieme per includere anche gli infiniti. Si definisce allora:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty; \infty] \tag{1.2}$$

Numeri complessi L'insieme dei **numeri complessi** $\mathbb{C}$ è stato introdotto in quanto i numeri reali non erano in grado di esprimere radici di numeri negativi.

$$\mathbb{C} = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \tag{1.3}$$

[1] Gli anglosassoni definiscono l'insieme $\mathbb{N}$ senza includervi lo zero. L'insieme dei numeri naturali più lo zero è definito insieme dei *whole numbers* $\mathbb{W}$.

I numeri complessi sono approfonditi in apposita sezione.
Si noti che:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ovverosia ogni numero naturale è anche un numero relativo, un razionale e un reale e un complesso (viceversa non necessariamente un complesso è anche un reale o un intero un numero naturale).

1.4.2 Cardinalità degli insiemi numerici

In generale la **cardinalità di un insieme** A, indicata con $|A|$ corrisponde al numero di elementi che compongono detto insieme. Ad esempio se $A = a, b, c$, la sua cardinalità è $|A| = 3$.

Nel caso di insiemi di cardinalità infinita possiamo comunque essere interessati a confrontarne la cardinalità. Ad esempio se consideriamo gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ciascuno di questi insiemi ha infiniti elementi; tuttavia a livello intuitivo i numeri razionali sono più numerosi dei numeri interi, essendo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Per rispondere a queste domande occorre definire cosa si intenda per uguale numerosità. Nello sviluppo dell'analisi si è giunti a identificare l'idea di uguale numerosità con quella di *corrispondenza biunivoca* due generici insiemi A e B si dicono di **uguale cardinalità** o potenza (termini che traducono l'idea intuitiva di numerosità) *se possono esser messi in corrispondenza biunivoca tra loro, cioè se esiste una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B e viceversa.*

La corrispondenza biunivoca non deve esser necessariamente espressa mediante una formula. Ad esempio la seguente è la corrispondenza tra gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$

```
Z  0  1  -1  2   -2   ...     n     -n   ...

N  0  1   2  3    4   ...  2n - 1   2n   ...
```

Quello che conta e che ogni numero di un insieme identifica univocamente un solo numero dell'altro insieme e viceversa. Come si vede la legge definita realizza una corrispondenza biunivoca: quindi anche se dal punto di vista dell'inclusione $\mathbb{Z}$ ha più elementi di $\mathbb{N}$ (nel senso che ha tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ più altri), gli insiemi hanno la stessa cardinalità e quindi vanno pensati come ugualmente numerosi.

Un insieme che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dice **numerabile**, o che ha la **potenza del numerabile**. Si può dimostrare che

- $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili
- $\mathbb{R}$ (e $\mathbb{C}$ di conseguenza) non è numerabile, pertanto diciamo che $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore di $\mathbb{R}$;
- inoltre qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}$ (aperto o chiuso, limitato o illimitato) ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$ stesso; in altre parole la retta non ha una cardinalità maggiore del segmento, ma la stessa

La cardinalità di $\mathbb{R}$ prende il nome di **potenza del continuo**.

La potenza del numerabile e del continuo non sono le uniche cardinalità per insiemi infiniti: infatti è sempre possibile costruire un insieme di cardinalità

Intervallo	Insieme	Denominazione
$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$	I. chiuso
$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$	I. aperto
$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$	I. aperto a sx, chiuso a dx
$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$	I. aperto a dx, chiuso a sx
$(-\infty;a)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x < a\}$	I. aperto illimitato inferiormente
$(-\infty;a]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x \leq a\}$	I. chiuso illimitato inferiormente
$(a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$	I. aperto illimitato superiormente
$[a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x \geq a\}$	I. chiuso illimitato superiormente

Tabella 1.2: Intervalli numerici di estremi a, b e $\pm\infty$, con $a < b$.

maggiore a partire da uno dato, facendo semplicemente il suo insieme delle parti (che ha una cardinalità superiore all'insieme dal quale è stato originato). Pertanto i livelli gerarchici delle cardinalità infinite sono anch'essi infiniti.

1.4.3 Altri insiemi numerici

In generale gli insiemi numerici sono insiemi composti esclusivamente da numeri: ad esempio lo sono $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$. Tuttavia possono esserlo considerati insiemi numerici semplicemente degli insiemi di numeri come:

- **intervalli**: ad esempio $[a;b]$
- **insiemi numerici non intervalli**: ad esempio $A = \{1;2;3\}$

1.4.3.1 Intervalli

Tra gli insiemi numerici sono di fondamentale importanza gli intervalli.
Gli *intervalli* sono insiemi numerici composti da un (o più, legati mediante $\cup, \cap$) sottoinsieme di $\mathbb{R}$ compresi tra due numeri a e b, con $a \leq b$, detti **estremi** dell'intervallo: a è detto estremo inferiore, b estremo superiore. Tali estremi possono essere inclusi nell'intervallo (nella notazione, una parentesi quadra rivolta verso gli estremi dell'intervallo) o esclusi dallo stesso (quadra verso l'esterno o tonda verso gli estremi dell'intervallo).
In tabella 1.2 una corrispondenza tra notazione intervallare ed insiemistica.
Si dicono **valori interni** ad un intervallo quelli che appartengono all'intervallo e non ne costituiscono un estremo, **valori esterni** quelli che non appartengono all'intervallo ne ne costituiscono un estremo (tabella 1.2).
Gli intervalli possono classificarsi in **illimitati** o **limitati** a seconda che un loro estremo sia o meno $\pm\infty$.
L'**ampiezza** di un intervallo limitato di estremi a e b (con $a < b$) misura, in ogni caso, $b - a$.

1.4.3.2 Intorni

Il concetto di intorno di un punto x_0 è usato in analisi per indicare intervalli costituiti da punti molto prossimi al punto x_0; analogamente la nozione di intorno di infinito viene utilizzato per indicare punti molto lontani dall'origine.

Intorno completo di un punto Si chiama intorno completo di un punto (o di un numero) x_0 un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0[2].
In generale, detti δ_1 e δ_2 due generici numeri positivi, un intorno di x_0 sarà un intervallo aperto del tipo $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2)$; indicando l'intorno con $I(x_0)$, formalmente si ha:

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2) = \{x \in \mathbb{R} | x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2, \delta_1, \delta_2 > 0\} \quad (1.4)$$

Quando si parla semplicemente di intorno di un punto x_0 si sottintende l'intorno completo.
La *rappresentazione geometrica* di un intorno completo di x_0 è qualsiasi segmento, privato degli estremi, che contenga come punto interno il punto di ascissa x_0.
L'*ampiezza* dell'intorno è $\delta_1 + \delta_2$.
Nel caso in cui $\delta_1 = \delta_2$ l'intorno $I(x_0)$ è simmetrico rispetto a x_0 e allora si parla di *intorno circolare* di x_0 con raggio $\delta = \delta_1 = \delta_2$. Esso può anche essere definito come:

$$I_c(x_0) = \{x \in \mathbb{R} | \, |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \quad (1.5)$$

Intorno sinistro e destro di un punto Si dice intorno sinistro del punto (numero) x_0 qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo destro:

$$I_s(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) = \{x \in \mathbb{R} | x_0 - \delta < x < x_0, \delta > 0\} \quad (1.6)$$

Analogamente intorno destro del punto (numero) x_0 è qualsiasi intervallo aperto avente x_0 come estremo sinistro:

$$I_d(x_0) = (x_0; x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} | x_0 < x < x_0 d + \delta, \delta > 0\} \quad (1.7)$$

Intorni e infinito Si definisce **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo illimitato del tipo $(-\infty; a)$:

$$I(-\infty) = (-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\} \quad (1.8)$$

Un **intorno di più infinito** è un qualsiasi intervallo illimitato del tipo $(b; \infty)$:

$$I(+\infty) = (b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > b\} \quad (1.9)$$

Un **intorno di infinito** l'unione tra un intorno di meno infinito e uno di più infinito:

$$I(\infty) = I(+\infty) \cup I(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x < a \vee x > b, a < b\} \quad (1.10)$$

Per analogia all'intorno circolare di un punto, l'**intorno circolare di infinito** è un intorno di infinito simmetrico rispetto all'origine dell'asse reale:

$$I_c(\infty) = (-\infty; -k) \cup (k; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x < -k \vee x > k, k > 0\} \quad (1.11)$$

o alternativamente come

$$I_c(\infty) = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| > k, k > 0\} \quad (1.12)$$

Se l'insieme di riferimento è $\mathbb{R}^*$ le definizioni di sopra vengono aggiornate solamente prevedendo una parentesi quadra (di inclusione nell'intervallo) nei casi aventi come estremo $\pm\infty$.

[2] La richiesta che l'intorno sia un intervallo *aperto* è dovuta solo a una convenzione generalmente adottata; ne segue che x_0, appartenendo all'intorno, ne è necessariamente un punto interno

1.4.3.3 Insiemi numerici limitati e illimitati

Vediamo ora, in generale, il concetto di insieme numerico limitato o illimitato.

Un insieme numerico A si dice **superiormente limitato** quando esiste un numero k tale che

$$a \leq k, \quad \forall a \in A$$

in tal caso prende il nome di **maggiorante** dell'insieme A; ovviamente ogni numero $c > k$ è ancora un maggiorante di A. Quando un insieme numerico non è limitato superiormente, si dice che è **illimitato superiormente**.

Un insieme numerico A si dice **inferiormente limitato** quando esiste un numero h tale che

$$a \geq h, \quad \forall a \in A$$

in tal caso h prende il nome di **minorante** dell'insieme A (e costituirà minorante qualsiasi numero minore di h). Quando un insieme numerico non è limitato superiormente, si dice che è **illimitato superiormente**.

Un insieme numerico A limitato sia inferiormente che superiormente si dice **semplicemente limitato**.

1.4.3.4 Massimi, minimi

Un maggiorante di un insieme A che appartiene allo stesso si dice **massimo** dell'insieme numerico e si indica con $\max A$; specularmente un minorante di un insieme appartenente allo stesso si dice **minimo**, e si indica con $\min A$.
Nell'insieme $A = \{1; 2; 3\}$, è ovvio che $\max A = 3$; invece nell'insieme/intervallo $B = (0; 3)$ non vi è massimo. Esso non può esser 3 perché non appartiene all'insieme ma neanche 2.9 (perché c'è tra anche 2.99) e nemmeno 2.99 (perché 2.999), e così via. B non ha neanche il minimo per considerazioni analoghe.
È intuitivo il fatto che però sia 0 che 3 rivestano un ruolo particolare, in quanto seppur costituiscono rispettivamente il minore dei maggioranti (3) e il maggiore dei minoranti (0). Si arriva così alle definizioni di estremo superiore ed inferiore.

1.4.3.5 Estremo superiore, inferiore

L'**estremo superiore** di un insieme numerico A, indicato con $\sup a$ è il minimo dei maggioranti di A; l'**estremo inferiore** di un insieme numerico A, indicato con $\inf a$ è il massimo dei minoranti di A:

$$\begin{aligned} \sup A &= \min \{k \in \mathbb{R} \,|\, \text{k è maggiorante di A}\} \\ \inf A &= \max \{k \in \mathbb{R} \,|\, \text{k è minorante di A}\} \end{aligned}$$

Estremo superiore/inferiore di un insieme esistono sempre, massimo/minimo non necessariamente. Si noti che se l'insieme A è superiormente limitato, il suo estremo superiore può appartenere o meno ad A; se vi appartiene è il massimo di A.
Se l'insieme A non è limitato (superiormente o inferiormente), non ammetterebbe estremo (superiore o inferiore); in questi casi si conviene

$$\sup A = +\infty \tag{1.13}$$

$$\inf A = -\infty \tag{1.14}$$

implicitamente riferendosi all'insieme $\mathbb{R}^*$.

1.4.3.6 Punti di accumulazione

Un numero c, che può appartenere o meno all'insieme A, si dice **punto di accumulazione** per A, se in ogni intorno (completo) di c esiste almeno un elemento di A distinto da c:

$$I(c) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset$$

come conseguenza, se c è di accumulazione per A, in un qualsiasi intorno di c vi sono infiniti elementi di A.
Se un punto non è di accumulazione, si dice **punto isolato**.

Il concetto di punto di accumulazione è importante, poiché l'applicazione dell'operatore limite, per lo studio dell'andamento di una funzione in un punto, può essere affrontato solo se questo è punto di accumulazione [3]

1.4.4 Campi ordinati

In questa sezione approfondiamo quali siano le proprietà degli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$; iniziamo col richiamare le proprietà dei numeri razionali (indicando con a, b, c generici numeri $\in \mathbb{Q}$), per approfondire in seguito le peculiarità di $\mathbb{R}$.

1.4.4.1 R_1: somma

È definita in $\mathbb{Q}$ l'operazione somma, che ha le seguenti proprietà:

1. proprietà commutativa:
$$a + b = b + a \qquad \forall a, b \tag{1.15}$$

2. proprietà associativa
$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall a, b, c \tag{1.16}$$

3. esiste un elemento, l'elemento neutro della somma detto *zero* e indicato con 0 tale che
$$a + 0 = a \qquad \forall a \tag{1.17}$$

4. $\forall a$ esiste l'inverso di a rispetto alla somma, detto *opposto* di a e indicato con $-a$ tale che
$$a + (-a) = 0 \tag{1.18}$$

[3] Il **teorema di Bolzano-Weierstrass** fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza in $\mathbb{R}$ di punti di accumulazione per un insieme (da qui la sua notevole importanza).
Il teorema afferma che se l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato e infinito, ovvero è esprimibile come un intervallo $[a_0, b_0]$, allora in $\mathbb{R}$ esiste almeno un punto di accumulazione per A.
Tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono isolati rispetto ad $\mathbb{N}$ stesso, perché possiamo scegliere un intorno circolare di raggio 0.5[4].
Nell'insieme $\mathbb{Q}$, costituiscono punti di accumulazione tutti i numeri reali. Nell'insieme $\mathbb{R}$ costituiscono punto di accumulazione tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ stesso.

1.4.4.2 R_2: moltiplicazione

È definita in $\mathbb{Q}$ l'operazione di moltiplicazione (o prodotto), che ha le seguenti proprietà:

1. proprietà commutativa:
$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \tag{1.19}$$

2. proprietà associativa
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall a, b, c \tag{1.20}$$

3. esiste un elemento, l'elemento neutro del prodotto detto *unità* e indicato con 1 tale che
$$a \cdot 1 = a \qquad \forall a \tag{1.21}$$

4. $\forall a \neq 0$ esiste l'inverso di a rispetto al prodotto, detto *reciproco* di a e indicato con $\frac{1}{a}$ tale che
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \tag{1.22}$$

Le operazioni di somma e prodotto sono legate dalla proprietà distributiva:
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{1.23}$$

1.4.4.3 R_3: ordinamento

Si può osservare che $\mathbb{Q}$ è anche un *insieme ordinato*, cioè è definita la relazione $\leq$ la quale è una *relazione d'ordine* cioè verifica le seguenti tre proprietà:

- riflessiva
$$a \leq a \qquad \forall a \tag{1.24}$$

- simmetrica
$$a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b \qquad \forall a, b \tag{1.25}$$

- transitiva
$$a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c \qquad \forall a, b, c \tag{1.26}$$

Inoltre si dice che $\mathbb{Q}$ è un insieme **totalmente ordinato** perché presi due qualsiasi numeri razionali a, b è sempre possibile confrontarli per mezzo della relazione $\leq$ nel senso che delle due relazioni $a \leq b$ o $b \leq a$ una è necessariamente vera.
Inoltre la relazione d'ordine totale $\leq$ è compatibile con la struttura algebrica ossia valgono:

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c \qquad \forall a, b, c \tag{1.27}$$
$$a \leq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c \qquad \forall a, b, c,\ c > 0 \tag{1.28}$$

1.4.4.4 Alcune osservazioni

Le proprietà di R_1 ed R_2 sono quasi le stesse; le uniche differenze sono:

- per il prodotto non esiste l'inverso dell'elemento neutro della somma (cioè non esiste $1/0$);
- la proprietà distributiva (in cui somma e prodotto giocano un ruolo asimmetrico)

Dalle prime due proprietà deriva la possibilità di eseguire senza restrizioni le quattro operazioni fondamentali: a parte addizione e moltiplicazione sopra definite, la sottrazione di ha ponendo $a - b = a + (-b)$ mentre la divisione ponendo $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ purché $b = \neq 0$.
Si osserva altresì che tutte le regole ben note del calcolo algebrico derivano dalle proprietà R_1, R_2, R_3.
Complessivamente, in generale viene chiamato:

- **campo ordinato** un insieme in cui sono definite due operazioni (che chiamiamo somma e prodotto) e una relazione d'ordine che soddisfano tutte le proprietà R_1, R_2, R_3
- solamente **campo** un insieme con le proprietà R_1, R_2.

Sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R}$ sono campi ordinati, quindi non si distinguono sulla base delle proprietà esposte. Dobbiamo evidenziare qual e la proprietà che distingue sostanzialmente $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ e che rende il primo l'ambiente giusto per sviluppare l'analisi matematica.

1.4.4.5 Inadeguatezza di $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ assolve alla maggior parte degli scopi pratici del calcolo; tuttavia è noto che ci sono grandezze che non sono commensurabili tra loro. L'esempio classico è dato dalla lunghezza della diagonale e del lato del quadrato.
Ad esempio se ipotizziamo un quadrato di lato unitario, seguendo Pitagora questo dovrebbe esser il numero d che elevato al quadrato restituisce 2. Tuttavia $d \notin \mathbb{Q}$; da questo esempio deriva che se volessimo rappresentare gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$ su una retta, dopo aver "occupato" i punti della retta con i numeri razionali, su di essa rimarrebbero ancora dei "buchi".
In tal senso l'insieme dei numeri razionali è inadeguato ad esempio ad esprimere le lunghezze dei segmenti (ma la lunghezza è solamente la più semplice delle grandezze che si trovano in geometria e fisica e dunque il problema si ripercuote a cascata sui concetti derivati come volumi, tempi, velocità ecc).
Sorge allora la necessità di ampliare l'insieme dei razionali in modo da avere ancora un campo ordinato, i cui elementi (numeri) siano in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea

1.4.4.6 R_4: assioma di continuità ed insieme dei reali

Per avere una corrispondenza biunivoca tra retta ed insieme serve un ultimo requisito, conosciuto come proprietà dell'estremo superiore (R_4), o assioma di Dedekind, o ancora assioma di continuità o di completezza.
Si dice che un insieme numerico X totalmente ordinato possiede la *proprietà*

dell'estremo superiore se ogni suo sottoinsieme $E \subset X$ non vuoto e limitato superiormente possiede estremo superiore in X.
Un esempio che mostra la differenza tra Q e R deriva dal determinare il maggiorante del seguente insieme:

$$\{x \geq 0,\ x^2 < 2\}$$

Il minimo di questo insieme è 0, mentre il massimo non esiste. Il maggiorante di questo insieme sarebbe chiaramente $\sqrt{2}$, ma se che se $x \in \mathbb{Q}$ però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; pertanto $\mathbb{Q}$ non ha la proprietà dell'estremo superiore mentre $\mathbb{R}$ sì.
Chiamiamo $\mathbb{R}$ un insieme che soddisfa le proprietà da R_1 a R_4, ovverosia un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore.

1.4.4.7 $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^*$

Infine se adottiamo convenzionalmente $\mathbb{R}^*$, dato che $\sup \mathbb{R} = +\infty$ e $\inf \mathbb{R} = -\infty$, la proprietà R_4 può essere così enunciata: ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è dotato di estremo superiore e inferiore:

- $\sup E$ ($\inf E$) è un numero se E è limitato superiormente (inferiormente);
- altrimenti è $+\infty$ $(-\infty)$.

Se rappresentiamo i numeri reali sulla retta euclidea, ogni numero corrisponde a un punto e a ogni punto un numero, per l'assioma di continuità. Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ conveniamo indicare due "punti", il primo dei quali sta alla destra di ogni punto di $\mathbb{R}$ mentre l'altro alla sinistra.
A questi due punti però non corrisponde alcun numero: non possiamo definire sui simboli $\pm\infty$ le operazioni di somma e prodotto con le proprietà indicate in R_1 e R_2, anche se come si vedrà (limiti di successioni e di funzioni) queste operazioni si possono fare "parzialmente".

Capitolo 2

Elementi di logica

Lo scopo della Logica, risalente ad Aristotele, è quello di descrivere il ragionamento; la Logica Matematica ha introdotto metodi formali per descrivere la conoscenza e per ragionare rigorosamente con essa.

2.1 Logica delle proposizioni

In matematica si intende per **proposizione** (o enunciato) ogni frase per la quale si possa stabilire con certezza se è vera o falsa. Sono ad esempio proposizioni le frasi “5 è un numero dispari” e “Roma è la capitale della Francia”, mentre non lo sono, per varie ragioni, “Sandro l’anno prossimo sarà promosso”, “Questo documentario è molto interessante”, o “ Che ora è?”.

2.1.1 Introduzione al calcolo

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** ed ha una notevole importanza nella teoria matematica.

Proposizioni atomiche e composte Il calcolo delle proposizioni si rende necessario dal momento in cui le proposizioni possono essere combinate tra loro utilizzando dei **connettivi**, andando così a formare nuove proposizioni. In questo contesto chiamiamo:

- proposizioni *composte* o *formule proposizionali* le proposizioni che non sono ottenute da proposizioni più semplici mediante l’uso dei connettivi; ad esempio “se c’è il sole vado al mare” è una proposizione composta (le cui componenti sono “C’è il sole” e “vado al mare”);

- proposizioni *atomiche* le proposizioni non composte da connettori; “4 è un numero pari” è una proposizione atomica.

Le proposizioni possono essere composte a piacere, applicando ripetutamente i connettivi. Il **problema fondamentale** del calcolo delle preposizioni è quello di stabilire il valore di verità di una proposizione composta, a partire dalla conoscenza dei valori di verità delle sue proposizioni componenti.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabella 2.1: Tavola di verità della congiunzione

Funzione e tavola Ogni formula proposizionale determina una **funzione di verità** in cui le proposizioni atomiche costituiscono le variabili fondanti; possiamo rappresentare una funzione di verità mediante una **tavola di verità**, ovvero una tabella che ci dice quale è il valore di verità assunto dalla formula data, in corrispondenza di tutte le possibili assegnazioni dei valori di verità `V` e `F` alle proposizioni atomiche che la compongono.
Diciamo che due formule proposizionali A e B costituite dalle stesse proposizioni atomiche sono equiveridiche o **logicamente uguali** se assumono lo stesso valore di verità quali che siano i valori di verità attribuiti alle proposizioni atomiche che le compongono. In tal caso si può scrivere $A = B$.
Nel seguito per descrivere i connettivi presenteremo alcune semplici tavole di verità; queste possono esser comunque costruite per formule proposizionali di complessità arbitraria.

2.1.2 Connettivi

Vediamo ora quali sono i connettivi principali mediante i quali combinare proposizioni atomiche per originare proposizioni composte.

Congiunzione Si definisce congiunzione (operatore logico `and`) di due proposizioni p e q, si indica con:

$$p \wedge q \tag{2.1}$$

e si legge "p e q", la proposizione che è (tab 2.1):

- vera se p e q sono contemporaneamente vere;
- falsa in ogni altro caso.

Disgiunzione Si definisce disgiunzione (operatore logico `or`) di due preposizioni p e q, si indica con:

$$p \vee q \tag{2.2}$$

e si legge con "p o q" la proposizione che é (tab 2.2):

- vera se almeno una delle due proposizioni è vera;
- falsa se entrambe le proposizioni sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabella 2.2: Tavola di verità della disgiunzione

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Tabella 2.3: Tavola di verità della negazione

Negazione Si definisce negazione di una preposizione p (operatore logico `not`)

$$\overline{p} \tag{2.3}$$

e si legge con "non p" la proposizione che è (tab 2.3):

- vera se p è falsa;
- falsa se p è vera.

Altri testi per indicare la negazione di p usano i simboli $\neg p$ o $\sim p$.

Implicazione materiale Si definisce implicazione materiale (equivalente al "se ... allora") di due preposizioni p e q, si indica con

$$p \to q \tag{2.4}$$

e si legge "se p allora q" o "p implica q"), la proposizione che è (tab 2.4):

- falsa nel caso p sia vera e q sia falsa;
- è vera negli altri casi.

La proposizione:

- p si dice *antecedente*;
- q si dice *conseguente*.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabella 2.4: Tavola di verità dell'implicazione materiale

a	b	$a \to b$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b} \to \overline{a}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Tabella 2.5: Implicazione diretta e contronominale

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabella 2.6: Tavola di verità della coimplicazione materiale

Con questa tipologia si intende solitamente affermare un *nesso di causalità*, valido se, ogniqualvolta si verifica la causa p, ne segue l'effetto q. Ma se p non è vera, nulla si potrà dire su q; infatti potrebbe non verificarsi o verificarsi perché prodotta da un'altra causa (per questo la terza e quarta riga della tavola di verità non si può dire che sia falsa, indipendentemente dal valore assunto da q). L'unica caso in cui il nesso di causalità $p \to q$ non si verifica si ha quando al verificarsi della causa non segue l'effetto.
Infine data una implicazione $p \to q$, che possiamo chiamare **implicazione diretta** definiamo alcune formule a questa connesse:

- $\overline{p} \to \overline{q}$ si dice **contraria** di $p \to q$;
- $q \to p$ si dice **inversa** di $p \to q$;
- $\overline{q} \to \overline{p}$ si dice **contronominale** di $p \to q$.

Come si può dimostrare costruendo le tavole di verità, dalla verità dell'implicazione diretta:

- discende la verità della contronominale e viceversa (cfr. tabella 2.5 ove la colonna $a \to b$ presenta gli stessi valori di $\overline{b} \to \overline{a}$);
- non si può affermare la verità delle implicazioni contraria e inversa (non mostrato).

Coimplicazione materiale Si definisce coimplicazione materiale di due proposizioni p e q, si scrive

$$p \leftrightarrow q \tag{2.5}$$

e si legge "p se e solo se q", la proposizione che è (tab 2.6):

- vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità;
- falsa in caso contrario.

2.1.3 Proprietà delle operazioni logiche

Le operazioni logiche godono di numerose proprietà (verificabili mediante tavole di verità) che presentano analogie con le proprietà delle operazioni insiemistiche.

Idempotenza Idempotenza della congiunzione e della disgiunzione:

$$p \wedge p = p \qquad p \vee p = p \tag{2.6}$$

Commutativa Proprietà commutativa della congiunzione e della disgiunzione:

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \tag{2.7}$$

Complementarietà Legge della doppia negazione:

$$\overline{\overline{p}} = p \tag{2.8}$$

Ovvero la negazione della negazione di una proposizione è la proposizione stessa.

Associativa Proprietà associativa della congiunzione e della disgiunzione:

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q \wedge r \tag{2.9}$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r \tag{2.10}$$

Distributiva Proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{2.11}$$

Proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{2.12}$$

De Morgan Leggi di De Morgan:

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \tag{2.13}$$

Assorbimento Leggi di assorbimento:

$$p \vee (p \wedge q) = p \qquad p \wedge (p \vee q) = p \tag{2.14}$$

2.1.4 Tautologie

Se una formula enunciativa A:

- risulta vera qualunque sia il valore di verità delle proposizioni atomiche che la compongono, si dice che è una **tautologia** e la si indica come:

  $$\vDash A \tag{2.15}$$

  Una tautologia rappresenta uno schema di ragionamento che è valido indipendentemente dal valore di verità e dal significato delle preposizioni che la compongono. Per questo motivo le tautologie sono anche dette *leggi della logica*;

a	$\overline{a}$	$a \vee \overline{a}$
V	F	V
F	V	V

Tabella 2.7: Principio del terzo escluso

- risulta falsa qualsiasi sia il valore di verità delle sue componenti, si dice che è una **contraddizione**.

Presentiamo nel seguito le tautologie che rappresentano le forme di ragionamento deduttivo più frequenti in matematica.

Principio del terzo escluso Il principio afferma che una proposizione è necessariamente o vera o falsa, ovvero non esiste una terza possibilità

$$\models a \vee \overline{a} \tag{2.16}$$

Infatti a titolo esemplificativo si veda tab 2.7. A parole, ad esempio, è sempre vero che cammino o non cammino.

Proprietà transitiva dell'implicazione

$$\models [(a \to b) \wedge (b \to c)] \to (a \to c) \tag{2.17}$$

Questa si presta ad esprimere schematicamente un tipo di ragionamento deduttivo, detto **sillogismo ipotetico** dove:

- vi sono due premesse $(a \to b)$ e $(b \to c)$
- una conseguenza $(a \to c)$

tutte in forma ipotetica "se ... allora ...". Ad esempio se studierò sarò promosso e se sarò promosso riceverò un premio: quindi se studierò riceverò un premio.

Legge di contrapposizione

$$\models (a \to b) \to \left(\overline{b} \to \overline{c}\right) \tag{2.18}$$

Ad esempio dall'esser vero che se un numero naturale è divisibile per 4 allora è multiplo di 2 segue che se un numero naturale non è multiplo di 2, allora non è divisibile per 4.

Modus ponens

$$\models [(a \to b) \wedge a] \to b \tag{2.19}$$

Ad esempio: se studio apprendo, e studio, dunque apprendo.

Modus tollens

$$\models \left[(a \to b) \wedge \overline{b}\right] \to \overline{a} \tag{2.20}$$

Se ho sete bevo, ma non bevo, quindi non ho sete

$(a \to b) \wedge a$	b	$[(a \to b) \wedge a] \to b$
V	V	V
V	F	F

Tabella 2.8: Casi possibili nel modus ponens

Riduzione all'assurdo Se indichiamo con f un enunciato falso (ad esempio una contraddizione o la negazione di un enunciato di cui è nota la verità):

$$\vDash [(\overline{a} \to f)] \to a \tag{2.21}$$

Ciò significa che, se dalla negazione di una proposizione a si deduce una proposizione falsa, non potendosi negare a la proposizione a deve essere vera.

2.1.5 Regole di deduzione

I ragionamenti più usati nella matematica sono basati sul seguente schema:

- si presentano alcune affermazioni, dette **premesse**, la cui verità è già stata accettata;
- si deduce da queste la verità di una nuova affermazione, detta **conclusione**.

Alcune delle tautologie viste consentono di chiarire/giustificare questo modo di procedere, permettendo di formulare regole di deduzione/inferenza mediante le quali dalle verità di alcune proposizioni (premesse) si può dedurre la verità di una nuova proposizione (conclusione).
Ne vediamo alcune, che prendono nome dalle tautologie su cui sono fondate.

Modus ponens Consideriamo la tautologia

$$\vDash [(a \to b) \wedge a] \to b \tag{2.22}$$

e supponiamo siano vere $a \to b$ e a, e quindi anche la loro congiunzione. Possono presentarsi due casi a seconda che b sia vera o falsa; la tavola di verità è dato in tabella 2.8. Ma dato che stiamo lavorando con una tautologia, questa deve essere vera e quindi non può verificarsi che b sia falsa; perciò b deve essere vera. In altre parole, se sono vere le proposizioni $a \to b$ e a, deve essere vera anche la proposizione b.

Modus tollens Dal modus tollens

$$\vDash \left[(a \to b) \wedge \overline{b}\right] \to \overline{a} \tag{2.23}$$

con ragionamenti analoghi a quelli fatti per il modus ponens si può ricavare la seguente regola di deduzione, detta appunto Modus Tollens: se è vera la proposizione $a \to b$ ed è vera la negazione di b (ovvero b è false), deve essere vera anche la negazione di a (ossia a è falsa).

Riduzione all'assurdo Dalla riduzione all'assurdo, con f un enunciato falso:

$$\vDash [(\overline{a} \rightarrow f)] \rightarrow a \tag{2.24}$$

otteniamo la regola di deduzione omonima: se la negazione di una proposizione a implica una proposizione false, a deve essere vera.
Questo è un tipo di ragionamento molto usato in matematica. Le dimostrazioni per assurdo si possono ricondurre a questo schema: per dimostrare un enunciato a, si prova a negarlo; se da tale negazione si traggono conclusioni assurde (ossia è vero che $\overline{a} \rightarrow f$), a deve esser vero.

2.2 Logica dei predicati

2.2.1 Predicati

Consideriamo una espressione linguistica del tipo

$$x \text{ è un numero primo}, \quad x \in \mathbb{N}$$

È evidente come questa *non sia una proposizione*, poiché non si può dire se vera o falsa definitivamente; la verità o meno dipende dal valore assunto da x. Formalmente scriviamo:

$$p(x): \quad x \text{ è un numero primo}, \quad x \in \mathbb{N} \tag{2.25}$$

per indicare una proposizione il cui valore di verità dipende dal valore assunto dalla variabile x. In questo caso $\mathbb{N}$ assume il ruolo di *dominio* D, ovvero esprime l'insieme nel quale può variare la x; o predicati sono pertanto funzioni che associano agli elementi di un insieme D un valore di verità o falsità.
Dato un predicato $a(x)$ dipendente da una variabile $x \in D$, chiamiamo **insieme di verità** di $a(x)$ l'insieme $A \subseteq D$ costituito dagli elementi di D per cui $a(x)$ è vero.

Infine, i predicati possono dipendere anche da più di una variabile, come nel seguente caso:

$$p(x;y): \quad x > y, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

2.2.2 Operazioni sui predicati

Poiché fissando il valore della variabile il predicato diventa una proposizione, si possono definire per i predicati operazioni logiche analoghe a quelle viste per le proposizioni stesse.
Ad esempio, considerando due predicati $p(x)$ e $q(x)$ con x una variabile appartenente ad un dato dominio, chiamiamo predicato congiunzione il predicato:

$$p(x) \wedge q(x)$$

2.2.3 Predicati e insiemi

Considerando due predicati $a(x)$ e $b(x)$ definiti su uno stesso dominio $x \in \mathbb{N}$, le operazioni logiche sui predicati corrispondono ad operazioni insiemistiche sui rispettivi insiemi di verità e nello specifico:

- la *congiunzione* $\wedge$ di due predicati porta ad un predicato il cui insieme di verità è l'intersezione degli insiemi di verità dei predicati di partenza;
- la *disgiunzione* $\vee$ di due predicati porta ad un predicato il cui insieme di verità è l'unione degli insiemi di verità dei predicati di partenza;
- la *negazione* di un predicato corrisponde alla *complementazione* del suo insieme di verità rispetto al dominio.

2.2.4 Implicazione ed equivalenza logica

Implicazione logica In generale considerati due predicati $p(x)$ e $q(x)$ con x appartenente ad un opportuno dominio, se ogni valore di x che rende vero $p(x)$ rende vero anche $q(x)$ si dice equivalentemente che:

- $p(x)$ implica logicamente $q(x)$ o che $p(x)$ è una **condizione sufficiente** per il verificarsi di $q(x)$;
- $q(x)$ è conseguenza logica di $p(x)$, o che $q(x)$ è una **condizione necessaria** per il verificarsi di $p(x)$.

e si scrive:

$$p(x) \implies q(x) \tag{2.26}$$

nel quale $p(x)$ si dice l'antecedente, $q(x)$ la conseguente. Nel caso $p(x)$ non implichi logicamente $q(x)$ si scrive invece:

$$p(x) \not\Longrightarrow q(x) \tag{2.27}$$

A livello di insiemi di verità, in un contesto di implicazione logica del tipo $p(x) \implies q(x)$ dove P è l'insieme di verità del primo predicato e Q quello del secondo vale:

$$P \subseteq Q$$

Un esempio di implicazione logica è il seguente:

se un numero è divisibile per 4 allora è divisibile per 2

rappresentato dai predicati:

$$\begin{aligned} &p(x) : x \text{ è divisibile per } 4 \quad x \in \mathbb{N} \\ &q(x) : x \text{ è divisibile per } 2 \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Equivalenza logica Se in una implicazione logica $p(x) \implies q(x)$ si scambia il predicato antecedente con il conseguente, non è detto che si ottenga ancora una implicazione logica. Se però questo accade, ovvero $q(x) \implies p(x)$, ovvero i due predicati si implicano logicamente a vicenda si scrive

$$p(x) \iff q(x) \tag{2.28}$$

dove il simbolo $\iff$ indica l'equivalenza logica e si dice alternativamente che:

- $p(x)$ è logicamente equivalente a $q(x)$;
- $p(x)$ è vera solo se $q(x)$ è vera.

In questo caso, con P è l'insieme di verità di $p(x)$ e Q quello di $q(x)$ vale:

$$P = Q$$

Nel caso $p(x) \iff q(x)$ si dice che $p(x)$ è **condizione necessaria e sufficiente** per $q(x)$ poiché:

- $p(x)$ è condizione sufficiente per $q(x)$ (essendo $p(x) \implies q(x)$)
- $p(x)$ è condizione necessaria per (x) (essendo $q(x) \implies p(x)$)

Analogamente $q(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per $p(x)$.

Puntualizzazioni Non bisogna confondere i simboli $\to, \leftrightarrow$ con $\implies$, $\iff$:

- $\to, \leftrightarrow$ indicano l'implicazione/coimplicazione *materiale* e costituiscono connettivi logici utilizzati per costruire una proposizione composta a partire da proposizioni atomiche;
- $\implies$, $\iff$ sono simboli di relazione tra predicati: non indicano nuovi predicati ma affermano che tra i predicati valgono certe relazioni.

Vi sono tuttavia rapporti fra tali simboli:

- vale $a(x) \implies b(x)$ quando il predicato condizionale $a(x) \to b(x)$ è vero per qualunque x;
- risulta $a(x) \iff b(x)$ quando il predicato $a(x) \leftrightarrow b(x)$ è vero per qualunque x.

2.2.5 Quantificatori

Può essere necessario dover esprimere che tutti o qualche (almeno uno) elemento di un certo insieme (sottinteso) godono di una determinata proprietà.
Per poter simboleggiare tali affermazioni si introducono i simboli:

- $\forall$ si dice **quantificatore universale** e si legge *per ogni*; quindi

  $$\forall x : \ p(x) \tag{2.29}$$

  si legge: per ogni x, vale $p(x)$;
- $\exists$ si dice **quantificatore esistenziale** e si legge *esiste almeno un*; quindi

  $$\exists x : \ p(x) \tag{2.30}$$

  si legge: esiste almeno un x per il quale vale $p(x)$.

In generale se a un predicato con una variabile applichiamo un quantificatore, esso diviene una proposizione;

- $\forall x : p(x), \ x \in D$ è vero se la proprietà $p(x)$ vale per tutti gli elementi del dominio, altrimenti è falso;
- $\exists x : p(x), \ x \in D$ è vero se la proprietà $p(x)$ vale per almeno un elemento del dominio, altrimenti è falso.

Capitolo 3

Strutture algebriche

3.1 Operazioni

3.1.1 Definizioni e notazione

Intuitivamente, mediante una operazione si combinano tra loro una coppia ordinata di elementi elementi di un dato insieme $a, b \in A$ (quale che sia l'insieme) per ottenere un terzo elemento c, il risultato dell'operazione:

- se $c \in A$ si dice che l'operazione è **interna** all'insieme A. Si dice anche che l'insieme è chiuso rispetto all'operazione. Nel prosieguo è soprattutto su queste che poniamo l'attenzione e non ci si occupa delle operazioni **esterne**;
- se l'operazione è definita (ovvero calcolabile) per tutte le coppie ordinate possibili, derivanti al prodotto cartesiano $A \times A$, l'operazione si dice **ovunque definita**.

Dato che si possono definire operazioni diverse sul medesimo insieme per trattarle in questa sezione teorica le identificheremo con simboli differenti come ad esempio

$$\circ \quad \oplus \quad \otimes \quad \top \quad \perp$$

Se in un insieme A è definita una operazione, indicata con il simbolo $\circ$ e $a, b \in A$, allora la scrittura

$$a \circ b \tag{3.1}$$

che si legge "a operato b" sta a indicare il risultato dell'operazione ossia quell'elemento $c \in A$ associato alla coppia ordinata $(a; b)$.
Qualora non vi sia pericolo di confusione con l'ordinaria moltiplicazione, $a \circ b$ si può anche chiamare prodotto dei fattori a e b.
Nella scrittura $a \circ b$ a si chiama primo operando o operando sinistro (b secondo operando o operatore destro).

Rappresentazione Quando l'insieme in cui è definita una operazione ha un numero finito di elementi è possibile scrivere per ogni coppia (a, b) per i quali l'operazione sia definita il risultato della loro composizione in una tabella a due entrate ponendo l'operatore nell'angolo in angolo a sinistra. Un esempio si trova in tabella 3.1.

-	0	1	2	3
0	0			
1	1	0		
2	2	1	0	
3	3	2	1	0

Tabella 3.1: Operazione di sottrazione definita nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$

3.1.2 Proprietà

Una operazione definita in un insieme può essere:

- associativa
- commutativa
- dotata di elemento neutro
- dotata di elementi simmetrici o inversi

Proprietà associativa Si dice che una operazione definita su un insieme A gode della proprietà associativa se, comunque si scelgano $a, b, c \in A$ si ha che

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \tag{3.2}$$

Se una operazione è associativa possiamo scrivere

$$a \circ b \circ c$$

e generalizzando a più operatori

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n$$

senza pericolo di ambiguità perché qualunque sia l'ordine in cui eseguiamo le operazioni indicate, il risultato è sempre lo stesso.

Proprietà commutativa Si dice che una operazione definita su un insieme A gode della proprietà commutativa se, comunque si scelgano $a, b \in A$ si ha che

$$a \circ b = b \circ a \tag{3.3}$$

ovvero quando il risultato non dipende dall'ordine in cui si prendono gli operandi[1]

Si noti che in una operazione che gode sia della proprietà associativa che della commutativa, qualora si abbiano molteplici elementi da combinare

$$a_1 \circ a_2 \circ \ldots a_n$$

si possono cambiare l'ordine degli elementi a piacere

[1] Considerando la tabella associata ad una operazione elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali in presenza di un operazione che gode della commutativa

Elemento neutro Sia A un insieme su cui è definita una operazione; un elemento $u \in A$[2] si dice neutro rispetto all'operazione se lascia invariato ogni elemento di $a \in A$ con cui viene composto

$$u \circ a = a \circ u = a \tag{3.4}$$

L'elemento neutro, se esiste, è unico; infatti se per assurdo vi fossero due elementi neutri distinti u e u' si avrebbe

$$u \circ u' = u'$$
$$u \circ u' = u$$

perché entrambi sono elementi neutri; tuttavia confrontando queste due eguaglianze si ottiene $u = u'$ contro l'ipotesi che u e u' fossero distinti.

Elemento simmetrico Considerando una operazione $\circ$ definita su un insieme A e dotata di elemento neutro u; diciamo che l'elemento $a' \in A$ è simmetrico di $a \in A$ se risulta

$$a \circ a' = a' \circ a = u \tag{3.5}$$

Alcune proprietà:

- il simmetrico di un elemento a, se esiste, è unico;
- il simmetrico del simmetrico di a, è a stesso;
- il simmetrico dell'elemento neutro u è u stesso

Nel caso di addizione tra numeri il simmetrico di a si chiama opposto di a e si indica con $-a$; nel caso della moltiplicazione è detto inverso o reciproco e si denota con a^{-1}.

3.2 Strutture algebriche con una operazione

Una struttura algebrica è un insieme in cui siano definite una o più operazioni.

Una struttura algebrica con una operazione è identificata da un insieme (ad esempio A) e da una operazione definita su esso (ad esempio $\circ$) e si indica (ad esempio) con

$$(A, \circ) \tag{3.6}$$

Tra le strutture algebriche ad una operazione consideriamo solo la struttura di gruppo, di gran lunga la più importante

3.2.1 Gruppo

Una struttura $(G, *)$ si dice gruppo se:

- l'operazione $*$ è ovunque definita in G;
- l'operazione $*$ è associativa;

[2]Salvo diverso avviso l'elemento neutro rispetto ad una data operazione sarà indicato con la lettera u.

- l'operazione $*$ è dotata di elemento neutro;
- ogni elemento di G possiede un simmetrico

G si dice **dominio** del gruppo; se l'insieme G ha n elementi si dice che n è l'ordine del gruppo.
Infine, se l'operazione $*$ è anche commutativa, parleremo di **gruppo commutativo** o **gruppo abeliano**. Alcuni esempi:

- ad esempio $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano; infatti in $\mathbb{Z}$ l'addizione è ovunque definita, è associativa, ammette l'elemento neutro (lo zero), e ogni elemento di $\mathbb{Z}$ ha un simmetrico (il suo opposto); inoltre l'addizione è commutativa. Anche $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono gruppi abeliani;
- $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo: infatti nessun elemento tranne lo zero possiede un simmetrico.

3.3 Strutture algebriche con due operazioni

Lo studio delle strutture algebriche con due operazioni permette di mettere in luce le relazioni intercorrenti fra le due operazioni e fra le loro proprietà.
Nel seguito con una scrittura del tipo:

$$(A, \perp, \top) \tag{3.7}$$

identificherà una struttura con due operazioni $\perp, \top$ definite su un dominio A.

3.3.1 Proprietà

Distributiva La proprietà distributiva non riguarda una singola operazione, ma è una proprietà che una operazione può avere rispetto ad un'altra.
Sia A un insieme e $\#, \oplus$ due operazioni definite su A; si dice che:

- $\#$ è **distributiva a destra** rispetto a $\oplus$ se comunque si scelgano $a, b, c \in A$ risulta:
$$a\#(b \oplus c) = (a\#b) \oplus (a\#c) \tag{3.8}$$
- $\#$ è **distributiva a sinistra** rispetto a $\oplus$ se comunque si scelgano $a, b, c \in A$ risulta:
$$(b \oplus c)\#a = (b\#a) \oplus (c\#a) \tag{3.9}$$
- è **distributiva** se distributiva sia a destra che a sinistra

Ovviamente, se l'operazione $\#$ è commutativa, le prime due eguaglianza coincidono e quindi non ha senso distinguere tra distributività destra e sinistra.

Ad esempio negli insiemi numerici principali la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

mentre l'addizione non è distributiva rispetto alla moltiplicazione (lo si può verificare con un controesempio)

$$x + (y \cdot z) \neq (x + y) \cdot (x + z)$$

3.3.2 Anelli

Una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ si dice **anello** se:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
- la seconda operazione $\cdot$ è associativa cioè $\forall a, b, c \in A$:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- la seconda operazione è distributiva rispetto alla prima, ovvero $\forall a, b, c \in A$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Un anello in la seconda operazione è anche commutativa che si chiama **anello commutativo**.

3.4 TODO

`- Dodero L2 da pag 476 in basso (mettere anche cambio di notazione)`

Capitolo 4

Aritmetica e Calcolo Letterale

4.1 Aritmetica (Dodero 1 - Capp 3-5)

4.1.1 Somma

L'operazione mediante la quale, dati due o piu numeri se ne trova la somma è l'**addizione**.
Operando con l'addizione nell'insieme dei numeri naturali si ottiene come risultato un numero naturale; pertanto si dice che l'addizione è *legge di composizione* interna per l'insieme di $\mathbb{N}$.
Proprietà:

Commutativa la somma di più numeri non cambia, mutando l'ordine degli addendi

Associativa la somma di più numeri non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma

Dissociativa la somma di due o più addendi non cambia se a uno di essi si sostituiscono più numeri la cui somma sia uguale all'addendo sostituito

L'*elemento neutro della somma* è il valore 0, nel senso che sommandolo a qualsiasi numero si ottiene il numero stesso

4.1.2 Moltiplicazione

L'operazione mediante la quale dati due o piu numeri se ne trova il prodotto è la moltiplicazione; essa è una legge di composizione intera per l'insieme $\mathbb{N}$.
Proprietà:

Commutativa Il prodotto di due o più fattori non cambia, mutando il loro ordine

Associativa Il prodotto di più fattori non cambia sostituendo a due o più di essi il loro prodotto

Dissociativa Il prodotto di due o più fattori non cambia se a uno di essi si sostituiscono più fattori il cui prodotto sia uguale al fattore sostituito

Distributiva Per moltiplicare una somma algebrica (addizioni e sottrazioni) indicata per un numero, si può moltiplicare ogni termine della somma per quel numero e poi addizionare i prodotto parziali ottenuti

Legge di annullamento del prodotto: se in un prodotto un fattore è zero, anche il prodotto è zero; viceversa, se un prodotto è zero, almeno uno dei suoi fattori è zero.
L'elemento neutro del prodotto è 1; moltiplicando qualsiasi numero per 1 si ottiene il numero stesso

4.1.3 Sottrazione

La sottrazione è l'operazione che permette di calcolare la differenza tra due numeri di cui il primo è detto *minuendo* e il secondo *sottraendo.*

$$Minuendo - Sottraendo = Differenza$$

La sottrazione non è legge di composizione interna ovunque definita per l'insieme $\mathbb{N}$; essa è possibile solo se il minuendo è maggiore del o uguale al sottraendo.
Gode delle seguenti proprietà:

Invariantiva La differenza di due numeri non cambia, aggiungendo o togliendo uno stesso numero sia al minuendo che al sottraendo

4.1.4 Divisione

Si dice quoziente esatto, o quoto, tra due numeri interi a e $b(b \neq 0)$, quel terzo numero che moltiplicato per il secondo da per prodotto il primo

$$a : b = c \iff c \cdot b = a$$

a è il dividendo, b il divisore, c il quoziente. Discende dalla definizione che $a : 1 = a$ e $a : a = 1$ se $a \neq 0$.
Abbiamo nella definizione richiesto che $b \neq 0$ perchè, se così fosse, dalla definizione $a : 0$ è una *operazione impossibile*, con $a \neq 0$ (nessun numero moltiplicato per 0 da a).
Se $a = 0.b \neq 0$, abbiamo $0 : b = 0$, perchè solo moltiplicando il secondo numero b per 0, si ottiene 0.
Se infine $a, b = 0$ allora si avrebbe una operazione del tipo $0 : 0$ che è *indeterminata*, poichè qualsiasi risultato la soddisfa.
Può esser che la divisione generi un resto r perchè dividendo e divisore non sono multipli, in tal caso il risultato c si dice quoziente ("non esatto") e si ha:

$$a = b \cdot c + r$$

La divisione gode delle seguente proprietà:

Invariantiva Moltiplicando (o dividendo) i due termini della divisione per uno stesso numero diverso da zero, il quoziente non muta, mentre il resto, se c'è, viene moltiplicato (o diviso) per lo stesso numero

Distributiva Per dividere una somma (o una differenza) per un numero divisore di ciascun termine della somma (o differenza), si può dividere ciascun addendo (o termine della differenza) per quel numero e poi addizionare (o sottrarre) i quoti parziali

4.1.4.1 Divisibilità

Ogni numero a che contiene un numero esatto di volte un dato numero b si dice *multiplo* del numero dato; si dice altresì che è *divisibile* per tale numero.

I criteri di divisibilità; un numero è divisibile per ...

- 2 se termina per 0 o cifra pari
- 5 se termina per 0 o 5
- 3 oppure per 9, se lo è la somma delle sue cifre
- 4 oppure 25, se lo è il numero formato dalle ultime due cifre (o se queste sono due 0)
- 8 o 125, , se lo è il numero formato dalle ultime tre cifre (o se queste sono tre 0)

Un numero si dice **primo** se ha per divisori solo se stesso e l'unità; due o più numeri si dicono **primi fra loro** se hanno per divisore comune solo l'unità.
Ogni numero non primo può esser *scomposto in fattori primi*, cioè può esser espresso come prodotto di fattori primi

MCD e mcm:

MCD Il massimo comun divisore di due o più numeri è il maggiore tra i divisori di tutti i numeri dati; per determinare il MCD di due o più numeri, questi si scompongono in fattori primi e si calcola il prodotto dei fattori primi *comuni*, ciascuno di essi preso una sola volta con il *minimo esponente* con cui figura. Ad esempio $MCD(24; 144; 60) = 12$ perchè $24 = 2^3 \cdot 3$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$ e $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, da cui discende che $MCD(24; 144; 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

mcm Il minimo comune multiplo di due o più numeri è il minore tra i multipli di tutti i numeri dati; per determinarlo si scompone in fattori primi e poi si calcola il prodotto di tutti i fattori primi *comuni e non*, presi una sola volta col *maggiore esponente*. Ad esempio $MCD(24; 144; 60) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

4.1.4.2 Frazioni

La scrittura

$$\frac{a}{b} \qquad \text{con } a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}_0$$

è un numero frazionario che indica il quoziente tra il numeratore a e il denominatore b; come avviene per la divisione:

- $\frac{a}{0}$ con $a \in \mathbb{N}_0$ è una operazione *impossibile*
- $\frac{0}{b} = 0$ se $b \in \mathbb{N}_0$
- $\frac{0}{0}$ è una operazione *indeterminata*

Proprietà fondamentale delle frazioni è **l'invariantiva**: moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero *diverso da 0*, si ottiene una frazione equivalente a quella data.

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** quando i suoi termini sono primi fra loro.

Per confrontare due (o più) frazioni, per sommarle e per sottrarle occorre che siano frazioni con lo *stesso denominatore*; per ridurre più frazioni al **minimo comune denominatore** si procede come segue:

1. si riducono le frazioni ai minimi termini
2. si cerca il mcm dei denominatori
3. si calcola il quozione fra questo mcm e ciascun denominatore delle frazioni
4. si moltiplicano i numeratori per i quozienti rispettivamente trovati

4.1.5 Potenze

La potenza di un numero consiste nel prodotto di più fattori tutti uguali a quel numero; il fattore che si ripete si dice *base* e il numero che indica quanti sono i fattori si dice *esponente.*

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ volte}}$$

a è la base, b l'esponente.
Per convenzione:

- la potenza con esponente zero di un qualsiasi numero $a \neq 0$, da come risultato 1: $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- 0^0 non ha significato

Le potenze godono delle seguenti proprietà:

- Il *prodotto di potenze di ugual base* è una potenza che ha la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:

$$a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ volte}} = \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b+c \text{ volte}} = a^{b+c}$$

- La *potenza di una potenza* è uguale ad una potenza che ha la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti

$$(a^b)^c = \underbrace{a^b \cdot \ldots \cdot a^b}_{c \text{ volte}} = a^{bc}$$

- Il *quoziente di due potenze* della stessa base, è uguale a una potenza che ha la stessa base delle date e per esponente la differenza degli esponenti

$$a^b : a^c = (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ volte}}) : (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ volte}}) = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b-c \text{ volte}} = a^{b-c}$$

Per elevare a potenza:

- un prodotto, si può calcolare prima il prodotto e poi elevare, oppure si può calcolare il prodotto delle potenze dei singoli fattori. In altre parole, *la potenza di un prodotto* è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori:

$$(abc)^m = \underbrace{(abc) \cdot (abc) \cdot \ldots \cdot (abc)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(aa \ldots a)}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{(bb \ldots b)}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{(cc \ldots c)}_{m \text{ volte}} = a^m \cdot b^m \cdot c^m$$

- un quoziente, si può prima calcolare il quoziente e poi elevarlo, oppure calcolare il quoziente delle potenze del dividendo e del divisore. In altre parole la *potenza di un quoziente* è uguale al quoziente delle potenze di uguale esponente del dividendo e del divisore

$$(a:b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{m \text{ volte}} = \left(\frac{a^m}{b^m}\right)$$

Potenze con esponente negativo In generale si ha

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$

Che deriva dal fatto che, ad esempio:

$$3^4 : 3^6 = \frac{3^4}{3^6} \tag{4.1}$$

$$3^{4-6=-2} = \frac{1}{3^2} \tag{4.2}$$

$$\tag{4.3}$$

In generale *l'inverso di una potenza si ottiene cambiando il segno al suo esponente*: in particolare,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{(a/b)^n} = \frac{1}{a^n/b^n} = \left(\frac{b^n}{a^n}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

si vede che la potenza ad esponente negativo di una frazione è uguale alla potenza ad esponente positivo (ma di ugual valore assoluto) dell'inverso della frazione base

Le potenze ad esponente negativo godono di tutte le proprietà delle potenze ad intero positivo.

Se $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}_0$ si verificano facilmente le seguenti coimplicazioni:

$$a = b \Longleftrightarrow a^n = b^n$$
$$a > b \Longleftrightarrow a^n > b^n$$
$$a < b \Longleftrightarrow a^n < b^n$$

la prima inoltre è valida anche se $a, b < 0$ come si verifica facilmente

4.1.5.1 Applicazioni delle potenze

Le potenze sono comode per scrivere con pochi simboli numeri molto grandi o molto piccoli. Sappiamo che ad esempio:

$$\begin{aligned}10^{-3} &= 0.001\\ 10^{-2} &= 0.01\\ 10^{-1} &= 0.1\\ 10^{0} &= 1\\ 10^{1} &= 10\\ 10^{2} &= 100\\ 10^{3} &= 1000\end{aligned}$$

In genere il valore assoluto dell'esponente rivela la quantità di 0 nel risultato finale. Il suo segno determinerà se si tratti di un valore sopra o sotto l'unità.

Quando un numero è scritto usando le potenze del 10 si dice che è espresso in **notazione esponenziale**; o meglio un numero scritto in forma esponenziale si presenta come il prodotto di un numero decimale finito, detto *parte significativa*, per una potenza di 10. I seguenti ne sono esempi:

$$2 \cdot 10^5, 9.25 \cdot 10^{-5}, 0.24 \cdot 10^4, 12.7 \cdot 10^{-3}$$

La **notazione scientifica** è un tipo di notazione esponenziale dove il numero di interesse è espresso come il prodotto tra una parte significativa compreso nell'intervallo $[1, 10)$ e una potenza di 10. Ad esempio nella precedente serie di esempi , solo i primi due casi sono scritti in notazione scientifica,mentre i secondi due solo in notazione esponenziale.
Ad esempio per scrivere 569000 in notazione esponenziale

- notiamo che $569000 = 569000.00$
- spostiamo la virgola a sinistra di 5 posizioni ottenendo 5.69, che corrisponde alla nostra parte significativa
- la parte significativa va moltiplicata per la potenza 10^5, dove l'esponente è dettato dal numero di passaggi verso sinistra effettuati

Quindi il risultato è $5.69 \cdot 10^5$.
Per rappresentare 0.0034 in notazione scientifica

- spostiamo a destra il punto di 3 posizioni, fino ad arrivare a 3.4, la parte significativa
- moltiplichiamo per la potenza $10-3$

ottenendo $3.4 \cdot 10^{-3}$ Per trasformare una notazione scientifica in esponenziale, bisogna spostare la virgola nella parte significativa e modificare l'esponente della potenza di 10.

In molte questioni in cui si opera con numeri assai grandi (o piccoli), non interessa conoscere il numero con precisione assoluta, ma è sufficiente valutarne l'**ordine di grandezza**, ovvero la potenza di 10 che meno differisce da quel numero. Ad esempio l'altezza dell'everest (8848 metri) è dell'ordine di 10^4 metri (ovviamente diviene fondamentale specificare oltre all'ordine di grandezza

l'unità di misura dell'ordine di grandezza, ovverosia in questo caso i metri).
Nella pratica, invece di applicare la definizione, per determinare l'ordine di grandezza di un dato numero:

- lo scriviamo innanzitutto in notazione scientifica, se non lo è già, avendo

$$a \cdot 10^n \text{ con } a \in \mathbb{N}, 1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$$

- se $a < 5$ l'ordine di grandezza è 10^n; invece se $a \geq 5$, l'ordine di grandezza è 10^{n+1}

4.1.6 Espressioni aritmetiche

Si dice espressione aritmetica un insieme di numeri legati fra loro da segni di operazioni. L'**ordine di precedenza** delle operazioni da applicare in sequenza è il seguente:

1. prima le potenze
2. moltiplicazione e divisione
3. addizione e sottrazioni

Le operazioni che hanno lo **stesso grado di priorità**, come moltiplicazioni e divisioni, oppure addizioni e sottrazioni, si devono eseguire *nell'ordine in cui sono indicate*

4.2 Calcolo letterale (Dodero 1 - Capp 9)

Spesso in matematica si fa uso delle lettere dell'alfabeto al posto di numero per scrivere formule, per esprimere proprietà di carattere generale o per generalizzare un dato problema.
Il calcolo letterale è quella parte della matematica che generalizza il calcolo algebrico usando anche delle lettere per indicare numeri.

Possiamo definire **espressione letterale**, ogni scrittura che indichi operazioni da eseguire su numeri e lettere assegnati. Le lettere che compaiono in una espressione si chiamano *indeterminate*; se ad ogni lettera indeterminata che compare in una espressione letterale viene assegnato un particolare valore numerico, l'espressione letterale si trasforma in una espressione algebrica.

4.2.1 Monomi

La più semplice espressione letterale è il **monomio**: esso è una espressione letterale in cui vi sono solo operazioni di moltiplicazione.
Un monomio si dice **ridotto a forma normale** quando si presenta come il prodotto di un unico fattore numerico, il *coefficiente* del monomio, per delle potenze letterali con basi diverse, dette *parte letterale* del monomio.

Il **grado complessivo di un monomio** è la somma degli esponenti delle sue lettere (laddove non vi è esponente di una lettera si considera 1); ad esempio $-2a^4bc^3$ è monomio di grado $4 + 1 + 3 = 8$.
Il **grado di un monomio rispetto ad una sua lettera** è l'esponente di quella

lettera (se un monomio manca di una data lettera si dice che il monomio è di grado zero rispetto a quella lettera).

Due (o più) monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

Operazioni Le operazioni con i monomi sono immediate e non si approfondiscono.

4.2.2 Polinomi

Si dice **polinomio** la somma algebrica di due o più monomi; tali monomi si dicono *termini del polinomio*. Se un polinomio ha due soli termini si dice binomio, se ne ha tre trinomio ecc.

Il **grado complessivo di un polinomio** è il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono; specularmente il **grado del polinomio rispetto ad una data lettera** l'esponente maggiore con cui compare quella lettera nel polinomio. Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i suoi termini sono dello stesso grado.

Un polinomio si dice **ordinato** secondo le potenze decrescenti (risp crescenti) di una lettera se i suoi termini sono ordinati in modo che gli esponenti di quella lettera (detta ordinatrice) vadano decrescendo (risp crescendo) quando si legge il polinomio da sinistra

Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice **completo** se contiene tutte le potenze di quella lettera, anche quelle di grado inferiore ad n (compresa quella di grado zero, detta termine noto). Di solito tali polinomi vengono ordinati rispetto a tale lettera.

4.2.2.1 Operazioni

Qui si ricordano solo le operazioni tra due polinomi (non tra polinomio e monomio, immediate); nello specifico moltiplicazione e divisione (somma algebrica tra polinomi è immediata).

Prodotto tra due polinomi *In generale il prodotto di due polinomi* è un polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine di uno dei due polinomi per tutti i termini dell'altro (procedendo poi a riduzione dei termini simili).
Vi sono però nel calcolo letterale moltiplicazioni particolari di polinomi che ricorrono frequentemente, per le quali è utile applicare le seguenti regole, senza ricorrere al modo generale. Questi vengono definiti **prodotti notevoli**.

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2+B^2+2AB \\
(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \\
(A+B+C)^2 &= A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC \\
(A+B)(A-B) &= A^2-B^2
\end{aligned}$$

In generale, per lo sviluppo di potenze del tipo $(A+B)^n$ si fa uso, nella determinazione dei coefficienti dei monomi componenti il polinomio risultato, del triangolo di Tartaglia, in seguito visualizzato sino a $n=4$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Il triangolo si costruisce inserendo degli 1 all'estremo e generando i numeri nel mezzo della riga (dalla terza in poi), sommando i due sovrastanti della riga precedente (si noti che i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali).
Per ciò che invece riguarda la parte letterale da associare ai coefficienti di cui sopra, ogni sviluppo è un polinomio omogeneo di grado n, completo sia rispetto ad A che a B, ordinabile secondo potenze decrescenti di A e crescenti di B. Pertanto, ad esempio:

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

Se infine si nota che $A - B = A + (-B)$ si può applicare il triangolo anche per il calcolo dello sviluppo delle forme $(A-B)^n$, con l'accortezza che i termini che contengono potenze di B ad esponente pari restano inalterati, mentre quelli contenenti potenze di B ad esponente dispari cambiano di segno. Ad esempio

$$(A-B)^4 = A^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3 + B^4$$

Divisione tra due polinomi Si dice che un polinomio (di grado maggiore) *è divisibile* perfettamente per un polinomio (di grado minore) se esiste un terzo polinomio che , moltiplicato per il secondo, da per prodotto il primo. Ovvero non c'è resto.

Ipotizziamo di voler dividere il polinomio A(x)

$$6x^3 + 7x^2 - x + 5$$

per il polinomio B(x)

$$2x^2 + x - 3$$

Per dividere un polinomio A(x) per un polinomio B(x):

- si ordinano i due polinomi secondo potenze decrescenti della variabile prescelta e si controlla che il grado di A sia $\geq$ grado di B. Se il polinomio contiene più lettere può ordinarsi secondo le potenze decrescenti di una di esse, la *variabile* (che occorre sapere quale è, solitamente è x): infatti risultato della divisione e resto *cambieranno a meno che il dividendo sia perfettamente divisibile* per il divisore (ovvero se non c'è resto, ordinare per una lettera o per l'altra è uguale).

- si pone dividendo e divisore in una struttura opportuna; se il dividendo A(x) non è un polinomio completo (con tutte le potenze della variabile ordinatrice) conviene scriverlo lasciando degli spazi vuoti in corrispondenza dei termini mancanti.

- si divide il primo termine per dividendo per il primo termine del divisore: il quoziente ottenuto è il primo termine del quoziente tra i due polinomi
- si moltiplica questo primo termine per il divisore e gli si cambia di segno, dopodichè lo si incolonna sotto al dividendo.
- si sommano il dividendo e il polinomio ottenuto invertendo il segno, ottenendo quello che viene detto resto parziale
- si procede ricorsivamente fino a quando il grado del resto parziale è inferiore al grado del divisore, abbiamo trovato il resto della divisione

Un esempio:

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\;6x^3 + 7x^2 \;\; - x \;\; + 5\big) : \big(2x^2 + x - 3\big) = 3x + 2 + \dfrac{6x+11}{2x^2+x-3} \\
\underline{-\,6x^3 - 3x^2 + 9x} \\
\qquad\qquad 4x^2 + 8x \;\; + 5 \\
\qquad\quad \underline{-\,4x^2 - 2x \;\; + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 6x + 11
\end{array}
$$

Qua il programma automatico di divisione del polinomio divide perfettamente e non lascia resto: il risultato Q(x) sarebbe $3x+2$ e il resto R(x) l'ultimo resto parziale, ovvero $6x + 11$.
Comunque per verificare l'esattezza dell'operazione si può sempre moltiplicare il risultato R per il divisore B e aggiungere il resto; se torna dovrebbe coincidere con il dividendo

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

Regola di Ruffini-Horner La regola generale sopra esposta per determinare il quoziente ed il resto della divisione tra due polinomi A(x) e B(x) può esser semplificata quando il divisore è del tipo

$$B(x) = x - c$$

Ad esempio se $A(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ e $B(x) = x - 2$ si predispone il seguente schema:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 4 & -5 & 7 \\
2 & & 6 & 20 & 30 \\
\hline
 & 3 & 10 & 15 & 37
\end{array}
$$

La fase di compilazione e calcolo, in dettaglio:

- nella prima linea si pongono i coefficienti del dividendo corrispondenti alle potenze decrescenti; nel caso in cui il dividendo non sia un polinomio completo si metterà 0 al posto dei coefficienti dei termini mancanti
- successivamente si abbasso il coefficiente del primo termine sulla terza linea; si moltiplica c per il primo coefficiente, riportando il risultato del prodotto nella seconda linea; poi si fa la somma algebrica della seconda colonna e si riparte.

Il risultato della scorsa tabella è da interpretare come segue:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 3x^2 + 10x + 15 \\ R &= 37 \end{aligned}$$

ovvero il resto e l'ultimo numero in basso a destra, mentre i numeri alla sua sinistra determinano i coefficienti del quoziente (e sono di un grado inferiore al dividendo).
Allo stesso risultato si sarebbe giunti con piu calcoli, mediante l'altro algoritmo. Altresì è possibile verificare che

$$(3x^2 + 10x + 15)(x - 2) + 37 = 9x^2 + 4x^2 - 5x + 7$$

A ben vedere Ruffini è utilizzabile anche se il divisore è del tipo x+c, poichè

$$x + c = x - (-c)$$

quindi si tratterà solamente di porre nello schemino un valore negativo.
Ruffini è utilizzabile anche se l'incognita del divisore abbia coefficente $\neq 1$ es

$$B(x) = ax - b$$

applicando la proprietà invariantiva e dividendo sia $A(x)$ che $B(x)$ per a, eseguendo i calcoli e moltiplicando il resto della divisione (se presente) nuovamente per a.

4.2.2.2 Scomposizione di un polinomio in fattori

Di fatto consiste nel trasformare il polinomio nel prodotto di altri polinomi di grado inferiore, tra i quali vi può essere anche un monomio.

Raccoglimento Il raccoglimento a **fattore comune** impiega la seguente "strategia"

$$AB + AC = A(B + C) \tag{4.4}$$

Il raccoglimento a fattor parziale si può utilizzare eventualmente nel caso in cui non vi sia alcun fattore comune a tutti i termini di un polinomio (in tal caso non è possibile il raccoglimento a fattor comune), ma vi sono fattori comuni in gruppi di termini, ad esempio

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Scomposizione in polinomi mediante i prodotti notevoli L'impiego dei prodotti notevoli qui ha la finalità inversa della velocizzazione del calcolo vista in precedenza e impiega le medesime formule, invertite nell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + 2AB &= (A + B)^2 \\ A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 &= (A + B)^3 \\ A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC &= (A + B + C)^2 \\ A^2 - B^2 &= (A + B)(A - B) \end{aligned}$$

La somma o differenza di due cubi si scompone come segue

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$
$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

I secondi termini del prodotto sono detti *falsi quadrati.*

Un *particolare trinomio (cd somma-prodotto) di secondo grado* si può scomporre come segue (dimostrazione algebrica inversa è immediata):

$$x^2 + (A + B)x + AB = (x + A)(x + B)$$

Fattorizzazione mediante Teorema del resto e Ruffini A volte si ha un polinomio e lo si desidera fattorizzare, ma non si sa come fare se ci si limita a considerare raccoglimenti o utilizzo dei prodotto notevoli. In tal caso la regola di Ruffini, applicata recorsivamente può aiutare ad esprimere il polinomio come un prodotto.

Per fare ciò vorremmo scomporre in fatori, senza che si generi un resto nella divisione: in questo aiuta a capire il thm del resto: *Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per il binomio $(x - c)$ è uguale al valore che il polinomio $A(x)$ assume quando a x si sostituisce c.*
Da ciò deriva che: *$A(x)$ è perfettamente divisibile per $(x-c)$ se e solo se $A(c) = 0$*

Si tratterà dunque, dato un polinomio a piacere, di trovare (se vi sono) quei valori di x che lo annullano, giungendo in tal modo ad un termine noto (da cambiar di segno) nei divisori che non generano resti.

Come *regola generale* per la ricerca delle radici, dato un polinomio $A(x)$, le eventuali radici sono tra ricercarsi tra le frazioni aventi per numeratore un divisore (positivo o negativo) del termine noto e per denominatore un divisore (positivo o negativo del coefficiente di grado massimo).
Il numero massimo di radici trovabili è pari al grado del polinomio.

Come casi particolari:

- quando la somma dei coefficienti di A(x) è uguale a 0, il numero 1 è una radice del polinomio;

- quando invece la somma dei coefficienti dei termini di grado pari è uguale alla somma dei coefficienti dei termini di grado dispari, allora -1 è una radice del polinomio

Ad esempio se vogliamo scomporre

$$A(x) = x^4 - x^3 + 3x - 5x - 10$$

i divisori del coefficiente del termine di grado max sono ± 1 (pertanto i termini noti dei polinomi divisori saranno interi); quelli del termine noto sono

$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Essendo di 4° grado possiamo trovare al massimo 4 radici

$$A(1) = \quad 1 - 1 + 3 - 5 - 10 \neq 0 \tag{4.5}$$
$$A(-1) = \quad \ldots = 0 \tag{4.6}$$
$$A(2) = \quad \ldots = 0 \tag{4.7}$$
$$A(2) = \quad \ldots \neq 0 \tag{4.8}$$
$$A(5) = \quad \ldots \neq 0 \tag{4.9}$$
$$A(5) = \quad \ldots \neq 0 \tag{4.10}$$
$$A(10) = \quad \ldots \neq 0 \tag{4.11}$$
$$A(10) = \quad \ldots \neq 0 \tag{4.12}$$

Quindi delle 8 radici possibili, di cui al massimo quattro erano trovabili, abbiamo individuato 2 radici, -1 e 2, che corrisponderanno ai polinomi divisori $(x - 1)$ e $(x - 2)$. Se avessimo trovato tante radici quanto è il grado del polinomio non sarebbe stato necessario svolgere ruffini e la fattorizzazione sarebbe stata il prodotto dei binomi corrispondenti alle radici trovate. Nei rimanenti casi bisogna applicare ruffini; l'applicazione di questa può avvenire in qualsiasi ordine rispetto ai polinomi da utilizzare come divisore. il risultato non cambia. Applicandolo si ottiene che:

$$A(x) = (x^2 + 5)(x + 1)(x - 2)$$

Divisibilità di due $x^n \pm a^n$ per $x \pm a$ La differenza di due potenze di ugual grado è *sempre* divisibile per la differenza delle basi e si ha

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1} \tag{4.13}$$

La differenza di due potenze di ugual grado è divisibile per la somma delle basi solo quando l'esponente è *pari*; nel caso procedere con Ruffini.

La somma di due potenze di ugual grado non è mai divisibile per la differenza delle basi.

La somma di due potenze di ugual grado è divisibile per la somma delle basi solo quando l'esponente è dispari.

Riepilogo scomposizione di polinomio in fattori Non esistono regole fisse secondo le quali procedere; può però essere utile fare così:

1. tentare di raccogliere a fattore comune tutti i termini
2. tentare raccoglimenti parziali
3. vedere se nel polinomio vi è lo sviluppo di prodotto notevoli
4. se il polinomio è la somma o differenza di potenze di ugual grado si applicheranno le regole per $x^n \pm a^n$ (pg 272 libro1)
5. si cerca di scomporre nella fattorizzazione del polinomio somma-prodotto
6. ricorrere al thm del resto e alla regola di Ruffini

4.2.3 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è una espressione del tipo

$$\frac{A}{B}$$

dove A e B sono monomi o polinomi (un monomio o un polinomio si puo considerare come una grazione algebrica avente per denominatore 1); ad esempio sono frazioni algebriche

$$\frac{2ab^4}{5x^2y^3}, \frac{a+2b}{a-3b}$$

Una frazione algebrica ha un significato per tutti i valori delle lettere che vi compaiono eccetto per gli eventuali valori che rendono il denominatore uguale a 0. Ad esempio

$$\frac{4x+1}{x^2-1}$$

non ha significato per $x = 1$ e per $x = -1$ perchè per tali valori di x il denominatore assume il valore zero.

Semplificazione delle frazioni algebriche Una frazione i cui termini (numeratore e denominatore) non hanno fattori in comune si dice irriducibile o *ridotta ai minimi termini.*
Per la semplificazione di una frazione algebriche bisogna innanzitutto considerare la proprietà invariantiva: *moltiplicando o dividendo numneratore e denominatore di una frazione algebrica per una stessa espressione diversa da zero, si ottiene una frazione equivalente alla data.* Quando si divide sia numeratore che denominatore si dice che si *semplifica* la frazione.
Per semplificare una frazione algebrica bisogna scomporre, quando possibile, numeratore e denominatore in fattori e poi dividerli entrambi per tutti i divisori comuni

Riduzione di più fazioni algebriche allo stesso denominatore Si compie un procedimento analogo a quello fatto sulle frazioni numeriche:

- si semplificano le frazioni interessate, se possibile
- si trova il multiplo comune, di grado miniore possibile, dei denominatori delle frazioni ridotte
- si divide il multiplo trovato per ciascuno di questi denominatori
- si moltiplica il quoziente ottenuto per il corrispondente numeratore; i prodotti ottenuti sono i numeratori delle frazioni richieste, mentre il comune multiplo è il denominatore comune

4.2.3.1 Operazioni con le frazioni algebriche

La **somma di più frazioni algebriche**, aventi tutte lo stesso denominatore, è uguale alla frazione che ha per denominatore il denominatore comune e per numeratore la somma algebrica dei numeratori. Quindi per eseguire la somma di più frazioni algebriche occorre per prima cosa ridurle allo stesso denominatore.

Alla fine dell'operazione conviene sempre semplificare la frazione ottenuta, se non gia ai minimi termini.

Il **prodotto** di più frazioni algebriche è la frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori delle frazioni date.

La **potenza** di una frazione algebrica è uguale alla frazione che ha per termini le potenze con lo stesso esponente dei termini della frazione data

Per **dividere** una frazione algebrica si moltiplica quella al numeratore per il reciproco di quella al denominatore

Capitolo 5

Equazioni di primo grado ad una incognita

5.1 Introduzione

Una equazione è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche contenente una o più lettere, chiamate **incognite**.
Le espressioni che si trovano a sinistra e a destra del segno = si chiamano rispettivamente primo e secondo membro dell'equazione.

In alcuni casi (equazioni letterali), alcune delle lettere possono rappresentare dei numeri costanti il cui valore non è specificato: tali lettere si dicono *costanti* o *parametri*

In questo capitolo ci occupiamo delle equazioni contenenti una sola lettera incognita, ossia delle equazioni ad una incognita. La lettera più spesso usata per indicare l'incognita è la x.

Si chiamano **soluzioni** di una equazione quei numeri che sostituiti al posto dell'incognita, trasformano l'equazione in un'eguaglianza vera; si suol dire anche che tali numeri *soddisfano*, o *verificano*, l'equazione data.
Verificare se un dato numero è soluzione di una equazione significa sostituire tale numero nell'equazione al posto dell'incognita: se l'equazione si trasforma in un'eguaglianza vera, allora il numero assegnato è una soluzione dell'equazione (o altrimenti in caso contrario).

Risolvere un'equazione in un'incognita significa determinare l'insieme delle sue soluzioni S, un insieme di numeri reali $S \subseteq \mathbb{R}$. In generale si possono presentare i seguenti casi:

- l'insieme delle soluzioni è vuoto:

$$S = \emptyset \tag{5.1}$$

  ovvero qualunque numero si sostituisca all'incognita l'equazione si trasforma in una eguaglianza falsa. Si dice pertanto che l"equazione non ha soluzioni ovvero che è **impossibile**

- l'insieme delle soluzioni contiene un numero finito di elementi : si dice allora che l'equazione è **determinata**.

- L'insieme delle soluzioni contiene un numero infinito di elementi: si dice che l'equazione è **indeterminata**

- l'insieme delle soluzioni coincide con l'insieme $\mathbb{R}$, $S = \mathbb{R}$. Qualunque numero si sostituisca all'incognita, l'equazione si trasforma in una eguaglianza vera. In questa caso si dice che l'equazione è una **identità**. Notiamo però che talvolta le identità sono condizionata, ovvero verificate non per tutti i valori assegnati alle lettere, ad esempio:

$$\frac{1}{a^2-4} = \frac{-1}{(a+2)(a-2)}$$

  è una identità solo se $a \neq \pm 2$. Infatti per $a = 2$ o $a = -2$ l'uguaglianza perde significato. Diremo quindi che una identità è una uguaglianza per la quale l'insieme delle soluzioni coincide con l'insieme di quei numeri reali per cui hanno senso le espressioni di entrambi i membri.

Le tipologie di equazioni ad una incognita che si possono presentare sono:

- **eq. intere numeriche**: *incognite al numeratore* ed *assenza di altre lettere* oltre ad x;

- **eq. intere letterali**: *incognite al numeratore* ed *presenza di altre lettere* oltre ad x;

- **eq. fratte numeriche**: *incognite al denominatore* ed *assenza di altre lettere* oltre ad x;

- **eq. fratte letterali**: *incognite al denominatore* ed *presenza di altre lettere* oltre ad x;

5.2 Principi di equivalenza

Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. La risoluzione delle equazioni si basa sul ricondurre progressivamente l'equazione studiata ad una versione più semplice, ma equivalente, che metta in mostra le soluzioni in maniera diretta. Ciò viene fatto applicando ripetutamente i principi di equivalenza.

Si ottiene una equazione equivalente a quella data ...

1. sommando o sottraendo ad ambo i membri dell'equazione una medesima espressione (contenente o meno incognite, ma nel caso sempre definita [1]);

2. moltiplicando o dividendo ambedue i membri dell'equazione per uno stesso numero $a \neq 0$ [2], o per una stessa espressione che non possa annullarsi [3] e

[1] Nel caso si sommi una espressione M non sempre definita si otterrà una equazione equivalente alla data solo se nessuno dei valori per cui l'espressione non è definita è soluzione dell'equazione data (es pag 318-319 libro 1

[2] Se si moltiplicassero entrambi i membri per 0, qualsiasi valore di x sarebbe soluzione, perché comunque sarebbe $0 = 0$.

[3] Se invece moltiplicassimo entrambi i membri per una espressione che può annullarsi introduciamo come soluzione dell'equazione originaria il valore di x per il quale si annulla l'espressione moltiplicata, dato che in tal caso $0 = 0$ e l'equazione è verificata, ovvero introduciamo una soluzione *estranea*

che se contiene incognite sia definita per qualsiasi valore loro attribuito.
Se il fattore per cui si moltiplica/divide è una espressione letterale non contenente le incognite, si devono escludere tutti i valori delle lettere che rendono uguale a zero tale espressione.
Se alternativamente il fattore di interesse contiene l'incognita e lo si usa per:

- moltiplicare ambo i membri, bisognerà discutere le soluzioni dell'equazione risultante per escludere, come estranee quelle che annullerebbero il moltiplicatore *senza* verificare l'equazione originaria
- dividere ambo i membri, si sopprimono in generale delle soluzioni della equazioni di partenza e precisamente quelle che sono anche soluzioni dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il divisore

Alcune regole che derivano dai due principi, utili per la risoluzione di una equazione:

- se uno stesso termine figura come addendo in entrambi i membri di una equazione esso può essere soppresso
- si può trasportare un termine di una equazione da un membro all'altro purché gli si cambi il segno
- se entrambi i membri di una equazione compare uno stesso comune fattore numerico $\neq 0$, questo puo essere soppresso
- cambiando i segni a tutti i termini di un equazione se ne ottiene un'altra equivalente a quella data
- moltiplicando i due membri di una equazione intera per una espressione conveniente si puo trasformare l'equazione in un'altra equivalente in cui non compaiono denominatori

5.2.1 Grado di una equazione

Data una equazione nell'incognita x, è sempre possibile mediante l'applicazione dei principi di equivalenza, scrivere l'equazione nella forma

$$P(x) = 0$$

con $P(x)$ un polinomio nell'incognita x. In questo caso diremo **grado dell'equazione** il grado del polinomio P(x) rispetto alla lettera x. Le equazioni di primo grado sono anche dette equazioni lineari (si possono scrivere nella forma $mx + q = 0$

5.3 Metodi di risoluzione

Variano lievemente a seconda della tipologia di equazione.

Intere numeriche E necessario applicare i principi di equivalenza per ricondurre alla forma $ax = b$. A tal punto:

- se $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$
- se $a = 0$, $b = 0$, $0 \cdot x = 0$ pertanto è indeterminata
- se $a = 0$, $b \neq 0$, $0 \cdot x = b$ pertanto è impossibile

La verifica si compie sostituendo il valore trovato nell'equazione originaria e verificando l'uguaglianza

Intere letterali Introducendo ingognite letterali si deve prestare attenzione alle condizioni vincolanti per l'utilizzo dei principi di equivalenza. Se si moltiplicano o dividono entrambi i membri per una espressione che contiene una o piu costanti occorrerà ipotizzare che i parametri non assumano valori che possano annullare l'espressione.
Bisognerà specificare tali ipotesi nella cd discussione dell'equazione.
Inoltre nel caso siano presenti *denominatori letterali* si dovranno determinare quei valori dei parametri per cui essi si annullano (e l'equazione perde significato). Solo nell'ipotesi che i parametri non assumano tali valori si potrà procedere alla risoluzione. Tali ipotesi vengono chiamate condizioni di esistenza dell'**equazione**.
Per il resto la risoluzione è analoga alle intere numeriche e si opererà riconducendosi alla forma $ax = b$

Fratte numeriche Se vi sono incognite x ai denominatori, per i valori di x che annullano questi, l'equazione perde significato: non ha senso che detti valori possano esser considerati soluzione dell'equazione: non rientrano nel **dominio** dell'equazione (ovvero l'insieme di numeri che sostituiti al posto dell'incognita trasformano l'equazione in una ugualglianza dotata di senso). Le soluzioni delle equazioni devono far parte del dominio di queste.
In presenza di una equazione fratta è bene, dopo aver scomposto in fattori i denominatori, **determinare il dominio** dell'equazione data (o equivalentemente esprimere le cosiddette *condizioni di accettabilità* delle soluzioni).
Dopo aver trasformato l'equazione data in intera mediante i principi di equivalenza, la si risolve; delle soluzioni ottenute si accetteranno solo quelle appartenenti al dominio.

Fratte letterali Occorre applicae quanto detto per intere letterali e fratte numeriche congiuntamente. Attenzione che la verifica delle condizioni di accettabilità non è esmpre immediata: sia le condizioni di accettabilità sia le soluzioni possono essere espresse mediante espressioni letterali che possono assumere valori coincidenti in corrispondenza di particolari valori dei parametri. Ad esempio per :

$$\frac{a+2}{x-a+1} = \frac{1}{x-a+1} + 2$$

la condizione di accettabilità è che $x \neq a - 1$ e la soluzione è $x = \frac{3a-1}{2}$. Si potrebbe credere che $(3a-1)/2$ sia $neqa-1$ ma le 2 espressioni posson coincidere per qualche parametro di a:

$$(3a-1)/2 = a - 1$$

da cui deriva che se $a = -1$, l'equazione è impossibile; se $a \neq 1$ l'equazione è determinata è la soluzione è $x = (3a - 1)/2$

Capitolo 6

Disequazioni di primo grado, valore assoluto

Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni algebriche contenente una o più lettere, chiamate **incognite**. Come già per le equazioni, talvolta alcune delle lettere possono rappresentare dei numeri costanti il cui valore non è specificato: tali lettere si dicono *costanti* o *parametri*

6.1 Diseguaglianze

Prima di affrontare lo studio delle disequazioni è bene approfondire alcuni concetti riguardanti le diseguaglianze.

Il **senso** o **verso** di una diseguaglianza è dato dal simbolo $>$ oppure $<$ (o naturalmente anche dai simboli $\geq$ o $\leq$).
Per le diseguaglianze sussistono i principi che esponiamo:

- sommando o sottraendo ad ambedue i membri di una diseguaglianza uno stesso numero, si ottiene una diseguaglianza dello stesso senso
- moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una diseguaglianza per uno stesso *numero positivo* si ottiene una diseguaglianza dello *stesso senso*
- moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una diseguaglianza per uno stesso *numero negativo* si ottiene una diseguaglianza *di senso contrario*
- due diseguaglianze dello stesso senso si possono *sommare membro a membro*, ottenendo con ciò una diseguaglianza dello stesso senso

  $$a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

  con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ In generale *non è lecito* invece sottrarre membro a membro due diseguaglianze dello stesso senso
- due diseguaglianze dello stesso senso fra numeri positivi moltiplicate membro a membro danno una diseguaglianza dello stesso senso

  $$a > b \wedge c > d \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

- se due numeri positivi sono disuguali, i loro reciproci sono diseguali in senso contrario:
$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$
con $a, b \in \mathbb{R}^+$

- elevando a potenza con esponente intero negativo i due membri di una diseguaglianza tra numeri positivi si ottiene una diseguaglianza di senso contrario

- elevando a potenza con esponente intero positivo i due membri di una diseguaglianza tra numeri negativi, si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso se l'esponente è dispari e di senso contrario se l'esponente è pari

- se si elevano i due membri di una diseguaglianza tra numeri di segno opposto a potenza con *esponente positivo dispari* la disuguaglianza conserva il senso; se l'esponente è invece pari non si può dire nulla del risultato

- estraendo la radice n-esima da entrambi i membri di una disuguaglianza tra numeri positivi si ottiene una diseguaglianza dello stesso senso

6.2 Disequazioni ad una incognita

In questo capitolo ci occupiamo delle disequazioni contenenti una sola lettera incognita, ossia delle equazioni ad una incognita. La lettera più spesso usata per indicare l'incognita è la x.
Si chiamano **soluzioni** di una equazione quei numeri che sostituiti al posto dell'incognita, trasformano la disequazione in una diseguaglianza vera; si suol dire anche che tali numeri *soddisfano*, o *verificano*, l'equazione data.
Risolvere una disequazione in un'incognita significa determinare l'insieme delle sue soluzioni S, un insieme di numeri reali $S \subseteq \mathbb{R}$.

Contrariamente a quanto avviene nel caso delle equazioni, l'insieme delle soluzioni di una disequazione è in genere costituito da infiniti numeri.
Per rappresentare tali insiemi è molto utile il concetto di intervallo, che ora definiamo. Siano a e b due numeri reali con a<b:

- si chiama intervallo chiuso di estremi a e b , e lo si denota con $[a; b]$ l'insieme di tutti i numeri reali x compresi tra a e b, inclusi a e b

- si chiama intervallo aperto di estremi a e b , e lo si denota con $(a; b)$ l'insieme di tutti i numeri reali x, compresi tra a e b, esclusi a e b

$$\begin{aligned} [a; b] = &\quad \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\ (a; b) = &\quad \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \end{aligned}$$

Si può parlare anche intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra oppure chiusi a sinistra e aperti a destra:

$$\begin{aligned}(a;b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \\ [a;b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}\end{aligned}$$

I numeri a e b si chiamano *estremi dell'intervallo*; la differenza b-a *ampiezza* dell'intervallo.
Gli intervallo di cui si è finora parlato sono ance detti limitati, ma si considerano anche gli intervalli illimitati che sono quelli costituiti da tutti i numeri reali maggiori (maggiori o uguali) di un numero assegnato a oppure da tutti i numeri reali minori (minori o uguali) di a

$$\begin{aligned}(a;\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x > a\} \\ [a;\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} \\ (-\infty;a) &= \{x \in \mathbb{R} | x < a\} \\ (-\infty;a] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}\end{aligned}$$

L'insieme di tutti i numeri reali, ossia di tutti i punti della retta, costituisce l'intervallo $(-\infty, infty)$.
Le tipologie di disequazioni ad una incognita che si possono presentare sono:

- **diseq. intere numeriche**: *incognite al numeratore* ed *assenza di altre lettere* oltre ad x;
- **diseq. intere letterali**: *incognite al numeratore* ed *presenza di altre lettere* oltre ad x;
- **diseq. fratte numeriche**: *incognite al denominatore* ed *assenza di altre lettere* oltre ad x;
- **diseq. fratte letterali**: *incognite al denominatore* ed *presenza di altre lettere* oltre ad x;

6.3 Principi di equivalenza

Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. La risoluzione delle disequazioni si basa sul ricondurre progressivamente l'equazione studiata ad una versione più semplice, ma equivalente, che metta in mostra le soluzioni in maniera diretta. Ciò viene fatto applicando ripetutamente i principi di equivalenza.

Si ottiene una disequazione equivalente a quella data ...

1. se ad entrambi i membri di una disequazione si somma o si sottrae uno stesso numero, o una stessa espressione sempre definita del dominio della disequazione
2. moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero *positivo* (o per una stessa espressione algebrica sempre positiva nel dominio della disequazione)

3. moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero *negativo* (o per una stessa espressione algebrica sempre negativa nel dominio della disequazione) *e cambiando il verso della diseguaglianza*

6.3.1 Grado di una disequazione

Analogamente al caso delle equazioni, data una disequazione nell'incognita x, è sempre possibile mediante l'applicazione dei principi di equivalenza, scrivere la disequazione nella forma

$$P(x) \gtreqless 0$$

con $P(x)$ un polinomio nell'incognita x. In questo caso diremo **grado della disequazione** il grado del polinomio P(x) rispetto alla lettera x. Le disequazioni di primo grado sono anche dette disequazioni lineari (si possono scrivere nella forma $mx + q \gtreqless 0$)

6.4 Metodi di risoluzione

6.4.1 Intere di primo grado e letterali

E' simile a quello utilizzato per le equazioni: si applicano più volte i principi di equivalenza facendo attenzione al caso peculiare per le disequazioni (moltiplicazione per valore negativo):

- per le disequazioni intere numeriche e letterali si procede si procede riconducendosi alla forma $ax \gtreqless b$ poi ad esempio nel caso $ax > b$

  1. se $a > 0, x > \frac{b}{a}$
  2. se $a < 0, x < \frac{b}{a}$
  3. se $a = 0$ si ha $0 \cdot x > b$, quindi se $b < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione; alternativamente se $b \geq 0$, $S = \emptyset$

  dal punto di vista grafico la soluzione si ha per quei valori di x per cui il polinomio ax è maggiore (in questo esempio) del valore b

- se la disequazione è letterale potrà esser necessario dover discutere/elaborare in base ai valori assumibili dalle lettere

6.4.2 Fratte e intere di grado superiore a 1, se fattorizzabili

Nel caso di disequazioni frate e intere di grado superiore a 1 (ma che nel caso si possano scrivere con il 2° membro a 0 e il primo come prodotto o rapporto di fattori di primo grado), il procedimento è:

- portare tutto al primo membro ed esprimerlo come prodotto/quoziente di polinomi di 1° grado

- studio del segno di ciascun polinomio e produzione schemino riassuntivo

- ricordando il segno del prodotto quoziente, determinare il segno del primo membro
- determinare l'insieme delle soluzioni che interessano

A contrario delle equazioni fratte, nelle disequazioni non si è determinato il dominio poiché tutti i valori che annullano i denominatori vengono esclusi dalle soluzioni (e debbono esserlo) e vengono contrassegnati da una crocetta.
Inoltre non si procede eliminando il denominatore con l'incognita (moltiplicando entrambi i membri) poiché non si conosce il segno dello stesso.

Nel caso di disequazioni letterali occorrerà se necessario discutere: in particolare lo studio del segno dei fattori sarà influenzato dal valore assunto dai parametri

6.5 Sistemi di disequazioni

Quando si considerano contemporaneamente più disequazioni, tutte nella stessa incognita si ha un sistema di disequazioni.
Risolvere un sistema di disequazioni consiste nel trovare se ci sono, per quali valori dell'incognita tutte le disequazioni componenti sono soddisfatte.
Si tratterà pertanto di risolvere singolarmente ciascuna disequazione e quindi considerare l'intersezione degli insiemi delle loro soluzioni. Tale insieme è l'insieme delle soluzioni del sistema.
Per determinare l'insieme delle soluzioni del sistema è utile rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione.

Un sistema di disequazioni può presentarsi nella forma

$$a < f(x) < b \tag{6.1}$$

equivalente a :

$$\begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < b \end{cases} \tag{6.2}$$

6.6 Modulo - Valore assoluto

Il valore assoluto di un numero x è:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

ed è tale che $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Dalla definizione segue che:

- $|x|$ è il più grande (cioè il massimo di due numeri $x, -x$, cioè si può scrivere anche $|x| = \max\{x, -x\}$; si ha quindi sempre $x \leq |x|$ e $-|x| \leq x$, quindi complessivamente
$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- due numeri reali avranno medesimo valore assoluto se sono uguali o se sono opposti
$$|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b \tag{6.3}$$

- seguono inoltre che

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \qquad a \in \mathbb{R}^+ \tag{6.4}$$
$$|x| \geq a \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \qquad a \in \mathbb{R}^+ \tag{6.5}$$

Proprietà del valore assoluto

$$|-a| = |a| \tag{6.6}$$
$$|a| \cdot |b| = |ab| \tag{6.7}$$
$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right| \tag{6.8}$$
$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{6.9}$$
$$|a-b| \geq |a| - |b| \tag{6.10}$$

Diseguaglianza triangolare La 6.9 è detta *diseguaglianza triangolare*; per dimostrarla basta scrivere le relazioni

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

quindi sommare membro a membro ottenendo

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$$

da cui per la 6.4 segue la proprietà di diseguaglianza triangolare.
Nello specifico, $|x+y| = |x| + |y|$ se e solo se x e y hanno lo stesso segno.
La 6.10 deriva dalla 6.9 ponendo $a = x - y$ e $b = y$, sviluppando minimamente ed effettuare una ulteriore sostituzione $x = a, y = b$.
Spesso la diseguaglianza triangolare è usata nella forma

$$|x-y| \leq |x-c| + |y-c| \tag{6.11}$$

Per lo sviluppo occorre porre $a = x - c$ e $b = x - y$.
La diseguaglianza triangolare può infine estendersi facilmente al caso di n addendi:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{6.12}$$

Infine un importante corollario della diseguaglianza triangolare è

$$\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a-b|$$

(il modulo della differenza dei moduli è minore o uguale al modulo della differenza)[1] e anche

$$\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a+b|$$

che si ottiene dalla precedente sostituendo $-b$ al posto di b.

[1]Si ottiene a partire dalla 6.10 scambiando tra loro ae b: si ottiene $|b| - |a| \leq |b-a|$, quindi $-(|a| - |b|) \leq |a-b|$ (che è $= |b-a|$), e si conclude.

6.7 Equazioni con valori assoluti contenenti l'incognita

La soluzione di una equazione con valore/i assoluto/i contenenti l'incognita parte dalla considerazione che per determinati valori dell'incognita stessa, le espressioni contenute all'interno del/dei valori assoluti assumeranno valore positivo o negativo; in funzione di ciò occorrerà risolvere dei sistemi misti composti dall'equazione modificata e dalla disequazione che determina il segno dell'espressione tra parentesi. Considerando

$$|f(x)| = g(x) \tag{6.13}$$

Essendo

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

si procederà risolvendo i sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \tag{6.14}$$

andando a combinare mediante unione le soluzioni risultanti dai due sistemi.
Un modo efficiente per trattare i sistemi di disequazioni derivanti, è evitare di portare sotto sistema la disequazione su f(x) non elaborata, bensì di studiare il segno precedentemente e portare in disequazione i risultati (es se $f(x) < 0$ per $x > 1$, al posto di $f(x) < 0$ porre subito $x > 1$). Questo perché lo studio del segno riguarda analogamente le disequazioni dei due sistemi.

Se i valori assoluti contenenti incognite sono molteplici, occorrerà determinare in quali intervalli della x siano positivi o negativi. In seguito bisognerà impostare tanti sistemi di disequazioni quante sono le combinazioni di positività/negatività delle espressioni entro valore assoluto.

6.8 Disequazioni con modulo

6.8.1 Disequazioni del tipo $|f(x)| \gtreqless k$, con $k \in \mathbb{R}^+$

Se la disequazione è del tipo:

$$|f(x)| < k \tag{6.15}$$

i valori di x che soddisfano detta disequazione hanno la proprietà che :

$$-k < f(x) < k \tag{6.16}$$

Risolvere tale disequazione equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$$

Se la disequazione è invece del tipo:

$$|f(x)| > k \tag{6.17}$$

i valori di x che soddisfano detta disequazione hanno la proprietà che :

$$f(x) > k \vee f(x) < -k \tag{6.18}$$

Risolvere tale disequazione equivale a risolvere queste disequazioni e trovare l'unione (non l'intersezione) degli insiemi delle soluzioni.

6.8.2 Altre disequazioni con modulo

Si risolvono similmente alle equazioni analizzando il segno delle espressioni sotto modulo ed effettuando le opportune sostituzioni condizionali. La risoluzione non implicherà più un sistema misto di una disequazione e una equazione, bensì un sistema di disequazioni vero e proprio.

Capitolo 7

Sistemi di equazioni

I sistemi di equazioni si basano su equazioni con un numero di incognite almeno $= 2$. Pertanto si introduce tale tematica innanzitutto.

7.1 Equazioni a due incognite

Fino ad ora abbiamo visto equazioni e disequazioni in una sola incognita, presentanti la forma $f(x) = 0$ o $f(x) > 0$ (ad esempio), o riconducibili ad essa; soluzione di queste è quel valore che associato/sostituito alla x verifica/rende vera la relazione.

Il numero di incognite in una equazione/disequazione può esser > 1; ad esempio

$$y = f(x) \tag{7.1}$$

è una equazione in due incognite; si dice che una coppia ordinata (x, y) di numeri è *soluzione* di tale equazione se sostituiti nella stessa la verificano.
L'insieme delle soluzioni costituisce un insieme di coppie ordinate di numeri reali (di terne se l'equazione è in tre incognite e così via). Essendo un insieme di coppie di numeri possono essere rappresentate sul piano cartesiano.

Il grado di tale equazione consiste nel grado del polinomio in cui possiamo riscriverla:

$$P(x, y) = 0 \tag{7.2}$$

ad esempio le seguenti sono rispettivamente una equazione di primo grado e due di secondo:

$$y + x = 0 \tag{7.3}$$
$$y + x^2 = 0 \tag{7.4}$$
$$xy = 0 \tag{7.5}$$

Ci si occuperà in seguito solamente di primo grado, anche dette *equazioni lineari*. Nel caso di equazioni lineari, la rappresentazione delle soluzioni sul piano corrisponde ad una retta.

7.2 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni è un insieme di 2 o più equazioni considerate contemporaneamente. La notazione consueta prevede il raggruppamento a sinistra mediante graffa.

Il numero di incognite del sistema è dato dal numero di incognite distinte che figurano nello stesso.

7.2.1 Ripasso sul concetto di grado; grado di un sistema

- Il grado (complessivo, non rispetto ad una lettera) di un monomio è il numero di variabili presenti, contate con la loro molteplicità. Quindi $5x^2y^5z$ è un monomio di grado $2 + 5 + 1 = 8$
- Il grado di un polinomio è il massimo tra i gradi dei monomi che lo compongono. Ad esempio $2a^4 + 3a^6b - 4a + 5$ è un polinomio composto da monomi di grado 4, 7, 1 e 0 rispettivamente; pertanto il grado del polinomio è 7
- Il grado di un'equazione algebrica è il grado del polinomio uguagliato a zero a cui è riconducibile l'equazione. Per il teorema fondamentale dell'algebra è anche il numero di soluzioni (reali e complesse) dell'equazione. Ad esempio $y = x^2 + z$ viene ricondotta al polinomio $x^2 - y + z = 0$ che è di grado 2, quindi l'equazione è di grado 2

Grado di un sistema Il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. Ad esempio, il sistema sottostante a sinistra è di primo grado in due incognite, quello a destra di secondo grado in tre.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 2 \\ zx = -4 \end{cases} \tag{7.6}$$

I **sistemi lineari**, su cui ci concentriamo, sono quelli formati esclusivamente da equazioni di 1° grado (pertanto sono sistemi di primo grado).

7.2.2 Sistemi lineari determinati, indeterminati, impossibili

Se in un sistema compaiono n incognite, si dice che una n-pla ordinata è *soluzione* del sistema se sostituendo tale alle n incognite, tutte le equazioni componenti si trasformano in eguaglianze vere. Evidentemente l'insieme delle soluzioni di un sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna delle sue equazioni.

Risolvere un sistema significa determinare l'insieme delle sue soluzioni:

- un sistema è *impossibile* se non ha soluzioni;
- è *determinato* se ha un numero finito di soluzioni;
- è *indeterminato* se ha un numero in-finito di soluzioni.

Come detto l'insieme delle soluzioni della singola equazione lineare (in due incognite) è rappresentabile mediante una retta del piano. Considerando un sistema in due equazioni e due incognite, si possono presentare i seguenti casi:

- le rette r_1 e r_2 (le soluzioni delle 2 singole equazioni del sistema) sono *parallele* e non si incontrano mai. L'intersezione di tali insiemi è vuoto e il sistema non ha soluzioni: è *impossibile*;
- le rette sono *incidenti*: le coordinate del punto di intersezione costituiscono la soluzione del sistema, il quale è *determinato*;
- le rette sono *coincidenti*: il sistema ha infinite soluzioni, ossia è *indeterminato.*

Analiticamente, consideriamo un generico sistema lineare di due equazioni in due incognite, scritto in **forma normale**, ovvero come:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

supponendo per semplicità che i coefficienti di tale sistema siano diversi da zero. Le equazioni del sistema di sopra sono allora equivalenti a quelle del seguente (applicando i principi di equivalenza delle equazioni), poste nella forma $y = mx + q$:

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

Da cui, alla luce delle considerazioni geometriche di sopra:

- nel caso
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \wedge \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \tag{7.7}$$
o equivalentemente[1]
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
o ancora
$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \wedge c_1b_2 - b_1c_2 = 0 \wedge a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$
le due equazioni sono identiche, le rette coincidono ed il sistema è **indeterminato**
- se invece
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \wedge \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \tag{7.8}$$
o equivalentemente
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$
o ancora
$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \wedge (c_1b_2 - b_1c_2 \neq 0 \vee a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0)$$
le due rette sono parallele ed il sistema **impossibile**

[1] Le eguaglianze possono esser considerate delle proporzioni in cui si permutano i termini medi

- infine se
$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \tag{7.9}$$
o equivalentemente
$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$$
i due coefficienti angolari sono differenti, le due rette si intersecheranno in un punto ed il sistema è **determinato**

Il numero
$$\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2$$
viene chiamato **determinante del sistema**; si può quindi dire che se:

- $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato
- $\Delta = 0$ il sistema non è determinato e può risultare impossibile o indeterminato

7.3 Risoluzione di un sistema e principi di equivalenza dei sistemi

Per risolvere un sistema si cercherà di trasformarlo, mediante i conosciuti principi di equivalenza delle equazioni e i nuovi principi di equivalenza propri dei sistemi in un sistema che esprima in maniera immediata l'insieme delle soluzioni.

Si noti che i principi di equivalenza dei sistemi di equazioni, esposti a breve, valgono per tutti i sistemi di equazione, non solo quelli lineari: sono 2, il *principio di riduzione* e quello di *sostituzione*.

Principio di riduzione Dato un sistema di n equazioni in n incognite posto in forma normale
$$\begin{cases} \dots \\ a_1 x + b_1 y + \dots = w_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots = w_2 \\ \dots \end{cases}$$
se ne ottiene sempre uno equivalente se ad una equazione si sostituisce qella che da essa si ottiene aggiungendo (o sottraendo) membro a membro quante altre equazioni (a queste o alla prima si può applicare congiuntamente il principio di equivalenza delle equazioni, moltiplicando/dividendo le equazioni considerate per un numero $\neq 0$).

Per fare un esempio:
$$\begin{cases} 7z + 12y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ -x - 2y + 5z = 5 \end{cases} = \begin{cases} 14z = 14 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ -x - 2y + 5z = 5 \end{cases}$$
i precedenti sono sistemi equivalenti: alla prima equazione si è sostituito quella ottenuta togliendo dalla prima la seconda (previa moltiplicazione $\times 2$) e aggiungendovi la terza (previa moltiplicazione $\times 3$).

Il caso di un sistema lineare di due equazioni in due incognite in forma normale, può esser sviluppato per mettere in luce alcuni aspetti:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{7.10}$$

Applicando il principio è possibile arrivare alla determinazione di una formula che dia la soluzione del sistema stesso.
Moltiplichiamo la prima equazione per il coefficiente di x della seconda e la seconda per il coefficiente di x della prima. Otteniamo il sistema equivalente al dato:

$$\begin{cases} a_2a_1x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases} \tag{7.11}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda la prima si ha:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

A questo punto si osservi che per ottenere la x si puo procedere con lo stesso metodo eliminando dalle equazioni del sistema la y. Si ha

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1 \\ b_1a_2x + b_1b_2y = b_1c_2 \end{cases}$$

sottraendo membro a membro dalla prima la seconda si ha

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

se $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$ (il determinante non nullo si ottengono i valori delle incognite:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Se il determinante del sistema fosse nullo

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \rightarrow a_1b_2 = a_2b_1$$

ovvero

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

il sistema risulterebbe o impossibile, concordemente a quanto visto in precedenza.

Principio di sostituzione Risolvendo un'equazione di un sistema rispetto ad una incognita esostituendo nelle restanti equazioni si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

7.3.1 Metodi di risoluzione, sistemi impossibili/indeterminati

La risoluzione di un sistema lineare passa per l'applicazione ripetuta dei due principi. Si noti che a seconda della convenienza i due metodi si possono applicare congiuntamente (non si sta facendo nulla di particolare, solo applicando principi di equivalenza ricorsivamente).

Si rammenti che:

- **risolvendo un sistema impossibile** si perviene ad una equazione impossibile;
- **risolvendo un sistema indeterminato** si perviene ad un sistema composto da equazioni identiche o ad un sistema in cui una equazione è una identità (es $0x = 0$)

Nei **sistemi letterali** conviene ricondurre alla forma normale, determinando i casi delle costanti per cui il sistema è indeterminato, impossibile e determinato. In quest'ultimo caso, poi, fornire le soluzioni.

Per risolvere **sistemi di equazioni con un numero di equazioni e di incognite superiori a 2**, si procede nella stessa maniera che in quelli a due incognite (ovvero applicando sostituzione o riduzione); si consideri che:

- i sistemi in cui il *numero delle equazioni supera il numero delle incognite* si risolvono normalmente, ma sono generalmente impossibili: scelte infatti nel sistema tante equazioni quante sono le incognite esse avranno una soluzione che probabilmente non soddisferà le rimanenti equazioni del sistema dato.
  Detti sistemi possono essere invece determinati quando alcune equazioni sono combinazioni lineari di altre.
- un sistema formato da *equazioni in numero inferiore alle incognite* è in generale un sistema indeterminato.

Capitolo 8

Radicali

L'estrazione di radice è considerabile come l'operazione inversa dell'elevamento a potenza. Partiamo da radice quadrata e cubica per generalizzare in un secondo momento.

8.1 Introduzione

Si dice **radice quadrata** del numero reale $a \geq 0$, e si indica con $\sqrt{a}$, quel reale $b \geq 0$ il cui quadrato è uguale ad a:

$$\sqrt[2]{a} = b \Longleftrightarrow b^2 = a \qquad a, b \in \mathbb{R}_0^+ \tag{8.1}$$

si dice che $\sqrt[2]{a}$ è il *radicale*, a il *radicando* e 2 l'*indice*; $\sqrt[2]{a}$ si può anche indicare più brevemente con $\sqrt{a}$

- necessariamente se la radice è quadrata (o di indice pari) il radicando deve essere positivo perché non esiste nessun numero (in $\mathbb{R}$) che moltiplicato per se un numero pari di volte dia un risultato negativo;

- Un numero positivo ha in realtà due radici (ad esempio 4 ha $+2$ e -2); $b > 0$ per convenzione, ovvero si conviene di scegliere come radice quadrata di un numero positivo la radice positiva, non quella negativa.

La **radice cubica** di un numero a, e si indica con $\sqrt[3]{a}$, quel reale b il cui cubo è a

$$\sqrt[3]{a} = b \Longleftrightarrow b^3 = a \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

Non è necessario, a differenza della radice quadrata che $a, b \geq 0$; la radice cubica di un numero negativo esiste ed è negativa. Più in generale la radice cubica (o di indice dispari) di un numero reale esiste sempre ed ha lo stesso segno del numero dato.

In generale, nel calcolo della **radice n-esima** di un numero a, *la radice non esiste solo se il radicando $a < 0$ e l'indice della radice è pari.* In tutti gli altri casi esiste ed ha segno concorde con quello del radicando.

Due casi notevoli:

$$\underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{\text{n volte}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{0} = 0 \tag{8.3}$$

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{n volte}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{1} = 1 \tag{8.4}$$

$$\tag{8.5}$$

Nello svolgimento di calcoli (soprattutto con radicali che includono incognite o parametri) è sempre opportuno procedere sotto l'ipotesi che, se possibile, le incognite siano tali da non rendere privo di significato il radicale.

8.2 Proprietà dei radicali in $\mathbb{R}$

Per radicali in $\mathbb{R}_0^+$ si intende radicali con radicando $a \in \mathbb{R}_0^+$ (ovvero $a \geq 0$; analogamente, per radicali in $\mathbb{R}$ si intende radicali con radicando $a \in \mathbb{R}$. Esponiamo in seguito le proprietà dei radicali

Dalla definizione di radice deriva una **prima proprietà fondamentale**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Tale proprietà si può applicare sempre, ad eccezione del caso in cui n sia pari e il numero a sia negativo (ma questo perché non ha significato il radicale di partenza nel campo reale).

Seconda proprietà fondamentale è la seguente

$$\begin{aligned} \text{n è dispari} \quad &\rightarrow \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\ \text{n è pari} \quad &\rightarrow \quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{aligned}$$

Una dimostrazione della seconda è ad esempio:

$$\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3 = |-3|$$

Si applicherà la formula con il valore assoluto tutte le volte che, considerando radicali in $\mathbb{R}$ ed essendo l'indice n un numero pari, non si conosce il segno della base a.

La **Proprietà invariantiva** varia a seconda che si operi in un contesto in cui la base sia positiva o negativa:

- nel caso di *base positiva o al più nulla*, il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale positivo

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad a \geq 0 \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0 \tag{8.6}$$

- nel caso di *base negativa*, la proprietà invariantiva non si può applicare direttamente a meno che, se possibile (indice dispari), si sia portato fuori dalla radice il segno negativo .

La **Semplificazione di radicali** consiste nell'applicazione della proprietà invariantiva al contrario:

- se $a \geq 0$, il valore del radicale non cambia se si dividono l'indice del radicale e l'esponente del radicando per un loro divisore comune:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq 0 \quad n, m, p \in \mathbb{N}_0 \tag{8.7}$$

  Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando non hanno divisori comuni, il radicale non è semplificabile e viene detto *irriducibile.*

- Non potendosi applicare direttamente la proprietà invariantiva nel caso di radicali in R, se non si conosce il segno del radicando occorre procedere come segue[1]:

  – determinare, prima guardando all'esponente del radicando e poi all'indice della radice, il campo di esistenza del radicando perché il radicale sia definito (e continuare sotto tale ipotesi);

  – se il radicale esiste solo per base positiva allora si potrà applicare la semplificazione

  – se il radicale può esistere anche per base negativa (suo esponente è pari o indice del radicando dispari), o si considera che, ad esempio:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{\underbrace{(-a)^2}_{>0}} = \sqrt{-a}$$

  o si porta il segno negativo fuori (se possibile) e si applica la proprietà

$$\sqrt[15]{a^3} = -\sqrt[15]{\underbrace{(-a)^3}_{>0}} = -\sqrt[5]{(-a)} = -(-\sqrt[5]{a}$$

  In sintesi per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|} \tag{8.8}$$

$$\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[5]{a} \tag{8.9}$$

  – se il radicale esiste per entrambi i casi, bisogna considerarli separatamente

8.3 Riduzione di più radicali allo stesso indice

Un'applicazione delle proprietà è la **riduzione di più radicali allo stesso indice**:

- supponiamo di avere due o più radicali: per ridurli allo stesso indice dapprima si rendono irriducibili i singoli radicali, poi si trova il minimo comune multiplo degli indici e lo si assume come indice comune; l'esponente di ogni fattore di ciascun radicando si trova poi moltiplicando il suo vecchio esponente per il quoziente tra l'indice comune e il vecchio esponente; ad esempio:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{a^2} & \sqrt[4]{b^3} & \sqrt{a+b} \\ \sqrt[3\cdot 4]{a^2} & \sqrt[4\cdot 3]{b^3} & \sqrt[2\cdot 6]{a+b} \\ \sqrt[12]{a^8} & \sqrt[12]{b^9} & \sqrt[12]{(a+b)^6} \end{array}$$

[1] Se si conosce ed è positivo, si può applicare; se si conosce ed è negativo non riconducibile a positivo portando fuori il segno, non si può applicare

8.4 Operazioni sui radicali

Somma algebrica di radicali La somma di due radicali non è uguale al radicale delle somme:

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$$

In alcuni casi però è possibile rendere più semplici espressioni eseguendo raccoglimenti a fattor comune se si hanno somme tra radicali aventi lo stesso indice e lo stesso radicando

$$2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2+4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Prodotto di radicali Il prodotto/quoziente di più radicali aventi lo stesso indice è un radicale del medesimo indice avente per radicando il prodotto/quoziente dei radicando:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{8.10}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{8.11}$$

Allo stesso modo, leggendo al contrario, si può scomporre la radice del prodotto nel prodotto delle radici:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{8.12}$$

posto che nella scomposizione non si abbiano delle radici senza senso (es indice pari e radicando negativo)

Il prodotto e quoziente di radicali con indici diversi si può eseguire: basta ridurre, per prima cosa, tali radicali allo stesso indice.

Trasporto di fattore dentro il segno di radice Quando un radicale è moltiplicato per un numero *positivo* si può portare tale numero entro radice, quale fattore del radicando, dopo averlo elevato alla potenza di esponente uguale all'intera radice.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \tag{8.13}$$

Se fuori dalla radice si trova un fattore *negativo* si potrà trasportare sotto radice il suo valore (elevando opportunamente) e lasciando fuori il segno meno. Ad esempio:

$$x\sqrt{2} = \begin{cases} \sqrt{2x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dots & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{8.14}$$

se $x < 0$,

$$x\sqrt{2} = -\underbrace{(-x)}_{>0}\sqrt{2} = -\sqrt{(-x)^2 2} = -\sqrt{2x^2} \tag{8.15}$$

Trasporto di fattore fuori dal segno di radice È possibile trasportare fuori radice solo fattori positivi (al massimo lasciare dentro il segno), *dividendo* l'esponente del segno sotto radice per l'indice della stessa (si consideri però la seconda proprietà fondamentale).
Se si trasporta fuori radice di indice pari un fattore di cui non si conosce il segno questo deve esser portato fuori in valore assoluto; invece se si trasporta fuori radice di indice dispari il fattore viene portato fuori col proprio segno. Ad esempio:

$$\sqrt[5]{3x^{17}y^{24}} = x^3y^4\sqrt[5]{3x^2y^4} \tag{8.16}$$

Potenza/radice di un radicale Per elevare a potenza un radicale in $\mathbb{R}_0^+$ si eleva a quella potenza il radicando (deriva dalle prop. fondamentali)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{8.17}$$

La radice di un radicale in $\mathbb{R}_0^+$è uguale alla radice del radicando avente per indice il prodotto degli indici.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \tag{8.18}$$

Nel caso in cui vi siano fattori esterni ad una delle radici interne, bisogna prma di tutto portarli sotto il segno id radice, ad esempio

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 2}} = \sqrt[4]{8} \tag{8.19}$$

Razionalizzazione denominatore di una frazione Una espressione contenente radicali si dice *intera* quando i radicali non compaiono nei denominatori; un'espressione radicale si può sempre trasformare con opportune operazioni in un'altra intera, applicando semplicemente dei prodotti notevoli:

- nel caso ...

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \tag{8.20}$$

- nel caso ...

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n}\sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt{m}b^m} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b} \tag{8.21}$$

- nei casi

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm b}; \quad \frac{c}{a \pm \sqrt{b}}; \quad \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}; \tag{8.22}$$

  basterà moltiplicare numeratore e denominatore per la somma oper la differenza dei termini del denominatore, al fine di sfruttare $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

- nel caso

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \tag{8.23}$$

  si applichi l'identità $(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$ sostituendo $\sqrt[3]{a} = A$ e $\sqrt[3]{b} = B$

Radicali doppi Un'espressione della forma

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \tag{8.24}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} \tag{8.25}$$

si dice radicale quadratico doppio o semplicemente radicale doppio. In alcuni casi tali espressioni possono esser trasformate nella somma o differenza di due termini, di cui almeno uno è un radicale.
In particolare se $a^2 - b$ è positivo si hanno le seguenti identità (formule di trasformazione dei radicali doppi:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \tag{8.26}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \tag{8.27}$$

8.5 Potenze ad esponente frazionario

Le potenze ad *eseponente intero positivo* sono definite come

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n volte}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 \tag{8.28}$$

Per definizione, poi $a^1 = a$ $a^0 = 1$. Le proprietà di cui esse godono:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ a^{m-n} &= \frac{a^m}{a^n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (abc)^m &= a^m b^m c^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \end{aligned}$$

Le potenze ad *esponente intero negativo* sono definite come

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad a \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}_0$$

e godono delle stesse proprietà di cui sopra.

Il concetto di potenza si può ulteriormente estendere, introducendo le potenze con *base positiva*[2] ed *esponente frazionario*, così definite:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{8.29}$$

ovvero un radicale con radicando positivo si può scruvere sotto forma di potenza con esponente frazionario.

Le potenze ad esponente frazionario godono delle stesse proprietà di quelle ad esponente intero.

[2]Se si accettassero basi negative si andrebbe incontro ad ambiguità

Capitolo 9

Equazioni di secondo grado ad una incognita

9.1 Introduzione

Una equazione di secondo grado nell'incognita x, può esser scritta nella seguente forma (detta forma *canonica*, o *normale*):

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{9.1}$$

dove a, b, c sono detti rispettivamente primo, secondo e terzo coefficiente (quest'ultimo si dice anche termine noto). Se:

- $b, c \neq 0$ l'equazione si dice completa
- altrimenti l'equazione si dice incompleta

Il primo coefficiente a si deve ritenere sempre diverso da zero, altrimenti l'equazione si riduce all'equazione di primo grado

$$bx + c = 0$$

9.2 Risoluzione delle equazioni incomplete

Qualora l'equazione sia incompleta possiamo avere tre casi: equazioni *spurie*, *pure* e *monomie*.

Equazioni spurie Si ha una equazione spuria se, dopo averla ridotta in forma normale, $c = 0$ e pertanto l'equazione assume la forma

$$ax^2 + bx = 0 \tag{9.2}$$

In questo caso l'equazione si risolve raccogliendo x ...

$$x(ax + b) = 0$$

e utilizzando la legge di annullamento del prodotto che dice che il prodotto di due o più fattori è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero. Pertanto il prodotto che compare al primo membro è pari a 0 se

$$x = 0 \vee ax + b = 0$$

ovvero se (essendo $a \neq 0$)

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \tag{9.3}$$

che corrispondono alle radici dell'equazione. L'equazione spuria ha sempre due radici reali di cui una è zero.

Equazioni pure Si ha una equazione spuria se $b = 0$ e l'equazione assume la forma

$$ax^2 + c = 0 \tag{9.4}$$

L'equazione ha come soluzioni

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \tag{9.5}$$

che a seconda dei valori assunti da c ed a può sfociare ad avere soluzioni solamente in $\mathbb{C}$

Equazioni monomie Si ha una equazione spuria se $b, c = 0$ e l'equazione assume la forma

$$ax^2 = 0 \tag{9.6}$$

essendo $a \neq 0$ dividiamo per a

$$x^2 = 0$$

tale equazione è soddisfatta solo per

$$x_1 = x_2 = 0 \tag{9.7}$$

ovvero ha due soluzioni coincidenti.

9.3 Risoluzione delle equazioni in forma incompleta

Per la risoluzione delle equazioni in forma completa si fa riferimento alla formula generale[1]:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{9.8}$$

Il valore sotto radice quadrata si dice **discriminante**:

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{9.9}$$

e dal suo esser positivo, negativo o nullo vengono in larga parte determinate le soluzioni dell'equazione in quanto se:

[1]La derivazione si trova in Dodero, libro 2, pag 95 sgg.

- $\Delta > 0$ l'equazione ha due radici reali e distinte
- $\Delta = 0$ l'equazione ha due radici reali coincidenti a $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$ l'equazione ha soluzioni solamente nel campo dei numeri complessi (le soluzioni sono complesse coniugate)

Formula ridotta Qualora b sia divisibile per 2, la formula risolutiva è semplificabile a:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}} \tag{9.10}$$

dove $\beta = \frac{b}{2}$

9.4 Equazioni frazionarie e letterali

Posto che le formule di risoluzioni vadano bene anche per queste, bisogna prestare attenzione ad alcune peculiarità, similari a quelle incontrate nelle equazioni di primo grado.

Per le **equazioni frazionarie** si dovrà innanzitutto determinare il dominio, ridurre l'equazione a forma intera, risolverla e infine verificare che le soluzioni trovate appartengano al dominio dell'equazione

Per le **equazioni letterali**, ma sarà necessario determinare gli eventuali valori dei parametri per i quali l'equazione perde significato e, se l'equazione letterale è anche frazionaria si dovrà discutere l'accettabilità delle soluzioni. Se è necessario occorrerà discutere il segno del discriminante.
Si deve infine tener presente che è possibile che in corrispondenza di particolari valori di parametri, si annulli il coefficiente del termine di secondo grado (in tal caso l'equazione diviene di primo grado, ossia come si suol dire “si abbassa di grado”).

9.5 Relazioni tra le soluzioni e i coefficienti di una equazione di secondo grado

Data l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{9.11}$$

le soluzioni reali o complesse sono come sappiamo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{9.12}$$

Calcoliamo la somma ed il prodotto delle due soluzioni. La somma è

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Il prodotto è:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \tag{9.13}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \tag{9.14}$$

ovvero:

- la somma delle radici è uguale al rapporto, cambiato di segno, tra il secondo e il promo coefficiente
- il prodotto delle radici è uguale al rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente

Le proprietà ora dimostrate valgono anche se le soluzioni non sono reali e se si vuole operare nel caso complesso; in tal caso le radici dell'equazione sono complesse coniugate, ma la loro somma e il loro prodotto sono numeri reali.

Se dividiamo per $a \neq 0$ entrambi i membri dell'equazione 9.11 si ottiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{9.15}$$

ma in vista delle relazioni tra radici e coefficienti possiamo scrivere come

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_2 x_2 = 0} \tag{9.16}$$

cioè in ogni equazione di secondo grado con il primo coefficiente uguale a 1, la somma delle radici è uguale al coefficiente del secondo termine cambiato di segno ed il prodotto è uguale al termine noto.

Applicazione: trovare due numeri reali conoscendo la loro somma ed il loro prodotto Possiamo riformulare come: trovare due numeri x_1 e x_2 sapendo che la loro somma s ed il loro prodotto p soddisfano

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 \cdot x_2 = p \end{cases} \tag{9.17}$$

con s e p assegnati. Tenendo conto del sistema, possiamo riscrivere la 9.16 come

$$\boxed{x^2 - sx + p = 0} \tag{9.18}$$

Il problema si risolverà risolvendo l'equazione di cui sopra. Se ha due soluzioni reali, le sue soluzioni sono i numeri che stiamo cercando. Se invece è $\Delta < 0$ il problema non ha soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ ed invece in $\mathbb{C}$ i numeri richiesti sono complessi coniugati.

Scrivere un'equazione di secondo grado che abbia per soluzione due numeri assegnati Basta calcolare la somma e il prodotto dei numeri assegnati e sostituirli nella 9.16.

9.6 Scomposizione del trinomio di secondo grado

Utilizzando la relazione tra coefficienti del trinomio di secondo grado e le soluzioni dello stesso possiamo mediante elaborazioni algebriche trovare una scomposizione generale del trinomio stesso.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\big(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\big) \\ &= a\big(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\big) \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \end{aligned}$$

Pertanto concludiamo che

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \tag{9.19}$$

Se le radici del trinomio sono distinte ($\Delta > 0$)i due fattori $x - x_1$ e $x - x_2$ e sono anch'essi distinti. Se le radici sono coincidenti ($\Delta = 0$) si ha $x_1 = x_2$ e quindi $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

9.7 TODO

`regola di cartesio l2 pg 112`

Capitolo 10

Equazioni di grado superiore al secondo

10.1 Introduzione e metodo generale di risoluzione

Data l'equazione

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{10.1}$$

con $n > 2$, il procedimento generale di risoluzione consiste nel fattorizzare il primo membro come prodotti di termini di grado inferiore, per applicare in un secondo momento la legge di annullamento del prodotto e determinare le radici.

Per trovare le radici e fattorizzare l'equazione originale, oltre a tentare di applicare raccoglimenti, verificare se il polinomio sia lo sviluppo di un prodotto notevole, in ultima istanza si utilizzi il teorema del resto: si trovano tutti i divisori (positivi e negativi) del termine noto a_n e quindi tutti i divisori (positivi e negativi) del coefficiente a_0. Qualunque frazione avente per numeratore uno qualsiasi dei divisori del termine noto e per denominatore uno qualsiasi dei divisori del primo coefficiente può essere una soluzione e non resta che sostituire al posto della x per verificare se tale frazione è davvero una soluzione dell'equazione data.

Numero di radici Supponendo che il primo membro si possa scindere in n equazioni di primo grado, allora l'equazione avrà n radici reali.
Se invece nella scomposizione in fattori vi è per esempio anche un solo fattore di secondo grado non decomponibile in fattori di primo grado, allora l'equazione avrà un numero di soluzioni reali minore di n (eventualmente nessuna soluzione).

Teorema fondamentale dell'algebra In generale si può dimostrare che data una equazione algebrica di grado n nell'incognita x questa ha sempre n soluzioni nel campo complesso, mentre nel campo reale ha un numero di soluzioni minore o al più uguale a n.

10.2 Equazioni riconducibili a equazioni di primo o di secondo grado

Di sopra è stata riportata un metodo di soluzione generale. Esaminiamo ora alcuni particolari tipi di equazioni di grado superiore al secondo la cui risoluzione si può ricondurre a quella di equazioni di primo o di secondo grado

10.2.1 Equazioni biquadratiche

La forma più generale di un'equazione di tale tipo è:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{10.2}$$

con $a \neq 0$.

10.2.1.1 Equazioni biquadratiche incomplete

La **prima forma** si ha quando $c = 0$ per cui la biquadratica assuma la forma

$$ax^4 + bx^2 = 0 \tag{10.3}$$

Raccogliendo x^2 ed applicando la legge di annullamento del prodotto avremo:

$$x^2(ax^2 + b) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = -\frac{b}{a}$$

Pertanto se a e b sono discordi l'equazione avrà quattro soluzioni reali (due a 0 e più o meno la radice della seconda); se invece a e b sono concordi l'equazione proposta avraà per soluzione reale solo $x = 0$ (radice doppia).

La **seconda forma**, quando $b = 0$, assume la forma

$$ax^4 + c = 0 \tag{10.4}$$

da cui

$$x^4 = -\frac{c}{a}$$

Se a e c sono *concordi*, l'equazione non ha soluzioni reali. Se a e c sono *discordi* si ha

$$x^2 = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

e solo dal valore $x^2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ si hanno le due soluzioni reali dell'equazione data:

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{-\frac{c}{a}}} = \pm\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$$

10.2.1.2 Equazioni biquadratiche complete

Nella forma completa si pone sostituendo $x^2 = y$ e quindi $x^4 = y^2$ nell'equazione originale, trasformandola in una equazione di secondo grado in y

$$ay^2 + by + c = 0$$

Si risolve normalmente tale equazione ricavando y_1 e y_2, poi si ritorna ad x applicando

$$x = \pm\sqrt{y_1}$$
$$x = \pm\sqrt{y_2}$$

Per esprimere in forma compatta le soluzioni di una biquadratica, la formula è

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{10.5}$$

10.2.2 Equazioni binomie

Si dicono binomie le equazioni riconducibili

$$x^n = a \tag{10.6}$$

dove n è un intero positivo ed a un numero reale qualunque. Si risolvono mediante l'applicazione del concetto di radice, per cui, limitandosi al campo reale si ha:

- se n è pari e $a \geq 0$, $\rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$
- se n è dispari, $\rightarrow x = \sqrt[n]{a}$

10.2.3 Equazioni trinomie

Sono una forma di biquadratica generalizzata, e si presentano nella forma

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0 \tag{10.7}$$

per $m = 2$ si ha l'equazione biquadratica già studiata. Per la risoluzione si segue un procedimento analogo a quello usato per le equazioni biquadratiche, ponendo

$$x^m = y$$

che condurrà all'equazione di secondo grado nell'incognita y

$$ay^2 + by + c = 0$$

si troveranno y_1 e y_2 per poi riportarle ad x mediante la radice m-esima.

Capitolo 11

Disequazioni di secondo grado ad una incognita

11.1 Segno di un trinomio di secondo grado

Considerando la funzione quadratica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{11.1}$$

le radici della stessa sono le soluzioni reali, se esistono dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{11.2}$$

tali soluzioni sono indicate con x_1, x_2.
Nell'ipotesi che esistano e siano distinte due radici, l'intervallo (x_1, x_2) è detto intervallo delle radici.

Si sa che in corrispondenza delle radici la funzione quadratica si azzera; siamo però interessati a *studiare il segno* di detta funzione. I casi variano a seconda dell'esistenza o meno delle radici, dal loro esser distinte, e dal segno di a. Si possono distinguere tre casi a seconda del valore assunto dal discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta > 0$ In questo caso la funzione ammette 2 radici reali e distinte x_1, x_2, tali che (convenzionalmente) $x_1 < x_2$. L'intervallo (x_1, x_2) è detto intervallo delle radici.
In questo caso la funzione quadratica assume valori concordi con il segno di a per valori esterni all'intervallo delle radici e valori di scordi per valori di x interni

$\Delta = 0$ Vi sono 2 radici coincidenti $x_1 = x_2$; in questo caso $f(x)$ ha segno concorde con a $\forall x \in \mathbb{R} | x \neq x_1$ e si annulla per x_1

$\Delta < 0$ In questo caso non esistono radici reali e $f(x)$ è concorde con a, $\forall x \in \mathbb{R}$.

11.2 Disequazioni di 2° grado

Sono espressioni nell'incognita x riconducibili alla forma canonica

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0 \tag{11.3}$$

Per risolverle bisogna determinare il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ e verificare per quali valori di x questo soddisfa la disequazione data.

11.2.1 Applicazioni

Sistemi di disequazioni Si risolve semplicemente risolvendo le singole espressioni ed effettuando l'intersezione dei risultati

Disequazioni di grado superiore al secondo Le *Biquadratiche e Trinomie* si risolvono effettuando la sostituzione e trasformando in una disequazione di 2° grado in y; i risultati vengono poi riportati in x e analizzati ad oltranza.

Le *monomie od altro* si cerca di fattorizzare anche mediante Ruffini e risolverle normalmente

Equazioni con valore assoluto $\boxed{|f(x)| = g(x)}$ Si risolvono due sistemi misti (eq/diseq), considerando come soluzione l'unione delle soluzioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Disequazioni con valore assoluto: $f(x) \lesseqgtr g(x)$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ Si risolvono come segue:

$$\boxed{|f(x)| > g(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)$$

$$\boxed{|f(x)| \geq g(x)} \quad \rightarrow \quad f(x) \geq g(x) \vee f(x) \leq -g(x)$$

$$\boxed{|f(x)| < g(x)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$\boxed{|f(x) \leq g(x)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni con più di un valore assoluto Si costruisce un grafico delle espressioni sotto valori assoluto e si costruiscono tanti sistemi (misti O di disequazioni) quanti sono gli intervalli

Determinazione dominio espressioni con radicali Si imposta un sistema di disequazioni in cui si pongono tutti i radicandi ≥ 0

Sistemi di eq/diseq con più di un valore assoluto Bisogna costruire un grafico dei segni per tutti i moduli di tutte le n disequazioni/equazioni dopodichè si costruiscono tanti sistemi (misti o di disequazioni) quanti sono gli intervalli. I sistemi hanno n+1 equazione/disequazione (1 per l'intervallo considerato e le n originali in cui sono però tolti i segni di modulo a seconda dell'intervallo considerato).

Capitolo 12

Equazioni/disequazioni irrazionali

Un'equazione o una disequazione in una incognita si dice irrazionale quando in essa compaiono uno o più radicali contenenti l'incognita. Ci si occuperà principalmente di equazioni con radice quadrata, cubica e si estenderà poi alla radice n-esima (sempre in $\mathbb{R}$).

12.1 Equazioni irrazionali

Dominio Sappiamo che un radicale con indice pari esiste ed è positivo (o nullo) se il suo radicando è positivo (o nullo). Un radicale con indice dispari esiste indipendentemente dal valore del radicando. Questo servirà innanzitutto per la determinazione del **dominio** dell'equazione; si dovrà porre a sistema tutti i radicandi dei radicali quadratici, imponendo che siano ≥ 0. Si noti che in una situazione del genere:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$$

bisognerà invece imporre $x - 1 > 0$.

Risoluzione Per risolvere una equazione irrazionale si cercherà di trasformarla in una razionale (ove l'incognita non figura più sotto radice), elevando opportunamente gli entrambi membri una o più volte

- per radicali ad indici dispari, l'equazione ottenuta dopo elevamento a potenza è equivalente;

- se gli esponenti sono pari, l'equazione ottenuta non è in genere equivalente, in quanto si possono introdurre soluzioni estranee all'equazione di partenza.

Un esempio:

$$\begin{aligned}
\sqrt{16-x} &= x-4 \\
\left(\sqrt{16-x}\right)^2 &= (x-4)^2 \\
16-x &= x^2+16-8x \\
x^2-7x &= 0
\end{aligned}$$

Da cui discende che le radici dell'equazione sarebbero 0 e 7, ma solo questa seconda verifica l'equazione iniziale.
Elevando al quadrato entrambi i membri di una generica equazione

$$A(x) = B(x) \tag{12.1}$$

la nuova equazione, oltre a tutte le soluzioni reali della precedente ha anche quelle reali dell'equazione

$$A(x) = -B(x)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
[A(x)]^2 &= [AB(x)]^2 \\
[A(x)]^2 - [B(x)]^2 &= 0 \\
[A(x)+B(x)] \cdot [A(x)-B(x)] &= 0
\end{aligned}$$

che per la legge dell'annullamento del prodotto è soddisfatta se

$$\begin{aligned}
A(x)-B(x)=0 &\quad\vee\quad A(x)+B(x)=0 \\
A(x)=B(x) &\quad\vee\quad A(x)=-B(x)
\end{aligned}$$

Se si vuole evitare di calcolare tutte le soluzioni e verificarle una ad una, nel caso in cui si elevino i membri ad indici pari bisognerà restringere le soluzioni ammesse ponendo condizioni in un sistema. In particolare dovrà esser messo a sistema:

- le condizioni di *appartenenza al dominio*: se vi sono molteplici radicali ad indice positivo e molteplici disequazioni a determinare il dominio, conviene prima individuare i valori di x, invece di porre le disequazioni del dominio direttamente nel sistema finale

- la condizione di *concordanza di segno* tra i due membri dell'equazione (che va posta ogni volta che si eleva a indice pari i due membri della disequazione).
  Per poter elevare a potenza pari i due membri di una equazione, per averne una equivalente si deve avere che abbiano lo stesso segno.
  Bisogna assicurarsi di considerare i valori della x per cui i due membri hanno lo stesso segno (sono entrambi positivi). Se al primo membro vi è un radicale elevato (quindi positivo o al più nullo) e al secondo membro un'espressione con l'incognita, bisogna imporre il secondo membro ≥ 0 (proseguendo nel sistema con le x che soddisfano la condizione). Se al secondo membro vi è un radicale che viene elevato al quadrato, non serve perché sotto dominio sarà sicuramente positivo o nullo.

- l'equazione sotto studio, dopo averla opportunamente elevata a potenza per eliminare i radicali.

Finora abbiamo supposto i radicali avessero indici omogenei; qualora gli *indici siano diversi*, la strategia risolutiva consiste nel portarli ad indice comune e dopo effettuare l'elevamento a potenza per l'eliminazione del radicale; nel caso si elevi ad esponente pari, occorrerà verificare poi le soluzioni nell'equazione di appartenenza.

12.2 Disequazioni irrazionali

Ci si occuperà per lo più di disequazioni con radicali quadratici o cubici.
Prima di partire con la soluzione occorre determinare il *dominio*, in maniera analoga a ciò che avviene con le equazioni. Similmente alle equazioni, poi, per risolvere una disequazione irrazionale si cerca di trasformarla in una razionale per mezzo di opportuni elevamenti di entrambi i membri. Essendo la disequazione una diseguaglianza, tale operazione è permessa solo sotto certe condizioni, necessarie a conservare il corretto senso della diseguaglianza:

- l'innalzamento a potenza con esponente pari di entrambi i membri di una disequazione è possibile solo se detti membri sono ≥ 0. La nuova disequazione è equivalente a quella data, ma solo nel dominio della precedente.
  Il fatto che l'innalzamento sia possibile solo se entrambi i membri sono positivi o nulli deriva dal principio delle diseguaglianze tra numeri per cui

  $$a < b \Longleftrightarrow a^{2n} < b^{2n} \quad a, b > 0, n \in \mathbb{N}$$

  $2n$ è il generico indice pari; dalla diseguaglianza $3 < 4$, si deduce $3^2 < 4^2$, poiché la diseguaglianza iniziale è vera ed entrambi i numeri sono ≥ 0. Ma tale principio potrebbe non valere: ad esempio $-4 < 3$, ma non è vero che $(-4)^2 < (3)^2 \Rightarrow 16 < 9$. E specularmente mentre è vera $(-2)^2 < (-3)^2$, non è vera $-2 < 3$.

- l'innalzamento ad una potenza con esponente dispari di entrambi i membri di una disequazione la trasforma in un'altra sempre equivalente alla data. Ciò deriva da

  $$a < b \Longleftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} \quad a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

  con $2n+1$ generico indice dispari. Da $2 < 3$ si deduce $2^3 < 3^3$ e viceversa $-2 < 3 \rightarrow -2^3 < 3^3 \rightarrow -8 < 27$

12.2.1 Risoluzione

Considerando solo disequazioni nelle quali compare un radicale, per risolverle si isola il radicale, facendo in modo che sia preceduto dal segno $+$. Le due tipologie di equazioni possibili saranno nella forma:

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \vee \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$
$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \vee \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

La soluzione si biforca a seconda che n sia pari (consideriamo come esponente $2n$) o dispari $(2n+1)$.

12.2.1.1 Indice pari

Nel caso di *indice pari* bisogna:

- porre la condizione di esistenza del radicale ($f(x) \geq 0$) per l'appartenenza al dominio della soluzione)
- considerare il segno della disequazione, e in seconda analisi il segno di $g(x)$.

Se si è nel caso $\boxed{\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)}$, con il primo membro necessariamente positivo o nullo (dopo la condizione di appartenenza al dominio) e il secondo che gli deve esser maggiore, bisogna imporre che anche il secondo sia positivo (nullo non è ammesso, dato che deve esser superiore al primo membro, il quale invece può esserlo): $g(x) > 0$.
Sotto queste due condizioni, essendo entrambi i membri positivi possiamo elevarli alla $2n$ e risolvere. Concludendo, la risoluzione di $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ si sostanzia nella risoluzione del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^{2n} \end{cases} \tag{12.2}$$

Nel caso invece di $\boxed{\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)}$, il sistema diviene:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^{2n} \end{cases} \tag{12.3}$$

Per $\boxed{\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)}$, a contrario, il secondo membro può esser anche negativo. Nel caso in cui il secondo membro sia positivo o nullo, si potranno elevare alla potenza 2n-esima entrambi i membri e risolvere. Nel caso sia negativo la disequazione sarà soddisfatta da qualsiasi valore di x che soddisfa $f(x) \geq 0$ (in tal caso il primo membro positivo o nullo sarà senz'altro maggiore di una quantità negativa. L'insieme delle soluzioni di $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ sarà data dall'unione degli insiemi delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^{2n} \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{12.4}$$

ma se si impone a sistema $f(x) > [g(x)]^{2n}$, ciò implica che f(x) sia maggiore di una potenza con esponente pari (e quindi positiva o al più nulla), la prima condizione è superflua. Il sistema si semplifica in

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^{2n} \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{12.5}$$

Infine per $\boxed{\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)}$:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^{2n} \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{12.6}$$

12.2.1.2 Indice dispari

Infine, nel caso di *indice dispari* l'elevamento a potenza di indice dispari restituisce una disequazione equivalente, pertanto si procederà elevando e risolvendo

$$f(x) > [g(x)]^{2n+1} \tag{12.7}$$

$$f(x) < [g(x)]^{2n+1} \tag{12.8}$$

Capitolo 13

Sistemi di equazioni di grado superiore al primo in R

Abbiamo visto che un sistema di equazioni è l'insieme di più equazioni con le stesse incognite, che devono esser contemporaneamente soddisfatte dagli stessi valori attribuiti alle stesso. Risolvere un sistema vuol dire trovare le soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema.
Considereremo nel nostro studio, solo *sistemi con un numero di equazioni uguale al numero di incognite.*
Ricordiamo che il **grado di un sistema** di equazioni è il prodotto dei gradi delle singole equazioni del sistema. Se il sistema è di grado n e non è indeterminato, esso ha al massimo n soluzioni.
Cominceremo con il considerare sistemi di secondo grado di due equazioni con due incognite (una di tali equazioni sarà di primo grado e la restante di secondo).

13.1 Sistemi di secondo grado

Per risolvere un tale sistema, salvo casi particolari considerati nel seguito, si ricorre al **metodo di sostituzione**: si risolve l'equazione di primo grado rispetto ad una incognita e si sostituisce l'espressione trovata nell'equazione di secondo grado, ove viene così eliminata una delle due incognite. Essa è detta **equazione risolvente del sistema** e consiste in una equazione di secondo grado (solitamente) in una incognita.
Si cerca di risolvere l'equazione risolvente per determinare i valori di una incognita che fanno parte delle soluzioni. Si procederà poi sostituendo nell'equazione di primo grado del sistema per trovare l'incognita della/delle soluzione/soluzioni rimanente/i.
Si possono presentare i seguenti casi:

- l'*equazione risolvente* è **impossibile** (almeno in R, se ha determinante minore di 0); in tal caso in R è impossibile anche il sistema

- l'equazione risolvente (e con essa il sistema che l'ha generata) ha una sola soluzione (ovvero due soluzioni coincidenti)

- l'equazione risolvente (e con essa il sistema che l'ha generata) ha due soluzioni distinte

Se l'equazione risolvente risulta invece di primo grado si procede come se fosse un sistema lineare:

- se determinata da essa si ricava il valore dell'incognita che sostituito nell'altra equazione del sistema permette di individuare la soluzione allo stesso. In questo caso il sistema ha una sola soluzione e non si parla di due soluzioni coincidenti come in precedenza
- se si perviene ad una identità (es 1=1) il sistema è indeterminato
- se si perviene ad un'eguaglianza impossibile (0=1) il sistema è impossibile

13.2 Sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite

Quanto detto al paragrafo precedente si può estender ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite.
Si cercherà , operando successive sostituzioni ricavabili dalle equazioni di primo grado, di eliminare dall'equazione di secondo grado tutte le incognite tranne una, ottenendo l'equazione risolvente e procedendo come in precedenza.

13.3 Sistemi simmetrici

Si dice simmetrico un sistema che rimane invariato se si scambiano tra loro le due incognite. Ad esempio

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 5xy + x + y = 1 \\ 4x + 4y = 10 + x^2 + y^2 \end{cases}$$

è simmetrico in quanto

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 5xy + x + y = 1 \\ 4x + 4y = 10 + x^2 + y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 7y^2 + 7x^2 - 5yx + y + x = 1 \\ 4y + 4x = 10 + y^2 + x^2 \end{cases}$$

In ogni sistema simmetrico si ha pure simmetria nelle soluzioni, cioè il sistema ammette la soluzione $x = a, y = b$ ammette pure $x = b, y = a$.

Tra i sistemi simmetrici sono importanti quelli che si presentano (o si possono ricondurre) alla **forma normale** (o *canonica*):

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \tag{13.1}$$

con s, p due numeri reali. In generale **per risolvere un sistema simmetrico**, si cerca mediante opportuni artifici di ricondurlo alla forma canonica.
Per *risolvere un sistema in forma canonica* si devono determinare due numeri

reali la cui somma sia s e il cui prodotto sia p. Tali numeri, se esistono sono le soluzioni dell'equazione

$$t^2 - st + p = 0 \tag{13.2}$$

che è detta equazione associata al sistema (quello in forma canonica). Avendo determinato t_1, t_2, le soluzioni del sistema 13.1 sono le coppie ordinate $(t_1; t_2)$ e $(t_2; t_1)$ ovvero

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_1 \end{cases}$$

Tale metodo si applica tanto ai sistemi di secondo grado quanto a quelli di grado superiore, cercando sempre di trasformare in forma canonica.

Artifici utili per la riduzione a forma canonica Nella trasformazione a forma canonica, alcuni artifici possono tornare utili. Dal prodotto notevole $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ possiamo ricavare

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

Tale identità è particolarmente utile nella risoluzione dei sistemi simmetrici perché consente di sostituire al posto della somma dei quadrati delle incognite, un'espressione in cui figurano la somma e il prodotto delle incognite. Per i sistemi di grado superiore al secondo possono tornare utili anche

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ x^4 + y^4 &= (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2(xy)^2 \end{aligned}$$

e così via

13.4 TODO

`Altri sistemi vari: 12 pag 211`

Capitolo 14

Geometria razionale - Nozioni fondamentali

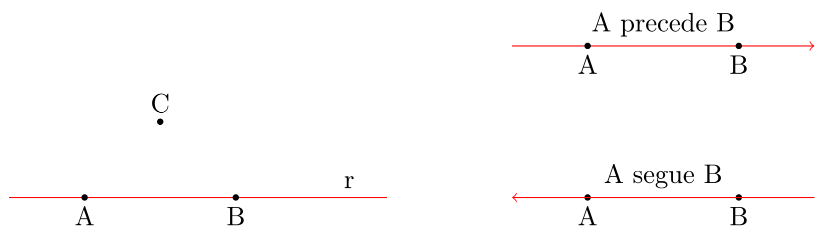
14.1 Concetti primitivi

Sono concetti primitivi, ovvero di cui non si da nessuna definizione i concetti di *punto* , *retta*, *piano* e *spazio*. Questi costituiscono gli **enti geometrici fondamentali**.
Nello studio della geometria i **punti** vengono designati con le lettere maiuscole: A, B, C.
Si definisce **figura geometrica** (o semplicemente figura) un insieme qualunque di punti. Lo *spazio* è l'insieme di tutti i possibili punto e può considerarsi, perciò come la figura che contiene tutti i punti e quindi tutte le figure.

14.2 Linee, rette e segmenti, curve

Una **linea geometrica** (o più semplicemente *linea*) si genera da un punto che si muove nello spazio: tra tutte le linee che si possono immaginare, la più importante è la **retta**. Una linea che non sia una retta si dice **curva**.
Le **rette** si indicano con lettere minuscole: a, b, c. Proprietà peculiare della retta è che per due punti dello spazio passa sempre una e una sola retta. Pertanto se due rette hanno due punti in comune, coincidono. Se ne hanno solo uno, questo si dice punto d'intersezione o di incontro.
Per dire che un punto A appartiene alla retta r si utilizza la notazione insiemistica $A \in r$ (fig 14.1a).
Quando su una retta è fissato un **verso di percorrenza**, si parla di *retta orientata*. La retta orientata viene indicata con una freccia (i punti sopra di essa saranno a loro volta orientati, fig 14.1b). Di una retta non esiste origine (punto che precede tutti gli altri) ne fine (punto che segue).

Un punto appartenente a una retta la divide in due parti, chiamate **semirette**. Tale punto viene detto origine delle semirette (fig 14.2a).
Se sopra una retta si segnano due punti A e B distinti la retta viene divisa in tre parti: la semiretta di origine A, il segmento AB e la semiretta di origine B (fig 14.2b). Pertanto definiamo come **segmento** la parte di una retta compresa

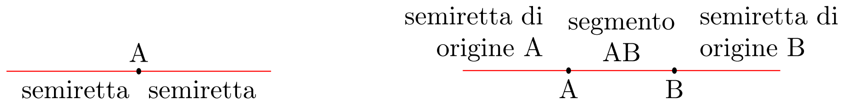


(a) Punti che appartengono o meno alla retta. $A, B \in r, C \notin r$.

(b) Rette orientate e precedenza.

Figura 14.1: Punti e retta

tra due suoi punti, che si dicono *estremi* del segmento.

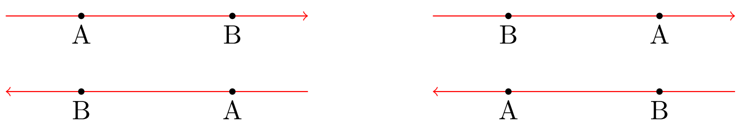


(a) Semirette.

(b) Segmenti e semirette.

Figura 14.2: Segmenti e semirette

Anche i segmenti su una retta orientata possono avere un orientamento. Considerando due punti qualsiasi A e B di una retta orientata r, il segmento che ha per estremi tali punti può esser percorso da A verso B (in tal caso lo indicheremo con $\overrightarrow{AB}$ o semplicemente con AB) o in senso contrario ($\overrightarrow{BA}$ o BA).



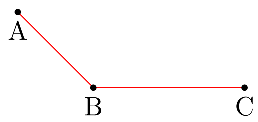
(a) Segmenti orientati AB.

(b) Segmenti orientati BA.

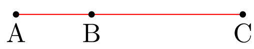
Figura 14.3: Segmenti orientati

Spesso si pone il problema della *misura dei segmenti*: misurare la lunghezza del segmento AB significa confrontarlo con un altro segmento, u, scelto come unità di misura. Nel caso di un segmento non orientato AB la misura è un numero positivo indicato mediante $\overline{AB}$ o talvolta come $|\overline{AB}|$.
La misura un segmento orientato sopra una retta orientata è invece una misura relativa, dotata di segno. In particolare la misura è un numero *positivo* se il segmento ha la stessa orientazione della retta, *negativo* in caso contrario.
In questo caso, poi alla misura delle lunghezza del segmento viene associato un numero relativo. In particolare se AB è un segmento positivo, la sua misura sarà un numero positivo, al contrario se negativo.

Due segmenti aventi in comune solo un estremo si dicono *consecutivi* (fig 14.4a); due segmenti consecutivi e situati sulla medesima retta si dicono *adiacenti* (fig 14.4b).



(a) Segmenti consecutivi.



(b) Segmenti adiacenti.

14.3 Superficie, piani

Altro concetto primitivo; come ogni linea si può considerare generata da un punto mobile nello spazio, così ogni superficie può considerarsi generata da una linea che si muove nello spazio (ed idealizzata come un velo).
I piani si indicano di solito con le minuscole dell'alfabeto greco: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Fra le varie superfici la più importante è la **superficie piana** o più semplicemente *piano*: il piano è generato da una retta che si muove nello spazio.
Il piano ha due proprietà:

- per tre punti non allineati dello spazio passa un solo piano;
- la retta passante per due punti di un piano giace interamente nel piano

Specularmente al punto per semiretta per la retta, una retta giacente in un piano lo divide in due regioni detti **semipiani**. La retta di divisione si dice *origine del semipiano.*

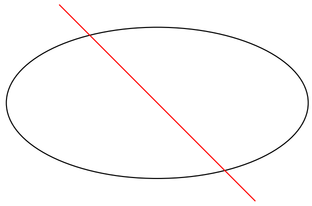
Una figura i cui punti appartengono tutti ad un piano si dice **figura piana**, in caso contrario la figura è una **figura solida**.

Una linea non retta (ovvero una curva) tracciata in un piano si dice **curva piana**, in caso contrario **curva sghemba**.
Il tratto di linea compreso tra due punti A e B si chiama **arco**, di cui i punti A e B sono gli estremi.
Diremo che una curva è **chiusa** se partendo da uno qualunque dei suoi punti e percorrendo tutta la linea sempre nello stesso senso, si può tornare al punto di partenza. Una linea non chiusa si dice **aperta**.
Una linea piana si dirà **semplice** (*o non intrecciata*) se non interseca mai se stessa.

La figura costituita da una linea piana chiusa semplice e dai suoi punti interni si dice **convessa** se ogni retta passante per un qualsiasi punto interseca il contorno in due soli punti (fig 14.4a). Se invece esiste qualche retta che passando per un punto interno interseca il contorno in più di due punti la figura si dice **concava** (fig 14.4b).

14.4 Angoli

Si dice **angolo** la parte di piano limitata da due semirette aventi la stessa origine: le semirette si dicono *lati* dell'angolo, l'origine comune si dice *vertice.* Dei due angoli (14.5) formati dalle semirette distinte a e b si dice **convesso** quello che



(a) Figura convessa.

Figura 15 pag 448

(b) Figura concava.

Figura 14.4: Figure concave e convesse

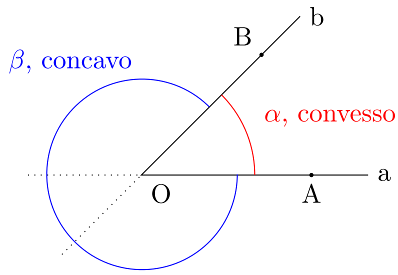


Figura 14.5: I due angoli associati alle semirette considerate

non contiene nel suo interno i prolungamenti dei lati, **concavo** quello che li contiene. Quando si parla di angolo senza specificare meglio, *si intende quello convesso.*
Un angolo si indica alternativamente:

- col nome dei suoi lati: se si dice angolo ab si intende l'angolo convesso formato dalle semirette a b e si indica con $\widehat{ab}$

- attraverso due punti A B distinti dall'origine. appartenenti ciascuno ad un lato: l'angolo convesso si indica con $\widehat{AOB}$

- se è chiaro dal contesto, per brevità di notazione si indicano con una lettera greca: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Se si pone la **misurazione dell'ampiezza dell'angolo**, analogamente a ciò che avviene coi segmenti si necessita di una *unità di misura* per il confronto: il sistema tradizionale si assume come unità di misura la novantesima parte dell'angolo formato da due rette perpendicolari (angolo retto). Possiamo definire vari tipi di angoli in relazione alla loro ampiezza (14.6).

Se sull'angolo si fissa uno dei due lati come primo e l'altro come secondo, si ha un **angolo orientato**. Solitamente nell'angolo $\widehat{ab}$ si intende a come primo lato e b come secondo. Detto angolo sarà **orientato positivamente** se la rotazione avviene in senso antiorario, **negativamente** se la rotazione è in senso orario.
Specularmente a ciò che avviene coi segmenti, la **misura** dell'ampiezza sarà un numero positivo nel primo caso e negativo nel secondo.

Due angoli si dicono **consecutivi** quando hanno lo stesso vertice ed un lato in comune; due consecutivi sono *adiacenti* quando hanno i lati non comuni sul prolungamento l'uno dell'altro.

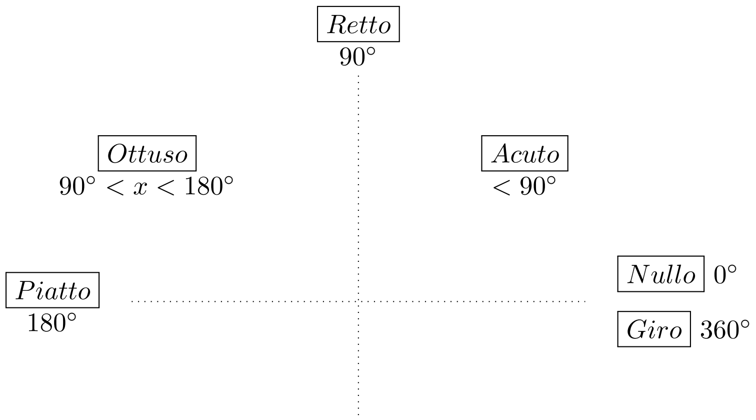
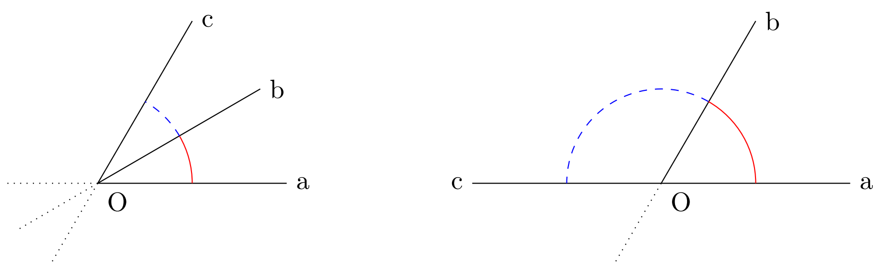


Figura 14.6: Tipi di angoli in relazione all'ampiezza



(a) Angoli consecutivi.

(b) Angoli adiacenti.

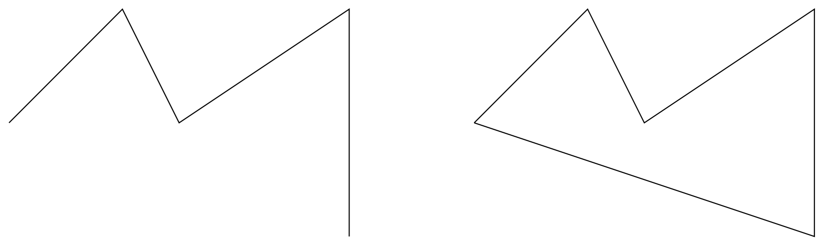
Figura 14.7: Angoli consecutivi ed adiacenti

14.5 Poligoni

Una **spezzata aperta** è una figura formata da più segmenti consecutivi (14.8b). I segmenti si dicono *lati* della spezzata, e i loro estremi *vertici*. Ogni vertice è comune a due lati della spezzata, tranne il primo e l'ultimo, che si dicono *estremi*. Se si aggiunge un segmento che ne congiunge gli estremi si ottiene una **spezzata chiusa** (14.8b). Se due lati non consecutivi si intersecano, la spezzata si dice intrecciata. Nel seguito si considereranno solo spezzate non intrecciata.

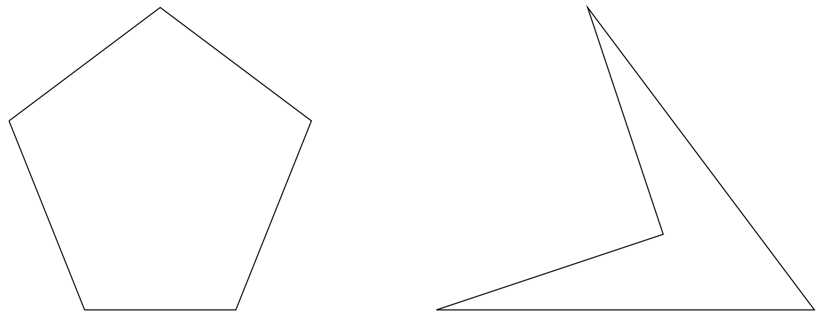
Un **poligono** è la figura piana formata da una spezzata chiusa non intrecciata (ovvero i cui lati non si intersecano) e dalla parte finita di piano da essa limitata. I vertici e i lati della spezzata saranno anche i vertici e i lati del poligono.
Un poligono ha sempre un ugual numero di lati e di vertici
Un poligono si dice **concavo** se il prolungamento di un suo lato lo divide in due parti; si dice **convesso** negli altri. casi. In seguito si parlerà solitamente di poligono convessi.

Ciò che da il nome al poligono è il numero dei lati/angoli: infatti poligoni di $3, 4, 5, 6, \ldots, 12, \ldots, 15$ lati si chiamano rispettivamente triangolo quadrangolo/quadrilatero, pentagono, esagono, ..., dodecagono, ..., pentadecagono.



(a) Spezzata aperta. (b) Spezzata chiusa.

Figura 14.8: Spezzate



(a) Poligono convesso. (b) Poligono concavo.

Figura 14.9: Poligoni concavi e convessi

14.6 Congruenza tra figure piane

Le immagini presentate in figura 14.10 non sono uguali perché essendo insiemi di punti, dovrebbero essere formati dagli stessi punti per esser considerati insiemi uguali; e così non è.
Però presentano la proprietà che se ritagliate sono sovrapponibili e potrebbero esser posizioni diverse di una stessa figura in movimento senza deformazione (*movimento rigido*). Perciò si dicono figure **congruenti**. Due figure congruenti

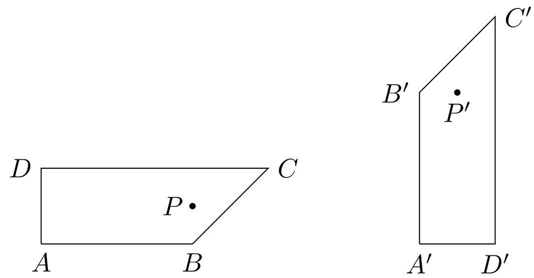


Figura 14.10: Congruenze

sono composte da punti, angoli e segmenti *corrispondenti*: es nella figura l'angolo $\widehat{DAB}$ è corrispondente all'angolo $\widehat{D'A'B'}$, così come il punto P lo è a P' e

il segmento CD lo è di $C'D'$.
Allo stesso modo delle figure **anche per altre entità geometriche si può applicare il concetto di congruenza** (es segmenti, angoli ecc). A parte questo rispettivamente tutte le rette, le semirette i piani, i semipiani e gli angoli piatti sono congruenti fra loro.
Per indicare la congruenza di due figure si usa il simbolo $\cong$, e si scrive per esempio $F \cong F'$.

Due segmenti (risp. angoli) possono essere congruenti o meno. Nel primo caso la lunghezza dei due segmenti (l'ampiezza dei due angoli) è la medesima. Nel secondo caso ve ne è un più lungo (ampio) dell'altro.

14.7 Algebra di segmenti ed angoli

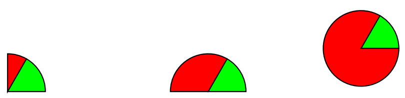
14.7.1 Somma algebrica di segmenti

Se due segmenti AB e BC sono adiacenti, il segmento AC costituisce la loro somma $AC = AB + BC$.
Per *sommare due segmenti generici* MN e PQ non necessariamente adiacenti, basterà prendere su una retta r, a partire da un generico punto A, due segmenti congruenti a quelli dati e posti in maniera adiacente.
La *differenza* di due segmenti è invece il segmento che sommato al secondo è congruente al primo. In maniera analoga si definiranno moltiplicazione e divisione.

14.7.2 Somma algebrica di angoli

Per *sommare due angoli* $\widehat{MNP}$ e $\widehat{QRS}$, basta disporre consecutivamente, con il vertice in uno stesso punto 0 qualsiasi, due angoli rispettivamente congruenti ai due angoli dati. Specularmente al caso dei segmenti la *differenza* di due angoli è un terzo angolo che, sommato al secondo è congruente al primo. In maniera analoga si definiranno moltiplicazione e divisione.

In relazione all'operazione di somma tra angoli si definiscono angoli **complementari** (gli angoli la cui somma è congruente ad un angolo di 90°) **supplementari** (risp 180°) ed **esplementari** (360°).



(a) (b) (c)

Figura 14.11: Angoli complementari (a), supplementari (b), esplementari (c)

Capitolo 15

Geometria analitica

15.1 Sistema di coordinate cartesiane

15.1.1 A 1 dimensione

Su una retta r su cui è fissato un *verso di percorrenza.* fissiamo arbitrariamente un punto O detto **origine**; esso divide r in due semirette, una positiva che contiene i punti successivi a O nel verso positivo e l'altra negativa che contiene i punti che precedono O.
Dopo aver fissato un'unità di misura u, facciamo corrispondere a un generico punto P di r quel numero reale relativo x che è la misura algebrica, rispetto a u, del segmento orientato OP.
Così facendo abbiamo fissato un *sistema di coordinate* sulla retta orientata r. Si consideri infine che in ogni semiretta i punti sono infiniti. Si è pertanto

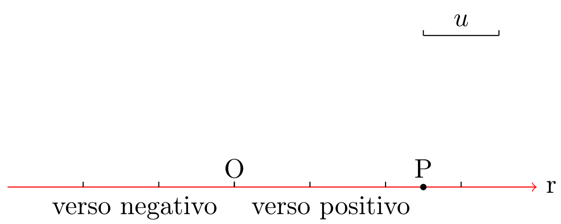


Figura 15.1: Sistema di coordinate a una dimensione.

potenzialmente stabilito una *corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali*: a ogni punto della retta corrisponde uno e un solo numero reale e viceversa. Tale corrispondenza biunivoca ci consente di individuare i punti di un retta (enti geometrici) mediante numeri, creando un legame tra geometria e algebra.

15.1.2 A 2 dimensioni: piano cartesiano

Consideriamo ora nel piano due rette *perpendicolari*, che chiameremo x e y, di cui la prima orizzontale[1], ed entrambe caratterizzate da un sistema di coordinate

[1] Pertanto la seconda verticale

tale che:

- il punto O è di intersezione è l'origine comune dei due sistemi di coordinate;
- il verso positivo di x è verso destra, di y verso l'alto;
- il sistema è *monometrico* ovvero le unità di misura sui due asse x e y sono le stesse [2]

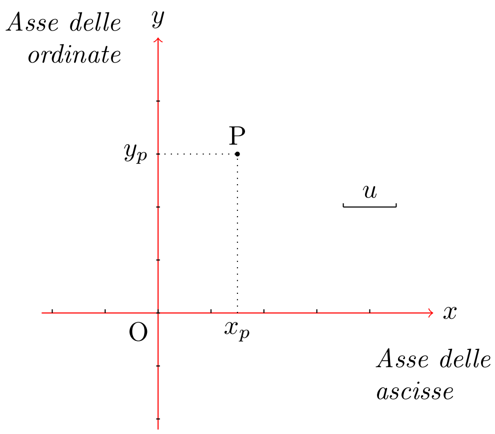


Figura 15.2: Piano cartesiano.

Allora si dice alternativamente che

- che si è fissato un **piano cartesiano**;
- *nel piano è stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale*[3];
- il piano è stato riferito a un sistema di assi cartesiani xOy.

Specularmente a quello che è avvenuto in precedenza, al punto P è possibile far corrispondere biunivocamente la coppia di numeri che costituiscono proiezione ortogonale rispettivamente sugli assi x e y. Tali proiezioni si chiamano rispettivamente *ascissa* e *ordinata*.
Per indicare che x_p e y_p sono coordinate del P, scriviamo

$$\boxed{P(x_p; y_p)}; \quad P = (x_p; y_p); \quad P \equiv (x_p; y_p) \tag{15.1}$$

che si leggono tutte "P di coordinate x e y".
Detta corrispondenza biunivoca ci permette di individuare punti di un piano (enti geometrici) in modo analitico, ossia mediante numeri.
I punti del piano cartesiano costituiscono la rappresentazione grafica del prodotto cartesiano $R \times R$:

$$R \times R = R^2 = \{(x; y) | x \in R \wedge y \in R\}$$

[2]A contrario vi possono esser sistemi *dimetrici*.
[3]Si potrebbero anche considerare sistemi di riferimento cartesiani non ortogonali (ovvero dove x e y non sono due rette perpendicolari).

15.1.3 A 3 dimensioni: spazio cartesiano

Se si fissano nello spazio tre rette x, y, z con origine in O, a due a due ortogonali e che si presentano tutte e tre con un verso fissato e unità di misura monometrica si dice, alternativamente, che:

- abbiamo fissato uno **spazio cartesiano**;
- otteniamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ nello spazio.

Le tre rette orientate si chiamano *assi coordinati* e i tre piani che individuano, xy, yz e xz si dicono *piani coordinati*.

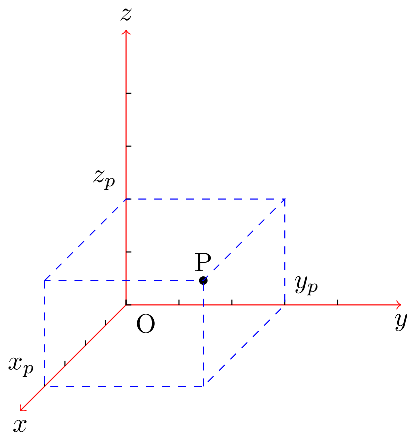


Figura 15.3: Spazio cartesiano.

Preso un qualunque punto P dello spazio, conduciamo per esso tre piani, ciascuno perpendicolare a uno degli assi, e siano x_p, y_p, z_p le intersezioni rispettivamente con gli assi x, y e z. x_p, y_p e z_p si dicono *coordinate cartesiane* del punto P, e detto punto si indicherà con $P(x_p; y_p; z_p)$, con x detta ascissa, y ordinata e z *quota*.
Poiché ogni dimensione presenta due segni possibili (positivo-negativo[4] e le dimensioni sono tre le coordinate dei punti dello spazio presentano *otto* combinazioni di segni possibili.
Se il punto P è situato:

- sul piano xy è nulla la terza coordinata (z);
- sul piano xz è nulla la seconda coordinata (y);
- sul piano yz è nulla la prima coordinata (x);
- sull'asse x sono nulle seconda e terza coordinata;
- sull'asse y sono nulle prima e terza coordinata;
- sull'asse z sono nulle prima e seconda coordinata.

[4]Il caso nullo si analizza poi.

Ad ogni punto dello spazio corrisponde pertanto una determinata terna ordinata di reali e viceversa. I punti dello spazio cartesiano costituiscono la rappresentazione grafica del prodotto cartesiano

$$R \times R \times R = R^3 = \{(x; y; z) | x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$$

15.2 Introduzione alla Geometria analitica

La geometria analitica è quella parte della matematica che studia e deduce le proprietà di certi luoghi geometrici[5] mediante il calcolo algebrico. La geometria razionale invece deduce tali proprietà a partire da alcune ipotesi e mediante ragionamenti "interni" alla geometria stessa (senza l'aiuto dell'algebra).
Momentaneamente ci occuperemo della **geometria analitica piana**, ovvero quella definita su un piano cartesiano (a due dimensioni).

15.2.1 Equazione di un luogo geometrico nel piano cartesiano

Per poter sviluppare la geometria analitica occorre stabilire una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti; ciò viene fatto stabilendo sistemi di coordinate cartesiane.
Avendo stabilito una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano e l'insieme delle coppie ordinate (x, y) di reali, ogni proprietà caratteristica dei punti di un luogo può esser tradotta in una relazione algebrica tra l'ascissa e l'ordinata, ovvero in una equazione del tipo

$$F(x, y) = 0 \tag{15.2}$$

Ciò significa che se un punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene ad un luogo γ, cioè se gode della proprietà richiesta, le sue coordinate soddisferanno la 15.2. Viceversa se la coppia di reali (x_0, y_0) soddisfa 15.2, allora P_0 fa parte del luogo geometrico γ. In altri termini:

$$P_0(x_0, y_0) \in \gamma \iff F(x_0, y_0) = 0$$

Tipi di equazioni/curve Se nella 15.2 F rappresenta un numero finito di operazioni sulle variabili x e y, l'equazione si dice *algebrica* e allo stesso modo si dirà la curva rappresentata; alternativamente si parlerà di equazione e curva *trascendenti*. Nel primo caso, se:

- F è un polinomio di *primo* grado in x e y, l'equazione rappresenterà una **retta**

- F è un polinomio di *secondo* grado in x e y, l'Equazione rappresenterà una **conica**, ovvero una *circonferenza*, un'*ellisse*, una *parabola* un'*iperbole*[6]

[5] Si ricorda che un luogo geometrico è l'insieme di tutti e soli i punti (del piano, dello spazio ecc) che godono di una data proprietà

[6] Tali curve piane vengono chiamate coniche perché si ottengono sezionando con un piano una superficie conica indefinita a due falde...uno jojo.

Forma implicita ed esplicita dell'equazione di una curva In alcuni casi nell'equazione 15.2 è possibile esplicitare la y, cioè ricavare l'equazione

$$y = f(x) \tag{15.3}$$

In tal caso la curva rappresentativa sarà il diagramma di una funzione; pertanto non possono esistere due punti della curva aventi la stessa ascissa (se la curva è chiusa, ad esempio, essa non sarà mai rappresentata con una equazione del tipo 15.3).
Si dice che la 15.2 è l'equazione della curva in **forma implicita**, mentre la 15.3 è in **forma esplicita**.

Intersezione tra curve Se γ_1 e γ_2 sono due curve rappresentate dalle rispettive equazioni

$$\gamma_1 \to F_1(x, y) = 0$$
$$\gamma_2 \to F_2(x, y) = 0$$

Se $P(x_0, y_0)$ è un punto di intersezione tra le due curve, esso appartiene a entrambe le curve e, quindi, le sue coordinate devono soddisfare sia l'equazione di γ_1 che di γ_2. Pertanto (x_0, y_0) sarà soluzione del sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Viceversa se (x_0, y_0) è soluzione del sistema, allora $P(x_0, y_0)$ appartiene ad entrambe le curve, cioè è un loro punto d'intersezione.
Ne consegue che *per trovare gli eventuali punti di intersezione tra le due curve, si risolve il sistema formato con le loro equazioni: se il sistema è impossibile, le due curve non si intersecano; altrimenti ciascuna delle soluzioni rappresenta un punto di intersezione delle due curve.*

Nel caso che un sistema ammetta due soluzioni coincidenti, le due curve hanno in corrispondenza di tale soluzione un unico punto di intersezione.
Il numero di punti possibili di intersezione dipende dal grado del sistema (e quindi cosa facciamo intersecare).
Ad esempio, quando si cercano le intersezioni tra una retta e una conica, il sistema è di secondo grado e perciò esistono al massimo due punti di intersezione.
Per estensione una curva algebrica rappresentata da una equazione di grado n in x e y può avere al massimo n punti di intersezione con una retta.

15.3 Traslazioni del sistema di riferimento

In alcune questioni di geometria analitica è utile cambiare il sistema di riferimento, cioè riferire i punti di una certa figura anziché al sistema xOy, al sistema $x'O'y'$.
Ci limitiamo al problema di cambiare il sistema di riferimento nel caso in cui i nuovi assi x' e y' siano paralleli ai vecchi assi e ne abbiano la stessa orientazione e stessa unità di misura. Si dice che il sistema è **traslato**. Se indichiamo con

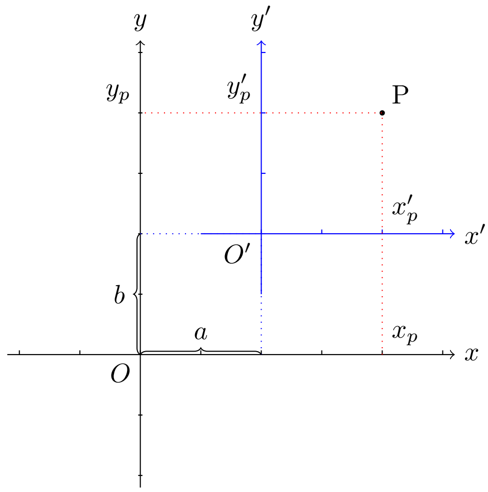


Figura 15.4: Traslazione del sistema di riferimento.

(a, b) le coordinate della nuova origine O', la relazione tra le vecchie e le nuove coordinate di un generico punto P saranno

$$\begin{cases} x_p = x'_p + a \\ y_p = y'_p + b \end{cases} \tag{15.4}$$

Le equazioni di sopra dicono (ad esempio per la x) che sommando a all'ascissa del nuovo sistema, si ottiene l'ascissa del vecchio sistema[7].
Per calcolare le coordinate di un punto nel sistema traslato, quando sono note le coordinate dell'originario, bisogna risolvere in funzione di x' e y', da cui:

$$\begin{cases} x'_p = x_p - a \\ y'_p = y_p - b \end{cases} \tag{15.5}$$

15.4 Distanza tra due punti

La misura della lunghezza di un segmento dipende dal fatto che esso sia orientato o meno: nel piano e nello spazio si considerano per convenzione solo segmenti *non orientati*. In tal caso, le rispettive lunghezze saranno sempre valori positivi. Il calcolo può esser effettuato come segue

`TODO: sulla retta (orientata o meno?)`

15.4.1 . . . nel piano cartesiano

Fissato un piano cartesiano, consideriamo due punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$. La formula più generale per il calcolo della distanza di due punti, indipendente

[7] Permettono di calcolare le coordinate del punto nel sistema originario, a partire da quelle del sistema traslato.

da come sono posti reciprocamente fra loro nel piano, è quello che si basa sul teorema di Pitagora. La distanza sarà:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{15.6}$$

Si noti che i termini tra parentesi tonde potrebbero essere anche invertiti (non è importante l'ordinamento poiché l'elevamento a potenza rende tutti gli addendi sotto radice positivi).

Se si vuole la distanza del punto $P(x; y)$ dall'origine $O(0; 0)$ l'applicazione della precedente formula conduce a:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{15.7}$$

15.4.2 ...nello spazio cartesiano

Fissato uno spazio cartesiano, consideriamo due punti $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$. Conduciamo per essi i piani paralleli ai piani coordinati; otterremo un parallelepipedo rettangolo, la cui diagonale è P_1P_2. Avremo che la misura di detto segmento (ovvero la distanza dei due punti) sarà:

$$d = \sqrt{\overline{P_1H}^2 + \overline{P_2H}^2} \tag{15.8}$$

ma visto che

$$\overline{P_1H} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{15.9}$$
$$\overline{P_2H} = z_2 - z_1 \tag{15.10}$$

la distanza si semplificherà in

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{15.11}$$

$\boxed{TODO : Fig.pg.100.lib.3}$

Figura 15.5: Distanza di due punti nello spazio.

La distanza di un punto $P(x, y, z)$ dall'origine sarà:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{15.12}$$

15.5 TODO

```
- distanza tra due punti sulla retta
- figura pagina 100 libro 3
```

Capitolo 16

Relazioni

16.1 Introduzione

16.1.1 Definizioni

Predicato Un predicato è un'espressione linguistica o matematica in cui compaiono una o più variabili, la cui verità dipende da tali variabili. Ad esempio un predicato in una sola variabile (x)

$$p(x) : x \text{ è un numero primo}, \quad x \in \mathbb{N} \tag{16.1}$$

Relazione Una relazione è un predicato a due variabili. In particolare dati due insiemi A e B non vuoti, si dice relazione $\mathscr{R}$ il sottoinsieme del prodotto cartesiano costituito dalle coppie che soddisfano un predicato $r(x; y)$ con $x \in A, y \in B$.

Dal punto di vista di due singoli elementi $a \in A, b \in B$ si dice che a è in relazione (o è associato) $\mathscr{R}$ con b se $r(a; b)$ è vero e si scrive:

$$a \, \mathscr{R} \, b$$

Se $r(a; b)$ è falso si dirà che a non è in relazione $\mathscr{R}$ con b e si scriverà:

$$a \not\mathscr{R} \, b$$

In altre parole per indicare che una relazione $\mathscr{R}$ tra gli insiemi A e B è definita dal predicato $r(x; y) siscrive$

$$x\mathscr{R}y \iff r(x; y)$$

Domino e codominio Data una relazione $\mathscr{R}$ tra gli insiemi A e B:

- si dice **dominio** e si indica con D, l'insieme degli elementi di A a cui è associato qualche elemento di B;
- si dice **codominio** e si indica con C, l'insieme degli elementi di B a cui è associato qualche elemento di A.

In generale il dominio è un sottoinsieme di A mentre il codominio un sottoinsieme di B:

$$D \subseteq A; \qquad C \subseteq B$$

16.1.2 Rappresentazione

Una relazione può esser rappresentata in maniera:

- *formale*: enunciazione della relazione mediante qualche formalismo (es equazione);
$$A = \{(x, y)|\, x \in [0, 2]\,, y \in [1, 3]\}$$
- *estensiva*: specificazione dell'insieme che soddisfa la relazione formale
$$B = \{(0, 0), (-3, 1), (4, 2)\}$$
- *tabulare*: tabella a doppia entrata che rappresenta il prodotto cartesiano; solamente nelle cellette che rispettano il predicato prefissato si riempie con una R;
- diagramma di *Venn*, con frecce che partono dagli elementi del primo insieme, collegandoli ai corrispondenti del secondo;
- mediante un *diagramma cartesiano*: rappresentazione sugli assi delle coppie che **soddisfano** la relazione mediante un punto (o un'area, ad esempio il plotting dell'insieme A precedentemente definito consiste in un rettangolo).

Ad esempio, alcuni grafici di relazioni sono riportati mediante grafici cartesiani in figura 16.1.

16.2 Relazioni in un insieme

Si possono definire relazioni anche tra elementi di un medesimo insieme A; in tal caso parleremo di **relazione in un insieme**. La relazione sarà un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A con se stesso:

$$\mathscr{R} \subseteq A^2$$

Quando si effettua la rappresentazione di una relazione definita in un insieme mediante un diagramma a rappresenta una sola volta l'insieme A e dagli elementi interessati partono frecce verso gli altri elementi del medesimo insieme

16.2.1 Proprietà possibili

Una relazione $\mathscr{R}$ definita in un insieme può godere delle seguenti proprietà.

Riflessiva Una relazione $\mathscr{R}$ definita in A si dice riflessiva se qualunque elemento di A è in relazione con se stesso

$$\forall x \in A, \quad x \,\mathscr{R}\, x \tag{16.2}$$

Antiriflessiva Una relazione $\mathscr{R}$ definita in A si dice antiriflessiva se nessun elemento di A è in relazione con se stesso

$$\forall x \in A, \quad x \not\mathscr{R}\, x \tag{16.3}$$

Simmetrica Una relazione $\mathscr{R}$ definita in A si dice simmetrica se tutte le volte che un elemento x è il relazione con un elemento y, allora anche y è in relazione con x

$$x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x \tag{16.4}$$

Antisimmetrica Una relazione $\mathscr{R}$ definita in A si dice antisimmetrica se tutte le volte che un elemento x è in relazione con uno $y \neq x$, allora y non è in relazione con x

$$x \mathscr{R} y \wedge x \neq y \implies y \not\mathscr{R} x \tag{16.5}$$

In base alla definizione è possibile che si abbia $x\mathscr{R}y$ e contemporaneamente $y\mathscr{R}x$ solo nel caso $x = y$. Perciò si può alternativamente dire: $\mathscr{R}$ è antisimmetrica se tutte le volte che è $x\mathscr{R}y$ e $y\mathscr{R}x$ si ha $x = y$

$$x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} x \implies x = y \tag{16.6}$$

Transitiva Una relazione $\mathscr{R}$ definita in A si dice transitiva se tute le volte che un elemento x è in relazione con un elemento y e contemporaneamente y è in relazione con z allora x è in relazione con z.

$$x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} z \implies x \mathscr{R} z \tag{16.7}$$

16.2.2 Relazioni d'equivalenza, classi d'equivalenza

Relazioni d'equivalenza Una relazione $\mathscr{R}$ definita in un insieme A è una **relazione di equivalenza** se al contempo è:

1. riflessiva
2. simmetrica
3. transitiva

Se $a, b \in A$ con $a \mathscr{R} b$ ed $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza si dice che a e b sono **equivalenti rispetto ad $\mathscr{R}$**.
Ad esempio, nell'insieme S degli alunni di una data scuola, la relazione "essere nella stessa classe di" è una relazione di equivalenza, infatti: ciascuno è nella stessa classe di se stesso (riflessiva); se x è nella classe di y, ovviamente y è nella classe di x (simmetrica); se x è nella classe di y ed y nella stessa di z, allora x è nella stessa classe di z (transitiva).

Classi d'equivalenza Data una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ definita in un insieme A, si chiama classe di equivalenza di un elemento $a \in A$ il sottoinsieme di A composto dagli elementi di A equivalenti ad a rispetto a $\mathscr{R}$:

$$[a]_{\mathscr{R}} = \{x \in A | x \mathscr{R} a\} \tag{16.8}$$

Ad esempio la classe di equivalenza di Mario Rossi nella relazione "x è nella stessa classe di y" è composto dall'insieme di studenti che compongono la classe dove è Mario Rossi.
La classe di equivalenza si indica succintamente con $[a]$ per indicare che si prende a come *rappresentante* della classe; tuttavia, essendo tutti gli elementi di una classe di equivalenza equivalenti tra loro, la stessa classe potrebbe esser rappresentata da uno qualsiasi dei suoi elementi.

Partizione secondo $\mathscr{R}$ Ipotizziamo di aver costruito la classe di equivalenza

$$C_1 = [\text{Mario Rossi}]_{\mathscr{R}}$$

dove $\mathscr{R}$ è la relazione di appartenenza alla medesima classe.
Ora se prendiamo un altro elemento $b \in S$ ma che non appartiene alla classe di equivalenza $b \notin C_1$ e per questo costruiamo una classe di equivalenza otteniamo un insieme disgiunto C_2 (ad esempio se $b =$ Mario Bianchi, gli alunni della classe di Mario Bianchi). Procedendo analogamente/ricorsivamente per gli elementi rimanenti di S, al termine avremo ottenuto una partizione di S composta dagli insiemi $C_1, C_2, \dots, C_n$ che corrisponde all'insieme delle classi della scuola considerata.

Generalizzando, se $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza definita in un insieme A; le relative classi di equivalenza $A_1, A_2, \dots$ (in numero finito o infinito) costituiscono una partizione dell'insieme A. Pertanto:

- nessuna classe di equivalenza è vuota:
$$A_i \neq \emptyset$$
- le classi d'equivalenza distinte sono disgiunte
$$A_i \neq A_j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$
- l'unione di tutte le classi d'equivalenza è l'insieme A
$$\bigcup A_i = A$$

Le classi d'equivalenza $A_1, A_2, \dots$ possono esser considerate come elementi di un nuovo insieme l'**insieme delle classi d'equivalenza** o anche **insieme quoziente** di A rispetto a $\mathscr{R}$ che si indica come

$$A/\mathscr{R} = \{A_1; A_2; \dots\} \tag{16.9}$$

16.2.3 Relazioni d'ordine

Una relazione $\mathscr{R}$ definita in un insieme A è una **relazione d'ordine** se al contempo è:

1. antisimmetrica
2. transitiva

In tal caso si dice alternativamente che:

- $\mathscr{R}$ è un ordinamento di A;
- l'insieme A è ordinato dalla relazione $\mathscr{R}$.

Se $a \mathscr{R} b$ con $a, b \in A$ e $\mathscr{R}$ una relazione d'ordine si dice che a precede b o che b segue a (rispetto a $\mathscr{R}$).

Ordine stretto o largo Se $\mathscr{R}$ è una relazione d'ordine si dice che[1]:

- è relazione d'ordine *stretto* se è *antiriflessiva*: ad esempio la relazione $<$ nell'insieme $\mathbb{N}$ è una relazione di ordine stretto poiché non è vero che $n < n$ con $n \in \mathbb{N}$
- è relazione d'ordine *largo* se è *riflessiva*: lo è ad esempio la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$

Ordine totale e parziale Indipendentemente dalla classificazione sul tipo di ordine (stretto/largo) una relazione può essere un ordine parziale o totale.

Data una relazione d'ordine $\mathscr{R}$ in un insieme A, diciamo che due elementi distinti $a, b \in A$ sono **confrontabili** (rispetto a $\mathscr{R}$) se a precede b oppure a segue b:

$$a \mathscr{R} b \vee b \mathscr{R} a$$

Si dice che

- $\mathscr{R}$ è una **relazione d'ordine totale** (o un ordinamento totale) se comunque si scelgano due elementi distinti di A, essi sono sempre confrontabili. Si dice anche che A è **totalmente ordinato** dalla relazione $\mathscr{R}$.
- se vi è almeno una coppia di elementi distinti di A che non sono confrontabili rispetto ad $\mathscr{R}$ si dice che $\mathscr{R}$ è una **relazione d'ordine parziale** (o un ordinamento parziale.
  Si dice anche che A è **parzialmente ordinato** dalla relazione $\mathscr{R}$.

Un esempio della prima è la relazione $<$ nell'insieme $\mathbb{R}$, che pertanto si classifica complessivamente come una relazione di ordine stretto totale.
Per un esempio della seconda si consideri un generico insieme $X = 1; 2; 3$ e il suo insieme delle parti $P(X)$. Nell'insieme delle parti la relazione di inclusione $\subseteq$ è una relazione d'ordine parziale; infatti ad esempio gli insiemi $a; 2$ e $1; 3$ che fanno parte di $P(X)$ non sono confrontabili rispetto ad essa.

[1] Le relazioni che si incontrano più frequentemente in matematica sono relazioni d'ordine stretto o largo; tuttavia esistono anche relazioni d'ordine ne stretto ne largo.

x	y	(x,y)
-3	-2	$(-3,-2)$
-2	$-\sqrt[3]{3}$	$(-2,-\sqrt[3]{3})$
-1	0	$(-1,0)$
0	1	$(0,1)$
1	0	$(1,0)$
2	$-\sqrt[3]{3}$	$(2,-\sqrt[3]{3})$
3	-2	$(3,-2)$

Tabella 16.1: Coppie che soddisfano la relazione Z

16.3 Relazioni interne ad insiemi numerici

Possono assumere particolare interesse le relazioni tra insiemi numerici espresse mediante qualche equazione.

Rappresentazione grafica Per procedere alla rappresentazione grafica su diagramma cartesiano di una **relazione specificata formalmente mediante una equazione** possiamo ricavare y in funzione di x (o viceversa), e in seguito per i valori assunti/assumibili da x calcolare il corrispondente y. In seguito si procederà alla rappresentazione grafica. Ad esempio considerando la relazione $Z = \{(x,y)|x^2 + y^3 = 1, x \in \mathbb{Z}\}$, iniziamo a risolvere per y

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 &= 1 \\ y^3 &= 1 - x^2 \\ \sqrt[3]{y^3} &= \sqrt[3]{1-x^2} \\ y &= \sqrt[3]{1-x^2} \end{aligned}$$

Iniziamo a calcolare le coppie (tabella 16.1). Possiamo in seguito procedere al plot delle coppie derivanti, che consistono nelle coppie che soddisfano la relazione. Se nella sostituzione **arriviamo ad una soluzione che non è composta da una coppia di reali** (es un numero reale e uno complesso) essa non appartiene al grafico della relazione. Pertanto il **grafico di una relazione** corrisponde all'insieme di punti sul sistema cartesiano che rispettano la relazione stessa.

Intersezioni con gli assi Intersezione con gli assi e simmetria sono due strumenti che aiutano nel disegnare un grafico di una relazione espressa mediante equazione.
Ipotizzando che sia fornito un grafico di una data equazione, un punto sul grafico che sia anche sull'asse x è chiamato **intercetta con l'asse x**, se sull'asse y è chiamata **intercetta con l'asse y**.
Per trovare le intercette (ovvero i punti del grafico che soddisfano anche gli assi x e y dobbiamo risolvere un sistema di equazioni (una equazione riguardante la relazione di interesse e l'altra contenente l'espressione che rappresenta l'asse di interesse), o più direttamente (ed egualmente):

- le intercette con l'asse x hanno la forma $(x,0)$; si imposti $y = 0$ nell'equazione e si risolva ottenendo x

- le intercette con l'asse y hanno la forma $(0, y)$; si imposti $x = 0$ nell'equazione e si risolva ottenendo y

Non è detto che un punto di intersezione con gli assi dell'equazione esista; nel caso si giunge nello svolgimento dei calcoli ad eguaglianze senza senso nel campo dei numeri $\mathbb{R}$

Simmetrie In generale vi sono molti tipi di **simmetria**, ma tre di essi possono essere approcciati velocemente.
Si dice che due punti (a, b) e (c, d) sono:

- simmetrici rispetto all'asse x, se $a = c$ e $b = -d$
- simmetrici rispetto all'asse y, se $a = -c$ e $b = d$
- simmetrici rispetto all'origine degli assi, se $a = -c$ e $b = -d$

Se vogliamo creare un punto simmetrico rispetto ad un generico (x, y):

- rispetto all'asse x, rimpiazziamo y con $-y$
- rispetto all'asse y, rimpiazziamo x con $-x$
- rispetto all'origine, rimpiazziamo x con $-x$ e y con $-y$

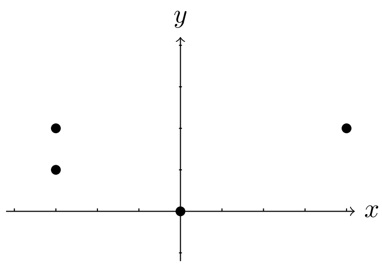
Per verificare che il grafico di una equazione sia simmetrico:

- rispetto all'asse y, sostituire $(-x, y)$ nell'equazione e semplificare. Se il risultato è equivalente all'equazione originale, allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y
- rispetto all'asse x, sostituire $(x, -y)$ nell'equazione e semplificare. Se il risultato è equivalente all'equazione originale, allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse x
- rispetto all'origine, sostituire $(-x, -y)$ nell'equazione e semplificare. Se il risultato è equivalente all'equazione originale, allora il grafico è simmetrico rispetto all'origine

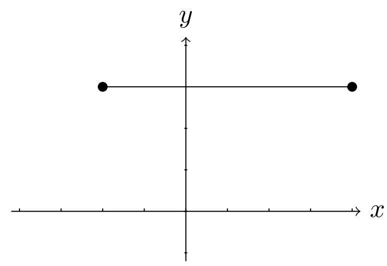
In altre parole, stiamo verificando che il punto (ad esempio nel primo caso) $(-x, y)$ che fa parte dell'equazione della figura simmetrica rispetto alla y, appartenga anche all'equazione orginale. Ad esempio assumiamo che (x, y) sia un generico punto sul grafico dell'equazione $x^2 + y^3 = 1$. Il punto simmetrico ad esso rispetto all'asse y è $(-x, y)$. Per mostrare che il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, dobbiamo mostrare che $(-x, y)$ soddisfi l'equazione $x^2 + y^3 = 1$ allo stesso modo.
Sostituendo $(-x, y)$ nell'equazione abbiamo

$$\begin{aligned} (-x)^2 + (y)^3 &= 1 \\ x^2 + y^3 &= 1 \end{aligned}$$

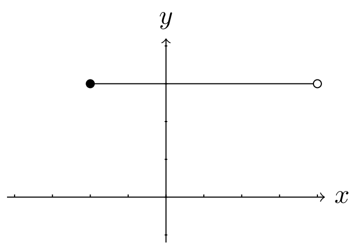
ovvero abbiamo mostrato che il punto $(-x, y)$ appartiene al grafico perchè soddisfa l'equazione (pertanto la figura è simmetrica rispetto all'asse y)



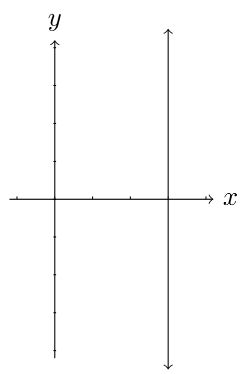
(a) $\{(0,0),(-3,1),(4,2),(-3,2)\}$



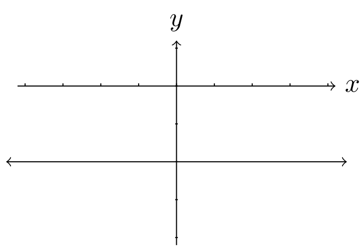
(b) $\{(x,3)|-2 \leq x \leq 4\}$



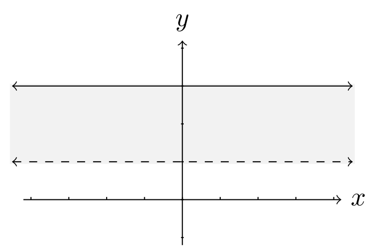
(c) $\{(x,3)|-2 \leq x < 4\}$



(d) $\{(3,y)|y \in \mathbb{R}\}$



(e) $\{(x,y)|y = -2\}$



(f) $\{(x,y)|1 < x \leq 3\}$

Figura 16.1: Plotting di relazioni

Capitolo 17

Funzioni

I numeri sono adatti ad esprimere grandezze costanti; quando si deve esprimere una grandezza variabile (ad esempio spazio percorso in macchina) si sottointende l'esistenza di una relazione/dipendenza tra questa ed un'altra grandezza (ad esempio tempo). Le funzioni servono per esprimere questa relazione.

17.1 Definizioni e terminologia

Dati due insiemi non vuoti X e Y si dice **funzione** da X a Y una ***relazione*** *univoca* (non necessariamente biunivoca) tra i due insiemi che ad *ogni* $x \in X$ associa *uno e un solo* $y \in Y$.

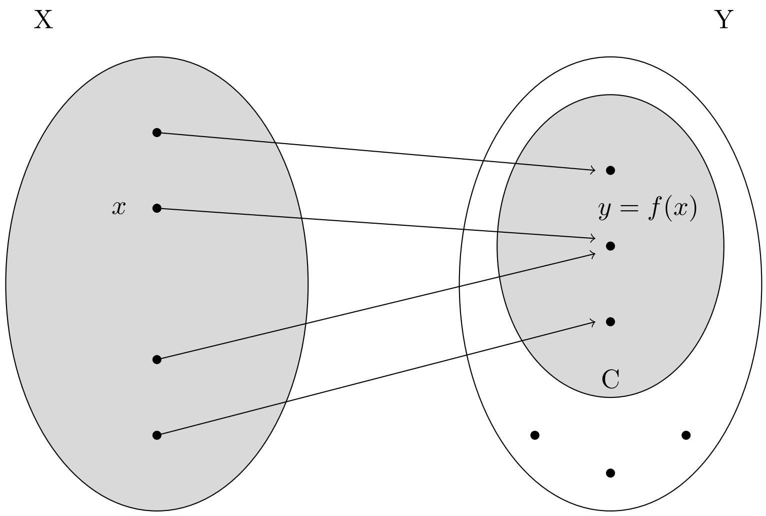


Figura 17.1: Funzioni

Rappresentando una funzione con un diagramma di Venn si osserva che da ogni $x \in X$ parte una e una sola freccia, mentre nei punti che rappresentano gli elementi di Y possono giungere nessuna, una o più frecce[1].

[1] Per questo si configura come una corrispondenza univoca (non necessariamente biunivoca).

L'insieme X è detto **dominio**, anche indicato con D; facendo riferimento alla funzione considerata il dominio della funzione f si indica con $\operatorname{dom} f$.
L'insieme degli elementi di Y che hanno almeno una controimmagine in X è detto **codominio** C, con $C \subseteq Y$.
La notazione consueta è

$$\begin{cases} f : X \to Y \\ x \to f(x) \end{cases}$$

Per indicare l'equazione della funzione a volte si può leggere anche

$$y = f(x) \tag{17.1}$$

Si dice che y, cioè $f(x)$ è l'**immagine** di x nella f e che x è la **controimmagine** di y.
Ad esempio per indicare la funzione radice quadrata:

$$\begin{cases} f : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \to \sqrt{x} \end{cases}$$

17.2 Discernere tra relazioni e funzioni in base all'espressione analitica

Una determinata equazione potrebbe rappresentare una funzione o solamente una relazione. Possiamo esser interessati a determinare in maniera analitica[2] se una data equazione definisce solamente una relazione o anche una funzione.
Per farlo, risolviamo in funzione di y e determiniamo se per ogni valore possibile di x si ottiene tramite l'equazione uno e un solo valore di y (in tal caso abbiamo una funzione, alternativamente una relazione).

Il primo esempio considerato è quello della relazione rappresentata dall'espressione:

$$x^3 + y^2 = 1$$

Procediamo come segue:

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - x^3 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{1 - x^3} \\ |y| &= \sqrt{1 - x^3} \\ y &= \pm\sqrt{1 - x^3} \end{aligned}$$

Se ad esempio sostituiamo $x = 0$ nell'equazione risultante per determinare y, otteniamo, $y = \pm\sqrt{1 - 0^3} = \pm 1$, ovvero non un singolo valore di y Pertanto questa equazione non rappresenta y come funzione di x.

Il secondo esempio è

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 &= 1 \\ y^3 &= 1 - x^2 \\ \sqrt[3]{y^3} &= \sqrt[3]{1 - x^2} \\ y &= \sqrt[3]{1 - x^2} \end{aligned}$$

[2] Dal punto di vista grafico si vedrà in seguito

Per qualsiasi valore di x, l'equazione $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ restituisce un valore soltanto di y. Pertanto questa relazione si qualifica anche come una funzione di y dato x.

17.3 Tassonomia delle funzioni numeriche

Se X e Y sono insiemi numerici, si parla di **funzioni numeriche** (ns. focus); queste si differenziano in funzioni

matematiche sono descritte da una legge matematica che a partire dall'elemento del dominio, specifica i calcoli necessari per determinare il corrispondente elemento del codominio. *Ci concentriamo su queste nel prosieguo.*

empiriche sono funzioni per le quali l'immagine di un elemento x non è ottenibile con una legge prefissata, bensì per mezzo di misurazioni sperimentali (es in fisica) o di rilevazioni (economia, statistica).

Le **funzioni matematiche**, a loro volta, si suddividono in:

- *algebriche*: sono quelle per cui il valore della variabile dipendente si ottiene a partire dalla x eseguendo un numero finito di operazioni algebriche. Funzioni razionali intere si hanno se le operazioni sono addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni ed elevamenti a potenza; razionali fratte se si hanno espressioni contenenti l'incognita al denominatore di una divisione; funzioni irrazionali se si esegue l'estrazione di radice n-esima dell'incognita;
- *trascendenti*: sono tutte quelle funzioni che non sono algebriche; tra di esse le funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche.

Da un'altra prospettiva le funzioni possono essere classificate a seconda degli insiemi dominio-codominio che procedono a mappare:

- le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dicono successioni
- le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dicono funzioni reali di variabile reale
- le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di tipo lineare, dette anche trasformazioni lineari, sono argomento di studio dell'algebra lineare
- le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (non necessariamente lineari) sono focus dei corsi di Analisi 2

17.3.1 L'espressione analitica e la valutazione di una funzione matematica

L'espressione analitica specifica la sequenza di passi, a partire dall'input x per giungere all'output.
Ad esempio supponiamo che una funzione f prenda in input un numero reale e svolga i seguenti due step, in sequenza:

- moltiplica per 3
- aggiunge 4

Per la **definizione dell'espressione analitica** della funzione di cui sopra, se usiamo x come input, applicare il primo step produce $3x$, seguendo con il secondo arriviamo a $3x + 4$. Pertanto per un input x arriviamo ad un output $f(x) = 3x + 4$.
Una volta definita l'espressione possiamo:

- passare alla **valutazione della funzione** per valori di input x di nostro interesse; ad esempio si scrive $f(5)$ per indicare il valore restituito dalla funzione se gli forniamo come input il valore numerico 5, oppure $f(x+1)$, l'output restituito dalla funzione se gli forniamo $x + 1$ in input.
- **risolvere la funzione** ovvero a partire da un y di interesse, trovare quell'x che attraverso la funzione lo va a generare.

Come regola generale per la **valutazione**, *sostituiamo l'input di nostro interesse e sviluppiamo algebricamente sino ad arrivare ad un risultato (il più delle volte numerico).*
Ad esempio se

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

siamo interessati a trovare $f(-1)$, $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x+2)$, $f(x)+2$, e $f(x)+f(2)$
.
Per trovare $f(-1)$ rimpiazziamo ogni occorrenza di x nell'espressione $f(x)$ con -1:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^2 + 3(-1) + 4 \\ &= -(1) + (-3) + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per $f(2x)$ rimpiazziamo ogni occorrenza di x con $2x$:

$$\begin{aligned} f(2x) &= -(2x)^2 + 3(2x) + 4 \\ &= -(4x^2) + (6x) + 4 \\ &= -4x^2 + 6x + 4 \end{aligned}$$

Per trovare $f(x + 2)$, procediamo analogamente a quanto fatto in precedenza

$$\begin{aligned} f(x+2) &= -(x+2)^2 + 3(x+2) + 4 \\ &= -\left(x^2 + 4x + 4\right) + (3x + 6) + 4 \\ &= -x^2 - 4x - 4 + 3x + 6 + 4 \\ &= -x^2 - x + 6 \end{aligned}$$

Per $2f(x)$ si intende moltiplicare per 2 il risultato di $f(x)$, quindi:

$$\begin{aligned} 2f(x) &= 2\left(-x^2 + 3x + 4\right) \\ &= -2x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

Per $f(x) + 2$ aggiungiamo 2 all'espressione di $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) + 2 &= \left(-x^2 + 3x + 4\right) + 2 \\ &= -x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

Infine, sapendo che $f(2) = 6$ per $f(x) + f(2)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) + f(2) &= \left(-x^2 + 3x + 4\right) + 6 \\ &= -x^2 + 3x + 10 \end{aligned}$$

Per la **risoluzione** invece imponiamo un'uguaglianza tra il valore y di nostro interesse e l'espressione della funzione, risolvendo per x. Ad esempio se vogliamo trovare $f(x) = 4$, dato che $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, l'equazione $f(x) = 4$ è equivalente a $-x^2 + 3x + 4 = 4$. Risolvendo otteniamo $-x^2 + 3x = 0$, ovvero $x(-x + 3) = 0$. Otteniamo pertanto $x = 0$ o $x = 3$.

17.3.1.1 Funzioni definite a tratti

Non sempre le funzioni matematiche sono traducibile in una "formula compatta". In particolare in matematica una **funzione definita a tratti** è una funzione definita da più sottofunzioni, ognuna delle quali si applica ad un certo intervallo (detto sotto-dominio) del dominio della funzione complessiva. Il corpo della funzione è un array di funzioni e sottodomini associati. Ad esempio la funzione valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{17.2}$$

o la funzione *signum*, rappresentata (anche) dall'equazione $y = \frac{|x|}{x}$:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{17.3}$$

Nel primo caso, per tutti i valori inferiori a zero si utilizza la prima funzione $(-x)$, per tutti i superiori o uguali la seconda. Pertanto per valutare una funzione definita a tratti ad un determinato punto x, il sottodominio appropriato deve essere preventivamente scelto per selezionare la funzione corretta e produrre l'output corretto.

17.4 Algebra delle funzioni

Nelle sezioni precedenti abbiamo utilizzato la notazione delle funzioni per dare senso ad espressioni come $f(x)+2$ o $2f(x)$. In questa parte estendiamo tali considerazione per elaborare un'algebra delle funzioni analoga a quella dei numeri.

Supponiamo che f e g siano funzioni di x (considerando x appartenente all'intersezione dei due domini della funzione):

- La **somma** di f e g, indicata mediante $f + g$, è la funzione definita dalla formula
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
- la **differenza** di f e g, indicata mediante $f - g$, è la funzione definita dalla formula
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
- Il **prodotto** di f e g, indicata mediante fg, è la funzione definita dalla formula
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

- Il **quoziente** di f e g, indicata mediante $\frac{f}{g}$, è la funzione definita dalla formula
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
posto che $g(x) \neq 0$.

Per la valutazione o la risoluzione per valori di interesse, occorre prima derivare l'equazione della funzione derivante dall'espressione algebrica tra funzioni e poi procedere come visto in precedenza.

Studiamo per darne una esemplificazione il **rapporto incrementale** di una funzione: questi è un numero che, intuitivamente, misura "quanto velocemente" la funzione cresce o decresce al variare della coordinata indipendente attorno a un dato punto, ed è definito dalla funzione:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{17.4}$$

con $h \neq 0$. Ad esempio deriviamo il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Partiamo dal determinare $f(x+h)$ come:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 2(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 \\ &= 2(x^2 + 2hx + h^2) - 4(x+h) + 3 \\ &= 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4x - 4h + 3 \end{aligned}$$

e proseguamo con

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(2x^2+4xh+2h^2-4x-4h+3)-(2x^2-4x+3)}{h} \\ &= \ldots \\ &= 4x + 2h - 4 \end{aligned}$$

17.5 Grafico di una funzione matematica

Data una funzione matematica di equazione $y = f(x)$ si dice **grafico** o *diagramma* della funzione l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano aventi per ascissa i valori della variabile indipendente x appartenenti al dominio e per ordinata i valori corrispondenti della variabile dipendente y. Un punto appartiene al grafico di una funzione se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della funzione. Pertanto, da definizione, nel grafico di una funzione **non può mai capitare che due punti abbiano la stessa ascissa**.

Al fine di disegnare il grafico procediamo come fatto in precedenza per le relazioni (essendo le funzioni un loro sottoinsieme), ricercando intercette, testando simmetricità (nel caso delle funzioni la simmetricità rispetto all'asse x perde importanza) e ricavando punti addizionali mediante valutazione algebrica (e poi disegnandoli) se richiesto.

Il grafico di una più generica relazione può aiutare nel comprendere se essa costituisca anche una funzione effettuando il cosiddetto test della linea verticale:

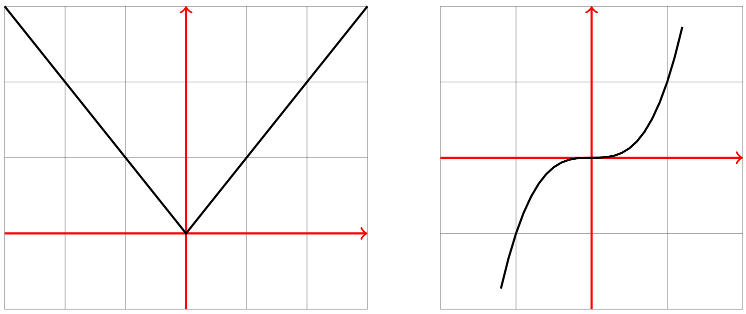
- se nessuna linea verticale interseca il grafico in due o più punti, allora la relazione che abbiamo si qualifica come funzione

- altrimenti detta relazione non può anche esser definita funzione

17.6 Tassonomia delle funzioni matematiche

Funzioni uguali Due **funzioni** matematiche aventi la stessa espressione matematica sono **uguali** se hanno lo stesso dominio.

Funzioni pari e dispari Una funzione f di equazione $y = f(x)$ e di dominio D si dice **pari** se, per qualsiasi $x \in D$, si ha $f(x) = f(-x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Una funzione, invece si dice **dispari** se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. Ad esempio verifichiamo



(a) $y = |x|$ è pari.

(b) $y = x^3$ è dispari.

che $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è pari:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + (-x)^2 - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Verifichiamo che $f(x) = x^3 - x^5$ è dispari:

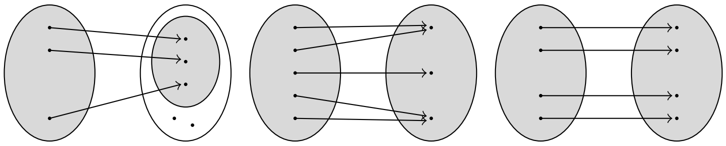
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - (-x)^5 \\ &= -x^3 + x^5 \\ &= -(x^3 - x^5) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Il nome pari o dispari deriva dal fatto che se f è una funzione esprimibile nella forma $y = P(x)$ dove P(x) è un polinomio, si può facilmente verificare che f è pari se e solo se il $P(x)$ figurano solo potenze di x di grado pari[3], e che f è dispari se e solo se in $P(x)$ figurano solo potenze di x di grado dispari.

Funzioni iniettive, suriettive, biettive Una funzione è *iniettiva* se ad elementi differenti del dominio corrispondono elementi differenti del codominio (ad esempio non lo è la funzione di equazione $y = x^2$).
Se f è una funzione da X in Y, questa si dice *suriettiva* se il codominio di f coincide con Y, ovvero se ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento

[3]Lo zero si considera numero pari, e quindi le costanti vengono considerate coefficienti di potenze di x di grado pari.

di X.
Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva, allora è *biettiva*, e pertanto consiste in una relazione biunivoca tra dominio e codominio.



(a) Iniettiva (b) Suriettiva (c) Biettiva

Funzioni limitate e llimitate Alcuni dei concetti sulla limitatezza degli insiemi si possono estendere alle funzioni.
Considerando una funzione di equazione $y = f(x)$ di dominio D e codominio $C = f(D)$; nei casi più comuni D è un intervallo (limitato o non) o un'unione di intervalli.

La funzione f si dice rispettivamente **limitata**, **illimitata** superiormente o inferiormente se lo è l'insieme C.

Abbiamo detto che un insieme numerico ammette sempre estremo superiore ed inferiore (eventualmente infinito); possiamo pertanto definire **estremo superiore** (o **inferiore**) della funzione f l'estremo superiore (o inferiore) del codominio.

Se poi l'insieme numerico $f(D)$ ammette il massimo o il minimo, questi vengono detti **massimo e minimo assoluti** della funzione; ciascuno di tali valori è assunto dalla funzione in uno o più punti del D.

Funzione inversa Se f è una funzione biettiva, allora è possibile definire la funzione inversa, che si indica con f^{-1}; questa è la funzione che associa ad ogni $y \in Y$ la sua controimmagine $x \in X$.
Partendo da $y = f(x)$, come ottenere la funzione inversa (dove possibile mediante elaborazione algebrica)? Dopo aver ricavato se possibile l'equazione $x = g(y)$, si può sostituire in quest'ultima la sostituzione $[x \to y, y \to x]$. Il grafico dell'inversa è pertanto ottenuto mediante una trasformazione geometrica, ovvero la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del 1°-3° quadrante.

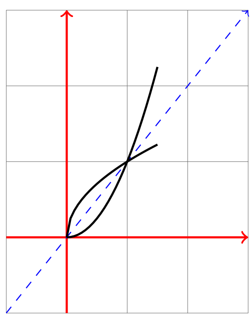


Figura 17.2: Funzione inversa

Ad esempio la funzione f di equazione $y = x^3$ è biunivoca. La sua funzione inversa è $x = \sqrt[3]{y}$. Con la sostituzione si ottiene la funzione inversa nella forma $y = \sqrt[3]{x}$. In questo caso la funzione f corrisponde all'operazione di elevamento al cubo, mentre la funzione inversa f^{-1} corrisponde all'operazione di estrazione di radice cubica.

Funzione composta Una funzione g tra due insiemi X e Y trasforma ogni elemento $x \in X$ in uno $z \in Y$: in presenza di un'altra funzione f che trasforma ogni elemento di Y in un elemento di un altro insieme $y \in C$, si definisce **funzione composta**, scritta $f \circ g$ la funzione che trasforma ogni elemento di X in uno di C usando prima g e poi f (e non viceversa). f e g si dicono funzioni componenti. La funzione composta avrà l'equazione:

$$y = f(g(x))$$

`TODO Figura 19 pag 74`

Ad esempio se

$$\begin{aligned} f: &\quad x \to x+1 \\ g: &\quad x \to x^2 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} f \circ g &\quad y = f(g(x)) = x^2 + 1 \\ g \circ f &\quad y = g(f(x)) = (x+1)^2 \end{aligned}$$

Generalizzando il prodotto di composizione non è commutativo, quindi usualmente sarà che:

$$f \circ g \neq g \circ f \tag{17.5}$$

L'operazione di composizione si può estendere a tre o più fattori. Si verifica che se la composizione $(f \circ g) \circ h$ esiste, allora esiste anche $f \circ (g \circ h)$ ed è

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \tag{17.6}$$

ovvero vale la proprietà associativa.
Infine se una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f(D) \subseteq D$, allora si può compore con se stessa; in tal caso la funzione

$$f^2 = f \circ f = f(f(x)) \tag{17.7}$$

viene detta iterata seconda di f. Analogamente $f^n(x) = f(f(f(...f(x)...)$ n volte si dice iterata n-esima di f.

Funzioni periodiche Si dice che una funzione di equazione $y = f(x)$ è periodica di periodo T (con $T > 0$) se, per qualsiasi numero k intero relativo, si ha

$$f(x + kT) = f(x)$$

Ogni intervallo di lunghezza T contenuto nel dominio si chiama *intervallo di periodicità*; basterà disegnare il grafico di f su un qualunque intervallo di periodicità per conoscere il grafico di f su tutto il suo dominio.

Funzioni crescenti e decrescenti in un intervallo Una funzione di equazione $y = f(x)$ si dice **crescente in senso stretto** (o *strettamente crescente*) in un intervallo I appartenente al suo dominio se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una funzione si dice **crescente in senso lato** (o *non decrescente*) nell'intervallo I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Una funzione si dice **decrescente in senso stretto** (o *strettamente decrescente*) in un intervallo I appartenente al suo dominio se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una funzione si dice **decrescente in senso lato** (o *non crescente*) nell'intervallo I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Solitamente quando si parla di funzione **crescente o decrescente senza ulteriori aggettivazioni, si intende in senso stretto** (o strettamente

Una **funzione monotòna in un intervallo** è così detta se, nello stesso, è sempre crescente (funzione monotòna crescente) oppure sempre decrescente (funzione monotòna decrescente). La monotonia può essere sia in senso stretto che lato.
Se vi è un intervallo in cui una funzione è **monotona in senso stretto**, nello stesso la funzione è biunivoca, e pertanto **invertibile**. Si noti che non vale l'inverso: una funzione può essere biunivoca nel suo dominio senza essere monotòna (si pensi a una funzione definita a tratti con una prima parte crescente e una seconda decrescente).
Se una funzione non è monotona nel suo dominio, è possibile nei casi più comuni effettuare una suddivisione del dominio in opportuni intervalli in ciascuno dei quali la funzione sia monotòna; tali intervalli vengono detti **intervalli di monotonia**.

17.7 Zeri di una funzione

Data una funzione di equazione $y = f(x)$ si dice che un numero reale c è uno **zero della funzione** se $f(x) = 0$.
La ricerca degli eventuali zeri di una funzione equivale alla ricerca delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0 \tag{17.8}$$

ovvero alla soluzione del sistema equivalente

$$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= 0 \end{cases} \tag{17.9}$$

Questo sistema ha immediata interpretazione grafica; risolverlo significa determinare le intersezioni del grafico della funzione y=f(x) con la retta di equazione

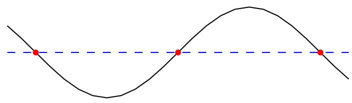


Figura 17.3: Zeri di una funzione

$y = 0$, ovverosia con l'asse delle x. Le soluzioni corrispondono alle ascisse di questi punti di intersezione.

Ad esempio ricerchiamo eventuali 0 della funzione

$$y = x^3 - x - 1$$

per risolvere

$$x^3 - x - 1 = 0 \tag{17.10}$$

possiamo procedere in due modi diversi.

Determinazione in via esatta In via esatta (non sempre percorribile), possiamo vedere che l'equazione 17.10 può essere riscritta come

$$x^3 = x + 1$$

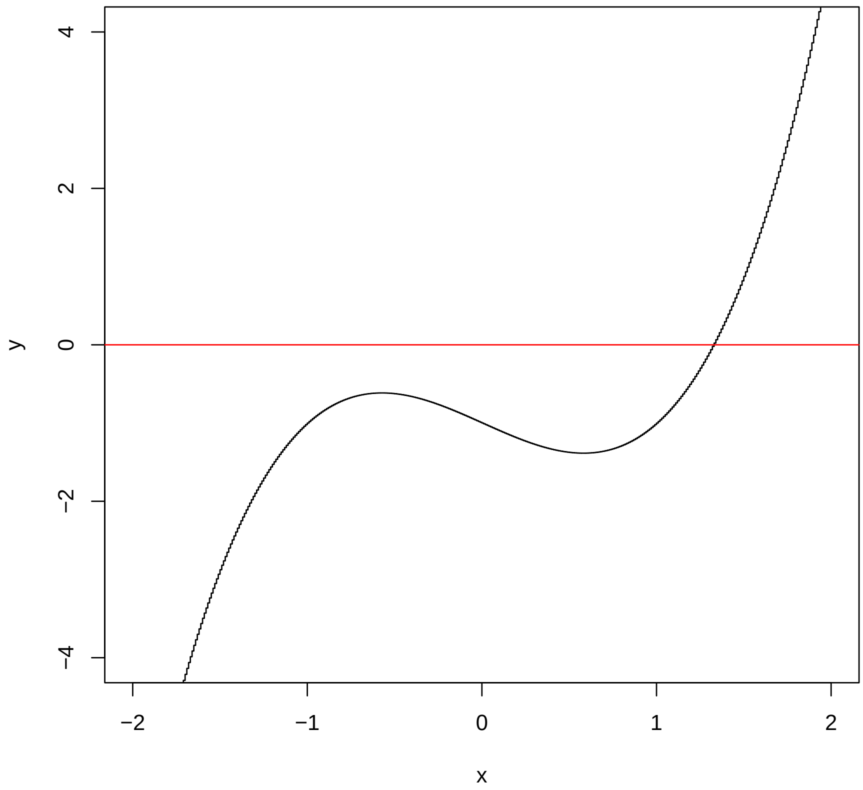
e condurci alla risoluzione, se possibile, del sistema equivalente

$$\begin{cases} y &= x^3 \\ y &= x + 1 \end{cases} \tag{17.11}$$

Le soluzioni, se esistono, consistono nelle ascisse dei punti di intersezione della curva x^3 e la retta $x + 1$.

Determinazione in via approssimata e metodo di bisezione Alternativamente, possiamo plottare il grafico della funzione mediante un elaboratore

```
## Warning in plot.xy(xy, type, ...):  il tipo plot 'solid' sarà troncato
al primo carattere
```



Osservando il grafico si nota la funzione ha un unico 0 e che esso è compreso tra 1 e 2; 1 è un'approssimazione per difetto della x per la quale si ha lo zero della funzione mentre 2 è un'approssimazione per eccesso.
Vi sono metodi numerici per ridurre questo intervallo tra valori che contengono la radice, come ad esempio il metodo di bisezione.
Il **metodo di bisezione** consiste in un processo iterativo per individuare un intervallo del dominio che sotto opportune condizioni di regolarità contiene lo zero della funzione.
Si parte dalla considerazione che se nell'intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato il grafico della funzione $y = f(x)$ è costituito da un tratto di linea continua e se $f(a)$ e $f(b)$ hanno valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo, in cui è $f(x) = 0$.

`TODO fig 35 pg 82`

Lo sviluppo avviene come segue, esemplificato col precedente caso: abbiamo detto che la radice di $f(x) = x^3 - x - 1$ è compresa tra 1 e 2, in quanto $f(1) = -1$ e $f(2) = 5$. Procediamo determinando il punto medio dell'intervallo, ovvero 1.5 Calcoliamo $f(1.5) = 0.875 > 0$. Confrontiamo ora tale valore con quelli che la funzione assume negli estremi dell'intervallo $[1; 2]$e osserviamo che $f(1.5)$ è discorde con $f(1)$, quindi per le considerazioni di prima la soluzione della 17.10 è interna all'intervallo $\{1; 1.5\}$.

Ripetiamo dunque il procedimento, applicandolo al nuovo intervallo, e così via fino a che non abbiamo un intervallo che contiene la radice che sia sufficientemente stretto (l'errore che si commette è minore della distanza dei due estremi dell'intervallo). Per la maggior parte delle applicazioni avere due estremi che coincidono sino alla seconda cifra decimale è abbastanza. Se si vuole conoscere le prime k cifre decimali della radice si dovrà procedere sino a che queste non coincidono negli estremi dell'intervallo che la contengono.

Capitolo 18

Retta

18.1 Equazioni e grafico della retta

In un piano cartesiano una qualsiasi retta è un luogo geometrico rappresentato analiticamente da una equazione del tipo

$$\boxed{ax + by + c = 0, \text{ con } a \neq 0 \vee b \neq 0} \tag{18.1}$$

La 18.1 prende il nome di **equazione generale della retta** o anche **equazione della retta in forma implicita**. Essa è atta a rappresentare, al variare dei coefficienti a, b, c una qualsiasi retta del piano. c è detto *termine noto*.
Una formulazione alternativa comune, per il rapporto diretto con la relativa rappresentazione grafica, è l'equazione della retta in **forma esplicita**:

$$\boxed{y = mx + q} \tag{18.2}$$

I parametri principali in questa formulazione sono due:

q è chiamata q **ordinata all'origine** ed è il valore assunto dalla retta (y) quando $x = 0$, ovvero il punto di intersezione tra la retta e l'asse delle y. Se nella 18.2 $q = 0$ si ottiene l'equazione di una retta passante per l'origine.

m , detto **coefficiente angolare** indica la variazione di y (aumento se $m > 0$, decremento se $m < 0$) all'aumentare di una unità di x.

Per *rappresentare graficamente* una retta conviene, qualora non lo sia già, ricondurre l'equazione della retta alla forma esplicita e procedere col piano cartesiano. Si può ricavare 18.2, risolvendo 18.1 rispetto a y ed effettuando una sostituzione:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ \boxed{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}} \end{aligned} \tag{18.3}$$

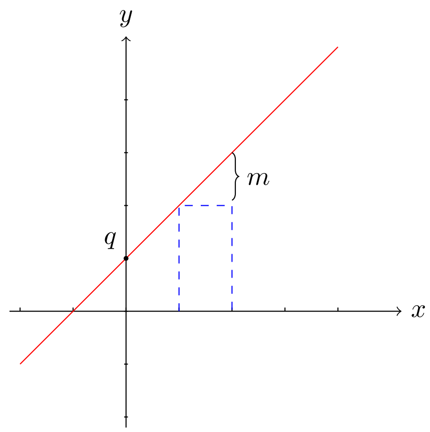


Figura 18.1: $y = x + 1$

con

$$\boxed{m = -\frac{a}{b}}$$

$$\boxed{q = -\frac{c}{b}}$$

18.1.1 Rette in varie posizioni

Vediamo ora le tipologie di rette che si possono generare dalla forma implicita della retta , al variare dei parametri a, b, c.

$\mathbf{a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0}$ L'equazione della retta si dice *completa*; essendo $a, b, c \neq 0 \Rightarrow m, q \neq 0$, si avrà una retta non parallela ad alcuno degli assi cartesiani e non passante per l'origine.

$\mathbf{a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0}$ $c = 0 \Rightarrow q = 0$, ma $m \neq 0$ pertanto si tratta di una retta passante dall'origine, del tipo $y = mx$ e non coincidente con nessuno dei due assi, essendo m determinato e diverso da 0

$\mathbf{a = 0 \wedge b \neq 0}$ è una retta parallela all'asse x (se invece c=0, si ha la retta dell'asse x stessa)

$\mathbf{a \neq 0 \wedge b = 0}$ è una retta parallela all'asse y (se invece c=0, si ha la retta dell'asse y stessa)

$\mathbf{a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0}$ L'equazione, riducendosi all'identità $0 = 0$ risulta verificata per qualsiasi coppia di reali; non rappresenta nessuna retta, bensì il *piano* xy stesso

$\mathbf{a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0}$ L'equazione implicita della retta, in questo caso non ha soluzioni e non ha rappresentazione grafica

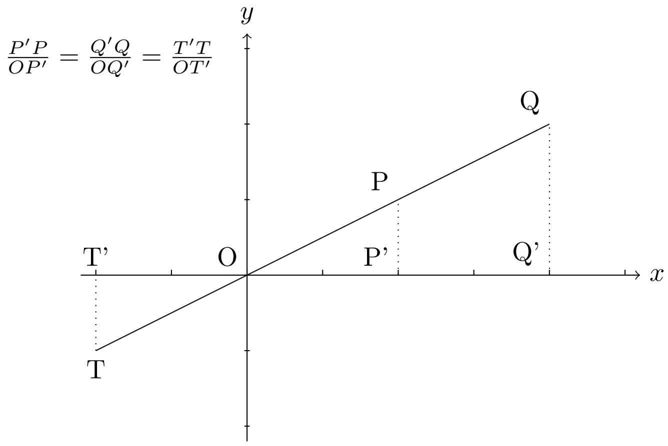
18.1.2 Retta passante per l'origine

La retta passante per l'origine ci permette di esplorare alcune peculiarità della retta in generale:

- se una retta passa per l'origine, essa è il luogo dei punti aventi ordinata proporzionale all'ascissa
- si può esplorare meglio il significato di coefficiente angolare (e caratterizzarlo in particolari coppie di rette (parallele e perpendicolari, come si mostrerà nella prossima sezione)
- si introducono alcune rette notevoli passanti per l'origine, le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano

Luogo geometrico dei punti x, y proporzionali Se una retta $y = mx$ passa per l'origine ed è distinta dagli assi cartesiani, essa è il luogo dei punti aventi ordinata proporzionale all'ascissa secondo un coefficiente opportuno (ovvero il coefficiente angolare).

Se $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ sono due punti generici della retta r ma distinti



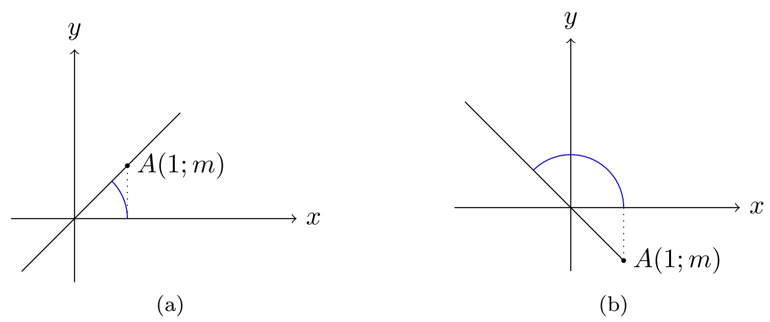
dall'origine, consideriamo P' e Q' le proiezioni ortogonali. I triangoli $OP'P$ e $OQ'Q$ sono simili e pertanto hanno uguali rapporti/proporzioni tra i loro segmenti. Per cui vale

$$\frac{P'P}{OP'} = \frac{Q'Q}{OQ'} \longrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \tag{18.4}$$

Dato che i punti P e Q sono generici, possiamo concludere che per tutti i punti della retta (*diversi dall'origine*), il rapporto tra ordinata e ascissa è costante; tale costante è m il coefficiente angolare.
Raddoppiano, triplicando la x, si raddoppia triplica ... anche la y.

Coefficiente angolare come tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle x Consideriamo una retta passante per l'origine di equazione y=mx e sia A il suo punto di ascissa 1; l'ordinata di A è pertanto $y = m \cdot 1 = m$. Per cui il coefficiente angolare di una retta passante

per l'origine può essere anche visto come l'ordinata del punto della retta che ha ascissa 1
Se però chiamiamo *angolo formato dalla retta con l'asse x* α, l'angolo che il semiasse positivo delle x descrive in senso antiorario per sovrapporsi alla retta r, anche dall'esame grafico notiamo che il coefficiente angolare di una retta consiste nella **tangente goniometrica** di tale angolo.



Bisettrici dei quadranti Sono particolarmente importante due retti passanti per l'origine che si ottengono dall'equazione $y = mx$ per $m = 1$ $m = -1$, ossia le rette di equazione

$$y = x \tag{18.5}$$
$$y = -x \tag{18.6}$$

La prima risulta l'equazione del luogo i cui punti hanno l'ordinata uguale, in valore assoluto e segno, all'ascissa; si tratta della retta bisettrice del primo-terzo quadrante (in tal caso si ha $m = 1$ e $\alpha = 45°$).
La seconda è l'equazione del luogo dei punti hanno l'ordinata uguale in valore assoluto ma di segno contrario all'ascissa; si tratta della retta bisettrice del secondo-quarto quadrante ($m = -1$ e $\alpha = 135°$).

18.1.3 Coefficiente angolare, rette parallele e perpendicolari

Rette parallele Considerando nel piano due rette s e t non perpendicolari all'asse x, di equazione rispettivamente $y_s = m_s x + q_s$ e $y_t = m_t x + q_t$ esse sono parallele se hanno ugual coefficiente angolare. Viceversa due rette con uguale coefficiente angolare sono parallele.

$$s \parallel t \Longleftrightarrow m_s = m_t \tag{18.7}$$

Per le rette parallele all'asse y non è definito il coefficiente angolare: la loro equazione è del tipo $x = h$.

Rette perpendicolari Considerando due rette r ed r' non parallele agli assi di equazione $r) y = mx + q$ ed $r') y = m'x + q'$, ricerchiamo quali condizioni devono soddisfare i loro coefficienti angolari nel caso in cui esse siano perpendicolari tra

loro.
Partiamo considerando le rette ad esse parallele passanti per l'origine degli assi, s ed s', aventi equazione $y = mx$ ed $y = m'x$. Siano A e A' i punti rispettivamente

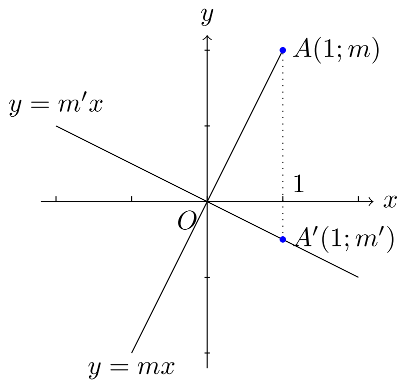


Figura 18.2: Rette perpendicolari

di s ed s' aventi per ascissa 1. Le ordinate di tali punti sono m e m', pertanto le coordinate dei punti sono $A(1; m)$ e $A'(1; m')$.

Ipotizzando che le due rette siano perpendicolari, allora i punti OAA' formano un triangolo rettangolo. Per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2. \tag{18.8}$$

Essendo $\overline{AA'} = |m - m'|$, allora $\overline{OA} = \sqrt{1 + m^2}$, $\overline{OA'} = \sqrt{1 + m'^2}$ la 18.8 diventa

$$|m - m'|^2 = (1 + m^2) + (1 + m'^2)$$
$$m^2 - 2mm' + m'^2 = 2 + m^2 + m'^2$$

da cui si deduce che:

$$\boxed{m \cdot m' = -1} \tag{18.9}$$

o anche

$$\boxed{m = -\frac{1}{m'}} \tag{18.10}$$

Dunque condizione necessaria e sufficiente affinché due rette non parallele agli assi, siano perpendicolari è che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia -1, ovvero ce i due coefficienti angolari siano l'uno opposto del reciproco dell'altro.

18.1.4 Posizione reciproca di due rette: determinazione analitica

Date due rette r, s di equazione

$$a_r x + b_r y + c_r = 0$$
$$a_s x + b_s y + c_s = 0$$

i punti di loro intersezione sono determinati dal sistema composto dalle rispettive equazioni del luogo geometrico.
Se il sistema è

- *determinato*, ovvero vi è una soluzione (x_0, y_0) che rappresenta le coordinate del punto di intersezione di r, s, allora graficamente saranno **incidenti**.
- *indeterminato*, ovvero qualsiasi coppia (x, y) appartiene ad entrambe le rette, allora graficamente queste saranno **coincidenti**;
- *impossibile*, ovvero non vi sono coppie (x, y) che appartengono ad entrambe le rette, allora graficamente queste saranno **parallele**.

Si può verificare che r ed s sono *incidenti* se e solo se

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}, \quad \text{con } a', b' \neq 0 \tag{18.11}$$

Sono *coincidenti*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \quad \text{con } a', b', c' \neq 0 \tag{18.12}$$

Sono *parallele e distinte* se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}, \quad \text{con } a', b', c' \neq 0 \tag{18.13}$$

18.1.5 Equazione del fascio di rette

18.1.5.1 Equazione del fascio improprio di rette

Per fascio improprio di rette si intende l'insieme di tutte le rette di un piano che hanno la *medesima direzione*, ossia che sono parallele fra loro.
L'equazione

$$y = mx + k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \tag{18.14}$$

con m fisso e k variabile, rappresenta un fascio improprio di rette (non parallele all'asse y). Al variare di k si ottengono tutte le rette del fascio, per $k = 0$ quella passante per l'origine (detta *retta base del fascio*).

L'equazione 18.14 non è adatta a rappreentare il fascio delle rette parallele all'asse y, non essendo definito per tali rette il coefficiente angolare: un tale fascio ha equazione

$$x = h, \quad \text{con } h \in \mathbb{R} \tag{18.15}$$

18.1.5.2 Equazione fascio proprio di rette

Si intende l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un certo punto punto, detto **centro del fascio** (si immagini una stella). L'equazione

$$y = mx$$

con m variabile rappresentare il fascio di rette passante per l'origine.
Il fascio di rette che invece passano per (x_0, y_0) (centro del fascio) può esser risolto considerando una traslazione del sistema di riferimento al sistema che ha origine in (x_0, y_0).

Dobbiamo trasportare il fascio di rette $y' = mx'$ del sistema $x'O'y'$ nel sistema. Le relazioni tra i due sistemi di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

da cui, sostituendo, abbiamo che

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{18.16}$$

rappresenta il il fascio di rette con pendenza $m \in \mathbb{R}$ di centro $C(x_0; y_0)$, con esclusione della parallela all'asse y, per la quale non è definito il coefficiente angolare (e che ha equazione $x = x_0$).

18.2 Applicazioni

18.2.1 Equazione della retta passante per un punto con dato coefficiente angolare

La sua determinazione è una semplice applicazione del fascio proprio di rette, sostituendo coordinate del punto e coefficiente angolare imposto, e risolvendo in funzione di y per giungere alla forma esplicita.

18.2.2 Coefficiente angolare della retta passante per due punti

Se abbiamo due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, posto che $x_1 \neq x_2$, una retta che passi per entrambi avrà coefficiente angolare

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ovvero il rapporto tra l'incremento delle ordinate e l'incremento delle ascisse[1].

18.2.3 Equazione della retta passante per due punti - 1

Per determinare l'equazione della retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ si può considerare che entrambi soddisfano l'equazione della retta. Tra le due rappresentazioni è più conveniente quella in forma implicita. Ponendo a sistema

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

e risolvendo si possono determinare i parametri m e q, da cui la retta ricercata.

[1] Si possono invertire anche l'ordine dei sottraendi al numeratore e denominatore nella formula, il risultato non cambia.

18.2.4 Equazione della retta passante per due punti - 2

Nel caso di due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, tali che $x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$[2], un altro modo (più veloce) è imporre il coefficiente della retta passante per due punti all'equazione del fascio di rette, come segue

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{18.17}$$

Questa può esser interpretata come equazione della retta passante per due punti; o meglio passa per il punto P_1, ed ha la pendenza necessaria per "beccare" anche P_2.

18.3 Equazioni parametriche di una curva

Una curva può esser definita, oltre che da un'equazione $F(x; y) = 0$ nelle due variabili x e y, da una coppia di equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \end{cases} \tag{18.18}$$

che forniscono le coordinate dei suoi punti al variare di un parametro reale t. Si può anche pensare che t rappresenti il *tempo*; in tal caso le equazioni di sopra permettono di individuare la posizione del punto $P(x; y)$ all'istante t. In questo caso la curva rappresenta la traiettoria descritta dal punto mobile P nel piano cartesiano. Volendo, è poi possibile nei casi più comuni:

- ricavare l'equazione cartesiana $F(x; y) = 0$ della curva, eliminando il parametro t dalle due equazioni;
- ricavare una possibile forma parametrica da quella cartesiana

Da parametrico a cartesiano Una curva γ è assegnata mediante le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= 2t - 3 \\ y &= 3t + 1 \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana, troviamo dalla prima $t = \frac{x+3}{2}$ e, sostituendola nella seconda,

$$\begin{aligned} y &= 3\left(\tfrac{x+3}{2}\right) + 1 \\ &= \tfrac{3}{2}x + \tfrac{11}{2}x \end{aligned}$$

Da cartesiano a parametrico Scrivere le equazioni parametriche della retta di equazione

$$3x - 2y + 11 = 0$$

Scriviamo l'equazione nella forma $3x = 2y - 11$ e ponendo uguale a t entrambi i membri otteniamo

$$\begin{cases} x &= \frac{t}{3} \\ y &= 3t + 1 \end{cases}$$

[2]Si pensi alla condizione in termini geometrici, ovvero i due punti devono esser distinti.

Confrontando questo esempio con il precedente, si vede che una data retta può avere più di una rappresentazione parametrica.

18.4 Distanza di una retta dall'origine

Per distanza di una retta da un punto si intende la lunghezza del segmento perpendicolare alla retta, che collega questa al punto considerato.
Iniziamo determinando la formula della distanza dall'origine, per poi considerare la distanza da un punto generico.

18.4.1 Distanza dall'origine

Data una retta r con equazione in forma implicita

$$ax + by + c = 0 \tag{18.19}$$

con $a \neq 0 \vee b \neq 0$.
Siano M e N i punti in cui la retta interseca rispettivamente l'asse x e l'asse y;

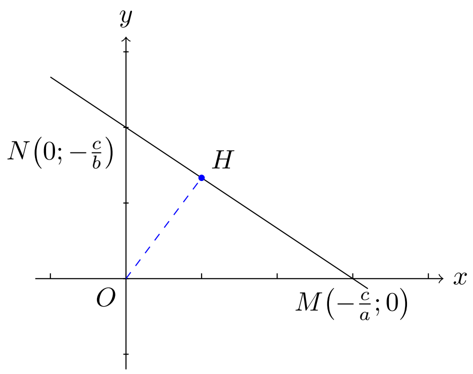


Figura 18.3: Distanza dall'origine degli assi

sia OH la distanza da O alla retta.
Dalla 18.19 abbiamo che le coordinate dei punti M ed N sono:

- se $x = 0$, allora $y = -\frac{c}{b}$ e quindi $N(0; -\frac{c}{b})$
- se $y = 0$, allora $y = -\frac{c}{a}$ e quindi $N(0; -\frac{c}{a})$

La lunghezza dei segmenti:

$$\overline{ON} = \left|-\frac{c}{b}\right|$$
$$\overline{OM} = \left|-\frac{c}{a}\right|$$

Per il teorema di Pitagora avremo $\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2$, cioè:

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \\ &= \left|\frac{c}{ab}\right| \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Si noti anche che $\overline{OH} \cdot \overline{MN} = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$ (ciascun prodotto rappresenta il doppio della misura dell'area del triangolo MON). Da queste considerazioni abbiamo:

$$\overline{OH} \cdot \left|\frac{c}{ab}\right| \sqrt{a^2+b^2} = \left|-\frac{c}{b}\right| \cdot \left|-\frac{c}{a}\right|$$

da cui

$$\boxed{\overline{OH} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{18.20}$$

18.4.2 Distanza da un punto arbitrario

Data una retta r con equazione in forma implicita

$$ax + by + c = 0 \tag{18.21}$$

con $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Sia $P(x_0; y_0)$ il generico punto di cui vogliamo calcolare la distanza.

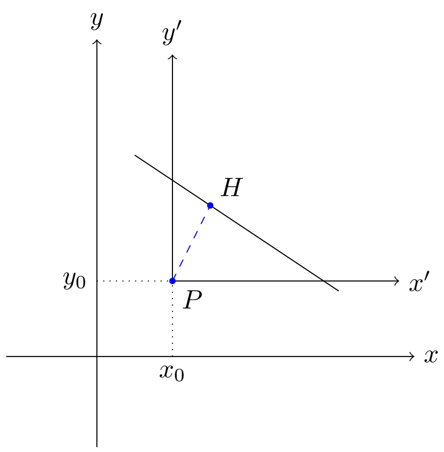


Figura 18.4: Distanza dall'origine degli assi

Per farlo, basterà ricondursi al caso precedente, eseguendo una traslazione del sistema di riferimento che porti l'origine in P.
Nel sistema traslato l'equazione della retta diventa

$$a(x'+x_0) + b(y'+y_0) + c = 0$$
$$ax' + by' + \underbrace{ax_0 + by_0 + c}_{\text{termine noto}} = 0$$

Nel nuovo sistema la distanza dall'origine (che ora è il punto P) è data dalla 18.20

$$\boxed{\overline{PH} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{18.22}$$

Ovvero si sostituisce al numeratore il nuovo termine noto.

Capitolo 19

Circonferenza

19.1 Equazioni della circonferenza

La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso, detto **centro**, è congruente a un segmento non nullo detto **raggio**.
Nel piano cartesiano una circonferenza è individuata quando sono note:

- le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$
- la misura r del raggio

Per determinare l'equazione, dalla definizione e dalla formula della distanza tra due punti, discende che:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

elevando al quadrato entrambi i membri si ha

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} \tag{19.1}$$

La 19.1 è **l'equazione della circonferenza** di centro $C(x_0; y_0)$ e di raggio di

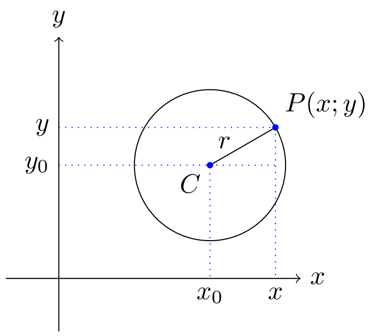


Figura 19.1: Circonferenza

misura r. Essa può anche esser scritta, sviluppando i quadrati, come

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

e ponendo

$$-2x_0 = \alpha \tag{19.2}$$
$$-2y_0 = \beta \tag{19.3}$$
$$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = \gamma \tag{19.4}$$

si giunge all'**equazione della circonferenza in forma normale** (o *canonica*), ovvero

$$\boxed{x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0} \tag{19.5}$$

L'equazione di sopra è di secondo grado in x e y, mancante del termine contenente il prodotto xy e con i coefficienti di x^2 e y^2 uguali a 1.
Se scritta in questa forma, il centro si può ricavare dalle prime due relazioni da 19.2 e 19.3

$$-2x_0 = \alpha \longrightarrow \boxed{x_0 = -\frac{\alpha}{2}} \tag{19.6}$$

$$-2y_0 = \beta \longrightarrow \boxed{x_0 = -\frac{\beta}{2}} \tag{19.7}$$

Per cui $C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$.
La misura del raggio si ricava invece da 19.4, tenendo conto delle coordinate del centro ora ricavate:

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - \gamma \longrightarrow \boxed{r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}} \tag{19.8}$$

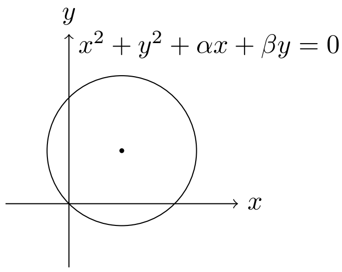
Si noti che una circonferenza espressa nella forma 19.1 può esser ricondotta alla 19.5.
Tuttavia non qualsiasi espressione nella forma 19.5 rappresenta una circonferenza. Per farlo, i suoi coefficienti α, β, γ rendano *positiva o al più nulla*, ma non negativa) l'espressione sotto radice quadrata. Il che equivale a dire che il raggio deve avere lunghezza strettamente positiva, o al più nulla (in questo secondo caso si parla di *circonferenza di raggio nullo, degenere nel suo centro*).

Infine, una circonferenza θ il cui centro ha coordinate $C(x_0, y_0)$ e raggio r viene descritta con la seguente **forma parametrica**:

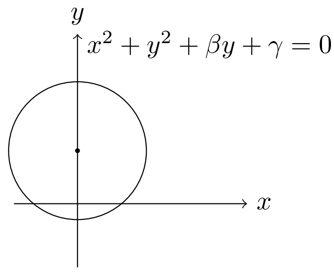
$$\theta = \begin{cases} x = x_0 + r\,\cos(t) \\ \\ y = y_0 + r\,\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi] \tag{19.9}$$

19.1.1 Circonferenze in posizioni particolari

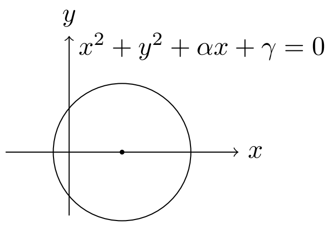
Se uno/due dei coefficienti α, β, γ della 19.5 è nullo, la corrispondente circonferenza ha, rispetto agli assi una particolare posizione.



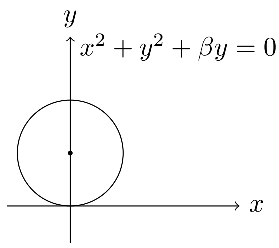
(a) $\boxed{\gamma = 0}$ Circonferenza passante per l'origine.



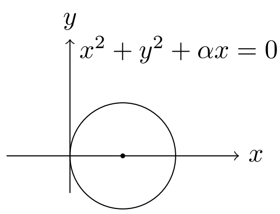
(b) $\boxed{\alpha = 0}$ Circonferenza con centro sull'asse y.



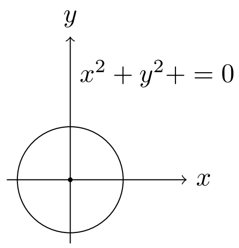
(c) $\boxed{\beta = 0}$ Circonferenza con centro sull'asse x.



(d) $\boxed{\alpha = \gamma = 0}$ Circonferenza con centro sull'asse y e passante per l'origine.



(e) $\boxed{\beta = \gamma = 0}$ Circonferenza con centro sull'asse x e passante per l'origine.



(f) $\boxed{\alpha = \beta = 0}$ Circonferenza con centro nell'origine.

19.2 Posizioni

19.2.1 Posizione di un punto rispetto a una circonferenza

Per stabilire se un punto sia interno, esterno o appartenente ad una data circonferenza basta calcolare la distanza di tale punto dal centro della circonferenza. Se:

- è inferiore alla lunghezza del raggio, il punto appartiene alla circonferenza (es p).

- è uguale alla lunghezza del raggio, il punto risiede sulla circonferenza (es p');

- è maggiore del raggio, il punto risiede all'esterno della circonferenza (es p'');

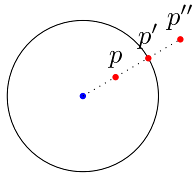


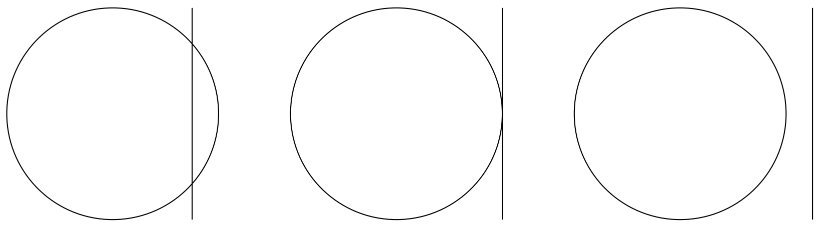
Figura 19.2: Posizione di un punto rispetto ad una circonferenza

19.2.2 Posizione di una retta rispetto a una circonferenza

Per trovare le intersezioni di una circonferenza con un retta del suo piano, basta risolvere il sistema di secondo grado formato dalle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ab + by + c = 0 \end{cases} \tag{19.10}$$

Se vi sono due soluzioni distinte la retta è *secante* la circonferenza; se le due soluzioni sono coincidenti, la retta è *tangente*; se infine non vi sono soluzioni la retta è *esterna* alla circonferenza. La retta risulta secante, tangente o



(a) Retta secante (b) Retta tangente (c) Retta esterna

esterna a seconda che la distanza d dal centro della circonferenza alla retta sia rispettivamente minore, uguale o maggiore della misura del raggio r.

Quanto esposto vale anche quando al posto di una circonferenza si considera una **qualsiasi altra conica**. E' possibile quindi riconoscere se una retta e una conica sono tangenti: basta risolvere il sistema di secondo grado in x e y formato dall'equazione della retta e dall'equazione della conica; se il sistema ha due soluzioni coincidenti, la retta e la conica sono tangenti. Ciò accade se l'equazione di secondo grado risolvente tale sistema ha il discriminante nullo.

19.2.3 Tangenti passanti da una curva

Vogliamo in questa sede scrivere le equazioni delle tangenti ad una determinata conica, passanti per un punto. Se dal punto considerato, che indicheremo con $P(x_0; y_0)$

- si possono condurre due rette tangenti alla conica, il punto è esterno alla conica

- è possibile condurre una sola tangete, il punto appartiene alla conica
- non è possibile condurre alcuna retta tangente, il punto è interno alla conica

Considerando allora la conica di equazione $F(x;y) = 0$ e un punto $P(x_0;y_0)$. Fra tutte le rette passanti per il punto P, rappresentate attraverso l'equazione del fascio di rette

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{19.11}$$

vi sono ance le eventuali tangenti alla conica; il problema di condurre le tangenti da P alla conica si riduce quindi a ricercare i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle tangenti.
Per farlo poniamo a sistema l'equazione del fascio di rette e quella della conica

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ F(x;y) = 0 \end{cases} \tag{19.12}$$

Applicando il metodo di sostituzione si elimina la y (o la x) tra le due equazioni. Si ottiene così un'equazione di secondo grado in x (o in y) che chiameremo **equazione risolvente** l sistema; i coefficienti di tale equazioni saranno funzioni del parametro m.
Le soluzioni dell'equazione risolvente, se esistono, sono le ascisse (o le ordinate) dei punti di intersezione tra la retta passante per P e la conica. Affinchè la retta per P sia tangente alla conica, occorre che l'equazione risolvente ammentta due soluzioni coincidenti (ossia che tale equazione abbia discriminante nullo).
Imponendo che sia $\Delta = 0$, si ottengono proprio i coefficienti m_1 e m_2 cercati, in corrispondenza a ciascuno dei quali l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti.
Una volta ottenuti si potrà sostituirli al fascio di rette per determinare le equazioni delle rette tangenti

Nel caso particolare che una delle due tangenti da P alla conica sia parallela all'asse y, si dovrà determinare il coefficiente angolare m_1 della tangente non parallela all'asse y, mentre l'altra avrà equazione $x = x_0$.
In tal caso imponendo $\Delta = 0$ si ricava un unico valore $m = m_1$; in tal acso una delle due tangenti avrà equazione $y - y_0 = m_1(x - x_0)$ e l'altra parallela all'asse y, avrà equazione $x = x_0$.

19.2.4 Posizioni reciproca di due circonferenze - Parte 1

Due circonferenze che giacciono sullo stesso piano possono assumere posizioni diverse l'una rispetto all'altra. Queste posizioni reciproche sono classificate a seconda della relazione tra i raggi e le distanze tra i centri.

Circonferenze esterne Le due circonferenze non si intersecano e sono una al di fuori dell'altra. Ciò avviene se la distanza d fra i due centri è superiore al valore della somma dei due raggi

Circonferenze tangenti esternamente Le circonferenze sono fra loro tangenti (un solo punto di intersezione) esternamente se la distanza d fra i due centri è uguale al valore della somma dei due raggi.

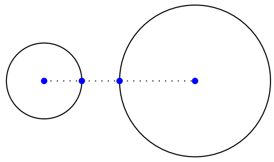


Figura 19.3: Circonferenze esterne

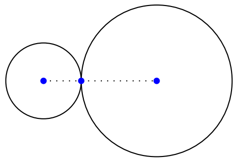


Figura 19.4: Circonferenze tangenti esternamente

Circonferenze secanti Si tratta della situazione in cui le due circonferenze hanno due punti in comune. Ciò avviene se la distanza d fra i due centri e' inferiore al valore della somma dei due raggi e superiore alla loro differenza

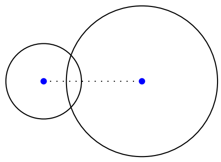


Figura 19.5: Circonferenze secanti

Circonferenze tangenti internamente Le circonferenze sono fra loro tangenti internamente se la distanza d fra i due centri e' uguale al valore della differenza dei due raggi.

Circonferenza interna eccentrica Le due circonferenze sono una interna all'altra, ma con centri diversi e senza punti in comune. La distanza tra i centri è minore della differenza dei raggi.

Circonferenza interna concentrica In questo caso le due circonferenze di raggio diverso condividono il centro. Si tratta del caso particolare del punto precedente in cui la distanza tra i centri è nulla.

19.2.5 Posizione reciproca tra due circonferenze - Parte 2

Per ricercare gli eventuali punti di intersezione tra due circonferenze basta risolvere il sistema costituito dalle loro equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \end{cases} \tag{19.13}$$

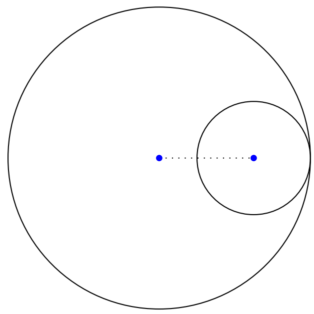


Figura 19.6: Circonferenze tangenti internamente

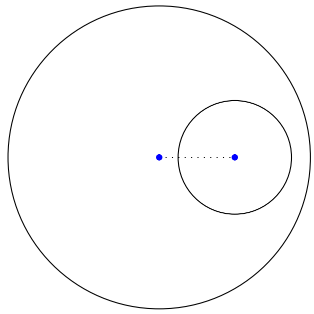


Figura 19.7: Circonferenze interna eccentrica

Se le due circonferenze non sono concentriche, sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ (\alpha - \alpha_1)x + (\beta - \beta_1)y + \gamma - \gamma_1 = 0 \end{cases} \tag{19.14}$$

In tal modo siamo ricondotti al caso della ricerca dei punti di intersezione di una delle due circonferenze una retta (la seconda equazione) chiamato **asse radicale**. A questa appartengono gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze: tale retta congiunge i punti di intersezione se le circonferenze sono secanti oppure è la tangente comune se esse sono tangente (si potrebbe verificare ce l'asse radicale di due circonferenze è perpendicolare alla congiungente dei loro centri).

19.3 TODO

```
- integra con cap 19 libro 1 pag 529 sulla geometria della circonferenza
- circonferenza passante per tre punti pag 151 l3
- applicazioni: curve riconducibili all'equazione della circonferenza
  l3 pg 157
- fascio di circonferenze l3 pag 159
```

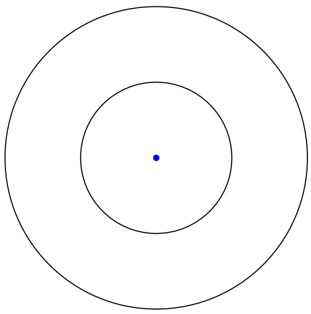


Figura 19.8: Circonferenze interna concentrica

Capitolo 20

Parabola

Geometricamente, la parabola è il *luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso F (detto **fuoco**) e da una retta d (detta **direttrice**).* Al di la di fuoco e direttrice, due elementi sono importanti per il disegno di una parabola:

- l'asse di simmetria: è la retta rispetto, alla quale la parabola è simmetrica, che la taglia a metà
- il vertice: è l'unico punto della parabola residente sull'asse di simmetria. In una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y coincide con il punto minimo o massimo della funzione che il grafico della parabola rappresenta

In questa ci concentriamo sulle equazioni e relative proprietà delle differenti parabole, lasciando stare la derivazione geometrica.
Ci concentriamo qui solamente su parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y, le cui equazioni sono del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (*funzione quadratica*) e di parabole con asse parallelo all'asse x, le cui equazioni sono del tipo $x = ay^2 + by^2 + c$.

20.1 Parabola con asse parallelo all'asse y

20.1.1 Parabola di equazione $y = ax^2$

L'equazione

$$y = ax^2 \tag{20.1}$$

è l'equazione di una parabola con

- vertice nell'origine degli assi $V(0;0)$
- asse di simmetria coincidente con l'asse y, pertanto indicabile dall'espressione $x = 0$.

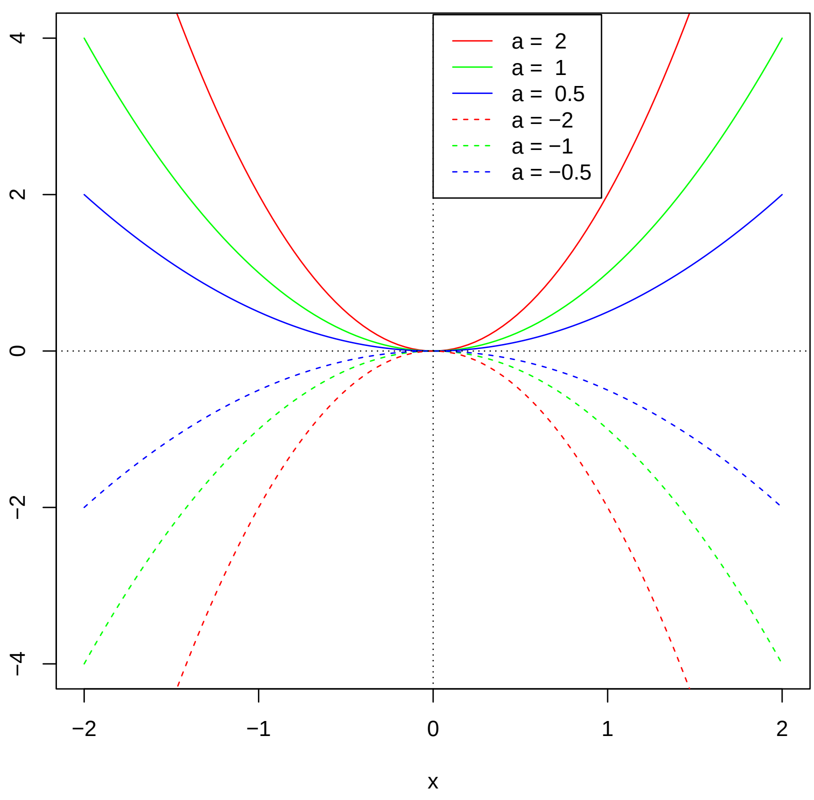
Come si nota la 20.1 è l'equazione di una funzione, e poiché è $(-x)^2 = (x^2)$ il valore della funzione per valori opposti di x è lo stesso; pertanto la sostituzione

$\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to y \end{bmatrix}$ lascia invariata l'equazione. La parabola, grafico della funzione, risulta simmetrica rispetto all'asse y.
Osserviamo che, nell'equazione 20.1 se $a > 0$, i valori di y sono positivi per $x \neq 0$ (ed è $y = 0$, per $x = 0$). Al contrario se $a < 0$, i valori di y sono negativi per $x \neq 0$ (ed è $y = 0$, per $x = 0$).
Nella figura sono riportati i grafici di alcune parabole in corrispondenza a diversi valori di a[1].
Il coefficiente a determina:

- la **concavità** della curva, rispettivamente verso l'alto o verso il basso a seconda che a sia positivo o negativo

- l'**apertura** della curva a seconda del valore assoluto da esso assunto: la parabola è tanto più aperta quanto più piccolo è in valore assoluto, il coefficiente a

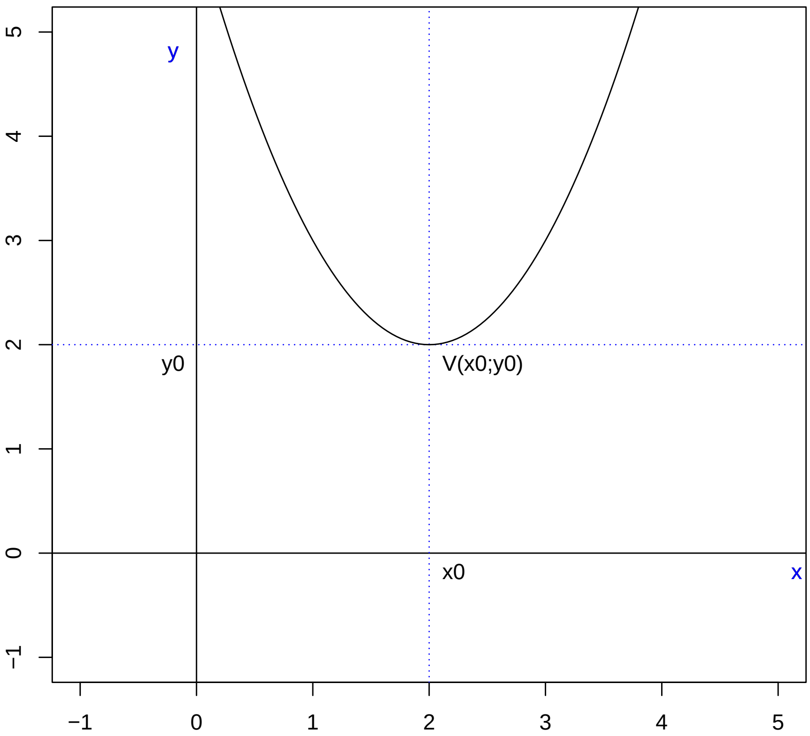
Nel caso $a = 0$, l'equazione $y = ax^2$ si riduce a $y = 0$ e si suol dire che la *parabola degenera nell'asse x*



[1] Ottenibili con tabelle che si ricavano dando a x valori arbitrari e calcolando i corrispondenti valori di y

20.1.2 Parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Consideriamo ora la più generica parabola γ avente asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice $V(x_0; y_0)$. Per generarne l'equazione possiamo riutilizzare quella di $y = ax^2$ (che già esprime concavità e curvatura della parabola), prevedendo una traslazione del sistema di riferimento da $O(0; 0)$ a $V(x_0; y_0)$.



Nel sistema XVY l'equazione di γ sarà

$$Y = aX^2 \tag{20.2}$$

Le equazioni della traslazione del sistema di riferimento sono:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Applicando queste ultime a 20.2, si ha

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \tag{20.3}$$

che rappresenta quindi l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V(x_0; y_0)$. Sviluppando i calcoli quest'ultima diviene

$$y = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0$$

ponendo $-2ax_0 = b$, $ax_0^2 + y_0 = c$, arriviamo a

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \tag{20.4}$$

Una qualsiasi parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha quindi equazione del tipo 20.4.
È possibile dimostrare che detta parabola ha **vertice** nel punto

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)} \tag{20.5}$$

L'**asse di simmetria** è la retta parallela all'asse y passante per V, e quindi ha equazione

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}} \tag{20.6}$$

Congruenza delle parabole È evidente che *due parabole* con asse di simmetria parallelo all'asse y sono *congruenti* se hanno uguale nelle loro equazioni scritte in forma $y = ax^2 + bx + c$ il valore assoluto del coefficiente a.
Lo sono pertanto, ad esempio $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 3x$ e $y = 2x^2 + x - 1$.

20.1.2.1 Parabole in posizioni particolari

Se nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si ha $a \neq 0, b = c = 0$ si ha l'equazione $y = ax^2$ e la parabola già considerata.
Se invece si ha $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ si ottiene l'equazione $y = ax^2 + bx$ di una parabola passante per l'origine $O(0; 0)$.
Se infine si ha $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ si ottiene l'equazione $y = ax^2 + c$ che rappresenta una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y e avente pertanto il vertice nel punto $V(0; c)$ in cui la curva interseca l'asse y.

20.2 Parabola con asse parallelo all'asse x

L'equazione

$$\boxed{x = ay^2} \tag{20.7}$$

rappresenta una parabola con vertice nell'origine e avente l'asse di simmetria coincidente con l'asse x.
Se è:

- $a > 0$, la **concavità** della curva è verso destra
- $a < 0$, la concavità della curva è verso sinistra

Analogamente a quanto fatto in precedenza si ottiene l'equazione

$$\boxed{x = ay^2 + by + c} \tag{20.8}$$

che rappresenta una generica parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x. Se chiamiamo $\Delta = b^2 - 4ac$, la parabola descritta da 20.8 presenta **vertice** in

$$\boxed{V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)} \tag{20.9}$$

e **asse di simmetria** in

$$\boxed{y = -\frac{b}{2a}} \tag{20.10}$$

Infine se è:

- $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ la parabola passa per l'origine
- $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ la parabola ha asse di simmetria coincidente con l'asse x e con vertice nel punto $V(c; 0)$

Osservazione Si nota che le equazioni 20.7 e 20.8 non sono quelle di una funzione del tipo $y = f(x)$; in tali equazioni è la variabile x a essere funzione della variabile y.

20.3 Posizione reciproca tra retta e parabola

Per **determinare i punti di intersezione** tra una retta e una parabola, basta risolvere il sistema di secondo grado formato dalle loro equazioni:

- se le due soluzioni sono reali e distinte, la retta è *secante* la parabola
- se reali e coincidenti, la retta è *tangente* alla parabola
- se non vi sono soluzioni, la retta è *esterna* alla parabola

Si noti infine che se la retta è parallela all'asse di simmetria della parabola, la retta interseca la parabola in un solo punto.

Per **condurre le tangenti alla parabola** da un punto esterno o a essa appartenente, valgono le considerazioni fatte per una generica conica fatte nel capitolo della circonferenza.

20.4 Applicazioni

20.4.1 Studio di particolari curve

Vediamo come si possono rappresentare alcune particolari curve, per il cui studio è necessario ricorrere al grafico di una parabola.

20.4.1.1 Studio della curva $y = \sqrt{x}$

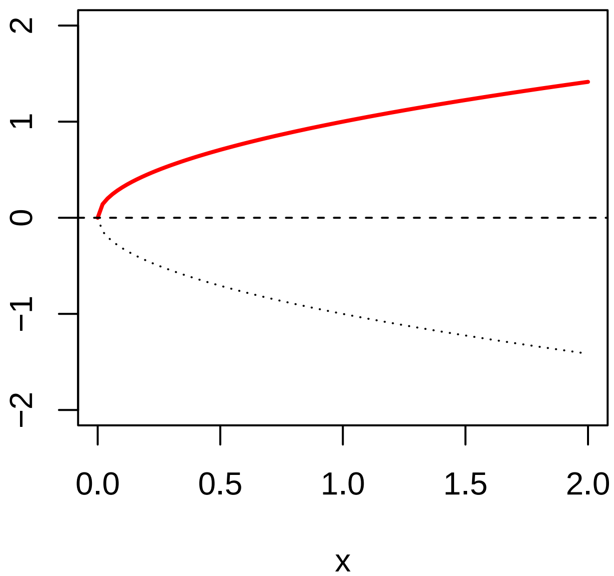
Tracciare il grafico della funzione di equazione:

$$y = \sqrt{x}$$

Notiamo che la funzione è definita per $x \geq 0$ e i valori di y risultano positivi o nulli, $y \geq 0$, pertanto

$$y = \sqrt{x} \longrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ma $x = y^2$ è l'equazione della parabola che ha vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse x e pertanto il grafico della funzione data sarà costituito dai punti della parabola che soddisfano la condizione $y \geq 0$ (i punti che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle



20.4.1.2 Studio della curva $y = \sqrt{x+a} + b$

Tracciare il grafico della funzione

$$y = \sqrt{x-2} + 3$$

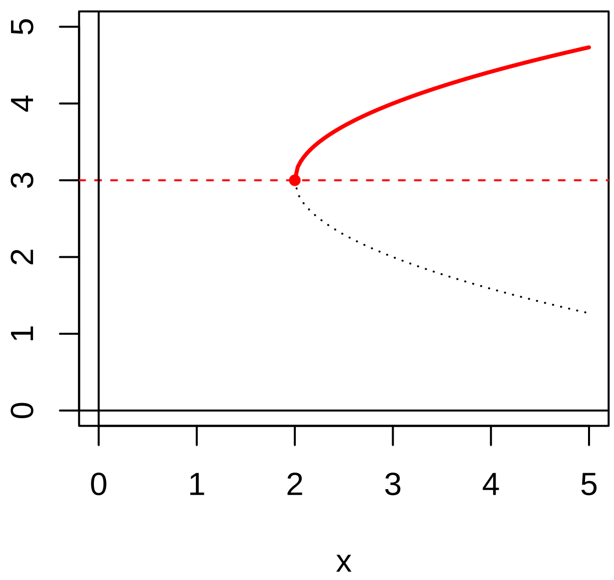
Osserviamo che essa esiste per $x \geq 2$ e che è $y \geq 3$. Allora

$$y = \sqrt{x-2} + 3 \longrightarrow y - 3 = \sqrt{x-2}$$

da cui

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ (y-3)^2 = x-2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ x = y^2 - 6y + 11 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione scritta rappresenta una parabola avente vertice in $V(2;3)$ e per asse di simmetria la retta di equazione $y = 3$, si può dedurre che il grafico voluto è costituito dalla semi-parabola che appartiene al semipiano delle ordinate maggiori o uguali a 3.



Osservazione Alternativamente per chi ha familiarità con le trasformazioni non è difficile osservare che le due curve sopra studiate sono congruenti e che la seconda si può ottenere sottoponendo i punti di $y = \sqrt{x}$ ad una traslazione di vettore $\overrightarrow{v} = (2;3)$

20.4.1.3 Studio della curva $y = \sqrt{1 + x - |x|}$

Affinché la funzione sia definita occorre che il radicando sia positivo o nullo

$$1 + x - |x| \geq 0$$

pertanto

$$\begin{cases} 1 + x - x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + x - (-x) \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Poiché il primo sistema è soddisfatto per $x \geq 0$ e il secondo per $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, riunendo i risultati si ottiene il dominio

$$D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

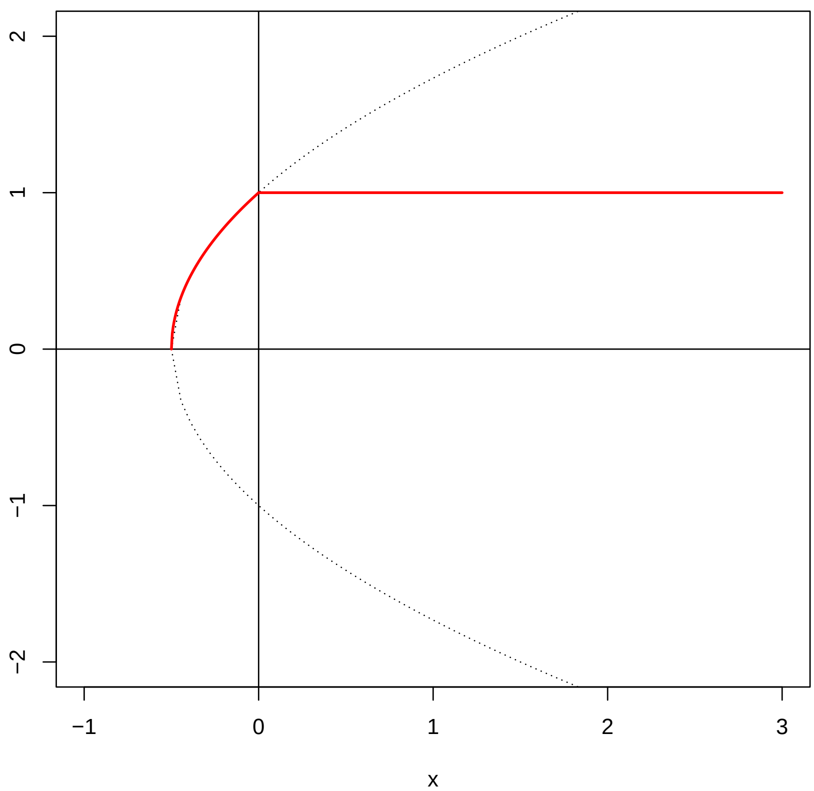
Ora osserviamo che $\forall x \in D$ si ha $y \geq 0$; eleviamo al quadrato ambo i membri dell'equazione della funzione data

$$y^2 = 1 + x - |x| \rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 & \text{per } x \geq 0 \\ y^2 = 1 + 2x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ovvero, tenendo conto del dominio e dell'osservazione che $y \geq 0$

$$\begin{cases} y = 1 & \text{per } x \geq 0 \\ x = \frac{y^2-1}{2} \wedge y \geq 0 & \text{per } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Poiché $x = \frac{y^2-1}{2}$ è l'equazione di una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse x e vertice $V\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, si ricava facilmente il grafico della funzione data. Il codominio risulta l'intervallo $[0; 1]$.



20.4.2 Risoluzione grafica di equazioni irrazionali

Vediamo esempi che mostrano come, in qualche caso semplice, è utile e interessante risolvere un'equazione irrazionale per via grafica

20.4.2.1 Equazione $\sqrt{2-x} = 2x - 1$

Risolvere l'equazione graficamente l'equazione $\sqrt{2-x} = 2x - 1$. Risolvere graficamente l'equazione data significa risolvere graficamente il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{2-x} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

ossia determinare gli eventuali punti di intersezione tra la curva della prima equazione e la retta della seconda. le soluzioni saranno le ascisse di tali punti di intersezione.
Osserviamo che

$$y = \sqrt{2-x} \to \begin{cases} y^2 = 2 - x \\ y \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -y^2 + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Se ne deduce che il grafico della prima delle due equazioni è costituito dai punti della parabola di equazione $x = -y^2 + 2$ che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle. La parabola ha vertice in $(2; 0)$ e asse di simmetria coincidente con l'asse x.
Dopo aver disegnato anche la retta si può notare che le due curve nel semipiano $y \geq 0$ si intersecano nel punto P(1;1). In questo caso le coordinate di P sono facilmente determinabili graficamente.
In generale, specie se la figura non è disegnata accuratamente, per determinate le coordinate si dovrà risolvere l'equazione algebricamente.

20.4.2.2 Equazione $\sqrt{x-1} = \sqrt{6x - x^2}$

Essa può considerarsi l'equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = \sqrt{6x - x^2} \end{cases} \to \begin{cases} x = y^2 + 1 \wedge y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di determinare le eventuali intersezioni tra l'arco di parabola simmetrica rispetto all'asse x e con il vertice nel punto $(1; 0)$ situato nel semipiano delle ordinate positive o nulle con la semicirconferenza di centro $(3; 0)$ e raggio 3, appartenente allo stesso semipiano.
Le due curve si incontrano nel punto A per il quale è $3 < x_A < 6$.
L'equazione data ha quindi una sola soluzione che si può trovare elevando ambo i membri dell'equazione iniziale al quadrato

$$x - 1 = 6x - x^2 \longrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$$

dal quale il solo valore $x = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, dalle osservazioni prima fatte, è accettabile.

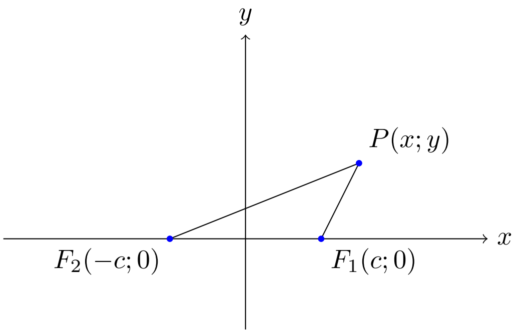
20.5 TODO

```
- derivazione geometrica/formale della parabola ?
- applicazioni di derivazione di parabole pag 173?
- qualche grafico in piu ?
- fascio di parabole ?
```

Capitolo 21

Ellisse

L'ellisse è il *luogo dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.*



21.1 Ellisse in forma canonica

Quando i due fuochi F_1, F_2 sono disposti sull'asse x o sull'asse y e l'origine $O(0;0)$ è il punto medio del segmento F_1F_2, l'ellisse si dice avere **equazione canonica**, o normale, perché è la più semplice possibile ed è quella che che meglio evidenzia le proprietà della curva.
In tal caso l'ellisse ha come assi di simmetria l'asse x e l'asse y e come centro di simmetria l'origine degli assi, come si avrà modo di mostrare. Si dice pertanto che l'ellisse in tal caso è **riferita al centro e agli assi**.
Possiamo avere due tipologie di ellisse:

- quella con i fuochi appartenenti all'asse x (come nella figura sopra): in questo caso la distanza di un punto P generico dai due fuochi F_1 e F_2 è una somma costante ed è definita come

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \tag{21.1}$$

  I due fuochi si trovano sull'asse delle x e risiedono in $F_1(c;0)$ e $F_2(-c;0)$.

- quella con i fuochi appartenenti all'asse y: in questo caso la distanza di un punto P generico dai due fuochi F_1 e F_2 è una somma costante ed è definita come

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b \tag{21.2}$$

I due fuochi si trovano sull'asse delle y e risiedono in $F_1(0; c)$ e $F_2(0; -c)$.

I due fuochi sono punti fissi, data una determinata ellisse: la loro distanza $\overline{F_1F_2}$ è in ogni caso $2c$.

In base alle definizioni di cui sopra è possibile ricavare l'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano. Lo facciamo con riferimento all'ellisse avente fuochi sull'asse delle x Ricordando la formula della distanza tra due punti, la relazione 21.1 diventa

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Isoliamo il primo radicale, ossia trasportiamo il secondo nel secondo membro

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ora entrambi i membri al quadrato e sviluppando i calcoli arriviamo a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Si noti ora che deve necessariamente essere $2c < 2a$ in quanto nel triangolo F_2PF_1 il lato F_2F_1 è minore della somma degli altri due (questo poichè in un qualsiasi triangolo ciascun lato è minore ella somma degli altri due):

$$F_2F_1 < PF_1 + PF_2 \longrightarrow 2c < 2a$$

pertanto sara $c < a$ ossia $a > c$. Quindi la differenza $a^2 - c^2$ è positiva e si può porre

$$a^2 - c^2 = b^2 \tag{21.3}$$

Tenendo conto di questo l'equazione di sopra diventa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividendo per a^2b^2 si ha

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{21.4}$$

che costituisce la generale **equazione dell'ellisse in forma canonica** o forma normale. Alla stessa equazione giungiamo sviluppando la 21.2.
Dalla 21.3 abbiamo $c^2 = a^2 - b^2$ da cui, avendo supposto $c > 0$ si deduce

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Pertanto i punti dei due fuochi della ellisse con fuochi sull'asse delle x è

$$F_1(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$$
$$F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$$

Andiamo ora a scoprire alcune proprietà di questa curva.

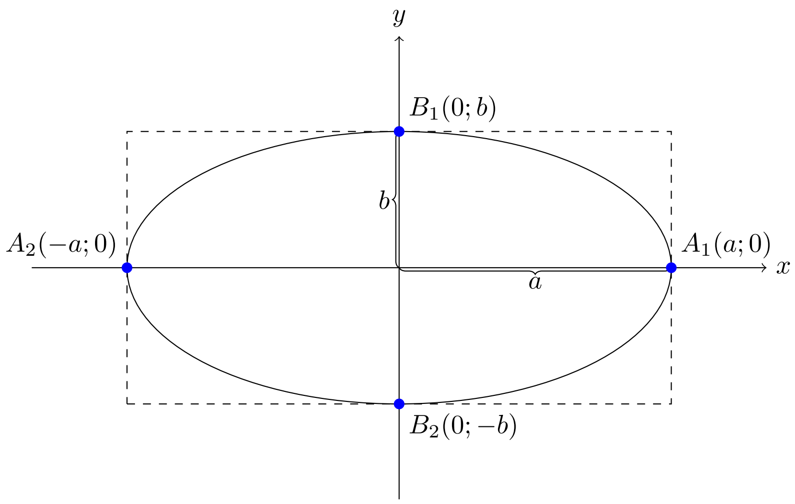
Intersezione con gli assi: vertici dell'ellisse Ponendo a sistema l'equazione $y = 0$ con l'equazione dell'ellisse troviamo i punti di intersezione di questa con l'asse x.

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$$

Ovverosia, l'ellisse di equazione 21.4 interseca l'asse x nei punti $A_1(a; 0)$ e $A_2(-a; 0)$. Questa è l'interpretazione del parametro a.
Analogamente avviene per b, nel senso che andando a ricercare i punti di intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm b \end{cases}$$

l'ellisse di equazione 21.4 interseca l'asse x nei punti $B_1(0; b)$ e $B_2(0; -b)$.



I quattro punti A_1, A_2, B_1, B_2si dicono **vertici dell'ellisse**. I segmenti A_1A_2 e B_1B_2, che misurano rispettivamente $2a$ e $2b$, si dicono **assi dell'ellisse**[1] e risiedono rispettivamente sull'asse delle x e su quella delle y.
Ora in relazione al rapporto tra a e b possiamo definire un **asse maggiore** e un **asse minore** e le due tipologie di ellissi di base. Se:

- $a > b$ il segmento A_1A_2 è l'asse maggiore, mentre B_1B_2 è l'asse minore. Graficamente si caratterizza per essere una ellisse schiacciata (in misura maggiore o minore) orizzontalmente[2].

- $a < b$ il segmento B_1B_2 è l'asse maggiore, mentre A_1A_2 è l'asse minore. Graficamente si caratterizza per essere una ellisse schiacciata (in misura maggiore o minore) verticalmente[3].

[1] Pertanto a e b costituiscono la misura dei semiasse.
[2] In questa tipologia caso i fuochi di questa ellisse risiedono sull'asse x
[3] In questa tipologia caso i fuochi di questa ellisse risiedono sull'asse y

Ellisse e circonferenza Nel *caso particolare* in cui $a = b$, l'*equazione dell'ellisse si riduce a quello di una circonferenza* di equazione $x^2 + y^2 = a^2$, che rappresenta una circonferenza con centro nell'origine e raggio a.
Pertanto la **circonferenza** può essere considerata un *caso particolare di ellisse.*

Simmetria Si noti che se il punto $P(x; y)$ appartiene all'ellisse di cui sopra, vi appartengono anche i punti $P_1(-x; y)$, $P_2(-x; -y)$ e $P_3(x; -y)$ perché anche le loro coordinate soddisfano l'equazione 21.4. Ma P_1 è il simmetrico di P rispetto all'asse y, P_2 rispetto all'origine e P_3 rispetto all'asse x. Questo significa che **l'ellisse è simmetrica** rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine $O(0; 0)$.

Ellisse contenuta nel rettangolo delle parallele agli assi passanti per i vertici Per completare lo studio dell'ellisse, sviluppiamo l'equazione canonica come segue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \longrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Nell'ultima relazione si nota che il membro sinistro, cioè y^2 è positivo o nullo e quindi anche il membro destro deve necessariamente essere positivo o nullo, da cui

$$a^2 - x^2 \geq 0 \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

Con ragionamenti analoghi si ha anche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) \longrightarrow -b \leq y \leq b$$

Pertanto si deduce che l'ellisse è tutta contenuta nel rettangolo individuato dalle parallele degli assi condotte per i vertici.

21.2 Eccentricità

L'eccentricità di una ellisse è quella che determina quanto graficamente questa ellisse sia schiacciata; viene indicata con e ed è definita come il rapporto tra la distanza focale e l'asse maggiore

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{asse maggiore}} \tag{21.5}$$

Nel caso dell'ellisse riferita al centro e agli assi avremo, se i due fuochi sono sull'asse x:

$$e = \frac{2c}{2a} \rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Nel caso dell'ellisse riferita al centro e agli assi avremo, se i due fuochi sono sull'asse y

$$e = \frac{2c}{2b} \rightarrow \boxed{e = \frac{c}{b}}$$

Poiché la semi-distanza focale è sempre minore del semiasse maggiore per considerazioni geometriche, è evidente che è sempre

$$\boxed{0 < e < 1} \tag{21.6}$$

Il caso limite in cui $e = 0$ risulta se $c = 0$, ovvero laddove la distanza dei fuochi è nulla ed essi coincidono con il centro; in tal caso l'equazione dell'ellisse diventa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = a^2$.
quest'ultima è l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio di misura a. La circonferenza può quindi esser pensata come una particolare ellisse con eccentricità nulla, ossia con fuochi coincidenti.

Nel caso limite che sia $e = 1$ si deduce che la distanza focale è uguale all'asse maggiore (cioè i due fuochi coincidono con i due vertici, e quindi, risultando nullo l'asse minore, l'ellisse si riduce all'asse maggiore (*ellisse degenere*).

In sostanza l'eccentricità misura lo schiacciamento dell'ellisse rispetto alla circonferenza che ha per diametro l'asse maggiore: tanto meno l'ellisse è eccentrica e tanto più l'eccentricità è vicina a 0; tanto più l'ellisse è eccentrica e tanto più l'eccentricità è vicina al valore 1.

21.3 Ellisse generica

Per derivare la formula generica dell'ellisse, quella con centro nel punto $O'(x_0; y_0)$ e i cui assi sono paralleli all'asse delle x e delle y. Operiamo pertanto una traslazione che porti l'equazione della forma canonica dall'origine O in O'.
Nel sistema $XO'Y$ l'equazione il grafico dell'ellisse sarà:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{21.7}$$

essendo a e b le misure dei semiassi, congruenti con quello del grafico di partenza. Le equazioni della traslazione del sistema sono

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Applicando queste ultime, l'equazione 21.7 diviene

$$\frac{x - x_0}{a^2} + \frac{y - y_0}{b^2} = 1$$

Sviluppando i calcoli si giunge a

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2x_0b^2x - 2y_0a^2y + x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

E ponendo

$$\begin{aligned} m =& b^2 \\ n =& a^2 \\ p =& -2x_0b^2 \\ q =& -2y_0a^2 \\ r =& x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2 \end{aligned}$$

giungiamo a

$$\boxed{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0} \tag{21.8}$$

Quindi una qualsiasi ellisse con gli assi di simmetria paralleli agli assi x e y ha una equazione del tipo 21.8.
Si noti che $m > 0$ e $n > 0$, ossia sono concordi e positivi.
Infine il centro della generica ellisse si trova in

$$\boxed{O'\left(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n}\right)}$$

21.4 Applicazioni

Per quanto riguarda le reciproche posizioni tra una retta e un'ellisse, valgono le stesse considerazioni già fatte a proposito della parabola. Lo stesso dicasi per il problema di con durre le tangenti da un punto a un'ellisse.
Naturalmente è possibile considerare le intersezioni di un'ellisse con un'altra ellisse oppure con una parabola o con una circonferenza; in tal caso il sistema che si ottiene è formato da due equazioni di secondo grado ed è perciò di quarto grado: vi possono quindi essere, al massimo, quattro punti di intersezione.
Infine le ellissi possono risultare utili nella grafico di particolari funzioni o nella risoluzione di particolari equazioni.

Esempio di funzione Tracciare il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{4 - 9x^2}$, determinando dominio e codominio.
La funzione esiste se $4 - 9x^2 \geq 0$, quindi $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, il quale coincide con il dominio D.
Osserviamo che per $\forall x \in D$ abbiamo $y \geq 0$; eleviamo al quadrato l'equazione data ottenendo

$$\begin{cases} y^2 = 4 - 9x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$ è l'equazione di una ellisse riferita al centro e con $a = \frac{2}{3}$ e $b = 2$, tenendo conto della condizione $y \geq 0$ si può concludere che il grafico richiesto è quello di una semi-ellisse, con codominio $C = [0; 2]$.

Esempio di equazione Risolvere l'equazione

$$\sqrt{3} + x + \sqrt{3 - 3x^2} = 0$$

La riscriviamo nel seguente modo

$$\sqrt{3} + x = -\sqrt{3 - 3x^2}$$

Cioè

$$\begin{cases} y = \sqrt{3} + x \\ y = -\sqrt{3 - 3x^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 3 \wedge y \leq 0 \end{cases}$$

si tratta di intersecare l'arco dell'ellisse di equazione $x^2 + y^2 = 3$ situato nel semipiano delle y negative o nulle con la retta di equazione $y = x + \sqrt{3}$. Dall'esame della figura si vede che non vi sono soluzioni.

Capitolo 22

Iperbole

L'iperbole è il *luogo dei punti di un piano per i quali è costante la* ***differenza*** *delle distanze da due punti fissi detti fuochi.*

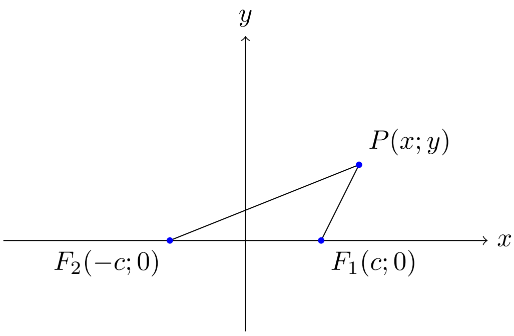
22.1 Iperbole riferita al centro e agli assi

22.1.1 Iperbole con fuochi appartenenti all'asse x

Indicando i fuochi dell'iperbole con F_1 e F_2 e la differenza costante delle distanze del generico punto P dall'iperbole dai due fuochi con $2a$, un generico punto P appartiene all'iperbole se e solo se si ha

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \tag{22.1}$$

La distanza dei due fuochi è da considerarsi nota e la indichiamo con $2c(c > 0)$ La



derivazione dell'equazione dell'iperbole viene affrontata analogamente a quanto avviene per l'ellisse. Assumendo come asse x la retta passante per i fuochi F_1, F_2 e ponendo l'origine O nel punto medio del segmento F_1F_2, poichè abbiamo indicato con $2c$ la distanza focale avremo

$$F_1(c; 0) \tag{22.2}$$

$$F_2(-c; 0) \tag{22.3}$$

Indicando con $P(x;y)$ il generico punto dell'iperbole, la 22.1 diventa

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2}+y^2\right|=2a$$

Svolgendo calcoli analoghi a quelli effettuati per l'ellisse, si giunge all'equazione

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \tag{22.4}$$

Osservando però la figura di sopra nel triangolo F_1PF_2 la misura $2c$ del lato F_2F_1 è maggiore della differenza $|PF_1-PF_2|=2a$ delle misure degli altri due latti (poichè in qualsiasi triangolo ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due) e quindi deve necessariamente essere $2c>2a$, ovvero $c>a$.
Pertanto la differenza c^2-a^2 è sempre positiva e si può porre

$$c^2-a^2=b^2 \tag{22.5}$$

dove presupporremo sempre che sia $b>0$. La 22.4 diviene $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ da cui dividendo ambo i membri per a^2b^2, giungiamo all'equazione di questo tipo di iperbole

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{22.6}$$

Dalla penultima equazione si ottiene che $c=\sqrt{a^2+b^2}$, per cui possiamo scrivere le coordinate dei fuochi

$$F_1(\sqrt{a^2+b^2};0)$$
$$F_2(-\sqrt{a^2+b^2};0)$$

Rappresentazione grafica Vogliamo ora rappresentare graficamente l'iperbole, individuandone le principali proprietà.
Ponendo a sistema l'equazione $y=0$ dell'asse y con la 22.6 si ha subito $x=\pm a$: l'asse x interseca dunque l'iperbole nei punti $A_1(a;0)$ e $A_2(-a;0)$ che si dicono **vertici** dell'iperbole.
Il segmento A_1A_2 si dice **asse trasverso** e ha lunghezza $2a$.
L'asse y *non interseca l'iperbole*; infatti ponendo a sistema l'equazione dell'iperbole 22.6 con l'equazione $x=0$ si ottiene l'equazione $-\frac{y^2}{b^2}=1$ che non ha soluzioni reali.
L'asse y o, più in generale, la retta passante per il centro dell'iperbole, perpendicolare all'asse trasverso e che è asse di simmetria per l'iperbole di dice **asse non trasverso**.
Il parametro b serve nel disegno dell'iperbole poichè determina insieme ad a i suoi **asintoti** ovvero due rette cui il grafico dell'iperbole tende ad avvicinarsi man mano che x tende a $\pm\infty$. In particolare l'equazione dei due asintoti è

$$y=\frac{b}{a}x \tag{22.7}$$

$$y=-\frac{b}{a}x \tag{22.8}$$

Si può dimostrare che *l'iperbole è tutta contenuta nella coppia di angoli opposti al vertice determinati dagli asintoti e contenenti i vertici della curva.*
Le due parabole che definiscono l'iperbole si chiamano **rami** dell'iperbole stessa.

Simmetria Analogamente a quanto avviene per l'ellisse, si noti che se il punto $P(x;y)$ appartiene all'iperbole di cui sopra, vi appartengono anche i punti $P_1(-x;y)$, $P_2(-x;-y)$ e $P_3(x;-y)$ perché anche le loro coordinate soddisfano l'equazione 22.6. Ma P_1 è il simmetrico di P rispetto all'asse y, P_2 rispetto all'origine e P_3 rispetto all'asse x. Questo significa che **l'iperbole è simmetrica** rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine $O(0;0)$.

22.1.2 Iperbole con fuochi appartenenti all'asse y

Partendo invece da

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b \tag{22.9}$$

e rifacendo i ragionamenti considerando i due fuochi posti sull'asse y con una distanza focale di $2c$ e centro sempre in O, giungiamo all'equazione di questo tipo di iperbole:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1} \tag{22.10}$$

Cioè l'unica cosa che cambia rispetto alla 22.6 è che al secondo membro abbiamo -1 invece che 1.
In questo caso però l'asse trasverso è quello che risiede sull'asse delle y; i vertici sono $B_1(0;b)$ e $B_(0;-b)$. L'asse non trasverso risiede su quello delle x.
Le equazioni degli asintoti sono sempre

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

I fuochi si trovano in

$$F(0;\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

22.2 Eccentricità

L'eccentricità di una iperbole è quella che *determina l'apertura dei suoi rami*; viene indicata con e ed è definita come il rapporto tra la distanza focale e asse trasverso

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{asse trasverso}} \tag{22.11}$$

Nel caso dell'iperbole riferita al centro e agli assi avremo, se i due fuochi sono sull'asse x:

$$e = \frac{2c}{2a} \rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Nel caso dell'iperbole riferita al centro e agli assi avremo, se i due fuochi sono sull'asse y

$$e = \frac{2c}{2b} \rightarrow \boxed{e = \frac{c}{b}}$$

Poiché la distanza focale è sempre maggiore dell'asse trasverso per considerazioni geometriche, è evidente che è sempre

$$\boxed{e > 1} \tag{22.12}$$

22.3 Iperbole equilatera

In generale una iperbole, comunque situata, si dice **equilatera** quando i suoi asintoti sono perpendicolari (il che implica che i semiassi trasverso e non trasverso abbiano la stessa lunghezza).
Nei casi affrontati in precedenza, se nell'equazione canonica di una iperbole riferita al centro e agli assi è $a = b$, cioè se i semiassi trasverso e non trasverso hanno la stessa lunghezza, allora l'iperbole si dice equilatera.

Iperbole con fuochi sull'asse x Se i fuochi appartengono all'asse x, l'equazione canonica diventa

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2} \tag{22.13}$$

Le equazioni $y = \pm\frac{b}{a}$ degli asintoti diventano, essendo $a = b$:

$$y = -x \tag{22.14}$$
$$y = x \tag{22.15}$$

Gli asintoti dell'iperbole equilatera riferita al centro e agli assi sono dunque le bisettrici dei quadranti.
I vertici della curva sono i punti $A_1(a; 0)$ e $A_2(-a; 0)$

Iperbole con fuochi sull'asse y In questo caso l'equazione canonica diventa

$$\boxed{x^2 - y^2 = -a^2} \tag{22.16}$$

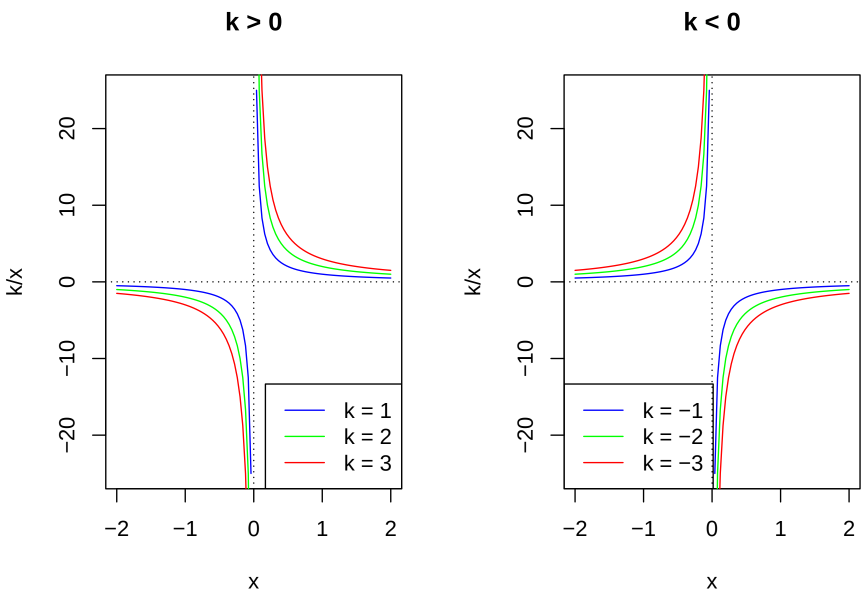
L'unica cosa che cambia sono i vertici $B_1(0; a)$ e $B_2(0; -a)$; le altre proprietà geometriche sono le medesime

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti Considerando una iperbole equilatera riferita al centro e agli assi di simmetria, se sottoponiamo i punto del piano ad una rotazione di 45° in senso orario, oppure antiorario, attorno all'origine O, gli asintoti dell'iperbole vengono a coincidere con gli assi cartesiani. Per tale motivo, si dice che ora l'iperbole è *riferita ai propri asintoti.* Tali figure hanno equazione

$$\boxed{xy = k} \tag{22.17}$$

se

- $k > 0$ la curva è situata nel 1° e 3° quadrante
- $k < 0$ la curva è situata nel 2° e 4° quadrante



Come si verifica subito, la curva è simmetrica *rispetto all'origine*. Osservando che l'iperbole riferita ai propri asintoti non ha alcun punto di ascissa nulla e quindi, essendo $x \neq 0$ possiamo scrivere la sua equazione $xy = k$, dividendo per x nella forma

$$\boxed{y = \frac{k}{x}} \tag{22.18}$$

che è nota col nome di equazione della proporzionalità inversa; questa è però, si noti, anche l'equazione di una funzione avente per dominio $R - 0$.

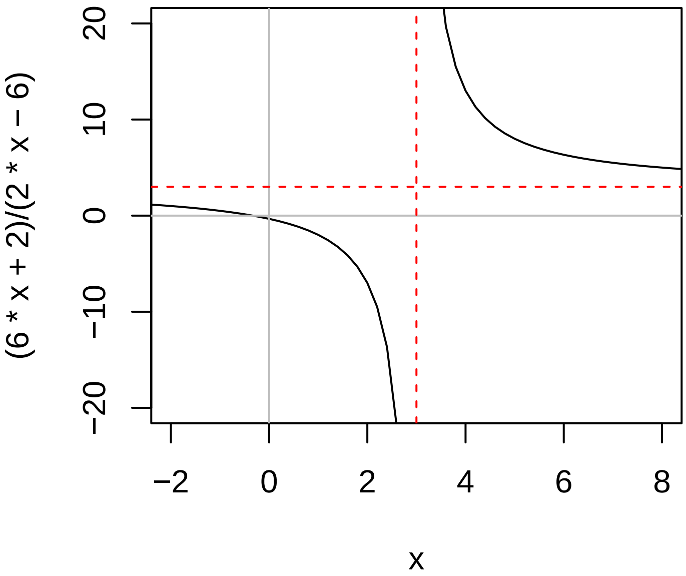
Funzione omografica In generale una funzione di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{22.19}$$

con le condizioni $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$ è detta funzione omografica e il suo diagramma è una iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani e con centro di simmetria nel punto

$$O'(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}) \tag{22.20}$$

L'equazione 22.19 definisce una funzione di dominio $D = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$; il codominio della funzione è dato dall'insieme $C = R - \left\{-\frac{a}{c}\right\}$.
Plottiamo ad esempio $y = \frac{6x+2}{2x-6}$



22.4 Iperbole riferita a rette parallele ai suoi assi

L'equazione di una iperbole avente centro in $O'(x_0; y_0)$ e i cui assi di simmetria (trasverso e non) sono paralleli agli assi coordinati si può ottenere con ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti per l'ellisse.
Tale equazione si presenta alternativamente nella forma

$$\frac{x - x_0}{a^2} - \frac{y - y_0}{b^2} = 1 \tag{22.21}$$

o nella forma

$$\frac{x - x_0}{a^2} - \frac{y - y_0}{b^2} = -1 \tag{22.22}$$

La 22.4 rappresenta una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x e con i fuochi che appartengono alla retta di equazione $y = y_0$ (nello specifico sono $F_1(x_0 + c; y_0), F_2(x_0 - c; y_0)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$).
La 22.4 rappresenta una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse y e con i fuochi che appartengono alla retta di equazione $x = x_0$ (nello specifico sono $F_1(x_0; y_0 + c), F_2(x_0; y_0 - c)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$).
Le equazioni degli asintoti sono, in ogni caso

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \tag{22.23}$$

Sviluppando i calcoli nell'equazione o ugualmente nella si ottiene similmente a quanto visto per l'ellisse una equazione del tipo

$$\boxed{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0} \tag{22.24}$$

dove m e n sono *discordi* (nell'ellisse erano invece concordi).
Una qualsiasi iperbole, con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati, ha quindi una una equazione del tipo 22.24 con $m \cdot n < 0$.
Il centro dell'iperbole generica descritta da 22.24 è

$$O'\Big(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n}\Big) \tag{22.25}$$

22.5 Applicazioni

Similmente a quanto già visto per le altre coniche, le nozioni apprese sull'iperbole consentono di tracciare il grafico di particolari funzioni irrazionali e di risolvere, per via grafica, alcune equazioni irrazionali.

Grafico di funzione 1 Tracciaer il grafico della funzione $y = \sqrt{x^2 - 1}$ determinandone dominio e codominio.
La funzione è definita per $x^2 \geq 0$. Il dominio è dunque $D = (-\infty; 1] \cup [1; \infty)$.
Poichè è $y \geq 0$ per ogni $x \in D$ si ha

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \longrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2 - y^2 = 1$ è rappresentata, nel piano cartesiano da una iperbole equilatera riferita al centro e agli assi avente l'asse x come asse trasverso e le rette $y = \pm x$ come asintoti.
Poichè deve essere $y \geq 0$, il grafico della funzione data sarà costituito dai punti dell'iperbole che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle. Il codominio è R_0^+.

Equazione Risolvere graficamente l'equazione

$$\sqrt{x^2 - 2x} = 2 - x$$

L'equazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 2x} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Si tratta quindi di intersecare i luoghi di queste due equazioni: le ascisse degli eventuali punti di intersezione saranno le soluzioni dell'equazione proposte. Per tracciare il grafico della prima delle due equazioni osserviamo che

$$y = \sqrt{x^2 - 2x} \longrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - 2x + 1) - y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)^2 - y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto stiamo parlando della parte di iperbole equilatera di equazione $(x-1)^2 - y^2 = 1$ appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle. Tra l'altro si noti che l'iperbole di ns interesse si può facilmente ottenere traslando l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$ del vettore $\overrightarrow{v} = (1;0)$.
Rappresentando nel piano cartesiano e osservando che la retta $y = 2 - x$ è parallela a uno degli asintoti della curva, si vede che l'equazione proposta ha per unica soluzione $x = 2$.

Grafico di funzione 2 Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x| - 1}{x - 2}$$

La funzione è definita $\forall x \neq 2$, quindi il dominio è l'insieme $R - \{2\}$. Ricordando la definizione di modulo avremo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{per } x \geq 0 \land x \neq 2 \\ \frac{-x-1}{x-2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico di f(x) è dato per $x \geq 0$ da quello della funzione omografica di equazione $y = \frac{x-1}{x-2}$ per $x \geq 0$, e di $y = \frac{-x-1}{x-2}$ per $x < 0$.

22.6 TODO

`- more graphics?`

Capitolo 23

Trigonometria

23.1 Goniometria

Una circonferenza di centro O e raggio arbitrario, con A un punto mobile, può essere percorsa in due versi opposti: considereriamo *positivo* il verso antiorario, *negativo* il verso orario.
Considerando ora un arco AB dato da due punti A, B residenti sulla circonferenza, il punto B è estremo di due gruppi infiniti di archi: gli *archi positivi* (descritti dal punto A che muovendosi nel verso positivo, giunge subito a B o vi arriva dopo aver descritto una o più circonferenze) e gli archi *negativi* (similmente, ma A si muove in senso negativo).
A ciascuno dei due archi AB corrisponde un angolo al centro $\widehat{AOB}$.

Misura degli archi Considerando una circonferenza e un arco formato da due punti A, B residenti su essa, si dice *ampiezza dell'arco* l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.
La misura può espressa in *gradi* (la 360esima parte dell'angolo giro) o *radianti*: questo è l'ampiezza dell'arco il quale, una volta rettificato, ha lunghezza pari al raggio. Se la circonferenza misura $2r\pi$, con raggio di lunghezza r, l'angolo giro in radianti misura $\frac{2r\pi}{r} = 2\pi$.
Spesso si pone la necessità di trasformare angoli espressi in gradi in radianti o viceversa. Per questo torna utile la seguente proporzione

$$\text{rad} : 2\pi = \text{grad} : 360 \tag{23.1}$$

Ad esempio se abbiamo i gradi e vogliamo ottenere i radianti:

$$\text{rad} = \frac{2\pi \cdot \text{grad}}{360} = \frac{\text{grad}}{180}\pi$$

Per cui, ad esempio $\text{grad}\, 90 = \frac{\pi}{2}$ in radianti, $180° = \pi$, $-45° = -\frac{\pi}{4}$.

23.2 Circonferenza e funzioni goniometriche

La **circonferenza goniometrica** è la circonferenza che ha origine nell'origine degli assi e raggio $r = 1$.

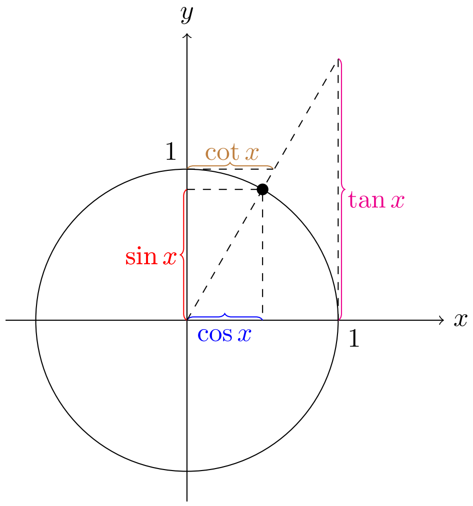


Figura 23.1: Relazioni geometriche funzioni trigonometriche

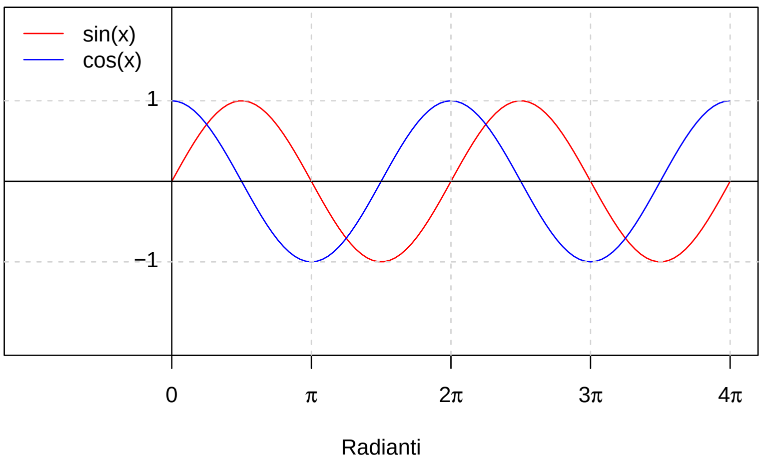


Figura 23.2: Funzioni seno e coseno

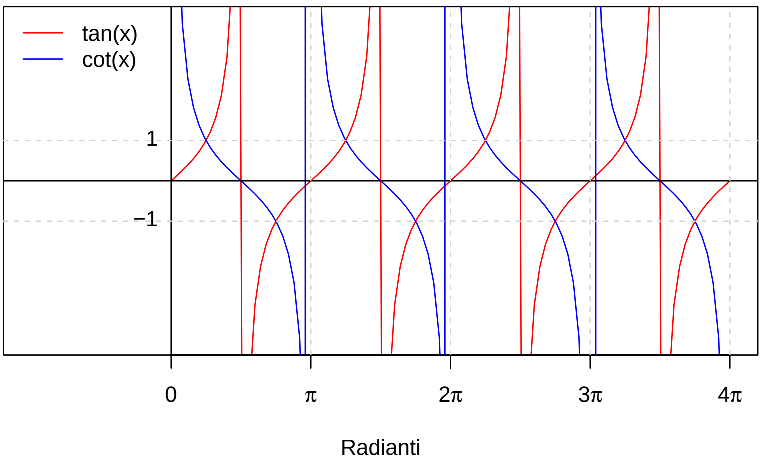


Figura 23.3: Funzioni tangente e cotangente

Gradi	Radianti	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	0	1	0
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	∞
360	2π	0	1	0

Tabella 23.1: Valori notevoli delle funzioni trigonometriche

È possibile definire una serie di funzioni, dato un angolo α, creato mediante un punto A che si considera mobile sul perimetro della circonferenza:

$$\begin{array}{cc} \sin\alpha & \text{ordinata del punto A} \\ \cos\alpha & \text{ascissa del punto A} \\ \tan\alpha & \sin\alpha/\cos\alpha \\ \cot\alpha & \cos\alpha/\sin\alpha \end{array}$$

nel caso della tangente, deve essere $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, mentre in quello della cotangente $\alpha \neq k\pi$. Alcune funzioni goniometriche derivate dalle principali (chiamate *cotangente*, *secante* e *cosecante*):

$$\csc\alpha = 1/\sin\alpha$$
$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha$$

nel caso di $\sec\alpha$, analogamente a $\tan\alpha$ deve essere; $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$; per $\csc\alpha$ invece deve essere $\alpha \neq k\pi$.
Le *relazione fondamentale* della trigonometria è:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{23.2}$$

deriva dall'applicazione del teorema di Pitagora e dalla proprietà della circonferenza goniometrica (raggio unitario).
Alcuni valori notevoli delle tre funzioni goniometriche principali sono riportati in tabella 23.1. Le interpretazioni geometriche delle quattro funzioni sono mostrati in figura 23.1. In figura 23.2 sono rappresentate le funzioni seno e coseno nell'intervallo $[0 : 4\pi]$; in 23.2 lo stesso avviane per tangente e cotangente. Dai grafici si evince

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$$

per cui la *periodicità* è 2π per $\sin, \cos$, mentre è π per $\tan, \cot$. Si nota altresì che

$$|\sin\alpha| \leq 1$$
$$|\cos\alpha| \leq 1$$

Infine vigono[1] le seguenti relazioni:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

[1] La seconda può essere dimostrata, più che visualizzata graficamente, mediante l'uso delle funzioni di angoli in particolare relazione tra loro:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

23.3 Funzioni goniometriche mediante una di esse

A volte si dispone soltanto del valore assunto da una funzione goniometrica ed eventualmente il quadrante dell'angolo considerato; può essere necessario determinare il valore delle altre funzioni e ciò viene fatto a partire dalle relazioni goniometriche fondamentali.
Se si ha il *seno* dalla relazione fondamentale si ha:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \tag{23.3}$$

il valore più o meno dipenderà dal quadrante dell'angolo di cui si disporra del seno. Specularmente se si ha il *coseno*:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \longrightarrow \boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \tag{23.4}$$

Se si dispone della *tangente* è implicito che $\tan\alpha$ sia determinata e che quindi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; dopo opportune elaborazioni[2] sempre dalla definizione di tangete e dalla 23.2 si ottiene rispettivamente:

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \longrightarrow \boxed{\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}} \tag{23.5}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}} \tag{23.6}$$

Anche qui si potrà eliminare il doppio segno conoscendo il quadrante.

23.4 Funzioni goniometriche inverse

Le funzioni goniometriche (periodiche) non sono invertibili su tutto il loro dominio; se si considerano però opportuni sottoinsiemi del dominio, allora si stabilisce una relazione biunivoca tra angolo e funzioni goniometriche e definire le rispettive funzioni inverse:

- l'arcoseno, dato il seno $x \in [-1;1]$, restituisce l'angolo $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$y = \arcsin x \tag{23.7}$$

- l'arcocoseno, dato il coseno $x \in [-1;1]$, restituisce l'angolo $y \in [0;\pi]$:

$$y = \arccos x \tag{23.8}$$

- l'arcotangente, data la tangente $x \in (-\infty;\infty)$ restituisce l'angolo $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$y = \arctan x \tag{23.9}$$

[2] Per l'equazione del coseno in funzione della tangente bisogna dividere per $\cos^2\alpha$ la 23.2, invertire numeratori e denominatori e semplificare. Per l'equazione del seno in funzione della tangente bisogna partire dalla 23.2 e sostituirvi l'equazione di coseno in funzione della tangente

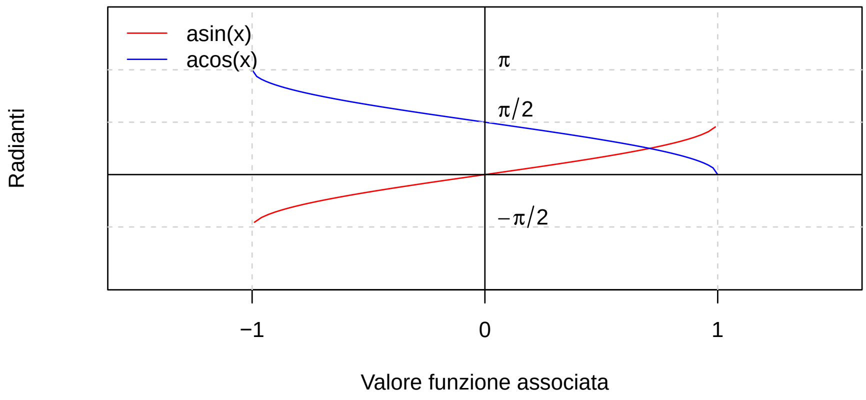


Figura 23.4: Funzioni arcoseno e arcocoseno

- l'arcocotangente, data la cotangente $x \in (-\infty; \infty)$ restituisce l'angolo $y \in [0; \pi]$:

$$y = \operatorname{arccot} x \tag{23.10}$$

In figura 23.4 le funzioni arcoseno e arcocoseno, in figura 23.5 arcotangente e arcocotangente.
Per ogni $x \in [-1, 1]$, valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos x) &= x \\
\sin(\arcsin x) &= x \\
\cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \\
\sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Valgono infine:

$$\begin{aligned}
\arccos x + \arcsin x &= \pi/2 \quad x \in [-1; 1] \\
\arctan x + \operatorname{arccot} x &= \pi/2 \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Infine si noti che $\arcsin(\sin x) = x$ se e solo se $x \in [-\pi/2 : \pi/2]$, mentre $\arccos(\cos x) = x$ se e solo se $x \in [0, \pi]$[3].

[3]Per verificarlo si può disegnare le funzioni $f(x) = \arcsin(\sin x)$ e $g(x) = \arccos(\cos x)$ su un intervallo sufficientemente ampio e constatare che coincidono con la funzione identità solamente nell'intervallo indicato

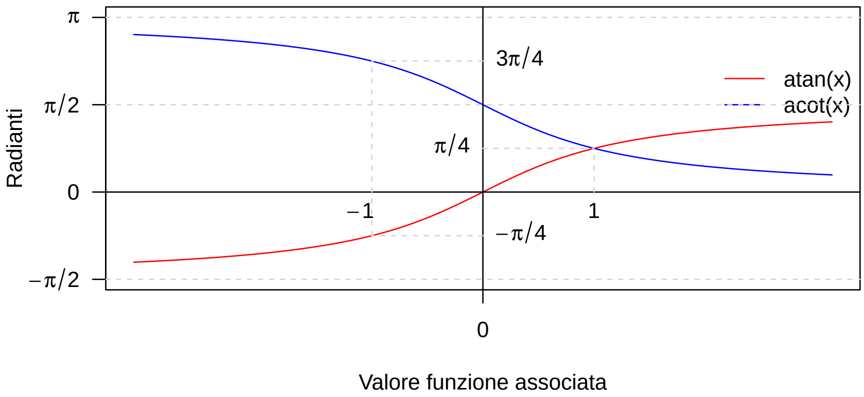


Figura 23.5: Funzioni arcoseno e arcocoseno

23.5 Funzioni di angoli in relazione tra loro

23.5.1 Angoli associati

Gli **angoli supplementari** α e $180-\alpha$ sono caratterizzati dal fatto di avere somma dei loro angoli pari a 180 gradi. Per essi valgono:

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha \tag{23.11}$$

$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha \tag{23.12}$$

Gli angoli che **differiscono di 180** gradi, α e $180+\alpha$ sono caratterizzati dal fatto che:

$$\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha \tag{23.13}$$

$$\cos(180+\alpha) = -\cos\alpha \tag{23.14}$$

Gli angoli **esplementari** (somma pari a 360) α e $360-\alpha$ sono caratterizzati dal fatto che:

$$\sin(360-\alpha) = -\sin\alpha \tag{23.15}$$

$$\cos(360-\alpha) = \cos\alpha \tag{23.16}$$

23.5.2 Angoli opposti

α è $-\alpha$ sono due angoli opposti; la loro somma è 0. Per loro vale:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{23.17}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{23.18}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \tag{23.19}$$

Da queste relazioni si ricava che seno e tangente sono funzioni dispari, mentre il coseno è una funzione pari

23.5.3 Angoli complementari

α è $90 - \alpha$ sono caratterizzati dal fatto che la loro somma è 90. Essendo i due triangoli rettangoli congruenti (dato che hanno ipotenusa uguale), per gli angoli complementari vale:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha \tag{23.20}$$
$$\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha \tag{23.21}$$

23.5.4 Angoli associati al complementare

Gli angoli associati al complementare sono:

- $180 - (90 - \alpha) = 90 + \alpha$,
- $180 + (90 - \alpha) = 270 - \alpha$,
- $360 - (90 - \alpha) = 270 + \alpha$

Per $90 + \alpha$ valgono:

$$\sin(90 + \alpha) = \cos\alpha \tag{23.22}$$
$$\cos(90 + \alpha) = -\cos(90 - \alpha) = -\sin\alpha \tag{23.23}$$

Per $270 - \alpha$ valgono:

$$\sin(270 - \alpha) = -\cos\alpha \tag{23.24}$$
$$\cos(270 - \alpha) = -\sin\alpha \tag{23.25}$$

Per $270 + \alpha$ valgono:

$$\sin(270 + \alpha) = -\cos\alpha \tag{23.26}$$
$$\cos(270 + \alpha) = \sin\alpha \tag{23.27}$$

23.6 Formule goniometriche

23.6.1 Addizione e sottrazione

Queste formule permettono il calcolo delle funzioni goniometriche di somma o differenza di angoli, se conosciamo le funzioni degli angoli di partenza: ad esempio possono tornare utili se riusciamo ad esprimere un angolo come somma o differenza di angoli classici, i cui valori delle funzioni goniometriche sono noti:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{23.28}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{23.29}$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{23.30}$$

23.6.2 Duplicazione

Le formule di duplicazione sono una versione specializzata/particolare di quelle di addizione; sono utili per lo studio di un angolo la cui metà è un angolo noto:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tag{23.31}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{23.32}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \tag{23.33}$$

23.6.3 Bisezione

Dal punto di vista applicativo sono il contrario delle formule di duplicazione e sono utili per lo studio di un angolo che è la metà di un angolo del quale conosciamo il coseno:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \tag{23.34}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \tag{23.35}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \tag{23.36}$$

23.6.4 Parametriche

Queste formule sono utili se conosciamo la tangente della metà dell'angolo di nostro interesse. Infatti se definiamo

$$t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

allora

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{23.37}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \tag{23.38}$$

$$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2} \tag{23.39}$$

23.6.5 Prostaferesi

Sono formule che servono a trasformare in prodotti le somme o le differenze di funzioni goniometriche (quindi a contrario delle precedenti, quello che abbiamo è tipicamente a sinistra del segno =, mentre quello che vogliamo/otteniamo a destra):

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{23.40}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{23.41}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{23.42}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{23.43}$$

23.6.6 Werner

Queste servono a trasformare in una somma o in una differenza di seni e coseni il prodotto di due seni, di due coseni o di un seno per un coseno (analogamente alle precedenti, quello che abbiamo è tipicamente a sinistra del segno =, mentre quello che vogliamo/otteniamo a destra):

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \tag{23.44}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \tag{23.45}$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right] \tag{23.46}$$

Capitolo 24

Equazioni, sistemi, disequazioni goniometriche

24.1 Equazioni goniometriche

Un'equazione si dice goniometrica se in essa compaiono funzioni goniometriche nei cui argomenti figura l'incognita; risolveremo in questa parte quelle che presentano l'incognita *solo* all'interno di funzioni goniometriche. Le funzioni che hanno x anche all'esterno si chiamano *trascendenti* e possono esser risolte solo per approssimazione.

24.1.1 Equazioni elementari

In questa categoria annoveriamo equazioni in cui, alternativamente:

- una funzione goniometrica è uguagliata ad una costante
- una funzione goniometrica è uguagliata ad un'altra funzione goniometrica

24.1.1.1 Funzioni goniometriche uguagliate a costante

Le più semplici equazioni goniometriche sono nella forma

$$\sin x = m \qquad (24.1)$$

$$\cos x = n \qquad (24.2)$$

$$\tan x = p \qquad (24.3)$$

Angoli aventi un dato seno Nel caso di $\sin x = m$ si tratta di trovare i punti della circonferenza goniometrica la cui ordinata è m, ovvero trovare le intersezioni tra la circonferenza e la retta $y = m$ (e determinare gli angoli associati). Se

- $|m| < 1$ la retta interseca la circonferenza goniometrica in due punti; gli angoli associati sono supplementari (sommano a 180) e perciò detta α l'ampiezza di uno di essi, le soluzioni dell'equazione saranno

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \qquad (24.4)$$

Le soluzioni in valore approssimato sono trovabili anche mediante la funzione `arcsin` delle calcolatrici, soprattutto quando bisogna ricercare seni riconducibili ad angoli “non classici”.

- per $|m| = 1$, le due soluzioni saranno

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{24.5}$$

- $|m| > 1$ è impossibile

Le considerazioni fatte volgono anche per equazioni nella forma $\sin f(x) = m$ con $f(x)$ espressione contenente l'incognita; ad esempio per risolvere $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

Angoli aventi un dato coseno Nel caso di $\cos x = n$ si tratta di trovare i punti della circonferenza che intersecano la retta $x = n$;

- se $|n| < 1$, gli angoli aventi ugual coseno trovati sono opposti, e sommano a 0; se α è l'ampiezza di uno di essi, le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \pm\alpha + 2k\pi$$

- se $|n| = 1$, la soluzione è $x = k\pi$;
- se $|n| > 1$ è impossibile.

Come prima, le considerazioni fatte valgono anche se sotto coseno vi sia una espressione più complessa in x.

Angoli aventi una data tangente Infine per $\tan x = p$, si tratta di trovare gli angoli che hanno la stessa tangente; essi si differenziano per 180 gradi. Ipotizzando di aver determinato (o conoscendo i valori comuni o mediante arctan di una calcolatrice, la misura del primo angolo α, la soluzione sarà

$$x = \alpha + k\pi$$

Essendo poi la tangente non definita per $\frac{\pi}{2} + k\pi$, bisognerà prima della risoluzione determinare il domino, imponendo la $f(x)$ sotto tangente diversa da $\frac{\pi}{2} + k\pi$, determinando anticipatamente le condizioni di accettabilità delle soluzioni determinate in seguito mediante arctan o a mente.

24.1.1.2 Funzioni goniometriche uguagliate a funzione goniometrica

Un altro tipo di equazione elementare è quella nella forma:

$$\sin\alpha = \sin\beta \tag{24.6}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \tag{24.7}$$

$$\tan\alpha = \tan\beta \tag{24.8}$$

Dove α e β sono funzioni in x; si chiede di determinare il valore che uguaglia il seno/coseno/tangente di due angoli dipendenti dal valore. Per contrario, due angoli:

- hanno lo stesso seno se sono uguali, o se sono complementari (eventualmente differendo per un numero intero di angoli giro); pertanto la prima si risolverà mediante
$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$$
considerando l'unione delle relative soluzioni.

- hanno lo stesso coseno se sono uguali o opposti; la seconda equazione si risolverà mediante
$$\alpha = \beta + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = -\beta + 2k\pi$$

- hanno stessa tangente se sono uguali o differiscono di 180 gradi; la soluzione della terza verrà da
$$\alpha = \beta + k\pi$$
ricavando precedentemente l'accettabilità delle soluzioni, imponendo $\alpha, \beta \neq 90 + k180$.

24.1.2 Equazioni riconducibili ad equazioni elementari

Miriamo a poter risolvere equazioni goniometriche composte (eventualmente) da *funzioni differenti*, aventi *argomenti differenti*.
Innanzitutto, se gli argomenti delle funzioni goniometriche nell'equazioni non sono tutti uguali, per prima cosa si cercherà di renderli uguali applicando opportunamente le *formule goniometriche*.
Una volta che gli argomenti delle *diverse* funzioni per risolvere l'equazione goniometrica, occorre esprimere tutte le funzioni goniometriche mediante una sola.
Infine si può procedere:

- nel prendere questa funzione come incognita ausiliaria; si trasforma così l'equazione goniometrica in algebrica, si risolve e si ritorna al goniometrico risolvendo una o più equazioni elementari.

- alternativamente se si riesce a raccogliere al primo membro, creando una fattorizzazione, e al secondo membro avere 0, è forse più veloce applicare la legge di annullamento del prodotto e considerare i fattori separatamente.

24.1.3 Equazioni lineari in seno e coseno

E' una equazione del tipo
$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$
in cui figurano solo il seno e il coseno di uno stesso angolo incognito e nelle quali tali funzioni sono di primo grado. Questa si risolve alternativamente:

- ponendo a sistema con la prima identità fondamentale e sostituendo sin $=$ Y, e cos $= X$

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

  Si risolverà il secondo sistema per poi procedere a ritroso risolvendo anche le equazioni con cui abbiamo effettuato la sostituzione.

- sostituendo seno e coseno con le formule parametriche (in funzione della tangente dell'angolo a metà)

$$t \overset{def}{=} \tan\frac{\alpha}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \tag{24.9}$$

  Si risolve nella nuova incognita t, dopodiché si risolveranno le equazioni che si sono utilizzate per la soluzione per giungere alla soluzione finale. Prima di fare ciò bisogna verificare che 180° sia soluzione, poiché tale soluzione non potrebbe essere trovata con le parametriche (tangente in 90 gradi non è definita).

Nell'equazione lineare, se $c = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, l'equazione stessa diventa della forma

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

che si dice **equazione omogenea di 1° grado**; si noti che $\cos x$ è necessariamente diverso da 0, infatti, se fosse $\cos x = 0$, sarebbe $\sin x = \pm 1$ e l'equazione omogenea si ridurrebbe alla forma $\pm a = 0$, contro l'ipotesi $a \neq 0$. Dato che $\cos x \neq 0$ si possono dividere ambedue i membri per esso, giungendo alla soluzione

$$\tan x = -\frac{b}{a} \longrightarrow x = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) + k\pi$$

24.1.4 Equazioni omogenee di 2° grado in seno e coseno

Una equazione del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

si può risolvere distinguendo due casi:

$a = 0 \vee c = 0$ ovvero o non compare $\sin^2 x$ o $\cos^2 x$, si risolve operando una raccoglimento ed applicando, la legge di annullamento del prodotto, risolvendo le equazioni più elementari che ne derivano

$a \neq 0 \wedge c \neq 0$**,** b **qualsiasi** comparendo sia $\sin^2 x$ che $\cos^2 x$ si può risolvere l'equazione equivalente che si ottiene dividendo per $\cos^2 x$[1]:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

[1] Si può fare perchè un coseno uguale a 0 è compatibile solo con un caso in cui $a = 0$, che non è il nostro caso

Si noti che l'equazione del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

si può rendere omogenea, osservando che

$$d = d \cdot 1 = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

quindi si risolverà con il metodo già visto.

24.2 Sistemi di equazioni

Sono sistem di equazioni in cui la x figura entro funzioni goniometriche.
Per trovare le soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema, si cerca di eliminare tra le equazioni del sistema uno degli argomenti incogniti (es mediante sostituzione o mediante riduzione), giungendo progressivamente ad avere una equazione con una sola incognita. Risolta questa si procede sostituendo i valori trovati per trovare i valori delle altre incognite.
Altre volte non si segue questa regola generale, ma si preferisce tentare artifizi che solo la pratica può suggerire.

24.3 Disequazioni

Una disequazione si dice goniometrica se contiene funzioni goniometriche nei cui argomenti figura l'incognita.
Per le disequazioni goniometriche valgono gli stessi principi studiati per le disequazioni algebriche: occorre però tenere presente il dominio, il codominio e la periodicità delle singole funzioni goniometriche.
Nel caso di disequazioni goniometriche non elementari si dovrà procedere cercando inizialmente di rendere uguali gli argomenti delle diverse funzioni presenti e poi di trasformare con l'aiuto delle formule goniometriche note la disequazione in una o più disequazioni elementari.

Capitolo 25

Triangoli e applicazioni trigonometria

25.1 Relazioni fra lati e angoli di un triangolo

La trigonometria ha lo scopo di stabilire delle relazioni metriche tra gli elementi (lati ed angoli) di un triangolo. Quando dei sei elementi di un triangolo ne sono noti tre, tra i quali almeno un lato, si può dire che il triangolo è noto perché mediante le relazioni che la trigonometria fornisce, si possono determinare gli altri elementi.
D'ora in avanti indicheremo con:

- le maiuscole A, B, C i vertici di un triangolo
- le minuscole a, b, c le misure dei lati rispettivamente opposti
- con le lettere greche α, β, γ le ampiezze degli angoli aventi i vertici rispettivamente in A, B, C

Spesso si dirà semplicemente angolo per indicare l'ampiezza dello stesso e lato per indicarne la lunghezza.
Dalla geometria abbiamo le seguenti **proprietà di un triangolo qualunque**:

- la *somma degli angoli interni* di un triangolo è

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- in un triangolo *ogni lato è minore della somma degli altri due* e *maggiore della loro differenza*
- in un triangolo la relazione di eguaglianza/diseguaglianza esistente tra i lati rimane valida per gli angoli rispettivamente opposti. Ovvero

$$a < b \Longleftrightarrow \alpha < \beta$$
$$a = b \Longleftrightarrow \alpha = \beta$$
$$a > b \Longleftrightarrow \alpha > \beta$$

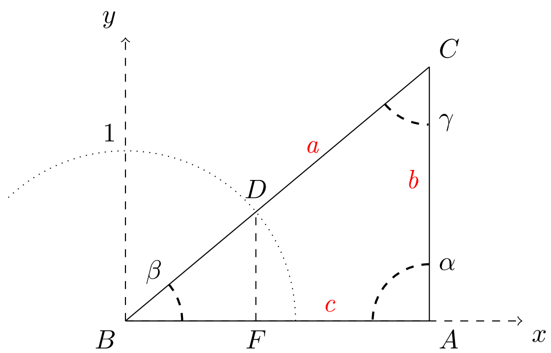
25.1.1 Teoremi sui triangoli rettangoli

Vi sono due teoremi fondamentali che servono per trovare la misura di un cateto in base ai dati a disposizione:

1. in ogni triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'*ipotenusa per il seno dell'angolo opposto a esso*, o *per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente*

2. in ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'*altro cateto per la tangente all'angolo opposto al primo cateto*, oppure *per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto.*

Derivazione del primo teorema Se ABC è un triangolo rettangolo con angolo retto A, costruiamo un sistema di riferimento cartesiano in modo che l'origine coincida con B e AB giaccia sul semiasse delle ascisse positive; definiamo in secondo luogo la circonferenza trigonometrica. Otteniamo il grafico seguente Se D è il punto in cui l'ipotenusa incontra la circonferenza trigonometrica,



abbiamo che

$$y_D = \sin\beta$$
$$x_D = \cos\beta$$

o in altre parole

$$\overline{FD} = \sin\beta$$
$$\overline{BF} = \cos\beta$$

Considerando che i triangoli ABC e FBD, per avere gli angoli congruenti sono simili e pertanto, i lati corrispondenti saranno in proporzione. Possiamo scrivere:

$$\overline{AC} : \overline{FD} = \overline{BC} : \overline{BD}$$
$$\overline{BA} : \overline{BF} = \overline{BC} : \overline{BD}$$

Possiamo dunque passare alla trigonometria elaborando le proporzioni di cui sopra nei seguenti termini

$$b : \sin\beta = a : 1$$
$$c : \cos\beta = a : 1$$

dalle quali derivano

$$\boxed{b = a\sin\beta} \tag{25.1}$$
$$\boxed{c = a\cos\beta} \tag{25.2}$$

Ma sapendo che β e γ sono complementari (sommano a 90) e quindi dalle relazioni fondamentali della trigonometria abbiamo $\sin\beta = \cos\gamma$ e $\cos\beta = \sin\gamma$ possiamo anche ricavare

$$\boxed{b = a\cos\gamma} \tag{25.3}$$
$$\boxed{c = a\sin\gamma} \tag{25.4}$$

L'intuizione geometrica di queste ultime la si può vedere ribaltando verso l'alto il triangolo e guardando ruotando la testa di 90 gradi in senso antiorario, in maniera di avere il corrispondente lato di b in basso.

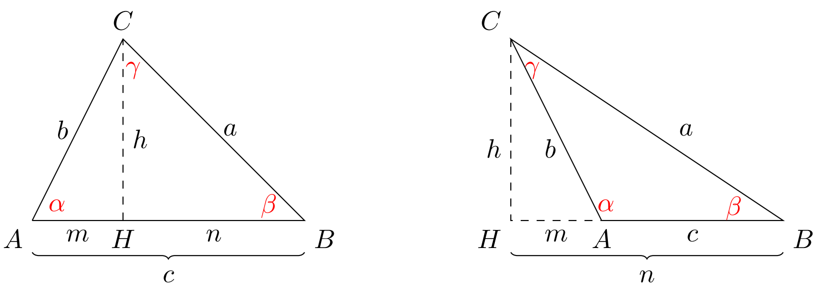
25.1.2 Teoremi sui triangoli qualsiasi

25.1.2.1 Teorema del coseno (o di Carnot)

L'enunciazione è:

> In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo che formano

Per procedere nella dimostrazione, consideriamo due triangoli Per il teorema di



(a) (b)

Pitagora applicato al triangolo rettangolo CHB (in entrambe le immagini) si ha

$$a^2 = h^2 + n^2$$

Consideriamo innanzitutto il triangolo di figura **a** nel quale α è l'angolo acuto. Per i teoremi sui triangoli rettangoli si ha

$$h = b \sin \alpha$$
$$m = b \cos \alpha$$

pertanto sarà

$$n = c - m = c - b \cos \alpha$$

Sostituendo nell'equazione di Pitagora si ottiene

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 + b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha \\ &= b^2 \underbrace{\left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)}_{=1} + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

per cui

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{25.5}$$

Consideriamo ora il triangolo di figura **b** nel quale α è l'angolo ottuso. Sempre per i teoremi sui triangoli rettangoli applicati a sCHA si ha

$$h = b \sin(\pi - \alpha) = b \sin \alpha$$
$$m = b \cos(\pi - \alpha) = -b \cos \alpha$$

pertanto sarà

$$n = c + m = c + (-b \cos \alpha) = c - b \cos \alpha$$

Sostituendo nell'equazione di Pitagora si riottiene $a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2$, ovvero ci siamo ricondotti allo sviluppo fatto in precedenza, che quindi condurrà agli stessi risultati.

Analogamente si possono ottenere le relazioni relative agli altri due lati b e c. Andiamo a riassumere

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \tag{25.6}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} \tag{25.7}$$

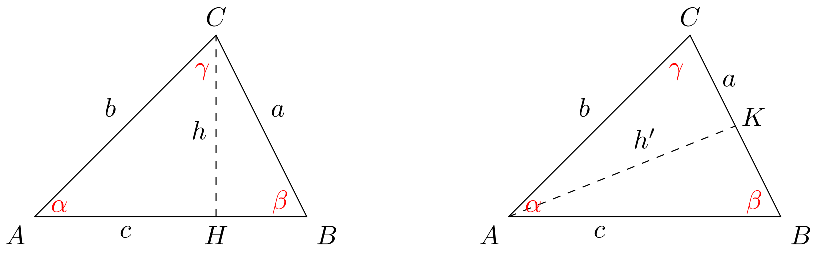
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \tag{25.8}$$

Si noti che se il triangolo è rettagolo, questo teorema si riduce al teorema di Pitagora: se $\alpha = 90°$ ed a è l'ipotenusa, si ha $\cos \alpha = 0$ e la prima delle equazioni si riduce alla forma $a^2 = b^2 + c^2$.

25.1.2.2 Teorema dei seni

L'enunciazione è:

> In un triangolo qualsiasi i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti e quindi è costante il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto



(a) (b)

Per procedere nella dimostrazione, consideriamo il medesimo triangolo (in questo caso acutangolo) e due altezze differenti: Siano h e h' le altezze rispettivamente al lato AB e BC del triangolo. Considerando prima il caso **a** nel triangolo rettangolo BHC si ha $h = b \sin\alpha$. Sarà quindi

$$a \sin\beta = b \sin\alpha \longrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

allo stesso modo considerando l'altezza h' come cateto dei dei due triangoli rettangoli ABK e ACK si ottiene

$$c \sin\beta = b \sin\gamma \longrightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Confrontando le due equazioni precedenti si può scrivere

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}} \tag{25.9}$$

25.2 Applicazioni trigonometria

25.2.1 Coordinate polari

I punti di un piano possono rappresentarsi non solo con le coordinate cartesiane, ma anche con altri sistemi di coordinate.
Per stabilire un sistema di **coordinate polari**:

- si fissa sul piano un punto O detto *polo*
- si definisce una semiretta Ox detta *asse polare*, avente come origine il punto O
- si sceglie un verso positivo delle rotazioni intorno al polo
- si sceglie una unità di misura u

In tal modo un punto qualsiasi P del piano è completamente individuato quando si conoscono la sua distanza d dal polo e l'angolo orientato θ di cui l'asse polare deve ruotare per sovrapporsi ad OP. La distanza $d = \overline{OP}$ è sempre positiva o al più nulla e si chiama *modulo*; l'angolo θ può assumere qualsiasi valore e si chiama *angolo di direzione*. La distanza d e l'angolo θ

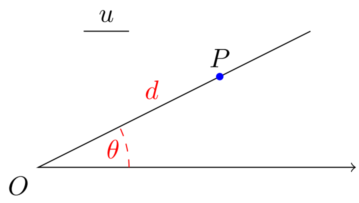


Figura 25.1: Coordinate polari

costituiscono le **coordinate polari** del punto P. Per indicare che un punto P ha le coordinate polari d e θ si scrive $P(d;\theta)$. Affinché però tra i punti del piano e le coppie $(d;\theta)$ di coordinate esista una corrispondenza biunivoca, $\theta \in [0;2\pi)$.

Per $\overline{OP} = 0$ si ha il polo O; per $\theta = 0$ si hanno i punti dell'asse polare. I punti che hanno lo stesso modulo stanno su una circonferenza di centro O; i punti che hanno lo stesso angolo θ stanno sulla stessa semiretta uscente da O.

25.2.1.1 Trasformazione delle coordinate polari in cartesiane e viceversa

Se assumiamo come polo l'origine degli assi cartesiani, il semiasse positivo dell'asse x l'asse polare, e come unità di misura la medesima per i due sistemi, un generico punto P, che dista d dall'origine degli assi può aver coordinate cartesiane riviste come:

$$\begin{cases} x = d\cos\theta \\ y = d\sin\theta \end{cases} \tag{25.10}$$

Desideriamo determinare d e θ; conoscendo da Pitagora si ha che $d = \sqrt{x^2+y^2}$. Applicandolo alla precedente otteniamo θ

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{25.11}$$

Se θ è un angolo notevole il suo valore potrà essere direttamente determinato osservando seno e coseno. Se così non fosse si potrà comunque determinare $\tan\theta = \frac{y}{x}$ posto che x sia $\neq 0$. Utilizzando la calcolatrice si determinerà $\arctan\theta$ che può però solo ricadere nel primo o quarto quadrante. Se il coseno è positivo, siamo a posto così perché effettivamente l'angolo è nel primo o nel quarto (e quindi $(\theta = \arctan\frac{y}{x})$, ma se negativo, l'angolo ricercato si otterrà sommando $\theta = \arctan\frac{y}{x} + \pi$.

25.2.2 Rotazione degli assi cartesiani

Siano Oxy (vecchio sistema) e $Ox'y'$ (nuovo sistema) due sistemi di assi cartesiani ortogonali aventi la medesima origine in O; inoltre il secondo sistema è ottenuto dal primo effettuando una rotazione simultanea degli assi x e y di un certo angolo α. Possiamo esser interessati:

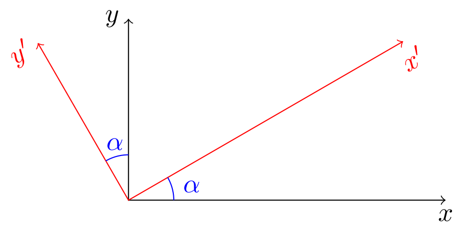


Figura 25.2: Rotazione degli assi

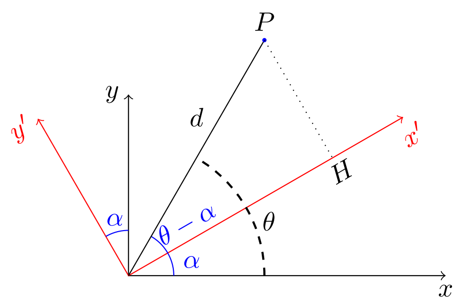
- ad ottenere le coordinate di un punto nel nuovo sistema in funzione di quelle nel vecchio;
- ottenere la formula di una equazione del vecchio sistema nel nuovo.

Partiamo dal primo problema.

Coordinate di un punto nel nuovo sistema Per procedere introduciamo un terzo sistema di riferimento, di coordinate polari, avente come origine il punto O e come asse polare la semiretta positiva dell'ascisse Ox. Se d e θ sono le coordinate polari del punto P, in questo nuovo sistema sarà (con riferimento alle coordinate cartesiane del sistema cartesiano non ruotato)

$$\begin{cases} x = d\cos\theta \\ y = d\sin\theta \end{cases} \tag{25.12}$$

Conducendo da P la perpendicolare PH all'asse Ox', e considerando il triangolo



rettangolo OHP, in cui l'angolo $\widehat{HOP} = \theta - \alpha$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} \overline{OH} = \overline{OP}\cos(\theta-\alpha) = \overline{OP}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ \overline{HP} = \overline{OP}\sin(\theta-\alpha) = \overline{OP}(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) \end{cases} \tag{25.13}$$

considerando il grafico e le relazioni tra coordinate polari e cartesiane, abbiamo

$$\overline{OP} = d$$
$$\overline{OH} = x'$$
$$\overline{HP} = y'$$

e sostituendo nelle equazioni di prima arriviamo alle equazioni che ci permettono, date le coordinate di un punto del vecchio Oxy sistema di esprimerle in termine di coordinate del nuovo sistema $Ox'y'$:

$$\begin{cases} x' = d\cos\theta\cos\alpha + d\sin\theta\sin\alpha \\ y' = d\sin\theta\cos\alpha - d\cos\theta\sin\alpha \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}} \tag{25.14}$$

Riscrivendo le equazioni 25.14 in funzione di x e y si ottengono le formule inverse che forniscono le coordinate di un punto rispetto al vecchio sistema di riferimento, note quelle nuove. Esse sono

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}} \tag{25.15}$$

La derivazione della 25.15 è un po' lunga:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y\sin\alpha = x' - x\cos\alpha \\ x\sin\alpha = y\cos\alpha - y' \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x'}{\sin\alpha} - x\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ x = y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{y'}{\sin\alpha} \end{cases}$$

Ora portando avanti la prima delle due abbiamo:

$$\begin{aligned} y =& \frac{x'}{\sin\alpha} - \left(y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{y'}{\sin\alpha} \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ y =& \frac{x'}{\sin\alpha} - y\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2} + y'\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ \underbrace{y\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)}_{\frac{1}{\sin^2\alpha}} =& \frac{x'}{\sin\alpha} + y'\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ y =& x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}$$

E tornando alla seconda abbiamo

$$\begin{aligned} x =& -\frac{y'}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right) \\ =& -\frac{y'}{\sin\alpha} + x'\cos\alpha + y'\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \\ =& y'\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right) + x'\cos\alpha \\ =& y'\left(-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right) + x'\cos\alpha \\ x =& x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + \end{aligned}$$

Equazione in nuovo sistema Quando invece si desidera determinare le equazioni di una espressione in un nuovo sistema di riferimento si adotta un processo inverso:

- se abbiamo una equazione $f(x;y) = 0$ nel vecchio riferimento, applichiamo nell'equazione la sostituzione suggerita dalle equazioni 25.15 (quindi a x

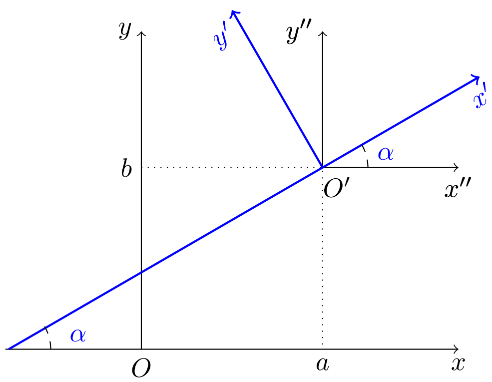
sostituiamo $x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$, mentre a y sostituiamo $x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$) ; sviluppando otterremo arriviamo all'equazione riferita al nuovo sistema, del tipo $f'(x'; y') = 0$

- se al contrario abbiamo una equazione del tipo $f'(x'; y') = 0$ riferita al sistema Oxy, applicando le sostituzioni suggerite da 25.14 si otterrà l'equazione $f(x; y) = 0$ della stessa curva nel vecchio riferimento cartesiano Oxy

Considerazioni finali In questa sezione abbiamo punti e curve che sono fisse nel piano; chi ruota con un movimento rigido è il sistema di riferimento. Nel contesto dello studio delle trasformazioni geometriche del piano, il sistema di riferimento resta fisso e sono i punti e le curve a ruotare attorno all'origine degli assi.

25.2.3 Rototraslazione degli assi cartesiani

In questa parte vediamo il caso più generale della rototraslazione ove ad il sistema cartesiano Oxy trasla ad una nuova origine e poi ruota, conducendo ad un sistema del tipo $O'x'y'$. Gli obiettivi sono analoghi a quelli della sezione precedente, ovvero derivare le equazioni per esprimere nelle nuove coordinate un punto o una equazione del sistema di partenza. Per farlo si introduce un terzo sistema ausiliario $O'y''x''$ con l'origine in O' e con gli assi x'', y'' rispettivamente paralleli ai vecchi assi x, y.



Siano $(x; y)$, $(x'; y')$ e $(x''; y'')$, le coordinate di un medesimo punto rispetto ai tre sistemi; siano poi (a, b) le coordinate della nuova origine O' rispetto al sistema Oxy e *alpha* l'angolo che l'asse $O'x'$ forma con l'asse $O'x''$ (e anche con l'asse Ox.
Per la traslazione del sistema Oxy in O' si ha

$$\begin{cases} x = x'' + a \\ y = y'' + b \end{cases} \tag{25.16}$$

e per la rotazione di α del sistema $O'x''y''$ attorno a O', per la 25.15 si ha

$$\begin{cases} x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y'' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{25.17}$$

sostituendo il sistema di sopra in 25.16 si ottengono le relazioni fra le coordinate nuove e quelle vecchie

$$\boxed{\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}} \tag{25.18}$$

e risolvendo questo sistema rispetto a x' e y' si otterranno le formule della trasformazione inversa

$$\boxed{\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}} \tag{25.19}$$

25.3 TODO

```
- coefficiente angolare della retta? l3 p114
- equazioni di curve in coordinate polari: l3 pg321
- equazioni parametriche di una curva l3 pg327
```

Capitolo 26

Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

26.1 Introduzione

26.1.1 Trasformazioni di un singolo punto

Una trasformazione geometrica è una *funzione biunivoca* tra punti del piano: essa trasforma un generico punto P in un altro punto P' (detto *immagine* del primo). Se indichiamo con t una generica trasformazione possiamo scrivere

$$P \xrightarrow{\mathrm{t}} P'$$

Se nel piano è fissato un riferimento cartesiano, le coordinate del punto $P'(x', y')$ in una data trasformazione t si possono esprimere come funzioni delle coordinate del punto di partenza $P(x, y)$:

$$t : \begin{cases} x' = f(x; y) \\ y' = g(x; y) \end{cases} \tag{26.1}$$

Questa è l'**espressione analitica** della trasformazione t.

Essendo t biunivoca esiste anche la **trasformazione inversa**, indicata con t^{-1}, la quale applicata all'immagine P', restituisce P. L'espressione analitica di t^{-1} si può ottenere da quella di t, risolvendo rispetto alle incognite x, y e in seguito sostituendo x' con x e y' con y (analogamente a quanto si fa con le funzioni inverse).

$$t^{-1} : \begin{cases} x = \varphi(x'; y') \\ y = \psi(x'; y') \end{cases} \tag{26.2}$$

Esempio Data la trasformazione di espressione

$$t : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Calcoliamo le coordinate delle immagini dei punti $A(5;3)$ e $B(-1;1)$

$$A(5;3) \to A'(5+2;3-3) = A'(7;0)$$

e

$$B(-1;1) \to B'(-1+2;1-3) = B'(1;-2)$$

Determiniamo ora l'equazione della trasformazione inversa; risolvendo le equazioni di t rispetto alle incognite x e y si ottiene, anche in seguito a inversione di incognite con e senza apici:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ora calcoliamo la controimmagine di C' secondo t^{-1}: si ha

$$C'(2;-5) \to C(2-2;-5+3) = C(0;-2)$$

26.1.2 Trasformazione di una curva

Se applichiamo a ciascun punto di una curva γ di equazione $F(x;y) = 0$ una stessa trasformazione geometrica t, la curva γ viene trasformata in una nuova curva γ', con equazione $G(x;y) = 0$ che in generale sarà diversa da quella di γ [1].

Per **ottenere l'equazione della curva di una trasformata** t della curva rappresentata da $F(x;y) = 0$, si ricavano dalle equazioni della trasformazione t le espressioni di x e y, esse sono date come in 26.2.

Ad esempio ipotizziamo di voler applicare alla retta $y = x+2$ la trasformazione:

$$t: \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

(che consiste nel spostarla in alto di una unità). Troviamo dunque

$$t^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

In seguito si sostituiscono tali espressioni al posto di x, y nell'equazione $F(x;y) = 0$, ottenendo $F(\varphi(x';y'); \psi(x';y')) = 0$, che è l'equazione desiderata.

Per il nostro esempio:

$$\begin{aligned} y' - 1 &= x' + 2 \\ y' &= x' + 3 \end{aligned}$$

A questo punto può esser utile ricondurre la notazione della trasformazione senza apici.

$$y = x + 3$$

[1] Tali considerazioni si applicano anche quando γ è il grafico di una funzione, la cui equazione si può scrivere nella forma $y = f(x)$; tuttavia in questo caso, non sempre l'equazione della curva trasformata γ' rappresenterà una funzione della vecchia x in funzione della vecchia y. Ovvero *la trasformazione di una funzione non è necessariamente una funzione essa stessa.*

La sostituzione

$$\begin{bmatrix} x \to \varphi(x;y) \\ y \to \psi(x;y) \end{bmatrix}$$

che permette di ottenere l'equazione della curva γ' a partire da quella di γ è detta **sostituzione associata alla trasformazione** t[2]. Nel caso precedente possiamo scrivere:

$$y = x + 2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to & x \\ y \to & y-1 \end{bmatrix}]{\text{t}} y = x + 3$$

Esempio Per determinare l'equazione della trasformata della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x = 0$ nella trasformazione t di equazioni

$$t : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \tag{26.3}$$

si parte dal determinare l'inversa che è

$$t^{-1} : \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases} \tag{26.4}$$

Sostituendo queste equazioni si ha

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x &= 0 \\ (x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) &= 0 \\ x'^2 + y'^2 + 6y' + 5 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$$

26.1.3 Trasformazioni composte

Se t_1, t_2 sono due trasformazioni e P un qualsiasi punto, il punto

$$P'' = t_2(t_1(P))$$

può esser pensato come l'immagine di P rispetto ad una trasformazione composta, che si indica con $t_2 \circ t_1$. Si noti che tale trasformazione si ottiene applicando prima t_1 e poi t_2. Non è indifferente l'ordine in cui si applicano le trasformazioni, ovvero in genere[3] si ha che $t_2 \circ t_1 \neq t_1 \circ t_2$, ovvero **in generale la composizione delle trasformazioni geometriche non è commutativa**.
Infine una trasformazione si dice involutoria se, componendola con se stessa, ossia applicandola due volte, si ottiene l'identità. Come si può facilmente dimostarre, una trasformazione è involutoria se e solo se coincide con la sua inversa.

[2] Si noti che le funzioni a destra della freccia incorporano già il cambio di notazione.
[3] Ma può essere anche il contrario

Esempio Considerando le trasformazioni

$$t_1 : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \quad t_2 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

e volendo determinare l'espressione analitica della composta $t_2 \circ t_1$, procediamo applicando ad un generico punto $P(x; y)$ prima t_1 e poi t_2. Si ha

$$P(x; y) \longrightarrow P'(x + 2; y - 3) \longrightarrow P''(-x - 2; 3 - y)$$

dalla quale deriva che l'espressione analitica di $t_2 \circ t_1$ è

$$t_1 : \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = 3 - y \end{cases}$$

26.1.4 Classificazione delle trasformazioni

Come si avrà modo di vedere le affinità sono la forma di trasformazione più generale. Nello specifico le isometrie sono un sottoinsieme delle similitudini, che a loro volta sono un sottoinsieme delle affinità.
Per riconoscere un particolare tipo di affinità di cui siano note le equazioni, si dovrà per prima cosa stabilire se essa è una similitudine o una isometria, accertando se sono verificate le condizione particolari.

26.2 Isometrie

Una isometria è una trasformazione in cui la distanza tra due punti del grafico è sempre eguale alla distanza tra le loro immagini. Applicando un'isometria ad una figura geometrica, la figura trasformata che si ottiene è congruente alla figura data. Ne sono tipologie:

- la simmetria
- la traslazione
- la rotazione

La trasformazione che si ottiene componendo due isometrie è ancora un'isometria.

26.2.1 Simmetria

La simmetria la si può avere rispetto ad un punto/centro (*simmetria centrale*) o rispetto ad una retta/asse (*simmetria assiale*).

26.2.1.1 Simmetria centrale

La **simmetria centrale** σ_c è quella trasformazione che associa ad ogni punto P del piano il suo simmetrico P' rispetto a C, detto **centro della simmetria**; P' è simmetrico di P rispetto al punto C, se *C è il punto medio del segmento PP'*.

Per determinare l'equazione della simmetria σ_c, consideriamo un generico punto $P(x,y)$ e sia $P'(x',y')$ il suo simmetrico rispetto a C. Ricordando le coordinate del punto medio, si deve avere

$$\begin{cases} x_c = \frac{x+x'}{2} \\ y_c = \frac{y+y'}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_c = x + x' \\ 2y_c = y + y' \end{cases} \quad \rightarrow \boxed{\sigma_c : \begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}} \tag{26.5}$$

Da cui, la **sostituzione associata** a σ_c è:

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow 2x_c - x \\ y \rightarrow 2y_c - y \end{bmatrix} \tag{26.6}$$

Data una curva di equazione $F(x;y) = 0$, l'equazione della sua simmetrica rispetto a C è

$$F(x;y) = 0 \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \rightarrow 2x_c - x \\ y \rightarrow 2y_c - y \end{bmatrix}]{} F(2x_c - x; 2y_c - y) = 0 \tag{26.7}$$

Un caso importante/particolare quando il centro della simmetria coincide con l'origine degli assi; per $x_c = 0$, $y_c = 0$ si ha nella formula:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \tag{26.8}$$

da cui la sostituzione

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{bmatrix} \tag{26.9}$$

26.2.1.2 Simmetria assiale

Si chiama simmetria assiale rispetto alla retta r, e si indica con σ_r , quella trasformazione che associa ad ogni punto P del piano il suo simmetrico P' rispetto alla retta r, detta *asse di simmetria*.
P' è simmetrico di P rispetto ad r se il segmento PP' è perpendicolare a r e se il punto medio del segmento PP' appartiene ad r.

A causa della loro complessità non formuleremo le equazioni di una generica simmetria assiale, ma illustriamo con un esempio: determiniamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$.
Sia $P(x;y)$ un generico punto e sia $P'(x';y')$ il suo simmetrico rispetto a r. Il punto medio di M di PP' è

$$M\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}\right)$$

e il coefficiente angolare di PP' è

$$m_{PP'} = \frac{y'-y}{x-x'}$$

Il punto M deve appartenere alla retta r e quindi le sue coordinate ne devono soddisfare l'equazione

$$2\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} - 2 = 0$$

Inoltre essendo che PP' deve essere perpendicolare ad r, ed essendo la pendenza di questa m_r il coefficiente angolare di r si deve avere

$$m_{PP'} \cdot m_r = -1 \longrightarrow \frac{y' - y}{x - x'} \cdot 2 = -1$$

Ponendo a sistema le due equazioni così trovate e risolvendo rispetto alle incognite x' e y' si ottengono le equazioni della simmetria assiale σ_r di questo caso:

$$\begin{cases} 2\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} - 2 = 0 \\ \frac{y'-y}{x'-x} \cdot 2 = -1 \end{cases} \longrightarrow \sigma_r : \begin{cases} x' = \frac{-3x+4y+8}{5} \\ y' = \frac{4x+3y-4}{5} \end{cases} \tag{26.10}$$

Alcune **note rilevanti sulle simmetrie assiali**:

- se al punto P' simmetrico di P rispetto a r si applica nuovamente σ_r si ottiene il punto P dato inizialmente; ossia $\sigma_r(\sigma_r(P)) = P$, perciò componendo σ_r con se stessa si ottiene l'identità.

- se γ è il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, la curva γ_r a essa simmetrica rispetto a r in generale non rappresenta il grafico di una funzione

- come si potrebbe mostrare via esempi, componendo due simmetria assiali rispetto a due rette perpendicolari si ottiene una simmetria centrale rispetto al punto di intersezione delle due rette

Sono **particolarmente importanti le simmetrie** rispetto agli assi cartesiani, rispetto alle rette parallele ad uno di essi e rispetto alle bisettrici del 1°-3° e 2°-4° quadrante.
Le loro equazioni e le sostituzioni associate si possono ottenere in base a considerazioni geometriche elementari; in tabella 26.1 sono riportate le sostituzioni associate a tali simmetrie e l'equazione della curva simmetrica di una generica curva di equazione $F(x; y) = 0$. In particolare, se γ è una curva di equazione $F(x; y) = 0$ e...

- $F(x; y) = F(x; -y) \rightarrow \gamma$ è simmetrica rispetto all'asse x

- $F(x; y) = F(-x; y) \rightarrow \gamma$ è simmetrica rispetto all'asse y

- $F(x; y) = F(y; x) \rightarrow \gamma$ è simmetrica rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante

Se la curva ha un'equazione algebrica in cui compaiono solo potenze di esponente pari di x, essendo per n pari $(-x)^n = x^n$, la sua equazione non muta se in essa si sostituisce $-x$ al posto di x; perciò in tal caso la curva è simmetrica rispetto all'asse y.
Analogamente, se una curva ha equazione algebrica in cui compaiono solo potenze di esponente pari di y, la curva è simmetrica rispetto all'asse x.
Se poi nell'equazione compaiono solo potenze di esponente pari sia in x che y, la curva è simmetrica rispetto a entrambi gli assi ed anche rispetto all'origine.

Simm.	Asse	Eq. Asse	Eq. Simm.	Sostituz.	Curva simmetr.
σ_x	Asse x	$y=0$	$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & x \\ y \to & -y \end{bmatrix}$	$F(x;-y)=0$
σ_y	Asse y	$x=0$	$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & -x \\ y \to & y \end{bmatrix}$	$F(-x;y)=0$
$\sigma_{y=k}$	Par. Asse. x	$y=k$	$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & 2k-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & x \\ y \to & 2k-y \end{bmatrix}$	$F(x;2k-y)=0$
$\sigma_{x=h}$	Par. Asse. y	$x=h$	$\begin{cases} x' = & 2h-x \\ y' = & y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & 2h-x \\ y \to & y \end{bmatrix}$	$F(2h-x;y)=0$
$\sigma_{y=x}$	Biset. 1-3°	$y=x$	$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & y \\ y \to & x \end{bmatrix}$	$F(y;x)=0$
$\sigma_{y=-x}$	Biset. 2-4°	$y=-x$	$\begin{cases} x' = & -y \\ y' = & -x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to & -y \\ y \to & -x \end{bmatrix}$	$F(-y;-x)=0$

Tabella 26.1: Simmetrie assiali notevoli

26.2.2 Traslazioni

La traslazione di un vettore $\overrightarrow{v}$ di componenti cartesiane $(a;b)$ è definita da

$$\tau(a;b):\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases} \tag{26.11}$$

La sostituzione associata a $\tau(a;b)$ è

$$\begin{bmatrix} x \to x-a \\ y \to y-b \end{bmatrix} \tag{26.12}$$

che applicata alla curva γ di equazione $F(x;y)=0$ permette di ottenere l'equazione della curva traslata γ'.
La trasformazione inversa alla traslazione di vettore $\overrightarrow{v}=(a;b)$ è ovviamente la traslazione associata al vettore opposto a $\overrightarrow{v}$, ossia $-\overrightarrow{v}=(-a;-b)$.

Una traslazione τ di vettore $\overrightarrow{v}=(0;b)$ con $b\neq 0$ è detta **traslazione verticale**; se $b>0$ è una traslazione verso l'alto, se $b<0$ è verso il basso.
Analogamente una traslazione τ di vettore $\overrightarrow{v}=(a;0)$ con $a\neq 0$ è detta **traslazione orizzontale**; se $a>0$ è una traslazione verso destra, se $a<0$ è verso sinistra.
Una generica traslazione τ di vettore $\overrightarrow{v}=(a;b)$ si può sempre ottenere componendo una traslazione verticale $\overrightarrow{v}=(0;b)$ ed una orizzontale $\overrightarrow{v}=(a;0)$, indipendentemente dall'ordine con cui si effettuano le due traslazioni.

26.2.3 Rotazioni

Dato un punto C e un angolo α, si definisce **rotazione** con centro C quella trasformazione che associa, a un generico punto P del piano, il punto P' tale che $PC\cong P'C$ (distanza dal centro dei due punti è congruente) e $\widehat{PCP'}=\alpha$.

Nel caso $\alpha = 2k\pi$ la rotazione si riduce all'identità, mentre se $\alpha = \pi + 2k\pi$ si ottiene la simmetria rispetto al punto C[4]

26.2.3.1 Rotazione con centro nell'origine degli assi

Se ρ e θ sono le coordinate polari del punto P da ruotare, le rispettive coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \tag{26.13}$$

Se desideriamo ruotare tale punto di α gradi, il punto P' risultante avrà coordinate polari $P(\rho; \theta + \alpha)$; le sue coordinate cartesiane saranno perciò date da

$$\begin{cases} x' = \rho\cos(\theta+\alpha) \\ y' = \rho\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

Applicando le formule di addizione di seno e coseno e tenendo conto 26.13 si ha

$$\begin{cases} x' = \rho(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ y' = \rho(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = (\rho\cos\theta)\cos\alpha - (\rho\sin\theta)\sin\alpha \\ y' = (\rho\cos\theta)\cos\alpha + (\rho\sin\theta)\cos\alpha \end{cases}$$

ovvero la rotazione dall'origine degli assi prevede la seguente trasformazione

$$r_{0,\alpha} = \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\theta \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{26.14}$$

La trasformazione inversa è una rotazione, rispetto allo stesso centro di un angolo $-\alpha$. Tenendo presente che $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ si ottengono dalla 26.14 le equazioni dell'inversa della rotazione di un angolo α rispetto all'origine

$$r_{0,\alpha}^{-1} = \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Ne segue che la sostituzione da operare nell'equazione $F(x; y) = 0$ di una curva γ per ottenere l'equazione della curva γ', immagine di γ nella rotazione di un angolo α rispetto all'origine è

$$\begin{bmatrix} x \to x\cos\alpha + y\sin\theta \\ y \to -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}$$

26.3 Similitudini

Una trasformazione t si dice similitudine se e solo se comunque si scelgano due punti A e B, il rapporto del segmento costruito sulle rispettive immagini e quello costruito tra i punti di partenza è costante e pari ad $r > 0$ (detto rapporto di similitudine). Ovvero

$$\frac{A'B'}{AB} = r \tag{26.15}$$

[4]Una simmetria centrale può essere considerata una rotazione di un angolo piatto attorno al centro di simmetria

con A' e B' i punti corrispondenti ad A e B nella trasformazione. *Se il rapporto di similitudine è 1, la similitudine si riduce ad un'isometria.* Ovvero le **similitudini** sono *isometrie che in aggiunta possono ingrandire o rimpicciolire la figura.*
Vale la regola che, componendo due similitudini di rapporto rispettivamente r_1 e r_2 si ottiene una similitudine di rapporto $r_1 r_2$.
Inoltre, essendo le isometrie particolari similitudini, componendo una isometria e una similitudine si ottiene una similitudine; più precisamente si potrebbe dimostrare che *ogni similitudine si può ottenere componendo un'opportuna isometria con un'omotetia.*

26.3.1 Omotetie

L'*omotetia* è un ingrandimento/rimpicciolimento di un punto/figura rispetto ad un centro, dipendente da un parametro k. Si osservi nel seguito che se:

- $k = 1$, si ottiene l'identità
- $k = -1$ si ottiene la simmetria rispetto all'origine

26.3.1.1 Omotetie con centro nell'origine

Ad esempio *l'omotetia di rapporto k con centro nell'origine*, indicata con $\omega_{0,k}$, fa corrispondere ad un punto $P(x; y)$ il punto $P'(kx, ky)$. Le equazioni di tale omotetia sono

$$\omega_{0,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad , k \neq 0 \tag{26.16}$$

Per ciò che riguarda le equazioni della trasformazione inversa avremo

$$\omega_{0,k}^{-1} = \omega_{0,\frac{1}{k}} = \begin{cases} x = \frac{1}{k}x' \\ y = \frac{1}{k}y' \end{cases} \quad , \tag{26.17}$$

per cui effettuando l'inversione delle incognite, la sostituzione associata all'omotetia di rapporto k con centro nell'origine è

$$\begin{bmatrix} x \to \frac{1}{k}x \\ y \to \frac{1}{k}y \end{bmatrix}, \tag{26.18}$$

26.4 Affinità

Si definisce *affinità* ogni trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \tag{26.19}$$

in cui i coefficienti soddisfino la condizione

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{26.20}$$

necessaria per assicurare la biunivocità e quindi l'invertibilità di 26.19 (per tale motivo, un generico punto ha unica immagine; solo se è soddisfatta la 26.20).
Il sistema 26.19 è determinato, ovvero ha una e una sola soluzione, se e solo se $a_1b_2 - a_2b_1$ detta determinante, non è nulla.

26.4.1 Dilatazioni

Sono un importante tipo di affinità, generalizzazione delle omotetie. Ci focalizziamo su quelle con centro nell'origine.

La dilatazione di un punto *rispetto all'origine* viene determinato dai coefficienti h e k attraverso

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}, \ h, k \neq 0 \tag{26.21}$$

Se

- $h = k$, la dilatazione è una omotetia (le quali si possono considerare particolari dilatazioni);
- $h = k = 1$ la dilatazione si riduce all'identità;
- $h = k = -1$ la dilatazione coincide con la simmetria rispetto all'origine;
- $h = 1 \wedge k = -1$ la dilatazione è la simmetria rispetto all'asse x;
- $h = -1 \wedge k = 1$ la dilatazione è la simmetria rispetto all'asse y;
- $h \neq 1 \wedge k = 1$, la dilatazione è detta orizzontale;
- $h = 1 \wedge k \neq 1$, la dilatazione è detta verticale.

L'inversa di una dilatazione è la dilatazione i cui rapporti sono i reciproci dei rapporti della dilatazione data; le sue equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{h}x \\ y' = \frac{1}{k}y \end{cases}$$

Da ciò deriva che la sostituzione associata alla dilatazione di rapporti h e k è

$$\begin{bmatrix} x \rightarrow \frac{1}{h}x \\ y \rightarrow \frac{1}{k}y \end{bmatrix}$$

26.5 TODO

```
- trasformazioni con centro generico?
- grafici?
```

Capitolo 27

Applicazione delle trasformazioni geometriche

27.1 Applicazione ai grafici delle funzioni

Le nozioni apprese sulle trasformazioni possono esser applicate allo studio di curve importanti quali grafici di funzioni (e coniche).
La costruzione del grafico di una funzione può esser ricondotto al grafico già noto di una funzione elementare.

27.1.1 Simmetria rispetto a un generico punto

Se la curva γ è il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, applicando ai punti di γ una simmetria di centro C si ottiene una curva di equazione

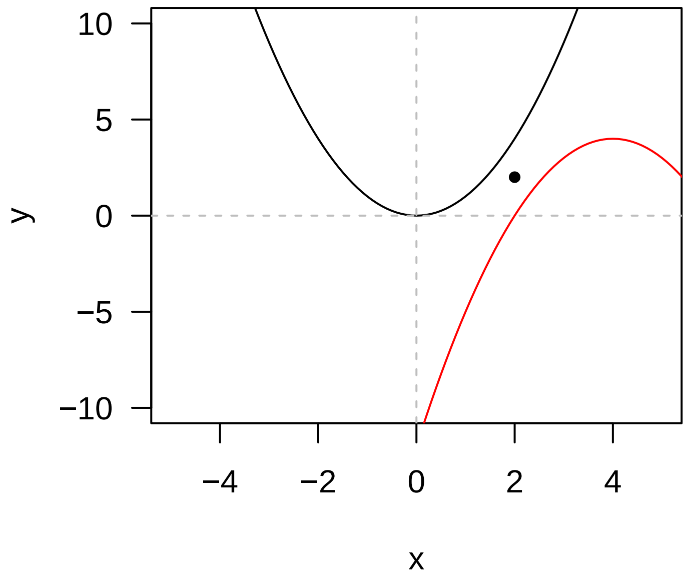
$$y \quad = f(x) \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to 2x_c - x \\ y \to 2y_c - y \end{bmatrix}]{\sigma_c} 2y_c - y = f(2x_c - x)$$

ovvero

$$y = 2y_c - f(2x_c - x) \tag{27.1}$$

che è ancora l'equazione di una funzione di x, il cui grafico γ' è simmetrico di γ rispetto a C.
Pertanto *il simmetrico rispetto a un punto del grafico di una funzione è ancora il grafico di una funzione.*
Vediamo il simmetrico di una parabola $y = x^2$ rispetto al punto C(2,2)

```
x <- seq(-10,10, by=0.1)
y <- x^2
C <- c(2,2)
y2 <- 2*C[2] - (2*C[1] - x)^2
plot(x,y, type="l", xlim=c(-5,5), ylim=c(-10,10), las = 1)
lines(x, y2, type = "l", col="red")
abline(h = 0, col = "grey",lty = 2)
abline(v = 0, col = "grey",lty = 2)
points(x=C[1], y = C[2], pch = 20)
```



27.1.2 Simmetria rispetto all'origine

In particolare, applicando ai punti di γ una simmetria rispetto all'origine si ha

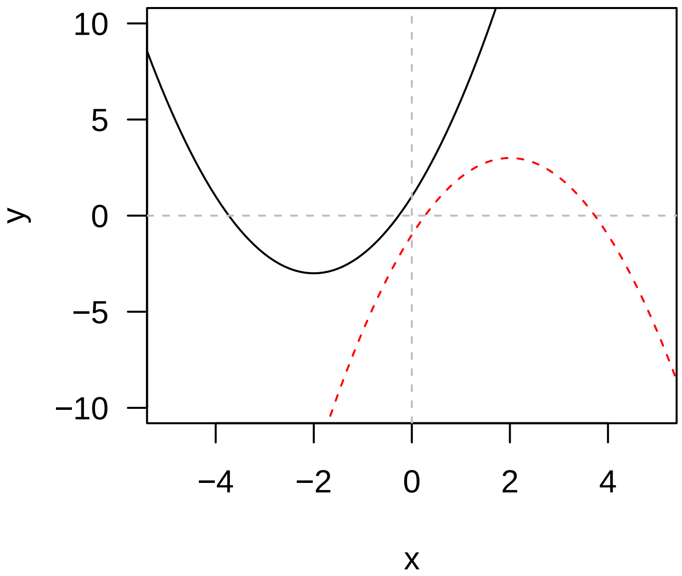
$$y \quad = f(x) \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to -y \end{bmatrix}]{\sigma_0} -y = f(-x)$$

ovvero

$$y = -f(-x) \tag{27.2}$$

Calcoliamo la simmetrica rispetto al centro di $y = x^2 + 4x + 1$

```
y <- x^2 + 4*x +1
C <- c(0,0)
plot(x,y, type="l", xlim=c(-5,5), ylim=c(-10,10), las = 1)
abline(h = 0, col = "grey",lty = 2)
abline(v = 0, col = "grey",lty = 2)
## Verifichiamo che f(x) sia dispari
y2 <- -( (-x)^2 - 4*x +1 )
lines(x, y2, type = "l", col="red", lty=2)
```



27.1.3 Funzioni dispari

Nel caso risulti $-f(-x) = f(x)$, o il che è lo stesso

$$\boxed{f(-x) = -f(x)} \tag{27.3}$$

il grafico di $f(x)$ risulta simmetrico rispetto all'origine e si dice che $f(x)$ è una *funzione dispari* .
Se l'espressione analitica di $f(x)$ è un polinomio (funzione razionale intera), essa risulta dispari se e solo se in tale polinomio compaiono esclusivamente i termini di grado dispari.

```
x <- seq(-10,10, by=0.1)
y <- 1/x
C <- c(0,0)
## Verifichiamo che f(x) sia dispari
y2 <- -(1/-x)
head(cbind(y,y2), n=3)

##                y         y2
## [1,] -0.1000000 -0.1000000
## [2,] -0.1010101 -0.1010101
## [3,] -0.1020408 -0.1020408

all.equal(y,y2)
```

```
## [1] TRUE

## si lo è (iperbole equilatera è simmetrica rispetto
## all'origine)
```

27.1.4 Simmetrie a rette parallele agli assi

Applicando alla curva una simmetria rispetto a una retta parallela ad uno degli assi si ottengono rispettivamente le curve

$$y = f(x) \xrightarrow{\sigma_{y=h}} 2h - y = f(x) \rightarrow \quad y = 2h - f(x) \tag{27.4}$$

$$y = f(x) \xrightarrow{\sigma_{x=k}} \quad y = f(2k - x) \tag{27.5}$$

I casi particolari in cui le curve siano rispettivamente simmetriche rispetto agli assi si ottengono impostando $y = 0$ e $x = 0$. Il grafico dell'equazione simmetrica rispetto all'asse x si ottiene mediante

$$y = -f(x) \tag{27.6}$$

quello rispetto all'asse y si ha con

$$y = f(-x) \tag{27.7}$$

Se risulta

$$f(2k - x) = f(x) \tag{27.8}$$

il grafico di di $f(x)$ risulta simmetrico rispetto alla retta $x = k$; invece il grafico di una funzione non può risultare simmetrico rispetto a una parallela all'asse x a meno che $f(x)$ sia costante.

27.1.5 Simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante. Grafico funzione inversa

Se γè il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = x$ ha equazione

$$y = f(x) \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}]{\sigma_{y=x}} x = f(y) \tag{27.9}$$

$x = f(y)$ in generale *non è l'equazione di una funzione di* x, se non nel caso che f sia una **funzione biunivoca** nel suo dominio, e quindi invertibile.
In tal caso l'equazione $x = f(y)$ si può porre nella forma $y = f^{-1}(x)$. Pertanto se γ è il grafico di una funzione $y = f(x)$ invertibile, il grafico della sua inversa è il simmetrico di γ rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante.

Ad esempio considerando la funzione $y = x^2$ essa non è invertibile; ma se ci limitiamo a considerare quei valori di $x \geq 0$, per determinare l'equazione e il grafico della funzione inversa è sufficiente applicare una simmetria rispetto alla bisettrice

$$y = x^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{bmatrix}]{\sigma_{y=x}} x = y^2 \tag{27.10}$$

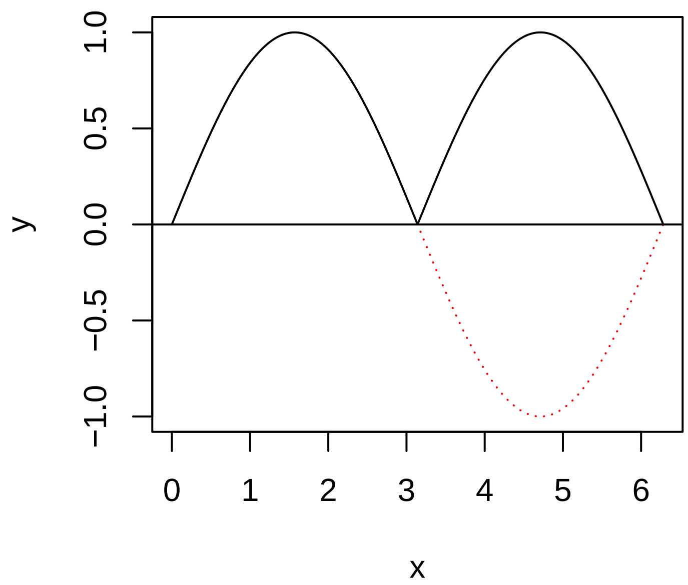
con $y \geq 0$, $y = \sqrt{x}$.

27.1.6 Grafico di $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$

Sia γ il grafico di una funzione $y = f(x)$. Per ottener il grafico di $y = |f(x)|$ basta considerare che, in base alla definizione di valore assoluto, si ha

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \,\text{se}\, f(x) \geq 0 \\ -f(x) \,\text{se}\, f(x) < 0 \end{cases}$$

Perciò in corrispondenza dei valori di x per cui $f(x)$ assume valori positivi o nulli, il grafico di $y = |f(x)|$ coincide con il grafico di γ, mentre per i rimanenti, il grafico coincide con quello di $y = -f(x)$, che è il simmetrico di γ rispetto all'asse x. Ovvero per tracciare il grafico di $y = |f(x)|$ basta tracciare il grafico γ di $y = f(x)$ e ribaltare rispetto all'asse x quelle parti di γ che si trovano nel semipiano delle ordinate negative



Per il grafico di $y = f(|x|)$ è sufficiente considerare che, essendo $f(|-x|) = f(|x|)$, tale funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Pertanto tracciato nel semipiano $x \geq 0$ il grafico di $y = f(x)$ che, per $x \geq 0$ coincide con quello di $f(|x|)$, lo si completa disegnando nel semipiano $x < 0$ il suo simmetrico rispetto all'asse y

27.1.7 Traslazione di grafici

Se si applica una traslazione $\tau(a;b)$ al grafico γ di una funzione di equazione $y = f(x)$ si ottiene una curva γ' di equazione

$$y = f(x) \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to x - a \\ y \to y - a \end{bmatrix}]{\tau(a;)} y - b = f(x - a) \tag{27.11}$$

ovvero

$$y = f(x - a) + b \tag{27.12}$$

che è ancora l'equazione di una funzione di x.
Se a o b sono 0, a turno si avrà il caso delle traslazioni orizzontali e verticali. In particolare una traslazione verticale avrà una forma

$$y = f(x) + b \tag{27.13}$$

il grafico della funzione di equazione $y = f(x) +$ b si può ottenere da quello di $y = f(x)$ operando su di essa una traslazione verticale di vettore $\overrightarrow{v}(0;b)$. Ad esempio se b $>$ 0 il vettore farà spostare in alto il grafico. Se si applica una traslazione orizzontale, il nuovo grafico sarà rappresentato da una equazione

$$y = f(x - a) \tag{27.14}$$

il grafico di tale funzione si può ottenere da quello di $y = f(x)$ operando su di essa una traslazione orizzontale di vettore $\overrightarrow{v}(a;0)$. Ad esempio se b $>$ 0 il vettore farà spostare a destra il grafico.

27.1.8 Dilatazioni

Se si applica una dilatazione di rapporti h e k al grafico γ di una funzione di equazione $y = f(x)$ si ottiene una curva γ' di equazione

$$y = f(x) \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to \frac{x}{h} \\ y \to \frac{y}{k} \end{bmatrix}]{\delta(h;k)} \frac{y}{k} = f\left(\frac{x}{h}\right) \tag{27.15}$$

ovvero

$$y = kf\left(\frac{x}{h}\right) \tag{27.16}$$

che è ancora l'equazione di una funzione di x.
Se $h = 1$ allora si avrà solamente una dilatazione verticale; in tal caso abbiamo che il grafico di

$$y = kf(x) \tag{27.17}$$

si ottiene applicando al grafico di $y = f(x)$ una dilatazione verticale di rapporto k.
Se k=1 allora si avrà solamente una dilatazione orizzontale; in tal caso abbiamo che il grafico di

$$y = f\left(\frac{x}{h}\right) \tag{27.18}$$

si ottiene applicando al grafico di $y = f(x)$ una dilatazione orizzontale di rapporto h.

Capitolo 28

Risoluzione grafica di disequazioni

28.1 Disequazione del tipo $f(x) > 0$

Supponendo di dover risolvere una disequazione del tipo

$$f(x) > 0 \tag{28.1}$$

Essa può essere interpretata graficamente: essa è equivalente al sistema misto

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y > 0 \end{cases}$$

ovvero occorre determinare i punti del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano sia l'equazione sia la disequazione del sistema. Si tratta perciò di individuare i punti del grafico della funzione $y = f(x)$ che appartengono al semipiano delle ordinate positive (asse x escluso). Le soluzioni dell'equazione originaria saranno le ascisse di tali punti.
Casi speculari si possono sviluppare per altri segni della diseguaglianza : $f(x) < 0, f(x) \leq 0, f(x) \geq 0$.

28.2 Disequazione del tipo $f(x) > g(x)$

In molti casi la disequazione che si vuole risolvere si presenta nella forma

$$f(x) > g(x) \tag{28.2}$$

o dalla forma 28.1 si preferisce ricondurla alla 28.2.
Per risolvere graficamente la 28.2 occorre considerare nello stesso piano cartesiano il grafico γ_1 della funzione $y = f(x)$ e il grafico γ_2 della funzione $y = g(x)$. Si dovranno allora determinare i punti di γ_1 che hanno ordinata maggiore dell'ordinata dei corrispondenti punti di uguale ascissa di γ_2; le ascisse di tali punti sono i valori di x che soddisfano la 28.2.
Anche qui metodi di risoluzione speculari si possono sviluppare nei casi $f(x) < g(x), f(x) \leq g(x), f(x) \geq g(x)$.

Capitolo 29

Potenze ad esponente reale, funzione esponenziale

Fino ad ora siamo in grado di dare significato a tutte le potenze aventi per base un numero reale *positivo* e per esponente un numero razionale.
Siamo interessati a definire la potenza di un numero positivo elevato ad un numero reale; vediamo prima un ripasso della materia sino ad ora

Potenze ad esponente relativo Sono definite come:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n volte}}, a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}_0 \tag{29.1}$$

Per definizione, poi $a^1 = a$ $a^0 = 1$. Le proprietà di cui esse godono:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ a^{m-n} &= \frac{a^m}{a^n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (abc)^m &= a^m b^m c^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \end{aligned}$$

Le potenze ad *esponente intero negativo* sono definite come

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad a \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}_0$$

e godono delle stesse proprietà di cui sopra.
Per le proprietà di cui sopra, non ha senso una scrittura di 0^{-3}.

Potenze ad esponente frazionario Il concetto di potenza si può ulteriormente estendere, introducendo le potenze con *base positiva*[1] ed *esponente frazionario*, così definite:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{29.2}$$

[1]Se si accettassero basi negative si andrebbe incontro ad ambiguità

ovvero un radicale con radicando positivo si può scrivere sotto forma di potenza con esponente frazionario.
Le potenze ad esponente frazionario godono delle stesse proprietà di quelle ad esponente intero, per cui ad esempio

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \tag{29.3}$$

Non è possibile invece definire **potenze a base negativa e ad esponente frazionario** perché in tal caso si andrebbe incontro ad ambiguità, ad esempio, considerando che $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \neq (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = +2$$

Non ha pertanto significato la scrittura $(-5)^{\frac{3}{2}}$, mentre lo ha la scrittura $-5^{\frac{3}{2}}$, poiché si sta intendendo $-(5^{\frac{3}{2}}) = -\sqrt{5^3}$.

29.1 Potenze ad esponente irrazionale

Volendo definire le potenze con esponente irrazionale, ad esempio $3^{\sqrt{2}}$, notiamo che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale quindi non può essere espresso come una frazione.
Tuttavia sappiamo che il numero irrazionale può essere approssimato mediante numeri razionali

$$\begin{aligned}
1 < &\quad \sqrt{2} \quad < 2 \\
1.41 = \frac{14}{10} < &\quad \sqrt{2} \quad < 1.5 = \frac{15}{10} \\
\dots & \\
1.414 = \frac{1414}{1000} < &\quad \sqrt{2} \quad < 1.415 = \frac{1415}{1000}
\end{aligned}$$

È perciò naturale considerare le potenze di 3 con esponenti razionali pari a tali approssimazione come delle approssimazioni del numero $3^{\sqrt{2}}$ che stiamo cercando di definire.

$$\begin{aligned}
3^{1.41} = 4.7069 < &\quad 3^{\sqrt{2}} \quad < 3^{1.5} = 5.1961 \\
& \dots \\
3^{1.414} = 4.72 < &\quad 3^{\sqrt{2}} \quad < 3^{1.415} = 4.73 \\
& \dots
\end{aligned}$$

Per cui si avrà $3^{\sqrt{2}} = 4.7....$ Mediante approssimazioni successive si possono determinare qualsiasi numero di cifre decimali che si desideri. Perciò così è definito il numero reale $3^{\sqrt{2}}$. Pertanto, avendo introdotto gli esponenti irrazionali, siamo in grado di avere potenze (di base positiva) ad **esponente reale**.

29.1.1 Proprietà

È dimostrabile che le proprietà delle potenze ad esponente razionale si possono estendere anche alle potenze ad esponente irrazionale.

Una **proprietà notevole** è che le potenze di un numero reale maggiore di 1 crescono con il crescere dell'esponente, quelle di un numero reale positivo minore di 1 decrescono con il crescere dell'esponente.
A fini pratici, se la base è maggiore di 1 una diseguaglianza tra potenze della stessa base equivale a una diseguaglianza equiversa tra gli esponenti, cioè

$$\text{se } a > 1 \quad a^r < a^s \Longleftrightarrow r < s \tag{29.4}$$

con $r, s \in \mathbb{Q}$.
Specularmente se la base è positiva ma minore di 1, una diseguaglianza tra potenze della stessa base equivale a una diseguaglianza di verso contrario tra gli esponenti razionali, cioè

$$\text{se } 0 < a < 1 \quad a^r < a^s \Longleftrightarrow r > s \tag{29.5}$$

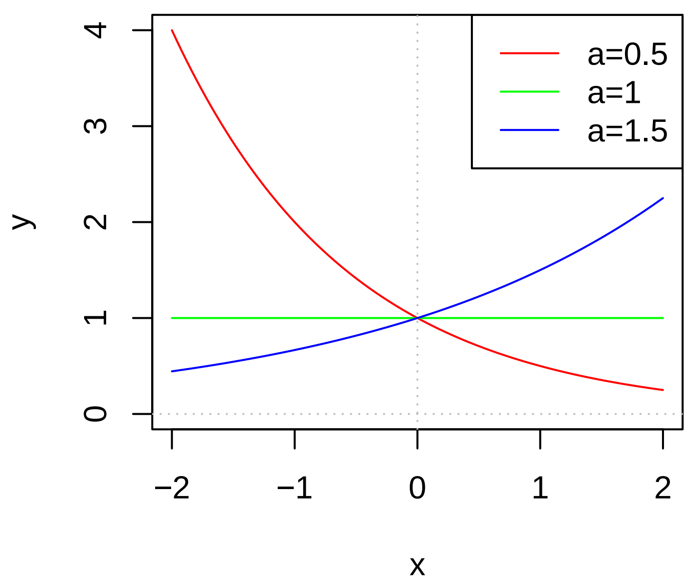
con $r, s \in \mathbb{Q}$.

29.2 Funzione esponenziale

In base a quanto detto in precedenza, è possibile associare ad un qualsiasi numero reale x, il numero reale a^x:

$$y = a^x$$

con $a, x \in \mathbb{R}$ ed $a > 0$.
Questa viene detta funzione esponenziale di base a.



29.2.1 Proprietà

Le proprietà principali:

- il **dominio** è $\mathbb{R}$
- il **codominio** è $\mathbb{R}^+$ (l'esponenziale di un numero è sempre positivo), a meno che non sia $a = 1$[2]
- essendo definita su tutto R, e alla luce delle proprietà degli esponenti, la funzione esponenziale è **monotona** crescente se $a > 1$ o decrescente se $0 < a < 1$.
- essendo monotona crescente o decrescente, per qualsiasi valore di a positivo e diverso da 1, la funzione esponenziale è una **funzione biunivoca**:

$$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

- Qualsiasi funzione esponenziale passa, in corrispondenza di $x = 0$ per il punto $y = 1$
- la funzione con base a ha grafico simmetrico rispetto all'asse y a quella con base $\frac{1}{a}$. Lo si può verificare applicando la sostituzione associata a tale simmetria all'equazione $y = a^x$, ovvero

$$y = a^x \xrightarrow[\begin{bmatrix} y \to y \\ x \to -x \end{bmatrix}]{} y = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \tag{29.6}$$

29.2.2 Applicazioni alla teoria delle funzioni

In precedenza sono state considerate le funzioni algebriche (razionali e irrazionali) e tra quelle non algebriche (dette trascendenti), le funzioni goniometriche. Ora, dopo le considerazioni fatte in precedenza, si può estendere l'appellativo di funzione anche a funzioni composte da

- potenza con *base costante* reale positiva ed esponente variabile

$$y = a^{f(x)}, \qquad a > 0$$

  che esiste purché esista $f(x)$; in matematica non si definiscono potenze del tipo $(-2)^x$ o 0^x.

- potenza con *base variabile* ed esponente costante irrazionale (questa di sotto è detta *funzione potenza*);

$$y = [f(x)]^k$$

  esiste se $f(x) \geq 0$ se $k > 0$, $f(x) > 0$ se $k < 0$.

- potenza con base ed esponenti variabili

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

  che esiste purché esista $g(x)$ e sia $f(x) > 0$.

[2]La funzione esponenziale di base 1, banalmente, è costante e pari a 1, essendo $1^x = 1$; pertanto 1 è il codominio di tale funzione

29.3 Equazioni esponenziali

Si dicono *equazioni esponenziali* le equazioni in cui l'incognita figura nell'esponente di qualche potenza.
Il metodo di soluzione di una equazione esponenziale è ricondurla alla **forma canonica**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \qquad a > 0, a \neq 1$$

ovvero ad un'uguaglianza di potenze aventi la stessa base.
Da qui, essendo la funzione esponenziale biunivoca, per cui

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

l'equazione in forma canonica è equivalente alla

$$f(x) = g(x)$$

che può essere risolta più agevolmente (operazione di *passaggio agli esponenti*).

Se la riconduzione alla forma canonica è difficoltosa, si può cercare di sostituire una opportuna potenza contenente l'incognita con una nuova incognita, risolvere l'equazione così ottenuta e tornare all'originaria mediante l'equazione con cui si è effettuata la sostituzione (*cambio/introduzione di variabile*).
Non tutte le equazioni esponenziali si riescono ricondurre in forma canonica; vediamo nella sezione dei logaritmi come procedere in tal caso.

29.4 Disequazioni esponenziali

Le disequazioni esponenziali sono disequazioni in cui l'incognita figura nell'esponente di qualche potenza. Per la risoluzione di queste si procede, a partire dalla forma canonica[3]

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \qquad a > 0, a \neq 1$$

dove al posto di $<$ possono comparire anche gli altri segni di diseguaglianza, alle disequazioni equivalenti (*passaggio agli esponenti*)

$$\begin{array}{ll} a^{f(x)} < a^{g(x)} \longrightarrow f(x) < g(x), & a > 1 \\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \longrightarrow f(x) > g(x), & 0 < a < 1 \end{array}$$

ovvero:

- una disequazione esponenziale i cui due membri siano potenze di stessa base maggiore di 1 equivale a una disequazione **dello stesso verso** tra gli esponenti di tali potenze;
- una disequazione esponenziale i cui due membri siano potenze di una stessa base positiva minore di 1 equivale a una disequazione, **di verso contrario**, tra gli esponenti di tale potenze

[3] Cui bisogna ricondurre la disequazione.

Capitolo 30

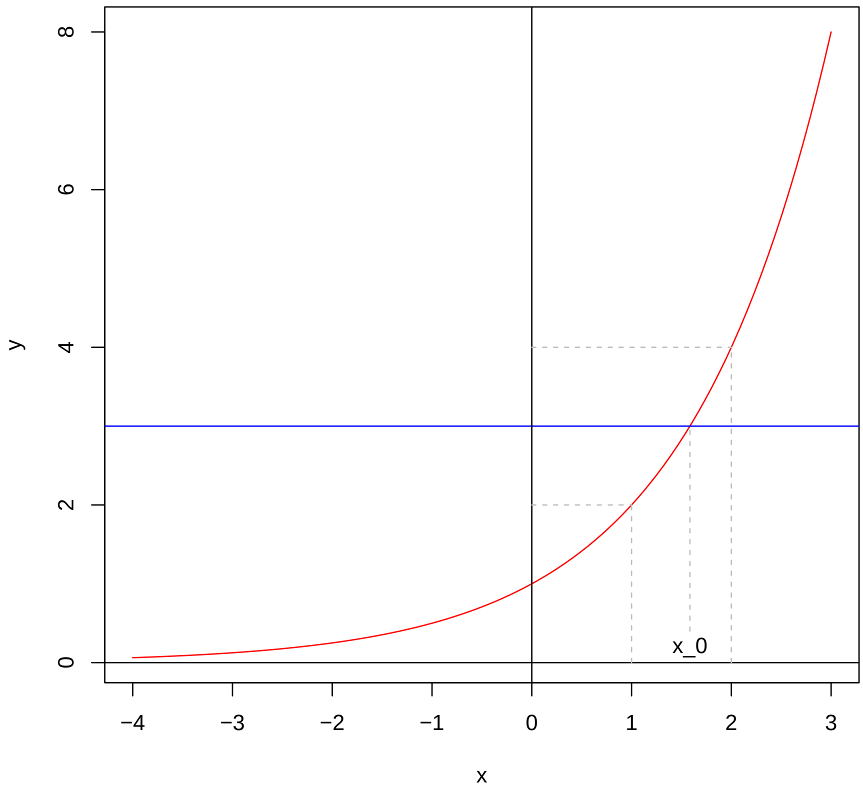
Logaritmi

30.1 Introduzione

30.1.1 Derivazione e definizioni

Non tutte le equazioni esponenziali possono esser ridotte alla forma canonica ovvero ad una eguaglianza di potenze aventi la stessa base, e in funzione di ciò esser risolte mediante i metodi già visti; un esempio ne è $2^x = 3$.
Sappiamo però che il codominio di 2^x è $\mathbb{R}^+$ e quindi per qualche valore di x, effettivamente $2^x = 3$. Inoltre, essendo la funzione esponenziale biunivoca, tale soluzione è unica.
Ci interessa trovare quel valore di x; esso corrisponde a risolvere il sistema equivalente all'equazione data posta come:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = 2^x \end{cases} \tag{30.1}$$



Possiamo procedere per approssimazioni successive

$$\begin{array}{rcl} 2^1 = 2 < & 3 & < 2^2 = 4 \\ 2^{1.5} < & 3 & < 2^{1.6} \\ 2^{1.58} < & 3 & < 2^{1.59} \end{array}$$

quindi stando a quest'ultima il valore di x_0 è compreso tra 1.58 e 1.59; tuttavia continuando in maniera simile si può giungere a quante cifre decimali si desidera.
Possiamo dunque generalizzare considerando l'**equazione esponenziale elementare**:

$$a^x = b \qquad a > 0, a \neq 1$$

constatando:

- se $b \leq 0$ l'equazione è impossibile: infatti la funzione esponenziale ha codominio in $\mathbb{R}^+$. Quindi **non esiste il logaritmo di un numero negativo**;
- se $b > 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione (per la biunivocità della funzione esponenziale).

In quest'ultimo caso l'unica soluzione si chiama **logaritmo in base a del numero b** e si indica con

$$\log_a b$$

dove a è detta *base*, e b *argomento* del logaritmo.
La **definizione di logaritmo**: il *logaritmo in base a del numero b è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere una potenza uguale all'argomento b*; ovvero:

$$x = \log_a b \Longleftrightarrow a^x = b, \qquad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Dalla definizione risulta che il calcolo del logaritmo è particolarmente semplice se si riesce ad esprimere sia a che b come potenza di un'unica base; in caso contrario si ricorrerà all'uso della calcolatrice.
Le calcolatrici scientifiche tipicamente consentono il calcolo diretto dei soli *logaritmi naturali* (in base e, numero di Nepero, irrazionale ≈ 2.71828) o *decimali* in base 10. Per il calcolo di logaritmi in base differente bisogna applicare le formule presentate in seguito.

30.1.2 Proprietà dei logaritmi

Nel seguito sono elencate le principali proprietà dei logaritmi; va detto che le uguaglianze possono esser utilmente lette anche da destra a sinistra.

Proprietà fondamentali Queste derivano dalla definizione del logaritmo:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b} \qquad a > 0, a \neq 1, b > 0 \tag{30.2}$$

$$\boxed{\log_a a^c = c} \qquad a > 0, a \neq 1 \tag{30.3}$$

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \qquad a > 0, a \neq 1 \tag{30.4}$$

$$\boxed{\log_a a = 1} \qquad a > 0, a \neq 1 \tag{30.5}$$

Altre proprietà Queste proprietà derivano dalle proprietà delle potenze:

$$\boxed{\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n} \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}^+ \tag{30.6}$$

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n} \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}^+ \tag{30.7}$$

$$\boxed{\log_a b^m = m \log_a b} \qquad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}^+ \tag{30.8}$$

A titolo di esempio, dimostriamo la 30.6: $\log_a m$ per definizione è l'esponente che si deve attribuire alla base a per ottenere una potenza eguale a m. Quindi

$$a^{\log_a m} = m$$

Analogamente è

$$a^{\log_a n} = n$$

Ora, moltiplicando a membro a membro le ultime due equazioni otteniamo

$$a^{\log_a m} \cdot a^{\log_a n} = m \cdot n \longrightarrow a^{\log_a m \log_a n} = mn$$

Quindi il numero $\log_a m \log_a n$ è l'esponente che si deve dare ad a per ottenere mn; in altre parone tale numero è il logaritmo in base a di mn.
La 30.7 si dimostra analogamente, attuando però una divisione membro a membro anzichè una moltiplicazione. Dalla 30.7 discende un caso particolare importante

$$\boxed{\log_a \frac{1}{n} = -\log_a n} \qquad n \in \mathbb{R}^+ \tag{30.9}$$

Per dimostrare la 30.8 consideriamo che

$$a^{\log_a b} = b$$

ora elevando all'esponente m entrambi i membri si ottiene

$$\left(a^{\log_a b}\right)m = b^m \longrightarrow a^{m \log_a b} = b^m$$

ossia $m \log_a b$ è l'esponente da dare alla base a per ottenere b^m; quindi $m \log_a b$ è il logaritmo in base a di b^m. La 30.8 vale qualunque sia l'esponente della potenza (perchè $m \in \mathbb{R}$); in particolare vale quando l'esponente è un numero razionale, per cui una applicazione è quella del logaritmo del radicale

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{30.10}$$

30.1.3 Cambiamenti di base

Non è possibile calcolare direttamente logaritmi quali $\log_4 15$ perché non siamo in grado di esprimere 4 e 15 come potenze della stessa base; nemmeno la calcolatrice scientifica permette tale calcolo direttamente.
Sempre per monotonicità della funzione esponenziale sappiamo che il risultato (logaritmo) esiste; pertanto ci sarà un m tale che $4^m = 15$; visto che è vera l'eguaglianza per m, devono coincidere (per la biunivocità) anche i logaritmi in base 10 (ad esempio) di 4^m e di 15; ponendo e sviluppando

$$\begin{aligned} \log_{10} 4^m &= \log_{10} 15 \\ m \log_{10} 4 &= \log_{10} 15 \end{aligned}$$

da cui

$$m = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 4}$$

perfettamente calcolabile mediante una calcolatrice. Più genericamente:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \tag{30.11}$$

La 30.11 è detta **formula del cambiamento di base**; consente, noti (o calcolabili) i logaritmi in base c, di calcolare i logaritmi in una nuova base a.

Come caso particolare e notevole del precedente (si ha sostituendo nella formula $c = b$):

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}} \tag{30.12}$$

ovvero scambiando tra loro la base e l'argomento di un logaritmo si ottiene il reciproco del logaritmo dato (ad esempio, infatti $\log_2 8 = 3$ e $\log_8 2 = \frac{1}{3}$).
Dall'applicazione della formula di cui sopra derivano due *ulteriori proprietà utili*:

$$\boxed{\log_{a^c} b^c = \log_a b} \tag{30.13}$$

$$\boxed{\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b} \tag{30.14}$$

30.2 La funzione logaritmica

Essendo la funzione esponenziale $y = a^x$ biunivoca, essa è invertibile: la sua inversa si ottiene ricavando x in funzione di y (il che è possibile se $y > 0$) e sostituendo x con y (e viceversa). Abbiamo

$$x = log_a y$$

da cui

$$y = \log_a x$$

La funzione logaritimica, quindi, associa a qualsiasi numero positivo il corrispondente logaritmo in base a.
La funzione logaritmica di base a è l'**inversa** della funzione esponenziale di base a, e viceversa; essendo una l'inversa dell'altra, il loro diagramma è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante.

Essendo la funzione inversa dell'esponenziale, il dominio (della log) corrisponderà al codominio dell'esponenziale (ovvero $\mathbb{R}^+$), e il codominio sarà invece $\mathbb{R}$.
Le funzioni logaritmiche, inoltre sono monotone:

- se la base $a > 1$ sono funzioni crescenti, ovvero:

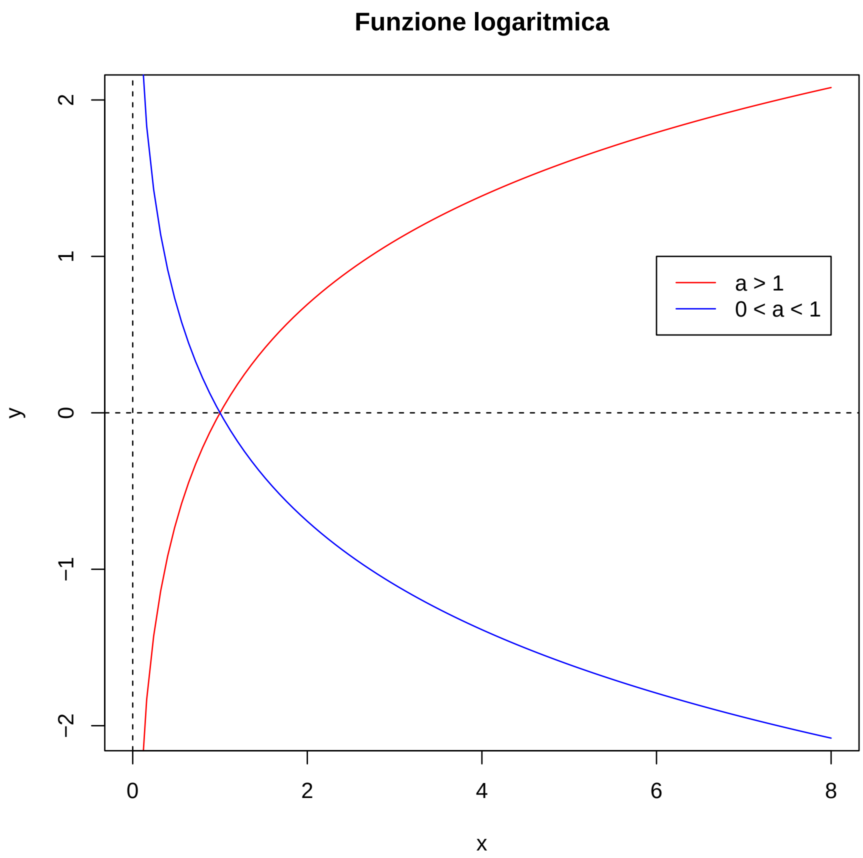
$$0 < x_1 < x_2 \rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, \qquad a > 1$$

- se la base è $0 < a < 1$ sono funzioni decrescenti.

$$0 < x_1 < x_2 \rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \qquad 0 < a < 1$$

Inoltre, essendo $log_a 1 = 0$, si può affermare che il logaritmo di un numero:

- è positivo se la base e il numero sono entrambi maggiori di 1 o entrambi compresi tra 0 e 1;
- è negativo se la base e il numero sono l'una maggiore di 1 e l'altro ompreso tra 0 e 1 o viceversa



Si possono fare uso anche di funzioni logaritmiche con base variabile (dipendente dalla x), del tipo

$$y = \log_{a(x)} f(x)$$

Preliminarmente, condizioni per l'esistenza della funzione di cui sopra (dominio) sono le seguenti (da porre a sistema):

$$f(x) > 0 \wedge a(x) > 0 \wedge a(x) \neq 1$$

30.3 Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Grazie ai logaritmi è possibile risolvere anche quelle equazioni esponenziali i cui due membri siano prodotti/quozienti di basi diverse. Per farlo è sufficiente considerare i logaritmi di entrambi i membri.
Ad esempio consideriamo di voler risolvere

$$f(x) = g(x)$$

dove f e g rappresentano prodotti/quozienti di termini *strettamente positivi* nei quali l'incognita compare solo nell'esponente di alcuni di essi. Pertanto $f(x) > 0$

e $g(x) > 0$. In tal caso sono definiti anche i logaritmi dei due membri, e più precisamente per la monotonia delle funzioni logaritmiche si potrà passare ai logaritmi dei due membri, visto che

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Trasformando in questa seconda equazione, equivalente, si potrà poi risolvere applicando le proprietà dei logaritmi.

Se invece, in uno o in entrambi i membri dell'equazione esponenziale compaiono addizioni o sottrazioni, non è possibile applicare subito i logaritmi; si deve cercare di trasformare l'equazione in una forma del tipo considerato (mediante sostituzioni/scomposizioni).

30.4 Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

Analogamente al caso delle equazioni, consideriamo una disequazione del tipo

$$f(x) < g(x)$$

dove f e g rappresentano prodotti/quozienti di termini *strettamente positivi* nei quali l'incognita compare solo nell'esponente di alcuni di essi. Pertanto $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$. In tal caso sono definiti anche i logaritmi dei due membri, e per la monotonia delle funzioni logaritmiche si potrà passare ai logaritmi dei due membri, come segue

$$\begin{array}{ll} f(x) < g(x) \longrightarrow \log_a f(x) < log_a g(x), & a > 1 \\ f(x) < g(x) \longrightarrow \log_a f(x) > log_a g(x), & 0 < a < 1 \end{array}$$

Ovvero prendendo i logaritmi di entrambi i membri di una disequazione, il verso del simbolo di diseguaglianza va conservato se la base dei logaritmi è maggiore di 1, va cambiato se la base dei logaritmi è positiva e minore di 1.

30.5 Equazioni logaritmiche

Le *equazioni logaritmiche* hanno l'incognita nell'argomento di uno o più logaritmi.
Occorrerà inizialmente *determinare il dominio* ponendo a sistema la positività di tutti gli argomenti dei logaritmi; sotto tali condizioni i logaritmi non perdono significato ed è possibile elaborare l'equazione, cercando di porla in *forma canonica*:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Dato che la funzione logaritmica è biunivoca nel dominio dell'equazione di sopra, è possibile passare agli argomenti, come segue

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$$

risolvendo quest'ultima (e verificando che la soluzione appartenga al dominio). Nel caso

$$\log_a f(x) = b$$

basta ricordare la definizione di logaritmo, da cui

$$f(x) = a^b$$

dopo aver risolto occorrerà anche qui verificare l'appartenenza al dominio delle soluzioni.

A volte il NON calcolo del dominio, e la sostituzione delle soluzioni trovate nella equazione originaria diviene l'unica strada percorribile se il calcolo del dominio è troppo complesso.

30.6 Disequazioni logaritmiche

Le *disequazioni logaritmiche* hanno l'incognita nell'argomento di uno o più logaritmi.
Per risolverle bisognerà porre a sistema:

- le condizione di esistenza dei logaritmi (argomenti positivi)
- sotto di esse la disequazione, ricondotta in forma canonica

  $$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

  e trasformata, alla luce della biunivocità della funzione logaritmica in

  $$\begin{array}{ll} \log_a f(x) < log_a g(x) \longrightarrow f(x) < g(x), & a > 1 \\ \log_a f(x) < log_a g(x) \longrightarrow f(x) > g(x), & 0 < a < 1 \end{array}$$

Capitolo 31

Vettori

Vi sono delle grandezze, come la lunghezza di un segmento, un intervallo di tempo che risultano completamente definite quando se ne conosce la misura rispetto a una prefissata unità: esse son individuabili per mezzo di un numero, detto **scalare**. Tali grandezze sono dette **grandezze scalari**.
Vi sono invece delle grandezze come uno spostamento, una velocità, una forza ecc che non sono rappresentabili da un solo numero, ma da un *numero, da una direzione e da un verso*. L'ente che individua tali grandezze si dice **vettore** e le grandezze di questo tipo **grandezze vettoriali**.

31.1 Introduzione

Un segmento di estremi A e B (in un piano o nello spazio) si dice orientato se è stato fissato su di esso un verso di percorrenza. Ad esempio se il verso è quello da A a B, il segmento orientato si indica con $\overrightarrow{AB}$; il punto A si dice *origine* e B termine del segmento orientato. Il segmento $\overrightarrow{BA}$ sarà il medesimo, anche se orientato nel verso opposto. Un segmento orientato è caratterizzato da:

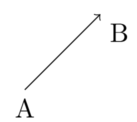
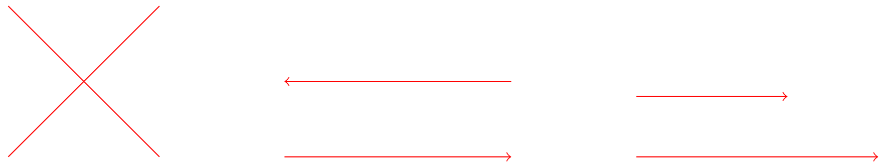


Figura 31.1: Vettore

- una **direzione**: si pensi alla pendenza della retta su cui si trova il segmento
- un **verso** di percorrenza
- un **modulo**: lunghezza/misura del segmento

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono segmenti orientati paralleli (medesima direzione), congruenti (stesso modulo) ed equiversi (stesso verso) si dice che sono *equipollenti*, e si scrive $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$[1]. Sono infiniti i segmenti equipollenti ad un segmento

[1] L'equipollenza è una relazione di equivalenza definita nell'insieme dei segmenti orientati.



(a) Direzioni differenti. (b) Versi differenti. (c) Moduli differenti.

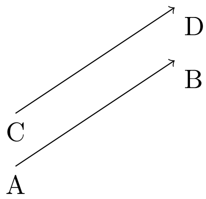


Figura 31.2: Vettori equipollenti

dato (nel piano o nello spazio): si dice **vettore** uno qualsiasi di questi segmenti equipollenti (che può esser pensato come "rappresentante").
Per indicare un vettore senza far riferimento a un particolare segmento orientato, si usano lettere minuscole con freccia sovrapposta (es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$).

31.1.1 Modulo, vettore nullo, versore

Come detto il modulo del vettore è la lunghezza del suo segmento rispetto ad una data unità di misura. Il **modulo** del vettore $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ si indica alternativamente come

$$\begin{array}{cc} |\overrightarrow{v}| & v \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| & |B - A| \end{array}$$

Per definizione $v \geq 0$. Per l'appunto $v = 0$ solo quando A e B coincidono, ovvero quando si ha un **vettore nullo**, che si indica con **0**.
Infine si dice **versore** $\overrightarrow{w}$ del vettore $\overrightarrow{v}$, il vettore di modulo unitario diretto e orientato come il vettore $\overrightarrow{v}$.

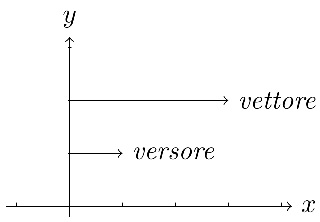


Figura 31.3: Vettore e versore

31.1.2 Componente di un vettore secondo una retta

Si consideri il vettore $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ ed r, una retta orientata; si consideri il segmento equipollente A_1B_1, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, che ha però origine (A_1) sulla retta r[2]. Sia B_2 la proiezione ortogonale di B_1 su r; allora il vettore $\overrightarrow{A_1B_1}$, avente la stessa direzione di r, è detto **vettore componente** di $\overrightarrow{v}$ secondo la retta r. Se ψ è l'angolo formato da $\overrightarrow{A_1B_1}$ con la direzione positiva di r, il modulo del

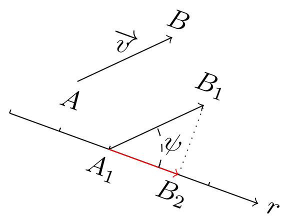


Figura 31.4: Vettore componente

vettore componente $\overrightarrow{A_1B_2}$ sarà:

$$|v \cdot \cos\psi| \tag{31.1}$$

Si dirà poi **componente** di $\overrightarrow{v}$ secondo r il numero

$$v_r = v \cdot \cos\psi \tag{31.2}$$

A contrario del modulo del vettore componente, che è sempre non negativo, la componente di v secondo r, v_r, sarà positiva quando ψ è acuto, negativa quando ottuso e nulla quando ψ è retto.

31.2 Componenti cartesiane di un vettore nel piano

Se su un piano si fissa un riferimento cartesiano, si dicono componenti cartesiane del vettore $\overrightarrow{v}$, e si indicano con v_x e v_y, le componenti di $\overrightarrow{v}$ rispetto, ordinatamente, l'asse x e l'asse y:

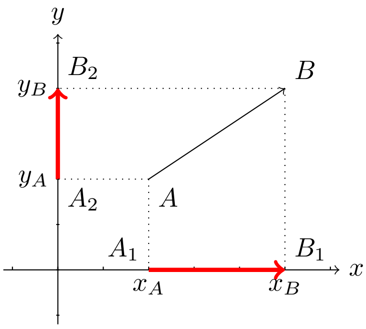
$$v_x = x_B - x_A \tag{31.3}$$
$$v_y = y_B - y_A \tag{31.4}$$

e $\overrightarrow{A_1B_1}$ $\overrightarrow{A_2B_2}$ sono, rispettivamente, i vettori componenti di $\overrightarrow{AB}$ secondo l'asse delle ascisse e secondo quello delle ordinate.

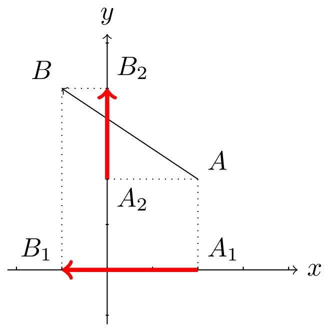
È importante notare che le componenti cartesiane di un vettore non dipendono dalla scelta del segmento suo rappresentante; pertanto un vettore può esser identificato univocamente attraverso le sue componenti cartesiane. Per esprimere un vettore attraverso le sue componenti cartesiane si scrive

$$\overrightarrow{v} = (v_x; v_y) \tag{31.5}$$

[2]N.b: r e $\overrightarrow{v}$ non devono esser necessariamente complanari



(a)



(b)

Il vettore nullo ha componenti cartesiane nulle ($\mathbf{0} = (0; 0)$).

Poniamo che siano note le componenti cartesiane di un vettore; la rappresentazione sua tipica si ha mediante il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, dove O è l'origine degli assi, e P è il punto di coordinate $(v_x; v_y)$. Quindi un vettore tipicamente si rappresenta mediante un segmento equipollente che parte dall'origine degli assi.

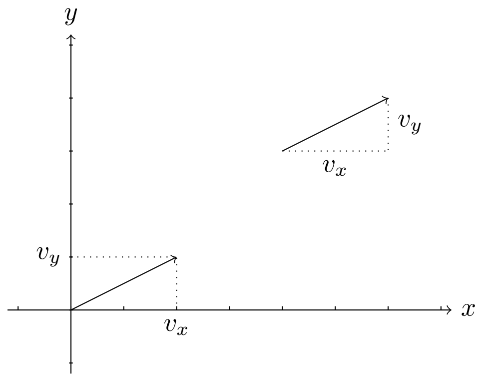


Figura 31.5: Rappresentazione mediante equipollente dall'origine

31.2.1 Modulo e direzione di un vettore nel piano

Per **determinare il modulo di un vettore** $\overrightarrow{v}$, di cui disponiamo dei punti estremi, si può ricorrere alla formula della distanza tra due punti nel piano (che si rifà a Pitagora):

$$v = \sqrt{(\underbrace{x_B - x_A}_{v_x})^2 + (\underbrace{y_B - y_A}_{v_y})^2} \tag{31.6}$$

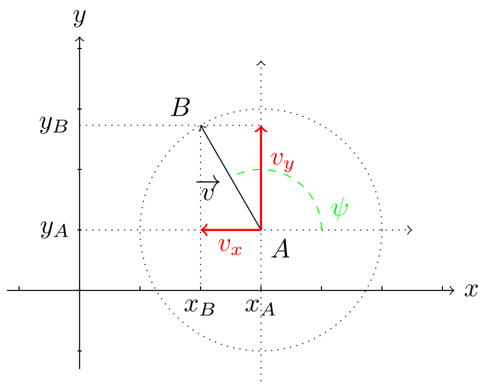
ovvero

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{31.7}$$

Può esser necessario dover **determinare le componenti cartesiane** v_x e v_y a partire dal modulo v; se si conosce ψ:

$$v_x = v \cdot \cos\psi \tag{31.8}$$

$$v_y = v \cdot \sin\psi \tag{31.9}$$



Quelle del versore $\overrightarrow{w}$ del vettore $\overrightarrow{v}$ sono invece:

$$w_x = \cos\psi \tag{31.10}$$

$$w_y = \sin\psi \tag{31.11}$$

Non si moltiplica per nulla seno e coseno poiché il versore ha lunghezza unitaria.

Per determinare direzione e verso del vettore occorre ψ: rielaborando l'equazione 31.8:

$$\cos\psi = \frac{v_x}{v} \tag{31.12}$$

$$\sin\psi = \frac{v_y}{v} \tag{31.13}$$

Ottenuti seno e coseno si determinerà l'angolo. Si noti che queste ultime formule sono inapplicabili se $v = 0$ (vettore nullo): pertanto si conviene lasciare indeterminati direzione e verso del vettore nullo.
Riconsiderando le componenti cartesiane del versore, alla luce anche delle equazioni in 31.12 e 31.13 si può concludere esprimere la definizione del versore in funzione delle componenti cartesiane del suo vettore:

$$w_x = \frac{v_x}{v}; \quad w_y = \frac{v_y}{v} \tag{31.14}$$

e quindi

$$\overrightarrow{w} = \left(\frac{v_x}{v}; \frac{v_y}{v}\right) \tag{31.15}$$

Ovvero le componenti del versore possono essere ricavate a partire da quelle del suo vettore, dividendo queste per il modulo del secondo.

31.3 Vettori nello spazio

Per individuare un vettore nello spazio sono necessarie tre componenti: $\overrightarrow{v} = (v_x; v_y; v_z)$. Riassumiamo qui i principali risultati, che non si discostano molto dal caso del vettore nel piano cartesiano.

Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ è un vettore nello spazio le sue *componenti cartesiane* saranno:

$$v_x = x_B - x_A \tag{31.16}$$

$$v_y = y_B - y_A \tag{31.17}$$

$$v_z = z_B - z_A \tag{31.18}$$

Per il calcolo del modulo ci si rifà alla distanza di 2 punti nello spazio; pertanto

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{31.19}$$

Infine il versore $\overrightarrow{w}$ del vettore $\overrightarrow{v}$ nello spazio cartesiano è definito da

$$\overrightarrow{w} = \left(\frac{v_x}{v}; \frac{v_y}{v}; \frac{v_z}{v}\right) \tag{31.20}$$

31.4 Algebra dei vettori - 1/2

Si vedranno le operazioni di

- somma di due vettori (e sue caratteristiche. Es. modulo della somma)
- prodotto di un vettore per uno scalare
- vettore opposto e differenza di due vettori

Qui ci si concentra sul piano, ma per lo spazio le cose sono speculari, bisogna considerare solo una dimensione in più.

31.4.1 Somma di due vettori

La somma di (due o) più vettori è quel vettore che provocherebbe lo "spostamento" uguale a quello generato dal porre nel piano (spazio) i vettori di partenza in modo da porre l'origine del secondo sul termine del primo, l'origine del terzo sul secondo e così via. L'ordine dei vettori considerati non è importante.
Nel caso della somma di due vettori, essa coincide con la diagonale del parallelogrammo generato completando i due vettori, applicati nello stesso punto (*regola del parallelogrammo*).

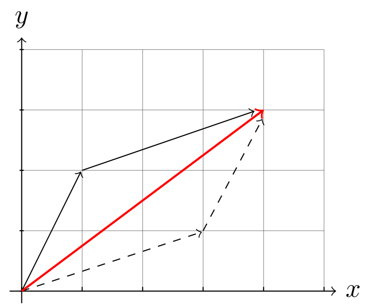


Figura 31.6: Somma di due vettori

Per semplicità consideriamo qui la somma tra due vettori. Le componenti cartesiane della somma di due vettori sono la somma delle componenti omonime dei due vettori dati

$$\overrightarrow{v} = (v'_x; v'_y) + (v''_x; v''_y) = (v'_x + v''_x; v'_y + v''_y) \tag{31.21}$$

Da questo deriva che la somma di un qualsiasi vettore con il vettore nullo è uguale al vettore dato

$$\overrightarrow{v} + \mathbf{0} = \overrightarrow{v} \tag{31.22}$$

ovvero il vettore nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma tra vettori.

31.4.1.1 Modulo della somma

Si può essere interessati al modulo della somma tra due vettori, indicato con $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|$.
Occorre applicare il teorema di Carnot al triangolo ABC[3] per determinare il

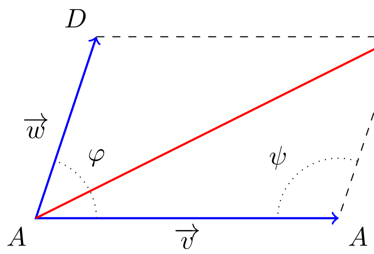


Figura 31.7: Modulo della somma di due vettori

(quadrato) del vettore somma (terzo lato del triangolo) a partire dai quadrati dei vettori (altri due lati del triangolo). Si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\psi \tag{31.23}$$

ovvero

$$|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos\psi \tag{31.24}$$

Poiché $\psi = 180° - \varphi$, $\cos\psi = \cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$, e $BC \cong AD$; possiamo dunque riscrivere la precedente come

$$|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos\psi \tag{31.25}$$
$$= v^2 + w^2 + 2vw\cos\varphi \tag{31.26}$$

ed estraendo la radice abbiamo la formula

$$\boxed{|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| = \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\varphi}} \tag{31.27}$$

31.4.1.2 Proprietà somma vettori

La somma tra due vettori gode della proprietà *commutativa* ed associativa. Rispettivamente

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \tag{31.28}$$
$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} \tag{31.29}$$

Le proprietà delle operazioni su e tra vettori (non solo inerenti, in questo caso) la somma) si possono facilmente dimostrare ricorrendo alle componenti cartesiane dei vettori. In tal modo divengono immediate conseguenze delle proprietà delle operazioni tra numeri reali.

[3] Ricordando Carnot, il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo che formano.

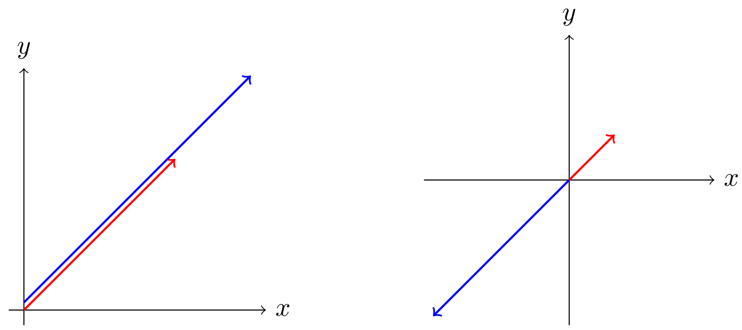
31.4.2 Prodotto di vettore per scalare

Si definisce prodotto del vettore $\overrightarrow{v}$ per lo scalare (numero reale) α, e si indica con $\alpha\overrightarrow{v}$, il vettore che:

- per componenti cartesiane ha il prodotto delle componenti di $\overrightarrow{v}$ per α (se $\alpha = 0$ il prodotto restituisce il vettore nullo);

$$\alpha(v_x; v_y) = (\alpha v_x; \alpha v_y) \tag{31.30}$$

- presenta la stessa direzione di $\overrightarrow{v}$;
- per modulo ha $|\alpha|\, v$;
- per verso quello di $\overrightarrow{v}$ o l'opposto a seconda che α sia positivo o negativo.



(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha < 0$

31.4.3 Proprietà del prodotto

Considerando α e β due generici numeri reali, il prodotto di vettore per scalare gode della proprietà *associativa*, *distributiva* rispetto alla somma di scalari o di vettori:

$$(\alpha\beta)\overrightarrow{v} = \alpha(\beta\overrightarrow{v}) \tag{31.31}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v} \tag{31.32}$$
$$\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} \tag{31.33}$$

Per le dimostrazioni si pensi sempre alle elaborazioni corrispondenti sulle componenti cartesiane.

31.4.3.1 Rapporto tra vettori e versori

Alla luce di questa operazione possiamo considerare che il versore di un vettore dato, si ottiene moltiplicando questo per il reciproco del suo modulo. O al contrario ogni vettore è uguale al prodotto del suo modulo per il suo versore.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}\frac{1}{v} \tag{31.34}$$
$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{w} \tag{31.35}$$

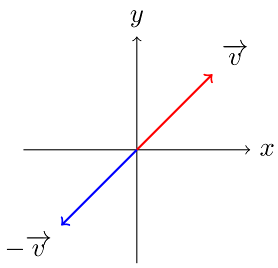


Figura 31.8: Vettore opposto

31.4.3.2 Vettore opposto

Si dice *vettore opposto* di un vettore $\overrightarrow{v} = (v_x; v_y)$, e si indica con $-\overrightarrow{v}$ il vettore che si ottiene moltiplicando $\overrightarrow{v}$ per $\alpha = -1$.

$$-\overrightarrow{v} = (-v_x; -v_y) \tag{31.36}$$

Trivialmente la somma di un vettore con il suo opposto restituisce il vettore nullo

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \mathbf{0} \tag{31.37}$$

31.4.4 Differenza di due vettori

La differenza tra due vettori si calcola mediante la somma del primo con l'opposto del secondo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}' - \overrightarrow{v}'' &= \overrightarrow{v}' + (-\overrightarrow{v}'') && (31.38)\\ &= (v'_x; v'_y) + (-v''_x; -v''_y) && (31.39)\\ &= (v'_x - v''_x; v'_y - v''_y) && (31.40) \end{aligned}$$

Da ciò si algebricamente si ottiene un vettore che, sommato al secondo da come risultato il primo.

31.4.5 Versori fondamentali e "scomposizione" di un vettore

Fissato un piano cartesiano, si definiscono versori fondamentali i vettori:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1; 0) \quad \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0; 1) \tag{31.41}$$

trattasi di versori aventi la stessa direzione e lo stesso verso, rispettivamente, dell'asse delle ascisse e delle ordinate.
È possibile sfruttare le operazioni di somma e prodotto di vettore per scalare al fine di esprimere qualsiasi vettore del piano o dello spazio in funzione dei versori fondamentali.
Innanzitutto scomponiamo un vettore come la somma dei suoi vettori componenti $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$ secondo rispettivamente l'asse x e l'asse y:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} \tag{31.42}$$

dove definiamo i vettori componenti come

$$\overrightarrow{v_x} = (v_x; 0) \tag{31.43}$$
$$\overrightarrow{v_y} = (0; v_y) \tag{31.44}$$

Possiamo scomporre ulteriormente questi come il prodotto tra i versori fondamentali per le componenti cartesiane (prodotto vettore per scalare) del vettore originale:

$$(v_x; 0) = v_x(1; 0) = v_x \overrightarrow{\mathbf{x}} \tag{31.45}$$
$$(0; v_y) = v_y(0; 1) = v_y \overrightarrow{\mathbf{y}} \tag{31.46}$$

definendo infine un qualsiasi come

$$\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + v_y \overrightarrow{\mathbf{y}} \tag{31.47}$$

Ovvero qualsiasi vettore può esser espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali.

31.4.5.1 Nello spazio

Se si considerano i versori fondamentali di uno spazio cartesiano:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1; 0; 0) \quad \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0; 1; 0) \quad \overrightarrow{\mathbf{z}} = (0; 0; 1) \tag{31.48}$$

e un generico vettore $\overrightarrow{v}$ si può equivalentemente esprimere:

$$\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + v_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + v_z \overrightarrow{\mathbf{z}} \tag{31.49}$$

Inoltre quest'ultima espressione può esser utilizzata per indicare un generico vettore (del piano o dello spazio): basta che se $\overrightarrow{v}$ è un vettore del piano sarà necessariamente $v_z = 0$

31.4.5.2 I benefici dell'espressione mediante i versori

Grazie ai versori fondamentali, un'*espressione vettoriale*, ovvero un'espressione in cui siano indicate le operazioni di somma e differenza tra vettori e il prodotto per uno scalare, possono essere trattate come calcolo letterale comune.
Ad esempio: esprimere i vettori

$$\overrightarrow{u} = (-1; 2; -3) \quad \overrightarrow{v} = (5; -1; 0) \quad \overrightarrow{w} = (0; 2; 6)$$

come combinazione lineare dei versori fondamentali e calcolare $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.
Innanzitutto

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= (-1; 2; -3) = -1\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} - 3\overrightarrow{\mathbf{z}} = -\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} - 3\overrightarrow{\mathbf{z}} \\
\overrightarrow{v} &= (5; -1; 0) = 5\overrightarrow{\mathbf{x}} - 1\overrightarrow{\mathbf{y}} + 0\overrightarrow{\mathbf{z}} = 5\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \\
\overrightarrow{w} &= (0; 2; 6) = 0\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + 6\overrightarrow{\mathbf{z}} = 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + 6\overrightarrow{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} &= 2(-\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} - 3\overrightarrow{\mathbf{z}}) - 3(5\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}) + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + 6\overrightarrow{\mathbf{z}} \\
&= -2\overrightarrow{\mathbf{x}} + 4\overrightarrow{\mathbf{y}} - 6\overrightarrow{\mathbf{z}} - 15\overrightarrow{\mathbf{x}} + 3\overrightarrow{\mathbf{y}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + 6\overrightarrow{\mathbf{z}} \\
&= -17\overrightarrow{\mathbf{x}} + 9\overrightarrow{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

31.5 Algebra dei vettori - 2/2

Le ultime due operazioni che vediamo sono

- prodotto scalare tra due vettori
- prodotto vettoriale

31.5.1 Prodotto scalare tra due vettori

Si tratta di un'operazione che differisce sostanzialmente dalle operazioni fin qui incontrate, in quanto il risultato non appartiene all'insieme dei vettori, ma **è un numero reale**[4].
Si dice *prodotto scalare* di due vettori $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ il numero reale che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo convesso ψ da essi formato:

$$\boxed{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = vw \cos\psi} \tag{31.50}$$

Dato che $vw\cos\psi = v(w\cos\psi) = w(v\cos\psi)$ possiamo *interpretare geometricamente* come il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto del modulo di uno di essi per la componente dell'altro vettore rispetto al primo.

Dalla formula discende il segno di tale prodotto; il prodotto scalare tra due vettori non nulli è

- positivo se l'angolo ψ da essi formato è acuto (in tal caso $\cos\psi > 0$
- negativo se l'angolo ψ da essi formato è ottuso (in tal caso $\cos\psi < 0$
- nullo se i due vettori sono perpendicolari (l'angolo $\psi = 90$ e $\cos 90 = 0$

Inoltre il prodotto scalare tra due vettori equiversi è uguale al prodotto dei loro moduli. In tal caso si ha $\psi = 0$, $\cos\psi = 1$ e quindi $vw\cos\psi = vw$.
In particolare il prodotto di un vettore per se stesso è il quadrato del suo modulo

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = v^2$$

Infine osservando che, essendo $-1 \leq \cos\psi \leq 1$ dalla equazione della definizione del prodotto si ha

$$-vw \leq \overrightarrow{v}\overrightarrow{w} \leq vw$$

La prima eguaglianza può valere solo se $\cos\psi = -1$ ovvero se i due vettori hanno direzioni parallele e versi opposti. La seconda vale se $\cos\psi = 1$, cioè i due vettori sono paralleli ed equiversi.

31.5.1.1 Proprietà del prodotto scalare

Il prodotto scalare tra vettori gode delle seguenti proprietà, dimostrabili. Se $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sono vettori e α un numero reale

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} \tag{31.51}$$

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \tag{31.52}$$

$$(\alpha\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\alpha\overrightarrow{b}) = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \tag{31.53}$$

[4] Il prodotto scalare non è una operazione interna nell'insieme dei vettori

31.5.1.2 Prodotto scalare nello spazio, formule simil matriciali

Se $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ sono due vettori nello spazio, possiamo esprimere come combinazione lineare dei versori fondamentali

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= a_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{y}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{z}}\\ \overrightarrow{b} &= b_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{y}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Eseguendo il prodotto scalare dei due vettori, ricordando le proprietà del prodotto scalare, abbiamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= (a_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{y}} + a_z\overrightarrow{\mathbf{z}})\cdot(b_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{y}} + b_z\overrightarrow{\mathbf{z}})\\ &= a_xb_x\overrightarrow{\mathbf{x}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}} + a_xb_y\overrightarrow{\mathbf{x}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{y}} + a_xb_z\overrightarrow{\mathbf{x}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{z}} + a_yb_x\overrightarrow{\mathbf{y}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}} +\\ & a_yb_y\overrightarrow{\mathbf{y}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{y}} + a_yb_z\overrightarrow{\mathbf{y}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{z}} + a_zb_x\overrightarrow{\mathbf{z}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}} + a_zb_y\overrightarrow{\mathbf{z}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{y}} + a_zb_z\overrightarrow{\mathbf{z}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Ma essendo i seguenti vettori perpendicolari

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}} = 0$$

e i seguenti paralleli di modulo 1

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{z}} = 1$$

Il prodotto scalare di due vettori nello spazio diventa

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z} \tag{31.54}$$

Questa ci permette di concludere che **il prodotto scalare tra due vettori è la somma dei prodotti delle loro componenti cartesiane omonime**.
Quest'ultima formula è generale nel senso che se i vettori fanno parte di un piano prefissato, per cui

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= a_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + a_y\overrightarrow{\mathbf{y}}\\ \overrightarrow{b} &= b_x\overrightarrow{\mathbf{x}} + b_y\overrightarrow{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

la 31.54 si riduce a

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_xb_x + a_yb_y} \tag{31.55}$$

In questo modo la si riprende l'interpretazione del prodotto scalare con quello tra due vettori nell'ambito delle matrici.
Complessivamente quindi possiamo calcolare il prodotto scalare di due vettori conoscendo:

- i loro moduli e l'angolo che formano (equazione 31.50)
- le loro componenti cartesiane (equazioni 31.54 e 31.55)

31.5.2 Prodotto vettoriale

Se $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ sono due vettori che formano un angolo φ, si dice prodotto vettoriale tra i due vettori e lo si indica con

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} \tag{31.56}$$

(e si legge *a vettore b*) il vettore $\overrightarrow{c}$ così definito:

- $\vec{c}$ ha modulo $c = ab \sin\varphi$
- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare sia al vettore $\vec{a}$ sia al vettore $\vec{b}$
- il verso di $\vec{c}$ è definito dalla regola seguente (**regola della vite**); si immagini una vite che (come spesso accade) si avvita verso destra. La vite si avvita ruotando nello stesso senso della rotazione che il vettore $\vec{a}$ deve compiere per assumere la stessa direzione di vettore $\vec{b}$, descrivendo l'angolo convesso φ. Il verso di $\vec{c}$ è il verso in cui si conficca/avanza la vite.
  Alternativamente si può applicare la **regola della mano destra**; si ipotizzi che al pollice, medio ed indice corrispondano i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, che partono dalla base del dito e hanno direzione verso la punta di ognuno di essi.
  Ponendo inizialmente la mano, stesa su un piano col palmo verso l'alto, per indicare il numero tre e muovendo il dito medio come per mandare affanculo la gente si ottiene il verso giusto del vettore $\vec{c}$. Ruotando poi la mano nello spazio si ottiene sempre la direzione e verso giusto di c, considerata la posizione di pollice ($\vec{a}$ e indice $\vec{b}$)

31.5.3 Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori gode delle seguenti proprietà: se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono vettori e α un numero reale

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$
$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

Il prodotto vettoriale invece non gode in generale della proprietà associativa cioè

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

31.5.4 Alcune osservazioni

Prodotto vettoriale di vettori paralleli Se i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ sono paralleli, formando un angolo nullo, si ha

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0} \tag{31.57}$$

In particolare il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è sempre il vettore nullo

$$\vec{a} \times \vec{a} = \mathbf{0} \tag{31.58}$$

Modulo del prodotto e prodotto dei moduli Il modulo del prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ di due vettori non può superare il prodotto dei moduli dei due vettori. Infatti, essendo per $0 \leq \varphi \leq 180$, pertanto $0 \leq \sin\varphi \leq 1$, quindi si ha $ab \sin\varphi \leq ab$ e quindi

$$c \leq ab \tag{31.59}$$

Il segno di eguaglianza in tale relazione vale solo se $\sin\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 90$.
Il modulo del prodotto vettoriale di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli solo se i due vettori sono perpendicolari. In particolare il prodotto vettoriale di due versori tra loro perpendicolari è un terzo versore, perpendicolare ad entrambi

Prodotto vettoriale come operazione interna all'insieme dei vettori nello spazio Per definizione, il prodotto vettoriale tra due vettori è esso stesso un vettore (contrariamente al prodotto scalare, il prodotto vettoriale è una operazione interna nell'insieme dei vettori dello spazio.

31.5.5 Espressione cartesiana del prodotto vettoriale

Se consideriamo i versori fondamentali $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$,, in base alla definizione di prodotto vettoriale e alle osservazioni di cui sopra si ha

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}; \quad \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}; \quad \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} \tag{31.60}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = -\overrightarrow{\mathbf{z}}; \quad \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = -\overrightarrow{\mathbf{x}}; \quad \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = -\overrightarrow{\mathbf{y}} \tag{31.61}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \mathbf{0}; \quad \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \mathbf{0}; \quad \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \tag{31.62}$$

La seconda linea deriva dall'applicazione della proprietà anticommutativa.
Consideriamo ora due vettori espressi in funzione dei versori

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{z}}$$
$$\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{z}}$$

Per ottenere l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale, tenendo in considerazione le proprietà del prodotto vettoriale sui versori evidenziate in precedenza si ha

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + a_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + a_z \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) \times \left(b_x \overrightarrow{\mathbf{x}} + b_y \overrightarrow{\mathbf{y}} + b_z \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) \tag{31.63}$$
$$= \boxed{(a_y b_z - a_z b_y)\overrightarrow{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z)\overrightarrow{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x)\overrightarrow{\mathbf{x}}} \tag{31.64}$$

Tale formula ci permette di determinare le componenti cartesiane del prodotto vettoriale di due vettori di cui sono note le componenti cartesiane.
Analogamente, se i due vettori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ sono paralleli al piano xy, si avrà $a_z = b_z = 0$ e quindi l'equazione assumerà la forma

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\overrightarrow{\mathbf{z}}} \tag{31.65}$$

che rappresenta un vettore parallelo all'asse z.

Capitolo 32

Numeri complessi

In $\mathbb{R}$ resta esclusa la possibilità di eseguire certe operazioni come l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo.
Si rende necessaria, per fare ciò, l'introduzione dei numeri immaginari, denotati dall'insieme $\mathbb{I}$: l'obiettivo è conservare le proprietà delle operazioni fondamentali, al fine di poter usare senza variazioni i procedimenti del calcolo algebrico ordinario.

32.1 Numeri immaginari

Per iniziare si definisce l'*unità immaginaria* i come quel numero che elevato al quadrato restituisce -1; al fine di conservare poi che $(\pm a)^2 = a^2$ si conviene anche che $(-i)^2 = -1$, pertanto:

$$(\pm i)^2 = -1 \tag{32.1}$$

essendovi due numeri che al quadrato danno -1 si conviene scrivere che:

$$\sqrt{-1} = \pm i \tag{32.2}$$

Se $b \in \mathbb{R}$, il prodotto bi si chiama **numero immaginario**.

32.1.1 Regole algebriche

Le regole algebriche all'interno dell'insieme dei numeri immaginari rimangono sostanzialmente le stesse di quelle dei reali:

$$
\begin{aligned}
&i \cdot 1 = 1 \\
&i \cdot 0 = 0 \\
&\frac{i}{i} = 1 \\
&ib = bi \\
&ib = ib' \iff b = b' \\
&ib \pm ic = i(b \pm c) \\
&ib \cdot c = c \cdot ib = i(cb) \\
&\frac{ib}{c} = i\frac{b}{c} \\
&ib \cdot ic = -bc \\
&\frac{ib}{ic} = \frac{b}{c}
\end{aligned}
$$

Pertanto **addizione e sottrazione** di numeri immaginari da come risultato un numero immaginario (es. $3i + 2i = 5i$); **prodotto e quoziente** restituiscono invece un numero reale (es. $3i \cdot 2i = -6$).
Anche per le **potenze** valgono le solite regole:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = i, \quad i^5 = i^4 \cdot i = -1$$

Le prime 4 potenze di i (i^0, i^1, i^2, i^3) sono ordinatamente $1, i, -1, -i$; le successive riproducono indefinitamente tale sequenza pertanto si può scrivere

$$i^n = i^{\text{n mod 4}} \tag{32.3}$$

dove n mod 4 indica il resto della divisione dell'esponente per il divisore 4. Ad es $i^6 = i^2 = -1$.
Infine nell'insieme dei numeri immaginari si può sempre estrarre la **radice quadrata** di un numero negativo reale (qui si intende $a > 0$):

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{-1 \cdot a^2} = \sqrt{-1}\sqrt{a^2} = \pm i \cdot a \tag{32.4}$$

Es: $\sqrt{-4} = \pm 2i$.

32.2 Numeri complessi

Un **numero complesso** è un numero esprimibile, in forma algebrica, come:

$$z = a + ib \tag{32.5}$$

ovvero come la somma di una **parte reale** ($a \in \mathbb{R}$) e di una **immaginaria** ($b \in \mathbb{R}$, $ib \in \mathbb{I}$). L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Per indicare la parte reale e immaginaria del numero z di cui sopra:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= a \\
\mathrm{Im}(z) &= b
\end{aligned}
$$

Se $b = 0$, il numero complesso $a + ib$ coincide con il reale a; viceversa se $a = 0$ il complesso coincide con l'immaginario ib. Pertanto si può affermare che gli insiemi $\mathbb{R}, \mathbb{I}$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{C}$. Un complesso è nullo se sono nulli parte reale e coefficiente dell'immaginario.

32.2.1 Proprietà numeri complessi

Due complessi si dicono:

- *uguali* se hanno uguali le parti reali e i coefficienti dell'immaginario

$$a + ib = c + id \iff a = c \wedge b = d \tag{32.6}$$

  se ciò non accade si dice che i due numeri sono **diseguali**, ma non si può stabilire quale è maggiore e quale minore (l'ordinamento degli elementi di $\mathbb{C}$ non è possibile;

- *coniugati* se hanno la stessa parte reale e opposti coefficienti dell'immaginario[1]. Il coniugato del complesso $z = a + ib$ è indicato con $\overline{z} = a - ib$;

- *opposti* se hanno opposti sia parte reale che immaginaria

$$(a + ib) \text{ e } (c + id) \text{ sono opposti} \iff a = -c \wedge b = -d \tag{32.7}$$

32.2.2 Operazioni

Il grosso (tutto??) dell'algebra letterale si conserva.

Somma La somma di due complessi si ottiene sommando ordinatamente parte reale e immaginaria:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{32.8}$$

Un esempio:

$$(-1 + 4i) + (3 + i) + (4 - 3i) = 6 + 2i$$

Come corollario, la somma di 2 numeri coniugati è un reale; ad esempio

$$z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

Differenza La differenza si ottiene dalla somma del primo con l'opposto del secondo:

$$(a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - id) = (a - c) + i(b - d) \tag{32.9}$$

Un esempio:

$$(8 - 4i) - (4 - 2i) = 4 - 2i$$

Come corollario, la differenza di 2 numeri coniugati è un immaginario; ad esempio

$$z - \overline{z} = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)$$

[1] I complessi coniugati sono importanti poiché esito dell'estrazione a radice di un numero negativo.

Prodotto Il prodotto si attua come un semplice prodotto di binomi:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i \tag{32.10}$$

Come applicazione il prodotto di due complessi coniugati è il reale $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.

Reciproco Il reciproco del complesso $c + di$ è il complesso che moltiplicato per questo restituisce 1:

$$\frac{1}{c+di} \tag{32.11}$$

con $c+di \neq 0$. Alternativamente, per avere un denominatore reale moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato, ottenendo

$$\frac{c-di}{c^2+d^2} \tag{32.12}$$

Ad esempio:

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{1^2-2i^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Quoziente Il quoziente è il prodotto del primo per il reciproco del secondo (conviene utilizzare la formula con denominatore reale)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \ldots = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{32.13}$$

Potenza Per l'elevamento a potenza, si fa l'elevamento a potenza di un semplice binomio. Ad esempio:

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i \\ (2+3i)^3 &= 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i\end{aligned}$$

32.2.3 Esempio: risoluzione di una equazione nel campo complesso

Sia $z = x + iy$ un generico complesso con x, y incognite reali. Si desidera risolvere:

$$z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\overline{z} = 0$$

Partiamo riscrivendo:

$$\begin{aligned}&z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \\ &i\,\mathrm{Im}(z) = iy \\ &2\overline{z} = 2(x - iy) = 2x - 2iy\end{aligned}$$

da cui:

$$\left(x^2 - y^2 + 2xy\right) + (iy) + (2x - 2iy) = 0$$

e quindi:

$$\left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i(2xy + y - 2y) = 0$$

Ora un numero complesso è nullo se sia la parte reale che quella immaginaria sono contemporaneamente nulle; impostiamo perciò il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy + y - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases}$$

Da quest'ultima equazione deriva che $y = 0$ o $x = \frac{1}{2}$. Considerando la prima delle due:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Da cui le prime due soluzioni risultano:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portando invece avanti $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Dalla quale derivano altre due soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Concludendo le soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + 0i \\ z_2 &= -2 + 0i \\ z_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} 0i \\ z_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} 0i \end{aligned}$$

Il metodo visto in questo esempio (passare alla parte reale e immaginaria dell'equazione) è applicabile in linea di principio ad ogni equazioni in $\mathbb{C}$; in pratica però un generico sistema di due equazioni in due incognite è quasi sempre insolubile per via algebrica. Perciò prima di mettersi su questa strada è bene osservare se non ce ne sia una più semplice.

32.3 Rappresentazione geometrica dei complessi

32.3.1 Punti nel piano cartesiano

Visto che è possibile porre in corrispondenza biunivoca le coppie di numeri reali con i punti del piano cartesiano, e visto che un complesso è definito da una coppia di reali (parte reale e coefficiente dell'immaginario) si può pensare di

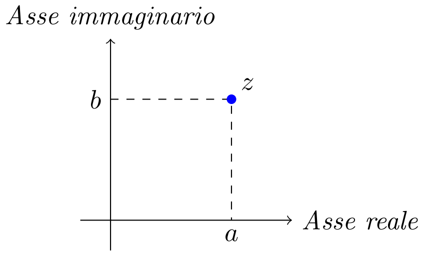


Figura 32.1: Piano di Gauss

rappresentare i complessi mediante punti sul piano. Il piano luogo dei punti immagine di complessi si dice *piano di Gauss*. Ad ogni punto del piano corrisponde un complesso avente per parte reale l'ascissa del punto z che lo rappresenta e per coefficiente della parte immaginaria l'ordinata.
Per $b = 0$ il complesso si riduce ad a (reale), e il punto z si trova sull'asse x, che si dice perciò *asse reale*. Se invece $a = 0$ il complesso si riduce a bi (immaginario) e z viene a trovarsi sull'asse y, che si dice asse immaginario. L'origine è l'immagine dello 0 complesso.
Nel piano di Gauss, la rappresentazione di due *complessi coniugati* avviene mediante 2 punti simmetrici rispetto all'asse reale x.

32.3.2 Rappresentazione mediante vettori

Una rappresentazione ancora più frequente è quella attraverso i vettori: ciò è possibile poiché vi è corrispondenza biunivoca tra complessi e vettori del piano gaussiano. Ad ogni complesso $a + ib$ è associabile un vettore a due dimensioni (avente origine nell'origine degli assi e come componenti, rispettivamente, a e b) e viceversa. La rappresentazione mediante vettori ci consente di progredire

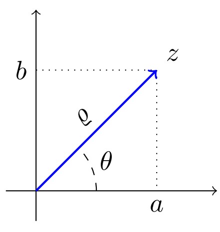


Figura 32.2: Rappresentazione di complessi mediante vettori

nello studio dei numeri complessi applicando conoscenze ereditate da quello dei vettori.
Il **modulo** di un numero complesso, indicato con ϱ o con $|a + bi|$, è il modulo del vettore ad esso associato:

$$\varrho = |a + bi| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{32.14}$$

Se $z = a$ è reale, il suo modulo è poi il valore assoluto e si indica sempre con $|a|$. Proprietà del modulo nel campo complesso:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0 \tag{32.15}$$
$$|z| = |\overline{z}| \tag{32.16}$$
$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|\,, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|\,, \quad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \tag{32.17}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{(diseguaglianza triangolare)} \tag{32.18}$$
$$|z_1 + z_2| \leq ||z_1| - |z_2|| \tag{32.19}$$

Si dice **argomento** del complesso z, indicato con $\arg z$, invece, l'angolo θ che il vettore del complesso forma con il semiasse positivo delle ascisse

$$\arg z = \theta \tag{32.20}$$

Si osservi come:

- l'argomento di un reale positivo è l'angolo nullo, di un reale negativo è l'angolo piatto; di un numero immaginario positivo l'angolo retto, di un immaginario negativo tre angoli retti;
- l'argomento dello 0 complesso è indeterminato;
- gli argomenti di due complessi coniugati sono angoli esplementari (rispettivamente θ e $360 - \theta$).

32.4 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Se $a + ib$ è un numero complesso con modulo ϱ ed argomento θ si ha:

$$a = \varrho \cos(\theta + k360) \tag{32.21}$$
$$b = \varrho \sin(\theta + k360) \tag{32.22}$$

Pertanto $a + ib$ può esser riscritto come:

$$\boxed{a + ib} = \varrho \cos(\theta + k360) + i \cdot \varrho \sin(\theta + k360) \tag{32.23}$$
$$= \boxed{\varrho\,[\cos(\theta + k360) + i \cdot \sin(\theta + k360)]} \tag{32.24}$$

L'ultima espressione viene detta **forma trigonometrica** del numero complesso; $a + ib$ viene detta **forma algebrica**. Per brevità di notazione, nel seguito si omette $+k360$ dalla forma trigonometrica.

La forma trigonometrica è utile quando bisogna eseguire moltiplicazioni o divisioni fra numeri complessi; se si debbono eseguire somme o differenze è conveniente adoperare la forma algebrica.

32.4.1 Determinazione dell'argomento a partire dalle componenti

Per determinare l'**argomento** θ del numero complesso, a partire da a, b si possono utilizzare le formule 32.21 e 32.22, opportunamente riarrangiate:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Così facendo si determineranno seno e coseno dell'angolo θ:

- se è un angolo notevole ed è possibile determinarlo solo in base a seno e coseno si individua detto angolo;
- se questo non è un angolo notevole, si calcola $\tan\theta = \frac{b}{a}$, e con una calcolatrice si calcola $\arctan\frac{b}{a}$. Ma così facendo si ottiene un angolo del primo o del quarto quadrante; per avere l'angolo corretto occorre prestare attenzione ad a. Se positivo, l'angolo va bene così. Se negativo (angolo del 2°-3°) occorre aggiungere all'angolo trovato 180°[2]). In sostanza:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{se } a < 0 \end{cases} \tag{32.25}$$

32.4.2 Trasformazioni della notazione

E' necessario saper passare da una notazione all'altra agevolmente.

32.4.2.1 Da forma algebrica a trigonometrica

Effettuiamola mediante un esempio: convertire il numero $z = 1 - i$. Per la conversione:

- si calcola il modulo: $\varrho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- si mette in evidenza il modulo nell'espressione algebrica del numero complesso
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
- si risolve il sistema
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \theta = \frac{7}{4}\pi$$
- infine
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi - i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

32.4.2.2 Da forma trigonometrica ad algebrica

È più immediata. Convertiamo come esempio $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$:

$$\begin{aligned} z &= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 + i2\sqrt{3} \end{aligned}$$

32.4.3 Operazioni con complessi in forma trigonometrica

Sono espresse dalle formule di De Moivre[3]

[2] Così facendo si ottiene l'angolo con la medesima tangente ma con seno e coseno a posto.
[3] Altri considerano di Demoivre solo quella della potenza

32.4.3.1 Prodotto

Il **prodotto** di due numeri complessi in forma trigonometrica $\varrho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ e $\varrho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, *è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti.* Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\varrho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&\varrho_1\varrho_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
&\varrho_1\varrho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right]
\end{aligned}$$

Da cui, sostituendo mediante le formule di addizione di seno e coseno:

$$\boxed{\varrho_1\varrho_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]} \tag{32.26}$$

Pertanto il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli, mentre l'argomento è la somma degli argomenti

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\,,\qquad \arg\left(z_1\cdot z_2\right)=\arg z_1+\arg z_2 \tag{32.27}$$

La 32.26 si generalizza al caso di un numero qualsiasi di fattori $z_1,z_2,\ldots,z_n$:

$$\prod_i z_i=\varrho_1\cdot\varrho_2\cdot\ldots\cdot\varrho_n\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n\right)\right]$$

Le formule di De Moivre permettono di dare una **interpretazione geometrica** al prodotto di numeri complessi. Ad esempio:

- se z è un complesso di modulo 1 (del tipo $\cos\theta+i\sin\theta$), allora moltiplicare un altro numero per z significa sommare θ al suo argomento, cioè eseguire una *rotazione di angolo* θ;
- se z è un complesso di modulo ϱ oltre ad eseguire una rotazione si esegue una *dilatazione di coefficiente* ϱ.

Ad esempio:

- moltiplicare per i significa eseguire una rotazione di $\frac{\pi}{2}$;
- moltiplicare per -1 significa eseguire una rotazione di π;
- moltiplicare per $(1+i)$ significa eseguire una dilatazione di coefficiente $\sqrt{2}$ e una rotazione di $\frac{\pi}{4}$.

32.4.3.2 Potenza

È una semplice applicazione del prodotto:

$$\boxed{\left[\varrho(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=\varrho^n\left[\cos\left(n\cdot\theta\right)+i\sin\left(n\cdot\theta\right)\right]} \tag{32.28}$$

32.4.3.3 Divisione

Specularmente al caso della moltiplicazione, il **quoziente** di due numeri complessi è un *numero complesso che ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*
Lo sviluppo infatti è:

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} &= \frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\end{aligned}$$

Da cui applicando le formule di sottrazione di seno e coseno, e considerando che $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1$:

$$\boxed{\frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{32.29}$$

Pertanto il modulo del rapporto di due numeri complessi è il rapporto dei moduli, mentre l'argomento è la differenza degli argomenti

$$|z_1/z_2| = |z_1|\,/\,|z_2|\,, \qquad \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{32.30}$$

32.4.3.4 Radici n-esime

Si può dimostrare che, nel campo dei numeri complessi, l'estrazione di radice è un'operazione sempre possibile e inoltre **ogni numero compleso ammette n radici n-esime diverse**. Vogliamo trovare le radice n-esime del complesso α, ovvero quei complessi β che elevati alla n restituiscono α. Siano

$$\begin{aligned}\alpha &= \varrho[\cos(\theta + k360) + i\sin(\theta + k360)] \\ \beta &= \sigma[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]\end{aligned}$$

Sviluppiamo applicando la formula di De Moivre:

$$\begin{aligned}\beta^n &= \alpha \\ \sigma^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] &= \varrho[\cos(\theta + k360) + i\sin(\theta + k360)]\end{aligned}$$

L'eguaglianza risulta soddisfatta se

$$\begin{cases}\sigma^n = \varrho \\ n\varphi = \theta + k360\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sigma = \sqrt[n]{\varrho} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{360}{n}\end{cases}$$

e quindi i numeri complessi

$$\boxed{\sigma[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)] = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{360}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{360}{n}\right)\right]} \tag{32.31}$$

sono le radici n-esime cercate. Da questa si ottengono, al variare di k, *infiniti numeri complessi, ma da quando $k = n$ ritornano ciclicamente.* Nello specifico, i numeri complessi distinti che si ricavano dalla 32.31 sono solo n, ed è quindi sufficiente considerare per k i valori $0, 1 \ldots, n-1$.

Ad esempio ipotizziamo di voler trovare le radici n-esime di $z = 1 + 1i$; partiamo dalla definizione di ϱ

$$\varrho = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

da interpretazione geometrica si ha che $\theta = 45°$, pertanto

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{45}{n} + k\frac{360}{n}\right) + i \sin\left(\frac{45}{n} + k\frac{360}{n}\right) \right]$$

Volendo calcolare le radici cubiche, impostiamo

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2} \left[\cos(15 + k120) + i \sin(15 + k120)\right]$$

Quindi le tre radici generate si avranno, per $k = 0, 1, 2$ a partire dalle

$$\sqrt[6]{2} \left[\cos(15) + i \sin(15)\right]$$
$$\sqrt[6]{2} \left[\cos(135) + i \sin(135)\right]$$
$$\sqrt[6]{2} \left[\cos(255) + i \sin(255)\right]$$

Per *rappresentare nel piano gaussiano* le n radici n-esime del complesso di modulo ϱ e argomento θ, si parta rappresentando il vettore $\overrightarrow{OP_0}$ di modulo $\sqrt[n]{\varrho}$ e formante con l'asse x l'angolo $\frac{\theta}{n}$. Si tracci poi la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$; si divida detta circonferenza, partendo da P_0, in n parti uguali (goniometro). Gli n punti di divisione sono le immagini richieste delle n radici ennesime del numero dato. Ad esempio rappresentiamo $z = 1 + i$ e le sue tre radici cubiche di cui sopra; il modulo del vettore originale è $\sqrt(2) = 1.41$, i moduli delle radici cubiche, $\sqrt[6]{2} = 1.2$

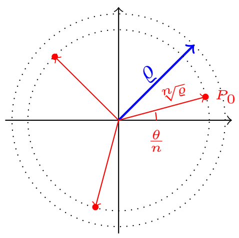


Figura 32.3: Le radici cubiche di $z = 1 + i$

In generale se abbiamo un numero complesso del tipo $z = \varrho(\cos\theta + i \sin\theta)$, le sue radici n-esime $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ si trovano ai vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$ con il vertice r_0 posto nel punto di argomento $\varphi = \frac{\varrho}{n}$.

32.5 Teorema fondamentale dell'algebra

In $\mathbb{R}$ un polinomio di grado n ammette al massimo n radici.
Il **teorema fondamentale dell'algebra** asserisce che ogni polinomio non costante a coefficienti complessi del tipo:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

ammette esattamente n radici:

$$a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

le quali non necessariamente sono tutte distinte/diverse.

32.6 Risoluzione di equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

Una equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0$$

con coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ si risolve con la solita formula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{32.32}$$

a patto di intendere la radice quadrata in senso complesso. Il segno $\pm$ davanti al simbolo di radice è in realtà superfluo, perché il simbolo stesso $\sqrt{\cdot}$ nel campo complesso denota due numeri, uno l'opposto dell'altro.

32.7 Numeri complessi in formula esponenziale

Un numero complesso si può esprimere anche in forma esponenziale. Se si pone

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{32.33}$$

Allora si ha per un generico numero complesso $z \in \mathbb{C}$ di modulo ϱ e di argomento θ

$$z = a + ib = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) = \boxed{\varrho e^{i\theta}} \tag{32.34}$$

La 32.33 è detta prima formula di Eulero e definisce anche la potenza esponente immaginario del numero di Nepero.
Per le potenze a esponente immaginario restano valide le proprietà delle potenze ad esponente reale:

- qualunque sia $\theta \in \mathbb{R}$
$$\boxed{e^{i\theta} \neq 0} \tag{32.35}$$
Infatti se fosse $e^{i\theta} = 0$ per qualche valore di θ dovrebbe essere $\cos\theta + i\sin\theta = 0$, cioè $\cos\theta = \sin\theta = 0$, che è impossibile;

- vale
$$\boxed{e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1 + i\theta_2}} \tag{32.36}$$
Infatti:
$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} =& (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ =& \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ =& e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ =& e^{i\theta_1 + i\theta_2} \end{aligned}$$

- si ha anche che

$$\boxed{\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1 - i\theta_2}} \tag{32.37}$$

  Infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} =&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) : (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
=&\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
=&e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\
=&e^{i\theta_1 - i\theta_2}
\end{aligned}$$

- la potenza di esponenziale rimane analoga

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}} \tag{32.38}$$

- si ha

$$\boxed{e^{i0} = 1} \tag{32.39}$$

  Infatti:

$$\begin{aligned}
e^{i0} =& \cos 0 + i\sin 0 \\
=&1 + i \cdot 0 \\
=&1
\end{aligned}$$

Pertanto, alternativamente, si può operare sui numeri complessi in forma esponenziale applicando le note proprietà delle potenze.

Infine osserviamo che la formula per determinare le **radici** n-esime di un numero complesso si può così riscrivere come:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}} \tag{32.40}$$

32.7.1 Formule di Eulero

Dalla prima formula di Eulero (32.33) si ha sostituendo $-\theta$ al posto di θ

$$e^{-\theta i} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \rightarrow \boxed{e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta} \tag{32.41}$$

che è la *seconda formula di Eulero*. Sommando membro a membro la 32.33 e la 32.41 si ha $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ da cui si ricava

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \tag{32.42}$$

che è la *terza formula di Eulero*. Se invece si sottrae membro a membro la 32.41 dalla 32.33 si ottiene $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \tag{32.43}$$

che è la *quarta formula di Eulero*.

32.8 TODO

```
- Soluzione equazioni: aggiungere tips'n tricks Bramanti I pag 22
```

Capitolo 33

Successioni, limiti e progressioni

33.1 Successioni

Una *successione numerica*, indicata con $\{a_n\}$, è una funzione in cui dominio è l'insieme $\mathbb{N}$[1] (o un suo sottoinsieme di solito infinito), e come codominio un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$.
I valori assunti dalla funzione sono detti **elementi**/termini della successione e vengono indicati con una lettera (sempre la stessa) munita di pedice:

$$\{a_n\} = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

Il **grafico** di una successione si trova nel 1° o nel 4° quadrante; esso non è una curva, bensì un insieme di punti isolati le cui ordinate obbediscono a una certa legge.

Definizione di successione Una successione numerica è definita quando è stabilita una legge che permette di associare ad ogni numero naturale dell'insieme di definizione, uno e un solo numero reale. Vi sono due modi per definire una successione:

- definizione **analitica**: una espressione analitica che consente, mediante un numero finito di operazioni matematiche, di calcolare un qualsiasi termine a_n della successione a partire dal valore di n

  $$a_n = f(n)$$

  Ad esempio la funzione $f : n \longrightarrow \frac{1}{n}$ definisce la successione

  $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

- definizione **ricorsiva**: si definisce il primo termine della successione e si stabilisce una regola che permetta, dato un termine della successione, di

[1] Compreso lo 0.

calcolarne il successivo. Due esempi: la successione in cui il primo termine è 1 e ogni termine è il doppio del precedente e quella di Fibonacci:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Una stessa successione può esser definita sia analiticamente sia ricorsivamente[2]; tuttavia nel caso una successione sia definita ricorsivamente, per conoscere un suo termine occorre calcolare tutti i precedenti, a contrario della definizione analitica che permette una determinazione diretta ed è perciò preferibile.

33.1.1 Proprietà di successioni

33.1.1.1 Successioni limitate

Una successione si dice:

- **limitata superiormente** se esiste un numero reale M tale che:

$$\forall n \qquad a_n \leq M$$

- **limitata inferiormente** se esiste un numero reale m tale che:

$$\forall n \qquad a_n \geq m$$

- **limitata** se è limitata sia superiormente che inferiormente, ovvero esistono due numeri m, M tali che:

$$\forall n \quad m \leq a_n \leq M$$

Ad esempio la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata; $\left\{n^2\right\}$ è limitata solo inferiormente, $\{(-2)^n\}$ non è limitata ne inferiormente ne superiormente.

33.1.1.2 Successioni monotone

Una successione si dice **crescente in senso stretto** o , semplicemente, *crescente* se i suoi termini crescono al crescere dell'indice:

$$i < j \Longrightarrow a_i < a_j$$

Si dice invece **crescente in senso lato**, o *debolmente crescente*, se

$$i < j \Longrightarrow a_i \leq a_j$$

Specularmente si definirà **decrescente in senso stretto** o **lato** una successione caratterizzata rispettivamente da:

$$i < j \Longrightarrow a_i > a_j$$
$$i < j \Longrightarrow a_i \geq a_j$$

[2]Non è la successione a essere analitica o ricorsiva, bensì il modo in cui la successione è definita.

Per verificare che (ad esempio) è strettamente crescente basta verificare che ogni termine è maggiore del precedente, ovvero verificare che

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+1}$$

Ad esempio per verificare che $a_n = \frac{n}{n+1}$ è crescente bisogna impostare la diseguaglianza

$$\frac{n}{n+1} < \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

svilupparla e constatare che porta ad un'affermazione vera indipendentemente dal valore n considerato.
Infine se una successione è crescente o decrescente (anche debolmente) si dice che è **monotona**; una successione non monotona si dice **oscillante**.

33.1.1.3 Proprietà definitivamente soddisfatte

Se una certa proprietà è soddisfatta non da tutti i termini della successione, ma a partire da un certo termine N (ovvero dai termini con indice $n \geq N$), si dice che tale *proprietà è soddisfatta* **definitivamente**.
Ad esempio la successione $\{n - 10\sqrt{n}\}$ è definitivamente positiva.

33.2 Limiti di successioni

Attraverso lo studio del limite delle successioni siamo interessati al valore assunto da una generica successione $\{a_n\}$ quando n tende all'infinito (nello specifico $+\infty$). Il limite si indica come:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \tag{33.1}$$

Vi possono essere tre tipi di comportamenti della successione a seconda del valore assunto (o meno) dal limite stesso: successione **convergente**, successione **divergente** o successione **indeterminata**.

33.2.1 Successioni convergenti

Una successione di elementi $\{a_n\}$ ha, per $n \to +\infty$, limite finito l quando, preso un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere risulta definitivamente:

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

In altre parole, affinché la successione tenda al valore l deve essere possibile determinare, dopo aver prefissato un numero ε un altro numero n_ε (che dipende da ε) tale che tutti i termini della successione che hanno indice pari o maggiore a n_ε abbiano un valore così prossimo ad l da differirne in valore assoluto per meno di ε:

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \tag{33.2}$$

Se questo accade la successione si dice convergente e si scrive:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l} \tag{33.3}$$

Graficamente la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ "comunque stretta" da un certo indice in poi i punti della successioni non escono più da questa striscia.

Unicità del limite Si osservi che il limite, se esiste finito, è unico; se per assurdo ve ne fossero due l_1 e l_2 associati alla medesima successione $\{a_n\}$ risulterebbe definitivamente [3]:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

Ma tale disuguaglianza, potendo noi scegliere ε piccolo a piacere, può sussistere solo se $l_1 = l_2$.

Successioni infinitesime Una successione $\{a_n\}$ tendente a zero si dice *infinitesima*; lo è ad esempio le successioni $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Successioni per eccesso/difetto Talvolta è possibile precisare se una successione convergente si avvicina al suo limite per eccesso o per difetto; si dice che la successione $\{a_n\}$ tende ad l

- per eccesso e si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente che:
$$0 \leq a_n - l < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \tag{33.4}$$

- per difetto e si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^-$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente che:
$$0 \leq l - a_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \tag{33.5}$$

In sostanza dire che a_n tende per eccesso ad l significa che si avvicina ad l "da sopra", ossia approssima l per eccesso; specularmente nel caso per difetto.

33.2.2 Successioni divergenti

L'operazione di limite risulta completamente significativa se ambientata in $\mathbb{R}^*$ invece che in $\mathbb{R}$; cioè il limite di una successione può essere un numero reale l oppure $+\infty$ o $-\infty$. In questi ultimi due casi la successione si dice divergente o infinita.

[3]Si è nell'ordine:

- aggiunto e tolto a_n
- applicata la diseguaglianza triangolare ai termini $a = l_1 - a_n$, $a_n - l_2$
- constatato che questi ultimi due, per definizione, sotto valore assoluto sono inferiori ciascuno ad ε quindi complessivamente inferiori a ε

Successione positivamente divergente Una successione di elementi $\{a_n\}$ essa ha per limite $+\infty$ se, al tendere di n a $+\infty$, e fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$a_n > M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso la successione si dice positivamente divergente (o divergente a più infinito) e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty} \tag{33.6}$$

Si osservi che, in base alla definizione, una successione positivamente divergente non è limitata superiormente e viceversa una successione limitata superiormente non può essere positivamente divergente.

Successione negativamente divergente Specularmente al caso precedente, una successione ha per limite $-\infty$ al tendere di n a $+\infty$, se fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$a_n < -M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso la successione si dice negativamente divergente (o divergente a meno infinito) e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty} \tag{33.7}$$

Anche qui una successione negativamente divergente non è limitata inferiormente e viceversa una successione limitata negativamente non può essere negativamente divergente.

Successione divergente Infine una successione ha per limite infinito al tendere di n a $+\infty$, se fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$|a_n| > M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso la successione si dice divergente e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty} \tag{33.8}$$

In base alla definizione se una successione diverge positivamente o negativamente allora diverge; non vale il contrario, ovvero una successione divergente può non essere ne positivamente ne negativamente divergente, come avviene nel caso di $a_n = (-2)^n$.

33.2.3 Successioni indeterminate

Non tutte le successioni si possono classificare in una delle categorie precedentemente viste: esistono successioni che non sono convergenti ne divergenti; tali successioni non ammettono dunque limite, finito o infinito che sia, e si dicono indeterminate. Un esempio ne è $a_n = (-1)^n$

33.3 Teoremi sulle successioni monotone

Per le successioni monotone o definitivamente monotone, valgono i seguenti teoremi detti **teoremi di monotonia**:

- se una successione crescente (strettamente o debolmente, anche definitivamente) è **limitata superiormente**, allora essa è **convergente**;
- se una successione decrescente (strettamente o debolmente, anche definitivamente) è **limitata inferiormente**, allora essa è **convergente**;
- se una successione crescente (strettamente o debolmente, anche definitivamente) è **illimitata superiormente**, allora essa **diverge positivamente**;
- se una successione decrescente (strettamente o debolmente, anche definitivamente) è **illimitata inferiormente**, allora essa **diverge negativamente**.

A titolo esemplificativo si dimostra il primo caso: considerando l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, poiché la successione è limitata superiormente, per la proprietà dell'estremo superiore di cui gode $\mathbb{R}$ esiste l'estremo superiore di questo insieme che poniamo a:

$$\Lambda = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \Lambda \in \mathbb{R}$$

Proviamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \Lambda$$

Occorre mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon$$

La seconda diseguaglianza è ovvia: per ogni n è $a_n \leq \Lambda$ poiché Λ è maggiorante degli a_n. Per provare la prima disuguaglianza consideriamo il numero $\Lambda - \varepsilon$. Essendo Λ il minimo dei maggioranti degli a_n, essendo $\Lambda - \varepsilon < \Lambda$, certamente $\Lambda - \varepsilon$ non è maggiorante dell'insieme a_n; quindi vi sarà un indice n_0 tale per cui

$$a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$$

D'altro canto la successione è monotona crescente, perciò per ogni $n \geq n_0$ risulta $a_n \geq a_{n_0}$. Abbiamo quindi provato che

$$a_n \geq a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$$

definitivamente; quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \Lambda$.

Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità R_4 dei numeri reali (e vale se l'ambiente che consideriamo è $\mathbb{R}$).
I teoremi di monotonia saranno utilizzati per dimostrare importanti proprietà delle funzioni continue.

33.4 Algebra dei limiti e teoremi per il calcolo

Vediamo le proprietà dell'operatore di limite rispetto alle operazioni algebriche.

33.4.1 Algebra dei limiti

Quando il limite esiste finito, si dimostra un risultato semplice ovvero il limite dell'operazione su due successioni è l'operazione sui rispettivi limiti. In altre parole se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

con a, b finiti $\in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = a \pm b \tag{33.9}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b \tag{33.10}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{a}{b} \tag{33.11}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left({a_n}^{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} {a_n}^{\lim_{n\to+\infty} b_n} = a^b \tag{33.12}$$

Le dimostrazioni qui si basano sulla definizione di limite, sull'uso di diseguaglianze e sull'uso di proprietà definitivamente vere; dimostriamo a titolo esemplificativo le prime due.

Dimostrazione somma di limiti Per dimostrare la prima:

$$a_n \to a, b_n \to b \implies a_n + b_n \to a + b$$

Fissato un $\varepsilon > 0$, consideriamo:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)|$$

dove abbiamo proceduto con la diseguaglianza triangolare. Ora, poiché $a_n \to a$ e $b_n \to b$, si ha definitivamente che

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

perciò concludiamo che definitivamente

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$$

quindi $a_n + b_n \to a + b$.

Dimostrazione prodotto di limiti Per provare la seconda:

$$a_n \to a, b_n \to b \implies a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$

fissiamo un $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$|a_n b_n - ab|$$

togliendo e aggiungendo $a_n b$ e raccogliendo si ha

$$|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

e con la diseguaglianza triangolare

$$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$$

Poiché $a_n \to a$, definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$; idem per $|b_n - b| < \varepsilon$ definitivamente. Infine $|a_n| < |a| + \varepsilon$ definitivamente[4]; pertanto

$$|a_n b_n - ab| < (|a| + \varepsilon)\varepsilon + |b|\,\varepsilon$$

definitivamente. Raccogliendo ε al secondo membro, potendolo avere piccolo a piacere, si dimostra la $a_n b_n \to ab$.

33.4.2 Teoremi di permanenza del segno

Esprimono il fatto che l'operazione di limite mantiene l'ordinamento

Prima forma Se $a_n \to a$ con $a > 0$ (rispettivamente $a < 0$) allora definitivamente $a_n > 0$ (rispettivamente $a_n < 0$).
Infatti fissato $\varepsilon > 0$ per definizione di limite abbiamo che definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$, che riscriviamo come

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Poiché $a > 0$ possiamo scegliere ε piccolo tale in modo che sia anche $a - \varepsilon > 0$; allora la diseguaglianza $a - \varepsilon < a_n$ mostra che $a_n > 0$ definitivamente. In modo analogo si mostra il caso $a < 0$

Seconda forma Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e definitivamente $a_n \geq 0$, allora $a \geq 0$.
La dimostrazione segue dalla prima forma: se per assurdo fosse $a < 0$ dal teorema precedente si avrebbe che definitivamente $a_n < 0$, il che è incompatibile con l'ipotesi che definitivamente sia $a_n \geq 0$

Più in generale possiamo affermare che se $a_n \to a$, $b_n \to b$ e definitivamente $a_n \geq b_n$ allora si può dire che $a \geq b$.
Infatti, se definitivamente $a_n \geq b_n$ allora sempre definitivamente $a_n - b_n \geq 0$, ma poiché $a_n - b_n \to a - b$ (per l'algebra dei limiti), si conclude che $a - b \geq 0$ ovvero $a \geq b$.

L'ultimo passaggio suggerisce che in una disuguaglianza tra due successioni si può passare al limite in ambo i membri mantenendo il segno $\leq$; in generale invece nel passaggio al limite non si conserva il segno di diseguaglianza stretta[5].

[4] Infatti consideriamo la diseguaglianza triangolare $|a - b| \geq |a| - |b|$; ribaltandola e considerando che $|a_n - a| < \varepsilon$ definitivamente si ha che

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

A questo punto considerando solo il primo e terzo membro definitivamente si ha

$$|a_n| < |a| + \varepsilon$$

[5] Ad esempio anche se gli a_n sono strettamente positivi, il loro limite a è positivo o nullo come mostra il semplice esempio di $\frac{1}{n} \to 0$.

33.4.3 Teorema del confronto

Primo teorema del confronto Se definitivamente si ha che $a_n \leq b_n \leq c_n$, $a_n \to l$ e $c_n \to l$ con $l \in \mathbb{R}$ limite finito, allora anche $b_n \to l$.
La dimostrazione: avendo fissato $\varepsilon > 0$ definitivamente si ha che

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon; \qquad l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$$

da cui segue che, sempre definitivamente:

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

e quindi definitivamente

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$$

per cui $b_n \to l$.

Secondo teorema del confronto Si tratta per lo più di un caso speciale utile del primo teorema del confronto.
Se due successioni a_n e b_n sono tali che definitivamente si abbia

$$|a_n| \leq |b_n|$$

e se b_n ha per limite 0, allora è anche

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Inoltre corollario è che se $b_n \to 0$ e a_n è limitata (ma non necessariamente convergente) allora il prodotto $c_n b_n \to 0$; detto a parole, il prodotto di una successione infinitesima e una limitata è infinitesimo.
Infatti se a_n è limitata, ossia $|a_n| < K$ per un certo $K > 0$ per ogni n possiamo scrivere

$$|a_n b_n| \leq K\,|b_n|$$

Poiché $|b_n| \to 0$, a 0 vi tende anche $K\,|b_n|$ e quindi si conclude che $b_n c_n \to 0$.

33.4.4 Algebra dei limiti concernenti infiniti

Fin qui abbiamo visto teoremi che operano su coppie di successioni entrambi convergenti o comunque limitate. Consideriamo il caso in cui i limiti di sommatoria di cui si vuol studiare l'algebra siano entrambi o in parte infiniti.
Le regole per l'addizione (abbreviate informalmente) sono le seguenti:

$$a + \infty = +\infty \tag{33.13}$$
$$a - \infty = -\infty \tag{33.14}$$
$$+\infty + \infty = +\infty \tag{33.15}$$
$$-\infty - \infty = -\infty \tag{33.16}$$

Analogamente per il prodotto abbiamo le seguenti regole; il segno di ∞ va determinato con la usuale regola dei segni

$$a \cdot \infty = \infty \quad (a \neq 0) \tag{33.17}$$
$$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0) \tag{33.18}$$
$$\frac{a}{\infty} = 0 \tag{33.19}$$

Queste regole prendono il nome di **aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito**.

Proviamo ad esempio che:

$$a_n \to +\infty, \quad b_n \to b \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

Dopo aver fissato $\varepsilon > 0$, dato che $a_n \to +\infty$, definitivamente si ha che

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dato che $b_n \to b$, definitivamente si ha che[6]

$$|b_n| < |b| + \varepsilon$$

Ne segue che, definitivamente[7]:

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right| < \varepsilon(|b| + \varepsilon)$$

dal quale per l'arbitrarietà di ε segue la tesi.

Forme di indecisione Si noterà che mancano le regole relative a quattro operazioni e cioè

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \tag{33.20}$$

Queste espressioni si chiamano forme di indecisione poiché nessuna regola può essere stabilita a priori per determinare il risultato; all'atto pratico occorre vedere quale successione tende più velocemente ad infinito (o analogamente ad un infinito più alto) e/o a zero.

I limiti di successioni che si presentano nella forma $a_n^{b_n}$ si trattano più facilmente considerando la successione dei logaritmi (ad esempio di base 10) e poi riportando alla scala originale (una volta calcolato il limite). Consideriamo ad esempio

$$\log_{10} a_n^{b_n} = b_n \log_{10} a_n \tag{33.21}$$

Più avanti si mostra che se questa successione:

- converge a l la successione $a_n^{b_n}$ converge a 10^l

[6] Come si è visto in analoga dimostrazione per l'algebra dei limiti concernenti valori finiti

[7] Dato che $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ si può scrivere anche $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, quindi

$$\varepsilon\,|a_n| > 1$$

$$\varepsilon > \frac{1}{|a_n|}$$

$$\frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$$

Moltiplico membro a membro quest'ultima per la $|b_n| < |b| + \varepsilon$ e si ottiene infine

$$\frac{|b_n|}{|a_n|} < \varepsilon(|b| + \varepsilon)$$

equivalente a quanto riportato.

n	a_n
1	2
2	2.25
10	2.5937
100	2.7048
1000	2.7169
100000	2.7182

Tabella 33.1: Approssimazioni successive di e

- diverge a $\pm infty$ la successione $a_n^{b_n}$ rispettivamente diverge a $+\infty$ o converge a 0
- è indeterminata, la successione $a_n^{b_n}$ è indeterminata

Si può così osservare che le espressioni

$$1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (+\infty)^0 \tag{33.22}$$

sono altrettante forme di indecisione, corrispondenti (passando al logaritmo) alla forma di indecisione $0 \cdot \infty$

33.4.5 Teoremi del confronto concernenti infiniti

Terzo teorema del confronto Se due successioni a_n e b_n sono tali che si abbia definitivamente

$$|a_n| \leq |b_n|$$

e se a_n diverge, allora anche b_n tende all'infinito.

33.5 Il numero di Nepero

La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{33.23}$$

Come si potrebbe dimostrare tale successione risulta crescente e superiormente limitata: quindi per il teorema di cui sopra essa è convergente. Si riportano alcuni valori (le prime cifre decimali) di a_n in tabella 33.1. Il suo limite è un numero irrazionale, che si indica con la lettera e ed è detto numero di Nepero; per definizione dunque

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{33.24}$$

Esso ha particolare importanza nella matematica in quanto le funzioni esponenziale e logaritmica di base e godono di importanti proprietà che si studierà.

Una volta definito il numero e come sopra, si può dimostrare che è anche

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \tag{33.25}$$

e più generalmente a partire dalle 33.24 e 33.25 si può provare che se a_n è una qualsiasi successione divergente (a $\pm\infty$), allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e} \qquad \forall a_n\to\pm\infty \tag{33.26}$$

Questo ultimo teorema torma molto utile nei limiti che coinvolgono la forma di indeterminazione 1^∞: ad esempio per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1}$$

Si tratta di una forma 1^∞. Scriviamo

$$\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n+1}}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3(5n+1)}{n}}}$$

che si pone nella forma

$$\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{b_n}}$$

con $a_n=\frac{n}{3}$. Per la 33.26 la successione entro parentesi quadre tende ad e mentre l'esponente

$$b_n=\frac{3(5n+1)}{n}\to 15$$

Perciò il limite cercato è $\frac{1}{e^{15}}$.

33.6 Confronti e stime asintotiche

Quando due successioni sono entrambe infinitesime ($\to 0$) o entrambe infinite ($\to\pm\infty$) è utile poter stabilire un confronto tra di esse per capire quale delle due tenda più rapidamente a 0 o a ∞.
Esempi di infiniti sono le successioni seguenti

$$\{\log n\} \quad \left\{\sqrt{n}\right\} \quad \left\{n^2\right\} \quad \{2^n\}$$

mentre esempi di infinitesimi si ottengono dalle precedenti considerando gli elementi reciproci.

Confronto di infiniti Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infiniti; consideriamo il limite del rapporto; si hanno quattro possibilità:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \begin{cases} 0 & 1) \\ l \text{ finito e} \neq 0 & 2) \\ \pm\infty & 3) \\ \text{inesistente} & 4) \end{cases} \tag{33.27}$$

Diciamo rispettivamente che

1. $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$;

2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello *stesso ordine*;

3. $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine superiore* a $\{b_n\}$;

4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili

Confronto di infinitesimi Siano ora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infinitesimi e b_n definitivamente $\neq 0$; considerando sempre il limite del rapporto. Con riferimento agli stessi casi dell'equazione 33.27 diciamo specularmente che:

1. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine superiore* a $\{b_n\}$;

2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello *stesso ordine*;

3. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$;

4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili

Successioni asintotiche Il caso $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ è particolarmente importante: in tal caso si usa dire che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche e si indica mediante:

$$a_n \sim b_n \tag{33.28}$$

leggendosi: a_n è asintotico a b_n. La relazione di asintotico soddisfa le proprietà riflessiva simmetrica e transitiva e si qualifica pertanto come una relazione di equivalenza.

Il simbolo asintotico è molto utile nel calcolo dei limiti per le seguenti proprietà[8]:

1. se $a_n \sim b_n$ le due successioni hanno lo stesso comportamento: convergono allo stesso limite o divergono entrambe a $\pm\infty$ o entrambe non hanno limite

2. si possono scrivere catene di relazioni asintotiche, ovvero se

   $$a_n \sim b_n \sim \ldots \sim c_n$$

   allora $a_n \sim c_n$

3. una espressione composta da prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore, ovvero se

   $$a_n \sim a'_n, \quad b_n \sim b'_n, \quad c_n \sim c'_n$$

   allora

   $$\frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

   Attenzione: lo stesso non vale per somme o per l'esponenziale

[8] Dimostrazioni Bramanti 1 a pag 104

Gerarchia degli infiniti Valgono le seguenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \tag{33.29}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \tag{33.30}$$

per ogni $a > 1,\ \alpha > 0$. Questi limiti confrontano la velocità con cui i logaritmi (con base > 1), le potenze, gli esponenziali (con base > 1) vanno ad ∞:

1. i logaritmi vanno più lentamente di qualsiasi potenza

2. le potenze vanno più lentamente di qualsiasi esponenziale

Per dimostrare la prima iniziamo stabilendo un'utile diseguaglianza tra un numero qualsiasi $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e il suo logaritmo se k è la parte intera di x si ha

$$2^x \geq 2^k = (1+1)^k \geq 1 + k > x$$

con la prima diseguaglianza che segue dalla monotonia della funzione esponenziale, la seconda dalla diseguaglianza di Bernoulli. Passando ai $\log_a$ del primo e ultimo membro

$$\log_a x < x \log_a 2$$

per ogni $x > 0$. Applichiamo ora questa disuguaglianza al numero $x = n^{\alpha/2}$, avendo

$$\frac{\alpha}{2} \log_a n < n^{\alpha/2} \log_a 2$$

e quindi

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2$$

e infine

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha} = \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Per il teorema del confronto $\frac{\log_a n}{n^\alpha} \to 0$ e la prima relazione è dimostrata.

Applicando questo risultato sostituendo all'intero n l'intero 2^n si ha

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a (2^n)}{(2^n)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \log_a 2}{(2^\alpha)^n}$$

Se ora $a > 1$ è fissato, scegliendo $\alpha > 0$ in modo che sia $2^\alpha = a$ otteniamo che $\frac{n}{a^n} \to 0$, che è la seconda relazione nel caso particolare in cui n è elevato ad esponente 1. Il caso generale segue dall'identità:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{\left(a^{1/\alpha}\right)^n}\right)^\alpha$$

Infatti per il risultato precedente $\frac{n}{\left(a^{1/a}\right)^n} \to 0$ (la base $a^{1/\alpha}$ è ancora > 1) quindi anche $\left(\frac{n}{\left(a^{1/a}\right)^n}\right)^\alpha \to 0$

Criterio del rapporto Altri confronti tra infiniti si possono risolvere grazie al seguente criterio. Sia a_n una successione sempre positiva. Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

e

- $l < 1$, allora $a_n \to 0$;
- $l > 1$ (eventualmente $+\infty$), allora $a_n \to +\infty$.
- $l = 1$ non si può concludere nulla

Il teorema[9] precedente riconduce lo studio del carattere di una successione positiva al calcolo del limite di un'altra successione quella dei rapporti tra il termine $n+1$ esimo e il termine n esimo. In certi casi quest'ultima è più semplice da studiare di quella di partenza.

33.7 Relazione tra limiti delle successioni e delle funzioni

Ci limitiamo ad enunciare che, se

1. $f(x)$ è una funziona definita per $x \geq 0$;
2. a_n è il termine generale di una successione;
3. ancora, si ha che
$$f(n) = a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$
ovvero i termini a_n della successione si possano calcolare ponendo $x = n$ nell'espressione della funzione $f(x)$.
4. infine si ha che
$$\lim_{n\to\infty} f(x) = l$$

Allora si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Il risultato del teorema vale anche se l'eguaglianza $f(n) = a_n$ risulta vera solo definitivamente, per tutti i termini della successione successivi ad un certo termine a_{n_0}.

Il risultato del teorema non è però invertibile: se si ha $f(n) = a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, la funzione $f(x)$ può non avere limite per $x \to +\infty$; tuttavia, se esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dev'essere l.

[9] Dimostrazione sul Bramanti 1 pag 106

33.8 Alcune successioni notevoli e loro proprietà

33.8.1 Progressioni aritmetiche

Una **progressione aritmetica** *è una successione* di numeri caratterizzati dal fatto che la differenza tra ciascuno di essi e il precedente è costante.
Per indicare che i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono in progressione aritmetica si usa scrivere

$$\div a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{33.31}$$

La differenza costante tra ogni termine e il suo precedente si dice **ragione della progressione**. Se indichiamo con d tale numero, ovvero

$$a_n - a_{n-1} = d \tag{33.32}$$

giungiamo alla **definizione ricorsiva della progressione aritmetica** come:

$$a_n = a_{n-1} + d \tag{33.33}$$

Si deduce che se la ragione:

- è positiva, la progressione è *crescente* (in senso stretto)
- è negativa, la progressione è *decrescente* (in senso stretto)

Se di una progressione si considerano sono n termini consecutivi, la progressione è detta **finita**.

Per trovare l'**espressione analitica della progressione aritmetica**, ovvero trovare l'espressione generale dell'n-esimo termine, consideriamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &\ldots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le $n-1$ uguaglianze otteniamo

$$\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + a_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1 \text{ addendi}}$$

e sopprimendo i termini uguali nei due membri abbiamo

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \tag{33.34}$$

ovvero a parole, in una progressione aritmetica un termine qualunque è uguale al primo termine aumentato del prodotto della ragione per il numero di termini che precedono quello considerato.
L'uguaglianza 33.38 è una relazione tra i quattro numeri a_1, a_n, d, n che permette di determinare ciascuno si essi se sono noti gli altri tre. In particolare si ha

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$$

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{n-1}}$$

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1}$$

Se vogliamo determinare un membro della progressione a_r in funzione di un altro a_s (che non è il primo) possiamo procedere come segue. Considerando

$$a_r = a_1 + (r-1)d$$
$$a_s = a_1 + (s-1)d$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$a_r - a_s = rd - sd = (r-s)d$$

da cui si ottiene

$$\boxed{a_r = a_s + (r-s)d}$$

33.8.1.1 Somma dei termini di una progressione aritmetica finita

Due termini di una progressione aritmetica finita si dicono **equidistanti dagli estremi** se il numero dei termini che precedono il primo è uguale al numero di termini che seguono il secondo.
Sono ad esempio equidistanti a_1 e a_n (primo e ultimo), a_2 e a_{n-1} (secondo e penultimo) e in generale i termini a_{1+k} e a_{n-k} (con $k \in \mathbb{N}, k < n$).

Vogliamo ora dimostrare che *in una progressione aritmetica finita, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è uguale alla somma dei termini estremi*, ad esempio che nella serie 1, 3, 5, 7, la somma 3+5 è uguale a 1+7. Più in generale dobbiamo dimostrare che

$$\boxed{a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k}} \qquad (33.35)$$

Dato che $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ riscriviamo a_1 come:

$$a_1 = a_{1+k} - kd$$

e considerando che $a_r = a_s + (r-s)d$ riscriviamo a_n come:

$$a_n = a_{n-k} + kd$$

Ora, sommando membro a membro le due uguaglianze otteniamo:

$$a_1 + a_n = a_{1+k} - \cancel{kd} + a_{n-k} + \cancel{kd}$$

dimostrando quello che ci eravamo prefissati.

Vogliamo ora dimostrare che *la somma dei termini di una progressione aritmetica finita è uguale al prodotto della semisomma degli estremi per il numero dei termini*. Considerando la progressione

$$\div a_1, a_2, \ldots, a_n$$

sia S_n la somma dei suoi n termini, ovvero

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

per la proprietà commutativa dell'addizione si può scrivere

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ma dato che tra parentesi abbiamo le somme di termini equidistanti dagli estremi, sappiamo che tali espressioni sono tutte uguali ad $(a_1 + a_n)$, conducendo a

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}} \tag{33.36}$$

33.8.2 Progressioni geometriche

Una **progressione geometrica** è una successione di numeri caratterizzati dal fatto che il rapporto tra ciascuno di essi e il precedente è costante.
Il rapporto costante tra un termine qualsiasi e il suo precedente si chiama **ragione** e si indica con q, ovvero

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Anche in questo caso, se di una progressione si considerano solo n termini, la progressione si dice **finita**.

Genericamente possiamo dire che, sviluppando l'ultima eguaglianza

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \tag{33.37}$$

Ovvero in una progressione geometrica un termine qualunque è uguale al precedente moltiplicato per la ragione. Se la ragione è:

- positiva, tutti i termini sono dello stesso segno
- se negativa, sono di segno alterno

33.8.2.1 Progressioni a termini positivi

Supponendo che $q > 0$ e $a_1 > 0$ (e quindi considereremo per ora solo progressioni con tutti i termini positivi):

- se $q = 1$ tutti i termini della progressione sono uguali (caso poco interessante)
- se $q > 1$ ogni termine è maggiore del precedente e la progressione è **crescente**
- se $0 < q < 1$ ogni termine è minore del precedente e la progressione è **decrescente**

Per trovare l'espressione analitica della progressione geometrica, ovvero trovare l'espressione generale dell'n-esimo termine, consideriamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ &\ldots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro le $n-1$ uguaglianze otteniamo

$$\cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ fattori}}$$

e sopprimendo i termini uguali nei due membri abbiamo

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \tag{33.38}$$

L'uguaglianza 33.38 è una relazione tra i quattro numeri a_1, a_n, d, n che permette di determinare ciascuno si essi se sono noti gli altri tre. In particolare, ad esempio si ha

$$\boxed{a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}}$$

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}}$$

Se vogliamo determinare un membro della progressione a_r in funzione di un altro a_s (che non è il primo) possiamo procedere come segue. Considerando

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$$
$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 q^{r-1}}{a_1 q^{s-1}} = \frac{q^{r-1}}{q^{s-1}} = q^{r-1-s+1} = q^{r-s}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{a_r = a_s \cdot q^{r-s}}$$

33.8.2.2 Progressioni a termini di segno qualsiasi

Le considerazioni fin qui fatte possono estendersi anche alle progressioni a termini tutti negativi o a termini con segni alterni.
Dalla formula fondamentale

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

si vede che:

- se $q > 0$ allora anche $q^{n-1} > 0$ per qualsiasi n e pertanto tutti i termini della progressione avranno lo stesso segno (siano essi positivi o negativi, ciò dipende dal segno di a_1). Nella fattispecie, a_1 e a_n sono concordi
- se $q < 0$ i termini della progressione avranno segno alterno. In merito alla concordanza di a_1 e a_n distinguiamo due casi:
  - n è pari: allora $n-1$ è dispari, $q^{n-1} < 0$ e pertanto a_1 e a_n sono discordi;

– n è dispari: allora $n-1$ è pari, $q^{n-1} > 0$ e pertanto a_1 e a_n sono concordi.

La **concordanza o discordanza** di a_1, a_n (congiuntamente al valore assunto da n) è importante per determinare l'applicabilità della formula per calcolare q, che *comunque rimane sempre valida* (in quanto l'unica volta che a_1 e a_n sono discordi è quando $n-1$ è dispari, che va bene).
Nell'ultimo caso ($q < 0$ e n dispari) i valori sotto radice sono concordi quindi danno luogo ad un rapporto positivo; con n dispari (ed $n-1$ pari) dalla formula $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$ si ricavano due valori reali opposti di q

$$q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

33.8.2.3 Prodotto di n termini consecutivi

Con dimostrazione analoga a quella seguita per la somma di n termini di progressione aritmetica si trova che il prodotto P dei primi n numeri di una progressione geometrica *a termini positivi* è

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_2)^n} \tag{33.39}$$

Nel caso di una progressione a termini tutti negativi o a segno alternato, la formula diventa

$$P = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_2)^n} \tag{33.40}$$

Il segno di tal prodotto P sarà negativo o positivo a seconda che il numero di fattori negativi sia dispari o pari

33.8.2.4 Somma dei termini di una progressione geometrica finita

Considerando una progressione geometrica finita di ragione $q \neq 1$, se

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

moltiplicando ambo i membri per q, e ricordando che $a_1 \cdot q = a2, a_2 \cdot q = a_3, \ldots, a_{n-1} \cdot q = a_n$ si ha

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot q$$

sottraendo a membro a membro da quest'ultima uguaglianza la precedente e riducendo si ha

$$S_n \cdot q - S_n = a_n q - a_1 \longrightarrow S_n(q-1) = a_n q - a_1$$

avendo supposto che $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

Sapendo che $a_n = a_1 q^{n-1}$ e sostituendo, si ha

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

ovvero

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}} \tag{33.41}$$

Capitolo 34

Premesse all'analisi infinitesimale

34.1 Funzioni elementari: riepilogo ed integrazioni

34.1.1 Funzioni potenza

Annoveriamo tra le funzioni potenza la larga famiglia di funzioni del tipo seguente:

$$f(x) = kx^{\alpha}, \qquad (\alpha \neq 0) \tag{34.1}$$

dove $k, \alpha \in \mathbb{R}$. L'output è legato alla "parte di input" (x^{α}) secondo la costante di proporzionalità k che può determinare

- stretching o appiattimenti a seconda che $|k|$ sia $>$ o $<$ di 1;
- ribaltamenti rispetto all'asse delle x a seconda del segno assunto.

Tuttavia il grosso della forma funzionale è determinato dalla potenza di x. Nel seguito consideriamo due tipi di α: razionale e irrazionale.

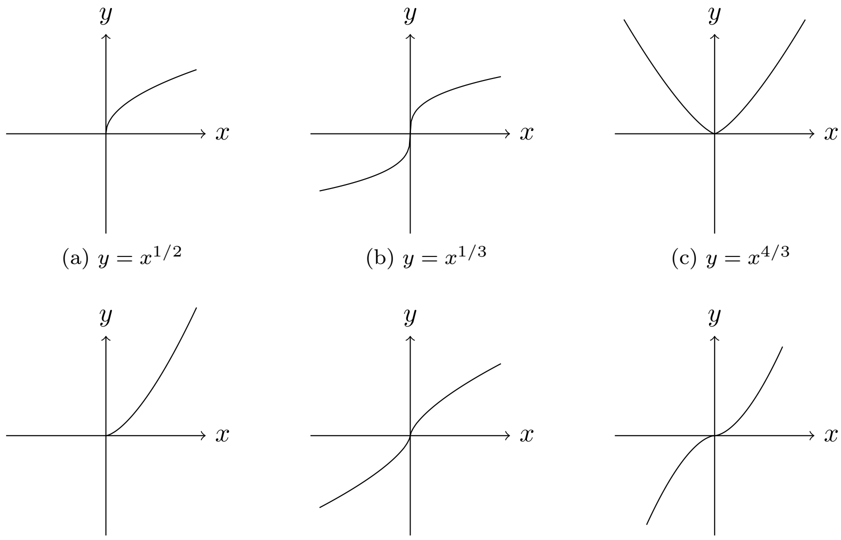
34.1.1.1 Funzione potenza ad esponente razionale

Nel caso α sia razionale, si ricorda che l'operazione di elevamento a potenza è ben definita:

- per qualunque esponente, se la base è positiva;
- nel caso di base negativa, se l'esponente è un razionale (frazione) con denominatore dispari[1] .

Ricapitoliamo i vari casi possibili in figura 34.1 (escludendo il caso banale $f(x) = x$). Alcune osservazioni generali:

[1]In quanto il denominatore diviene l'indice della radice. Si noti che in questo gruppo ricadono anche le potenze che hanno per esponente un intero, poiché questo è un razionale



(a) $y = x^{1/2}$ (b) $y = x^{1/3}$ (c) $y = x^{4/3}$

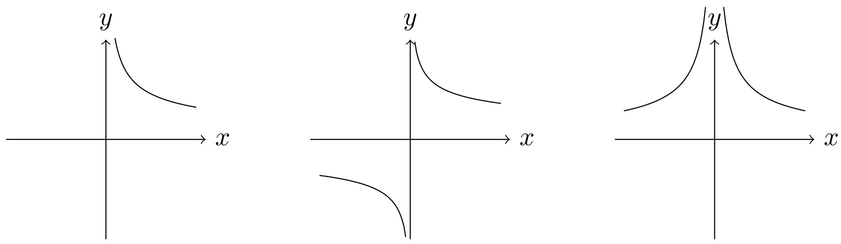
(d) $y = x^{3/2}$ (e) $y = x^{2/3}$ (f) $y = x^{5/3}$

Figura 34.1: Funzioni potenza ad esponente razionale positivo

- in $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente, mentre in $(0, +\infty)$, se è definita, basta tener conto della simmetria di f (sia essa rispetto all'asse y o all'origine, a seconda dell'esponente) per decidere se cresce o decresce;

- in $(0, +\infty)$ la funzione presenta un andamento simile a quello delle funzioni x^2 o $\sqrt{x}$, rispettivamente (e cioè tangente all'asse x o all'asse y nell'origine), a seconda che l'esponente sia maggiore o minore di 1.

Se invece l'esponente è negativo, le situazioni qualitativamente sono quelle di figura 34.2. In questi casi la funzione è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$,



(a) $y = x^{-1/2}$ (b) $y = x^{-1/3}$ (c) $y = x^{-2/3}$

Figura 34.2: Funzioni potenza ad esponente razionale positivo

mentre in $(-\infty, 0)$, se è definita, basta tener conto della simmetria di f per decidere se cresce o decresce.

34.1.1.2 Funzione potenza ad esponente irrazionale

Nel caso α sia irrazionale, non possiamo più esprimere la potenza come un rapporto. Escluso che l'esponente sia un intero, non si può nemmeno "sapere" se l'esponente è rapporto in cui il denominatore è dispari.
Pertanto in questi casi si evita di permettere al dominio di assumere valori negativi e, in generale se $\alpha > 0$ queste funzioni sono definite solo per $x \geq 0$, mentre se $\alpha < 0$ solo per $x > 0$. Le situazioni possibili sono descritte in figura 34.3 e dipendono più che altro dal fatto che α sia $>$ o $<$ di 1.

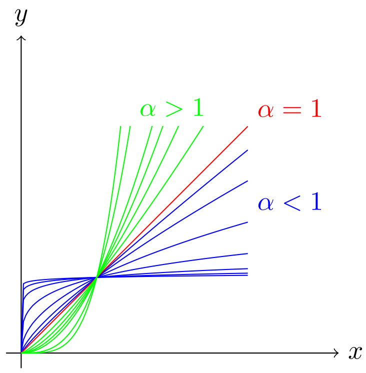


Figura 34.3: Funzioni potenza ad esponente irrazionale

34.1.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche

L'importanza di queste famiglie di funzioni deriva dal fatto che esse sono prototipi utili per descrivere fenomeni frequenti in natura come crescita o decadimento.
Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, la funzione:

$$f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \log_a x$$

si chiama funzione logaritmo in base a mentre la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = a^x$$

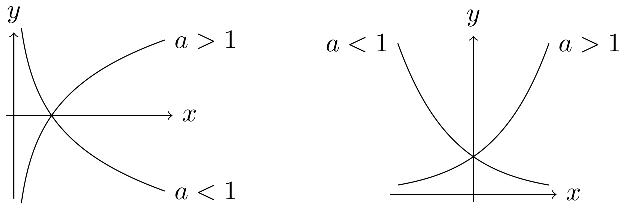
si chiama funzione esponenziale[2] in base a.
Di tutte le basi utilizzabili per la funzione logaritmica ed esponenziale, il numero di Nepero e è quella più utilizzata.
Inoltre notiamo che una funzione esponenziale a^x si può esprimere nella forma e^{bx}, scegliendo $b = \log a$

34.1.3 Funzioni parte intera e mantissa

Sono due funzioni che si incontrano tipicamente nella scrittura di algoritmi:

[2]Se:

- l'*esponente* è fissato e la base variabile abbiamo le *funzioni potenza*;
- la *base* è fissata e l'esponente è variabile abbiamo le *funzioni esponenziali*.



(a) $y = \log_a x$ (b) $y = a^x$

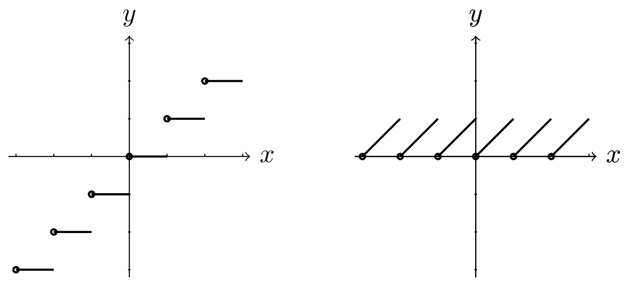
- la funzione *parte intera di x* (anche detta *floor*), è definita come

$$\lfloor x \rfloor = \text{l'intero } n \text{ tale che } n \leq x < n+1 \tag{34.2}$$

- la funzione *matissa* (o *parte decimale di x*) indicata con (x) o $\text{mant}(x)$ è definita da:

$$(x) = x - \lfloor x \rfloor \tag{34.3}$$

  la mantissa è quindi un numero reale compreso in $[0, 1)$ ed è una funzione periodica di periodo 1.



(a) $y = \lfloor x \rfloor$ (b) $y = (x) = x - \lfloor x \rfloor$

34.1.4 Funzioni trigonometriche e fenomeni vibratori

Le funzioni trigonometriche sono prototipi utili per i fenomeni ciclici.

$$x \longrightarrow \sin x, \qquad x \longrightarrow \cos x, \qquad x \longrightarrow \tan x, \qquad x \longrightarrow \cot\ x \tag{34.4}$$

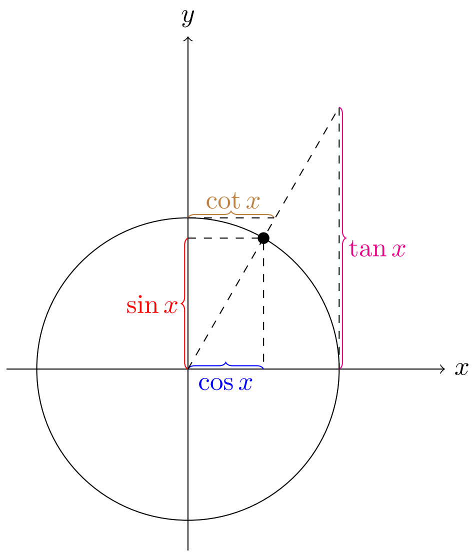
dove x ha il significato di *misura in radianti di un angolo.* I significati geometrici delle quattro funzioni sono mostrati nella figura

Fenomeni vibratori Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π. Più in generale le funzioni

$$t \longrightarrow a \sin \omega t \qquad t \longrightarrow a \cos \omega t \tag{34.5}$$

dove a, b, ω sono reali positivi, sono periodiche di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Infatti ad esempio:

$$\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]=\sin\left(\omega t+2\pi\right)=\sin\omega t$$

Inoltre, essendo $|\sin\omega t|\leq 1$ e $|\cos\omega t|\leq 1$ si ha

$$|a\sin\omega t|\leq a \qquad |b\cos\omega t|\leq b \tag{34.6}$$

Le 34.5 sono dette **vibrazioni elementari**[3] :

- di *ampiezza* a e b rispettivamente;
- di *pulsazione* $\omega=\frac{2\pi}{T}$;
- di *frequenza* $v=\frac{1}{T}$.

Moltiplicando una vibrazione elementare per potenze o esponenziali si possono modellizzare effetti di smorzamento o amplificazione. Considerando la funzione

$$h(x)=x\cdot\sin\omega x$$

dato che $-1\leq\sin\omega t\leq 1$ si ha che

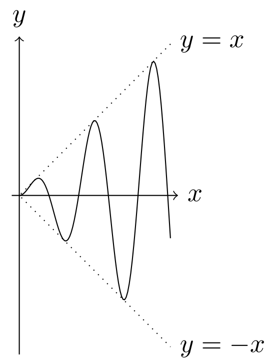
$$-x\leq x\sin\omega x\leq x$$

e quindi il grafico si trova tra i grafici delle rette di equazione $y=-x$ e $y=x$. Dal grafico si vede come la moltiplicazione per $x$abbia l'effetto di una amplificazione all'aumentare di x. Specularmente avviene per

[3]Sotto condizioni abbastanza generali, un fenomeno naturale periodico si può scrivere come sovrapposizione di un numero finito o infinito di vibrazioni elementari di frequenza diversa. Questo conduce al concetto di serie di Fourier, ovvero a somme del tipo

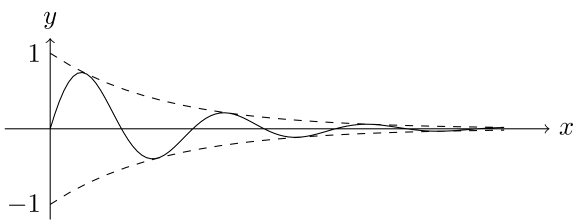
$$\sum a_n\cos n\omega t+b_n\cos n\omega t$$

che si tratterà in seguito.



$$k(x) = e^{-\alpha x} \sin \omega < x$$

Ricordando che $e^{\alpha x} = \left(\frac{1}{e^{\alpha}}\right)^t$ è un' esponenziale con base minore di 1, considerazioni analoghe a quelle svolte per la funzione h indicano che il grafico di k è compreso tra i grafici delle funzioni $y = e^{-\alpha x}$ e $y = -e^{-\alpha x}$.



34.1.5 Funzioni iperboliche

Nelle applicazioni sono importanti alcune combinazioni delle funzioni e^x ed e^{-x}

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{34.7}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{34.8}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{34.9}$$

che si chiamano rispettivamente *seno, coseno e tangente iperbolica*; sono ovviamente definite su tutto $\mathbb{R}$. Le seguenti **proprietà** derivano dalle definizioni delle funzioni:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \text{(funzione dispari)} \tag{34.10}$$

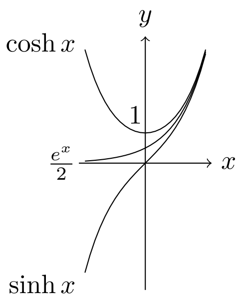
$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \text{(funzione pari)} \tag{34.11}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \text{(funzione dispari)} \tag{34.12}$$

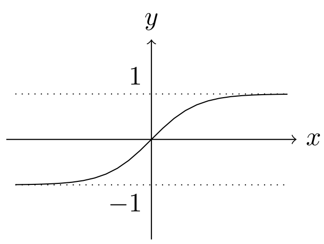
Ancora:

$$\sinh(0) = 0 \qquad \cosh(0) = 1 \qquad \tanh(0) = 0 \tag{34.13}$$

$$\sinh(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq \cosh(x) \tag{34.14}$$



(a) $\sinh x$ e $\cosh x$



(b) $\tanh x$

E l'equivalente dell'identità trigonometrica fondamentale è:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{34.15}$$

34.1.5.1 Formule goniometriche

Vediamo le equivalenti delle formule trigonometriche

Formule di addizione

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x) \tag{34.16}$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\sinh(x) \tag{34.17}$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \tag{34.18}$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \tag{34.19}$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x \tag{34.20}$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x} \tag{34.21}$$

Formule di bisezione Occorre scegliere il segno corretto:

$$\sinh(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \tag{34.22}$$
$$\cosh(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \tag{34.23}$$
$$\tanh(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \tag{34.24}$$

Formule di prostaferesi

$$\sinh p + \sinh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2} \tag{34.25}$$
$$\sinh p - \sinh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2} \tag{34.26}$$
$$\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2} \tag{34.27}$$
$$\cosh p - \cosh q = -2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2} \tag{34.28}$$

Formule parametriche Avendo

$$t \stackrel{def}{=} \tanh \frac{\alpha}{2}$$

$$\sinh \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \tag{34.29}$$
$$\cosh \alpha = \frac{1+t^2}{1-t^2} \tag{34.30}$$
$$\tanh \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \tag{34.31}$$

34.1.6 Funzioni iperboliche inverse

Vediamo alcune funzioni che saranno utilizzate nell'integrazione delle funzioni irrazionali.

Settore seno iperbolico La funzione $y = \sinh x$ è definita e strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, pertanto è invertibile. La sua funzione inversa la otteniamo invertendo x e y e risolvendo per y

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

moltiplicando entrambi i membri per e^y

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita e^y. Ricaviamo

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

poiché $e^y > 0$, la soluzione con segno negativo va scartata. Rimane dunque

$$\boxed{y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{34.32}$$

Questa è l'espressione della funzione inversa di $\sinh x$ che prende il nome di *settore seno iperbolico* (arcoseno iperbolico) ed è indicata da alcuni come $\operatorname{SettSh} x$ ($\operatorname{arcsinh} x$). Il dominio è $D = \mathbb{R}$.

Settore coseno iperbolico La funzione $y = \cosh x$ è decrescente per $x \leq 0$, crescente per $x \geq 0$; pertanto non invertibile su tutto il dominio. Determiniamo l'inversa sulla restrizione del dominio a $x \geq 0$.
Con calcoli analoghi ai precedenti scriviamo:

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e risolviamo rispetto ad y la

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

otteniamo

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Questa volta entrambi i numeri sono positivi; stiamo però ragionando solo per $y \geq 0$, che equivale a scegliere il segno $+$. Pertanto

$$\boxed{y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} \tag{34.33}$$

Questa è l'espressione della funzione inversa di $\sinh x$ che prende il nome di *settore coseno iperbolico* (arcocoseno iperbolico) ed è indicata da alcuni come $\operatorname{SettCh} x$ ($\operatorname{arccosh} x$). Il dominio è $D = [1, +\infty)$.

Considerazione finale Si noti, mentre ad esempio l'equazione

$$\sinh x = 2$$

ha una unica soluzione (si pensi al sistema equivalente e a relativo grafico) ed è data da $x = \operatorname{arcsinh} 2 = \log\left(2 + \sqrt{5}\right)$, l'equazione

$$\cosh x = 2$$

ne ha due (si pensi sempre al sistema equivalente e relativo grafico) che corrispondono a $x = \pm \arccos 3 = \pm \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

34.2 Determinazione del dominio: riepilogo

Una delle prime operazioni da farsi quando si studia una funzione è quella di determinare il suo dominio. Data l'importanza dell'argomento riassumiamo le regole da seguire:

1. le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto sono sempre possibili; pertanto le funzioni razionali intere, cioè i polinomi hanno come dominio $\mathbb{R}$;

2. l'operazione di divisione non ha significato se il divisore è nullo; pertanto le funzioni razionali fratte hanno per dominio tutti i numeri reali tranne quelli che eventualmente annullino il denominatore;

3. l'operazione di estrazione di radice di indice pari ha senso se il radicando è positivo o nullo; item l'operazione di estrazione di radice di indice dispari ha senso purché esista i radicando;

4. il logaritmo ha significato se l'argomento è positivo e purché la base sia un numero positivo e diverso da 1;

5. l'esponenziale con base (costante) positiva esiste purché esista l'esponente (variabile);

6. la potenza con base variabile ed esponente costante irrazionale positivo si considera solo per valori positivi o nulli della base;

7. la potenza con base ed esponente variabili si considera solo per valori positivi della base;

8. le funzioni goniometriche $y = \sin x$ e $y = \cos x$ esistono per ogni x reale, mentre $y = \tan x$ esiste per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $y = \cot x$ esiste per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

9. le funzioni $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ sono definite per $-1 \leq x \leq 1$ mentre $y = \arctan x$ e $y = \operatorname{arccot} x$ esistono $\forall x \in \mathbb{R}$.

34.3 Peculiarità delle funzioni: richiami ed integrazioni

34.3.1 Funzioni pari e dispari

Una funzione f di equazione $y = f(x)$ e di dominio D si dice

- **pari** se, per qualsiasi $x \in D$, si ha $f(x) = f(-x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y;
- **dispari** se $\forall x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$; il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

34.3.2 Periodicità di una funzione

Si dice che una funzione di equazione $y = f(x)$ è periodica di periodo T (con $T > 0$) se, per qualsiasi numero k intero relativo, si ha

$$f(x + kT) = f(x)$$

Ogni intervallo di lunghezza T contenuto nel dominio si chiama *intervallo di periodicità*; basterà disegnare il grafico di f su un qualunque intervallo di periodicità per conoscere il grafico di f su tutto il suo dominio.
Alcune considerazioni sulla determinazione della periodicità di una funzione nei casi meno immediati:

- in generale, $\forall \omega > 0$, se $f(x)$ ha periodo T, allora $f(\omega x)$ ha periodo $\frac{T}{\omega}$;
- supponendo di cercare il periodo della funzione $h(x)$ definita mediante una operazione algebrica su due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di cui si conosce il periodo, il periodo di $h(x)$ è il minimo comune multiplo tra i due periodi di $f(x)$ e $g(x)$ se esiste[4]. Se questo non esiste, la funzione *non è periodica.*

[4] Ad esempio non esiste l'mcm tra un intero e un numero reale

Esempi Ad esempio se vogliamo calcolare il periodo di :

$$\sin 4x - 5\cos 6x$$

$\sin 4x$ ha periodo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, mentre $-5\cos 6x$ ha periodo $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; il minimo comune multiplo tra i due è π.
Se volessimo invece calcolare il periodo di:

$$\sin(2x) \cdot \cos(\pi x)$$

$\sin 2x$ ha periodo π mentre $\cos \pi x$ ha periodo 2; il multiplo tra i due non esiste in quanto π è irrazionale, quindi la funzione non è periodica.

34.3.3 Composizione di funzioni

Funzione composta Una funzione g tra due insiemi X e Y trasforma ogni elemento $x \in X$ in uno $z \in Y$: in presenza di un'altra funzione f che trasforma ogni elemento di Y in un elemento di un altro insieme $y \in C$, si definisce **funzione composta**, scritta $f \circ g$ la funzione che trasforma ogni elemento di X in uno di C usando prima g e poi f (e non viceversa). f e g si dicono funzioni componenti. La funzione composta avrà l'equazione:

$$y = f(g(x))$$

Ad esempio se:

$$\begin{aligned} f: &\quad x \to x+1 \\ g: &\quad x \to x^2 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} f \circ g &\quad y = f(g(x)) = x^2 + 1 \\ g \circ f &\quad y = g(f(x)) = (x+1)^2 \end{aligned}$$

34.3.4 Monotonia di una funzione

Una **funzione monotona in un intervallo** è così detta se, nello stesso, è sempre crescente (funzione monotona crescente) oppure sempre decrescente (funzione monotona decrescente).
Per la determinazione della monotonia di una funzione si può in prima istanza evitare lo studio sistematico della funzione o il disegno del grafico ma limitarsi a ragionare sulla somma e composizione di funzioni monotone di base (ovvero di cui si conosce la monotonicità e l'andamento) tenendo in mente alcuni principi generali:

- se f e g sono crescenti lo è anche $f \circ g$, infatti

$$x_1 < x_2 \implies g(x_1) < g(x_2) \implies f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

- se g è crescente ed f decrescente, allora $f \circ g$ è decrescente, infatti

$$x_1 < x_2 \implies g(x_1) < g(x_2) \implies f(g(x_1)) > f(g(x_2))$$

La stessa conclusione naturalmente vale se g è decrescente ed f crescente

Esempi Se si studia la monotonicità di:

$$2^{3x+x^3}$$

si può concludere che essa è crescente in tutto $\mathbb{R}$, poiché è la composizione di due funzioni crescenti in quel dominio. Considerando invece la monotonia di:

$$\log_{1/2}(1+4x)$$

la funzione $f(x) = 1 + 4x$ è crescente mentre $g(t) = \log_{1/2} t$ è decrescente nel proprio dominio e quindi la funzione risultante sarà nel proprio dominio decrescente.

34.4 Funzione inversa

Se f è una funzione biettiva, allora è possibile definire la funzione inversa, che si indica con f^{-1}; questa è la funzione che associa ad ogni $y \in Y$ la sua controimmagine $x \in X$.
Partendo da $y = f(x)$, come ottenere la funzione inversa (dove possibile mediante elaborazione algebrica)? Dopo aver ricavato se possibile l'equazione $x = g(y)$, si può sostituire in quest'ultima la sostituzione $[x \to y, y \to x]$. Il grafico dell'inversa è pertanto ottenuto mediante una trasformazione geometrica, ovvero la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del 1° - 3° quadrante.

Esempi Scrivere la funzione inversa della seguente funzione, precisando il dominio della funzione inversa:

$$y = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{x}}$$

risolviamo l'equazione rispetto ad x; ricaviamo prima $\sqrt{x}$ vedendo l'equazione come equazione di primo gradi in $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
&(2 - \sqrt{x})y = 3 + 2\sqrt{x} \\
&\sqrt{x}(2 + y) = 2y - 3 \\
&\sqrt{x} = \frac{2y - 3}{2 + y}
\end{aligned}$$

Ora per ricavare x dobbiamo elevare ambo i membri al quadrato, il che però è lecito solo se il secondo membro è ≥ 0. Imponendo la condizione $\frac{2y-3}{2+y} \geq 0$ cioè $y < -2$ o $y \geq 3/2$ si ricava

$$x = \left(\frac{2y - 3}{2 + y}\right)^2$$

che è la funzione definita in $(-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty)$.

34.5 TODO

```
- grafici funzioni trigonometriche inverse: [BPS 1 pag 80]
  quando saranno facili da fare in tikz
```

Capitolo 35

Limiti e continuità delle funzioni

L'importanza del concetto di limite risiede nel fatto che esso è alla base del calcolo differenziale ed integrale. Informalmente studiare i limiti di una funzione in un punto consiste nello studiare l'andamento di tale funzione, qualora sia definita in almeno un intorno di quel punto, in prossimità dello stesso.

35.1 Introduzione

Vediamo due equivalenti definizioni di limite di funzione; la prima, detta successionale, lo riconduce al limite di successione[1] mentre la seconda, topologica, è indipendente da questa. Partiamo da quest'ultima.

35.1.1 Definizione topologica

Se $y = f(x)$ è una funzione reale di una variabile reale (del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) e $c \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione del dominio della funzione, allora $l \in \mathbb{R}^*$ si dice **limite di $f(x)$ per x che tende a c**, e si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{35.1}$$

se per ogni intorno J di l, esiste un intorno I di c tale che per ogni $x \in I \cap D \setminus c$ si ha $f(x) \in J$.

35.1.2 Definizione successionale

Consideriamo:

- un intervallo I (limitato/illimitato, chiuso o aperto)
- un punto $c \in I$; c può essere interno all'intervallo oppure uno dei suoi estremi;

[1] Ciò presenta il beneficio di poter riutilizzare le conoscenze sui limiti di successioni

- una funzione f a valori reali, definita in I salvo a più nel punto c

Si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

con $c, l \in \mathbb{R}^*$, se una qualunque successione $\{x_n\}$ di punti di I tale che $x_n \to c, x_n \neq c$ per $n \to +\infty$, si ha che la successione definita come $f(x_n) \to l$.

35.2 Tipologie di limiti

La casistica dei limiti nel caso di funzioni è più ricca e complessa rispetto al caso delle successioni perché mentre per una successione a_n il limite si calcola necessariamente per $n \to +\infty$, per una funzione $f(x)$ il limite si può calcolare per $x \to c$ con c qualsiasi valore in $\mathbb{R}^*$.

35.2.1 Tipologie standard

Chiariamo innanzitutto la terminologia; nella scrittura

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Parleremo di limite:

- finito se $l \in \mathbb{R}$
- infinito se $l = \infty \vee l = -\infty$

e parleremo di limite

- al finito se $c \in \mathbb{R}$ [2];
- all'infinito se $c = \infty \vee c = -\infty$ [3].

35.2.2 Limite destro, sinistro

Nel caso c sia un valore finito, può essere di interesse studiare l'andamento della funzione da sinistra (da valori minori di c) oppure da destra. Si scriverà rispettivamente:

$$\lim_{x \to c^-}$$
$$\lim_{x \to c^+}$$

giungendo così ai concetti di **limite sinistro e destro**. In particolare

- la funzione ha per **limite sinistro** il numero l_1, se per un ε piccolo a piacere, è possibile determinare un *intorno sinistro* di c, contenuto in I, tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$. Si scriverà allora

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \tag{35.2}$$

[2] Alternativamente in questo caso si parlerà di limite per x che tende a valore finito
[3] Alternativamente in questo caso si parlerà di limite per x che tende a valore infinito

- la funzione ha per **limite destro** il numero l_2, se per un ε piccolo a piacere, è possibile determinare un *intorno destro* di c, contenuto in I, tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$. Si scriverà allora

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l_2 \tag{35.3}$$

Se limite sinistro e destro esistono ma sono diversi

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

si dice che *la funzione non ammette limite per x tendente a c*; alternativamente la funzione, per x tendente a c (da destra o sinistra), ha limite (*tout court*, non destra ne sinistra) pari a $l_1 = l_2 = l$.

35.2.3 Limite per eccesso e per difetto

Nel caso l sia finito, si può qualificare ulteriormente se la funzione tenda al limite da valori superiori o inferiori allo stesso.

Facendo uso della definizione successionale, se $l \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^*$ si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = l^+ \tag{35.4}$$

e si legge che $f(x)$ tende a l per eccesso per x tendente a c, se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di I diversi da c si ha che, per $n \to +\infty$, $f(x_n) \to l^+$.
Ovvero affermare che $f(x_n) \to l^+$ equivale ad affermare che:

- $f(x_n) \to l$ e che
- $f(x_n) \geq l$ definitivamente

Ad esempio

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

Un errore comune consiste nel pensare che il simbolo 0^+ denoti un numero diverso da zero e poco più grande di 0. Sbagliato: il limite della funzione è il solito zero; semplicemente la scrittura 0^+ aggiunge una informazione: la funzione tende a zero per eccesso, ossia i valori di $f(x)$ tendono a 0 mantenendosi non negativi

Specularmente avviene nel caso del limite per difetto

$$\lim_{x \to c} f(x) = l^- \tag{35.5}$$

35.3 Verifica di limite (definizione topologica)

Considerando la definizione topologica di limite, particolarizzando il concetto di intorno di c ai casi $c \in \mathbb{R}$ o $c = \pm\infty$, la definizione stessa si traduce in opportuni criteri di verifica per quattro tipologie di limiti (limite finito o infinito, per $x \to$ valore infinito/infinito).

35.3.1 Limite finito per x tendente a valore finito

Supponendo che la funzione sia definita nell'intorno di c (non necessariamente nel punto c stesso) di cui si desidera studiare il comportamento, per verificare la correttezza di un generico limite

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{35.6}$$

nei casi più comuni si dovrà risolvere la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \tag{35.7}$$

che consiste nel determinare i valori delle x in corrispondenza delle quali la funzione si distanzia (in valore assoluto) dal valore l di un ammontare piccolo a piacere; può accadere che

- la soluzione non sia un intorno di c; in tal caso $f(x)$ non tende a l per x tendente a c
- la soluzione sia un intorno destro di c: $f(x)$ ha per *limite destro* di c il valore l
- la soluzione sia un intorno sinistro di c: $f(x)$ ha per *limite sinistro* di c il valore l
- la soluzione sia un intorno completo di c: $f(x)$ tende a l per x tendente a c (*limite*)

Si osservi che **non si tiene conto del valore assunto dalla funzione in** $x = c$: nel risolvere la disequazione è sempre lecito supporre $x \neq c$.

Limite per eccesso/difetto Oltre a sapere il limite, può a volte esser necessario verificare/determinare se al valore del limite la funzione ci tenda **per eccesso o per difetto**, da sinistra piuttosto che da destra. $f(x)$ tende per difetto quando si ha che $f(x) \leq l$ nell'intorno di c considerato; $f(x)$ tende per eccesso quando se invece ha che $f(x) \geq l$ nell'intorno di c considerato.
Si osservi che combinando in tutti i modi possibili i tre casi:

$$x \to c^-, x \to c, x \to c^+$$

con i tre casi

$$\lim f(x) = l^-, \lim f(x) = l, \lim f(x) = l^+$$

Si ottengono complessivamente nove combinazioni, delle quali abbiamo trattato la verifica dei casi principale $\lim_{x \to c} f(x) = l, \lim_{x \to c^-} f(x) = l, \lim_{x \to c^+} f(x) = l$.
In merito alle rimanenti 6 combinazioni, a titolo di esempio per una, per verificare che una funzione ha limite per difetto per x tendente a c dalla sinistra bisogna verificare che:

$$l - \varepsilon < f(x) \leq l$$
$$0 \leq l - f(x) < \varepsilon$$

e constatare che la soluzione ricade in un intorno di c.

35.3.2 Limite finito per x tendente a valore infinito

Si dice che per x tendente a $+\infty$, la funzione $f(x)$, definita in un intorno I di $+\infty$ ha per limite l e si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$$

se fissato un ε piccolo a piacere la disequazione

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$

sia soddisfatta per un intorno di $+\infty$.
A contrario

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$$

se la disequazione è soddisfatta per un intorno di $-\infty$.
Se soddisfatta per intorni di $\pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

Se limite a più e meno infinito differiscono (o non esistono entrambi) si dice che la funzione non ammette limite (tout court) per $x \to \infty$. Se invece

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

allora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

Specularmente al caso precedente si può determinare se al limite la funzione ci arriva per difetto o per eccesso. Ad esempio possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l^+$$

se la disequazione

$$\begin{aligned} l &\le f(x) < l + \varepsilon \\ 0 &\le f(x) - l < \varepsilon \end{aligned}$$

è soddisfatta per un intorno di $+\infty$.

35.3.3 Limite infinito per x tendente a valore finito

Considerando la funzione di equazione $y = \frac{1}{x-1}$, si nota che quanto più x si approssima a 1 da sinistra tanto più $f(x)$ tende a $-\infty$, mentre per x tendente a 1 da destra, $f(x)$ tende a $+\infty$.
Per verificare se per un determinato intorno del punto c:

- la funzione ammette limite a $+\infty$, occorre risolvere la disequazione

$$f(x) > M \tag{35.8}$$

con M positivo grande a piacere, e verificare che le soluzioni costituiscono un intorno di c. In tal caso si potrà scrivere

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

a seconda che l'intorno verificato sia sinistro, destro o completo.

- la funzione ammette limite a $-\infty$, occorre risolvere la disequazione

$$f(x) < -M \tag{35.9}$$

In generale, per verificare/dimostrare che in un determinato intorno del punto c la funzione ha limite tendente a più o meno infinito occorre risolvere la disequazione

$$|f(x)| > M \tag{35.10}$$

con M grande a piacere, la quale viene soddisfatta per

$$f(x) < -M \vee f(x) > M \tag{35.11}$$

Quindi se una funzione per un punto c presenta $f(x) \to \infty$ significa che in prossimità di c essa tende a $\pm\infty$ per un dato intorno.
Anche in questo caso si studia l'andamento della funzione in prossimità di c, pertanto nella risoluzione delle disequazioni è sempre lecito supporre $x \neq c$.

35.3.4 Limite infinito per x tendente a valore infinito

Considerando $f(x) = x^3$, è una funzione sempre definita, e pertanto definita anche in un intorno di $\pm\infty$. Può esser di interesse determinare il comportamento per $x \to \pm\infty$.
Si dice che per x tendente all'infinito, $f(x)$ ha per limite infinito e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{35.12}$$

se la disequazione

$$|f(x)| > M$$
$$f(x) > M \vee f(x) < -M$$

ha per soluzione sia un intorno di $+\infty$ che di $-\infty$.

Più precisamente si può scrivere:

1. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) < -M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $-\infty$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) < -M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $+\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) > M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $-\infty$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
4. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) > M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $+\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ se si verificano le condizioni 1 e 2
6. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ se si verificano le condizioni 3 e 4

Si dice
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{35.13}$$
se si verificano alternativamente le condizioni 5, 6 , 1 e 4 contemporaneamente, 2 e 3 contemporaneamente.

35.4 Verifica di limite (definizione successionale)

Alcuni esempi seguono.

35.4.1 Limite finito per x tendente ad infinito

Verifichiamo che
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
Occorre provare che per qualsiasi $\{x_n\} \to -\infty$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = 0$$
Si nota come sia cambiato sia il pedice del limite che l'espressione sotto limite. Ora, per definizione del limite di successione questo significa che fissato $\varepsilon > 0$ risulti definitivamente:
$$|e^{x_n}| < \varepsilon$$
e considerando che l'esponenziale è sempre > 0
$$e^{x_n} < \varepsilon$$
Quest'ultima è equivalente a
$$x_n < \log \varepsilon$$
Se ε è un positivo molto piccolo $\log \varepsilon$ sarà un numero negativo grande in valore assoluto; poniamo $K = -\log \varepsilon > 0$. Dobbiamo provare che fissato questo K risulta che definitivamente $x_n < -K$; ma questo è vero per ipotesi, perché $x_n \to -\infty$, e quindi abbiamo concluso la dimostrazione.

35.4.2 Limite infinito per x tendente ad infinito

Dimostriamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \log_{1/2} x = -\infty$$
Dobbiamo provare che per qualsiasi successione $\{x_n\} \to +\infty$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \log_{1/2} x_n = -\infty$$

A sua volta questo significa provare che fissato $K > 0$ qualsiasi risulti definitivamente

$$\log_{1/2} x_n < -K$$

il che equivale, definitivamente, a:

$$x_n > \left(\frac{1}{2}\right)^{-K} = 2^K$$

Ma per ipotesi $x_n \to +\infty$, quindi fissata la quantità positiva 2^K, certamente risulta definitivamente $x_n > 2^K$ e l'asserto è dimostrato.

35.4.3 Limite infinito per x tendente a valore finito

Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Dobbiamo provare che per qualsiasi successione $\{x_n\} \to 0$ e $x_n \neq 0 \forall n$ (precisazione che diventa ora importante) si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$$

Ciò significa provare che fissato $K > 0$ qualsiasi risulti definitivamente

$$\frac{1}{x_n^2} > K$$

equivalente a

$$|x_n| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Ma per ipotesi $x_n \to 0$ quindi fissata la quantità positiva $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{K}}$, certamente risulta $|x_n| < \varepsilon$ definitivamente, e l'asserto è dimostrato.

35.4.4 Limite finito per x tendente a valore finito

Esempio 1 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

Si può procedere come segue; dalla diseguaglianza valida $\forall x \in \mathbb{R}$ (si pensi alla circonferenza trigonometrica)

$$|\sin x| \leq |x|$$

leggiamo che

$$|\sin x_n| \leq |x_n|$$

e quindi per il teorema del confronto (tra successioni) se $x_n \to 0$, anche $\sin x_n \to 0$. Abbiamo così dimostrato il limite.

Esempio 2 Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

Applicando la definizione di limite si vede subito che il limite vale 1. Infatti se per $n \to +\infty$ $x_n \to 0$ ma $x_n \neq 0$, risulta $f(x_n) = 1, \forall n$, e quindi $f(x_n) \to 1$ per $n \to +\infty$.
In questo caso, a differenza dell'esempio precedente si ha che il limite non corrisponde con il valore assunto dalla funzione.

35.5 Esistenza, unicità e non esistenza del limite

Esistenza ed unicità Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ esiste tale limite l è unico. La dimostrazione, se adottiamo la definizione successionale deriva dal fatto che se esistessero due limiti l_1, l_2 diversi tra loro, presa una qualsiasi successione $x_n \to c$ si avrebbe:

$$f(x_n) \to l_1 \wedge f(x_n) \to l_2$$

ovvero la successione $f(x_n)$ avrebbe due limiti distinti, che per la dimostrazione di unicità del limite nelle successioni è impossibile.

Non esistenza del limite Il limite di una funzione può anche non esistere. Ad esempio il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$

non esiste. Per dimostrarlo è sufficiente trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergenti a $+\infty$ tendano a due limiti diversi. Si può scegliere $x_n = n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; in corrispondenza di tali successioni si ha $\sin x_n = 0$ e $\sin y_n = 1$ e quindi la definizione di limite non è soddisfatta.
Anche il limite

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

non esiste. Ad esempio sia $x_n = 1/(2n\pi)$, $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$. Entrambe le successioni tendono a 0 ma $\sin \frac{1}{x_n} = 0$ mentre $\sin \frac{1}{y_n} = 1$. Poiché lungo successioni diverse che tendono a 0 la funzione ha limite diversi, il limite della funzione non esiste.

35.6 Teoremi sui limiti

Si è già esposto il teorema di unicità del limite. Nel seguito, si presentano ulteriori teoremi sui limiti, spesso utili nel calcolo e nelle dimostrazioni.
Si farà utilizzo in seguito della nozione di **proprietà vera definitivamente** per $x \to c$: diciamo che una funzione $f(x)$ ha una certa proprietà definitivamente per $x \to c$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà vale per $f(x)$ per ogni $x \in U, x \neq c$.

Le dimostrazioni discendono in larga parte da quelle sulle proprietà dei limiti nelle successioni[4].

35.6.1 Teoremi del confronto

Per determinare il limite di una funzione si applicano spesso i seguenti teoremi:

Primo teorema del confronto se definitivamente per $x \to c$ sono definite le funzioni $f(x), g(x), h(x)$ ed è

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{35.14}$$

se $f(x)$ e $h(x)$ tendono definitivamente allo stesso limite finito l, allora è anche

$$\lim_{x \to c} g(x) = l \tag{35.15}$$

Secondo teorema del confronto : se definitivamente per $x \to c$ due funzioni sono tali che

$$|f(x)| \leq |g(x)| \tag{35.16}$$

e $g(x)$ tende definitivamente a zero per $x \to c$, allora anche $f(x)$ tende a zero per $x \to c$.

Terzo teorema del confronto se definitivamente per $x \to c$ due funzioni sono tali che

$$|g(x)| \geq |f(x)| \tag{35.17}$$

e $f(x)$ tende a infinito per $x \to c$, allora anche $f(x)$ tende a infinito per $x \to c$.

Prodotto di funzione infinitesima per funzione finita Corollario dei precedenti è che se:

- $f(x) \to 0$ per $x \to 0$
- $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \to c$

Allora

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Esempio Come esempio di applicazione del teorema del confronto si può mostrare che

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Infatti, poiché $|\sin| \frac{1}{x} \leq$, se moltiplico entrambi i membri di questa per il valore positivo $|x|$ ottengo

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

da cui per il teorema del confronto $x \sin \frac{1}{x} \to 0$. Tale conclusione è interessante perché il fattore $\sin \frac{1}{x}$ da solo non ammette limite, quindi non si sarebbe potuto applicare il teorema sul limite del prodotto.

[4]Cfr. Bramanti 1 pag 122

35.6.2 Teorema della permanenza del segno

Vi sono due forme

Prima forma Se:

- $\lim_{x\to c} f(x) = l$
- $l > 0$

Allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$.

Seconda forma Se:

- $\lim_{x\to c} f(x) = l$
- $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$;

Allora $l \geq 0$.

35.6.3 Teoremi sull'algebra dei limiti

35.6.3.1 Somma algebrica di funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni che ammettono per x tendente a c (finito o infinito) due limiti *finiti*, l_1 e l_2, **il limite della somma algebrica delle due funzioni è la somma algebrica dei loro limiti**[5]:

$$\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = l_1 \pm l_2 \tag{35.18}$$

Il risultato si può estendere anche al caso della somma di più di funzioni.

Per dimostrarlo, sia x_n una qualsiasi successione tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ e $x_n \neq c, \forall n$; allora per ipotesi si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l_1$ e $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = l_1$. Dal teorema sull'algebra dei limiti per successioni si conclude quindi che $f(x_n) \pm g(x_n) \to l_1 \pm l_2$ e quindi $f(x) \pm g(x) \to l_1 \pm l_2$.
In modo perfettamente analogo si dimostrano gli altri teoremi inerenti l'algebra dei limiti.

Limiti non entrambi finiti Nel caso i **limiti** delle due funzioni non siano entrambi finiti abbiamo le casistiche riportate in tabella 35.2. La somma algebrica dei limiti può condurre a forme indeterminate tipo $+\infty - \infty$, e in tali casi il limite può esser finito, infinito o non esistere; si affronteranno questi casi nel prosieguo.

35.6.3.2 Prodotto di due funzioni

Il limite del prodotto di due funzioni che ammettono limite finito per $x \to c$ è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni:

$$\lim_{x\to c} [g(x) \cdot f(x)] = l_1 \cdot l_2$$

Analogamente per il prodotto di più di due funzioni.
Se invece non entrambi tendono a valori finiti:

[5] Da questo risultato deriva che la somma algebrica di funzioni continue in un punto c è una funzione continua nel medesimo punto.

$\lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to c} g(x)$	Risultato
l	$\pm\infty$	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \pm\infty$
l	$\pm\infty$	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \mp\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = +\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c}[g(x)-f(x)] = -\infty$

Tabella 35.1: Limiti della somma di due funzioni non entrambe finite

- uno tende ad infinito e l'altro a valore finito ($\neq 0$), il limite del prodotto tenderà ad infinito con opportuno segno;
- se entrambi tendono a infinito, il limite del prodotto tenderà ad infinito con opportuno segno;
- nel caso uno tenda a 0 e l'altro a ∞, si ha una seconda *forma indeterminata*, quella del tipo $[0\cdot\infty]$ e il limite può a seconda dei casi, sia esser finito che infinito che non esistere

35.6.3.3 Potenza di una funzione

Altra conseguenza del limite del prodotto è che il limite della potenza, con esponente n intero positivo, di una funzione che tende a un limite finito per $x \to c$ è la potenza n-esima del limite

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

Se invece $\lim f(x) = \pm\infty$ si ha per n pari $\lim[f(x)]^n = +\infty$, e per n dispari $\lim[f(x)]^n = \pm\infty$.

35.6.3.4 Modulo di una funzione

Se per $x \to c$ la funzione $f(x)$ definita in un intorno di c, escluso al più c, tende a un limite finito l, allora il limite del modulo della funzione è il modulo del limite, ossia

$$\lim_{x\to c}|f(x)| = |l| \tag{35.19}$$

35.6.3.5 Reciproco di una funzione

Se per $x \to c$, la funzione $f(x)$ tende al limite finito l, diverso da 0, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ tende, sempre per $x \to c$, al limite $\frac{1}{l}$:

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}, \quad (l \neq 0)$$

35.6.3.6 Quoziente di due funzioni

Il limite del quoziente di due funzioni, che ammettono limiti finiti per $x \to c$ e la seconda delle quali tende a un limite diverso da zero, è uguale al quoziente

$\lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to c} g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
$l \neq 0$	0	∞
∞	l	∞
l	∞	0

Tabella 35.2: Limiti del quoziente di due funzioni non entrambe finite per $x \to c$.

dei limiti:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (l_2 \neq 0)$$

Casi notevoli sono esposti in tabella: Nel caso in cui entrambe tendano a 0 o entrambe a infinito si hanno le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

35.6.3.7 Funzione opposta

Elaborando algebricamente la diseguaglianza

$$|f(x) - l| < \varepsilon \tag{35.20}$$

che caratterizza l'esistenza del limite si può dimostrare che:

- se una funzione $f(x)$ ammette il limite finito l, la funzione $-f(x)$ ammette il limite $-l$
$$|[-f(x)] - [-l]| < \varepsilon \tag{35.21}$$
- se una funzione $f(x)$ ha per limite l, la funzione $f(x) - k$ ha per limite $l - k$
$$|[f(x) - k] - [l - k]| < \varepsilon \tag{35.22}$$

35.6.3.8 Modulo di una funzione

Se per $x \to c$ la funzione $f(x)$, definita in un intorno di c (esclusi eventualmente c), tende al limite finito l, allora

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |l| \tag{35.23}$$

ossia il limite del modulo di una funzione è il modulo del limite.

35.7 Funzioni continue

35.7.1 Introduzione

Come visto, il limite per $x \to c$ di una funzione può esistere o meno indipendentemente dal fatto che $f(x)$ sia definita per $x = c$; inoltre, se tale limite esiste ed $f(c)$ è definita, il limite può coincidere con $f(c)$ o meno.
Diciamo allora che una funzione $y = f(x)$, definita in un intorno di c, si dice **continua nel punto** c quando:

1. il punto c appartiene al dominio della funzione

2. *esiste ed è finito* il limite della funzione per x tendente a c, e
3. detto limite è uguale al valore della funzione in quel punto

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{35.24}$$

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata non è verificata la funzione non è continua nel punto $x = c$, e si dice che c è un **punto di discontinuità**.
Dal punto di vista del **calcolo dei limiti**, il **beneficio** è che se si sa che una funzione $f(x)$ è continua in un punto c, il calcolo del limite per $x \to c$ è immediato, e consiste nel calcolare $f(c)$.

Continuità da destra/sinistra La definizione di continuità può essere cosi completata: quando si ha

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

si dice che $f(x)$ è **continua in c da sinistra**; altrimenti se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

si dice che $f(x)$ è **continua in c da destra**.
Una funzione $f(x)$ si dice **continua in un intervallo** I, se essa è continua in tutti i punti di I.

35.7.2 Continuità delle funzioni elementari

Per il calcolo dei limiti sono utili i seguenti risultati: mediante gli step evidenziati in precedenza, si può dimostrare come esercizio che le seguenti funzioni elementari sono continue in tutti il proprio dominio:

- funzioni potenza $y = x^\alpha$ con esponente intero, razionale o reale
- funzioni esponenziali $y = a^x$ con $a > 0$;
- funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$;
- funzioni trigonometriche elementari (seno/coseno).

35.7.3 Algebra delle funzioni continue

Siano f, g due funzioni:

- definite almeno in un intorno $x_0 \in \mathbb{R}$
- continue in x_0

Allora sono continue in x_0 anche le seguenti

$$\begin{aligned}
&f(x) \pm g(x)\\
&f(x) \cdot g(x)\\
&f(x)/g(x) \quad \text{purché } g(x_0) \neq 0
\end{aligned}$$

Per questi teoremi sull'algebra delle funzioni continue possiamo ad esempio affermare che:

- i polinomi sono funzioni continue in quanto ottenuti sommando funzioni del tipo cx^n continue per la continuità delle funzioni potenza
- le funzioni razionali (cioè i quozienti di polinomi) sono continue tranne nei punti in cui si annulla il denominatore
- tangente e cotangente sono continue ovunque nel proprio dominio, essendo seno e coseno continui in $\mathbb{R}$

Dimostrazione Per la dimostrazione, proviamo ad esempio la terza (le altre sono analoghe e più semplici). Premettiamo il **teorema di permanenza del segno per funzioni continue**:

- se vale
$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$
- e definitivamente per $x \to c$ si ha che $f(x) > 0$

allora $l \geq 0$.
Passiamo alla dimostrazione della continuità della fratta; per ipotesi sappiamo che f e g sono continue in x_0 ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Inoltre $g(x_0) \neq 0$ e quindi per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue definitivamente per $x \to x_0$ si ha che $g(x) \neq 0$. Allora per il teorema sull'algebra dei limiti delle successioni si conclude che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \to$$

per $x \to x_0$ ossia f/g è continua in x_0

35.7.4 Limiti e continuità delle funzioni composte

Un'altra operazione che "conserva" i limiti e la continuità è la composizione di funzioni. Partiamo dal seguente risultato inerente il limite delle funzioni composte

Teorema del cambiamento di variabile nel limite Siano f, g due funzioni la cui composizione $f \circ g = f(g(x))$ è definita almeno definitivamente per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Siamo interessati al limite

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \tag{35.25}$$

Supponiamo che valgano le seguenti:

1. esiste
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$$
con $x_0, t_0 \in \mathbb{R}^*$

2. esiste
$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R}^*$$

3. infine definitivamente per $x \to x_0$
$$g(x) \neq t_0$$

Allora esiste:
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{t\to t_0} f(t) = l \tag{35.26}$$

Per la dimostrazione basta osservare che:

- se x_n è una qualsiasi successione tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ e $x_n \neq x_0, \forall n$ allora
- per la prima ipotesi $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = t_0$ e per l'ipotesi tre definitivamente $g(x_n) \neq t_0$
- pertanto per l'ipotesi due $f(g(x_n)) \to l$, e questo prova la tesi

Se

- $t_0 = \pm\infty$ la condizione $g(x) \neq \pm\infty$ è ovviamente verificata
- se f è continua in t_0, $l = f(t_0)$ perciò nel caso risultasse $g(x_n) = t_0$ per qualche n si avrebbe
$$f(g(x_n)) = f(t_0) = l$$
e quindi la convergenza $f(g(x_n))$ sarebbe comunque garantita

Teorema di continuità della funzione composta Dal precedente segue il prossimo teorema. Se:

1. g è una funzione definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0
2. f è una funzione definita almeno in un intorno di $t_0 = g(x_0)$ e continua in t_0

Allora $f \circ g$è definita almeno in un intorno di x_0 ed è continua in x_0.
La dimostrazione: poiché g è continua in x_0
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = t_0$$
allora per il teorema del cambio di variabile nel limite si ha
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{t\to t_0} f(t)$$
e poiché f è continua in t_0, allora
$$f(t_0) = f(g(x_0))$$
e la tesi è dimostrata.

Considerazioni conclusive sulla continuità delle funzioni Tutte le funzioni che si possono ottenere con somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, per quanto visto in precedenza, sono continue nel loro insieme di definizione. In questo caso il calcolo dei limiti si riduce a valutare la funzione nel punto in cui si vuole calcolare il limite. Ad esempio

$$\lim_{x\to\pi} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\sin \pi} = 0$$
$$\lim_{x\to 1} e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

35.7.5 Discontinuità

Come detto anche quando una sola condizione per la continuità non è soddisfatta, la funzione è discontinua in quel punto. È consuetudine suddividere i punti di discontinuità in tre specie

Punti di discontinuità di prima specie Si dice che $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di prima specie quando i limiti da destra e da sinistra:

- esistono
- sono *finiti*
- sono tuttavia *diversi*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x) \tag{35.27}$$

In questi casi si chiama **salto** della funzione in $x = c$ il valore assoluto della differenza tra il limite destro e sinistro

$$\left| \lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x) \right| \tag{35.28}$$

Punti di discontinuità di seconda specie Si dice che per $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di seconda specie quando *almeno uno* dei due limiti (da destra o sinistra) alternativamente:

- non esiste o
- è infinito

Punti di discontinuità di terza specie Si dice che per $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di terza specie (detto anche *eliminabile*) quando contemporaneamente:

- esiste il limite per $x \to c$ di $f(x)$

  $$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

  quindi limite destro e sinistro coincidono

- tuttavia $f(c)$ non esiste o è diversa dal valore del limite nel punto

In questi casi si dice che la discontinuità è eliminabile se si pone arbitrariamente $f(c) = l$; in questo modo si dice che la funzione è prolungata per continuità. Un esempio è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Infatti come si vedrà nei limiti notevoli $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ma la funzione non è definita per $x = 0$.

35.8 Proprietà delle funzioni continue o monotone

Consideriamo in questa sezione le proprietà assunte delle funzioni continue o monotone in un dato intervallo del loro dominio.

35.8.1 Proprietà delle funzioni continue

Le proprietà delle funzioni continue viste in precedenza si fondavano sul concetto di continuità in un punto; come si vedrà ora, è soprattutto il fatto che una funzione sia continua in un intervallo ad avere conseguenze interessanti.
La proprietà di continuità su un intervallo ha una semplice interpretazione geometrica: il grafico della funzione su quell'intervallo si può tracciare "senza staccare la penna dal foglio".

Le proprietà di cui godono le funzioni continue sono espresse da alcuni importanti teoremi[6].

35.8.1.1 Teorema di esistenza degli zeri

Se:

- la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e
- negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto

Allora:

- esiste almeno un punto c (detto *zero*), interno ad $[a; b]$, in cui è $f(x) = 0$;
- se la funzione f è anche monotona, lo zero è unico

Si osservi che il teorema afferma che vi è almeno un punto, ma tali punti possono essere più di uno; in altre parole il teorema assicura che l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo aperto $(a; b)$.

35.8.1.2 Teorema di Weierstrass

Se la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, allora la funzione assume, in tale intervallo, un valore minimo e un valore massimo.

[6]Dimostrazioni sul Bramanti 1 da pag. 136

35.8.1.3 Teorema di Darboux (dei valori intermedi)

Se la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, allora la funzione assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

35.8.2 Proprietà delle funzioni monotone

Ci si occupa ora di funzioni monotone (sempre crescenti o decrescenti, anche in senso lato) su un intervallo, non necessariamente continue.

35.8.2.1 Esistenza del limite

Per le funzioni monotone vi sono teoremi che garantiscono l'esistenza del limite sotto opportune condizioni.

Se $y = f(x)$ è una funzione definita e **crescente** (anche in senso lato) in un **intorno sinistro** I del punto c, allora la funzione ammette limite per $x \to c$ per difetto, in quanto:

- se la funzione è limitata superiormente in I, e se L è l'estremo superiore dei valori di $f(x)$ al variare di x in I si ha che
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L^-$$
- se la funzione non è limitata superiormente allora si ha
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$$

Se la funzione è definita e crescente in un **intorno destro** del punto c, la funzione ammette limite per $x \to c$ per eccesso e precisamente;

- se la funzione è limitata inferiormente in I, e se l è l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$ al variare di x in I si ha che
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l^+$$
- se la funzione non è limitata inferiormente allora si ha
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

Specularmente ai casi precedenti avviene qualora la funzione sia **decrescente**.

35.8.2.2 Teorema di monotonia

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per ogni $c \in (a, b)$, per per $x \to c$ esistono finiti i limiti destro e sinistro; ai due estremi a, b esistono i limiti destro (in a) e sinistro in b, eventualmente infiniti.

Conseguenza Una conseguenza del teorema di monotonia è che se una funzione è monotona in un intervallo (a, b), i suoi eventuali punti di discontinuità in (a, b) sono necessariamente **discontinuità a salto**, ad eccezione degli estremi a, b in cui si può avere anche un asintoto verticale.

35.8.3 Continuità e invertibilità

Ci occupiamo del problema dell'invertibilità di una funzione f, vedendo il problema dal punto di vista della continuità. Sappiamo già che:

- una funzione definita su un intervallo e strettamente monotona è invertibile, con inversa monotona
- sappiamo anche che viceversa non è vero in generale; esistono funzioni invertibili su un intervallo e non monotone

Tuttavia in merito a questa seconda, se aggiungiamo l'ipotesi di continuità, il teorema si inverte: sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora f è invertibile in I se e solo se è strettamente monotona. In tal caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e crescente.
Il teorema appena enunciato significa in particolare che una funzione continua e invertibile su un intervallo, ha inversa continua; questo è importante perché completa la continuità delle funzioni elementari infatti:

- la continuità di a^x implica la continuità di $\log_a x$;
- la continuità di $\sin x, \cos x, \tan x$ implica la continuità di $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$.

35.9 Limiti di funzioni razionali

35.9.1 Funzioni razionali intere

Una funzione razionale intera, la cui espressione consiste in un polinomio di grado n:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

è come noto continua, quindi il calcolo per $x \to c$, con c finito è immediata (basta sostituire c ad x nell'espressione e sviluppare i calcoli).
Nel caso però c sia $\pm\infty$ si può giungere a forme di indecisione del tipo $[+\infty - \infty]$.
Per eliminarle, raccogliere x^n a fattore comune:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^n\left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_n}{x^n}}_{0}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n)\end{aligned}$$

ovvero il limite per $x \to \infty$ di una funzione razionale intera è uguale al limite del suo termine di grado massimo.

35.9.2 Funzioni razionali fratte

La funzione razionale fratta del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$$

è continua per tutti i valori di x che non annullando il denominatore. Forme di indeterminazione si possono avere qualora x tenda a valore finito o infinito.

Limite per x tendente a valore finito Nel caso si desideri calcolare il limite per $x \to c$ (con c valore finito):

- se $Q(c) \neq 0$ allora la funzione per c è continua e il suo limite corrisponderà al valore assunto dalla funzione stessa
- se $Q(c) = 0 \wedge P(c) \neq 0$ la funzione tenderà ad infinito, con opportuno segno
- se $Q(c) = 0 \wedge P(c) = 0$ si avrà la forma di indecisione $\frac{0}{0}$; tuttavia questa si può risolvere considerando che sia numeratore che denominatore sono divisibili per $(x - c)$ (per il teorema del resto); si procederà scomponendo in fattori i polinomi e dividendo numeratore e denominatore per $(x-c)$. Si considera poi il limite della funzione razionale fratta ottenuta, che coincide, per $x \neq c$ alla funzione data.

Limite per x tendente a infinito Il limite per x **tendente ad infinito** presenta la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$; per eliminarla, raccogliamo a numeratore e denominatore la potenza di x di grado massimo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^m \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_m}{x^m}\right)}{x^n \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_n}{x^n}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{b_0} \cdot x^{m-n}\right)
\end{aligned}$$

A questo punto, il risultato dipende da m ed n:

- se $m > n$ il limite sarà più o meno infinito, a seconda che il limite cui si tende è $+\infty$ o $-\infty$ e la differenza tra m ed n sia pari o dispari;
- se $m = n$, $\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = 1$, quindi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$
- se $m < n$, $\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = 0$, e quindi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

35.10 Limiti notevoli

Sono limiti (di cui non occorre dimostrare la soluzione) cui si può cercare di ricondurre il limite esaminato per risolverlo agevolmente.

35.10.1 Limiti esponenziali e logaritmici

Un limite generale (la cui dimostrazione è laboriosa)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

una versione specifica e più famosa (di cui non si da dimostrazione) è

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

le proprietà delle funzioni esponenziali e logaritmiche si possono esprimere in forma particolarmente semplice se si adotta come base di tali funzioni il numero e; tale circostanza deriva proprio dall'essere e il limite di cui sopra. Numerosi limiti notevoli utili possono esser derivati da questo limite.

Il primo limite notevole derivato è:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Si dimostra operando un cambio di variabile $z=\frac{1}{x}$, da cui $x=\frac{1}{z}$, considerando che se $x\to 0$ allora $z\to\infty$, e:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$$

Un altro limite derivato è:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}\ a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

infatti:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\\&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)\\&\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\\&\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\\&\log_a e\end{aligned}$$

In particolare se $a=e$,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$$

Ulteriore limite derivabile dai precedenti:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a}\quad ,a>0$$

infatti, se poniamo $z=a^x-1$, da cui $x=\log_a(1+z)$, allora $x\to 0\iff t\to 0$ e il limite dato diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\frac{1}{\log_a e}=\log a$$

Il penultimo passaggio (dove è effettivamente calcolato il limite) è giustificato come inverso del limite notevole esposto poco sopra. Se poi $a=e$,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Ulteriore limite:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\theta}-1}{x} = \theta}$$

Per dimostrarlo, ponendo $z = (1+x)^{\theta} - 1$, deriva $\log(1+z) = \theta \log(1+x)$. Dunque $x \to 0 \iff z \to 0$. Sviluppando abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\theta}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{z}{x}\left[\frac{\theta \log(1+x)}{\log(1+z)}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{z}{\log(1+z)} \frac{\theta \log(1+x)}{x} = \theta$$

35.10.2 Limiti trigonometrici

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Il limite calcolato normalmente porterebbe alla forma indeterminata 0 su 0. La funzione è però pari perché $f(x) = f(-x)$; allora possiamo concentrarci su un valore positivo 0^+.
Se x è la misura in radianti di un angolo del primo quadrante della circonferenza goniometrica di raggio unitario (ovvero la lunghezza dell'arco rettificato che l'angolo forma), nel primo quadrante ($x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$)

$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo per il seno positivo e considerando gli inversi

$$\begin{aligned} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{aligned}$$

i valori di $\frac{\sin x}{x}$ sono compresi tra quelli di $\cos x$ (che tende a 1 per $x \to 0$) e il valore costante 1. Quindi in base al primo teorema del confronto possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Essendo poi $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ una funzione pari, infatti

$$f(-x) = \frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

si ha che la funzione sarà simmetrica rispetto all'asse y, e quindi assumerà gli stessi valori in presenza di x opposte, da cui

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pertanto sussiste il limite, dato che limite destro e sinistro coincidono.

Un limite derivato dal precedente è:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

La dimostrazione è la seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

Altro limite:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos x} = 1$$

Altri limiti notevoli trigonometrici:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1}$$

Per dimostrare la seconda delle tre (la terza presenta dimostrazione analoga) si può effettuare un cambio di variabile, imponendo $t = \arcsin x$ (da cui $x = \sin t$),

$$\lim_{x\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

35.11 Infinitesimi e infiniti: confronto e approssimazione

35.11.1 Infinitesimi

Una funzione $y = f(x)$ si dice *infinitesima* per $x \to c$ (c finito o infinito) se

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$

35.11.1.1 Confronto

Nella pratica occorre talvolta confrontare due funzioni che siano infinitesime contemporaneamente per $x \to c$ al fine determinare, appunto chi delle due tenda a zero più rapidamente. Ad esempio considerando due funzioni f e g entrambe infinitesime per $x \to c$ e dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

che con la sostituzione classica si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. I casi possibili (in seguito es ad uso di limiti notevoli, trick vari ecc) sono i seguenti:

- se dopo elaborazione del limite si ha
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$
allora si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** (a $g(x)$) nel senso che tende a 0 più velocemente di $g(x)$, e complessivamente il limite tende a 0
- se al contrario si ha
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$
allora si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** (a $g(x)$) nel senso che tende a 0 più lentamente di $g(x)$ e complessivamente il limite tende a ∞.
- se inoltre si ha
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$$
allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**, ovvero tendono a 0 con la stessa rapidità (ma il loro rapporto tende a un valore definito, diverso da 0).
- infine può essere che **non esista il limite ricercato** e in tal caso gli infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

35.11.1.2 Ordine e approssimazione

Ordine di un infinitesimo Può essere necessario determinare l'ordine di un infinitesimo (una sorta di ordine di grandezza). Consideriamo $f(x)$ e $\varphi(x)$, due infinitesimi simultanei per $x\to c$. Allora si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α ($\alpha>0$) rispetto a $\varphi(x)$ (assunto come infinitesimo di confronto) se
$$\lim\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{\alpha}}=l\neq 0$$
Come infinitesimo di confronto si usa generalmente

- $\varphi(x)=x$ se studiamo il limite per $x\to 0$
- $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ se studiamo il limite per $x\to\infty$
- $\varphi(x)=x-c$ se studiamo il limite per $x\to c$

Scrittura fuori dal segno di limite Sappiamo che se
$$\lim_{x\to c}f(x)=l$$
allora
$$\lim_{x\to c}(f(x)-l)=0$$
Possiamo considerare la funzione
$$\delta(x)=f(x)-l$$

che sulla base di quanto detto in precedenza è un infinitesimo per $x \to c$. Possiamo allora scrivere:

$$f(x) = l + \delta(x)$$

con $\delta(x) \to 0$ per $x \to c$. Questa è la scrittura della funzione fuori dal segno di limite: tale scrittura mostra come la funzione $f(x)$ si possa decomporre nella somma del suo limite per $x \to c$ e di un infinitesimo per $x \to c$.

Parte principale di un infinitesimo Se consideriamo un infinitesimo di ordine α per $x \to c$, allora rispetto a all'infinitesimo campione (scelto come detto in precedenza in ragione del valore c) per definizione abbiamo

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0$$

Ora, sfruttando la scrittura fuori dal segno di limite del precedente paragrafo abbiamo

$$\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l + \delta(x)$$

con $\delta(x) \to 0$ per $x \to c$. Elaborando algebricamente:

$$f(x) = l \cdot [\varphi(x)]^\alpha + \delta(x) \cdot [\varphi(x)]^\alpha$$

La funzione risulta così la somma di due infinitesimi (per $x \to c$):

- $l \cdot [\varphi(x)]^\alpha$ è detto **parte principale**: la parte principale è un infinitesimo dello stesso ordine α di $f(x)$
- $\delta(x) \cdot [\varphi(x)]^\alpha$ è detto **parte complementare**: questo è un infinitesimo di ordine superiore a α

In alcune questioni si suol sostituire all'infinitesimo $f(x)$, per approssimazione/semplificazione (perché si sta ignorando la parte complementare), la sua parte principale, scrivendo ad esempio

$$f(x) \sim l \cdot [\varphi(x)]^\alpha \tag{35.29}$$

Detta sostituzione può essere fatta solo in un intorno di $x = c$.

35.11.2 Infiniti

Considerazioni speculari si possono fare per gli infiniti. Una **funzione** $y = f(x)$ si dice **infinita** per $x \to c$ (c finito o infinito) se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \tag{35.30}$$

35.11.2.1 Confronto

Occorre talvolta confrontare due funzioni che tendono a infinito (determinando una situazione $\frac{\infty}{\infty}$) per lo stesso valore di x per determinare quale delle due vi tenda più velocemente. Possiamo avere le seguenti situazioni (in seguito a trick vari e limiti notevoli):

- se
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$
si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** rispetto a $g(x)$, quindi tende a infinito più rapidamente

- se
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$
si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$, quindi tende a infinito meno rapidamente

- se
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$$
$f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello **stesso ordine**.

- se infine non esiste il limite $f(x)$ e $g(x)$ si dicono **infiniti non confrontabili**

35.11.2.2 Ordine e approssimazione

Se per $x \to c$ (finito o infinito) $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono infiniti si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto all'infinito di riferimento $\varphi(x)$ se

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{\alpha}}=l\neq 0 \tag{35.31}$$

Solitamente l'infinito di riferimento è:

- $\varphi(x) = x$ se studiamo il limite per $x \to \infty$
- $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ se studiamo il limite per $x \to 0$
- $\varphi(x) = \frac{1}{x-c}$ se studiamo il limite per $x \to c$

Mediante la scrittura fuori dal segno di limite, si ha poi

$$f(x) = l\cdot[\varphi(x)]^{\alpha} + \delta(x)\cdot[\varphi(x)]^{\alpha}$$

e la funzione risulta decomposta in:

- $l\cdot[\varphi(x)]^{\alpha}$ è detto **parte principale**: la parte principale è un infinito dello stesso ordine α di $f(x)$
- $\delta(x)\cdot[\varphi(x)]^{\alpha}$ è detto **parte complementare**: questo è un infinito di ordine inferiore a α

35.11.2.3 Gerarchia di infiniti

Consideriamo le tre famiglie di funzioni

$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \qquad \text{con } \alpha, \beta > 0,\ a, b > 1$$

Allora per $x \to +\infty$ ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che le sta a destra; esplicitamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0 \tag{35.32}$$

A parole:

- qualunque potenza (positiva) di x prevale su qualunque potenza di $\log x$
- qualunque esponenziale (base > 1) di x prevale su qualunque potenza di x

Per la dimostrazione servono strumenti del calcolo infinitesimale dei quali ancora non si dispone.
Infine come corollario, ponendo $y = \frac{1}{x}$ nel primo limite di 35.32 si trova

$$\boxed{\lim_{y\to0^+} y^\beta \cdot (-\log y)^\alpha = 0} \quad \beta > 0, \forall\alpha \tag{35.33}$$

Esempi Alcuni esempi di impiego nel calcolo dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2^x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}} = 0$$
$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\log x = 0^-$$
$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\log x} = e^{0^-} = 1^-$$
$$\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \left[x = \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

35.11.2.4 Crescita di una funzione all'infinito

Supponendo di voler tracciare il grafico di una funzione f che per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) tende a $x \to +\infty$ (o $-\infty$).
Per descrivere la velocità con cui la funzione tende all'infinito diciamo che, per $x \to +\infty$:

- f ha crescita sopralineare se:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$
- f ha crescita lineare se:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$
con $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$

- f ha crescita sottolineare se:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Considerazioni speculari si possono fare per $x \to -\infty$). Esempi di funzioni con crescita sopralineare per $x \to +\infty$ sono gli esponenziali a^x e le potenze x^a con $a > 1$; esempi di funzioni con crescita sottolineare per $x \to +\infty$ sono i logaritmo $\log_a x$ e le potenze x^a con $0 < a < 1$.

35.12 Confronti e stime asintotiche

Due funzioni f e g dicono asintotiche per $x \to c$ se sono del medesimo ordine e in particolare

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \tag{35.34}$$

in tal caso si scrive

$$f \sim g, \quad \text{per } x \to c \tag{35.35}$$

Il simbolo di asintotico è una relazione di equivalenza, e fa si che nel calcolo dei limiti possiamo effettuare sostituzioni di una funzione con l'altra, se questo semplifica la risoluzione del limite.

Ad esempio, derivati dai limiti notevoli notevoli per $x \to 0$ si ha che

$$\begin{aligned}
&\sin x \sim x\\
&1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2\\
&e^x-1 \sim x\\
&\log(1+x) \sim x\\
&(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x
\end{aligned}$$

Le precedenti stanno ad indicare che per $x \to 0$ le funzioni sulla sinistra del segno $\sim$ costituiscono una approssimazione via via migliore delle funzioni alla sua destra.
Possono essere generalizzate: se $\varepsilon(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to 0$ ma $\varepsilon(0) \neq 0$ si può scrivere

$$\begin{aligned}
&\sin\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)\\
&1-\cos\varepsilon(x) \sim \frac{1}{2}(\varepsilon(x))^2\\
&e^{\varepsilon(x)}-1 \sim \varepsilon(x)\\
&\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)\\
&(1+\varepsilon(x))^\alpha-1 \sim \alpha\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Queste si deducono dalle precedenti attraverso un cambio di variabile $y = \varepsilon(x)$.

35.12.1 Utilizzo nel calcolo dei limiti

Esempio Il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x}$$
da una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$; tuttavia per $x \to 0$ si ha che
$$\log(1+2x) \sim 2x \sin 3x \sim 3x$$
quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Esempio Il limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}$$
da anche esso una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$; tuttavia per $x \to 1$
$$e^{3(x-1)^2} - 1 \sim 3(x-1)^2$$
poiché $\varepsilon(x) = 3(x-1)^2$ è infinitesima per $x \to 1$ perciò
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1} \sim \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2} = \frac{1}{3}$$

Esempio Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\right)$$
porta ad una forma di indeterminazione $+\infty - \infty$. Tuttavia
$$\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\right) = x\left(\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}\right) \to \frac{2}{3}$$
dove si è usato la $\sqrt[3]{1+\varepsilon(x)} - 1 \sim \frac{1}{3}\varepsilon(x)$ con $\varepsilon(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$.

35.12.2 Utilizzo nei grafici

Le stime asintotiche non servono solo per calcolare i limiti ma anche per tracciare il grafico qualitativo di una funzione nell'intorno di un certo punto, finito o infinito. In generale, spesso l'andamento di una funzione nell'intorno di un punto è prevedibile in base ad una opportuna stima asintotica che consente di tracciare il grafico di f per confronto con quello di una funzione nota.

Esempio Considerando la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2$$
la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$;

- per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \sim x^2$, dunque $f(x) \to +\infty$; il suo grafico sarà simile, per x grande in valore assoluto a quello di x^2 2

- la funzione si annulla in $x = 0$
- per $x \to 0$, $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$, poiché in prossimità di 0 x^2 si annulla mentre $\sqrt[3]{x}$ aumenta e acquisisce d'importanza; quindi il suo grafico sarà più simile a $\sqrt[3]{x}$

35.13 Sintesi metodo

Ai fini pratici, quando è necessario *calcolare* (non verificare) un generico limite del tipo

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

si deve per prima cosa sostituire il valore $x = c$ nella $f(x)$, calcolando $f(c)$; ci stiamo in altre parole basando sulla continuità delle funzioni, o di alcuni loro pezzi considerati da soli e applicando l'algebra dei limiti vista in precedenza. Una volta sviluppati i calcoli possiamo trovarci di fronte alle seguenti situazioni;

1. $f(c)$ è un reale definito: ovvero il calcolo porta ad una costante, che è il limite ricercato;
2. $f(c)$ è una forme indefinite di immediata interpretazione;
3. $f(c)$ da luogo a forme indeterminate, cioè forme sulle quali nulla può dirsi.

Vediamo quali sono le fattispecie dei casi 2 e 3.

35.13.1 Forme indefinite di immediata interpretazione

Queste forme si possono generare nelle **funzioni razionali**: considerando il rapporto di due funzioni $A(x)$ e $B(x)$. Se occorre calcolare il limite $x \to c$ (con c finito o infinito):

$$\lim_{x \to c} \frac{A(x)}{B(x)}$$

ci si può trovare di fronte sostanzialmente a tre situazioni:

$$a) \begin{cases} \lim_{x \to c} A(x) = m \lesseqgtr 0 \\ \lim_{x \to c} B(x) = \infty \end{cases} \qquad b) \begin{cases} \lim_{x \to c} A(x) = m \neq 0 \\ \lim_{x \to c} B(x) = 0 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} \lim_{x \to c} A(x) = \infty \\ \lim_{x \to c} B(x) = m \lesseqgtr 0 \end{cases}$$

Nel primo caso il limite complessivo sarà nullo $(0, 0^+, 0^-)$; nel secondo e terzo sarà infinito $(\infty, +\infty, -\infty)$. La tabelle 35.3 presenta la casistica per esteso.

Altre forme ascrivibili a quelle **di immediata interpretazione** sono quelle che nella sostituzione di c al posto di x portano ad uno dei casi elencati in tabella 35.4.

35.13.2 Forme indeterminate

Nel calcolo di un limite, come detto si può giungere a forme indeterminate di non immediata interpretazione, come quelle riportate in tabella 35.5. Qui si hanno tipicamente le difficoltà maggiori: esperienza e intuito sono essenziali per la risoluzione.

caso a)	caso a)	caso b)	caso c)	caso c)
$\frac{m}{\infty} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{m}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{m} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
$\frac{m}{+\infty} = 0^+$	$\frac{0^+}{+\infty} = 0^+$	$\frac{m}{0^+} = +\infty$	$\frac{+\infty}{m} = +\infty$	$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$
$\frac{m}{-\infty} = 0^-$	$\frac{0^+}{-\infty} = 0^-$	$\frac{m}{0^-} = -\infty$	$\frac{-\infty}{m} = -\infty$	$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$
$\frac{-m}{+\infty} = 0^-$	$\frac{0^-}{+\infty} = 0^-$	$\frac{-m}{0^+} = -\infty$	$\frac{+\infty}{-m} = -\infty$	$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$
$\frac{-m}{-\infty} = 0^+$	$\frac{0^-}{-\infty} = 0^+$	$\frac{-m}{0^-} = +\infty$	$\frac{-\infty}{-m} = +\infty$	$\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

Tabella 35.3: Limiti di immediata interpretazione (1/2); m un numero positivo finito.

$-(+\infty) = -\infty$	$m(-\infty) = -\infty$	$(0^+)^{+\infty} = 0^+$
$+(-\infty) = -\infty$	$-m(-\infty) = +\infty$	$(0^+)^{-\infty} = +\infty$
$m + (+\infty) = +\infty$	$+\infty(+\infty) = +\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$m - (-\infty) = +\infty$	$+\infty(-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^{-\infty} = 0^+$
$m + (-\infty) = +\infty$	$-\infty(+\infty) = -\infty$	$m^{+\infty} = +\infty,\ \text{m}>1$
$m - (+\infty) = -\infty$	$-\infty(-\infty) = +\infty$	$m^{+\infty} = 0^+,\ \text{m}<1$
$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty)^m = +\infty$	$m^{-\infty} = 0^+,\ \text{m}>1$
$+\infty - (-\infty) = +\infty$	$(+\infty)^{-m} = 0^+$	$m^{-\infty} = +\infty,\ \text{m}<1$
$-\infty + (-\infty) = -\infty$	$(-\infty)^{n_2} = +\infty$	$\log_m(+\infty) = +\infty,\ \text{m}>1$
$-\infty - (+\infty) = -\infty$	$(-\infty)^{n_1} = -\infty$	$\log_m(+\infty) = -\infty,\ \text{m}<1$
$m(+\infty) = +\infty$	$(-\infty)^{-n_2} = 0^+$	$\log_{+\infty}(m) = 0^+,\ \text{m}>1$
$-m(+\infty) = -\infty$	$(-\infty)^{-n_1} = 0^-$	$\log_{+\infty}(m) = 0^-,\ \text{m}<1$

Tabella 35.4: Limiti di immediata interpretazione (2/2); $m \in \mathbb{R}^+$, n_1 intero dispari, n_2 intero pari.

$\frac{0}{0}$	$+\infty - \infty$	1^∞	$\log_{+\infty}(0^+)$
$\frac{\infty}{\infty}$	0^0	$\log_{0^+}(+\infty)$	$\log_{+\infty}(+\infty)$
$0 \cdot \infty$	∞^0	$\log_{0^+}(0^+)$	$\log_{1^\pm}(1)$

Tabella 35.5: Calcolo dei limiti: forme indeterminate

I **procedimenti risolutivi** sono molteplici: alla base di tutti sta l'idea di **trasformare la funzione** senza cambiarne il limite, in modo che nella nuova funzione non compaia l'indeterminazione, eventualmente ricorrendo ai **limiti notevoli**.

35.13.2.1 Altre forme di indecisione

$\boxed{0 \cdot \infty}$ se $f(x)g(x)$ da origine a una forma di questo tipo possiamo ricondurci a ∞/∞ o $\frac{0}{0}$ rispettivamente mediante:

$$\frac{g(x)}{1/f(x)}$$
$$\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

$\boxed{+\infty - \infty}$ Se $f(x) - g(x)$ da origine a una forma di questo tipo, si può metter in evidenza una delle due funzioni, per esempio $g(x)$, ottenendo

$$g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$$

dove se $f(x)/g(x)$ presenta limite $\neq 1$, l'equazione non è più in forma indeterminata (altrimenti ci si è ricondotti al caso 0∞.
Alternativamente si può sfruttare la forma

$$f(x) - g(x) = \frac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) + g(x)}$$

che può essere determinata o essere una $\frac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{0^0, \infty^0, 1^\infty}$ se $f(x)^{g(x)}$ da origine a questo, possiamo sfruttare l'identità

$$f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x) \cdot \log f(x)\right)$$

oppure cercare di ricondurre al limite che definisce e.

$\boxed{\log}$ le forme indeterminate con logaritmo possono essere affrontate mediante

$$\log_{g_x} f(x) = \frac{\log f(x)}{\log g(x)}$$

riconducendole alla forma ∞/∞, ad eccezione di $\log_1 1$ riconducibile a $0/0$

Capitolo 36

Derivata di una funzione

Storicamente la nozione di limite è stata introdotta principalmente per sviluppare le idee del calcolo differenziale (ovvero lo studio della nozione di derivata) ed integrale.

36.1 Introduzione

In merito al calcolo differenziale il problema della definizione del concetto di **retta tangente ad una curva** in un punto si è dimostrato affrontabile in maniera generale solamente se approssimato via via (e qui il ruolo del limite) dalla retta passante per due punti residenti sulla curva, di cui uno fisso ed l'altro mobile (in direzione del punto fisso). Si tratta di capire cosa accade alla retta quando il secondo punto si avvicina sempre più al primo, senza però coincidere con esso; la "retta limite" se esiste si chiamerà tangente

36.1.1 Definizioni e nozioni fondamentali

Consideriamo una funzione di equazione $y = f(x)$ definita in un intorno I del punto x_0. Se diamo ad x_0 un incremento $\Delta x = h$ positivo o negativo, in modo che $x_0 + h \in I$,

- la differenza
$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{36.1}$$
rappresenta l'**incremento** (positivo, negativo o nullo) che subisce la funzione quando si passa da x_0 a $x_0 + h$;

- il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento corrispondente della variabile indipendente
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{36.2}$$
è detto **rapporto incrementale** della funzione nel punto x_0 per l'incremento h. Si tratta della pendenza media unitaria presente sulla curva nel passare da x_0 a $x_0 + h$; goniometricamente coincide con $\tan\alpha$ dove α è l'angolo formato dalla retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$;

- il limite (da destra e sinistra) del rapporto incrementale per $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{36.3}$$

se esiste ed è finito, prende il nome di **derivata** della funzione per $x = x_0$ e si indica alternativamente con con $f'(x_0)$.
Una **funzione** si dice **derivabile** in x_0 se in tale punto ha derivata finita; pertanto se il limite non esiste o è infinito si dice che in tal punto la funzione non è derivabile;

- considerando la funzione in un punto possiamo definire la **derivata sinistra** e **destra** rispettivamente come il limite per $h \to 0^-$ e per $h \to 0^+$, ovvero la derivata sinistra è

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e la derivata destra è

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{36.4}$$

Quindi una funzione è derivabile in x_0 se e solo se le due derivate, sinistra e destra, esistono finite e uguali fra loro;

- **derivata in punto generico**: in generale per un generico punto x in un interno completo del quale la funzione è definita, si ha

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} \tag{36.5}$$

- diciamo che una funzione $f(x)$ è **derivabile nell'intervallo** aperto $(a; b)$ se derivabile in tutti i punti dell'intervallo: in questo caso la derivata è definita per ogni valore di $x \in (a; b)$ e pertanto risulta anch'essa una funzione di x, e sarà detta **funzione derivata**.
Una funzione $y = f(x)$ è derivabile nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ se derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo e se negli estremi a e b esistono e sono finite rispettivamente la derivata destra e quella sinistra;

- la derivata (in un punto o intervallo) viene alternativamente indicata con la seguente notazione

$$y' \quad f'(x) \quad D_x y \quad Dy \quad Df(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

36.1.2 Significato geometrico della derivata

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, la derivata della funzione in x_0 è il **coefficiente angolare della retta tangente** al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0.
La retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è dunque:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{36.6}$$

Punti stazionari Nel caso particolare la **derivata** in x_0 sia **nulla**, cioè $f'(x) = 0$, la retta tangente al grafico in tal punto risulta parallela all'asse x e il punto x_0 si dice punto stazionario.

Interpretazione geometrica di alcuni casi di non derivabilità Se la funzione $y = f(x)$ non è derivabile in x_0 perché

- la sua derivata è $+\infty$ (o $-\infty$), allora la tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ esiste ed è parallela all'asse y. In casi come questo, se x_0 è un punto interno all'intervallo in cui la funzione è definita, si dice che il punto $(x_0, f(x_0))$ è un **punto di flesso** a tangente verticale
- la derivata destra è $+\infty$ e quella sinistra $-\infty$ (o viceversa) il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto di cuspide**
- derivata sinistra e destra sono finite ma diverse tra loro, oppure una è finita e l'altra infinita, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso**

36.2 Derivate fondamentali

Applicando la definizione di derivata si giunge alle seguenti derivate fondamentali.

Derivata di una funzione costante La derivata di una funzione costante è zero:

$$\boxed{y = f(x) = c \qquad f'(x) = 0} \tag{36.7}$$

Derivata della variabile indipendente La derivata della variabile indipendente è 1:

$$\boxed{y = f(x) = x \qquad f'(x) = 1} \tag{36.8}$$

Derivata della potenza $y = x^n$ La derivata della potenza x^n è

$$\boxed{y = f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}} \tag{36.9}$$

Rientrano in questa categoria anche le derivate che hanno a che fare con le radici.

Derivata dell'esponenziale $y = a^x$ La derivata dell'esponenziale è[1]

$$\boxed{y = f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \log a} \tag{36.11}$$

Nel caso particolare $a = e$ si avrà

$$\boxed{y = f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x} \tag{36.12}$$

[1] L'equazione può essere riletta dicendo che le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ soddisfano l'equazione differenziale

$$f'(x) = k \cdot f(x) \tag{36.10}$$

con k costante opportuna: la legge esponenziale governa quindi i fenomeni in cui la velocitá di crescita (o diminuzione) di una grandezza è proporzionale alla grandezza stessa. Questa semplice legge si ritrova in molte leggi fisiche e questo è certamente uno dei motivi a cui le funzioni esponenziali devono la loro importanza.

Derivata del logaritmo $y = \log_a x$ La derivata del logaritmo è

$$\boxed{y = f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log a}} \tag{36.13}$$

Nel caso particolare sia $a = e$:

$$\boxed{y = f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}} \tag{36.14}$$

Derivata di $y = \sin x$

$$\boxed{y = f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x} \tag{36.15}$$

Derivata di $y = \cos x$

$$\boxed{y = f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x} \tag{36.16}$$

Derivata di $y = \sinh x$

$$\boxed{y = f(x) = \sinh x \qquad f'(x) = \cosh x} \tag{36.17}$$

Derivata di $y = \cosh x$

$$\boxed{y = f(x) = \cosh x \qquad f'(x) = \sinh x} \tag{36.18}$$

36.3 Teoremi sul calcolo delle derivate

A partire dalle derivate fondamentali e applicando i teoremi a breve esposti è possibile calcolare derivate di funzioni più elaborate.

36.3.1 Algebra delle derivate

Se f, g sono funzioni derivabili in un punto x, , allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ sono derivabili, e valgono le seguenti formule.

36.3.1.1 Somma algebrica

La derivata della somma algebrica di due funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle funzioni stesse:

$$\boxed{y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)} \tag{36.19}$$

Applicando questo teorema si ha che la una costante additiva viene eliminata nella derivazione:

$$y = f(x) + c \qquad y' = f'(x) + 0 = f'(x)$$

36.3.1.2 Prodotto

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda, aumentata del prodotto della prima funzione per la derivata della seconda

$$\boxed{y = f(x) \cdot g(x) \qquad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)} \tag{36.20}$$

Applicando questo teorema si ha che il prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione

$$y = c \cdot f(x) \qquad y' = c \cdot f'(x)$$

Dimostrazione A titolo esemplificativo riportiamo la dimostrazione; considerato fissato un determinato x riscriviamo il numeratore del rapporto incrementale come

$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) \underbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}_{\text{Aggiungo e tolgo}} -f(x)g(x)$$

Quindi considerando il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Il limite di questa $\to f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ in quanto $f(x+h) \to f(x)$ quando $h \to 0$ essendo f continua in quanto derivabile.

Prodotto di più di due funzioni La regola di derivazione del prodotto di due funzioni si estende facilmente al caso di un prodotto di più funzioni. In generale, la derivata del prodotto di più funzioni derivabile è uguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per tutte le altre non derivate. Per esempio, per derivare $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ si ha:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

36.3.1.3 Quoziente

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con la funzione divisore diversa da zero nei punti nei quali si calcola la derivata) è uguale a una frazione che ha per denominatore il quadrato della funzione divisore e per numeratore il prodotto tra la derivata del dividendo e il divisore diminuito del prodotto del dividendo per la derivata del divisore

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}} \tag{36.21}$$

Nel caso particolare della **derivata del reciproco** di una funzione si ha, applicando la regola:

$$y = \frac{1}{g(x)} \qquad y' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Come applicazione si trovano anche la derivata della tangente e della cotangente, come

$$\boxed{y = \tan x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} \tag{36.22}$$

e

$$\boxed{y = \cot x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)} \tag{36.23}$$

36.3.2 Derivata di funzione composta

36.3.2.1 Definizione

Sia $g \circ f = g(f(x))$ la composta di due funzioni g e f. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula

$$\boxed{y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)} \tag{36.24}$$

La 36.24 si chiama anche **regola della catena**.

Dimostrazione Consideriamo il numeratore del rapporto incrementale:

$$(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x) = g(f(x + h)) - g(f(x))$$

Se poniamo $k = f(x + h) - f(x)$ e $y = f(x)$, allora possiamo riscrivere:

$$f(x + h) = y + k$$

e per la continuità di f se $h \to 0$ allora $k \to 0$. Con la nuova notazione abbiamo:

$$g(f(x + h)) - g(f(x)) = g(y + k) - g(y)$$

La definizione di derivata diviene allora:

$$g'(y) = \lim_{k \to 0} \frac{g(y + k) - g(y)}{k}$$

che per $k \neq 0$ si può riscrivere come:

$$\frac{g(y + k) - g(y)}{k} = g'(y) + \varepsilon(k)$$

dove $\varepsilon(k)$ indica una quantità infinitesima per $k \to 0$.
Moltiplicando ambo i membri per k si ha:

$$g(y + k) - g(y) = g'(y) \cdot k + \varepsilon(k) \cdot k$$

Dunque

$$g(f(x + h)) - g(f(x)) = g'(y) \cdot k + \varepsilon(k) \cdot k$$

dividendo per h e osservando che $k/h \to f'(x)$ si ottiene la regola della catena.

Regola della catena e differenziali Usando le notazioni di derivata di Leibniz (come rapporto di differenziali $f' = \frac{df}{dg}$ e $g' = \frac{dg}{dx}$) la 36.24 acquista una forma più significativa

$$\boxed{\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}} \qquad \text{(come se } dy \text{ si semplificasse)} \tag{36.25}$$

la 36.25 esprime il fatto che il tasso di variazione di w rispetto a x è il prodotto dei tassi di variazione “intermedi” di w rispetto a y e di y rispetto a x.

Estensione a casi di composizione ulteriore L'estensione ai casi maggiormente composti è (ad esempio):

$$y = h(g(f(x))) \qquad y' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

e così via ricorsivamente.
Per usare questa regola (insieme alle altre dell'algebra delle derivate) occorre imparare a vedere una funzione complicata come composizione successiva di funzioni più semplici. Per individuare le componenti può essere utile immaginare come si calcola la funzione composta mediante una calcolatrice tascabile.

36.3.2.2 Applicazioni

Derivata di composte esponenziali Applicando (tra l'altro) la regola delle funzioni composte si può calcolare la derivata delle funzioni del tipo

$$y = f(x)^{g(x)} = y = e^{g(x)\cdot \log f(x)}$$

e risulta

$$\boxed{y = f(x)^{g(x)} \qquad y' = [f(x)]^{g(x)} \left\{ g'(x) \log f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}} \tag{36.26}$$

Ad esempio

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = x^x [xlogx]' = x^x [\log x + 1]$$

Valore assoluto e valore assoluto di una funzione La funzione valore assoluto

$$y = |x|$$

seppur sia definita su tutto $\mathbb{R}$ non è derivabile in $x = 0$ poiché derivata destra (pari a 1 per $x \in \mathbb{R}, x > 0$) e sinistra (pari a -1 per $x \in \mathbb{R}, x < 0$) non coincidono. Tuttavia se escludiamo il punto $x = 0$ si può definire la funzione derivata del valore assoluto come la funzione sgn

$$y = |x| \qquad y' = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases} \tag{36.27}$$

Applicazione delle regole sulle derivate per la composizione di funzioni si ha col valore assoluto di una funzione:

$$y = |f(x)|$$

Calcolando la derivata:

$$|f(x)| = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{per } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{per } f(x) < 0 \end{cases}$$

In generale ci aspettiamo che la funzione $|f(x)|$ presenti punti angolosi nei punti in cui $f(x)$ si annulla. Ad esempio la funzione $e^{|x+1|}$ ha un punto angoloso in $x = -1$.

Derivata di alcune funzioni logaritmiche Se $y = \log f(x)$, con $f(x) > 0$ in base alla definizione della derivata di funzione composta si ha

$$\boxed{y = \log f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}} \tag{36.28}$$

Considerando il logaritmo del valore assoluto della funzione, si ha:

$$\log|f(x)| = \underbrace{\frac{1}{|f(x)|} \cdot \operatorname{sgn}(f(x))}_{=\frac{1}{f(x)}} \cdot f'(x)$$

Quindi anche qui:

$$\boxed{y = \log|f(x)| \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}} \tag{36.29}$$

Le derivate di $\log x$ e $\log|x|$ possono esser viste come casi particolari di quelle di sopra.

Derivata logaritmica e sue applicazioni La derivata logaritmica di una funzione è semplicemente la derivata del logaritmo della funzione; nel caso di una $f > 0$

$$D(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

In generale per f con codominio $\in \mathbb{R}$ si usa

$$D(\log|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

La derivata logaritmica:

- approssima il **tasso di incremento relativo** della funzione f in seguito ad una variazione unitaria della variabile x con approssimazione migliore tanto più la funzione assomiglia ad una retta (ovvero $f'' = 0$).
  Ad esempio calcolando la derivata logaritmica di $y = x + 1$ per il punto $x = 1$ si ha che $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}$ e 0.5 (50%) è proprio l'incremento registrato dalla funzione nel passare da 2 a 3 (per x con incremento unitario che passa da 1 a 2). Analogamente se calcoliamo la derivata logaritmica in $x = -3$, dove $f = -2$ si ha $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ e -50% e proprio il decremento della funzione passando da -2 a -1 (per x che passa da -3 a -2).

- per i motivi sopraesposti, quando interessa visualizzare gli incrementi relativi si ricorre a **grafici** in scala *semilogaritmica*: sull'asse delle ascisse si collocano i valori di x mentre sulle ordinate quelli di $\log(f(x))$.
  A questo tipo di rappresentazione si ricorre anche quando $f(x)$ cresce così rapidamente da richiedere una compressione della scala (ad esempio e^x in scala semilogaritmica coincide con la bisettrice del primo quadrante).
  Altra variante possibile è quella dei grafici in *scala logaritmica* dove sia x che $f(x)$ vengono preprocessati da logaritmo prima di esser plottati. La pendenza della retta tangente ad un grafico in scala logaritmica
  $$\frac{d\log(f(x))}{d\log(x)}$$
  ossia la derivata di $\log f$ rispetto a $\log x$, rappresenta il tasso di variazione relativa di f rispetto a variazioni relative di x. Questa quantità prende il nome di *elasticità* e si indica con $E(x)$; per trovare l'espressione analitica dell'elasticità osserviamo che per la derivazione delle funzioni composte si ha, posto $u = \log x$
  $$\frac{d\log f}{dx} = \frac{d\log f}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
  ovvero si ha
  $$\frac{f'(x)}{f(x)} = E(x) \cdot \frac{1}{x}$$
  da cui si ricava
  $$E(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{36.30}$$
- altra applicazione della derivata logaritmica si ha se riarrangiamo come
  $$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot D(\log|f(x)|)}$$
  La formula di cui sopra (il simbolo di valore assoluto può esser omesso nel caso in cui $f(x)$ sia positiva) può agevolare in qualche caso il calcolo della derivata di una funzione.

36.3.3 Derivata di funzione inversa

Sia

- $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile nell'intervallo (a, b), e sia $g = f^{-1}$ la sua inversa definita in $f(a, b)$;
- supponiamo inoltre che esista un $x_0 \in (a, b)$ per il quale $f'(x_0)$

Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e la sua derivata prima è

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{36.31}$$

o con la notazione di Leibniz, posto $y = f(x)$, $x = g(y)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{36.32}$$

Geometricamente questo sta a significare che i grafici di f e di g sono simmetrici rispetto alla bisettrice.
Si faccia attenzione al fatto che nella formula di derivazione le derivate f' e g' sono calcolate in due punti diversi (y_0 e x_0): questa è la principale attenzione da avere nell'applicazione di questo teorema.
Infine l'utilità del teorema di derivazione della funzione inversa consiste nel fatto che permette di calcolare la derivata di g anche in situazioni in cui g non si sa scrivere esplicitamente.
Come applicazione, nel prosieguo sviluppiamo le derivate delle inverse delle funzioni trigonometriche

Derivata dell'arcotangente Ponendo $y = \tan x$, $x = \arctan y$ con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Quindi:

$$\boxed{y = \arctan x \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}} \tag{36.33}$$

Derivata dell'arcoseno Poniamo $y = \sin x$, $x = \arcsin y$ con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in (-1, 1)$. Per quei valori di x si ha $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$. Quindi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Quindi:

$$\boxed{y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{36.34}$$

Derivata dell'arcocoseno Analogamente se $y = \cos x$, $x = \arccos y$ con $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$$

Quindi:

$$\boxed{y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{36.35}$$

Derivata dell'arcocotangente Con procedimenti analoghi si ha:

$$\boxed{y = \operatorname{arccot} x \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}} \tag{36.36}$$

36.4 Derivate di ordine superiore al primo

La derivata seconda è la derivata prima della derivata prima, e si indica con $f''(x)$; la derivata terza è la derivata prima della derivata seconda, e si indica con $f'''(x)$, e così via. In generale, a partire dalla derivata quarta la derivata di ordine n si indica solitamente con il simbolo $f^{(n)}(x)$, o nella notazione di Leibniz $\frac{d^n f}{dx^n}$; ad esempio la derivata quarta è $f^{(4)}(x)$. L'utilizzo di derivate superiori alla prima avviene

- nello studio di funzioni, ove assume particolare importanza la derivata seconda che descrive la curvatura (ovvero la diversità da una retta, che ha derivata seconda null) della funzione in un punto/intervallo;
- nell'approssimazione di funzioni, come si vedrà nel prosieguo.

Capitolo 37

Teoremi e applicazioni del calcolo differenziale

37.1 Teoremi

37.1.1 Derivabilità in un punto

Vediamo le proprietà che derivano dalla derivabilità in un punto, e in seguito in un intervallo, da parte di una determinata funzione

37.1.1.1 Continuità delle funzioni derivabili

Se una funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto x_0, cioè ammette derivata finita in x_0, allora essa è continua in x_0.
Per la dimostrazione consideriamo solamente il numeratore del rapporto incrementale di una funzione derivabile in un punto x_0

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Il suo limite per $h \to 0$ è

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot h = 0$$

L'ultima eguaglianza discende dal fatto che stiamo moltiplicando un valore finito (dato che la funzione è derivabile) per uno 0. Da ciò discende che:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - \lim_{h \to 0} f(x_0) = 0$$
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Quest'ultima la condizione di continuità in un punto.
Il teorema non è invertibile: infatti esistono funzioni (ad esempio cuspidi o punti angolosia) che sono continue in un punto, ma che in esso non sono derivabili. Questo accade quando il rapporto incrementale per $h \to 0$ o non ammette limite o ha limite infinito.
Si conclude pertanto che la continuità di una funzione è condizione necessaria, ma non sufficiente per la sua derivabilità.

37.1.2 Derivabilità in un intervallo

37.1.2.1 Teorema di Rolle

Sia $f(x)$ una funzione:

- continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$;
- derivabile nei punti interni dell'intervallo ovvero in (a, b);
- che assume valori eguali negli estremi a e b dell'intervallo, ovvero $f(a) = f(b)$:

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui la derivata della funzione è nulla:

$$\exists c \in (a; b) | f'(c) = 0$$

Ovvero se valgono le ipotesi del teorema, esiste almeno un punto interno all'intervallo $[a; b]$ in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle x.

37.1.2.2 Teorema di Lagrange

Il thm di Lagrange può essere visto come una generalizzazione di quello di Rolle, nel caso i due estremi dell'intervallo non siano uguali. Sia $f(x)$ una funzione:

- continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$;
- derivabile nei punti interni dell'intervallo ovvero in (a, b):

Allora esiste almeno un punto[1] c, interno all'intervallo $[a; b]$ tale che risulti:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{37.1}$$

La 37.1 esprime l'uguaglianza tra il rapporto incrementale della funzione relativo all'intervallo $[a; b]$ e la derivata della funzione in un opportuno punto interno all'intervallo stesso; in altre parole dice che vi è un punto c in cui la pendenza della retta tangente (la derivata) è uguale alla pendenza della retta passante da entrambi gli estremi.

37.1.2.3 Applicazioni

Invertendo il teorema di Rolle (che qui consideriamo una specializzazione di Lagrange) possiamo affermare che se una funzione:

- è continua in un intervallo I
- ha derivata nulla in tutti i punti interni di I

la funzione è costante in quell'intervallo.

Dal precedente discende un altro importante teorema: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

- sono continue in un intervallo I
- hanno derivate uguali in tutti i punti interni di I

le due funzioni differiscono per una costante (cioè una è lo spostamento in basso o in alto dell'altra per una determinata costante k, che può anche essere 0).

[1] Ma i punti possono esser anche più di uno

Funzioni derivabili crescenti e decrescenti Infine, ai fini pratici di importanza maggiore è il seguente: se $f(x)$ è continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni, allora se

- la derivata della funzione è sempre positiva, allora la funzione è crescente
- la derivata è sempre negativa, la funzione è decrescente

Il teorema può essere invertito come segue; se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo I e derivabile nei suoi punti interni: se $f(x)$ è crescente in I, allora nei punti interni di I si ha $f'(x) \geq 0$. Se invece $f(x)$ è decrescente, si ha $f'(x) \leq 0$.

Funzioni crescenti e decrescenti in un punto Facciamo qui alcune definizioni e considerazioni sulle funzioni crescenti in un punto; cose analoghe si possono svolgere per le funzioni decrescenti in un punto.

Una funzione $f(x)$ si dice **crescente** nel punto $x = c$ se:

- esiste un intorno sinistro I_1 di c per tutti gli x nel quale $f(x) < f(c)$
- esiste un intorno destro I_2 di c per tutti gli x nel quale $f(x) > f(c)$

Se i segni delle precedenti diseguaglianze sono rispettivamente $\leq$ e $\geq$ si dice che la funzione è **crescente in senso lato** nel punto c.
Inoltre è evidente che, se una funzione $f(x)$ è crescente in un intervallo I, allora essa è crescente anche in ogni punto di talle intervallo, ossia è crescente $\forall x \in I$. Nei casi più comuni, se $f(x)$ è crescente in $x = c$ allora è crescente in tutto un intorno di c; in casi particolari però può accadere che $f(x)$ sia crescente in c, ma non lo sia in alcun intorno del punto stesso.
Infine una funzione può esser crescente in ogni punto del suo dominio D senza essere crescente nell'insieme D; ad esempio $y = -\frac{1}{x}$ è crescente in ogni *punto* del dominio, $R - 0$, in quanto è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e in $(0; +\infty)$ ma non è crescente nel suo dominio (infatti considerati $x_1, x_2 \in D$ non è detto che sia $f(x_1) < f(x_2)$.

37.1.2.4 Teorema di Cauchy

Considerando le funzioni $f(x)$ e $g(x)$

- siano entrambe continue nell'intervallo $[a; b]$ e derivabili in $(a; b)$;
- la funzione $g(x)$ ammette derivata diversa da zero in tutti i punti dell'intervallo $(a; b)$:

Allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo, nel quale si

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{37.2}$$

Il teorema si chiama anche teorema degli accrescimenti finiti perché esso esprime che, se due funzioni soddisfano le ipotesi di cui sopra, il rapporto tra gli incrementi delle due funzioni relativi all'intervallo considerato uguaglia il rapporto tra le loro derivate, calcolate in un dato punto interno all'intervallo.

37.2 Applicazioni del calcolo differenziale

37.2.1 Calcolo di limiti: teorema di De L'Hopital

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

- definite e derivabili in tutti i punti di un intorno I del punto c (finito o infinito), escluso al più c stesso
- supponendo che il limite del rapporto delle due funzioni
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$
si presenti in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
- supponendo che $g'(c) \neq 0$ in tutti i punti di I, escluso al più $x = c$

Se esiste il limite per $x \to c$ del rapporto delle derivate, ossia
$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
allora esiste anche il limite del rapporto delle due funzioni ed esso coincide con il limite del rapporto delle due derivate; risulta cioè:
$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{37.3}$$

Ovvero il limite del rapporto di due funzioni che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ è uguale al limite del rapporto delle loro derivate.
Se il limite di f'/g'non esiste, nulla si può affermare sul limite di f/g; il particolare non è lecito concludere che non esiste nemmeno il limite di f/g.
Alcune indicazioni pratiche per il suo utilizzo:

- talvolta il teorema va applicato più volte consecutivamente: può essere infatti che anche il limite del rapporto tra le derivate delle due funzioni dia ancora una delle due forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$
In tal caso, se sono anche qui valide le ipotesi del teorema, si potrà applicare nuovamente la regola di De L'Hopital (con le derivate seconde)
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
e così via finché si giunge ad un risultato non indeterminato;
- per usare efficacemente il teorema è utile talvolta fare qualche passaggio preliminare (come una stima asintotica o un cambio di variabile) in modo che la successiva applicazione del teorema semplifichi l'espressione, anziché complicarla

37.2.1.1 Applicazioni

Applicazione ad altre forme indeterminate E' possibile ricorrere all'applicazione della regola di De L'Hopital anche quando, nella ricerca di alcuni limiti, si perviene alle forme indeterminate del tipo

$$[0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0] \quad [1^\infty]$$

Si dovrà con opportuni accorgimenti trasformare la funzione di cui si vuole calcolare il limite in modo che questa si riduca alle forme prima considerate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Un criterio sufficiente per la derivabilità Il teorema di De L'Hopital permette anche di dimostrare il teorema che segue e che esprime un criterio per stabilire la derivabilità di una funzione $y = f(x)$ in un punto in cui essa è continua.

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intorno I di x_0 e derivabile in ogni punto dell'intorno escluso al più x_0. Se esiste finito, per $x \to x_0$ il limite di $f'(x)$, allora la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0 e risulta:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x) \tag{37.4}$$

Il teorema esprime una condizione sufficiente, ma non necessaria per la derivabilità; infatti se non fossero soddisfatte le ipotesi del teorema, la funzione potrebbe essere ugualmente derivabile.

Il teorema si può enunciare e dimostrare anche relativamente a un intorno sinistro o destro di x_0; in tal caso se esistono, per $x \to x_0$ i limiti sinistro e destro di $f'(x)$, essi sono rispettivamente la derivata sinistra e destra in x_0. E' evidente che se tali derivate, destra e sinistra, sono diverse o infinite la funzione non è derivabile in x_0.

Applicazione al confronto di particolari infiniti Considerando le funzioni, comuni in analisi, logaritmo ed esponenziale

$$y = \log x \qquad y = e^x$$

che sono infinite per $x \to +\infty$; vogliamo determinare l'ordine di infinito e utilizzeremo x come infinito campione.

Cominciando con il logaritmo calcolando il limite applicando de L'Hopital con

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha}$$

Il limite è nullo $\forall \alpha > 0$ ovvero

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{37.5}$$

Questa, oltre a costituire un limite notevole, mostra che, per $x \to +\infty$ il logaritmo in base e è un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza di x a esponente positivo (anche alla 1) e pertanto non esiste un numero che ne esprima l'ordine di infinito.

La proprietà esposta è valida anche (come si può verificare) per $\log_a x$ con $a \in \mathbb{R}^+ - 1$

Passando alla funzione esponenziale si ha, in maniera equivalente (applicando ripetutamente il teorema) che

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{37.6}$$

Anche questo, oltre a costituire un limite notevole, mostra che per $x \to +\infty$, l'esponenziale e^x è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di x a esponente positivo e pertanto non esiste un numero che ne esprima l'ordine di infinito. La proprietà ora esposta risulta vera, come si può verificare, anche per la funzione a^x con $a > 1$.

37.2.2 Approssimazione di funzioni

Una operazione spesso necessaria in matematica è procedere per approssimazione;

- nella linearizzazione ove si cerca di approssimare una data quantità che dipende in modo non lineare da una o più variabili con una hce dipende da queste linearmente
- qualora si voglia disporre di una approssimazione non lineare precisa a piacimento, la formula di Taylor che serve per approssimare il comportamento di una funzione in prossimità di una punto mediante una formulazione che ricorra ad un polinomio composto da sue derivate di ordine via via successivo. La formula è utile specialmente per approssimare le funzioni trascendenti.

Tema comune è il cercare di avere una stima approssimata non solo della funzione, ma soprattutto (altra faccia della medaglia)dell'errore commesso nell'approssimazione stessa.

37.2.2.1 Differenziale

Un primo esempio di linearizzazione consiste nell'approssimare l'incremento subito da una data funzione f, in conseguenza della variazione del suo argomento di h, sostituendo alla funzione stessa la retta tangente nel punto considerato.
Sia $f(x)$ è una funzione derivabile nell'intervallo I e x_0 un punto generico di tale intervallo; diamo ad x_0 un incremento $\Delta x = h$ passando così dal punto x_0 al punto $x_0 + h$ (appartenente anch'esso a I) e facendo così subire alla funzione alla funzione l'incremento

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Dato che la funzione è continua in I (essendo derivabile) al tendere di Δx a 0, anche Δy tenderà a 0 (ovvero sono infinitesimi simultanei). Il limite del loro rapporto (ovvero la derivata)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

sarà $\neq 0$ se Δx e Δy sono infinitesimi dello stesso ordine o sarà $f'(x_0) = 0$ se Δy è infinitesimo di ordine superiore a Δx (non vi possono esser essere altri casi perché abbiamo detto che la funzione è derivabile nel punto).
Possiamo scrivere, sfruttando la scrittura fuori dal limite quanto segue

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \tag{37.7}$$

con ε funzione infinitesima di Δx: $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Ora moltiplicando per Δx si ha:

$$\boxed{\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\text{Differenziale}} \quad + \quad \underbrace{\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x}_{\text{Errore di approssimazione}}} \tag{37.8}$$

Si nota come la variazione della funzione sia spezzata in due componenti:

- il **differenziale** della funzione nel punto x_0, relativamente all'incremento Δx: esso è il prodotto della derivata in quel punto per l'incremento della variabile indipendente.
  A livello di notazione il differenziale si indica come

  $$\boxed{dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x} \tag{37.9}$$

  Nel caso particolare di $y = f(x) = x$, essendo $f'(x) = 1$ si ha che

  $$df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x \longrightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

  Si deduce che il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Possiamo allora riscrivere l'equazione del differenziale come

  $$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx} \tag{37.10}$$

  ovvero il differenziale di una funzione è il prodotto della sua derivata per il differenziale della variabile indipendente: quest'ultima è la formula che si applica nel calcolo materiale del differenziale di una funzione. Inoltre da questa possiamo vedere come la derivata possa essere vista come il rapporto tra il differenziale della funzione e il differenziale della variabile indipendente

  $$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \tag{37.11}$$

- l'**errore di approssimazione**, infinitesimo $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, di ordine superiore rispetto al differenziale. Per questa motivazione resta giustificata una delle prerogative/applicazioni maggiori del differenziale, ovvero quella di approssimare l'incremento della funzione trascurando infinitesimi di ordine superiore all'incremento della variabile

  $$\Delta y \simeq dy \quad \text{al prim'ordine, vicino a } x_0 \tag{37.12}$$

Nel seguito saremo interessati a generalizzare il procedimento di approssimazione per linearizzazione a quello di approssimazione polinomiale. Ci chiederemo: data una funzione derivabile tutte le volte che sarà necessario esiste un polinomio che nell'intorno di un punto fissato approssima la funzione meglio della sua retta tangente? I polinomi di Mac-Laurin rispondono al caso particolare dell'approssimare una funzione in $x = 0$, mentre quelli di Taylor, che ne costituiscono una generalizzazione, operano per un x_0 a discrezione.

Notazione di o piccolo e proprietà Abbiamo detto che l'errore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al differenziale. La notazione di o piccolo serve per esprimere questo concetto.
In generale date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0 si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{per } x \to x_0 \tag{37.13}$$

e si legge "$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$" se

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{37.14}$$

E' un altro modo per dire che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$. In particolare poi, il simbolo $o(1)$ denota semplicemente una quantità infinitesima.

Quando si opera su sviluppi di Taylor-MacLaurin con resto secondo Peano, ad esempio per calcolare limiti ci si trova ad eseguire calcoli che coinvolgono $o(x^n)$ (ad esempio per MacLaurin). Per procedere correttamente è utile comprendere alcune proprietà del simbolo di "o piccolo".
Il simbolo di $o(\ldots)$ *non denota una particolare funzione* ma qualsiasi funzione che presenti la proprietà:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to 0 \text{ se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ad esempio per $x \to 0$, $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$ ma anche $x^3 = o(x^2)$.
Da questo fatto seguono alcune proprietà della relazione di o piccolo che possono apparire strane, ad esempio:

- la differenza tra due o piccolo non fa zero

$$o(x) - o(x) = o(x)$$

- coefficienti numerici moltiplicativi sono irrilevanti, ad esempio

$$o(-3x^2) = o(x^2)$$
$$-o(x) = o(x)$$

- l'errore più grossolano ingloba quello più fine; ad esempio per

$$o(x) + o(x^2) = o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$
$$o(x) + o(x^2) = o(x^2) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

- il simbolo si comporta nel modo seguente con somme e prodotti (verificabile in base alla definizione):

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$
$$o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

  Ad esempio quindi [2]:

$$xo(x^2) = o(x^3), \quad \frac{o(x^3)}{x} = o(x^2), \quad \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1), \quad o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$$

[2] Ricordando $o(1)$ indica semplicemente una funzione che tende a 0 per $x \to x_0$, il punto considerato

Regole di calcolo differenziali Le regole per il calcolo di differenziali più elaborati sono le medesime di quelle delle derivate:

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x) \tag{37.15}$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x) \tag{37.16}$$

$$d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)} \tag{37.17}$$

Si noti infine che:

$$\frac{df}{f} = d \log |f| = \text{differenziale logaritmico di } f \tag{37.18}$$

Esempio di approssimazione Consideriamo:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

e approssimiamo al primo ordine $f(x)-f(0) = \sqrt{1+x}-1$; in questo caso $x_0 = 0$ e quindi x coincide con l'incremento dx. Essendo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

si ha che per $x \to 0$

$$\sqrt{1+x} - 1 \simeq \frac{1}{2}x \quad \text{al prim'ordine}$$

Relazione tra o piccolo e asintotico Notiamo che vi sono delle assonanze tra asintoticità e linearizzazione; ad esempio per la funzione $y = \sin x$il processo di linearizzazione in $x = 0$ porta a scrivere

$$\sin x = x + o(x)$$

mentre con i limiti notevoli si scriveva

$$\sin x \sim x, \quad \text{per } x \to 0 \tag{37.19}$$

Queste due affermazioni sono in realtà equivalenti in quanto

$$\text{Per } x \to x_0,\ f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \tag{37.20}$$

Questo permette di rileggere le stime asintotiche mediante uguaglianze che coinvolgono o piccolo[3]. Ad esempio per $x \to 0$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{quindi} \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Il vantaggio è che poi una eguaglianza si può riscrivere in vari modi, è più facile da usare senza errori, rispetto ad una stima asintotica.
Ad esempio possiamo riscrivere l'eguaglianza come

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

[3]Questo dovrebbe essere un modo analogo alla scrittura fuori dal segno di limite

e sta a significare che in prossimità di 0 $\cos x$ è approssimata dalla parabola $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.
Al contrario la relazione asintotica $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ non dice la stessa cosa di $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$. Infatti per $x \to 0$, la $1 - \frac{1}{2}x^2 \sim 1$ perciò la stima contiene la stessa informazione che dire semplicemente $\cos x \to 1$, ed è altrettanto vera quanto la stima $\cos x \sim 1 + 40x^13$

37.2.2.2 Polinomi di Mac-Laurin

Se $f(x)$ è una funzione continua e derivabile nel punto $x = 0$ e si ha $y_0 = f(0)$, l'equazione

$$y = f(0) + f'(0)x$$

definisce una funzione razionale intera di primo grado; cioè una funzione la cui espressione è un polinomio di primo grado in x, il cui grafico è la retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $P(0; y_0)$.
Tra tutte le funzioni razionali intere di primo grado tale funzione è quella che, almeno in un intorno di $x = 0$ approssima meglio $f(x)$:

- si potrebbe infatti facilmente dimostrare che, se $g(x) = y_0 + mx$ è l'equazione di una funzione razionale intera di primo grado, la differenza $|f(x) - g(x)|$, che rappresenta l'errore commesso sostituendo $y_0 + mx$ al posto di $f(x)$, risulta infinitesima di ordine superiore a x se e solo se $m = f'(x)$;

- intuitivamente, dal punto di vista geometrico, la tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto P è, tra tutte le rette passanti per P, quella "più vicina" a tale grafico.

Si osservi che la funzione $f(x)$ e il polinomio $f(0) + f'(0) \cdot x$ assumono per $x = 0$ lo stesso valore $f(0)$ e hanno in tale punto la stessa derivata: $f'(0)$.
Ora, allo scopo di migliorare l'approssimazione di $f(x)$ cerchiamo un polinomio di secondo grado che la approssimi in un intorno di $x = 0$, supponendo $f(x)$ derivabile due volte in tale punto. Sembra naturale allora richiedere che

- il valore che tale polinomio assume per $x = 0$ sia $f(x)$

- che le sue derivate prima e seconda coincidano, per $x = 0$ con $f'(0)$ e $f''(0)$

Se allora:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

è un generico polinomio di secondo grado, risulta

$$P_2'(x) = a_1 + 2a_2 x \qquad P_2''(x) = 2a_2$$

Imponendo le condizioni sopra dette si ha

$$\begin{aligned} P_2(0) = f(0) &\longrightarrow a_0 = f(0) \\ P_2'(0) = f'(0) &\longrightarrow a_1 = f'(0) \\ P_2''(0) = f''(0) &\longrightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \end{aligned}$$

Pertanto il polinomio assume complessivamente la forma

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 \tag{37.21}$$

Naturalmente non vi è motivo di limitarsi al secondo grado; posto che la funzione sia derivabile per la terza volta si giungerebbe all'approssimazione

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3$$

In generale se $f(x)$ è derivabile n volte per $x = 0$ il polinomio di grado n

$$\boxed{M_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n} \tag{37.22}$$

alternativamente, espresso in forma compatta mediante

$$\boxed{M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k} \tag{37.23}$$

con ! indicante il fattoriale, si chiama **polinomio di Mac-Laurin di grado** n della funzione $f(x)$.

37.2.2.3 Polinomi di Taylor

Si osservi che il polinomio di Mac-Laurin serve per approssimare funzioni in uno specifico punto, $x = 0$; quello di Taylor ne costituisce la versione generalizzata per approssimare in qualsivoglia punto la funzione.

Se $f(x)$ è una funzione continua e derivabile n volte in un generico punto x_0 e si desidera ottenere un polinomio di grado n il cui valore e le cui derivate, fino a quella di ordine n coincidano, per $x = x_0$ con il valore e le derivate di $f(x)$, con ragionamenti analoghi[4] a quelli svolti in precedenza si perviene al polinomio:

$$\boxed{T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0x_)}{n!} \cdot (x - x_0)^n} \tag{37.24}$$

alternativamente, espresso in forma compatta mediante

$$\boxed{T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k} \tag{37.25}$$

Tale polinomio si chiama **polinomio di Taylor di grado** n **della funzione** $f(x)$, **relativo al punto** x_0

[4] E' sufficiente determinare i coefficienti del polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

in modo che risulti

$$P_n(x_0) = f(x_0); \quad P'_n(x_0) = f'(x_0) \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

37.2.2.4 Formula di Taylor con resti di Peano e Lagrange

Finora ci siamo limitati a verificare che i polinomi di MacLaurin e Taylor di una funzione $f(x)$ forniscono delle buone approssimazioni dei valori di $f(x)$; il seguente teorema da un significato più preciso a tali constatazioni.
Se $f(x)$ è una funzione definita e dotata di derivate fino all'n-esimo ordine, in un intorno del punto $x = x_0$, il polinomio di Taylor $T_{n,x_0}(x)$, di grado n della funzione $f(x)$, relativo al punto x_0 differisce per un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, ossia è

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{37.26}$$

Formula con il resto di Peano Se $f(x)$ è una funzione dotata di derivate fino all'n-esimo ordine, in un intorno I del punto x_0, per il teorema appena esposto possiamo scrivere, per la scrittura fuori dal segno di limite

$$\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = \delta(x) \tag{37.27}$$

con $\delta(x)$ una funzione infinitesima per $x \to x_0$. Da tale eguaglianza ricaviamo che

$$\boxed{f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{(x - x_0)^n \delta(x)}_{\text{resto di Peano}}} \tag{37.28}$$

Il termine

$$t_n(x) = (x - x_0)^n \delta(x) \tag{37.29}$$

detto resto di Peano, rappresenta l'errore che si commette sostituendo il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ al posto di $f(x)$. Il suo **ordine di grandezza** con la formula di Taylor è

$$(x - x_0)^n \delta(x) = o((x - x_0)^n)$$

Il resto è:

- per $x \to 0$ tanto più piccolo quanto è maggiore n. L'idea è la seguente: conoscendo un numero abbastanza alto di derivate di f nel punto $x = 0$ si può approssimare sempre meglio f in un intorno di $x = 0$;

- a parità di n aumenta tanto più si cerca l'approssimazione in un punto x via via più distante da dove il polinomio è centrato/ottimale (x_0) (ovvero da è maggiore la distanza tra x e x_0).

La formula di Taylor con il resto di Peano si vede scritta anche direttamente come:

$$\boxed{f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n)}$$

mentre per il caso particolare di MacLaurin abbiamo

$$\boxed{f(x) = M_n(x) + o(x^n)}$$

Formula con il resto di Lagrange Nella formula di Taylor con il resto di Peano compare il termine incognito $\delta(x)$: di esso è noto solo che è infinitesimo per $x \to x_0$. Nel caso in cui i polinomi di Taylor vengano usati per approssimare una funzione, tale formula non consente di valutare l'errore commesso. A tale scopo è molto più utile il risultato del seguente teorema, che ci consentirà di riscrivere il resto della formula di Taylor in forma diversa.

Se $f(x)$ è una funzione dotata di derivate fino all'$(n+1)$-esimo ordine in un intorno I del punto x_0, considerando $x \in I$ e $T_{n,x_0}(x)$ il relativo polinomio di Taylor di ordine n, si ha

$$\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \tag{37.30}$$

essendo c un punto interno all'intervallo di estremi x_0 e x. Analogamente a quanto visto in precedenza possiamo scrivere

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}}_{\text{resto di Lagrange}} \tag{37.31}$$

Che scritto quasi per esteso diviene

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}}_{\text{resto di Lagrange}}} \tag{37.32}$$

Anche qui per avere la formula di MacLaurin basta sostituire 0 a x_0.
Nel termine di errore il valore di c è incognito, e dipende da x_0, x e n: se però si conosce una espressione della derivata $(n+1)$-esima di $f(x)$, essendo noto che c deve appartenere all'intervallo di estremi x_0 e x è spesso possibile determinare una maggiorazione del valore assoluto di $t_n(x)$, cioè una maggiorazione dell'errore commesso.
Se si riesce a dimostrare che $\left|f^{n+1}(t)\right| \leq M$ per ogni t compreso tra x_0 e x allora la formula di Taylor con resto secondo Lagrange dice che

$$|f(x) - T_{n,x_0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^n + 1 \tag{37.33}$$

che è appunto una stima dell'errore di approssimazione commesso.
Un **esempio**: sappiamo che il polinomio di MacLaurin al terzo ordine di e^x è

$$M_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Se volessimo utilizzare questo fatto per calcolare un valore approssimato di $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, ossia pensassimo di approssimare

$$e^{1/2} \text{ con } M_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{48}$$

Per stimare a priori (ossia senza conoscere il valore di $\sqrt{e}$) di quanto ci stiamo sbagliando, poniamo nella 37.32 $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ed $n = 3$ otteniamo

$$\sqrt{e} = M_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{e^c}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Poiché per $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ è $e^c < \sqrt{e} < \sqrt{3}$ si ottiene[5]

$$\left|\sqrt{e} - M_3(\frac{1}{2})\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} \simeq 0.0045$$

Questo significa che approssimando $e^{0.5}$ con il valore 79/48 si commette un errore non superiore a 0.0045.

37.2.3 Monotonia di successioni

Come si è visto in precedenza, le successioni monotone hanno importanti proprietà; d'altro canto non sempre facile dimostrare la monotonia d una successione per via algebrica.
Il calcolo differenziale ci offre un metodo utile: fingere di "lavorare" nel continuo e studiare il segno della derivata prima; se questo si stabilizza (positivo o negativo da un certo punto in poi), anche definitivamente, la funzione si può considerare monotona. Per esempi vedere Bramanti 1 pag 181
Il passaggio "dal discreto al continuo"è un modo per avere a disposizione gli strumenti del calcolo differenziale. Attenzione a non usare indiscriminatamente espediente; si ragioni ad esempio sul fatto che in questo mono non si potrebbe studiare la monotonia di successioni come

$$\frac{n!}{2^n} \qquad \frac{n + (-2)^n}{3^n}$$

37.2.4 Risoluzione approssimata di equazioni: il metodo di Newton

37.2.4.1 Introduzione

Supponendo di voler risolvere l'equazione

$$f(x) = 0$$

che equivale a cercare le intersezioni del grafico di f con l'asse x. Supponendo che vi sia una unica soluzione $x = \alpha$ in un dato intervallo del dominio considerato e che la determinazione sia difficile per via analitica, mediante il metodo di Newton abbiamo una ulteriore possibilità per ottenere il risultato in maniera approssimata e via via più precisa.

L'idea è quella di costruire una *successione definita in maniera ricorsiva*, ovvero una successione nella quale si assegna arbitrariamente il primo termine x_0 e si definisce la legge con cui calcolare x_{n+1} a partire da x_n qualunque sia n. In questo modoil termine x_n si può essere costruito a partire da x_0 con n interazioni del medesimo algoritmo. Nel nostro specifico caso, dobbiamo costruire la serie in maniera che converga verso α; illustriamo il metodo con riferimento alla figura XXX Partendo da un certo x_0, ad esempio $x_0 = a$, linearizziamo l'equazione $f(x) = 0$ sostituendo alla curva f la retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. Tale retta ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[5]Abbiamo usato la disuguaglianza grossolana $e < 3$: per non cadere in un circolo vizioso: per stimare il valore di $\sqrt{e}$ sembrerebbe necessario saper già quanto vale esso. Invece basta conoscere un valore che maggiora $\sqrt{e}$ e questo valore è ad esempio $\sqrt{3}$.

ora per linearizzare non risolviamo tanto $f(x) = 0$ bensì risolviamo l'equazione

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

ottenendo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

che corrisponde al punto di intersezione della tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ con l'asse delle x. Si nota che x_1 è più vicina ad α che x_0. Si procede allo stesso modo ricorsivamente giungendo alla regola:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{37.34}$$

Nel grafico si vede che x_n converge ad α.

37.2.4.2 Metodo

Esponiamo ora il **teorema generale**[6]: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in $[a, b]$ e supponiamo che:

- il segno della funzione sia discorde negli estremi dell'intervallo

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

- derivata prima e seconda $f'(x)$ e $f''(x)$ abbiano segno costante in $[a, b]$. La condizione sta a significare che la funzione è monotona e presenta la medesima concavità/convessità su tutto l'intervallo considerato. È una condizione solo apparentemente restrittiva; è in generale soddisfatta se si sceglie un intervallo $[a, b]$ abbastanza piccolo.

A questo possiamo avere due casi che si differenziano solo per il punto di partenza dell'algoritmo:

1. se

$$f(a) \cdot f''(a) > 0$$

ovvero se la funzione è monotona decrescente con concavità verso l'alto o monotona crescente con concavità verso il basso, definiamo per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{37.35}$$

Esiste uno e un sol punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ e la successione converge a c per difetto;

2. se invece

$$f(b) \cdot f''(b) > 0$$

ovvero se la funzione è monotona decrescente con concavità verso basso o monotona crescente con concavità verso l'alto, la successione

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

converge a c per eccesso.

[6] Dimostrazione sul Bramanti 1 a pag 223

37.2.4.3 Esempio

Considerando l'equazione

$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

Considerazioni grafiche connesse alle due funzioni di cui è formata ($g(x) = e^x$ ed $h(x) = x$) attraverso una sottrazione suggeriscono che l'intersezione con gli assi dovrebbe trovarsi nell'intervallo $[0, 1]$). Infatti

- la funzione è continua
- per $x = 0$, $g(0) = 1$, $h(x) = 0$ quindi $g - h = 1 > 0$
- per $x = 1$, $g(1) = 1/e$, $h(x) = 1$ quindi $g - h = 1/e - 1 < 0$

Si ha allora che

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \quad \text{in } [0, 1]$$
$$f''(x) = e^{-x} > 0 \quad \text{in } [0, 1]$$

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) < 0$. La successione da impostare in questo caso è

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1} = \frac{x_n + 1}{1 + e^{x_n}} \end{cases}$$

Usando la calcolatrice si trova

$$x_1 = 0.5$$
$$x_2 = 0.5663\ldots$$
$$x_3 = 0.5671\ldots$$
$$x_4 = 0.5671\ldots$$

Si vede che già dopo 4 iterazioni si può dire che $c = 0.5761$ con un errore pari a

$$e^{-x_4} - x_4 \simeq 4.55 \cdot 10^{-7}$$

37.2.5 Ottimizzazione e ricerca dei flessi

37.2.5.1 Massimi e minimi

Considerando una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo I, con c un punto di tale intervallo, $c \in I$. Diciamo che:

- c è un punto di **massimo relativo** se esiste un intorno di c (completo se c è interno ad I, altrimenti se c è un estremo di I solo destro o sinistro) nel quale per tutti i punti si ha

  $$f(x) \leq f(c)$$

  Se poi esiste un intorno esiste un intorno di c per il quale

  $$f(x) < f(c)$$

  allora c è un punto di **massimo relativo forte** (o proprio).

- specularmente c è un punto di **minimo relativo** se esiste un intorno (completo se c è interno ad I, altrimenti se c è un estremo di I solo destro o sinistro) di c del quale per tutti i punti si ha

$$f(x) \geq f(c)$$

Se poi esiste un intorno esiste un intorno di c per il quale

$$f(x) > f(c)$$

allora c è un punto di **minimo relativo forte** (o proprio).

Se c è un punto di massimo o minimo relativo si dice che:

- c è un punto **estremante**
- $f(c)$ è un **estremo relativo** (o locale)

La funzione $f(x)$ può avere può avere uno o più punti estremanti in I.

37.2.5.2 Punti di flesso

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I, se:

1. esiste la retta tangente al grafico della funzione, nel suo punto $(x_0; f(x_0))$
2. esiste un intorno $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ contenuto in I tale che in corrispondenza dei due intorni sinistro $(x_0 - \delta; x)$ e destro $(x; x_0 + \delta)$ il diagramma della funzione stia da parti opposte rispetto alla tangente

allora il punto $(x_0; f(x_0))$ è un **flesso** per la curva di equazione $y = f(x)$.
Poiché nel punto $(x_0; f(x_0))$ deve esistere la retta tangente al grafico della funzione $f(x)$, la funzione deve essere continua ed essere dotata di derivata finita o infinita in x_0. Vediamo questi casi partendo dal secondo:

- se la derivata della funzione è infinita, la tangente al grafico nel punto $(x_0; f(x_0))$ è parallela all'asse y, e il punto di flesso si dice a **tangente verticale**
- se invece la funzione è derivabile nel punto considerato, la retta tangente ha equazione (dipendente dal punto considerato) definita da:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si hanno due sottocasi. Se, indipendentemente dal coefficiente angolare della tangente:

1. in un intorno sinistro di x_0 si ha $f(x) \leq t(x)$ e in intorno destro si ha $f(x) \geq t(x)$ si ha un **flesso ascendente**
2. in un intorno sinistro di x_0 si ha $f(x) \geq t(x)$ e in intorno destro si ha $f(x) \leq t(x)$ si ha un **flesso discendente**

37.2.5.3 Teoremi sui massimi e minimi relativi

Condizione necessaria per l'esistenza di un estremante per le funzioni derivabili Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I; se nel punto c interno a I, la funzione ha un massimo o un minimo, allora risulta

$$f'(c) = 0$$

cioè c è un punto stazionario.
Questo teorema dice che nei punti di massimo e minimo relativi del grafico di una funzione derivabile la tangente è parallela all'asse x.
L'annullarsi della derivata prima è condizione **necessaria ma non sufficiente** perché vi siano massimi e minimi. Ad esempio la funzione $y = x^3$ ha in $x = 0$ un punto stazionario che non è ne massimo ne minimo, bensì un **punto di flesso a tangente orizzontale** (la funzione è crescente sia a sinistra che a destra di 0).

Criterio sufficiente per la determinazione degli estremanti Sia $f(x)$ una funzione continua in tutti i punti di un intorno $I = (c - \delta; c + \delta)$ del punto c e derivabile in tutti i punti di I con esclusione al più di c. Se si ha

- $f'(x) > 0$ (ovvero funzione crescente) in intorno sinistro di c e $f'(x) < 0$ (funzione decrescente) in intorno destro di c, allora c è un punto di **massimo relativo** per $f(x)$;
- $f'(x) < 0$ (decrescente) in intorno sinistro di c e $f'(x) > 0$ (crescente) in intorno destro di c, allora c è un punto di **minimo relativo** per $f(x)$.

Si osservi che il teorema non richiede che $f(x)$ sia derivabile anche in c; tuttavia se ciò accade, allora sarà $f'(c) = 0$, ossia c è punto stazionario.
Quindi:

- se la derivata cambia di segno attraversando il punto c si avrà un estremante
- se invece la derivata non cambia di segno, la curva presenta, nel punto stazionario c un punto di **flesso a tangente orizzontale**

37.2.5.4 Ricerca di massimi e minimi

Da quanto qui fin detto emerge che per determinare **massimi e minimi relativi** di una funzione è di fondamentale importanza lo studio del segno della derivata prima. Questo studio permette:

- di determinare i punti stazionari della funzione
- di distinguere fra questi massimi, minimi, punti di flesso orizzontale
- di individuare eventuali punti estremanti in cui non esiste la derivata prima

Quindi per determinare i massimi e minimi di una funzione $f(x)$ si può procedere come segue:

1. calcolare $f'(x)$ e se ne determina il dominio per individuare gli eventuali punti in cui la $f(x)$ è continua, ma non derivabile;

2. si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i punti stazionari
3. si studia il segno di $f'(x)$ deducendo eventuali massimi e minimi (stazionari e non) e i flessi a tangente orizzontale

Se poi è richiesta la determinazione dei **massimi e minimi assoluti** si deve tener presente che per il teorema di Weierstrass, la loro esistenza è garantita nel caso si consideri un intervallo chiuso e limitato in cui. Per determinarli si cerca semplicemente:

- il punto dei massimi relativi in corrispondenza del quale la funzione assume il valore maggiore
- il punto dei minimi relativi in corrispondenza del quale la funzione assume il valore minore

Se invece non sono soddisfatte le condizioni richieste dal teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluto possono non esistere

Infine, nella ricerca degli estremi di una funzione può essere utile avvalersi delle seguenti proprietà, di facile verifica:

1. se k è una costante, le due funzioni $f(x)$ e $f(x)+k$ considerate nello stesso intervallo, assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x;
2. se k è una costante:
    - **positiva**, le due funzioni $f(x)$ e $k \cdot f(x)$, considerate nello stesso intervallo, assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x;
    - **negativa**, ad un massimo (minimo) di $f(x)$ corrisponde un minimo (massimo) di $k \cdot f(x)$;
3. se $f(x)$ è una funzione positiva in tutti i punti di un intervallo, le funzioni $f(x)$ e $[f(x)]^2$ assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x.

37.2.5.5 Concavità di una curva e ricerca dei punti di flesso

Concavità Consideriamo una funzione $y = f(x)$ derivabile nei punti interni a un intervallo I e indichiamo con c un punto interno di tale intervallo.
Poiché $f(x)$ è supposta derivabile in $x = c$, la retta tangente alla curva di $f(x)$ nel punto $P(c; f(c))$ non è parallela all'asse y.
Si dice che:

- la curva ha nel punto P **la concavità rivolta verso l'alto** se esiste un intorno del punto c nel quale le ordinate dei punti sulla curva sono *maggiori* delle ordinate dei corrispondenti punti sulla tangente in P
- la curva ha nel punto P **la concavità rivolta verso il basso** se esiste un intorno del punto c nel quale le ordinate dei punti sulla curva sono *minori* delle ordinate dei corrispondenti punti sulla tangente in P

Consideriamo poi una funzione una funzione $y = f(x)$ derivabile due volte nei punti interni ad un intervallo I e sia $f''(x)$ continua in I, con c un punto interno di I. Allora:

- se $f''(c) > 0$, la curva di equazione $y = f(x)$ volge nel punto c la concavità verso l'alto
- se $f''(c) < 0$, la curva di equazione $y = f(x)$ volge nel punto c la concavità verso il basso

Inoltre, se la curva di equazione $y = f(x)$ volge la concavità verso l'alto (il basso) in corrispondenza di tutti i punti interni ad un intervallo I, diciamo che la curva volge la concavità verso l'alto (il basso) nell'intervallo I.

Flessi Negli eventuali punti c dove la derivata seconda si annulla, la curva da una parte di c rivolge la concavità verso l'alto e dall'altra verso il basso: i punti in cui ciò succede sono i **punti di flesso** nei quali la tangente attraversa la curva. Si ha un:

- flesso ascendente se la concavità è volta verso il basso a sinistra di c e verso l'alto a destra di c
- flesso discendente in caso contrario

E' comunque bene osservare che vi possono essere dei casi in cui si ha $y'' = 0$ senza che ci si trovi in presenza di un flesso: ciò avviene tutte le volte che la derivata seconda y'' non cambia di segno nell'intorno del punto in cui si annulla

Ricerca dei punti di flesso Riassumendo, per la ricerca dei punti di flesso, sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I tale che:

1. $f(x)$ sia due volte derivabile, con derivata seconda continua, sia un intorno sinistro $I_s \subset I$ sia in un intorno destro $I_d \subset I$ di un punto interno a I
2. $f''(x)$ assuma nell'intorno sinistro I_s valori di segno opposto a quelli che assume nell'intorno destro I_d
3. in $x = c$ esiste la derivata prima $f'(x)$, finita o infinita

allora $x = c$ è un punto di flesso per la funzione $f(x)$.
Si noti che se è:

- $f'(c) \neq 0$, il flesso è a tangente obliqua
- $f'(c) = 0$, il flesso è a tangente orizzontale
- $f'(c) = \infty$, il flesso è a tangente verticale

37.3 TODO

`- Limite della derivata e derivabilità (BPS 1 pag 190)`

Capitolo 38

Studio di funzioni

38.1 Asintoti

38.1.1 Asintoto orizzontale

Si dice che una retta di equazione

$$y = l$$

è asintoto orizzontale per il grafico di una funzione $y = f(x)$, se e solo se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Se il limite è l

- solo per $x \to -\infty$ si parla di asintoto orizzontale sinistro;
- solo per $x \to +\infty$ si parla di asintoto orizzontale destro.

Gli eventuali asintoti orizzontali si determinano calcolando i limiti negli estremi infiniti se ci sono nel dominio. Ne deriva che:

- funzioni il cui dominio sia limitato non ammettono asintoti orizzontali, dato che non avrebbe senso calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to \infty$
- funzioni periodiche non possono ammettere asintoti orizzontali perché in questo caso non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to \infty$

38.1.2 Asintoto verticale

Una retta di equazione

$$x = c$$

è asintoto verticale per il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, se e solo se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

Se il limite è ∞

- solo per $x \to c^-$ si parla di asintoto verticale destro;

- solo per $x \to c^+$ si parla di asintoto verticale sinistro.

Gli eventuali asintoti verticali del grafico di una funzione si determinano per lo più calcolando i limiti negli estremi finiti, se esistono, del dominio e negli eventuali punti di discontinuità.

38.1.3 Asintoto obliquo

Una retta di equazione
$$y = mx + q$$
è asintoto obliquo per il grafico di una funzione di equazione $y = f(x)$, se e solo se
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$
ovvero geometricamente la distanza tra la funzione e la retta asintoto diviene man mano più piccola tanto più ci si muove verso ∞.
Analogamente a quanto visto per l'asintoto orizzontale non vi possono essere asintoti obliqui se, alternativamente:

- la funzione ha un insieme di definizione limitato;
- la funzione è periodica.

Se la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la curva di equazione $y = f(x)$:

- solo per $x \to -\infty$ si parla di asintoto obliquo sinistro;
- solo per $x \to +\infty$ si parla di asintoto obliquo destro.

Ricerca dell'asintoto obliquo Osserviamo innanzitutto che dalla definizione si ricava una condizione necessaria ma non sufficiente per avere un asintoto obliquo, ossia
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
Supponiamo dunque che $y = mx + q$ sia asintoto obliquo, ovvero sia
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$
Sarà pure, a maggior ragione
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$
Quindi
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} = 0$$
da cui, essendo $\lim_{x\to\infty} m = m$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0$ si deduce
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$
e quindi
$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \tag{38.1}$$

Dopo aver determinato m per calcolare il termine q nell'equazione dell'asintoto scriviamo il limite dell'asintoto in questa forma:

$$\lim_{x\to\infty} \{[f(x) - mx] - q\} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] - q = 0$$

e quindi

$$\boxed{q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]} \tag{38.2}$$

Vedendola in altro modo, se i limiti 38.1 e 38.2 si può dire che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo della curva.

Osservazione sulla ricerca dell'asintoto obliquo Supponiamo che l'equazione di una funzione $y = f(x)$ possa scriversi nella forma

$$y = f(x) = mx + q + \varepsilon(x)$$

dove $\varepsilon(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to \infty$, cioè $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.
In tal caso

$$y = mx + q$$

è l'equazione dell'asintoto obliquo della curva rappresentativa della funzione.

Come caso particolare per una funzione razionale fratta del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $Q(x)$ è polinomio di grado n mentre $P(x)$ di grado $n + 1$, il quoziente tra $P(x)$ e $Q(x)$ sarà un polinomio di primo grado $mx + q$ e pertanto si potrà scrivere

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = mx + q + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $R(x)$ è resto della divisione tra $P(x)$ e $Q(x)$, è di grado minore di n; pertanto si avrà

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

Quindi $y = mx + q$ sarà l'equazione dell'asintoto obliquo

38.2 Studio della funzione derivata prima

Si è visto come lo studio del segno e delle radici della derivata prima serva per determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente, nonché massimi minimi e flessi a tangente orizzontale.
Risulta altresì utile, al fine di tracciare il grafico di $f(x)$, calcolare i limiti della funzione $f'(x)$:

- negli estremi finiti, se esistono, del suo dominio D'
- nei punti di discontinuità di $f'(x)$

38.3 Schema per lo studio di funzioni

Al fine di tracciare con la migliore approssimazione possibile il grafico di una funzione è bene seguire questo schema:

1. si determina il Dominio
2. si determinano eventuali simmetrie e periodicità:
   - se la funzione è pari o dispari basterà studiarla per $x \geq 0$
   - se la funzione è periodica di periodo T basterà studiarla in un intervallo di ampiezza T
3. si determinano eventuali punti di intersezione con gli assi
4. si studia il segno della funzione risolvendo la disequazione
$$f(x) > 0$$
5. si calcolano i limiti della funzione negli estremi finiti, se esistono, del dominio e si deducono gli eventuali asintoti verticali
6. se D è illimitato, si calcolano i limiti all'infinito, determinano se vi sono asintoti orizzontali o obliqui, e le eventuali intersezioni di questi con il grafico
7. si calcola la **derivata prima** $f'(x)$, determinandone il dominio D'; si risolve l'equazione
$$f'(x) = 0$$
   determinando le ascisse degli eventuali punti stazionari (massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale).
   Si studia il segno della derivata prima, risolvendo la disequazione
$$f'(x) > 0$$
   per stabilire gli intervalli dove la funzione è crescente/decrescente; si determineranno così punti di massimo, minimo e flessi a tangente orizzontale.
   Si procede infine al calcolo dei limiti della $f'(x)$ negli estremi finiti di D' e nei suoi punti di discontinuità, determinando l'inclinazione della tangente nei punti di arrivo e di partenza, gli eventuali punti angolosi, di cuspide e di flesso a tangente verticale
8. si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e se ne studia il segno, determinando gli intervalli di concavità, deducendo le coordinate degli eventuali punti di flesso (non a tangente verticale) laddove si verifichi una variazione di segno
9. si traccia infine il grafico della funzione partendo dal riportare su una retta di riferimento i capisaldi del grafico, ossia i valori di x corrispondenti a
   - estremi del dominio
   - punti in cui $f(x)$ cambia di segno e punti di intersezione con gli assi
   - punti in cui cambia segno $f'(x)$ punti in cui cambia segno $f''(x)$

- asintoti verticali

In tal modo il dominio della funzione resta suddiviso in intervalli in ciascuno dei quali f, f' e f'' hanno segno costante; si riporteranno quindi sullo schema le indicazioni desunte dai punti precedenti (da 1 a 8) e si procederà a tracciare il grafico della funzione in ciascuno di tali intervalli.

Alcune osservazioni

- Nello studio di una funzione di equazione $y = f(x)$ si devono risolvere le tre equazioni $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ e $f''(x) = 0$. Può darsi che una o più di tali equazioni non sia risolubile elementarmente; in tal caso ci si accontenterà di procedere graficamente localizzando le eventuali radici in opportuni intervalli; con il metodo di bisezione oppure del punto unito si potrà poi dare una approssimazione di queste radici.

- Per una maggior precisione nel disegno è spesso utile determinare il coefficiente angolare della retta tangente nell'eventuale punto di flesso e altri opportuni punti della curva

- Inoltre nello studio di una funzione può capitare che il calcolo della derivata seconda, o il suo studio, sia eccessivamente laborioso: in tal caso ci si può accontentare di un grafico meno preciso, fermandosi all'esame della derivata prima

38.4 Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

Dato il grafico di una funzione $F(x)$, il grafico della sua derivata $F'(x) = f(x)$ si può costruire in base alle seguenti considerazioni:

- negli intervalli un cui $F(x)$ è crescente (decrescente), la sua derivata $f(x)$ è positiva (negativa) e il valore della derivata sarà tanto maggiore quanto maggiore è la pendenza del grafico della funzione data

- nei punti in cui il grafico della funzione $F(x)$ ha tangente orizzontale (massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale) la derivata $f(x)$ è nulla

Desiderando un grafico più accurato si può considerare che si ha $F''(x) = f'(x)$ e quindi:

- negli intervalli in cui il grafico di $F(x)$ volge la concavità verso l'alto sarà $f'(x) > 0$ e quindi $f(x)$ sarà crescente

- negli intervalli in cui il grafico di $F(x)$ volge la concavità verso il basso sarà $f'(x) < 0$ e quindi $f(x)$ sarà decrescente

- nei punti di flesso del grafico di $F(x)$ sarà $f'(x) = 0$ e quindi il grafico di $f(x)$ avrà tangente orizzontale

Infine osserviamo che, come si potrebbe dimostrare se la funzione $F(x)$ è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y), la sua derivata $f(x)$ sarà dispari (simmetrico rispetto all'origine e viceversa.

Capitolo 39

Serie numeriche e di funzioni

La somma è un operazione definita quando il numero di addendi che si considera quando il numero di addendi che si considerano è finito; nonostante ciò in matematica capitano *situazioni in cui occorre calcolare la somma di un numero infinito di addendi*. Per poter trattare situazioni del genere occorre introdurre il concetto di **serie**.
La possibilità di sommare infiniti numeri, magari tutti positivi, e ottenere un risultato finito era qualcosa di paradossale per gli antichi filosofi greci; d'altra parte l'idea non è cosi paradossale basta pensare che potremmo scomporre la lunghezza di un'asta di due metri nella somma infinita dei "metà pezzi rimanenti da sommare", ottenendo una somma del tipo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

la quale, secondo le aspettative dovrebbe avere come risultato 2.

39.1 Definizioni

Successione e serie Sia data una successione di numeri reali

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

La sommatoria degli infiniti numeri[1]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{39.1}$$

è detta **serie** numerica per n da 1 a $+\infty$ di a_n. I numeri a_1, a_2 sono detti **termini** della serie.

Somme parziali e loro successione Possiamo considerare anche la somma di un numero finito di termini: indichiamo con s_n la somma parziale fino al

[1] Qui si segue la notazione del Dodero che fa partire gli indici/pedici della serie da 1 invece che da 0; è solo una questione estetica.

termine n-esimo dei termini della successione $\{a_n\}$:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1 \\
&s_2 = a_1 + a_2 \\
&\ldots\ldots \\
&s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n
\end{aligned}$$

o più compattamente

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad n \in \mathbb{N}$$

Le somme parziali costituiscono a loro volta una successione, detta appunto **successione delle somme parziali**:

$$\{s_n\} = s_1, s_2, \ldots, s_n \tag{39.2}$$

Carattere della serie Determinare il **carattere** di una generica serie (39.1) significa stabilire se essa è, alternativamente convergente, divergente o indeterminata. Per farlo siamo interessati al limite della successione delle somme parziali

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \tag{39.3}$$

Se:

- tale limite esiste ed è finito e risulta

  $$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

  diremo che la **serie** 39.1 è **convergente** e che la sua somma è s; si scriverà dunque

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

  In questo caso vale la relazione:

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

  Questa ultima formula illustra in che modo il concetto di serie traduce l'idea di somma di infiniti addendi: si calcola il limite per n ad infinito della somma finita dei primi n addendi;

- il limite è infinito si dirà che la serie è **divergente** e che la sua somma è infinita; più precisamente se il limite è $+\infty$ la serie *diverge positivamente*, mentre se il limite è $-\infty$ la serie *diverge negativamente*

- se il limite non esiste, si dirà che la serie è **indeterminata**/**irregolare**

Parlare di una serie numerica coinvolge pertanto sempre due diverse successioni:

1. la successione $\{a_n\}$ dei *termini della serie*
2. la successione $\{s_n\}$ delle *somme parziali*

Sulla notazione Talvolta, invece di sommare a partire da 1, si parte da un indice $N > 1$; scriveremo allora $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$. Laddove sia chiaro dal contesto da quale indice bisogna iniziare a sommare, per indicare una serie si può anche usare il simbolo sintetico $\sum a_n$

39.2 Serie notevoli

39.2.1 Serie geometrica

Una serie particolarmente importante, la serie geometrica

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots} \tag{39.4}$$

Si può osservare che il rapporto tra un termine della serie e il precedente è q (detto **ragione** della serie). Si può innanzitutto vedere che:

- se $q = 0$ la serie converge e ha per somma 1
- per $q = 1$ la serie è divergente
- se $q = -1$ la serie assume la forma

  $$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

  e quindi è indeterminata

Al fine di studiare il carattere della serie per altri valori di q si può dimostrare che[2]

$$\boxed{s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \tag{39.6}$$

Si distinguono alcuni casi:

1. se $\boxed{|q| < 1}$, allora $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ e pertanto si ha

   $$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

   ossia la serie **converge** e ha per somma $\frac{1}{1-q}$

2. se $\boxed{q > 1}$, allora $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ e la serie **diverge positivamente**

3. se $\boxed{q = 1}$ abbiamo $s_n = n+1$ quindi $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ e la serie **diverge positivamente**

[2]La formula utilizzata è quella della somma dei termini di una progressione geometrica finita

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{39.5}$$

dove si ha $a_1 = 1$, si è raccolto un segno meno sia al numeratore che al denominatore e la differenza negli esponenti è dovuto alla differenza nel settaggio degli indici.

4. se $\boxed{q = -1}$ la somma oscilla tra 0 e 1 quindi la serie è **indeterminata**
5. se $\boxed{q < -1}$ la serie è **indeterminata** perché si ha $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ e $\lim_{n\to+\infty} q^n$ non esiste (alcuni testi riportano, per questo caso, il carattere divergente, intendendo che $|s_n| \to +\infty$).

39.2.2 Serie armonica

È la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Si vedrà che la successione s_n delle somme parziali è $\geq \log(n+1)$ (e perciò in particolare tende a $+\infty$)

39.2.3 Serie di Mengoli

È la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

si riesce a dare una espressione semplice alla successione s_n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \left[1 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dunque $s_n \to 1$ ossia la serie converge ed ha somma 1.

Serie telescopiche La serie di Mengoli è il più semplice esempio di serie telescopica: in questo tipologie di serie, il termine generale a_k può essere riscritto come $b_k - b_{k+1}$, dove b_k è un'altra opportuna successione. Di conseguenza, grazie alle cancellazioni si ha

$$s_n = b_1 - b_{n+1}$$

Se il termine $b_n \to 0$, la serie è convergente e ha somma b_1.

39.3 Alcune proprietà delle serie

Moltiplicazione/divisione per costante Il carattere di una serie non si altera se si moltiplicano/dividono tutti i suoi termini per una stessa costante $c \neq 0$; in particolare se la serie è convergente, moltiplicandone tutti i termini per una costante si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma della serie data moltiplicata per tale costante

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c a_n = cs} \tag{39.7}$$

Ciò deriva basicamente dalle proprietà delle sommatorie.

Somma di due serie Sommando termine a termine due serie convergenti si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma delle somme delle serie date

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = a + b} \tag{39.8}$$

Soppressione di un numero finito di termini Sopprimendo un numero finito di termini da una serie, il carattere di essa non cambia: se la serie è convergente, sopprimendo un numero finito di termini rimane convergente e la sua somma risulta diminuita della somma dei termini soppressi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \wedge \sum_{n=1}^{k} a_n = A \longrightarrow \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = s - A} \tag{39.9}$$

L'ultimo termine dell'espressione di cui sopra è detto la **serie resto** di una serie data; coincide con la serie considerando la somma solo da un determinato termine n-esimo in poi.

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \tag{39.10}$$

Proprietà ovvia della serie resto è che tende a 0 per l'n di partenza tendente ad infinito.

39.4 Criteri di convergenza

Siamo interessati a studiare sotto quali condizioni una serie converge; iniziamo con una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza. In seguito i criteri di convergenza applicabili sono articolati in ragione della tipologia di serie.
Per ora non ci si preoccupa del problema di calcolare esplicitamente il valore di una serie (ad esempio se convergente a quanto converge).

Convergenza della serie e limite della successione Vale la seguente affermazione: se una serie è convergente, il suo termine generale tende a zero per $n \to +\infty$. Infatti poiché la serie è convergente, detta s la sua somma si avrà:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

ma anche

$$\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$$

sottraendo membro a membro queste due espressioni si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = 0$$

ossia per un noto teorema sui limiti

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$$

ma la differenza $(s_n - s_{n-1})$ non è altro che il termina a_n della serie iniziale e pertanto, come volevasi dimostrare si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{39.11}$$

Quest'ultimo teorema esprime una condizione necessaria per la convergenza di una serie: tutte le serie convergenti hanno il termine generale che tende a zero. Non è però vera la proposizione inversa, in quanto esistono serie il cui termine generale è infinitesimo ma non sono convergenti: un esempio è costituito dalla serie armonica.

39.4.1 Serie a termini non negativi

Per una serie a termini non negativi si hanno alcuni semplici criteri sufficienti di convergenza.

Innanzitutto notiamo che le somme parziali sono via via crescenti e per l'esistenza del limite di una successione monotona, esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$. Tale limite è finito oppure è $+\infty$ a seconda che la successione $\{s_n\}$ sia limitata oppure no. Quindi una serie $\sum a_n$ a termini non negativi può essere convergente o divergente a $+\infty$; essa converge solo se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è limitata.

Per discernere la limitatezza o meno abbiamo a disposizione alcuni criteri[3].

39.4.1.1 Criterio del confronto

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie a termini non negativi e tali che

$$a_n \le b_n \quad \text{definitivamente}$$

la serie $\sum a_n$ si dice *minorante* mentre la serie $\sum a_n$ *maggiorante*. In questo caso valgono le seguenti implicazioni:

$$\sum b_n \text{ è convergente} \implies \sum a_n \text{ è convergente} \tag{39.12}$$

$$\sum a_n \text{ è divergente} \implies \sum b_n \text{ è divergente} \tag{39.13}$$

Esempio La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \le 1$$

è divergente, in quanto l'affermazione è vera per $alpha = 1$ (serie armonica), mentre per $\alpha < 1$ la serie data è maggiorante della serie armonica, perciò diverge.

39.4.1.2 Criterio del confronto asintotico

Se le due successioni a termini positivi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche

$$a_n \sim b_n$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere, ovvero sono entrambe convergenti o divergenti.

[3] Dimostrazioni dei criteri a pag 237 del Bramanti 1

Tuttavia nel caso siano convergenti, non necessariamente avranno la stessa somma nel caso siano convergenti. Intuitivamente questo accade perché gli addendi delle due somme sono simili quando n è grande, ma il valore della somma della serie dipende da tutti gli addendi anche i primi (dove magari le due serie sono profondamente differenti).

Esempio La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge perché

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$$

e la serie di Mengoli converge. Inoltre se $\alpha > 2$ la serie converge per il confronto con la serie con $\alpha = 2$. Infine si può dimostrare che anche nei casi $1 < \alpha < 2$ la serie converge.
Si è così stabilito il carattere della serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge se } \alpha > 1\text{, diverge se } \alpha \leq 1 \tag{39.14}$$

Una nota di carattere pratico Tutti gli strumenti presentati per stabilire stime asintotiche per funzioni (limiti notevoli, sviluppi di MacLaurin, ...) si possono applicare anche per ottenere stime asintotiche per successioni e quindi sono comode per lo studio del carattere di una serie a termini positivi.

39.4.1.3 Criterio della radice

Se $\sum a_n$ una serie a termini non negativi, nel caso esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \tag{39.15}$$

Allora se:

- $l > 1$: la serie diverge (inoltre il termine generale della serie tende a $+\infty$);
- $l < 1$: la serie converge;
- $l = 1$: non si può concludere nulla.

Esempio Considerando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad a \geq 0$$

si ha per $n \to +\infty$:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \to 0$$

39.4.1.4 Criterio del rapporto

Se $\sum a_n$ una serie a termini non negativi, nel caso esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \tag{39.16}$$

Allora se:

- $l > 1$: la serie diverge (inoltre il termine generale della serie tende a $+\infty$);
- $l < 1$: la serie converge;
- $l = 1$: non si può concludere nulla.

Esempio La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

39.4.1.5 Altre serie cui questi criteri si applicano

Dato che il carattere di una serie non cambia se ne alteriamo un numero finito di termini (vedi la proprietà connessa alla serie resto), i criteri visti per le serie a termini non negativi si applicano anche alle serie con termini *definitivamente non negativi.*
Raccogliendo un segno meno dall'intera serie, poi, si vede che questi si possono applicare anche a serie a *termini non positivi anche solo definitivamente.*
In sostanza questi criteri si applicano alle **serie che hanno tutti i termini (tranne un numero finito) dello stesso segno**. Nel prossimo paragrafo si esaminano invece le serie che possiedono infiniti termini positivi e infiniti termini negativi.

39.4.2 Serie a termini di segno variabile

Veniamo ora allo studio delle serie a termini di segno qualsiasi.

Convergenza assoluta Una primo criterio di convergenza è quello della convergenza assoluta: una serie $\sum a_n$ si dice **assolutamente convergente** se converge la serie (a termini non negativi) $\sum |a_n|$.
Vale il seguente teorema: se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge.[4] Ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^{\alpha}, \quad \alpha > 1$$

[4]La dimostrazione discende dal fatto che: stiamo di fatto sommando due serie, una con tutti i termini positivi della successione originale e un'altra con tutti i termini negativi. La somma algebrica di queste due sotto-serie è convergente se entrambe sono convergenti; d'altra parte essendo la serie convergente in valore assoluto le due somme sono superiormente limitate e non decrescenti, quindi convergenti per il teorema di monotonia.

è assolutamente convergente, e quindi convergente, infatti si ha

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}$$

è convergente per $\alpha \geq 1$

Dalla convergenza semplice però non deriva quella assoluta come si avrà modo di constatare.

39.4.2.1 Serie a termini di segno alternato. Criterio di Leibniz

Tra le serie a termini di segno variabile un caso semplice p costituito dalle serie a segni alterni, per le quali vale il seguente criterio di convergenza

Criterio di Leibniz Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{con } a_n \geq 0 \forall n \tag{39.17}$$

Se:

1. la successione $\{a_n\}$ è decrescente
2. $a_n \to 0$ per $n \to \infty$

allora la serie è convergente. Inoltre:

- le somme parziali di indice pari approssimano la somma per eccesso
- quelle di indice dispari per difetto
- la serie resto è maggiorata in valore assoluto dal primo termine trascurato

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$$

Analogamente a quanto osservato riguardo ai criteri di convergenza per le serie a termini positivi, il criterio di Leibniz può essere applicato anche se i termini sono *definitivamente* di segno alterno e la successione a_n è definitivamente decrescente.

Ad esempio, applicando il criterio di Leibniz osserviamo che le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

sono convergente; la prima è anche assolutamente convergente mentre la seconda non lo è.

39.5 Introduzione alle serie di funzioni

Il concetto di **serie numerica** discusso in precedenza è il primo passo per introdurre le **serie di funzioni** serie più generali che si possono vedere come serie numeriche dipendenti da un parametro x: quando quest serie convergono per ogni valore x in in un dato intervallo, rappresentano delle funzioni di nuovo tipo.
Vi sono due importanti classi di serie di funzioni:

- serie trigonometriche
- serie di potenze, anche dette serie di Taylor (perché si possono vedere come una estensione per $n \to \infty$ della formula di Taylor)

39.5.1 Serie di Taylor delle trascendenti elementari

Riprendendo la formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{T_{n,x_0}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}}_{E_n(x)}$$

con $c$un opportuno punto tra x_0 e x.
Ora, se la funzione f ha derivate di ogni ordine si può scrivere la serie facendo tendere k anche ad ∞

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k} \tag{39.18}$$

che è detta **serie di Taylor per la funzione** f (centrata in x_0).

La serie sarà *convergente* e la sua somma sarà $f(x)$ se in un certo punto $x \in (a, b)$ l'errore $E_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$.
Se accade che, per ogni x in un intervallo I, $E_n(x) \to 0$, diremo che $f(x)$ è **sviluppabile in serie di Taylor** nell'intervallo I; ci sono funzioni infinitamente differenziabili che sono sbiluppabili in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$, altre che lo sono solo un intervallo limitato, altre per le quali l'intervallo si riduce ad un solo punto (x_0).

39.5.1.1 La serie esponenziale

Dimostriamo come la funzione e^x sia sviluppabili in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$. Partiamo dallo sviluppo di MacLaurin all'ordine n per e^x con resto secondo Lagrange: per ogni intero n ed $x \in \mathbb{R}$ esiste un punto $c \in [0, x]$ tale che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

Fissiamo ora x e facciamo tendere $n \to +\infty$; il punto c potrà anche variare con n, ma essendo sempre compreso tra 0 e x sarà comunque limitato, indipendentemente dal valore assunto da x

$$e^c \leq \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Al contempo si può dimostrare (ad esempio col criterio del rapporto di una successione) che la successione:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Ne segue quindi che l'errore (moltiplicazione di un e^c e il termine di sopra) tenda effettivamente a 0 e quindi si possa scrivere:

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{39.19}$$

In particolare per $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{39.20}$$

che costituisce un'altra definizione di e, operativamente più efficiente/veloce di quella basata sul limite notevole.

39.5.1.2 Le serie delle funzioni trigonometriche elementari

Discorso analogo si può ripetere per funzioni seno e coseno.
Il termine $f^{n+1}(c)$ che compare nelle rispettive formule di MacLaurin ha la forma $\pm\cos c$ o $\pm\sin c$ pertanto ha valore assoluto $\leq$. Questa limitazione permette di ripetere la dimostrazione fatta per e^x e concludere che

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{39.21}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{39.22}$$

Le formule possono essere utili per il calcolo numerico approssimato delle funzioni trigonometriche fondamentali; inoltre sono di fatto prima definizione operativa rigorosa (ad esempio calcolare un seno senza calcolatrice) a nostra disposizione per la determinazione delle funzioni trigonometriche (prima viste più che altro come black box dal punto di vista del calcolo, al di la dell'interpretazione geometrica).

39.5.1.3 Serie di potenze

In generale si dice serie di potenze una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

con a_k costanti reali (o complessa) e x variabile reale (o complessa).
La più semplice serie di potenze è la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{39.23}$$

che converge per $|x| < 1$.
Altri sviluppi in serie di potenze per funzioni notevoli sono i seguenti:

$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{39.24}$$

$$\boxed{\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}} \tag{39.25}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{x^k}{k}\right) \quad |x| < 1} \tag{39.26}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1} \tag{39.27}$$

39.6 TODO

```
- serie nel campo complesso (BPS 1 pag 249)
```

Capitolo 40

Integrali

40.1 Integrali indefiniti

Si tratta da ora in poi il problema inverso della derivazione: cercheremo, data una funzione, $y = f(x)$ di determinare una funzione che ammetta $f(x)$ come derivata e che, per tale motivo verrà detta **primitiva** di $f(x)$.

40.1.1 Integrale indefinito

40.1.1.1 Introduzione

Osserviamo che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$, anche

$$F(x) + C$$

con C costante arbitraria è una primitiva di $f(x)$; **quest'ultima è la primitiva più generale** e rappresenta tutte e sole le funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$.
Questa primitiva generale prende il nome di **integrale indefinito** di $f(x)$ e si rappresenta con il simbolo

$$\int f(x)\, dx$$

che si legge *integrale di* $f(x)$ *in* dx. La $f(x)$ si dice **funzione integranda**.
Per definizione, dunque:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C \implies F'(x) = f(x)} \tag{40.1}$$

l'integrale indefinito di $f(x)$ è l'*insieme delle primitive* di $f(x)$.
Ad esempio considerando la funzione $3x^2$, chiedendoci qual'è la sua primitiva, ci viene in mente x^3, scriveremo pertanto

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

40.1.1.2 Relazioni tra integrale indefinito, derivata e differenziale

Ricordando che:

- il differenziale di una funzione $df(x)$ è la derivata della stessa, $f'(x)$ moltiplicata per dx (ovvero il differenziale della funzione x);
- che le regole di calcolo dei differenziali composti (ad esempio differenziale della somma, prodotto quoziente) sono le medesime di quelle derivate delle derivate,

si possono ricavare alcune importanti relazioni tra integrale indefinito, derivata (indicata qui con D) e differenziale (indicato con d):

$$D\left[\int f(x)\ dx\right] = f(x) \tag{40.2}$$

$$d\left[\int f(x)\ dx\right] = f(x)\ dx \tag{40.3}$$

$$\int df(x) = f(x) + C \tag{40.4}$$

40.1.1.3 Continuità ed esistenza dell'integrale indefinito

Sappiamo che la derivata di una funzione continua può non esistere in qualche punto (es laddove derivata sinistra e destra non coincidono); invece si potrebbe dimostrare che: di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato esistono sempre le funzioni primitive e quindi esiste $\int f(x)\ dx$ (non sempre però si è in grado di determinare l'espressione analitica delle primitive).

Nel seguito ipotizziamo che le funzioni su cui operiamo siano continue, almeno in opportuni intervalli.

40.1.1.4 Integrale indefinito come operatore lineare

Gli integrali indefiniti sono operatori lineari, similmente alle derivate: l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali delle funzioni

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)]\ dx = k_1 \int f_1(x)\ dx + k_2 \int f_2(x)\ dx \tag{40.5}$$

Questo deriva dai seguenti fatti congiuntamente:

- una costante moltiplicativa si può trasportare dentro o fuori dal segno di integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx \tag{40.6}$$

- l'integrale di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica degli integrali delle singole funzioni

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\ dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx \tag{40.7}$$

Integrazione per decomposizione La linearità dell'operatore permette di calcolare l'integrale di una funzione quando questa può essere decomposta nella somma di funzioni di ciascuna delle quali si sappia determinare una primitiva; si parla in tal caso di integrazione per decomposizione.

40.1.2 Integrazioni immediate

Per **integrazione di una funzione** si intende la determinazione delle sue primitive; se la funzione integranda $f(x)$ è una funzione nota (o la si riesce ricondurre/riesprimere come tale) l'integrazione è immediata: le regole base (provenienti da quelle di derivazione, lette in senso contrario) vengono approfondite nel seguito.

40.1.2.1 Funzioni costanti

Se $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ si ha[1]:

$$\boxed{\int k \; dx = kx + C} \tag{40.8}$$

40.1.2.2 Funzioni potenza

Per calcolare l'integrale indefinito di una potenza di x avente per esponente un qualsiasi numero reale (ad eccezione di -1) la regola è:

$$\boxed{\int x^\alpha \; dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C} \tag{40.9}$$

Si ha infatti, per $\alpha \neq -1$

$$D_x\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$$

Nel caso particolare $\alpha = 0$, si deduce

$$\int \; dx = \int 1 \; dx = x + C$$

Nel caso in cui sia $\alpha = -1$, la funzione integranda è $\frac{1}{x}$ che ricordiamo essere la derivata di $\log|x|$; si avrà quindi

$$\boxed{\int \frac{1}{x} \; dx = \log|x| + C} \tag{40.10}$$

Volendo generalizzare le due formule di cui sopra calcoliamo le derivate di due funzioni particolari:

- la prima è:

$$D_x\left\{\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right\} = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)[f(x)]^{\alpha+1-1} \cdot f'(x)$$

[1]Questo è un caso particolare, se pur rilevante, di funzione potenza.

Dalla quale deriviamo la regola

$$\boxed{\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C} \tag{40.11}$$

sempre per $\alpha \neq -1$

- la seconda è

$$D_x\left\{\log|f(x)|\right\} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Si deduce che $\log|f(x)|$ è una primitiva di $\frac{f'(x)}{f(x)}$ e quindi è

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)| + C} \tag{40.12}$$

40.1.2.3 Funzioni esponenziali

Considerando infine le derivate delle funzioni esponenziali si ha

$$\boxed{\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log a} + C} \tag{40.13}$$

$$\boxed{\int e^x\ dx = e^x + C} \tag{40.14}$$

Generalizzate porteranno a

$$\boxed{\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C} \tag{40.15}$$

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = e^{f(x)} + C} \tag{40.16}$$

40.1.2.4 Funzioni trigonometriche

Considerando altre derivate notevoli di funzioni trigonometriche otteniamo le seguenti regole di integrazione

$$\boxed{\int \cos x\ dx = \sin x + C} \tag{40.17}$$

$$\boxed{\int \sin x\ dx = -\cos x + C} \tag{40.18}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \int 1 + \tan^2 x\ dx = \tan x + C} \tag{40.19}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + C} \tag{40.20}$$

Ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte, potremo generalizzare le precedenti come:

$$D_x\left[\sin f(x)\right] = \cos f(x) \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \cos f(x) \cdot f'(x)\, dx = \sin f(x) + C} \tag{40.21}$$

$$D_x\left[-\cos f(x)\right] = \sin f(x) \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \sin f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + C} \tag{40.22}$$

$$D_x\left[\tan f(x)\right] = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \tan f(x) + C} \tag{40.23}$$

$$D_x\left[-\cot f(x)\right] = \frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, dx = -\cot f(x) + C} \tag{40.24}$$

40.1.2.5 Inverse delle goniometriche

Considerando le derivate delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C} \tag{40.25}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C} \tag{40.26}$$

La loro generalizzazione è:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \arcsin f(x) + C} \tag{40.27}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx = \arctan f(x) + C} \tag{40.28}$$

Può essere altresì ricordare seguenti formule. Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+m^2}\, dx = \int \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{m^2}}\, dx = \frac{1}{m} \int \frac{\frac{1}{m}}{1+\left(\frac{x}{m}\right)^2}\, dx$$

da cui

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{x}{m} + C} \tag{40.29}$$

Generalizzando avremo anche

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{f(x)}{m} + C} \tag{40.30}$$

che nel caso particolare $f(x) = x + k$ (e quindi $f'(x) = 1$ da luogo a

$$\boxed{\int \frac{1}{(x+k)^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{x+k}{m} + C} \tag{40.31}$$

40.1.2.6 Iperboliche

Si ha:

$$\boxed{\int \sinh x \, dx = \cosh x + C} \tag{40.32}$$

$$\boxed{\int \cosh x \, dx = \sinh x + C} \tag{40.33}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C} \tag{40.34}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C} \tag{40.35}$$

40.1.3 Integrazione per sostituzione

Il calcolo di un integrale $\int f(x) \, dx$ può talvolta risultare più semplice mediante una opportuna sostituzione; si può infatti dimostrare che l'integrale non cambia sostituendo alla variabile d'integrazione x una funzione di un'altra variabile t, purchè tale funzione sia *derivabile* e *invertibile*.
Se poniamo $x = g(t)$, da cui deriva $dx = g'(t)dt$, si ha che è

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt}$$

e dunque supponendo di saper calcolare quest'ultimo integrale, si è reso possibile il calcolo dell'integrale iniziale; in alcuni casi la sostituzione è alternativa all'integrazione immediata, mentre in altri casi è indispensabile.

40.1.4 Integrazione per parti

Se f e f sono due funzioni derivabili in $[a; b]$ dalla derivata del loro prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

si ottiene

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Ora prendendo l'integrale indefinito di entrambi i membri ed osservando che $\int (fg)' \, dx = fg$ si ottiene la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx} \tag{40.36}$$

dove si chiama

- $f(x)$ fattore finito
- $dg(x) = g'(x) \, dx$ fattore differenziale

Integrando per parti è necessario saper individuare opportunamente nella funzione integranda il fattore finito e il fattore differenziale;

- per fattore differenziale si dovrà scegliere il fattore del quale si sa calcolare l'integrale mediante una integrazione immediata

- può essere che entrambi i fattori siano facilmente integrabili; in questo caso si sceglie come fattore differenziale quello dei due che, integrato, conduce a una situazione più semplice nel secondo membro dell'uguaglianza dell'integrazione per parti

40.1.5 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Siamo interessati ad una procedura per integrare funzioni del tipo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx \tag{40.37}$$

con $N(x)$ un polinomio di grado m e $D(x)$ un polinomio di grado n.

40.1.5.1 Grado del numeratore superiore

Nel caso che sia $\boxed{m \geq n}$ si deve eseguire innanzitutto la divisione dei due polinomi, ottenendo come quoziente un polinomio $Q(x)$di grado $m-n$ e come resto un polinomio $R(x)$ di grado inferiore a n.
La funzione integranda si potrà riscrivere nella forma:

$$f(x) = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

A questo punto dovendo calcolare l'integrale di quest'ultima

$$\int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\, dx$$

$Q(x)$ è un polinomio, quindi di facile integrazione; per il secondo termine occorrerà saper integrare una funzione razionale fratta il cui numeratore sia un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore (ovvero il caso seguente).

40.1.5.2 Grado del numeratore inferiore

Supponendo dunque che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore (altrimenti adottare le procedure della sezione precedente) si procederà a seconda del grado del denominatore.

Denominatore di primo grado In questo caso, tenendo conto che il numeratore è una costante, l'integrale si calcola facilmente mediante logaritmo. La formula generale è la seguente:

$$\int \frac{k}{ax+b}\, dx = \frac{k}{a} \log|ax+b| + C$$

Denominatore di secondo grado $N(x)$ può essere di grado uno o una costante. Ci proponiamo dunque di calcolare integrali del tipo:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx\ ; \qquad \int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

nei tre possibili casi dettati dal determinante del denominatore $\Delta = b^2 - 4ac$.
Se $\boxed{\Delta > 0}$ il trinomio al denominatore si può scomporre in fattori e sarà

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

La funzione integranda si potrà allora decomporre nella somma

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

che sappiamo integrare; A e B sono da determinare algebricamente, come si vedrà negli esempi/esercizi.
Se $\boxed{\Delta = 0}$ le radici x_1, x_2 sono coincidenti, si ha perciò

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2$$

Si procederà:

- per numeratore di grado zero come segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}\,dx \\ &= \frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,dx \\ &= \frac{q}{a}\frac{(x-x_1)^{-2+1}}{-2+1} + C \\ &= -\frac{q}{a(x-x_1)} + C\end{aligned}$$

- per numeratori di primo grado decomponendo la funzione integranda in una somma del tipo

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{px+q}{a(x-x_1)^2} = \ldots = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_1)^2}$$

  con A e B due costanti da determinare similmente al paragrafo precedente.[2]

[2] Alternativamente (Bramanti), mediante sostituzione ci si riconduce alla somma di potenze (con esponente positivo o negativo) che si integra immediatamente. Ad esempio

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx \tag{40.38}$$

Sostituendo $t = 3x + 2$

$$\int \frac{(t-2)/3+1}{t^2}\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt \tag{40.39}$$

e da qui si prosegue usualmente.

Se infine $\boxed{\Delta < 0}$, non esistono radici reali del denominatore che, come si potrebbe dimostrare, si può esprimere come somma di due quadrati:

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x+k)^2 + m^2\right]$$

Si procederà come segue:

- nel caso di **numeratore di grado zero** si può facilmente ricondurre alla forma già vista

$$\int \frac{c}{(x+k)^2 + m^2}\,dx = \frac{c}{m}\arctan\left(\frac{x+k}{m}\right) + C$$

- nel caso di **numeratore di primo grado** si cercherà di decomporre la funzione integranda nella somma di due frazioni algebriche in modo che nella prima compaia al numeratore la derivata del denominatore, ossia $2ax + b$, mentre nella seconda il numeratore sia una costante

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{p\left(x+\frac{q}{p}\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{p\frac{1}{2a}\left(2ax+\frac{2aq}{p}\right)}{ax^2+bx+c}$$
$$= \frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b+\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right] = \frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right]$$

L'integrale della prima frazione in parentesi $+\log\left|ax^2+bx+c\right| = \log\left(ax^2+bx+c\right)$, mentre l'integrale della seconda frazione si risolve mediante un arcotangente similmente a quanto si è fatto al punto precedente.

Denominatore di grado > 2 In questo caso è sempre possibile (teoricamente) scomporre il denominatore in un prodotto di (potenze di) fattori di primo grado, oppure di secondo grado irriducibili. Fatto questo si scompone la frazione in fratti semplici a cui si applicano i discorsi precedenti. Nel seguito vediamo alcuni semplici esempi:

- nel caso il denominatore sia fattorizzabile (vedi Ruffini) come prodotto di polinomi di primo grado si procede analogamente a quanto visto, scomponendo la frazione in una somma di frazioni è andandone a determinare i vari numeratori mediante il principio di identità dei polinomi. Ad esempio:

$$\frac{1}{x^3-6x^2+11x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- se il denominatore si riesce a decomporre in polinomi in cui uno è di grado due, al numeratore si deve porre un polinomio che abbia grado inferiore di una unità rispetto a quello del denominatore e determinare le lettere incognite come già affrontato. Ad esempio considerando

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}; dx$$

impostiamo la scomposizione come

$$\frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{A}{x*2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

e procediamo come usuale;

- nel caso il polinomio si presenti nella forma

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha)^n} \tag{40.40}$$

con $N(x)$ polinomio di grado minore di n si può decomporre nella somma

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

dove ancora i numeratori si determineranno sulla base del principio di identità dei polinomi

Se il grado del denominatore è molto maggiore di due, conviene passare a del software specialistico.

40.1.5.3 Funzioni razionali di e^x

Dovendo integrare una funzione razionale di e^x, si effettua la sostituzione $e^x = t$ e ci si riconduce a una funzione razionale di t. Occorrerà alla fine tornare alla variabile x.

Esempio Considerando

$$\int \frac{1}{cosh}\,dx = 2\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Sostituiamo giungendo a

$$2\int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t + c = 2\arctan(e^x) + c$$

40.1.5.4 Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

L'integrale di una funzione razionale di $\sin x$ e/o $\cos x$ può sempre esser ricondotto all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$ $(x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt)$, giustificata dalle seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \qquad \text{se } t = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$$

Questo metodo porta in genere a calcoli laboriosi e va utilizzato solo quando non sembra esservi una via più semplice o un buon software a portata di mano.

40.1.6 Integrali di funzioni trigonometriche

Una breve panoramica di metodi per integrare una funzione trigonometrica.

Integrali del tipo

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx \tag{40.41}$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx \tag{40.42}$$

si risolvono effettuando rispettivamente le sostituzioni $\sin x = t$ e $\cos x = t$.

In generale dovendo calcolare

$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n \, dx \tag{40.43}$$

- con *almeno uno degli esponenti dispari* è sempre possibile riscrivere la funzione integranda in una delle forme precedenti (equazioni 40.41 40.42). A questo punto l'integrale si calcola, analogamente, mediante sostituzione $\sin x = t$ e $\cos x = t$ rispettivamente;
- se invece entrambi gli esponenti sono pari si possono usare le formule trigonometriche per l'abbassamento di grado:

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Per integrali del tipo

$$\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx \tag{40.44}$$

$$\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx \tag{40.45}$$

$$\int \cos \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx \tag{40.46}$$

si possono usare le formule di prostaferesi che riconducono alla somma di due integrali immediati.

40.1.7 Integrali di particolari funzioni irrazionali

Supponendo di dover calcolare l'integrale di una funzione

$$\int f(x; \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

con f una funzione razionale di x e di $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.
Se non si riesce a calcolare l'integrale con i metodi di integrazione fin qui visti, si può ricorrere alle cosiddette sostituzioni di Eulero.
Si procederà diversamente a seconda che $a > 0$ o $a < 0$:

- se $a > 0$, ponendo

  $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \cdot x$$

  la funzione integranda diventa funzione razionale della variabile t

- se $a < 0$, le radici del trinomio $ax^2 + bx + c$ sono reali (ipotizziamo α e β).
  Si avrà $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$.
  La determinazione dell'integrale si può ricondurre al calcolo integrale di funzioni razionali di t con la sostituzione

  $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$$

Supponendo invece di dover calcolare gli integrali di funzioni razionali di x ed una sola delle seguenti radici:

$$1)\sqrt{a^2-x^2}$$
$$2)\sqrt{a^2+x^2}$$
$$3)\sqrt{x^2-a^2}$$

Nell'ipotesi che sia sempre $a > 0$, si effettuano rispettivamente le seguenti sostituzioni standard:

1. nel primo caso si pone $x = a\sin t$ e $dx = a\cos t\ dt$

   $$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-(\sin t)^2)} = a\,|\cos t|$$

   Nel caso si stia calcolando un integrale definito si sa dove varia xe quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno.
   L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sin t, \cos t$. A sua volta questo è riconducibile all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione $\tan\frac{t}{2} = u$ (o un'altra via più semplice se possibile).

2. nel secondo si pone $x = a\sinh t$ e $dx = a\cosh t\ dt$

   $$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+(\sinh t)^2)} = a\cosh t$$

   Si osservi che $\cosh t$ è sempre positivo.
   L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sinh t$, $\cosh t$. A sua volta questo è riconducibile all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione $e^t = u; t = \log u; dt = \frac{du}{u}$ (oppure l'integrale si calcola per un'altra via più semplice se disponibile

3. nel terzo caso,

   - se $x \geq a$ si pone $x = a\cosh t$ e $dx = a\sinh t\ dt$:

     $$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2((\cosh t)^2-1)} = \sinh t$$

     Nel caso si stia calcolando un integrale definito si sa dove varia xe quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno.
     L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sinh t$, $\cosh t$ (vedi secondo caso).
   - se invece $x \leq -a$ si pone invece $x = -a\cosh t$ e $dx = -a\sinh t\ dt$

Osserviamo che quando si effettuano le sostituzioni 2 e 3 nel ritornare alla variabile x occorre usare le funzioni iperboliche inverse:

$$x = a\cosh t \implies t = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$
$$x = a\sinh t \implies t = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)$$

A questo proposito è utile anche notare che:

$$\sinh(\operatorname{arccosh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$
$$\cosh(\operatorname{arcsinh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

Infine supponendo di dover integrare una funzione razionale di x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, ..., si pone $x = t^n$ con n uguale al minimo comune multiplo di $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Si ha quindi $dx = nt^{n-1}dt$ e si ottiene una funzione razionale di t. Integrata questa, si torna alla variabile x.

40.2 Integrali definiti

Nelle applicazioni di carattere scientifico e tecnico si presentano molto spesso situazioni in cui la misura dell'area limitata dal grafico di una funzione e dall'asse delle ascisse in un certo intervallo di valori della variabile indipendente viene ad assumere un significato rilevante.

40.2.1 Introduzione

Considerando una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, ci proponiamo di valutare la misura dell'area della regione di piano delimitata

1. dalla curva di equazione $y = f(x)$;
2. dall'asse delle x;
3. dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$.

Suddividiamo l'intervallo, che ha ampiezza $b-a$ in n parti uguali, ciascuna delle quali avrà ampiezza

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Gli estremi degli n intervallini saranno dati da:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = a + 2 \cdot h; \quad \ldots; \quad x_n = b$$

ovvero

$$x_i = a + i \cdot h \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Definizione mediante somma integrale superiore e inferiore In ciascuno dei $j = n - 1$ intervallini la funzione è continua e perciò per il teorema di Weierstrass assume un massimo (che indichiamo con M_j) e un minimo (m_j). Considerando ora le seguenti somme:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot h \tag{40.47}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot h \tag{40.48}$$

sono rispettivamente la *somma integrale inferiore* e la *somma integrale superiore* della funzione $f(x)$.
Le somme integrali inferiore e superiore si possono considerare approssimazioni rispettivamente per difetto e per eccesso della misura dell'area sottesa al grafico della funzione considerata nell'intervallo $[a;b]$. Tali approssimazioni, come si può intuire, migliorano al crescere del numero di n parti in cui è stato suddiviso l'intervallo; questo perché in ogni suddivisione minimo e massimo tendono progressivamente ad avvicinarsi (coincidendo entrambi, per $n \to +\infty$, al valore assunto dalla funzione stessa).
E' intuitivamente evidente che le successione delle somme integrali inferiori e superiori:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$
$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

convergono ad un unico limite che rappresenta la misura I dell'area di interesse:

$$I = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \tag{40.49}$$

Tale integrale si chiama **integrale definito** della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo :

$$\int_a^b f(x)\ dx \tag{40.50}$$

Definizione mediante successione di Cauchy-Riemann In ciascuno dei $j = n-1$ intervallini scegliamo un *punto arbitrario* ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$. Costruiamo la somma di Cauchy-Riemann come

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \tag{40.51}$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza passiamo al limite per $n \to +\infty$ analogamente a quanto fatto in precedenza.
Diciamo allora che la funzione è integrabile in $[a;b]$ se,

- detta S_n una qualsiasi successione di Cauchy-Riemann esiste finito il limite di S_n
- tale limite non dipende da come abbiamo scelto i punti ξ_j

In tal caso si pone:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\ dx$$

e si legge[3] integrale da a a b di $f(x)$ in dx. La variabile x si dice *variabile d'integrazione* ed è una variabile muta; infatti la scrittura $\int_a^b f(t)\ dt$ ha lo stesso significato di $\int_a^b f(x)\ dx$ (così come avviene per gli indici delle sommatorie). Infine notiamo che l'integrale definito è un numero a contrario di quello indefinito (un insieme di funzioni).

[3] A livello di notazione, il segno $\int$ (una esse allungata) è una deformazione del simbolo di somma; la scrittura $f(x)\ dx$ ricorda il prodotto del valore di $f(x)$ per la lunghezza di un piccolo intervallo sull'asse x; tutta la scrittura quindi ricorda il procedimento con cui l'integrale è stato definito

40.2.2 Proprietà degli integrali definiti

1. si ha innanzitutto
$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0} \tag{40.52}$$

2. inoltre per convenzione
$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx} \tag{40.53}$$
per giustificare questa seconda ricordiamo che, per calcolare l'integrale $\int_a^b$ occorre determinare il limite comune delle successioni delle somme integrali inferiori s_n e S_n. In tali espressioni figura il termine $h = \frac{b-a}{n}$. Quando invece si calcolare l'integrale $\int_b^a$ il termine risulta essere $h = \frac{a-b}{n}$ ed è quindi di segno opposto rispetto a quello precedente e risulteranno perciò cambiate di segno anche tutte le somme integrali (e quindi risulterà cambiato di segno anche il loro limite)

3. considerando una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a;b]$ e sia c un punto interno di tale intervallo
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx} \tag{40.54}$$
Inoltre, tenendo presente la 40.53 di cui sopra, vale anche se il punto c non è interno all'intervallo $[a;b]$

4. l'integrale definito della somma di due funzioni continue nell'intervallo $[a;b]$ è la somma dei loro integrali definiti:
$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\;dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx} \tag{40.55}$$

5. l'integrale definito del prodotto di una funzione per una costante è uguale al prodotto della costante per l'integrale definito della funzione
$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx} \tag{40.56}$$
Congiuntamente la 40.55 e la 40.56, si possono esprimere come
$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) + \alpha g(x)]\;dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \alpha \int_a^b g(x)\,dx} \tag{40.57}$$
ossia l'integrale definito della combinazione lineare di due funzioni è la combinazione lineare dei loro integrali definiti; diremo perciò che, come l'integrale indefinito, anche l'integrale definito è un **operatore lineare**

6. infine si verifica facilmente che
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx} \tag{40.58}$$

40.2.3 Teorema della media

Un'altra importante proprietà degli integrali definiti è espressa dal seguente teorema: se la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ allora esiste un punto c di tale intervallo per cui si ha

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)} \tag{40.59}$$

o equivalentemente

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Il valore $f(c)$ prende il nome di **valore medio** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$; si può pensare come limite per $n \to +\infty$ della media aritmetica dei valori che la funzione assume nei punti $c_1, c_n, \ldots, c_n$ interni rispettivamente a ciascuno degli n intervalli uguali in cui è stato diviso l'intervallo $[a; b]$ $\left(h = \frac{b-a}{n} \to n = \frac{b-a}{h}\right)$

Il teorema della media ha anche una semplice interpretazione geometrica: esiste almeno un punto $c(a \leq c \leq b)$ tale che il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza $f(c)$ è equivalente all'area sottesa la curva di misura $\int_a^b f(x)\,dx$.

40.2.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il legame esistente tra una funzione e la funzione integrale a essa associata è espresso dal seguente teorema: se la funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, la corrispondente funzione integrale $F(x)$ è derivabile e, $\forall x \in [a; b]$, risulta

$$F'(x) = f(x) \tag{40.60}$$

La funzione integrale $F(x)$ è quindi una primitiva di $f(x)$. La primitiva generale di $f(x)$ è il suo integrale indefinito ovvero

$$F(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx + C \tag{40.61}$$

perciò si ha

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C} \tag{40.62}$$

Da quest'ultima relazione si può anche dedurre che l'integrale indefinito di una funzione continua in un intervallo $[a; b]$ esiste sempre.

40.2.5 Formula fondamentale del calcolo integrale

Fissiamo l'attenzione su *una* particolare primitiva, ottenuta per un determinato valore di C

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C_1$$

Consideriamo che $\varphi(a) = 0 + C_1 = C_1$, mentre $\varphi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + \varphi(a)$, da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)} \tag{40.63}$$

Il numero $\varphi(b) - \varphi(a)$ viene anche scritto in notazione come $|\varphi(x)|_a^b$.

Pertanto l'integrale definito di una funzione è uguale alla differenza dei valori assunti da una qualsiasi primitiva di tale funzione, rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

Il calcolo degli integrali definiti viene così ricondotto a quello degli indefiniti; nella pratica per calcolare la primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ si determina l'integrale indefinito di $f(x)$ (cioè la totalità delle primitive) e si sceglie come $\varphi(x)$ la primitiva corrispondente al valore $C = 0$.

Calcolo degli integrali definiti con il metodo di sostituzione Nel caso che, per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ si utilizzi il metodo di sostituzione per determinare la primitiva della funzione integranda, nell'applicare la formula fondamentale del calcolo integrale bisogna ricordare che gli estremi di integrazione a e b si riferiscono a valori della variabile di integrazione originaria x.

Pertanto dopo aver trovato la primitiva $\varphi(t)$ espressa come funzione di t si potrà procedere alternativamente:

- si opera, nell'espressione della primitiva $\varphi(t)$, la sostituzione inversa di quella operata integrando per sostituzione, cioè si esprime t in funzione di x; si ottiene così la primitiva $\varphi(x)$ della funzione integranda, espressa come funzione della variabile originaria x. Si applica poi la formula fondamentale, calcolando $|\varphi(x)|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$;

- si calcolano i valori della variabile ausiliaria t corrispondenti ai valori di a e b originaria x; tali valori saranno i nuovi estremi di integrazione. Perciò detti rispettivamente T_1 e t_2 tali valori ($t_1 = t(a)$ e $t_2 = t(b)$), si applicherà la formula fondamentale calcolando $|\varphi(x)|_{t_1}^{t_2} = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$

Osservazioni su integrali definiti di funzioni pari e dispari Poiché il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine l'integrale seguente risulta nullo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \tag{40.64}$$

pertanto in questo caso non sono necessari calcoli. Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse delle y, quindi sarà

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{40.65}$$

In questo caso quindi ci si può limitare a studiare l'integrale da 0 ad a.

Osservazioni su integrali con valori assoluti Supponiamo di dover integrare una funzione che presenti uno o più valori assoluti; quello che si dovrà fare è

1. ridefinire la funzione a tratti in maniera tali che i valori assoluti scompaiano (appropriatamente in ragione del valore assunto da x);

2. procedere ad integrare per "pezzi" la funzione e fare la somma degli integrali così ottenuti.

40.2.6 Integrazione numerica

Nella sezione precedente si è visto come determinare per via algebrica il valore di un integrale; ciò presuppone che si sia riuscito nell'intento di trovare la primitiva della funzione integranda.
Ora, pragmaticamente, anche per funzioni continue abbastanza semplici dotate di primitiva è a volte di fatto difficile scrivere l'espressione analitica della stessa. Ad esempio

$$y = e^{-x^2}$$

che gioca un ruolo importante in molte questioni applicate ha una primitiva non esprimibile mediante composizione di funzioni elementari; per una funzione di questo tipo, il calcolo esatto dell'integrale definito su un certo intervallo mediante la formula fondamentale del calcolo integrale risulta in pratica impossibile.

In questi e in molti altri casi può essere utile avere una *valutazione approssimata del valore numerico* di un integrale definito. Il modo più semplice di procedere è usare la definizione stessa.
Sappiamo che la successione s_n di Cauchy-Riemann tende all'integrale per $n \to \infty$

$$s_n \to \int f(x)\,dx \quad \text{per } n \to \infty$$

ci aspettiamo che il valore numerico di s_n (che può essere calcolato facilmente mediante un computer) per n molto grande sia una buona approssimazione numerica dell'integrale. Per potere applicare la metodologia dobbiamo avere un risultato che ci permetta di stimare a priori l'*errore commesso* in questa approssimazione.

40.2.6.1 Metodo del punto medio

Sia:

- $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile con continuità;
- K una costante tale che:

  $$|f''(x)| \leq K, \qquad \forall x \in [a,b]$$

  Poiché f'' è continua su $[a;b]$, è anche limitata, pertanto una K di questo tipo esiste certamente.

Considerando per la somma di Cauchy-Riemann s_n per f, scegliendo in ognuno degli $i = 1, \ldots, n$ intervallini il punto medio dell'intervallo:

$$s_n = \sum_{i=i}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

Allora l'errore commesso[4] nell'approssimazione è limitato come segue:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - s_n\right| \leq \frac{K}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^4}$$

Alcune considerazioni:

[4]Dimostrazione sul Bramanti 1 pag 294.

- a parità di n l'errore può aumentare se aumenta $b - a$ (ovvero usiamo lo stesso numero di intervalli per una ampiezza maggiore)
- a parità di intervallo $b - a$, se n aumenta l'errore può solo diminuire

40.3 Integrali generalizzati

In precedenza abbiamo concentrato l'attenzione su funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato. In molte situazioni concrete tuttavia si presenta la necessità di:

- integrare funzioni illimitate in un estremo dell'intervallo considerato (ad esempio con asintoti verticale);
- integrare funzioni in un intervallo illimitato;
- integrare funzioni illimitate in un intervallo illimitato
- integrare funzioni dotata di un numero finito di punti di discontinuità

In questa sezione ci concentriamo su queste tipologie di integrali (detti generalizzati o altre volte impropri).

40.3.1 Integrazione di funzioni illimitate

L'integrazione di funzioni illimitate è una delle applicazioni dell'integrazione in un intervallo non chiuso (cioè non comprendente almeno uno degli estremi). Ne vediamo in seguito la metodologia considerando i generici casi

$$[a; b) \quad (a; b] \quad (a; b)$$

40.3.1.1 Casistica

Caso $\boxed{[a; b)}$ Cominciamo con il considerare un intervallo del tipo $[a; b)$; $f(x)$ si deve si deve considerare definita e continua per $a \leq x < b$ mentre non si fa nessuna ipotesi sul comportamento di $f(x)$ in b.
Poiché la funzione risulta continua in ogni intervallo del tipo $[a; b - \varepsilon]$ (con $0 < \varepsilon < b - a$) esiste l'integrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{40.66}$$

che risulta una funzione di ε. Se

- esiste finito il limite
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{40.67}$$
diremo che $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a; b)$ e scriveremo
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{40.68}$$
In tal caso si dice che l'integrale è convergente e l'area sotto la curva è finita;

- se il limite è $\pm\infty$ l'integrale si dirà divergente e l'area sotto la curva infinita;
- se infine il limite non esiste, allora l'integrale non esiste.

Caso $\boxed{(a;b]}$ Specularmente per una funzione continua in un intervallo $(a;b]$x. Si deve ora considerare il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{40.69}$$

Se esso esiste ed è finito diremo che la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $(a;b]$ e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{40.70}$$

In tal caso diremo che l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{40.71}$$

è convergente. Per integrali divergenti e non esistenti funziona similmente al caso precedente.

Caso $\boxed{(a;b)}$ Considerando infine una funzione $f(x)$ continua in un intervallo aperto, essa risulta continua in ogni intervallo chiuso del tipo $[a+\delta;b-\varepsilon]$ (con $0<\delta<b-a$ e $0<\varepsilon<b-a$) e quindi è qui integrabile.
Se esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{40.72}$$

diremo che $f(x)$ è integrabile in $[a;b]$ e scriveremo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{40.73}$$

Analogamente a quanto detto per gli integrali generalizzati le due variabili ε e δ devono tendere a zero in modo indipendente tra loro.
Come al solito si definiranno i casi connessi ad un limite convergente, divergente o non esistente.

40.3.1.2 Criteri di integrabilità

Siano $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ continue con

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$$

I seguenti criteri permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Criterio del confronto Se $0 \leq g(x) \leq g(x)$ in $[a, b)$ allora

$$\begin{aligned} g \text{ integrabile } &\Longrightarrow f \text{ integrabile} \\ f \text{ non integrabile } &\Longrightarrow g \text{ non integrabile} \end{aligned}$$

Confronto asintotico Se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to b^-$, allora

$$f \text{ integrabile } \Longleftrightarrow g \text{ integrabile}$$

Analoghi criteri valgono se $f, g \to +\infty$ o $f, g \to -\infty$; in quest'ultimo caso le disuguaglianze del criterio del confronto devono valere tra i moduli di f e g

Considerazione Analogamente a quanto accade con i criteri di convergenza per le serie numeriche, quando la convergenza di un integrale viene stabilita mediante confronto o confronto asintotico tra due funzioni, il valore numerico dei due integrali sarà in generale diverso.

Assoluta integrabilità ed integrabilità Per funzioni di segno qualsiasi vale la seguente proprietà. Se $|f|$ è integrabile in $[a, b)$, si dice che f è assolutamente integrabile; se una funzione è assolutamente integrabile è anche integrabile, ovvero vale

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{è convergente} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{è convergente}$$

40.3.2 Integrazione su intervalli illimitati

Consideriamo qui integrali di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo illimitato del tipo:

$$[a; +\infty) \quad (-\infty; b] \quad (-\infty; +\infty)$$

40.3.2.1 Casistica

Caso $\boxed{[a; +\infty)}$ Partiamo dal caso $[a; +\infty)$; sotto tale ipotesi $f(x)$ risulta integrabile in ogni intervallo limitato del tipo $[a; t]$ con $t > a$. In tal caso esiste l'integrale

$$\int_a^t f(x)\, dx$$

e il suo valore risulta una funzione dell'estremo superiore t di integrazione. Se:

- esiste finito il limite
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{40.74}$$
la funzione f è integrabile nell'intervallo $[a; +\infty)$; scriveremo
$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{40.75}$$

In tal caso si dice che l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \tag{40.76}$$

è convergente;

- se invece il limite 40.74 è infinito si dice che f non è integrabile in $[a;+\infty)$ è che l'integrale 40.76 è divergente;
- se infine il limite 40.74 non esiste si dice che f non è integrabile in $[a;+\infty)$ è che l'integrale 40.76 è indeterminato.

Caso $\boxed{(-\infty;b]}$ Analogamente possiamo definire l'integrale di una funzione f continua in un intervallo del tipo $(-\infty;b]$: $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo $[s;b]$. Diremo che

- $fx)$ è integrabile nell'intervallo $(-\infty;b]$ se esiste finito il limite

  $$\lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\ dx \tag{40.77}$$

  e scriveremo

  $$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\ dx \tag{40.78}$$

  Diremo allora che l'integrale

  $$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx \tag{40.79}$$

  è convergente;
- specularmente avviene in caso di limite infinito o non esistente: rispettivamente si hanno integrale divergente o indeterminato e la funzione non è integrabile.

Caso $\boxed{(-\infty;+\infty)}$ Infine possiamo definire l'integrale di una funzione continua nell'intervallo $(-\infty;+\infty)$; in tal ipotesi $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo $[s;t]$. Diremo che

- $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $(-\infty;+\infty)$ se esiste finito il limite

  $$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\ dx \tag{40.80}$$

  e scriveremo

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\ dx \tag{40.81}$$

  Si noti che le variabili s e t devono tendere all'infinito in modo indipendente tra loro. Come al solito si dirà che l'integrale

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \tag{40.82}$$

  è convergente;

- se il limite 40.80 è infinito o non esiste si dice che l'integrale 40.82 è rispettivamente divergente o indeterminato; in tali casi la funzione non è integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$.

40.3.2.2 Criteri di integrabilità

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue. Criteri analoghi al caso precedente permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Criterio del confronto Se $0 \leq g(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty)$ allora

$$g \text{ integrabile} \implies f \text{ integrabile}$$
$$f \text{ non integrabile} \implies g \text{ non integrabile}$$

Confronto asintotico Se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to +infty$, allora

$$f \text{ integrabile} \iff g \text{ integrabile}$$

Analoghi criteri valgono se $f, g \to +\infty$ o $f, g \to -\infty$; in quest'ultimo caso le disuguaglianze del criterio del confronto devono valere tra i moduli di f e g

Assoluta integrabilità ed integrabilità Per funzioni di segno qualunque si ha ancora

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{è convergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{è convergente}$$

o a parole se f è assolutamente integrabile è anche integrabile.

40.3.3 Integrazione di funzioni illimitate in un intervallo illimitato

Talvolta occorre calcolare integrali che sono congiuntamente delle due tipologie precedenti, ovvero integrali nell'intervallo $(a; +\infty)$ o in $(-\infty; b)$.
Si procede analogamente all'ultimo caso presentato per gli integrali di funzioni non limitate, ove vi è un limite congiunto/contemporaneo di due variabili ma differentemente nel caso corrente una tenderà a 0^+ (quella associata all'estremo a o b) mentre l'altra a $\pm\infty$.

40.3.4 Integrazione di una funzione generalmente continua

Si dice che una funzione $f(x)$ è generalmente continua in un intervallo I (limitato o illimitato), se in tale intervallo essa è continua con l'eccezione, al più, di un numero finito di punti.

Se $f(x)$ è generalmente continua in I, detti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i suoi punti di discontinuità, è possibile suddividere l'intervallo I in un certo numero di sottointervalli i cui estremi saranno oltre ai c_i gli eventuali estremi di I, in modo che $f(x)$ sia continua nei punti interni di ciascun di tale intervalli. Ha quindi senso, in ciascuno di essi, considerare l'integrale generalizzato di $f(x)$.

Se tali integrali sono tutti convergenti diremo che $f(x)$ è integrabile in I, e il valore dell'integrale di $f(x)$ in I sarà per definizione, la somma algebrica di tali integrali.
Se invece anche uno solo di tali integrali è divergente o indeterminato, diremo che $f(x)$ non è integrabile in I.

40.4 Funzione integrale

Sia:

- f una funzione integrabile (eventualmente in senso generalizzato) in un intervallo I limitato o illimitato
- sia x_0 un qualsiasi punto considerato fisso appartenente all'intervallo considerato I
- sia x un punto generico tale che $x \in I, x > x_0$

Si chiama **funzione integrale** della funzione f la funzione:

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt} \tag{40.83}$$

la funzione restituisce, dato x, il valore dell'area sottesa alla curva da x_0 ad x, ovvero $\int_{x_0}^{x} f(t)$, e ovviamente varia al variare di x:

- la variabile indipendente è l'estremo superiore x dell'integrale definito
- t è detta variabile di integrazione (ad essa si può sostituire qualsiasi altra variabile).

La loro importanza è data da:

- notevole applicazione nel campo pratico
- dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

40.4.1 Applicazioni: distribuzione normale

In probabilità la funzione di ripartizione di una normale standardizzata (così come qualsiasi altra funzione di ripartizione) è appunto una funzione integrale, definita come segue

$$\Sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \tag{40.84}$$

Per ogni x, quello che si calcola in questo caso è un integrale generalizzato, esteso all'intervallo illimitato $(-\infty, x)$.

40.4.2 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Le funzioni integrali hanno anche una fondamentale importanza matematica dovuta a questo teorema.
Sia:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato)
- $x \in [a, b]$
- sia anche
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Allora:

- la funzione F è continua in $[a, b]$
- se anche f è continua in $[a, b]$, allora la funzione F è derivabile in $[a, b]$ e vale
$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]$$

Il teorema ha varie conseguenze:

- anzitutto se f è continua F è derivabile con continuità perché $F' = f$ ed f e continua
- se f è sia continua che derivabile, allora F è derivabile due volte; più generalmente la funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda
- ogni funzione continua su I ha ivi una primitiva, la sua funzione integrale

Il secondo punto del teorema si può anche raffinare nel modo seguente: se la funzione integranda $f(t)$ non è continua su tutto I ma è integrabile in senso generalizzato, in tutti i punti in cui l'integranda è continua, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.
In sostanza dove f è discontinua F è ancora continua ma non sarà derivabile.

Capitolo 41

Metodi dimostrativi

41.1 Dimostrazioni basate su logica

La maggior parte dei teoremi è costituita da implicazioni logiche ovvero frasi del tipo:

$$p(x) \implies q(x) \quad \forall x \in A \tag{41.1}$$

dove p e q sono due predicati la cui verità/falsità dipende dal valore x considerato A è il dominio considerato. In questo contesto p fa la parte dell'*ipotesi* mentre q fa la parte della *tesi*.
Un esempio di implicazione logica universale è:

Per ogni numero naturale n, se n è dispari, allora n^2 è dispari

che può essere ricondotta come:

- $p(n)$: n è dispari
- $q(n)$: n^2 è dispari
- $A = \mathbb{N}$

Dimostrazione Ci poniamo ora di trovare il metodo di dimostrare la verità di una implicazione logica. Gli step sono due:

1. si considera il generico n che soddisfa l'ipotesi $p(x)$ (ad esempio essere dispari)
2. si dimostra che n soddisfa la tesi $q(x)$

Ad esempio dimostriamo che se n è dispari, n^2 è dispari: osserviamo che qualunque numero dispari si può scrivere nella forma $n = 2k + 1$ con k opportuno. Per dimostrare il teorema occorre poter scrivere n^2 come intero pari +1. Si ha

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{numero pari}} + 1$$

E così abbiamo dimostrato il teorema.

Controesempi I controesempi sono una importante risorsa per dimostrare la falsità di una implicazione logica. Il punto è che l'implicazione logica pretende che ogni elemento del dominio considerato che soddisfa l'ipotesi soddisfi anche la tesi; quindi se si riesce a trovare anche un solo esempio di x che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi, questo significa che l'implicazione universale è falsa, e questo caso viene definito **controesempio.**

Dimostrazione inversa Da un punto di vista logico la 41.1 equivale alla

$$\operatorname{non} p(x) \implies \operatorname{non} q(x) \quad \forall x \in A \tag{41.2}$$

che è detta *controinversa* o *contronominale*. Dall'equivalenza logica deriva che è possibile dimostrare la 41.1 se si riesce a dimostrare la 41.2.
Ad esempio se faticassimo a dimostrare che il quadrato di un dispari è un dispari potremmo provare la stessa cosa mostrando che il quadrato di un numero pari è pari.

E' in questo caso necessario saper costruire la negazione di un predicato; alcune regole tipiche sono riportate nel seguito. Se $p(x)$ e $q(x)$ sono due proprietà qualsiasi, allora:

- la negazione di "$p(x)$ e $q(x)$" è "non $p(x)$ o non $q(x)$";
- la negazione di "$p(x)$ o $q(x)$" è "non $p(x)$ e non $q(x)$";
- la negazione di "non $p(x)$" è $p(x)$;
- la negazione di "$\forall x$ vale $p(x)$" è "$\exists x$ non vale $p(x)$";
- la negazione di "$\exists x$ vale $p(x)$" è "$\forall x$ non vale $p(x)$";
- la negazione di "$p(x) \implies p(x), \forall x$" è "$\exists x$: vale $p(x)$ e non $q(x)$".

Dimostrazione per assurdo La dimostrazione per assurdo consiste nel supporre vera:

- l'ipotesi del teorema e
- la negazione della tesi

e dedurre da questi fatti una contraddizione di qualsiasi tipo. Anche in questo caso occorre saper costruire la corretta negazione di una proposizione, come si è fatto per la dimostrazione inversa.

41.2 Principio di induzione

La dimostrazione per induzione è un potente metodo dimostrativo che si può applicare a teoremi che abbiano la seguente struttura:

$$\text{Per ogni } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \text{ vale la proprietà } p(n) \tag{41.3}$$

Il numero n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se $n_0 = 0$ il teorema afferma semplicemente che la proprietà è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione per induzione consiste in due passi:

1. dimostrare che $p(n)$ è vera per $n = n_0$ (primo passo dell'induzione); in altre parole dimostrare $p(n_0)$;
2. dimostrare che, se n è un generico numero naturale $\geq n_0$, dal fatto che $p(n)$ sia vera (lo si assume come ipotesi induttiva) si dimostra che anche $p(n+1)$ è vera.

Se si riesce a completare entrambi i passi, si può allora concludere che per ogni $n > n_0$, $p(n)$ è vera.

Diseguaglianza di Bernoulli Per ogni intero $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -1$ vale

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx} \tag{41.4}$$

Dimostrandola per induzione su n, sia innanzitutto n = 0. Allora l'asserto diventa

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$$

cioè $1 \geq 1$, evidentemente vero. Supponiamo ora che sia vero per un generico n e proviamolo per $(n+1)$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n$$

Ora per ipotesi induttiva $(1+x)^n \geq 1+nx$; inoltre per ipotesi $1+x \geq 0$ perché $x \geq -1$

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

dove nell'ultima diseguaglianza si è sfruttato il fatto che $nx^2 \geq 0$. La catena di diseguaglianza mostra che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ pertanto la tesi è dimostrata.