Calculus

18 maggio 2023

Indice

Parte I

Analisi 1

Capitolo 1

Teoria degli insiemi

1.1 Introduzione

1.1.1 Definizioni

Definizione 1.1.1 (Insieme)**.** Una collezione di oggetti detti *elementi* dell'insieme

Definizione 1.1.2 (Insiemi uguali)**.** Due insiemi A e B si dicono *uguali*, e si scrive $A = B$, quando hanno esattamente gli stessi elementi.

Osservazione 1 (Notazione insieme ed elementi). Gli insiemi vengono rappresentati con lettera maiuscola (es. A) mentre gli elementi con minuscola (x).

Osservazione 2 (Relazione di appartenenza ad un insieme). Un elemento x appartiene o non appartiene ad un insieme A (senza vie di mezzo); se vi appartiene, la relazione di *appartenenza* è rappresentata mediante la scrittura $x \in A$ (alternativamente $x \notin A$);

Osservazione 3 (Unicità degli elementi di un insieme). Un elemento non può comparire più di una volta in un insieme

Esempio 1.1.1. Si ha che $\{1, 2, 2\} = \{1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

Osservazione 4 (Irrilevanza dell'ordine). Gli elementi di un insieme non hanno un ordine di comparizione

Esempio 1.1.2. Si ha che $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Definizione 1.1.3 (Insieme finito)**.** Insieme con numero limitato di elementi

Definizione 1.1.4 (Insieme infinito)**.** Insieme non finito

Definizione 1.1.5 (Insieme vuoto)**.** Insieme privo di elementi; si rappresenta mediante $\emptyset$ o $\{\}$.

1.1.2 Rappresentazioni di un insieme

Definizione 1.1.6 (Rappresentazione geometrica (diagrammi di Eulero-Venn))**.** Rappresentazione di insieme come cerchi ed elementi come punti

Definizione 1.1.7 (Rappresentazione estensiva)**.** Elencazione degli elementi tra graffe, separati tra virgole

Esempio 1.1.3. $A = \{a, b, c\}$

Definizione 1.1.8 (Rappresentazione *intensiva*/ mediante proprietà caratteristica)**.** Gli elementi di un insieme (B) sono individuati attraverso un *predicato* $p(x)$ (una affermazione che può risultare vera o falsa a seconda dell'elemento x considerato) applicato agli elementi di insieme, detto *universo*, di partenza (A):

$$B = \{x \in A : p(x)\}$$

B racchiuderà gli elementi di A per i quali l'affermazione $p(x)$ è valida.

Esempio 1.1.4. L'insieme dei numeri naturali pari può essere indicato come:

$$P = \left\{x \in \mathbb{N} : \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}$$

Osservazione 5. Un generico insieme universo si indica con U, e nei diagrammi di Eulero-Venn si rappresenta mediante un rettangolo contenente altri insiemi.

1.1.3 Sottoinsiemi

Definizione 1.1.9 (Sottoinsieme)**.** Dati due insiemi A e B, A è sottoinsieme di B (scritto $A \subseteq B$, o $B \supseteq A$) se ogni elemento di A è anche elemento di B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$$

Osservazione 6. Dalla definizione si ha che $\forall A$ si ha che $\emptyset \subseteq A$, e $A \subseteq A$.

Definizione 1.1.10 (Sottinsieme strettamente contenuto)**.** Dati due insiemi A, B, A è strettamente contenuto in B (si scrive $A \subset B$) se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ (ovvero esistono elementi di B non presenti in A)

Definizione 1.1.11 (Sottoinsieme proprio)**.** Dati due insiemi A, B, A è sottoinsieme proprio di B se $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$

1.1.4 Insieme delle parti

Definizione 1.1.12 (Insieme delle parti)**.** Dato un insieme A, si dice insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ quell'insieme che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A ($\emptyset$ ed A inclusi).

Osservazione 7. Se A contiene n elementi il suo insieme delle parti ne contiene 2^n.

Esempio 1.1.5. L'insieme della parti di $A = \{a, b, c\}$ è:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Osservazione 8. Si ha:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Osservazione 9. Per amor di precisione $\{\emptyset\} \neq \emptyset$: il primo membro è un insieme che contiene un insieme vuoto, mentre il secondo è solo un insieme vuoto.

Proprietà	Unione	Intersezione
Idempotenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Assorbimento	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Tabella 1.1: Proprietà di unione ed intersezione

1.2 Operazioni con gli insiemi

Osservazione 10. Dati $A, B \subseteq U$ possiamo costruire nuovi insiemi applicando alcune operazioni insiemistiche fondamentali.

1.2.1 Operazioni

Definizione 1.2.1 (Unione)**.** L'unione di due insiemi A e B è l'insieme (indicato $A \cup B$) formato dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A, B:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

Definizione 1.2.2 (Intersezione)**.** L'intersezione di due insiemi A e B, indicata con $A \cap B$, è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

Definizione 1.2.3 (Insiemi disgiunti)**.** Insiemi A, B la cui intersezione è l'insieme vuoto ($A \cap B = \emptyset$), ossia se non hanno elementi in comune.

Definizione 1.2.4 (Differenza insiemistica)**.** La differenza di due insiemi A, B considerati nell'ordine, indicata da $A \setminus B$ o con $A - B$, è l'insieme formato da tutti gli elementi di A che non appartengono ad B:

$$A \setminus B = A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Definizione 1.2.5 (Complementare di un insieme ad un altro)**.** Se $A \subseteq B$, il *complementare* di A rispetto a B, è l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A:

$$\complement_B A = B \setminus A \qquad A \subseteq B$$

Osservazione 11. Se l'insieme B è sottinteso (spesso avviene quando si ha U), il complementare di A si indica anche come $\complement A$ o $\bar{A}$.

Osservazione 12. In base alla definizione, il complementare del complementare coincide con l'insieme dato $\bar{\bar{A}} = A$.

1.2.2 Proprietà delle operazioni

Osservazione 13 (Proprietà di unione e intersezione)*.* In tabella 1.1.

Osservazione 14 (Proprietà della complementarietà)*.* Se $A, B \subseteq U$:

$$A \cup \complement_A = U$$
$$A \cap \complement_A = \emptyset$$

Osservazione 15 (Leggi di De Morgan). Si ha

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1.3 n-uple ordinate, prodotto cartesiano

Osservazione 16. Come detto, gli insiemi consistono in collezioni di elementi, i quali non sono caratterizzati dall'ordine con cui si presentano.
Se il concetto di ordine diviene importante allora si fa uso delle *n-uple ordinate* (es coppie, triplette, ...).

Definizione 1.3.1 (Coppia ordinata)**.** Insieme di due elementi *presi in un certo ordine.*

Esempio 1.3.1. La scrittura

$$(x, y)$$

indica la coppia ordinata il cui primo elemento (o componente) è x, il secondo y.

Definizione 1.3.2 (Coppie ordinate uguali)**.** Le coppie ordinate (x, y) e (x', y') sono uguali se e solo se hanno uguali le componenti di ugual posto, ovvero $x = x'$ e $y = y'$.

Definizione 1.3.3 (Prodotto cartesiano)**.** Dati due insiemi A e B si dice prodotto cartesiano di A per B, indicato con $A \times B$, l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) aventi per prima componente un elemento $a \in A$, per seconda componente un elemento $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Esempio 1.3.2. Se $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{0, 2, 3\}$ si ha

$$X \times Y = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3)\}$$

Osservazione 17 (Commutatività del prodotto). Il prodotto cartesiano *non* è commutativo: se $A \neq B$, $A \times B \neq B \times A$

Osservazione 18 (Prodotto con insieme nullo). Se almeno uno dei due insiemi è vuoto, si conviene che il prodotto cartesiano risultato sia anch'esso vuoto: $A \times \emptyset = \emptyset$.

Osservazione 19 (Cardinalità del prodotto). Se A è costituito da n elementi e B da m, $A \times B$ è costituito da $n \cdot m$ coppie ordinate;

Osservazione 20 (Prodotto cartesiano di un insieme con se stesso). Viene spesso denotato mediante esponente:

$$A^3 = A \times A \times A = \{(x, y, z) : x, y, z \in A\} \tag{1.1}$$

Osservazione 21 (Prodotto cartesiano di più insiemi). Il prodotto cartesiano si può estendere agevolmente al caso di tre o più insiemi

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

1.3.1 Unione disgiunta

Osservazione 22. Introdotto il concetto di coppia ordinata è possibile fornire una nuova operazione tra insiemi

Definizione 1.3.4 (Unione disgiunta)**.** Dati due insiemi X e Y, la loro unione disgiunta consiste in un insieme in cui eventuali elementi comuni appartenenti all'intersezione vengono "in qualche modo" replicati; ciò viene fatto costruendo un insieme di coppie ordinate in cui il primo elemento proviene dagli elementi di ciascun insieme, mentre il secondo è un elemento distintivo dell'insieme da cui si è pescato.

Esempio 1.3.3. Se $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4\}$ si ha (scegliendo a come identificatore del primo insieme e b quello del secondo):

$$\begin{aligned} X \,\dot{\cup}\, Y &= (X \times \{a\}) \cup (Y \times \{b\}) \\ &= \{(1,a),(2,a),(3,a),(2,b),(3,b),(4,b)\} \end{aligned}$$

mentre come sempre $X \cup Y = \{1,2,3,4\}$.

1.4 Insiemi numerici

In generale gli insiemi numerici sono insiemi composti esclusivamente da numeri: a parte gli *insiemi numerici fondamentali* (come $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$), sono rilevanti per l'analisi anche *intervalli* e *intorni*.

1.4.1 Insiemi numerici fondamentali

Definizione 1.4.1 (Insieme dei numeri naturali (natural numbers))**.** È definito come[1]

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$$

Osservazione 23. Mediante i naturali non è possibile esprimere numeri negativi; un insieme espansione di quello dei numeri naturali è quello dei numeri interi relativi

Definizione 1.4.2 (Insieme dei numeri relativi (integer numbers, o integers))**.** Definito come

$$\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\} = \{0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$$

Definizione 1.4.3 (Insieme dei numeri razionali)**.** Definito come:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Osservazione 24. I numeri razionali sono caratterizzati da avere una rappresentazione decimale finita (ovvero dopo un tot di numeri decimali ci si ferma, es 3.50), oppure infinita ma con elementi di ripetizione (es $1/3 = 0.333\dots$ o $2/11 = 0.181818\dots$)

[1] Gli anglosassoni, al contrario, definiscono l'insieme $\mathbb{N}$ senza includervi lo zero. L'insieme dei numeri naturali più lo zero è definito insieme dei *whole numbers* $\mathbb{W}$.

Intervallo	Insieme	Denominazione
$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	I. chiuso
$(a;b) =]a;b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	I. aperto
$(a;b] =]a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	I. aperto a sx, chiuso a dx
$[a;b) = [a;b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	I. aperto a dx, chiuso a sx
$(-\infty;a) =]-\infty;a[$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	I. aperto illimitato inferiormente
$(-\infty;a] =]-\infty;a]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	I. chiuso illimitato inferiormente
$(a;+\infty) =]a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	I. aperto illimitato superiormente
$[a;+\infty) = [a;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	I. chiuso illimitato superiormente

Tabella 1.2: Intervalli numerici di estremi a, b e $\pm\infty$, con $a < b$.

Osservazione 25. Vi sono alcuni numeri che non si riescono ad esprimere come rapporto (ad esempio la $\sqrt{2}$ o π o e) per cui è stato necessario introdurre l'insieme dei numeri irrazionali.

Definizione 1.4.4 (Insieme dei numeri irrazionali)**.** Insieme $\mathbb{I}$ dei numeri aventi una rappresentazione decimale, dopo la virgola, infinita e senza ripetizioni.

Definizione 1.4.5 (Insieme dei numeri reali)**.** Definito come unione di numeri razionali e irrazionali:

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = (-\infty; +\infty) \tag{1.2}$$

Osservazione 26. In alcune questioni è necessario un ampliamento dell'insieme per includere anche gli infiniti.

Definizione 1.4.6 (Insieme dei numeri reali esteso)**.** Insieme definito[2] come:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty; \infty] \tag{1.3}$$

Definizione 1.4.7 (Insieme dei numeri complessi)**.** Definito come

$$\mathbb{C} = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{1.4}$$

Osservazione 27. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è stato introdotto in quanto i numeri reali non erano in grado di esprimere radici di numeri negativi.

Osservazione 28. Si noti infine che:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{1.5}$$

ossia ogni numero naturale è anche un numero relativo, un razionale e un reale e un complesso (viceversa non necessariamente un complesso è anche un reale o un intero un numero naturale).

1.4.2 Intervalli

Definizione 1.4.8 (Intervallo)**.** Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ composto dai numeri compresi tra $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, detti *estremi* dell'intervallo a è detto *estremo inferiore*, b *estremo superiore*.

[2] Alcuni indicano questa estensione con $\mathbb{R}^*$

Osservazione 29. Gli estremi possono essere inclusi o meno nell'intervallo stesso (tab. 1.2).

Definizione 1.4.9 (Intervalli illimitato)**.** Intervallo che ha almeno uno tra $-\infty$ e $+\infty$ come estremo.

Definizione 1.4.10 (Intervallo limitato)**.** Non illimitato.

Definizione 1.4.11 (Ampiezza di un intervallo limitato)**.** Nel caso di intervallo limitato si dice *ampiezza* la misura $b - a$.

1.4.3 Insiemi derivati mediante operazioni algebriche

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$; supponiamo $A, B \neq \emptyset$. Si possono definire i seguenti insiemi, derivati da A e B mediante operazioni algebriche sui loro elementi:

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A, b \in B\} \\ A \cdot B = AB &= \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} \\ -B &= \{-b : b \in B\} \end{aligned}$$

Date queste, si può poi porre

$$A - B = A + (-B) = \{a + (-b) = a - b : a \in A, b \in B\}$$

Infine se A si riduce ad un solo elemento $A = \{a\}$ si può scrivere $a + B$ in luogo di $A + B$, e aB al posto di AB; analogamente per B.

1.5 Estremi, maggioranti/minoranti, massimi/minimi

Definizione 1.5.1 (Insieme superiormente limitato)**.** Si dice di un insieme numerico $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ se esiste almeno un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \geq x$, $\forall x \in S$.

Definizione 1.5.2 (Insieme superiormente illimitato)**.** Non superiormente limitato

Definizione 1.5.3 (Maggioranti di un insieme S)**.** L'insieme degli elementi $k \in \mathbb{R} : k \geq x, \forall x \in S$.

Definizione 1.5.4 (Insieme inferiormente limitato)**.** Si dice di un insieme S se esiste almeno un numero $h \in \mathbb{R}$ tale che $h \leq x$, $\forall x \in S$

Definizione 1.5.5 (Insieme inferiormente illimitato)**.** Non inferiormente limitato

Definizione 1.5.6 (Minoranti dell'insieme S)**.** L'insieme degli elementi $h \in \mathbb{R} : h \leq x, \forall x \in S$

Definizione 1.5.7 (Insieme limitato)**.** Insieme sia inferiormente che superiormente limitato.

Osservazione 30. Se l'insieme $S = \emptyset$, l'insieme dei suoi maggioranti in $\mathbb{R}$ viene assunto uguale ad $\mathbb{R}$, e così l'insieme dei suoi minoranti.

Definizione 1.5.8 (Estremo superiore)**.** Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ limitato, viene indicato con $\sup S$ il minimo dei maggioranti di S:

$$\sup S = \min \{k \in \mathbb{R} : \text{k è maggiorante di S}\}$$

Definizione 1.5.9 (Estremo inferiore)**.** Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ limitato, viene indicato con $\inf S$, il massimo dei minoranti di S:

$$\inf S = \max \{k \in \mathbb{R} : \text{k è minorante di S}\}$$

Osservazione 31 (Estremi di insiemi illimitati)*.* Se l'insieme S è illimitato (superiormente o inferiormente), non ammetterebbe estremo (superiore o inferiore); in questi casi se si considera l'estensione $\widetilde{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{R}$, si conviene che

$$\sup_{\widetilde{\mathbb{R}}} S = +\infty$$
$$\inf_{\widetilde{\mathbb{R}}} S = -\infty$$

Osservazione 32 (Estremi dell'insieme vuoto)*.* Dato che per $\emptyset$ l'insieme dei maggioranti e minoranti coincide con $\mathbb{R}$, $\emptyset$ non ha estremo superiore ne estremo inferiore in $\mathbb{R}$; considerando invece l'estensione di $\mathbb{R}$ sarebbe

$$\sup_{\widetilde{\mathbb{R}}} \emptyset = +\infty$$
$$\inf_{\widetilde{\mathbb{R}}} \emptyset = -\infty$$

Definizione 1.5.10 (Massimo di un insieme numerico S)**.** Indicato con $\max S$, maggiorante di un insieme S che appartiene allo stesso

Definizione 1.5.11 (Minimo di un insieme numerico S)**.** Indicato con $\min S$, minorante dell'insieme S che appartiene allo stesso.

Osservazione 33*.* Mentre estremo superiore/inferiore di un insieme esistono sempre, massimo/minimo non necessariamente

Osservazione 34*.* Se l'insieme S è superiormente limitato, il suo estremo superiore può appartenere o meno ad S; se vi appartiene è il massimo di S.

Esempio 1.5.1. Nell'insieme $A = \{1; 2; 3\}$, è ovvio che $\max A = 3$; invece nell'insieme $B = (0; 3)$ non vi è massimo. Esso non può esser 3 perché non appartiene all'insieme ma neanche 2.9 (perché c'è tra anche 2.99) e nemmeno 2.99 (perché 2.999), e così via. B non ha neanche il minimo per considerazioni analoghe.
È intuitivo il fatto che però sia 0 che 3 rivestano un ruolo particolare, in quanto seppur costituiscono rispettivamente il minore dei maggioranti (3) e il maggiore dei minoranti (0), e quindi costituiscono estremo superiore ed inferiore.

1.6 Descrizione assiomatica di $\mathbb{R}$

Qui forniamo un sistema di assiomi che descrivono ed individuano univocamente $\mathbb{R}$, insieme numerico su cui sono definite:

1. un'operazione di **addizione**, funzione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x + y$ che caratterizzata da:

   A1 $(x + y) + z = x + (y + z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (*associativa*);

   A2 esiste un elemento *neutro* $0 \in \mathbb{R}$, tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

   A3 $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento *opposto* $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$;

   A4 $x + y = y + x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (*commutativa*).

2. un'operazione di **moltiplicazione**, funzione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x \cdot y$ caratterizzata da:

   M1 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (*associativa*);

   M2 esiste un elemento *neutro* $1 \in \mathbb{R}$, tale che $x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

   M3 $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ esiste un elemento *inverso* $1/x \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot (1/x) = 1$;

   M4 $x \cdot y = y \cdot x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (*commutativa*);

   DM per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z$ (*distributiva*).

3. una **relazione d'ordine** $\leq$ caratterizzata da:

   O1 $x \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (*riflessiva*)

   O2 se $x \leq y \wedge y \leq x$ allora $x = y$ (*antisimmetrica*)

   O3 se $x \leq y \wedge y \leq z$ allora $x \leq z$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (*transitiva*)

   O4 è $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (*ordinamento totale*[3])

   AO se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$ (*ordine compatibile con addizione*)

   MO se $x \leq y$ e $z > 0$ allora $x \cdot z \leq y \cdot z$ (*ordine compatibile con moltiplicazione*)

Dalle proprietà di addizione e moltiplicazione derivano la possibilità di eseguire senza restrizioni le quattro operazioni fondamentali[4]; da tutte le proprietà di cui sopra, poi, derivano le regole ben note del calcolo algebrico.

Completezza Gli assiomi forniti sin qui, tuttavia, non sono sufficienti a caratterizzare $\mathbb{R}$ (le stesse valgono anche in $\mathbb{Q}$). L'assioma che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è quello di *completezza*[5].

[3] Si dice che $\mathbb{R}$ è un insieme **totalmente ordinato** perché presi due qualsiasi numeri reali a, b è sempre possibile confrontarli per mezzo della relazione $\leq$ nel senso che delle due relazioni $a \leq b$ o $b \leq a$ una è necessariamente vera.

[4] A parte addizione e moltiplicazione sopra definite, la sottrazione di ha ponendo $a - b = a + (-b)$ mentre la divisione ponendo $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ purché $b =\neq 0$.

[5] $\mathbb{Q}$ assolve alla maggior parte degli scopi pratici del calcolo; tuttavia è noto che ci sono grandezze che non sono commensurabili tra loro. L'esempio classico è dato dalla lunghezza della diagonale e del lato del quadrato.
Se volessimo rappresentare gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$ su una retta, dopo aver "occupato" i punti della retta con i numeri razionali, su di essa rimarrebbero ancora dei "buchi".
In tal senso l'insieme dei numeri razionali è inadeguato ad esempio ad esprimere le lunghezze dei segmenti (ma la lunghezza è solamente la più semplice delle grandezze che si trovano in geometria e fisica e dunque il problema si ripercuote a cascata sui concetti derivati come volumi, tempi, velocità ecc).
Sorge allora la necessità di ampliare l'insieme dei razionali in modo da avere ancora un campo ordinato, i cui elementi (numeri) siano in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.

Per enunciare l'assioma di completezza, introduciamo alcuni simboli: se A, B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ scriveremo $A \leq B$ per indicare che presi comunque $a \in A$ e $b \in B$ risulta $a \leq b$. Alcune note: attenzione a non confondere $A \leq B$ con $A \subseteq B$; se A contiene un solo elemento a, allora si può scrivere $a \leq B$; infine, in maniera del tutto speculare si possono definire anche le scritture $A < B, A > B, A \geq N$.
Venendo all'**assioma di completezza**: se A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ entrambi non vuoti, e se $A \leq B$, allora esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq \xi \leq B$; a parole, vi è sempre almeno un elemento *separatore* tra due insiemi A, B tali che $A \leq B$; se tale elemento è unico la coppia ordinata(A, B) si dice una *coppia di classi contigue* in $\mathbb{R}$[6].

1.7 Complementi

1.7.1 Famiglie di elementi e di insiemi

Definizione 1.7.1 (Famiglia di elementi)**.** Dato un insieme X ed un insieme di indici Λ una famiglia di elementi di X è una funzione del tipo $x : \Lambda \to X$.

Osservazione 35. Λ deve essere visto come un insieme di indici; se ne forniamo uno specifico ad una opportuna funzione (la famiglia di elementi) questa restituisce un elemento dell'insieme puntato X.

Osservazione 36. Il valore di $x(\lambda)$ si indica più brevemente mediante pedice x_λ.

Definizione 1.7.2 (Famiglia di insiemi)**.** Dato un insieme di insiemi $X = \{S_1, S_2, \ldots\}$ ed un insieme di indici $\Lambda = \{1, 2, \ldots\}$ una famiglia di insiemi di X, indicata con $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una funzione del tipo $x : \Lambda \to X$.

Osservazione 37. Qui gli elementi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$ sono veri e propri insiemi e non più singoli elementi.

Definizione 1.7.3 (Famiglia di sottoinsiemi di un insieme X)**.** Dato un insieme $Y = \{A_1, A_2, \ldots\}$ con $A_\lambda \subseteq X, \forall \lambda \in \Lambda$, si definisce così la famiglia di insiemi $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Definizione 1.7.4 (Famiglia di insiemi disgiunta)**.** Una famiglia di insiemi $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ formata da insiemi a due a due disgiunti, cioè $S_\lambda \cap S_\mu = \emptyset$.

1.7.2 Operazioni con famiglie di sottoinsiemi

Osservazione 38. Vediamo in questa parte le operazioni su un numero potenzialmente illimitato di insiemi.

Definizione 1.7.5 (Unione di famiglia di sottoinsiemi)**.** Se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X si pone:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda, \text{ per almeno un } \lambda \in \Lambda\}$$

[6]Tale assioma non vale in $\mathbb{Q}$; se si prende $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}$ si ha che A, B sono entrambi non vuoti e che $A \leq B$; con un po di lavoro che se ξ è elemento separatore di A e B (cioè se è $A \leq \xi \leq B$ allora deve essere $\xi^2 = 2$. Ma è noto che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2; quindi A e B non hanno un elemento separatore in $\mathbb{Q}$; ce l'anno invece in $\mathbb{R}$ ed è $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Osservazione 39. Se $\Lambda = \emptyset$ l'unione è vuota.

Definizione 1.7.6 (Intersezione di famiglia di sottoinsiemi)**.** Se $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X si pone:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda,\ \text{per ogni } \lambda \in \Lambda\}$$

Osservazione 40. Se $\Lambda = \emptyset$ l'intersezione è per definizione l'intero ambiente X.

Definizione 1.7.7 (Formule di De Morgan)**.** Si ha che:

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$
$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$

Capitolo 2

Elementi di logica

Lo scopo della Logica, risalente ad Aristotele, è quello di descrivere il ragionamento; la Logica Matematica ha introdotto metodi formali per descrivere la conoscenza e per ragionare rigorosamente con essa.

2.1 Logica delle proposizioni

In matematica si intende per **proposizione** (o enunciato) ogni frase per la quale si possa stabilire con certezza se è vera o falsa. Sono ad esempio proposizioni le frasi "5 è un numero dispari" e "Roma è la capitale della Francia", mentre non lo sono, per varie ragioni, "Sandro l'anno prossimo sarà promosso", "Questo documentario è molto interessante", o " Che ora è?".

2.1.1 Introduzione al calcolo

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** ed ha una notevole importanza nella teoria matematica.

Proposizioni atomiche e composte Il calcolo delle proposizioni si rende necessario dal momento in cui le proposizioni possono essere combinate tra loro utilizzando dei **connettivi**, andando così a formare nuove proposizioni. In questo contesto chiamiamo:

- proposizioni *composte* o *formule proposizionali* le proposizioni che non sono ottenute da proposizioni più semplici mediante l'uso dei connettivi; ad esempio "se c'è il sole vado al mare" è una proposizione composta (le cui componenti sono "C'è il sole" e "vado al mare");

- proposizioni *atomiche* le proposizioni non composte da connettori; "4 è un numero pari" è una proposizione atomica.

Le proposizioni possono essere composte a piacere, applicando ripetutamente i connettivi. Il **problema fondamentale** del calcolo delle preposizioni è quello di stabilire il valore di verità di una proposizione composta, a partire dalla conoscenza dei valori di verità delle sue proposizioni componenti.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabella 2.1: Tavola di verità della congiunzione

Funzione e tavola Ogni formula proposizionale determina una **funzione di verità** in cui le proposizioni atomiche costituiscono le variabili fondanti; possiamo rappresentare una funzione di verità mediante una **tavola di verità**, ovvero una tabella che ci dice quale è il valore di verità assunto dalla formula data, in corrispondenza di tutte le possibili assegnazioni dei valori di verità `V` e `F` alle proposizioni atomiche che la compongono.
Diciamo che due formule proposizionali A e B costituite dalle stesse proposizioni atomiche sono equiveridiche o **logicamente uguali** se assumono lo stesso valore di verità quali che siano i valori di verità attribuiti alle proposizioni atomiche che le compongono. In tal caso si può scrivere $A = B$.
Nel seguito per descrivere i connettivi presenteremo alcune semplici tavole di verità; queste possono esser comunque costruite per formule proposizionali di complessità arbitraria.

2.1.2 Connettivi

Vediamo ora quali sono i connettivi principali mediante i quali combinare proposizioni atomiche per originare proposizioni composte.

Congiunzione Si definisce congiunzione (operatore logico `and`) di due proposizioni p e q, si indica con:

$$p \wedge q \tag{2.1}$$

e si legge "p e q", la proposizione che è (tab 2.1):

- vera se p e q sono contemporaneamente vere;
- falsa in ogni altro caso.

Disgiunzione Si definisce disgiunzione (operatore logico `or`) di due preposizioni p e q, si indica con:

$$p \vee q \tag{2.2}$$

e si legge con "p o q" la proposizione che é (tab 2.2):

- vera se almeno una delle due proposizioni è vera;
- falsa se entrambe le proposizioni sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabella 2.2: Tavola di verità della disgiunzione

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Tabella 2.3: Tavola di verità della negazione

Negazione Si definisce negazione di una preposizione p (operatore logico `not`)

$$\overline{p} \tag{2.3}$$

e si legge con “non p” la proposizione che è (tab 2.3):

- vera se p è falsa;
- falsa se p è vera.

Altri testi per indicare la negazione di p usano i simboli $\neg p$ o $\sim p$.

Implicazione materiale Si definisce implicazione materiale (equivalente al “se . . . allora”) di due preposizioni p e q, si indica con

$$p \to q \tag{2.4}$$

e si legge “se p allora q” o “p implica q”), la proposizione che è (tab 2.4):

- falsa nel caso p sia vera e q sia falsa;
- è vera negli altri casi.

La proposizione:

- p si dice *antecedente*;
- q si dice *conseguente*.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabella 2.4: Tavola di verità dell’implicazione materiale

a	b	$a \to b$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b} \to \overline{a}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Tabella 2.5: Implicazione diretta e contronominale

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabella 2.6: Tavola di verità della coimplicazione materiale

Con questa tipologia si intende solitamente affermare un *nesso di causalità*, valido se, ogniqualvolta si verifica la causa p, ne segue l'effetto q. Ma se p non è vera, nulla si potrà dire su q; infatti potrebbe non verificarsi o verificarsi perché prodotta da un'altra causa (per questo la terza e quarta riga della tavola di verità non si può dire che sia falsa, indipendentemente dal valore assunto da q). L'unica caso in cui il nesso di causalità $p \to q$ non si verifica si ha quando al verificarsi della causa non segue l'effetto.
Infine data una implicazione $p \to q$, che possiamo chiamare **implicazione diretta** definiamo alcune formule a questa connesse:

- $\overline{p} \to \overline{q}$ si dice **contraria** di $p \to q$;
- $q \to p$ si dice **inversa** di $p \to q$;
- $\overline{q} \to \overline{p}$ si dice **contronominale** di $p \to q$.

Come si può dimostrare costruendo le tavole di verità, dalla verità dell'implicazione diretta:

- discende la verità della contronominale e viceversa (cfr. tabella 2.5 ove la colonna $a \to b$ presenta gli stessi valori di $\overline{b} \to \overline{a}$);
- non si può affermare la verità delle implicazioni contraria e inversa (non mostrato).

Coimplicazione materiale Si definisce coimplicazione materiale di due proposizioni p e q, si scrive

$$p \leftrightarrow q \tag{2.5}$$

e si legge "p se e solo se q", la proposizione che è (tab 2.6):

- vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità;
- falsa in caso contrario.

2.1.3 Proprietà delle operazioni logiche

Le operazioni logiche godono di numerose proprietà (verificabili mediante tavole di verità) che presentano analogie con le proprietà delle operazioni insiemistiche.

Idempotenza Idempotenza della congiunzione e della disgiunzione:

$$p \wedge p = p \qquad p \vee p = p \tag{2.6}$$

Commutativa Proprietà commutativa della congiunzione e della disgiunzione:

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \tag{2.7}$$

Complementarietà Legge della doppia negazione:

$$\overline{\overline{p}} = p \tag{2.8}$$

Ovvero la negazione della negazione di una proposizione è la proposizione stessa.

Associativa Proprietà associativa della congiunzione e della disgiunzione:

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q \wedge r \tag{2.9}$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r \tag{2.10}$$

Distributiva Proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{2.11}$$

Proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{2.12}$$

De Morgan Leggi di De Morgan:

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \tag{2.13}$$

Assorbimento Leggi di assorbimento:

$$p \vee (p \wedge q) = p \qquad p \wedge (p \vee q) = p \tag{2.14}$$

2.1.4 Tautologie

Se una formula enunciativa A:

- risulta vera qualunque sia il valore di verità delle proposizioni atomiche che la compongono, si dice che è una **tautologia** e la si indica come:

  $$\models A \tag{2.15}$$

  Una tautologia rappresenta uno schema di ragionamento che è valido indipendentemente dal valore di verità e dal significato delle preposizioni che la compongono. Per questo motivo le tautologie sono anche dette *leggi della logica*;

a	$\overline{a}$	$a \vee \overline{a}$
V	F	V
F	V	V

Tabella 2.7: Principio del terzo escluso

- risulta falsa qualsiasi sia il valore di verità delle sue componenti, si dice che è una **contraddizione**.

Presentiamo nel seguito le tautologie che rappresentano le forme di ragionamento deduttivo più frequenti in matematica.

Principio del terzo escluso Il principio afferma che una proposizione è necessariamente o vera o falsa, ovvero non esiste una terza possibilità

$$\vDash a \vee \overline{a} \tag{2.16}$$

Infatti a titolo esemplificativo si veda tab 2.7. A parole, ad esempio, è sempre vero che cammino o non cammino.

Proprietà transitiva dell'implicazione

$$\vDash [(a \to b) \wedge (b \to c)] \to (a \to c) \tag{2.17}$$

Questa si presta ad esprimere schematicamente un tipo di ragionamento deduttivo, detto **sillogismo ipotetico** dove:

- vi sono due premesse $(a \to b)$ e $(b \to c)$
- una conseguenza $(a \to c)$

tutte in forma ipotetica "se ... allora ...". Ad esempio se studierò sarò promosso e se sarò promosso riceverò un premio: quindi se studierò riceverò un premio.

Legge di contrapposizione

$$\vDash (a \to b) \to \left(\overline{b} \to \overline{c}\right) \tag{2.18}$$

Ad esempio dall'esser vero che se un numero naturale è divisibile per 4 allora è multiplo di 2 segue che se un numero naturale non è multiplo di 2, allora non è divisibile per 4.

Modus ponens

$$\vDash [(a \to b) \wedge a] \to b \tag{2.19}$$

Ad esempio: se studio apprendo, e studio, dunque apprendo.

Modus tollens

$$\vDash \left[(a \to b) \wedge \overline{b}\right] \to \overline{a} \tag{2.20}$$

Se ho sete bevo, ma non bevo, quindi non ho sete

$(a \to b) \wedge a$	b	$[(a \to b) \wedge a] \to b$
V	V	V
V	F	F

Tabella 2.8: Casi possibili nel modus ponens

Riduzione all'assurdo Se indichiamo con f un enunciato falso (ad esempio una contraddizione o la negazione di un enunciato di cui è nota la verità):

$$\vDash [(\overline{a} \to f)] \to a \tag{2.21}$$

Ciò significa che, se dalla negazione di una proposizione a si deduce una proposizione falsa, non potendosi negare a la proposizione a deve essere vera.

2.1.5 Regole di deduzione

I ragionamenti più usati nella matematica sono basati sul seguente schema:

- si presentano alcune affermazioni, dette **premesse**, la cui verità è già stata accettata;
- si deduce da queste la verità di una nuova affermazione, detta **conclusione**.

Alcune delle tautologie viste consentono di chiarire/giustificare questo modo di procedere, permettendo di formulare regole di deduzione/inferenza mediante le quali dalle verità di alcune proposizioni (premesse) si può dedurre la verità di una nuova proposizione (conclusione).
Ne vediamo alcune, che prendono nome dalle tautologie su cui sono fondate.

Modus ponens Consideriamo la tautologia

$$\vDash [(a \to b) \wedge a] \to b \tag{2.22}$$

e supponiamo siano vere $a \to b$ e a, e quindi anche la loro congiunzione. Possono presentarsi due casi a seconda che b sia vera o falsa; la tavola di verità è dato in tabella 2.8. Ma dato che stiamo lavorando con una tautologia, questa deve essere vera e quindi non può verificarsi che b sia falsa; perciò b deve essere vera. In altre parole, se sono vere le proposizioni $a \to b$ e a, deve essere vera anche la proposizione b.

Modus tollens Dal modus tollens

$$\vDash \left[(a \to b) \wedge \overline{b}\right] \to \overline{a} \tag{2.23}$$

con ragionamenti analoghi a quelli fatti per il modus ponens si può ricavare la seguente regola di deduzione, detta appunto Modus Tollens: se è vera la proposizione $a \to b$ ed è vera la negazione di b (ovvero b è false), deve essere vera anche la negazione di a (ossia a è falsa).

Riduzione all'assurdo Dalla riduzione all'assurdo, con f un enunciato falso:

$$\models [(\overline{a} \to f)] \to a \tag{2.24}$$

otteniamo la regola di deduzione omonima: se la negazione di una proposizione a implica una proposizione false, a deve essere vera.
Questo è un tipo di ragionamento molto usato in matematica. Le dimostrazioni per assurdo si possono ricondurre a questo schema: per dimostrare un enunciato a, si prova a negarlo; se da tale negazione si traggono conclusioni assurde (ossia è vero che $\overline{a} \to f$), a deve esser vero.

2.2 Logica dei predicati

2.2.1 Predicati

Consideriamo una espressione linguistica del tipo

$$x \text{ è un numero primo}, \quad x \in \mathbb{N}$$

È evidente come questa *non sia una proposizione*, poiché non si può dire se vera o falsa definitivamente; la verità o meno dipende dal valore assunto da x. Formalmente scriviamo:

$$p(x): \quad x \text{ è un numero primo}, \quad x \in \mathbb{N} \tag{2.25}$$

per indicare una proposizione il cui valore di verità dipende dal valore assunto dalla variabile x. In questo caso $\mathbb{N}$ assume il ruolo di *dominio* D, ovvero esprime l'insieme nel quale può variare la x; o predicati sono pertanto funzioni che associano agli elementi di un insieme D un valore di verità o falsità.
Dato un predicato $a(x)$ dipendente da una variabile $x \in D$, chiamiamo **insieme di verità** di $a(x)$ l'insieme $A \subseteq D$ costituito dagli elementi di D per cui $a(x)$ è vero.

Infine, i predicati possono dipendere anche da più di una variabile, come nel seguente caso:

$$p(x; y): \quad x > y, \quad x, y \in \mathbb{N}$$

2.2.2 Operazioni sui predicati

Poiché fissando il valore della variabile il predicato diventa una proposizione, si possono definire per i predicati operazioni logiche analoghe a quelle viste per le proposizioni stesse.
Ad esempio, considerando due predicati $p(x)$ e $q(x)$ con x una variabile appartenente ad un dato dominio, chiamiamo predicato congiunzione il predicato:

$$p(x) \wedge q(x)$$

2.2.3 Predicati e insiemi

Considerando due predicati $a(x)$ e $b(x)$ definiti su uno stesso dominio $x \in \mathbb{N}$, le operazioni logiche sui predicati corrispondono ad operazioni insiemistiche sui rispettivi insiemi di verità e nello specifico:

- la *congiunzione* $\wedge$ di due predicati porta ad un predicato il cui insieme di verità è l'intersezione degli insiemi di verità dei predicati di partenza;
- la *disgiunzione* $\vee$ di due predicati porta ad un predicato il cui insieme di verità è l'unione degli insiemi di verità dei predicati di partenza;
- la *negazione* di un predicato corrisponde alla *complementazione* del suo insieme di verità rispetto al dominio.

2.2.4 Implicazione ed equivalenza logica

Implicazione logica In generale considerati due predicati $p(x)$ e $q(x)$ con x appartenente ad un opportuno dominio, se ogni valore di x che rende vero $p(x)$ rende vero anche $q(x)$ si dice equivalentemente che:

- $p(x)$ implica logicamente $q(x)$ o che $p(x)$ è una **condizione sufficiente** per il verificarsi di $q(x)$;
- $q(x)$ è conseguenza logica di $p(x)$, o che $q(x)$ è una **condizione necessaria** per il verificarsi di $p(x)$.

e si scrive:

$$p(x) \implies q(x) \tag{2.26}$$

nel quale $p(x)$ si dice l'antecedente, $q(x)$ la conseguente. Nel caso $p(x)$ non implichi logicamente $q(x)$ si scrive invece:

$$p(x) \not\Longrightarrow q(x) \tag{2.27}$$

A livello di insiemi di verità, in un contesto di implicazione logica del tipo $p(x) \implies q(x)$ dove P è l'insieme di verità del primo predicato e Q quello del secondo vale:

$$P \subseteq Q$$

Un esempio di implicazione logica è il seguente:

se un numero è divisibile per 4 allora è divisibile per 2

rappresentato dai predicati:

$$\begin{aligned} &p(x) : x \text{ è divisibile per 4} \quad x \in \mathbb{N} \\ &q(x) : x \text{ è divisibile per 2} \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Equivalenza logica Se in una implicazione logica $p(x) \implies q(x)$ si scambia il predicato antecedente con il conseguente, non è detto che si ottenga ancora una implicazione logica. Se però questo accade, ovvero $q(x) \implies p(x)$, ovvero i due predicati si implicano logicamente a vicenda si scrive

$$p(x) \iff q(x) \tag{2.28}$$

dove il simbolo $\iff$ indica l'equivalenza logica e si dice alternativamente che:

- $p(x)$ è logicamente equivalente a $q(x)$;
- $p(x)$ è vera solo se $q(x)$ è vera.

In questo caso, con P è l'insieme di verità di $p(x)$ e Q quello di $q(x)$ vale:

$$P = Q$$

Nel caso $p(x) \iff q(x)$ si dice che $p(x)$ è **condizione necessaria e sufficiente** per $q(x)$ poiché:

- $p(x)$ è condizione sufficiente per $q(x)$ (essendo $p(x) \implies q(x)$)
- $p(x)$ è condizione necessaria per (x) (essendo $q(x) \implies p(x)$)

Analogamente $q(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per $p(x)$.

Puntualizzazioni Non bisogna confondere i simboli $\rightarrow, \leftrightarrow$ con $\implies$, $\iff$:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ indicano l'implicazione/coimplicazione *materiale* e costituiscono connettivi logici utilizzati per costruire una proposizione composta a partire da proposizioni atomiche;
- $\implies$, $\iff$ sono simboli di relazione tra predicati: non indicano nuovi predicati ma affermano che tra i predicati valgono certe relazioni.

Vi sono tuttavia rapporti fra tali simboli:

- vale $a(x) \implies b(x)$ quando il predicato condizionale $a(x) \rightarrow b(x)$ è vero per qualunque x;
- risulta $a(x) \iff b(x)$ quando il predicato $a(x) \leftrightarrow b(x)$ è vero per qualunque x.

2.2.5 Quantificatori

Può essere necessario dover esprimere che tutti o qualche (almeno uno) elemento di un certo insieme (sottinteso) godono di una determinata proprietà.
Per poter simboleggiare tali affermazioni si introducono i simboli:

- $\forall$ si dice **quantificatore universale** e si legge *per ogni*; quindi

  $$\forall x : \ p(x) \tag{2.29}$$

  si legge: per ogni x, vale $p(x)$;
- $\exists$ si dice **quantificatore esistenziale** e si legge *esiste almeno un*; quindi

  $$\exists x : \ p(x) \tag{2.30}$$

  si legge: esiste almeno un x per il quale vale $p(x)$.

In generale se a un predicato con una variabile applichiamo un quantificatore, esso diviene una proposizione;

- $\forall x : p(x), \ x \in D$ è vero se la proprietà $p(x)$ vale per tutti gli elementi del dominio, altrimenti è falso;
- $\exists x : p(x), \ x \in D$ è vero se la proprietà $p(x)$ vale per almeno un elemento del dominio, altrimenti è falso.

Capitolo 3

Metodi dimostrativi

3.1 Dimostrazioni basate su logica

La maggior parte dei teoremi è costituita da implicazioni logiche ovvero frasi del tipo:

$$p(x) \implies q(x) \quad \forall x \in A \tag{3.1}$$

dove p e q sono due predicati la cui verità/falsità dipende dal valore x considerato A è il dominio considerato. In questo contesto p fa la parte dell'*ipotesi* mentre q fa la parte della *tesi*. Ad esempio:

Per ogni numero naturale n, se n è dispari, allora n^2 è dispari

può essere scomposta come:

- $p(n)$: n è dispari;
- $q(n)$: n^2 è dispari;
- $A = \mathbb{N}$.

3.1.1 Dimostrazione implicazione

Ci poniamo ora di trovare il metodo di dimostrare la verità di una implicazione logica. Gli step sono due:

1. si considera il generico n che soddisfa l'ipotesi $p(x)$ (ad esempio essere dispari);
2. si dimostra che n soddisfa la tesi $q(x)$.

Ad esempio dimostriamo che se n è dispari, n^2 è dispari: osserviamo che qualunque numero dispari si può scrivere nella forma $n = 2k + 1$ con k opportuno. Per dimostrare il teorema occorre poter scrivere n^2 come intero pari $+1$. Si ha

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{numero pari}} + 1$$

E così abbiamo dimostrato il teorema.

Predicato	Negazione
$p(x)$ e $q(x)$	non $p(x)$ o non $q(x)$
$p(x)$ o $q(x)$	non $p(x)$ e non $q(x)$
non $p(x)$	$p(x)$
$\forall x$ vale $p(x)$	$\exists x$ non vale $p(x)$
$\exists x$ vale $p(x)$	$\forall x$ non vale $p(x)$
$p(x) \implies q(x), \forall x$	$\exists x$: vale $p(x)$ e non $q(x)$

Tabella 3.1

3.1.2 Controesempi

I controesempi sono una importante risorsa per dimostrare la falsità di una implicazione logica. Il punto è che l'implicazione logica pretende che ogni elemento del dominio considerato che soddisfa l'ipotesi soddisfi anche la tesi; quindi se si riesce a trovare anche un solo esempio di x che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi, questo significa che l'implicazione universale è falsa, e questo caso viene definito controesempio.

3.1.3 Dimostrazione inversa

Da un punto di vista logico la 3.1 equivale alla:

$$\text{non } p(x) \implies \text{non } q(x) \quad \forall x \in A \tag{3.2}$$

detta *controinversa* o *contronominale*. Dall'equivalenza logica deriva che è possibile dimostrare la 3.1 se si riesce a dimostrare la 3.2. Diviene in questo caso necessario costruire la negazione di un predicato (alcune regole tipiche in tab. 3.1). Ad esempio se faticassimo a dimostrare che il quadrato di un dispari è un dispari potremmo provare la stessa cosa mostrando che il quadrato di un numero pari è pari.

3.1.4 Dimostrazione per assurdo

Consiste nel supporre vera:

- l'ipotesi del teorema e ...
- la *negazione* della tesi

e dedurre da questi fatti una contraddizione di qualsiasi tipo. Anche in questo caso occorre saper costruire la corretta negazione di una proposizione, come si è fatto per la dimostrazione inversa.

3.2 Principio di induzione

Si tratta di un principio/metodo utile per dimostrare la validità di una determinata proposizione a partire da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Si può applicare a teoremi che abbiano la seguente struttura:

$$\text{Per ogni } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \text{ vale la proprietà } p(n) \tag{3.3}$$

Il numero n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se $n_0 = 0$ il teorema afferma semplicemente che la proprietà è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si hanno due forme principali che differiscono in quali elementi vengono utilizzati per effettuare l'effettiva dimostrazione,rispettivamente se solo l'n-esimo o se tutti sino all'n-esimo; la prima forma è quella più conosciuta/utilizzata.

3.2.1 Assioma del buon ordinamento di $\mathbb{N}$

In entrambi i casi la dimostrazione del funzionamento del principio stesso si basa sull'assioma di buon ordinamento di $\mathbb{N}$. Si assume che l'insieme $\mathbb{N}$ sia bene ordinato: ossia ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto $S \neq \emptyset$ ha un minimo.

3.2.2 Prima forma

3.2.2.1 Principio e dimostrazione

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che contiene un elemento n_0 e che, contenendo un naturale $n \geq n_0$ contiene anche $n + 1$, allora A contiene tutti i naturali $\geq n_0$.

Per dimostrarlo si vuole provare che l'insieme dei naturali post n_0 che non appartengono ad A, $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0, n \notin A\}$, è vuoto; per assurdo se è non vuoto per l'assioma di buon ordinamento S ha un minimo, che chiamiamo m. Non può essere che $m = n_0$ in quanto per ipotesi $n_0 \in A$ ed $m \notin A$; deve essere allora $m > n_0$, diciamo che è $m = n + 1$ con $n \geq n_0$, ossia m segue un numero n che può coincidere con n_0 o essergli superiore (poiché appunto S ha numeri superiori ad n_0). Ma allora questo n appartiene ad A (e non ad S) poiché $n < \min S$ ($\min S$ è lo spartiacque per coloro che sono fuori da S).
Allora l'ipotesi che A contenga i successori dei suoi elementi maggiori o uguali di n_0 mostra che $n + 1 = m \in A$ ed S è vuoto.

3.2.2.2 Applicazione

Sia $p(n)$ è una proprietà di cui i numeri naturali possono o meno godere. Se $p(n_0)$ è vera, e se l'implicazione $p(n) \implies p(n + 1)$ è vera per ogni $n \geq n_0$, allora $p(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. [1]
Fattivamente la dimostrazione per induzione procede in due passi:

1. dimostrare che $p(n)$ è vera per $n = n_0$ (primo passo dell'induzione); in altre parole dimostrare $p(n_0)$;
2. dimostrare che, se n è un generico numero naturale $\geq n_0$, dal fatto che $p(n)$ sia vera (lo si assume come ipotesi induttiva) si dimostra che anche $p(n + 1)$ è vera.

Se si riesce a completare entrambi i passi, si può allora concludere che per ogni $n \geq n_0$, $p(n)$ è vera.

3.2.2.3 Alcuni esempi

Diseguaglianza di Bernoulli Se $x > -1$ ed $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ si ha

$$\boxed{(1 + x)^n \geq 1 + nx} \tag{3.4}$$

[1] Per la dimostrazione si applica il principio ad $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ è vera}\}$.

e se $x \neq 0, n > 1$ la disuguaglianza vale in senso stretto.
La cosa è ovvia per $n = 1$; ammesso che sia vera per un generico $n \geq 1$, moltiplicando entrambi i termini della diseguaglianza $1 + nx \leq (1 + x)^n$ per $(1 + x)$ (che è maggiore di 0, dato che abbiamo $x > -1$ come ipotesi si ottiene

$$\begin{aligned}(1 + nx)(1 + x) &\leq (1 + x)^{n+1} \\ 1 + nx + x + nx^2 &\leq (1 + x)^{n+1} \\ 1 + n(x + 1)x + nx^2 &\leq (1 + x)^{n+1}\end{aligned}$$

ma essendo $nx^2 \geq 0$ a maggiore ragione si ha che (togliendolo):

$$1 + (n + 1)x \leq (1 + x)^{n+1}$$

e si conclude leggendo l'equazione in senso inverso, notando che siamo giunti alla formula della diseguaglianza per $n + 1$.

Diseguaglianza aritmetica e geometrica Siano $x_1, x_2, \ldots x_n$ numeri strettamente positivi, allora la media geometrica non può superare quella aritmetica in quanto

$$x_1 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \tag{3.5}$$

e l'uguaglianza vale solo se tutti i numeri sono uguali $x_1 = \ldots = x_n$. Su induzione per n, se $n = 1$ l'affermazione è vera. Nell'ipotesi che la diseguaglianza valga per n numeri positivi, consideriamo $n + 1$ numeri positivi $x_1, \ldots, x_{n+1}$ la loro media aritmetica μ soddisfa

$$(n + 1)\mu = x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} \tag{3.6}$$

Se $x_i = \mu$ abbiamo l'uguaglianza di media aritmetica e geometrica e abbiamo finito. Alternativamente possiamo trovare un numero che sia superiore alla media μ e un altro inferiore. Diciamo che (anche permutando gli elementi, alla bisogna) $x_n > \mu$ e $x_{n+1} < \mu$. Allora il prodotto di cui sotto è positivo:

$$(x_n - \mu)(\mu - x_{n+1}) > 0 \tag{3.7}$$

Ora considerando $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, y$ corrispondenti con i precedenti x_i ad eccezione dell'ultimo così definito:

$$y = x_n + x_{n+1} - \mu$$

si ha che anche $y \geq x_n - \mu > 0$ è positivo. Riscrivendo la 3.6 come

$$n\mu = x_1 + \ldots + x_{n-1} + \underbrace{x_n + x_{n+1} - \mu}_{=y}$$

possiamo notare che μ è anche la media aritmetica degli n numeri con y come ultimo. Ma allora per l'ipotesi induttiva (ossia che la diseguaglianza valga per n elementi):

$$\mu^n \geq x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y$$

e moltiplicando per μ entrambi i membri

$$\mu^{n+1} \geq x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y \cdot \mu \tag{3.8}$$

Il prodotto in 3.7 può essere riscritto[2] come:

$$(x_n - \mu)(\mu - x_{n+1}) = \underbrace{(x_n + x_{n+1} - \mu)}_{=y}\mu - x_n x_{n+1} > 0$$

pertanto riusando questa riscrittura

$$y \cdot \mu > x_n x_{n+1} \tag{3.9}$$

Tornando alla 3.8, se almeno uno tra gli $x_1, \ldots, x_{n-1}$ è 0, allora abbiamo disegua-glianza stretta e si conclude vera la formula; alternativamente $(x_1, \ldots, x_{n-1} > 0)$ visto che vale la 3.9, allora si ha anche qui la disuguaglianza stretta

$$\mu^{n+1} > x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \tag{3.10}$$

e così si conclude.

3.2.3 Seconda forma

3.2.3.1 Principio e dimostrazione

Nella seconda forma, se un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{N}$ contiene lo zero e, per ogni naturale $n \geq q$ vale l'implicazione,

se tutti i naturali $< n$ appartengono ad S, allora $n \in S$

allora $S = \mathbb{N}$.
Il risultato si dimostra analogamento alla formulazione precedente, facendo uso del buon ordinamento di $\mathbb{R}$.

3.2.3.2 Applicazione

Il principio si usa così. Sia $p(n)$ una proprietà di cui i naturali possono o meno godere; se $p(0)$ è vera, e per ogni $n \geq 1$ le $p(0), \ldots, p(n-1)$ implicano $p(n)$, allora $p(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$.
La differenza rispetto alla precedente formulazione è che per passare da n a $n+1$ abbiamo bisogno di tutti i passi precedenti a $n+1$ e non solo dell'n-esimo.

3.2.3.3 Alcuni esempi

Naturali come prodotto di primi Proviamo che ogni naturale $n \geq 2$ ha fattori primi (scrivibile come prodotto di fattori primi). 2 è primo; supponiamo che tutti i numeri $2, 3, \ldots n-1$ abbiano fattori primi; mostriamo che anche n ha fattori primi. Se n è primo, la cosa è provata; altrimenti si può scrivere $n = ab$ con $a > 1, b > 1$, e quindi $a = n/b < n$; per l'ipotesi induttiva a ha fattori primi; ma essendo $n = ab$ ogni divisore di a è anche divisore di n e quindi n ha fattori irriducibili.

[2] Infatti:

$$\begin{aligned}(x_n + x_{n+1} - \mu)\mu - x_n x_{n+1} &= x_n\mu + x_{n+1}\mu - \mu^2 - x_n x_{n+1}\\ &= \mu(x_{n+1} - \mu) + x_n(\mu - x_{n+1})\\ &= \mu(x_{n+1} - \mu) - x_n(x_{n+1} - \mu)\\ &= (x_{n+1} - \mu)(\mu - x_n)\\ &= (x_n - \mu)(\mu - x_{n+1})\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è raccolto -1 da entrambi i fattori.

Finitezza di un sottoinsieme Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è finito se e solo se ogni suo sottoinsieme $A \subseteq E$ non vuoto $A \neq \emptyset$ ha sia massimo che minimo.
Per provare l'affermazione facciamo uso delle due forme del principio di induzione:

- si prova innanzitutto (facendo uso della prima forma) che se E è finito, i suoi sottoinsiemi sono anch'essi finiti e pertanto, se non sono vuoti, hanno massimo e minimo;
- si prova altresì (facendo uso della seconda forma) che se E non è finito vi è (almeno) una successione strettamente crescente $j \to x_j$ che costituisce un sottoinsieme non vuoto di E, ma che essa non ha massimo.

Per il primo punto, se E è finito e non vuoto ha massimo e minimo: l'induzione si fa sul numero di elementi di E. Se E ha un solo elemento la cosa è ovvia; ammessa la cosa vera per gli insiemi ad n elementi, proviamola per quelli ad $n+1$; se E ha $n+1$ elementi, e uno di essi è a, $F = E \setminus \{a\}$ ha n elementi e quindi ha minimo m; è immediato vedere che il minimo tra m ed a costituisce il minimo di E; analogamente per il massimo.
Per il secondo punto supponiamo E non finito ma ben ordinato, ossia che tutti i suoi sottoinsiemi non vuoti abbiano minimo; la successione viene definita induttivamente come segue $x_0 = \min E$; se E è infinito $E \setminus \{x_0\}$ non è vuoto, pertanto ha un minimo; si pone $x_1 = \min(E \setminus \{x_0\})$; è chiaro che $x_1 > x_0$ dato che x_0 è il minimo di E ed $x_1 \neq x_0$, e così via si ha sempre che $x_{n+1} > x_n$; il procedimento non si arresta mai e conduce a una successione strettamente crescente di elementi di E.

Capitolo 4

Strutture algebriche

4.1 Operazioni binarie

4.1.1 Definizioni e notazione

Intuitivamente, mediante una operazione si combinano tra loro una coppia ordinata di elementi elementi di un dato insieme $a, b \in X$ (quale che sia l'insieme) per ottenere un terzo elemento c, il risultato dell'operazione. L'operazione si dice

- *interna*: se $c \in X$. Si dice anche che l'insieme è chiuso rispetto all'operazione. Nel prosieguo è soprattutto su queste che poniamo l'attenzione;

- *ovunque definita*: se l'operazione è definita (ovvero calcolabile) per tutte le coppie ordinate possibili appartenenti al prodotto cartesiano $X \times X$.

Ai nostri fini, una operazione binaria su di un insieme X è una funzione del tipo:

$$f : X \times X \to X \tag{4.1}$$

Useremo $\diamond$ per indicare una generica operazione binaria e se $a, b \in X$, allora la scrittura

$$a \diamond b \tag{4.2}$$

indica il risultato dell'operazione, ossia quell'elemento $c \in X$ associato alla coppia ordinata $(a; b)$.

Rappresentazione Quando l'insieme X in cui è definita una operazione ha un numero finito di elementi, è possibile scrivere per ogni coppia (a, b) (per i quali l'operazione sia definita) il risultato dell'operazione in una tabella a doppia entrate, ponendo l'operatore nell'angolo in angolo a sinistra (tabella 4.1).

4.1.2 Proprietà

Una operazione definita in un insieme X può essere: associativa, commutativa, dotata di elemento neutro, dotata di elementi simmetrici/inversi.

-	0	1	2	3
0	0			
1	1	0		
2	2	1	0	
3	3	2	1	0

Tabella 4.1: Operazione di sottrazione definita nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$

4.1.2.1 Associativa

Una operazione gode della proprietà associativa se:

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c), \quad \forall a, b, c \in X \tag{4.3}$$

Se una operazione è associativa possiamo scrivere

$$a \diamond b \diamond c$$

e generalizzando a più operatori

$$a_1 \diamond a_2 \diamond \ldots a_n$$

senza pericolo di ambiguità perché qualunque sia l'ordine in cui eseguiamo le operazioni indicate, il risultato è sempre lo stesso.

4.1.2.2 Commutativa

Una operazione gode della proprietà commutativa se

$$a \diamond b = b \diamond a, \quad \forall a, b \in X \tag{4.4}$$

ovvero quando il risultato non dipende dall'ordine in cui si prendono gli operandi. Nella tabella di una operazione commutativa, elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.
In una operazione che gode sia della proprietà associativa che della commutativa, qualora si abbiano molteplici elementi da combinare

$$a_1 \diamond a_2 \diamond \ldots a_n$$

questi possono essere disposti in ordine a piacere (non pregiudicando il risultato).

4.1.2.3 Elemento neutro

Un elemento $\iota \in X$ si dice neutro rispetto all'operazione $\diamond$ se lascia invariato ogni elemento di $a \in X$ con cui viene composto:

$$\iota \diamond a = a \diamond \iota = a, \quad \forall a \in X \tag{4.5}$$

L'elemento neutro, se esiste, è unico; infatti se per assurdo vi fossero due elementi neutri distinti ι' e ι'' si avrebbe $\iota' = \iota' \diamond \iota''$ (perché ι'' è elemento neutro) e $\iota' \diamond \iota'' = \iota''$ (perché ι' è elemento neutro). Ne seguirebbe che $\iota' = \iota''$.

4.1.2.4 Elemento simmetrico

Considerando una operazione binaria $\diamond$ dotata di elemento neutro ι; un elemento

- $x' \in X$ tale che $x' \diamond x = \iota$ si dice simmetrico sinistro per $x \in X$
- $x'' \in X$ tale che $x \diamond x'' = \iota$ si dice simmetrico destro per $x \in X$
- un elemento x' che sia simultaneamente simmetrico destro e sinistro, cioè che
$$x \diamond x' = x' \diamond x = \iota \tag{4.6}$$
si dice simmetrico (tout court) di $x \in X$; gli elementi $x \in X$ con simmetrico (non necessariamente tutti lo sono) sono detti simmetrizzabili.
L'elemento neutro di $\diamond$ sempre simmetrizzabile (perché $\iota \diamond \iota = \iota$)

4.2 Strutture algebriche

Una struttura algebrica è una n-upla ordinata composta da un insieme detto *sostegno* (ad esempio X) ed una o più operazioni ($\diamond, \dots$) applicabili agli elementi del sostegno, che possono disporre o meno di differenti proprietà.
Le strutture algebriche si classificano in ragione del numero di operazioni e delle proprietà di cui queste godono.

4.2.1 Strutture algebriche con una operazione

Indichiamo con $(X, \diamond)$ la generica struttura algebrica con una operazione.

4.2.1.1 Semigruppi e sottosemigruppi

$(X, \diamond)$ è detto *semigruppo* se $\diamond$ è associativa; viene detto *semigruppo commutativo* (o *abeliano*) se $\diamond$ è anche commutativa. Ad esempio $(\mathbb{N}, +)$ è semigruppo commutativo.
Se $(X, \diamond)$ è semigruppo e se $S \subseteq X$ è chiuso rispetto all'operazione $\diamond$ (ovvero applicandola ad elementi di S si ritrovano altrettanti elementi di S) si dice che S è *sottosemigruppo* di X. Ad esempio $\mathbb{N}$ è sottosemigruppo sia additivo che moltiplicativo di $\mathbb{Z}$.

Simmetrico nei semigruppi In presenza di alcune condizioni, ovvero:

- l'operazione $\diamond$ gode della proprietà associativa (quindi a partire da $(X, \diamond)$ semigruppo in poi) e
- la struttura algebrica ha elemento neutro

il simmetrico assume alcune proprietà notevoli:

1. se $x \in X$ ha sia simmetrico sinistro x' che simmetrico destro x'', allora i due simmetrici coincidono $x' = x''$; infatti:
$$x' = x' \diamond \iota = x' \diamond (x \diamond x'') = (x' \diamond x) \diamond x'' = \iota \diamond x'' = x''$$
Quindi ciascun elemento simmetrizzabile ha un unico simmetrico (dato che sinistro e destro coincidono);

2. il simmetrico del simmetrico di un $x \in X$ è x stesso;

3. se x, y sono simmetrizzabili con simmetrici x', y' allora $x \diamond y$ è simmetrizzabile e il suo simmetrico è $y' \diamond x'$; infatti possiamo verificare che

$$(y' \diamond x') \diamond (x \diamond y) = (y' \diamond (x' \diamond x)) \diamond y = (y' \diamond \iota) \diamond y = y' \diamond y = \iota$$
$$(x \diamond y) \diamond (y' \diamond x') = (x \diamond (y \diamond y')) \diamond x' = (x \diamond \iota) \diamond x' = x \diamond x' = \iota$$

   Gli elementi simmetrizzabili in un semigruppo con elemento neutro sono quindi un sottosemigruppo (perché se $x, y \in S$ dei simmetrizzabili, anche $x \diamond y \in S$, quindi S è chiuso).

4.2.1.2 Gruppo

Una struttura $(X, \diamond)$ si dice gruppo se:

- $(X, \diamond)$ è semigruppo (quindi $\diamond$ associativa)
- $\diamond$ ha elemento neutro ι
- ogni elemento $x \in X$ è simmetrizzabile: $\exists x' \in X : x \diamond x' = x' \diamond x = \iota$

Se l'operazione $\diamond$ è anche commutativa, parleremo di *gruppo commutativo* (o *abeliano*).

Notazione moltiplicativa e additiva Un gruppo non commutativo è spesso indicato con con $(G, \cdot)$ e descritto con notazione moltiplicativa; ovvero nella notazione si adotta $\cdot$ al posto di $\diamond$ (senza perdere in generalità o intendere necessariamente la moltiplicazione tra numeri):

- l'operazione di tre elementi $a, b, c \in G$ si indica come $a \cdot b \cdot c$ o più compattamente come abc
- l'operazione $\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ è indicato in modo compatto come a^n
- l'inverso di un elemento a è indicato con a^{-1}

Viceversa un gruppo commutativo è spesso denotato additivamente come $(G, +)$:

- l'operazione $\underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ volte}}$ è indicato in modo compatto come na
- l'inverso di un elemento a è indicato con $-a$

La differenza tra un gruppo moltiplicativo e un gruppo additivo notazionale: ogni gruppo può essere equivalentemente trattato usando la notazione moltiplicativa o additiva.

Gruppi banali Ogni insieme ad un solo elemento $X = \{a\}$ ha una unica legge di composizione $\diamond$. Essa è una operazione binaria definita dal combinare a e con a; ed essendo che consideriamo operazioni interne al sostegno, deve essere per forza

$$a \diamond a = a$$

L'operazione di X avente un solo elemento è necessariamente associativa:

$$(a \diamond a) \diamond a = a \diamond a = a = a \diamond a = a \diamond (a \diamond a)$$

commutativa:

$$a \diamond a = a \diamond a = a$$

con elemento neutro

$$a \diamond \iota = a \implies \iota = a$$

e tale gruppo è simmetrico di se stesso

$$a \diamond a' = \iota \implies a \diamond a' = a \implies a' = a$$

I gruppi ad un solo elemento sono detti *gruppi banali*.

Esempi

- $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo: infatti nessun elemento tranne lo zero possiede un simmetrico;
- $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano; infatti in $\mathbb{Z}$ l'addizione è ovunque definita, è associativa, ammette l'elemento neutro (lo zero), e ogni elemento di $\mathbb{Z}$ ha un simmetrico (il suo opposto); inoltre l'addizione è commutativa. Anche $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono gruppi abeliani;
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ è semigruppo, con $\{1\}$ come gruppo degli invertibili; $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è semigruppo, con $\{1, -1\}$ come gruppo degli invertibili; $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, \cdot)$ sono semigruppi, mentre privando i sostegni dello zero $(\mathbb{Q}^{\neq}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{\neq}, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^{\neq}, \cdot)$ sono gruppi.
- in un semigruppo $(X, \diamond)$ con elemento neutro l'insieme degli elementi simmetrizzabili forma sempre gruppo rispetto all'operazione indotta, il gruppo degli elementi simmetrizzabili; l'esempio più importante è il seguente: dato un insieme E l'insieme delle biezioni di E in sé (permutazioni) è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni (esso è non commutativo non appena E ha almeno tre elementi distinti, come si può verificare)

4.2.1.3 Sottogruppi

Dato un gruppo $(G, \cdot)$ un suo sottogruppo è un sottoinsieme $S \subseteq G$ che sia:

- chiuso rispetto all'operazione del gruppo
- contenga l'elemento neutro del gruppo
- contenga il simmetrico di ciascun proprio elemento

Per verificare che un insieme $S \subseteq G$ sia sottogruppo di $(G, \cdot)$ basta verificare che $S \neq \emptyset$ e che se $x, y \in S$ allora $xy^{-1} \in S$ (anche detto chiuso rispetto alla divisione, intendendo con questa l'operazione di un elemento per l'inverso dell'altro).[1]

Esempi

- il gruppo $(\mathbb{C}, +)$ ha come sottogruppi $(\mathbb{R}, +)$ e questo a sua volta ha come sottogruppo $(\mathbb{Z}, +)$. L'unico sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$ in $\mathbb{N}$ è quello banale $\{0\}$
- nel gruppo delle biiezioni di $\mathbb{R}$ in sé (considerando la composizione come operazione del gruppo) l'insieme delle biiezioni strettamente crescenti è un sottogruppo (composizioni di funzioni strettamente crescenti sono strettamente crescenti e le inverse di strettamente crescenti sono ancora tali). Invece le biiezioni decrescenti non formano un sottogruppo; la composizione di due funzioni strettamente decrescenti è strettamente crescente
- $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^{\neq}, \cdot)$, così come lo è $\mathbb{R}^{>}$

4.2.1.4 Omomorfismi, isomorfismi

Siano: $(A, \diamond)$ gruppo con elemento neutro ι e $x^{-\diamond}$ simmetrico di $x \in A$; $(B, \cdot)$ altro gruppo con elemento neutro 1 e x^{-1} simmetrico di $x \in B$.
Un omomorfismo da $(A, \diamond)$ a $(B, \cdot)$ è una funzione che lega i sostegni $f : A \to B$ tale che

$$f(x \diamond y) = f(x) \cdot f(y), \qquad \forall x, y \in A \tag{4.7}$$

ovvero che lega tra loro elementi dei sostegni che "conservano le operazioni" dei rispettivi gruppi.
Un omomorfismo biettivo si dice **isomorfismo**; infine gli omomorfismi di un gruppo in sé si chiamano anche endomorfismi e se sono biiettivi si chiamano automorfismi.

Proprietà degli omomorfismi

- un omomorfismo f trasforma l'elemento neutro $\iota \in A$ nell'elemento neutro $1 \in B$, ovvero:

  $$f(\iota) = 1$$

  Infatti $f(\iota) = f(\iota \diamond \iota) = f(\iota) \cdot f(\iota)$ e[2] quindi $f(\iota) = f(\iota) \cdot f(\iota)$. Se in tale uguaglianza si moltiplica (dopo l'applicazione di f ci troviamo in B per il quale $\cdot$ è definita) per $(f(\iota))^{-1}$ (definito poiché B è gruppo) si ottiene $1 = f(\iota)$
- si ha che l'omomorfismo trasforma simmetrico di un elemento $x \in A$ nel simmetrico dell'immagine $f(x)$, ovvero:

  $$f(x^{-\diamond}) = (f(x))^{-1}$$

[1] de marco pag 135

[2] La prima uguaglianza per composizione con l'elemento neutro, la seconda per definizione di omomorfismo

Infatti
$$1 = f(\iota) = f(x \diamond x^{-\diamond}) = f(x) \cdot f(x^{-\diamond})$$
l'ultima uguaglianza sempre per la definizione di omomorfismo; d'altra parte
$$1 = f(\iota) = f(x^{-\diamond} \diamond x) = f(x^{-\diamond}) \cdot f(x)$$
da cui discende che $f(x^{-\diamond}) = (f(x))^{-1}$ perché $f(x^{-\diamond})$ è simmetrico sia destro che sinistro di $f(x)$.

- composizioni di omomorfismi sono omomorfismi; ad esempio se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono omomorfismi, allora $g \circ f : A \to C$ è omomorfismo.
Infatti, indicando con * l'operazione in C, se $x, y \in A$ si ha
$$\begin{aligned} g \circ f(x \diamond y) &= g(f(x \diamond y) \\ &= g(f(x) \cdot f(y)) \\ &= g(f(x)) * g(f(y)) \\ &= (g \circ f(x)) * (g \circ f(y)) \end{aligned}$$

- se H è sottogruppo di A, allora $f(A)$ è sottogruppo di B; e se K è sottogruppo di B allora $f^{\leftarrow}(K)$ è sottogruppo di A (immagini e antiimmagini di sottogruppi sono sottogruppi.

- se f è *isomorfismo*, anche l'inversa $f^{-1} : B \to A$ è un isomorfismo.
Infatti sia $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$ con $x, y \in A$, $u, v \in B$; vogliamo dimostrare che se f è isomorfismo, anche l'inversa f^{-1} è isomorfismo. f^{-1} è isomorfismo se mantiene la proprietà di essere un omomorfismo innanzitutto, ed essere biettivo in secondo luogo. f^{-1} è omomorfismo se
$$f^{-1}(u \cdot v) = f^{-1}(u) \diamond f^{-1}(v) = x \diamond y$$
ovvero se dimostriamo che $x \diamond y = f^{-1}(u \cdot v)$. Allora
$$x \diamond y = f^{-1}(u \cdot v) \iff f(x \diamond y) = u \cdot v$$
ma essendo f innanzitutto un omomorfismo si ha che
$$f(x \diamond y) = f(x) \cdot f(y) = u \cdot v$$
come volevasi dimostrare.
La biettività, essendo la funzione inversa di una biettiva, è garantita.

Nocciolo ed omomorfismi iniettivi Si noti che l'antiimmagine del sottogruppo banale costituito solo dall'elemento neutro $\{1\}$ di B è necessariamente un sottogruppo di A; si dice nocciolo di f e si indica come
$$\text{Ker}(f) = f^{\leftarrow}(\{1\}) = \{x \in A : f(x) = 1\} \tag{4.8}$$
L'omomorfismo $f : A \to B$ è iniettivo se e solo se $\text{Ker}(f)$ è il sottogruppo banale di A, ovvero il sottogruppo $\{\iota\}$. In altre parole se solamente ι è controimmagine di 1 attraverso f.
Infatti se $x, y \in A$ si ha che $f(x) = f(y)$ se e solo se $f(x) \cdot (f(y))^{-1} = 1$

(in B si è post-moltiplicato la precedente per $(f(y))^{-1}$); ma considerato che $(f(y))^{-1} = f(y^{-\diamond})$ si ha che

$$f(x) \cdot (f(y))^{-1} = f(x) \cdot f(y^{-\diamond}) = f(x \diamond y^{-\diamond})$$

in altre parole $f(x) = f(y)$ se e solo se $f(x \diamond y^{-\diamond}) = 1$ ossia $x \diamond y^{-\diamond} \in \mathrm{Ker}(f)$; se $\mathrm{Ker}(f)$ è banale (un solo elemento), allora $x \diamond y^{-\diamond} \in \mathrm{Ker}(f)$ equivale (poiché f trasforma ι in 1) a $x \diamond y^{-\diamond} = \iota$ e cioè $x = y$. Ovvero se $\mathrm{Ker}(f)$ è banale $f(x) = f(y) \iff x = y$ (iniettività).

Esempi

- la funzione cis : $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $\mathrm{cis}(\varrho) = \cos(\varrho) + i \sin(\varrho)$ è un omomorfismo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ sul gruppo $(\mathbb{U}, \cdot)$ con $\mathbb{U}$ insieme dei complessi modulo 1; esso è suriettivo ma non iniettivo, avendo come nucleo il sottogruppo $\mathrm{Ker}(\mathrm{cis}) = 2\pi\mathbb{Z}$ (ossia l'insieme degli angoli che generano $(1, 0)$, neutro della moltiplicazione in $\mathbb{U}$ e $\mathbb{C}$);

- la restrizione a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ della funzione $z \to |z|$, modulo del numero complesso z è omomorfismo del gruppo $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sul gruppo $(\mathbb{R}^{>}, \cdot)$ (ciò traduce il modulo di un prodotto è il prodotto dei moduli). Il nucleo è il sottogruppo $\mathbb{U}$ dei complessi di modulo 1.

4.2.2 Strutture algebriche con due operazioni

Lo studio delle strutture algebriche con due operazioni permette di mettere in luce le relazioni intercorrenti fra le due operazioni e fra le loro proprietà.
Nel seguito con una scrittura del tipo:

$$(X, \perp, \top) \tag{4.9}$$

identificherà una struttura con due operazioni $\perp, \top$ definite su un dominio X.

4.2.2.1 Proprietà distributiva

La proprietà distributiva non riguarda una singola operazione, ma è una proprietà che una operazione può avere rispetto ad un'altra.
Sia X un insieme e $\#, \oplus$ due operazioni definite su X; si dice che:

- $\#$ è **distributiva a destra** rispetto a $\oplus$ se comunque si scelgano $a, b, c \in X$ risulta:
$$a\#(b \oplus c) = (a\#b) \oplus (a\#c) \tag{4.10}$$

- $\#$ è **distributiva a sinistra** rispetto a $\oplus$ se comunque si scelgano $a, b, c \in X$ risulta:
$$(b \oplus c)\#a = (b\#a) \oplus (c\#a) \tag{4.11}$$

- è **distributiva** se distributiva sia a destra che a sinistra

Ovviamente, se l'operazione $\#$ è commutativa, le prime due eguaglianza coincidono e quindi non ha senso distinguere tra distributività destra e sinistra.

Ad esempio negli insiemi numerici principali la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

mentre l'addizione non è distributiva rispetto alla moltiplicazione (lo si può verificare con un controesempio)

$$x + (y \cdot z) \neq (x + y) \cdot (x + z)$$

4.2.2.2 Anelli

Una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ composta da un insieme e due operazioni (che chiamiamo addizione e moltiplicazione solo per comodità) si dice **anello** se:

- $(A, +)$ è un gruppo commutativo (ossia $+$ è associativa e commutativa, esiste l'elemento neutro $\forall a \in A$; $a \in A$ è sempre simmetrizzabile)
- $(A, \cdot)$ è semigruppo (ossia la seconda operazione $\cdot$ è associativa) con elemento neutro 1, diverso dall'elemento neutro 0 dell'addizione
- la seconda operazione è distributiva (sia a destra che sinistra) rispetto alla prima, ovvero $\forall a, b, c \in A$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Un anello in cui anche la seconda operazione è commutativa che si chiama **anello commutativo**.

4.3 TODO

`de marco, da pag 139 a 146`

Capitolo 5

Relazioni

5.1 Introduzione

5.1.1 Definizioni

Definizione 5.1.1 (Predicato)**.** E' un'espressione, in cui compaiono una o più variabili, la cui verità dipende dai valori assunti da queste.

Esempio 5.1.1.

$$p(x) : x \text{ è un numero primo, } x \in \mathbb{N}$$

Definizione 5.1.2 (Relazione (binaria))**.** Dati due insiemi A e B non vuoti, si dice relazione (binaria) $\mathscr{R}$ il sottoinsieme del prodotto cartesiano costituito dalle coppie che soddisfano un predicato a due variabili assegnato:

$$\mathscr{R} = \{(a; b) : a \in A, b \in B, r(a; b) \text{ è vero}\} \tag{5.1}$$

Osservazione 41. Se $a \in A, b \in B$, si dice che:

- a è in relazione $\mathscr{R}$ con b (scritto $a\mathscr{R}b$) se il predicato $r(a; b)$ è vero;
- a non è in relazione $\mathscr{R}$ con b (scritto $a\not\mathscr{R}b$), se $r(a; b)$ è falso.

Definizione 5.1.3 (Dominio)**.** Data una relazione $\mathscr{R}$ tra gli insiemi A e B si dice *dominio* e si indica con D, il sottoinsieme $D \subseteq A$ di elementi ai quali tramite la relazione è associato qualche elemento in B

Definizione 5.1.4 (Codominio)**.** Data una relazione $\mathscr{R}$ tra gli insiemi A e B si dice *codominio* e si indica con C, il sottoinsieme $C \subseteq B$ di elementi ai quali tramite la relazione è associato qualche elemento di A.[1]

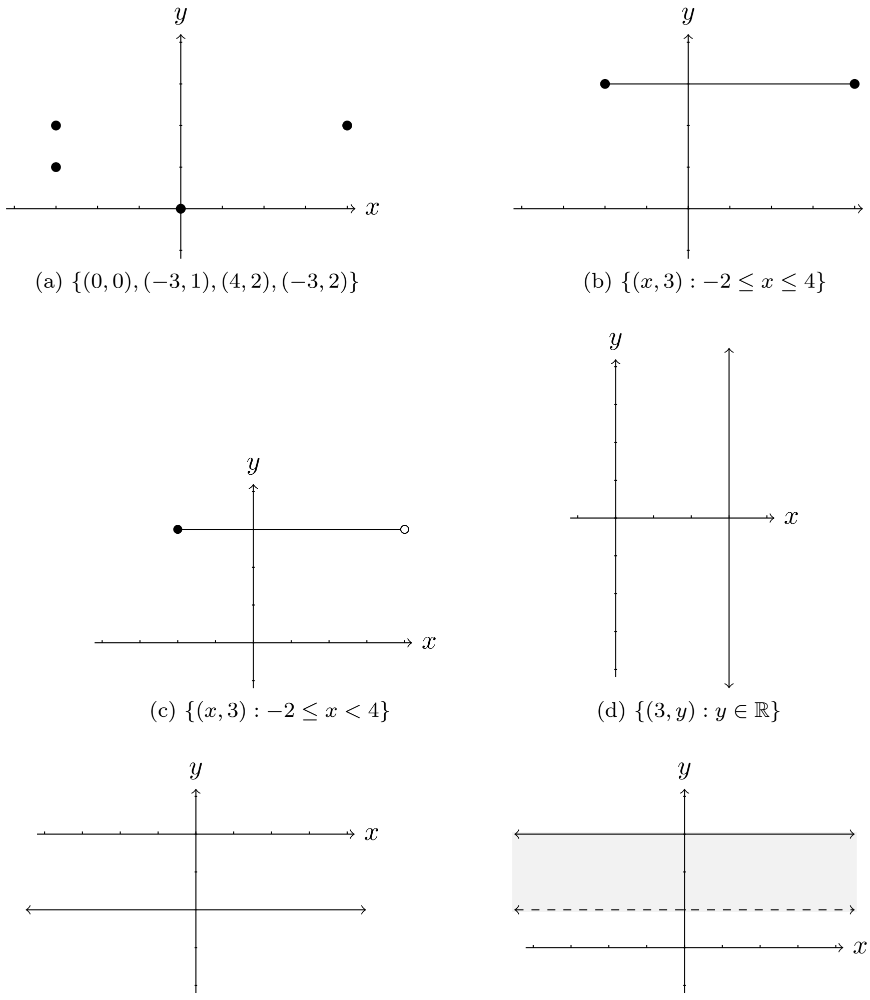
5.1.2 Rappresentazione

Una relazione può esser rappresentata in maniera:

- *formale*: enunciazione della relazione mediante qualche formalismo;

$$\mathscr{R}_1 = \{(x, y) : x \in [0, 2], y \in [1, 3]\}$$

[1]Altri può essere che questo lo chiamino immagine, similmente a quanto avviene per le funzioni ...



(a) $\{(0,0),(-3,1),(4,2),(-3,2)\}$

(b) $\{(x,3) : -2 \leq x \leq 4\}$

(c) $\{(x,3) : -2 \leq x < 4\}$

(d) $\{(3,y) : y \in \mathbb{R}\}$

(e) $\{(x,y) : y = -2\}$

(f) $\{(x,y) : 1 < x \leq 3\}$

Figura 5.1: Plotting di relazioni

- *estensiva*: specificazione dell'insieme che soddisfa la relazione formale

$$B = \{(0,0),(-3,1),(4,2)\}$$

- *tabulare*: in una tabella a doppia entrata (che rappresenta il prodotto cartesiano) si appone una una $\mathscr{R}$ nelle cellette che rispettano il predicato prefissato;

- *diagramma di Venn*: le frecce che partono dagli elementi del primo insieme, collegandoli ai corrispondenti del secondo;

- *diagramma cartesiano*: rappresentazione sugli assi cartesiani delle coppie che soddisfano la relazione (esempi in figura 5.1).

5.2 Relazione su un insieme

Definizione 5.2.1 (Relazione su un insieme)**.** Relazione tra un insieme X e se stesso: è sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X = X^2$:

$$\mathscr{R} \subseteq X^2$$

Esempio 5.2.1. La relazione di uguaglianza fra elementi di X ha come grafico la diagonale

$$\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\} \tag{5.2}$$

Esempio 5.2.2. La relazione $x \leq y$ in $\mathbb{R}$ ha come grafico l'insieme $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\}$, che nel piano cartesiano è il semipiano chiuso dei punti che stanno sulla o al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante.

5.2.1 Proprietà

Osservazione 42. Una relazione binaria $\mathscr{R}$ definita su un insieme X può godere di diverse proprietà

Definizione 5.2.2 (Riflessiva)**.** Qualunque elemento $x \in X$ sta in relazione con se stesso:

$$\forall x \in X, \quad x\mathscr{R}x \tag{5.3}$$

Osservazione 43. ossia, in altre parole, se la diagonale appartiene alla relazione.

$$\Delta(X) \subseteq \mathscr{R}$$

Definizione 5.2.3 (Antiriflessiva)**.** Nessun elemento $x \in X$ è in relazione con se stesso:

$$\forall x \in X, \quad x\not\mathscr{R}x \tag{5.4}$$

Osservazione 44. ossia, in altre parole, se:

$$\mathscr{R} \cap \Delta(X) = \emptyset$$

Definizione 5.2.4 (Simmetrica)**.** Se tutte le volte che un elemento $x \in X$ è il relazione con un elemento $y \in X$, allora anche y è in relazione con x:

$$x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x \tag{5.5}$$

Definizione 5.2.5 (Relazione inversa)**.** Data una relazione $\mathscr{R}$ definita come

$$\mathscr{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathscr{R}\}$$

Osservazione 45. ovvero la relazione che deriva dallo scambiare le componenti delle coppie ordinate di $\mathscr{R}$

Osservazione 46. Una relazione si dice simmetrica se coincide con la propria inversa, $\mathscr{R} = \mathscr{R}^{-1}$. Nella rappresentazione tabellare la relazione è simmetrica rispetto alla diagonale principale $\Delta(X)$.

Definizione 5.2.6 (Antisimmetrica)**.** tutte le volte che un elemento $x \in X$ è in relazione con un diverso elemento $y \in X$, allora y non è in relazione con x:

$$x \mathscr{R} y \wedge x \neq y \implies y \not\mathscr{R} x \tag{5.6}$$

o equivalentemente:

$$x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} x \implies x = y \tag{5.7}$$

Osservazione 47. In altri termini:

$$\mathscr{R} \cap \mathscr{R}^{-1} \subseteq \Delta(X)$$

Esempio 5.2.3. Sia $x \leq y$ che $x < y$ sono antisimmetriche; l'unica relazione riflessiva che sia simmetrica ed antisimmetrica è l'identità.

Definizione 5.2.7 (Transitiva)**.** Se tutte le volte che un elemento x è in relazione con un elemento y e contemporaneamente y è in relazione con z allora x è in relazione con z:

$$x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} z \implies x \mathscr{R} z \tag{5.8}$$

5.2.2 Relazioni d'equivalenza, classi d'equivalenza, partizioni

Definizione 5.2.8 (Relazione d'equivalenza)**.** Una relazione $\mathscr{R}$ definita su un insieme X al contempo *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Definizione 5.2.9 (Elementi equivalenti)**.** Due elementi in relazione tra loro in una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ si dicono equivalenti (rispetto a $\mathscr{R}$).

Esempio 5.2.4. Nell'insieme S degli alunni di una data scuola, la relazione "essere nella stessa classe di" è una relazione di equivalenza, infatti: ciascuno è nella stessa classe di se stesso (riflessiva); se x è nella classe di y, ovviamente y è nella classe di x (simmetrica); se x è nella classe di y ed y nella stessa di z, allora x è nella stessa classe di z (transitiva).

Definizione 5.2.10 (Classe di equivalenza di un elemento)**.** Data una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ definita su un insieme X, si chiama classe di equivalenza di un elemento $x \in X$ il sottoinsieme di X composto dagli elementi di X equivalenti ad x rispetto a $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}(x) = \{\xi \in X : \xi \mathscr{R} x\} \tag{5.9}$$

Esempio 5.2.5. La classe di equivalenza di Mario Rossi nella relazione "x è nella stessa classe di y" è composto dall'insieme di studenti che compongono la classe dove è Mario Rossi.

Osservazione 48. Si noti che $x \in \mathscr{R}(x)$, essendo $\mathscr{R}$ riflessiva.

Osservazione 49. Ogni elemento di $\mathscr{R}(x)$ ha ancora tutto $\mathscr{R}(x)$ come sua classe di equivalenti e anzi

$$\mathscr{R}(x_1) = \mathscr{R}(x_2) \iff x_1 \text{ e } x_2 \text{ sono } \mathscr{R}\text{-equivalenti}$$

Osservazione 50. Se $\mathscr{R}$ è relazione d'equivalenza su un insieme X, due classi di equivalenza coincidono oppure non hanno elementi in comune

Definizione 5.2.11 (Partizione secondo $\mathscr{R}$)**.** Le classi d'equivalenza

$$\mathscr{R}(x_1), \mathscr{R}(x_2), \ldots, \mathscr{R}(x_n) \tag{5.10}$$

(ipotizzando che x_1, x_2 ed x_n appartengano effettivamente a diverse classi di equivalenza) formate attraverso una relazione $\mathscr{R}$ costituiscono una partizione dell'insieme X, detto *insieme quoziente* di X rispetto a $\mathscr{R}$, che si indica come

$$X/\mathscr{R} = \{\mathscr{R}(x_1); \mathscr{R}(x_2); \ldots; \mathscr{R}(x_2)\} \tag{5.11}$$

Definizione 5.2.12 (Partizione di un insieme)**.** Insieme di sottoinsiemi dell'insieme X dato, a due a due disgiunti e che hanno X stesso come unione

Esempio 5.2.6. Ipotizziamo di aver costruito la classe di equivalenza $C_1 = \mathscr{R}(\text{Mario Rossi})$ con $\mathscr{R}$ relazione di appartenenza alla medesima classe.
Ora se prendiamo un altro elemento $x_2 \in S$ ma che non appartiene alla classe di equivalenza $x_2 \notin \mathscr{R}(\text{Mario Rossi})$ e per questo costruiamo una classe di equivalenza otteniamo un insieme disgiunto (ad esempio se $x_2 = \text{Fulvio Bianchi}$, $C_2 = \mathscr{R}(\text{Fulvio Bianchi})$ gli alunni della classe di Fulvio Bianchi).
Procedendo analogamente/ricorsivamente per gli elementi rimanenti di S, al termine avremo ottenuto una partizione di S composta dagli insiemi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ che corrisponde all'insieme delle classi della scuola considerata.

Osservazione 51. Ogni relazione di equivalenza individua il suo insieme quoziente, e viceversa, assegnata una partizione di X è possibile definire una relazione di equivalenza corrispondente

Osservazione 52. Data la partizione $X/\mathscr{R}$ la relazione originaria $\mathscr{R}$ può essere ricostruita come segue:

$$\mathscr{R} = \bigcup_{A \in X/\mathscr{R}} A \times A$$

ossia per ciascuna classe di equivalenza creo gli elementi della relazione mediante prodotto cartesiano entro classe e poi unisco gli elementi ottenuti per tutte le classi.

5.2.3 Relazioni d'ordine

Definizione 5.2.13 (Relazione d'ordine)**.** Una relazione $\mathscr{R}$ definita su insieme X si dice d'ordine se al contempo è *antisimmetrica* e *transitiva*.

Osservazione 53. Se $a\mathscr{R}b$ con $a, b \in X$ e $\mathscr{R}$ una relazione d'ordine si dice che a precede b o che b segue a (rispetto a $\mathscr{R}$).

Definizione 5.2.14 (Relazione d'ordine largo)**.** Relazione d'ordine riflessiva.

Esempio 5.2.7. Sono relazioni d'ordine largo le relazioni $\leq$ e $\geq$ in $\mathbb{N}$, relazioni inverse l'una dell'altra.

Definizione 5.2.15 (Relazione d'ordine stretto)**.** Relazione d'ordine antiriflessiva.

Esempio 5.2.8. La relazione $<$ nell'insieme $\mathbb{N}$ è una relazione di ordine stretto poiché non è vero che $n < n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 54. In generale, togliendo $\Delta(X)$ ad un ordine largo si ottiene un ordine stretto.

Osservazione 55. In generale se $\mathscr{R}_1 \subseteq X \times X$ è antisimmetrica e transitiva, $T \cup \Delta(X)$ è un ordine largo, $T \cap \Delta(X)$ un ordine stretto.

Definizione 5.2.16 (Elementi confrontabili)**.** Due elementi distinti $a, b \in X$ sono *confrontabili* (rispetto a $\mathscr{R}$) se a precede b oppure a segue b:

$$a\mathscr{R}b \vee b\mathscr{R}a$$

Definizione 5.2.17 (Relazione d'ordine totale)**.** $\mathscr{R}$ è una relazione d'ordine totale se comunque si scelgano due elementi distinti di X, essi sono sempre confrontabili.

Osservazione 56. In altre parole se:

$$\mathscr{R} \cup \mathscr{R}^{-1} = X \times X$$

Osservazione 57. Si dice anche che X è *totalmente ordinato* dalla relazione $\mathscr{R}$.

Esempio 5.2.9. Un esempio è la relazione $<$ nell'insieme $\mathbb{R}$

Definizione 5.2.18 (Relazione d'ordine parziale)**.** $\mathscr{R}$ è una relazione d'ordine totale *parziale* se vi è almeno una coppia di elementi distinti di X che non sono confrontabili rispetto ad $\mathscr{R}$.

Osservazione 58. In altre parole se

$$\mathscr{R} \cup \mathscr{R}^{-1} \subset X \times X$$

Osservazione 59. Si dice anche che X è *parzialmente ordinato* dalla relazione $\mathscr{R}$.

Esempio 5.2.10. Si consideri un generico insieme $X = \{1; 2; 3\}$ e il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$. Nell'insieme delle parti la relazione di inclusione $\subseteq$ è una relazione d'ordine parziale; infatti ad esempio gli insiemi $\{1; 2\}$ e $\{1; 3\}$ che fanno parte di $\mathcal{P}(X)$ non sono confrontabili rispetto ad essa.

5.3 Composizione di relazioni

Definizione 5.3.1 (Relazione (binaria) composta)**.** Se $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \subseteq X \times X$ sono relazioni binarie sull'insieme X, si può costruire la relazione binaria composta

$$\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 = \{(x, z) \in X \times X : \text{ esiste } y \text{ tale che sia } (x, y) \in \mathscr{R}_1 \text{ ed } (y, z) \in \mathscr{R}_2\}$$

ottenuta applicando nell'ordine la relazione $\mathscr{R}_1$ e la relazione $\mathscr{R}_2$

Osservazione 60. Si tratta di fatto di un *merge* su y

Osservazione 61. Se le relazioni fossero grafici di funzioni di X in X (ciò avviene solo se per ogni $x \in X$ c'è un unico y in X che sia relato ad x) allora $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$ coincide con il grafico della funzione composta.

Osservazione 62. Le relazioni transitive sono esattamente quelle relazioni $\mathscr{R}$ tali che $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}$.

Capitolo 6

Funzioni

6.1 Introduzione

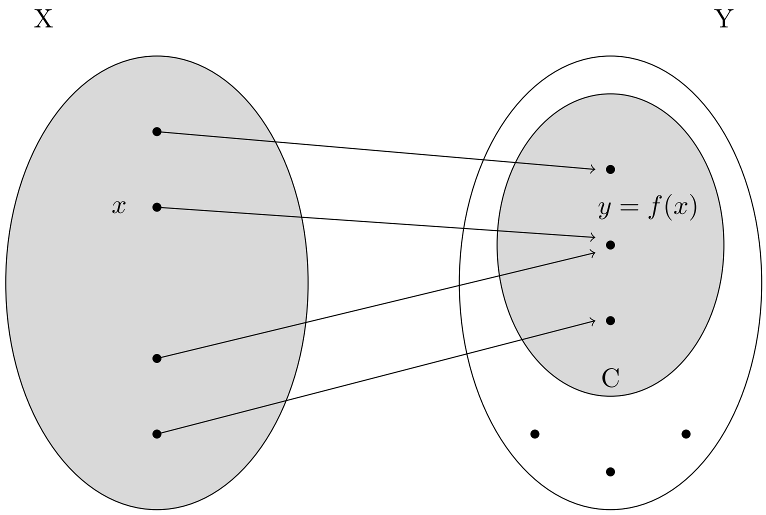


Figura 6.1: Funzioni

6.1.1 Definizioni introduttive

Definizione 6.1.1 (Funzione)**.** Dati due insiemi non vuoti X e Y, detti rispettivamente *dominio* e *codominio*, si dice funzione da X a Y una *relazione univoca* (non necessariamente biunivoca) tra i due insiemi che ad *ogni* $x \in X$ associa *uno e un solo* $y \in Y$.

Osservazione 63. Rappresentando una funzione con un diagramma di Venn (figura 6.1) si osserva che da ogni $x \in X$ parte una e una sola freccia, mentre nei punti che rappresentano gli elementi di Y possono giungere nessuna, una o più frecce.

Osservazione 64 (Notazione per funzioni numeriche). Per funzioni definite su X, Y insiemi numerici, ed esprimibili mediante equazione, la notazione consueta è:

$$\begin{cases} f : X \to Y \\ y = f(x) \end{cases}$$

Osservazione 65. Funzioni di particolare interesse sono le funzioni reali di variabile reale, caratterizzate dal fatto che dominio e codominio sono sottoinsiemi dei reali ($X, Y \subseteq \mathbb{R}$).

Osservazione 66. Definire una funzione significa assegnare un dominio X, un codominio Y ed una regola che ad ogni x del dominio associ un unico y del codominio; pertanto si arriva alla seguente definizione.

Definizione 6.1.2 (Funzioni uguali)**.** Due funzioni f e g sono uguali se e solo se hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio e $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

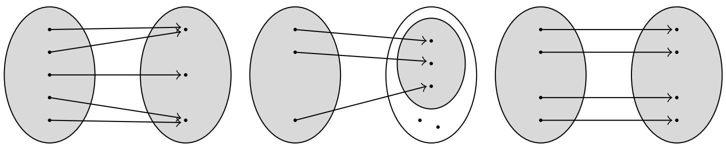
Osservazione 67. Non basta l'ultima condizione, serve anche la coincidenza di domini e codomini.

6.1.2 Grafico

Definizione 6.1.3 (Grafico di funzione)**.** Data una funzione $f : X \to Y$ si dice grafico il sottoinsieme G del prodotto cartesiano $X \times Y$ dato da

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\} \tag{6.1}$$

Osservazione 68. Pertanto il grafico è l'insieme delle coppie che soddisfano la funzione. Se X, Y sono insiemi numerici, il grafico può essere rappresentato sul piano cartesiano.



(a) Suriettiva (b) Iniettiva (c) Biettiva

6.1.3 Immagine e suriettività

Definizione 6.1.4 (Immagine di un sottoinsieme S del dominio tramite f, $f(S)$)**.** Se $f : X \to Y$ è una funzione ed $S \subseteq X$ è un sottoinsieme del dominio, si indica con $f(S)$ l'insieme degli elementi $y \in Y$ che sono immagini, secondo f, di qualche elemento $x \in S$:

$$f(S) = \{f(x) \in Y : x \in S\}$$

Definizione 6.1.5 (Immagine di f)**.** Se consideriamo tutto il dominio ($S = X$), $f(X)$ è detto immagine di f.

Osservazione 69. Si ha sempre che $f(X) \subseteq Y$, ovvero l'immagine è sempre contenuta nel codominio.

Osservazione 70. Attenzione che in numerosi testi è chiamato codominio quello che qui si definisce come immagine di f.

Definizione 6.1.6 (Funzione suriettiva)**.** Una funzione $f : X \to Y$ si dice *suriettiva* se $f(X) = Y$ (l'immagine della funzione coincide con il codominio), ovvero se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

Proposizione 6.1.1 (Immagine di unione/intersezione di due sottoinsiemi del dominio)**.** *Se $f : X \to Y$ è una funzione ed A, B sono sottoinsiemi di X si ha che*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

Dimostrazione. Banale, si pensi a qualche esempio. □

Proposizione 6.1.2 (Immagine di unione/intersezione di più sottoinsiemi del dominio)**.** *Più in generale, se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è famiglia di sottoinsiemi di X allora:*

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$
$$f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

Dimostrazione. Mera generalizzazione della precedente. □

6.1.4 Controimmagine

Definizione 6.1.7 (Controimmagine di un sottoinsieme del codominio)**.** Se $f : X \to Y$ è una funzione e $T \subseteq Y$ è un sottoinsieme del codominio, si chiama controimmagine $f^{\leftarrow}(T)$ di T mediante f l'insieme degli $x \in X$ la cui immagine appartiene a T:

$$f^{\leftarrow}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$$

Osservazione 71. Chiaramente è sempre $f^{\leftarrow}(Y) = X$ e $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$

Osservazione 72. $f : X \to Y$ è suriettiva solo se $\forall T \subseteq Y, T \neq \emptyset$ si ha $f^{\leftarrow}(T) \neq \emptyset$.

Osservazione 73. Espressioni alternative di controimmagine sono immagine inversa o antiimmagine

Definizione 6.1.8 (Fibra di un elemento del codominio)**.** Dato un $y \in Y$, l'insieme $f^{\leftarrow}(\{y\})$ (o più impropriamente $f^{\leftarrow}(y)$) si chiama fibra di f su y.

Proposizione 6.1.3 (Controimmagine di unione/intersezione di due sottoinsiemi del codominio)**.** *Se $f : X \to Y$ è una funzione e $T_1, T_2 \subseteq Y$:*

$$f^{\leftarrow}(T_1 \cup T_2) = f^{\leftarrow}(T_1) \cup f^{\leftarrow}(T_2)$$
$$f^{\leftarrow}(T_1 \cap T_2) = f^{\leftarrow}(T_1) \cap f^{\leftarrow}(T_2)$$

Dimostrazione. Idem, pensare ad alcuni esempi. □

Osservazione 74. A differenza dell'immagine, la controimmagine conserva sia unioni che intersezioni: in altre parole l'antiimmagine di una unione è l'unione delle antiimmagini, e l'antiimmagine di una intersezione è l'intersezione delle antiimmagini.

Proposizione 6.1.4 (Controimmagine di unione/intersezione di più sottoinsiemi del dominio)**.** *Se* $f : X \to Y$ *è una funzione e* $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *è una famiglia di sottoinsiemi di* Y *si ha:*

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{\leftarrow}(B_\lambda)$$
$$f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{\leftarrow}(B_\lambda)$$

6.1.5 Iniettività

Definizione 6.1.9 (Funzione iniettiva)**.** Una funzione $f : X \to Y$ tale che:

$$\forall x_i, x_j \in X : \; x_i \neq x_j \iff f(x_i) \neq f(x_j)$$

Osservazione 75. Ossia una funzione è iniettiva se ad elementi differenti del dominio corrispondono elementi differenti del codominio.

Osservazione 76. In una funzione iniettiva, l'insieme fibra $f^{\leftarrow}(y)$ di ogni $y \in Y$ contiene al più un elemento (o è vuoto o è singolo).

Osservazione 77. Data una funzione $f : X \to Y$:

- per verificare che non è iniettiva basta esibire anche una sola coppia di elementi distinti $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ per cui sia $f(x_1) = f(x_2)$;
- per provare invece che è iniettiva occorre dimostrare che per *ogni* coppia di elementi distinti $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$; questo si può anche verificare dimostrando che $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$ per ogni $x_1, x_2 \in X$

6.1.6 Biettività e funzione inversa

Definizione 6.1.10 (Funzione biettiva)**.** Funzione sia iniettiva che suriettiva

Osservazione 78. Una funzione biettiva consiste in una relazione biunivoca tra dominio e codominio.

Definizione 6.1.11 (Funzione inversa)**.** Se $f : X \to Y$ è biettiva, si può definire la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ nel modo seguente: dato $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è quell'unico $x \in X$ tale che sia $y = f(x)$.

Osservazione 79. Se f non è biettiva la funzione inversa di f non può essere definita:

- se f non è suriettiva esiste almeno un $y \in Y$ per cui non ci sono elementi $x \in X$ tali che $y = f(x)$;
- se f non è iniettiva ci sono $y \in Y$ che sono immagini di due diversi $x \in X$;

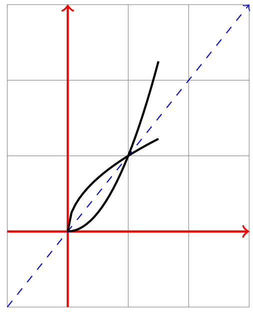


Figura 6.2: Il grafico di $f : x \to x^3$ e $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.

Come ottenere l'equazione della funzione inversa Partendo dall'equazione $y = f(x)$, ricavare (se possibile) l'equazione $x = g(y)$. Ad esempio, per ottenere l'inversa di:

$$y = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{x}}$$

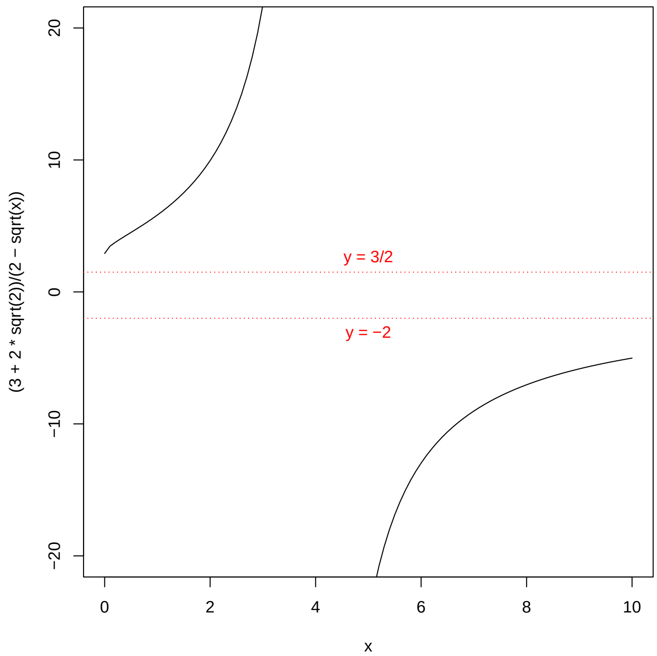
risolviamo l'equazione rispetto ad x; ricaviamo prima $\sqrt{x}$ vedendo l'equazione come equazione di primo gradi in $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
&(2 - \sqrt{x})y = 3 + 2\sqrt{x} \\
&\sqrt{x}(2 + y) = 2y - 3 \\
&\sqrt{x} = \frac{2y - 3}{2 + y}
\end{aligned}$$

Ora per ricavare x dobbiamo elevare ambo i membri al quadrato, il che però è lecito solo se il secondo membro è ≥ 0. Imponendo la condizione $\frac{2y-3}{2+y} \geq 0$ cioè $y < -2$ o $y \geq 3/2$ si ricava:

$$x = \left(\frac{2y - 3}{2 + y}\right)^2$$

L'inversa è definita in $(-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty)$. Se si disegna il grafico la funzione f si nota che i valori che non appartengono ad dominio dell'inversa non appartengono all'immagine della funzione, come è lecito aspettarsi.



Plot dell'inversa Dopo aver ricavato l'equazione $x = g(y)$, se si vuole disegnare la funzione inversa sullo stesso grafico della funzione originaria occorre invertire x con y (il grafico dell'inversa è ottenuto mediante una simmetria rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante).

6.1.7 Restrizioni ed estensioni di funzioni

Osservazione 80. Considerando una funzione $f : X \to Y$ possiamo definire altrettante funzioni *restringendo* dominio, codominio o entrambi della funzione di partenza[1].

Definizione 6.1.12 (Restrizione di f ad un sottoinsieme S del dominio)**.** Se $S \subseteq X$ la funzione $f_{|S} : S \to Y$ si ottiene ponendo $y = f(x)$ per ogni $x \in S$.

Osservazione 81. La regola rimane la stessa ma la funzione cambia perché cambia il dominio.

Osservazione 82. $f_{|S}$ si chiama anche *indotta* da f su S.

Definizione 6.1.13 (Restizione di f ad un sottoinsieme T del codominio)**.** Se $f(X) \subseteq T \subseteq Y$ la funzione ${}_{T|}f : X \to T$ si definisce ponendo $y = f(x)$ per ogni $x \in X$.

Osservazione 83. Anche qui la regola rimane la stessa ma la funzione cambia perché cambia il codominio.

Osservazione 84. Qui è importante l'ipotesi che il codominio della restrizione T includa tutta l'immagine originale della funzione $f(X)$.

[1]Specularmente, ogni funzione f può essere vista come un prolungamento/ estensione delle sue restrizioni.

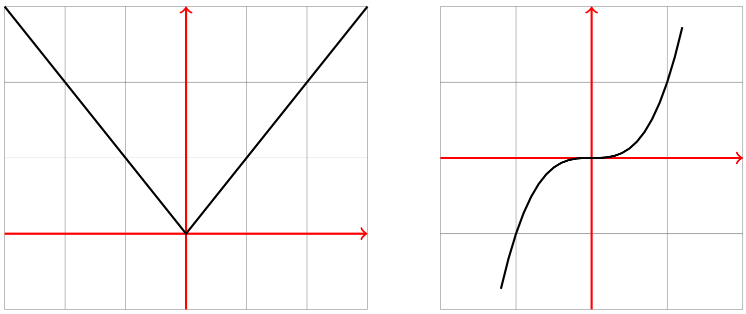
Definizione 6.1.14 (Restrizione di f su sottoinsiemi di dominio e codominio)**.** Se $S \subseteq X$ e $f(S) \subseteq T \subseteq Y$ si può definire una funzione ${}_{T|}f_{|S} : S \to T$ restringendo prima f a S, poi restringendo il codominio a T.

Osservazione 85. In questo caso diremo che f induce una funzione di S in T; con abuso di notazione si potrà indicare la funzione indotta con lo stesso simbolo della funzione data.

Osservazione 86. Naturalmente iniettività e suriettività (e biettività) variano a seconda di dominio e codominio, quindi possono essere perdute o acquisite passando da una funzione a sue funzioni indotte: ad esempio ogni funzione diventa suriettiva se ne si restringe il codominio all'immagine.

6.2 Peculiarità

6.2.1 Funzioni pari e dispari



(a) $y = |x|$ è pari.

(b) $y = x^3$ è dispari.

Definizione 6.2.1 (Funzione pari)**.** Funzione $f : X \to Y$ reale di variabile reale (ossia $X, Y \subseteq \mathbb{R}$) tale che $\forall x \in X$ si ha che $-x \in X$ ed è $f(x) = f(-x)$.

Osservazione 87. Le funzioni pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Esempio 6.2.1. Verifichiamo che $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è pari:

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 1 = x^4 + x^2 - 1 = f(x)$$

Definizione 6.2.2 (Funzione dispari)**.** Funzione $f : X \to Y$ reale di variabile reale tale che $\forall x \in X$, anche $-x \in X$ ed è $f(-x) = -f(x)$ (o equivalentemente $f(x) = -f(-x)$.

Osservazione 88. Le funzioni dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine $(0, 0)$.

Esempio 6.2.2. Verifichiamo che $f(x) = x^3 - x^5$ è dispari:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$$

Osservazione 89. Il nome pari o dispari deriva dal fatto che se f è una funzione esprimibile nella forma $y = P(x)$ dove $P(x)$ è un polinomio, si può facilmente verificare che f è pari (rispettivamente dispari) se e solo se il $P(x)$ figurano solo potenze di x di grado pari (rispettivamente dispari).

6.2.2 Funzioni crescenti, decrescenti, monotone

Definizione 6.2.3 (Funzione crescente (in senso lato) in intervallo)**.** Data $f : X \to Y$ funzione reale di variabile reale e un intervallo $I \subseteq X$, f è crescente (in senso lato) in I se:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione 6.2.4 (Funzione crescente in senso stretto in intervallo)**.** Data $f : X \to Y$ funzione reale di variabile reale e un intervallo $I \subseteq X$, f è crescente in senso stretto in I se:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Definizione 6.2.5 (Funzione decrescente (in senso lato) in intervallo)**.** Data $f : X \to Y$ funzione reale di variabile reale e un intervallo $I \subseteq X$, f è decrescente (in senso lato) in I se:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definizione 6.2.6 (Funzione decrescente in senso stretto in intervallo)**.** Data $f : X \to Y$ funzione reale di variabile reale e un intervallo $I \subseteq X$, f è decrescente in senso stretto in I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Osservazione 90. Se non si qualifica, a differenza di altri libri si intente in senso lato, quindi non si esclude che la funzione rimanga costante[2]

Osservazione 91. Quella che qui si chiama funzione crescente/decrescente in senso stretto, in altri testi è detta funzione *crescente/decrescente*; analogamente noi chiamiamo funzione crescente/decrescente (in senso lato) quella che in altri testi è detta *non decrescente/crescente*.

Definizione 6.2.7 (Funzione monotona in un intervallo (in senso lato/stretto))**.** Funzione che in tale intervallo è sempre crescente (funzione monotòna crescente) oppure sempre decrescente (funzione monotòna decrescente).

Definizione 6.2.8 (Funzione monotona (in senso lato/stretto))**.** Funzione crescente o decrescente su tutto il proprio dominio

Osservazione 92 (Intervalli di monotonia)*.* Se una funzione non è monotona nel suo dominio, è possibile nei casi più comuni effettuare una suddivisione del dominio in opportuni intervalli in ciascuno dei quali la funzione sia monotòna; tali intervalli vengono detti *intervalli di monotonia.*

Osservazione 93 (Determinazione della monotonia di funzione)*.* Si può in prima istanza evitare lo studio sistematico della funzione o il disegno del grafico ma limitarsi a ragionare sulla composizione di funzioni monotone di base (come si avrà modo di approfondire nella sezione sulla composizione di funzione)

[2] Ad esempio le funzioni costanti sono le uniche ad essere crescenti e decrescenti allo stesso tempo

6.2.3 Inverse di funzioni monotone

Proposizione 6.2.1. *Se una funzione $f : X \to Y$ è monotona in senso stretto è iniettiva.*

Dimostrazione. Banale □

Proposizione 6.2.2. *Se una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva e monotona, allora chiaramente è monotona in senso stretto.*

Dimostrazione. Banale □

Osservazione 94. Non vale però l'inverso: l'iniettività non implica la monotonia.

Esempio 6.2.3. La funzione $f(x) = 1/x$ è iniettiva, tuttavia non è monotona.

Proposizione 6.2.3. *Se $f : X \to Y$ è funzione biettiva e monotona, l'inversa f^{-1} è anch'essa monotona in senso stretto (crescente se f è crescente, decrescente se f è decrescente).*

Dimostrazione. La dimostrazione nel caso di f crescente: proviamo che anche f^{-1} è crescente in senso stretto. Dati $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 < y_2$, sia $x = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se fosse $x_1 \geq x_2$ la crescenza di f implicherebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$; ma per definizione di funzione inversa è $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$; si avrebbe quindi $y_1 \geq y_2$ contraddicendo $y_1 < y_2$.
Nel caso f sia decrescente la dimostrazione procede analogamente. □

Osservazione 95. Non vale l'inverso: una funzione può essere biettiva nel suo dominio senza essere monotòna.

Esempio 6.2.4. Una funzione definita a tratti con una prima parte crescente e una seconda decrescente

TODO: qui fare l'immagine dell'esempio del libro

6.2.4 Funzioni periodiche

Definizione 6.2.9 (Periodo di una funzione)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, Y insieme qualsiasi; un $\tau \in \mathbb{R}$ si dice *periodo* per la funzione $f : X \to Y$ se per ogni $x \in X$ si ha $x + \tau \in X$, $x - \tau \in X$ ed inoltre

$$f(x + \tau) = f(x) \tag{6.2}$$

Osservazione 96. Banalmente in base alla definizione data, ogni funzione ha zero come periodo.

Definizione 6.2.10 (Funzione periodica)**.** Funzione $f : X \to Y$ che ammette almeno un periodo non nullo

Osservazione 97. Come periodo si prende il $\tau > 0$ minore.

Osservazione 98. Se una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ ha un numero $\tau > 0$ come periodo, basta conoscere la restrizione della funzione ad un intervallo semiaperto di ampiezza τ per conoscere tutta la funzione: ogni valore di f coincide con un valore assunta da f in $X \cap [a, a + \tau[$.

6.2.4.1 Determinazione del periodo

Osservazione 99. In generale, $\forall \omega > 0$, se $f(x)$ ha periodo τ, allora $f(\omega x)$ ha periodo $\frac{\tau}{\omega}$

Osservazione 100. Supponendo di cercare il periodo della funzione $h(x)$ definita mediante una operazione algebrica su due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di cui si conosce il periodo, il periodo di $h(x)$ è il minimo comune multiplo tra i due periodi di $f(x)$ e $g(x)$ se esiste[3]. Se questo non esiste, la funzione *non è periodica.*

Esempio 6.2.5. Determinare il periodo in radianti della funzione $y = \sin 2x$. Sapendo che la funzione seno di un angolo è periodica di periodo 2π, cioè si ha

$$\sin(2x + k2\pi) = \sin 2x$$

che si può riscrivere come

$$\sin[2(x + k\pi)] = \sin 2x$$

Quest'ultima eguaglianza mostra che, sostituendo $x + k\pi$ ad x il valore della funzione non cambia; si ritrova la 6.2 e si conclude che il periodo è $\tau = \pi$.

Esempio 6.2.6. Determinare il periodo in radianti della funzione

$$y = \cos(3x + \alpha)$$

Si ha per definizione che

$$\cos(3x + \alpha + 2k\pi) = \cos(3x + \alpha)$$

ed elaborando come segue ...

$$\begin{aligned} \cos(3x + \alpha + 2k\pi) &= \cos(3x + \alpha) \\ \cos(3x + 2k\pi + \alpha) &= \cos(3x + \alpha) \\ \cos\left[3\left(x + k\frac{2}{3}\pi\right) + \alpha\right] &= \cos(3x + \alpha) \end{aligned}$$

per cui si conclude che $\tau = \frac{2}{3}\pi$.

Esempio 6.2.7. Per il periodo di:

$$\sin 4x - 5\cos 6x$$

$\sin 4x$ ha periodo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, mentre $-5\cos 6x$ ha periodo $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; il minimo comune multiplo tra i due è π.

Esempio 6.2.8. Per il periodo di:

$$\sin(2x) \cdot \cos(\pi x)$$

$\sin 2x$ ha periodo π mentre $\cos \pi x$ ha periodo 2; il multiplo tra i due non esiste in quanto π è irrazionale, quindi la funzione non è periodica.

[3]Ad esempio non esiste l'mcm tra un intero e un numero reale

6.2.4.2 Prolungamento per periodicità

Osservazione 101. Applicando la periodicità è possibile *prolungare* una funzione definita su un $X \subset \mathbb{R}$ a tutto $\mathbb{R}$; intuitivamente la si riproduce "copiando e incollandola" a destra/sinistra del dominio nella quale è definita. Formalmente ...

Definizione 6.2.11 (Prolungamento per periodicità)**.** Sia $\tau > 0$, $a \in \mathbb{R}$, Y insieme qualsiasi e $g : [a, a + \tau[\to Y$ una funzione; esiste un unica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che prolunga g (cioè tale che $f_{|[a,a+\tau[} = g$) e che abbia τ fra i suoi periodi; essa è data dalla formula:

$$f(x) = g\left(x - \left\lfloor \frac{x-a}{\tau} \right\rfloor \tau\right), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

Osservazione 102. Si è fatto uso della funzione $\lfloor \cdot \rfloor$ parte intera.

6.3 Composizione di funzioni

6.3.1 Definizione

Definizione 6.3.1 (Funzione composta)**.** Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni (dette *componenti*). La funzione composta $g \circ f : X \to Z$ si definisce ponendo:

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X$$

ovvero applicando f e g nell'ordine.

Osservazione 103. Nella definizione si è richiesto che il codominio di f coincida col dominio di g (Y): tuttavia la regola $g \circ f = g(f(x))$ conserva significato anche se solamente l'immagine di f è contenuta nel dominio di g (ossia se $f(X) \subseteq Y$). Parleremo di $g \circ f$ anche in questo caso, commettendo un abuso di linguaggio.

6.3.2 Proprietà

Alcune proprietà della composizione di funzioni.

Proposizione 6.3.1. *Date funzioni $f, g : X \to X$ non vale necessariamente la proprietà commutativa per cui generalmente si ha:*

$$g \circ f \neq f \circ g \tag{6.4}$$

Esempio 6.3.1. Se $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ allora

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x+1)^2$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$$

Definizione 6.3.2 (Funzioni permutabili)**.** Se accade che $g \circ f = f \circ g$, f e g si dicono *permutabili.*

Proposizione 6.3.2. *Vale la proprietà associativa per cui date $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ vale la seguente uguaglianza:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f \tag{6.5}$$

6.3.3 Composizione di suriezioni, iniezioni e biezioni

Proposizione 6.3.3. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni che componiamo in $g \circ f$: per ogni $S \subseteq X$ si ha $g \circ f(S) = g(f(S))$*

Dimostrazione. Banale □

Proposizione 6.3.4. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni che componiamo in $g \circ f$: per ogni $T \subseteq Z$ si ha $(g \circ f)^{\leftarrow}(T) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(T))$*

Dimostrazione. Banale □

Osservazione 104. Vediamo alcuni risultati derivanti.

Corollario 6.3.5. *Se f, g sono entrambi suriettive, anche $g \circ f$ è suriettiva*

Dimostrazione. Se f è suriettiva si ha $f(X) = Y$ e se lo è anche g si ha $g(Y) = Z$, quindi $g(f(X)) = Z$ □

Corollario 6.3.6. *Se f, g sono entrambi iniettive, anche $g \circ f$ è iniettiva*

Dimostrazione. Considerando $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, ed f iniettiva si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$; se anche g è iniettiva $f(x_1) \neq f(x_2)$ implica che anche $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ □

Corollario 6.3.7. *Se f, g sono entrambi biettive, anche $g \circ f$ è biettiva*

Dimostrazione. Questa è semplicemente il combinato disposto delle precedenti due. □

Corollario 6.3.8. *L'inversa della composizione è la composizione delle inverse in ordine invertito:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dimostrazione. Quest'ultima è conseguenza di $(g \circ f)^{\leftarrow}(T) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(T))$.[4] □

Proposizione 6.3.9. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni e $g \circ f : X \to Z$ è iniettiva, allora f è di certo iniettiva*

Dimostrazione. Dato che $f \circ g$ è iniettiva, se $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ allora $x_1 = x_2$; ma se ora per ipotesi fosse $f(x_1) \neq f(x_2)$ allora sarebbe $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (contrario all'ipotesi dalla quale siamo partiti) per cui deve essere $f(x_1) \neq f(x_2)$ e dunque f è iniettiva. □

Proposizione 6.3.10. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni e $g \circ f : X \to Z$ è suriettiva, allora g è di certo suriettiva*

Dimostrazione. Se $g \circ f$ è suriettiva, si ha $g(f(X)) = Z$ e quindi basta l'immagine di f, ossia $f(X)$, mediante g a generare Z; a maggior ragione si avrà che $g(Y) = Z$ (e dunque la funzione è suriettiva) dato che $f(X) \subseteq Y$. □

[4] Può essere anche vista trovando la funzione inversa di $y = g \circ f = g(f(x))$ come segue:

$$\begin{aligned} y &= g(f(x)) \\ g^{-1}(y) &= f(x) \\ f^{-1}(g^{-1}(y)) &= x \end{aligned}$$

da cui appunto $x = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6.3.4 Composizione con l'inversa

Proposizione 6.3.11. *Sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva e sia $f^{-1} : Y \to X$ la sua inversa; allora si ha che*

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = 1_X = x$$
$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(y)) = 1_Y = y$$

Osservazione 105. In altre parole le composizioni di biiezioni con la propria inversa restituiscono le *funzione identità* di x o y (a seconda dell'ordine di composizione)

Definizione 6.3.3 (Inversa sinistra)**.** Data una funzione $f : X \to Y$ si dice *inversa sinistra* di f ogni funzione $v : Y \to X$ tale che sia $v \circ f = 1_X$;

Definizione 6.3.4 (Inversa destra)**.** Data una funzione $f : X \to Y$ si dice *inversa destra* ogni funzione $u : Y \to X$ tale che sia $f \circ u = 1_Y$.

Proposizione 6.3.12. *Se X è un insieme non vuoto, la funzione $f : X \to Y$ ha almeno una inversa sinistra se e solo se è iniettiva.*

Dimostrazione. Se f ha una inversa sinistra, $v \circ f = 1_X$ ed essendo la funzione composta 1_X iniettiva allora f è di certo iniettiva (proposizione 6.3.9).
Se viceversa $f : X \to Y$ è iniettiva è facile definire una inversa sinistra v di f: per ogni $y \in f(X)$ esiste un unico $x \in X$ tal che sia $y = f(x)$; si pone $v(y) = x$ per tali y. Per gli altri $y \in Y \setminus f(X)$ si definisce $v(y)$ scegliendo ad arbitrio un elemento di X, ad esempio sempre lo stesso $a \in X$. □

Osservazione 106. Di inverse sinistre dunque ne esistono certamente più di una, escluso il caso in cui f sia biettiva (se biettiva l'inversa sinistra è una ed è l'inversa stessa) o il caso in cui X abbia un solo elemento (in tal caso infatti c'è un unica funzione da Y a X);

Proposizione 6.3.13. *La funzione $f : X \to Y$ ha una inversa destra se e solo se è suriettiva.*

Dimostrazione. Se esiste una inversa destra $u : Y \to X$ tale che sia $f \circ u = 1_Y$, allora essendo la funzione composta 1_Y suriettiva è suriettiva anche f (proposizione 6.3.10).
Viceversa se f è suriettiva, per ogni $y \in Y$ l'insieme $f^{\leftarrow}(y)$ (la fibra di f sopra y) non è vuoto; definiamo $u(y)$ scegliendo un elemento $x \in f^{\leftarrow}(y)$ ottenendo in tal modo una inversa destra di f. □

Osservazione 107. Nonostante l'evidenza che accompagna la dimostrazione appena fatta, in essa abbiamo fatto uso di un assioma (oggi accettato dalla maggior parte dei matematici) fra i più discussi della teoria degli insiemi, l'*assioma della scelta*; infatti per ogni $y \in Y$ abbiamo *scelto* un $x \in f^{\leftarrow}(y)$.
Se Y è finito la cosa non causa problemi; la cosa non è problematica anche se Y è infinito e abbiamo una regola che permetta di operare tale scelta (ad esempio prendiamo il maggiore). Ma se Y è infinito e non disponiamo di una regola, per definire una funzione doppiamo operare una scelta per ogni $y \in Y$; la cui possibilità di farlo è un assioma.

6.3.5 Composizione di funzioni monotone

Osservazione 108. Siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni reali di variabile reale: se f e g sono monotone, allora $g \circ f$ è monotona. Più precisamente ...

Proposizione 6.3.14. *Se g e f sono crescenti, è crescente anche $g \circ f$,*

Dimostrazione.

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$$

□

Proposizione 6.3.15. *se g e f sono entrambe decrescenti, $g \circ f$ è crescente*

Dimostrazione.

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$$

□

Proposizione 6.3.16. *Nei casi rimanenti $g \circ f$ è decrescente*

Dimostrazione. Ad esempio con g decrescente ed f crescente

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \implies g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$$

□

Proposizione 6.3.17. *Se poi sia f che g sono monotone in senso stretto, così è anche $g \circ f$.*

Osservazione 109. Questi principi possono essere utili per la determinazione della monotonia di una funzione evitando lo studio sistematico della funzione o il disegno del grafico.

Esempio 6.3.2. Se si studia la monotonia di:

$$2^{3x+x^3}$$

si può concludere che essa è crescente in tutto $\mathbb{R}$, poiché è la composizione di due funzioni crescenti in quel dominio.

Esempio 6.3.3. Considerando invece la monotonia di:

$$\log_{1/2}(1 + 4x)$$

la funzione $f(x) = 1 + 4x$ è crescente mentre $g(t) = \log_{1/2} t$ è decrescente nel proprio dominio e quindi la funzione risultante sarà nel proprio dominio decrescente.

6.4 Funzioni importanti

6.4.1 Funzioni base

Valore assoluto La funzione valore assoluto, o modulo è del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed è definita dall'equazione:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Segno La funzione segno, del tipo sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e definita da

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

6.4.2 Funzioni potenza

In generale annoveriamo tra le funzioni potenza la larga famiglia di funzioni del tipo seguente:

$$p_\alpha(x) = x^\alpha, \qquad (\alpha \neq 0) \tag{6.8}$$

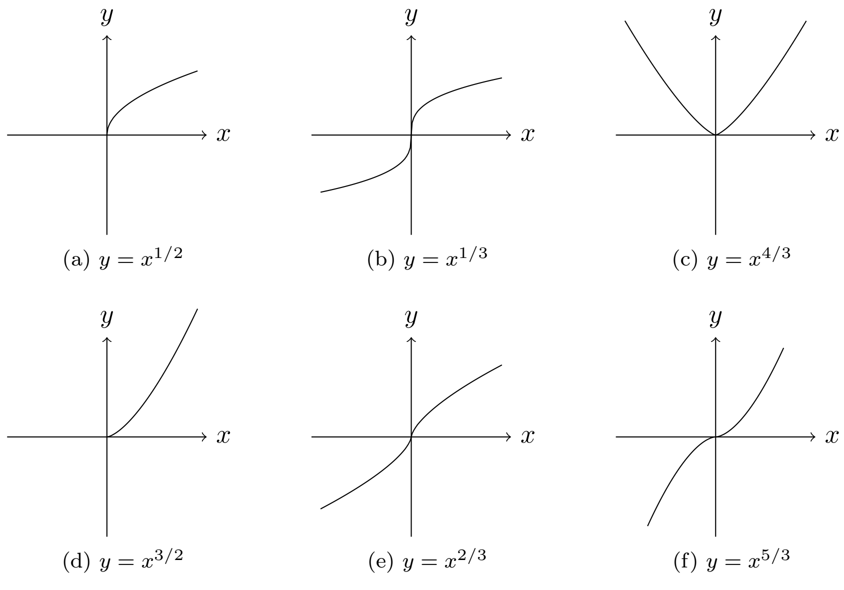
l'andamento è legato ad $\alpha \in \mathbb{R}$. Nel seguito consideriamo due tipi di α: razionale e irrazionale.

6.4.2.1 Esponente razionale

Nel caso α sia razionale (in questo gruppo ricadono anche le potenze con esponente intero, poiché questo è un razionale), si ricorda che l'operazione di elevamento a potenza è ben definita:

- per qualunque esponente, se la base è positiva;
- nel caso di base negativa, se l'esponente è un razionale (frazione) con denominatore dispari, in quanto il denominatore diviene l'indice della radice.

Ricapitoliamo i vari casi possibili in figura 6.3 (escludendo il caso banale $f(x) = x$). Alcune osservazioni generali:



(a) $y = x^{1/2}$ (b) $y = x^{1/3}$ (c) $y = x^{4/3}$

(d) $y = x^{3/2}$ (e) $y = x^{2/3}$ (f) $y = x^{5/3}$

Figura 6.3: Funzioni potenza ad esponente razionale positivo

- in $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente, mentre in $(0, +\infty)$, se è definita, basta tener conto della simmetria di f (sia essa rispetto all'asse y o all'origine, a seconda dell'esponente) per decidere se cresce o decresce;
- in $(0, +\infty)$ la funzione presenta un andamento simile a quello delle funzioni x^2 o $\sqrt{x}$, rispettivamente (e cioè tangente all'asse x o all'asse y nell'origine), a seconda che l'esponente sia maggiore o minore di 1.

Se invece l'esponente è negativo, le situazioni qualitativamente sono quelle di figura 6.4. In questi casi la funzione è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$,

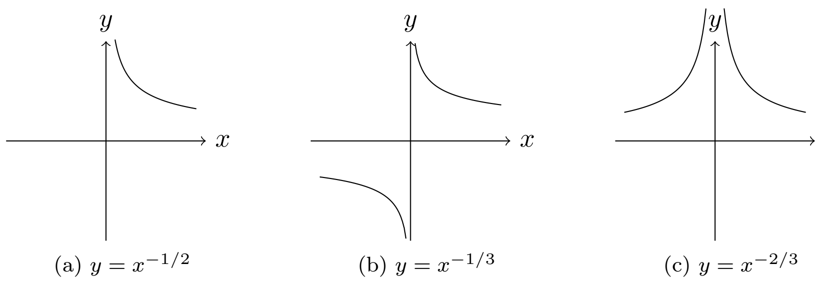


Figura 6.4: Funzioni potenza ad esponente razionale negativo

mentre in $(-\infty, 0)$, se è definita, basta tener conto della simmetria di f per decidere se cresce o decresce.

6.4.2.2 Esponente irrazionale

Nel caso α sia irrazionale, non possiamo più esprimere la potenza come un rapporto. Escluso che l'esponente sia un intero, non si può nemmeno "sapere" se l'esponente è rapporto in cui il denominatore è dispari.
Pertanto in questi casi si evita di permettere al dominio di assumere valori negativi e, in generale se $\alpha > 0$ queste funzioni sono definite solo per $x \geq 0$, mentre se $\alpha < 0$ solo per $x > 0$. Le situazioni possibili sono descritte in figura 6.5 e dipendono più che altro dal fatto che α sia > o < di 1.

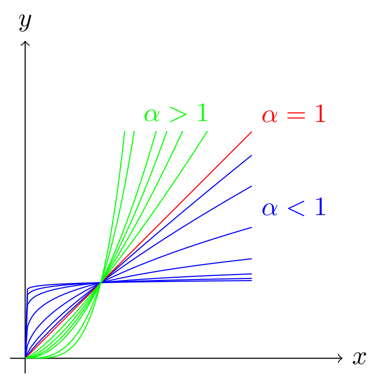


Figura 6.5: Funzioni potenza ad esponente irrazionale

6.4.3 Funzioni polinomiali

Sono funzioni definite da un polinomio di grado $n \geq 1$; supponendo non restrittivamente che il coefficiente del termine di grado massimo sia 1, la funzione è definita come

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{6.9}$$

Ipotizziamo di riuscire a fattorizzare il polinomio come prodotti di

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{\nu_m} \cdot Q(x) \tag{6.10}$$

con α_k radici del polinomio e ν_k dette molteplicità, e $Q(x)$ privo di zeri/radici (ad esempio $x^2 + 1$).
Per un disegno approssimato del grafico si segua questa ricetta[5]:

- se n è pari si scende da $+\infty$ fino alla minima radice, se n è dispari si sale da $-\infty$ alla minima radice;
- ad ogni radice si attraversa l'asse x solo se la molteplicità della stessa è dispari, avendo cura di fare un flesso orizzontale se la molteplicità è ≥ 3;
- se la molteplicità è pari si resta dalla stessa parte dell'asse x (ed è quindi chiaro che si ha un estremo locale stretto)
- dopo l'ultima radice si deve salire verso $+\infty$ (e questo dovrebbe permettere anche un controllo di errori).

Questo per un andamento approssimato, tuttavia:

- non sappiamo quanti estremi (massimi/minimi) ci siano fra due zeri;
- non si riescono a distinguere grafici di polinomi che hanno stessi zeri con differenze pari di molteplicità: così ad esempio il grafico di $(x+1)^4(x-2)^3(x-5)^5(x^2+1)$ è qualitativamente simile a quello di $(x+1)^6(x-2)^5(x-5)^9(x^2+1)$.

Esempio 6.4.1. Sia $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x-5)^5(x^2+1)$. Essendo il grado massimo pari (complessivamente il grado massimo è 10) la funzione tende a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $-\infty$. Gli zeri reali di P sono:

- 1, di molteplicità 2: si tratta di un estremo locale
- 3 di molteplicità 1: non è ne minimo ne massimo locale
- 5 di molteplicità 5; non è ne minimo ne massimo, il grafico ha comunque tangente orizzontale

Inoltre ha un massimo locale su $]1,3[$ un minimo locale su $]3,5[$. Il grafico è mostrato in figura 6.6.

---

[5] Esercizi PDF de marco, capitolo su derivate e regola di De l'Hopital

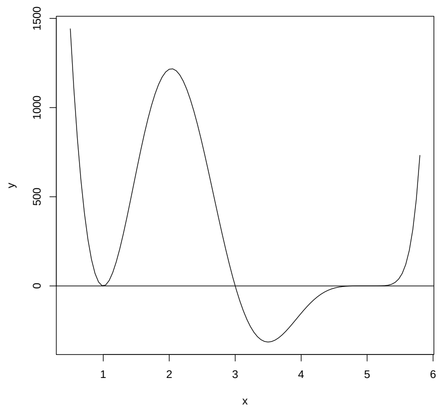


Figura 6.6: $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x-5)^5 \cdot (x^2+1)$

6.4.4 Funzioni esponenziali e logaritmiche

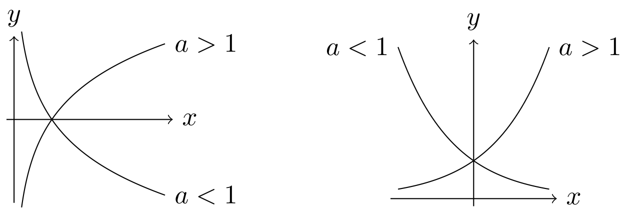
L'importanza di queste famiglie di funzioni deriva dal fatto che esse sono prototipi utili per descrivere fenomeni frequenti in natura come crescita o decadimento. Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, la funzione:

$$\log_a : (0; +\infty) \to \mathbb{R} \qquad y = \log_a x$$

si chiama funzione logaritmo in base a mentre la funzione

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y = a^x$$

si chiama funzione esponenziale[6] in base a (in figura 6.7).
Di tutte le basi utilizzabili per la funzione logaritmica ed esponenziale, il numero di Nepero e è quella più utilizzata.
Inoltre notiamo che una funzione esponenziale a^x si può esprimere nella forma e^{bx}, scegliendo $b = \log a$.



(a) $y = \log_a x$ (b) $y = a^x$

Figura 6.7: Funzione logaritmo ed esponenziale

[6]Se:

- l'*esponente* è fissato e la base variabile abbiamo le *funzioni potenza*;
- la *base* è fissata e l'esponente è variabile abbiamo le *funzioni esponenziali*.

Diseguaglianze notevoli Per la funzione esponenziale si ha che, se $x < 1$

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

la prima parte della disuguaglianza garantita sempre, la seconda solo se $x < 1$. Per la funzione logaritmo vale la seguente, se $x > 0$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$$

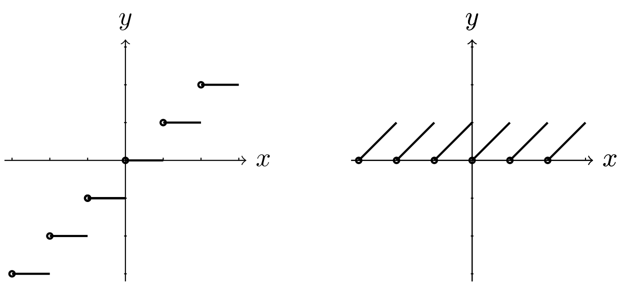
con disuguaglianze strette se $x \neq 1$. È più usata la forma traslata all'indietro di uno di tale disuguaglianza; si pone cioè in essa $1 + x$ al posto di x e si ottiene, se $x > -1$

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1 + x) \leq x$$

con disuguaglianze strette se $x \neq 0$.

6.4.5 Funzioni parte intera, mantissa, resto della divisione per b

Sono due funzioni che si incontrano tipicamente nella scrittura di algoritmi



(a) $y = \lfloor x \rfloor$ (b) $y = (x) = x - \lfloor x \rfloor$

Figura 6.8: Funzioni parte intera e mantissa

Parte intera La funzione *parte intera di x* (anche detta *floor*), è definita come

$$[x] = \lfloor x \rfloor = \text{l'intero } n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n \leq x < n + 1 \tag{6.11}$$

Mantissa La funzione *matissa* (o *parte decimale di x*) indicata con (x) o $\mathrm{mant}(x)$ è definita da:

$$\mathrm{frac}(x) = (x) = x - \lfloor x \rfloor \tag{6.12}$$

la mantissa è quindi un numero reale compreso in $[0, 1)$ ed è una funzione periodica di periodo 1.

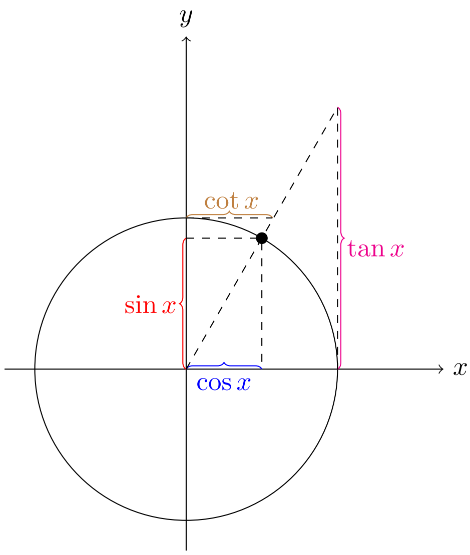
Resto della divisione per b Sia $b > 0$ un reale positivo; l'intervallo superiormente aperto $[0, b[$ può essere pensato come l'insieme dei resti delle divisioni dei reali per b. Si può pertanto definire la funzione $\mod b : \mathbb{R} \to [0, b)$ come

$$x \mod b = x - [x/b]\, b \tag{6.13}$$

A ben vedere si tratta della versione generalizzata della funzione mantissa (la quale deriva immediatamente da questa, per $b = 1$).

6.4.6 Funzioni trigonometriche e fenomeni vibratori

Le funzioni trigonometriche sono prototipi utili per i fenomeni ciclici, dove x ha il significato di *misura in radianti di un angolo*. I significati geometrici delle quattro funzioni principali sono mostrati nella figura



Fenomeni vibratori Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π. Più in generale le funzioni

$$t \to a \sin \omega t \qquad t \to b \cos \omega t \tag{6.14}$$

dove a, b, ω sono reali positivi, sono periodiche[7] di *periodo*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Inoltre, essendo $|\sin \omega t| \leq 1$ e $|\cos \omega t| \leq 1$ si ha

$$|a \sin \omega t| \leq a \qquad |b \cos \omega t| \leq b \tag{6.15}$$

[7] In quanto

$$\sin \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] = \sin (\omega t + 2\pi) = \sin \omega t$$

Le 6.14 sono dette **vibrazioni elementari** di *pulsazione* $\omega = \frac{2\pi}{T}$, *frequenza* $v = \frac{1}{T}$ e di *ampiezza* a e b rispettivamente[8].

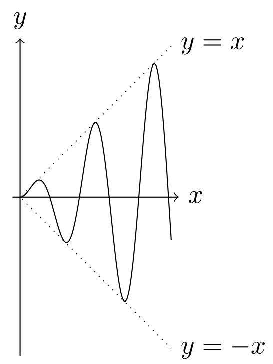
Moltiplicando una vibrazione elementare per potenze o esponenziali si possono modellizzare effetti di smorzamento o amplificazione. Considerando la funzione

$$h(x) = x \cdot \sin \omega x$$

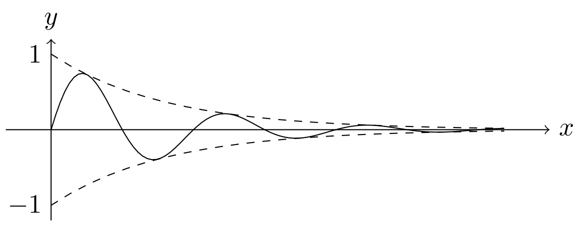
dato che $-1 \leq \sin \omega t \leq 1$ si ha che

$$-x \leq x \sin \omega x \leq x$$

e quindi il grafico si trova tra i grafici delle rette di equazione $y = -x$ e $y = x$. Dal grafico si vede come la moltiplicazione per x abbia l'effetto di una amplificazione all'aumentare di x.



Specularmente avviene per $k(x) = e^{-\alpha x} \sin \omega < x$. Ricordando che $e^{\alpha x} = \left(\frac{1}{e^{\alpha}}\right)^t$ è un' esponenziale con base minore di 1, considerazioni analoghe a quelle svolte per la funzione h indicano che il grafico di k è compreso tra i grafici delle funzioni $y = e^{-\alpha x}$ e $y = -e^{-\alpha x}$.



[8]Sotto condizioni abbastanza generali, un fenomeno naturale periodico si può scrivere come sovrapposizione di un numero finito o infinito di vibrazioni elementari di frequenza diversa. Questo conduce al concetto di serie di Fourier, ovvero a somme del tipo

$$\sum a_n \cos n\omega t + b_n \cos n\omega t$$

che si tratterà in seguito.

6.4.7 Funzioni iperboliche

6.4.7.1 Funzioni principali: $\sinh, \cosh, \tanh$

Nelle applicazioni sono importanti alcune combinazioni delle funzioni e^x ed e^{-x}

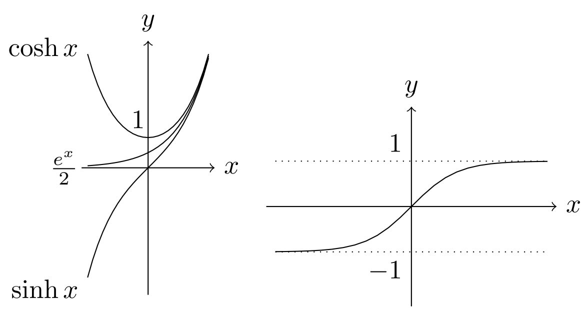
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{6.16}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{6.17}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{6.18}$$

che si chiamano rispettivamente *seno, coseno e tangente iperbolica*; sono ovviamente definite su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 110. Le funzioni iperboliche sono dette così perché giocano rispetto all'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ lo stesso ruolo che le funzioni circolari ($\cos x$ e $\sin x$) giocano per per il circolo unitario di equazione $x^2+y^2 = 1$



(a) $\sinh x$ e $\cosh x$ (b) $\tanh x$

Le seguenti **proprietà** derivano dalle definizioni delle funzioni:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \text{(funzione dispari)} \tag{6.19}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \text{(funzione pari)} \tag{6.20}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \text{(funzione dispari)} \tag{6.21}$$

Ancora:

$$\sinh(0) = 0 \qquad \cosh(0) = 1 \qquad \tanh(0) = 0 \tag{6.22}$$

$$\sinh(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq \cosh(x) \tag{6.23}$$

E l'equivalente dell'identità trigonometrica fondamentale è:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{6.24}$$

6.4.7.2 Formule goniometriche

Vediamo le equivalenti delle formule trigonometriche

Formule di addizione

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x) \tag{6.25}$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\sinh(x) \tag{6.26}$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \tag{6.27}$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \tag{6.28}$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x \tag{6.29}$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x} \tag{6.30}$$

Formule di bisezione Occorre scegliere il segno corretto:

$$\sinh(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \tag{6.31}$$
$$\cosh(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \tag{6.32}$$
$$\tanh(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \tag{6.33}$$

Formule di prostaferesi

$$\sinh p + \sinh q = 2\sinh\frac{p+q}{2}\cosh\frac{p-q}{2} \tag{6.34}$$
$$\sinh p - \sinh q = 2\cosh\frac{p+q}{2}\sinh\frac{p-q}{2} \tag{6.35}$$
$$\cosh p + \cosh q = 2\cosh\frac{p+q}{2}\cosh\frac{p-q}{2} \tag{6.36}$$
$$\cosh p - \cosh q = -2\sinh\frac{p+q}{2}\sinh\frac{p-q}{2} \tag{6.37}$$

Formule parametriche Avendo

$$t \stackrel{def}{=} \tanh\frac{\alpha}{2}$$

$$\sinh\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \tag{6.38}$$
$$\cosh\alpha = \frac{1+t^2}{1-t^2} \tag{6.39}$$
$$\tanh\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \tag{6.40}$$

6.4.7.3 Altre funzioni iperboliche: $\coth, \mathrm{sech}, \mathrm{csch}$

TODO: sviluppare ?

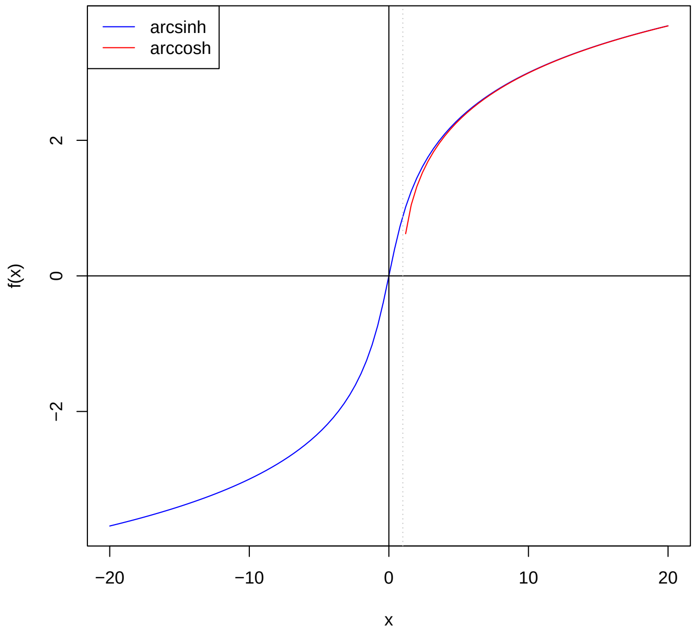
$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{6.41}$$

$$\mathrm{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{6.42}$$

$$\mathrm{csch}\, x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{6.43}$$

6.4.8 Funzioni iperboliche inverse

Vediamo alcune funzioni che saranno utilizzate nell'integrazione delle funzioni irrazionali.



Settore seno iperbolico La funzione $y = \sinh x$ è definita e strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, pertanto è invertibile. La sua funzione inversa la otteniamo invertendo x e y e risolvendo per y

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

moltiplicando entrambi i membri per e^y

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita e^y. Ricaviamo

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

poiché $e^y > 0$, la soluzione con segno negativo va scartata. Rimane dunque

$$\boxed{\operatorname{sett}\sinh x = \operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{6.44}$$

Questa è l'espressione della funzione inversa di $\sinh x$ che prende il nome di *settore seno iperbolico* (arcoseno iperbolico) ed è indicata da alcuni come $\operatorname{SettSh} x$ ($\operatorname{arcsinh} x$). Il dominio è $D = \mathbb{R}$.

Settore coseno iperbolico La funzione $y = \cosh x$ è decrescente per $x \leq 0$, crescente per $x \geq 0$; pertanto non invertibile su tutto il dominio. Determiniamo l'inversa sulla restrizione del dominio a $x \geq 0$.
Con calcoli analoghi ai precedenti scriviamo:

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e risolviamo rispetto ad y la

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

otteniamo

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

Questa volta entrambi i numeri sono positivi; stiamo però ragionando solo per $y \geq 0$ (il dominio sul quale invertiamo era $x \geq 0$, prima del cambio di variabili), che equivale a scegliere il segno $+$ (poiché e^y è almeno 1). Pertanto

$$\boxed{\operatorname{sett}\cosh x = \operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} \tag{6.45}$$

Questa è l'espressione della funzione inversa di $\sinh x$ che prende il nome di *settore coseno iperbolico* (arcocoseno iperbolico) ed è indicata da alcuni come $\operatorname{SettCh} x$ ($\operatorname{arccosh} x$). Il dominio è $D = [1, +\infty)$.

Settore tengente iperbolica

TODO: Sviluppare un minimo?

$$\boxed{\operatorname{sett}\tanh x = \operatorname{arctanh} x = \log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \tag{6.46}$$

Altre funzioni iperboliche inverse

$$\operatorname{sett}\coth x = \operatorname{arccoth} x = \log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \tag{6.47}$$

$$\operatorname{sett}\operatorname{sech} x = \operatorname{arcsech} x = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \tag{6.48}$$

$$\operatorname{sett}\operatorname{csch} x = \operatorname{arccsch} x = \log\left(\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \tag{6.49}$$

Considerazione finale Si noti, mentre ad esempio l'equazione

$$\sinh x = 2$$

ha una unica soluzione (si pensi al sistema equivalente e a relativo grafico) ed è data da $x = \operatorname{arcsinh} 2 = \log\left(2 + \sqrt{5}\right)$, l'equazione

$$\cosh x = 2$$

ne ha due (si pensi sempre al sistema equivalente e relativo grafico) che corrispondono a $x = \pm \operatorname{arccosh} 3 = \pm \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

6.4.9 Altre funzioni

6.4.9.1 Identità

Dato un insieme X, la funzione identità su di esso $1_X : X \to X$ è così definita $1_X(x) = x, \forall x \in X$ (restituisce semplicemente l'elemento fornitogli in input).

6.4.9.2 Permutazioni e scambi

Una *permutazione* σ di un insieme X è una biiezione di X in se stesso, ossia $\sigma : X \to X$ biettiva.
Chiamiamo *scambio* una permutazione di X così fatta: dati $a, b \in X$ con $a \neq b$, lo scambio σ_{ab} è la biezione di X in X tale che $\sigma_{ab}(x) = x$ per $x \neq a$ ed $x \neq b$, mentre $\sigma_{ab}(a) = b$ e $\sigma_{ab}(b) = a$. Ovviamente si ha che $\sigma_{ab} \circ \sigma_{ab} = 1_X$.

6.4.9.3 Funzione caratteristica

Considerando un insieme X e un suo sottoinsieme $S \subseteq X$ possiamo definire la funzione caratteristica $\chi_S : X \to \{0, 1\}$ come

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus S \end{cases} \tag{6.50}$$

Si tratta pertanto di una funzione che marca gli elementi di un insieme X con 1 qualora facciano parte di un suo sottoinsieme S

6.4.10 Operazioni reticolari su funzioni

6.4.10.1 Funzione minimo e massimo

Se X è un insieme e $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono funzioni definite su X a valori reali, si possono definire le funzioni massimo e minimo $f \wedge g, f \vee g : X \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$(f \wedge g)(x) = \min f(x), g(x), \qquad \forall x \in X \tag{6.51}$$

e

$$(f \vee g)(x) = \max f(x), g(x), \qquad \forall x \in X$$

6.4.10.2 Parte positiva e negativa

Data $f : X \to \mathbb{R}$, la parte positiva di f è la funzione $f^+(x) = (f \vee 0)(x)$ ossia

$$f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \tag{6.52}$$

mentre la parte negativa di f è la funzione $f^-(x) = ((-f) \vee 0)(x)$ ossia

$$f^-(x) = ((-f) \vee 0)(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0 \end{cases} \tag{6.53}$$

Si noti che entrambe le funzioni sono positive o al più nulle.

6.5 Determinazione del dominio: riepilogo

Una delle prime operazioni da farsi quando si studia una funzione è quella di determinare il suo dominio. Data l'importanza dell'argomento riassumiamo le regole da seguire:

1. le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto sono sempre possibili; pertanto le funzioni razionali intere, cioè i polinomi hanno come dominio $\mathbb{R}$;

2. l'operazione di divisione non ha significato se il divisore è nullo; pertanto le funzioni razionali fratte hanno per dominio tutti i numeri reali tranne quelli che eventualmente annullino il denominatore;

3. l'operazione di estrazione di radice di indice pari ha senso se il radicando è positivo o nullo; item l'operazione di estrazione di radice di indice dispari ha senso purché esista i radicando;

4. il logaritmo ha significato se l'argomento è positivo e purché la base sia un numero positivo e diverso da 1;

5. l'esponenziale con base (costante) positiva esiste purché esista l'esponente (variabile);

6. la potenza con base variabile ed esponente costante irrazionale positivo si considera solo per valori positivi o nulli della base;

7. la potenza con base ed esponente variabili si considera solo per valori positivi della base;

8. le funzioni goniometriche $y = \sin x$ e $y = \cos x$ esistono per ogni x reale, mentre $y = \tan x$ esiste per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $y = \cot x$ esiste per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

9. le funzioni $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ sono definite per $-1 \leq x \leq 1$ mentre $y = \arctan x$ e $y = \operatorname{arccot} x$ esistono $\forall x \in \mathbb{R}$.

Capitolo 7

Numeri complessi

Osservazione 111. In $\mathbb{R}$ resta esclusa la possibilità di eseguire certe operazioni come l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo, il che ad esempio rende impossibile risolvere equazioni come $x^2 + 1 = 0$.

Osservazione 112. Si rende necessaria l'introduzione dei numeri immaginari, denotati dall'insieme $\mathbb{I}$: l'obiettivo è conservare le proprietà delle operazioni fondamentali, al fine di poter usare senza variazioni i procedimenti del calcolo algebrico ordinario.

7.1 Numeri immaginari

7.1.1 Definizioni

Definizione 7.1.1 (Unità immaginaria, i)**.** i è quel numero tale che $i^2 = -1$

Osservazione 113. Si conviene anche che $(-i)^2 = -1$

Osservazione 114. Dunque:

$$(\pm i)^2 = -1$$
$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Definizione 7.1.2 (Numero immaginario)**.** Dato un $b \in \mathbb{R}$ un qualunque prodotto bi

7.1.2 Regole algebriche

Proposizione 7.1.1. *Le regole di addizione e sottrazione rimangono sostanzialmente le stesse di quelle dei reali*

$$\begin{aligned}
&i \cdot 1 = 1 && ib \pm ic = i(b \pm c) \\
&i \cdot 0 = 0 && ib \cdot c = c \cdot ib = i(cb) \\
&\frac{i}{i} = 1 && \frac{ib}{c} = i\frac{b}{c} \\
&ib = bi && ib \cdot ic = -bc \\
&ib = ib' \iff b = b' && \frac{ib}{ic} = \frac{b}{c}
\end{aligned}$$

Osservazione 115. Addizione e sottrazione di numeri immaginari risultano in un numero immaginario (es. $3i + 2i = 5i$)

Osservazione 116. Prodotto e quoziente di numeri immaginari risultano in un numero reale (es. $3i \cdot 2i = -6$).

Proposizione 7.1.2 (Potenze)**.** *Le potenze dell'unità immaginaria sono*

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = i, \quad i^5 = i^4 \cdot i = -1$$

Osservazione 117. Le prime 4 potenze di i (i^0, i^1, i^2, i^3) sono ordinatamente $1, i, -1, -i$; le successive riproducono indefinitamente tale sequenza pertanto si può scrivere

$$i^n = i^{\mathrm{n \ mod \ 4}} \tag{7.1}$$

dove n mod 4 indica il resto della divisione dell'esponente per il divisore 4. Ad esempio $i^6 = i^2 = -1$.

Osservazione 118. Nell'insieme dei numeri immaginari si può sempre estrarre la radice quadrata di un numero negativo reale.

Proposizione 7.1.3 (Radice quadrata di numero negativo reale)**.** *Se* $a \in \mathbb{R}, a > 0$ *si ha:*

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{-1 \cdot a^2} = \sqrt{-1}\sqrt{a^2} = \pm i \cdot a \tag{7.2}$$

Esempio 7.1.1. $\sqrt{-4} = \pm 2i$

7.2 Numeri complessi: forma algebrica

7.2.1 Definizioni

Definizione 7.2.1 (Complesso in forma algebrica)**.** Numero z esprimibile come somma di una *parte reale* ($a \in \mathbb{R}$) e di una *immaginaria* ($b \in \mathbb{R}$, $ib \in \mathbb{I}$).

$$z = a + ib \tag{7.3}$$

Osservazione 119. L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

Osservazione 120 (Complesso nullo). Si ha se $a = 0 \wedge b = 0$.

Proposizione 7.2.1. *Si ha che* $(\mathbb{R} \cup \mathbb{I}) \subset \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Se $a = 0$ il complesso coincide con l'immaginario ib ($\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$). Se $b = 0$, il numero complesso $a + ib$ coincide con il reale a ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). I rimanenti casi ($a \neq 0$ e $b \neq 0$) appartengono a $\mathbb{C}$ ma non a $\mathbb{R}$ ne a $\mathbb{I}$. □

Osservazione 121 (Notazione parte ed immaginaria). Per indicare la parte reale e immaginaria del numero z di cui sopra:

$$\mathrm{Re}\, z = a$$
$$\mathrm{Im}\, z = b$$

7.2.2 Complessi uguali, coniugati, opposti

Definizione 7.2.2 (Complessi uguali)**.** Numeri complessi aventi uguali le parti reali e i coefficienti dell'immaginario

$$a + ib = c + id \iff a = c \wedge b = d \tag{7.4}$$

Definizione 7.2.3 (Complessi diseguali)**.** Non uguali.

Osservazione 122. Se due complessi sono diseguali non si può stabilire quale è maggiore e quale minore (l'ordinamento degli elementi di $\mathbb{C}$ non è possibile).

Definizione 7.2.4 (Complessi opposti)**.** Complessi aventi opposti sia parte reale che immaginaria

$$(a + ib) \text{ e } (c + id) \text{ sono opposti} \iff a = -c \wedge b = -d \tag{7.5}$$

Definizione 7.2.5 (Complessi coniugati)**.** Complessi aventi la stessa parte reale e opposti coefficienti dell'immaginario.

Osservazione 123. Il coniugato del complesso $z = a+ib$ è indicato con $\overline{z} = a - ib$.

Osservazione 124. I complessi coniugati assumono importanza poiché esito della radice di un reale negativo.

Proposizione 7.2.2 (Proprietà del coniugio)**.**

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= z\\ \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w}\\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w}\end{aligned}$$

Dimostrazione. Anticipiamo in questa dimostrazione l'uso delle operazioni con complessi in forma algebrica (definite in seguito).
Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$. Per la prima si ha

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$$

Per il coniugato della somma si ha che:

$$\overline{z + w} = \overline{(a + ib) + (c + id)} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d)$$

mentre per la somma dei coniugati

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = a + c - i(b + d)$$

dalla quale si evince l'uguaglianza.
Infine il coniugato del prodotto

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac + iad + ibc + i^2bd} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)}\\ &= ac - bd - i(ad + bc)\end{aligned}$$

e il prodotto dei coniugati

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc + i^2bd = ac - bd - i(ad + bc)$$

anche qui uguali. □

7.2.3 Operazioni con complessi in forma algebrica

Definizione 7.2.6 (Somma)**.** La somma di due complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$ si ottiene sommando ordinatamente parte reale e immaginaria:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{7.6}$$

Esempio 7.2.1.

$$(-1 + i4) + (3 + i) + (4 - i3) = 6 + i2$$

Corollario 7.2.3. *La somma di 2 numeri coniugati è un reale:*

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$$

Corollario 7.2.4.

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

Definizione 7.2.7 (Differenza)**.** La differenza si ottiene dalla somma del primo con l'opposto del secondo:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - id) = (a - c) + i(b - d) \tag{7.7}$$

Esempio 7.2.2.

$$(8 - i4) - (4 - i2) = 4 - i2$$

Corollario 7.2.5. *La differenza di 2 numeri coniugati è un immaginario:*

$$z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

Corollario 7.2.6.

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Definizione 7.2.8 (Prodotto)**.** Il prodotto di due complessi si attua come un semplice prodotto di binomi:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + i(bc + ad) \tag{7.8}$$

Corollario 7.2.7. *Il prodotto di due complessi coniugati è il reale*

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Definizione 7.2.9 (Reciproco)**.** Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}, z \neq 0$ il reciproco z^{-1} è tale che $z \cdot z^{-1} = 1$.

Proposizione 7.2.8. *Il reciproco di $z = a + ib$ si ottiene come:*

$$\begin{aligned} z^{-1} = (a + ib)^{-1} &= \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Dimostrazione. La scrittura è corretta in quanto:

$$z \cdot z^{-1} = (a + ib)\frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

□

Esempio 7.2.3. Per ricavare il reciproco di $z = 1 + i2$:

$$\frac{1}{1+i2} = \frac{(1-i2)}{(1+i2)(1-i2)} = \frac{1-i2}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$$

Definizione 7.2.10 (Quoziente)**.** Il quoziente di due complessi $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ è il prodotto del primo per il reciproco del secondo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (a+bi)\frac{c-id}{c^2+d^2} = \ldots = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \tag{7.9}$$

Definizione 7.2.11 (Potenza)**.** La potenza di un complesso in forma algebrica si svolge come elevamento a potenza di un semplice binomio.

Esempio 7.2.4.

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i\\ (2+3i)^3 &= 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i\end{aligned}$$

Radice quadrata Sebbene non sia il modo più semplice a disposizione, può essere necessario calcolare la radice quadrata di un complesso in forma algebrica. Dato un complesso $a + ib$ si ha che $x + iy$ è la sua radice quadrata se si verifica che

$$(x+iy)^2 = a + ib$$

Sviluppando si ottiene

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$$

L'uguaglianza è verificata se sono rispettivamente parti reali e immaginarie dei due numeri:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{7.10}$$

Si può osservare che il modulo del quadrato della radice coincide per definizione con il modulo del complesso $a + ib$ ossia:

$$\begin{aligned}|x+iy|^2 &= |a+ib|\\ \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 &= \sqrt{a^2+b^2}\\ x^2+y^2 &= \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

sommando o sottraendo (a turno) quest'ultima uguaglianza dalla prima equazione del sistema 7.2.3 si ottiene

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}; \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

da cui

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}; \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

La scelta delle soluzioni di x e y dipenderà dalla loro concordanza o meno, cosa che può essere vista dalla seconda equazione di e dipende dal segno di b; se

$b > 0$, ad esempio i due termini x e y sono concordi quindi potranno essere tenute le radici entrambi positive (come prima soluzione) o entrambi negative (come seconda). Compattamente le radici saranno

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

Formula da non ricordare a memoria: ricordarsi il procedimento risolutivo.

7.3 Numeri complessi: forma trigonometrica

7.3.1 Rappresentazione geometrica dei complessi

7.3.1.1 Punti nel piano cartesiano

Osservazione 125. Visto che è possibile porre in corrispondenza biunivoca coppie di reali con i punti del piano cartesiano, e che un complesso è definito da una coppia di reali (parte reale e coefficiente dell'immaginario) si può pensare di rappresentare i complessi mediante punti sul piano.

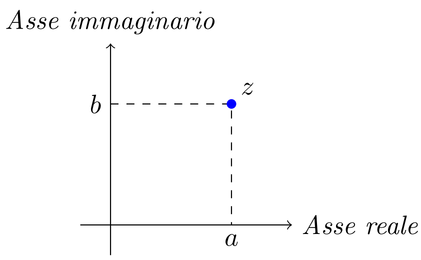


Figura 7.1: Il complesso $z = a + ib$ nel piano di Gauss

Osservazione 126 (Piano di Gauss). Il piano luogo dei punti immagine di complessi si dice *piano di Gauss* (figura 7.1). Un complesso si rappresenta come punto avente ascissa la parte reale e ordinata il coefficiente della parte immaginaria l'ordinata:

- se $b = 0$ il complesso si riduce ad a (reale), e il punto z si trova sull'asse x, che si dice perciò *asse reale*;
- se $a = 0$ il complesso si riduce a bi (immaginario) e z viene a trovarsi sull'asse y, che si dice asse immaginario;
- l'origine è l'immagine dello 0 complesso.

Osservazione 127. Nel piano di Gauss, la rappresentazione di due *complessi coniugati* avviene mediante 2 punti simmetrici rispetto all'asse reale x.

7.3.1.2 Rappresentazione mediante vettori

Osservazione 128. Un complesso $z = a + ib$ è associabile un vettore a due dimensioni (residente sul piano di Gauss) avente origine nell'origine degli assi e come componenti, rispettivamente, a e b (figura 7.2).

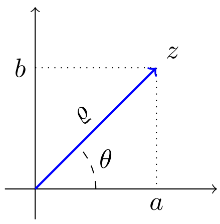


Figura 7.2: Rappresentazione di complessi mediante vettori

Osservazione 129. Questa rappresentazione ci consente di progredire nello studio dei complessi applicando conoscenze ereditate da quello dei vettori.

7.3.1.3 Modulo di un complesso

Osservazione 130. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, il prodotto $z\overline{z} = a^2 + b^2$ è reale positivo; il modulo di z, indicato con $|z|$ o ϱ, si definisce come la radice di tale prodotto.

Definizione 7.3.1 (Modulo di numero complesso)**.** Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, il modulo di z è

$$|z| = \varrho = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{7.11}$$

Osservazione 131. Graficamente coincide con il modulo del vettore associato al complesso considerato.

Osservazione 132. Quando il numero complesso è un semplice reale, il suo modulo coincide con il valore assoluto del numero reale (ovvero riabbiamo la definizione classica di modulo/valore assoluto data per i reali).

Osservazione 133. Quando il complesso coincide con un immaginario, il modulo è il valore assoluto del coefficiente dell'immaginario.

Proposizione 7.3.1 (Proprietà del modulo di complesso)**.**

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0 \tag{7.12}$$
$$|\overline{z}| = |z| \tag{7.13}$$
$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \tag{7.14}$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{7.15}$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{7.16}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{7.17}$$
$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| \tag{7.18}$$
$$|z_1 - z_2| \geq \Big||z_1| - |z_2|\Big| \tag{7.19}$$
$$|z_1 + z_2| \geq \Big||z_1| - |z_2|\Big| \tag{7.20}$$

Dimostrazione. Di facile verifica la maggior parte di queste; a titolo di esempio per la 7.15 si ha che se $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, allora $|z_1 \cdot z_2|$

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |(a+ib)(c+id)| = |ac + iad + ibc - bd| \\ &= |ac - bd + i(ad+bc)| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}\end{aligned}$$

mentre $|z_1| \cdot |z_2|$

$$\begin{aligned}|z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}\end{aligned}$$

e si verifica l'uguaglianza delle due.
Equazione 7.14 può essere interpretata in termini geometrici: la prima diseguaglianza dice che in un triangolo rettangolo i cateti sono minori dell'ipotenusa, la seconda che l'ipotenusa è minore della somma dei cateti.
La 7.17 rappresenta la diseguaglianza triangolare nel campo complesso, anch'essa facilmente interpretabile dal punto di vista geometrico pensando alla regola del parallelogramma per la somma di vettori (con l'uguaglianza che vale solo se i due vettori sommati hanno la medesima direzione).
La 7.18 esprime il fatto che in un triangolo un lato ($z_1 - z_2$: si pensi in termini vettoriali è il vettore che connette l'estremo di z_2 all'estremo di z_1) ha lunghezza maggiore o uguale alla differenza di lunghezze degli altri due (z_1 e z_2 rispettivamente).
La 7.19 ha derivazione simile alla diseguaglianza equivalente nel campo dei reali; la 7.20 deriva da 7.19 sostituendo z_2 con $-z_2$. □

Osservazione 134. Possiamo infine scrivere alternativamente il reciproco di un complesso z in funzione del coniugato $\overline{z}$ e del modulo $|z|$

Definizione 7.3.2 (Reciproco)**.** Se $z \neq 0$ dato che essendo $|z|^2 = z\overline{z}$ si ha:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

7.3.1.4 Argomento di un complesso

Definizione 7.3.3 (Argomento)**.** Indicato con $\arg z$ (o con θ) è l'angolo che il vettore del complesso forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Osservazione 135. L'argomento di un reale positivo è l'angolo nullo, di un reale negativo è l'angolo piatto; di un numero immaginario positivo l'angolo retto, di un immaginario negativo tre angoli retti.

Osservazione 136. L'argomento dello 0 complesso è indeterminato.

Osservazione 137. Gli argomenti di due complessi coniugati sono angoli esplementari (rispettivamente θ e $2\pi - \theta$).

7.3.2 Forma trigonometrica

Osservazione 138. Se $a+ib$ è un numero complesso con modulo ϱ ed argomento θ si ha:

$$a = \varrho \cos(\theta + k2\pi) \tag{7.21}$$
$$b = \varrho \sin(\theta + k2\pi) \tag{7.22}$$

Definizione 7.3.4 (Forma trigonometrica)**.** Il complesso $z = a + ib$ può esser riscritto come:

$$\boxed{z = a + ib} = \varrho \cos(\theta + k2\pi) + i \cdot \varrho \sin(\theta + k2\pi) \tag{7.23}$$
$$= \boxed{\varrho\left[\cos(\theta + k2\pi) + i \cdot \sin(\theta + k2\pi)\right]} \tag{7.24}$$

L'ultima espressione viene detta *forma trigonometrica* del numero complesso

Osservazione 139. La forma trigonometrica è utile, come si vedrà, quando bisogna eseguire moltiplicazioni o divisioni fra numeri complessi; per somme o differenze conviene adoperare la forma algebrica.

Definizione 7.3.5 (Complessi uguali)**.** Due numeri complessi in forma trigonometrica sono *uguali* se e solo se i loro moduli coincidono e gli argomenti differiscono per un multiplo intero di 2π.

Osservazione 140. Per brevità nel seguito si ometterà $+k2\pi$.

Definizione 7.3.6 (Insieme dei complessi di modulo unitario)**.** Indichiamo con $\mathbb{U}$ il sottoinsieme dei complessi di modulo unitario.

Definizione 7.3.7 (cis)**.** Per indicare un numero complesso di modulo unitario dato l'angolo/argomento si usa la funzione $\mathrm{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$:

$$\mathrm{cis}(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta \tag{7.25}$$

7.3.3 Determinazione dell'argomento

Per determinare l'**argomento** θ del numero complesso $z = a + ib$, a partire da a e b si possono utilizzare le formule 7.21 e 7.22, opportunamente riarrangiate:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}$$

Così facendo si determineranno seno e coseno dell'angolo θ:

- se è un angolo notevole ed è possibile determinarlo solo in base a seno e coseno si individua detto angolo;
- se questo non è un angolo notevole, si calcola $\tan\theta = \frac{b}{a}$, e con una calcolatrice si calcola $\arctan\frac{b}{a}$. Ma così facendo si ottiene un angolo del primo

o del quarto quadrante; per avere l'angolo corretto occorre prestare attenzione ad a. Se positivo, l'angolo va bene così. Se negativo (angolo del $2° - 3°$) occorre aggiungere all'angolo trovato π[1]). In sostanza:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{se } a < 0 \end{cases} \tag{7.26}$$

7.3.4 Passaggi di notazione

Proposizione 7.3.2 (Da forma algebrica a trigonometrica)**.** *Per la conversione:*

1. *si calcola il modulo del complesso;*
2. *si raccoglie il modulo nell'espressione algebrica (sia nel termine reale che in quello immaginario);*
3. *si ricerca l'argomento che origina tali valori nelle funzioni trigonometriche;*
4. *si riscrive il numero mediante modulo e argomenti determinati.*

Esempio 7.3.1. Convertiamo $z = 1 - i$:

1. il modulo: $\varrho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
2. mettiamo in evidenza il modulo dividendo per esso parte reale ed immaginaria, nonché moltiplicando fuori parentesi:
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
3. ricerchiamo l'argomento del numero risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \theta = \frac{7}{4}\pi$$
4. esprimiamo il numero mediante modulo e argomento determinati:
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi - i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

Proposizione 7.3.3 (Da forma trigonometrica ad algebrica)**.** *Più immediata, ci si limita a sostituire il valore delle funzioni trigonometriche e ad effettuare i calcoli.*

Esempio 7.3.2. Convertiamo $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$:

$$\begin{aligned} z &= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 + i2\sqrt{3} \end{aligned}$$

[1] Così facendo si ottiene l'angolo con la medesima tangente ma con seno e coseno a posto.

7.3.5 Operazioni con complessi in forma trigonometrica

Proposizione 7.3.4 (Prodotto di 2 complessi)**.** *Dati* $z_1 = \varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *e* $z_2 = \varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *il loro prodotto è un complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti:*

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]} \tag{7.27}$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 =& \varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ =& \varrho_1\varrho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ =& \varrho_1\varrho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \end{aligned}$$

Dalla quale si conclude sostituendo mediante le formule di addizione di seno e coseno. □

Corollario 7.3.5. *Il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Corollario 7.3.6. *L'argomento del prodotto di due numeri complessi è la somma degli argomenti*

$$\arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{7.28}$$

Osservazione 141 (Interpretazione geometrica del prodotto 1)*.* Se z è un complesso di modulo $\varrho = 1$, moltiplicare un altro numero per z significa sommare θ al suo argomento, cioè eseguire una *rotazione di angolo* θ

Esempio 7.3.3. Moltiplicare per i significa eseguire una rotazione di $\frac{\pi}{2}$

Esempio 7.3.4. moltiplicare per -1 significa eseguire una rotazione di π;

Osservazione 142 (Interpretazione geometrica del prodotto 2)*.* Se z è un complesso di modulo $\varrho \neq 1$ oltre ad eseguire una rotazione di θ si esegue una *dilatazione di coefficiente* ϱ.

Esempio 7.3.5. Moltiplicare per $(1 + i)$ significa eseguire una dilatazione di coefficiente $\sqrt{2}$ e una rotazione di $\frac{\pi}{4}$.

Proposizione 7.3.7 (Prodotto di n complessi)**.** *La 7.27 si generalizza al caso di un numero arbitrario di fattori* $z_1, \ldots, z_n$ *come segue:*

$$\prod_i z_i = \varrho_1 \cdot \ldots \cdot \varrho_n\left[\cos\left(\theta_1 + \ldots + \theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1 + \ldots + \theta_n\right)\right]$$

Proposizione 7.3.8 (Potenza di un complesso)**.** *Dato* $z \in \mathbb{C}$ *si ha:*

$$\boxed{z^n = \left[\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = \varrho^n\left[\cos\left(n \cdot \theta\right) + i\sin\left(n \cdot \theta\right)\right]} \tag{7.29}$$

Dimostrazione. È una semplice applicazione del prodotto □

Proposizione 7.3.9 (Reciproco)**.** *Il reciproco di* $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ *è:*

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\varrho}(\cos\theta - i\sin\theta)} \tag{7.30}$$

Dimostrazione. Si è riscritto che $1/z = \overline{z}/|z|^2$ di definizione 7.3.2 in termini di notazione trigonometrica. Si può verificare anche qui che $z \cdot z^{-1} = 1$. □

Osservazione 143. Ovvero il reciproco ha per modulo il reciproco del modulo del complesso considerato e per argomento l'opposto dell'argomento.

Proposizione 7.3.10 (Quoziente)**.** *Dati* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{7.31}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\\ &= \frac{\varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\end{aligned}$$

Da si conclude applicando le formule di sottrazione di seno e coseno, e considerando che $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1$ □

Osservazione 144. Pertanto il quoziente di due complessi è un complesso che ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti

Corollario 7.3.11. *Il modulo del rapporto di due complessi è il rapporto dei moduli*

$$|z_1/z_2| = |z_1| / |z_2| \tag{7.32}$$

Corollario 7.3.12. *L'argomento del rapporto di due complessi è la differenza degli argomenti*

$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{7.33}$$

Osservazione 145. In $\mathbb{C}$ l'estrazione di radice è un'operazione sempre possibile; inoltre ogni numero complesso ammette n radici n-esime diverse.

Proposizione 7.3.13 (Radici n-esime di un complesso)**.** *Dato* $z \in \mathbb{C}$ *di modulo* ϱ *e argomento* θ *le sue radice* n*-esime sono i complessi*

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]} \tag{7.34}$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 146. Le radici sono in numero infinito e dipendenti dal parametro k, ma quando $k = n$ (o un suo multiplo) ritornano ciclicamente: pertanto i complessi *distinti* sono solo n, ed è sufficiente considerare per k i valori $0, 1 \ldots, n-1$.

Dimostrazione. Le radice n-esime del complesso z sono quei complessi r che elevati alla n restituiscono z. Siano

$$\begin{aligned} z &= \varrho[\cos(\theta + 2\pi) + i\sin(\theta + 2\pi)] \\ r &= \sigma[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)] \end{aligned}$$

Sviluppiamo l'uguaglianza $r^n = z$ applicando la formula di De Moivre:

$$\begin{aligned} r^n &= z \\ \sigma^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] &= \varrho[\cos(\theta + 2\pi) + i\sin(\theta + 2\pi)] \end{aligned}$$

L'eguaglianza risulta soddisfatta se

$$\begin{cases} \sigma^n = \varrho \\ n\varphi = \theta + 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = \sqrt[n]{\varrho} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

E si conclude sostituendo nella formula della forma trigonometrica. □

Esempio 7.3.6. Per trovare le radici n-esime di $z = 1 + 1i$ partiamo dal calcolo del suo modulo

$$\varrho = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

L'argomento (da interpretazione geometrica) è $\theta = \pi/4$; pertanto

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi/4}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Volendo calcolare le radici cubiche, procediamo a sostituzione $n = 3$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\,[\cos(15 + k120) + i\sin(15 + k120)]$$

Quindi le tre radici distinte (e con angoli in gradi) per $k = 0, 1, 2$ saranno:

$$\begin{aligned} &\sqrt[6]{2}\,[\cos(15) + i\sin(15)] \\ &\sqrt[6]{2}\,[\cos(135) + i\sin(135)] \\ &\sqrt[6]{2}\,[\cos(255) + i\sin(255)] \end{aligned}$$

Osservazione 147 (Rappresentazione grafica delle radici). Per rappresentare nel piano gaussiano le n radici n-esime del complesso di modulo ϱ e argomento θ:

- si parta rappresentando il vettore $\overrightarrow{OP_0}$ di modulo $\sqrt[n]{\varrho}$ e formante con l'asse x l'angolo $\frac{\theta}{n}$;
- si tracci poi la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$; si divida detta circonferenza, partendo da P_0, in n parti uguali (goniometro). Gli n punti di divisione sono le immagini richieste delle n radici ennesime del numero dato.

Osservazione 148. In generale se abbiamo un numero complesso del tipo $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, le sue radici n-esime $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ si trovano ai vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$ con il vertice r_0 posto nel punto di argomento $\varphi = \frac{\theta}{n}$.

Esempio 7.3.7. Per rappresentare $z = 1 + i$ e le sue tre radici cubiche distinte di cui sopra (figura 7.3); il modulo del vettore originale è $\sqrt{2} = 1.41$, i moduli delle radici cubiche, $\sqrt[6]{2} = 1.2$

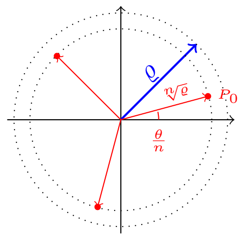


Figura 7.3: Le radici cubiche di $z = 1 + i$

7.4 Numeri complessi: forma esponenziale

Un numero complesso si può esprimere anche in forma esponenziale.

Definizione 7.4.1 (Complesso di modulo 1 in forma esponenziale)**.** Poniamo:

$$\boxed{e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{7.35}$$

Osservazione 149. L'equazione 7.35 va per ora presa per buona; troverà giustificazione quando si affronterà la funzione esponenziale complessa.

Definizione 7.4.2 (Complesso in forma esponenziale)**.** Per un generico complesso $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha:

$$\boxed{z = \varrho e^{i\theta}} \tag{7.36}$$

Osservazione 150. In questa notazione, dato $\theta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cos\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$$
$$\sin\theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$$

7.4.1 Operazioni con complessi in forma esponenziale

Osservazione 151. Per le potenze a esponente immaginario restano valide le normali proprietà delle potenze ad esponente reale.

Osservazione 152. Da ciò deriva che le operazioni su complessi in forma esponenziale sono utili per prodotto, quoziente, potenze e radici.

Proposizione 7.4.1 (Proprietà di base degli esponenziali immaginari)**.** *Si ha:*

$$\boxed{e^{i0} = 1} \tag{7.37}$$

Dimostrazione.

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$$

□

Proposizione 7.4.2. *Inoltre, qualunque sia* $\theta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\theta} \neq 0} \tag{7.38}$$

Dimostrazione. Se fosse $e^{i\theta} = 0$ per qualche θ, dovrebbe essere $\cos\theta + i\sin\theta = 0$, che sarebbe possibile solo se $\cos\theta = \sin\theta = 0$ (impossibile). □

Proposizione 7.4.3 (Prodotto di complessi di modulo unitario)**.**

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{7.39}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

□

Corollario 7.4.4 (Prodotto di complessi)**.** *Per due generici $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si ha:*

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \tag{7.40}$$

Definizione 7.4.3 (Coniugato)**.** Dato $\theta \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Proposizione 7.4.5 (Rapporto di complessi di modulo unitario)**.**

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{7.41}$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) : (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ &= e^{i\theta_1 - i\theta_2} \end{aligned}$$

□

Corollario 7.4.6 (Rapporto di complessi)**.** *Per due generici $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si ha:*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}} \tag{7.42}$$

Proposizione 7.4.7 (Potenza di complessi di modulo unitario)**.**

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \tag{7.43}$$

Dimostrazione. Si ha iterando la formula del prodotto. □

Corollario 7.4.8 (Potenza di complessi)**.** *Pertanto per un generico $z \in \mathbb{C}$, si ha:*

$$\boxed{z^n = \varrho^n \cdot e^{in\theta}} \tag{7.44}$$

Proposizione 7.4.9 (Radici n-esime)**.**

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}} \tag{7.45}$$

Dimostrazione. Deriva dal riscrivere equazione 7.34 in notazione esponenziale □

7.4.2 Formule di Eulero

Osservazione 153 (Prima formula di Eulero). La 7.35 è detta prima formula di Eulero e definisce anche la potenza esponente immaginario di e.

Proposizione 7.4.10 (Seconda formula di Eulero).

$$\boxed{e^{i(-\theta)}} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \boxed{\cos\theta - i\sin\theta} \tag{7.46}$$

Dimostrazione. Si ha dalla prima formula di Eulero (7.35), sostituendo $-\theta$ al posto di θ □

Proposizione 7.4.11 (Terza formula di Eulero).

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \tag{7.47}$$

Dimostrazione. Sommando membro a membro la 7.35 e la 7.46 si ha

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

dalla quale si conclude. □

Proposizione 7.4.12 (Quarta formula di Eulero).

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \tag{7.48}$$

Dimostrazione. Sottraendo membro a membro la 7.46 dalla 7.35 si ottiene

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

dalla quale si conclude. □

Osservazione 154. La terza e la quarta formula forniscono una prima definizione non "euristica" di seno e coseno di un angolo, per via della relazione con il complesso avente tale angolo come argomento.

7.5 Equazioni in $\mathbb{C}$

7.5.1 Equazioni di secondo grado: formula quadratica

Una equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0$$

con coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ si risolve con la solita formula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7.49}$$

a patto di intendere la radice quadrata in senso complesso. Il segno $\pm$ davanti al simbolo di radice è in realtà superfluo, perché il simbolo stesso $\sqrt{\cdot}$ nel campo complesso denota due numeri, uno l'opposto dell'altro.

7.5.2 Risoluzione mediante forma algebrica

Il metodo presentato in seguito consiste nel costruire un sistema che uguaglia le parti reali e immaginarie di due numeri complessi ed è utile soprattutto se nell'equazione compaiono somme algebriche di complessi.
È un metodo applicabile in linea di principio a qualsiasi equazione in $\mathbb{C}$; in pratica però può condurre a sistemi di difficile soluzione, perciò prima di mettersi su questa strada è bene osservare se non ce ne sia una più semplice.

Esempio 7.5.1. Sia $z = x + iy$ un generico complesso con x, y incognite reali. Si desidera risolvere:

$$z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\overline{z} = 0$$

Partiamo effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \\ i\,\mathrm{Im}(z) &= iy \\ 2\overline{z} &= 2(x-iy) = 2x - 2iy \end{aligned}$$

da cui:

$$\left(x^2 - y^2 + 2xy\right) + (iy) + (2x - 2iy) = 0$$

e quindi:

$$\left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i(2xy + y - 2y) = 0$$

Ora un numero complesso è nullo se sia la parte reale che quella immaginaria sono contemporaneamente nulle; impostiamo perciò il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy + y - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$$

Da quest'ultima equazione deriva che una possibile soluzione deve avere $y = 0$ o $x = \frac{1}{2}$. Nel primo caso

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo le prime due soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Imponendo invece $x = \frac{1}{2}$, si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Dalla quale derivano altre due soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

In conclusione le soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + 0i \\ z_2 &= -2 + 0i \\ z_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i \\ z_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i \end{aligned}$$

7.5.3 Risoluzione mediante forma trigonometrica/esponenziale

Nel caso si riesca a ricondurre entrambi i membri dell'equazione a prodotti/divisioni/elevamenti a potenza (senza somme/sottrazioni) conviene esprimere questi in forma trigonometrica (o meglio esponenziale) e procedere con un sistema che uguagli valore assoluto e argomento dei complessi figuranti ai due membri.

Esempio 7.5.2. Determinare le soluzioni dell'equazione nel campo complesso

$$z^2 = -4\overline{z}$$

Torna comodo in questo caso effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} z^2 &= \rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ \overline{z} &= \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ -4\overline{z} &= 4\rho(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) \end{aligned}$$

dove nell'ultima abbiamo usato il fatto che -4 ha modulo 4 e argomento π. L'equazione iniziale diventa allora:

$$\rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 4\rho(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta))$$

L'eguaglianza dei due membri è possibile solo se

$$\begin{cases} \rho^2 = 4\rho \\ 2\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases}$$

Si tratta ora di risolvere il sistema di due equazioni nelle incognite ρ, θ ricordando che per il loro significato ρ deve essere reale non negativo e θ un angolo quindi, ad esempio, è sufficiente considerare valori $\theta \in [0, 2\pi)$.
Risolvendo il sistema troviamo

$$\rho = 0, \rho = 4; \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

che da i seguenti punti nel piano complesso

$$z = 0; z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2$$

e quindi

$$z_1 = 0; z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i; z_3 = -4; z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

Osservazione 155. La forma esponenziale dei numeri complessi è equivalente alla trigonometrica ma di scrittura più compatta e pertanto preferibile. Inoltre aiuta a ricordare le formule di De Moivre, eseguendo correttamente prodotti e potenze.

Esempio 7.5.3. Ripercorrendo l'esercizio adottando la forma esponenziale si hanno innanzitutto le seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\theta} \\ z^2 &= \rho^2 e^{i2\theta} \\ \overline{z} &= \rho e^{-i\theta} \\ -4 &= 4e^{i\pi} \end{aligned}$$

e quindi

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 4e^{i\pi} \cdot \rho e^{-i\theta} = 4\rho e^{i(\pi-\theta)}$$

da cui come sopra

$$\rho^2 = 4\rho \wedge 2\theta = \pi - \theta + 2k\pi$$

7.5.4 Fattorizzazione di polinomi complessi

Nel caso si abbia un'equazione riconducibile a

$$p(z) = 0$$

con $p(z)$ polinomio a coefficienti *complessi* possiamo fattorizzarlo come si è fatto nel campo dei reali applicando il teorema del resto e procedendo poi a divisione. Se poi il polinomio è a coefficienti reali valgono alcuni risultati comodi per l'individuazione delle radici, mostrati nella sezione 7.6.2.
Vediamo un esempio di equazione con polinomio a coefficienti complessi.

Esempio 7.5.4. Risolvere l'equazione

$$z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i = 0$$

se notiamo che effettivamente $p(2i) = 0$, in quanto

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^3 + (1-5i)(2i)^4 - 2(5+i)2i + 8i \\ &= -8i - 4(1-5i) - 4i(5+i) + 8i \\ &= 0 \end{aligned}$$

allora $p(z)$ è divisibile (senza resto) per $z - 2i$. Procediamo analogamente[2] al caso reale alla divisione del polinomio $z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i$ per $z - 2i$, giungendo a $p(z) = (z-2i)(z^2 + (1-3i)z - 4) = 0$ e, potendo spezzare la risoluzione mediante l'annullamento del prodotto, si potrà proseguire più facilmente ponendo $z - 2i = 0$ (da cui $z = 2i$) oppure $z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$ (da cui si giunge a $z = -2 + 2i$ o $z = 1 + i$).

[2] Vedi pag 44 del pdf di De Marco 1, nel caso

7.5.5 Altre strategie risolutive

Vediamole per esempi significativi.

Esempio 7.5.5. Risolvere l'equazione

$$(1+i)z^2 - (7+13i)z + 2 + 60i = 0$$

Applicando la formula si ha

$$z = \frac{7+13i+\sqrt{(7+13i)^2 - 4(1+i)(2+60i)}}{2(1+i)}$$

Sviluppando la radice si ha

$$\sqrt{(7+13i)^2 - 4(1+i)(2+60i)} = \sqrt{49-169+182i-4(2-60+62i)} = \sqrt{112-66i}$$

Vediamo che non si tratta di un angolo facile da trattare in maniera trigonometrica/esponenziale; qui torna utile il calcolo della radice per via algebrica.
Posto $\delta = x+iy$, si ha che $\delta^2 = 112-66i$ se

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 112 \\ 2xy = -66 \end{cases}$$

Si ha anche che $x^2+y^2 = |112-66i| = \sqrt{16900} = 130$. Da quest'ultima e dalla prima del sistema di cui sopra si ottiene

$$\begin{cases} x^2 = (112+130)/2 = 121 \\ y^2 = (130-112)/2 = 9 \end{cases}$$

per cui si giunge a $x = \pm 11$ e $y \pm 3$; ma considerato il segno di b si ha che x e y sono discordi, per cui le soluzioni accettabili sono $(x,y) = (11,-3)$ o $(x,y) = (-11,3)$. Concludendo le radici sono $\delta = \pm(11-3i)$.
Utilizzando queste due radici si ha

$$z = \frac{7+13i \pm (11-3i)}{2(1+i)}$$

che porta a $z_1 = 7-2i$ e $z_2 = 3+5i$.

Esempio 7.5.6. Risolvere

$$\left(\frac{z+1}{2z+i}\right)^4 = 1$$

La struttura dell'equazione suggerisce di spezzare il procedimento in due passi: prima poniamo $w = \frac{z+1}{2z+i}$ e risolviamo $w^4 = 1$ che da le quattro radici quarte dell'unità

$$w_1 = 1, w_2 = -1, w_3 = i, w_4 = -i$$

poi risolviamo rispetto a z l'equazione $\frac{z+1}{2z+i} = w$ per ciascuno dei 4 valori di w trovati. Otteniamo

$$z_j = \frac{1-iw_j}{2w_j-1} \qquad \text{per } j = 1,2,3,4$$

Sostituiamo i 4 valori di w_j ed eseguendo il calcolo algebrico si ottiene

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1-i}{2-i} = 1-i \\
z_2 &= \frac{1+i}{-3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \\
z_3 &= \frac{2}{2i-1} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i \\
z_4 &= 0
\end{aligned}
$$

7.6 Miscellanea

7.6.1 Numeri complessi: forma polare

Nell'insieme $\mathbb{C}$ si definisce segno di uno numero complesso $z \in \mathbb{C}$ come:

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} z/\,|z| & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Il segno $\operatorname{sgn}(z)$ di un numero complesso $z \neq 0$ quindi è un numero complesso a sua volta: ha il medesimo argomento del complesso dato, ma presenta modulo unitario. In termini vettoriali costituisce il versore associato al complesso dato. L'insieme di tutti i versori del complesso:

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

rappresentabile sul piano di Gauss dal cerchio centrato sullo 0 e raggio unitario, rappresenta l'insieme di tutti i segni possibili in $\mathbb{C}$.
Sfruttando il legame con i vettori, ciascun numero complesso può essere espresso come il prodotto tra il suo segno e il suo modulo:

$$z = |z| \operatorname{sgn}(z) = \varrho u \tag{7.50}$$

con $\varrho \geq 0$ modulo di z e $u \in \mathbb{U}$ segno.

7.6.2 Teorema fondamentale dell'algebra

In $\mathbb{R}$ un polinomio di grado m ammette *al massimo* m radici. Il teorema fondamentale dell'algebra asserisce che ogni polinomio a coefficienti complessi di grado m ammette *esattamente* m radici, ovvero è fattorizzabile come prodotto di n termini di primo grado, a parte una costante reale, come segue:

$$p(z) = a_m(z-\alpha)^{\nu_1} \cdot (z-\alpha_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (z-\alpha_r)^{\nu_r}$$

con $\sum \nu_i = n$; le radici distinte sono $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (con $r \leq m$) non sono necessariamente tutte distinte/diverse (si possono avere radici ripetuta, se $\nu_1, \ldots \nu_r > 1$). L'intero $\nu_k \geq 1$ è detto molteplicità della radice αk. $a_m \neq 0$ è detto coefficiente dominante.

7.6.2.1 Alcuni risultati utili per polinomi a coefficienti reali

Proposizione 7.6.1. *Se una equazione algebrica*

$$a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{7.51}$$

a coefficienti reali *(ossia $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, se pur $z \in \mathbb{C}$) ha una radice complessa c, allora ha anche la coniugata $\overline{c}$ come radice*

Dimostrazione. Ricordando che il coniugato di una somma è la somma di coniugati e il coniugato del prodotto è il prodotto di coniugati

$$\begin{aligned} 0 = \overline{p(c)} =& \overline{a_0 + a_1 c + \cdots + a_m c^m} \\ =& \overline{a}_0 + \overline{a_1 c} + \cdots + \overline{a_m c^m} \\ =& \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{c} + \cdots + \overline{a}_m \overline{c^m} \\ =& a_0 + a_1 \overline{c} + \cdots + a_m \overline{c^m} \end{aligned}$$

perche i coefficienti a_j sono reali e quindi coincidenti con il loro coniugato □

Proposizione 7.6.2. *Se un polinomio a coefficienti reali ha una radice complessa c di molteplicità ν, allora ha come radice anche la coniugata $\overline{c}$, con la stessa molteplicità ν.*

Esempio 7.6.1. Un esempio che faccia apprezzare l'utilità pratica dei risultati di sopra: sia

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$$

con $x \in \mathbb{R}$, trovare x. Si tratta di un polinomio a coefficienti reali e provando $p(i)$ si ha

$$p(i) = 1 + 4i - 4 - 4i + 3 = 0$$

Quindi il polinomio è divisibile per $(x - i)$; ma essendo a coefficienti reali è divisibile anche per $(x+i)$, quindi complessivamente per $(x+i)(x-i) = x^2+1$. Applicando l'algoritmo di divisione dei polinomi si può scomporre

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x^2 + 1)(x^2 - 4x + 3) = (x^2 + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$$

e si prosegue normalmente.

Esempio 7.6.2. Il risultato può essere utile anche nel caso di radici complesse; ad esempio troviamo gli zeri complessi del polinomio

$$z^6 - 2z^5 + 5z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4$$

sapendo che uno di essi è $1 + i\sqrt{3}$. Allora essendo il polinomio a coefficienti reali anche $1 - i\sqrt{3}$ è radice del polinomio, che risulta quindi divisibile per $(z - (1 - \sqrt{3}))(z - (1 + \sqrt{3})) = \ldots = z^2 - 2z + 4$. L'algoritmo di divisione dei polinomi conduce a:

$$z^6 - 2z^5 + 5z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4 = (z^4 + z^2 + 1)(z^2 - 2z + 4)$$

e si può proseguire separatamente con la ricerca ponendo $z^4 + z^2 + 1 = 0$ e $z^2 - 2z + 4 = 0$.

7.6.3 Distanza nei complessi e geometria piana

7.6.3.1 Distanza nei complessi

Fra due complessi $w, z \in \mathbb{C}$ è definita la distanza (euclidea) $d(w, z)$ ponendo

$$d(w, z) = |w - z| \tag{7.52}$$

La distanza è una funzione $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, +\infty[$ e gode delle seguenti proprietà (derivanti dalle proprietà del modulo dei numeri complessi):

1. positività:
$$d(w, z) \geq 0, \quad d(w, z) = 0 \iff w = z \tag{7.53}$$

2. simmetria:
$$d(w, z) = d(z, w), \quad \forall w, z \in \mathbb{C} \tag{7.54}$$

3. disuguaglianza triangolare
$$d(w, z) \leq d(w, v) + d(v, z), \quad \forall w, z, v \in \mathbb{C} \tag{7.55}$$

7.6.3.2 Insiemi di complessi definiti da una distanza r da un complesso z

Dato $z \in \mathbb{C}$ ed $r > 0, r \in \mathbb{R}$, si definiscono:

$$B(z, r[= \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \tag{7.56}$$
$$B(z, r] = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\} \tag{7.57}$$

chiamati rispettivamente *disco aperto* (palla aperta) e *disco chiuso* (palla chiusa) di centro z e raggio r: esprimono l'insieme di numeri complessi che distano al massimo r da un dato numero complesso z (escludendo o meno i punti che distano esattamente r). Con

$$S(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\} \tag{7.58}$$

si indica l'insieme dei punti che distano dal complesso z di esattamente $r > 0$; è rappresentabile dalla circonferenza di centro z e raggio r e può esser alternativamente descritto come una somma tra due complessi:

$$S(z, r) = \left\{z + re^{i\theta} : \theta \in [0; 2\pi[\right\} \tag{7.59}$$

dove in termini vettoriali aggiungiamo il cerchio $re^{i\theta}$, formato da vettori di modulo r per θ che varia, al complesso z che funge da centro.

7.6.3.3 Retta passante per due complessi

Dati $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ la retta passante per a, b è l'insieme di complessi

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = a + (b - a)t, \ t \in \mathbb{R}\} \tag{7.60}$$

Per individuare l'insieme di complessi della retta tra a e b aiuta a vedere l'equazione $z = a + (b - a)t$ in termini vettoriali:

- partiamo iniziando a posizionarci in a (primo termine della somma)

- aggiungiamo ad a il termine $(b-a)$ che consiste nel vettore che si muove da a a b; questo vettore può essere pesato da un t che stabilisce di quanto e in che verso ci muoviamo. Se $t = 0$ allora abbiamo $z = a$, se $t = 1$ arriviamo in b; se $t > 1$ "superiamo" b, se $t < 0$ individuiamo un complesso nella retta che sta prima di a

Possiamo definire altresì la parametrizzazione della retta di cui sopra come una funzione del tipo $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$p(t) = a + t(b-a) \tag{7.61}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ il punto $p(t)$ si muove sulla retta percorrendola nel verso che va da a verso b.

7.6.3.4 Parallelismo di due complessi

Se a, b sono due complessi entrambi non nulli, essi saranno detti paralleli se le rette passanti per l'origine e per il complesso considerato sono parallele (e quindi coincidenti, dato che passano per lo stesso punto, l'origine).
Ciò avviene se e solo se esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che $a = tb$ o, equivalentemente, $a/b \in \mathbb{R}$. Ma poiché:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{\bar{b}}{|b|^2} = \frac{a\bar{b}}{|b|^2}$$

si ha che a/b è reale se e solo se $\operatorname{Im}(a\bar{b}) = 0$. Pertanto la condizione

$$\operatorname{Im}(a\bar{b}) = 0 \tag{7.62}$$

è un modo per esprimere il parallelismo (utile per eventuali verifiche).

7.6.3.5 Ortogonalità di due complessi

Se a e b sono complessi entrambi non nulli, saranno detti ortogonali se tali sono le rette per l'origine e per il complesso considerato.
Dato che la moltiplicazione per i coincide con una rotazione di 90°, ci si attende che a e b siano ortogonali se a e ib sono paralleli; ciò accade se, come visto sopra si ha $\operatorname{Im}(a\overline{ib}) = 0$; ma

$$a\overline{ib} = a(\bar{i}\bar{b}) = -i(a\bar{b})$$

e $\operatorname{Im}(-i(a\bar{b})) = -\operatorname{Re}(a\bar{b})$. Pertanto i complessi a e b sono ortogonali se e solo se

$$\operatorname{Re}(a\bar{b}) = 0 \tag{7.63}$$

altra equazione utile per eventuali verifiche.

7.6.3.6 Coseno e seno dell'angolo fra due complessi

Ipotizziamo di avere due complessi espressi in forma esponenziale $a = |a| e^{i\alpha}$ e $b = |b| e^{i\beta}$ con α, β i relativi argomenti. Siamo interessati al coseno dell'angolo $\alpha - \beta$; si noti che a mero livello di angolo $\alpha - \beta$ è l'angolo del complesso $a\bar{b}$, infatti $a\bar{b} = |a| |b| e^{i(\alpha-\beta)}$. Passando alle parti reali ed immaginarie di $a\bar{b}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(a\bar{b}) &= |a| |b| \cos(\alpha - \beta) \\
\operatorname{Im}(a\bar{b}) &= |a| |b| \sin(\alpha - \beta) = -|a| |b| \sin(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

dalle quali è immediato ottenere seno e coseno di $\alpha - \beta$.

Capitolo 8

Cardinalità degli insiemi

8.1 Introduzione

Osservazione 156. Per cardinalità di un insieme X, si intende indicativamente/intuitivamente il numero di elementi che compongono detto insieme.

Osservazione 157. Di fatto l'analisi affronta il problema di tale conteggio in maniera indiretta, formalizzando quello che implicitamente facciamo quando contiamo (ossia creare funzioni biettive tra un insieme, le dita, e un altro, gli oggetti).

8.1.1 Equipotenza e cardinale

Definizione 8.1.1 (Insiemi equipotenti)**.** Due insiemi X, Y si dicono equipotenti se tra essi esiste una biiezione $f : X \to Y$.

Osservazione 158. Di due insiemi equipotenti si usa dire che hanno lo stesso cardinale

Osservazione 159. Per denotare il cardinale di un insieme X si usa $|X|$ o $\mathrm{Card}\,(X)$.

Proposizione 8.1.1. *L'equipotenza è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Infatti è una relazione:

- riflessiva: ogni insieme è equipotente a se stesso (ad esempio mediante la funzione identità);
- simmetrica: se X è equipotente ad Y (mediante f) allora Y è equipotente ad X (mediante f^{-1})
- transitiva: se X è equipotente a Y (mediante f) ed Y a Z (mediante g), allora X è equipotente a Z (mediante $g \circ f$)

□

Esempio 8.1.1 (Equipotenza di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$)**.** $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti, sebbene sia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ad esempio attraverso la seguente funzione biunivoca:

```
Z  0  1  -1  2  -2  ...    n    -n  ...

N  0  1   2  3   4  ... 2n - 1  2n  ...
```

La legge definita realizza una corrispondenza biunivoca: quindi anche se dal punto di vista dell'inclusione $\mathbb{Z}$ ha più elementi di $\mathbb{N}$ (nel senso che ha tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ più altri), gli insiemi hanno la stessa cardinalità e quindi vanno pensati come ugualmente numerosi.

Esempio 8.1.2 (Cardinalità di intervalli di $\mathbb{R}$)**.** Qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}$ non degenere ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$ stesso.
Possiamo infatti innanzitutto definire una funzione $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $y = \frac{x}{1+|x|}$ che mappa in maniera biettiva $\mathbb{R}$ in $]-1, 1[$.
Da qui possiamo mostrare la biezione con un intervallo a scelta, ad esempio per $]0; 1[$ ci serviamo della funzione biettiva $y = \frac{x+1}{2}$

8.1.2 Ordine dei cardinali

Definizione 8.1.2 (Cardinalità minore o uguale)**.** Un insieme X ha cardinalità minore od uguale di un altro Y, e si scrive $\operatorname{Card}(X) \leq \operatorname{Card}(Y)$, se esiste almeno una funzione $f : X \to Y$ iniettiva

Osservazione 160. Se la funzione è poi anche suriettiva si ha $\operatorname{Card}(X) = \operatorname{Card}(Y)$.

Definizione 8.1.3 (Cardinalità minore)**.** Un insieme X ha cardinalità minore di un altro Y, e si scrive $\operatorname{Card}(X) < \operatorname{Card}(Y)$ se si ha che $\operatorname{Card}(X) \leq \operatorname{Card}(Y)$ ma che i due cardinali sono diversi (ossia non esistono biezioni di X su Y)

Definizione 8.1.4 (Cardinalità maggiore o uguale)**.** Un insieme X ha cardinalità maggiore o uguale di un altro Y, e si scrive $\operatorname{Card}(X) \geq \operatorname{Card}(Y)$ se esiste una funzione $f : X \to Y$ suriettiva

Osservazione 161. Se la funzione è poi anche suriettiva si ha $\operatorname{Card}(X) = \operatorname{Card}(Y)$, come detto.

Definizione 8.1.5 (Cardinalità maggiore)**.** Un insieme X ha cardinalità maggiore di un altro Y, e si scrive $\operatorname{Card}(X) > \operatorname{Card}(Y)$, se si ha che $\operatorname{Card}(X) \geq \operatorname{Card}(Y)$ ma i due cardinali sono diversi (ossia non esistono biezioni di X su Y)

Proposizione 8.1.2. *La relazione* $\operatorname{Card}(X) \leq \operatorname{Card}(Y)$ *è una relazione d'ordine largo.*

Dimostrazione. La relazione è

- riflessiva: ad esempio usando la funzione identità, iniettiva;
- antisimmetrica: l'antisimmetria è dimostrata applicando

  $$\operatorname{Card}(X) \leq \operatorname{Card}(Y) \wedge \operatorname{Card}(Y) \leq \operatorname{Card}(X) \implies \operatorname{Card}(X) \leq \operatorname{Card}(Y)$$

  attraverso il teorema di Cantor-Schroeder-Bernstein che afferma: se X e Y sono insiemi, e vi sono due funzioni iniettive $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, allora esiste $h : X \to Y$ che è biettiva[1];

[1] Dimostrazione sul De Marco 1 a pag 165.

- transitiva: per il fatto che la composizione di funzioni iniettive è ancora una funzione iniettiva.

□

Proposizione 8.1.3. *La relazione* Card$(X) \leq$ Card(Y) *è relazione d'ordine totale*

Dimostrazione. Omessa (richiede comunque l'assioma della scelta). □

Proposizione 8.1.4 (Cardinalità dell'insieme delle parti)**.** *Per ogni insieme X il suo cardinale è inferiore a quello del suo insieme delle parti.*

$$\mathrm{Card}\,(X) < \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(X)) \tag{8.1}$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che qualsiasi funzione $f : X \to \mathcal{P}(X)$ non può essere suriettiva; funzioni di questo tipo associano un elemento di X ad un sottoinsieme di X stesso (ad esempio $x \to \{x\}$).
Consideriamo il sottoinsieme $N \subseteq X$ degli elementi di X che non appartengono alla propria immagine tramite f:

$$N = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Se nella funzione tutti gli elementi sono contenuti nella propria immagine, si ha che $N = \emptyset$, ma quanto segue è comunque valido.
Si ha che:

- $N \in \mathcal{P}(X)$
- $N \notin f(X)$ perché se ci fosse un $a \in X$ tale che $f(a) = N$ due casi sarebbero possibili:
  - $a \in N = f(a)$: allora $a \in f(a)$ e quindi $a \notin N$, assurdo;
  - $a \notin N = f(a)$: a verifica la proprietà caratteristica di N e quindi $a \in N$, assurdo.

Pertanto essendo N (sia esso vuoto o meno) un sottoinsieme di X, appartiene al codominio $\mathcal{P}(X)$ ma non all'immagine $f(X)$; pertanto la funzione non è suriettiva. □

8.1.3 Insiemi finiti

Definizione 8.1.6 (Insieme I_n)**.** Definiamo

$$I_n = \{1, \ldots, n\}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$$

ponendo $I_0 = \emptyset$.

Teorema 8.1.5. *Per $n \in \mathbb{N}$ consideriamo una funzione del tipo $f : I_n \to I_n$, avente dominio e codominio con lo stesso numero di elementi n. Allora le seguenti tre asserzioni sono equivalenti: f è iniettiva, f è suriettiva, f è biettiva.*

Osservazione 162. Ossia se la funzione f ha una delle tre proprietà (ad esempio è iniettiva) ha anche le rimanenti due (è suriettiva e biettiva).

Dimostrazione. Che dalla biiettività derivino iniettività e suriettività si ha per definizione; pertanto per dimostrare il teorema basta provare (per induzione su n) che dall'iniettività (o suriettività) derivi la biettività.
In entrambi i casi per $n = 1$ la cosa è facilmente verificata (pensare a due diagrammi di Venn con un elemento in ciascun cerchio ed una unica funzione possibile); supponiamo le cose vere per $n \geq 2$ e mostriamo che da ciò segue che essa vale per $n + 1$:

- sia $f : I_{n+1} \to I_{n+1}$ iniettiva e concentriamo l'attenzione sulla funzione nell'$n + 1$-esimo elemento. Se si ha che:
  - $f(n + 1) = n + 1$ (i due elementi $n + 1$ sono uniti dalla funzione) f può essere ristretta in dominio e codominio a $g : I_n \to I_n$ ed è banale verificare che f è biettiva se e solo se lo è g (che si ipotizza vero per l'ipotesi induttiva);
  - $f(n + 1) = k \neq n + 1$ (ovvero l'$n + 1$-esimo elemento del dominio si associa ad uno dei primi n del codominio) consideriamo la permutazione $\sigma : I_{n+1} \to I_{n+1}$ che scambia fra loro k ed $n+1$ lasciando fermi gli altri elementi. Dato che σ è biettiva la composizione $h = \sigma \circ f$ sarà biettiva se lo è f; e poiché $h(n + 1) = n + 1$, per queste funzioni il risultato vale.

TODO: non mi è chiarissimo qui

- se $f : I_n \to I_n$ è suriettiva possiamo definire la sua inversa destra $g : I_n \to I_n$ tale che $f \circ g = 1_{I_n}$ scegliendo ad esempio il valore minimo della fibra $g(k) = \min f^{\leftarrow}(\{k\})$ per ogni $k \in I_n$. Si vede subito che g è iniettiva; ma allora g è biettiva (come dimostrato per induzione al punto precedente) e quindi anche f è biettiva (poiché 1_{I_n}, biettiva, deriva da composizione di g, anch'essa biettiva, con f, che deve per forza dunque esser biettiva).

□

Corollario 8.1.6. *Se* $m \neq n$ *allora* $\operatorname{Card}(I_m) \neq \operatorname{Card}(I_n)$*; e se* $m < n$ *allora* $\operatorname{Card}(I_m) < \operatorname{Card}(I_n)$

Dimostrazione. Se $m < n$ allora $I_m \subset I_n$, pertanto $\operatorname{Card}(I_m) \leq \operatorname{Card}(I_n)$ (è possibile definire una funzione iniettiva da $I_m \subset I_n$) ; ma non può essere $\operatorname{Card}(I_m) = \operatorname{Card}(I_n)$ poiché non vi sono funzioni $f : I_m \to I_n$ che oltre ad essere iniettive siano anche suriettive (numero di elementi del codominio è superiore) □

Definizione 8.1.7 (Insieme finito)**.** Insieme X equipotente ad un insieme I_n: si ha che $\operatorname{Card}(X) = n$.

Definizione 8.1.8 (Insieme infinito)**.** Insieme non finito.

Proprietà insiemi finiti Se X è un insieme finito,

- allora le funzioni iniettive di X in se coincidono con le suriettive e con le biettive: in altre parole il teorema 8.1.5 vale per qualsiasi insieme finito, non solo per I_n;
- il corollario 8.1.6 esprime che ogni suo sottoinsieme proprio $S \subset X$ non sarà mai equipotente; ne segue che l'insieme $\mathbb{N}$ è infinito (in quanto $I_n \subset \mathbb{N}$, dato che $0 \notin I_n$);

8.1.4 Cardinalità notevoli

Osservazione 163. Le cardinalità più importanti degli insiemi sono quella di $\mathbb{N}$ (numerabile) e quella di $\mathbb{R}$ (non numerabile).

Osservazione 164. Non sono le uniche cardinalità per insiemi infiniti: è sempre possibile costruire un insieme di cardinalità maggiore a partire da uno dato, facendo semplicemente il suo insieme delle parti; pertanto i livelli gerarchici delle cardinalità infinite sono anch'essi infiniti.

8.1.4.1 Cardinalità numerabile

Osservazione 165. Si ha che

$$\mathrm{Card}\,(I_n) = n < \mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) = \aleph_0 \tag{8.2}$$

cioè $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$ supera tutti i cardinali finiti; si dimostra che $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$ è il *minimo* tra i cardinali infiniti.

Definizione 8.1.9 (Insieme numerabile)**.** Insieme equipotente a $\mathbb{N}$

Osservazione 166. Noi useremo questo termine in senso più lato, intendendo di cardinale minore o uguale ad $\aleph_0$ (specificando numerabile infinito se necessario)

Osservazione 167. Ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è ancora numerabile (finito o infinito numerabile).

8.1.4.2 Cardinalità non numerabile

Osservazione 168. $\mathbb{R}$ (e $\mathbb{C}$ di conseguenza) è *non numerabile*; nello specifico si può dimostrare (De Marco pag 168) che:

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \tag{8.3}$$

Definizione 8.1.10 (Insieme non numerabile)**.** Insieme equipotente ad $\mathbb{R}$

8.2 Operazioni con cardinali

8.2.1 Addizione

8.2.1.1 Insiemi in numero finito

Definizione 8.2.1 (Somma finita di cardinali di insiemi disgiunti)**.** Dati due insiemi X e Y disgiunti, si definisce la somma dei cardinali come il cardinale dell'unione:

$$\mathrm{Card}\,(X) + \mathrm{Card}\,(Y) := \mathrm{Card}\,(X \cup Y), \quad \text{se } X \cap Y = \emptyset \tag{8.4}$$

Osservazione 169. È immediato vedere che, se X_1 e Y_1 sono disgiunti ed equipotenti rispettivamente a X e Y, allora $X \cup Y$ è equipotente a $X_1 \cup Y_1$.

Osservazione 170. Nel caso di insiemi non disgiunti ($X \cap Y \neq \emptyset$) la somma dei cardinali è definita dalla cardinalità dell'unione disgiunta (ovvero contando due volte eventuali elementi ripetuti)

Definizione 8.2.2 (Somma finita di cardinali di insiemi non disgiunti)**.**

$$\mathrm{Card}\,(X) + \mathrm{Card}\,(Y) := \mathrm{Card}\,(X \,\dot{\cup}\, Y), \quad \text{se } X \cap Y \neq \emptyset \tag{8.5}$$

Teorema 8.2.1. *Per ogni coppia di insiemi X, Y si ha*

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(X) + \mathrm{Card}\,(Y) = \mathrm{Card}\,(X \cup Y) + \mathrm{Card}\,(X \cap Y)} \tag{8.6}$$

Dimostrazione. Per provarlo dobbiamo definire una biiezione tra l'unione disgiunta di X ed Y ($X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$) e l'unione disgiunta di $X \cup Y$ e $X \cap Y$ ($X \cup Y \times \{0\} \cup X \cap Y \times \{1\}$).
Consideriamo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$; senza perdita di generalità ipotizziamo $n < r$. L'unione disgiunta è

$$X \,\dot{\cup}\, Y = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0), (x_1, 1), (x_2, 1), \ldots, (x_n, 1), \ldots, (x_r, 1)\}$$

Definiamo poi l'unione disgiunta $(X \cup Y) \,\dot{\cup} (X \cap Y)$ come l'insieme delle coppie ordinate con $(x_i, 0)$ se $x_i \in (X \cup Y)$, e $(x_i, 1)$ se $x_i \in (X \cap Y)$ (ossia prendo una volta univocamente tutti gli elementi dei due insiemi e gli accoppio 0, poi riprendo gli elementi dell'intersezione e gli accoppio 1):

$$(X \cup Y) \,\dot{\cup} (X \cap Y) = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0), \ldots, (x_r, 0), (x_1, 1), (x_2, 1), \ldots (x_n, 1)\}$$

Per dimostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità occorre trovare una biezione tra i due insiemi. Con la notazione adottata è facilmente definita: le coppie di $(X \cup Y) \,\dot{\cup} (X \cap Y)$ con elementi facenti parte dell'intersezione dei due insiemi originari (ad esempio $(x_2, 1)$) li associo con la coppia di elemento equivalente proveniente da uno degli insiemi stessi (ad esempio arbitrariamente da X), mentre gli elementi rimanenti sono accoppiabili naturalmente non considerando il secondo termine della coppia

```
(x1, 0) -> (x1, 1)
(x2, 0) -> (x1, 1)    elementi comuni accoppiati ad X
(x3, 0) -> (x1, 1)

(x1, 1) -> (x1, 0)
(x2, 1) -> (x2, 0)    elementi rimanenti accoppiati
(xn, 1) -> (xn, 0)    non considerando il secondo termine
(xr, 1) -> (xr, 0)
```

□

Osservazione 171. Si nota che la somma dei cardinali finiti si riconduce alla somma di numeri naturali; altresì che *le disuguaglianze tra cardinali possono essere sommate membro a membro.*

8.2.1.2 Insiemi in numero infinito

Definizione 8.2.3 (Somma infinita di cardinali di insiemi disgiunti)**.** Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi (ossia l'insieme degli indici Λ può essere finito o infinito), e la famiglia è disgiunta, il cardinale somma è il cardinale dell'unione:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Card}\,(X_\lambda) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right)$$

Definizione 8.2.4 (Somma infinita di cardinali)**.** Per una famiglia generica (disgiunta o meno) si ha:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Card}(X_\lambda) = \operatorname{Card}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}\right) \tag{8.7}$$

Proposizione 8.2.2. *Il cardinale dell'unione è minore o uguale a quello dell'unione disgiunta:*

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \leq \operatorname{Card}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Card}(X_\lambda) \tag{8.8}$$

Dimostrazione. È facile infatti definire una funzione suriettiva

$$p : \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\} \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

ponendo $p(x, \lambda) = x$ per ogni $(x, \lambda) \in X_\lambda \times \{\lambda\}$. □

Osservazione 172. Si nota così che un'unione finita (ovvero unione di una famiglia finita, avente insieme degli indici Λ finito) di insiemi finiti è ancora un insieme finito; e se l'unione è disgiunta, il cardinale dell'unione è la somma dei cardinali (somme di numeri naturali).

Proposizione 8.2.3. *Un'unione* numerabile *di insiemi* finiti *è un insieme numerabile (ossia finito o al più infinito numerabile).*

Dimostrazione. Il caso dell'insieme di indici finito è stato esaurito prima; resta il caso di Λ equipotente a $\mathbb{N}$ (supponiamo allora $\Lambda = \mathbb{N}$). Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia infinita di insiemi finiti. Supponendo $\operatorname{Card}(X_n) = c_n$, definiamo una funzione biettiva che indicizza ciascun elemento di ciascun insieme con un indice progressivo interno $f_n : X_n \to \{0, \ldots, c_{n-1}\}$; non è restrittivo supporre che $c_n > 0$ (ossia possiamo scartare dalla successione degli X_n gli insiemi vuoti senza alterare la questione). Una biiezione $f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \{n\} \to \mathbb{N}$ si trova così: se $(x, n) \in X_n \times \{n\}$ si pone

$$f((x, n)) = c_0 + \ldots + c_{n-1} + f_n(x)$$

ossia metto in ordine e conto tutti gli elementi degli $X_1, \ldots, X_{n-1}$ precedenti all'n-esimo; dopodiché aggiungo l'indice interno restituito dalla funzione f_n. Facile vedere che f è biettiva: per l'inversa g, consideriamo un generico $m \in \mathbb{N}$ e restituiamo insieme e posizione cui appartiene. Prendiamo il minimo $n \in \mathbb{N}$ tale che $c_0 + \ldots + c_n > m$ (n esiste perché $c_0 + \ldots + c_j \geq j$, essendo il generico $c_k \geq 1$). Il gruppo originario sarà l'$(n-1)$-esimo, mentre l'indice è dato da $g(m) = f_n^{-1}(m - (c_0 + \ldots + c_{n-1}))$ (occhio che quest'ultimo termine è c_{n-1}, non c_n). □

Corollario 8.2.4. *Dalla proposizione 8.2.3 deriva che l'insieme* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *è numerabile.*

Dimostrazione. Il libro dice che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si può scrivere come unione numerabile di insiemi finiti, la dimostrazione non mi convince/non l'ho capita. □

Corollario 8.2.5. *Dalla proposizione 8.2.3 deriva che l'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

Dimostrazione. Infatti posto $\mathbb{N}^> = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si noti che $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^>$ è numerabile poiché equipotente a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (questo perché $\mathbb{Z}$ è equipotente a $\mathbb{N}$, cfr esercizio 8.1.1, ed $\mathbb{N}^>$ è equipotente a $\mathbb{N}$ ad esempio mediante la funzione successore, biettiva, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^>$ $f(n) = n + 1$). Si può definire allora la funzione suriettiva divisione $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^> \to \mathbb{Q}$, definita da $(a, b) \to \frac{a}{b}$. Da questo deriva che $\mathrm{Card}\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^>) \geq \mathrm{Card}\,(\mathbb{Q})$, ossia $\mathbb{Q}$ finito o numerabile; chiaramente è infinito, quindi è numerabile infinito. □

Corollario 8.2.6. *Dalla proposizione 8.2.3 deriva che ogni unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Omessa. □

8.2.2 Moltiplicazione

8.2.2.1 Insiemi in numero finito

Definizione 8.2.5 (Prodotto di due cardinali)**.** È il cardinale del prodotto cartesiamo dei due insiemi ossia

$$\mathrm{Card}\,(X) \cdot \mathrm{Card}\,(Y) := \mathrm{Card}\,(X \times Y) \tag{8.9}$$

Osservazione 173. Si noti che, essendo

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \tag{8.10}$$

con entrambe le unioni disgiunte, il cardinale di un prodotto $X \times Y$è una somma di $\mathrm{Card}\,(Y)$ volte il cardinale di X od anche di $\mathrm{Card}\,(X)$ vole quello di Y.

Osservazione 174. In particolare, se X, Y sono finiti, di m ed n elementi rispettivamente, allora $X \times Y$ ha mn elementi.

Proposizione 8.2.7. *Il prodotto di cardinali è commutativo, ossia*

$$\mathrm{Card}\,(X) \cdot \mathrm{Card}\,(Y) = \mathrm{Card}\,(Y) \cdot \mathrm{Card}\,(X) \tag{8.11}$$

Dimostrazione. Infatti basta considerare la simmetria $(x, y) \to (y, x)$, biezione di $X \times Y$ su $Y \times X$. □

8.2.2.2 Insiemi in numero infinito

Definizione 8.2.6 (Prodotto di una famiglia finita di cardinali)**.** E' il cardinale del prodotto cartesiano della famiglia:

$$\mathrm{Card}\,((X_k)_{1 \leq k \leq p}) = \mathrm{Card}\,(X_1 \times \ldots \times X_p) \tag{8.12}$$

Osservazione 175. Se ogni X_k è finito, con $\mathrm{Card}\,(X_k) = m_k$, il prodotto cartesiano ha cardinale $\prod_{k=1}^{p} x_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_p$.

Definizione 8.2.7 (Prodotto di una famiglia infinita di cardinali)**.** È il cardinale del prodotto cartesiano della famiglia

$$\mathrm{Card}\,((X_k)_{\lambda \in \Lambda}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \tag{8.13}$$

8.2.3 Teorema fondamentale dell'aritmetica dei cardinali infiniti

Teorema 8.2.8. *Per ogni insieme infinito X, X è equipotente ad $X \times X$.*

Dimostrazione. Omessa (vedi eventualmente A.1.2). □

Corollario 8.2.9. *Se* $\text{Card}(X)$ *e* $\text{Card}(Y)$ *sono cardinali, almeno uno dei quali infinito, allora*

$$\boxed{\text{Card}(X) + \text{Card}(Y) = \max\{\text{Card}(X), \text{Card}(Y)\}} \tag{8.14}$$

In particolare se $\text{Card}(X)$ *è infinito:*

$$\text{Card}(X) + \text{Card}(X) = 2\,\text{Card}(X) = \text{Card}(X) \tag{8.15}$$

Corollario 8.2.10. *Se* $\text{Card}(X)$ *e* $\text{Card}(Y)$ *sono non nulli, almeno uno dei due infinito, si ha*

$$\boxed{\text{Card}(X) \cdot \text{Card}(Y) = \max\{\text{Card}(X), \text{Card}(Y)\}} \tag{8.16}$$

Corollario 8.2.11. *Se X è un insieme infinito, allora ha cardinalità pari a quella del prodotto cartesiano con se stesso (di termini a piacere); altresì cardinalità pari a quella dell'unione dei prodotti cartesiani possibili in $\mathbb{N}$:*

$$\text{Card}(X) = \text{Card}(X^n), \qquad n \geq 1 \tag{8.17}$$

$$\text{Card}(X) = \text{Card}\left(\bigcup_{n \in N} X^n\right) \tag{8.18}$$

Osservazione 176. Dal teorema 8.2.8 deriva ad esempio che $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sia equipollente a $\mathbb{R}$ ovvero siano possibili biezioni tra la retta e il piano.

8.2.4 Esponenziazione

Definizione 8.2.8 (Insieme X^Y)**.** Se X ed Y sono insiemi, si indica con Y^X l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to Y$.

Osservazione 177. Siamo interessati a $\text{Card}\left(Y^X\right)$

Proposizione 8.2.12. *Si ha*

$$\text{Card}\left(Y^X\right) = \text{Card}(Y)^{\text{Card}(X)} \tag{8.19}$$

Osservazione 178. Se X e Y sono finiti, con p ed m elementi, allora Y^X è finito con m^p elementi.

Esempio 8.2.1 (Cardinalità di $\mathcal{P}(X)$)**.** Usando la biezione tra $\mathcal{P}(X)$ su $\{0,1\}^X$ (l'insieme delle funzioni caratteristiche definibili su un insieme X, che vanno a costruire un sottoinsieme $S \subseteq X$) ne deriva che $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{Card}(X)}$

Osservazione 179. Dati gli insiemi X, Y, Z è possibile derivare le proprietà (dimostrando l'esistenza di opportune biezioni), che funzionano similmente agli esponenziali normali.

Proposizione 8.2.13 (Proprietà esponenziazione)**.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(X)+\operatorname{Card}(Y)} &= \operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(X)} \cdot \operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(Y)} \\
(\operatorname{Card}(X) \cdot \operatorname{Card}(Y))^{\operatorname{Card}(Z)} &= \operatorname{Card}(X)^{\operatorname{Card}(Z)} \cdot \operatorname{Card}(Y)^{\operatorname{Card}(Z)} \\
\left(\operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(X)}\right)^{\operatorname{Card}(Y)} &= \left(\operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(Y)}\right)^{\operatorname{Card}(X)} = \operatorname{Card}(Z)^{\operatorname{Card}(X)\cdot\operatorname{Card}(Y)}
\end{aligned}$$

Capitolo 9

Sommatorie e produttorie

9.1 Sommatorie

9.1.1 Sommatoria singola

9.1.1.1 Definizioni e utilizzi

Se $(a_j)_{j\in J}$, $a : J \to \mathbb{C}$ è una famiglia *finita* di numeri complessi (ossia l'insieme degli indici J è finito), la somma di tutti i numeri a_j per $j \in J$ si indica con

$$\sum_{j\in J} a_j \tag{9.1}$$

Se $J = \emptyset$ si pone per definizione $\sum_{j\in J} a_j = 0$.
È molti importante osservare che il simbolo $\sum_{j\in J} a_j$ non dipende da j ma solo dall'intero insieme J e dalla funzione $a : J \to \mathbb{C}$; la variabile j si dice *muta*, si ha cioè

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in J} a_k = \sum_{\lambda\in J} a_\lambda \tag{9.2}$$

Altre volte la notazione di sommatoria si usa indicare la somma di valori assunti da una funzione che utilizza l'indice come input:

$$\sum_{j\in J}^{n} f(j) \tag{9.3}$$

Commutatività La commutatività entro sommatoria si può esprimere osservando che se J è finito e $\sigma : J \to J$ è una permutazione tra indici, biiezione che cambia l'ordine degli elementi in J allora

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)} \tag{9.4}$$

ossia cambiando l'ordine degli elementi che vengono via via sommati, il risultato non cambia.
In generale se $\varphi : K \to J$ è biettiva si ha

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in K} a_{\varphi(k)} \tag{9.5}$$

Ossia possiamo anche utilizzare un altro set di indici K posto che, per garantire l'uguaglianza, vi sia una biezione che ci garantisce che questi vadano a puntare agli stessi elementi.

Indici comuni Spesso l'insieme J degli indici è $I_n = \{1, \ldots, n\}$ e si scrive allora anche

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \qquad \text{oppure} \sum_{1 \leq j \leq n}^{n} a_j \qquad \text{in luogo di} \sum_{j \in I_n} a_j$$

e per esteso

$$\sum_{j \in I_n} a_j = a_1 + \ldots + a_n$$

Sottofamiglie Spesso avremo successioni di reali o complessi $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e dovremo considerare somme di sottofamiglie comprese tra due indici m, n con $m \leq n$:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{m \leq j \leq n} a_j = a_m + \ldots + a_n$$

9.1.1.2 Alcune tecniche utili

Traslazione di indici Si tratta di un metodo per cambiare gli indici senza cambiare gli oggetti puntati; si tratta di sostituire $j + offset$ al posto di j negli indici della sommatoria e sostituendo $j - offset$ nei termini indiciati (sia offset un termine positivo o negativo)

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m-p}^{n-p} a_{j+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p} \tag{9.6}$$

In sostanza per garantire l'uguaglianza delle sommatorie, basta che alla fine l'indice punti allo steso elemento poi la formula può essere cambiata a piacere.

Riflessione di indici Mediante questa operazione sugli indici si sommano gli stessi elementi, posti però in ordine inverso (si somma dall'indice originario più alto al più basso):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \tag{9.7}$$

L'ultima eguaglianza si giustifica mediante una traslazione di indici (sostituendo con $i - 1$ negli indici della sommatoria e $i + 1$ nei termini della stessa).

Cambiamenti di indice Può tornare utile nel caso di sommatoria di funzione; ad esempio consideriamo di avere

$$\sum_{i=-10}^{-8} \frac{1}{i+1} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{8} - \frac{1}{7}$$

Al fine di semplificare l'espressione cambiamo indice ed espressione sotto sommatoria ponendo $j = i + 10$ (ovvero $i = j - 10$):

$$\sum_{i=-10}^{-8} \frac{1}{i+1} = \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j-9}$$

Se si desidera, possiamo tornare all'indice iniziale con la sostituzione $i = j$:

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j-9} = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i-9}$$

Quindi:

$$\sum_{i=-10}^{-8} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i-9}$$

9.1.1.3 Proprietà

Valgono le seguenti *proprietà* (che possono essere utili lette sia da sinistra a destra che viceversa).

Sommatoria di costante Se k è una costante che non dipende dall'indice i, allora:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} k = nk} \tag{9.8}$$

Si pone convenzionalmente $a_i = k$, per cui:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \underbrace{k + k + \ldots + k}^{\text{n volte}} = kn$$

Sommatoria di prodotto per costante Se k è una costante che non dipende dall'indice i, allora:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{9.9}$$

Infatti

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Scomposizione/somme su sottoinsiemi Se $m > n$, allora:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i} \tag{9.10}$$

Infatti

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i = (a_1 + \ldots + a_n) + (a_{n+1} + \ldots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Generalizzando, se Λ è un insieme di indici, $a : \Lambda \to \mathbb{C}$ una famiglia di complessi, e J, K sottoinsiemi finiti *disgiunti* di Λ si ha:

$$\sum_{\lambda \in J \cup K} a_\lambda = \sum_{\lambda \in J} a_\lambda + \sum_{\lambda \in K} a_\lambda \tag{9.11}$$

Sommatoria di somme/additività rispetto alle famiglie Vale la:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{9.12}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\end{aligned}$$

Generalizzando, se Λ è un insieme di indici, $a : \Lambda \to \mathbb{C}$ una famiglia di complessi e $b : \Lambda \to \mathbb{C}$ è un'altra famiglia di complessi si può definire la somma puntuale $a + b : \Lambda \to \mathbb{C}$ delle due famiglie ponendo $(a + b)(\lambda) = a_\lambda + b_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Si ha anche che per ogni sottoinsieme finito J di Λ:

$$\sum_{j \in J}(a_j + b_j) = \sum_{j \in J} a_j + \sum_{j \in J} b_j \tag{9.13}$$

Sommatoria di termini lineari Se k e c sono costanti che non dipendono dall'indice i,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(ka_i + c) = nc + k\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{9.14}$$

Infatti, alla luce delle proprietà precedentemente viste:

$$\sum_{i=1}^{n}(ka_i + c) = \sum_{i=1}^{n} ka_i + \sum_{i=1}^{n} c = nc + k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Si noti che prima abbiamo preposto nc alla sommatoria per evitare confusione; un altro modo sarebbe $k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + nc$

9.1.1.4 Alcune applicazioni

Prodotti di sommatorie Se $(a_j)_{j \in J}$ è una famiglia finita di numeri complessi e $(b_k)_{k \in K}$ è un'altra famiglia finita di numeri complessi si ha:

$$\left(\sum_{j \in J} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k \in K} b_k\right) = \sum_{j \in J,\, k \in K} a_j b_k = \sum_{(j,k) \in J \times K} a_j b_k \tag{9.15}$$

accettiamo il fatto (che si può dimostrare per induzione sul numero di elementi di K).

Prodotti di sommatorie aventi medesimo insieme di indici Nel caso gli elementi siano indiciati dal medesimo set, es $J = I_n$, possiamo iniziare a pensare il relativo prodotto cartesiano $J \times J$ della precedente come una matrice quadrata:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\
&= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_n + \\
&\quad a_2 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_2 b_n + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i \neq j} a_i b_j
\end{aligned}$$

In altre parole abbiamo scomposto la sommatoria in due pezzi; quella degli elementi residenti sulla diagonale principale (primo termine) e i rimanenti (secondo termine).

Quadrato di sommatoria Nel caso particolare di quadrato di sommatoria degli elementi $(a_j)_{j \in J}$, si ha:

$$\left(\sum_{j \in J} a_j\right)^2 = \left(\sum_{j \in J} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j \in J} a_k\right) = \sum_{(j,k) \in J \times J} a_j a_k \tag{9.16}$$

Per ritrovare l'usuale espressione del quadrato di una somma spezziamo indici $J \times J$ (e relative sommatorie) nella diagonale $\Delta = \{(j, j) : j \in J\}$ e nel suo complementare $J \times J \setminus \Delta$. Si ha

$$\sum_{(j,k) \in J \times J} a_j a_k = \sum_{(j,k) \in \Delta} a_j a_k + \sum_{(j,k) \in J \times J \setminus \Delta} a_j a_k$$

e dato che essendo $j = k$ per $(j, k) \in \Delta$ possiamo riscrivere il primo termine come

$$\sum_{(j,k) \in \Delta} a_j a_k = \sum_{j \in J} a_j a_j = \sum_{j \in J} a_j^2$$

mentre il secondo termine, che dipende dal set di indici $J \times J \setminus \Delta$, può essere diviso in due parti disgiunte, $S = \{(j, k) : j < k\}$ e $T = \{(j, k) : j > k\}$ (si pensi al triangolo superiore e inferiore della matrice che rappresenta il prodotto cartesiano $J \times J$):

$$\sum_{(j,k) \in J \times J \setminus \Delta} a_j a_k = \sum_{(j,k) \in S} a_j a_k + \sum_{(j,k) \in T} a_j a_k$$

e poiché $(j, k) \to (k, j)$ è una biezione dell'insieme S su T si ha

$$\sum_{(j,k) \in T} a_j a_k = \sum_{(k,j) \in S} a_j a_k = \sum_{(r,s) \in S} a_s a_r$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato un mero cambio di indici muti. Se ne effettuiamo uno lievemente simile nell'altro termine

$$\sum_{(j,k)\in S} a_j a_k = \sum_{(r,s)\in S} a_r a_s$$

possiamo tornare a

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in S} a_j a_k + \sum_{(j,k)\in T} a_j a_k &= \sum_{(r,s)\in S} a_r a_s + \sum_{(r,s)\in S} a_s a_r \\ &= \sum_{(r,s)\in S} (a_r a_s + a_s a_r) \\ &= \sum_{(r,s)\in S} 2 a_r a_s\end{aligned}$$

e si conclude con infine a

$$\left(\sum_{j\in J} a_j\right)^2 = \sum_{j\in J} a_j^2 + \sum_{(j,k)\in J\times J: j<k} 2 a_j a_k$$

cioè il quadrato di na somma è la somma dei quadrati di tutti i termini, più la somma di tutti i doppi prodotti dei termini stessi.

9.1.2 Sommatorie doppie

9.1.2.1 Definizioni

Date più quantità dipendenti da due indici, es:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

la loro somma si può scrivere utilizzando la notazione di sommatoria:

$$\begin{aligned} = \quad & (a_{11} + a_{12} + \dots a_{1n}) + \\ & +(a_{21} + a_{22} + \dots a_{2n}) + \\ & + \dots + \\ & +(a_{m1} + a_{m2} + \dots a_{mn}) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\end{aligned}$$

Ponendo $\sum_{i=1}^{n} a_{1i} = S_1, \sum_{i=1}^{n} a_{2i} = S_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{mi} = S_m$, la somma degli $m \times n$ elementi a diviene

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m = \sum_{j=1}^{m} S_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}$$

e si legge “sommatoria doppia delle a_{ji} con j che varia da 1 a m ed i che varia da 1 a n”, essendo a_{ji} il termine generico che compare nella somma.
Si noti il caso particolare $\sum_{j=c}^{c}\sum_{i=k}^{k} a_{ji} = a_{ck}$.
Si osservi che le due sommatorie si possono invertirsi (con l'effetto che prima di sommare una riga e poi passare alla successiva, prima si somma una colonna per passare poi alla susseguente; il quale ovviamente non ha riverbero sui risultati):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}$$

infatti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} &= (a_{11} + a_{12} + \dots a_{1n}) + \\
&\quad +(a_{21} + a_{22} + \dots a_{2n}) + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad +(a_{m1} + a_{m2} + \dots a_{mn}) \\
&= (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1}) + \\
&\quad +(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{m2}) + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad +(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn}) = \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{j1} + \sum_{j=1}^{m} a_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{m} a_{jn}
\end{aligned}$$

Ponendo $\sum_{j=1}^{m} a_{j1} = Z_1, \sum_{j=1}^{m} a_{j2} = Z_2, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn} = Z_n$ si ha

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}$$

Anche in questo caso le lettere j e i, indici del termine generico, possono essere sostituite da qualsiasi altre lettere. Talvolta si può trovare $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}$ espresso omettendo gli estremi del campo di variazione della i e della j (se ciò non crea confusione o equivoci), mediante $\sum_j\sum_i a_{ji}$ o anche $\sum_{j,i} a_{ji}$. Talvolta si può trovare la scrittura $\sum\sum a_{ji}$ che è bene evitare perché è sempre meglio indicare gli indici variabili (nel nostro caso j e i) rispetto ai quali si esegue la somma.

9.1.2.2 Proprietà

Sommatoria di costante Se k è una costante che non dipende dagli indici j e i:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k = kmn} \tag{9.17}$$

Infatti è una sommatoria doppia in cui il termine generico $a_{ji} = k$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{m} kn = n\sum_{j=1}^{m} k = kmn$$

Sommatoria di prodotto per costante Se k è una costante che non dipende dagli indici j e i:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} ka_{ji} = k\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}} \tag{9.18}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} ka_{ji} &= ka_{11} + ka_{12} + \ldots + ka_{1n} + \\
&\quad +ka_{21} + ka_{22} + \ldots + ka_{2n} \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad +ka_{m1} + ka_{m2} + \ldots + ka_{mn} \\
&= \sum_{i=1}^{n} ka_{1i} + \sum_{i=1}^{n} ka_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} ka_{mi} = \\
&= k\sum_{i=1}^{n} a_{1i} + k\sum_{i=1}^{n} a_{2i} + \ldots + k\sum_{i=1}^{n} a_{mi} = \\
&= k(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{mi}) = \\
&= k\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}
\end{aligned}$$

Scomposizione/somme su sottoinsiemi Si consideri che:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_1} a_{ji} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n_1+1}^{n} a_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}} \tag{9.19}$$

infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_1} a_{ji} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n_1+1}^{n} a_{ji} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{ji} + \sum_{i=n_1+1}^{n} a_{ji}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \\
\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} + \sum_{j=m_1+1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_1} a_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m_1+1}^{m} a_{ji} = \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}
\end{aligned}$$

Per visualizzare le operazioni di cui sopra si pensi ad una somma degli elementi di una matrice che procede attraverso le colonne (sommatoria interna) e poi passa alla prossima riga (ciclo sulla sommatoria esterna); nel primo caso qui sopra abbiamo aggiunto delle colonne ad una matrice, mentre nel secondo abbiamo aggiunto delle righe ad un'altra matrice.

Sommatoria di somme Vale la seguente:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}+b_{ji}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}} \tag{9.20}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}+b_{ji}) &= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}+b_{ji})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ji}+\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}
\end{aligned}$$

Sommatoria di termini lineari se k e c sono costanti che non dipendono dagli indici j e i, vale:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(ka_{ji}+c) = mnc + k\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}} \tag{9.21}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(ka_{ji}+c) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}ka_{ji} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c \\
&= k\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji} + c\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}1 \\
&= cmn + k\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}
\end{aligned}$$

Portar fuori sommatoria È lecito estrarre da ogni sommatoria i termini che *non* dipendono dall'indice della sommatoria:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_jb_i = \sum_{j=1}^{m}a_j\sum_{i=1}^{n}b_i} \tag{9.22}$$

Cioè dalla seconda sommatoria, fatta secondo l'indice i, si può estrarre il termine a_j che da i non dipende. Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_j b_i =& a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_n + \\
& a_2 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_2 b_n + \\
& \vdots \\
& a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_n = \\
=& a_1 \sum_{i=1}^{n} b_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} b_i + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} b_i \\
=& (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \sum_{i=1}^{n} b_i \\
=& \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} b_i
\end{aligned}$$

Da ciò deriva ad esempio che si può scrivere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j$$

Infatti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_j a_i$$

dove abbiamo posto j al posto di i in una delle due sommatorie per evitare confusioni.
È lecito anche scrivere:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} 1 = n \sum_{j=1}^{m} a_j$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{m} 1 = m \sum_{i=1}^{n} b_i$$

È corretto effettuare la seguente posizione:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_j b_{ji} = \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} b_{ji}$$

cioè estrarre a_j dalla seconda sommatoria da cui non dipende, perché quest'ultima è fatta rispetto all'indice i.
Si osservi che è scorretto scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} \sum_{j=1}^{m} a_j$$

cioè non è possibile estrarre b_{ji} da alcuna sommatoria perché dipende da entrambi gli indici e quindi da entrambe le sommatorie.

9.2 Produttorie

9.2.1 Produttoria singola

9.2.1.1 Definizione

Se $(a_j)_{j\in J}$, $a: J \to \mathbb{C}$ è una famiglia *finita*, il prodotto di tutti i numeri a_j per $j \in J$ si indica con:

$$\prod_{j\in J} a_j \tag{9.23}$$

e si pone per convenzione

$$\prod_{j\in\emptyset} a_j = 1 \tag{9.24}$$

9.2.1.2 Proprietà

Analogamente al caso delle sommatorie valgono le seguenti *proprietà* (che possono essere utili lette sia da sinistra a destra che viceversa).

Produttoria di costante Se k è una costante che non dipende dall'indice i:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} k = k^n} \tag{9.25}$$

Infatti è una produttoria in cui il termine generico $a_i = k$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n = k \cdot k \cdot \dots k \cdot = k^n$$

Produttoria di prodotto per costante Se k è una costante che non dipende dall'indice i:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{9.26}$$

Infatti

$$\prod_{i=1}^{n} k a_i = k a_1 \cdot k a_2 \cdot \dots \cdot k a_n = k^n (a_1 a_2 \cdots a_n) = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Scomposizione in sottoinsiemi Vale la seguente:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} a_i \prod_{i=m+1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{9.27}$$

Infatti

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \prod_{i=m+1}^{n} a_i = (a_1 a_2 \dots a_m)(a_{m+1} a_{m+2} \dots a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Generalizzando, se Λ è un insieme di indici, $a : \Lambda \to \mathbb{C}$ una famiglia di complessi, e J, K sottoinsiemi finiti *disgiunti* di Λ si ha:

$$\prod_{\lambda \in J \cup K} a_\lambda = \prod_{\lambda \in J} a_\lambda \cdot \prod_{\lambda \in K} a_\lambda \tag{9.28}$$

Scomposizione: produttoria di prodotti Vale la seguente:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i} \tag{9.29}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} a_i b_i =& a_1 b_1 \cdot a_2 b_2 \cdot \dots a_n b_n = \\ =& (a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_n) \\ =& \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i\end{aligned}$$

Generalizzando, se Λ è un insieme di indici, $a : \Lambda \to \mathbb{C}$ una famiglia di complessi e $b : \Lambda \to \mathbb{C}$ è un'altra famiglia di complessi si può definire il prodotto $a \cdot b : \Lambda \to \mathbb{C}$ delle due famiglie ponendo $(a \cdot b)(\lambda) = a_\lambda \cdot b_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Si ha anche che per ogni sottoinsieme finito J di Λ:

$$\prod_{j \in J} (a_j \cdot b_j) = \prod_{j \in J} a_j \cdot \prod_{j \in J} b_j \tag{9.30}$$

Logaritmi e sommatorie Vale la seguente:

$$\boxed{\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log a_i} \tag{9.31}$$

Infatti:

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \log(a_i a_2 \dots a_n) = \log a_i + \log a_2 + \dots + \log a_n = \sum_{i=1}^{n} \log a_i$$

9.3 L'utilizzo di maxima

9.3.1 Sommatoria

Per definire una sommatoria si usa la funzione `sum`, di sintassi:

```
sum (expr, i, i_0, i_1)
```

con `expr` una espressione dipendente da un indice (tipicamente `i` ma può essere cambiato) che può essere indice di una lista o utilizzato come argomento di funzione, che varia da `i_0` a `i_1`. Se questi differiscono per un intero `expr` è valutata per ciascuno indice e la somma effettiva ritornata (laddove calcolabile) altrimenti lasciata in via simbolica.
Può essere utile specificare `simpsum` dopo virgola prima della oppure impostare la relativa opzione a `true` per provare/effettuare semplificazioni.

```
##
## sum(i^2,i,1,7)
##                                      140
## sum(a[i],i,1,7)
##                          a  + a  + a  + a  + a  + a  + a
##                           7    6    5    4    3    2    1
## sum(a(i),i,1,n)
##                                   n
##                                  ====
##                                  \
##                                   >    a(i)
##                                  /
##                                  ====
##                                  i = 1
## sum(1/2^n,n,0,inf)
##                                   inf
##                                   ====
##                                   \     1
##                                    >    --
##                                   /      n
##                                   ====  2
##                                   n = 0
## ev(sum(1/2^n,n,0,inf),simpsum)
##                                       2
```

9.3.2 Produttoria

Per definire una produttoria si utilizza la funzione `product`, che presenta sintassi e funzionamento analoghi a `sum`

```
product (expr, i, i_0, i_1)
```

Sempre specularmente può tornare utile `simpproduct` per la semplificazione di produttorie.

Capitolo 10

Calcolo combinatorio

10.1 Introduzione

Definizione 10.1.1 (Calcolo combinatorio)**.** Studio di come quantificare raggruppamenti aventi determinate caratteristiche degli elementi di un insieme finito di oggetti.

Osservazione 180*.* È fondamentale per il calcolo delle probabilità in quanto spesso la probabilità di un evento è calcolabile come il numero di modi in cui detto evento può verificarsi in rapporto al numero di casi possibili.

Definizione 10.1.2 (Principio fondamentale del calcolo combinatorio)**.** Se si realizzano due esperimenti:

- in cui il primo ha m esiti possibili;
- e per ognuno di questi il secondo ha n esiti possibili;
- e l'ordinamento conta per qualificare un esito (ossia sequenze diverse dei singoli esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti):

allora i due esperimenti (considerati congiuntamente) hanno $m \cdot n$ esiti possibili.

Osservazione 181*.* Generalizzato, con r esperimenti nel quale il primo abbia n_1 esiti possibili, per ciascuno di questi il secondo ne abbia n_2 ... per ogni esito dei primi due $r-1$ l'r-esimo n_r esiti possibili e l'ordinamento conta, allora gli esperimenti hanno in tutto $\prod_{i=1}^{r} n_i$ esiti possibili.

Definizione 10.1.3 (Funzione fattoriale)**.** Il fattoriale di n, indicato con $n!$ è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definito come il prodotto dei primi n numeri interi:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \tag{10.1}$$

Si conviene che $0! = 1$.

Osservazione 182 (Definizione ricorsiva)*.* Dato che $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = (n-1)!$ il fattoriale può esser definito anche come:

$$n! = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{N}, n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \end{cases} \tag{10.2}$$

Osservazione 183 (Una semplificazione utile). Se $0 < k < n$, si ha:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \tag{10.3}$$

10.2 Casistica principale

Supponendo di voler costruire sottoinsiemi contenenti k elementi scelti tra gli n elementi di un insieme U:

- nel caso in cui l'*ordine* abbia importanza (configurazioni con gli stessi elementi posti in ordine diverso danno origine ad esiti diversi) abbiamo a che fare con:
  - **permutazioni**: disponiamo di $k = n$ slot ed n elementi ($\in U$) da utilizzare per riempirli. Ci interessa sapere in quanti modi si possono ordinare gli n oggetti: ognuno di questi ordinamenti si chiama *permutazione*. Possiamo avere due casi:
    1. permutazioni *semplici*: gli n elementi da ordinare sono unici (ad esempio gli anagrammi della parola "AMORE");
    2. permutazioni *con ripetizione*: ammettono che un elemento si presenti più volte tra gli n dai quali si può pescare (ad esempio gli anagrammi della parola "PEPPER").
  - **disposizioni** (che costituiscono una versione generalizzata della permutazioni): gli slot sono in numero $k \leq n$ inferiore (o uguale) rispetto agli elementi n con il quale possiamo riempirli. Di fatto qua si considera che gli n elementi siano tutti distinti/diversi. Abbiamo:
    1. disposizioni *semplici*: i k elementi sono pescati da un insieme di n elementi distinti e una volta che l'elemento è stato scelto esce dal pool degli utilizzabili;
    2. disposizioni *con ripetizione*: ciascun elemento dei n può essere estratto più volte
- se viceversa l'*ordine non ha rilevanza*, ossia sottoinsiemi composti da medesimi elementi posti in ordine differente sono considerati uguali (ad esempio quando si vogliono contare insiemi nell'accezione matematica del termine) si ha a che fare con le **combinazioni**. Le combinazioni semplici sono le più utilizzate e si hanno quando il pool dal quale si pesca è composto da oggetti diversi/distinti tra loro.

10.2.1 Permutazioni

Proposizione 10.2.1 (Permutazioni semplici). *Il numero di permutazioni di n elementi distinti in n slot è:*

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!} \tag{10.4}$$

Dimostrazione. Nella prima posizione possiamo porre n alternative, nella seconda $n-1$ (visto che una è già andata nella prima), e così via; arrivando così all'ultima posizione rimane un solo oggetto possibile degli n iniziali. Pertanto per il principio fondamentale del calcolo combinatorio si conclude. $\square$

Osservazione 184. Nel caso in cui vi siano elementi ripetuti/uguali dai quali pescare (ad esempio se vogliamo permutare le lettere di "PEPPER") vogliamo che il numero di esiti complessivi diminuisca (evitando di contare come differenti due configurazioni con elementi uguali permutati tra loro)

Proposizione 10.2.2 (Permutazioni con ripetizione)**.** *Tra gli n dai quali pescare vi siano $i = 1, 2 \dots r$ elementi univoci che si possono ripetere, aventi numerosità rispettivamente $k_1, k_2 \dots k_r$ (ossia si ha $\sum_{i=1}^{r} i \cdot k_i = n$). Le permutazioni uniche (non ripetute) sono:*

$$\boxed{P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}} \tag{10.5}$$

Dimostrazione. Si parte dal numero di permutazioni degli n oggetti al numeratore Applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio al contrario, si tratta di dividere queste per il numero delle $k_1!$ permutazioni uguali fra loro (dovute al "girare" di uno stesso elemento), poi per le $k_2!$ permutazioni del secondo elemento multiplo, e così via. □

Esempio 10.2.1. Considerando le permutazioni PEPPER ad ogni sequenza univoca (ad esempio REPPEP) corrisponderanno 3!2! sequenze che sono di fatto uguali. Pertanto il numero di permutazioni univoche (con ripetizione) di PEPPER saranno $6!/(3! \cdot 2!)$.

Osservazione 185. La formula delle permutazioni è una generalizzazione e vale in realtà per qualsiasi permutazione, anche senza ripetizioni di elementi. Infatti, se abbiamo elementi univoci, ossia $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 1$, otteniamo esattamente la formula delle permutazioni semplici in quanto:

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} = \frac{n!}{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1!} = n! \tag{10.6}$$

10.2.2 Disposizioni

Definizione 10.2.1 (Disposizioni semplici)**.** Se il numero degli slot disponibili è inferiore (o uguale) al numero di elementi dai quali si pesca, gli elementi dai quali si pesca sono distinti tra loro e non vengono reinseriti nel pool dove pescare si hanno le disposizioni semplici.
Sono quello che in statistica si chiama *campionamento senza ripetizione.*

Proposizione 10.2.3 (Numero di disposizioni semplici)**.** *Il numero $D_{n,k}$ di disposizioni semplici di $k \leq n$ oggetti estratti da un insieme di n oggetti differenti è:*

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}} \tag{10.7}$$

Dimostrazione. Il primo componente di una tale sequenza può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$ e così via, sino al k-esimo che può essere scelto in $(n-k+1)$ modi diversi. □

Osservazione 186. Le permutazioni semplici (quando $k = n$) sono casi particolari delle disposizioni semplici (quando $k \leq n$):

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \tag{10.8}$$

Definizione 10.2.2 (Disposizioni con ripetizione)**.** Le disposizioni con ripetizione sono caratterizzate dal fatto che ciascuno degli n elementi possa essere estratto più volte per riempire i k slot.
Sono quello che in statistica si chiama *campionamento con ripetizione.*

Proposizione 10.2.4 (Numero di disposizioni con ripetizione)**.** *Il numero di disposizioni con ripetizione di n elementi in k slot:*

$$\boxed{D'_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{k } volte} = n^k} \tag{10.9}$$

Dimostrazione. Si hanno n possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo, altrettante per il terzo e così via, sino al k-esimo; si conclude per il principio fondamentale del calcolo combinatorio. □

10.2.3 Combinazioni

10.2.3.1 Combinazioni semplici

Osservazione 187. Gli n elementi dai quali si pesca sono univoci: si pescano k elementi, l'ordine/disposizione di questi non è rilevante a qualificare un esito differente. Si hanno le combinazioni semplici che conteggiano il numero di sottoinsiemi di ampiezza definita di un determinato insieme base.

Proposizione 10.2.5 (Combinazioni semplici)**.** *Il numero delle combinazioni semplici di n elementi di lunghezza k, indicato con $C_{n,k}$ è:*

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}} \tag{10.10}$$

Dimostrazione. Analogamente alle disposizioni semplici sceglieremo k elementi da n: si inizierà avendo n possibilità per il primo, sino a $n-k+1$ per il k-esimo. Tuttavia all'interno dei gruppi così determinati ci saranno combinazioni che sono formate dagli stessi elementi di altre, anche se in ordine inverso. Per non contare tali gruppi più volte (dato che l'ordine non interessa), sempre applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio, occorrerà dividere le disposizioni per il numero di permutazioni dei k elementi estratti ($k!$). □

10.2.3.2 Combinazioni con ripetizione

Osservazione 188. Nelle combinazioni semplici non è ammesso pescare lo stesso elemento più volte. Una volta estratto non rimane negli oggetti estraibili.
Nelle combinazioni con ripetizione invece vogliamo determinare quanti modi vi sono di scegliere k volte da un insieme di n oggetti diversi tra loro, ammettendo che però uno stesso oggetto possa essere pescato più volte.
L'ordine continua a non essere importante (ci interessa sono quante volte ogni oggetto è stato scelto, non l'ordine con cui esso appare).
Le combinazioni con ripetizione contano i *multiset* (insiemi che ammettono ripetizioni) sottoinsieme di un insieme dato.

Proposizione 10.2.6. *Il numero di combinazioni con ripetizione di k oggetti scelti tra n è*

$$\boxed{C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}} \tag{10.11}$$

Dimostrazione. Se l'ordine contasse il numero di combinazioni sarebbe n^k, ma questo non è il caso. Per dimostrare la formula risolviamo narrativamente un problema isomorfico (stesso problema con setup differente).
Il problema può essere posto come: porre k palline identiche in n scatole differenti: quello che conta è solamente il numero di palline in ciascuna scatola. Una qualsiasi configurazione può essere rappresentata come una sequenza di `|` per rappresentare i lati di una scatola e `o` per rappresentare le palline in essa. Ad esempio ipotizzando di avere $k = 7$ palline e $n = 4$ scatole, per rappresentare una pallina nella prima scatola, due nella seconda, tre nella terza e una nella quarta:

`|o|oo|ooo|o|`

Per essere valida ciascuna sequenza deve iniziare e finire con `|`: pertanto si tratta solo di contare il modo in cui si possono riarrangiare i termini rimanenti al suo interno (varie configurazioni di scatole). I termini all'interno dei bordi numero $n + k - 1$: di questi k (le palline) ed $((n - k - 1) - k) = n - 1$ anche (i bordi rimanenti utili per formare le n scatole, una volta che due sono stati impiegati per i lati). La soluzione è pertanto

$$\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

□

10.3 Coefficiente binomiale e multinomiale

10.3.1 Coefficiente binomiale

10.3.1.1 Definizione

Osservazione 189. Approfondiamo il coefficiente che risulta dal calcolo del numero di combinazioni semplici di k elementi presi da n.

Definizione 10.3.1 (Coefficiente binomiale)**.** Indicato con $\binom{n}{k}$ e pronunciato "n su k" si definisce come

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

se $k \leq n$. Se $n < k$ si pone $\binom{n}{k} = 0$.

Osservazione 190. Per quanto riguarda il calcolo a mano, spesso è più utile/veloce la prima definizione, mentre la seconda è più compatta ed utilizzabile nelle parti teoriche.

10.3.1.2 Proprietà

Proposizione 10.3.1. *Si ha che:*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \tag{10.12}$$

Dimostrazione.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

□

Osservazione 191. Una intuizione sul significato di 10.12: per scegliere un comitato di k persone tra n sappiamo che ci sono $\binom{n}{k}$ modi. Un'altro modo di scegliere il comitato è specificare quali $n-k$ non ne faranno parte; specificare chi è nel comitato determina chi non vi è e viceversa. Pertanto i due lati sono uguali dato che sono due modi di contare la stessa cosa.

Osservazione 192. Esempi notevoli/utili della 10.12 sono:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{10.13}$$

Proposizione 10.3.2.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}} \tag{10.14}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

□

Osservazione 193. Per il significato di 10.14: se ho un insieme di n oggetti $I_n = \{1, \dots, n\}$ isolando un oggetto (diciamo l'n-esimo) posso dividere i sottoinsiemi di I_n che hanno k oggetti in quelli che non contengono l'n-esimo (che sono $\binom{n-1}{k}$, essendo esattamente i sottoinsiemi di I_{n-1} a p oggetti) ed in quelli che lo contengono, i quali si ottengono aggiungendo n ad un insieme di $p-1$ oggetti di I_{n-1} e quindi sono in numero di $\binom{n-1}{p-1}$[1]; questi due gruppi di sottoinsimi di I_n sono evidentemente disgiunte, quindi l'unione ha la somma come cardinale, e quindi si ha la formula.

[1] Sarebbero $\binom{n-1}{p-1} \cdot 1$ poiché vi è un solo modo di aggiungere l'n-esimo ad un insimeme di $p-1$ elementi già formati (scelti tra $n-1$ elementi disponibili)

Proposizione 10.3.3 (Identità di Vandermonde)**.**

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-k} \tag{10.15}$$

Dimostrazione. La prova mediante espansione dei termini e forza bruta ce la si può evitare. Una dimostrazione narrativa sul perché l'uguaglianza valga è comunque efficace.
Considerando un gruppo di m uomini ed n donne dal quale un comitato di k persone verrà scelto: ci sono $\binom{m+n}{k}$ per farlo. Se vi sono j uomini nel comitato, allora vi debbono essere $k-j$ donne. Il lato destro dell'uguaglianza smma per il numero j di uomini. □

Proposizione 10.3.4 (Squadra con capitano)**.** *Per $k, n \in N$ con $k \leq n$ si ha*

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} \tag{10.16}$$

Dimostrazione. Una dimostrazione narativa: consideriamo un gruppo di n persone dal quale una squadra di k verrà scelta; uno di queste sarà capitano. Il numero possibile di team così formati può derivare da (lato sinistro) prima scegliere il capitano tra gli n e poi scegliere i $k-1$ rimanenti tra gli $n-1$ disponibili. Oppure ed equivalentemente scegliendo gli $\binom{n}{k}$ componenti e tra questi sceglierne uno dei k come capitano. □

10.3.1.3 Origine del nome

Osservazione 194. Il coefficiente binomiale prende nome dal fatto che determina i coefficienti dello sviluppo della potenza del binomio $(x+y)^n$

Proposizione 10.3.5 (Teorema binomiale)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{10.17}$$

Dimostrazione. Per provare il teorema espandiamo il prodotto:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n \text{ fattori}}$$

I termini del prodotto $(x+y)^n$ sono ottenuti scegliendo la x o la y da ognuno dei fattori. Vi sono $\binom{n}{k}$ modi per scegliere esattamente k volte x (scegliendo y nei $n-k$ rimanenti): in questi casi si ottiene il termine $x^k y^{n-k}$. Il teorema si ottiene facendo variare il numero k di x scelti e sommando i termini risultati. □

10.3.2 Il coefficiente multinomiale

10.3.2.1 Definizione

Proposizione 10.3.6. *Il numero di modi in cui è possibile distribuire n oggetti distinti in r scatole distinte in modo che queste contengano, nell'ordine, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ oggetti ($\sum_{i=1}^{r} n_i = n$) è:*

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}} \tag{10.18}$$

Dimostrazione. Vi sono $\binom{n}{n_1}$ possibili scelte per gli oggetti della prima scatola; per ogni tale scelta vi sono $\binom{n-n_1}{n_2}$ scelte per la seconda; per ogni scelta effettuata nelle prime due vi sono $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ nella terza e così via. Dal principio fondamentale del calcolo combinatorio discende che il risultato cercato è:

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}{n_r} \tag{10.19}$$

Sviluppando si ha

$$\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$

dalla quale, in seguito alle semplificazioni, si ottiene il coefficiente. □

Osservazione 195. Costituisce una generalizzazione del coefficiente binomiale (che si ottiene considerando due scatole).

Osservazione 196. Il coefficiente multinomiale è la formula che viene utilizzato nelle permutazioni con ripetizione (utile ad esempio per il numero di permutazioni di una parola con lettere ripetute).

10.3.2.2 Origine del nome

Osservazione 197. La formula del coefficiente multinomiale determina i coefficienti dello sviluppo di un polinomio di r termini

Proposizione 10.3.7 (Teorema multinomiale)**.**

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r}$$

Dimostrazione. Analoga al caso binomiale. □

Esempio 10.3.1. Nello sviluppo del cubo di un trinomio potremmo procedere manualmente:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

o calcolare più velocemente, ad esempio che:

- il termine $a^2b^0c^1$ presenta come coefficiente:

$$\binom{3}{2,0,1} = \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

- il termine $a^1b^1c^1$ ha invece coefficiente pari a:

$$\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 6$$

10.4 L'utilizzo di R

Fattoriale In R il fattoriale è ottenuto mediante la funzione `factorial`; poi nei casi di fattoriali di numeri molto grandi si può utilizzare `lfactorial` che calcola il logaritmo naturale del fattoriale di un numero, ossia $\log(n!)$. Nell'ultimo esempio di sotto si ha che approssimativamente $1000000! = 10^{5565709}$

```
factorial(4)

## [1] 24

factorial(1000000)

## [1] Inf

lfactorial(1000000)

## [1] 12815518

# convertiamo in logaritmo base 10
lfactorial(1000000)/log(10)

## [1] 5565709
```

Coefficiente binomiale Il coefficiente binomiale è implementato in R, mediante `choose`, mentre `lchoose` ne calcola il logaritmo:

```
choose(4,2)

## [1] 6

choose(1e06, 500)

## [1] Inf

lchoose(1e06, 500)

## [1] 4296.3
```

Permutazioni Per determinare tutte le permutazioni di un vettore si può utilizzare `permn` dal pacchetto `combinat`:

```
combinat::permn(1:3)

## Error in loadNamespace(x):  non c'è alcun pacchetto chiamato 'combinat'
```

Combinazioni Per la determinazione delle combinazioni degli elementi da un vettore `x` presi tot (nell'esempio 2) alla volta si usa `combn`:

```
combn(letters[1:4], 2)

##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
## [1,] "a"  "a"  "a"  "b"  "b"  "c"
## [2,] "b"  "c"  "d"  "c"  "d"  "d"
```

10.5 Calcolo combinatorio e funzioni

Il calcolo combinatorio può essere applicato per contare le funzioni aventi determinate caratteristiche tra due insiemi finiti. Vediamo innanzitutto un criterio utile per contare e poi alcune applicazioni al conteggio delle funzioni.

10.5.1 Principio dell'overcounting

Sia $f : X \to Y$ suriettiva; si ha allora

$$\text{Card}\,(X) = \sum_{y \in Y} \text{Card}\,(f^{\leftarrow}(\{y\})) \tag{10.20}$$

In particolare se tutte le fibre $f^{\leftarrow}(\{y\})$ hanno una stessa cardinalità, ossia $\text{Card}\,(f^{\leftarrow}(\{y\})) = \alpha$, si ha:

$$\text{Card}\,(X) = \alpha\,\text{Card}\,(Y) \tag{10.21}$$

essendo X una unione disgiunta delle fibre $f^{\leftarrow}(\{y\})$ al variare di $y \in Y$.
Anche detto principio del pastore, questo torna utile quando conosciamo la cardinalità di uno dei due insiemi (ad esempio pecore) e desideriamo ricavare quella dell'altro (numero di zampe).

10.5.2 Funzioni (disposizioni con ripetizione)

Si indica con X^{I_p} l'insieme di tutte le funzioni $f : I_p \to X$ con $\text{Card}\,(I_p) = p$ e $\text{Card}\,(X) = m$. Il numero di tutte le funzioni possibili tra i due insiemi è

$$\text{Card}\left(X^{I_p}\right) = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{p \text{ volte}} = m^p \tag{10.22}$$

e corrisponde alle disposizioni con ripetizione, a p a p degli m oggetti di X.

10.5.3 Funzioni iniettive (disposizioni semplici)

Siamo interessati a quantificare la cardinalità del sottoinsieme delle funzioni inettive $\Lambda(n,p) \subset I_n^{I_p}$ del tipo $f : I_p \to I_n$. Si ha che

$$\text{Card}\,(\Lambda(n,p)) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1)) \tag{10.23}$$

vedendo che all'ultimo elemento di I_p ho già fatto $p-1$ collegamenti, quindi me ne rimangono possibili $n-(p-1)$.

10.5.4 Permutazioni di un insieme (permutazioni semplici)

In particolare se $p = n$si hanno le biiezioni di un insieme I_n in se stesso, ossia le permutazioni dell'insieme, che sono in numero $n!$

10.5.5 Funzioni caratteristiche (coefficiente binomiale)

Il calcolo del numero di sottoinsiemi a p elementi di un insieme di n oggetti equivale a quantificare la cardinalità delle funzioni caratteristiche che scelgono p elementi tra un insieme di n (ossia tali che $\sum \chi(I_n) = p$).
Indicando con $C(n, p)$ l'insieme dei sottoinsiemi di I_n che hanno cardinale p si ha una funzione suriettiva:

$$s : \Lambda(n, p) \to C(n, p) \tag{10.24}$$

Il dominio $\Lambda(n, p)$ è un insieme di funzioni mentre il codominio $C(n, p)$ è un insieme di insiemi: la funzione suriettiva è quella che ad ogni funzione iniettiva $f : I_p \to I_n$ (con $f \in \Lambda(n, p)$) associa l'immagine $f(I_p) \in C(n, p)$, sottoinsieme a p oggetti di I_n.
Essendo che due funzioni iniettive facenti parte del dominio $f, g \in \Lambda(n, p)$ hanno la stessa immagine se e solo se differiscono per una permutazione sul proprio dominio, le fibre di s hanno tutte cardinale $p!$ (ossia ciascun insieme di p elementi si presenta in $p!$ ordini possibili), segue dal principio dell'overcounting che $\mathrm{Card}\,(\Lambda(n, p)) = p!\,\mathrm{Card}\,(C(n, p))$, quindi:

$$\mathrm{Card}\,(C(n, p)) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1))}{p!} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{10.25}$$

Capitolo 11

Topologia

11.1 Topologia della retta reale

11.1.1 Intervalli

Definizione 11.1.1 (Intervallo)**.** Sottoinsieme dei numeri di $\mathbb{R}$ compresi tra $a, b \in \mathbb{R}$, detti *estremi* dell'intervallo, con $a \leq b$ (a *estremo inferiore*, b *estremo superiore*).

Definizione 11.1.2 (Intervallo aperto)**.** Intervallo che non contiene i propri estremi

Esempio 11.1.1. Sono intervalli aperti $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$.

Osservazione 198. Sono considerati aperti anche $\emptyset = (a, a)$ e l'intervallo improprio $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Definizione 11.1.3 (Intervallo chiuso)**.** Intervallo che contiene i propri estremi.

Esempio 11.1.2. È chiuso l'intervallo $[a, b]$.

Definizione 11.1.4 (Intervallo contenente/attorno ad un punto)**.** Fissati due positivi $r_1, r_2 > 0$, un intervallo attorno al punto x_0 è l'insieme:

$$(x_0 - r_1; x_0 + r_2) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r_1 < x < x_0 + r_2\} \tag{11.1}$$

Definizione 11.1.5 (Ampiezza dell'intervallo)**.** La somma $r_1 + r_2$.

Definizione 11.1.6 (Intervallo aperto di centro c e raggio r)**.** Si ha se $r_1 = r_2 = r > 0$, $x_0 = c \in \mathbb{R}$ e si esclude gli estremi dell'intervallo:

$$B(c, r[= \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\} =]c - r, c + r[\tag{11.2}$$

Definizione 11.1.7 (Intervallo chiuso di centro c e raggio r)**.** L'unica differenza dal precedente è l'inclusione degli estremi (mediante $\leq$ al posto di $<$):

$$B(c, r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| \leq r\} = [c - r, c + r] \tag{11.3}$$

11.1.2 Sottoinsiemi (aperti/chiusi) di $\mathbb{R}$

11.1.2.1 Definizioni

Definizione 11.1.8 (Sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$)**.** Sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ che si può scrivere come unione (finita o infinita) di intervalli aperti.

Definizione 11.1.9 (Sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$)**.** Sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ il cui complementare rispetto ad $\mathbb{R}$ è aperto.

Esempio 11.1.3. Se $S = [a, b]$ è chiuso, il suo complementare $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ è unione di intervalli aperti e quindi aperto

Osservazione 199. Da definizione, pertanto, sia $\emptyset$ che $\mathbb{R}$ sono chiusi e aperti (sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con tale proprietà).

Teorema 11.1.1. *Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se per ogni $c \in S$ esiste un $\delta > 0$ tale che l'intervallo aperto $B(c, \delta[$ è contenuto in S.*

Dimostrazione. Se un insieme S soddisfa la condizione del teorema è senz'altro unione di intervalli aperti e pertanto aperto.
Se viceversa S è aperto, è unione degli intervalli aperti che contiene; sia $c \in S$ e sia I intervallo aperto contenuto in S e contenente c. Se $I =]a, b[$ si può prendere $\delta = \min\{c - a, b - c\}$; se $I =]-\infty, a[$ (o $I =]a, +\infty[$) si può prendere $\delta = a - c$ (o $\delta = c - a$). Si ha $B(c, \delta[\in I \in S$ quindi $c \in B(c, \delta[\subseteq S$, come richiesto. □

Teorema 11.1.2. *Ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ che sia chiuso, inferiormente limitato e non vuoto ha minimo.*

Dimostrazione. Se $S \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto ed inferiormente limitato, ha un estremo inferiore $a \in \mathbb{R}$; dobbiamo provare che $a \in S$ (l'intervallo è inferiormente chiuso e quindi a costituisce il minimo). Se così non fosse, sarebbe $a \in \mathbb{R} \setminus S$ con $\mathbb{R} \setminus S$ aperto (perché S è comunque chiuso). Esisterebbe allora $\delta > 0$ tale che $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathbb{R} \setminus S$; in particolare $[a, a + \delta[\cap S = \emptyset$ contraddicendo la proprietà caratteristica dell'estremo inferiore (perché a è pur sempre estremo inferiore). □

Teorema 11.1.3. *Ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ che sia chiuso, superiormente limitato e non vuoto ha massimo.*

Dimostrazione. Analoga al caso precedente. □

11.1.2.2 Proprietà degli aperti in $\mathbb{R}$

Osservazione 200. Non procediamo a dimostrazione delle seguenti proprietà degli aperti in $\mathbb{R}$

Proposizione 11.1.4. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono aperti*

Osservazione 201. Il seguente risultato dice che unioni arbitrarie (finite/infinite) di aperti sono aperte

Proposizione 11.1.5. *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di aperti allora:*

$$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \text{è aperto in } \mathbb{R}$$

Osservazione 202. Intersezioni finite di aperti sono aperte.

Proposizione 11.1.6. *Se* $A_1, \ldots, A_m$ *è famiglia finita di aperti di* $\mathbb{R}$ *allora*

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j \quad \text{è aperto in } \mathbb{R}$$

11.1.2.3 Proprietà dei chiusi in $\mathbb{R}$

Proposizione 11.1.7. $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}$ *sono chiusi*

Osservazione 203. Unioni arbitrarie (finite/infinite) di chiusi sono chiuse.

Proposizione 11.1.8. *Se* $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *è una famiglia di chiusi di* $\mathbb{R}$ *allora:*

$$C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \quad \text{è chiuso in } \mathbb{R}$$

Osservazione 204. Intersezioni finite di chiusi sono chiuse

Proposizione 11.1.9. *Se* $C_1, \ldots, C_m$ *è famiglia finita di chiusi di* $\mathbb{R}$ *allora:*

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} C_j \quad \text{è chiuso in } \mathbb{R}$$

11.1.3 Intorno di un punto in $\mathbb{R}$

Definizione 11.1.10 (Intorno di un punto c in $\mathbb{R}$)**.** Dato un $c \in \mathbb{R}$ è chiamato suo intorno qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ che contenga un aperto di $\mathbb{R}$ contenente c.

Osservazione 205. Ossia in altre parole (da thm 11.1.1) se esiste $\delta > 0$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq U$.

Osservazione 206. La nozione di intorno precisa quella intuitiva di abbastanza vicino, centrale in analisi; una proprietà si dice vera abbastanza vicino a c se gli $x \in \mathbb{R}$ per cui è vera formano un intorno di c in $\mathbb{R}$.

Osservazione 207. Un po' di proprietà degli intorni in $\mathbb{R}$

Proposizione 11.1.10. *Ogni intorno di* c *contiene* c.

Proposizione 11.1.11. *Se* U *è intorno di* c *e* $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$ *allora anche* V *è intorno di* c

Proposizione 11.1.12. *Ogni intersezione di una famiglia finita di intorni di* c *è intorno di* c

11.2 Topologia della retta estesa

Osservazione 208. Consideriamo ora $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Osservazione 209 (Intervalli aggiuntivi). Oltre a quelli di $\mathbb{R}$ si aggiungono $\widetilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, gli intervalli aperti $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$ e gli intervalli chiusi $[-\infty, a]$ e $[b, +\infty]$.

Definizione 11.2.1 (Aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Ogni sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$ che sia unione di intervalli aperti di $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Osservazione 210. Gli aperti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ hanno le stesse proprietà di quelli in $\mathbb{R}$.

Definizione 11.2.2 (Chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$ il cui complementare è aperto.

Osservazione 211. Gli intorni dei punti $c \in \mathbb{R}$ sono essenzialmente gli stessi nel senso che ogni intorno di $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ contiene un intorno di c in $\mathbb{R}$.

Osservazione 212. Vediamo la forma degli intorni di $\pm\infty$.

Definizione 11.2.3 (Intorno di $+\infty$)**.** Un sottoinsieme $U \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno di $+\infty$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se contiene una semiretta quale $]a, +\infty]$ per qualche $a \in \mathbb{R}$

Osservazione 213. Specularmente avviene per l'intorno di $-\infty$.

11.3 Topologia del piano

Osservazione 214. L'idea di vicinanza che si vuole dare in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è quella componente per componente: un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è abbastanza vicino ad un prefissato $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se x e y sono abbastanza vicine ad a e b, rispettivamente/separatamente, in $\mathbb{R}$.

Osservazione 215. Dal punto di vista topologico $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ sono identici.

Definizione 11.3.1 (Intervallo bidimensionale (rettangolo))**.** È un sottoinsieme $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ con I e J intervalli di $\mathbb{R}$.

Definizione 11.3.2 (Intervallo bidimensionale aperto)**.** Intervallo bidimensionale prodotto di intervalli aperti.

Definizione 11.3.3 (Aperto in $\mathbb{R}^2$)**.** Sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ unione di intervalli bidimensionali aperti

Definizione 11.3.4 (Chiuso in $\mathbb{R}^2$)**.** Sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ il cui complementare in $\mathbb{R}^2$ è aperto

Osservazione 216. Dalla definizione risulta che unioni arbitrarie di aperti sono aperte e che $\mathbb{R}^2$ e $\emptyset$ sono aperti; inoltre l'intersezione di una famiglia finita di aperti di $\mathbb{R}^2$ è aperta.

Osservazione 217. Si possono definire gli intorni dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definizione 11.3.5 (Intorno di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)**.** Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che contengono un aperto a cui (x, y) appartiene

Osservazione 218. In altre parole un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice intorno del punto (a, b) se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che la palla/disco aperta $B((a, b), \delta[$ sia contenuta in U.

11.4 Altre nozioni di topologia

Definizione 11.4.1 (Chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)**.** Se $E \subseteq \mathbb{R}$, si definisce chiusura di E in $\mathbb{R}$, e lo si indica con $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$ o $\overline{E}$ o il minimo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia chiuso e contenga E.

Osservazione 219. Si può definire la chiusura mediante l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ che contengono E, ossia:

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E) := \overline{E} = \bigcap \{C : C \supseteq E, C \text{ chiuso in } \mathbb{R}\} \tag{11.4}$$

Proposizione 11.4.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$: un punto $x \in \mathbb{R}$ appartiene alla chiusura $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$ se e solo se, per ogni intorno U di $x \in \mathbb{R}$ si ha $U \cap E \neq \emptyset$*

Osservazione 220. Quanto detto per la chiusura in $\mathbb{R}$ si ripete anche per $\widetilde{\mathbb{R}}$

Definizione 11.4.2 (Chiusura di un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Se $E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ si pone:

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathbb{R}}}(E) := \overline{E} = \bigcap \left\{C : C \supseteq E, C \text{ chiuso in } \widetilde{\mathbb{R}}\right\} \tag{11.5}$$

Osservazione 221. La proposizione 11.4.1 resta vera con $\widetilde{\mathbb{R}}$ al posto di $\mathbb{R}$.

Definizione 11.4.3 (Punto di accumulazione in $\mathbb{R}$)**.** Se $E \subseteq \mathbb{R}$, un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per E in $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di p in $\mathbb{R}$ ricadono punti di E differenti da p:

$$(U \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset, \qquad \text{per tutti gli intorni } U \text{ di } p$$

Osservazione 222. I punti di accumulazione di un insieme possono appartenere o meno all'insieme stesso.

Esempio 11.4.1. L'insieme dei punti di accumulazione di $E = [0, 1[$ è $\overline{E} = [0, 1]$ ed $1 \notin E$.

Definizione 11.4.4 (Punto isolato)**.** Se un punto di E non è di accumulazione per E esso si dice punto isolato di E.

Osservazione 223. La chiusura di E in $\mathbb{R}$ è formata da punti di E e dai punti di accumulazione di E in $\mathbb{R}$; pertanto un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione in $\mathbb{R}$.

Definizione 11.4.5 (Punto di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Analogamente $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ si dice di accumulazione $E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ se ogni intorno di p in $\widetilde{\mathbb{R}}$ contiene punti di E diversi da p.

11.4.1 Punti di accumulazione e successioni

Teorema 11.4.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$. Le tre proposizioni sono equivalenti:*

1. *c è di accumulazione per E;*
2. *esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E diversi da c che converge a c;*
3. *in ogni intorno di c cadono infiniti punti di E*

Dimostrazione. Chiaramente la 2 e la 3 implicano la 1; mostriamo invece che se c è di accumulazione per E, esiste una successione iniettiva $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (ossia una successione di punti tutti distinti) in $E \setminus \{c\}$ che converge a c.
Possiamo definire la successione induttivamente, scegliendo come primo elemento $x_0 \in B(c, 1[\cap(E \setminus \{c\})$, ossia un elemento dell'intorno unitario di c appartenente ad E (ma diverso da c); esso esiste per l'ipotesi di cui al punto 1.
Come n-esimo elemento scegliamo $x_n \in B(c, |x_{n-1} - c| /2[\cap(E \setminus \{c\})$, ossia un elemento che dista da c al più la metà di quanto distava il suo predecessore (ossia via via la distanza da c diminuisce); essendo strettamente decrescente la successione delle distanze $j \to |x_j - c|$, la successione $j \to x_j$ è iniettiva; inoltre

$$0 < |x_n - c| \leq |x_0 - c| /2^n < 1/2^n$$

mostra che per $n \to +\infty$ la successione converge a c. □

11.4.2 Topologia indotta

Definizione 11.4.6 (Aperto in un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Sia $B \subseteq E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$; B si dice aperto in E se è della forma $A \cap E$ con A aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Esempio 11.4.2. Se $E = [0, 1[$, l'insieme $B = [0, 1/2[$ è aperto in E in quanto $B =]-1/2, 1/2[\cap E$, e $]-1/2, 1/2[$ è aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Definizione 11.4.7 (Topologia indotta (o relativa))**.** L'insieme degli aperti in E si chiama topologia indotta (o relativa) su E della topologia di $\widetilde{\mathbb{R}}$

TODO: qui non c'è $\subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$?

Definizione 11.4.8 (Chiuso in un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** Sia $C \subseteq E \subset \widetilde{\mathbb{R}}$; un sottoinsieme C di E si dice chiuso in E se il suo complementare $E \setminus C$ è aperto in E.

Osservazione 224. È evidente che $C \subseteq E$ è chiuso in E se e solo se $C = E \cap F$ con F chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$

Esempio 11.4.3. Se $E = [0, 1[$, il sottoinsieme $C = [1/2, 1[$ è chiuso in E essendo $C = E \cap [1/2, 1]$ con quest'ultimo chiuso in R (e in $\widetilde{\mathbb{R}}$)

Esempio 11.4.4. Sia $E = [0, 1[\cup]1, 2]$; il sottoinsieme $A = [0, 1[$ di E è chiuso in E, essendo $A = E \cap [0, 1]$ con $[0, 1]$ chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$; tuttavia A è anche aperto in E essendo $A =]-1, 1[\cap E$. Per analoghi motivi anche $E \setminus A =]1, 2]$ è sia aperto che chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Osservazione 225. L'insieme degli aperti di E (la sua topologia indotta) ha le proprietà insiemistiche di una topologia, cioè:

- ha come elementi E $(E = E \cap \widetilde{\mathbb{R}})$ e l'insieme vuoto $(\emptyset = \emptyset \cap E)$
- è chiuso rispetto all'unione arbitraria (se $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è famiglia di aperti si ha che $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cap E) = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap E)$ e all'intersezione finita $(\bigcap_{k=1}^{n}(A_k \cap E) = (\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \cap E)$

Capitolo 12

Successioni

12.1 Successioni reali

Definizione 12.1.1 (Successione numerica)**.** Indicata con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è una funzione $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

Definizione 12.1.2 (Termini della successioni)**.** I valori assunti dalla funzione;

Osservazione 226. I termini vengono indicati con una lettera (sempre la stessa) munita di pedice:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\} = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots$$

Osservazione 227 (Grafico di una successione). Il grafico di una successione si trova nel primo o quarto quadrante; esso non è una curva, bensì un insieme di punti isolati.

12.1.1 Definizione di una successione

Osservazione 228. Una successione numerica è definita quando è stabilita una legge che permette di associare ad $n\in\mathbb{N}$ uno e un solo $x_n\in\mathbb{R}$. Vi sono due modi per farlo.

Definizione 12.1.3 (Definizione analitica di successione)**.** Si stabilisce una espressione analitica che consenta di calcolare un qualsiasi termine x_n a partire dell'indice n.

Esempio 12.1.1. $n\to\frac{1}{n+1}$ definisce la successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$.

Definizione 12.1.4 (Definizione ricorsiva di successione)**.** Si definisce (generalmente) il primo termine della successione e si stabilisce una regola che permetta, dato un termine della successione, di calcolarne il successivo.

Esempio 12.1.2. La successione di Fibonacci può essere definita come:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

12.1.2 Andamento di una successione

Definizione 12.1.5 (Successione limitata superiormente)**.** Successione per la quale esiste un numero reale M tale che:

$$x_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definizione 12.1.6 (Successione limitata inferiormente)**.** Successione per la quale esiste un numero reale m tale che:

$$x_n \geq m \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definizione 12.1.7 (Successione limitata)**.** Successione limitata sia superiormente che inferiormente; ovvero esistono due numeri m, M tali che:

$$m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio 12.1.3. La successione $\{(-1)^n\}$ è limitata; $\left\{n^2\right\}$ è limitata solo inferiormente, $\{(-2)^n\}$ non è limitata ne inferiormente ne superiormente.

Definizione 12.1.8 (Successione crescente (in senso lato))**.** Successione per la quale

$$i < j \implies x_i \leq x_j$$

Definizione 12.1.9 (Successione crescente in senso stretto)**.** Successione per la quale

$$i < j \implies x_i < x_j$$

Definizione 12.1.10 (Successione decrescente (in senso lato))**.** Successione per la quale

$$i < j \implies x_i \geq x_j$$

Definizione 12.1.11 (Successione decrescente in senso stretto)**.** Successione per la quale

$$i < j \implies x_i > x_j$$

Definizione 12.1.12 (Successione monotona)**.** Successione crescente o decrescente (anche in senso lato)

Definizione 12.1.13 (Successione oscillante)**.** Una successione non monotona

Osservazione 229. Per verificare che una successione è strettamente crescente (ad esempio) basta verificare che ogni termine è maggiore del precedente, ovvero verificare che

$$x_n < x_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio 12.1.4. Ad esempio per verificare che $x_n = \frac{n}{n+1}$ è crescente bisogna impostare la diseguaglianza

$$\frac{n}{n+1} < \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

svilupparla e constatare che porta ad un'affermazione vera indipendentemente dal valore n considerato.

Definizione 12.1.14 (Successione minorante)**.** Date due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$ si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una *minorante* di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione 12.1.15 (Successione dominata)**.** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *dominata* dalla successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se si ha che $|a_n| \leq |b_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 12.1.16 (Successione somma)**.** Date due successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita come $n \to a_n + b_n$.

Definizione 12.1.17 (Successione prodotto)**.** Date due successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita come $n \to a_n \cdot b_n$.

Definizione 12.1.18 (Proprietà definitivamente soddisfatte)**.** Se una certa proprietà è soddisfatta non da tutti i termini della successione, ma a partire dal termine j-esimo (in altre parole dai termini con indice $n \geq j$), si dice che tale *proprietà è soddisfatta definitivamente.*

Esempio 12.1.5. La successione $\{n - 10\sqrt{n}\}$ è definitivamente positiva; infatti può essere riscritta come $\{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 10)\}$, con il secondo termine positivo se $n > 100$ (mentre il primo, a parte $n = 0$, lo è sempre).

12.2 Limiti di successioni

12.2.1 Introduzione

Osservazione 230. Attraverso lo studio del limite delle successioni siamo interessati al valore assunto da una generica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per $n \to +\infty$.

Definizione 12.2.1 (Limite per una successione reale)**.** Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di $\widetilde{\mathbb{R}}$ e sia $\mathcal{L} \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Si dice che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $\mathcal{L}$ per n che tende all'infinito e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \mathcal{L} \tag{12.1}$$

se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si trova definitivamente in *ogni* intorno di $\mathcal{L}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$ (quindi anche in uno molto piccolo).

Definizione 12.2.2 (Carattere di una successione)**.** A seconda del valore assunto o meno da $\mathcal{L}$ si può dire *convergente*, *divergente* o *indeterminata.* Il comportamento di una successione al limite è detto *carattere* della successione.

Osservazione 231. Prima di passare in disamina i caratteri delle successioni vediamo un importante risultato sull'unicità del limite.

12.2.2 Unicità del limite

Lemma 12.2.1. *Punti distinti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ hanno intorni disgiunti in $\widetilde{\mathbb{R}}$*

Dimostrazione. Se a, b sono i punti, indichiamo con V, W i rispettivi intorni. Essendo $a \neq b$, sarà $a < b$ oppure $b < a$; supposto che si verifichi il primo caso, si prende c con $a < c < b$ e $V = [-\infty, c[$ e $W = [c, +\infty]$ □

Teorema 12.2.2 (Unicità del limite)**.** *Se una successione di $\widetilde{\mathbb{R}}$ ha come limiti sia a che b, allora $a = b$*

Dimostrazione. Dal lemma 12.2.1 risulta che se $a \neq b$, allora a e b hanno intorni V e W disgiunti. Poiché per ipotesi la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sia ad a che a b, esistono $n_V, n_W \in \mathbb{N}$ tali che sia $x_n \in V$ per $n \geq n_V$ e $x_n \in W$ per $n \geq n_W$ ma allora per $n \geq \max\{n_V, n_W\}$ sia ha che $x_n \in V \cap W = \emptyset$, assurdo. □

12.2.3 Successioni convergenti

Definizione 12.2.3 (Successione con limite finito (convergente))**.** Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali ha per $n \to +\infty$ limite finito $l \in \mathbb{R}$ quando, preso un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, risulta definitivamente:

$$|x_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

In tal caso si scrive:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = l} \tag{12.2}$$

o più compattamente $x_n \to l$.

Osservazione 232. In altre parole dopo aver scelto un ε piccolo a piacere deve essere possibile determinare un indice n_ε tale che i termini oltre quello distano da l in valore assoluto meno di ε:

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \tag{12.3}$$

Osservazione 233. Graficamente la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ "comunque stretta" da un certo indice in poi i punti della successione non escono più da questa striscia.

12.2.3.1 Alcuni risultati

Proposizione 12.2.3. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{R}$ il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon = 1 > 0$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che sia $|a_n - a| \leq 1$ per $n \geq n_1$; si ha che $|a_n - a| \leq 1$, ma $|a_n - a| \geq |a_n| - |a|$, quindi $|a_n| - |a| \leq 1$. Dunque $|a_n| \leq 1 + |a|$ per $n \geq n_1$, cioè per tutti gli indici salvo i primi n_1; posto $M = \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_1-1}|, 1 + |a|\}$, si ha $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Osservazione 234. Non vale il contrario, ossia esistono successioni limitate prive di limite; ad esempio, come si vedrà, la successione $n \to (-1)^n$. Avere limite finito è, per una successione, una condizione molto più forte dell'essere limitata.

Definizione 12.2.4 (Successioni infinitesime)**.** Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendente a zero.

Esempio 12.2.1. La successione $x_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima.

Osservazione 235. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a \in \mathbb{R}$ se e solo se $|a_n - a|$ è infinitesima.

Proposizione 12.2.4. *Una successione dominata da una successione infinitesima è anch'essa infinitesima*

Dimostrazione. Ovvia □

Proposizione 12.2.5. *Se la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad* $a \in \mathbb{R}$*, allora* $|a_n| \to |a|$ *per* $n \to +\infty$

Dimostrazione. Si ha $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, per cui la successione $||a_n| - |a||$ è dominata dalla successione $|a_n - a|$, infinitesima se e solo se $a_n \to a$ □

Proposizione 12.2.6. *Somma di succesioni infinitesime sono infinitesime*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ si trova $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che sia $|a_n| \leq \varepsilon/2$ se $n \geq n'_\varepsilon$, ed anche $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che sia $|b_n| \leq \varepsilon/2$ per $n \geq n''_\varepsilon$. Posto $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, per $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$; pertanto la somma di successioni infinitesime è infinitesima. □

Proposizione 12.2.7. *Il prodotto di una successione infinitesima e di una successione limitata è una successione infinitesima*

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, con $|b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Se fosse $M = 0$, b_n sarebbe identicamente nulla, e così allora sarebbe anche $a_n b_n$; escluso questo caso, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che sia $|a_n| \leq \varepsilon/M$ per $n \geq n_\varepsilon$; per $n \geq n_\varepsilon$ si ha allora $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq (\varepsilon/M)M = \varepsilon$, che prova che $a_n b_n$ è infinitesima. □

12.2.3.2 Successioni per eccesso/difetto

Osservazione 236. Talvolta è possibile precisare se una successione convergente si avvicina al suo limite per eccesso o per difetto.

Definizione 12.2.5 (Successione convergente per eccesso)**.** La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad l *per eccesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente che:

$$0 \leq x_n - l < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \tag{12.4}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l^+$$

Definizione 12.2.6 (Successione convergente per difetto)**.** La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad l *per difetto* se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente che:

$$0 \leq l - x_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \tag{12.5}$$

In tal caso si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l^-$$

Osservazione 237. In sostanza dire che x_n tende per eccesso (difetto) ad l significa che da un certo punto si avvicina ad l "da sopra" (sotto), ossia approssima l per eccesso (difetto).

12.2.4 Successioni divergenti

Osservazione 238. L'operazione di limite risulta completamente significativa se ambientata in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Il limite di una successione può essere oppure $+\infty$ o $-\infty$: in questo caso la successione si dice *divergente* (o infinita).

Definizione 12.2.7 (Successione divergente a $+\infty$ (positivamente divergente))**.** Successione di reali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha per limite $+\infty$ se fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$x_n > M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso la successione si scrive:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty} \tag{12.6}$$

o più compattamente $x_n \to +\infty$.

Osservazione 239. In base alla definizione, una successione positivamente divergente non è limitata superiormente (e viceversa: una successione limitata superiormente non può essere positivamente divergente).

Definizione 12.2.8 (Successione con limite $-\infty$ (negativamente divergente))**.** Una successione di reali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha per limite $-\infty$ se fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$x_n < -M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso si scrive:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty} \tag{12.7}$$

o più compattamente $x_n \to -\infty$.

Osservazione 240. Anche qui una successione negativamente divergente non è limitata inferiormente (e viceversa: una successione limitata negativamente non può essere negativamente divergente).

Definizione 12.2.9 (Successione con limite infinito (divergente))**.** Una successione ha per limite infinito se fissato un numero $M > 0$ grande a piacere si ha definitivamente:

$$|x_n| > M \qquad \forall n \geq n_M$$

In tal caso si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty} \tag{12.8}$$

o più compattamente $x_n \to \infty$.

Osservazione 241. In base alla definizione se una successione diverge a $\pm\infty$ allora diverge; non vale il contrario, ovvero una successione divergente può non essere divergente a $\pm\infty$.

Esempio 12.2.2. $x_n = (-2)^n$ è divergente; ma non diverge a $\pm\infty$

Esempio 12.2.3. $x_n = (-1)^n \cdot n$ diverge; ma non diverge a $\pm\infty$

12.2.5 Successioni indeterminate

Definizione 12.2.10 (Successione indeterminata (senza limite in $\widetilde{\mathbb{R}}$))**.** Successione non convergente, divergente a $+\infty$ o divergente a $-\infty$.

Esempio 12.2.4. $x_n = (-1)^n$ è indeterminata.

12.3 Sottosuccessioni

Definizione 12.3.1 (Sottosuccessione di una successione)**.** Se $a : n \to a_n$ è una successione e $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione strettamente crescente, la successione $a \circ \nu : n \to a_{\nu(n)}$ è detta sottosuccessione della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ data.

Esempio 12.3.1. Se $\nu(n) = 2n$ si ottiene la sottosuccessione $n \to a_{2n}$ dei termini di posto pari

Proposizione 12.3.1. *Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $\widetilde{\mathbb{R}}$ ha limite $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tutte le sottosuccessioni di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno il medesimo limite $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.*

Dimostrazione. Sia V intorno di $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e sia $n_V \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V$ se $n \geq n_V$; se $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente si ha $\nu(n) \geq n \geq n_V$ e quindi $a_{\nu(n)} \in V$ se $n \geq n_V$, il che appunto mostra che $\lim a \circ \nu(n) = l$. □

Osservazione 242. Può invece accadere che qualche sottosuccessione abbia limite senza che l'intera successione abbia limite.

Esempio 12.3.2. Se $a_n = (-1)^n$, la sottosuccessione a_{2n} dei termini di posto pari vale costantemente 1, e quindi tende a 1; la sottosuccessione a_{2n+1} dei termini di posto dispari vale costantemente -1, e tende allora a -1.

Osservazione 243. Uno dei modi possibili per verificare che una successione non ha limite è quello di esibire due sottosuccessioni della stessa che tendono a limiti diversi.

Lemma 12.3.2. *Ogni successione di reali ammette una sottosuccessione monotona*

Dimostrazione. De Marco 1, pag 217 □

Teorema 12.3.3. *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. De Marco 1, pag 218 □

12.4 Risultati utili per il calcolo dei limiti

12.4.1 Algebra dei limiti finiti

Osservazione 244. Quando si deve operare algebricamente su successioni che hanno limite finito, si ha un risultato semplice: il limite dell'operazione su due successioni è l'operazione sui rispettivi limiti.

Proposizione 12.4.1 (Algebra dei limiti finiti). *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ *allora:*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = a \pm b \tag{12.9}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = a \cdot b \tag{12.10}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{a}{b} \tag{12.11}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left({a_n}^{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} {a_n}^{\lim_{n\to+\infty} b_n} = a^b \tag{12.12}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni si basano sulla definizione di limite, sull'uso di diseguaglianze notevoli e sull'uso di proprietà definitivamente vere. Dimostriamo a titolo esemplificativo le prime due:

- per dimostrare la 12.9, fissato un $\varepsilon > 0$, consideriamo:

  $$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)|$$

  dove abbiamo proceduto con la diseguaglianza triangolare. Ora, poiché $a_n \to a$ e $b_n \to b$, si ha definitivamente che

  $$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

  perciò concludiamo che definitivamente

  $$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$$

  quindi, dalla definizione di limite, $a_n + b_n \to a + b$;

- per la 12.10, fissiamo un $\varepsilon > 0$ e consideriamo

  $$|a_n b_n - ab|$$

  togliendo e aggiungendo $a_n b$ e raccogliendo si ha

  $$|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

  e con la diseguaglianza triangolare

  $$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$$

  Poiché $a_n \to a$, definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$; idem per $|b_n - b| < \varepsilon$ definitivamente. Infine $|a_n| < |a| + \varepsilon$ definitivamente; infatti considerando la diseguaglianza triangolare $|a - b| \geq |a| - |b|$, ribaltandola e ricordando che $|a_n - a| < \varepsilon$ definitivamente, si ha che $|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ e portando avanti solo primo e terzo membro, definitivamente si ha $|a_n| < |a| + \varepsilon$. Pertanto

  $$|a_n b_n - ab| < (|a| + \varepsilon)\varepsilon + |b|\,\varepsilon = \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon)$$

  definitivamente. Potendo avere ε al secondo membro, piccolo a piacere, si dimostra la $a_n b_n \to ab$.

□

12.4.2 Teoremi di permanenza del segno

Teorema 12.4.2 (Permanenza del segno (forma generale 1))**.** *Se $a_n \to a$, $b_n \to b$ e definitivamente $a_n \geq b_n$ allora si può dire che $a \geq b$*

Dimostrazione. Se definitivamente $a_n \geq b_n$ allora sempre definitivamente $a_n - b_n \geq 0$, ma poiché $a_n - b_n \to a - b$ (per l'algebra dei limiti), si conclude che $a - b \geq 0$ ovvero $a \geq b$. □

Osservazione 245. L'ultimo passaggio suggerisce che in una disuguaglianza tra due successioni si può passare al limite in ambo i membri mantenendo il segno $\leq$; in generale invece nel passaggio al limite non si conserva il segno di diseguaglianza stretta[1].

Teorema 12.4.3 (Permanenza del segno (forma generale 2))**.** *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di $\widetilde{\mathbb{R}}$ che in $\widetilde{\mathbb{R}}$ hanno rispettivamente α e β come limiti, allora quando $\alpha < \beta$ deve essere anche $a_n < b_n$ definitivamente*

Dimostrazione. Se $\alpha < \beta$, α e β hanno intorni separati V e W in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tali che sia $x < y$ per ogni $x \in V$ ed ogni $y \in W$; per n abbastanza grande $a_n \in V$ e $b_n \in W$ e quindi $a_n < b_n$. □

Osservazione 246. Un caso particolare del teorema in cui una delle due successioni è la costante nulla si chiama (effettivamente) teorema della permanenza del segno, nome che applichiamo anche all'osservazione appena fatta.

Teorema 12.4.4 (Permanenza del segno (forma particolare, prima versione))**.** *Se $a_n \to a$ con $a > 0$ (rispettivamente $a < 0$) allora definitivamente $a_n > 0$ (rispettivamente $a_n < 0$).*

Dimostrazione. Infatti fissato $\varepsilon > 0$ per definizione di limite abbiamo che definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$, che riscriviamo come

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Poiché $a > 0$ possiamo scegliere ε piccolo tale in modo che sia anche $a - \varepsilon > 0$; allora la diseguaglianza $a - \varepsilon < a_n$ mostra che $a_n > 0$ definitivamente. In modo analogo si mostra il caso $a < 0$ □

Teorema 12.4.5 (Permanenza del segno (forma particolare, seconda versione))**.** *Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e definitivamente $a_n \geq 0$, allora $a \geq 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla prima versione: se per assurdo fosse $a < 0$ dal teorema precedente si avrebbe che definitivamente $a_n < 0$, il che è incompatibile con l'ipotesi che definitivamente sia $a_n \geq 0$ □

12.4.3 Teoremi del confronto

Osservazione 247. Una delle tecniche più usate per verificare la tendenza ad un limite di una successione è quella di confrontarla con successioni il cui limite è noto.

[1] Ad esempio anche se gli a_n sono strettamente positivi, il loro limite a è positivo o nullo come mostra il semplice esempio di $\frac{1}{n} \to 0$.

Teorema 12.4.6 (Teorema del confronto)**.** *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni della retta reale estesa aventi limite in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è minorante di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora il limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può superare il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Dimostrazione. Siano α e β i limiti di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente. Se fosse $\alpha > \beta$ il teorema della permanenza del segno dice che è anche $a_n > b_n$ definitivamente, contraddicendo $a_n \le b_n$. □

Osservazione 248. È un errore molto frequente quello di credere che se $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ allora anche al limite si abbia la disuguaglianza stretta. Al limite si può avere anche l'uguaglianza.

Esempio 12.4.1. Sia $a_n = -1/n$ e $b_n = 1/n$: per ogni $n \ge 1$ $a_n < b_n$, ma $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Teorema 12.4.7 (Teorema dei carabinieri)**.** *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di $\mathbb{R}$. Si assuma che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia definitivamente compresa fra le altre due, ossia*

$$a_n \le x_n \le b_n, \qquad \forall n \ge n_0 \tag{12.13}$$

e che inoltre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergano ad uno stesso limite finito $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora anche $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad α.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$ esistono $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che sia $\alpha - \varepsilon \le a_n \le \alpha + \varepsilon$ per $n \ge n'_\varepsilon$ e $\alpha - \varepsilon \le b_n \le \alpha + \varepsilon$ per $n \ge n''_\varepsilon$. Se $n \ge n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ si ha allora $\alpha - \varepsilon \le a_n \le x_n \le b_n \le \alpha + \varepsilon$ e quindi $\lim x_n = \alpha$ come voluto. □

Esempio 12.4.2. Trovare il limite della

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} &< \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} &> \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \end{aligned}$$

quindi congiuntamente

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

e tendendo ad 1 sia il primo che il terzo membro della disequazione, anche il limite studiato tende a 1.

Osservazione 249. Il teorema 12.4.7 vale anche se il limite non è finito; nello specifico se il limite è $\pm\infty$ basta un solo carabiniere, come vediamo nel prossimo teorema.

Teorema 12.4.8. *Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia minorante della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; allora se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$; se invece $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ allora anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$.*

Dimostrazione. Ad esempio supponendo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverga a $+\infty$, per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $n_a \in \mathbb{N}$ tale che sia $a_n \geq a$, per $n \geq n_a$; si ha allora anche $b_n \geq a_n \geq a$ per $n \geq n_a$, il che mostra che $\lim b_n = +\infty$ $\square$

Esempio 12.4.3. Trovare il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

Si tratta della somma di n termini e si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}} > n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

ma

$$\frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

tende a $+\infty$ quindi anche la sucessione studiata tende a $+\infty$.

Teorema 12.4.9. *Se due successioni a_n e b_n sono tali che definitivamente si abbia*

$$|a_n| \leq |b_n|$$

e se b_n ha per limite 0, allora è anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Il presente è per lo più di un caso speciale (utile) del teorema 12.4.7.

Teorema 12.4.10. *Se due successioni a_n e b_n sono tali che si abbia definitivamente*

$$|a_n| \leq |b_n|$$

e se a_n diverge, allora anche b_n tende all'infinito.

12.4.4 Teoremi sulle successioni monotone

Osservazione 250. Per le successioni *monotone o definitivamente monotone*, valgono i seguenti teoremi detti *teoremi di monotonia*.

Osservazione 251. Saranno peraltro utilizzati per dimostrare importanti proprietà delle funzioni continue.

Teorema 12.4.11. *Una successione crescente limitata superiormente è convergente.*

Teorema 12.4.12. *Una successione decrescente limitata inferiormente è convergente.*

Teorema 12.4.13. *Una successione crescente illimitata superiormente diverge positivamente.*

Teorema 12.4.14. *Una successione decrescente illimitata inferiormente diverge negativamente.*

Dimostrazione. A titolo esemplificativo dimostriamo il teorema 12.4.11: considerando l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, poiché la successione è limitata superiormente, esiste l'estremo superiore di questo insieme che poniamo a:

$$\sigma = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}$$

Proviamo ora che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sigma$$

Occorre mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$\sigma - \varepsilon < x_n < \sigma + \varepsilon$$

La seconda diseguaglianza è ovvia: per ogni n è $x_n \leq \sigma$ poiché σ è maggiorante degli x_n. Per provare la prima disuguaglianza consideriamo il numero $\sigma - \varepsilon$. Essendo σ il minimo dei maggioranti degli x_n, essendo $\sigma - \varepsilon < \sigma$, certamente $\sigma - \varepsilon$ non è maggiorante dell'insieme x_n; quindi vi sarà un indice n_0 tale per cui

$$x_{n_0} > \sigma - \varepsilon$$

D'altro canto la successione è monotona crescente, perciò per ogni $n \geq n_0$ risulta $x_n \geq x_{n_0}$. Abbiamo quindi provato che

$$x_n \geq x_{n_0} > \sigma - \varepsilon$$

definitivamente; quindi $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sigma$. □

12.4.5 Algebra dei limiti concernenti infiniti

Osservazione 252. Consideriamo ora il caso di operazioni algebriche inerenti successioni con limiti entrambi o in parte infiniti.

12.4.5.1 Forme dirette

Proposizione 12.4.15 (Regole per l'addizione)**.** *Intendendo con a una successione convergente ad $a \in \mathbb{R}$ e con ∞ una successione divergente abbiamo (abbreviando informalmente) le seguenti regole:*

$$a + \infty = +\infty \tag{12.14}$$
$$a - \infty = -\infty \tag{12.15}$$
$$+\infty + \infty = +\infty \tag{12.16}$$
$$-\infty - \infty = -\infty \tag{12.17}$$

Proposizione 12.4.16 (Regole per il prodotto)**.**

$$a \cdot \infty = \infty \quad (a \neq 0) \tag{12.18}$$
$$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0) \tag{12.19}$$
$$\frac{a}{\infty} = 0 \tag{12.20}$$

Osservazione 253. In quest'ultimo caso, qualora il risultato sia ∞, il segno va determinato con la usuale regola dei segni

Dimostrazione. Proviamo a titolo di esempio la 12.20.
Dopo aver fissato $\varepsilon > 0$, dato che $b_n \to +\infty$, definitivamente si ha che $b_n > 1/\varepsilon$. Dato che $a_n \to a$, come si è visto nella dimostrazione di proposizione 12.4.1 definitivamente si ha che $|a_n| < |a| + \varepsilon$. Dato che $b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ si può scrivere anche $|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, quindi

$$\varepsilon\,|b_n| > 1 \iff \varepsilon > \frac{1}{|b_n|} \iff \frac{1}{|b_n|} < \varepsilon$$

Moltiplico membro a membro quest'ultima per la $|a_n| < |a|+\varepsilon$ e si ottiene infine

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} < \varepsilon(|a| + \varepsilon)$$

che si può riscrivere come

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon(|a| + \varepsilon)$$

E da quest'ultima, definitivamente, per l'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

12.4.5.2 Forme di indecisione

Definizione 12.4.1 (Forme di indecisione)**.** Sono chiamate così le situazioni

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \tag{12.21}$$

poiché nessuna regola può essere stabilita a priori per determinare il risultato.

Osservazione 254. All'atto pratico occorre vedere quale successione tende più velocemente ad infinito (o analogamente ad un infinito più alto) e/o a zero.

Osservazione 255 (Tecniche per $\frac{\infty}{\infty}$). La strategia risolutiva si biforca a seconda che al numeratore e al denominatore compaiano somme algebriche o moltiplicazioni/divisioni:

- nel caso di somme algebriche è comune raccogliere sia a numeratore che denominatore il termine più grande (facendo riferimento al grado o alla gerarchia di infiniti);
- nel caso di moltiplicazioni o divisioni, a parte cercare di semplificare si può studiare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Esempio 12.4.4.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n} + 3n^3}{\log^6 n + 2 - n^5}$$

Qui i termini maggiori sono n^3 al numeratore e n^5 al denominatore, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^3\left(\frac{1}{n^3 2^n} + 3\right)}{n^5\left(\frac{\log^6 n}{n^5} + \frac{2}{n^5} - 1\right)} \right] = -\frac{3}{n^2} = 0$$

Esempio 12.4.5. Calcoliamo il limite di

$$\frac{n+1}{(n-1)!}$$

Sfruttiamo (non portando avanti il simbolo di limite per brevità di notazione):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{n+1}=\frac{n+2}{n^2+n}=\frac{1}{n}=0$$

Quindi dato che $0<1$, $a_n\to 0$

Osservazione 256 (Tecniche per $\infty-\infty$)**.** Spesso la soluzione consiste nello studiare il limite della trasformazione del tipo:

$$(a_n-b_n)\cdot\frac{a_n+b_n}{a_n+b_n} \tag{12.22}$$

Esempio 12.4.6.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2-n-4n^2}{\sqrt{4n^2-n}+2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-n}{n\sqrt{4}+2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{n}{4n}\right)\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Definizione 12.4.2 (Altre forme riconducibili a $0\cdot\infty$)**.** Le situazioni

$$0^0,\quad 1^{\pm\infty},\quad (+\infty)^0 \tag{12.23}$$

(derivanti a vario titolo da una successione del tipo $a_n^{b_n}$) possono essere ricondotte alla forma $0\cdot\infty$ applicando l'uguaglianza

$$a_n^{b_n}=\exp(b_n\log a_n)$$

Osservazione 257. A questo punto se $b_n\log a_n$:

- converge a l, la successione $a_n^{b_n}$ converge a e^l;
- diverge a $\pm\infty$, $a_n^{b_n}$ diverge rispettivamente a $+\infty$ o converge a 0;
- è indeterminata, così è anche $a_n^{b_n}$.

Esempio 12.4.7. Per calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{a}{\log n}}$$

che si presenta nella forma ∞^0 procediamo come segue

$$\exp\left(\log n^{(a/\log n)}\right)=\exp\left(\frac{a}{\log n}\cdot\log n\right)=\exp a$$

n	a_n
1	2
2	2.25
10	2.5937
100	2.7048
1000	2.7169
100000	2.7182

Tabella 12.1: Approssimazioni successive di e

12.4.6 Numero di Nepero e calcolo dei limiti

Osservazione 258. Considerando la successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{12.24}$$

come si potrebbe dimostrare, risulta crescente e superiormente limitata: quindi per il teorema 12.4.11 è convergente. Si riportano alcuni valori (le prime cifre decimali) di a_n in tabella 12.1.

Definizione 12.4.3 (Numero di nepero)**.** Il limite di 12.24 è un numero irrazionale, si indica con la lettera e, ed è detto numero di Nepero. Per definizione dunque

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{12.25}$$

Osservazione 259. Una volta definito il numero e come sopra, si può dimostrare il seguente risultato

Proposizione 12.4.17. *Se a_n è una qualsiasi successione divergente (a $\pm\infty$), si ha allora:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e} \qquad \forall a_n \to \pm\infty \tag{12.26}$$

Osservazione 260. Questo ultimo risultato torna molto utile nei limiti che coinvolgono la forma di indeterminazione 1^∞.

Esempio 12.4.8.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2-1+1}{n+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right]^{\frac{n^2}{(n+1)}} = e^\infty \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Esempio 12.4.9.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{(n/3)}\right]^{\frac{-n}{n/3}} \\ &= e^{-\frac{3n}{n}} = e^{-3}\end{aligned}$$

12.4.7 Confronti e successioni asintotiche

Osservazione 261. Quando due successioni sono entrambe infinite di tipologia notevole come

$$\{\log n\} \quad \{\sqrt{n}\} \quad \{n^2\} \quad \{2^n\}$$

o entrambe infinitesime (es. i reciproci delle precedenti) è utile poter stabilire un confronto tra di esse per capire quale delle due tenda più rapidamente a 0 o a ∞.

Definizione 12.4.4 (Confronto di infiniti)**.** Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni divergenti; considerando il limite del rapporto si hanno quattro possibilità:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \begin{cases} 0 & 1) \\ l \text{ finito e} \neq 0 & 2) \\ \pm\infty & 3) \\ \text{inesistente} & 4) \end{cases} \tag{12.27}$$

Diciamo rispettivamente che

1. $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello *stesso ordine*;
3. $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine superiore* a $\{b_n\}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili

Definizione 12.4.5 (Confronto di infinitesimi)**.** Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni infinitesime (con b_n definitivamente $\neq 0$), considerando sempre il limite del rapporto (casi di equazione 12.27) diciamo che:

1. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine superiore* a $\{b_n\}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello *stesso ordine*;
3. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili

Osservazione 262. Il caso $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ è particolarmente importante

Definizione 12.4.6 (Successioni asintotiche)**.** Due successioni a_n, b_n tali che $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. L'asintoticità si indica mediante:

$$a_n \sim b_n \tag{12.28}$$

e si legge: a_n è asintotico a b_n.

Proposizione 12.4.18. *La relazione di asintotico è di equivalenza (soddisfa le proprietà riflessiva simmetrica e transitiva).*

Osservazione 263. Il simbolo asintotico è utile nel calcolo dei limiti poichè[2]:

[2] Dimostrazioni Bramanti 1 a pag 104

1. se $a_n \sim b_n$ le due successioni hanno lo stesso comportamento: convergono allo stesso limite o divergono entrambe a $\pm\infty$ o entrambe non hanno limite;

2. si possono scrivere catene di relazioni asintotiche, ovvero se

$$a_n \sim b_n \sim \ldots \sim z_n$$

allora $a_n \sim z_n$;

3. una espressione composta da prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore, ovvero se

$$a_n \sim a'_n, \quad b_n \sim b'_n, \quad c_n \sim c'_n$$

allora

$$\frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

Attenzione: lo stesso non vale per somme o per l'esponenziazione.

12.4.7.1 Gerarchia degli infiniti

Osservazione 264. Confrontiamo la velocità con cui i logaritmi (base > 1) potenze ed esponenziali (base > 1) tendono a ∞.

Proposizione 12.4.19 (Gerarchia di infiniti)**.** *Per $a > 1$, $\alpha > 0$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \tag{12.29}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \tag{12.30}$$

Osservazione 265. Ossia i logaritmi vanno più lentamente di qualsiasi potenza e quest'ultime più lentamente di qualsiasi esponenziale.

Dimostrazione. Rispettivamente:

1. per dimostrare la prima iniziamo stabilendo un'utile diseguaglianza tra un numero qualsiasi $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e il suo logaritmo. Se k è la parte intera di x si ha:

$$2^x \geq 2^k = (1+1)^k \geq 1 + k > x$$

con la prima diseguaglianza che segue dalla monotonia della funzione esponenziale, la seconda dalla diseguaglianza di Bernoulli. Passando ai $\log_a$ del primo e ultimo membro

$$\log_a x < x \log_a 2$$

per ogni $x > 0$. Applichiamo ora questa disuguaglianza al numero $x = n^{\alpha/2}$, avendo

$$\frac{\alpha}{2} \log_a n < n^{\alpha/2} \log_a 2$$

pertanto

$$\frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2$$

Infine

$$\frac{\log_a n}{n^\alpha} = \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Per il teorema del confronto $\frac{\log_a n}{n^\alpha} \to 0$ e la prima relazione è dimostrata.

TODO: Rivedere questa seconda dimostrazione

2. per dimostrare la seconda, applichiamo quest'ultimo risultato sostituendo all'intero n l'intero 2^n. Si ha:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(2^n)}{(2^n)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log_a 2}{(2^\alpha)^n}$$

Se ora $a > 1$ è fissato, scegliendo α in modo che sia $2^\alpha = a$ otteniamo che $\frac{n}{a^n} \to 0$, che è la seconda relazione nel caso particolare in cui n è elevato ad esponente 1. Il caso generale segue dall'identità:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{\left(a^{1/\alpha}\right)^n}\right)^\alpha$$

Infatti per il risultato precedente $\frac{n}{\left(a^{1/a}\right)^n} \to 0$ (la base $a^{1/\alpha}$ è ancora > 1) quindi anche $\left(\frac{n}{\left(a^{1/a}\right)^n}\right)^\alpha \to 0$

□

12.4.7.2 Criterio del rapporto

Osservazione 266. Il seguente risultato riconduce lo studio del carattere di una successione *positiva* al calcolo del limite di un'altra successione quella dei rapporti tra il termine $(n+1)$-esimo e il termine n-esimo. In certi casi quest'ultima è più semplice da studiare di quella di partenza.

Proposizione 12.4.20 (Criterio del rapporto)**.** *Sia a_n una successione sempre positiva. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

e

- *$l < 1$, allora $a_n \to 0$;*
- *$l > 1$ (eventualmente $+\infty$), allora $a_n \to +\infty$.*
- *$l = 1$ non si può concludere nulla*

Dimostrazione. Bramanti 1 pag 106 □

12.4.8 Metodi per le successioni definite induttivamente

Le successioni definite induttivamente

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + \dots \end{cases}$$

possono esser analizzate seguendo questi step:

1. si studia il carattere della successione, tentando di capire se monotona crescente o decrescente;
2. si cerca di dimostrare se la successione è limitata;

3. se entrambe le condizioni sono soddisfatte la successione è convergente; per determinare il valore cui converge si sostituisce il valore l nell'equazione $a_{n+1} = a_n + \dots$ al posto di a_{n+1} e a_n (ossia in altre parole stiamo sostituendo con il valore assunto da a_{n+1} e a_n quando n è molto alto) e si risolve per l.

Esempio 12.4.10. Considerando la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

proviamo che è superiormente limitata da 2 e studiamone il limite.
Per provare che è superiormente limitata da 2 andiamo per induzione su n: è $a_0 = \sqrt{2} \leq 2$; nell'ipotesi che $a_n \leq 2$, si ha che $a_{n+1} \leq \sqrt{2+2} = 2$.
Si ha anche che la successione è crescente, poiché è tipo una funzione $y = \sqrt{2+x}$, ossia una radice quadrata che nell'insieme di definizione è crescente (e dove la y calcolata diviene la x del passo successivo).
Pertanto essendo crescente e superiormente limitata, la successione è convergente ad un valore l; per $n \to +\infty$ si ha

$$l = \sqrt{2 + l}$$

ossia $l^2 = l + 2$; risolvendo l'equazione e scartando per forza di cose la soluzione negativa si ha che $l = 2$. In altre parole si è provato che

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

Esempio 12.4.11. Studiare il limite della successione:

TODO: check mi vengono risultati diversi

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$$

Si mostra facilmente per induzione che la successione è sempre ≥ 0; vediamo se monotona calcolando

TODO: Qui non sarebbe - al secondo membro??

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} + \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2}$$

e sostituendo ricorsivamente

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2} + 1}{\frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2} + 2} + \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2}$$

e sostituendo a_{n-1} con a per comodità

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\frac{a+1}{a+2} + 1}{\frac{a+1}{a+2} + 2} + \frac{a+1}{a+2} \\ &= \dots \\ &= \frac{5a^2 + 15a + 11}{(3a+5)(a+2)} \end{aligned}$$

Studiando il segno di quest'ultimo si ha che (tra le altre cose) $a_{n+1} - a_n > 0$ se $a > -\frac{5}{3}$; in altre parole se un termine (a_{n-1}) è $> -5/3$ la differenza dei due termini successivi è positiva, quindi la successione è crescente; ma dato che come visto la successione è sempre positiva, essa è sempre crescente (si può fare una prova con i primi termini, volendo ...).
Verifichiamo che sia superiormente limitata (ad esempio dal valore 1); per induzione $a_0 = 0 < 1$, se ipotizziamo che $a_n < 1$

$$\frac{a_n + 1}{a_n + 2} = 1 - \frac{1}{a_n + 2} < 1$$

Ossia è superiormente limitata. Ed essendo anche crescente, allora la successione è convergente.
Per $n \to +\infty$ si avrà che $a_n \to l$ e nello specifico

$$l = \frac{l+1}{l+2}$$
$$\ldots$$
$$l^2 + l - 1 = 0$$

Si ha che $l_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Scartando la radice negativa per ovvi motivi di segno si ha che il limite è $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.618$

12.5 Alcune successioni notevoli e loro proprietà

12.5.1 Progressioni aritmetiche

12.5.1.1 Introduzione

Definizione 12.5.1 (Progressione aritmetica)**.** Successione di numeri caratterizzati dal fatto che la differenza tra ciascuno di essi e il precedente è costante.

Definizione 12.5.2 (Ragione della progressione)**.** La differenza costante d tra ogni termine e il suo precedente:

$$d = a_n - a_{n-1} \tag{12.31}$$

Definizione 12.5.3 (Definizione ricorsiva)**.** Indicando con d la ragione la progressione aritmetica si definisce ricorsivamente:

$$a_n = a_{n-1} + d \tag{12.32}$$

Definizione 12.5.4 (Progressione crescente/decrescente)**.** Se $d > 0$ la progressione è *crescente*, mentre per $d < 0$ è *decrescente*.

Proposizione 12.5.1 (Definizione analitica)**.** *Se a_1 è il primo termine e d è la ragione, l'n-esimo termine della progressione aritmetica si ottiene come*

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \tag{12.33}$$

Dimostrazione. Per trovare l'espressione generale dell'n-esimo termine, consideriamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ \dots \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le $n-1$ uguaglianze otteniamo

$$\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + a_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1 \text{ addendi}}$$

□

12.5.1.2 Applicazioni

Osservazione 267. Data 12.33 possiamo determinare ciascuno dei quattro numeri a_1, a_n, d, n se sono noti gli altri tre.

Corollario 12.5.2. *Si ha*

$$\begin{aligned} a_1 &= a_n - (n-1)d \\ d &= \frac{a_n - a_1}{n-1} \\ n &= \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \end{aligned}$$

Osservazione 268. Se vogliamo determinare un membro della progressione a_r in funzione di un altro a_s (che non è il primo) possiamo procedere come segue.

Proposizione 12.5.3. *Sia a_s un membro generico (non il primo) ed a_r un altro membro generico. Si ha:*

$$\boxed{a_r = a_s + (r-s)d}$$

Dimostrazione. Considerando

$$\begin{aligned} a_r &= a_1 + (r-1)d \\ a_s &= a_1 + (s-1)d \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$a_r - a_s = rd - sd = (r-s)d$$

dalla quale si conclude. □

Definizione 12.5.5 (Progressione finita)**.** Se di una progressione si considerano sono n termini consecutivi, la progressione è detta *finita*.

Definizione 12.5.6 (Termini equidistanti)**.** Due termini di una progressione aritmetica *finita* si dicono *equidistanti* dagli estremi se il numero dei termini che precedono il primo è uguale al numero di termini che seguono il secondo.

Esempio 12.5.1. Sono equidistanti a_1 e a_n (primo e ultimo), a_2 e a_{n-1} (secondo e penultimo) e in generale i termini a_{1+k} e a_{n-k} (con $k \in \mathbb{N}, k < n$).

Teorema 12.5.4. *In una progressione aritmetica finita, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è uguale alla somma dei termini estremi*

$$\boxed{a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k}} \tag{12.34}$$

Dimostrazione. Dato che $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ riscriviamo a_1 come:

$$a_1 = a_{1+k} - kd$$

e considerando che $a_r = a_s + (r - s)d$ riscriviamo a_n come:

$$a_n = a_{n-k} + kd$$

Ora, sommando membro a membro le due uguaglianze otteniamo:

$$a_1 + a_n = a_{1+k} - \cancel{kd} + a_{n-k} + \cancel{kd}$$

come richiesto. □

Teorema 12.5.5. *La somma dei termini di una progressione aritmetica finita è uguale al prodotto della semisomma degli estremi per il numero dei termini:*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}} \tag{12.35}$$

Dimostrazione. Sia S_n la somma degli n termini di una progressione finita:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Scrivendola in ordine inverso si ha

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze precedenti abbiamo

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Al secondo membro abbiamo n somme di termini equidistanti dagli estremi, tutte uguali ad $(a_1 + a_n)$; pertanto si conclude. □

12.5.2 Progressioni geometriche

12.5.2.1 Introduzione

Definizione 12.5.7. Successione caratterizzati dal fatto che il rapporto tra ciascuno di essi e il precedente è costante

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \tag{12.36}$$

Definizione 12.5.8 (Ragione)**.** Il rapporto costante q tra un termine qualsiasi e il suo precedente

Definizione 12.5.9 (Definizione ricorsiva)**.** Ottenuta dalla 12.36

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{12.37}$$

Osservazione 269. Ovvero in una progressione geometrica un termine qualunque è uguale al precedente moltiplicato per la ragione.

Proposizione 12.5.6 (Definizione analitica)**.**

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \tag{12.38}$$

Dimostrazione. Consideriamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ \dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro le $n-1$ uguaglianze otteniamo

$$\cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ fattori}}$$

e sopprimendo i termini uguali nei due membri si conclude □

Osservazione 270. Considerando la 12.38, possiamo avere progressioni con termini dello stesso segno o di segno alternato:

- se $q > 0$ allora anche $q^{n-1} > 0$ per qualsiasi n e pertanto tutti i termini della progressione avranno lo stesso segno (dipendente da a_1)
- se $q < 0$ i termini della progressione avranno segno alterno. Se:
  - n è pari, $n-1$ è dispari, $q^{n-1} < 0$ e pertanto a_1 e a_n sono *discordi*;
  - n è dispari, $n-1$ è pari, $q^{n-1} > 0$ e pertanto a_1 e a_n sono *concordi*.

Progressioni a segno alterno

12.5.2.2 Applicazioni

Osservazione 271. Possiamo determinare ciascuna delle quattro componenti a_1, a_n, d, n di 12.38 se sono note le rimanenti tre.

Corollario 12.5.7. *Si ha*

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}} \tag{12.39}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \tag{12.40}$$

$$n = \log_q \frac{a_n}{a_1} + 1 \quad \textit{se } q > 0, q \neq 1 \textit{ e } a_n, a_1 \textit{ concordi} \tag{12.41}$$

Osservazione 272. La 12.40 è sempre applicabile in quanto l'unica volta che a_1 e a_n sono discordi è quando $n-1$ è dispari.

Osservazione 273. Nel caso di n dispari (ed $n-1$ pari) dalla formula 12.40 si ricaveranno due valori reali opposti di q:

$$q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Osservazione 274. L'equazione 12.41 è applicabile solo laddove definito il logaritmo, quindi se $q > 0, q \neq 1$ e a_n, a_1 concordi.

Osservazione 275. Se vogliamo determinare un membro della progressione a_r in funzione di un altro a_s (che non è il primo) possiamo procedere come segue.

Proposizione 12.5.8.

$$\boxed{a_r = a_s \cdot q^{r-s}}$$

Dimostrazione. Considerando

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$$
$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze abbiamo

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 q^{r-1}}{a_1 q^{s-1}} = \frac{q^{r-1}}{q^{s-1}} = q^{r-1-s+1} = q^{r-s}$$

da cui si conclude □

Proposizione 12.5.9 (Prodotto dei primi n termini di progressione a termini positivi)**.** *Si ha:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \sqrt{(a_1 \cdot a_2)^n} \tag{12.42}$$

Dimostrazione. Analoga a quella seguita per la somma di n termini di progressione aritmetica □

Proposizione 12.5.10 (Prodotto dei primi n termini di progressione a termini negativi o di segno alternato)**.** *Si ha:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_2)^n} \tag{12.43}$$

con segno negativo o positivo a seconda che il numero di fattori negativi sia dispari o pari.

Proposizione 12.5.11 (Somma dei termini di una progressione geometrica finita)**.** *Se $q \neq 1$ si ha che:*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}} \tag{12.44}$$

Dimostrazione. Considerando una progressione geometrica finita di ragione $q \neq 1$, se

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

moltiplicando ambo i membri per q, e ricordando che $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, $\ldots$, $a_{n-1} \cdot q = a_n$ si ha:

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot q$$

sottraendo a membro a membro da quest'ultima uguaglianza la precedente:

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_n q - a_1 \\ S_n(q-1) &= a_n q - a_1 \end{aligned}$$

avendo supposto che $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

Sapendo che $a_n = a_1 q^{n-1}$ e sostituendo, si ha

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

□

Proposizione 12.5.12 (Fattorizzazione di $a^n - b^n$)**.** *Vale la seguente:*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{12.45}$$

Dimostrazione. La 12.45 deriva dalla somma dei primi

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \tag{12.46}$$

se si riesce a vedere che i termini entro parentesi tonda lunga in 12.45 sono progressione con punto di partenza a^{n-1} e ragione $x = b/a$ (o similmente partenza b^{n-1} e ragione $x = a/b$).
Per verifica, se sostituiamo $x = b/a$ nella 12.46 otteniamo la 12.45

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} &= \frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1} \\ \ldots &= \frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b-a}{a}} \\ \ldots &= \frac{b^n - a^n}{a^n} \cdot \frac{a}{b-a} \\ \ldots &= \frac{b^n - a^n}{a^{n-1}} \cdot \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

da cui

$$a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + b^{n-1} = \frac{b^n - a^n}{b-a}$$

quindi si conclude che:

$$b^n - a^n = (b-a)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

e basta raccogliere un segno moltiplicando entrambi i membri per -1 per:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

□

12.6 Successioni in $\mathbb{C}$

12.6.1 Introduzione

Osservazione 276. Per una successione a valori complessi la definizione è analoga al caso reale.

Definizione 12.6.1 (Limite di successione di complessi)**.** Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi, e sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Si dice che la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ha limite* α se la successione si trova definitivamente in ogni intorno di α.

Definizione 12.6.2 (Successione convergente)**.** La successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $\alpha \in \mathbb{C}$ se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che sia $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$.

Osservazione 277. In altre parole $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ se e solo se la successione numerica reale $|z_n - \alpha|$ è infinitesima, $\lim |z_n - \alpha| = 0$

Osservazione 278. Non essendoci un ordine sui complessi, un unico *infinito senza segno* viene aggiunto a $\mathbb{C}$

Definizione 12.6.3 (Successione divergente (o tendente all'infinito))**.** Successione complessa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cui successione (reale positiva) dei moduli dei termini della successione data tende a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty \tag{12.47}$$

Esempio 12.6.1. Discutere, secondo i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'esistenza e il valore di

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha + \frac{i}{2}\right)^n$$

Se $z = \alpha + i/2$, con $\arg z = \theta$, si ha che

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}} > 0$$

Dato che la potenza z^n ha modulo $|z|^n$, se:

- $|z| > 1$ la successione diverge ad ∞;
- $|z| < 1$ la successione converge a 0;

- $|z| = 1$ la potenza diviene

$$z^n = 1^n \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

E dovrebbe essere indeterminata poiché di modulo unitario (1^∞) ma di rotazione continua (in altre parole, ma stesso significato, il libro dice indeterminata poiché $\alpha + i/2 \neq 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per la presenza della parte $i/2$; se al contrario così fosse $\theta = 0$, $n\theta = 0$ e la successione sarebbe convergente a 1, credo).

Si ha che:

- $|z| > 1 \iff \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}} > 1$, ossia se $\alpha < -\sqrt{3}/2 \vee \alpha > \sqrt{3}/2$; in questi casi la successione diverge
- $|z| < 1 \iff -\sqrt{3}/2 < \alpha < \sqrt{3}/2$; in questi casi la successione diviene infinitesima.
- se $\alpha = \pm\sqrt{3}/2$ la successione è indeterminata.

12.6.2 Successioni complesse e successioni reali

Osservazione 279. Una successione complessa può essere pensata come coppia di successioni reali, scrivendo:

$$z_n = x_n + iy_n \tag{12.48}$$

dove $x_n = \operatorname{Re} z_n$ è la parte reale di z_n ed $y_n = \operatorname{Im} z_n$ ne è il coefficiente dell'immaginario.

Proposizione 12.6.1. *Se $\alpha = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad α se e solo se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $a = \operatorname{Re}\alpha$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $b = \operatorname{Im}\alpha$.*

Dimostrazione. Se $\lim z_n = \alpha$, $\lim |z_n - \alpha| = 0$; consideriamo la proprietà del modulo del complesso $z_n - \alpha$

$$\begin{aligned}\max\left\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re}\alpha|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im}\alpha|\right\} &\leq |z_n - \alpha| \\ &\leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re}\alpha| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im}\alpha|\end{aligned}$$

Dalla prima di tali disuguaglianze, grazie al teorema dei carabinieri, segue che se $|z_n - \alpha|$ è infinitesima, allora tali sono anche $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re}\alpha|$ e $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im}\alpha|$; e se entrambe tali successioni reali sono infinitesime, tale è la loro somma, e quindi $|z_n - \alpha|$, dominato da una successione infinitesima, è successione infinitesima. □

Proposizione 12.6.2. *Se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad α, allora $|z_n|$ converge ad $|\alpha|$.*

Dimostrazione. Ciò risulta subito dalla disuguaglianza $||z_n| - |\alpha|| \leq |z_n - \alpha|$. □

12.6.2.1 Operazioni con i limiti complessi

Proposizione 12.6.3. *Come nel caso reale si ha che se $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di numeri complessi convergenti rispettivamente ad $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora:*

- *la successione somma $n \to w_n + z_n$ converge alla somma dei limiti $\alpha + \beta$*
- *la successione prodotto $n \to w_n z_n$ converge al prodotto dei limiti $\alpha\beta$*
- *se il limite β di $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è nullo, allora la successione quoziente w_n/z_n può essere definita per n abbastanza grande, ed il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti, $\lim_{n\to+\infty} w_n/z_n = \alpha/\beta$*

Dimostrazione. De Marco 1, pag 223 □

12.6.2.2 Infinitesimi ed infiniti complessi; operazioni con limiti infiniti

Definizione 12.6.4 (Successione lontana da 0)**.** Una successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si *mantiene lontana da 0* se esiste $\varrho > 0$ tale che sia $|z_n| \geq \varrho, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 12.6.4. *Date due successioni di numeri complessi si ha:*

- *se una successione si mantiene limitata, e l'altra è divergente, la* successione somma *è divergente;*
- *se una successione si mantiene lontana da 0 e l'altra è divergente, la successione prodotto è divergente;*
- *una successione di numeri complessi mai nulli è infinitesima se e solo se la successione dei reciproci è divergente*
- *il quoziente tra una successione limitata ed una divergente è infinitesimo*
- *il quoziente tra una successione lontana da zero ed una infinitesima mai nulla è divergente*

Dimostrazione. De Marco 1 pag 224 □

12.6.2.3 Sottosuccessioni convergenti

Teorema 12.6.5. *Ogni successione limitata di numeri complessi ha una sottosuccessione convergente*

Dimostrazione. De Marco 1, pag 225 □

12.7 L'utilizzo di maxima

Calcolo di limite di successione Per il calcolo di limite (di successione) si usa la funzione `limit`; riproduciamo gli esempi da 12.4.4 a 12.4.6

```
##
## f(n):=(2^-n+3*n^3)/(log(n)^6+2-n^5)
##                                         - n      3
##                                        2    + 3 n
##                               f(n) := ----------------
##                                         6          5
##                                      log (n) + 2 - n
## limit(f(n),n,+inf)
##                                          0
## g(n):=(n+1)/(n-1)!
##                                           n + 1
##                                   g(n) := --------
##                                          (n - 1)!
## limit(g(n),n,+inf)
##                                          0
## h(n):=(4*n^2-n)^(1/2)-2*n
##                                         2     1/2
##                              h(n) := (4 n  - n)    - 2 n
## limit(h(n),n,+inf)
##                                           1
##                                         - -
##                                           4
```

Capitolo 13

Serie numeriche

13.1 Introduzione

Osservazione 280. La somma è un operazione definita quando il numero di addendi che si considerano è finito; tuttavia capitano situazioni in cui occorre calcolare la somma di un numero infinito[1] di addendi e per trattare situazioni del genere occorre introdurre il concetto di serie.

13.1.1 Definizioni

Definizione 13.1.1 (Serie)**.** Sommatoria degli infiniti elementi di una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j \tag{13.1}$$

Definizione 13.1.2 (Termine generale della serie)**.** La successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sommata.

Definizione 13.1.3 (Somma parziale (o ridotta) n-esima)**.** Somma dei termini di $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ fino all'n-esimo;

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$$

[1]La possibilità di sommare infiniti numeri, magari tutti positivi, e ottenere un risultato finito era qualcosa di paradossale per gli antichi filosofi greci; d'altra parte l'idea non è cosi paradossale basta pensare che potremmo scomporre la lunghezza di un'asta di due metri nella somma infinita dei "metà pezzi rimanenti da sommare", ottenendo una somma del tipo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

la quale, secondo le aspettative dovrebbe avere come risultato 2.

Definizione 13.1.4 (Successione delle somme parziali (o delle ridotte))**.** Successione formata dalle somme parziali:

$$\begin{aligned}
&s_0 = x_0\\
&s_1 = x_0 + x_1\\
&\dots\\
&s_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n\\
&\dots
\end{aligned}$$

13.1.2 Carattere di una serie

Osservazione 281. Determinare il *carattere* di una serie significa stabilire se essa è, alternativamente, convergente, divergente o indeterminata. Per farlo si studia il limite della successione delle somme parziali per n tendente all'infinito

$$\lim_{n\to\infty} s_n \tag{13.2}$$

Definizione 13.1.5 (Serie convergente)**.** Serie il cui limite della successione delle somme parziali esiste ed è finito

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j = \lim_{n\to\infty} s_n = s, \qquad s \in \mathbb{R}$$

Definizione 13.1.6 (Serie divergente)**.** Serie il cui limite della successione delle somme parziali è infinito.

Osservazione 282. Se il limite è $+\infty$ la serie *diverge positivamente*, mentre se è $-\infty$ la serie *diverge negativamente*.

Definizione 13.1.7 (Serie indeterminata)**.** Casi residuali, il limite non esiste

Osservazione 283. In realtà non è quasi mai possibile riuscire a scrivere la ridotta in una forma che permetta il calcolo dell'eventuale limite della successione per $n \to \infty$, e bisogna fare spesso uso di criteri di convergenza propri delle serie.

Osservazione 284. Prima di passarli in rassegna vediamo alcuni risultati generali inerenti il carattere di una serie ed alcune serie notevoli.

Teorema 13.1.1. *Se esiste un indice $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n = y_n$ per $n \geq N$, allora le serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ hanno lo stesso carattere (cioè sono entrambe convergenti, entrambe divergenti o entrambe indeterminate)*

Dimostrazione. Se $\sum_{n=0}^{m} x_n = \xi_m$ e $\sum_{n=0}^{m} y_n = \eta_m$ sono le ridotte generiche delle due serie, per $m \geq N$ si ha che

$$\xi_m - \eta_m = \sum_{n=0}^{m} (x_n - y_n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} (x_n - y_n)}_{\gamma}$$

L'ultima eguaglianza deriva dal fatto che da N in poi si ha che $x_n - y_n = 0$; pertanto le somme delle due serie differiscono complessivamente per la *costante* γ, e per questo motivo presentano lo stesso carattere. □

Teorema 13.1.2 (Moltiplicazione per costante e carattere della serie)**.** *Il carattere di una serie non si altera se si moltiplicano i suoi termini per una stessa costante $c \neq 0$. In particolare, se la serie è convergente, moltiplicandone tutti i termini per una costante si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma della serie data moltiplicata per tale costante:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} cx_n = cs \tag{13.3}$$

Dimostrazione. Ciò deriva basicamente dalle proprietà delle sommatorie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n = cs$$

□

Teorema 13.1.3 (Somma di due serie convergenti)**.** *Sommando termine a termine due serie convergenti si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma delle somme delle serie date:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n = b\right) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = a + b \tag{13.4}$$

Dimostrazione. Deriva anche questo dalle proprietà delle sommatorie in quanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = a + b$$

□

Teorema 13.1.4 (Soppressione di un numero finito di termini)**.** *Sopprimendo un numero* finito *di termini da una serie, il carattere di essa non cambia. In particolare se la serie è convergente, sopprimendo un numero finito di termini rimane convergente e la sua somma risulta diminuita della somma dei termini soppressi:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s\right) \wedge \left(\sum_{n=1}^{k} x_n = A\right) \longrightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n = s - A \tag{13.5}$$

Dimostrazione. Analoga applicazione delle proprietà delle sommatorie:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_n = s - A$$

□

Definizione 13.1.8 (Serie resto)**.** Serie formata dagli elementi di una serie data, considerando solamente i termini a partire da un k-esimo in poi:

$$R_n = \sum_{n=k}^{\infty} x_n \tag{13.6}$$

Osservazione 285. Proprietà ovvia della serie resto è che tende a 0 per $k \to +\infty$.

13.1.3 Esempi notevoli

Esempio 13.1.1. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

non converge. Si ha infatti $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ e in generale le somme parziali di posto pari valgono 1, quelle di posto dispari sono nulle; la successione delle somme parziali è quindi priva di limite e la serie è indeterminata.

Esempio 13.1.2 (Serie geometrica)**.** È la somma dei termini di una successione geometrica con primo termine unitario e ragione q:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots} \tag{13.7}$$

La ragione determina il carattere della serie; se

- $q \neq 1$ la somma parziale n-esima è data da

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \overset{(1)}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1 \tag{13.8}$$

  dove (1) è ottenuta da 12.44, post raccoglimento di un segno meno sia a numeratore che a denominatore (e ricordando che $a_1 = 1$).
  Si hanno dunque i seguenti casi:

  – se $|q| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ e pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

    ossia la serie *converge* e ha per somma $\frac{1}{1-q}$;

  – se $q = -1$ la serie assume la forma $1-1+1-1+\ldots$, la somma oscilla tra 0 e 1, e quindi la serie è *indeterminata*;

  – se $q > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$ e la serie *diverge positivamente*;

  – se $q < -1$ la serie è *indeterminata* perché $\lim_{n\to\infty} q^n$ non esiste (alcuni testi riportano, per questo caso, il carattere divergente, intendendo che $|s_n| \to +\infty$).

- $q = 1$ non vale la forma compatta di equazione 13.8, ma comunque si ha:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ volte}} = n + 1$$

  quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

  e la serie *diverge positivamente*

Esempio 13.1.3 (Serie di Mengoli)**.**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}$$

Osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

si riesce a dare una espressione semplice alla successione s_n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \left[1 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dunque per $n \to \infty$, $s_n \to 1$ quindi la serie converge ed ha somma 1.

Definizione 13.1.9 (Serie telescopica)**.** Serie in cui il termine generale x_j può essere riscritto come $z_j - z_{j+1}$, dove z_j è un'altra opportuna successione.

Osservazione 286. In tale situazione, grazie alle elisioni si ha:

$$s_n = z_1 - z_{n+1}$$

pertanto se $z_n \to 0$, la serie è convergente e ha somma z_1.

Esempio 13.1.4. Quella di Mengoli è il più semplice esempio di serie telescopica.

Osservazione 287. Può essere che il lag necessario per avere l'elisione dei termini in una serie telescopica non sia solo di un indice, bensì di più indici, come avviene nel prossimo esempio.
L'importante per arrivare ad una forma compatta è che si possa scomporre la serie data nella somma algebrica di due termini e che l'elisione avvenga, prima o poi, tra i termini di un indice e i termini di un altro.

Esempio 13.1.5. Vogliamo mostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

converge e ne vogliamo calcolare la somma. Spezziamo la serie individuando quegli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

sviluppando si ha:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) + b(n-1)}{n^2 - 1} = \frac{(a+b)n + (a-b)}{n^2 - 1}$$

l'eguaglianza tra primo e ultimo membro nei denominatori è ok, quella nei numeratori è garantita se:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

con $a+b=0$ poiché $n \neq 1$; il sistema ha come soluzione $a=-b$ e $b=-1/2$, quindi possiamo riscrivere la serie dalla quale siamo partiti come:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1/2}{n-1}-\frac{1/2}{n+1}\right)$$

e spezziamo la sommatoria in:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1/2}{n-1}-\frac{1/2}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}}_{A}-\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}}_{B}\right)$$

Se si sviluppa per esteso minimamente la sommatoria si nota che tutti i termini di A si cancellano con quelli di B, salvo i primi due di A e gli ultimi due di B (poiché i termini di A e B coincidono ma sono laggati di 2 unità; A è in ritardo di 2 unità su B). Si ha quindi:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

che tende a $3/4$ per $n\to\infty$; la serie è quindi convergente, con $3/4$ come somma.

Esempio 13.1.6. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)=e^1-\cancel{e^{\frac{1}{2}}}+\cancel{e^{\frac{1}{2}}}-\cancel{e^{\frac{1}{3}}}+\ldots+\cancel{e^{\frac{1}{\infty}}}-e^{\frac{1}{\infty+1}}=e-e^{\frac{1}{\infty+1}}=e-1$$

13.2 Criteri di convergenza

Teorema 13.2.1. *Se una serie è convergente, il suo termine generale tende a zero per $n\to\infty$.*

Dimostrazione. Dato che la serie è convergente, detta s la sua somma si avrà $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. Tuttavia dato che anche $\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s$, sottraendo membro a membro queste due espressioni si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0$$

e per l'algebra dei limiti finiti, considerando anche che la differenza tra s_n e s_{n-1} è l'n-esimo termine x_n

$$\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

come si voleva dimostrare $\square$

Osservazione 288. Non vale il viceversa di teorema 13.2.1; ossia esistono serie il cui termine generale è infinitesimo ma non sono convergenti. Un esempio è la serie armonica di esponente 1, che mostriamo dopo aver esposto una implicazione utile.

Proposizione 13.2.2. *Se la successione delle somme parziali* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge ad* $s \in \mathbb{R}$*, tutte le sue sottosuccessioni (per la 12.3.1) di* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *vi convergono; in particolare ad esempio* $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s$ *e quindi si ha anche* $\lim_{m\to\infty}(s_{2m} - s_m) = 0$.

Osservazione 289. Se si dimostra dunque che $\lim_{m\to\infty}(s_{2m} - s_m) \neq 0$, non può essere che $\lim_{m\to\infty} s_m = s$ e quindi la successione delle somme parziali $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (ossia la serie) non converge.

Esempio 13.2.1 (Serie armonica di esponente 1)**.** La serie armonica (con esponente del denominatore unitario):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

non converge (nonostante abbia il termine generale $1/n \to 0$).
Per dimostrarlo calcoliamo $\lim_{m\to\infty}(s_{2m} - s_m)$, mostrando che è $\neq 0$; se s_m è la ridotta m-esima della serie si ha

$$s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+m}$$

che è una somma di m termini decrescenti, ciascuno dei quali è maggiore o uguale all'ultimo termine $1/2m$. Ne segue che la somma stessa supera $m(1/(2m)) = 1/2$; si ha cioè $s_{2m} - s_m \geq 1/2$, per ogni $m \in \mathbb{N}$, pertanto $s_{2m} - s_m$ non è infinitesimo e la serie non può convergere.

13.2.1 Criteri per serie a termini non negativi

Osservazione 290. Una serie $\sum x_n$ a termini non negativi ha somme parziali crescenti (in senso lato), ed essendo una successione monotona può essere convergente o divergente a $+\infty$. Essa converge solo se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è limitata; meno abbiamo a disposizione alcuni criteri per determinarlo.

Osservazione 291. Dato che il carattere di una serie non cambia se ne alteriamo un numero finito di termini (per teorema 13.1.1), i criteri che si vedranno per le serie a termini non negativi si applicano anche:

- alle serie con termini *definitivamente non negativi*
- a serie a *termini non positivi, anche solo definitivamente* (raccogliendo poi un segno meno dall'intera serie)

In sostanza questi criteri si applicano alle *serie che hanno tutti i termini (tranne un numero finito) dello stesso segno.*

Definizione 13.2.1 (Serie maggiorante e minorante)**.** Se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ sono due serie a termini non negativi tali che $x_n \leq y_n$ (per $\forall n \in \mathbb{N}$ o anche solo definitivamente), la serie $\sum x_n$ si dice *minorante*, mentre la serie $\sum y_n$ *maggiorante* (per $\forall n \in \mathbb{N}$ o anche solo definitivamente).

Teorema 13.2.3 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\sum x_n$ e $\sum y_n$ due serie a termini non negativi, rispettivamente minorante e maggiorante l'una dell'altra (per $\forall n \in \mathbb{N}$ o anche solo definitivamente). Valgono le seguenti implicazioni:*

TODO: Fatico a capire perché il teorema funzioni anche se la diseguaglianza è garantita solo definitivamente, ma tant'è (De Marco, pag 234 inizio).

1. *se $\sum y_n$ è convergente ($= b \in \mathbb{R}$), $\sum x_n$ è convergente (ad $a \leq b$);*
2. *se $\sum x_n$ è divergente, $\sum y_n$ è divergente.*

Dimostrazione. Rispettivamente:

1. la prima implicazione è dimostrabile iniziando a sommare, termine a termine le diseguaglianze $x_n \leq y_n$ e constatando che la ridotta degli y ha come estremo superiore il limite b, pertanto si ha:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m \leq y_0 + y_1 + \ldots + y_m \leq b$$

Ma allora si ha che:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m \leq b$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$, ossia la successione delle somme è superiormente limitata ed essendo crescente converge ad un limite $a \leq b$.

2. la seconda implicazione osservando che se

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m \leq y_0 + y_1 + \ldots + y_m$$

e la serie formata dagli x_n diverge a $+\infty$, allora per il teorema dei carabinieri (del carabiniere sinistro) anche la serie degli y_n lo fa.

□

Esempio 13.2.2 (Serie armonica generale (di esponente p))**.** La serie armonica di esponente p è definita come:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots}$$

Se:

- $p = 2$ la serie è convergente: il suo termine generale è $x_n = 1/n^2$ ed è $1/n^2 \leq 1/(n(n-1))$ ossia è maggiorato da quello della serie di Mengoli. E dato che la serie di Mengoli converge, converge anche l'armonica di esponente $p = 2$.
- $p = 3$ (ad esempio) basta rilevare che (ad esempio) $1/n^3 < 1/n^2$ quindi la serie con $p = 3$ è maggiorata da quella con $p = 2$; pertanto converge. In generale quindi se $p > 2$, la serie converge; si vedrà in esempio 13.2.8, mediante l'applicazione del criterio di condensazione di Cauchy, che basta avere $p > 1$ affinché la serie sia convergente.
- $p = 1$ la serie è divergente, come visto nell'esempio 13.2.1
- $p < 1$, la serie data è maggiorante della serie armonica con $p = 1$, perciò diverge.

Esempio 13.2.3. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$$

è convergente? Direi di sì, infatti essendo $-1 \leq \cos n \leq 1$, i termini sono sempre positivi o al più nulli, e si ha che:

$$\frac{1-\cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

ed essendo il secondo membro convergente (legato alla serie armonica di esponente 2), funge da limite superiore al primo membro. Pertanto la serie data è convergente.

Teorema 13.2.4 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Se le due successioni a termini positivi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche:*

$$a_n \sim b_n$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere, ovvero sono entrambe convergenti o divergenti a $+\infty$.

Dimostrazione. Assente sul Bramanti, atto di fede. □

Osservazione 292. Tuttavia nel caso siano convergenti, non necessariamente avranno lo stesso limite: intuitivamente questo accade perché gli addendi delle due somme sono simili quando n è grande, ma il valore della somma della serie dipende da tutti gli addendi anche i primi (dove magari le due serie sono profondamente differenti).

Osservazione 293. Tutti gli strumenti utili per stabilire stime asintotiche per funzioni (limiti notevoli, sviluppi di MacLaurin, ...) si possono applicare anche per ottenere stime asintotiche per successioni e quindi sono comode per lo studio del carattere di una serie a termini positivi.

Esempio 13.2.4. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge perché

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$$

e la serie di Mengoli converge.

Esempio 13.2.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\cos n}{3+2n^3}$ converge perché $\frac{5n+\cos n}{3+2n^3} \sim \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ (ovviamente la costante moltiplicative è ininfluente sul carattere della serie).

Teorema 13.2.5 (Criterio della radice (serie a termini non negativi)[2])**.** *Se $\sum a_n$ è una serie a termini non negativi, nel caso esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \tag{13.9}$$

Allora se:

[2]Fonte: Bramanti

- $l > 1$: *la serie diverge (inoltre il termine generale della serie tende a* $+\infty$*);*
- $l < 1$: *la serie converge;*
- $l = 1$: *non si può concludere nulla.*

Esempio 13.2.6. Considerando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad a \geq 0$$

si ha per $n \to +\infty$:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \to 0 < 1$$

quindi la serie data converge.

Teorema 13.2.6 (Criterio del rapporto (serie a valori positivi)[3])**.** *Se* $\sum a_n$ *una serie a termini strettamente positivi, nel caso esista il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \tag{13.10}$$

Allora se:

- $l > 1$: *la serie diverge (inoltre il termine generale della serie tende a* $+\infty$*);*
- $l < 1$: *la serie converge;*
- $l = 1$: *non si può concludere nulla.*

Esempio 13.2.7. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente, in quanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Teorema 13.2.7 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Sia* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *successione decrescente di numeri positivi. La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se e solo se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *converge.*

Dimostrazione. Essendo la serie a termini positivi, la successione delle sue ridotte è crescente. Vogliamo stimare la ridotta di posto $2^\nu - 1$ ossia $\sum_{n=1}^{2^\nu} a_n$ (il -1 sta ad indicare che di fatto le ridotte partono in numerazione dal secondo termine e la ridotta composta dal solo primo termine è quella di posto 0).
Per farlo dividiamo l'insieme degli indici su cui si somma $\{1, 2, \dots, 2^\nu\}$ in blocchi compresi tra 2^{k-1} e 2^k, per $k = 1, 2, \dots, \nu$; quindi ad esempio, se $k = 1$ tra 2^0 e 2^1, ossia $\{1, 2\}$, se $k = 2$ si ha $\{2, 3, 4\}$ e così via (rimane da capire come si gestiscono gli indici, ad esempio tipo il 2, che compaiono sia in un gruppo che l'altro). Dato che

$$\sum_{n=1}^{2^\nu} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{2^\nu} a_n$$

[3] Fonte: Bramanti

ma anche

$$\sum_{n=2}^{2^\nu} a_n = \underbrace{\sum_{n=2^{1-1}+1}^{2^1} a_n}_{a_2} + \underbrace{\sum_{n=2^{2-1}+1}^{2^2} a_n}_{a_3+a_4} + \underbrace{\sum_{n=2^{3-1}+1}^{2^3} a_n}_{a_5+\ldots+a_8} + \ldots$$

possiamo spezzare la sommatoria complessiva, compattamente, come:

$$\sum_{n=1}^{2^\nu} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \right)$$

Dal pedice della sommatoria $n = 2^{k-1} + 1$ si capisce che il doppio viene gestito escludendolo quando è l'inizio di un gruppo di indici.
Essendo la successione decrescente si ha la seguente disuguaglianza (per un dato k):

$$a_{2^{k-1}} \geq a_n \geq a_{2^k}$$

dato che $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$ e $n = 2^{k-1} + 1$. Le disuguaglianze di questo tipo sono complessivamente $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1) = 2^{k-1}$: al fine di avere il numero di sequenze tra $a_{2^{k-1}}$ e a_{2^k} estremi della diseguaglianza, a tutte le sequenze di indici successivi con al massimo a_{2^k} come ultimo (che sono in numero 2^k) tolgo il numero di sequenze di indici successivi che terminano al massimo con $a_{2^{k-1}}$ e sono appunto 2^{k-1}.
Sommando membro a membro queste 2^{k-1} disuguaglianze si ottiene per ogni $k \geq 1$ (considerato per ora fisso):

$$2^{k-1} a_{2^{k-1}} \geq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \geq 2^{k-1} a_{2^k}$$

il primo membro coincide, moltiplicato per 2^{k-1}, così come anche il terzo; il secondo membro è la somma di tutti gli a_n per un dato valore di k.
Sommando le diseguaglianze per i vari $k = 1, \ldots, \nu$ membro a membro:

$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \geq \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \right) \geq \sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^k}$$

e invertendo i due membri estremi e ricompattando la sommatoria di quello intermedio si ha:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=2}^{2^\nu} a_n \leq \sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

Da qui consideriamo gli ultimi due membri di questa diseguaglianza; facendo attenzione all'ultima, essendo la serie a termini positivi si può certamente scrivere che:

$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

Riscriviamo gli indici del secondo membro (facendoli puntare comunque agli stessi elementi) come

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

quindi complessivamente si finisce in

$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge a S (questa è l'ipotesi del teorema), ogni sua ridotta è maggiorata da S; si ha pertanto

$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq S$$

per ogni $\nu \in \mathbb{N}$; le ridotte della serie data sono quindi tutte maggiorate da $a_1 + S$ (poiché abbiamo sommato dal secondo indice in poi) e quindi la serie data, a termini positivi, converge.
Se la serie data converge, ed ha $s = a_1 + S$ come somma, si ha per ogni $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{n=2}^{2^\nu} a_n \leq \underbrace{s - a_1}_{S}$$

e quindi le ridotte della serie $\sum_{k=1}^{\nu} 2^k a_{2^k}$ sono maggiorate da $2(s - a_1)$; tale serie, a termini positivi, è quindi convergente. □

Esempio 13.2.8 (Convergenza della serie armonica)**.** Mostriamo che $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge se e solo se $p > 1$; se:

- $p \leq 0$ il termine generale non è infinitesimo in quanto $\frac{1}{n^p} = n^{-p}$ ed essendo $-p > 0$, per $n \to \infty$ il termine generale è infinito elevato a costante positiva. Pertanto la serie non converge.

- $p > 0$ il termine generale è decrescente (in quanto $n^p < (n+1)^p$, se $p > 0$) e la serie del criterio di condensazione è:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{p-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k}$$

  la quale (considerando l'ultima) può esser vista come una serie geometrica, convergente se e solo se:

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \iff 2^{p-1} > 1 \iff p > 1$$

Esempio 13.2.9. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$$

converge se e solo se $p > 1$. Infatti se:

- $p \leq 0$ allora $-p \geq 0$ e si ha $\log^{-p} n \geq 1$ per $n \geq 3$, per cui

$$\frac{1}{n \log^p n} = \frac{\log^{-p} n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

per $n \geq 3$; la serie dunque non converge essendo una maggiorante della serie armonica di esponente 1 che diverge;

- $p > 0$ il termine generale è decrescente e positivo (sia n che $\log^p n$ sono crescenti e positive); si ha applicando il criterio di Cauchy:

$$2^k \frac{1}{2^k \log^p(2^k)} = \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{\log^{-p} 2}{k^p} = \frac{1}{k^p} \cdot \log^{-p} 2$$

e la serie che ha questo come termine generale converge se e solo se $p > 1$, essendo multipla della serie armonica di esponente p.

13.2.2 Criteri per serie a termini di segno arbitrario

Osservazione 294. Qui esaminiamo criteri utili per le serie che possiedono infiniti termini positivi *e* infiniti termini negativi.

Definizione 13.2.2 (Serie assolutamente convergente)**.** Serie $\sum a_n$ per la quale la serie formata con i valori assoluti dei propri termini $\sum |a_n|$ è convergente.

Teorema 13.2.8. *Se una serie* $\sum a_n$ *converge assolutamente, allora converge.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni reale x sono definite parte positiva x^+ e parte negativa x^-, ossia:

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Data la serie assolutamente convergente $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ consideriamo le serie delle parti positive e negative degli x_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n^-$$

Esse sono serie a termini positivi e sono entrambe minoranti della serie dei moduli $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ (dato che $x^+, x^- \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Per il criterio del confronto sono entrambe convergenti, poiché si sta assumendo che la serie sia assolutamente convergente e le due serie parte positiva e negativa sono maggiorate da questa. Ma essendo $x_n = x_n^+ - x_n^-$ anche la serie degli x_n è convergente. □

Esempio 13.2.10. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p > 1$$

è assolutamente convergente; infatti si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

è convergente per $p > 1$. Pertanto la serie data è anche convergente.

Osservazione 295. Non è detto, viceversa, che una serie convergente sia anche assolutamente convergente.

Esempio 13.2.11. La serie armonica di segno alterno

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

è (come si vedrà) convergente. Tuttavia non è assolutamente convergente: infatti se si prendono i valori assoluti dei termini si ha la serie armonica di esponente $p = 1$, che è divergente.

Teorema 13.2.9 (Criteri della radice[4]). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ serie numerica. Se:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \alpha < 1$ *la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è assolutamente convergente (e quindi convegente);*
- *è $\sqrt[n]{|x_n|} < 1$ definitivamente in $\mathbb{N}$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è assolutamente convergente;*
- *per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ (e in particolare, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = c > 1$) la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo.*

Dimostrazione. Rispettivamente:

- si tratta del criterio della radice (teorema 13.2.5) su termini (forzatamente) positivi;
- se $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$ per $n \geq N$, si ha anche $|x_n| \leq q^n$ per $n \geq N$ e la serie converge assolutamente perché la serie geometrica di ragione $0 \leq q < 1$ è convergente;
- se la radice della serie tende ad un valore $c > 1$ si ha che, definitivamente $\sqrt[n]{|x_n|} = c > 1$ e quindi $|x_n| = c^n$, ma per $n \to \infty$ il termine n-esimo è infinito, dato che $c > 1$.

□

Esempio 13.2.12. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}$$

Applicando il criterio della radice si ha

$$\sqrt[n]{e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}} = \left(e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}\right)^{1/n} = e^{-\frac{nx}{n+x^2}}$$

Poiché $-\frac{nx}{n+x^2} = -\frac{x}{1+x^2/n}$ tende a $-x$ per $n \to +\infty$, la radice n-esima del termine generale tende ad e^{-x} per $n \to +\infty$; si ha che

[4]Fonte: De Marco

- $e^{-x} < 1$ per $x > 0$ e per tali valori la serie converge;
- $e^{-x} > 1$ per $x < 0$ e per tali valori la serie non converge (diverge a $+\infty$ essendo a termini positivi);
- per $x = 0$ il termine generale è costantemente 1 e la serie diverge a $+\infty$.

Teorema 13.2.10 (Criterio del rapporto[5])**.** *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ serie a termini mai nulli. Se:*

- *si ha $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ definitivamente, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è assolutamente convergente (e quindi convergente);*
- *si ha $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$ definitivamente (e in particolare, se $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$), allora il termine generale non è infinitesimo e la serie non converge.*

Osservazione 296. Se il rapporto $|x_{n+1}| / |x_n|$ ha per limite 1 e non è definitivamente maggiore o uguale a 1, il criterio del rapporto non permette di concludere alcunché.

Dimostrazione. Dato un $0 < q < 1$, se definitivamente per $n \geq N$, $|x_{n+1}| / |x_n| \leq q$, si ha:

$$|x_{N+1}| \leq q\,|x_N|$$

ma anche

$$|x_{N+2}| \leq q\,|x_{N+1}|$$

Moltiplicando entrambi i membri della prima delle due per $q > 0$ e giuntandola con questa seconda si ha:

$$|x_{N+2}| \leq q\,|x_{N+1}| \leq q^2\,|x_N|$$

e in generale, prestando attenzione al primo e ultimo membro di quest'ultima:

$$|x_{N+p}| \leq q^p\,|x_N|$$

mentre per il termine successivo

$$|x_{N+p+1}| \leq q\,|x_{N+p}| \leq q \cdot q^p\,|x_N| = q^{p+1}\,|x_N|$$

Quindi ponendo $k = p + 1$ e tenendo prima e ultima parte della diseguaglianza:

$$|x_{N+k}| \leq q^k\,|x_N|$$

Infine posto $N + k = n$ si ha:

$$|x_n| \leq q^n \underbrace{\frac{|x_N|}{q^N}}_{=c>0}$$

e per $n \geq N$, $|x_n| \leq cq^n$, quindi x_n converge assolutamente (e quindi converge). □

[5] Fonte: De Marco

Esempio 13.2.13. Verifichiamo i criteri sulla serie armonica, ad esempio per $p = 1$ (dove sappiamo essere divergente) e $p = 2$ (convergente).
Il criterio del rapporto porge in entrambi i casi (omettiamo i valori assoluti perché le serie sono a termini positivi)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p$$

che tende a 1 per $n \to +\infty$.
Con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = n^{-p/n} = \exp\log\left(n^{-p/n}\right) = \exp\left(-p\frac{\log n}{n}\right)$$

che (sapendo che $\lim_{n\to+\infty} \log n/n = 0$) tende a 1 per $n \to +\infty$.
Pertanto in questo caso i criteri non forniscono informazioni utili.

Osservazione 297. I criteri del rapporto e della radice richiedono un termine generale con *andamento esponenziale* (cioè come quello della serie geometrica, con cui si cerca di confrontare la serie data) per fornire informazioni.

Osservazione 298. In generale il criterio della radice è più sensibile (funziona meno) di quello del rapporto.

Osservazione 299. A seconda del caso può essere più conveniente applicare il criterio della radice o quello del rapporto.

Teorema 13.2.11 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Il criterio (teorema 13.2.7), presentato in precedenza come criterio di convergenza per serie a termini positivi, è applicabile anche come criterio di convergenza assoluta, se il valore assoluto del termine generale soddisfa le ipotesi del criterio di Cauchy.*

Osservazione 300. Il criterio di condensazione di Cauchy (teorema 13.2.7) si applica a molte serie, ad esempio quelle in cui il termine generale è funzione razionale.

Osservazione 301. Uno dei criteri di convergenza assoluta per le serie di fatto più usato è il seguente.

Teorema 13.2.12 (Criterio del confronto con funzioni dello stesso ordine)**.** *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di numeri (reali o complessi) definitivamente non nulle. Supponiamo che $|a_n|$ e $|b_n|$ siano dello stesso ordine per $n \to +\infty$, cioè che sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente se e solo se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è assolutamente convergente

Dimostrazione. Esiste un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$\frac{1}{2}\lambda \leq \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \frac{3}{2}\lambda$$

e quindi si avrà che

$$\frac{\lambda}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}\lambda|b_n|, \qquad \forall n \geq \overline{n}$$

e si conclude mediante il criterio del confronto. □

Osservazione 302. L'utilità del criterio è tanto maggiore quanto più si conoscono i comportamenti asintotici di varie funzioni.

13.2.2.1 Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno

Osservazione 303. Cominciamo ad occuparci di serie che non necessariamente convergono assolutamente.

Definizione 13.2.3 (Serie a segni alterni (anche solo definitivamente))**.** Serie per la quale ogni termine ha segno opposto al precedente (rispettivamente, anche solo definitivamente).

Osservazione 304. La serie si scrive, alternativamente, come:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|x_n| \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}|x_n|$$

Per fissare le idee supporremo che si scriva al primo modo cioè che i termini positivi siano quelli di posto pari (o posto 0).

Teorema 13.2.13 (Criterio di Leibniz)**.** *Data una serie numerica reale a termini di segno alterno:*

1. *se il modulo del termine generale è decrescente ed infinitesimo, allora la serie converge;*

2. *la differenza tra la ridotta m-esima e la somma è, in modulo, maggiorata dal modulo del termine $(m+1)$-esimo della serie:*

$$|R_{m+1}| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n - \sum_{n=0}^{m}a_n\right| \leq |a_{m+1}| \tag{13.11}$$

Osservazione 305. In altre parole al secondo punto la serie resto è maggiorata, in valore assoluto, dal primo termine trascurato.

Dimostrazione. Rispettivamente:

1. considerando che i termini positivi siano quelli di posto pari si ha che:

   - le ridotte di posto pari formano una successione decrescente, infatti

   $$s_{2m+2} = s_{2m} - |x_{2m+1}| + |x_{2m+2}| \leq s_{2m}$$

   perché $|x_{2m+2}| \leq |x_{2m+1}|$ e quindi $-|x_{2m+1}| + |x_{2m+2}| \leq 0$, con disuguaglianze strette se $|x_n|$ decresce strettamente.
   Analogamente le ridotte di posto dispari formano una successione crescente; per $m \geq 1$

   $$s_{2m+1} = s_{2m-1} + |x_{2m}| - |x_{2m+1}| \geq s_{2m-1}$$

   poiché $|x_{2m}| - |x_{2m+1}| \geq 0$, con disuguaglianze strette se $|x_n|$ decresce strettamente.

- ogni ridotta di indice dispari è $\leq$ ad ogni ridotta di indice pari. Partiamo vedendo che:

$$s_{2m} = s_{2m-1} + |x_{2m}| \geq s_{2m-1}$$

per $m \geq 1$; dati poi $k, l \in \mathbb{N}, k \geq 1$ per mostrare che si ha $s_{2k-1} \leq s_{2l}$ (ovvero che ogni ridotta di indice dispari è $\leq$ a qualsiasi ridotta di indice pari) basta prendere $j > k, l$ ed osservare che si ha $s_{2k-1} \leq s_{2j-1} \leq s_{2j} \leq s_{2l}$ per la monotonia delle successioni e per la maggiorazione prima osservata.
Si ha insomma

$$s_1 \leq s_3 \leq s_{2k-1} \leq s_{2k+1} \leq \ldots s_{2k+2} \leq s_{2k} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0$$

ed entrambe le successioni monotone e limitate hanno limite finito in $\mathbb{R}$; usando ora il fatto che il termine generale è infinitesimo si vede che tali limiti sono uguali: essendo $s_{2m} - s_{2m-1} = |x_{2m}|$ le due successioni delle ridotte pari e dispari differiscono per una successione infinitesima (ossia la successione degli elementi pari, che scende a 0, e quindi hanno lo stesso limite).

2. si ha, detta s la somma della serie

$$s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k}, \quad \text{per ogni } k \geq 0 \tag{13.12}$$

in quanto la ridotta di posto dispari converge, incrementando al limite (quindi è da esso maggiorata), mentre quella di posto pari converge diminuendo (quindi è minorata dal limite). Da qui è facile provare l'affermazione fatta sulla differenza, ossia:

$$|s - s_m| \leq |x_{m+1}|$$

Infatti se $m = 2k$ (m pari), dalla 13.12 si ha sottraendo $s_{2k} = s_m$ a tutti i membri, $s_{2k+1} - s_{2k} \leq s - s_m \leq 0 \iff -|x_{2k+1}| \leq s - s_m \leq 0 \iff |s - s_m| \leq |x_{m+1}|$; e allo stesso modo si procede se $m = 2k+1$ è dispari.

□

Osservazione 306. Analogamente a quanto osservato riguardo ai criteri di convergenza per le serie a termini positivi, il criterio di Leibniz può essere applicato (sia la conclusione che le stime del resto fatte volgono) anche se i termini sono *definitivamente* di segno alterno e la successione a_n è definitivamente decrescente.

Osservazione 307. Si osservi che se il modulo del termine generale è strettamente decrescente, tutte le precedenti sono disuguaglianze in senso stretto.

Osservazione 308. In generale, le ridotte che maggiorano la somma sono quelle con l'ultimo termine positivo, quelle maggiorate dalla somma hanno l'ultimo termine negativo. Le ridotte di posti alterni formano una coppia di classi contigue, con la somma della serie come elemento separatore.

Esempio 13.2.14. Applicando il criterio di Leibniz osserviamo che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

è convergente: infatti la successione $n \to 1/n$ è decrescente ed infinitesima. Questa serie è il più semplice esempio di serie che converge semplicemente ma non assolutamente (la serie dei valori assoluti è la serie armonica di esponente 1, divergente).

Esempio 13.2.15. La serie armonica di esponente $p \in \mathbb{R}$ a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

converge se $p > 0$, è assolutamente convergente se $p > 1$.

Esempio 13.2.16. Discutere la convergenza semplice ed assoluta per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^3}$$

calcolando la somma con approssimazione migliore di $1/100$.
Partiamo dalla convergenza assoluta:

$$\left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per confronto con quella geometrica. La convergenza semplice è garantita dal criterio di Leibniz dato che il termine generale è a segni alterni e di valore assoluto decrescente. Per la somma S si ha la seguente disuguaglianza:

$$\left| S - \sum_{n=1}^{k} a_n \right| < |a_{n+1}|$$

Vogliamo che $|a_{n+1}| < \frac{1}{100}$; quando è che ciò avviene?

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{100} \iff (n+1)^3 > 100 \iff n > \sqrt[3]{100} - 1 \simeq 3.62$$

Quindi se $n = 4$, $|a_{n+1}| < \frac{1}{100}$ e tornando sopra:

$$\left| S - \sum_{n=1}^{4} a_n \right| < |a_5| < \frac{1}{100}$$

Quindi una approssimazione che soddisfi la precisione richiesta è:

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = (-1)^0 \frac{1}{1^3} - 1\frac{1}{2^3} + 1\frac{1}{3^3} - 1\frac{1}{4^3} = \frac{181}{216}$$

13.3 Serie nel campo complesso

13.3.1 Convergenza e convergenza assoluta

Se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri complessi, si può considerare la successione $(\zeta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ delle sue somme parziali:

$$\zeta_m = \sum_{n=0}^{m} z_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_m \tag{13.13}$$

Si dirà che la serie converge a $\zeta \in \mathbb{C}$ come somma se la successione delle ridotte converge a $\zeta \in \mathbb{C}$. Ricordando che:

- ciò accade se e solo se la successione $\operatorname{Re}\zeta_m$ delle parti reali converge a $\xi = \operatorname{Re}\zeta$ (parte reale della somma) mentre quella dei coefficienti dell'immaginario converge a $\eta = \operatorname{Im}\zeta$ (parte immaginaria della somma);
- la parte reale di una somma (finita) è la somma delle parti reali, e specularmente avviene per la parte immaginaria;

si ha che la parte reale della somma parziale m-esima è somma parziale m-esima della serie delle parti reali (e specularmente per la parte immaginaria)

$$\xi_m = \sum_{n=0}^{m} \operatorname{Re} z_m = \operatorname{Re}\zeta_m; \qquad \eta_m = \sum_{n=0}^{m} \operatorname{Im} z_m = \operatorname{Im}\zeta_m. \tag{13.14}$$

Pertanto si conclude che ...

Proposizione 13.3.1. *Una serie a termini complessi converge se e solo se le serie delle parti reali e dei coefficienti dell'immaginario dei termini della serie sono entrambe convergenti; in tal caso la somma della serie ha come parte reale la somma della serie delle parti reali, come coefficiente dell'immaginario la somma della serie dei coefficienti dell'immaginario della serie complessa data.*

Dimostrazione. Fatta sopra. □

Definizione 13.3.1 (Serie assolutamente convergente in $\mathbb{C}$)**.** Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è assolutamente convergente se converge la serie dei moduli dei termini $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.

Proposizione 13.3.2. *Una serie a termini complessi è assolutamente convergente se e solo se la serie delle parti reali e dei coefficienti dell'immaginario dei termini della serie data sono assolutamente convergenti.*

Dimostrazione. Si ricava dalle consuete disuguaglianze:

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

e dal criterio del confronto. □

Osservazione 309. Dato che nel caso reale sappiamo che ogni serie assolutamente convergente è convergente, ed una serie complessa converge solo se le serie delle parti reali ed immaginarie convergono, giungiamo al seguente risultato.

Proposizione 13.3.3. *Ogni serie a termini complessi assolutamente convergente è convergente; inoltre, se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è il termine generale di una tale serie si ha*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \tag{13.15}$$

Dimostrazione. Le affermazioni sulla convergenza sono state viste in precedenza; l'ultima viene passando al limite per $m \to \infty$ nella disuguaglianza:

$$\left|\sum_{n=0}^{m} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{m} |z_n|$$

□

13.3.2 Esponenziale complesso

Definizione 13.3.2 (Serie esponenziale complessa)**.** È la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{13.16}$$

Osservazione 310. La serie è chiamata così per ragioni chiarite in seguito.

Proposizione 13.3.4 (Convergenza serie esponenziale complessa)**.** *La serie esponenziale complessa è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto e consideriamo il rapporto dei moduli:

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1!)} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|^n\,|z|}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1}$$

esso tende a 0 per $n \to +\infty$; poiché $0 < 1$, la serie è assolutamente convergente qualunque sia $z \in \mathbb{C}$. □

Osservazione 311. Pertanto la serie converge, per ogni $z \in \mathbb{C}$, ad un numero complesso

Proposizione 13.3.5. *Sia $a > 0$ fissato. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che è:*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| < \varepsilon \tag{13.17}$$

per ogni $n \geq n_\varepsilon$ ed ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq a$

Osservazione 312. In altre parole la distanza tra questi due complessi (attenzione che il termine $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ non è da considerarsi incluso nella sommatoria) può essere piccola (ε) a piacere.

Dimostrazione. Sviluppando con la formula binomiale il termine $(1 + z/n)^n$ si ottiene:

TODO: sostituire qui x con z

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \cdot 1^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{z^k}{n^k} \\
&\overset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}\frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{k \text{ fattori}} \frac{z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}
\end{aligned}$$

dove al passaggio a abbiamo scambiato i due denominatori e spezzato quello che diviene il primo dei 2 (n^k) in k fattori.
Tornando all'espressione che definisce il valore assoluto si ha (notare che i termini in z_0 e z_1 si elidono):

TODO: Non mi è chiaro qui perché i termini di z_0 e z_1 si elidano

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{z^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} c(n,k)\frac{z^k}{k!}$$

dove si è posto, per semplificare la scrittura,

$$c(n,k) = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right), \qquad 2 \le k \le n$$

Si noti che è $0 < c(n,k) < 1$ (poiché sottraiamo da 1 una produttoria di termini compresi tra 0 e 1) e che $\lim_{n\to\infty} c(n,k) = 0$ per ogni fissato $k \ge 2$ (poiché per $n \to \infty$ è $1 - 1\cdot 1 \cdot 1 \ldots$).
Preso ora un intero $m > a \ge |z|$, per ogni $n \ge m$ si ha

$$\left|\sum_{k=2}^{n} c(n,k)\frac{z^k}{k!}\right| \overset{ⓐ}{\le} \sum_{k=2}^{n} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!} \overset{ⓑ}{=} \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!}$$
$$\overset{ⓒ}{\le} \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!}$$

dove il passaggio ⓐ è giustificato dal fatto che nei complessi il modulo della somma è $\le$ somma dei moduli, nel passaggio ⓑ si è spezzato semplicemente la sommatoria, nel ⓒ se $0 < c(n,k) < 1$ togliendolo dalla seconda sommatoria (per comodità successiva) il membro aumenta .
Raccogliendo $|z|^{m+1}/(m+1)!$ nell'ultima somma, maggioriamo come segue:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{|z|}{m+2} + \frac{|z|^2}{(m+3)(m+2)} + \ldots + \frac{|z|^{n-m+1}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(m+2)}\right)$$
$$\overset{ⓐ}{\le} \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \left(\frac{|z|}{m+2}\right) + \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^{n-m+1}\right)$$

dove nel passaggio ⓐ si è scelto un denominatore dei termini entro parentesi uguale o più piccolo di quello al precedente membro (ad esempio $(m+2)(m+2) < (m+3)(m+2)$); così facendo ciascun rapporto entro parentesi è superiore all'equivalente ed estendendo agli altri termini si ottiene la maggiorazione.
Ora si ponga attenzione al termine

$$\left(1 + \left(\frac{|z|}{m+2}\right) + \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^{n-m+1}\right)$$

si tratta di una progressione geometrica finita con $n-m+2$ termini e $q = \frac{|z|}{m+2}$:

$$S = a_1 \cdot \frac{q^{n-m+2}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{|z|}{m+2}\right)^{n-m+2} - 1}{\frac{|z|}{m+2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^{n-m+2}}{1 - \frac{|z|}{m+2}}$$

e per l'ultimo termine si ha che

$$\frac{1 - \left(\frac{|z|}{m+2}\right)^{n-m+2}}{1 - \frac{|z|}{m+2}} \le \frac{1}{1 - |z|/(m+2)}$$

Pertanto complessivamente:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \le \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1-|z|/(m+2)}$$

Riassumendo quanto visto sinora:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=2}^{n} c(n,k)\frac{z^k}{k!}\right| &\le \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!} \\ &\le \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{|z|^k}{k!} + \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1-|z|/(m+2)} \\ &\overset{a}{\le} \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{a^k}{k!} + \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-a/(m+2)}\end{aligned}$$

dove il passaggio a è giustificato dal fatto che se $|z| \le a$, visto che $|z|$ è al numeratore, se sostituiamo con a avremo la diseguaglianza. Quindi complessivamente:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \le \sum_{k=2}^{m} c(n,k)\frac{a^k}{k!} + \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-a/(m+2)}$$

L'ultimo termine scritto tende a zero per $m \to \infty$; dato $\varepsilon > 0$ esiste quindi m tale che esso soia minore di $\varepsilon/2$; fissato tale m, facendo tendere n all'infinito tutti i $c(n,k)$ tendono a zero, e pertanto la somma $\sum_{k=2}^{m} c(n,k)a^k/k!$ è infinitesima per n tendente all'infinito, ed è minore di $\varepsilon/2$ se n è maggiore di un conveniente n_ε □

Osservazione 313. In seguito a proposizione 13.3.5 si da una definizione del tutto analoga a quella nel campo reale.

Definizione 13.3.3 (Esponenziale complesso)**.** Se $z \in \mathbb{C}$

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} \tag{13.18}$$

Osservazione 314. Nella notazione si potrà abbrevierà $\exp z$ con e^z, anche per z complesso.

13.3.2.1 Proprietà

Alcune proprietà per le quali si rimandano le dimostrazione al De Marco (da pag 247) seguono.

Teorema 13.3.6 (Omomorfismo dell'esponenziale complesso)**.** *Vale la seguente, analogamente a quanto avviene coi reali:*

$$\exp(w+z) = \exp w \cdot \exp z, \quad \forall w, z \in \mathbb{C} \tag{13.19}$$

Proposizione 13.3.7. *Il coniugato di* $\exp z$ *è* $\exp \overline{z}$

Proposizione 13.3.8. *Si ha che*

$$|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Corollario 13.3.9. $|\exp z| = 1$ *se e solo se* z *è immaginario puro*

13.3.2.2 Aspetti di trigonometria

Ponendo per ogni $t \in \mathbb{R}$, per definizione $\operatorname{cis} t = e^{it}$ (ossia cis mappa i reali in complessi di modulo unitario), sempre per definizione si ha:

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t = \operatorname{Im}(e^{it}) \qquad t \in \mathbb{R}$$

da queste discendono le formule di Eulero

$$e^{it} = \cos t + i \sin t; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

È facile dalla serie esponenziale, ottenere serie che convergano a cos e sin rispettivamente; basta separare il reale e l'immaginario nella ridotta m-esima, separando i termini della serie per k pari (dove i^k diviene reale e così il termine) da quelli con k dispari (i^k immaginario e così l'intero termine):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \frac{(it)^k}{k!} &= \sum_{k \leq m, k \text{ pari}} \frac{i^k t^k}{k!} + \sum_{k \leq m, k \text{ dispari}} \frac{i^k t^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{i=0}^{q} (-1)^l \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}\end{aligned}$$

si è posto $k = 2j$ nella prima somma; j varia tra 0 e p, dove $p = m/2$ se m è pari, $(m-1)/2$ se m dispari, $(m-2)/2$ se m pari.
Poiché le parti reali delle ridotte convergono alla parte reale della somma e^{it} e cioè a $\cos t$, e le parti immaginarie convergono a $\operatorname{Im}(e^{it}) = \sin t$, si vede subito che si ha:

Proposizione 13.3.10 (Serie del coseno).

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale} \tag{13.20}$$

Proposizione 13.3.11 (Serie del seno).

$$\sin t = 1 - \frac{t^3!}{3} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale} \tag{13.21}$$

Osservazione 315. Le serie precedenti sono a termini di segno alterno, e se $|t| \leq 1$ il modulo del termine generale decresce già dal primo termine. Si ha quindi $\sin t < t$ se $0 < t \leq 1$; ed essendo $|\sin t| \leq 1$ si ha anche $\sin t < t$ per ogni $t > 0$. Per disparità si ottiene poi:

Proposizione 13.3.12 (Disuguaglianze importanti).

$$|\sin t| \leq |t|, \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale, con uguaglianza per } t = 0$$
$$1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}, \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale, con uguaglianza per } t = 0$$

Osservazione 316. Dalla serie esponenziale si ottengono facilmente gli sviluppi di $\cosh t$ e $\sinh t$; essendo $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} t^k/k!$ e $e^{-t} = (-1)^k t^k/k!$ sommando si elidono i termini di posto dispari e si ottiene (post divisione per 2 ...)

Proposizione 13.3.13 (Serie del coseno iperbolico)**.**

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale} \tag{13.22}$$

Proposizione 13.3.14 (Serie del seno iperbolico)**.**

$$\sinh t = 1 + \frac{t^3!}{3} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \textit{per ogni } t \textit{ reale} \tag{13.23}$$

Osservazione 317. Queste ultime due serie si ricordano facilmente, essendo come le serie del coseno e del seno, ma a segni non alterni.

13.4 Altri argomenti

13.4.1 Proprietà commutativa per le serie numeriche

In generale una serie numerica non gode della proprietà commutativa: alterando l'ordine dei termini una serie convergente può cessare di esse tale, o restare convergente ma avere un'altra somma

Esempio 13.4.1. Si è visto che la serie armonica a termini di segno alterno

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = s$$

è convergente; moltiplichiamo i termini per $1/2$ ottenendo

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{s}{2}$$

alterniamo ora zero a tali termini

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{s}{2}$$

Incolonniamo queste due serie e sommiamole:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots &= s \\
0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots &= \frac{s}{2} \\
1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots &= \frac{3}{2}s
\end{aligned}$$

eliminando gli zeri dall'ultima serie ci si accorge che essa è ottenuta da quella armonica alternante riordinando i termini

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = \frac{3}{2}s$$

13.5 L'utilizzo di maxima

```
##
## f(n):=1/2^n
##                                              1
##                                     f(n) := --
##                                              n
##                                             2
## s(n):=sum(f(n),n,1,inf)
##                            s(n) := sum(f(n), n, 1, inf)
## ev(s(n),simpsum)
##                                          1
```

Capitolo 14

Limiti di funzioni

Osservazione 318. Il concetto di limite è alla base del calcolo differenziale ed integrale.

Osservazione 319. Studiare il limite di una funzione in un punto consiste nello studiare l'andamento della funzione in prossimità dello stesso

Osservazione 320. La casistica è più ricca rispetto a quello delle successioni, perché mentre per queste il limite si calcola necessariamente per $n \to +\infty$, per una funzione $f(x)$ il limite si può calcolare per $x \to c$ con c qualsiasi valore in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

14.1 Introduzione

14.1.1 Definizioni

Osservazione 321. Vediamo due definizioni equivalenti di limite di funzione; la prima, successionale, riconduce il limite di funzione a quello di successione.

Definizione 14.1.1 (Limite (definizione successionale))**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D, $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzione. Si dice che f ha per limite l se per *ogni* successione $(x_j)_{j \in N}$ di elementi di D, distinti da c, che tendono a c, si ha:

$$\lim_{j \to \infty} f(x_j) = l$$

Per esprimere questo fatto si scrive:

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f(x) = l$$

Osservazione 322. Dalla prima equazione di sopra si evince che dire che $f(x)$ tende a l per x che tende a c in D vuol dire che f trasforma le successioni in $D \setminus \{c\}$ che tendono a c (per il teorema 11.4.2 abbiamo visto che ne esistono) in successioni che tendono tutte ad l.

Osservazione 323. La definizione successionale del limite di funzione comprende il caso delle successioni come caso particolare, con $D = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$.

Osservazione 324. La definizione topologica di limite, invece, è indipendente dal concetto di limite di successione.

Definizione 14.1.2 (Limite (definizione topologica))**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ e $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D, $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzione ed $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Si ha

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f(x) = l \tag{14.1}$$

se e soltanto se per ogni intorno V di $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$, esiste un intorno U di $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $f(x) \in V$ se $x \in U \cap D, x \neq c$ (alternativamente, scritto come $f(U \cap D \setminus \{c\}) \subseteq V$)).

Dimostrazione. Dimostriamo che le due definizioni sono equivalenti in due step. Necessità: procedendo per assurdo, negare la condizione significa supporre che ci sia almeno un intorno V di l tale che per ogni intorno U di c si ha $f(U \cap D \setminus \{c\}) \not\subseteq V$. È facile allora costruire una successione di $D \setminus \{c\}$ che tende a c senza che la sua immagine tenda a l: per ogni $j \in \mathbb{N}$ si prende $x_j \in D \cap B(c, 1/(j+1)[$ con $x_j \neq c$ tale che $f(x_j) \notin V$: si avrà che $\lim_{j\to\infty} x_j = c$, ma $f(x_j) \notin V$ per ogni j e quindi l non è limite di $f(x_j)$ (per assurdo cercavamo di dimostrare che lo fosse, ma abbiamo fallito, come sperato).
Sufficienza: sia x_j successione di $D \setminus \{c\}$ tendente a c: mostriamo che $f(x_j)$ tende a $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Preso infatti un intorno V di $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ si consideri un intorno U di $c \in D$ tale che $f(U \cap D \setminus \{c\}) \subseteq V$; poiché x_j tende a c, esiste un indice $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_j \in U$ per $j \geq j_0$; si ha allora $f(x_j) \in V$ per $j \geq j_0$, il che prova appunto che $\lim_{j\to\infty} f(x_j) = l$ □

Osservazione 325. La sostanza della definizione topologica è che $f(x)$ è vicino quanto si vuole ad l per x abbastanza vicino a $c \in D$; non occorre verificare la condizione per tutti gli intorni di l, basta farlo per quelli abbastanza piccoli. Da quest'ultima idea derivano i criteri espliciti, approfonditi in seguito, per la verifica di limiti mediante la definizione topologica ($|f(x) - l| \leq \varepsilon$ equivale a dire che $f(x) \in B(l, \varepsilon[$.

Teorema 14.1.1 (Unicità del limite)**.** *Se* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ *esiste, tale limite* l *è unico.*

Dimostrazione. Adottando la definizione successionale, se esistessero due limiti l_1, l_2 diversi tra loro, presa una qualsiasi successione $x_n \to c$ si avrebbe:

$$f(x_n) \to l_1 \wedge f(x_n) \to l_2$$

ovvero la successione $f(x_n)$ avrebbe due limiti distinti, che per l'unicità del limite nelle successioni (teorema 12.2.2) è impossibile. □

Osservazione 326. Il limite di una funzione per un dato valore della x può anche non esistere; per dimostrarlo è sufficiente trovare due successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \in D$ tendenti a c, associate a due limiti diversi: $x \to +\infty : f(x_n) = l_1 \neq f(y_n) = l_2$.

Esempio 14.1.1.

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

non esiste. Per dimostrarlo si può scegliere $x_n = n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; in corrispondenza di tali successioni si ha $\sin x_n = 0$ e $\sin y_n = 1$ e quindi la definizione di limite non è soddisfatta.

Esempio 14.1.2. Anche
$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$
non esiste. Ad esempio sia $x_n = 1/(2n\pi)$, $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$. Entrambe le successioni tendono a 0 per $n \to +\infty$ ma $\sin \frac{1}{x_n} = 0$ mentre $\sin \frac{1}{y_n} = 1$. Poiché lungo successioni diverse che tendono a 0 la funzione ha limite diversi, il limite della funzione non esiste.

14.1.2 Comportamento locale di funzioni

Definizione 14.1.3 (Limite finito, funzioni convergente)**.** Se esiste ed è finito $\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$, si dice che f converge a l per x che tende a c.

Definizione 14.1.4 (Funzione infinitesima (o infinitesimo))**.** Funzione convergente a $l = 0$ per x che tende a c.

Osservazione 327 (Scrittura fuori dal segno di limite)*.* Nel caso in cui $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ allora $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - l) = 0$. Possiamo dunque considerare la funzione
$$\delta(x) = f(x) - l$$
che è infinitesima per $x \to c$. La funzione f, per $x \to c$, può essere allora scomposta come:
$$f(x) = l + \delta(x) \tag{14.2}$$
con $\delta(x) \to 0$ per $x \to c$: tale equazione, detta scrittura della funzione f fuori dal segno di limite, mostra come $f(x)$ si possa decomporre nella somma del suo limite per $x \to c$ e di un infinitesimo in prossimità di c.

Definizione 14.1.5 (Limite infinito, funzioni divergenti a $\pm\infty$)**.** La funzione presenta limite infinito se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$; in questo caso si dice che la funzione f diverge a $+\infty$ o $-\infty$.

Osservazione 328*.* Anche qui torna utile il concetto di divergenza ad infinito senza segno.

Definizione 14.1.6 (Funzioni divergenti ad infinito)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D, $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f *diverge* (tout court), o che tende ad infinito senza segno, per x che tende a $c \in D$ se:
$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} |f(x)| = +\infty$$

Esempio 14.1.3. La funzione reciproco definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da $f(x) = 1/x$ diverge per $x \to 0$; infatti $\lim_{x\to 0} 1/|x| = +\infty$.

14.1.3 Limiti delle restrizioni; limiti destri e sinistri

Osservazione 329*.* Sia $T \subseteq D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, e $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione sia per T che per D; si vede subito che se $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è una funzione, ed esiste il limite:
$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} f(x) = l$$

allora esiste anche il limite della restrizione su T, e coincide con l

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in T}} f(x) = l = \lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} f(x)$$

Osservazione 330. Può viceversa accadere che il limite di una restrizione esista, senza che vi sia il limite della funzione

Esempio 14.1.4. La funzione $f(x) = \sin(1/x)$ definita su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ non ha limite per $x \to 0$ come mostrato in 14.1.2; tuttavia le restrizioni di f ai sottoinsiemi formati dalle due successioni x_n e y_n hanno limiti rispettivamente 0 e 1 (f costante su tali sottoinsiemi)

Esempio 14.1.5. Per la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funzione caratteristica dell'insieme dei razionali) si ha che per nessun $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ esiste $\lim_{x\to c} \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Infatti ogni $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione sia per $\mathbb{Q}$ che per $\mathbb{P} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; la restrizione $\chi_{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}}$ della funzione al dominio $\mathbb{Q}$ è la costante 1, che ha limite 1; la restrizione a $\mathbb{P}$, invece, ossia $\chi_{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}}$, è la costante 0 che limite 0, per x tende ad un qualsiasi $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Osservazione 331. Un caso particolare importante dei limiti delle restrizioni è quello dei *limiti destri* e *sinistri*: nel caso c sia un valore finito, può essere di interesse studiare l'andamento della funzione da sinistra (da valori minori di c) oppure da destra (rispettivamente, maggiori).

Definizione 14.1.7 (Limite destro e sinistro)**.** Supponiamo che $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ abbia $c \in \mathbb{R}$ come accumulazione; consideriamo i sottoinsiemi di D dati da:

$$D_c^+ = \{x \in D : x > c\}, \qquad D_c^- = \{x \in D : x < c\}$$

Se esiste

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D_c^-}} f(x) = l_1$$

esso si chiama *limite sinistro* e si indica con:

$$\lim_{\substack{x\to c^-\\ x\in D}} f(x) = l_1$$

Se esiste

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D_c^+}} f(x) = l_2$$

esso si chiama *limite destro* e si indica con:

$$\lim_{\substack{x\to c^+\\ x\in D}} f(x) = l_2$$

Osservazione 332. All'atto pratico, la funzione ha per limite sinistro il numero l_1, se per un ε piccolo a piacere, è possibile determinare un *intorno sinistro* di c tale che $|f(x) - l_1| < \varepsilon$. Specularmente avviene per il limite. destro

Osservazione 333. I limiti per $x \to +\infty$ possono essere considerati limiti sinistri, quelli per $x \to -\infty$ limiti destri.

Definizione 14.1.8 (Funzione che ammette/non ammette limite per $x \to c \in \mathbb{R}$)**.** Se la funzione, per x tendente a $c \in \mathbb{R}$ ha limite destro e sinistro coincidenti:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

si dice che la funzione *ha limite* (*tout court*) *pari a* l. Se viceversa limite sinistro e destro esistono ma sono diversi:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

si dice che la *funzione non ammette limite* per x tendente a c.

Osservazione 334. Quest'ultimo è altro modo (meno generale) di dire che il limite non esiste poiché vi sono due successioni $\{x_n\}, \{y_n\}$ tendenti a c, per le quali il limite non esiste in quanto se $n \to +\infty$, $f(x_n) \neq f(y_n)$.

Definizione 14.1.9 (Funzione che ammette limite per $x \to \pm\infty$)**.** Convenzionalmente, se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

allora si scrive (alternativamente):

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

intendendo con ciò che i limiti a + o $-\infty$ coincidono; si dice in questo caso che la funzione ammette limite per $x \to \infty$ (senza segno, o *tout court*).
Se invece i limiti a più e meno infinito differiscono (o non esistono entrambi) si dice che la funzione non ammette limite (tout court) per $x \to \infty$.

14.1.4 Limiti per eccesso/difetto

Osservazione 335 (Limite per eccesso/difetto). Nel caso l sia finito, si può qualificare ulteriormente se la funzione tenda al limite da valori superiori o inferiori.

Definizione 14.1.10 (Limite per eccesso)**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ una funzione. Si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = l^+ \tag{14.3}$$

e si legge che $f(x)$ tende a l per eccesso per x tendente a c, se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti in $D \setminus \{c\}$ tendente a c si ha che $f(x_n) \to l$ e che $f(x_n) \geq l$ definitivamente.

Esempio 14.1.6.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

Osservazione 336. Un errore comune consiste nel pensare che il simbolo 0^+ denoti un numero poco più grande di 0. Sbagliato: il limite della funzione è il solito zero; semplicemente la scrittura 0^+ aggiunge una informazione, ovvero che la funzione tende a zero per eccesso ossia mantenendosi non negativa.

Definizione 14.1.11 (Limite per difetto)**.** Specularmente avviene nel caso del limite per difetto:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l^- \tag{14.4}$$

14.2 Verifica di limite ...

14.2.1 ... mediante definizione topologica

Osservazione 337. Considerando la definizione topologica di limite, particolarizzando il concetto di intorno di c ai casi $c \in \mathbb{R}$ o $c = \pm\infty$, la definizione stessa si traduce in opportuni criteri di verifica per quattro tipologie di limiti (limite finito o infinito, per $x \to$ valore infinito/infinito).

14.2.1.1 Limite finito per x tendente a valore finito

Supponendo che la funzione sia definita nell'intorno di c (non necessariamente nel punto c stesso) di cui si desidera studiare il comportamento, per verificare la correttezza di un generico limite:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{14.5}$$

nei casi più comuni si dovrà risolvere la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \tag{14.6}$$

che consiste nel determinare i valori delle x in corrispondenza delle quali la funzione si distanzia (in valore assoluto) dal valore l di un ammontare piccolo a piacere. Può accadere che:

- la soluzione non sia un intorno di c; in tal caso $f(x)$ non tende a l per x tendente a c;
- la soluzione sia un intorno destro di c: $f(x)$ ha per *limite destro* di c il valore l;
- la soluzione sia un intorno sinistro di c: $f(x)$ ha per *limite sinistro* di c il valore l;
- la soluzione sia un intorno completo di c: $f(x)$ tende a l per x tendente a c (*limite*).

Osservazione 338. Non si tiene conto del valore assunto dalla funzione in $x = c$: nel risolvere la disequazione è sempre lecito supporre $x \neq c$.

Esempio 14.2.1. Verificare la scrittura

$$\lim_{x \to -2} (2x + 1) = -3$$

Si ha

$$|2x + 1 - (-3)| < \varepsilon$$

che porta a

$$\begin{cases} 2x + 4 < \varepsilon \\ 2x + 4 > -\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < \varepsilon - 4 \\ 2x > -\varepsilon - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ x > -2 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

È un intorno completo di -2 pertanto la scrittura è corretta.

Esempio 14.2.2. Verificare la scrittura

$$\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$$

Occorre verificare pertanto che

$$\left|\sqrt{x-5}\right| < \varepsilon$$

è soddisfatta in un intorno destro di 5. Il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$ Si ha

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} < \varepsilon \\ \sqrt{x-5} > -\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x-5 < \varepsilon^2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5+\varepsilon \end{cases}$$

Per cui $S \cap D = \{5 \leq x < 5+\varepsilon\}$ che è appunto un intervallo destro di 5.

Verifica del limite per eccesso/difetto Oltre a sapere il limite, può a volte esser necessario verificare/determinare se al valore del limite la funzione ci tenda *per eccesso o per difetto*, da sinistra piuttosto che da destra.
La funzione tende per difetto quando si ha che $f(x) \leq l$ nell'intorno di c considerato; viceversa tende per eccesso quando se invece ha che $f(x) \geq l$ nell'intorno di c considerato.
Combinando i tre casi:

$$x \to c^- \quad x \to c \quad x \to c^+$$

con i tre casi

$$\lim f(x) = l^- \quad \lim f(x) = l \quad \lim f(x) = l^+$$

Si ottengono complessivamente nove combinazioni, delle quali abbiamo trattato i casi principali ($\lim_{x\to c} f(x) = l, \lim_{x\to c^-} f(x) = l, \lim_{x\to c^+} f(x) = l$).
A titolo di esempio per le rimanenti: per verificare che una funzione tende a l per difetto, per x tendente a c da sinistra, bisogna verificare che:

$$l - \varepsilon < f(x) \leq l$$

e constatare che la soluzione ricade in un intorno sinistro di c.

Esempio 14.2.3. Verificare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ In questo caso dobbiamo verificare che la disequazione

$$0 < f(x) - l < \varepsilon$$

è soddisfatta in intorni sia di $\pm\infty$. Si ha

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} < \varepsilon \\ \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} < x^2 \\ \forall x \in D \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

Quest'ultima conduce a $x < -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \vee x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ che è intorno di ∞, quindi la scrittura è corretta.

14.2.1.2 Limite finito per x tendente a valore infinito

Si dice che per x tendente a $+\infty$, la funzione $f(x)$, definita in un intorno I di $+\infty$ ha per limite l e si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$$

se fissato un ε piccolo a piacere la disequazione

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$

sia soddisfatta per un intorno di $+\infty$.
A contrario

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$$

se la disequazione è soddisfatta per un intorno di $-\infty$.
Specularmente al caso precedente si può determinare se al limite la funzione ci arriva per difetto o per eccesso. Ad esempio possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l^+$$

se la disequazione

$$l \leq f(x) < l + \varepsilon$$

è soddisfatta per un intorno di $+\infty$.

14.2.1.3 Limite infinito per x tendente a valore finito

Per verificare se per un determinato intorno del punto c:

- la funzione ammette limite a $+\infty$, occorre risolvere la disequazione $f(x) > M$ con M positivo grande a piacere, e verificare che le soluzioni costituiscono un intorno di c. In tal caso si potrà scrivere

  $$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

  a seconda che l'intorno verificato sia rispettivamente sinistro, destro o completo.

- la funzione ammette limite a $-\infty$, occorre risolvere la disequazione $f(x) < -M$, e procedere specularmente al caso precedente;

- la funzione tende a ∞ (senza segno, ossia sia esso $\pm\infty$ indifferentemente) occorre risolvere la disequazione $|f(x)| > M$ con M positivo grande a piacere e procedere similmente ai casi precedenti.

Osservazione 339. Anche in questi caso si studia l'andamento della funzione in prossimità di c, pertanto nella risoluzione delle disequazioni è sempre lecito supporre $x \neq c$.

14.2.1.4 Limite infinito per x tendente a valore infinito

Risolvendo la disequazione:

$$|f(x)| > M \iff f(x) > M \vee f(x) < -M$$

si trovano intorni di $\pm\infty$, la funzione è infinita per x infinito. Più precisamente:

1. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) < -M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $-\infty$, si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) < -M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $+\infty$, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
3. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) > M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $-\infty$, si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
4. se la soluzione del sistema deriva dal ramo $f(x) > M$, soddisfatto nell'intorno di x a ridosso di $+\infty$, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ se si verificano le condizioni 1 e 2
6. $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ se si verificano le condizioni 3 e 4
7. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ se si verificano alternativamente le condizioni 1 e 4 contemporaneamente, oppure 2 e 3 contemporaneamente.

14.2.2 . . . mediante definizione successionale

14.2.2.1 Limite finito per x tendente a valore finito

Esempio 14.2.4. Dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Si può procedere come segue; dalla diseguaglianza valida $\forall x \in \mathbb{R}$ (si pensi alla circonferenza trigonometrica)

$$|\sin x| \leq |x|$$

leggiamo che

$$|\sin x_n| \leq |x_n|$$

e quindi per il teorema del confronto (tra successioni) se $x_n \to 0$, anche $\sin x_n \to 0$. Abbiamo così dimostrato il limite.

Esempio 14.2.5. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

TODO: questa non è una verifica ma un calcolo

e vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

Applicando la definizione di limite si vede subito che il limite vale 1. Infatti se per $n \to +\infty$ $x_n \to 0$ ma $x_n \neq 0$, risulta $f(x_n) = 1, \forall n$, e quindi $f(x_n) \to 1$ per $n \to +\infty$.

In questo caso, a differenza dell'esempio precedente si ha che il limite non corrisponde con il valore assunto dalla funzione.

14.2.2.2 Limite finito per x tendente ad infinito

Esempio 14.2.6. Verifichiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Occorre provare che per qualsiasi $\{x_n\} \to -\infty$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} e^{x_n} = 0$$

Si nota come sia cambiato sia il pedice del limite che l'espressione sotto limite. Ora, per definizione del limite di successione questo significa che fissato $\varepsilon > 0$ risulti definitivamente:

$$|e^{x_n}| < \varepsilon$$

e considerando che l'esponenziale è sempre > 0

$$e^{x_n} < \varepsilon$$

Quest'ultima è equivalente a

$$x_n < \log \varepsilon$$

Se ε è un positivo molto piccolo $\log \varepsilon$ sarà un numero negativo grande in valore assoluto; la diseguaglianza è vera per ipotesi, perché $x_n \to -\infty$, e quindi abbiamo concluso la dimostrazione.

14.2.2.3 Limite infinito per x tendente a valore finito

Esempio 14.2.7. Dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Dobbiamo provare che per qualsiasi successione $\{x_n\} \to 0$, con $x_n \neq 0, \forall n$ (precisazione che diventa ora importante) si ha che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$$

Ciò significa provare che fissato $K > 0$ qualsiasi risulti definitivamente:

$$\frac{1}{x_n^2} > K$$

equivalente a

$$|x_n| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Ma per ipotesi $x_n \to 0$ quindi fissata la quantità positiva $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{K}}$, certamente risulta $|x_n| < \varepsilon$ definitivamente, e l'asserto è dimostrato.

14.2.2.4 Limite infinito per x tendente ad infinito

Esempio 14.2.8. Dimostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \log_{1/2} x = -\infty$$

Dobbiamo provare che per qualsiasi successione $\{x_n\} \to +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{1/2} x_n = -\infty$$

A sua volta questo significa provare che fissato $K > 0$ qualsiasi risulti definitivamente

$$\log_{1/2} x_n < -K$$

il che equivale, definitivamente, a:

$$x_n > \left(\frac{1}{2}\right)^{-K} = 2^K$$

Ma per ipotesi $x_n \to +\infty$, quindi fissata la quantità positiva 2^K, certamente risulta definitivamente $x_n > 2^K$ e l'asserto è dimostrato.

14.3 Teoremi sui limiti

Osservazione 340. Nel seguito, si presentano ulteriori teoremi sui limiti, spesso utili nel calcolo (le dimostrazioni discendono in larga parte da quelle sulle proprietà dei limiti nelle successioni).

Osservazione 341. Si farà utilizzo in seguito della nozione di proprietà vera definitivamente per $x \to c$, nel caso di funzioni.

Definizione 14.3.1 (Proprietà vera definitivamente per una funzione)**.** Una funzione $f(x)$ presenta una certa proprietà definitivamente per $x \to c$ se esiste un intorno U di c, nel quale la proprietà vale per ogni $x \in U \setminus \{c\}$.

Osservazione 342. Nell'esposizione a seguire consideriamo sempre $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, $f, g, h : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ e $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D.

14.3.1 Confronto, permanenza del segno

Teorema 14.3.1 (Primo teorema del confronto (carabinieri))**.** *Se definitivamente per $x \to c$ sono definite le funzioni f, g, h ed è:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{14.7}$$

Allora se $f(x)$ e $h(x)$ per $x \to c$ tendono definitivamente allo stesso limite finito l, allora è anche:

$$\lim_{x\to c} g(x) = l \tag{14.8}$$

Teorema 14.3.2 (Secondo teorema del confronto)**.** *Se definitivamente per $x \to c$ due funzioni sono tali che*

$$|f(x)| \leq |g(x)| \tag{14.9}$$

e $g(x)$ tende definitivamente a zero per $x \to c$, allora anche $f(x)$ tende a zero per $x \to c$.

Teorema 14.3.3 (Terzo teorema del confronto)**.** *Se definitivamente per $x \to c$ due funzioni sono tali che*

$$|f(x)| \leq |g(x)| \tag{14.10}$$

e $f(x)$ tende a infinito per $x \to c$, allora anche $f(x)$ tende a infinito per $x \to c$.

Esempio 14.3.1. Mostriamo che

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Infatti, poiché $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, se moltiplico entrambi i membri di questa per il valore positivo $|x|$ ottengo

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

da cui per il teorema del confronto $x \sin \frac{1}{x} \to 0$. Tale conclusione è interessante perché il fattore $\sin \frac{1}{x}$ da solo non ammette limite, quindi non si sarebbe potuto applicare il teorema sul limite del prodotto.

Corollario 14.3.4 (Prodotto di funzione infinitesima per funzione finita)**.** *Dai teoremi del confronto deriva che se f è infinitesima per $x \to c$ e $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \to c$ allora*

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Teorema 14.3.5 (Permanenza del segno)**.** *Se $f, g : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ hanno limiti α, β per $x \to c$, e se $\alpha < \beta$, allora si ha $f(x) < g(x)$in un intorno di c; in particolare se $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha > 0$, si ha $f(x) > 0$ in un intorno di c.*

14.3.2 Algebra dei limiti

Teorema 14.3.6 (Limite della somma di funzioni finite)**.** *Se f e g sono due funzioni che ammettono per x tendente a c (finito o infinito) due limiti* finiti, *$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, il limite della somma algebrica delle due funzioni è la somma algebrica dei loro limiti*[1]*:*

$$\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x) = l_1 \pm l_2 \tag{14.11}$$

Dimostrazione. Sia x_n una qualsiasi successione tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$ e $x_n \neq c, \forall n$; allora per ipotesi si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l_1$ e $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = l_1$. Dal teorema sull'algebra dei limiti per successioni si conclude quindi che $f(x_n) \pm g(x_n) \to l_1 \pm l_2$ e quindi $f(x) \pm g(x) \to l_1 \pm l_2$. □

Osservazione 343. Il risultato si può estendere anche al caso della somma di più di funzioni.

Osservazione 344 (Limite della somma per funzioni non entrambe finiti). Nel caso i limiti delle due funzioni non siano entrambi finiti abbiamo le casistiche riportate in tabella 14.2. La somma algebrica dei limiti può condurre a forme indeterminate tipo $+\infty - \infty$, e in tali casi il limite può esser finito, infinito o non esistere; si affronteranno questi casi nel prosieguo.

$\lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to c} g(x)$	Somma algebrica
l	$\pm\infty$	$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = \pm\infty$
l	$\pm\infty$	$\lim_{x\to c} [f(x)-g(x)] = \mp\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c} [f(x)-g(x)] = +\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to c} [g(x)-f(x)] = -\infty$

Tabella 14.1: Limiti della somma di due funzioni non entrambe finite

Teorema 14.3.7 (Limite del prodotto di funzione finita per costante)**.** *Il limite del prodotto di una costante per una funzione che ammette limite finito per $x \to c$ è uguale al prodotto della costante per il limite della funzione:*

$$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x) = kl$$

Teorema 14.3.8 (Limite del prodotto di due funzione finite)**.** *Il limite del prodotto di due funzioni che ammettono limite finito per $x \to c$ è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni:*

$$\lim_{x\to c} [g(x) \cdot f(x)] = l_1 \cdot l_2$$

Osservazione 345. Analogamente per il prodotto di più di due funzioni.

Osservazione 346 (Limite del prodotto per funzioni non entrambe finite). Se

- una tenda ad infinito e l'altra a valore finito ($\neq 0$): il limite del prodotto tenderà ad infinito con opportuno segno;
- entrambe tendono a infinito, il limite del prodotto tenderà ad infinito con opportuno segno;
- una tende a 0 e l'altra a ∞, si ha una seconda *forma indeterminata*, quella del tipo $0 \cdot \infty$ e il limite può a seconda dei casi, esser finito, infinito o non esistere.

Corollario 14.3.9 (Limite della potenza di una funzione finita)**.** *Conseguenza del limite del prodotto è che il limite della potenza, con esponente n intero positivo, di una funzione che tende a un limite finito per $x \to c$ è la potenza n-esima del limite*

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

Se invece $\lim f(x) = \pm\infty$ *si ha per n pari* $\lim[f(x)]^n = +\infty$*, e per n dispari* $\lim[f(x)]^n = \pm\infty$*.*

Teorema 14.3.10 (Limite del modulo di una funzione)**.** *Se per $x \to c$ la funzione $f(x)$ definita in un intorno di c, escluso al più c, tende a un limite finito l, allora il limite del modulo della funzione è il modulo del limite, ossia*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |l| \tag{14.12}$$

[1]Da questo risultato deriva che la somma algebrica di funzioni continue in un punto c è una funzione continua nel medesimo punto.

$\lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to c} g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
$l \neq 0$	0	∞
∞	l	∞
l	∞	0

Tabella 14.2: Limiti del quoziente di due funzioni non entrambe finite per $x \to c$.

Teorema 14.3.11 (Limite del reciproco di una funzione)**.** *Se per $x \to c$, la funzione $f(x)$ tende al limite finito l, diverso da 0, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ tende, sempre per $x \to c$, al limite $\frac{1}{l}$:*

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}, \qquad (l \neq 0)$$

Teorema 14.3.12 (Limite del quoziente di due funzioni)**.** *Il limite del quoziente di due funzioni, che ammettono limiti finiti per $x \to c$ e la seconda delle quali tende a un limite diverso da zero, è uguale al quoziente dei limiti:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \qquad (l_2 \neq 0)$$

Casi notevoli sono esposti in tabella 14.2. Nel caso in cui entrambe tendano a 0 o entrambe a infinito si hanno le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

14.4 Cambiamento di variabile nel limite

Osservazione 347. Risultato utile usato (spesso senza farne menzione esplicita) assieme ai limiti notevoli (che si vedranno in seguito) è il seguente.

Teorema 14.4.1 (Cambiamento di variabile nel limite)**.** *Siano D ed E sottoinsiemi di $\widetilde{\mathbb{R}}$, siano $c, p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D ed E rispettivamente, sia $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzione e sia $\phi : E \to D$ funzione biettiva tale che*

$$\lim_{\substack{t\to p \\ t\in E}} \phi(t) = c, \qquad \lim_{\substack{x\to c \\ x\in D}} \phi^{-1}(x) = p,$$

allora $\lim_{\substack{x\to c \\ x\in D}} f(x)$ esiste se e solo se esiste $\lim_{\substack{t\to p \\ t\in E}} f \circ \phi(t)$, ed in tal caso i due limiti coincidono.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che se il limite l di f esiste, allora esiste anche quello di $f \circ \phi$, e coincide con l.
Sia V intorno di $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e sia U intorno di $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $f(U \cap D \setminus \{c\}) \subseteq V$; dato U esiste W intorno di $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che sia $\phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subseteq U$. Essendo iniettiva, ϕ assume il valore c in al più un punto $a \in E$; se $a \neq p$ possiamo restringere l'intorno W di p in modo che $a \notin W$. Da ciò segue che $\phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subseteq U \setminus \{c\}$ e allora si ha $f(\phi(t)) \in V$ se $t \in W \cap E \setminus \{p\}$, come si voleva.
Si conclude l'intera dimostrazione: basta applicare il risultato appena dimostrato a $f \circ \phi$ ed a ϕ^{-1}, osservando che $(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = f$ $\square$

Esempio 14.4.1. Mostriamo che si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^p}{x^q} = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{R}, q > 0$$

Operiamo il cambio di variabile $x = \phi(t) = e^t$; si noti che $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$ e per l'inversa $\phi^{-1}(x) = \log(x)$ si ha pure $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Il limite dato esiste quindi se e solo se esiste

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{(\log e^t)^p}{e^{qt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{e^{qt}}$$

e l'ultimo limite scritto è nullo perché $q > 0$, come si vedrà nella sezione dei limiti notevoli.

Esempio 14.4.2. Mostriamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^q \left|\log x\right|^p = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{R}, q > 0$$

Si pone $x = 1/t$, osservando che $\lim_{t\to 0^+}(1/t) = +\infty$ e che $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$; il limite diventa:

TODO: non mi torna l'ultimo passaggio, verificare

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^q} \left|\log(1/t)\right|^p = (\text{per } t > 1) = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\log t)^p}{t^q}$$

e come visto sopra, se $q > 0$ l'ultimo limite è nullo.

14.5 Limiti notevoli

Osservazione 348. Sono limiti dal valore conosciuto, che possono fungere da ausilio nella risoluzione di altri limiti; si può cercare di ricondurre algebricamente il limite esaminato a quello notevole, o ultilizzandolo strumentalmente sfruttando i teoremi dei limiti per risolverlo.

14.5.1 Limiti di confronto

Proposizione 14.5.1. *Per $x \to \infty$ l'esponenziale cresce più velocemente di qualsiasi potenza:*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \qquad p \in \mathbb{R}} \tag{14.13}$$

Dimostrazione. Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq p$. Essendo $e^x/x^p \geq e^x/x^m$ basta mostrare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$ (per risolvere grazie ai teoremi del confronto). Ricordando la formula dell'esponenziale complesso e riadattandola ad un comune reale si ha che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots$$

per cui il totale della sommatoria è certamente maggiore dell'ultimo termine scritto, ossia si ha che

$$e^x > \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad \forall x > 0$$

dividendo entrambi i membri di questa per x^m si giunge a

$$\frac{e^x}{x^m} > \frac{x}{(m+1)!}, \qquad \forall x > 0$$

Si ha che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(m+1)!} = +\infty$ perché il denominatore è fisso è il numeratore aumenta nel limite, pertanto si conclude. □

Osservazione 349. Più in generale, l'esponenziale cresce più velocemente della potenza a patto che la base sia > 1.

Proposizione 14.5.2.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty, \qquad p \in \mathbb{R},\ a > 1} \tag{14.14}$$

Dimostrazione. Scriviamo $a^x = e^{x \log a}$; sviluppiamo l'esponenziale in maniera analoga in

$$e^{x\log a} = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x\log a)^m}{m!} + \frac{(x\log a)^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots$$

Per cui ancora

$$e^{x\log a} > \frac{(x\log a)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{x^{m+1}\cdot(\log a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

e dividendo per x^m entrambi si ha

$$\frac{e^{x\log a}}{x^m} > \frac{x\cdot(\log a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

e analogamente a quanto visto in precedenza la seconda va a $+\infty$ per $x \to +\infty$, dato che essendo $a > 1$, $\log a > 0$ (ossia non assume valori negativi), e quindi $(\log a)^{m+1}/(m+1)!$ è una costante positiva. Per confronto, quindi, anche il limite studiato diverge positivamente. □

14.5.2 Limiti esponenziali e logaritmici

Proposizione 14.5.3.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}} \tag{14.15}$$

Dimostrazione. Laboriosa, omessa □

Corollario 14.5.4.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e} \tag{14.16}$$

Osservazione 350. Numerosi limiti notevoli utili possono esser derivati da equazione 14.16.

Proposizione 14.5.5.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \tag{14.17}$$

Dimostrazione. Operando un cambio di variabile $z = \frac{1}{x}$, in 14.16, da cui $x = \frac{1}{z}$, considerando che se $z \to \infty$ allora $x \to 0$:

$$e = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

□

Proposizione 14.5.6.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}} \tag{14.18}$$

Corollario 14.5.7. *Se* $a = e$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1} \tag{14.19}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\\ &= \log_a e\end{aligned}$$

□

Dimostrazione. Dimostrazione alternativa: ricordando la disuguaglianza notevole dei logaritmi

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

se $x > 0$, dividendo per x si ha

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1$$

per $x \to 0$ primo membro tende a 1 e per i carabinieri anche il limite studiato. Se viceversa $x < 0$, dividendo per x si ha

$$\frac{1}{1+x} > \frac{\log(1+x)}{x} > 1$$

e analogamente per $x \to 0$ il primo membro tende a 1 e si conclude per i carabinieri. □

Proposizione 14.5.8.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a, \qquad a > 0}$$

Corollario 14.5.9. *Se* $a = e$*:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Dimostrazione. Effettuando la sostituzione $z = a^x - 1$, da cui $x = \log_a(1+z)$, si ha che $x \to 0 \iff t \to 0$ e il limite dato diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\log_a e} = \log a$$

dove (1), passaggio dove è effettivamente calcolato il limite, è giustificato come inverso del limite notevole di proposizione 14.5.6. $\square$

Dimostrazione. Dimostrazione alternativa per il caso $a = e$ si ha ricordando la disuguaglianza

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x < 1$$

sottraendo 1 si ottiene

$$x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x}$$

se:

- $x > 0$ si divide per x
$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}$$
e per $x \to 0$ si conclude con i teoremi del confronto;
- $x < 0$ dividendo per x si ha invece
$$\frac{1}{1-x} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1$$
e si conclude nuovamente per i teoremi del confronto.

$\square$

Proposizione 14.5.10.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\theta - 1}{x} = \theta}$$

Dimostrazione. Se si effettua la sostituzione $z = (1+x)^\theta - 1$ si ha che

$$\log(1+z) = \theta \log(1+x)$$

Dunque $x \to 0 \iff z \to 0$. Sviluppando abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\theta - 1}{x} &\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{z}{x}\left[\frac{\theta \log(1+x)}{\log(1+z)}\right] \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{z}{\log(1+z)} \frac{\theta \log(1+x)}{x} = \theta\end{aligned}$$

dove in (1) si è effettuata la sostituzione al numeratore e si è moltiplicato numeratore e denominatore per i membri dell'uguaglianza prima introdotta $\square$

Dimostrazione. Dimostrazione alternativa. Dato che

$$\frac{(1+x)^\theta - 1}{x} = \frac{e^{\theta \log(1+x)} - 1}{x}$$

e moltiplicando e dividendo per $\log(1+x)$ l'ultimo membro

$$\frac{e^{\theta \log(1+x)} - 1}{\log(1+x)} \frac{\log(1+x)}{x}$$

e sostituendo $t = \log(1+x)$ si ha che $x \to 0 \iff t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\theta \log(1+x)} - 1}{\log(1+x)} \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{=1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\theta t} - 1}{t} = \theta$$

□

14.5.3 Limiti trigonometrici

Proposizione 14.5.11.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{14.20}$$

Dimostrazione. Ricordando la serie del seno

TODO: Rivedere

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

se $|x| \le 1$ il termine generale decresce in valore assoluto fin dal primo termine, in senso stretto se $x \neq 0$; per il teorema di Leibniz sulle serie a termini di segno alterno si ha

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \qquad \text{per } 0 < x \le 1$$

sempre supponendo $0 < x$ dividendo per x si ha $1 - x^2/6 < \sin x < 1$; passando al limite per $x \to 0^+$, i teoremi del confronto mostrano che si ha $\lim_{x\to 0^+} \sin x/x = 1$; ma la funzione $\sin x/x$ è pari, per cui anche $\lim_{x\to 0^-} \sin x/x = 1$, e si conclude. □

Dimostrazione. Dimostrazione alternativa; il limite calcolato normalmente porterebbe alla forma indeterminata 0 su 0. Si ha che $\frac{\sin x}{x}$ una funzione pari, in quanto

$$f(-x) = \frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

concentriamoci inizialmente sulla parte positiva del limite, ossia su 0^+.
Se x è la misura in radianti di un angolo del primo quadrante, nel primo quadrante (dato che $x \to 0^+$, allora $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$) si ha che:

$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo per il seno positivo e considerando gli inversi:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per $x \to 0^+$ i valori di $\frac{\sin x}{x}$ sono compresi tra quelli di $\cos x$ (che tende a 1) e la costante 1; pertanto in base al primo teorema del confronto possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Essendo la funzione pari, essa è simmetrica rispetto all'asse y, e quindi assumerà gli stessi valori in presenza di x opposte, da cui

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pertanto dato che limite destro e sinistro coincidono, il limite esiste. □

Proposizione 14.5.12.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \tag{14.21}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

□

Proposizione 14.5.13.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0} \tag{14.22}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2}x = 0$$

□

Proposizione 14.5.14.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1} \tag{14.23}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos x} = 1$$

□

Proposizione 14.5.15.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1}$$
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima delle due (la seconda presenta dimostrazione analoga) si può effettuare un cambio di variabile, imponendo $t = \arcsin x$ (da cui $x = \sin t$ e $x \to 0 \iff t \to 0$),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

□

14.6 Esempi con limiti notevoli e cambi di variabile

Esempio 14.6.1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2=e^2$$

Esempio 14.6.2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$$

Sostituiamo $z = 2x$, $x = z/2$; se $x \to \infty$, $z \to \infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim_{z\to\infty}(1+1/z)^{z/2}=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

Esempio 14.6.3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=e^3$$

Esempio 14.6.4.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

Ponendo $\frac{1}{z} = 2x$ da cui $z = \frac{1}{2x}$, $x = 1/2z$, se $x \to 0, z \to \infty$, per cui

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z}=e^2$$

Esempio 14.6.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

sostituendo $2x = t$, $x = t/2$, se $x \to 0, t \to 0$ si ha

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t/2}=\lim_{t\to 0}2\frac{e^t-1}{t}=2$$

Esempio 14.6.6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{3^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)/x}{(3^x-1)/x} = \frac{\log_2 e}{\log 3} = \frac{1}{\log 2 \log 3}$$

Esempio 14.6.7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{=1/1^2} \frac{(1+\cos x)}{1} = 2$$

Esempio 14.6.8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+3\sin x}{5\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5\tan x} + \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{5\tan x} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} + \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \cos x = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Esempio 14.6.9. Questa mostra un metodo generico che può tornare comodo nei casi $f(x)^{g(x)}$ e in particolare nei casi 1^∞

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{1+\log x}} = \exp -\frac{1}{1+\log x} \cdot \log \frac{1}{x} = \exp \frac{\log x}{1+\log x} = e^1 = e$$

Esempio 14.6.10.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{x-1}$$

Risolviamo come

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{x-1} &= \exp\left\{(x-1)\cdot \log \frac{2x+1}{2x+3}\right\} = \exp\left\{(x-1)\cdot \log \frac{2x+3-2}{2x+3}\right\} \\
&= \exp\left\{(x-1)\cdot \log\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)\right\} \\
&\overset{(1)}{=} \exp\left\{(x-1)\cdot \left[\log\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)\right]\left(-\frac{2x+3}{2}\right)\left(-\frac{2}{2x+3}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{(x-1)\cdot \left[\log \underbrace{\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)^{\left(-\frac{2x+3}{2}\right)}}_{e}\right]\left(-\frac{2}{2x+3}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{(x-1)\left(-\frac{2}{2x+3}\right)\right\} = \exp\left(-\frac{2x-1}{2x+3}\right) \\
&= e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

in (1) si è moltiplicato e diviso per $-\frac{2}{2x+3}$ per ricondurre al limite notevole sfruttando le proprietà dei logaritmi.

14.7 Limiti nelle funzioni monotone

Osservazione 351. Per le funzioni monotone (sempre crescenti o decrescenti, anche in senso lato, non necessariamente continue) su un intervallo vi sono teoremi che garantiscono l'esistenza del limite.

Teorema 14.7.1 (Esistenza del limite)**.** *Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ e sia $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzione monotona. I limiti destro e sinistro di $f(x)$ per $x \to c \in D$, quando possono esere considerati, certamente esistono in $\widetilde{\mathbb{R}}$.*
Se f è crescente *e c è di accumulazione per $X = \{x \in D : x < c\}$, il* limite sinistro *coincide con l'estremo superiore dell'immagine della funzione applicata a X:*

$$\lim_{\substack{x \to c^- \\ x \in D}} f(x) = \sup f(\{x \in D : x < c\})$$

Se f è crescente *e c è di accumulazione per $Y = \{x \in D : x > c\}$, il* limite destro *coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della funzione applicata a Y:*

$$\lim_{\substack{x \to c^+ \\ x \in D}} f(x) = \inf f(\{x \in D : x > c\})$$

Se f è decrescente *e c è di accumulazione per $X = \{x \in D : x < c\}$, il* limite sinistro *coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della funzione applicata a X:*

$$\lim_{\substack{x \to c^- \\ x \in D}} f(x) = \inf f(\{x \in D : x < c\})$$

Se f è decrescente *e c è di accumulazione per $Y = \{x \in D : x > c\}$, il* limite destro *coincide con l'estremo superiore dell'immagine della funzione applicata a Y:*

$$\lim_{\substack{x \to c^+ \\ x \in D}} f(x) = \sup f(\{x \in D : x > c\})$$

Dimostrazione. Proviamo a titolo di esempio la seconda, ossia se f è *crescente* il *limite destro* coincide con l'estremo inferiore dell'immagine. Sia $l = \inf(\{x \in D : x > c\})$:

- se l finito; considerando un intorno di l, $B(l, \varepsilon[$, essendo $l < l + \varepsilon$ esiste $x_\varepsilon \in D$, $x_\varepsilon > c$ tale che $f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$. La crescenza della funzione implica che $f(x) \leq f(x_\varepsilon) \iff x < x_\varepsilon$, con $x \in D$; ma se $c < x < x_\varepsilon$ si ha anche $l \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$, e quindi $f(x) \in B(l, \varepsilon[$ se $c < x < x_\varepsilon$, con $x \in D$, come richiesto.
- se $l = -\infty$ si procede allo stesso modo, con α reale arbitrario al posto di $l + \varepsilon$.

□

Esempio 14.7.1. Per la funzione segno in $\mathbb{R}$, monotona crescente, si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1,$$

Esempio 14.7.2. Per la funzione parte intera, monotona crescente, si ha

$$\lim_{x \to p^-} [x] = p - 1, \quad \lim_{x \to p^+} [x] = p,$$

per ogni intero $p \in \mathbb{Z}$

Esempio 14.7.3. Per la funzione parte frazionaria $\operatorname{frac}(x) = x - [x]$ si ha

$$\lim_{x \to p^-} \operatorname{frac}(x) = 1, \quad \lim_{x \to p^+} \operatorname{frac}(x) = 0,$$

14.8 Limiti, asintoti e studio di funzioni

Osservazione 352. Mediante l'utilizzo dei limiti è possibile determinare direttamente alcune caratteristiche di funzioni oggetto di studio, quali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

Osservazione 353. Nel seguito si considera la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.

14.8.1 Asintoti verticale

Definizione 14.8.1 (Asintoto verticale destro)**.** Se c è di accumulazione per X e $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ si dice che la retta $x = c$ è asintoto verticale destro per f.

Definizione 14.8.2 (Asintoto verticale sinistro)**.** Se la stessa cosa accade per $\lim_{x\to c^-} f(x)$ si dice che la retta $x = c$ è asintoto verticale sinistro per f.

Definizione 14.8.3 (Asintoto verticale bilatero)**.** Se ciò è vero da destra e da sinistra, si dice che la retta di equazione $x = c$ è asintoto bilatero per f.

Osservazione 354. Gli eventuali asintoti verticali del grafico di una funzione si determinano per lo più calcolando i limiti negli estremi finiti, se esistono, del dominio e negli eventuali punti di discontinuità.

14.8.2 Asintoto orizzontale

Osservazione 355. Sia qui f definita in un intorno di $+\infty$ e/o $-\infty$, e $l_d, l_s, l \in \mathbb{R}$.

Definizione 14.8.4 (Asintoto orizzontale destro)**.** Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_d$, la retta $y = l_d$ è detta asintoto orizzontale destro.

Definizione 14.8.5 (Asintoto orizzontale sinistro)**.** Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_s$, la retta $y = l_s$ è detta asintoto orizzontale sinistro.

Definizione 14.8.6 (Asintoto orizzontale)**.** Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, la retta $y = l$ è detta asintoto orizzontale.

Osservazione 356. Pertanto gli eventuali asintoti orizzontali si determinano calcolando i limiti negli estremi infiniti (se presenti) del dominio. Ne deriva che:

- funzioni il cui dominio sia limitato non ammettono asintoti orizzontali, dato che non avrebbe senso calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to \infty$;
- funzioni periodiche non possono ammettere asintoti orizzontali perché in questo caso non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to \infty$.

14.8.3 Asintoto obliquo

Definizione 14.8.7 (Asintoto obliquo sinistro)**.** Una retta di equazione $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo sinistro per la funzione $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Definizione 14.8.8 (Asintoto obliquo destro)**.** Una retta di equazione $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo destro per la funzione $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Definizione 14.8.9 (Asintoto obliquo)**.** Una retta di equazione $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - q] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Osservazione 357. In tutti questi casi, la distanza tra la funzione e la retta asintoto diviene man mano più piccola tanto più ci si muove verso ∞.

Osservazione 358. Analogamente a quanto visto per l'asintoto orizzontale non vi possono essere asintoti obliqui se, alternativamente la funzione ha un insieme di definizione limitato o è periodica.

Ricerca dell'asintoto obliquo Nel seguito sono evidenziati i passi da intraprendere nella ricerca dell'asintoto obliquo (a titolo di esempio ci concentriamo su quello destro).
Dalla definizione si ricava una condizione necessaria ma non sufficiente per avere un asintoto obliquo, ossia:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

Supponiamo dunque che $y = mx + q$ sia asintoto obliquo, ovvero sia:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Sarà pure, a maggior ragione:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} = 0$$

da cui, essendo $\lim_{x \to +\infty} m = m$ e $\lim_{x \to +\infty} q/x = 0$ si deduce

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

e quindi:

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} \tag{14.24}$$

Pertanto, la *prima condizione* affinché si abbia asintoto obliquo è che $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x$ esista finito e non nullo.
Nel caso, dopo aver determinato m per calcolare il termine q nell'equazione dell'asintoto scriviamo il limite dell'asintoto in questa forma:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] - q = 0$$

e quindi

$$\boxed{q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]} \tag{14.25}$$

Pertanto *seconda condizione necessaria* per avere asintoto è che $\lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$ esista finito, con m determinato come detto in 14.24.

Osservazione 359. Supponiamo che l'equazione di una funzione $y = f(x)$ possa scriversi nella forma:

$$y = f(x) = mx + q + \varepsilon(x)$$

dove $\varepsilon(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to \infty$, cioè $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$. In tal caso $y = mx + q$ è l'equazione dell'asintoto obliquo della curva rappresentativa della funzione.

Esempio 14.8.1. Per una funzione razionale fratta del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $Q(x)$ è polinomio di grado n mentre $P(x)$ di grado $n+1$, il quoziente tra $P(x)$ e $Q(x)$ sarà un polinomio di primo grado $mx + q$ e pertanto si potrà scrivere

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = mx + q + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $R(x)$ è resto della divisione tra $P(x)$ e $Q(x)$, è di grado minore di n; pertanto si avrà

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

Quindi $y = mx + q$ sarà l'equazione dell'asintoto obliquo.

14.8.4 Crescita di una funzione all'infinito

Per descrivere la velocità con cui la funzione tende all'infinito diciamo che, per $x \to +\infty$:

- f ha crescita sopralineare se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$
- f ha crescita lineare se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ con $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$
- f ha crescita sottolineare se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Considerazioni speculari si possono fare per $x \to -\infty$.

Esempio 14.8.2. Funzioni con crescita sopralineare per $x \to +\infty$ sono gli esponenziali a^x e le potenze x^a con $a > 1$; crescita sottolineare per $x \to +\infty$ sono i logaritmo $\log_a x$ e le potenze x^a con $0 < a < 1$.

14.9 L'utilizzo di maxima

La funzione `limit` serve per il calcolo di limiti destri (specificando `plus`), sinistri (`minus`) e tout court (non specificando niente) in un punto; l'ultimo esiste se limite destro e sinistro coincidono. Per i limiti a infinito e meno infinito si usano `inf` e `minf`

```
##
## f(x):=1/x
##                                              1
##                                      f(x) := -
##                                              x
## limit(f(x),x,0,plus)
##                                         inf
## limit(f(x),x,0,minus)
##                                        minf
## limit(f(x),x,0)
##                                      infinity
## limit(f(x),x,inf)
##                                          0
## limit(f(x),x,minf)
##                                          0
## limit(1/x^2,x,0)
##                                         inf
```

Esercizio 11.7.8, de marco:

```
(%i1) f(x) := log(log(x))/((log(x))^q);
                                      log(log(x))
(%o1)                         f(x) := -----------
                                          q
                                        log (x)
(%i2) limit(f(x), x, inf);
Is q positive, negative or zero?

positive;
Is q an integer?

no;
(%o2)                                  0
```

Capitolo 15

Continuità

15.1 Funzioni continue

15.1.1 Introduzione

Osservazione 360. Come visto, il limite per $x \to c$ di una funzione può esistere o meno indipendentemente dal fatto che $f(x)$ sia definita per $x = c$; inoltre, se tale limite esiste ed $f(c)$ è definita, il limite può coincidere con $f(c)$ o meno.

Definizione 15.1.1 (Continuità)**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzione e sia $c \in D$. Si dice che f è continua in c se per ogni successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di D che tende a c si ha

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = f(c)$$

o equivalentemente (senza far riferimento alle successioni)

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} f(x) = f(c)$$

Osservazione 361. In altre parole la funzione è continua se per ogni successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione:

$$x_j \in D, \lim_{j\to\infty} x_j \in D \implies \lim_{j\to\infty} f(x_j) = f\left(\lim_{j\to\infty} x_j\right)$$

ovvero: le funzioni continue sono quelle che si scambiano con l'operazione di limite.

Definizione 15.1.2 (Punto di discontinuità)**.** Quando la condizione di continuità non è verificata in un punto $c \in D$, si dice che la funzione non è continua in c o che c è punto di discontinuità.

Osservazione 362. Dal punto di vista del *calcolo dei limiti*, il *beneficio* è che se si sa che una funzione f è continua in un punto c, il calcolo del limite per $x \to c$ è immediato, e consiste nel calcolare $f(c)$.

Proposizione 15.1.1 (Verifica di continuità in un punto)**.** *Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ funzione a valori reali. Se $c \in D$ è di accumulazione per D, la funzione f è continua in c se e solo se si ha:*

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} (f(x) - f(c)) = 0$$

Dimostrazione. Questo deriva direttamente dalla definizione di continuità (quella senza far riferimento alle successioni) □

Definizione 15.1.3 (Continuità da sinistra)**.** Quando si ha che

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

si dice che $f(x)$ è *continua in* c *da sinistra.*

Definizione 15.1.4 (Continuità da destra)**.** Quando

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

si dice che $f(x)$ è *continua in* c *da destra.*

Definizione 15.1.5 (Continuità in un intervallo/nel proprio dominio)**.** Una funzione $f(x)$ si dice *continua in un intervallo del dominio* $I \subseteq D$, se essa è continua in tutti i punti di I. Similmente è *continua nel proprio dominio* D, se essa è continua in tutti i punti di D.

Osservazione 363. La proprietà di continuità su un intervallo ha una semplice interpretazione geometrica: il grafico della funzione su quell'intervallo si può tracciare "senza staccare la penna dal foglio".

Osservazione 364. Un'utile condizione *sufficiente* per la continuità nel dominio è la seguente.

Definizione 15.1.6 (Funzioni Lipschitziane)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{R}$; una funzione a valori reali $f : D \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana*, o Lipschitz-continua, su D se esiste una costante $k \geq 0$ tale che sia:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|\,, \qquad \forall x_1, x_2 \in D$$

Se ne esiste più di una si considera la $k \geq 0$ minore, detta la *costante di Lipschitz* per f; se $k = 0$, f è costante.

Osservazione 365. Se $x_1 \neq x_2$ si può dividere per $|x_1 - x_2|$ la disequazione di sopra, ottenendo che f è lipschitziana se

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq k \iff -k \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq k$$

ossia l'insieme dei rapporti incrementali di f (quello che si trova entro valore assoluto, anche detto coefficiente angolare) è limitato. Ossia il coefficiente angolare della retta passante per due punti della funzione non può superare (in valore assoluto) un certo limite k; in altre parole, il grafico non può essere eccessivamente ripido.

Teorema 15.1.2. *Se* f *è lipschitziana in* D*, allora è continua in* D

Dimostrazione. Sia $c \in D$ di accumulazione per D e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dobbiamo provare che esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - c| \leq \delta$ allora $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$; essendo $|f(x) - f(c)| \leq k\,|x - c|$, basta prendere $\delta = \varepsilon/k$ (se $k = 0$, f è costante e va bene ogni δ) □

15.1.2 Continuità delle funzioni elementari

E' possibile dimostrare che le seguenti funzioni elementari sono continue in tutto il proprio dominio:

- costante $y = k$ è continua per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, essendo $\lim_{x\to c} k = k$ ed $f(c) = k$;
- funzioni potenza $y = x^\alpha$ con esponente intero, razionale o reale;
- funzioni esponenziali $y = a^x$ con $a > 0$;
- funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$;
- funzioni trigonometriche elementari (seno/coseno).

TODO: funzione potenza col reale se x negativo ho qualche dubbio :)

Esempio 15.1.1. Le funzioni coseno e seno sono lipschitziane su $\mathbb{R}$ con costante di Lipschitz 1. Sfruttando le formule di prostaferesi:

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$
$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

e dalle disuguaglianze $|\cos t| \leq 1$, $|\sin t| \leq 1$, nonché $|\sin t| \leq |t|$ si giunge al risultato.

15.1.3 Operazioni con funzioni continue

Teorema 15.1.3 (Permanenza del segno per funzioni continue)**.** *Se vale* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *e definitivamente per* $x \to c$ *si ha che* $f(x) > 0$*, allora* $l \geq 0$*.*

Teorema 15.1.4 (Permanenza del segno (versione più generale))**.** *Sia* $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ *e* $c \in D$*. Se* $f(c)$ *verifica una disuguaglianza stretta con un* $\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}}$*, la stessa disuguaglianza è verificata da* $f(x)$ *per ogni* $x \in U \cap D$*, con* U *intorno di* c *in* $\widetilde{\mathbb{R}}$*.*

Osservazione 366. Ovvero se $f(c) < \alpha$ (o $f(c) > \alpha$), esiste un intorno U di c tale che $f(x) < \alpha$ (rispettivamente $f(x) > \alpha$) per ogni $x \in U \cap D$.

Teorema 15.1.5 (Continuità di funzioni derivanti da operazioni su funzioni continue)**.** *Sia* $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ *e siano* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *funzioni a valori reali, supponiamo* f, g *continue in* $c \in D$*. Allora sono continue in* c *anche le seguenti funzioni*

$$f(x) \pm g(x); \qquad f(x) \cdot g(x); \qquad f(x)/g(x), \quad \textit{purché } g(x_0) \neq 0$$

Dimostrazione. Proviamo ad esempio la terza (le altre sono analoghe e più semplici); per ipotesi sappiamo che f e g sono continue in c e quindi

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \quad \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$$

Inoltre $g(c) \neq 0$ e quindi per il teorema di permanenza del segno definitivamente per $x \to c$ si ha che $g(x) \neq 0$. Allora per il teorema sull'algebra dei limiti delle successioni si conclude che:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f(c)}{g(c)}$$

per $x \to c$ ossia f/g è continua in c □

Osservazione 367. Per questi teoremi sull'algebra delle funzioni continue possiamo ad esempio affermare che:

- i polinomi sono funzioni continue in quanto ottenuti sommando funzioni del tipo cx^n continue per la continuità delle funzioni potenza;
- le funzioni razionali (cioè i quozienti di polinomi) sono continue tranne nei punti in cui si annulla il denominatore;
- tangente e cotangente sono continue ovunque nel proprio dominio (ad eccezione di quando il denominatore è nullo), essendo seno e coseno continui in $\mathbb{R}$.

15.1.4 Limiti e continuità delle funzioni composte

Teorema 15.1.6 (Limite di una funzione composta). *Siano $D, E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, e $f : D \to E$, $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzioni. Sia $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D mentre g continua in $p \in E$. Se*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f(x) = p$$

allora si ha che

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} g \circ f(x) = g(p)$$

Dimostrazione. Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ successione di $D \setminus \{c\}$ tendente a c; allora $y_j = f(x_j)$ tende a p, per definizione di limite di funzione, e $g(y_j) = g(f(x_j))$ tende a $g(p)$ per definizione di continuità. $\square$

Teorema 15.1.7 (Continuità delle funzioni composte). *Siano $D, E \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, e $f : D \to E$, $g : E \to \widetilde{\mathbb{R}}$ funzioni. Se f è continua in $c \in D$ e g è continua in $p = f(c) \in E$, allora $g \circ f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è continua in c.*

Dimostrazione. Dimostrazione immediata con le proposizioni 15.1.6 e definizione di continuità $\square$

15.1.5 Considerazioni pratiche su continuità delle funzioni e calcolo dei limiti

A fini pratici per il calcolo dei limiti, tutte le funzioni che si possono ottenere con somma, prodotto, quoziente e composizione da funzioni elementari, per quanto visto in precedenza, sono continue nel loro insieme di definizione.
In questo caso il calcolo dei limiti si riduce a valutare la funzione nel punto in cui si vuole calcolare il limite.

Esempio 15.1.2.

$$\lim_{x \to -1} (x^3 + x^2 - 3x - 3) = -1 + 1 + 3 - 3 = 0$$

Esempio 15.1.3.

$$\lim_{x \to \pi} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\sin \pi} = 0$$

Esempio 15.1.4.

$$\lim_{x\to 0} x + \frac{1}{x} = 0 + \frac{1}{0} = \infty$$

Si noti come in questa non si è specificato + o $-\infty$ poiché il risultato varia a seconda di 0^+ o 0^-.

Esempio 15.1.5.

$$\lim_{x\to 1} e^{-x^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

15.1.6 Continuità delle restrizioni e delle estensioni

Osservazione 368. Come per il limite, la continuità dipende dal dominio D della funzione:

- restrizioni di funzioni continue in un punto c a sottoinsiemi del dominio contenenti c sono ancora continue in c;
- viceversa estensioni di funzioni continue non sono necessariamente funzioni continue, come mostra il seguente esempio.

Esempio 15.1.6. La funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è continua in alcun punto di $\mathbb{R}$; le sue restrizioni all'insieme dei razionali ($\chi_{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$) e il rispettivo complementare ($\chi_{\mathbb{Q}|\mathbb{P}} : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$) sono le costanti 1 e 0 e sono continue in ogni punto di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$ rispettivamente.

15.1.7 Prolungamento per continuità

Si può parlare di continuità di una funzione solo in punti del dominio della stessa (ovvero dove essa è definita e il suo valore in un punto può coincidere con quello del limite nello stesso).
Se tuttavia per una funzione $f : D \to \widetilde{\mathbb{R}}$ esiste il limite in $\widetilde{\mathbb{R}}$ per $x \to c$, con c di accumulazione per D ma $c \notin D$, si può estendere f ad una funzione $f_c : D \cup \{c\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ ponendo

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ \lim\limits_{\substack{x\to c \\ x\in D}} f(x) & \text{se } x = c \end{cases}$$

La funzione così ottenuta è continua; altresì si può provare che la cosa può essere fatta per tutti i punti in cui ciò si verifica, e l'estensione risultante è continua.

15.1.8 Punti di discontinuità

Quando una funzione non soddisfa la definizione di continuità in un punto, è discontinua in quel punto; è consuetudine suddividere i punti di discontinuità in tre specie.

Definizione 15.1.7 (Discontinuità di prima specie)**.** Per $x = c$ la funzione $f(x)$ ha un punto di discontinuità di prima specie quando i limiti da destra e da sinistra esistono, *finiti* ma *diversi*:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x) \tag{15.1}$$

Osservazione 369. Il De Marco pone tra quelli di prima specie anche quelli che sotto sono classificati (in coerenza con il Dodero) di terza specie.

Osservazione 370. Data una discontinuità di prima specie per $f : D \to \mathbb{R}$ si scrive $f(c^-)$ in luogo di $\lim\limits_{\substack{x \to c^- \\ x \in D}} f(x)$ e $f(c^+)$ in luogo di $\lim\limits_{\substack{x \to c^+ \\ x \in D}} f(x)$

Definizione 15.1.8 (Salto)**.** In questi casi si chiama *salto* della funzione in $x = c$ il valore assoluto della differenza tra il limite destro e sinistro:

$$\left| \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) \right| \tag{15.2}$$

Altri (De Marco), definiscono il salto in c come la quantità

$$\sigma f(c) = f(c^+) - f(c^-)$$

dove l'unica differenza è che non si considera il valore assoluto.

Definizione 15.1.9 (Discontinuità di seconda specie)**.** Sono un caso residuale rispetto a quello di prima (e terza specie); per $x = c$ la funzione $f(x)$ ha un punto di discontinuità di seconda specie quando *almeno uno* dei due limiti (da destra o sinistra) alternativamente non esiste o è infinito.

Definizione 15.1.10 (Discontinuità di terza specie (eliminabile))**.** Si dice che per $x = c$ la funzione $y = f(x)$ ha un punto di discontinuità di terza specie (detto anche *eliminabile*) quando esiste il limite per $x \to c$ di $f(x)$ ossia limite destro e sinistro coincidono, ma $f(c)$ non esiste o è diversa dal valore del limite nel punto:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l \neq f(c) \tag{15.3}$$

In questi casi si dice che la discontinuità è *eliminabile* se si effettua un prolungamento per continuità ponendo $f(c) = l$.

Esempio 15.1.7. $\sin x/x$ presenta una discontinuità eliminabile in 0 mediante il prolungamento seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Infatti come visto nei limiti notevoli $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ma la funzione non è definita per $x = 0$.

Proposizione 15.1.8 (Discontinuità delle funzioni monotone)**.** *Le funzioni monotone possono presentare discontinuità solo del primo o del terzo tipo.*

Dimostrazione. La dimostrazione discende dal teorema sui limiti delle funzioni monotone. □

15.2 Proprietà funzioni continue in un intervallo

Consideriamo in questa sezione le proprietà assunte delle funzioni continue in un dato intervallo del loro dominio.

Teorema 15.2.1 (Teorema dei valori intermedi (Darboux))**.** *Se la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, allora la funzione assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo. In altre parole $f([a; b])$ è intervallo di $\mathbb{R}$*

Dimostrazione. De Marco pag 291 □

Corollario 15.2.2 (Esistenza degli zeri)**.** *Se la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ ed assume valori di ambo i segni allora esiste almeno un punto c (detto* zero*), interno ad $[a; b]$, in cui è $f(x) = 0$; se la funzione f è anche monotona, lo zero è unico.*

Osservazione 371. Si osservi che quest'ultimo risultato afferma che vi è almeno un punto, ma tali punti possono essere più di uno; in altre parole il teorema assicura che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione nell'intervallo aperto $(a; b)$.

Teorema 15.2.3 (Teorema di Weierstrass)**.** *Se la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, allora la funzione assume, in tale intervallo, un valore minimo e un valore massimo.*

15.2.1 Continuità e invertibilità

Sappiamo che:

- una funzione definita su un intervallo e strettamente monotona è invertibile, con inversa monotona;
- il viceversa non è necessariamente vero: esistono funzioni invertibili su un intervallo ma non monotone.

Se però, in questa secondo caso, alla invertibilità aggiungiamo l'ipotesi di continuità, il viceversa funziona.

Proposizione 15.2.4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora f è invertibile in I se e solo se è strettamente monotona. In tal caso la sua inversa è ancora strettamente monotona.*

Osservazione 372. Il teorema appena enunciato significa in particolare che una funzione continua e invertibile su un intervallo, ha inversa continua; questo è importante perché completa la continuità delle funzioni elementari infatti: la continuità di a^x implica la continuità di $\log_a x$; la continuità di $\sin x, \cos x, \tan x$ implica la continuità di $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$.

15.3 Omeomorfismi, diffeomorfismi

Osservazione 373. La continuità dell'inversa f^{-1} di f non è in generale assicurata dalla continuità di f.

Definizione 15.3.1 (Omeomorfismo)**.** Siano $X, Y \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice *omeomorfismo* di X su Y se è continua, biiettiva, e l'inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Definizione 15.3.2 (Insiemi omeomorfi)**.** Due sottoinsiemi di $\widetilde{\mathbb{R}}$ si dicono *omeomorfi* se tra essi esiste un omeomorfismo.

Definizione 15.3.3 (Diffeomorfismo)**.** Funzione biettiva e derivabile in I, la cui inversa è derivabile in J

15.4 Limiti di funzioni razionali

15.4.1 Funzioni razionali intere

Una funzione razionale intera, la cui espressione consiste in un polinomio di grado n:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

è come noto continua, quindi il calcolo per $x \to c$, con c finito è immediata (basta sostituire c ad x nell'espressione e sviluppare i calcoli).
Nel caso però c sia $\pm\infty$ si può giungere a forme di indecisione del tipo $[+\infty - \infty]$.
Per eliminarle, raccogliere x^n a fattore comune:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\big(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\big) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^n\left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_n}{x^n}}_{0}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n)\end{aligned}$$

ovvero il limite per $x \to \infty$ di una funzione razionale intera è uguale al limite del suo termine di grado massimo.

15.4.2 Funzioni razionali fratte

La funzione razionale fratta del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$$

è continua per tutti i valori di x che non annullando il denominatore. Forme di indeterminazione si possono avere qualora x tenda a valore finito o infinito.

Limite per x tendente a valore finito Nel caso si desideri calcolare il limite per $x \to c$ (con c valore finito):

- se $Q(c) \neq 0$ allora la funzione per c è continua e il suo limite corrisponderà al valore assunto dalla funzione stessa
- se $Q(c) = 0 \wedge P(c) \neq 0$ la funzione tenderà ad infinito, con opportuno segno
- se $Q(c) = 0 \wedge P(c) = 0$ si avrà la forma di indecisione $\frac{0}{0}$; tuttavia questa si può risolvere considerando che sia numeratore che denominatore sono divisibili per $(x - c)$ (per il teorema del resto); si procederà scomponendo in fattori i polinomi e dividendo numeratore e denominatore per $(x-c)$. Si considera poi il limite della funzione razionale fratta ottenuta, che coincide, per $x \neq c$ alla funzione data.

Limite per x tendente a infinito Il limite per x **tendente ad infinito** presenta la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$; per eliminarla, raccogliamo a numeratore e denominatore la potenza di x di grado massimo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^m\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_m}{x^m}\right)}{x^n\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_n}{x^n}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{b_0}\cdot x^{m-n}\right)\end{aligned}$$

A questo punto, il risultato dipende da m ed n:

- se $m > n$ il limite sarà più o meno infinito, a seconda che il limite cui si tende è $+\infty$ o $-\infty$ e la differenza tra m ed n sia pari o dispari;
- se $m = n$, $\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = 1$, quindi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$
- se $m < n$, $\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = 0$, e quindi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

15.5 Calcolo limiti

Ai fini pratici, quando è necessario *calcolare* (non verificare) un generico limite del tipo:

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

si deve per prima cosa sostituire il valore $x = c$ nella $f(x)$, calcolando $f(c)$; ci stiamo in altre parole basando sulla continuità delle funzioni, o di alcuni loro pezzi considerati da soli e applicando l'algebra dei limiti vista in precedenza. Una volta sviluppati i calcoli possiamo trovarci di fronte alle seguenti situazioni;

1. $f(c)$ è un reale definito: ovvero il calcolo porta ad una costante, che è il limite ricercato;
2. $f(c)$ è una forme indefinite di immediata interpretazione;
3. $f(c)$ da luogo a forme indeterminate, cioè forme sulle quali nulla può dirsi.

Vediamo quali sono le fattispecie dei casi 2 e 3.

15.5.1 Forme indefinite di immediata interpretazione

Queste forme si possono generare nelle **funzioni razionali**: considerando il rapporto di due funzioni $A(x)$ e $B(x)$. Se occorre calcolare il limite $x \to c$ (con c finito o infinito):

$$\lim_{x\to c}\frac{A(x)}{B(x)}$$

ci si può trovare di fronte sostanzialmente a tre situazioni:

$$a)\begin{cases}\lim_{x\to c} A(x) = m \lesseqgtr 0\\ \lim_{x\to c} B(x) = \infty\end{cases}\qquad b)\begin{cases}\lim_{x\to c} A(x) = m \neq 0\\ \lim_{x\to c} B(x) = 0\end{cases}\qquad c)\begin{cases}\lim_{x\to c} A(x) = \infty\\ \lim_{x\to c} B(x) = m \lesseqgtr 0\end{cases}$$

Nel primo caso il limite complessivo sarà nullo $(0, 0^+, 0^-)$; nel secondo e terzo sarà infinito $(\infty, +\infty, -\infty)$. La tabelle 15.1 presenta la casistica per esteso.

Altre forme ascrivibili a quelle **di immediata interpretazione** sono quelle che nella sostituzione di c al posto di x portano ad uno dei casi elencati in tabella 15.2.

caso a)	caso a)	caso b)	caso c)	caso c)
$\frac{m}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$	$\frac{m}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{m}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$
$\frac{m}{+\infty}=0^+$	$\frac{0^+}{+\infty}=0^+$	$\frac{m}{0^+}=+\infty$	$\frac{+\infty}{m}=+\infty$	$\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$
$\frac{m}{-\infty}=0^-$	$\frac{0^+}{-\infty}=0^-$	$\frac{m}{0^-}=-\infty$	$\frac{-\infty}{m}=-\infty$	$\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$
$\frac{-m}{+\infty}=0^-$	$\frac{0^-}{+\infty}=0^-$	$\frac{-m}{0^+}=-\infty$	$\frac{+\infty}{-m}=-\infty$	$\frac{+\infty}{0^-}=-\infty$
$\frac{-m}{-\infty}=0^+$	$\frac{0^-}{-\infty}=0^+$	$\frac{-m}{0^-}=+\infty$	$\frac{-\infty}{-m}=+\infty$	$\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$

Tabella 15.1: Limiti di immediata interpretazione (1/2); m un numero positivo finito.

$-(+\infty)=-\infty$	$m(-\infty)=-\infty$	$(0^+)^{+\infty}=0^+$
$+(-\infty)=-\infty$	$-m(-\infty)=+\infty$	$(0^+)^{-\infty}=+\infty$
$m+(+\infty)=+\infty$	$+\infty(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
$m-(-\infty)=+\infty$	$+\infty(-\infty)=-\infty$	$(+\infty)^{-\infty}=0^+$
$m+(-\infty)=+\infty$	$-\infty(+\infty)=-\infty$	$m^{+\infty}=+\infty,\ \text{m}>1$
$m-(+\infty)=-\infty$	$-\infty(-\infty)=+\infty$	$m^{+\infty}=0^+,\ \text{m}<1$
$+\infty+(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)^m=+\infty$	$m^{-\infty}=0^+,\ \text{m}>1$
$+\infty-(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)^{-m}=0^+$	$m^{-\infty}=+\infty,\ \text{m}<1$
$-\infty+(-\infty)=-\infty$	$(-\infty)^{n_2}=+\infty$	$\log_m(+\infty)=+\infty,\ \text{m}>1$
$-\infty-(+\infty)=-\infty$	$(-\infty)^{n_1}=-\infty$	$\log_m(+\infty)=-\infty,\ \text{m}<1$
$m(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)^{-n_2}=0^+$	$\log_{+\infty}(m)=0^+,\ \text{m}>1$
$-m(+\infty)=-\infty$	$(-\infty)^{-n_1}=0^-$	$\log_{+\infty}(m)=0^-,\ \text{m}<1$

Tabella 15.2: Limiti di immediata interpretazione (2/2); $m \in \mathbb{R}^+$, n_1 intero dispari, n_2 intero pari.

$\frac{0}{0}$	$+\infty-\infty$	1^∞	$\log_{+\infty}(0^+)$
$\frac{\infty}{\infty}$	0^0	$\log_{0^+}(+\infty)$	$\log_{+\infty}(+\infty)$
$0\cdot\infty$	∞^0	$\log_{0^+}(0^+)$	$\log_{1^\pm}(1)$

Tabella 15.3: Calcolo dei limiti: forme indeterminate

15.5.2 Forme indeterminate

Nel calcolo di un limite, come detto si può giungere a forme indeterminate di non immediata interpretazione, come quelle riportate in tabella 15.3. Qui si hanno tipicamente le difficoltà maggiori: esperienza e intuito sono essenziali per la risoluzione.
I **procedimenti risolutivi** sono molteplici: alla base di tutti sta l'idea di **trasformare la funzione** senza cambiarne il limite, in modo che nella nuova funzione non compaia l'indeterminazione, eventualmente ricorrendo ai **limiti notevoli**.

15.5.2.1 Altre forme di indecisione

$\boxed{0\cdot\infty}$ se $f(x)g(x)$ da origine a una forma di questo tipo possiamo ricondurci a ∞/∞ o $\frac{0}{0}$ rispettivamente mediante:

$$\frac{g(x)}{1/f(x)}$$
$$\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

$\boxed{+\infty-\infty}$ Se $f(x)-g(x)$ da origine a una forma di questo tipo, si può metter in evidenza una delle due funzioni, per esempio $g(x)$, ottenendo

$$g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)$$

dove se $f(x)/g(x)$ presenta limite $\neq 1$, l'equazione non è più in forma indeterminata (altrimenti ci si è ricondotti al caso $0\cdot\infty$).
Alternativamente si può sfruttare la forma

$$f(x)-g(x)=\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f(x)+g(x)}$$

che può essere determinata o essere una $\frac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{0^0,\infty^0,1^\infty}$ se $f(x)^{g(x)}$ da origine a questo, possiamo sfruttare l'identità

$$f(x)^{g(x)}=\exp\left(g(x)\cdot\log f(x)\right)$$

oppure cercare di ricondurre al limite che definisce e.

$\boxed{\log}$ le forme indeterminate con logaritmo possono essere affrontate mediante

$$\log_{g_x} f(x)=\frac{\log f(x)}{\log g(x)}$$

riconducendole alla forma ∞/∞, ad eccezione di $\log_1 1$ riconducibile a $0/0$

Capitolo 16

Confronto locale tra funzioni

Osservazione 374. Ci occupiamo in questa sezione del confronto di due funzioni in prossimità di un punto.

Osservazione 375. In quanto segue è fissato un dominio $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, un punto $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D ed un intorno U di c; le funzioni (f, g) sono tutte a valori reali definite (quanto meno) in $U \cap D \setminus \{c\}$.

Osservazione 376. Nel prosieguo, per "definitivamente", o mediante locuzioni tipo "abbastanza vicino a c" o "in un intorno di c", si intende appunto nell'insieme $U \cap D \setminus \{c\}$.

16.1 Confronto locale

16.1.1 Relazione di o piccolo

Definizione 16.1.1 (o piccolo)**.** f è $o_c(g)$ (letto: f è o piccolo di g per x tendente a c) e si scrive $f \in o_c(g)$ se esiste una funzione σ, infinitesima per $x \to c$, tale che possiamo riscrivere:

$$f(x) = \sigma(x) \cdot g(x)$$

per ogni x in un intorno di c.

Osservazione 377. Se $f \in o_c(g)$ si dice che f è *trascurabile* rispetto a g per $x \to c$.

Osservazione 378. Il simbolo di $o_c(g)$ non denota una particolare funzione ma un insieme di funzioni caratterizzate dall'essere più piccole di g in prossimità di c.

Osservazione 379 ($o(1)$). Il simbolo $o(1)$ denota una qualunque funzione infinitesima per un $x \to x_0$ opportuno.

Osservazione 380. Come identità si ha che $o(f) = f \cdot o(1)$

Osservazione 381. $f \in o_c(g)$ si può denotare anche con $f \ll_c g$ o $f \ll g$ per $x \to c$.

Osservazione 382. In altri scritti si indica anche come $f = o(g)$ [1]

Osservazione 383. Quando si scrive che $f = f_1 + o(g)$ si intende che $f - f_1 \in o(g)$, ossia che f coincide con f_1 a meno di una funzione che è $o(g)$.

Osservazione 384. Equivalentemente, nel caso $g \neq 0$ nell'intorno di c, si ha che $f \in o_c(g)$ se e solo se:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Esempio 16.1.1. Per $x \to 0$,

$$x^2 \in o(x), \qquad x^3 \in o(x), \qquad x^3 \in o(x^2)$$

In quanto

$$\frac{x^2}{x} = x \to 0, \quad \frac{x^3}{x} = x^2 \to 0, \quad \frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \tag{16.1}$$

Esempio 16.1.2. Per $x \to \pm\infty$

$$\frac{1}{x} \in o(1)$$

in quanto

$$\frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \to 0$$

Osservazione 385. Se sia f che g sono infinitesime per $x \to c$ ed $f \in o_c(g)$, allora si dice che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* (a $g(x)$), nel senso che tende a 0 più velocemente di $g(x)$.

Osservazione 386. Se sia f che g sono infinite per $x \to c$ ed $f \in o_c(g)$, allora si dice che $f(x)$ è un *infinito di ordine inferiore* (a $g(x)$), nel senso che tende a ∞ più lentamente di $g(x)$.

Osservazione 387 (Ordine parziale stretto). L'unica funzione che sia o piccolo di se stessa per $x \to c$ è quella nulla in un intorno di c; escludendo questo caso, la relazione "o piccolo di" è *antiriflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva* (e quindi è un ordine parziale stretto).

16.1.2 Asintoticità

Definizione 16.1.2 (Asintoticità)**.** Siano f, g definite in un intorno di c; si dice che f è asintotica a g per $x \to c$, e si scrive $f \sim_c g$ se:

$$f - g \in o_c(g)$$

Osservazione 388. A parole, la differenza delle due funzioni è trascurabile rispetto alla funzione considerata come riferimento/confronto.

Osservazione 389. La definizione precedente è la più generale; nel caso specifico in cui due funzioni f, g non siano nulle in qualche intorno di c, per avere asintoticità basta che:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

[1] Quando si scrive $f = o(g)$ il segno di uguale va preso con una certa cautela: a rigore, non può esserci uguaglianza tra una funzione e un insieme di funzioni. L'uguaglianza va letta solo da sinistra a destra nel senso che f appartiene a $o(g)$ ma non è detto che una funzione presa da quelle di $o(g)$ coincida con f

Dimostrazione. Se $f - g \in o(g)$ si ha $f - g = \sigma g$, con σ infinitesimo per $x \to c$, per cui $(f/g) = 1 + \sigma$ e quindi $f(x)/g(x) \to 1$ per $x \to c$.
Viceversa, se $\lim_{x \to c}(f(x)/g(x)) = 1$ allora $\lim_{x \to c}(f(x)/g(x)) - 1 = \lim_{x \to c}(f(x) - g(x))/g(x) = 1 - 1 = 0$ ossia $f - g \in o_c(g)$. □

Proposizione 16.1.1. *La relazione di asintoticità è* relazione di equivalenza *(riflessiva, simmetrica, transitiva).*

Dimostrazione. Riflessività: evidente. Simmetria: supponiamo che $f - g \in o_c(g)$ cioè $f = g + \sigma g$ con σ infinitesimo per $x \to c$; in un intorno di c è allora $\sigma(x) \neq -1$ per cui si ricava $g(x) = f(x)/(1 + \sigma(x))$ e $g(x) - f(x) = \varepsilon(x) f(x)$ dove $\varepsilon(x) = -\sigma(x)/(1 + \sigma(x))$ è infinitesima per $x \to c$, ossia $g - f \in o_c(f)$.
Transitività: se $f - g \in o(g)$ e $g - h \in o(h)$ si ha $f - g = \sigma g$, $g - h = \varepsilon h$, con σ, ε infinitesimi in c; pertanto sommando membro a membro le due precedenti si ha $f - h = \sigma g + \varepsilon h = h \cdot \left(\sigma \frac{g}{h} + \varepsilon\right) = (\sigma(1 + \varepsilon) + \varepsilon) \cdot h$ ed essendo $\sigma(1 + \varepsilon) + \varepsilon$ infinitesima in c si conclude che è $f \sim h$. □

Proposizione 16.1.2 (Asintoticità notevoli per $x \to 0$)**.**

$$
\begin{aligned}
&\sin x \sim x \\
&\arcsin x \sim x \\
&\tan x \sim x \\
&\arctan x \sim x \\
&1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \\
&e^x - 1 \sim x \\
&a^x - 1 \sim x \log a \\
&\log(1 + x) \sim x \\
&\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\log a} \\
&(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \alpha \neq 0
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Derivate dai limiti notevoli. □

Osservazione 390. Nell'utilizzare queste *non* è ammesso portare una quantità da una parte all'altra del segno di $\sim$, come si farebbe con un'uguaglianza.

Proposizione 16.1.3 (Asintoticità notevoli per $\varepsilon(x) \to 0$)**.** *Se* $\varepsilon(x)$ *è una* *funzione infinitesima per $x \to 0$ si ha:*

$$\begin{aligned}
&\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)\\
&\arcsin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)\\
&\tan \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)\\
&\arctan \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)\\
&1-\cos \varepsilon(x) \sim \frac{1}{2}(\varepsilon(x))^2\\
&e^{\varepsilon(x)}-1 \sim \varepsilon(x)\\
&a^{\varepsilon(x)}-1 \sim \varepsilon(x)\log a\\
&\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)\\
&\log_a(1+\varepsilon(x)) \sim \frac{\varepsilon(x)}{\log a}\\
&(1+\varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $\varepsilon(x)$ è infinitesima per $x \to 0$ attraverso un cambio di variabile nel limite $y = \varepsilon(x)$ si giunge alle versioni generalizzate. □

16.1.3 Funzioni dello stesso ordine

Definizione 16.1.3 (Funzioni dello stesso ordine)**.** f e g sono dello stesso ordine per $x \to c$ se

$$f \sim \lambda \cdot g(x)$$

con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Osservazione 391. Per due funzioni f, g mai nulle nell'intorno di c considerato, essere dello stesso ordine implica che il limite del rapporto esiste finito non nullo:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0$$

Osservazione 392. Anche l'essere dello stesso ordine definisce una relazione di equivalenza.

16.1.4 Relazione di O grande

Definizione 16.1.4 (O grande)**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ con $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D; se f, g sono definite su un intorno di $c \in D$ si dice che $f \in O_c(g)$ (leggi: O grande di g per x che tende a c) se esiste una funzione $k : D \to \mathbb{R}$, *limitata* in un intorno di c, tale che sia

$$f(x) = k(x) \cdot g(x)$$

per ogni x in un intorno di c.

Osservazione 393. Se $f \in o_c(g)$ allora $f \in O_c(g)$, mentre il viceversa non necessariamente vale (ossia $o_c(g) \subseteq O_c(g)$)

Osservazione 394. Se f e g sono dello stesso ordine per $x \to c$, allora f e g sono O grande uno dell'altro. Non vale il viceversa.

Esempio 16.1.3. $f(x) = x(2 + \sin(1/x))$ e $g(x) = x$ per $x \to 0$ sono O l'uno dell'altro ma non dello stesso ordine.

Osservazione 395. La relazione O grande di è riflessiva e transitiva e chiaramente non è antisimmetrica[2].

Proposizione 16.1.4. *Se g è non nulla in un intorno di c allora $f \in O_c(g)$ se e solo se il rapporto f/g si mantiene limitato in un intorno di c*

16.2 O piccolo e applicazione al calcolo dei limiti

Proposizione 16.2.1 (Principio di sostituzione)**.** *Siano f, f_1, g, g_1 funzioni definite intorno a c, f, g mai nulle e $f_1 \in o_c(f)$ e $g_1 \in o_c(g)$. Allora:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 + f_1(x)/f(x)}{1 + g_1(x)/g(x)} \right)$$

e che il secondo fattore tende a 1. □

Osservazione 396. Non occorre memorizzare il principio di sostituzione, ciò che è importante è il metodo che esso suggerisce: in una somma, conviene mettere in evidenza il termine preponderante, quando si vuole calcolare il limite.

16.3 Gerarchia di infiniti e infinitesimi

Osservazione 397. Utile per l'applicazione del principio di sostituzione è la conoscenza delle seguenti gerarchie delle funzioni logaritmo, potenza ed esponenziale.

Proposizione 16.3.1 (Gerarchia di infiniti per $x \to +\infty$)**.** *Si ha:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0, \qquad \alpha, \beta > 0;\ a, b > 1 \tag{16.2}$$

Osservazione 398. Ossia qualunque potenza (positiva) di x prevale su qualunque potenza di $\log x$; qualunque esponenziale (base > 1) di x prevale su qualunque potenza di x.

Dimostrazione. Per la dimostrazione servono strumenti del calcolo infinitesimale (teorema di De l'Hopital) dei quali ancora non si dispone. □

Esempio 16.3.1.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2^x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}} = 0$$

[2]Ma direi nemmeno simmetrica: infatti nel caso che $k(x) \to 0$, allora $g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{k(x)}$ con $1/k(x) \to \infty$ e dunque non è limitata

Proposizione 16.3.2 (Gerarchia delle funzioni per $x \to -\infty$)**.** *Si ha:*

$$\lim_{x\to-\infty} b^x \cdot x = 0, \quad b > 1$$

Dimostrazione. Sostituendo $t = -x$:

$$\lim_{t\to+\infty} -t \cdot b^{-t} = -\frac{t}{b^t} = 0$$

□

Proposizione 16.3.3 (Gerarchia delle funzioni per $x \to 0^+$ (1))**.** *Si ha:*

$$\lim_{x\to0^+} x^\beta \left|\log x\right|^\alpha = 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

Osservazione 399. Per $\alpha \leq 0$ non vi è nessuna forma di indeterminazione.

Dimostrazione. Supponendo $\alpha > 0$ (altrimenti il limite è banale) applichiamo il cambio di variabile $x = 1/t$:

$$\lim_{x\to0^+} x^\beta \left|\log x\right|^\alpha = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left|\log t\right|^\alpha}{t^\beta} = 0$$

□

Proposizione 16.3.4 (Gerarchia delle funzioni per $x \to 0^+$ (2))**.** *Si ha:*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{b^{-1/x^\alpha}}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} x^\beta b^{1/x^\alpha} = +\infty; \qquad b > 1, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

Osservazione 400. Se $\beta > 0$ i limiti danno forme di indeterminazione $0/0$ e $0\cdot\infty$; se $\beta \leq 0$ non c'è nessuna forma di indeterminazione.

Dimostrazione. Supponendo $\beta > 0$ ed effettuando la sostituzione $x = 1/t$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{b^{-1/x^\alpha}}{x^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\beta}{b^{t^\alpha}} =$$

e ponendo $t^\alpha = y$ si arriva a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\beta\frac{\alpha}{\alpha}}}{b^{t^\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha\frac{\beta}{\alpha}}}{b^{t^\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{\beta/\alpha}}{b^y} = 0$$

Infine il limite $\lim_{x\to0^+} x^\beta b^{1/x^\alpha}$ è il limite del reciproco rispetto al precedente, quindi da $+\infty$ □

Esempio 16.3.2.

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\log x = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\log x} = e^{0^-} = 1^-$$

$$\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \left[x = \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

16.4 Asintoticità e ...

16.4.1 ... calcolo dei limiti

Osservazione 401. Quando si calcola un limite, una funzione a *fattore* (o divisione o base di potenza, ma mai entro somma algebrica) mai nulla può essere sostituita con un'altra ad essa asintotica senza alterare esistenza e valore del limite (qualora questo semplifichi la risoluzione dello stesso).

Esempio 16.4.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x}$$

da una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$; tuttavia per $x \to 0$ si ha che

$$\log(1+2x) \sim 2x, \quad \sin 3x \sim 3x$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Esempio 16.4.2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}$$

da anche esso una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$; tuttavia per $x \to 1$

$$e^{3(x-1)^2} - 1 \sim 3(x-1)^2$$

poiché $\varepsilon(x) = 3(x-1)^2$ è infinitesima per $x \to 1$ perciò

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1} \sim \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2} = \frac{1}{3}$$

Esempio 16.4.3.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x \right)$$

porta ad una forma di indeterminazione $+\infty-\infty$. Tuttavia impiegando $\sqrt[3]{1+\varepsilon(x)} - 1 \sim \frac{1}{3}\varepsilon(x)$ con $\varepsilon(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

$$\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x \right) = x \left(\sqrt[3]{1 + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} - 1 \right) \sim x \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \to \frac{2}{3}$$

16.4.2 ... grafici

Osservazione 402. Le stime asintotiche servono anche per tracciare il grafico di una funzione nell'intorno di un certo punto, finito o infinito.

Osservazione 403. Spesso l'andamento di una funzione nell'intorno di un punto è prevedibile in base ad una opportuna stima asintotica, che consente di tracciare il grafico di f per confronto con quello di una funzione nota.

Esempio 16.4.4. Considerando la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^2$$

la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$;

- per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \sim x^2$, dunque $f(x) \to +\infty$; il suo grafico sarà simile, per x grande in valore assoluto a quello di x^2
- la funzione si annulla in $x = 0$;
- per $x \to 0$, $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$, poiché in prossimità di 0 x^2 si annulla mentre $\sqrt[3]{x}$ aumenta e acquisisce d'importanza; quindi il suo grafico sarà più simile a $\sqrt[3]{x}$.

16.5 Approfondimenti su o piccolo

16.5.1 Algebra

Osservazione 404. Nel prosieguo siano f, g, h tre funzioni e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ costante.

Osservazione 405. Le seguenti vanno interpretate come identità tra classi di funzioni (ossia funzioni che appartengono al gruppo prima dell'uguale, appartengono anche al gruppo di funzioni posto in seguito).

Proposizione 16.5.1 (Moltiplicazione per costanti)**.**

$$c \cdot o(f) = o(c \cdot f) = o(f)$$

Dimostrazione.

$$c \cdot \sigma(x) \cdot f(x) = \underbrace{\sigma(x) \cdot c}_{\tau(x)} \cdot f(x) = \tau(x) \cdot f(x)$$

con $\tau(x)$ infinitesima □

Proposizione 16.5.2 (Somma algebrica di o piccoli (1))**.**

$$o(f) \pm o(f) = o(f)$$

Proposizione 16.5.3. *Quando si scrive $o(f) + o(f) = o(f)$ e si intende che se $\alpha, \beta \in o(f)$ allora $\alpha + \beta \in o(f)$*

Dimostrazione. Per il caso di addizione (sottrazione analogo), se $\alpha(x) = \sigma(x)f(x)$ e $\beta(x) = \tau(x)f(x)$ con σ, τ infinitesimi per $x \to c$, allora

$$\alpha + \beta = \sigma(x)f(x) + \tau(x)f(x) = (\sigma(x) + \tau(x)) \cdot f(x)$$

□

Osservazione 406. In particolare, la differenza tra due o piccolo non fa zero.

Proposizione 16.5.4 (Somma algebrica di o piccoli (2))**.** *In $o(f)+o(g)$, l'errore più grossolano ingloba quello più fine.*

Esempio 16.5.1. Ad esempio per

$$o(x) + o(x^2) = o(x), \quad \text{per } x \to 0$$

Infatti

$$\sigma(x) \cdot x + \tau(x) \cdot x^2 = x \underbrace{(\sigma(x) + \tau(x) \cdot x)}_{\omega(x)} = \omega(x) \cdot x$$

con $\omega(x)$ infinitesimo per $x \to 0$

Esempio 16.5.2. Viceversa per $x \to +\infty$

$$o(x) + o(x^2) = o(x^2), \quad \text{per } x \to +\infty$$

Infatti

$$\sigma(x) \cdot x + \tau(x) \cdot x^2 = x^2 \underbrace{\left(\sigma(x) \cdot \frac{1}{x} + \tau(x)\right)}_{\omega(x)} = \omega(x) \cdot x$$

con $\omega(x)$ infinitesimo per $x \to +\infty$

Proposizione 16.5.5 (Prodotto per funzione)**.**

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

Dimostrazione.

$$f(x) \cdot \sigma(x) \cdot g(x) = \sigma(x) \cdot (f(x) \cdot g(x))$$

□

Esempio 16.5.3. Ricordando che $o(1)$ indica una funzione infinitesima nel punto considerato

$$xo(x^2) = o(x^3), \quad \frac{o(x^3)}{x} = o(x^2), \quad \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1)$$

Proposizione 16.5.6 (Potenza)**.**

$$o(g)^n = o(g^n) \tag{16.3}$$

Dimostrazione.

$$(\sigma(x)g(x))^n = \underbrace{\sigma(x)^n}_{\tau(x)} g(x)^n = \tau(x) \cdot g(x)^n$$

con $\tau(x)$ infinitesimo □

Proposizione 16.5.7 (Moltiplicazione per altro o piccolo)**.**

$$o(g) \cdot o(h) = o(gh) \tag{16.4}$$

Dimostrazione. Infatti se se $\alpha(x) = \sigma(x)g(x)$ e $\beta(x) = \tau(x)h(x)$ con σ, τ infinitesimi per $x \to c$, allora

$$\alpha \cdot \beta = (\sigma(x)g(x)) \cdot (\tau(x)g(x)) = \underbrace{(\sigma(x) \cdot \tau(x))}_{\omega(x)} \cdot (g(x) \cdot h(x)) = \omega(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$$

con $\omega(x)$ infinitesimo □

Esempio 16.5.4.

$$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$$

Proposizione 16.5.8.

$$o(f + o(f)) = o(f) \tag{16.5}$$

Dimostrazione. Sfruttiamo l'identità $o(f) = f \cdot o(1)$ ricorsivamente:

$$\begin{aligned} o(f + o(f)) &= (f + o(f)) \cdot o(1) = (f + (f \cdot o(1))) \cdot o(1) \\ &= (f \cdot (1 + o(1))) \cdot o(1) = f \cdot o(1) = o(f) \end{aligned}$$

□

Proposizione 16.5.9.

$$o(o(h)) = o(h) \tag{16.6}$$

Dimostrazione.

$$\sigma(x)(\tau(x)h(x)) = \underbrace{(\sigma(x)\tau(x))}_{\omega(x)} h(x) = \omega(x)h(x)$$

con $\omega(x)$ infinitesima □

16.5.2 Relazione tra o piccolo e asintoticità

Proposizione 16.5.10. *Se $f \sim g$ allora $o(f) = o(g)$*

Dimostrazione. Sia $f - g \in o(g)$, ad esempio $f - g = \tau(x)g(x)$ con τ infinitesimo:

- considerando un elemento $\in o(f)$, ad esempio $\sigma(x)f(x)$ con $\sigma(x)$ infinitesimo nel punto considerato abbiamo che

$$\begin{aligned} \sigma(x)f(x) &\overset{(1)}{=} \sigma(x)f(x) - \sigma(x)g(x) + \sigma(x)g(x) = \sigma(x)\,[f - g] + \sigma(x)g(x) \\ &= \sigma(x)\tau(x)g(x) + \sigma(x)g(x) = g(x)\underbrace{[\sigma(x)\tau(x) + \sigma(x)]}_{\omega(x)} = \omega(x)g(x) \end{aligned}$$

  con $\omega(x)$ infinitesimo e dove in (1) abbiamo semplicemente aggiunto e tolto la quantità $\sigma(x)g(x)$. Pertanto abbiamo dimostrato come l'elemento $\sigma(x)f(x)$ di $o(f)$ appartenga anche ad $o(g)$ in quanto $\sigma(x)f(x) = \omega(x)g(x)$;

- viceversa, analogamente si dimostra che un elemento di $o(g)$ appartiene anche a $o(f)$

Pertanto $o(g) = o(f)$. □

Osservazione 407. La relazione tra la nozione di o piccolo e la nozione di asintotico è espressa dalla seguente

Proposizione 16.5.11. *Siano f, g due funzioni definite in un intorno di $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$; allora per $x \to x_0$:*

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \tag{16.7}$$

(o in altre parole $f(x) - g(x) \in o_c(g)$)

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che da $f(x) \sim g(x)$ discende che $f(x) = g(x) + o(g(x))$, o, elaborando (con $\tau(x)$ infinitesimo per $x \to x_0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + o(g(x)) \\ f(x) - g(x) &= \tau(x)g(x) \\ \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \frac{\tau(x)g(x)}{g(x)} \\ \frac{f(x)}{g(x)} - 1 &= \tau(x) \end{aligned}$$

L'uguaglianza è verificata, per $x \to x_0$, se:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$$

se $f(x) \sim g(x)$ allora si ha proprio che $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ e dunque $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0$.
Viceversa, se per ipotesi $f(x) = g(x) + o(g(x))$ allora:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) + \sigma(x)g(x)}{g(x)} = 1 + \sigma(x) \to 1$$

e quindi si dimostra che $f(x) \sim g(x)$. □

Osservazione 408. La proposizione precedente (e le proprietà algebriche di o piccolo) fa si che si possano riformulare i limiti notevoli mediante la nozione di o piccolo, come fatto in tabella 16.1 (per $x \to 0$).

Osservazione 409. Il vantaggio è che poi, rispetto ad una stima asintotica, una eguaglianza si può riscrivere in vari modi (si possono portare da termini da una parte all'altra del segno uguale), è più facile da usare correttamente nell'approssimazione di funzioni. Inoltre uguaglianze molteplici inerenti o piccolo possono essere sommate/rielaborate algebricamente (riaggregando i vari o piccolo di errore in uno unico, tenendo il maggiore, come visto in esempio 16.5.1 e 16.5.2).

Esempio 16.5.5. Possiamo riscrivere l'eguaglianza del coseno come

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e sta a significare che in prossimità di 0, $\cos x$ è approssimata dalla parabola $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

16.6 Approssimazione di funzioni e sviluppi asintotici

16.6.1 Scale di confronto e ordine di una funzione

Definizione 16.6.1 (Scala di confronto)**.** Una scala di confronto S su D per $x \to c$ è un insieme di funzioni, definite su un intorno di $c \in D$ e non nulle in esso, totalmente ordinato dalla relazione "o piccolo".

Asintoticità	Eguaglianza con o piccolo
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\tan x \sim x$	$\tan x = x + o(x)$
$\arctan x \sim x$	$\arctan x = x + o(x)$
$(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$	$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$(\sqrt{1+x}-1) \sim \frac{1}{2}x$	$(\sqrt{1+x}-1) = \frac{1}{2}x + o(x)$
$\log(1+x) \sim x$	$\log(1+x) = x + o(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x - 1 = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$
$\sinh x \sim x$	$\sinh x = x + o(x)$
$\cosh x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$	$\cosh x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$\tanh x \sim x$	$\tanh x = x + o(x)$

Tabella 16.1: Asintoticità e eguaglianze con o piccolo per $x \to 0$

Osservazione 410. In altre parole dati $f, g \in S$, si ha che $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, \forall x \in D$, e inoltre una ed una sola delle seguenti relazioni si verifica:

$$f = g; \qquad f \in o(g); \qquad g \in o(f)$$

Osservazione 411. Le scale di confronto più usate sono:

- $S = \{(x-c)^m; m \in \mathbb{Z}\}$ per un generico limite $x \to c$ con $c \in \mathbb{R}$
- $S = \{x^m : m \in \mathbb{Z}\}$ per $x \to c$ con $c = \pm\infty$

Osservazione 412. Abbiamo in precedenza visto che due funzioni f, g sono dello stesso ordine per $x \to c$ se $f \sim \lambda \cdot g(x)$ con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definizione 16.6.2 (Ordine di una funzione)**.** Data una funzione f e una scala di confronto S, l'ordine[3] di f rispetto ad S è una funzione $g \in S$ dello stesso ordine di f, ossia:

$$f \sim \lambda g, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g \in S$$

Esempio 16.6.1. $3x^2$ è dell'ordine x^2 per $x \to +\infty$ dato che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{16.8}$$

Proposizione 16.6.1. *L'ordine g di f in S, se esiste è unico*

Dimostrazione. Per ogni altra $h \in S$ tale che $h \neq g$ si ha $h \in o(g)$ oppure $g \in o(h)$. □

Definizione 16.6.3 (Parte principale)**.** La funzione λg è detta parte principale di f rispetto alla scala S.

Osservazione 413. Anche la parte principale se esiste è unica.

Definizione 16.6.4 (Parte complementare)**.** La funzione $f - \lambda g$.

[3] Altri considerano l'ordine della funzione f come l'esponente m della funzione g alla quale f risulta dello stesso ordine (nell'ultimo esempio, ordine 2); le due cose comunque si equivalgono.

Osservazione 414. La parte principale di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ è, in parole povere, la "più semplice" funzione asintotica a $f(x)$ per $x \to x_0$

Osservazione 415. La parte complementare è o piccolo rispetto all'ordine della funzione f:

$$f - \lambda g \in o(g)$$

16.6.2 Sviluppi asintotici

Osservazione 416. Supponendo che f abbia parte principale $\lambda_0 g_0$ rispetto alla scala S, si ha che $f - \lambda_0 g_0 \in o(g_0)$ cioè

$$f = \lambda_0 g_0 + o(g_o)$$

se $f - \lambda_0 g_0 \in o(g_1)$ e ha parte principale $\lambda_1 g_1$ rispetto a S possiamo precisare il termine $o(g_0)$ come $\lambda_1 g_1 + o(g_1)$ e si ha allora

$$f = \lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + o(g_1)$$

con λ_0, λ_1 reali non nulli $g_1 \in o(g_0)$.

Osservazione 417. Si noti che λ_0, λ_1 e g_0, g_1 se esistono sono uniche.

Definizione 16.6.5 (Sviluppo asintotico)**.** Lo sviluppo asintotico di f secondo la scala di confronto S, arrestato alla precisione g_n è

$$f = \lambda_0 g_0 + \ldots + \lambda_n g_n + o(g_n) \tag{16.9}$$

con $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ reali non nulli, $g_n \ll \ldots \ll g_0$.

Proposizione 16.6.2. *Lo sviluppo asintotico, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero di termini. □

Osservazione 418. Molto utili per il calcolo di limiti per $x \to 0$ sono i seguenti sviluppi asintotici delle funzioni elementari.

Proposizione 16.6.3. *Si ha per ogni intero* $p \geq 0$

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} && +o(x^p) \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} && +o(x^p) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} && +o(x^{2p+1}) \\
\sin x &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} && +o(x^{2p+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} && +o(x^{2p+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} && +o(x^{2p+2})
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Ad esempio per la prima la differenza

$$\begin{aligned}
e^x - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} &= \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{x^{p+2}}{(p+2)!} + \ldots + \frac{x^{p+l}}{(p+l)!} + \ldots \\
&= \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \left(1 + \frac{x}{(p+2)} + \frac{x^2}{(p+3)\cdot(p+2)} + \ldots + \frac{x^{l-1}}{(p+l)\cdot\ldots\cdot(p+2)} + \ldots\right) \\
&= \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \underbrace{\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{(p+l+1)\cdot(p+l)\cdot\ldots\cdot(p+2)}\right)}_{\phi(x)}
\end{aligned}$$

Si può notare che $\phi(x)$, il pezzo tra parentesi, è dominata dalla serie geometrica di ragione $|x|$:

$$\left|1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{(p+l+1)\cdot(p+l)\cdot\ldots\cdot(p+2)}\right| < \sum_{l=0}^{\infty} (|x|)^l$$

e se $|x| < 1$ la serie geometrica converge a $1/(1-|x|)$ per cui:

$$\left|1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{(p+l+1)\cdot(p+l)\cdot\ldots\cdot(p+2)}\right| \leq \frac{1}{1-|x|}$$

abbiamo dunque mostrato che $\phi(x)$ si mantiene limitato attorno a zero. □

16.7 Altri argomenti

16.7.1 Composizione di funzioni e confronto forte

Proposizione 16.7.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ con punto di accumulazione in p; sia $\phi : E \to D$ funzione tale che $\lim_{t\to p} \phi(t) = c$. Si supponga inoltre che esista un intorno W di $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che sia $\phi(W \cap E \setminus \{p\}) \subseteq D \setminus \{c\}$ (ossia p non è di accumulazione per $\phi^{\leftarrow}(\{c\})$. Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ funzioni. Allora*

- *se $f \in o_c(g)$ allora $f \circ \phi \in o_p(g \circ \phi)$*
- *se $f \sim g$ per $x \to c$, si ha anche $f \circ \phi \sim g \circ \phi$ per $t \to p$*

Dimostrazione. De Marco pag 316 □

16.7.2 Determinazione della parte principale

Osservazione 419. In seguito diversi esempi su come si utilizza il simbolo di asintotico per mettere in evidenza la parte principale

Esempio 16.7.1. La parte principale di $\sin x$ per $x \to 0$ è x in quanto $\sin x \sim x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esempio 16.7.2. La parte principale di $\sin x + 2$ per $x \to 0$ è 2: infatti $\sin x + 2 \to 2$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2}{2} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Osservazione 420. I prossimi due esempi illustrano come si determina la parte principale di un polinomio per $x \to 0$ o per $x \to \pm\infty$; in entrambi casi essa è quella più "grande" (per $x \to \pm\infty$ la potenza di esponente maggiore, per $x \to 0$ la potenza di esponente minore)

Esempio 16.7.3 (Polinomio per $x \to \pm\infty$)**.** La parte principale di $2x^3+2x^2-x$ per $x \to \pm\infty$ è $2x^3$:

$$(2x^3 + 2x^2 - x) = 2x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) \sim 2x^3$$

Esempio 16.7.4 (Polinomio per $x \to 0$)**.** La parte principale di $2x^3 + 2x^2 - x$ per $x \to 0$ è $-x$, in quanto

$$(2x^3 + 2x^2 - x) = -x(1 - 2x - 2x^2) \sim -x$$

Osservazione 421. Quando intervengono funzioni trascendenti è necessario ricorrere alle gerarchie di infiniti

Esempio 16.7.5. La parte principale di $5x^3 + 2^x + 3\log^4 x$ per $x \to +\infty$ è 2^x; raccogliendo il termine maggiore

$$5x^3 + 2^x + 3\log^4 x = 2^x\left(1 + \frac{5x^3}{2^x} + \frac{3\log^4 x}{2^x}\right) \sim 2^x$$

per $x \to \infty$ dato che il termine tra parentesi tende a 1 per $x \to +\infty$ (gerarchia infiniti)

Osservazione 422. Nei prossimi esempi vediamo le parti principali di somme di infinitesimi/infiniti in cui non c'è un singolo addendo che pesa più degli altri. In questi casi si procede raccogliendo la parte principale di ciascun addendo

Esempio 16.7.6. La parte principale di $\sqrt{x} + \sqrt{x+x^2}$ per $x \to 0^+$ è $2\sqrt{x}$, infatti:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{1+x}\right) \sim 2\sqrt{x}$$

Esempio 16.7.7. La parte principale di $2x + 3\sqrt{x^2+x}$ per $x \to +\infty$ è $5x$. Infatti:

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 + 3\sqrt{1+1/x}\right) \sim 5x$$

Esempio 16.7.8. La parte principale di $2x+3\sqrt{x^2+x}$ per $x \to -\infty$ è x. Dato che per $x \to -\infty$, si ha $\sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = -x$

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 - 3\sqrt{1+1/x}\right) \sim -x$$

Esempio 16.7.9. La parte principale di $\sqrt{x} - \sqrt{x+x^2}$ per $x \to 0^+$ è $-\frac{1}{2}x^{3/2}$; se si procede come fatto in precedenza si giunge ad un vicolo cieco ossia

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}(1 - \sqrt{1+x})$$

il termine tra parentesi tende a 0 e non possiamo concludere $\sqrt{x}(1-\sqrt{1+x}) \sim 0$: la relazione $f(x) \sim 0$ è priva di senso poiché significherebbe $\frac{f(x)}{0} \to 1$.
Questo è un caso in cui i due addendi non solo sono infinitesimo dello stesso

ordine, ma hanno parti principali opposte; quando ciò accade in generale non è sufficiente un passaggio puramente algebrico per determinare la parte principale ma occorre sfruttare qualche limite notevole.
In questo caso sfruttiamo:

$$(1-\sqrt{1+x}) \sim -\frac{1}{2}x, \quad \text{per } x \to 0$$

e concludiamo mediante:

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\big(1-\sqrt{1+x}\big) \sim \sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^{3/2}$$

Osservazione 423. Vediamo ora come determinare la parte principale di un logaritmo quando il suo argomento tende a 0^+ o $+\infty$: in generale la parte principale del logaritmo è il logaritmo della parte principale dell'argomento.

Esempio 16.7.10 (Parte principale di logaritmo)**.** La parte principale di $\log_2(x+3)$ per $x \to +\infty$ è $\log_2(x)$. Infatti

$$\log_2(x+3) = \log_2\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) = \log_2 x + \log_2\left(1+\frac{3}{x}\right) \sim \log_2 x$$

Osservazione 424. Vediamo ora come si determina la parte principale del logaritmo quando l'argomento tende a 1 e quindi il logaritmo è infinitesimo. Abbiamo visto che se $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0$ allora

$$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x), \quad \text{per } x \to x_0$$

ponendo $f(x) = 1+\varepsilon(x)$ otteniamo che se $f(x) \to 1$ per $x \to x_0$ allora

$$\log(f(x)) \sim f(x)-1$$

per $x \to x_0$. Ad esempio per $x \to 1$

$$\log x \sim (x-1)$$

Esempio 16.7.11. La parte principale di $(x^3+2x^2)\log_2(x+3)$ per $x \to +\infty$ è $x^3\log_2 x$. Basta usare le stime asintotiche $(x^3+2x^2) \sim x^3$ e $\log_2(x+3) \sim \log_2 x$ con i termini che figurano nel prodotto dato

Esempio 16.7.12. La parte principale di $e^{x^2+x+1/x}$ per $x \to +\infty$ è e^{x^2+x}. Infatti

$$e^{x^2+x+1/x} = e^{x^2}e^{x}e^{1/x} \sim e^{x^2}e^{x} = e^{x^2+x}$$

poiché $e^{1/x} \to 0$. L'espressione trovata non può essere ulteriormente semplificata, ovvero anche se $x^2+x \sim x^2$ da questo non segue che $e^{x^2+x} \sim e^{x^2}$, infatti

$$\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} \to +\infty$$

quindi il denominatore non è asintotico al numeratore

Osservazione 425 (Parte principale di esponenziali). Diversamente da quanto accade per il logaritmo quando il suo argomento tende a $+\infty$ la parte principale di un esponenziale non è l'esponenziale della parte principale.
Ci chiediamo allora: sotto che ipotesi si può affermare che

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$$

Scriviamo:

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} \to 1 \iff f(x) - g(x) \to 0$$

Sotto quale ipotesi è vero che se $f(x) \sim g(x)$ allora $f(x)-g(x) \to 0$; rielaborando algebricamente questa differenza

$$f(x) - g(x) = g(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}_{\to 0}$$

Il secondo termine tende a 0 se $g(x)$ è limitata poiché al limite è il prodotto di una limitata per una infinitesima (e quindi infinitesima).
Pertanto se $f \sim g$ e inoltre g è limitata allora $f - g \to 0$ e nel nostro caso specifico $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$

Capitolo 17

Derivata di una funzione

17.1 Introduzione

17.1.1 Derivata in punto

Osservazione 426. Consideriamo una funzione $f : X \to \widetilde{\mathbb{R}}$ definita in un intorno di $x_0 \in X$. Se diamo ad x_0 un incremento $\Delta x = h$ positivo o negativo, in modo che $x_0 + h \in X$, possiamo definire alcune misure.

Definizione 17.1.1 (Incremento della funzione)**.** La differenza

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{17.1}$$

rappresenta l'*incremento* (positivo, negativo o nullo) che subisce la funzione quando si passa da x_0 a $x_0 + h$.

Definizione 17.1.2 (Rapporto incrementale di f in x_0 per l'incremento h)**.** Definito come

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{17.2}$$

Osservazione 427. Il rapporto incrementale è pertanto il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento corrispondente della variabile indipendente: si tratta della pendenza media unitaria[1] presente sulla curva nel passare da x_0 a $x_0 + h$.

Definizione 17.1.3 (Funzione derivabile in un punto x_0, derivata)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ funzione e sia $x_0 \in X$ di accumulazione per X. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In tal caso si dice derivata della funzione per $x = x_0$, indicata con $f'(x_0)$, tale limite:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{17.3}$$

[1]Goniometricamente coincide con $\tan\alpha$ dove α è l'angolo formato dalla retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$

Osservazione 428 (Significato geometrico della derivata). Se f è derivabile in x_0, la derivata è il *coefficiente angolare della retta tangente* al grafico di f in x_0. La retta tangente, passante per $(x_0, f(x_0))$, è definita da:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{17.4}$$

Osservazione 429. Se il limite *non esiste* (ad esempio limite destro e sinistro sono finiti ma diversi) o è *infinito*, in tal punto la funzione *non* è *derivabile*.

Osservazione 430. Possiamo definire la *derivata sinistra* e *destra* rispettivamente come il limite per $h \to 0^-$ e per $h \to 0^+$.

Definizione 17.1.4 (Derivata sinistra)**.**

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione 17.1.5 (Derivata destra)**.**

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{17.5}$$

Osservazione 431. Quindi una funzione è derivabile in x_0 se e solo se derivate sinistra e destra esistono finite e sono uguali.

Definizione 17.1.6 (Punto stazionario)**.** Nel caso la derivata in x_0 sia *nulla* (cioè $f'(x) = 0$), la retta tangente al grafico in tal punto risulta parallela all'asse x e il punto x_0 si dice punto stazionario.

17.1.2 Punti di non derivabilità notevoli

Osservazione 432. Vediamo tre casi notevoli di non derivabilità in un punto

Definizione 17.1.7 (Flessi a tangente verticale)**.** Se la funzione f non è derivabile in x_0 perché la sua derivata è $+\infty$ (o $-\infty$), allora la tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ esiste ed è parallela all'asse y. In casi come questo, se x_0 appartiene al dominio, il punto $(x_0, f(x_0))$ è un *punto di flesso a tangente verticale.*

Definizione 17.1.8 (Punti di cuspide)**.** Se f non è derivabile in x_0 perché la derivata destra è $+\infty$ e quella sinistra $-\infty$ (o viceversa), $(x_0, f(x_0))$ si dice *punto di cuspide.*

Definizione 17.1.9 (Punti angolosi)**.** Se f non è derivabile in x_0 perché derivata sinistra e destra sono finite ma diverse tra loro, oppure una è finita e l'altra infinita, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice *punto angoloso.*

17.1.3 Differenziale e derivata

Osservazione 433. Il differenziale di una funzione in un punto esprime una approssimazione della variazione registrata dalla stessa nello spostarsi da un punto x_0 a $x_0 + h$

Definizione 17.1.10 (Differenziale di f in x_0 per lo spostamento di h)**.** Definito come

$$\delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot h \tag{17.6}$$

Esempio 17.1.1 (Differenziale di $y = x$)**.** Per la funzione identità $y = x$, il differenziale in qualsiasi punto è:

$$\delta x_0 = f'(x_0) \cdot h \overset{(1)}{=} 1 \cdot h = h \tag{17.7}$$

con (1) perché, come si vedrà, $f'(x_0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 434. Pertanto il differenziale della funzione identità è sempre pari alla variazione intercorsa nella variabile indipendente.

Proposizione 17.1.1 (Derivata in un punto come rapporto di differenziali)**.** *Si ha*

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta x_0} = f'(x_0) \tag{17.8}$$

Osservazione 435. In altre parole, la derivata nel punto x_0 coincide con il rapporto tra il differenziale della funzione di interesse e quello della funzione identità.

Dimostrazione. Deriva da 17.6 sfruttando l'uguaglianza di 17.7. □

17.1.4 Funzione derivata (prima)

Definizione 17.1.11 (Funzione derivata (prima))**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ derivabile nei punti che compongono $X_1 \subseteq X$. Si può allora definire la funzione derivata (prima) di f come

$$\begin{cases} f' : X_1 \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$$

Osservazione 436 (Notazione della derivata)*.* La derivata di una funzione $y = f(x)$ viene alternativamente indicata con:

$$y' \quad f'(x) \quad (f(x))' \quad D_x y \quad Dy \quad Df(x) \quad D(f(x)) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{\delta y}{\delta x} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \frac{\delta f(x)}{\delta x}$$

17.2 Derivate delle funzioni fondamentali

Proposizione 17.2.1 (Derivata di funzione costante)**.**

$$\boxed{f(x) = c \qquad f'(x) = 0} \tag{17.9}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

□

Proposizione 17.2.2 (Derivata della funzione identità)**.**

$$\boxed{f(x) = x \qquad f'(x) = 1} \tag{17.10}$$

Dimostrazione.
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

□

Proposizione 17.2.3 (Derivata della potenza x^n, con $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$)**.** *Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ la funzione potenza è ovunque derivabile*

$$\boxed{f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}} \tag{17.11}$$

Dimostrazione. Ci si fonda sulla fattorizzazione di $a^n - b^n$ (cfr 12.45) considerando per $a = \xi = x + h$ e $b = x$. Il numeratore del rapporto incrementale, con questa notazione, è

$$\xi^n - x^n = (\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})$$

per cui se $\xi \neq x$, il rapporto incrementale diviene

$$\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \xi^{n-j} x^{j-1}$$

e facendo tendere $h \to 0$ si ha che ξ tende x e l'ultimo membro tende a

$$\sum_{j=1}^{n} x^{n-j} x^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

□

Proposizione 17.2.4 (Derivata della potenza x^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$)**.** *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione x^α è derivabile con derivata $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ in ogni punto del dominio, ad eccezione di $x = 0$ se $0 < \alpha < 1$.*

Dimostrazione. Nel caso:

- $x \neq 0$; il rapporto incrementale è

  $$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{(x(1+h/x))^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h} \overset{(1)}{=} x^{\alpha-1} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x}$$

  dove in (1) al denominatore abbiamo moltiplicato e diviso per x. Facendo tendere h a 0 se $t = h/x$ si ha che:

  $$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$$

  dunque il limite complessivo è $\alpha x^{\alpha-1}$.

- $x = 0$ la funzione potenza x^α è definita solo se $\alpha \geq 0$ e ha dominio $[0, +\infty[$. Escluso il caso già discusso di $\alpha \in \mathbb{N}$ si ha

  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{(x+h)^\alpha - x^h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^\alpha - 0^h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}$$

  limite che è finito (e dunque la funzione è derivabile) se e solo se $\alpha \geq 1$.

□

Osservazione 437. Si derivano in questo modo anche le funzioni con radici.

Proposizione 17.2.5 (Derivata di $|x|$)**.** *La funzione $y = |x|$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ma non derivabile in $x = 0$ (derivata destra, pari a 1, e sinistra, pari a -1, non coincidono). Tuttavia se escludiamo il punto $x = 0$ si può definire la funzione derivata come:*

$$\boxed{f(x) = |x| \qquad y' = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \textit{se } x > 0 \\ -1 & \textit{se } x < 0 \end{cases}} \tag{17.12}$$

Dimostrazione. Se $x > 0$, supponendo $h > 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

se $x < 0$, supponendo $h < 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h-(-x)}{h} = -1$$

Se infine $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{|x+h| - x}{h} &= \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{|x+h| - x}{h} &= \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

da cui la derivabilità su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dato che su 0 derivata destra e sinistra non coincidono e si ha un punto angoloso. □

Proposizione 17.2.6 (Derivata dell'esponenziale a^x)**.**

$$\boxed{f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \log a} \tag{17.13}$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

e dato che $a^h - 1 \sim h \log a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \sim \frac{a^x \cdot h \cdot \log a}{h} = a^x \cdot \log a$$

□

Corollario 17.2.7. *Nel caso particolare $a = e$ si avrà*

$$\boxed{f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x} \tag{17.14}$$

Proposizione 17.2.8 (Derivata del logaritmo $\log_a x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log a}} \tag{17.15}$$

Dimostrazione. Ipotizzando che $x > 0$, dato il dominio della funzione, il rapporto incrementale è:

$$\begin{aligned}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \frac{\log_a(x(1+h/x)) - \log_a x)}{h} = \frac{\log_a x + \log_a(1+h/x) - \log_a x}{h} \\ &= \frac{\log_a(1+h/x)}{h} \overset{(1)}{=} \frac{1}{x}\frac{\log_a(1+h/x)}{h/x}\end{aligned}$$

dove in (1) si è moltiplicando e diviso per x al denominatore. Ora supponendo (ragionevolmente) che $|h| < x$, e passando al limite si ha che, per il limite fondamentale $\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log a}$$

□

Corollario 17.2.9. *Nel caso particolare sia $a = e$:*

$$\boxed{f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}} \tag{17.16}$$

Proposizione 17.2.10 (Derivata di $\sin x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x} \tag{17.17}$$

Proposizione 17.2.11 (Derivata di $\cos x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x} \tag{17.18}$$

Dimostrazione. Ricordando che $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ se troviamo il limite del rapporto incrementale

$$\frac{e^{i(h+x)} - e^{ix}}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} + i\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

in $\mathbb{C}$ per $h \to 0$, parte reale e coefficiente dell'immaginario di tale limite ci danno le derivate richieste. Riscriviamo il primo membro dell'uguaglianza raccogliendo e^{ix}

$$e^{ix}\frac{e^{ih} - 1}{h} = e^{ix}\left(\frac{\cos h + i\sin h - 1}{h}\right) = e^{ix}\left(\frac{\cos h - 1}{h} + i\frac{\sin h}{h}\right)$$

ora passando al limite, dato che

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} \sim \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} = -\frac{1}{2}h = 0 \\ &\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\end{aligned}$$

si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{i(h+x)} - e^{ix}}{h} = e^{ix} \cdot i = -\sin x + i \cos x$$

dalla quale si conclude che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, mentre $\cos x$ è la derivata di $\sin x$. □

17.3 Teoremi sul calcolo delle derivate

Osservazione 438. A partire dalle derivate fondamentali e applicando i teoremi a breve esposti è possibile calcolare derivate di funzioni più elaborate.

17.3.1 Algebra delle derivate

17.3.1.1 Linearità della derivazione

Proposizione 17.3.1 (Derivata della somma algebrica)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabili in $x \in X$, di accumulazione per X. Allora $f + g$ è derivabile in x e si ha*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{17.19}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(h+x) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

Considerando il limite della scrittura per $h \to 0$ e applicando il teorema sul limite della somma di limiti, si conclude che è $f'(x) + g'(x)$. □

Corollario 17.3.2. *Una costante additiva viene eliminata nella derivazione:*

$$\boxed{y = f(x) + c \qquad y' = f'(x) + 0 = f'(x)}$$

Proposizione 17.3.3 (Derivata della moltiplicazione per costante)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ derivabile in $x \in X$, di accumulazione per X; considerando una costante $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione λf è derivabile in x e si ha*

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

Dimostrazione.

$$\frac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} = \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} = \lambda \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{17.20}$$

e similmente a prima, passando al limite per $h \to 0$ si conclude che è $\lambda f'(x)$. □

Proposizione 17.3.4 (Linearità in generale)**.** *Se $f_1, \ldots, f_N$ sono funzioni definite su X, derivabili in $x \in X$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sono costanti reali, la combinazione $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_N f_N$ è derivabile in x e si ha*

$$(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_N f_N)'(x) = \lambda_1 f_1'(x) + \ldots + \lambda_N f_N'(x)$$

Dimostrazione. Immediata dai risultati di cui sopra nei casi più semplici. □

Lemma 17.3.5. *La derivata di* $y = e^{-x}$ *è* $y' = -\frac{1}{e^x}$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale è

$$\frac{e^{-h-x} - e^{-x}}{h} = \frac{e^{-x}(e^{-h} - 1)}{h} = -e^{-x}\frac{(e^{-h} - 1)}{-h}$$

passando al limite per $h \to 0$ sfruttiamo il limite notevole ...

$$\lim_{h\to 0} -e^{-x}\frac{(e^{-h} - 1)}{-h} = -e^{-x} \cdot 1 = -\frac{1}{e^x}$$

□

Proposizione 17.3.6 (Derivata di $\sinh x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \sinh x \qquad f'(x) = \cosh x} \tag{17.21}$$

Proposizione 17.3.7 (Derivata di $\cosh x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \cosh x \qquad f'(x) = \sinh x} \tag{17.22}$$

Dimostrazione. Dato che

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

si ha che

$$(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^x}{2}\right)' + \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Analogamente

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' - \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

□

17.3.1.2 Derivata di prodotti, reciproci e quozienti

Proposizione 17.3.8 (Derivata del prodotto)**.** *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$ *e siano* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *derivabili in* $x \in X$*, di accumulazione per* X*. Allora* fg *è derivabile in* x *e si ha*

$$(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{17.23}$$

Dimostrazione. Considerato fissato un determinato x riscriviamo il numeratore del rapporto incrementale come

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) \underbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}_{\text{Aggiungo e tolgo}} - f(x)g(x)$$

Quindi considerando il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Il limite di questa per $h \to 0$ è $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ in quanto $f(x+h) \to f(x)$ essendo f continua (in quanto derivabile). □

Osservazione 439 (Prodotto di più di due funzioni). La regola di derivazione del prodotto di due funzioni si estende facilmente al caso di un prodotto di più funzioni. In generale, la derivata del prodotto di più funzioni derivabile è uguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per tutte le altre non derivate. Per esempio, per derivare $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ si ha:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

Proposizione 17.3.9 (Derivata del reciproco)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $g : X \to \mathbb{R}$ derivabile in $x \in X$; supponiamo $g(x) \neq 0$. Allora la funzione $1/g$ è definita in un intorna di $x \in X$, è derivabile in x e si ha*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \tag{17.24}$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(h+x)}{g(h+x)g(x)h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

e passando al limite per $h \to 0$ si conclude, ricordando che g è continua in x essendovi derivabile. □

Proposizione 17.3.10 (Derivata del quoziente)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $g : X \to \mathbb{R}$ derivabile in $x \in X$; supponiamo $g(x) \neq 0$. Se anche $f : X \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x \in X$ allora f/g, che è definita in un intorno di $x \in X$, è derivabile in x e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \tag{17.25}$$

Dimostrazione. Basta applicare la regola di derivazione del prodotto a $f/g = f(1/g)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

□

Proposizione 17.3.11 (Derivata di $\tan x$)**.**

$$\boxed{y = \tan x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} \tag{17.26}$$

Dimostrazione.

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

□

Proposizione 17.3.12 (Derivata di $\cot x$)**.**

$$\boxed{y = \cot x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)} \tag{17.27}$$

Dimostrazione.

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (\cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

□

Proposizione 17.3.13 (Derivata di $\tanh x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \tanh x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x} \tag{17.28}$$

Dimostrazione.

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

□

Proposizione 17.3.14 (Derivata di $\coth x$)**.**

$$\boxed{f(x) = \coth x \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x} \tag{17.29}$$

Dimostrazione.

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

□

17.3.1.3 Regole algebriche dei differenziali

Le regole per il calcolo di differenziali più elaborati sono le medesime di quelle delle derivate:

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x) \tag{17.30}$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x) \tag{17.31}$$

$$d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)} \tag{17.32}$$

Si noti infine che (analogamente a quanto avviene nelle derivate, come si constaterà):

$$\frac{df}{f} = d\log|f| = \text{differenziale logaritmico di } f \tag{17.33}$$

17.3.2 Derivata di funzione composta

17.3.2.1 Definizione

Proposizione 17.3.15 (Derivata di funzione composta)**.** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funzioni; supponiamo f derivabile in $x \in X$ e g derivabile in $y = f(x)$. Allora la composizione $g \circ f$ è derivabile in x e si ha*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)} \tag{17.34}$$

Osservazione 440. La 17.34 si chiama anche *regola della catena*.

DO: rivedere dimo- ione sul libro per x

Dimostrazione. Il rapporto incrementale di $g \circ f$ di punto iniziale x per la variazione h è

$$\frac{g \circ f(x+h) - g \circ f(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

Ora vorremmo spezzare tale rapporto incrementale come segue:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si noti che al secondo membro, il primo termine è proprio il rapporto incrementale di $g(f(x))$ nel punto x per l'incremento h; il secondo termine invece è il rapporto incrementale di $f(x)$.
Spezzarlo in quel modo è certamente possibile nel caso $f(x+h) \neq f(x)$; semplicemente si moltiplica e divide per $f(x+h) - f(x) \neq 0$.
Se definiamo la funzione $\gamma : Y \to \mathbb{R}$ (ossia che fa lo stesso tipo di lavoro di g)

$$\gamma(\eta) = \begin{cases} \dfrac{g(\eta) - g(f(x))}{\eta - f(x)} & \text{se } \eta \neq f(x) \\ g'(\eta) & \text{se } \eta = f(x) \end{cases}$$

notiamo che γ è continua in $f(x)$ (poiché limite destro e sinistro per $\eta \to f(x)$ coincidono con la derivata prima, ossia con il valore assunto dalla funzione in $\eta = f(x)$). Applicandola ad un input $\eta = f(x+h)$ (ossia ottenendo $\gamma \circ f(x+h)$):

$$\gamma \circ f(x+h) = \gamma(f(x+h)) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} & \text{se } f(x+h) \neq f(x) \\ g'(f(x+h)) & \text{se } f(x+h) = f(x) \end{cases}$$

Come si è osservato in precedenza il rapporto incrementale può essere spezzato come segue (ci si limita a riscrivere con la nuova funzione):

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \gamma \circ f(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se $f(x+h) \neq f(x)$ per un mero artificio algebrico; se invece $f(x+h) = f(x)$ entrambi i fattori al secondo membro sono nulli (poiché sono nulli i rispettivi numeratori), ma passando al limite per $h \to 0$ e usando il teorema sui limiti delle composizioni si conclude. □

Regola della catena e differenziali Usando la notazione di derivata come rapporto di differenziali ($f' = \frac{\delta f}{\delta x}$ e $g' = \frac{\delta g}{\delta f}$) la 17.34 acquista una forma più significativa:

$$\boxed{\frac{\delta g(f(x))}{\delta x} = \frac{\delta g(f(x))}{\delta f(x)} \cdot \frac{\delta f(x)}{\delta x}} \qquad \text{(come se } \delta f(x) \text{ si semplificasse)} \qquad (17.35)$$

la 17.35 esprime il fatto che il tasso di variazione di $g(f(x))$ rispetto a x è il prodotto dei tassi di variazione "intermedi" di $g(f(x))$ rispetto a $f(x)$ e di $f(x)$ rispetto a x.

Proposizione 17.3.16 (Composizione ad oltranza)**.** *L'estensione ai casi maggiormente composti è (ad esempio):*

$$\boxed{y = h(g(f(x))) \qquad y' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

e così via ricorsivamente.

Osservazione 441. Per usare questa regola (insieme alle altre dell'algebra delle derivate) occorre imparare a vedere una funzione complicata come composizione successiva di funzioni più semplici. Per individuare le componenti può essere utile immaginare come si calcola la funzione composta mediante un linguaggio di programmazione.

17.3.2.2 Applicazioni

Proposizione 17.3.17 (Derivata di $f(x)^{g(x)}$)**.** *Applicando la regola delle funzioni composte si può calcolare la derivata delle funzioni del tipo $y = f(x)^{g(x)}$, se le si riscrive come:*

$$y = e^{g(x)\cdot \log f(x)}$$

e risulta

$$\begin{aligned} y' &= e^{g(x)\log f(x)} \cdot \left\{ g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \\ &= [f(x)]^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \end{aligned}$$

Osservazione 442. Non vale la pena ricordarsi quest'ultima formula specifica; basta ricordarsi la trasformazione a base di esponenziale e logaritmo e procedere nella derivazione di funzione composta.

Esempio 17.3.1. Se $y = x^x$:

$$y' = (e^{x\log x})' = x^x \cdot (x\log x)' = x^x(\log x + 1)$$

Proposizione 17.3.18 (Derivata di $|f(x)|$)**.**

$$\boxed{y = |f(x)| \qquad y' = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \textit{se } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \textit{se } f(x) < 0 \end{cases}}$$

Osservazione 443. In generale ci aspettiamo che la funzione $|f(x)|$ presenti punti angolosi nei punti in cui $f(x)$ si annulla. Ad esempio la funzione $e^{|x+1|}$ ha un punto angoloso in $x = -1$.

Proposizione 17.3.19 (Derivata di $\log f(x)$)**.** *Se $y = \log f(x)$, con $f(x) > 0$ in base alla definizione della derivata di funzione composta si ha:*

$$\boxed{y = \log f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}} \tag{17.36}$$

Proposizione 17.3.20 (Derivata di $\log|f(x)|$)**.** *Se $y = \log|f(x)|$ si ha comunque:*

$$\boxed{y = \log|f(x)| \qquad y' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Osservazione 444. Per i logaritmi più elaborati può convenire applicare le proprietà dei logaritmi prima di procedere a derivazione (ad esempio spezzandoli in somme algebriche di logaritmi più semplici o portando fuori dal logaritmo eventuali esponenti).

Definizione 17.3.1 (Derivata logaritmica di $y = f(x)$)**.** La derivata logaritmica di una funzione è semplicemente la derivata del logaritmo della funzione; nel caso di una $f(x) > 0$

$$D(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Per una $f(x)$ generica con codominio $\in \mathbb{R}$ si usa

$$D(\log |f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

che si sostanzia nella medesima formula.

Osservazione 445. La derivata logaritmica approssima il *tasso di incremento relativo* della funzione f in seguito ad una variazione unitaria della variabile x (con approssimazione migliore tanto più $f(x)$ assomiglia ad una retta[2]).

Esempio 17.3.2. La derivata logaritmica di $y = x + 1$ per $x = 1$ è $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}$ e 0.5 (50%) è proprio l'incremento registrato dalla funzione nel passare da 2 a 3 (per x con incremento unitario che passa da 1 a 2).
Specularmente, se calcoliamo la derivata logaritmica per $x = -3$, dove $f(x) = -2$ si ha $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ e -50% e proprio il decremento della funzione passando da -2 a -1 (per x che passa da -3 a -2).

Osservazione 446 (Derivata logaritmica nel calcolo derivate). Riarrangiando la derivata logaritmica giungiamo alla definizione di funzione derivata come prodotto della funzione originaria per la derivata logaritmica:

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot D(\log |f(x)|)}$$

La formula di cui sopra (il simbolo di valore assoluto può esser omesso nel caso in cui $f(x)$ sia positiva) può agevolare in qualche caso il calcolo della derivata di una funzione.

Definizione 17.3.2 (Grafici in scala semilogaritmica)**.** Sono rappresentazioni grafiche di una funzione $f(x)$ dove sull'asse delle ascisse si collocano i valori di x mentre sulle ordinate quelli di $\log(f(x))$.

Osservazione 447. I grafici in scala semilogaritmica si impiegano quando si vuole visualizzare gli incrementi relativi oppure anche quando $f(x)$ cresce così rapidamente da richiedere una compressione della scala (ad esempio e^x in scala semilogaritmica coincide con la bisettrice del primo quadrante).

Definizione 17.3.3 (Grafici in scala logaritmica)**.** Nei grafici in *scala logaritmica* sia x che $f(x)$ vengono preprocessati da logaritmo prima di esser plottati. A questi grafici è legato il concetto di elasticità.

[2]Ovvero $f'' = 0$

Osservazione 448 (Elasticità). Per elasticità di una funzione in un punto, indica con $E(x)$, si intende la pendenza della retta tangente ad un grafico in scala logaritmica, ovvero:

$$E(x) = \frac{d\log(f(x))}{d\log(x)}$$

Essa rappresenta il tasso di variazione relativa di $f(x)$ rispetto a variazioni *relative* di x. Per trovarne l'espressione analitica osserviamo che, per la derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{d\log f(x)}{d\log x} \cdot \frac{d\log x}{dx}$$

ovvero si ha

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = E(x) \cdot \frac{1}{x}$$

da cui si ricava

$$E(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{17.37}$$

17.3.3 Derivata di funzione inversa

17.3.3.1 Definizioni

Teorema 17.3.21 (Derivazione di funzione inversa)**.** *Sia $f : X \to Y$ omeomorfismo; si supponga f derivabile nel punto $x_0 \in X$; allora $f^{-1} : Y \to X$ è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in Y$ se e solo se $f'(x_0) \neq 0$; ed in tal caso si ha:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{17.38}$$

Dimostrazione. Scriviamo il limite del rapporto incrementale per f^{-1} nel punto y_0 per una variazione di ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\varepsilon) - f^{-1}(y_0)}{\varepsilon}$$

questa è la derivata cui vogliamo giungere. Sfruttiamo il fatto che $y = f(x)$ effettuando un cambio di variabile: cambiamo limite mappando quello che avviene nell'insieme Y nel corrispondente insieme X (tramite la biiezione f). Sappiamo che $y_0 = f(x_0)$; sia $y_0 + \varepsilon = f(x_0 + h)$. Allora si ha che se $\varepsilon \to 0$, $h \to 0$ (ossia mano a mano che y si avvicina a y_0 allora x si avvicina a x_0): al numeratore la distanza $f^{-1}(y_0+\varepsilon) - f^{-1}(y_0)$ sarà mappata in X come $(x_0 + h) - x_0$, mentre il denominatore ε è mappato come $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Si giunge pertanto a

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Se quest'ultimo limite esiste finito la derivata di $f^{-1}(y_0)$ coincide con esso ossia con $1/f'(x_0)$; deve pertanto essere $(f'(x_0) \neq 0)$ altrimenti l'espressione diverge e il limite non esiste. □

Osservazione 449. Si faccia attenzione al fatto che nella formula di derivazione le derivate f' e $(f^{-1})'$ sono calcolate in due punti diversi (x_0 e y_0 rispettivamente): questa è la principale accortezza da avere nell'applicazione di questo teorema.

Osservazione 450. L'utilità del teorema 17.3.21 consiste nel fatto che permette di calcolare la derivata di f^{-1} anche in situazioni in cui non si sappia/riesca a scriverla esplicitamente (a patto che si conosca f).

Osservazione 451. Con la notazione di derivata come rapporto di differenziali, posto $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}} \tag{17.39}$$

Geometricamente questo sta a significare che i grafici di f e di g sono simmetrici rispetto alla bisettrice.

17.3.3.2 Applicazioni

Come applicazione, nel prosieguo sviluppiamo le derivate delle inverse delle funzioni trigonometriche.

Proposizione 17.3.22 (Derivata di arccos)**.** arccos *è derivabile in* $]-1,1[$ *e si ha*

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{17.40}$$

Dimostrazione. Se $y = \arccos x$ con $y \in [0, \pi]$, $x \in [-1, 1]$ si ha $x = \cos y$ e

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{\cos'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

al denominatore dell'ultima, per il seno dell'angolo che ha coseno x, sfruttiamo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: si ha $\sin^2 x + x^2 = 1$ e dunque si giunge a $\sin x = \pm\sqrt{1-x^2}$. Ma dato che l'angolo di interesse $y = \arccos x \in [0, \pi]$ il seno è positivo, pertanto si tiene la soluzione positiva e si ha che:

$$-\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

Proposizione 17.3.23 (Derivata di arcsin)**.** arcsin *è derivabile in* $]-1,1[$ *e:*

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{17.41}$$

Dimostrazione. Similmente se $y = \arcsin x$ con $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1, 1]$ si ha $x = \sin y$ e

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

al denominatore dell'ultima, per il seno dell'angolo che ha coseno x, sfruttiamo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: si ha $\cos^2 x + x^2 = 1$ e dunque si giunge a $\cos x = \pm\sqrt{1-x^2}$. Ma dato che l'angolo di interesse $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il coseno è positivo, pertanto si tiene la soluzione positiva e si ha che:

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

Proposizione 17.3.24 (Derivata dell'arcotangente)**.**

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}} \tag{17.42}$$

Proposizione 17.3.25 (Derivata dell'arcocotangente)**.**

$$\boxed{(\mathrm{arccot})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}} \tag{17.43}$$

Proposizione 17.3.26 (Derivata del settore coseno)**.**

$$\boxed{(\mathrm{sett}\cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1)} \tag{17.44}$$

Proposizione 17.3.27 (Derivata del settore seno)**.**

$$\boxed{(\mathrm{sett}\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}} \tag{17.45}$$

Proposizione 17.3.28 (Derivata del settore tangente)**.**

$$\boxed{(\mathrm{sett}\tanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1} \tag{17.46}$$

17.4 Derivate di ordine superiore al primo

Definizione 17.4.1 (Funzione derivata prima (ripasso))**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ funzione; supponiamo che $f'(x)$ esista per ogni $x \in X$. Si ottiene così una funzione $f' : X \to \mathbb{R}$, la funzione derivata prima, indicata anche con Df.

Definizione 17.4.2 (Derivata seconda)**.** Se la funzione derivata prima è derivabile in $c \in X$ si dice che la sua derivata è la *derivata seconda* di f in c, e si scrive $f''(c)$; se la derivata seconda esiste in tutto X, si può definire la funzione derivata seconda di f, $f'' : X \to \mathbb{R}$, indicata anche come $D^2 f$.

Osservazione 452. Similmente avviene per la derivata terza $f'''(x)$ o $D^3 f$.

Osservazione 453 (Notazione derivata m-esima). A partire dalla derivata quarta la derivata di ordine m si indica alternativamente con i simboli:

$$f^{(m)}(x) \qquad \frac{d^m f}{dx^m} \qquad D^m f$$

Definizione 17.4.3 (Funzione derivabile m volte in un punto)**.** f è m volte derivabile in un punto c del suo dominio X quando ammette, in un intorno di $c \in X$, tutte le derivate fino all'ordine $m-1$, e nel punto c la derivata $(m-1)$-esima è derivabile.

Definizione 17.4.4 (Funzione indefinitamente derivabile)**.** Una funzione si dice indefinitamente derivabile in X se ammette derivate di tutti gli ordini in X

Osservazione 454. Tutte le funzioni elementari sono indefinitamente derivabili all'interno dei loro domini

$$D^k(x^\alpha) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$$
$$D^k(e^x) = e^x$$
$$D^k(a^x) = (\log a)^k a^x$$
$$D^k\left(\frac{1}{a-x}\right) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$$

Definizione 17.4.5 (Funzione di classe C^1)**.** Se I è intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I, con $f' : I \to \mathbb{R}$ continua, si dice che f è di classe C^1 (letto: ci uno) in I.

Osservazione 455. L'insieme delle funzioni di classe C^1 su I si indica con $C^1(I)$, o $C^1(I, \mathbb{R})$ (in quest'ultimo modo se si vuole sottolineare che il codominio è $\mathbb{R}$).

Definizione 17.4.6 (Funzioni di classe C^m)**.** Le funzione che nell'intervallo I hanno derivate fino all'ordine m continue si dicono di classe C^m; il loro insieme si indica con $C^m(I)$ o $C^m(I, \mathbb{R})$

Definizione 17.4.7 (Funzioni di classe C^∞)**.** Le funzioni indefinitamente derivabili nell'intervallo I, che hanno continue anche tutte le derivate, si dicono di funzioni C^∞ (ci infinito). Si ha

$$C^\infty(I) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m(I)$$

Definizione 17.4.8 (Funzioni di classe C^0)**.** È conveniente considerare una funzione come derivata di ordine zero di se stessa; le funzioni di classe C^0 sono quelle con derivata di ordine zero continua, ossia sono le funzioni continue.

Osservazione 456. Se $X \subseteq R$, il simbolo $C^0(X) = C^0(X, \mathbb{R})$ indica l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ continue; spesso si scrive $C(X)$ o $C(X, \mathbb{R})$ omettendo l'indice 0 all'esponente.

Osservazione 457. Si noti che somme e prodotti di funzioni di classe C^m con $0 \le m \le \infty$ sono ancora funzioni di classe C^m.

Proposizione 17.4.1 (Derivata n-esima di un prodotto)**.** *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono n volte derivabili si ha*

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f D^k g$$

Osservazione 458. La formula ha stretta somiglianza con la formula del binomio di Newton, ed infatti si dimostra (lasciato al lettore) per induzione allo stesso modo, usando il passo $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ che è la regola di derivazione del prodotto.

Osservazione 459 (Derivata come operatore). La derivata è spesso pensata come un operatore, una funzione definita sulle funzioni di classe C^m, che a ciascuna $f \in C^m(I)$ fa corrispondere $Df = f' \in C^{m-1}(I)$. È molto importante osservare la linearità di tale operatore, espressa dalle formule note

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(\lambda f) = \lambda Df$$

Osservazione 460. Anche le composizioni di funzioni di classe C^m sono di classe C^m; limitandoci alla derivata seconda e terza di una composizione si hanno

$$(g \circ f)'' = (g'' \circ f)(f')^2 + (g' \circ f)f''$$
$$(g \circ f)''' = (g''' \circ f)(f')^3 + 3(g'' \circ f)(f'f'') + (g' \circ f)f'''$$

Osservazione 461. Se I e J sono intervalli di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to J$ è diffeomorfismo, l'inversa $f^{-1} : J \to I$ è di classe C^m su J se e solo se f è di calsse C^m su I; ciò si vede da quanto detto sulla classe delle composizioni, e dalla formula

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

dalla quale si può ricavare la derivata seconda della funzione inversa

$$(f^{-1})'' = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3}$$

Osservazione 462. L'utilizzo di derivate superiori alla prima avviene nello studio di funzioni (ove assume particolare importanza la derivata seconda che descrive la curvatura, ovvero la diversità da una retta, che ha derivata seconda nulla, della funzione in un punto/intervallo) e nell'approssimazione di funzioni, come si vedrà nel prosieguo.

17.5 Applicazioni delle derivate I: estremanti

Osservazione 463. Le derivate sono molto utili nella ricerca dei punti di estremo locale e nello studio della monotonia delle funzioni

17.5.1 Definizioni

Definizione 17.5.1 (Massimo e punti di massimo assoluto)**.** Se X è insieme ed $f : X \to \widetilde{\mathbb{R}}$ è funzione, il massimo di f su X, detto anche *massimo assoluto* di f, quando esiste, è il massimo di $f(X)$, cioè il massimo valore assunto da f. Altresì ogni $a \in X$ tale che $f(a) = \max f(X)$ è detto *punto di massimo assoluto.*

Definizione 17.5.2 (Minimo assoluto)**.** Definizioni speculari si danno per il *minimo assoluto* ed i *punti di minimo assoluto.*

Definizione 17.5.3 (Estremi ed estremanti assoluti)**.** Collettivamente minimo e massimo assoluti si chiamano *estremi assoluti*, ed i punti di minimo e massimo assoluti sono detti *estremanti assoluti.*

Definizione 17.5.4 (Estremanti locali)**.** Sia $D \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $c \in D$ si dice di *minimo* (*massimo*) *locale*, o *relativo*, per f se esiste un intorno U di $c \in D$ tale che c sia minimo (massimo) assoluto per $f_{|U}$. In altre parole si abbia:

$$f(c) \leq f(x) \quad (f(c) \geq f(x)) \qquad \forall x \in U$$

Definizione 17.5.5 (Estremanti locali stretti)**.** $c \in D$ è di minimo (massimo) locale *stretto* (o *proprio*, o *forte*) se esiste un intorno U di $c \in D$ tale che c sia l'unico punto di minimo (massimo) assoluto per $f_{|U}$. In altre parole si abbia:

$$f(c) < f(x) \quad (f(c) > f(x)) \qquad \forall x \in U \setminus \{c\}$$

Osservazione 464. Ovviamente tutti i punti di minimo (massimo) assoluto sono anche di minimo (massimo) locale, ma non viceversa.

Osservazione 465. Se un punto c è simultaneamente di minimo e di massimo locale per f, allora f è *localmente costante* in quel punto, cioè esiste un intorno di c su cui f è costante.

Osservazione 466 (Estremi ed estremanti in $\mathbb{C}$). Non ha senso parlare di massimo o minimo per funzioni a valori complessi; la nozione si da solo se è assegnato un ordine sul codominio (mentre $\mathbb{C}$ non ha ordine).

17.5.2 Ricerca

Lemma 17.5.1 (Minimo locale e derivate)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione, $c \in D$ di accumulazione per D. Se c punto è di minimo locale, la derivata sinistra $f'_-(c)$ se esiste è ≤ 0, mentre quella destra $f'_+(c)$, sempre se esiste è ≥ 0.*

Dimostrazione. Se c è di minimo locale esiste un intorno $[c-\delta, c+\delta]$ per cui

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{se } x \in [c-\delta, c[\cap D$$
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{se } x \in]c, c+\delta] \cap D$$

Passando al limite delle espressioni di cui sopra per $x \to c$ si conclude mediante il teorema del confronto. □

Lemma 17.5.2 (Massimo locale e derivate)**.** *Se c punto è di massimo locale, la derivata sinistra $f'_-(c)$ se esiste è ≥ 0, mentre quella destra $f'_+(c)$, sempre se esiste è ≤ 0.*

Dimostrazione. Analoga a quella del minimo. □

Teorema 17.5.3. *In un punto di estremo locale interno al dominio, di una funzione la derivata di tale funzione, se esiste, è nulla.*

Dimostrazione. Immediata dai lemma di cui sopra: la derivata esiste se coincidono derivate destra e sinistra. E quest'ultime possono coincidere solamente se sono entrambe uguali a 0 (sia per massimo che per minimo). □

Osservazione 467. Attenzione: l'annullarsi della derivata in un punto del dominio non implica che questo sia di estremo locale.

Esempio 17.5.1. La funzione $y = x^3$ è strettamente crescente e quindi priva di estremi locali, ma la sua derivata $y' = 3x^2$ è nulla in $x = 0$ (si tratta di un punto di flesso a tangente orizzontale).

Osservazione 468. Quindi: se la derivata cambia di segno attraversando il punto c si avrà un estremante; se invece la derivata non cambia di segno, la curva presenta, nel punto stazionario c un punto di *flesso a tangente orizzontale*

Osservazione 469. Una volta che si individua che in un punto la derivata prima è nulla, alternativamente allo studio del segno della derivata prima nelle vicinanze si possono desumere info su massimi e minimi dalla derivata seconda, se disponibile, come mostrato dal seguente teorema.

Teorema 17.5.4. *Sia c interno a $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione derivabile due volte in c; si supponga $f'(c) = 0$. Allora:*

- *se c è di minimo locale per f allora $f''(c) \geq 0$; e se $f''(c) > 0$ allora c è di minimo locale stretto per f;*
- *se c è di massimo locale per f, allora $f''(c) \leq 0$; e se $f''(c) < 0$ allora c è di massimo locale stretto per f*

Se $f''(c) = 0$, f è tre volte derivabile in c, ed $f'''(c) \neq 0$, allora c non è di estremo locale per f.

Dimostrazione. Mostriamo che se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ allora c è di minimo locale stretto per f. Poiché $f''(c) > 0$, il teorema della permanenza del segno mostra che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f'(x)}{(x-c)} = \frac{(f'(x) - f'(c))}{x-c} > 0$$

per $x \in [c-\delta, c+\delta] \setminus \{c\}$; la prima uguaglianza è giustificata dal fatto che l' $f'(x)$ che si è inserito è $= 0$, mentre la diseguaglianza deriva dalla permanenza del segno applicata al rapporto incrementale che definisce la derivata seconda. Dalla disuguaglianza segue che $f'(x) < 0$ (dato che il rapporto deve essere positivo) se $x - c < 0$, ossia per $c - \delta \leq x < c$; specularmente è $f'(x) > 0$ se $x - c > 0$, ossia se $c < x \leq x + \delta$. Quindi f è strettamente decrescente a sinistra di c, strettamente crescente a destra, e c è di minimo stretto locale per f.
Dimostrazione analoga si può effettuare per i punti di massimo locale stretto.
In un punto di minimo locale (non stretto) interno al dominio deve essere $f'' \geq 0$, dato che i punti di massimo locale stretto (dove $f'' < 0$) non sono anche di minimo locale.
Specularmente per i punti di massimo locale ($f''(x) \leq 0$). □

Aspetti operativi Per determinare massimi e minimi:

1. calcolare $f'(x)$ e se ne determina il dominio per individuare gli eventuali punti in cui la $f(x)$ è continua, ma non derivabile;
2. si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i valori di x per i quali la derivata si annulla;
3. si studia il segno di $f'(x)$ deducendo eventuali massimi e minimi (dove si ha un cambio di segno) e i flessi a tangente orizzontale oppure si calcola il valore $f''(x)$

Infine, nella ricerca degli estremi di una funzione può essere utile avvalersi delle seguenti proprietà (di facile verifica):

1. le funzioni $f(x)$ e $f(x)+k$, con $k \in \mathbb{R}$, assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x;
2. se $k > 0$, le funzioni $f(x)$ e $k \cdot f(x)$, assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x;
3. se $k < 0$, ad un massimo (minimo) di $f(x)$ corrisponde un minimo (massimo) di $k \cdot f(x)$;

4. se $f(x) \geq 0$ è una funzione positiva in tutti i punti di un intervallo, le funzioni $f(x)$ e $[f(x)]^2$ assumono i valori massimi e minimi per gli stessi valori di x.

17.6 Teoremi sulla derivabilità

17.6.1 Derivabilità in un punto e continuità della funzione

Teorema 17.6.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ funzione derivabile in $x \in X$. Allora f è continua*

Dimostrazione. Verifichiamo che la funzione derivabile in x soddisfa il criterio 15.1.1 di verifica della continuità e quindi è continua. Scriviamo solamente il numeratore del rapporto incrementale, e moltiplichiamo e dividiamo per h:

$$f(x+h) - f(x) = h\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al secondo membro abbiamo ottenuto il rapporto incrementale moltiplicato per h. Prendendo il limite di entrambi i membri per $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} h\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

il limite è 0 poiché al secondo membro abbiamo il prodotto di infinitesimo (h) per finito (dato che f è derivabile). □

Osservazione 470. Il viceversa non è necessariamente vero: infatti esistono funzioni (cuspidi o punti angolosi, ad esempio la funzione $|x|$) che sono continue in un punto, ma che in esso non sono derivabili. Questo accade quando il rapporto incrementale per $h \to 0$ o non ammette limite o ha limite infinito.
Si conclude pertanto che la continuità di una funzione è condizione necessaria, ma non sufficiente per la sua derivabilità.

17.6.2 Derivabilità in un intervallo

Vediamo le proprietà che derivano dalla derivabilità della funzione in un intervallo, facendo alcune premesse necessarie.

17.6.2.1 Teorema di Rolle

Teorema 17.6.2. *Ogni funzione continua trasforma compatti (ossia insiemi chiusi e limitati) in compatti, ossia se C è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, ed $f : C \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f(C)$ è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. De Marco 1, Pag 305 □

Corollario 17.6.3 (Teorema di Weierstrass)**.** *Se C è compatto non vuoto, ed f è continua su C, allora f ha massimo e minimo assoluti in C.*

Dimostrazione. I sottoinsiemi chiusi limitati e non vuoti di $\mathbb{R}$ hanno massimo e minimo, quindi $f(C)$ ha massimo e minimo. □

Teorema 17.6.4 (Teorema di Rolle (versione topologica))**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia f funzione continua su I a valori reali. Se f assume lo stesso valore in due distinti punti $a, b \in I$, allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ che è di estremo locale per $f \in I$.*

Dimostrazione. La restrizione di f all'intervallo $[a, b]$ ha massimo e minimo assoluti (per il teorema di Weierstrass); se nessun punto di massimo assoluto fosse interno ad $[a, b]$ il massimo assoluto sarebbe $f(a) = f(b)$; e se nessun punto di minimo assoluto fosse interno, il minimo assoluto sarebbe $f(a) = f(b)$; ma allora f sarebbe costante in $[a, b]$, nel qual caso tutti i punti di $]a, b[$ sono di estremo, locale ed assoluto, per $f_{|[a,b]}$. È chiaro poi che un estremo assoluto di $f_{|[a,b]}$ interno ad $[a, b]$ è di estremo locale per f in I, per la definizione stessa di estremo locale: $[a, b]$ è intorno di ciascuno dei suoi punti interni. □

Teorema 17.6.5 (Teorema di Rolle)**.** *Sia $f(x)$ una funzione: continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; derivabile in (a, b) e che assume valori eguali negli estremi a e b dell'intervallo, ovvero $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui la derivata della funzione è nulla:*

$$\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata considerando la versione topologica del teorema, nonché il teorema 17.5.3: ossia se dal fatto che f continua assuma lo stesso valore in a, b discende che esiste un estremo locale tra loro, e se in corrispondenza di questi la derivata prima è nulla, allora se $f(a) = f(b)$ la derivata si annulla da qualche parte tra a e b. □

Osservazione 471*.* Pertanto se valgono le ipotesi del teorema, esiste almeno un punto interno all'intervallo $[a; b]$ in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle x.

Corollario 17.6.6 (Derivata prima e monotonia)**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in tutto l'interno di I. Se la derivata di f non è mai nulla all'interno di I, allora f è strettamente monotona e la derivata di f è sempre strettamente positiva o strettamente negativa.*

Dimostrazione. Dato che $f'(x) \neq 0$ non esistono 2 punti $a, b \in I$ tali che $f(a) = f(b)$, perché se ci fossero per il teorema di Rolle dovremmo avere un $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$. Ma così non è e quindi $f(a) \neq f(b)$ per $a \neq b$, ossia la funzione è iniettiva.
Sappiamo poi che le funzioni continue su intervalli e iniettive sono strettamente monotone (omeomorfismo tra intervalli, De Marco pag 294). Ad esempio nel caso f sia strettamente crescente, tutti i rapporti incrementali di f sono strettamente positivi, e pertanto la derivata $f'(x)$, limite di quantità positive, è maggiore o uguale a zero per il teorema del confronto; per ipotesi non è zero e quindi è strettamente positiva. Specularmente si ha nel caso di f strettamente decrescente. □

Osservazione 472*.* Dal teorema di Rolle possiamo affermare che se una funzione è continua in un intervallo I e ha derivata nulla in tutti i punti interni di I allora è costante in quell'intervallo.

17.6.2.2 Teorema di Lagrange (o del valore medio)

Osservazione 473. Il teorema di Lagrange può essere visto come una generalizzazione di quello di Rolle, nel caso i due estremi dell'intervallo non siano uguali.

Teorema 17.6.7 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia $f(x)$ una funzione: continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$; derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto*[3] *$\xi \in (a, b)$, tale che risulti:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{17.47}$$

Osservazione 474. La 17.47 esprime l'uguaglianza tra il rapporto incrementale della funzione relativo all'intervallo $[a; b]$ e la derivata della funzione in un opportuno punto interno all'intervallo stesso; in altre parole dice che vi è un punto ξ in cui la pendenza della retta tangente (la derivata) è uguale alla pendenza della retta passante da entrambi gli estremi.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

ossia la differenza in $[a, b]$ tra la funzione f e la retta passante tra $f(a)$ e $f(b)$. Chiaramente g è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b), ed è nulla negli estremi $g(a) = g(b) = 0$. Per il teorema di Rolle allora, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $g'(\xi) = 0$. Ma, effettuando la derivazione di g si ha che

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

allora si ha

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 17.6.8. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile in D con derivata identicamente nulla: allora f è costante su ciascun intervallo contenuto in D.*

Dimostrazione. Sia I intervallo contenuto in D; dati $x_1, x_2 \in I$ mostriamo che $f(x_1) = f(x_2)$ (ossia f è costante in I). Si può applicare il teorema del valore medio ad $f_{|[x_1,x_2]}$ dato che $[x_1, x_2] \subseteq I \subseteq D$; ne segue che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

con $\xi \in (x_1, x_2)$; ed essendo $f'(\xi) = 0$ (per ipotesi) si ha $f(x_1) = f(x_2)$, come voluto dato che:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

□

[3] Ma i punti possono esser anche più di uno

Osservazione 475. Attenzione: non è vero che f è costante in tutto D: f è costante su ogni intervallo contenuto in D, potendo le costanti essere diverse sui vari intervalli.

Corollario 17.6.9. *Due funzioni derivabili su un intervallo I con la stesa derivata, differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Si applica quanto visto in precedenza alla differenza tra due funzioni, che ha derivata nulla. Ossia se $f'(x) = g'(x)$ allora $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$; pertanto $f - g$ è costante. □

Corollario 17.6.10 (Monotonia e segno della derivata (funzioni crescenti))**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora f è monotona crescente in I se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$; ed è strettamente crescente solo quando non vi è un intervallo $[a, b]$ con $a \neq b$ dove è sempre $f' = 0$.*

Dimostrazione. La funzione f è crescente in I e solo se tutti i rapporti incrementali di f sono ≥ 0; ne segue che la derivata di f, dove esiste, non può che essere non negativa (teorema del confronto). E se $a, b \in I$ con $a < b$ il teorema del valore medio mostra che si ha

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

per un conveniente $\xi \in (a, b)$; essendo $f'(\xi) \geq 0$ si ha $f(b) \geq f(a)$ e si conclude sulla crescenza in senso lato.
Dopodiché una funzione crescente è strettamente crescente se e solo se non ha tratti di costanza, cioè se e solo se non esistono $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tali che sia $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$; in tali tratti $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, e si conclude □

Osservazione 476. Specularmente avviene nel caso di funzione decrescente.

Corollario 17.6.11. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. La funzione f è lipschitziana in I se e solo se f' è limitata in I; e la migliore costante (intesa come maggiore) di Lipschitz per f è $\sup\{|f'(x)| : x \in I\}$.*

Dimostrazione. Posto $l = \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$, il teorema del valore medio mostra che l è costante di Lipschitz per f: dati $x_1, x_2 \in I$ si ha

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$$

(ossia la differenza verticale di f nel passaggio da x_1 a x_2 è pari all'incremento medio $f'(\xi)$ per l'ampiezza dell'intervallo $(x_1 - x_2)$) con $\xi \in (x_1, x_2)$, per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$.
Pertanto

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_1 - x_2| \leq l\,|x_1 - x_2|$$

in cui si è aggiunto solamente il valore assoluto all'equazione, e la diseguaglianza deriva per ipotesi, dato che $l = \sup|f'(x)| : x \in I$. Pertanto f è lipschitziana ed ha l come possibile costante di Lipschitz. Si lascia al lettore la cura di completare la dimostrazione. □

TODO: Qui c'e da finire la dimostrazione?

17.6.2.3 Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Osservazione 477. Il teorema di Cauchy è una generalizzazione di Lagrange a curve del piano non più solo cartesiane, grafici cioè di funzioni di una sola variabile, ma qualsiasi (come si vedrà in seguito). La dimostrazione seguente, che qui piove dal cielo, è la motivata.

Teorema 17.6.12 (Teorema di Cauchy). *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, e derivabili in (a, b); si assuma inoltre che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ Allora esiste almeno un punto $\xi \in (a, b)$ nel quale*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{17.48}$$

Osservazione 478. Si chiama anche teorema degli accrescimenti finiti perché esprime che, se due funzioni soddisfano le ipotesi di cui sopra, il rapporto tra i loro incrementi nell'intervallo considerato uguaglia il rapporto tra le loro derivate, calcolate in un dato punto interno all'intervallo.

Dimostrazione. Qui una dimostrazione caduta dall'altro che troverà motivazione in seguito. Considerando la funzione ausiliaria $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

chiaramente questa funzione è continua in $[a, b]$ e derivabile in $[a, b]$ essendo anzi

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

ma dato che $h(a) = h(b) = 0$, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $h'(\xi) = 0$. In corrispondenza di questo valore si ha che

$$0 = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi)$$

Ora si sfrutta l'ipotesi che per $x \in (a, b)$ (e quindi anche per ξ) si ha che $g'(x) \neq 0$; pertanto la funzione non è mai costante e quindi $g(b) \neq g(a)$ per forza, ossia anche $g(b) - g(a) \neq 0$. Dividendo dunque per $g(b) - g(a)$ si ha

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) - f'(\xi)$$

per cui

$$f'(\xi) = g'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

17.7 Derivate: applicazioni ulteriori

17.7.1 Calcolo di limiti: regola di De L'Hopital

17.7.1.1 La regola

Teorema 17.7.1 (Regola di De L'Hopital). *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ avente c come accumulazione; siano $f, g : I \setminus \{c\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ derivabili in $I \setminus \{c\}$; si supponga $g'(x) \neq 0$*

per ogni $x \in I \setminus \{c\}$. *Se il limite del rapporto delle funzioni si presenta nelle forme:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \vee \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{qualsiasi cosa}}{\infty}$$

ma esiste in $\widetilde{\mathbb{R}}$ *il limite del rapporto tra le derivate prime:*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste anche il limite $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e si ha che*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazione 479. Ovvero il limite del rapporto di due funzioni che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$[4] è uguale al limite del rapporto delle loro derivate (se questo esiste).

Dimostrazione. Consideriamo separatamente i limiti destro e sinistro; ci limitiamo al caso di x tendente a c dalla sinistra (l'altro è analogo). Il limite l di $f'(x)/g'(x)$ può essere finito oppure $\pm\infty$; consideriamo dapprima il caso $l \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $a_\varepsilon \in I$ tale che sia $|f'(x)/g'(x) - l| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in [a_\varepsilon, c[$. Per ogni coppia di valori $x, u \in [a_\varepsilon, c[$ con $x \neq u$ si ha, in base al teorema di Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

per un $\xi \in (x, u)$. Pertanto poiché $|f'(x)/g'(x) - l| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in [a_\varepsilon, c[$ si ha che

$$-\varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \leq \varepsilon$$

da cui

$$l - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq l + \varepsilon$$

psempre per $x \in [a_\varepsilon, c[$, quindi anche per ξ vale

$$l - \varepsilon \leq \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq l + \varepsilon$$

Per quel valore ξ compreso tra x e u con $x, u \in [a_\varepsilon, c[$ per i quali si ha (per Cauchy)

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)}$$

pertanto

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} \leq l + \varepsilon \tag{17.49}$$

per ogni $x, u \in [a_\varepsilon, c[$ con $x \neq u$. Distinguiamo ora i due casi.

Nel caso $\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}}$, facendo tendere u a c nella 17.49 il rapporto tende a

[4] Infinito anche al numeratore è il caso più tipico di "qualsiasi cosa".

$f(x)/g(x)$, dato che per $u \to c$, $f(u) \to 0$ e $g(u) \to 0$, alla luce del fatto che $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$. Per il teorema del confronto, le disuguaglianze si mantengono al limite, quindi

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \varepsilon$$

per ogni $x \in [a_\varepsilon, c[$ come si voleva.

Nel caso $\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{qualsiasi cosa}}{\infty}}$, cambiando (se occorre) il segno al numeratore ed al denominatore si può supporre che $g'(x) > 0$ (se g è decrescente si raccoglie un segno e lo si sposta in f in maniera che g sia crescente), e quindi g strettamente crescente, e $g(x) \to +\infty$ per $x \to c^-$. Se $a_\varepsilon \leq u < x < c$ dalla 17.49 si ha moltiplicando i tre membri per $g(x) - g(u) > 0$ (dato che g è crescente e $u < x$, quindi $g(u) < g(x)$):

$$(l - \varepsilon)(g(x) - g(u)) \leq f(x) - f(u) \leq (l + \varepsilon)(g(x) - g(u))$$

e si può supporre $g(x) > 0$, dato che $g(x)$ tende a $+\infty$; dividendo per $g(x)$ si ha

$$(l - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(x)} \leq (l + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right)$$

$$(l - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) + \frac{f(u)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq (l + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) + \frac{f(u)}{g(x)}$$

Tenendo fisso u e facendo tendere x a c, il primo e l'ultimo membro della doppia disuguaglianza scritta sopra tendono a $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$ rispettivamente. Essendo $l - 2\varepsilon < l - \varepsilon$ ed $l + \varepsilon < l + 2\varepsilon$, per la permanenza del segno esiste b_ε, con $a_\varepsilon < b_\varepsilon < c$ tale che se $b_\varepsilon \leq x < c$ si ha

$$l - 2\varepsilon < (l - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) + \frac{f(u)}{g(x)}$$

nonché

$$(l + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right) + \frac{f(u)}{g(x)} < l + 2\varepsilon$$

per cui se $b_\varepsilon \leq x < c$ si ha

$$l - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + 2\varepsilon$$

e la conclusione è raggiunta.

Se il limite è $+\infty$ basta tenere le disuguaglianze di sinistra, interpretando l come un numero reale arbitrario, e se il limite è $-\infty$ bastano le disuguaglianze di destra. □

Osservazione 480. Attenzione: se il limite di f'/g' non esiste, nulla si può affermare sul limite di f/g; il particolare non è lecito concludere che non esiste nemmeno il limite di f/g.

Osservazione 481 (Indicazioni pratiche). Talvolta la regola va applicato più volte consecutivamente: può essere infatti che anche il limite del rapporto tra le derivate delle due funzioni dia ancora una delle due forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. In tal caso, se sono anche qui valide le ipotesi del teorema, si potrà applicare nuovamente la regola di De L'Hopital (con le derivate seconde) e così via finché si giunge ad un risultato non indeterminato.

Osservazione 482 (Indicazioni pratiche). La regola di De l'Hopital è utile ma va applicata solo se effettivamente semplifica la vita.
Per usare efficacemente la regola, è utile talvolta fare qualche passaggio preliminare (come una stima asintotica o un cambio di variabile) in modo che la successiva applicazione della regola effettivamente semplifichi l'espressione.

Esempio 17.7.1. Ad esempio con

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

il rapporto delle derivate è

$$\frac{e^{-1/x}(1/x^2)}{1} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

più complicato del precedente agli effetti del calcolo del limite; ulteriori derivazioni non fanno che aumentare il grado al denominatore. Il cambiamento di variabile $x = 1/t$ pone invece il limite nella forma semplice da risolvere.

17.7.1.2 Applicazioni utili e corollari

Osservazione 483 (Calcolo dei limiti per altre forme indeterminate). È possibile ricorrere all'applicazione della regola di De L'Hopital anche quando, nella ricerca di alcuni limiti, si perviene alle forme indeterminate del tipo:

$$[0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0] \quad [1^\infty]$$

Si dovrà con opportuni accorgimenti trasformare la funzione di cui si vuole calcolare il limite in modo che questa si riduca alle forme prima considerate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Proposizione 17.7.2 (Criterio sufficiente per derivabilità)**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua in tutto I e derivabile in $I \setminus \{c\}$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to c} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora f è derivabile in c, con $f'(c) = l$.

Dimostrazione. Basta scrivere il limite del rapporto incrementale e osservare che per la continuità di f in c dice che siamo in un caso $0/0$ ed applicare la regola di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{0}{0}$$

Applicando de l'Hopital

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{1} = f'(x)$$

Pertanto se $f'(x)$ esiste allora coincide con il limite del rapporto incrementale, osia la funzione è derivabile e quindi continua. □

Osservazione 484. La proposizione 17.7.2 esprime una condizione sufficiente, ma non necessaria per la derivabilità; infatti se non fossero soddisfatte le ipotesi del teorema, la funzione potrebbe essere ugualmente derivabile.

Proposizione 17.7.3 (Limiti notevoli: confronto di infiniti)**.** *Si ha che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{17.50}$$

Dimostrazione. Calcolando il limite applicando de L'Hopital con

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha}$$

Il limite è nullo $\forall\alpha > 0$. □

Osservazione 485. Questa, oltre a costituire un limite notevole, mostra che, per $x \to +\infty$ il logaritmo in base e è un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza di x a esponente positivo (anche alla 1) e pertanto non esiste un numero che ne esprima l'ordine di infinito.

Osservazione 486. La proprietà esposta è valida anche (come si può verificare) per $\log_a x$ con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Proposizione 17.7.4 (Limiti notevoli: confronto di infiniti (2))**.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{17.51}$$

Dimostrazione. Analoga, applicando la regola di de l'Hopital. □

Osservazione 487. Anche questa, oltre a costituire un limite notevole, mostra che per $x \to +\infty$, l'esponenziale e^x è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di x a esponente positivo e pertanto non esiste un numero che ne esprima l'ordine di infinito.

Osservazione 488. La proprietà ora esposta risulta vera, come si può verificare, anche per la funzione a^x con $a > 1$.

17.7.2 Studi di funzione: concavità e punti di flesso

17.7.2.1 Definizioni

Definizione 17.7.1 (Funzione convessa e strettamente convessa in un intervallo)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ funzione. Sia I un intervallo di X. Si dice che f è convessa in I se per ogni coppia di punti $a, b \in I$ vale la disuguaglianza per ogni $x \in (a, b)$:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{17.52}$$

ossia f sta sotto la retta che congiunge a e b.
Si dice che la funzione è strettamente convessa se la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto.

Definizione 17.7.2 (Funzione concava e strettamente concava in un intervallo)**.** Specularmente si ha che la funzione è concava se

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{17.53}$$

ossia f sta sopra la retta che congiunge a e b, e strettamente concava se la disuguaglianza è verificata in senso stretto.

Osservazione 489. Una funzione può essere sia concava che convessa in un intervallo I se si ha

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ossia il suo grafico coincide con la retta passante tra $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Proposizione 17.7.5. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ funzione e sia I intervallo di X; sia f continua in X e derivabile all'interno di I. Allora f è convessa (rispettivamente concava) in I se e solo se f' è crescente (decrescente) in I (quindi $f'' \geq 0$ o rispettivamente ≤ 0) ed è strettamente convessa (concava) se e solo se f' è strettamente crescente (decrescente).*

Dimostrazione. Partiamo supponendo f' crescente all'interno di I e dimostriamo che f è convessa. Fissati $a, b \in I$, e supponiamo $a < b$ consideriamo la differenza tra la funzione e la retta passante per a, b:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right) \qquad x \in [a, b]$$

la differenza è nulla agli estremi $h(a) = h(b) = 0$; sia c interno ad $[a, b]$ punto dove la differenza in valore assoluto è massima ossia $h'(c) = 0$; c esiste per il teorema di Rolle. La derivata della differenza

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e quindi anche h' è crescente in (a, b) (dato che il secondo addendo è una costante e $f'(x)$ cresce in (a, b)); ne segue (dato che è crescente e $h'(c) = 0$) che $h'(x) \leq 0$ per $a < x < c$, mentre $h'(x) \geq 0$ per $c < x < b$. Pertanto h è decrescente in $[a, b]$ e quindi $0 = h(a) \geq h(x)$ per $a < x \leq c$, ed è crescente in $[c, b]$ e quindi $h(x) \leq h(b) = 0$ per $c \leq x < b$; ne segue $h(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e pertanto

$$h(x) \leq 0 \iff f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

come si voleva si giunge alla definizione di funzione convessa.
È facile provare l'ulteriore affermazione sulla stretta convessità: le ultime disuguaglianze scritte sono strette se f' è strettamente crescente.

In secondo luogo, dati $a, b \in I$ con $a < b$ proviamo che se f è convessa allora si ha $f'(a) \leq f'(b)$ (ossia f' è crescente); scriviamo ancora la differenza

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$$

per ipotesi (f convessa) si ha che $g(x) \leq 0$ dato che

$$f(x) \leq \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$$

La derivata della differenza è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ed osserviamo che deve essere $g'(a) \leq 0$: se fosse $g'(a) > 0$ (g crescente in a), essendo $g(a) = 0$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $g(x) > 0$ per $a < x < a + \delta$ (permanenza del segno applicata a $(g(x)-g(a))/(x-a)$) ossia da qualche parte, se crescente g sarebbe positiva cosa che contro l'ipotesi $g(x) \leq 0$ per $x \in (a, b)$. Similmente deve essere $g'(b) \geq 0$.
Da $g'(a) \leq 0$ si ha:

$$f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \iff f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Similmente da $g'(a) \geq 0$ si ha:

$$f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \iff f'(b) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Complessivamente quindi si ha che :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

che mostra la crescenza di f' se si guarda il primo e il terzo membro della disuguaglianza ($f'(a) \leq f'(b)$), cvd.
Se poi f è strettamente convessa, ed f' non fosse strettamente crescente, esisterebbero $a, b \in I$ con $a < b$ per cui sarebbe

$$f'(a) = f'(x) = f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b]$$

la funzione g sarebbe allora costante in $[a, b]$ e quindi f coinciderebbe in $[a, b]$ con la funzione

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

contraddicendo la stretta convessità di f. □

Corollario 17.7.6 (Legame tra derivata seconda e convessità/concavità)**.** *Nelle ipotesi di 17.7.5, se in più f è due volte derivabile all'interno di I, essa è convessa (concava) in I se e solo se la derivata seconda è positiva (negativa) all'interno di I; ed è strettamente convessa (concava) se e solo se la derivata seconda, oltre ad essere positiva (negativa) si annulla solo su un insieme privo di punti interni.*

Dimostrazione. Basta ricordare la condizione di monotonia per f' espressa con il segno della sua derivata prima f'' □

Definizione 17.7.3 (Punti di flesso)**.** Diciamo che un punto c interno al dominio di una funzione f è punto di flesso per f se in esso la convessità di f cambia verso; se esiste cioè un intorno $[c - \delta, c + \delta]$ contenuto nel dominio di f tale che f sia convessa in $[c - \delta, c]$ e concava in $[c, c + \delta]$ o viceversa.

Osservazione 490 (Indicazioni per la ricerca di flessi). Per la ricerca dei punti di flesso, sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I tale che:

1. f sia due volte derivabile, con derivata seconda continua, sia un intorno sinistro $I_s \subset I$ sia in un intorno destro $I_d \subset I$ di un punto interno a I

2. $f''(x)$ assuma nell'intorno sinistro I_s valori di segno opposto a quelli che assume nell'intorno destro I_d
3. in $x = c$ esiste la derivata prima $f'(x)$, finita o infinita

allora $x = c$ è un punto di flesso per la funzione $f(x)$. Il punto di flesso, se ...

- $f'(c) \neq 0$ ha tangente obliqua;
- $f'(c) = 0$ ha tangente orizzontale;
- $f'(c) = \infty$ ha tangente verticale.

Esempio 17.7.2. Data la funzione gaussiana $G_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$G_\sigma(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{17.54}$$

con $\sigma > 0$ costante, trovarne crescenza, decrescenza, punti di massimo e minimo locale ed assoluto, convessità e flessi.
La funzione è pari ed è sempre strettamente positiva. I limiti per $x \to \pm\infty$ sono chiaramente nulli. La derivata prima è

$$\begin{aligned} G'_\sigma(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right)' \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot 2x \\ &= -\frac{xe^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

strettamente positiva se $x < 0$, strettamente negativa se $x > 0$; la funzione è strettamente decrescente su $[0, +\infty[$, strettamente crescente su $]-\infty, 0]$; 0 è quinti l'unico punto di massimo assoluto, dove la funzione vale $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. La derivata seconda è

$$\begin{aligned} G''_\sigma(x) &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(xe^{-x^2/2\sigma^2}\right)' \\ &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(e^{-x^2/2\sigma^2} + xe^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot 2x\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{x^2 \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - x^2 \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^2}\right) \\ &= (x^2 - \sigma^2)\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Notare che $\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}$ è sempre positivo quindi:

- $G''_\sigma(x) > 0$ se $x^2 - \sigma^2 > 0 \iff (x-\sigma)(x+\sigma) > 0$ ovvero se $x > \sigma$ o $x < \sigma$; pertanto su $]-\infty, -\sigma[$ e $]\sigma, +\infty[$, e su tali intervalli G_σ è strettamente convessa;

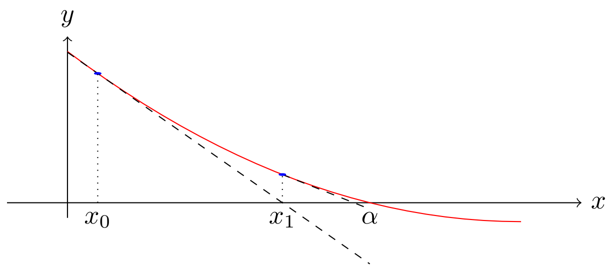


Figura 17.1: Metodo di Newton

- $G''_\sigma(x) < 0$ se $x^2 - \sigma^2 < 0$ quindi per $-\sigma < x < \sigma$, ossia per per $|x| < \sigma$; in tale intervallo G_σ è quindi strettamente concava.

Il valore di G_σ nei punti di flesso, che sono $\pm\sigma$ è $1/\sigma\sqrt{2\pi e}$.

17.7.3 Risoluzione approssimata di equazioni

Risolvere una equazione del tipo $f(x) = 0$ equivale a cercare le intersezioni del grafico di f con l'asse x. Qualora vi sia una unica soluzione $x = \alpha$ ma la determinazione risulti difficile per via analitica il metodo di Newton mostrato in seguito permette di ottenere comunque il risultato in maniera iterativa e via via più precisa.

Osservazione 491 (Idea dell'algoritmo). L'idea è quella di costruire una successione definita in maniera ricorsiva nella quale si assegna arbitrariamente il primo termine x_0 e si definisce la regola con cui calcolare x_{n+1} a partire da x_n qualunque sia n. Dobbiamo costruire la serie in maniera x_n che converga verso α (figura 17.1).

Osservazione 492 (Un primo sviluppo). Partendo da un certo x_0 arbitrario, ad esempio $x_0 = a$, sostituiamo alla curva f la retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$, ovvero

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dopodiché troviamo il punto di intersezione di questa con l'asse x risolvendo

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

in funzione di x si ottiene il secondo punto della successione x_1, ossia:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

che corrisponde al punto di intersezione della tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ con l'asse delle x. Si nota che x_1 è più vicina ad α rispetto a x_0. Procedendo ricorsivamente in questo modo si giunge alla regola generale:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{17.55}$$

Nel grafico si vede che x_n converge ad α.

Teorema 17.7.7. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in $[a, b]$ e supponiamo che:*

- *il segno della funzione sia discorde negli estremi dell'intervallo*

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

- *derivata prima e seconda $f'(x)$ e $f''(x)$ abbiano segno costante in $[a, b]$. La condizione sta a significare che la funzione è monotona e presenta la medesima concavità/convessità su tutto l'intervallo considerato. È una condizione solo apparentemente restrittiva; è in generale soddisfatta se si sceglie un intervallo $[a, b]$ abbastanza piccolo.*

A questo possiamo avere due casi che si differenziano solo per il punto di partenza dell'algoritmo:

1. *se*

$$f(a) \cdot f''(a) > 0$$

ovvero se la funzione è monotona decrescente con concavità verso l'alto o monotona crescente con concavità verso il basso, definiamo per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{17.56}$$

Esiste uno e un sol punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$ e la successione converge a c per difetto;

2. *se invece*

$$f(b) \cdot f''(b) > 0$$

ovvero se la funzione è monotona decrescente con concavità verso basso o monotona crescente con concavità verso l'alto, la successione

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

converge a c per eccesso.

Dimostrazione. Sul fatto che converga effettivamente alla radice vedi Bramanti 1 a pag 223. □

Esempio 17.7.3. Considerando l'equazione

$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

Considerazioni grafiche connesse alle due funzioni di cui è formata ($g(x) = e^x$ ed $h(x) = x$) attraverso una sottrazione suggeriscono che l'intersezione con gli assi dovrebbe trovarsi nell'intervallo $[0, 1]$), in quanto la funzione è continua e di segno opposto negli estremi 0 e 1 ($f(0) = 1 > 0$ e $f(1) < 0$). Si ha che:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \quad \text{in } [0, 1]$$
$$f''(x) = e^{-x} > 0 \quad \text{in } [0, 1]$$

La successione da impostare in questo caso è

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1} = \frac{x_n + 1}{1 + e^{x_n}} \end{cases}$$

Usando la calcolatrice si trova

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= 0.5663\ldots \\ x_3 &= 0.5671\ldots \\ x_4 &= 0.5671\ldots \end{aligned}$$

Si vede che già dopo 4 iterazioni che la radice si inizia a stabilizzare su 0.5761

17.7.4 Approssimazione di funzioni

17.7.4.1 Funzioni con contatto superiore a m

Definizione 17.7.4 (Funzioni con contatto di ordine superiore ad m)**.** Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, sia $c \in I$; siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni e $m \in \mathbb{N}$. Si dice che f e g hanno in c un contatto di ordine superiore ad m se, per $x \to c$:

$$f - g \in o_c((x - c)^m)$$

Osservazione 493. Avere in c un contatto superiore a 0 significa semplicemente dire che $f - g \in o_c(1)$, ossia è infinitesima per $x \to c$.

Osservazione 494. Conveniamo altresì che essere zero volte derivabile in c voglia dire continua in c.

Lemma 17.7.8. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $c \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni e $m \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f e g siano derivabili m volte in c. Allora f e g hanno in c un contatto di ordine superiore ad m se e solo se f e g coincidono in c, assieme con le loro derivate fino all'ordine m, ossia*

$$f(c) = g(c), \quad f'(c) = g'(x), \quad \ldots, \quad f^{(m)}(c) = g^{(m)}(c) \tag{17.57}$$

Dimostrazione. Posto $h = f - g$, h è m volte derivabile in c poiché somma algebrica di funzioni che sono tali; mostriamo che $h \in o_c((x - c)^m)$ se e solo se $h(c) = h'(c) = \ldots = h^{(m)}(c) = 0$ (altro modo di dire $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ per $0 \le k \le m$).
Procediamo per induzione su m: partendo da $m = 0$, se $h(c) = 0$ allora $h \in o_c(1)$ è verificata. Supponiamo il teorema vero per m e proviamolo per $m + 1$; lo facciamo dimostrando entrambi i versi dell'implicazione.
Essendo $h \in o_c((x - c)^m)$, per ipotesi si ha $h(c) = \ldots = h^{(m)}(c) = 0$. Ne segue che nel calcolare il limite del rapporto per verificare che $h(x)$ sia $o_c((x - c)^{m+1})$ si possa applicare m volte la regola di de l'Hopital, ottenendo

$$\lim_{x \to c} \frac{h(x)}{(x - c)^{m+1}} = \ldots = \lim_{x \to c} \frac{h^{(m)}(x)}{(m + 1)!(x - c)} = \frac{1}{(m + 1)!} \cdot \lim_{x \to c} \frac{h^{(m)}(x)}{(x - c)}$$

ma dato che $h^{(m)}(c) = 0$ possiamo anche scrivere

$$= \frac{1}{(m + 1)!} \cdot \lim_{x \to c} \frac{h^{(m)}(x) - h^{(m)}(c)}{(x - c)}$$

dove al secondo fattore abbiamo il limite del rapporto incrementale di $h^{(m)}$ ossia la derivata $m+1$-esima. Pertanto:

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)}{(x-c)^{m+1}}=\frac{h^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

ed essendo che il primo membro ha limite nullo (per l'ipotesi induttiva) e si conclude che anche il limite del secondo sia nullo, ovvero la derivata $m+1$-esima di h sia nulla (come volevasi) .
Per mostrare l'implicazione inversa (dall'annullarsi delle derivate si giunge all'avere contatto)basta applicare il ragionamento su svolto con la regola di de l'Hopital. □

Osservazione 495. Il lemma quindi dice che due funzioni hanno contatto via via maggiore, ossia sono sempre più simili in un punto, tanto più le derivate successive in quel punto coincidono.

Osservazione 496. Data una funzione si può quindi porre il problema, se desideriamo approssimarla in un punto, di trovarne un altra differente che però coincide con quella data per le derivate successive nel punto di interesse. Ci si può chiedere poi se vi possano essere più funzioni aventi tali caratteristiche, e passibili pertanto di fungere da approssimatore in un punto. Ad entrambe le questioni risponde il seguente risultato.

17.7.4.2 Polinomio di Taylor

Proposizione 17.7.9 (Polinomio di Taylor)**.** *Fissati $m+1$ numeri reali $d_0, d_1, \ldots, d_m$ (da leggersi come i valori delle successive derivate della funzione che vogliamo approssimare, per $x \to c$) esiste un'unica funzione polinomiale p, di grado apparente m, cha ha in c i valori d_k come successive derivate ed è*

$$T_{m,c}(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m$$

detto polinomio di Taylor di grado (apparente) m associato ad f, per $x \to c$.

Osservazione 497. Detto polinomio, avendo in c concidenti le derivate fino all'ordine m, ha un contatto con f di ordine superiore ad m.

Dimostrazione. Cerchiamo il polinomio con derivate successive coincidenti con i valori $d_0, \ldots, d_m$ tra le funzioni del tipo:

$$p(x)=a_0+a_1(x-c)+\ldots+a_m(x-c)^m=\sum_{k=0}^{m}a_k(x-c)^k$$

Si ha che $p(c)=d_0$ (la derivata di grado 0 in c coincide con il valore assunto dalla f in c) pertanto deve essere $a_0=d_0$.
Derivando il polinomio si ha:

$$p'(x)=\sum_{k=1}^{m}ka_k(x-c)^{k-1}$$

per cui nel punto c:

$$\begin{aligned} p'(c) &= a_1 \cdot \underbrace{(0)^0}_{=1} + 2 \cdot a_2 \underbrace{(0)^1}_{=0} + \ldots + \ldots \cdot \underbrace{(0)^3}_{=0} \ldots \\ &= a_1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + \ldots + 0 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

da cui $p'(c) = a_1$ e quindi deve essere $a_1 = d_1$. In generale la derivata r-esima è:

$$p^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{m} k(k-1) \cdot \ldots (k-r+1) a_k (x-c)^{k-r}$$

e nel punto $x = c$ viene "attivato" solo il primo termine della sommatoria, poiché $(x-c)^{k-r} = 0^0 = 1$, mentre negli altri casi è $0^1 = 0^2 = \ldots = 0$. Quindi la sommatoria si riduce al primo elemento:

$$p^{(r)}(c) = k(k-1) \cdot \ldots (k-r+1) a_k$$

ma dato che per il primo elemento $k = r$ sostituendo nella formula di sopra si ha che $p^{(r)}(c) = r! a_r$ e quindi $r! a_r = d_r$, da cui deve essere $a_r = d_r / r!$.
In conclusione la funzione polinomiale cercata è:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d_k}{k!}(x-c)^k = d_0 + \frac{d_1}{1!}(x-c) + \frac{d_2}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{d_m}{m!}(x-c)^m$$

E dunque, se f è m volte derivabile in I, la funzione f ed il polinomio:

$$\begin{aligned} T_{m,c}(x) &= f(c) + \frac{f'(x)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \end{aligned}$$

hanno in c concidenti le derivate fino all'ordine m, ed hanno un contatto di ordine superiore ad m. □

17.7.4.3 Formula di Taylor con resto di Peano

Proposizione 17.7.10 (Formula di Taylor (con resto nella forma di Peano))**.** *Sia I intervallo di R, sia $c \in I$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ sia m volte derivabile in c. Si ha allora*

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m + o((x-c)^m) \tag{17.58}$$

Dimostrazione. Dato che il polinomio di Taylor e la funzione hanno un contatto di ordine superiore ad m per $x \to c$ si ha che

$$f - T_{m,c} \in o((x-c)^m)$$

da cui

$$f = T_{m,c} + o((x-c)^m)$$

per le proprietà di o piccolo. □

Osservazione 498. Il risultato suggerisce che se f è m volte derivabile in c, il suo sviluppo asintotico secondo la scala delle potenze $(x-c)$, arrestato alla precisione $(x-c)^m$, è il polinomio di Taylor di grado m di f.
Pertanto se è facile calcolare le derivate successive di una funzione si può determinare il suo sviluppo asintotico con precisione a piacere.

Osservazione 499. Nella formula la funzione viene pertanto scomposta nel polinomio approssimatore e nel resto $o((x-c)^m)$, detto resto di Peano. Il resto è:

- tanto più piccolo quanto è maggiore m. L'idea è la seguente: conoscendo un numero abbastanza alto di derivate di f nel punto $x = c$ si può approssimare sempre meglio f in un intorno di c;
- a parità di m aumenta tanto più si cerca l'approssimazione in un punto x via via più distante da dove il polinomio è centrato/ottimale (c) (ovvero da è maggiore la distanza tra x e c).

Osservazione 500 (Polinomio di Maclaurin). Nel caso speciale la formula sia utilizzata per approssimare una funzione per $c = 0$, il polinomio e la formula, oltre a semplificarsi lievemente, si dicono di Maclaurin.

Osservazione 501 (Linearizzazione). Quando si parla di linearizzazione si intende approssimazione mediante la formula di Taylor al primo ordine (che consiste nell'approssimare una funzione in un punto con la retta tangente nello stesso).

Esempio 17.7.4. Consideriamo:

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$$

e approssimiamola al primo ordine per $x \to 0$ (ovvero utilizzando la formula di Maclaurin). Si ha che per $x \to 0$:

$$\sqrt{1+x} - 1 \simeq f(0) + f'(0)x = \sqrt{1+0} - 1 + \frac{1}{2}(1+0)^{-1/2}x = \frac{1}{2}x$$

17.7.4.4 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Osservazione 502. Nella formula di Taylor con il resto di Peano compare $o((x-c)^m)$: di esso è noto solo che è infinitesimo per $x \to c$. Nel caso in cui i polinomi di Taylor vengano usati per approssimare una funzione, tale formula non consente di valutare l'errore commesso. A tale scopo è molto più utile il risultato del seguente teorema, che ci consentirà di riscrivere il resto della formula di Taylor in forma diversa.

Proposizione 17.7.11 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Se $f(x)$ è una funzione derivabile $(m+1)$ volte in un intorno I del punto c, considerando $x \in I$ e $T_{m,c}(x)$ il relativo polinomio di Taylor di ordine m, si ha:*

$$\frac{f(x) - T_{m,c}(x)}{(x-c)^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} \tag{17.59}$$

con x_0 punto interno all'intervallo di estremi c e x. Da questa si può ottenere $f(x)$

$$f(x) = T_{m,c}(x) + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-c)^{(m+1)}}_{\textit{resto di Lagrange}} \tag{17.60}$$

Dimostrazione. Bramanti 1 pag 220 □

Osservazione 503. Nel termine di errore il valore di x_0 è incognito, e dipende da c, x e m: se però si conosce una espressione della derivata $(m+1)$-esima di $f(x)$, essendo noto che x_0 deve appartenere all'intervallo di estremi c e x è spesso possibile determinare una maggiorazione dell'errore commesso.
In altre parole, se si riesce a dimostrare che $\left|f^{m+1}(t)\right| \leq M$ per ogni t compreso tra c e x allora la formula di Taylor con resto secondo Lagrange dice che:

$$|f(x) - T_{m,c}(x)| \leq \frac{M}{(m+1)!} |x-c|^{m+1} \tag{17.61}$$

che è appunto una stima dell'errore di approssimazione commesso.

Esempio 17.7.5. Il polinomio di MacLaurin al terzo ordine di e^x è

$$M_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Se volessimo utilizzare questa formula per calcolare un valore approssimato di $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, avremmo $M_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{48}$.
Per stimare di quanto ci stiamo sbagliando (fingendo di non conoscere il valore di $\sqrt{e}$), poniamo nella 17.60 $f(x) = e^x$, $c = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ed $m = 3$ otteniamo

$$\sqrt{e} = M_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{e^{x_0}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Poiché per $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$ è $e^{x_0} < \sqrt{e} < \sqrt{3}$ si ottiene[5]

$$\left|\sqrt{e} - M_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} \simeq 0.0045$$

Questo significa che approssimando $e^{0.5}$ con il valore 79/48 si commette un errore non superiore a 0.0045.

17.7.5 Sviluppi di Maclaurin e uso nei limiti

17.7.5.1 Sviluppi di base

Nel seguito si applica la formula di Maclaurin ad alcune funzioni trascendenti note, per averne una approssimazione migliore tanto più ci si avvicina a 0.

Osservazione 504. Come si noterà, se una funzione è pari (rispettivamente dispari), nel suo sviluppo di maclaurin compaiono solo le potenze pari (rispettivamente dispari).

Proposizione 17.7.12 (Sviluppo di e^x)**.**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m) \tag{17.62}$$

[5]Abbiamo usato la disuguaglianza grossolana $e < 3$: per non cadere in un circolo vizioso: per stimare il valore di $\sqrt{e}$ sembrerebbe necessario saper già quanto vale esso. Invece basta conoscere un valore che maggiora $\sqrt{e}$ e questo valore è ad esempio $\sqrt{3}$.

Proposizione 17.7.13 (Sviluppo di sin)**.**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}) \tag{17.63}$$

Proposizione 17.7.14 (Sviluppo di cos)**.**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) \tag{17.64}$$

Proposizione 17.7.15 (Sviluppo di tan)**.**

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \tag{17.65}$$

Proposizione 17.7.16 (Sviluppo di sinh)**.**

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}) \tag{17.66}$$

Proposizione 17.7.17 (Sviluppo di cosh)**.**

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}) \tag{17.67}$$

Proposizione 17.7.18 (Sviluppo di tanh)**.**

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \tag{17.68}$$

Proposizione 17.7.19 (Sviluppo di $(1+x)^\alpha$)**.**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{m}x^m + o(x^m) \tag{17.69}$$

Dimostrazione. Trasliamo la potenza all'indietro di uno per avere l'origine (invece di $c = 1$) come punto iniziale; consideriamo dunque $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$, di dominio $]-1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned}
&f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\
&f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\
&f^{(k)}_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}
\end{aligned}$$

da cui un generale coefficiente del termine k-esimo dello sviluppo risulta

$$\frac{f^{(k)}_\alpha(0)}{k!} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \tag{17.70}$$

dove 17.70 è detto coefficiente binomiale generalizzato (α può essere un numero non intero, mentre k è sempre positivo. □

Proposizione 17.7.20 (Sviluppo di $1/(1+x)$)**.** *In particolare, se $\alpha = -1$ nella 17.69*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^m x^m + o(x^m) \tag{17.71}$$

Proposizione 17.7.21 (Sviluppo di $\sqrt{1+x}$)**.** *Se $\alpha = 1/2$ nella 17.69*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots + (-1)^{m+1}\frac{(2m-3)!!x^m}{(2m)!!} + o(x^m) \quad (17.72)$$

dove $k!! = k(k-2)(k-4)\cdot\ldots\cdot 2$ (detto k semifattoriale).

Proposizione 17.7.22 (Sviluppo di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$)**.** *Se $\alpha = -1/2$ nella 17.69*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \ldots + (-1)^m\frac{(2m-1)!!x^m}{(2m)!!} + o(x^m) \quad (17.73)$$

Proposizione 17.7.23 (Sviluppo di $\log(1+x)$)**.**

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^m}{m} + o(x^{2m})$$

Dimostrazione. Essendo $D\log(1+x) = \frac{1}{1+x}$ posto $f(x) = \log(1+x)$ si ha:

$$f^{(k)}(x) = f_{-1}^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

da cui $f^{(k)}(0)/k! = (-1)^{k-1}/k$. □

Proposizione 17.7.24 (Sviluppo di arcsin)**.**

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \quad (17.74)$$

Proposizione 17.7.25 (Sviluppo di $\arctan x$)**.**

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \quad (17.75)$$

Proposizione 17.7.26 (Sviluppo di sett tanh)**.**

$$\operatorname{sett\,tanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \quad (17.76)$$

Proposizione 17.7.27 (Sviluppo di sett sinh)**.**

$$\operatorname{sett\,sinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2}) \quad (17.77)$$

17.7.5.2 Sviluppi in funzioni composte

Nel caso di funzioni composte può essere più proficuo sostituire la funzione più interna in sviluppi di funzioni di base, invece di calcolare le derivate successive della funzione composta.

Esempio 17.7.6. Scriviamo lo sviluppo di maclaurin al quarto ordine di e^{-x^2}: dato che

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

sostituendo $t = -x^2$ si ha:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Osservazione 505. Da notare che per arrivare ad uno sviluppo quarto (fa fede l'esponente di grado massimo delle x) non necessariamente dobbiamo usare lo sviluppo di base sino al quarto ordine.

Osservazione 506. Nel caso di composizione di funzioni trascendenti vi sono due modi di procedere: il primo consiste nell'applicare la definizione, ovvero calcolare le derivate successive. Questo è il procedimento concettualmente più semplice, ache se i calcoli effettivi possono diventare laboriosi.
Il secondo metodo consiste nel "comporre" gli sviluppi noti delle due funzioni elementari; metodo di più delicata applicazione ma consente di ridurre i calcoli. Seguiamo questo metodo con un esempio

Esempio 17.7.7. Scriviamo lo sviluppo di maclaurin al terzo ordine per la funzione

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Cominciamo a scrivere lo svilupp di e^t con $t = \sin x$, come fatto in precedenza

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $\sin x \sim x$ perciò $o(\sin^3 x) = o(x^3)$. Ora sostituiamo i vari $\sin x$ che compaiono con il suo sviluppo, sempre al terzo ordine:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Non servono sviluppi ulteriori al terzo poiché nei calcoli che seguono verrebbero riassorbiti nel resto $o(x^3)$

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{6}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Nel secondo passaggio non si sono sviluppati algebricamente il quadrato e il cubo nello sviluppo di $\sin x$ ma si sono scritte solo le potenze di grado ≤ 3, perché le rimanenti verrebbero comunque riassorbite dall'errore.

17.7.5.3 Uso nel calcolo dei limiti

Gli sviluppi (soprattutto di Maclaurin, nell'ambito di limiti per $x \to 0$) si possono utilizzare nel calcolo dei limiti, nel caso di forme indeterminate, come alternativa all'applicazione della regola di De l'Hopital. Fattivamente si procede a sostituzione di numeratore o denominatore con una stima asintotica sviluppata quanto basta da evitare l'indeterminazione.
In generale quando sviluppiamo una somma algebrica, ogni termine va sviluppato allo stesso ordine se vogliamo ottenere uno sviluppo coerente.

Esempio 17.7.8.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3}{(x + 2x^2)^2 \log^3(1 + \frac{x}{2})}$$

Il limite da una forma 0/0. Per determinare la parte principale a numeratore e denominatore partiamo dal numeratore: l'obiettivo è sviluppare la funzione sino a trovare il primo termine non nullo.
Lo sviluppo al primo ordine non è sufficiente:

$$\begin{aligned} x(e^{-x^2}) &= x(1 - x^2 + o(x^2)) = x - x^3 + o(x^3) = x + o(x) \\ (\sin x) &= -(x + o(x)) = -x + o(x) \end{aligned}$$

Nella prima equazione si nota un trick utile; ossia sviluppare a piacere e poi far ritornare il resto alla precisione desiderata inglobandovi i termini opportuni.
Si ha dunque:

$$xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 = x + o(x) - x + o(x) + \frac{5}{6}x^3 = o(x)$$

Uguaglianza che non ci permette di calcolare il limite, poiché si ha ancora un infinitesimo (dato che $\frac{5}{6}x^3$ viene riassorbito in $o(x)$).
Proseguiamo sviluppando al terzo ordine:

$$\begin{aligned} xe^{-x^2} &= x(1 - x^2 + o(x^2)) = x - x^3 + o(x^3) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

quindi

$$xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 = (x - x^3 + o(x^3)) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{5}{6}x^3 = o(x^3)$$

Quindi anche qui si ha ancora un annullamento del numeratore. Sviluppando al quinto ordine

$$\begin{aligned} xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 &= x\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) + \frac{5}{6}x^3 \\ &= x - x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5) - x + x^3 - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ &= x^5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{120}\right) + o(x^5) \\ &\sim \frac{59}{120}x^5 \end{aligned}$$

Venendo al denominatore, per scrivere la parte principale possiamo utilizzare semplicemente una stima asintotica di ognuno dei due fattori pertanto complessivamente

$$f(x) \sim \frac{\frac{59}{120}x^5}{x^2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3} = \frac{\frac{59}{120}x^5}{\frac{x^5}{8}} = \frac{59}{15}$$

che è il limite cercato

Osservazione 507. Può essere che per applicare le formule di Maclaurin occorra effettuare un cambio di variabile precedentemente (per fare si che il limite tenda a 0)

Osservazione 508. In generale calcolare il limite di un quoziente f/g che dia luogo a forme di indeterminazione sviluppando fino all'ordine n numeratore e denominatore equivale a calcolare il limite applicando n volte la regola di de l'Hopital.
A seconda dei casi può risultare più comodo lo sviluppo o il teorema di de l'Hopital: il vantaggio del primo si ha quando le funzioni elementari coinvolte hanno sviluppi già noti, per cui non calcoliamo niente ma sostituiamo opportune espressioni; il vantaggio del secondo si ha nei casi in cui qualche sviluppo sarebbe scomodo da calcolare e/o quando il punto c a cui la variabile tende non è 0.

17.8 L'utilizzo di maxima

Calcolo derivate Il comando per il calcolo della derivata è `diff` che prende come argomento le espressioni da derivare, la variabile rispetto alla quale derivare e opzionalmente un itero positivo che indichi quante volte differenziare rispetto a quella variabile.

```
##
## diff(sin(x),x)
##                                      cos(x)
```

Possiamo aggiungere un terzo parametro, numerico per specificare l'ordine della derivata richiesto

```
##
## diff(sin(x),x,2)
##                                     - sin(x)
```

Polinomio di Taylor Si usa la funzione `taylor(expr, x, a, n)` per l'espansione di expr nella variabile x, in prossimità di $x = a$, sino al termine n. Vediamo un esempio con lo sviluppo di MacLaurin di e^x

```
##
## t1:taylor(exp(x),x,0,5)
##                                2    3    4    5
##                               x    x    x    x
## /T/                   1 + x + -- + -- + -- + --- + . . .
##                               2    6    24   120
```

Capitolo 18

Integrale secondo Riemann

18.1 Introduzione

18.1.1 Funzioni a scalino

Una classe di funzioni discontinue utili è quella delle funzioni a *scalino*, o a *gradino*, o *costanti a tratti.*

Definizione 18.1.1 (Suddivisione di un intervallo I)**.** Sia I intervallo di $\mathbb{R}$. Si dice *suddivisione* di I ogni sottoinsieme finito di elementi appartenenti ad I, che contiene anche gli estremi di I qualora questi appartengano ad I stesso.

Definizione 18.1.2 (Indicizzazione naturale)**.** Per descrivere una suddivisione D di un intervallo I composta da $m+1$ punti si può utilizzare la n-upla ordinata $(x_0, \dots, x_m)$ con $x_0 < \dots < x_m$, detta *indicizzazione naturale*, ossia quella che dispone i punti in ordine crescente.

Osservazione 509. Se D è suddivisione di I avente $m+1$ punti, $I \setminus D$ è unione disgiunta di intervalli aperti, i cui estremi sono punti di D, oppure sono gli estremi di I.

Definizione 18.1.3 (Funzione a scalino e suddivisione associata)**.** Sia I intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice a scalino se esiste una suddivisione D di I tale che f sia costante su ciascuno degli intervalli aperti che compongono $I \setminus D$. Ciascuna di tali suddivisioni è detta *suddivisione associata* a f.

Esempio 18.1.1. Le costanti di $\mathbb{R}$ sono a scalino, con $\emptyset$ come suddivisione associata. La funzione segno è funzione a scalino su $\mathbb{R}$, così come lo *scalino di Heaviside* Y, $\chi_{\mathbb{R}^+}$, ossia $Y(x) = 0$ se $x < 0$, $Y(x) = 1$ se $x \geq 0$; entrambe queste funzioni hanno $\{0\}$ come suddivisione associata.

Definizione 18.1.4 (Suddivisione associata ad f)**.** Ogni suddivisione per la quale f sia costante su ciascuno degli intervalli aperti che compongono $I \setminus D$ si dice suddivisione associata ad f.

Osservazione 510. Chiaramente una suddivisione associata ad f non è unica, ossia vi sono altre suddivisioni, ad esempio una suddivisione più numerosa e fine F di D, ossia tale che $D \subseteq F$, vede ancora f costante negli intervalli aperti che crea.

Definizione 18.1.5 (Minima suddivisione associata)**.** Ogni funzione a scalino $f : I \to \mathbb{R}$ ha una minima suddivisione associata; questa è composta dai punti di discontinuità della funzione e dagli estremi di I che appartengano ad I.

Proposizione 18.1.1 (Operazioni su funzioni a scalino)**.** *Se I è intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono a scalino, allora $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$, $|f|$ sono a scalino.*

Dimostrazione. Se f ha D_1 come suddivisione associata, e g ha D_2, si vede subito che $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$ hanno $D_1 \cup D_2$ come suddivisione associata. Il resto è banale. □

Osservazione 511 (Funzione a scalino come combinazione di caratteristiche)*.* Se $I_1, \dots, I_m$ sono intervalli di $\mathbb{R}$ ed $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sono numeri reali, allora la funzione

$$f = \alpha_1 \chi_{I_1} + \ldots + \alpha_m \chi_{I_m} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \chi_{I_k}$$

è a scalino.
Si vede facilmente come ogni funzione a scalino può essere scritta come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli (ossia di funzioni che assumono il valore 1 su un dato intervallo I e 0 su $\mathbb{R} \setminus I$).

Osservazione 512*.* Ricordiamo che il supporto di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la chiusura dell'insieme dei punti dove la funzione non è nulla:

$$\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

Definizione 18.1.6 (Funzione a scalino a supporto compatto)**.** A noi interessano in modo particolare le funzioni a scalino a supporto compatto, ossia quelle nulle al di fuori di un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Osservazione 513*.* Se f è a scalino su $\mathbb{R}$, e D è suddivisione associata ad f con indicizzazione naturale $(x_0, \dots, x_m)$, allora f è a supporto compatto se e solo se f è nulla su $]-\infty, x_0[$ e su $]x_m, +\infty[$.

Osservazione 514 (Combinazioni di scalini a supporto compatto)*.* Se $S_c(\mathbb{R})$ indica l'insieme delle funzioni a scalino a supporto compatto e $f, g \in S_c(\mathbb{R})$, allora fg, $f \vee g$, $f \wedge g$, $|f| = f \vee (-f) \in S_c(\mathbb{R})$.
Inoltre anche $\lambda f + \mu g \in S_c(\mathbb{R})$, per ogni $\lambda, \mu \in S_c(\mathbb{R})$ (nel caso specifico: anche se λ e μ sono costanti).

18.1.2 Integrale delle funzioni a scalino a supporto compatto

Definizione 18.1.7 (Integrale)**.** Sia f funzione a scalino a supporto compatto su $\mathbb{R}$. L'integrale di f su $\mathbb{R}$ è il numero reale

$$\alpha_1(x_1 - x_0) + \ldots + \alpha_m(x_m - x_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (x_k - x_{k-1}) \tag{18.1}$$

purché $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ sia suddivisione associata ad f ed f valga α_k sull'intervallo $]x_{k-1}, x_k[$.

Osservazione 515. Si è quindi definita una funzione

$$\int_{\mathbb{R}} : S_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

che a partire da una funzione data $f \in S_c(\mathbb{R})$ restituisce la somma algebrica delle aree (se la f è negatva, la relativa area viene sottratta).
Il valore assunto per $f \in S_c(\mathbb{R})$, è indicato con $\int_{\mathbb{R}} f$, o alternativamente con $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ quando si vuole porre in rilievo la variabile rispetto a cui si integra.

Proposizione 18.1.2 (Proprietà integrali funzioni a scalino)**.** *L'integrale delle funzioni a scalino ha le seguenti proprietà:*

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g \quad \textit{per } f, g \in S_c(\mathbb{R}) \tag{18.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f \quad \textit{per } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ e } f \in S_c(\mathbb{R}) \tag{18.3}$$

$$\textit{se } f, g \in S_c(\mathbb{R}) \textit{ con } f \leq g \textit{ allora } \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g \tag{18.4}$$

$$\textit{se } f \in S_c(\mathbb{R}) \textit{ allora } \left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \tag{18.5}$$

Le prime due definiscono la linearità *dell'operatore, la terza l'*isotonia*, mentre la quarta è una* disuguaglianza fondamentale*.*

Dimostrazione. Per l'additività $\int_{\mathbb{R}}(f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$ e per l'isotonia si ricorre ad una suddivisione associata sia ad f che a g; il resto è banale. □

Osservazione 516. Le funzioni caratteristiche degli intervalli limitati stanno in $S_c(\mathbb{R})$ ed hanno per integrale esattamente la lunghezza dell'intervallo.

Osservazione 517. Ne segue che una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{I_k}$ è una funzione a scalino a supporto compatto ($f \in S_c(\mathbb{R})$) ed inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_1(I_k)$$

letta come una somma di aree di intervalli, determinate come prodotto dell'altezza (α_k) per la base $\lambda_1(I_k)$, dove $\lambda_1(I_k) = \sup I_k - \inf I_k$ è la lunghezza, o misura unidimensionale di I_k.

Definizione 18.1.8 (Plurintervalli)**.** Si dicono plurintervalli gli insiemi $E \subseteq \mathbb{R}$ che siano unioni finite disgiunte di intervalli.

Osservazione 518. La funzione caratteristica χ_E di un plurintervallo E è a scalino; se il plurintervallo è limitato la funzione caratteristica è anche a supporto compatto.

Definizione 18.1.9 (Lunghezza di plurintervalli)**.** La lunghezza di un plurintervallo limitato E è per definizione

$$\lambda_1(E) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E$$

mentre per un plurintervallo illimitato la lunghezza, sempre per definizione, è $+\infty$.

Osservazione 519. Una funzione può avere integrale piccolo, e ciò nonostante assumere valori molto grandi; però allora l'insieme dei valori dove è grande deve avere misura/lunghezza piccola. Questa è una delle possibili interpretazioni del prossimo risultato.

Teorema 18.1.3 (Disuguaglianza di Cebiceff). *Sia $f \in S_c(\mathbb{R})$ e sia $\alpha > 0$. L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}$ è un plurintervallo e si ha*

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)|\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f| \tag{18.6}$$

Dimostrazione. Scelta una suddivisione associata ad f, $x_0 < \ldots < x_m$, se α_k è il valore assunto da f in $]x_{k-1}, x_k[$, l'insieme $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}$ è l'unione di quegli intervalli dove è $|\alpha_k| \geq \alpha$, ed eventualmente alcuni singoli $\{x_j\}$, pertanto è un plurintervallo, ovviamente limitato.
Si ha poi $\alpha\chi_{E_\alpha} \leq |f|$, da cui $\int_{\mathbb{R}} \alpha\chi_{E_\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$; ma $\int_{\mathbb{R}} \alpha\chi_{E_\alpha} = \alpha \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_\alpha}$ e si conclude. □

Dimostrazione. In altre parole dato che $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}$ è il sottoinsieme del dominio dove la funzione è $\geq \alpha$ o $\leq -\alpha$ la disuguaglianza regge perché

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}) \cdot \alpha \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$$

dato ce $f(x)$ può andare anche oltre, in valore assoluto, rispetto ad α. Prestare attenzione che se non ci fosse il valore assoluto della funzione entro integrale la diseguaglianza non necessariamente varrebbe. □

18.1.3 Area di un insieme piano

Definizione 18.1.10 (Rettangolo (ripasso)). Un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ è un prodotto (cartesiano) di intervalli.

Definizione 18.1.11 (Rettangolo degenere). Un rettangolo si dice degenere se uno degli intervalli di cui esso è il prodotto è degenere.

Esempio 18.1.2. Le rette parallele agli assi sono rettangoli degenere, così come lo sono i segmenti con lati paralleli agli assi coordinati

Definizione 18.1.12 (Area (o misura) di un rettangolo). L'area, o misura 2-dimensionale di un rettangolo limitato $I \times J$ è per definizione:

- $\lambda_2(I \times J) = 0$ se $I \times J$ è degenere
- $\lambda_2(I \times J) = \lambda_1(I)\lambda_1(J)(\sup I - \inf I)(\sup J - \inf J)$ se $I \times J$ è limitato

Definizione 18.1.13 (Plurirettangolo). Un plurirettangolo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che sia unione finita disgiunta di rettangoli.

Proposizione 18.1.4 (Operazioni insiemistiche su plurirettangoli). *L'unione, l'intersezione e la differenza di plurirettangoli sono plurirettangoli, come si vede facilmente. Il complementare di un plurirettangolo è ancora un plurirettangolo.*

Definizione 18.1.14 (Area di un plurirettangolo). Si definisce come la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono.

Proposizione 18.1.5 (Proprietà della funzione area sui plurirettangoli limitati)**.** Additività finita*: se $E_1, \dots, E_m$ sono plurirettangoli limitati disgiunti, allora*

$$\lambda_2\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_2(E_k) \tag{18.7}$$

Monotonia*: se E, F sono plurirettangoli limitati con $E \subseteq F$, allora*

$$\lambda_2(E) \leq \lambda_2(F) \tag{18.8}$$

Dimostrazione. L'additività è immediata; la monotonia è dovuta al fatto che si ha $F = E \cup (F \setminus E)$, unione disgiunta, e dalla prima proprietà si ha allora $\lambda_2(F) = \lambda_2(E) + \lambda_2(F \setminus E) \geq \lambda_2(E)$, essendo $\lambda_1(F \setminus E) \geq 0$ □

Osservazione 520 (Area di un sottoinsieme qualsiasi $\mathbb{R}^2$)*.* Dato un sottoinsieme qualsiasi (ad esempio anche un cerchio) $E \subset \mathbb{R}^2$ risulta naturale definire l'area come segue: prendiamo tutti i plurirettangoli limitati A contenuti in E e tutti quelli B contenenti E (affinché ce ne siano si deve supporre E limitato). Essendo $A \subseteq E \subseteq B$ si ha che $\lambda_2(A) \leq \lambda_2(B)$; l'area di E deve quindi stare fra le aree dei plurirettangoli contenuti in E e quelle dei plurirettangoli contenenti E. Se questi insiemi di aree hanno un unico separatore (ossia sono una coppia di classi contigue), tale numero non può che essere chiamato area di E.

Definizione 18.1.15 (Sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^2$ elementarmente misurabile)**.** Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^2$ si dice *elementarmente misurabile*, o *quadrabile*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un plurirettangolo limitato B contenente E, ed un plurirettangolo A contenuto in E tali che sia

$$\lambda_2(B) - \lambda_2(A) \leq \varepsilon$$

Definizione 18.1.16 (Trapezoide)**.** Se $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ è funzione positiva $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$, il trapezoide di f è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Trap}(f) = \{(x, y) : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{18.9}$$

Osservazione 521. A parole è l'insieme di punti tra l'asse delle x e il grafico della funzione.

Osservazione 522. Se f è positiva, a scalino ed a supporto compatto, $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{I_k}$ (con I_k limitati e disgiunti ed $\alpha_k \geq 0$ per $k = 1, \dots, m$), il trapezoide di f è un plurirettangolo limitato e si ha

$$\mathrm{Trap}(f) = \bigcup_{k=1}^{m} I_k \times [0, \alpha_k[$$

Essendo tale unione disgiunta ne segue che possiamo sommare le aree per ottenere l'area del trapezoide, ossia:

$$\begin{aligned}\lambda_2(\mathrm{Trap}(f)) &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_2(I_k[0,\alpha_k[) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_1(I_k)\lambda_1([0,\alpha_k[) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_1(I_k)\alpha_k \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\end{aligned}$$

Ossia, per funzioni a scalino positive, l'integrale è esattamente l'area del trapezoide della funzione stessa.

18.1.4 Funzioni Riemann integrabili

Definizione 18.1.17 (Somma inferiore e superiore)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se $u \in S_c(\mathbb{R})$ è una minorante di f, ossia $u \leq f$, l'integrale di u $\int_{\mathbb{R}} u$ è una *somma inferiore* di f; se invece $v \in S_c(\mathbb{R})$ maggiora f, il suo integrale è detto *somma superiore* di f.

Proposizione 18.1.6. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ogni somma inferiore di f è minore o uguale ad ogni somma superiore di f*

Dimostrazione. Se $u \leq f \leq v$ con $u, v \in S_c(\mathbb{R})$, allora $u \leq v$; e l'integrale è isotono. □

Definizione 18.1.18 (Funzione Riemann integrabile, integrale)**.** Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *Riemann integrabile* se le sue somme inferiori e superiori sono una coppia di classi contigue di $\mathbb{R}$.
In tal caso l'elemento separatore si chiama *integrale* (secondo Riemann) di f esteso ad $\mathbb{R}$ e si scrive

$$\int_{\mathbb{R}} f \qquad \text{o anche} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \tag{18.10}$$

Definizione 18.1.19 (Funzione Riemann integrabile (definizione alternativa))**.** Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni a scalino a supporto compatto $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ tali che sia $u_\varepsilon \leq f \leq v_\varepsilon$ e $\int_{\mathbb{R}}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) \leq \varepsilon$, ossia la differenza tra somma superiore ed inferiore può essere resa piccola a piacere.

Proposizione 18.1.7. *Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile su $\mathbb{R}$ è che sia limitata e a supporto compatto.*

Dimostrazione. Affinché f possa essere Riemann integrabile devono esistere una $u \in S_c(\mathbb{R})$ minorante di f ed una $u \in S_c(\mathbb{R})$ maggiorante; u, v sono limitate pertanto da $u \leq f \leq v$ segue f limitata; e se $x \notin \mathrm{Supp}(u) \cup \mathrm{Supp}(v)$ si ha $u(x) = v(x) = 0$ e quindi anche $f(x) = 0$, per cui $\mathrm{Supp}(f) \subseteq \mathrm{Supp}(u) \cup \mathrm{Supp}(v)$ □

18.1.5 Proprietà dell'integrale

Proposizione 18.1.8 (Linearità)**.** *Se f, g sono Riemann integrabili su $\mathbb{R}$ allora $f+g$ è Riemann integrabile in $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}}(f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g \tag{18.11}$$

inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$, λf è Riemann integrabile e si ha

$$\int_{\mathbb{R}}(\lambda f) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f \tag{18.12}$$

Dimostrazione. Partendo dalla somma algebrica, fissato $\varepsilon > 0$ siano u_1, v_1 e u_2, v_2 funzioni a scalino a supporto compatto tali che

$$u_1 \leq f \leq v_1; \quad \int_{\mathbb{R}}(v_1 - u_1) \leq \varepsilon/2$$

e anche

$$u_2 \leq g \leq v_2; \quad \int_{\mathbb{R}}(v_2 - u_2) \leq \varepsilon/2$$

Si ha allora

$$u_1 + u_2 \leq f + g \leq v_1 + v_2$$

per cui

$$\int_{\mathbb{R}}((v_1 + v_2) - (u_1 + u_2)) = \int_{\mathbb{R}}(v_1 - u_1) + \int_{\mathbb{R}}(v_2 - u_2) \leq \varepsilon$$

che mostra l'integrabilità di $f+g$; inoltre (e qui si mostra il risultato dell'integrazione, che è la somma degli integrali separati) se $\alpha = \int_{\mathbb{R}} f$ e $\beta = \int_R g$ si ha anche

$$\int_{\mathbb{R}} u_1 \leq \alpha \leq \int_{\mathbb{R}} v_1, \quad \int_{\mathbb{R}} u_2 \leq \beta \leq \int_{\mathbb{R}} v_2$$

ed anche

$$\int_{\mathbb{R}} u_1 + \int_{\mathbb{R}} u_2 = \int_{\mathbb{R}}(u_1 + u_2) \leq \int_{\mathbb{R}}(f+g) \leq \int_{\mathbb{R}}(v_1 + v_2) = \int_{\mathbb{R}} v_1 + \int_{\mathbb{R}} v_2$$

Da queste disuguaglianze si trae facilmente

$$\left|\int_{\mathbb{R}}(f+g) - (\alpha+\beta) \leq \right| \int_{\mathbb{R}}((v_1 + v_2) - (u_1 + u_2)) \leq \varepsilon$$

occhio che nella prima $-(\alpha+\beta)$ è fuori dal segno di integrazione. Per l'arbitrarietà di ε si ha allora $\int_{\mathbb{R}}(f+g) = \alpha + \beta$ □

Dimostrazione. Dimostriamo ora il prodotto. Se $\lambda = 0$ la relazione è ovvia. Sia $\lambda \neq 0$ e $\varepsilon > 0$ fissato, e siano $u, v \in S_c(\mathbb{R})$ con $u \leq v$ e $\int_{\mathbb{R}}(v-u) \leq \varepsilon$, se $\lambda > 0$ si ha $\lambda u \leq \lambda f \leq \lambda v$ e $\int_{\mathbb{R}}(\lambda v - \lambda u) = -\lambda \int_{\mathbb{R}}(v-u) \leq (-\lambda)\varepsilon = |\lambda|\,\varepsilon$; in ogni caso λf è racchiuso tra due funzioni di $S_c(\mathbb{R})$ con integrali che differiscono fra loro meno di $|\lambda|\,\varepsilon$, numero positivo arbitrario come ε; inoltre, se $\alpha = \int_{\mathbb{R}} f$ si ha subito

$$\left|\int_{\mathbb{R}}(\lambda f) - \lambda\alpha\right| \leq |\lambda|\,\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε si conclude che $\int_{\mathbb{R}}(\lambda f) = \lambda\alpha$ come si voleva. □

Proposizione 18.1.9 (Isotonia). *Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili, ed $f \leq g$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g \tag{18.13}$$

Dimostrazione. Sia $h = g - f \geq 0$; mostriamo che allora $\int_{\mathbb{R}} h \geq 0$ (ossia se l'integrale della differenza è ≥ 0 allora vi è differenza e $\int f \leq \int g$). Ciò è immediato perché la costante 0 è funzione a scalino che minora h. La linearità implica poi che $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f$. □

Proposizione 18.1.10 (Disuguaglianza fondamentale). *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se la sua parte positiva $f^+ = f \vee 0$ e la sua parte negativa $f^- = (-f) \vee 0$ sono entrambi integrabili. Se f è integrabile, tale è $|f|$, e si ha*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \tag{18.14}$$

(che assomiglia a $|a + b| \leq |a| + |b|$)

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ siano $u, v \in S_c(\mathbb{R})$ con $u \leq f \leq v$ tali che sia $\int_{\mathbb{R}}(v - u) \leq \varepsilon$. Si ha chiaramente $u^+ \leq f^+ \leq v^+$ (per le operazioni reticolari su funzioni) ed $u^+, v^+ \in S_c(\mathbb{R})$; inoltre è $v^+ - u^+ \leq v - u$ (si noti che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $v(x) - u(x) \geq 0$; se $v^+(x) - u^+(x) > 0$ ciò significa che $v^+(x) > 0$ e quindi $v^+(x) = v(x)$ ed in ogni caso $u^+(x) \geq u(x)$ cosicché $v(x) - u^+(x) \leq v(x) - u(x)$). Ne segue $\int_{\mathbb{R}}(v^+ - u^+) \leq \int_{\mathbb{R}}(v - u) \leq \varepsilon$, e quindi f^+ è integrabile. Similmente si vede che se f è integrabile, anche f^- e integrabile (se si vuole, si prende $-f$, che ha f^- come parte positiva).
Poiché $|f| = f^+ + f^-$ se f è integrabile tale è $|f|$; inoltre $\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{\mathbb{R}} f^+ \geq \int_{\mathbb{R}} f$ ed anche $\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{\mathbb{R}} f^- \geq \int_{\mathbb{R}}(-f) = -\int_{\mathbb{R}} f$ da cui

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \max\left\{ \int_{\mathbb{R}} f, -\int_{\mathbb{R}} f \right\} = \left| \int_{\mathbb{R}} f \right|$$

□

TODO: non mi è chiarissima la notazione nell'equazione con f,

18.1.6 Integrale ed area del trapezoide

Per funzioni positive si ha il seguente risultato

Proposizione 18.1.11. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile, allora il trapezoide* Trap(f) *di f è elementarmente misurabile e si ha*

$$\lambda_2(\mathrm{Trap}(f)) = \int_R f \tag{18.15}$$

Osservazione 523. Ossia in funzioni positive l'area sotto la curva coincide con l'integrale.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $u, v \in S_c(\mathbb{R})$ con $u \leq f \leq v$ e $\int_{\mathbb{R}}(v - u) \leq \varepsilon$; sostituendo u con u^+ (si noti che $u \leq u^+ \leq f$) si può supporre $u \geq 0$. Chiaramente da $0 \leq u \leq f \leq v$ segue

$$\mathrm{Trap}(u) \subseteq \mathrm{Trap}(f) \subseteq \mathrm{Trap}(v)$$

ma come visto, per funzioni positive in $S_c(\mathbb{R})$ il trapezoide è un plurirettangolo la cui area coincide con l'integrale; si ha quindi

$$\lambda_2(\mathrm{Trap}(u)) = \int_{\mathbb{R}} u \leq \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} v = \lambda_2(\mathrm{Trap}(v))$$

Ne segue che $\mathrm{Trap}(f)$ è misurabile e che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - \lambda_2(\mathrm{Trap}(f)) \right| \leq \varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε si ha $\int_{\mathbb{R}} f = \lambda_2(\mathrm{Trap}(f))$ □

18.1.7 Un'osservazione spesso utile

Proposizione 18.1.12. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione; f è Riemann integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono φ, ψ Riemann integrabili con $\varphi \leq f \leq \psi$ e $\int_{\mathbb{R}}(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$*

Dimostrazione. Se ciò accade f è integrabile. Sia infatti $u \in S_c(\mathbb{R})$ con $u \leq \varphi$ tale che $\int_{\mathbb{R}}(\varphi - u) \leq \varepsilon$ e $v \in S_c(\mathbb{R})$, tale che sia $v \geq \psi$ e $\int_{\mathbb{R}}(v - \psi) \leq \varepsilon$; si ha allora $u \leq f \leq v$ ed essendo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(v - u) &= \int_{\mathbb{R}}(v - \psi + \psi - \varphi + \varphi - u) \\ &= \int_{\mathbb{R}}(v - \psi) + \int_{\mathbb{R}}(\psi - \varphi) + \int_{\mathbb{R}}(\varphi - u) \leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

si conclude che f è integrabile. Il resto è banale. □

Osservazione 524. In altre parole si può cercare di approssimare f anziché con funzioni a scalino, con funzioni di altro tipo che si sappiano essere integrabili.

18.1.8 Integrale esteso ad un intervallo

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione, il cui dominio $X \subseteq \mathbb{R}$ contiene un intervallo I, ci si può chiedere se essa è integrabile alla Riemann su I. Ciò significa che la funzione $f_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

è Riemann integrabile su $\mathbb{R}$. Si pone allora, sempre per definizione

$$\int_I f = \int_{\mathbb{R}} f_I$$

e si ha subito che

Proposizione 18.1.13. *Se f è integrabile sull'intervallo I, allora f è integrabile su ogni intervallo J contenuto in I*

Dimostrazione. Se $\varepsilon > 0$ è fissato e D è suddivisione di $\mathbb{R}$, con associate funzioni a scalino u, v tali che sia $u \leq f_I \leq v$ e $\int_{\mathbb{R}}(v-u) \leq \varepsilon$, allarghiamo D in modo che contenga anche quegli estremi di I e J che siano finiti; se $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ è la suddivisione così ottenuta, ed u, v valgono rispettivamente α_k e β_k su $]x_{k-1}, x_k[$, tra questi intervalli alcuni consecutivi formano J, diciamo che quelli per k variabile tra $j \geq 0$ ed $l \leq m$ sono contenuti in J; le funzioni $u_J = u\chi_J$ e $v_J = v\chi_J$ sono allora minoranti e maggioranti di f_J e si ha (i termini della somma sono positivi)

$$\int_{\mathbb{R}}(v_J - u_J) = \sum_{k=j}^{l}(\beta_k - \alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{m}(\beta_k - \alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon$$

□

Osservazione 525. Ovviamente se I, J sono intervalli tali che $I \cup J$ sia intervallo, ed f è una funzione il cui dominio contiene $I \cup J$, si ha che f è integrabile su $I \cup J$ se e solo se è integrabile su I e su J, e si ha in tal caso

$$\int_{I\cup J} f + \int_{I\cap J} f = \int_I f + \int_J f$$

la cosa è ovvia dalla formula $f_{I\cup J} + f_{I\cap J} = f_I + f_J$ e da quanto appena visto. Si noti che se $a, b \in \mathbb{R}$, con$a < b$, allora le funzioni $f_{[a,b]}$, $f_{]a,b[}$, $f_{[a,b[}$, $f_{]a,b]}$ (occhio che queste non sono restrizioni di dominio) differiscono su un insieme finito, pertanto

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f$$

(ossia l'inclusione o meno dell'estremo dell'intervallo non influisce sulla somma).

Definizione 18.1.20 (Funzione localmente integrabile (alla Riemann))**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ funzione; f si dice localmente integrabile (alla Riemann) in X se è integrabile su ogni intervallo compatto (ossia chiuso e limitato) contenuto in X.

Proposizione 18.1.14 (Integrabilità locale delle funzioni monotone)**.** *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è localmente integrabile in X.*

Dimostrazione. Sia $[a, b] \subseteq X$ (con a e b discrezionali: da qui la f è integrabile in ogni intervallo compatto $\subseteq X$); supponiamo f crescente e suddividiamo $[a, b]$ in m intervalli della stessa lunghezza $\delta_m = (b-a)/m$ con i punti $x_k = a + k\delta_m$, $k = 0, \ldots, m$. Una somma inferiore relativa alla suddivisione è $\sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\delta_m$, una somma superiore è $\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\delta_m$; la differenza è

$$\sum_{k=1}^{m}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta_m = \delta_m\left(\sum_{k=1}^{m}\underbrace{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}_{(*)}\right) = \delta_m(f(b) - f(a))$$

che tende a zero con δ_m, e cioè per $m \to +\infty$. □

NB: Gli $(*)$ sviluppati in sommatoria si elidono tutti ad eccezione di ultimo tick (ossia $f(b)$) e primo ossia $f(a)$

18.1.9 Integrabilità locale delle funzioni continue

Teorema 18.1.15 (Integrabilità delle funzioni continue)**.** *Ogni funzione continua è localmente integrabile*

Osservazione 526. Otterremo questo risultato come corollario di un più generale risultato sulle funzioni bilanciate.

Definizione 18.1.21 (Funzione bilanciata)**.** Sia I intervallo di $\mathbb{R}$; una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice bilanciata su I se ha in I solo discontinuità di prima specie, cioè limiti destro e sinistro di f esistono entrambi finiti, in ogni punto di I dove possono essere considerati.

Osservazione 527. Per ogni x interno ad I i limiti

$$f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t); \quad f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

esistono finiti; se $a = \min I$ esiste, allora in a esiste finito il limite destro, e se $b = \max I$ esiste, allora in b esiste finito il limite sinistro.
Chiaramente le funzioni continue sono bilanciate, e così le funzioni monotone e le funzioni a scalino.

Lemma 18.1.16. *Sia $[a, b]$ intervallo compatto e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilanciata. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $u_\varepsilon, v_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ a scalino tali che sia $u_\varepsilon \leq f \leq v_\varepsilon$, ed anche $v_\varepsilon(X) - u_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$, per ogni $x \in [a, b]$ (per cui f è integrabile)*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ sia X_ε l'insieme degli $x \in [a, b]$ per cui esistono $u_x, v_x : [a, x] \to \mathbb{R}$ a scalino con $u_x(t) \leq f(t) \leq v_x(t)$, e $v_x(t) - u_x(t) \leq \varepsilon$ per ogni $t \in [a, x]$. L'insieme X_ε non è vuoto, contenendo almeno a; proveremo l'asserto mostrando che $b \in X_\varepsilon$. Mostriamo prima che se $x \in X_\varepsilon$ e $c < b$, allora X_ε contiene elementi $x > c$. Infatti $\lim_{t \to c^+} f(t) = f(c^+)$ esiste finito, e pertanto esiste $\delta > 0$ tale da aversi

$$f(c^+) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) \leq f(c^+) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{per } c < t \leq c + \delta \leq b$$

Sia $x = c + \delta$, e definiamo $u_x, v_x : [a, x] \to \mathbb{R}$, a scalino, nel modo seguente: $u_x(t) = u_c(t)$, $v_x(t) = v_c(t)$ per $t \in [a, c]$; $u_x(t) = f(c^+) - \varepsilon/2$, $v_x(t) = f(c^+) + \varepsilon/2$ per $t \in]c, x[$. È evidente che u_x, v_x soddisfano alle condizioni richieste per dire che $x \in X_\varepsilon$. Sia poi $\xi = \sup X_\varepsilon$; mostriamo che $\xi \in X_\varepsilon$, cioè che X_ε ha massimo. Per quanto visto prima $\xi > a$, cioè X_ε non può contenere solo a. Ne segue che $\lim_{t \to \xi^-} f(t) = f(\xi^-)$ può essere considerato; esiste quindi $\delta > 0$ tale che sia

$$f(\xi^-) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) \leq f(\xi^-) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{per } a \leq \xi - \delta \leq t < \xi$$

Per la proprietà caratteristica dell'estremo superiore esiste $c \in x_\varepsilon$ con $c > \varepsilon - \delta$; si definiscono $u_\xi, v_\xi : [a, \xi] \to \mathbb{R}$ a scalino nel modo seguente: $u_\xi(t) = u_c(t)$ e $v_\xi(t) = v_c(t)$ per $t \in [a, c]$ $u_\xi(t) = f(\xi^-) - \varepsilon/2$ $v_\xi(t) = f(\xi^-) + \varepsilon/2$ per $t \in]c, \xi[$; $u_\xi(\xi) = v_\xi(\xi) = f(\xi)$. È ovvio che queste funzioni mostrano che $\xi \in X_\varepsilon$. L'argomentazione precedente esclude che possa essere $\xi < b$; quindi $\xi = b \in X_\varepsilon$ e la dimostrazione e conclusa. □

Si noti che dal lemma 18.1.16 segue questo risultato.

Teorema 18.1.17. *Ogni funzioni bilanciata sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *è Riemann integrabile su* $[a, b]$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ e presi $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ come nel lemma si ha $\int_{[a,b]}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) \leq \int_{[a,b]} \varepsilon = \varepsilon(b - a)$ numero positivo arbitrario come ε □

18.1.10 Integrale esteso ad un intervallo orientato

Definizione 18.1.22 (Integrale su intervallo orientato)**.** Sia X intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ funzione localmente integrabile. Per ogni coppia di punti $a, b \in X$ definiamo

$$\int_a^b = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{se } a \leq b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{se } a > b \end{cases} \tag{18.16}$$

che si può aver già visto come

$$\int_a^b f = \alpha \qquad \int_b^a f = -\alpha$$

Osservazione 528*.* Al solito si scrive

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{18.17}$$

se occorre evidenziare la variabile di integrazione.

Osservazione 529*.* Si noti che si ha $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ per ogni terna di punti a, b, c dell'intervallo X in cui f è localmente integrabile: la cosa è immediata se $a < c < b$ e si riconduce subito a questa con un facile studio dei segni e delle possibili situazioni

Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x dell'intervallo di estremi a, b su cui f e g sono integrabili, si ha

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \text{se } a < b \tag{18.18}$$

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g \quad \text{se } a > b \tag{18.19}$$

e si ha la

Proposizione 18.1.18 (Disuguaglianza fondamentale)**.**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| \tag{18.20}$$

(occorre il modulo fuori dal segno di integrale per il caso $a > b$*)*

18.2 Integrale indefinito

18.2.1 Introduzione

Definizione 18.2.1 (Integrale indefinito)**.** Sia X intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ localmente integrabile secondo Riemann. Un *integrale indefinito* (talvolta detto semplicemente integrale) di f è una funzione $F : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \tag{18.21}$$

per ogni coppia di punti $a, b \in X$

Osservazione 530. Disporre di un integrale indefinito significa poter calcolare tutti gli integrali di f che occorrano. Sorgono due questioni: esistono integrali indefiniti? e se esistono sono unici? Partiamo da questo secondo dubbio

Proposizione 18.2.1. *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile. Allora:*

- *se F è un integrale indefinito di f, anche $F+k$, dove k è funzione costante, è integrale indefinito di f;*
- *se F e G sono entrambi integrali indefiniti di f, allora $G - F$ è costante*

Di conseguenza, se F è un integrale indefinito di f, tutti gli altri si hanno dalla formula $F + k$ al variare di k nell'insieme delle costanti.

Dimostrazione. La prima affermazione delle due è ovvia in quanto

$$(F + k)(b) - (F + k)(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)$$

e la definizione è soddisfatta.
Quanto alla seconda, sia $c \in X$ fissato: battezzato un $k = G(c) - F(c)$, mostriamo che si ha $G(x) = k + F(x)$ per ogni $x \in X$ (non solo per c), si ha infatti $G(x) - G(c) = \int_c^x f = F(x) - F(c)$ (la prima uguaglianza dovuta al fatto ce anche G è integrale di f) per ogni $x \in X$, da cui $G(x) = \underbrace{(G(c) - F(c))}_{=k} + F(x)$ per ogni $x \in X$, come si voleva. □

Osservazione 531. L'*esistenza* è immediata: fissato $c \in X$ la formula

$$I_c f(x) = \int_c^x f \left(= \int_c^x f(t)\, dt \right)$$

definisce in X una funzione, detta *funzione integrale di f di punto iniziale c*, che chiaramente è un integrale indefinito per f in base all'ovvia formula $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_c^b f + \int_c^a f$
Osservazione 532. Questo non è ancora di grande aiuto nel calcolo degli integrali di f: l'affermazione che $I_c f$ è un integrale indefinito è quasi tautologica; tuttavia i risultati che seguono aprono la strada alla soluzione

Nei prossimi risultati consideriamo X intervallo di $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile in X e sia $c \in X$ fissato.

Definizione 18.2.2. Una funzione si dice localmente lipschitziana in un intervallo X se è lipschitziana su ogni intervallo compatto contenuto in X.

Proposizione 18.2.2 (Continuità della funzione integrale)**.** *La funzione integrale di f, di punto iniziale c, $I_c f(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ è localmente lipschitziana, e quindi continua in X.*

Dimostrazione. Sia $[a, b]$ intervallo compatto fissato; sia $\lambda = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Mostriamo che λ è costante di Lipschitz per f su $[a, b]$ (cioè esiste una costante di Lipschitz e quindi f è continua):

$$|I_c f(x_2) - I_c f(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\ dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \lambda\ dt \right| = \lambda\,|x_2 - x_1|$$

$|I_c f(x_2) - I_c f(x_1)|$ è la distanza tra due punti della funzione integrale; la prima disuguaglianza è dovuta al fatto che $\lambda = \sup\{|f(x)|\}$; la seconda disuguaglianza vale poiché post valore assoluto si sommano valori tutti dello stesso segno. Nell'ultimo passaggio l'integrale di costante è l'area di un rettangolo. Pertanto complessivamente si ha che $|I_c f(x_2) - I_c f(x_1)| \leq \lambda\,|x_2 - x_1|$ □

Proposizione 18.2.3 (Teorema di Torricelli)**.** *Se f è continua in $x \in X$, allora $I_c f$ è derivabile in x e si ha*

$$DI_c f(x) = (I_c f)'(x) = f(x) \tag{18.22}$$

Dimostrazione. Si deve provare che

$$\lim_{\xi \to x} \left| \frac{I_c f(\xi) - I_c f(x)}{\xi - x} - f(x) \right| = 0$$

(che f è la derivata di $I_c f$ poiché per $\xi \to x$ sono uguali) ossia che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che sia

$$\left| \frac{I_c f(\xi) - I_c f(x)}{\xi - x} - f(x) \right| \leq \varepsilon \qquad \text{se } 0 < |\xi - x| \leq \delta,\ \xi \in X$$

Si può scrivere $I_c f(\xi) - I_c f(x) = \int_0^\xi f(t)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt = \int_x^\xi f(t)\ dt$ ed anche

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \left(\frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi\ dt \right) = \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f(x)\ dt$$

essendo $f(x)$ costante rispetto alla variabile di integrazione t. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{I_c f(\xi) - I_c f(x)}{\xi - x} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f(t)\ dt - \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f(x)\ dt \right| \\
&= \frac{1}{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi (f(t) - f(x))\ dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi |f(t) - f(x)|\ dt \right|
\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio usando la disuguaglianza fondamentale 18.20.
Essendo f per ipotesi continua in x, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che sia $|f(\xi) - f(x)| \leq \varepsilon$ se $\xi \in X$ è tale che sia $0 < |\xi - x| \leq \delta$. Per tali ξ si ha allora

$$\frac{1}{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi |f(t) - f(x)|\ dt \right| \leq \frac{1}{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi \varepsilon\ dt \right| = \frac{1}{|\xi - x|} \varepsilon\,|\xi - x| = \varepsilon$$

dato che se $|\xi - x| \leq \delta$ allora anche $|t - x| \leq \delta$ per ogni t nell'intervallo di estremi x, ξ. La conclusione è raggiunta. □

18.2.2 Primitive, o antiderivate; teorema fondamentale del calcolo

Definizione 18.2.3 (Primitiva, o antiderivata)**.** Sia X intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $F : X \to \mathbb{R}$ è una primitiva, o antiderivata, di f in X se per ogni $x \in X$ la funzione F è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$

Osservazione 533. Chiaramente, se F è primitiva di f sull'intervallo X, anche $F + k$ lo è, ed ogni altra primitiva si ottiene in questo modo; basta ricordare che su un intervallo una funzione ha derivata identicamente nulla se e solo se è costante.

Teorema 18.2.4 (Teorema fondamentale del calcolo)**.** *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ continua. L'insieme degli integrali indefiniti di f coincide con l'insieme delle primitive di f.*

Dimostrazione. Fissato $c \in X$, la continuità di f ed il teorema di Torricelli dicono che $I_c f$ è una primitiva di f: tutte le altre primitive differiscono da questa per una costante, e così gli integrali indefiniti di f. □

Osservazione 534. Si è quindi visto che se X è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, dato $c \in X$ la formula

$$F(x) = k + \int_c^x f(t)\ dt$$

fornisce, al variare della costante $k \in \mathbb{R}$, tutte le primitive di f in X. Un altro modo per esprimere la stessa idea è la seguente

Teorema 18.2.5 (Teorema fondamentale del calcolo (seconda versione))**.** *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ di classe C^1 su X.Per ogni $c, x \in X$ si ha*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\ dt$$

Dimostrazione. È banalmente equivalente alla precedente proposizione. □

Esempio 18.2.1. La funzione sin è continua e quindi localmente integrabile. Si voglia calcolare $\int_0^\pi \sin x\ dx$. Una funzione che ha sin come derivata è $-\cos$. Pertanto $-\cos$ è integrale indefinito per sin e si ha

$$\int_0^\pi \sin x\ dx = [-cosx]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$$

NB: notare questa notazione con parentesi graffa per indicare integrali definiti

18.2.3 Integrali indefiniti

La totalità degli integrali indefiniti di una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$, dove X è intervallo di $\mathbb{R}$, coincidente come visto con l'insieme delle primitive di f, si chiama *integrale indefinito* di f, e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\ dx \tag{18.23}$$

Non è una funzione ma un insieme di funzioni, al variare di una costante additiva. Sappiamo che tale insieme non è vuoto se f è continua, grazie al teorema fondamentale del calcolo. Per calcolare integrali indefiniti si leggono a rovescio le tabelle delle derivate, e si applicano le regole di derivazione in senso inverso. Conviene memorizzare i seguenti integrali immediati; occorrerà cercare di individuarli nelle espressioni da integrare. In quanto segue $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 sull'intervallo X di $\mathbb{R}$

$$\int (f(x))^\alpha f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \quad \text{se } \alpha \neq -1 \tag{18.24}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|, \quad \text{se } f(x) \text{ non è mai nullo} \tag{18.25}$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k \tag{18.26}$$

$$\int \log^\alpha |f(x)| \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{\log^{\alpha+1}|f(x)|}{\alpha+1} + k, \quad \text{se } \alpha \neq -1 \text{ e } f(x) \text{ non è mai nullo} \tag{18.27}$$

$$\int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \sin(f(x)) + k \tag{18.28}$$

$$\int \sin(f(x)) f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + k \tag{18.29}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \arcsin(f(x)) + k, \quad \text{se } |f(x)| < 1 \text{ per ogni } x \in X \tag{18.30}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \arctan(f(x)) + k \tag{18.31}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{sett}\sinh(f(x)) + k \tag{18.32}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right| + k, \quad \text{se } |f(x)| \neq 1 \text{ per ogni } x \in X \tag{18.33}$$

In particolare

$$\int \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}\,dx = \operatorname{sett}\tanh(f(x)) + k, \quad \text{se } |f(x)| < 1 \text{ per ogni } x \in X \tag{18.34}$$

18.2.4 Integrazione delle funzioni razionali

L'integrazione dei polinomi non presenta difficoltà: si ha

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_m}{m+1}x^{m+1} + k \tag{18.35}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + k \tag{18.36}$$

È facile integrare tutte le funzioni che si scrivono con un denominatore di primo grado (che supponiamo monico, ossia con coefficiente del termine di grado massimo pari a 1, come non è restrittivo fare[1]): data

$$\frac{P(x)}{x-a}$$

anzitutto si calcola il quoziente $Q(x)$ e resto $r = P(a)$ della divisione di P per $x - a$ (ad esempio mediante Ruffini); si ha allora

$$\frac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \frac{r}{x-a}$$

che si integra subito.

Per l'integrazione delle funzioni razionali con denominatore di secondo grado; usando la divisione, a meno di un polinomio esse si scrivono

$$R(x) = \frac{a_1 x + a_0}{x^2 + px + p}$$

e supponiamo naturalmente che la frazione sia irriducibile, cioè che gli eventuali zeri del denominatore non annullino il numeratore. Se le radici del denominatore sono reali e distinte $a \neq b$, sappiamo che esistono e sono uniche due costanti $c(a), c(b)$ residui di R in a, b tali che sia

$$R(x) = \frac{c(a)}{x-a} + \frac{c(b)}{x-b}$$

Risulta quindi

$$\int R(x)\ dx = c(a)\log|x-a| + c(b)\log|x-b| + k$$

Se il denominatore ha una radice doppia a esso si scrive $(x-a)^2$ e quindi

$$R(x) = \frac{a_1 x + a_0}{(x-a)^2} = \frac{a_1(x-a) + a_1 a + a_0}{(x-a)^2} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_1 a + a_0}{(x-a)^2}$$

che porge subito

$$\int R(x)\ dx = a_1 \log|x-a| - \frac{a_1 a + a_0}{x-a} + k$$

Se infine le radici del denominatore sono complesse coniugate, $s \pm it$, esso si scrive $(x-s)^2 + t^2$; si ha

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_1 x + a_0}{(x-s)^2 + t^2} = \frac{a_1(x-s) + a_1 s + a_0}{(x-s)^2 + t^2} = \frac{a_1(x-s)}{(x-s)^2 + t^2} + \frac{a_1 s + a_0}{(x-s)^2 + t^2} \\ &= \frac{a_1}{2}\frac{2(x-s)}{(x-s)^2 + t^2} + \frac{a_1 s + a_0}{((x-s)/t)^2 + 1}\frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

da cui subito

$$\int R(x)\ dx = \frac{a_1}{2}\log((x-s)^2 + t^2) + \frac{a_1 s + a_0}{t}\arctan\left(\frac{x-s}{t} + 1\right) + k$$

Osservazione 535. Non memorizzare le formule, memorizzare il procedimento

[1] Al massimo si fa divisione per a sia a numeratore che a denominatore ottenendo in quest'ultimo $ax + b \to x + \frac{b}{a}$

18.2.5 Integrazione per parti

Teorema 18.2.6 (Integrazione per parti)**.** *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$. Se $F, G \in C_1(x)$ con derivate rispettive $F' = f$ e $G' = g$ si ha*

$$\int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx$$

Dimostrazione. Sia ha $(FG)' = fG + Fg$, che si scrive, integrando

$$F(x)G(x) = \int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx$$

che è l'asserto □

18.2.6 Integrazione per sostituzione

Se $F : X \to \mathbb{R}$ e $\phi : T \to X$ sono di classe C^1, si sa che $F \circ \phi : T \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e che $(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$. Ciò dimostra quanto segue.

Teorema 18.2.7 (Integrazione per sostituzione)**.** *Siano T e X intervalli di $\mathbb{R}$, e sia $\phi : T \to X$ una funzione di classe C^1. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, si ha*

$$\underbrace{\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \phi(t)}_{F\circ\phi(t)} = \int f \circ \phi(t)\phi'(t)\,dt, \qquad \textit{per ogni } t \in T$$

Dimostrazione. L'interpretazione della formula è come segue: l'insieme delle primitive della funzione continua f, precomposte con ϕ, è l'insieme delle primitive di $f \circ \phi\phi'$. Basta allo scopo usare la regola di derivazione delle funzioni composte sopra ricordata ed il fatto che entrambi gli insiemi di funzioni sono individuati a meno di una costante additiva □

18.2.7 Integrazione definita per parti e per sostituzione

Le regole di integrazione forniscono anche regole di integrazione definita. Nel caso dell'integrazione per sostituzione, è opportuno osservare esplicitamente il cambiamento degli estremi di integrazione.

Proposizione 18.2.8. *Siano T ed X intervalli di $\mathbb{R}$, sia $\phi : T \to X$ di classe C^1 e sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Per ogni $\alpha, \beta \in T$ si ha*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f \circ \phi(t)\phi'(t)\,dt \tag{18.37}$$

Se ϕ è diffeomorfismo di T su X si ha anche, per ogni $a, b \in X$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f \circ \phi(t)\phi'(t)\,dt \tag{18.38}$$

Dimostrazione. Se $F : X \to \mathbb{R}$ è un integrale di f, $F \circ \phi$ è un integrale di $f \circ \phi\phi'$: l'integrale a primo membro vale quindi $F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$, quello a secondo membro anche.
Se poi ϕ è diffeomorfismo $\phi(\alpha) = a$ equivale a $\alpha = \phi^{-1}(a)$, e così per b e β □

18.2.8 Media di una funzione integrabile

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è integrabile sull'intervallo limitato non degenere I, la sua media su I è per definizione in numero

$$\frac{1}{\lambda_1(I)} \int_I f$$

se a, b sono gli estremi di I (non necessariamente $a < b$) si ha allora che la media di f su I è espressa dal numero

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Se $l = \inf f(I)$ ed $L = \sup f(I)$ si ha, integrando su I la disuguaglianza $l \leq f(x) \leq L$

$$l\lambda_1(I) \leq \int_I f \leq L\lambda_1(I)$$

e dividendo per $\lambda_1(I)$ si trova

$$l \leq \frac{1}{\lambda_1(I)} \int_i f \leq L$$

Teorema 18.2.9 (Teorema della media per funzioni continue)**.** *Se I è intervallo compatto non degenere, ed $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in I$ tale che sia*

$$f(c) = \frac{1}{\lambda_1(I)} \int_i f \tag{18.39}$$

Dimostrazione. Segue subito applicando il teorema dei valori intermedi a quanto sopra □

Teorema 18.2.10 (Generalizzazione del thm della media)**.** *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$, e siano $p, f; X \to \mathbb{R}$ localmente Riemann integrabili su X; si supponga $p(t) \geq 0$ per ogni $t \in X$. Per ogni intervallo limitato non degenere $I \subseteq X$ si ha*

$$\inf f(I) \int_I p(t)\, dt \leq \int_I f(t)p(t)\, dt \leq \sup f(I) \int_I p(t)\, dt \tag{18.40}$$

e se f è continua su I ed I è compatto esiste un punto c di I tale che sia

$$\int_I f(t)p(t)\, dt = f(c) \int_I p(t)\, dt \tag{18.41}$$

Dimostrazione. Per semplicità di scrittura sia $\alpha = \inf f(I)$, $\beta = \sup f(I)$; si ha $\alpha \leq f(t) \leq \beta$ per ogni $t \in I$, ed essendo $p(t) \geq 0$ per ogni t si ha anche $\alpha p(t) \leq f(t)p(t) \leq \beta p(t)$ per ogni $t \in I$; integrando si ha la prima asserzione.
Se I p compatto ed f è continua su I si ha $f(I) = [a, b]$ ed è facile concludere. □

18.3 Integrali generalizzati

È una notevole limitazione il fatto che solo funzioni limitate ed a supporto compatto possano essere integrabili, secondo la definizione sin qui data. La definizione di integrale generalizzato è il più spontaneo rimedio a ciò.

Si abbia una funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ definita nell'intervallo superiormente semiaperto $[a, b[$ (con $a \in \mathbb{R}$, b può essere reale oppure $+\infty$); supponiamo che f sia localmente integrabile su $[a, b[$ cioè che

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

esista per ogni $x \in [a, b[$. In questa situazione risulta quasi inevitabile la seguente

Definizione 18.3.1 (Integrabilità e integrale in senso generalizzato)**.** Nelle ipotesi precedenti si dice che f è *integrabile in senso generalizzato* su $[a, b[$ se il limite

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

esiste finito; in tal caso si pone per definizione

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

Tale limite è detto integrale generalizzato di f esteso all'intervallo $[a, b[$ e si usa anche dire che l'integrale generalizzato *converge* (al valore $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$)

Osservazione 536. Si ha naturalmente anche la situazione con l'ordine rovesciato, cioè di $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, con a finito oppure $-\infty$, b finito, f localmente integrabile su $]a, b]$ in cui si dice che f è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo di $]a, b]$ se

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

esiste finito; in tal caso si pone per definizione

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

Osservazione 537. Se b è finito (o a finito nel secondo caso) ed f è limitata e localmente integrabile su $[a, b[$ (rispettivamente $]a, b]$), in qualsiasi modo si prolunghi f ad $[a, b]$ il prolungamento è Riemann integrabile su $[a, b]$, la funzione è ovviamente integrabile anche in senso generalizzato su $[a, b]$ ed il suo integrale generalizzato coincide con quello secondo Riemann esteso ad $[a, b]$ di un qualsiasi prolungamento, in base al teorema sulla continuità della funzione integrale 15.11.3; in questo caso non si parla di integrale generalizzato ma semplicemente di integrale.

Se ora $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ è intervallo aperto, ed $f :]a, b[\to R$ è localmente integrabile, si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b[$ se, fissato $c \in]a, b[$, f è integrabile in senso generalizzato sia su $]a, c]$ che su $[c, b[$; per le definizioni sopra date, ciò accade se e solo se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\, dt; \quad \lim_{y\to b^-} \int_c^y f(t)\, dt$$

e in tal caso si pone, per definizione

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^c f(t)\,dt + \lim_{y\to b^-}\int_c^y f(t)\,dt$$

È evidente che l'integrabilità in senso generalizzato, e l'integrale generalizzato, non dipendono dal punto c scelto internamente ad $]a,b[$ per dare le definizioni precedenti. Si usa anche scrivere

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}}\int_x^y f(t)\,dt$$

Intendendo con ciò che la funzione è integrabile in senso generalizzato se il limite precedente esiste finito, ed in tal caso coincide con esso: si badi bene che il limite su scritto è di una funzione di *due variabili*, cioè che x ed y tendono indipendentemente l'uno dall'altro ad a^+ ed a b^- rispettivamente; in altre parole, il limite è $s\in\mathbb{R}$ se e solo se fissato $\varepsilon>0$, esistono $a_\varepsilon, b_\varepsilon \in]a,b[$ tali che si abbia

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - s\right| \le \varepsilon, \quad \text{per ogni } x \text{ con } a<x\le a_\varepsilon \text{ ed ogni } y,\ b_\varepsilon \le y < b$$

Infine sia $X=\cup_{j=1}^p I_j$ unione finita disgiunta di intervalli, e sia $f: X\to\mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile in X. Sia $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ uno degli estremi degli intervalli I_j; si dice singolarità, o punto singolare, per f se è $c=\pm\infty$ oppure se f è illimitata in ogni interno di c.

Diremo che f è integrabile in senso generalizzato su X se f è integrabile in senso generalizzato su ciascuno degli intervalli I_j che compongono X; e l'integrale generalizzato di f esteso ad X per definizione è

$$\int_X f = \sum_{j=1}^p \int_{I_j} f(x)\,dx \tag{18.42}$$

Si osservi che f è integrabile in senso generalizzato su X se e solo se per ogni singolarità c di f esiste un intorno U di c tale che f sia integrabile sugli intervalli che compongono $U\cap X$: se infatti si toglie ad X un intorno di ciascuno dei punti singolari, ciò che resta è unione finita disgiunta di intervalli compatti, su cui per ipotesi f è integrabile

Osservazione 538 (Notazione). Disponendo di un integrale indefinito F di f, il simbolo $[F(x)]_a^b$ viene usato per indicare

$$[F(x)]_a^b = \lim_{y\to b^-} F(y) - \lim_{x\to a^+} F(x) \tag{18.43}$$

nel caso in cui entrambi i limiti esistano finiti; se ciò non accade, se anche uno solo dei due limiti non esiste finito, la funzione non è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo di estremi a,b. Occorre tuttavia cautela estrema nell'uso di questo simbolo; nei casi delicati converrà ritornare alla notazione precedente

La linearità di integrali definiti e limiti implica la linearità degli integrali generalizzati: se $f,g: X\to\mathbb{R}$ hanno integrale generalizzato convergente su X così ha $\lambda f+\mu g$ per ogni coppia di costanti reali λ,μ, e si ha

$$\int_X (\lambda f+\mu g) = \lambda\int_X f + \mu_X g \tag{18.44}$$

Osservazione 539. Insistiamo sul fatto che per l'esistenza dell'integrale generalizzato occorre prendere i limiti in modo indipendente. Ad esempio non è vero che è
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$
se l'integrale generalizzato esiste, allora esiste anche il limite sopra scritto e coincide con esso; ma il limite sopra scritto può esistere senza che la funzione sia integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$: banalmente ad esempio l'integrale da $-r$ e r è nullo per ogni funzione dispari, ma chiaramente questo non sono tutte integrabili su $\mathbb{R}$.
Analogo discorso vale intorno ad un punto: $1/x$ non è integrabile in senso generalizzato su $[-1,1]$ (ad esempio perché non lo è su $]0,1]$, avendo ivi integrale generalizzato $+\infty$); ma
$$\int_{-1}^{-x}\frac{dt}{t}+\int_{x}^{1}\frac{dt}{t}=0,\quad \text{per ogni } x \text{ con } 0<x\le 1$$
e quindi anche al limite questi integrali valgono 0; e facendo tendere x a zero dalle due parti con particolari legami, si può al limite ottener qualsiasi numero reale; fissato $a>0$ si considera, per ogni $x>0$
$$\int_{-1}^{-x}\frac{dt}{t}+\int_{ax}^{1}\frac{dt}{t}=\log|x|-\log(ax)=-\log a$$
ed al variare di $a>0$ l'espressione $-\log a$ assume ogni possibile valore reale.

18.4 Altri argomenti

18.4.1 Criteri di convergenza

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è positiva, i suoi integrali indefiniti sono tutti crescenti, ed i loro limiti esistono, finito o no; se riusciamo a vedere che gli integrali indefiniti sono limitati, gli integrali generalizzati sono convergenti.

Teorema 18.4.1 (Criterio del confronto)**.** *Sia X intervallo di $\mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ positiva, e sia $0 \le f \le g$ una minorante positiva di g, con f, g localmente Riemann integrabili su X. Se l'integrale generalizzato di g su X esiste finito, così è anche per l'integrale di f, e si ha anzi $\int_X f(t)\,dt \le \int_X g(t)\,dt$*

Dimostrazione. Possiamo limitarci ad intervalli semiaperti: fissato c ed un punto $b>c$ che sia $+\infty$ o in cui f sia non limitata, si ha
$$\int_c^x f(t)\,dt \le \int_c^x g(t)\,dt \le \int_c^b g(t)\,dt$$
dato che $\int_c^b g(t)\,dt = \sup_{c<x<b}\int_c^x g(t)\,dt$ per la crescenza di $x\to\int_c^x g$; si conclude che $\lim_{x\to b^-}\int_c^x f = \sup_{c<x<b}\int_c^x f$ esiste finito. In modo esattamente analogo si ha
$$\int_x^c f(t)\,dt \le \int_x^c g(t)\,dt \le \int_a^c g(t)\,dt$$
e osservando che ora $x\to\int_x^c f(t)\,dt$ è decrescente si conclude □

Definizione 18.4.1 (Integrale generalizzato assolutamente convergente)**.** Sia f localmente Riemann integrabile sull'intervallo X. Un integrale generalizzato di f su X si dice *assolutamente convergente* se l'integrale generalizzato di $|f|$ su X è convergente. Si usa in tal caso anche dire che f è sommabile su X

Proposizione 18.4.2. *Un integrale generalizzato assolutamente convergente è convergente*

Dimostrazione. Si procede esattamente come nel caso delle serie: se $f : X \to \mathbb{R}$ è la funzione, si ha $f^+, f^- \leq |f|$ e per il criterio del confronto gli integrali generalizzati $\int_X f^+, \int_X f^-$ sono entrambi convergenti, allora $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$ è convergente. □

18.4.2 Altre considerazioni

Ci sono molte analogie tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie, come si avrà avuto modo di constatare. Ad esempio, agli effetti dell'esistenza dell'integrale generalizzato basta conoscere il comportamento della funzione intorno alle singolarità, così come per le serie bastava il comportamento da un certo indice in poi. Come per le serie, si confronta la funzione con altre di comportamento noto.

Proposizione 18.4.3. *Se attorno ad un punto una funzione localmente integrabile è dominata da una sommabile attorno al punto, allora è anch'essa sommabile attorno al punto. Pertanto se $f \in O_c(g)$ (O grande), e g p sommabile attorno a c, allora anche f è sommabile attorno a c*

Dimostrazione. Criterio del confronto □

Osservazione 540. Ovviamente se $f \in o_c(g)$, allora $f \in O_c(g)$.

Il più utile criterio di sommabilità è il seguente

Proposizione 18.4.4 (Criterio di asintoticità)**.** *Siano f, g mai nulle e localmente integrabili in un intervallo X avente un'accumulazione in c. Se $|f|$ e $|g|$ sono dello stesso ordine per $x \to c$ (ossia nelle ipotesi attuali $\lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) allora f è sommabile attorno a c se e solo se tale è g*

Dimostrazione. Ovviamente $\lambda > 0$; essendo allora $\lambda/2 < \lambda < (3/2)\lambda$ per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di c per ogni x del quale, c al più escluso, si ha

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \frac{3}{2}\lambda$$

da cui

$$\frac{\lambda}{2}\,|g(x)| < |f(x)| < \frac{3}{2}\lambda\,|g(x)|$$

in altre parole f è $O_c(g)$, e $g \in O_c(f)$ □

18.4.3 Integrali generalizzati e serie

Oltre alle analogie formali delle rispettive teorie, ci sono collegamenti diretti fra integrali generalizzati e serie.
La funzione di restrizione:

$$\varrho : \mathbb{R}^{[0,+\infty[} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

che ad ogni funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ associa la sua restrizione ϱf ad $\mathbb{N}$ è evidentemente suriettiva da $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ogni successione, funzione definita sull'insieme $\mathbb{N}$ di naturali può evidentemente essere estesa ad una funzione definita su tutti i reali positivi, ed altrettanto evidente che i modi per fare ciò sono molti. Quando si vogliono collegare serie ed integrali, l'inversa destra dell'applicazione di restrizione che interessa è la seguente funzione $a \to f_a$, che prolunga le successioni in funzioni localmente a scalino, dove per ogni successione $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pone $f_a(x) = a_{[x]}$. Si noti che essendo localmente a scalino, f_a è localmente integrabile e che si ha

$$\int_0^m f_a(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} a_k, \quad \text{per ogni } m \geq 1, m \in \mathbb{N}$$

Si noti che $a \to f_a$ è lineare in a (se una successione è somma di due successioni a e b allora $f_{a+b} = f_a + f_b$ ed $f_{\lambda a} = \lambda f_a$ se λ costante; si ha anche $f_{ab} = f_a f_b$).

Il seguente criterio id convergenza assoluta è classico; ha esattamente la stessa portata del criterio di condensazione di Cauchy, che può da esso essere dedotto

Teorema 18.4.5 (Criterio dell'integrale per la convergenza di una serie)**.** *Sia $f : [0, +\int[\to \mathbb{R}$ monotona decrescente e positiva. La serie*

$$\sum_{k=0}^{+} \infty f(k)$$

è convergente se e solo se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

è convergente

Dimostrazione. Essendo f decrescente da $[x] \leq x \leq [x] + 1$ si trae

$$f([x] + 1) \leq f(x) \leq f([x])$$

per ogni $x \geq 0$. Le funzioni $x \to f([x] + 1)$ e $x \to f([x])$ sono localmente integrabili, essendo a scalino su ogni intervallo limitato; integrando le precedenti disuguaglianze tra 0 e m si ha

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \int_0^m f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k$$

Da ciò si conclude subito: se la serie converge, essendo essa a termini positivi ogni ridotta è maggiorata dalla somma s della serie, per cui

$$\int_0^m f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k \leq s, \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}$$

per cui $I = \sup_{y\geq 0}\int_0^y f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ è finito. Viceversa, se l'integrale generalizzato I di f è finito si ha

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \int_0^m f(x) \leq I, \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}$$

per cui la successione delle ridotte è maggiorata da $a_0 + I$ e quindi converge □

Le idee legate al criterio forniscono una maggiorazione del resto per serie convergenti, spesso utile perché è più facile calcolare integrali che non sommare serie.

Proposizione 18.4.6. *Nelle ipotesi dell'enunciato precedente si ha*

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} f(k) \leq \sum_{m}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Dimostrazione. Ovvia □

Esempio 18.4.1. Si ha $\sum_{k=m+1}^{\infty} 1/k^2 \leq \int_m^{+\infty}(1/x^2)\ dx = 1/m$

18.4.4 Criterio di Abel-Dirichlet

Sia X unione finita di intervalli. Una funzione f che sia di classe C^1 su X si dirà a variazione limitata, o a variazione finita, su X se la derivata g' di g è assolutamente integrabile su X, $\int_X |g'(t)|\ \ dt < +\infty$. Se g è monotona, oltre che di classe C^1, in ciascuno degli intervalli che compongono X, allora g è a variazione limitata se e solo se è limitata. Enunciamo e dimostriamo il successivo criterio di convergenza semplice nel caso che la singolarità si trovi all'estremo superiore dell'intervallo, ma è chiaro che il criterio ha una portata generale

Teorema 18.4.7 (Criterio di Abel-Dirichlet)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a < b \leq +\infty$; siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabili; si supponga che f abbia un integrale indefinito limitato e che g sia di classe C^1, a variazione limitata, ed infinitesima per $x \to b^-$.Allora fg è integrabile in senso generalizzato su $[a, b]$*

Dimostrazione. Usiamo la formula di integrazione per parti più generale, vista in 17.13.2. Integrando per parti, supposto che F sia integrale indefinito per f si ha, per $a < x < b$,

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)g(t)\ dt &= [F(t)g(t)]_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)\ dt \\ &= F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)\ dt\end{aligned}$$

dobbiamo mostrare che esiste finito il limite di quest'espressione per $X \to b^-$; essendo $F(x)$ limitata e g infinitesima, si ha che $F(x)g(x)$ è infinitesimo. Affermare che l'integrale

$$\int_a^x F(t)g'(t)\ dt$$

ha limite finito per $x \to b^-$ equivale ad affermare che la funzione $F(x)g'(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a, b]$; e questo è senz'altro vero, perché essa è anche assolutamente integrabile su $[a, b]$, essendovi dominata dalla funzione $M\,|g'(x)|$, dove $M > 0$ è tale che sia $|F(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b[$; per ipotesi $|g'|$ è integrabile su $[a, b]$. $\square$

Capitolo 19

Integrali: vecchia versione

19.1 Integrali indefiniti

Si tratta da ora in poi il problema inverso della derivazione: cercheremo, data una funzione, $y = f(x)$ di determinare una funzione che ammetta $f(x)$ come derivata e che, per tale motivo verrà detta primitiva di $f(x)$.

19.1.1 Integrale indefinito

19.1.1.1 Introduzione

Definizione 19.1.1 (Funzione primitiva e integranda)**.** Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$, anche $F(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$ è una primitiva di $f(x)$; quest'ultima è la primitiva più generale (rappresenta tutte e sole le funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$) e prende il nome di *integrale indefinito* di $f(x)$ e si rappresenta con il simbolo

$$\int f(x)\, dx$$

che si legge *integrale di* $f(x)$ *in* dx. La $f(x)$ si dice *funzione integranda.*

Per definizione, dunque:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C \implies F'(x) = f(x)} \tag{19.1}$$

l'integrale indefinito di $f(x)$ è l'*insieme delle primitive* di $f(x)$.

Esempio 19.1.1. Considerando la funzione $3x^2$, chiedendoci qual'è la sua primitiva, ci viene in mente x^3, scriveremo pertanto

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

19.1.1.2 Relazioni tra integrale indefinito, derivata e differenziale

Ricordando che:

- il differenziale di una funzione $df(x)$ è la derivata della stessa, $f'(x)$ moltiplicata per dx (ovvero il differenziale della funzione x)

- che le regole di calcolo dei differenziali composti (ad esempio differenziale della somma, prodotto quoziente) sono le medesime di quelle derivate delle derivate

si possono ricavare alcune importanti relazioni tra integrale indefinito, derivata (indicata qui con D) e differenziale (indicato con d):

$$D\left[\int f(x)\ dx\right] = f(x) \tag{19.2}$$

$$d\left[\int f(x)\ dx\right] = f(x)\ dx \tag{19.3}$$

$$\int df(x) = f(x) + C \tag{19.4}$$

19.1.1.3 Continuità ed esistenza dell'integrale indefinito

Sappiamo che la derivata di una funzione continua può non esistere in qualche punto (es laddove derivata sinistra e destra non coincidono); invece si potrebbe dimostrare che: di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato esistono sempre le funzioni primitive e quindi esiste $\int f(x)\ dx$ (non sempre però si è in grado di determinare l'espressione analitica delle primitive).
Nel seguito ipotizziamo che le funzioni su cui operiamo siano continue, almeno in opportuni intervalli.

19.1.1.4 Integrale indefinito come operatore lineare

Gli integrali indefiniti sono operatori lineari, similmente alle derivate: l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali delle funzioni

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)]\ dx = k_1 \int f_1(x)\ dx + k_2 \int f_2(x)\ dx \tag{19.5}$$

Questo deriva dai seguenti fatti congiuntamente:

- una costante moltiplicativa si può trasportare dentro o fuori dal segno di integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx \tag{19.6}$$

- l'integrale di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica degli integrali delle singole funzioni

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\ dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx \tag{19.7}$$

Integrazione per decomposizione La linearità dell'operatore permette di calcolare l'integrale di una funzione quando questa può essere decomposta nella somma di funzioni di ciascuna delle quali si sappia determinare una primitiva; si parla in tal caso di integrazione per decomposizione.

19.1.2 Integrazioni immediate

Per **integrazione di una funzione** si intende la determinazione delle sue primitive; se la funzione integranda $f(x)$ è una funzione nota (o la si riesce ricondurre/riesprimere come tale) l'integrazione è immediata: le regole base (provenienti da quelle di derivazione, lette in senso contrario) vengono approfondite nel seguito.

19.1.2.1 Funzioni costanti

Se $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ si ha[1]:

$$\boxed{\int k\, dx = kx + C} \tag{19.8}$$

19.1.2.2 Funzioni potenza

Per calcolare l'integrale indefinito di una potenza di x avente per esponente un qualsiasi numero reale (ad eccezione di -1) la regola è:

$$\boxed{\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C} \tag{19.9}$$

Si ha infatti, per $\alpha \neq -1$

$$D_x\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$$

Nel caso particolare $\alpha = 0$, si deduce

$$\int dx = \int 1\, dx = x + C$$

Nel caso in cui sia $\alpha = -1$, la funzione integranda è $\frac{1}{x}$ che ricordiamo essere la derivata di $\log|x|$; si avrà quindi

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C} \tag{19.10}$$

Volendo generalizzare le due formule di cui sopra calcoliamo le derivate di due funzioni particolari:

- la prima è:

  $$D_x\left\{\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right\} = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)[f(x)]^{\alpha+1-1} \cdot f'(x)$$

  Dalla quale deriviamo la regola

  $$\boxed{\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C} \tag{19.11}$$

  sempre per $\alpha \neq -1$

[1] Questo è un caso particolare, se pur rilevante, di funzione potenza.

- la seconda è
$$D_x \{\log |f(x)|\} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
Si deduce che $\log |f(x)|$ è una primitiva di $\frac{f'(x)}{f(x)}$ e quindi è

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log |f(x)| + C} \tag{19.12}$$

19.1.2.3 Funzioni esponenziali

Considerando infine le derivate delle funzioni esponenziali si ha

$$\boxed{\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C} \tag{19.13}$$

$$\boxed{\int e^x\, dx = e^x + C} \tag{19.14}$$

Generalizzate porteranno a

$$\boxed{\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C} \tag{19.15}$$

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C} \tag{19.16}$$

19.1.2.4 Funzioni trigonometriche

Considerando altre derivate notevoli di funzioni trigonometriche otteniamo le seguenti regole di integrazione

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C} \tag{19.17}$$

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + C} \tag{19.18}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int 1 + \tan^2 x\, dx = \tan x + C} \tag{19.19}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C} \tag{19.20}$$

Ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte, potremo generalizzare le precedenti come:

$$D_x [\sin f(x)] = \cos f(x) \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \cos f(x) \cdot f'(x)\, dx = \sin f(x) + C} \tag{19.21}$$

$$D_x\left[-\cos f(x)\right] = \sin f(x) \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \sin f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\cos f(x) + C} \tag{19.22}$$

$$D_x\left[\tan f(x)\right] = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \tan f(x) + C} \tag{19.23}$$

$$D_x\left[-\cot f(x)\right] = \frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x) \longrightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, dx = -\cot f(x) + C} \tag{19.24}$$

19.1.2.5 Inverse delle goniometriche

Considerando le derivate delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C} \tag{19.25}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C} \tag{19.26}$$

La loro generalizzazione è:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \arcsin f(x) + C} \tag{19.27}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx = \arctan f(x) + C} \tag{19.28}$$

Può essere altresì utile ricordare seguenti formule. Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+m^2}\, dx = \int \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{m^2}}\, dx = \frac{1}{m} \int \frac{\frac{1}{m}}{1+\left(\frac{x}{m}\right)^2}\, dx$$

da cui

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{x}{m} + C} \tag{19.29}$$

Generalizzando avremo anche

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{f(x)}{m} + C} \tag{19.30}$$

che nel caso particolare $f(x) = x + k$ (e quindi $f'(x) = 1$ da luogo a

$$\boxed{\int \frac{1}{(x+k)^2+m^2}\, dx = \frac{1}{m} \arctan \frac{x+k}{m} + C} \tag{19.31}$$

19.1.2.6 Iperboliche

Si ha:

$$\boxed{\int \sinh x \, dx = \cosh x + C} \tag{19.32}$$

$$\boxed{\int \cosh x \, dx = \sinh x + C} \tag{19.33}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C} \tag{19.34}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C} \tag{19.35}$$

19.1.3 Integrazione per sostituzione

Il calcolo di un integrale $\int f(x) \, dx$ può talvolta risultare più semplice mediante una opportuna sostituzione; si può infatti dimostrare che l'integrale non cambia sostituendo alla variabile d'integrazione x una funzione di un'altra variabile t, purché tale funzione sia *derivabile* e *invertibile*.
Se poniamo $x = g(t)$, da cui deriva $dx = g'(t) \, dt$, si ha che è

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt}$$

e dunque supponendo di saper calcolare quest'ultimo integrale, si è reso possibile il calcolo dell'integrale iniziale; in alcuni casi la sostituzione è alternativa all'integrazione immediata, mentre in altri casi è indispensabile.

19.1.4 Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili in $[a; b]$ dalla derivata del loro prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

si ottiene

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

Ora prendendo l'integrale indefinito di entrambi i membri ed osservando che $\int (fg)' \, dx = fg$ si ottiene la formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f(x)g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx} \tag{19.36}$$

dove si chiama

- $f(x)$ fattore finito
- $dg(x) = g'(x) \, dx$ fattore differenziale

Integrando per parti è necessario saper individuare opportunamente f e g nel prodotto sotto integrazione:

- per g si dovrà scegliere il fattore del quale si sa calcolare l'integrale mediante una integrazione immediata;
- può essere che entrambi i fattori siano facilmente integrabili; in questo caso si sceglie g quello dei due che, integrato, conduce a una situazione più semplice nel secondo membro dell'uguaglianza dell'integrazione per parti.

Esempio 19.1.2.

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

Integriamo per parti, derivando la potenza di x e integrando la funzione trigonometrica

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

integriamo di nuovo per parti derivando ancora la potenza di x e integrando la funzione trigonometrica

$$= -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

Osservazione 541. L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni

$$\int x^n f(x) \, dx \tag{19.37}$$

con n intero positivo, dove $f(x)$ è una delle seguenti:

$$\sin(ax) \quad \cos(ax) \quad a^x \quad \sinh(ax) \quad \cosh(ax) \tag{19.38}$$

In questi casi si integra per parti n volte, sempre derivando la potenza di x.

Esempio 19.1.3.

$$\int e^{-x} \sin x \cos x \, dx$$

Conviene riscrivere $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ in modo che l'integranda risulti il prodotto di due funzioni. Quindi si integra per parti: la scelta di f e g' in questo primo passaggio non è importante, facciamo $g' = e^{-x}$:

$$I = \int e^{-x} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[-e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) \, dx \right]$$

ora integriamo nuovamente per parti; l'importante è scegliere g' e f coerentemente alla scelta fatta al primo passaggio

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) + \left[-e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) \, dx \right] = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - e^{-x} \cos(2x) - 4I$$

Abbiamo quindi stabilito che

$$I = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - e^{-x} \cos(2x) - 4I$$

da cui risolvendo l'equazione in I

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x) - e^{-x}\cos(2x)\right] + c \\ &= -\frac{e^{-x}}{10}(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + c \end{aligned}$$

Osservazione 542. L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni

$$I = \int f(x)g(x)\, dx$$

dove f, g sono due funzioni tra le seguenti

$$\sin(ax) \quad \cos(ax) \quad a^x \quad \sinh(ax) \quad \cosh(ax)$$

In tutti questi casi, si integra per parti 2 volte (scegliendo coerentemente f e g' nei due passaggi), e così facendo si trova una equazione in I che risolta da la primitiva cercata

Osservazione 543. Se sia f che g sono $\sin(ax), \cos(ax)$ c'è un modo più semplice di trovare la primitiva, mediante formule di duplicazione o prostaferesi (cfr 19.1.6)

Esempio 19.1.4.

$$\int x \log^2 x\, dx$$

Integriamo per parti con $g' = x$ e $f = \log^2 x$ e derivando questa seconda:

$$\int x \log^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2\frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \log^2 x - \int x \log x\, dx$$

integriamo di nuovo per parti derivando ancora la funzione logaritmica

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx\right) = \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2 + c$$

Osservazione 544. L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni

$$\int x^\alpha (\log_a x)^n\, dx$$

con n intero positivo, $\alpha \in \mathbb{R}$. In tutti questi casi si integra per parti n volte, sempre derivando la potenza di $\log_a x$.
Come caso particolare ci sono gli integrali

$$\int (\log_a x)^n\, dx$$

in cui si deriva $(\log_a x)^n$ e si integra 1.

Esempio 19.1.5.

$$\int x^2 \arctan x\, dx$$

integriamo per parti, derivando $f = \arctan$ e integrando $g = x^2$;

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x \, dx &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \int \frac{x^3}{3(1+x^2)} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int x - \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int x - \frac{x}{1+x^2} \, dx\end{aligned}$$

La seconda parte si integra come funzione razionale fratta (19.1.5), come segue:

$$\begin{aligned}\int x - \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{1+x^2} &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x^2+1)\end{aligned}$$

Quindi complessivamente

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \log(x^2+1)$$

Osservazione 545. L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni

$$\int x^k \arctan x \, dx$$

con k intero relativo. In tutti questi casi, si integra per parti una volta derivando $\arctan x$, e questo riconduce all'integrazione di una funzione razionale. Come caso particolare

$$\int \arctan x \, dx$$

in cui si deriva arctan e si integra 1.

19.1.5 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Siamo interessati ad una procedura per integrare funzioni del tipo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \, dx \tag{19.39}$$

con $N(x)$ un polinomio di grado m e $D(x)$ un polinomio di grado n.

19.1.5.1 Grado del numeratore superiore

Nel caso che sia $\boxed{m \geq n}$ si deve eseguire innanzitutto la divisione dei due polinomi, ottenendo come quoziente un polinomio $Q(x)$di grado $m-n$ e come resto un polinomio $R(x)$ di grado inferiore a n.
La funzione integranda si potrà riscrivere nella forma:

$$f(x) = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

A questo punto dovendo calcolare l'integrale di quest'ultima

$$\int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\, dx$$

$Q(x)$ è un polinomio, quindi di facile integrazione; per il secondo termine occorrerà saper integrare una funzione razionale fratta il cui numeratore sia un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore (ovvero il caso seguente).

Esempio 19.1.6. Per trovare

$$\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\, dx$$

per prima cosa bisogna eseguire la divisione di polinomi $x^3 : (x^2 + x - 2)$ da quoziente $(x - 1)$ e resto $(3x - 2)$, ossia

$$\frac{x^3}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2}$$

Il polinomio $(x - 1)$ si integra poi normalmente. In seguito alla scomposizione algebrica del secondo membro (vedi esercizi successivi) si avrà:

$$\frac{x^3}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x - 1} + \frac{8}{x + 2}\right)$$

da cui

$$\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\log|x - 1| + \frac{8}{3}\log|x + 2| + c$$

19.1.5.2 Grado del numeratore inferiore

Supponendo dunque che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore (altrimenti adottare le procedure della sezione precedente) si procederà a seconda del grado del denominatore.

Denominatore di primo grado In questo caso, tenendo conto che il numeratore è una costante, l'integrale si calcola facilmente mediante logaritmo. La formula generale è la seguente:

$$\int \frac{k}{ax + b}\, dx = \frac{k}{a}\log|ax + b| + C$$

Denominatore di secondo grado $N(x)$ può essere di grado uno o una costante. Ci proponiamo dunque di calcolare integrali del tipo:

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\, dx \qquad \int \frac{q}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

nei tre possibili casi dettati dal determinante del denominatore $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se $\boxed{\Delta > 0}$ il trinomio al denominatore si può scomporre in fattori e sarà

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

La funzione integranda (sia che al numeratore vi sia una costante che un polinomio di primo grado) si potrà allora decomporre nella somma:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

con A e B costanti da determinare come nell'esempio. Fatto questo l'integrazione è pressochè immediata mediante i logaritmi

$$\int \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\,dx = A\log|x-x_1| + B\log|x-x_2| + C$$

Esempio 19.1.7. L'integrazione funzione razionale risultante tra l'altro dallo scorso esempio (19.1.6)

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}$$

ha denominatore di 2 grado. Osserviamo che il denominatore ha due radici distinte, ossia si fattorizza come

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

quindi occorre applicare il metodo dei fratti semplici per riscrivere

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

I coefficienti A, B si determinano con i passaggi

$$\begin{aligned}&\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\&3x-2=x(A+B)+(2A-B)\\&\begin{cases}A+B=3\\2A-B=-2\end{cases}\end{aligned}$$

da cui $A=1/3$ e $B=8/3$ per cui

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\,dx &= \int \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{x+2}\,dx\\&=\frac{1}{3}\log|x-1|+\frac{8}{3}\log|x+2|+C\end{aligned}$$

Se $\boxed{\Delta=0}$ le radici x_1, x_2 sono coincidenti, si ha perciò

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

Si procederà:

- per numeratore di grado zero come segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}\,dx\\&=\frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,dx\\&=\frac{q}{a}\frac{(x-x_1)^{-2+1}}{-2+1}+C\\&=-\frac{q}{a(x-x_1)}+C\end{aligned}$$

- per numeratori di primo grado decomponendo la funzione integranda in una somma del tipo
$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{px+q}{a(x-x_1)^2} = \ldots = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_1)^2}$$
con A e B due costanti da determinare similmente al paragrafo precedente.

Se infine $\boxed{\Delta < 0}$, non esistono radici reali del denominatore che, come si potrebbe dimostrare, si può esprimere come somma di due quadrati:
$$ax^2+bx+c = a\left[(x+k)^2+m^2\right]$$
k ed m si ottengono sommando e sottraendo $b^2/4a^2$ dopo aver raccolto a, infatti
$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
Pertanto si ha che $k=\frac{b}{2a}$ e $m^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}=-\Delta/4a^2$.
Si procederà come segue:

- nel caso di **numeratore di grado zero** si effettua la sostituzione col quadrato e si riconduce all'uso dell'arcotangente:
$$\int \frac{c}{a\left[(x+k)^2+m^2\right]}\,dx = \frac{c}{am}\arctan\left(\frac{x+k}{m}\right)+C$$
Esempio 19.1.8.
$$\int \frac{5}{9x^2-6x+5}\,dx$$
Il trinomio $9x^2-6x+5$ ha il $\Delta<0$ e si può scrivere aggiungendo e sottraendo $\frac{b^2}{2a}=\frac{1}{9}$ dopo aver raccolto $a=9$ come
$$9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\right) = 9\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{5}{9}\right) = 9\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right]$$
Calcoliamo dunque
$$\int \frac{5}{9x^2-6x+5}\,dx = \int \frac{5\,dx}{9\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right]} = \frac{5}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{5}{9}\frac{1}{2/3}\arctan\frac{x-1/3}{2/3}+C$$
$$= \frac{5}{6}\arctan\frac{3x-1}{2}+C$$

- nel caso di **numeratore di primo grado** si cercherà di decomporre la funzione integranda nella somma di due frazioni algebriche in modo che nella prima compaia al numeratore la derivata del denominatore, ossia $2ax+b$, mentre nella seconda il numeratore sia una costante
$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{p\left(x+\frac{q}{p}\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{p\frac{1}{2a}\left(2ax+\frac{2aq}{p}\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b+\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right]$$
$$= \frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\frac{\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right]$$

L'integrale della prima frazione in parentesi + $\log\left|ax^2+bx+c\right| = \log\left(ax^2+bx+c\right)$, mentre l'integrale della seconda frazione si risolve mediante un arcotangente similmente a quanto si è fatto al punto precedente (quindi ci si riconduce ad un arcotangente).

Esempio 19.1.9. Calcoliamo

$$\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+11}$$

Poiché il trinomio al denominatore ha discriminante negativo, procediamo scomponendo la funzione integranda nella somma di due opportune frazioni algebriche: la prima delle due dovrà avere per numeratore la derivata del denominatore, cioè $8x+12$. Avremo:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{4x^2+12x+11} &= 3\frac{x+\frac{5}{3}}{4x^2+12x+11} = \frac{3}{8}\frac{8x+\frac{40}{3}+12-12}{4x^2+12x+11}\\
&= \frac{3}{8}\frac{(8x+12)+\left(\frac{40}{3}-12\right)}{4x^2+12x+11}\\
&= \frac{3}{8}\frac{8x+12}{4x^2+12x+11}+\frac{3}{8}\frac{\frac{4}{3}}{4x^2+12x+11}
\end{aligned}$$

e sarà quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+11}\,dx &= \frac{3}{8}\int\frac{8x+12}{4x^2+12x+11}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{4x^2+12x+11}\\
&= \frac{3}{8}\log(4x^2+12x+11)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{4x^2+12x+11}
\end{aligned}$$

dove abbiamo tralasciato il valore assoluto entro logaritmo dato che il polinomio argomento è sempre positivo.
Per la seconda parte scriviamo il denominatore come somma di quadrati e arriviamo all'utilizzo dell'arcotangente, come visto nel caso di numeratore di grado 0. Si ha che

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{4x^2+12x+11} &= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+3x+\frac{11}{4}} = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{11}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}^2\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+C\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$

E quindi complessivamente

$$\int\frac{3x+5}{4x^2+12x+11}\,dx = \frac{3}{8}\log(4x^2+12x+11)+\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{2}}+C$$

Risoluzioni mediante sostituzione Alternativamente in questo tipo di funzioni razionali si può utilizzare una qualche sostituzione, come mostrato nei seguenti esempi.

Esempio 19.1.10.

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx \tag{19.40}$$

Sostituendo $t = 3x + 2$

$$\int \frac{(t-2)/3+1}{t^2}\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt \tag{19.41}$$

e da qui si prosegue usualmente.

Esempio 19.1.11.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}\,dx$$

Funzione razionale: il numeratore ha grado $<$ del grado del denominatore (non si esegue la divisione; il denominatore ha grado 2 ed è un quadrato perfetto ($x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$). L'integrale si calcola allora per sostituzione ponendo $t = x + 3$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+3)^2}\,dx &= [x+3=t;\ dx =\ dt]\\ &= \int \frac{2(t-3)+1}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}\right)\\ &= 2\log|t| + \frac{5}{t} + c = 2\log|x+3| + \frac{5}{x+3} + c\end{aligned}$$

L'utilità della sostituzione è permettere, successivamente, di spezzare la frazione in somma di potenze (negative) di t che si integrano una per una. Tenendo conto di questo, con un po' di osservazione si può raggiungere direttamente l'obiettivo senza nessuna sostituzione, così:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{2(x+3)-5}{(x+3)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}\right)dx\\ &= 2\log|x+3| + \frac{5}{x+3} + c\end{aligned}$$

Denominatore di grado > 2 In questo caso è sempre possibile (teoricamente) scomporre il denominatore in un prodotto di (potenze di) fattori di primo grado, oppure di secondo grado irriducibili. Fatto questo si scompone la frazione in fratti semplici a cui si applicano i discorsi precedenti. Nel seguito vediamo alcuni semplici esempi:

- nel caso il denominatore sia fattorizzabile (vedi Ruffini) come prodotto di polinomi di primo grado si procede analogamente a quanto visto, scomponendo la frazione in una somma di frazioni è andandone a determinare i vari numeratori mediante il principio di identità dei polinomi.

  Esempio 19.1.12.

  $$\frac{1}{x^3-6x^2+11x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

  e si procede similmente a quanto fatto in precedenza.

- se il denominatore si riesce a decomporre in polinomi in cui uno è di grado due (e non è ulteriormente scomponibile), nella decomposizione algebrica dove si determinato il valore delle lettere al numeratore si deve porre sempre un polinomio (in funzione delle lettere) che abbia grado inferiore di una unità rispetto a quello del denominatore, e determinare le lettere incognite come già affrontato.

  Esempio 19.1.13. Considerando
  $$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}\,dx$$
  dato che $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$ impostiamo la scomposizione come
  $$\frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
  e procediamo di consueto.

  Esempio 19.1.14.
  $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx$$
  il fattore (x^2-x+1) è irriducibile. Si scompone la frazione come
  $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx=\frac{Ax+B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

  Esempio 19.1.15.
  $$\int \frac{1+2x^2}{x^4-1}\,dx$$
  Funzione razionale: il numeratore ha grado minore del denominatore (non si esegue divisione); il denominatore ha grado >2 quindi va per prima cosa decomposto in polinomi irriducibili:
  $$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
  Ora col metodo dei fratti semplici bisogna riscrivere la frazione come somma
  $$\frac{1+2x^2}{x^4-1}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{cx+d}{(x^2+1)}$$
  Si osservi la forma della scomposizione: i denominatori sono i fattori irriducibili del denominatore di partenza; nelle frazioni a secondo membro il numeratore incognito è sempre di un grado inferiore al denominatore corrispondente. Occorre ora fare denominatore comune al secondo membro e risolvere il sistema di 4 equazioni in 4 incognite, per trovare a,b,c,d.
  Un po' di osservazione algebrica può risparmiare fatica: se poniamo $b=-a$ e $c=0$ otteniamo
  $$\begin{aligned}\frac{1+2x^2}{x^4-1}&=\frac{a}{x-1}-\frac{a}{x+1}+\frac{d}{x^2+1}=\frac{2a}{x^2-1}+\frac{d}{x^2+1}\\&=\frac{x^2(2a+d)+(2a-d)}{x^4-1}\end{aligned}$$

che porta al sistema (risolubile) di due equazioni in due incognite.

$$\begin{cases} 2a + d = 2 \\ 2a - d = 1 \end{cases}$$

cioè $a = 3/4$, $d = 1/2$ per cui la scomposizione per esteso

$$\frac{1 + 2x^2}{x^4 - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} - \frac{\frac{3}{4}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + 2x^2}{x^4 - 1} &= \int \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} - \int \frac{\frac{3}{4}}{x + 1} + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{3}{4} \log |x - 1| - \frac{3}{4} \log |x + 1| + \frac{1}{2} \arctan x + C \\ &= \frac{3}{4} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

- nel caso il polinomio si presenti nella forma

$$\frac{N(x)}{(x - \alpha)^n} \tag{19.42}$$

con $N(x)$ polinomio di grado minore di n si può decomporre nella somma

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$$

dove ancora i numeratori si determineranno sulla base del principio di identità dei polinomi.

Se il grado del denominatore è molto maggiore di due, conviene passare a del software specialistico.

19.1.5.3 Funzioni razionali di e^x

Dovendo integrare una funzione razionale di e^x, si effettua la sostituzione $e^x = t$ e ci si riconduce a una funzione razionale di t. Occorrerà alla fine tornare alla variabile x.

Esempio 19.1.16. Considerando

$$\int \frac{1}{\cosh} \, dx = 2 \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$$

Sostituiamo ponendo $e^x = t, x = \log t, \; dx = \frac{dt}{t}$:

$$2 \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \arctan t + c = 2 \arctan(e^x) + C$$

19.1.5.4 Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

L'integrale di una funzione razionale di $\sin x$ e/o $\cos x$ può sempre esser ricondotto all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$ $(x = 2\arctan t,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt)$, giustificata dalle seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \qquad \text{se } t = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$$

Questo metodo porta in genere a calcoli laboriosi e va utilizzato solo quando non sembra esservi una via più semplice o un buon software a portata di mano.

19.1.6 Integrali di particolari funzioni trigonometriche

Integrali del tipo:

$$\boxed{\int f(\sin x)\cos x\ dx} \tag{19.43}$$

$$\boxed{\int f(\cos x)\sin x\ dx} \tag{19.44}$$

si risolvono effettuando rispettivamente le sostituzioni $\sin x = t$ e $\cos x = t$. Questo è il primo passo: i passi successivi dipendono dalla forma di f. Se f è una funzione razionale ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale, ma ci possono capitare anche altre situazioni (ad esempio ridursi ad una integrazione per parti).
Un caso particolare è il seguente:

$$\boxed{\int (\sin x)^m (\cos x)^n\ dx} \tag{19.45}$$

con n, m interi ≥ 0:

- se *almeno uno degli esponenti n, m è dispari* è sempre possibile riscrivere la funzione integranda in una delle forme precedenti (equazioni 19.43 19.44) usando se necessario l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. A questo punto l'integrale si calcola, analogamente, mediante sostituzione $\sin x = t$ e $\cos x = t$ rispettivamente;

- se invece *entrambi gli esponenti sono pari* si possono usare le formule trigonometriche per l'abbassamento di grado:

$$(\cos x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$(\sin x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos x \sin x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Per integrali del tipo:

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx} \tag{19.46}$$

$$\boxed{\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx} \tag{19.47}$$

$$\boxed{\int \cos \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx} \tag{19.48}$$

si possono usare le formule di prostaferesi che riconducono alla somma di due integrali immediati.
Se si sta calcolando un integrale definito, è utile tener presenti le seguenti identità:

$$\boxed{\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \cos^2(kx) \, dx = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \sin^2(kx) \, dx = n\frac{\pi}{4}}$$

per ogni n, k interi positivi.
Le funzioni del tipo

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x) \, dx}$$

con R funzione razionale di due variabili si gestiscono mediante sostituzioni del tipo:

$$t = \tan\frac{x}{2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

riconducendole all'integrale di una funzione razionale di t. Questo metodo va utilizzato solo quando non vi sono strade più semplici e dopo aver semplificato al massimo la funzione, perché può portare facilmente a funzioni razionali con polinomi di grado alto.

Esempio 19.1.17.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} \, dx$$

Osserviamo che se l'integranda si riscrive nella forma

$$\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot (1-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}$$

assume l'aspetto $f(\sin x) \cdot \cos x$, il che suggerisce di effettuare la sostituzione $\sin x = t, \cos x \, dx \, dt$, con $t \in [0, 1]$ per cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} \, dx = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \, dt$$

Dopodiché è una funzione razionale che si integra con i metodi consueti

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right) dt = [2\arctan t - t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esempio 19.1.18.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx$$

Si tratta usiamo di una forma con n, m entrambi pari: usiamo le formule di duplicazione per abbassare il grado del polinomio. Poiché $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$ si ha

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \; dx$$

A questo punto non conviene calcolare la primitiva dell'integranda, ma invece osservare gli estremi di integrazione per dedurre che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x \; dx$$

è nullo per simmetria (ponendo $2x = t$ si vede che è multiplo dell'integrale $\int_0^{\pi} \cos x \; dx = 0$, mentre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x \; dx = \frac{\pi}{4}$$

integrale definito notevole che si usa spesso. Quindi

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \; dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{3}{16}\pi$$

Esempio 19.1.19.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

Si tratta di una funzione razionale di $\cos x, \sin x$ che non rientra in situazioni più semplici già viste. Per queste si può usare la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\; dx = \frac{2\;dt}{1+t^2}$ con $t \in [0, 1]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2\;dt}{(1+t^2)\Big(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)}$$

ora l'integrale è ricondotto a quello di una funzione razionale e procediamo come di consueto

$$\int_0^1 \frac{2\;dt}{t^2+3} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

19.1.7 Integrali di particolari funzioni irrazionali

Supponendo di dover calcolare l'integrale di una funzione

$$\boxed{\int f(x; \sqrt{ax^2+bx+c})}$$

con f una funzione razionale di x e di $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
Se non si riesce a calcolare l'integrale con i metodi di integrazione fin qui visti, si può ricorrere alle cosiddette sostituzioni di Eulero. Si procederà diversamente a seconda che $a > 0$ o $a < 0$:

- se $a > 0$, ponendo
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a} \cdot x$$
la funzione integranda diventa funzione razionale della variabile t

- se $a < 0$, le radici del trinomio ax^2+bx+c sono reali (ipotizziamo α e β).
Si avrà $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.
La determinazione dell'integrale si può ricondurre al calcolo integrale di funzioni razionali di t con la sostituzione
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$

Supponendo invece di dover calcolare gli integrali di funzioni

$$\boxed{\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})}$$
$$\boxed{\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})}$$
$$\boxed{\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})}$$

con R funzione razionale di x ed una delle seguenti di cui sopra, nell'ipotesi che sia sempre $a > 0$, si effettuano rispettivamente le seguenti sostituzioni standard:

1. nel primo caso si pone $x = a\sin t$ e $dx = a\cos t\ dt$
$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-(\sin t)^2)} = a\,|\cos t|$$
Nel caso si stia calcolando un integrale definito si sa dove varia xe quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno.
L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sin t, \cos t$; a sua volta questo è riconducibile a quello di una funzione razionale mediante la sostituzione $\tan \frac{t}{2} = u$ (o un'altra via più semplice se possibile).

Esempio 19.1.20.
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$$
integrale di una funzione irrazionale che coinvolge una espressione del tipo $\sqrt{a^2-x^2}$; si affronta con la sostituzione $x = a\sin t$. Nel nostro caso $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\ dt$ con $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ quindi
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{4\cos^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t\ dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 t\ dt$$
ricordando che $(\cot t)' = -1 - \cot^2 t$
$$\ldots = -\left[t + \cot t\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Si noti che nel passaggio $\sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t$ abbiamo sfruttato il fatto che nell'intervallo di integrazione $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ è $\cos t \geq 0$

2. nel secondo si pone $x = a\sinh t$ e $dx = a\cosh t\ dt$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + (\sinh t)^2)} = a\cosh t$$

Si osservi che $\cosh t$ è sempre positivo.
L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sinh t$, $\cosh t$. A sua volta questo è riconducibile all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione $e^t = u; t = \log u;\ dt = \frac{du}{u}$ (oppure l'integrale si calcola per un'altra via più semplice se disponibile

3. nel terzo caso,

   - se $x \geq a$ si pone $x = a\cosh t$ e $dx = a\sinh t\ dt$:

   $$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2((\cosh t)^2 - 1)} = \sinh t$$

   Nel caso si stia calcolando un integrale definito si sa dove varia xe quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno. L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sinh t$, $\cosh t$ (vedi secondo caso).
   - se invece $x \leq -a$ si pone invece $x = -a\cosh t$ e $dx = -a\sinh t\ dt$

Esempio 19.1.21.

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{4x^2 - 1}$$

Integrale di una funzione irrazionale che coinvolge una espressione del tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$, si affronta con la sostituzione $x = a\cosh t$. Nel nostro caso $2x = \cosh t;\ dx = \frac{Sht}{2}\ dt$ per cui

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{4x^2 - 1} = \int_{0}^{\operatorname{arccosh} 2} \frac{1}{2}\sinh^2 t\ dt = \frac{1}{4}\left[\sinh t\cosh t - t\right]_0^{\operatorname{arccosh} 2}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(2\sqrt{3} - \operatorname{arccosh} 2\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{arccosh} 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{3})$$

Osservazione 546. Osserviamo che quando si effettuano le sostituzioni 2 e 3 nel ritornare alla variabile x occorre usare le funzioni iperboliche inverse:

$$x = a\cosh t \text{ (per } t > 0) \implies t = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$$
$$x = a\sinh t \implies t = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right)$$

Capita spesso in queste circostanze di dover calcolare espressioni del tipo $\sinh(\operatorname{arccosh}\alpha)$ o $\cosh(\operatorname{arcsinh}\alpha)$. Ricordando la relazione $\cosh^2 = 1 + \sinh^2 x$ si vede subito che:

$$\sinh(\operatorname{arccosh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$
$$\cosh(\operatorname{arcsinh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

il che aiuta a semplificare queste espressioni.

Nel caso particolare di integrali del tipo:

$$\boxed{\int x^{2n+1} R(\sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx}$$

con n intero relativo e R funzione razionale si pone $\sqrt{x^2 \pm a^2} = t$ che porta a

$$x\, dx = t\, dt \quad x^{2x+1}\, dx = (t^2 \mp a^2)^n t\, dt$$

e quindi trasforma l'integrale in quello di una funzione razionale di t.
Occhio che se si cerca di applicare erroneamente questa sostituzione in un caso in cui non è presente una potenza dispari di x fuori dalla radice ci si trova in un vicolo cieco.

Esempio 19.1.22.

$$\int x^3 \sqrt{2x^2 + 1}\, dx$$

Si potrebbe effettuare la sostituzione $\sqrt{2}x = \sinh t$ come procedura standard, ma in questo c'è una strada molto più semplice, segnalata dalla presenza di una potenza dispari di x che moltiplica la radice quadrata. Eseguiamo la sostituzione $\sqrt{2x^2 + 1} = t$ che porta a

$$2x^2 + 1 = t^2 \quad 4x\, dx = 2t\, dt \quad x\, dx \frac{1}{2} t\, dt$$

e quindi

$$x^3\, dx = x^2 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}(t^2 1)\frac{1}{2} t\, dt$$

Così si ha

$$\int x^3 \sqrt{2x^2 + 1}\, dx = \int t \cdot \frac{1}{2}(t^2 - 1)\frac{1}{2} t\, dt = \frac{1}{4}\int (t^4 - t^2)\, dt =$$

Come si vede l'integrale è stato ridotto a quello di una funzione razionale, senza passare dall'utilizzo di funzioni iperboliche

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}(2x^2 + 1)^{5/2} - \frac{1}{3}(2x^2 + 1)^{3/2}\right) + c$$

Infine supponendo di dover integrare una funzione razionale del tipo

$$\boxed{\int R(x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, \ldots)\, dx}$$

con n_i, m_i interi relativi e R funzione razionale, si pone $x = t^n$ con n uguale al minimo comune multiplo di $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Si ha quindi $dx = nt^{n-1}\, dt$ e si ottiene una funzione razionale di t. Integrata questa, si torna alla variabile x.

Esempio 19.1.23.

$$\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{2/3}}$$

Si effettua la sostituzione $x^{1/3} = t$, per cui $x = t^3$, $x^{2/3} = t^2$, $dx = 3t^2\, dt$, $t \in [1, 2]$, ottenendo

$$\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{2/3}} = \int_1^2 \frac{3t^2}{t + t^2}\, dt = \int_1^2 \frac{3t}{1 + t}\, dt = 3\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt$$

$$= 3\left[t - \log|1 + t|\right]_1^2 = 3 - 3\log\frac{3}{2}$$

19.2 Integrali definiti

Nelle applicazioni di carattere scientifico e tecnico si presentano molto spesso situazioni in cui la misura dell'area limitata dal grafico di una funzione e dall'asse delle ascisse in un certo intervallo di valori della variabile indipendente viene ad assumere un significato rilevante.

19.2.1 Introduzione

Considerando una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$ chiuso e limitato, ci proponiamo di valutare la misura dell'area della regione di piano delimitata

1. dalla curva di equazione $y = f(x)$;
2. dall'asse delle x;
3. dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$.

Suddividiamo l'intervallo, che ha ampiezza $b - a$ in n parti uguali, ciascuna delle quali avrà ampiezza

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Gli estremi degli n intervallini saranno dati da:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = a + 2 \cdot h; \quad \dots; \quad x_n = b$$

ovvero

$$x_i = a + i \cdot h \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Definizione mediante somma integrale superiore e inferiore In ciascuno dei $j = n - 1$ intervallini la funzione è continua e perciò per il teorema di Weierstrass assume un massimo (che indichiamo con M_j) e un minimo (m_j). Considerando ora le seguenti somme:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot h \tag{19.49}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot h \tag{19.50}$$

sono rispettivamente la *somma integrale inferiore* e la *somma integrale superiore* della funzione $f(x)$.
Le somme integrali inferiore e superiore si possono considerare approssimazioni rispettivamente per difetto e per eccesso della misura dell'area sottesa al grafico della funzione considerata nell'intervallo $[a; b]$. Tali approssimazioni, come si può intuire, migliorano al crescere del numero di n parti in cui è stato suddiviso l'intervallo; questo perché in ogni suddivisione minimo e massimo tendono progressivamente ad avvicinarsi (coincidendo entrambi, per $n \to +\infty$, al valore assunto dalla funzione stessa).

E' intuitivamente evidente che le successione delle somme integrali inferiori e superiori:

$$\begin{aligned} &s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \\ &S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \end{aligned}$$

convergono ad un unico limite che rappresenta la misura I dell'area di interesse:

$$I = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n \tag{19.51}$$

Tale integrale si chiama **integrale definito** della funzione $f(x)$ e si indica con il simbolo :

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{19.52}$$

Definizione mediante successione di Cauchy-Riemann In ciascuno dei $j = n - 1$ intervallini scegliamo un *punto arbitrario* ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$. Costruiamo la somma di Cauchy-Riemann come

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \tag{19.53}$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza passiamo al limite per $n \to +\infty$ analogamente a quanto fatto in precedenza.
Diciamo allora che la funzione è integrabile in $[a; b]$ se,

- detta S_n una qualsiasi successione di Cauchy-Riemann esiste finito il limite di S_n

- tale limite non dipende da come abbiamo scelto i punti ξ_j

In tal caso si pone:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx$$

e si legge[2] integrale da a a b di $f(x)$ in dx. La variabile x si dice *variabile d'integrazione* ed è una variabile muta; infatti la scrittura $\int_a^b f(t)\, dt$ ha lo stesso significato di $\int_a^b f(x)\, dx$ (così come avviene per gli indici delle sommatorie). Infine notiamo che l'integrale definito è un numero a contrario di quello indefinito (un insieme di funzioni).

19.2.2 Proprietà degli integrali definiti

1. si ha innanzitutto

$$\boxed{\int_a^a f(x)\, dx = 0} \tag{19.54}$$

[2]A livello di notazione, il segno $\int$ (una esse allungata) è una deformazione del simbolo di somma; la scrittura $f(x)\, dx$ ricorda il prodotto del valore di $f(x)$ per la lunghezza di un piccolo intervallo sull'asse x; tutta la scrittura quindi ricorda il procedimento con cui l'integrale è stato definito

2. inoltre per convenzione

$$\boxed{\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx} \tag{19.55}$$

per giustificare questa seconda ricordiamo che, per calcolare l'integrale $\int_a^b$ occorre determinare il limite comune delle successioni delle somme integrali inferiori s_n e S_n. In tali espressioni figura il termine $h = \frac{b-a}{n}$. Quando invece si calcolare l'integrale $\int_b^a$ il termine risulta essere $h = \frac{a-b}{n}$ ed è quindi di segno opposto rispetto a quello precedente e risulteranno perciò cambiate di segno anche tutte le somme integrali (e quindi risulterà cambiato di segno anche il loro limite)

3. considerando una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$ e sia c un punto interno di tale intervallo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx} \tag{19.56}$$

Inoltre, tenendo presente la 19.55 di cui sopra, vale anche se il punto c non è interno all'intervallo $[a; b]$

4. l'integrale definito della somma di due funzioni continue nell'intervallo $[a; b]$ è la somma dei loro integrali definiti:

$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx} \tag{19.57}$$

5. l'integrale definito del prodotto di una funzione per una costante è uguale al prodotto della costante per l'integrale definito della funzione

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx} \tag{19.58}$$

Congiuntamente la 19.57 e la 19.58, si possono esprimere come

$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) + \alpha g(x)]\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \alpha \int_a^b g(x)\ dx} \tag{19.59}$$

ossia l'integrale definito della combinazione lineare di due funzioni è la combinazione lineare dei loro integrali definiti; diremo perciò che, come l'integrale indefinito, anche l'integrale definito è un **operatore lineare**

6. infine si verifica facilmente che

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx} \tag{19.60}$$

19.2.3 Teorema della media

Un'altra importante proprietà degli integrali definiti è espressa dal seguente teorema: se la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$ allora esiste un punto c di tale intervallo per cui si ha

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)} \tag{19.61}$$

o equivalentemente

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Il valore $f(c)$ prende il nome di **valore medio** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a;b]$; si può pensare come limite per $n \to +\infty$ della media aritmetica dei valori che la funzione assume nei punti $c_1, c_n, \ldots, c_n$ interni rispettivamente a ciascuno degli n intervalli uguali in cui è stato diviso l'intervallo $[a;b]$ $\left(h = \frac{b-a}{n} \to n = \frac{b-a}{h}\right)$

Il teorema della media ha anche una semplice interpretazione geometrica: esiste almeno un punto $c(a \leq c \leq b)$ tale che il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza $f(c)$ è equivalente all'area sottesa la curva di misura $\int_a^b f(x)\,dx$.

19.2.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il legame esistente tra una funzione e la funzione integrale a essa associata è espresso dal seguente teorema: se la funzione $f(x)$ è continua in $[a;b]$, la corrispondente funzione integrale $F(x)$ è derivabile e, $\forall x \in [a;b]$, risulta

$$F'(x) = f(x) \tag{19.62}$$

La funzione integrale $F(x)$ è quindi una primitiva di $f(x)$. La primitiva generale di $f(x)$ è il suo integrale indefinito ovvero

$$F(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx + C \tag{19.63}$$

perciò si ha

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C} \tag{19.64}$$

Da quest'ultima relazione si può anche dedurre che l'integrale indefinito di una funzione continua in un intervallo $[a;b]$ esiste sempre.

19.2.5 Formula fondamentale del calcolo integrale

Fissiamo l'attenzione su *una* particolare primitiva, ottenuta per un determinato valore di C

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C_1$$

Consideriamo che $\varphi(a) = 0 + C_1 = C_1$, mentre $\varphi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + \varphi(a)$, da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)} \tag{19.65}$$

Il numero $\varphi(b) - \varphi(a)$ viene anche scritto in notazione come $|\varphi(x)|_a^b$ o $[\varphi(x)]_a^b$.

Pertanto l'integrale definito di una funzione è uguale alla differenza dei valori assunti da una qualsiasi primitiva di tale funzione, rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

Il calcolo degli integrali definiti viene così ricondotto a quello degli indefiniti; nella pratica per calcolare la primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ si determina l'integrale indefinito di $f(x)$ (cioè la totalità delle primitive) e si sceglie come $\varphi(x)$ la primitiva corrispondente al valore $C = 0$.

19.2.6 Aspetti pratici utili per il calcolo

Calcolo degli integrali definiti con il metodo di sostituzione Nel caso in cui, per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ si utilizzi il metodo di sostituzione per determinare la primitiva della funzione integranda, nell'applicare la formula fondamentale del calcolo integrale bisogna ricordare che gli estremi di integrazione a e b si riferiscono a valori della variabile di integrazione originaria x. Pertanto dopo aver trovato la primitiva $\varphi(t)$ espressa come funzione di t, si potrà procedere alternativamente:

- calcolando i valori della variabile ausiliaria t corrispondenti ai valori di a e b nella variabile originaria x; tali valori saranno i nuovi estremi di integrazione. Perciò detti rispettivamente t_1 e t_2 tali valori ($t_1 = t(a)$ e $t_2 = t(b)$), si applicherà la formula fondamentale calcolando $|\varphi(x)|_{t_1}^{t_2} = \varphi(t_2) - \varphi(t_1)$

- operando, nell'espressione della primitiva $\varphi(t)$, la sostituzione inversa di quella operata integrando per sostituzione, cioè si esprime t in funzione di x; si ottiene così la primitiva $\varphi(x)$ della funzione integranda, espressa come funzione della variabile originaria x. Si applica poi la formula fondamentale, calcolando $|\varphi(x)|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$;

Esempio 19.2.1. Per il primo modo di procedere

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\,dx$$

sostituiamo $\log x = t$, per cui $\frac{1}{x}\,dx = \,dt$ e $t \in [0, \log 2]$ da cui

$$\int_0^{\log 2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{3}\log^3 2$$

Esempio 19.2.2. Alternativamente lasciamo da parte momentaneamente l'integrale definito e si comincia cercando una primitiva dell'integranda: nell'esempio precedente si comincia a calcolare

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \left[\log x = t; \frac{1}{x}\,dx = \,dt\right] = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3}\log^3 x + c$$

La cosa importante da osservare è che, in questo caso, una volta trovata la primitiva rispetto alla nuova variabile t (in questo caso $t^3/3+c$) occorre ritornare alla variabile originaria x (in questo caso ricordando che $t = \log x$). A questo punto si calcola l'integrale definito sostituendo gli estremi di partenza nella primitiva trovata:

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{3}\log^3 x\right]_1^2 = \frac{1}{3}\log^3 2$$

Osservazioni su integrali definiti di funzioni pari e dispari Poiché il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine l'integrale seguente risulta nullo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \tag{19.66}$$

pertanto in questo caso non sono necessari calcoli. Una funzione pari è simmetrica rispetto all'asse delle y, quindi sarà

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \tag{19.67}$$

In questo caso quindi ci si può limitare a studiare l'integrale da 0 ad a.

Esempio 19.2.3.

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}(x^2+2x)\, dx$$

Innanzitutto possiamo spezzare l'integrale come segue:

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}(x^2+2x)\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-|x|}x^2\, dx + \int_{-1}^{1} e^{-|x|}2x\, dx$$

Ora nel primo integrale la funzione integranda è pari, nel secondo è dispari; l'intervallo di integrazione simmetrico, perciò

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}2x\, dx = 0 \quad \text{e inoltre} \quad \int_{-1}^{1} e^{-|x|}x^2\, dx = 2\int_0^1 e^{-|x|}x^2\, dx$$

Osserviamo che nel secondo integrale il valore assoluto si può togliere perché l'intervallo di integrazione è ora $[0,1]$ e per $x \in [0,1]$. Quindi l'integrale di partenza è uguale a

$$2\int_0^1 e^{-x}x^2\, dx = \left[2e^{-x}(-2-2x-x^2)\right]_0^1 = 4 - \frac{10}{e}$$

risolto mediante due integrazioni per parti

Osservazioni su integrali con valori assoluti Supponiamo di dover integrare una funzione che presenti uno/più valori assoluti. Allora occorrerà:

1. ridefinire la funzione a tratti in maniera tali che i valori assoluti scompaiano (appropriatamente in ragione del valore assunto da x);
2. procedere ad integrare per "pezzi" la funzione e fare la somma degli integrali così ottenuti.

Esempio 19.2.4.

$$\int_0^{\pi} x\,|\cos x|\ dx$$

L'integranda contiene la funzione $|\cos x|$; il valore assoluto rende scomoda l'applicazione della tecnica standard per trattare una funzione come $x\cos x$. Per togliere il valore assoluto osserviamo che nell'intervallo di integrazione $[0,\pi]$ risulta

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{per } x \in [0,\pi/2] \\ -\cos x & \text{per } x \in [\pi/2.\pi] \end{cases}$$

Si può spezzare e riscrivere come

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\,|\cos x|\ dx &= \int_0^{\pi/2} x\,|\cos x|\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x\,|\cos x|\ dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x\cos x\ dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x\ dx \end{aligned}$$

Con delle consuete integrazioni per parti si arriva a

$$[x\sin x + \cos x]_0^{\pi/2} - [x\sin x + \cos x]_{\pi/2}^{\pi} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) - \left(-1 - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

19.2.7 Integrazione numerica

Spesso anche per funzioni continue abbastanza semplici dotate di primitiva è a volte di fatto difficile scrivere l'espressione analitica della stessa, e quindi a procedere al calcolo effettivo dell'integrale definito applicando la formula fondamentale del calcolo integrale risulta in pratica impossibile. In questi casi può essere utile avere una *valutazione approssimata del valore numerico* di un integrale definito.
Il modo più semplice di procedere è usare la definizione stessa. Sappiamo che la successione s_n di Cauchy-Riemann (che può essere calcolato facilmente mediante un computer) tende all'integrale per $n \to \infty$; tuttavia necessitiamo di un metodo che ci permetta di stimare a priori l'*errore commesso* in questa approssimazione.

Teorema 19.2.1 (Metodo del punto medio)**.** *Sia $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile con continuità; K una costante tale che:*

$$|f''(x)| \le K, \qquad \forall x \in [a,b]$$

Poiché f'' è continua su $[a;b]$, è anche limitata, pertanto una K di questo tipo esiste certamente.
Considerando per la somma di Cauchy-Riemann s_n per f, scegliendo in ognuno degli $i = 1,\dots,n$ intervallini il punto medio dell'intervallo:

$$s_n = \sum_{i=i}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

Allora l'errore commesso nell'approssimazione è limitato come segue:

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - s_n\right| \le \frac{K}{24}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^4}$$

Dimostrazione. Bramanti 1 pag 294 □

Osservazione 547. Pertanto: a parità di n l'errore può aumentare se aumenta $b-a$ (ovvero usiamo lo stesso numero di intervalli per una ampiezza maggiore); a parità di intervallo $b-a$, se n aumenta l'errore può solo diminuire

19.3 Integrali generalizzati

In precedenza abbiamo concentrato l'attenzione su funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato. In molte situazioni concrete tuttavia si presenta la necessità di:

- integrare funzioni illimitate (ad esempio con asintoti verticale) in un intervallo limitato;
- integrare funzioni limitate in un intervallo illimitato;
- integrare funzioni illimitate in un intervallo illimitato
- integrare funzioni dotata di un numero finito di punti di discontinuità

In questa sezione ci concentriamo su queste tipologie di integrali (detti generalizzati o altre volte impropri).

Definizione 19.3.1 (Funzione integrabile in senso proprio (o generalizzato))**.** In breve una funzione è integrabile se il limite dell'integrale generalizzato esiste ed è finito.

19.3.1 Integrazione di funzioni illimitate in un intervallo limitato

L'integrazione di funzioni illimitate è una delle applicazioni dell'integrazione in un intervallo non chiuso (cioè non comprendente almeno uno degli estremi). Ne vediamo in seguito la metodologia considerando i generici casi

$$[a;b) \quad (a;b] \quad (a;b)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

19.3.1.1 Casistica

Caso $\boxed{[a;b)}$ Cominciamo con il considerare un intervallo del tipo $[a;b)$; $f(x)$ si deve si deve considerare definita e continua per $a \leq x < b$ mentre non si fa nessuna ipotesi sul comportamento di $f(x)$ in b.
Poiché la funzione risulta continua in ogni intervallo del tipo $[a;b-\varepsilon]$ (con $0 < \varepsilon < b-a$) esiste l'integrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{19.68}$$

che risulta una funzione di ε. Se

- esiste finito il limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{19.69}$$
diremo che $f(x)$ è integrabile (in senso proprio o generalizzato?) nell'intervallo $[a;b)$ e scriveremo
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{19.70}$$
In tal caso si dice che l'integrale è convergente e l'area sotto la curva è finita;
- se il limite è $\pm\infty$ l'integrale si dirà divergente e l'area sotto la curva infinita;
- se infine il limite non esiste, allora l'integrale non esiste.

Caso $\boxed{(a;b]}$ Specularmente per una funzione continua in un intervallo $(a;b]$. Si deve ora considerare il limite
$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{19.71}$$
Se esso esiste ed è finito diremo che la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $(a;b]$ e scriveremo
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{19.72}$$
In tal caso diremo che l'integrale
$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{19.73}$$
è convergente. Per integrali divergenti e non esistenti funziona similmente al caso precedente.

Caso $\boxed{(a;b)}$ Considerando infine una funzione $f(x)$ continua in un intervallo aperto, essa risulta continua in ogni intervallo chiuso del tipo $[a+\delta;b-\varepsilon]$ (con $0<\delta<b-a$ e $0<\varepsilon<b-a$) e quindi è qui integrabile.
Se esiste finito il limite
$$\lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{19.74}$$
diremo che $f(x)$ è integrabile in $[a;b]$ e scriveremo:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{19.75}$$
Analogamente a quanto detto per gli integrali generalizzati le due variabili ε e δ devono tendere a zero in modo indipendente tra loro.
Come al solito si definiranno i casi connessi ad un limite convergente, divergente o non esistente.

Esempio 19.3.1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x}$$

Poiché

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log|\log x| + c$$

si ha che

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\log|\log x|]_\varepsilon^{1/2} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\log(\log 2) - \log|\log \varepsilon|] = -\infty\end{aligned}$$

perciò l'integrale diverge

Esempio 19.3.2.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log^2 x}$$

Poiché

$$\int \frac{dx}{x \log^2 x} = -\frac{1}{\log x} + x$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log^2 x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{\log x}\right]_\varepsilon^{1/2} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log \varepsilon}\right] = \frac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

Perciò l'integrale converge e vale $1/\log 2$.

19.3.1.2 Criteri di integrabilità

Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue con

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$$

I seguenti criteri permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Criterio del confronto Se $0 \leq g(x) \leq g(x)$ in $[a, b)$ allora

$$\begin{aligned} g \text{ integrabile} &\implies f \text{ integrabile} \\ f \text{ non integrabile} &\implies g \text{ non integrabile}\end{aligned}$$

Confronto asintotico Se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to b^-$, allora

$$f \text{ integrabile} \iff g \text{ integrabile}$$

Analoghi criteri valgono se $f, g \to +\infty$ o $f, g \to -\infty$; in quest'ultimo caso le disuguaglianze del criterio del confronto devono valere tra i moduli di f e g

Considerazione Analogamente a quanto accade con i criteri di convergenza per le serie numeriche, quando la convergenza di un integrale viene stabilita mediante confronto o confronto asintotico tra due funzioni, il valore numerico dei due integrali sarà in generale diverso.

Assoluta integrabilità ed integrabilità Per funzioni di segno qualsiasi vale la seguente proprietà. Se $|f|$ è integrabile in $[a, b)$, si dice che f è assolutamente integrabile; se una funzione è assolutamente integrabile è anche integrabile, ovvero vale

$$\int_a^b |f(x)|\ dx \quad \text{è convergente} \implies \int_a^b f(x)\ dx \quad \text{è convergente}$$

Esempio 19.3.3. Discutere in base ai criteri di convergenza studiati la convergenza del seguente integrale generalizzato

$$\int_{-1}^{1} \cot x\ dx$$

La funzione $\cot x$ è continua in $[-1, 1]$ tranne che in $x = 0$, nel cui intorno è illimitata per $x \to$. Poiché per $x \to 0$

$$\cot x \sim \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$$

e $\frac{1}{x}$ non è integrabile in un intorno di 0, per il criterio del confronto asintotico anche $\cot x$non è integrabile, e l'integrale è divergente

Osservazione 548 (Integrale generalizzato di funzione dispari su intervallo simmetrico). Abbiamo visto che l'integrale definito di una funzione (integrabile) dispari su un intervallo simmetrico è nullo, per motivi di simmetria. La precedente funzione in effetti è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico; l'applicazione dei criteri visti, però porta a concludere che non è integrabile, quindi, in particolare non è vero che il suo integrale è nullo. Attenzione a non applicare il criterio di simmetria appena ricordato senza prima verificare l'*esistenza* dell'integrale.

Esempio 19.3.4.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

Nell'intervallo $[-1, 1]$ l'integranda è illimitata solo per $x \to 0$, dove si ha:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{2/3}}$$

e poiché $1/x^{2/3}$ è integrabile in un intorno di 0, per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente

Osservazione 549 (Ordine di annullamento di una funzione derivabile). Se f è una funzione derivabile in un intervallo I, la formula di Taylor ci dice che se f

si annulla in un punto $\alpha \in I$, si annulla almeno del prim'ordine. Precisamente, poiché

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha)$$

se $f'(\alpha) \neq 0$ allora f ha uno zero del primo ordine in α. Se $f'(\alpha) = 0$ ma ad esempio $f''(\alpha) \neq 0$ si può concludere che f si annulla del 2° ordine, e così via. In ogni caso non può annullarsi di un ordine minore di 1.

Esempio 19.3.5.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x + e^x}$$

Il denominatore è una funzione continua, bisogna capire se si annulla nell'intervallo di integrazione. Un semplice confronto grafico mostra che

$$e^x = -x$$

ha esattamente una soluzione nell'intervallo $(-1, 1)$. L'ordine con cui la funzione si annulla ci dirà l'ordine di infinito della funzione integranda, e quindi la sua integrabilità o meno. Ma come possiamo stabilire l'ordine con cui si annulla $f(x) = x + e^x$ se non conosciamo neppure in modo esatto il punto in cui si annulla? Poiché

$$f'(x) = 1 + e^x \neq 0 \quad \text{in tutto } \mathbb{R}$$

f si annulla del 1° ordine in α, quindi la funzione $1/f(x)$ non è integrabile in $(-1, 1)$

19.3.2 Integrazione di funzioni limitate su intervalli illimitati

Consideriamo qui integrali di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo illimitato del tipo:

$$[a; +\infty) \quad (-\infty; b] \quad (-\infty; +\infty)$$

19.3.2.1 Casistica

Caso $\boxed{[a; +\infty)}$ Partiamo dal caso $[a; +\infty)$; sotto tale ipotesi $f(x)$ risulta integrabile in ogni intervallo limitato del tipo $[a; t]$ con $t > a$. In tal caso esiste l'integrale

$$\int_a^t f(x)\, dx$$

e il suo valore risulta una funzione dell'estremo superiore t di integrazione. Se:

- esiste finito il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{19.76}$$

  la funzione f è integrabile nell'intervallo $[a; +\infty)$; scriveremo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{19.77}$$

In tal caso si dice che l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{19.78}$$

è convergente;

- se invece il limite 19.76 è infinito si dice che f non è integrabile in $[a;+\infty)$ è che l'integrale 19.78 è divergente;
- se infine il limite 19.76 non esiste si dice che f non è integrabile in $[a;+\infty)$ è che l'integrale 19.78 è indeterminato.

Caso $\boxed{(-\infty;b]}$ Analogamente possiamo definire l'integrale di una funzione f continua in un intervallo del tipo $(-\infty;b]$: $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo $[s;b]$. Diremo che

- $fx)$ è integrabile nell'intervallo $(-\infty;b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\,dx \tag{19.79}$$

e scriveremo

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\,dx \tag{19.80}$$

Diremo allora che l'integrale

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{19.81}$$

è convergente;

- specularmente avviene in caso di limite infinito o non esistente: rispettivamente si hanno integrale divergente o indeterminato e la funzione non è integrabile.

Caso $\boxed{(-\infty;+\infty)}$ Infine possiamo definire l'integrale di una funzione continua nell'intervallo $(-\infty;+\infty)$; in tal ipotesi $f(x)$ è integrabile in ogni intervallo $[s;t]$. Diremo che

- $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $(-\infty;+\infty)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\,dx \tag{19.82}$$

e scriveremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\,dx \tag{19.83}$$

Si noti che le variabili s e t devono tendere all'infinito in modo indipendente tra loro. Come al solito si dirà che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{19.84}$$

è convergente;

- se il limite 19.82 è infinito o non esiste si dice che l'integrale 19.84 è rispettivamente divergente o indeterminato; in tali casi la funzione non è integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$.

Esempio 19.3.6.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x}$$

Poiché

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log |\log x| + c$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} &= \lim_{R \to +\infty} \int_2^R \frac{dx}{x \log x} = \lim_{R \to +\infty} [\log |\log x|]_2^R \\ &= \lim_{R \to +\infty} [\log(\log R) - \log(\log 2)] = +\infty \end{aligned}$$

Quindi l'integrale diverge.

Esempio 19.3.7.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}$$

Poiché

$$\int \frac{dx}{x \log^2 x} = -\frac{1}{\log x} + x$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} &= \lim_{R \to +\infty} \int_2^R \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^R \\ &= \lim_{R \to +\infty} \left[\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log R} \right] = \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

e anche questa converge

19.3.2.2 Criteri di integrabilità

Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue. Criteri analoghi al caso precedente permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Criterio del confronto Se $0 \le g(x) \le g(x)$ in $[a, +\infty)$ allora

$$\begin{aligned} g \text{ integrabile} &\implies f \text{ integrabile} \\ f \text{ non integrabile} &\implies g \text{ non integrabile} \end{aligned}$$

Confronto asintotico Se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to +infty$, allora

$$f \text{ integrabile} \iff g \text{ integrabile}$$

Analoghi criteri valgono se $f, g \to +\infty$ o $f, g \to -\infty$; in quest'ultimo caso le disuguaglianze del criterio del confronto devono valere tra i moduli di f e g

Assoluta integrabilità ed integrabilità Per funzioni di segno qualunque si ha ancora

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx \quad \text{è convergente} \implies \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \quad \text{è convergente}$$

o a parole se f è assolutamente integrabile è anche integrabile.

Esempio 19.3.8.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Per $x \to +\infty$ è

$$\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} \sim x^{\alpha-1}$$

che è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha - 1 < -1$ cioè $\alpha < 0$

Esempio 19.3.9.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$$

La funzione e^{-x^2} è continua in $[0, +\infty)$. Poiché per x abbastanza grande è

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

per il criterio del confronto e^{x^2} è integrabile all'infinito.
Si osservi il tipo di argomento usato: il confronto con $1/x^2$ serve solo a garantire l'integrabilità all'infinito. La funzione $1/x^2$ non è integrabile in un intorno di 0, ma questo non ha importanza perché in un intorno di 0 la funzione e^{-x^2} è integrabile perché limitata, non perché minore di $1/x^2$.

Esempio 19.3.10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} \, dx$$

La funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}$$

è continua in $(1, +\infty)$, ma va studiata all'infinito e in 1, dove il denominatore si annulla. Per $x \to 1$

$$f(x) \sim \frac{x-1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$$

che è integrabile; quindi per il criterio del confronto asintotico, f è integrabile in un intorno di 1. Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\log x}{x^{3/2}}$$

che è integrabile all'infinito perché, ad esempio, risulta

$$\frac{\log x}{x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{5/4}}$$

per x abbastanza grande. Quindi f è integrabile anche in un intorno di ∞, pertanto l'integrale converge.

Osservazione 550 (Convergenza di un integrale e determinazione del suo valore). Quando la convergenza dell'integrale generalizzato di una funzione f viene stabilita mediante confronto con una funzione g integrabile, il valore numerico dell'integrale di f non viene stabilito (in particolare: non è necessariamente uguale al valore dell'integrale di g). Si capisce bene questo fatto pensando che la stima asintotica "legge" solo il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto, mentre il valore numerico dell'integrale dipende dal comportamento della funzione in tutto l'intervallo.

19.3.3 Integrazione di funzioni illimitate in un intervallo illimitato

Talvolta occorre calcolare integrali che sono congiuntamente delle due tipologie precedenti, ovvero integrali nell'intervallo $(a; +\infty)$ o in $(-\infty; b)$.
Si procede analogamente all'ultimo caso presentato per gli integrali di funzioni non limitate, ove vi è un limite congiunto/contemporaneo di due variabili ma differentemente nel caso corrente una tenderà a 0^+ (quella associata all'estremo a o b) mentre l'altra a $\pm\infty$.

19.3.4 Integrazione di una funzione generalmente continua

Definizione 19.3.2 (Funzione generalmente continua)**.** Una funzione $f(x)$ è generalmente continua in un intervallo I (limitato o illimitato), se in tale intervallo essa è continua con l'eccezione, al più, di un numero finito di punti.

Osservazione 551 (Suddivisione di funzione generalmente continua). Se $f(x)$ è generalmente continua in I, detti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i suoi punti di discontinuità, è possibile suddividere l'intervallo I in un certo numero di sotto-intervalli i cui estremi saranno oltre ai c_i gli eventuali estremi di I, in modo che $f(x)$ sia continua nei punti interni di ciascun di tale intervalli. Ha quindi senso, in ciascuno di essi, considerare l'integrale generalizzato di $f(x)$.

Definizione 19.3.3 (Integrabilità)**.** Se tali integrali sono tutti convergenti diremo che $f(x)$ è integrabile in I, e il valore dell'integrale di $f(x)$ in I sarà per definizione, la somma algebrica di tali integrali.
Se invece anche uno solo di tali integrali è divergente o indeterminato, diremo che $f(x)$ non è integrabile in I.

19.4 Funzione integrale

Definizione 19.4.1 (Funzione integrale)**.** Sia f una funzione integrabile (eventualmente in senso generalizzato) in un intervallo I (limitato o illimitato), $x_0 \in I$ un qualsiasi punto considerato fisso, $x \in I$ un punto generico tale che $x > x_0$. Si chiama *funzione integrale* della funzione f la funzione:

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt} \tag{19.85}$$

Osservazione 552. La funzione restituisce, dato x, il valore dell'area sottesa alla curva da x_0 ad x, ovvero $\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$, e ovviamente varia al variare di x: la variabile indipendente è l'estremo superiore x dell'integrale definito, mentre t è detta variabile di integrazione (ad essa si può sostituire qualsiasi altra lettera).

Osservazione 553. Sottolineiamo il fatto che l'insieme di definizione deve essere un intervallo

Osservazione 554. L'importanza di questo tipo di funzioni è data dalla notevole applicazione nel campo pratico e dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Esempio 19.4.1 (Funzioni di ripartizione normale standardizzata)**.** In probabilità la funzione di ripartizione di una normale standardizzata (così come qualsiasi altra funzione di ripartizione) è appunto una funzione integrale, definita come segue

$$\Sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \tag{19.86}$$

Per ogni x, quello che si calcola in questo caso è un integrale generalizzato, esteso all'intervallo illimitato $(-\infty, x)$.

Teorema 19.4.1 (Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato),* $x \in [a,b]$ *e* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$*. Allora:*

- *la funzione* F *è continua in* $[a,b]$
- *se anche* f *è continua in* $[a,b]$*, allora la funzione* F *è derivabile in* $[a,b]$ *e vale*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$

Lemma 19.4.2. *Il teorema ha varie conseguenze:*

- *anzitutto se* f *è continua* F *è derivabile con continuità perché* $F' = f$ *ed* f *e continua*
- *se* f *è sia continua che derivabile, allora* F *è derivabile due volte; più generalmente la funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda*
- *ogni funzione continua su* I *ha ivi una primitiva, la sua funzione integrale*

Osservazione 555. Il secondo punto del teorema si può anche raffinare nel modo seguente: se la funzione integranda $f(t)$ non è continua su tutto I ma è integrabile in senso generalizzato, in tutti i punti in cui l'integranda è continua, $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.
In sostanza dove f è discontinua F è ancora continua ma non sarà derivabile.

19.4.1 Studio di funzione

19.4.1.1 Dominio

Definizione 19.4.2 (Insieme di definizione)**.** L'insieme di definizione della funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$ è il più grande intervallo I contenente x_0 e tale che per ogni $x \in I$ la funzione $f(t)$ risulta integrabile (in senso proprio o generalizzato) sull'intervallo $[x_0, x]$

Esempio 19.4.2.

$$F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}}\, dt$$

La funzione integranda è continua in $\mathbb{R}$; quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ è integrabile in $[1, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.
Il fatto che l'integranda non sia integrabile all'infinito non contraddice questo fatto, ma implica che $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ sia infinito.

Esempio 19.4.3.

$$F(x) = \int_2^x \arctan\frac{1}{t}\, dt$$

L'integranda è limitata in tutto $\mathbb{R}$, continua tranne un punto di discontinuità a salto in 0, quindi integrabile (in senso ordinario, non generalizzato) in ogni intervallo $[2, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$

Esempio 19.4.4.

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(t-1)}$$

la funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 0$, in cui è integrabile, e nell'intorno di $t = 1$, in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[-1, x]$ quindi, è necessario che sia $x < 1$, perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 1)$

Esempio 19.4.5.

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{t\cdot\sqrt[3]{t-1}}$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è integrabile e nell'intorno di $t = 0$ in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[-1, x]$ quindi, è necessario che sia $x < 0$ Perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 0)$.
Si noti che anche se nell'intorno di 1 la funzione è integrabile, questo punto non può essere raggiunto, perché non appena la variabile x partendo da -1 arriva a 0, l'integrale diverge e non ha più senso.

Esempio 19.4.6.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sin(\sqrt[3]{t-1})}\, dt$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è integrabile. Perciò F è definita su tutto $\mathbb{R}$

Esempio 19.4.7.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sin(t-1)}\, dt$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è non è integrabile. Poiché $x_0 = 1$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ la funzione non risulta integrabile in $[1, x]$, perciò l'insieme di definizione di F è vuoto (oppure possiamo dire che è ridotto al solo punto $x = 1$ in cui F vale 0)

Esempio 19.4.8.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(e^t - 1)(1 + t^2)} \, dt$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 0$, in cui è non è integrabile. Notiamo che f è integrabile a $-\infty$ ($f(t) \sim -1/t^2$). Perciò f risulta integrabile in $(-\infty, x)$ purché sia $x < 0$, e l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 0)$

Esempio 19.4.9.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2 + t} \, dt$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = -2$, in cui è non è integrabile. Notiamo che f non è integrabile a $-\infty$ ($f(t) \sim 1/t$). Perciò f non risulta integrabile in $(-\infty, x)$ per nessun x e l'insieme di definizione di F è vuoto

19.4.1.2 Regolarità di una funzione integrale

Il grado di regolarità (continuità, derivabilità ecc) di una funzione integrale dipende dal grado di regolarità della funzione integranda, come stabilito dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale. Vediamo un esempio

Esempio 19.4.10.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{\sqrt[1]{t + 1}} \arctan \frac{1}{t} \, dt$$

Dopo aver determinato l'insieme di definizione di F, stabilire se F è continua, derivabile, determinando i punti di discontinuità e di non derivabilità di F e discutendone la natura.
La funzione integranda $f(t)$ ha un punto di discontinuità a salto in $t = 0$ (integrabile) e un asintoto verticale in $t = -1$ (nel cui intorno è integrabile). Perciò F è definita in tutto $\mathbb{R}$.
La funzione F è continua in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile tranne che nei punti $x = 0$, $x = 1$. Poiché per $x \neq 0, -1$ è

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 1}} \arctan \frac{1}{x}$$

si vede che in $x = 0$ F' ha una discontinuità a salto, perciò F ha un punto angoloso; per $x \to -1^{\pm}$, $F'(x) \to \mp\infty$, quindi $x = -1$ è un punto di cuspide rivolta verso l'alto per F

19.4.1.3 Grafico

Vedere esempi Bramanti esercizi 1 a pag 520

19.4.1.4 Comportamento all'infinito di una funzione integrale

Sia $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt$ e supponiamo che f sia definita almeno in $[x_0, +\infty)$. Allora il limite

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

uguaglia per definizione l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t) \, dt$$

Se questo converge, esisterà finito $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, anche se in generale non si saprà determinare esattamente. Se l'integrale non converge, il limite sarà infinito (caso più comune) o non esisterà.
Un caso particolare è quello in cui per $t \to +\infty$ $f(t) \to m$ costante non nulla. In questo caso (almeno se f è continua per x abbastanza grande) sarà $F'(x) \to m$ cioè $F(x) \sim mx$, come si dimostra calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{mx}$$

col teorema di De L'Hopital. Quindi $F(x)$ tende a infinito con crescita lineare, e potrebbe avere un asintoto obliquo. L'asintoto obliquo esisterà se esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} [f(t) - m]\, dt + mx_0$$

ossia: esiste asintoto obliquo $y = mx + q$ per F se l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{x} [f(t) - m]\, dt$$

converge. In tal caso, il numero q generalmente non si sa calcolare in modo esatto. Naturalmente discorsi analoghi si possono fare per $x \to -\infty$.

Esempio 19.4.11. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico

$$F(x) = \int_{2}^{x} \left[\frac{1}{3} - e^{-(t-2)^2}\right] dt$$

La funzione F è definita in tutto $\mathbb{R}$. f è continua in $\mathbb{R}$ quindi F è derivabile con continuità in $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty$ $F'(x) = f(x) \to \frac{1}{3}$ quindi $F(x) \sim \frac{1}{3} \to \pm\infty$ con crescita lineare.
Per studiare se esiste asintoto obliquo calcoliamo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[F(x) - \frac{1}{3}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\int_{2}^{x}\left[\frac{1}{3} - e^{-(t-2)^2}\right] dt - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{2}{3}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\int_{2}^{x} e^{-(t-2)^2}\, dt - \frac{2}{3}\right] \to \mp \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt - \frac{2}{3} = q_{1,2}$$

(due diversi limiti finiti per $x \to \pm\infty, q_1 < q_2$), perché l'integrale di e^{-t^2} è convergente[3]. Quindi esistono asintoti obliqui

$$y = \frac{1}{3}x + q_1, \quad y = \frac{1}{3}x + q_2$$

Si ha che

$$F'(x) = \frac{1}{3} - e^{-(x-2)^2} \geq 0$$

per $(x-2)^2 \geq \log 3$, ossia per $x \geq \sqrt{\log 3}+2 \vee x \leq -\sqrt{\log 3}+2$; per $x = \sqrt{\log 3}+2$ punto di minimo relativo, per $x \leq -\sqrt{\log 3} + 2$ massimo relativo.
$F''(x) = 2(x-2)e^{-(x-2)^2} \geq 0$ per $x \geq 2$ quindi $x = 2$ punto di flesso a tangente obliqua.

[3]Abbiamo usato il cambio di variabile

$$\int_{2}^{+\infty} e^{-(t-2)^2}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Parte II

Analisi 2

Capitolo 20

Introduzione ad analisi 2

20.1 Introduzione

Osservazione 556. Nel corso di analisi 1, si sono studiate le funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ossia le funzioni reali di variabile reale, per le quali input e output erano numeri reali.
Possiamo però immaginare altre situazioni.

Osservazione 557. Nel caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ l'input è un singolo numero ma l'output è un insieme (vettore) di numeri reali; in tal caso si parla di funzioni di una variabile reale a valori vettoriali (o funzione a valori vettoriali di una variabile reale).
Nel caso di $m = 2, 3$ le funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ hanno il significato geometrico di curve nel piano o nello spazio tridimensionale. Spesso gli esempi faranno riferimento a queste situazioni, più intiuitiva, anche se la teoria verrà sviluppata per qualsiasi dimensoine.

Osservazione 558. Nel caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gli input sono più di uno: ad un gruppo di n ($n > 1$) variabili viene associato univocamente un numero reale. Parliamo in questo caso di funzioni di n variabili reali a valori reali (o funzione reale di n variabili reali).

Osservazione 559. Il calcolo infinitesimale per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è più facile di quello per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; per questo motivo di solito si parte dal primo

Capitolo 21

Funzioni a valori vettoriali di una variabile reale

21.1 Introduzione

Definizione 21.1.1 (Curve (parametriche) in spazio vettoriale)**.** Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e Y un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale normato; sono chiamate così le applicazioni $\mathbf{f} : I \to Y$

Osservazione 560. In pratica però si farà riferimento a funzioni del tipo $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$

Osservazione 561. Si usa il grassetto in $\mathbf{f}$ a suggerire/ricordare che come output fornisce un vettore

Osservazione 562 (Definizione). Le funzioni $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ possono essere definite fornendo, componente per componente, la funzione reale di variabile reale da applicare all'input per avere la componente considerata. Ossia $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è una funzione definita come

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$$

con $f_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dette anche *funzioni componenti.*

Osservazione 563. Si pensa spesso a $t \in I$, il *parametro*, come al tempo, e si immagina la curva descritta dal moto del punto $f(t)$ quanto t corre in I

Esempio 21.1.1. Considerando un punto che si muove nello spazio tridimensionale lungo una certa traiettoria, le sue coordinate (x, y, z) saranno funzione del tempo t, perciò la sua posizione è specificata da una funzione del tipo $\mathbf{f} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ specificata alternativamente con:

- la notazione
$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$
- la notazione
$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- in termini vettoriali come

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

  con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ versori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sarebbero $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in altri testi)

Chiaramente, se il punto si muovesse nel piano, per rappresentarlo basterebbe una funzione $\mathbf{f} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$

Osservazione 564. Facciamo ora qualche richiesta di regolarità e diamo qualche definizione ulteriore

Definizione 21.1.2 (Arco di curva continua in $\mathbb{R}^m$)**.** Sia I intervallo in $\mathbb{R}$. È chiamato così una funzione $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ continua, ossia tale che le sue funzioni componenti siano continue.

Osservazione 565. Se t è pensata come tempo, un arco di curva è una legge oraria di un punto mobile: assegna la traiettoria e il punto in cui si trova in ogni istante il punto mobile

Definizione 21.1.3 (Sostegno di $f : I \to \mathbb{R}^m$)**.** È l'immagine della funzione, ossia il sottoinsieme $\mathbf{f}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

Osservazione 566. Si tratta dell'insieme dei punti di $\mathbb{R}^m$ percorsi dal punto mobile

Definizione 21.1.4 (Curva chiusa)**.** funzione $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ dove $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$

Osservazione 567. Ossia dove il punto di partenza e di arrivo del punto mobile coincidono

Definizione 21.1.5 (Curva semplice)**.** Curva $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ per la quale $t_1 \neq t_2 \implies \mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$ con l'unica possibile eccezione $(t_1, t_2) = (a, b)$

Osservazione 568. In altre parole una curva semplice non ripassa mai dallo stesso punto: può essere chiusa ma non deve intrecciarsi

Definizione 21.1.6 (Curva piana)**.** Curva per la quale esiste un piano che contiene il suo sostegno.

Osservazione 569 (Parametrizzazioni). Va detto che uno stesso *sostegno* di una curva (ossia la stessa traiettoria seguita dal punto) può essere raggiunta con diverse *parametrizzazioni* della stessa (ossia un differente set di funzioni componenti)

Esempio 21.1.2 (Arco di ellisse)**.** L'arco di ellisse

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

è un arco di curva continua, non chiusa, semplice. Se variasse in $[0, 2\pi]$ avremmo una curva chiusa, semplice, il cui sostegno è l'intera ellisse (figura 21.1).

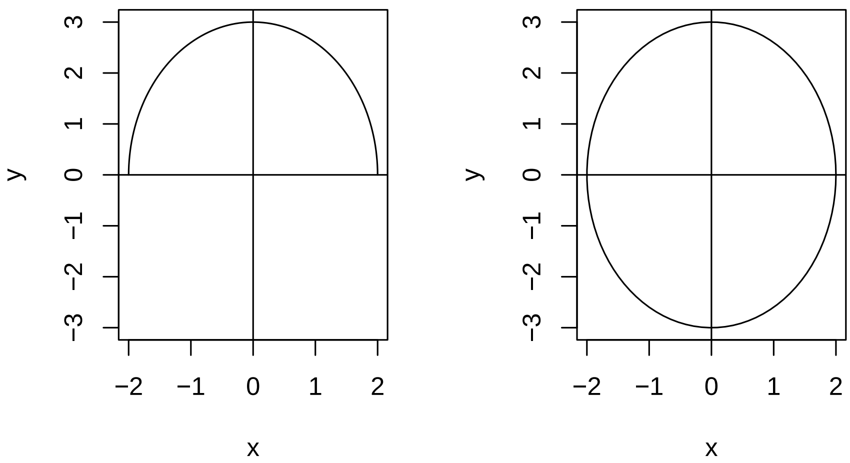


Figura 21.1: Arco di ellisse

Esempio 21.1.3 (Ramo di iperbole)**.** Le equazioni

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con $a, b > 0$ descrivono il ramo di iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x > 0$$

da cui l'origine del nome di *funzioni iperboliche* per $\cosh t$, $\sinh t$ (figura 21.2). L'altro ramo (per $x < 0$) è descritto

$$\begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ognuno dei due è un arco di curva continuo, non chiuso

Osservazione 570. Gli esempi precedenti sono curve piane, ossia in $\mathbb{R}^2$; vediamo un esempio in $\mathbb{R}^3$

Esempio 21.1.4 (Elica cilindrica)**.** È descritta da

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \qquad t \in [a, b] \\ z = pt \end{cases}$$

con a, b, r, p parametri fissati. Si chiama *cilindrica* perché giace sul cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. È un arco di curva continua, non chiusa (figura 21.3).

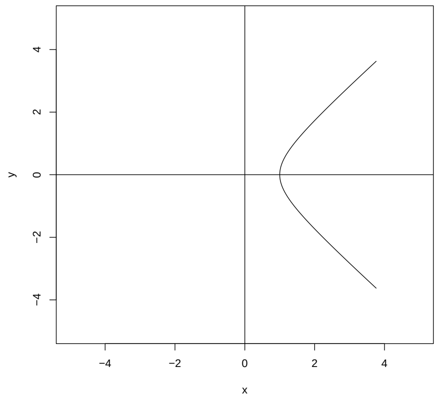


Figura 21.2: Ramo iperbole

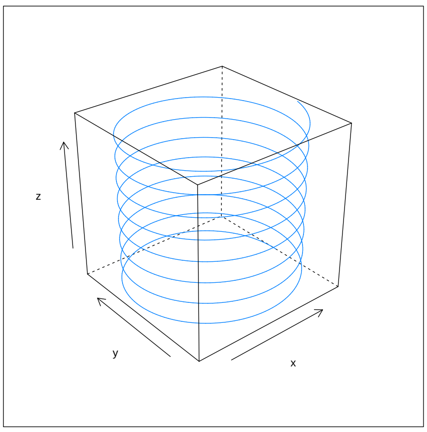


Figura 21.3: Elica cilindrica

21.2 Limiti

Definizione 21.2.1 (Limite di funzione a valori vettoriali)**.** Data una funzione $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ con I intervallo in $\mathbb{R}$; dato un $t_0 \in I$ (oppure t_0 estremo di I non appartenente a I) e sia $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$; si dice che

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{l}$$

se

$$\lim_{t \to t_0} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\| = 0$$

Osservazione 571. Dato che la funzione $t \mapsto \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\|$ è una funzione reale di variabile (il modulo/norma di un vettore è un numero reale), la definizione precedente riconduce la nozione di limite per funzioni a valori vettoriali a quella, già nota, di limite per funzioni a valori reali

Osservazione 572. Geometricamente, la definizione significa che la *distanza* tra il punto $\mathbf{f}(t)$ e il punto $\mathbf{l}$ nello spazio $\mathbb{R}^m$ tende a zero per $t \to t_0$

Osservazione 573. Il limite per $t \to t_0$ di $\mathbf{f}(t)$ si calcola semplicemente calcolando i limiti delle componenti scalari di $f(t)$. Vale infatti la seguente

Proposizione 21.2.1. *Sia* $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ *con* $f_i : I \to \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. *Allora per* $t \to t_0$ *si ha che* $f(t) \to \mathbf{l}$ *se e solo se* $f_i(t) \to l_i$ *per ogni* $i = 1, \dots, m$.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$|f_i(t) - l_i|^2 \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{l}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j(t) - l_j|^2 \tag{21.1}$$

Se $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{l}$ la prima disuguaglianza implica che $f_i(t) \to l_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$ (teorema del confronto).
Viceversa se $f_j(t) \to l_j$ per $j = 1, \dots, m$, allora la sommatoria nella 21.1 tende a zero, quindi $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{l}$. □

Osservazione 574. In altre parole: il limite della funzione a valori vettoriali si calcola componente per componente; in simboli:

$$\lim_{t \to t_0} (f_1(t), \dots, f_m(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \to t_0} f_m(t) \right)$$

Osservazione 575. Il calcolo dei limiti per funzioni a valori vettoriali non introduce quindi nuove difficoltà rispetto al calcolo dei limiti per funzioni a valori reali

Osservazione 576. Inoltre molte definizioni e proprietà riguardanti i limiti di funzioni vettoriali si possono enunciare e dimostrare in modo analogo al caso unidimensionale: ad esempio:

- il *teorema di unicità del limite* vale per funzioni $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- il teorema sul *limite della somma* o del *prodotto per una costante* vale per funzioni $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- la definizione di *funzione continua* (in un punto o in un insieme) è analoga al caso unidimensionale: si dice che $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è continua in t_0 se $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$. E data la peculiarità, si ha che una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono tutte le sue (funzioni) componenti.

21.3 Derivate

Osservazione 577. La definizione consueta si applica anche qui.

Definizione 21.3.1 (Funzione derivabile in un punto)**.** Sia $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ e $t_0 \in I$; si dice che $\mathbf{f}$ è derivabile in t_0 se esiste finito

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h} \tag{21.2}$$

Osservazione 578. Si noti che il rapporto incrementale è il quoziente tra un vettore e uno scalare, quindi è un vettore: il limite va inteso rispetto alla distanza/norma in $\mathbb{R}^m$

Osservazione 579. Ricordando poi che i limiti di funzioni a valori vettoriali si fanno componente per componente si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t_0) &= \left(\lim_{h \to 0} \frac{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{f_m(t_0 + h) - f_m(t_0)}{h} \right) \\ &= (f_1'(t_0), \dots, f_m'(t_0))\end{aligned} \tag{21.3}$$

Ossia anche la derivata di una funzione a valori vettoriali si fa componente per componente: il vettore derivato è il vettore delle derivate delle funzioni componenti.

Osservazione 580. La 21.3 è più utile per il calcolo effettivo del vettore derivato

Definizione 21.3.2 (Funzione di classe $C^1(I)$)**.** Funzione $\mathbf{f}$ derivabile in tutto I e per la quale la funzione $\mathbf{f}'$ è continua in I. Si scrive $\mathbf{f} \in C^1(I)$

Osservazione 581. Analogamente si definiscono le derivate di ordine successivo e le funzioni di classe $C^k(I)$ per $k > 1$

Definizione 21.3.3 (Arco di curva regolare)**.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Viene chiamato così un arco di curva $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathbf{f} \in C^1(I)$ e $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$, per ogni $t \in I$.

Definizione 21.3.4 (Versore tangente)**.** Nel caso delle curve regolari è ben definito il versore tangente

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|}$$

che dipende con continuità da t

Esempio 21.3.1. L'ellisse $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ è una curva regolare, in quanto il vettore derivato $\mathbf{f}'(t) = (-2\sin t, 3\cos t) \neq (0, 0)$ per ogni t (quando una componente si annulla, l'altra è diversa da zero). In questo caso il versore tangente è

$$\mathbf{T} = \frac{(-2\sin t, 3\cos t)}{\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}}$$

Definizione 21.3.5 (Curva regolare a tratti??)**.** pag 62

Osservazione 582. A seguire le principali regole del calcolo differenziale vettoriale. Queste regole si applicano a funzioni derivabili qualsiasi, a valori vettoriali, a prescindere dal fatto che rappresentino curve regolari (in altre parole, la condizione di non annullamento del vettore derivato qui non ha alcuna importanza

Teorema 21.3.1. *Siano* $\mathbf{u}, \mathbf{v} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *derivabili, allora:*

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
2. *se* $c \in \mathbb{R}$ *è una costante* $(c\mathbf{u})' = c\mathbf{u}'$
3. *se* $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}$ *è derivabile* $(\mathbf{fu})' = \mathbf{f}'\mathbf{u} + \mathbf{fu}'$
4. *se* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile e* $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq I$
$$[\mathbf{u}(\varphi(t))]' = \mathbf{u}'(\varphi(t))\varphi'(t)$$
5. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ *dove* $\cdot$ *indica il prodotto scalare delle due funzioni vettoriali*
6. *se* $m = 3$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$, *dove* $\times$ *indica il prodotto vettoriale in* $\mathbb{R}^3$

TODO: TODOHERE check here
TODO: check

Osservazione 583. Tutti gli enunciati vanno intesi nel senso seguente: se u, v sono derivabili, allora la derivata scritta a primo membro di ciascuna identità eisste ed è uguale al secondo membro

Dimostrazione. La dimostrazione delle proprietà per esercizio ; è sufficiente utilizzare la definizione 21.2 di derivata di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, la proprietà 21.3, le regole del calcolo differenziale di una variabile, e, per i punti 5 e 6, le definizioni di prodotto scalare e vettoriale. Rispettivamente

TODO: fixme

1.
2.
3.
4.
5. si ha
$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \left(\sum_{j=1}^{m} u_j v_j\right)' = \sum_{j=1}^{m} (u_j v_j)' = \sum_{j=1}^{m} (u_j' v_j + u_j v_j') = \sum_{j=1}^{m} u_j' v_j + \sum_{j=1}^{m} u_j v_j' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$
6.

□

21.4 Integrali

Osservazione 584. Si può definire in maniera naturale anche l'*integrale definito* di una funzione a valori vettoriali

Definizione 21.4.1 (Integrale definito)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ poniamo

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_m(t)\, dt\right) \tag{21.4}$$

Definizione 21.4.2 (Funzione integrabile)**.** Diciamo che $\mathbf{f}$ è integrabile in $[a, b]$ se lo è ogni sua componente f_i, $(i = 1, \ldots, m)$ e in tal caso definiremo l'integrale di f mediante la 21.4

Osservazione 585. Per esempio se $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ è un arco di curva *continua*, certamente è integrabile.

Osservazione 586. Ragionando componente per componente è immediato dimostrare il seguente teorema

Teorema 21.4.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni a valori vettoriali)**.** *Se* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *è di classe* $C^1([a, b])$*, allora*

$$\int_a^b \mathbf{f}'(t)\ dt = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$$

In particolare, se $\mathbf{f}$ *è una curva regolare chiusa si ha che* $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f}'(t)\ dt = \mathbf{0}$

Osservazione 587. È talvolta utile la seguente disuguaglianza dei moduli, analoga a quella che vale per funzioni a valori reali, ma meno immediata da dimostrare

Lemma 21.4.2. *Se* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *è integrabile, allora*

$$\left\| \int \mathbf{f}(t)\ dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\ dt$$

Dimostrazione. bramanti 2 pag 65 □

Capitolo 22

Funzioni reali di più variabili

Osservazione 588. Iniziamo ad analizzare il calcolo di funzioni di più variabili; il nostro focus maggiore saranno funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Iniziamo da qualche considerazione

22.1 Grafici e insiemi di livello

Definizione 22.1.1 (Grafico)**.** Il grafico di una funzione reale di più variabili reali $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da $z = f(\mathbf{x})$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ di coordinate $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$

Osservazione 589. Se $n = 2$ il "grafico" vive nello spazio tridimensionale e può essere effettivamente visualizzato; viceversa per $n \geq 3$ il grafico vive in uno spazio di dimensione ≥ 4 e non si può visualizzare direttamente

Osservazione 590 (Linee di livello). Un altro modo di rappresentare graficamente una funzione $z = f(x, y)$ è quello di tracciare le sue *linee di livello*, ossia curve definite da una equazione del tipo

$$f(x, y) = k$$

con k costante. Se queste linee sono tracciate per un insieme di valori k equispaziati (es $k = 0.1$, $k = 0.2$, $k = 0.3$, $\ldots$) esse saranno più fitte laddove il grafico della funzione è più ripido e più distanziate laddove il grafico della funzione è più pianeggiante.

Esempio 22.1.1. La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è definita in tutto il piano e sempre positiva; il grafico è quello di un paraboloide (figura 22.1). Ha linee di livello $x^2 + y^2 = c$. Dalla rappresentazione si nota la simmetria radiale, (ossia la funzione ha lo stesso valore nei punti che hanno la stessa distanza dall'origine) e, allontanandosi dall'origine, cresce sempre più velocemente (le linee di livello diventano più dense).

Esempio 22.1.2. La funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ è definita in tutto il piano e assume valori sia positivi che negativi (figura 22.2). Le sue linee di livello sono le curve $x^2 - y^2 = c$. Per $c = 0$ esse rappresentano le 2 rette $y = \pm x$; per tutti gli altri valori di c sono iperboli equilatere aventi le rette $y = \pm x$ come asintoti. Il grafico ha la tipica forma a sella

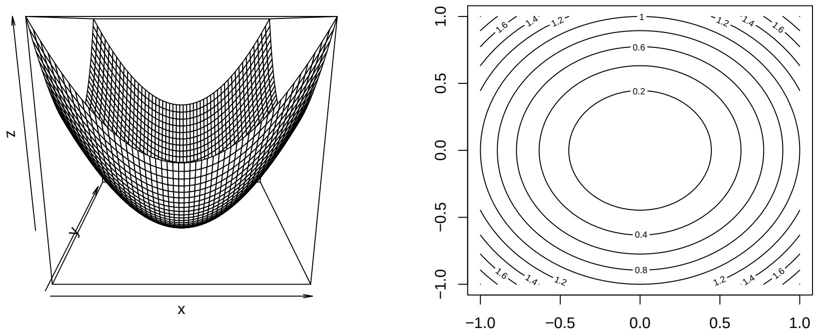


Figura 22.1: La funzione $x^2 + y^2$

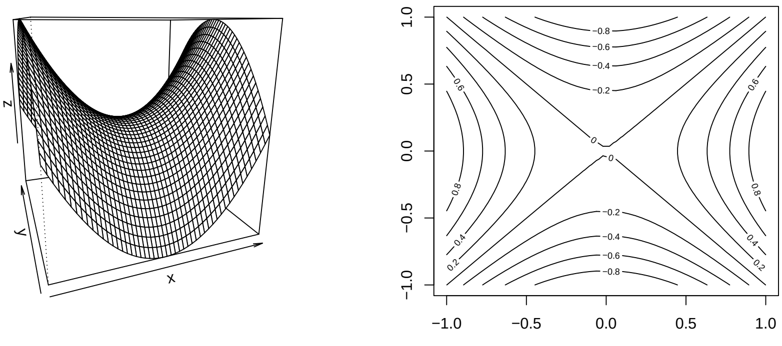


Figura 22.2: La funzione $x^2 - y^2$

22.2 Limiti e continuità

22.2.1 Definizioni

Definizione 22.2.1 (Limite di successione)**.** Data una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice che $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ per $k \to \infty$ se $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \to 0$ per $k \to \infty$

Definizione 22.2.2 (Intorno sferico di raggio r di $\mathbf{x}_0$)**.** L'insieme

$$U_r(\mathbf{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

per qualche raggio $r > 0$; $\mathbf{x}_0$ si dice anche centro dell'intorno

Definizione 22.2.3 (Definizione successionale di limite di funzione)**.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (escluso al più $\mathbf{x}_0$ stesso) e sia $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Diciamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

Se per ogni successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ di punti $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ per $k \to \infty$ (con $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$, $\forall k$) si ha che

$$\lim_{k \to \infty} f(\mathbf{x}_k) = L$$

Osservazione 591. O alternativamente, come fatto per le funzioni reali di variabile reale forniamo la definizione non successionale

Definizione 22.2.4 (Definizione $\varepsilon - \delta$ di limite di funzione)**.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (escluso al più $\mathbf{x}_0$ stesso) e sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che:

- $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $0 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica $\|f(\mathbf{x}) - L\| < \varepsilon$;
- $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se, per ogni $k > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica $f(\mathbf{x}) > k$ (rispettivamente, $f(\mathbf{x}) < -k$).

Osservazione 592. Geometricamente, la definizione (nel caso L finito) significa che il valore di $f(\mathbf{x})$ approssima tanto quanto vogliamo il valore di L purché la distanza del punto $\mathbf{x}$ dal punto $\mathbf{x}_0$ sia piccola quanto occorre

Osservazione 593. Nelle funzioni a valori vettoriali, assegnare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ equivale ad assegnare m funzioni $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e ciò è alla base della possibilità di calcolare i limiti delle funzioni a valori vettoriali "componente per componente". Viceversa una generica funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non è *scomponibile* in alcun modo in n funzioni reali di variabile reale; pertanto anche il calcolo dei limiti non si riduce, naturalmente, al calcolo unidimensionale

Osservazione 594. Il fatto che la definizione di limite sia simile a quello di funzioni reali di variabili reali fa si che molte definizioni e proprietà sui limiti si possano enunciare e dimostrare in modo analogo al caso unidimensionale. Ad esempio per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuano a valere inalterati nell'enunciato:

- il teorema di *unicità del limite*;

- il teorema sul *limite di somma, prodotto per costante, prodotto e quoziente* di due funzioni;
- il *teorema del confronto*

Osservazione 595. Anche la *definizione di funzione continua*, in un punto o in un insieme, è analoga al caso unidimensionale

Definizione 22.2.5 (Funzione continua)**.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$

Osservazione 596. Come conseguenza valgono anche i teoremi sulla *continuità della somma*, del *prodotto* e del *quoziente di funzioni continue* (quando hanno senso e il denominatore non si annulla) e della *composizione di funzioni continue* (quando ha senso).

Osservazione 597. Pertanto possiamo mostrare la continuità di un gran numero di funzioni senza dover ricorrere alla definizione di continuità ossia al calcolo dei limiti. Come nel caso unidimensionale, sarà solo nel caso di forme di indeterminazione che occorrerà ragionare sul limite in base alla definizione.

Esempio 22.2.1. La funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin y}{1 + x^2}$$

è continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti numeratore e denominatore sono funzioni continue di una variabile, il denominatore non si annulla mai, per cui il quoziente è continuo. Quindi il limite si calcola semplicemente sostituendo il valore nel punto; ad esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{\sin 0}{1 + 0^2} = 0$$

Questo per dire che, come nel caso di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il *problema* del calcolo dei limiti nasce solo quando troviamo qualche forma di indeterminazione.

Teorema 22.2.1 (Permanenza del segno)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso). Supponendo che esista:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

1. *se $L > 0$ allora $f(\mathbf{x})$ si mantiene positiva almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$, cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ purché $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$*
2. *se $f(\mathbf{x}) \geq 0$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$ (salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso) allora $L \geq 0$. Notiamo che non si può affermare che $L > 0$, anche se $f(\mathbf{x}) > 0$*
3. *dal punto 1 segue che se f è continua in $\mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{x}_0) > 0$ allora $f(\mathbf{x})$ si mantiene positiva almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$, cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}) > 0$ purché $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$*

Osservazione 598. Analoghi enunciati valgono ovviamente sostituendo il segno $>$ con $<$ e il segno $\geq$ con $\leq$

Osservazione 599. Vediamo ora la definizione di limite per $\mathbf{x} \to \infty$. Nel caso di funzioni di n variabili reali non è così ovvio cosa significhi che la variabile indipendente $\mathbf{x}$ tenda ad infinito. La definizione che si da si basa sulla norma del vettore

Definizione 22.2.6. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione definita in tutto lo spazio, o almeno per $\|\mathbf{x}\|$ abbastanza grande. Si dice che:

- $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$ se $\forall\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tale che $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se $\|\mathbf{x}\| > R$ allora $\|f(\mathbf{x}) - L\| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se $\forall K > 0$, $\exists R > 0$ tale che $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se $\|\mathbf{x}\| > R$ allora $f(\mathbf{x}) > K$ (rispettivamente $f(\mathbf{x}) < -K$)

22.2.2 Introduzione al calcolo dei limiti

Osservazione 600. Vediamo alcuni modi intuitivi ma errati di procedere.

Esempio 22.2.2. Ipotizziamo di dover calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$$

Qui siamo in presenza di una forma di indeterminazione $0/0$. Cosa vuol dire studiare la funzione quando (x, y) tende a $(0, 0)$? Se pensassimo di imitare i ragionamenti unidimensionali, potremmo pensare di far tendere prima la x a zero

$$\text{per } x \to 0,\ \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \to \frac{y^4}{y^2} = y^2$$

Se ora facciamo tendere anche y a zero e abbiamo $y^2 \to 0$. Se invece avessimo fatto tendere a zero prima la y e poi la x avremmo trovato

$$\text{per } y \to 0,\ \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \to \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

e questo per $x \to 0$ tende a $+\infty$.
In realtà questo limite in due variabili *non esiste.*

Proposizione 22.2.2. *Non è lecito calcolare un limite in due variabili facendo tendere le due variabili al punto limite separatamente, una dopo l'altra*

Esempio 22.2.3. Ancora sul limite precedente potremmo pensare erroneamente di usare stime asintotiche:

$$\text{per } (x, y) \to (0, 0),\ x^2 + y^4 \sim x^2 \text{ perciò } \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \sim \frac{x^2}{x^4 + y^2}$$

Anche questo ragionamento è errato; questa stima asintotica, che può essere suggerita dall'imitazione meccanica di procedure usate nei limiti di una variabile non è lecita, perché a priori non c'è nessuna relazione tra x e y, quindi non c'è ragione per affermare che y^4 sia trascurabile rispetto a x^2

Proposizione 22.2.3. *In un limite per $(x, y) \to (0, 0)$ le variabili x, y sono infinitesimi indipendenti; non possiamo confrontare una potenza di x con una potenza di y.*

Osservazione 601. Pertanto non si farà mai uso di stime asintotiche su funzioni di più variabili

Esempio 22.2.4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

è una forma di indeterminazione $0/0$; possiamo vedere cosa succede facendo tendere (x, y) a $(0, 0)$ lungo una qualsiasi retta $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx^4)} = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Dunque avvicinandoci all'origine da qualunque direzione otteniamo limite zero. Verrebbe da concludere che il limite è zero. Tuttavia questo è sbagliato; si dimostra che questo limite *non esiste*; ce ne si rende conto osservando che lungo la curva $x = y^2$ si ha:

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^2} = \frac{1}{2}$$

perciò avvicinandoci all'origine lungo questa curva la funzione ha valore costante $1/2$, dunque non tende a zero

Proposizione 22.2.4. *Il comportamento della funzione lungo alcune o tutte le rette che si avvicinano a (x_0, y_0) non permette di concludere l'esistenza del limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$*

22.2.3 Metodi di calcolo

22.2.3.1 Limiti per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Osservazione 602. I seguenti esempi mostrano due tecniche tipiche che si usano per dimostrare esistenza o non esistenza del limite.

Restrizione di una funzione a una curva e non esistenza del limite

Definizione 22.2.7 (Restrizione di una funzione a una curva)**.** Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di n variabili, $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva in $\mathbb{R}^n$ ed esiste la funzione composta

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

questa si dice *restrizione* di f alla curva $\mathbf{r}$ ed è una funzione reale di variabile reale.

Osservazione 603. Il termine restrizione, che denota questo tipo di composizione, deriva dalla seguente idea geometrica: invece di far variare $\mathbf{x}$ in ogni modo nel dominio n-dimensionale in cui è definita f, ci restringiamo ai punti di $\mathbb{R}^n$ che stanno sull'arco di curva $\mathbf{r}(t)$. È chiaro che, se l'arco di curva è continuo e f è continua, anche la sua restrizione g all'arco di curva sarà continuo (continuità della funzione composta).

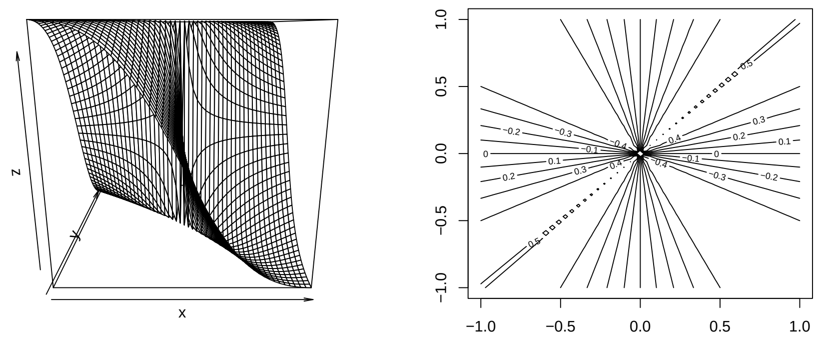


Figura 22.3: La funzione $xy/(x^2 + y^2)$

Osservazione 604. Essendo funzioni di una variabile, le restrizioni sono facili da studiare; l'idea è di ottenere informazioni sul comportamento di f esaminando le sue restrizioni a curve differenti

Osservazione 605. In particolare per mostrare che il limite per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ di una certa funzione $f(\mathbf{x})$ *non esiste* è sufficiente determinare due curve che passano da $\mathbf{x}_0$, lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi. La stessa conclusione vale se la restrizione di $f(\mathbf{x})$ a *una* particolare curva non ammette limite

Esempio 22.2.5. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Il limite non esiste, infatti, la restrizione di $f(x, y)$ alla retta $y = x$ è

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2}$$

perciò tende a $\frac{1}{2}$; invece la restrizione di f alla retta $y = -x$ è

$$f(x, -x) = \frac{-x^2}{2x^2}$$

perciò tende a $-\frac{1}{2}$. Essendo i due limiti diversi, il limite di f non esiste.

Osservazione 606. Questo è il metodo per dimostrare la non esistenza del limite; non si può con questo metodo l'esistenza del limite.

Maggiorazioni e funzioni radiali per provare l'esistenza del limite

Osservazione 607. Spesso col passaggio a coordinate polari (nel caso bidimensionale) si riesce a mettere in evidenza la dipendenza di $f(x, y)$ dalla distanza tra (x, y) e $(0, 0)$ attraverso $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (qui $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$).

Esempio 22.2.6. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

Affermiamo che questo limite esiste e vale 0. Per dimostrarlo, riscriviamo la funzione in coordinate polari

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = 2\rho\cos^2\theta\sin\theta$$

Poiché $|\cos\theta|, |\sin\theta| \le 1$, si può scrivere la maggiorazione

$$|f(x,y)| = \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| = 2\rho\left|\cos^2\theta\sin\theta\right| \le 2\rho$$

Poiché $|f(x,y)|$ è compreso tra 0 e 2ρ, la funzione è arbitrariamente vicina a zero quando ρ, cioè la distanza tra (x,y) e $(0,0)$ è sufficientemente piccolo. Ne consegue che il limite di f è 0 proprio per definizione di limite

Osservazione 608. Questo esempio contiene l'idea di un criterio valido in generale per provare l'esistenza di un limite. Enunciamolo prima nel caso bidimensionale (per limite a $(0,0)$ e per limite generico a (x_0,y_0)) e poi generale.

Proposizione 22.2.5. *Per dimostrare che $f(x,y)\to L$ per $(x,y)\to(0,0)$, è sufficiente riuscire a scrivere una maggiorazione del tipo $|f(\rho,\theta)-L| \le g(\rho)$ dove $g(\rho)\to 0$ per $\rho\to 0$*

Osservazione 609. L'essenziale è che la funzione g non dipenda da θ

Proposizione 22.2.6 (Caso generale bidimensionale)**.** *Se il punto (x,y) tende a (x_0,y_0), si applica lo stesso criterio con $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ cioè si pone*

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$$

Osservazione 610. Non riuscire a dimostrare una maggiorazione del genere non dimostra che il limite non esiste.

Teorema 22.2.7 (Caso generale)**.** *Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definita almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$ (salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso) e sia $L\in\mathbb{R}$. Se $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ è una funzione tale che $g(\rho)\to 0$ per $\rho\to 0$ e*

$$|f(\mathbf{x})-L| \le g(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|)$$

per ogni $\mathbf{x}$ in un opportuno intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ (salvo al più x_0 stesso), allora

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

Osservazione 611. L'essenziale nell'enunciato precedente, è aver maggiorato la differenza $|f(\mathbf{x})-L|$ con una quantità che dipende da $\mathbf{x}$ solo mediante la sua distanza da $\mathbf{x}_0$. La dimostrazione del teorema è un'immediata conseguenza della definizione di limite.

Esempio 22.2.7. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\mathbf{x}\|} e^{\|\mathbf{x}\|}$$

definita per $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$. Calcolare $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x})$.
Scriviamo, per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$|f(\mathbf{x})| = \frac{|x_1 x_2|}{\|\mathbf{x}\|} e^{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{x}\| \, e^{\|\mathbf{x}\|} \equiv g(\|\mathbf{x}\|)$$

Poiché $g(\rho) = \rho e^{\rho} \to 0$ per $\rho \to 0$, il limite cercato è 0.

Esempio 22.2.8. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Dimostriamo che il limite non esiste. La restrizione di f alle due curve $y = \pm x^2$ è:

$$f(x, \pm x^2) = \frac{\pm x^2 x^2}{x^4 + x^4} \to \pm\frac{1}{2}$$

pertanto lungo le due curve la funzione ha due limiti diversi e il limite in due variabili non esiste.
Se viceversa avessimo scritto la funzione in coordinate polari

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^4 \cos^4\theta + \rho^2 \sin^2\theta} = \frac{\rho \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

avremmo notato che, per ogni θ fissato, $f(\rho, \theta) \to 0$ per $\rho \to 0$. Questo significa che lungo ogni retta uscente dall'origine la funzione ha lo stesso limite (zero); tuttavia il limite in due variabili non esiste

22.2.3.2 Esempio riassuntivo

Esempio 22.2.9. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(2y^2 + x^3)}{x^4 + y^2}$$

ossia dimostrare che il limite esiste e vale l, oppure dimostrare che non esiste, applicando criteri e teoremi studiati.
Si tratta di una forma di indeterminazione 0/0; per cominciare a farci qualche idea esaminiamo le restrizioni della funzione lungo le rette $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x^2(2x^2 + x^3)}{x^4 + x^2} = \frac{2x^2 + x^3}{x^2 + 1} \sim 2x^2 \to 0$$

Pertanto il limite della funzione, *se esiste*, vale zero.
Si noti che qui abbiamo usato una stima asintotica; ciò non è in contrasto con quanto detto in precedenza (non usare il simbolo di asintotico su funzioni di *più* variabili) in quanto stiamo usando la stima asintotica nello studio di una restrizione di f, che è una funzione di *una* sola variabile. Tecnica che verrà

utilizzata spesso.
Cerchiamo ora di dimostrare che il limite effettivamente *esiste* con la tecnica della maggiorazione mediante una funzione radiale infinitesima.
Passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}
|f(\rho,\theta)| &= \left|\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta(2\rho^2\sin^2\theta+\rho^3\cos^3\theta)}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\right| = \left|\frac{2\rho^2\cos\theta\sin^3\theta+\rho^3\cos^4\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right| \\
&= \left|\frac{2\rho^2\cos\theta\sin^3\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}+\frac{\rho^3\cos^4\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right| \overset{(1)}{\le} \frac{2\rho^2\left|\cos\theta\sin^3\theta\right|}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}+\frac{\rho^3\cos^4\theta\left|\sin\theta\right|}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} \\
&\overset{(2)}{\le} \frac{2\rho^2\left|\cos\theta\sin^3\theta\right|}{\sin^2\theta}+\frac{\rho^3\cos^4\theta\left|\sin\theta\right|}{\rho^2\cos^4\theta} \\
&= 2\rho^2\left|\cos\theta\sin\theta\right|+\rho\left|\sin\theta\right| \\
&\overset{(3)}{\le} 2\rho^2+\rho
\end{aligned}$$

dove:

- in (1) abbiamo applicato la disuguaglianza triangolare (lasciando il modulo solo dove necessario/opportuno);
- in (2) si è fatta una ulteriore maggiorazione del tipo
$$\frac{a}{b+c}\le\frac{a}{b}\quad \text{perché se } a,b,c\ge 0 \text{ si ha } b+c\ge b$$
o in altre parole maggioriamo la frazione sopprimendo uno degli addendi al denominatore. L'addendo da sopprimere è scelto bene, in modo che *quello che resta si semplifichi col numeratore* (e in questo caso cambia a seconda della frazione considerata);
- in (3) applichiamo il fatto ovvio che $|\cos\theta|\le 1$ e $|\sin\theta|\le 1$.

L'ultima funzione trovata è una maggiorante radiale infinitesima $2\rho^2+\rho$; perciò il limite esiste e vale zero.

Osservazione 612 (La "maggiorante radiale infinitesima" deve essere radiale). Un errore piuttosto comune consiste nell'arrestarsi troppo presto nelle maggiorazioni precedenti, scrivendo qualcosa come

$$|f(\rho,\theta)|\le\ldots\le 2\rho^2\left|\cos\theta\sin\theta\right|+\rho\left|\sin\theta\right|\to 0 \text{ per } \rho\to 0$$

e pretendere di concludere che il limite è zero. Questo è *logicamente* scorretto: non vi è nulla di errato nella catena di relazioni scritte ma queste non provano nulla. Infatti il criterio visto richiede di trovare una funzione maggiorante di $|f|$ che sia radiale ed infinitesima, mentre $2\rho^2\left|\cos\theta\sin\theta\right|+\rho\left|\sin\theta\right|$ è infinitesima, ma non radiale. L'ultimo passaggio che consiste nello scrivere $22\rho^2\left|\cos\theta\sin\theta\right|+\rho\left|\sin\theta\right|\le\rho^2+\rho$ è fondamentale per l'applicabilità del criterio da un punto di vista logico.

Esempio 22.2.10. Lo stesso esercizio si sarebbe potuto svolgere, alternativamente, con maggiorazioni che non fanno uso delle coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{xy(2y^2+x^3)}{x^4+y^2}\right| &= \left|\frac{2xy^3+x^4y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{2\left|xy^3\right|}{x^4+y^2}+\frac{x^4\left|y\right|}{x^4+y^2} \\
&\le \frac{2\left|xy^3\right|}{y^2}+\frac{x^4\left|y\right|}{x^4} = 2\left|xy\right|+\left|y\right|\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}$$

per il *teorema del confronto*, il limite di partenza esiste e vale zero.
Qui si è applicato un criterio diverso da quello usato in precedenza: l'ultima funzione scritta $g(x,y) = 2|xy| + |y|$, non è una funzione radiale, ma è evidente una funzione continua in tutto il piano, perciò $(x,y) \to (0,0)$ tende a $g(0,0) = 0$; per il teorema del confronto, anche f tende a zero. Anche questa è un'argomentazione corretta, che fa uso di un diverso teorema.

Esempio 22.2.11. Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x \sin^2 y + 3xy^4}{x^2 + 2y^4} \right)$$

ossia dimostrare che il limite esiste e vale l oppure dimostrare che non esiste applicando quanto visto.
È una forma di indeterminazione $0/0$; poiché la funzione è somma di due addendi che sembrano avere diverso ordine di grandezza ($x \sin^2 y$ tende a zero come ρ^3, $3xy^4$ tende a zero come ρ^5), spezziamo anzitutto la funzione nella somma dei due addendi e studiamoli separatamente:

$$\frac{x \sin^2 y + 3xy^4}{x^2 + 2y^4} = \frac{x \sin^2 y}{x^2 + 2y^4} + \frac{3xy^4}{x^2 + 2y^4} \equiv f(x,y) + g(x,y)$$

Ora:

- il secondo addendo sembra essere il più piccolo dei due; cerchiamo di dimostrare che tende a zero:

  $$|g(x,y)| = \frac{3|x|y^4}{x^2 + 2y^4} \leq \frac{3|x|y^4}{2y^4} = \frac{3|x|}{2} \to 0$$

  quindi per il teorema del confronto $g(x,y) \to 0$. (La funzione $3|x|/2$ è continua e perciò tende a zero nell'origine);

- passando al limite di f: il fatto che il numeratore sia in grado complessivo 3 mentre il denominatore è $x^2 + 2y^4$ suggerisce che il limite potrebbe non esistere. Mostriamo che non esiste il limite, mediante la tecnica delle restrizioni:

  $$f(x,x) = \frac{x \sin^2 x}{x^2 + 2x^4} \sim \frac{x^3}{x} = x \to 0;$$
  $$f(y^2,y) = \frac{y^2 \sin^2 y}{y^4 + 2y^4} = \frac{y^2 \sin^2 y}{3y^4} \to \frac{1}{3}$$

  Poiché lungo curve diverse il limite ha valori diversi, il limite in due variabili *non esiste*.

Quindi non esiste neppure il limite di partenza: se per assurdo $f + g$ avesse limite, poiché g ha limite, anche f avrebbe limite (ma come abbiamo visto non è così).

Osservazione 613 (Scelta delle curve per mostrare la non esistenza del limite). Perché per f esempio abbiamo provato proprio le curve $y = x$ e $x = y^2$? L'idea è che, se vogliamo mostrare che il limite non esiste, dobbiamo trovare due curve che evidenzino due comportamenti diversi della funzione:

- la retta $y = x$ "pesa" allo stesso modo le due variabili; si ottiene un limite in una variabile in cui il denominatore è $x^2 + 2x^4$, quindi asintotico a x^2. Nel denominatore $(x^2 + 2y^4)$, quindi, *lungo questa retta* prevale x^2 ed è trascurabile $2y^4$; ossia rispetto all'infinitesimo campione x il denominatore è di secondo grado

- l'altra curva $x = y^2$ è scelta in modo da rendere il termine $2y^4$ non trascurabile: osservando gli esponenti delle due potenze a denominatore, scegliamo la curva $x = y^2$ in modo da rendere i due addendi in $(x^2 + 2y^4)$ di ugual peso; ora rispetto all'infinitesimo campione y il denominatore è di quarto grado.

Esempio 22.2.12. Per illustrare con un altro esempio questa tecnica: se, in un caso simile analogo avessimo un denominatore del tipo $x^6 + 3y^4$, potrebbe essere utile provare le restrizioni $y = x$ e $y = x^{3/2}$.

22.2.3.3 Limiti per $\|\mathbf{x}\| \to \infty$

Osservazione 614. Illustriamo infine come si adattino al caso dei limiti per $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ i criteri discussi in questo paragrafo per dimostrare l'esistenza o non esistenza del limite

Esempio 22.2.13. Dimostriamo che

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} xye^{-(x^2+y^2)} = 0$$

È sufficiente passare in coordinate polari e maggiorare come segue

$$\left| xye^{-(x^2+y^2)} \right| = \left| \rho^2 \cos\theta \sin\theta e^{-\rho^2} \right| \le \rho^2 e^{-\rho^2}$$

poiché l'ultima funzione scritta dipende solo da ρ e tende a zero per $\rho \to +\infty$ segue la tesi

Esempio 22.2.14. Mostriamo che

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} xye^{x^2+y^2} \qquad \text{non esiste}$$

Osserviamo che lungo la retta $y = x$ si ha

$$f(x, x) = x^2 e^{2x^2} \to +\infty, \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

mentre lungo la retta $y = 0$ è $f(x, 0) = 0$. Dunque il limite di f per $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ non esiste

22.3 Topologia in $\mathbb{R}^n$ e proprietà delle funzioni continue

Osservazione 615. Nello studio di funzioni reali di variabile reale abbiamo considerato funzioni definite su un intervallo (rettangolo) o sull'unione di più intervalli (rettangoli); nelle funzioni di più variabili viceversa spesso si incontrano insiemi di definizione della funzione abbastanza complessi

Esempio 22.3.1. Determinare l'insieme di definizione di

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(x+y)}$$

La funzione è definita nell'insieme degli (x, y) per cui si ha

$$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x + y > 0 \\ x + y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x^2 \\ y > -x \\ y \neq -x + 1 \end{cases}$$

Se si prova a disegnare l'area del piano per la quale le coppie (x, y) soddisfano il sistema di equazioni si nota che l'insieme di definizione non è descrivibile come unione di un numero finito di insiemi di forma semplice (es rettangoli)

Osservazione 616. La necessità di considerare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ piuttosto generali porta con il bisogno di introdurre certe proprietà degli insiemi, il cui studio prende il nome di *topologia*. Come vedremo, le proprietà di una funzione continua (o più regolare) definita su un insieme E dipendono anche da alcune proprietà topologiche dell'insieme

22.3.1 Topologia: concetti fondamentali

Definizione 22.3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$; un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice:

- *interno* a E se esiste un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E
- *esterno* a E se esiste un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E^c (complementare di E)
- *di frontiera* per E, se ogni intorno sferico di x_0 contiene almeno un punto di E e un punto di E^c

Esempio 22.3.2. Se

TODO: fare disegno pag 59 bramanti

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > x^2\right\}$$

(che è la fetta di cerchio unitario che sta sopra a x^2), si nota che il punto:

- $(0, 1/2)$ è interno a E
- $(1, 0)$ è esterno a E
- $(0, 0)$ è di frontiera per E (non appartiene a E)
- $(0, 1)$ è di frontiera per E (appartiene a E)

Osservazione 617. Dalle definizioni date seguono i seguenti fatti:

1. dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, si verifica necessariamente una e una sola delle tre condizioni: $\mathbf{x}_0$ è interno, è esterno, o è di frontiera per E
2. se $\mathbf{x}_0$ è interno a E, necessariamente $\mathbf{x}_0 \in E$

3. se $\mathbf{x}_0$ è esterno a E, necessariamente $\mathbf{x}_0 \notin E$
4. un punto di frontiera per E può appartenere o non appartenere a E (come visto nell'esempio precedente)

Definizione 22.3.2 (Insieme aperto)**.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se ogni suo punto è interno a E

Definizione 22.3.3 (Insieme chiuso)**.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Esempio 22.3.3. Disegnare gli insiemi in questione e applicare le definizioni per verificare che:

- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ è aperto
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ è aperto
- $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ è chiuso
- $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y - 1 = 0\}$ è chiuso
- $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y < x^2\}$ non è ne aperto ne chiuso
- $\mathbb{R}^2$ è aperto (quindi $\emptyset$ è chiuso);
- $\emptyset$ è aperto (quindi $\mathbb{R}^2$ è chiuso).

L'ultima affermazione coinvolge le proprietà un po' paradossali dell'insieme vuoto: poiché $\emptyset$ non ha punto, è lecito affermare che ogni suo punto è interno (infatti, quest'affermazione non può essere contraddetta).

Osservazione 618. Come si nota dagli esempi, un insieme qualunque può essere ne aperto ne chiuso. Inoltre esistono almeno due insiemi (e in realtà solo questi due) che sono simultaneamente aperti e chiusi: il vuoto e tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$. Notiamo anche che, poiché per definizione il complementare di un aperto è chiuso, è anche vero che *il complementare di un chiuso è aperto.*

Osservazione 619. Tutte le definizioni topologiche date fin qui si basano sul concetto di *intorno sferico*: diamo ora una definizione più generale di intorno che risulterà utile nello sviluppo del calcolo differenziale

Definizione 22.3.4 (Intorno)**.** Dato un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice intorno di $\mathbf{x}_0$ un qualsiasi insieme aperto contenente $\mathbf{x}_0$

Osservazione 620. Un intorno sferico è un particolare intorno. Inoltre, ogni intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$. Utilizzando queste osservazioni si dimostra immediatamente la seguente

Proposizione 22.3.1. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:*

- *è interno a E se e solo se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E*
- *è esterno a E se e solo se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E^c*
- *è di frontiera per E se ogni intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene almeno un punto di E e un punto di E^c*

Osservazione 621. Si confronti questa proposizione con la definizione data in precedenza di punto interno, esterno e di frontiera

Osservazione 622. A partire da insiemi aperto o chiusi, se ne possono costruire altri aperti o chiusi, mediante le operazioni insiemistiche

Teorema 22.3.2 (Operazioni insiemistiche su insiemi aperti o chiusi)**.** *L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di insiemi aperti e l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti sono insiemi aperti.*
L'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi e l'unione di un numero finito di insiemi chiusi sono insiemi chiusi. **TODO**: check

Dimostrazione. Proviamo il primo asserto; sia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo

$$E = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$. Per definizione questo significa che $\mathbf{x}_0 \in A_{\alpha_0}$ per qualche α_0; poiché A_{α_0} è aperto, esiste un intorno sferico $U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq A_{\alpha_0} \subseteq E$ perciò $U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq E$. Questo dimostra che $\mathbf{x}_0$ è interno a E. Poiché $\mathbf{x}_0$ era un generico punto di E, questo prova che E è aperto.
Sia ora

$$F = \bigcap_{i=i}^{k} A_i$$

con $A_1, \ldots, A_k$ insiemi aperti e sia $\mathbf{x}_0 \in F$. Per definizione, questo significa che $\mathbf{x}_0 \in A_i$ per ogni i; poiché A_i è aperto, esiste un intorno sferico $U_{r_i}(\mathbf{x}_0) \subseteq A_i$; poniamo

$$r = \min\{r_i : i = 1, \ldots, k\}$$

Si avrà allora $U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq U_{r_i}(\mathbf{x}_0) \subseteq A_i$ per ogni i e quindi

$$U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

Questo mostra che $\mathbf{x}_0$ è interno a F, perciò F è aperto.

Il secondo asserto (riguardo all'unione e intersezione di chiusa) si dimostra ora *per dualità*: siano $C_1, \ldots, C_k$ chiusi; allora (legge di De Morgan di unione e intersezione):

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} C_i^c$$

Poiché C_i è chiuso, C_i^c è aperto, perciò $\bigcap_{i=1}^{k} C_i^c$ è aperto, per quanto sopra dimostrato; ma allora $\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)^c$ è aperto, ossia $\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)$ è chiuso, che è quanto volevamo dimostrare. Analogamente si dimostra che l'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è chiusa (sfruttando il fatto che l'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto). $\square$

Esempio 22.3.4. Mostrare con esempi che

TODO: fixme

- l'unione di una famiglia infinita di chiusi può non essere un chiuso
- l'intersezione di una famiglia infinita di aperti può non essere un aperto

(È sufficiente ragionare in $\mathbb{R}$, con opportune successioni di intervalli aperti o chiusi).

Osservazione 623. In seguito una caratterizzazione alternativa dei chiusi (definiti in precedenza come complementari degli aperti)

Teorema 22.3.3. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora C è chiuso se e solo se, per ogni successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq C$ tale che $\mathbf{x}_k$ converga ad un certo limite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\mathbf{x} \in C$*

Osservazione 624. In altre parole: un insieme è chiuso se e solo se contiene i limiti delle sue successioni convergenti

Dimostrazione. Rispettivamente:

- sia C chiuso e proviamo che contiene i limiti delle sue successioni convergenti. Sia dunque
$$\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq C : \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$$
e per assurdo supponiamo che $\mathbf{x} \notin C$. Allora $\mathbf{x} \in C^c$ che è un insieme aperto. Sia $U_r(\mathbf{x})$ un intorno sferico di $\mathbf{x}$ contenuto in C^c. Per definizione di limite $x_k \in U_r(\mathbf{x})$ definitivamente, in particolare $\mathbf{x}_k \in C^c$ definitivamente. Ma questo è assurdo, perché $\mathbf{x}_k \in C$ per ogni k

- viceversa supponendo che C contenga i limiti delle sue successioni convergenti proviamo che è chiuso, mostrando che C^c è aperto. Sia dunque $\mathbf{x} \in C^c$ e mostriamo che $\mathbf{x}$ è interno a C^c. Per assurdo, non lo sia; questo significa che per ogni intorno $U_r(\mathbf{x})$ questo intorno non è contenuto in C^c. Consideriamo la successione di intorni $U_{1/k}(\mathbf{x})$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$; per ogni k esisterà $\mathbf{x}_k \in U_{1/k}(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{x}_k \notin C^c$, ossia $\mathbf{x}_k \in C$. D'altro canto, la costruzione degli intorni mostra che $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ (poiché $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < 1/k$). Poiché per ipotesi, C contiene i limiti delle sue successioni convergenti, $\mathbf{x} \in C$ e otteniamo una contraddizione; il teorema è dimostrato

□

Osservazione 625. I sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che ci capiterà di considerare qui sono normalmente assegnati mediante un certo numero di equazioni o disequazioni. In questi casi c'è un criterio utile per decidere se l'insieme di definizione è aperto o chiuso, senza applicare esplicitamente la definizione

Teorema 22.3.4 (Insiemi aperti e chiusi definiti da funzioni continue)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}^n$. Allora:*

- *i seguenti insiemi sono aperti*
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

- *i seguenti insiemi sono chiusi*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_0 \in E_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$ e proviamo che $\mathbf{x}_0$ è interno (da cui, per genericità di $\mathbf{x}_0$, seguirà che E è aperto). Poiché f è continua, per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno sferico $U_r(\mathbf{x}_0)$ in cui è $f(\mathbf{x}) > 0$. Pertanto $U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq E$, perciò $\mathbf{x}_0$ è interno.
Analogamente si prova che $E_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < 0\}$ è aperto. Infine

$$E_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\} = E_1 \cup E_2$$

perciò E_3 è aperto perché unione di aperti.
I tre insiemi del secondo punto sono chiusi perché i loro complementari sono, rispettivamente i tre insiemi del primo punto, che abbiamo provato essere aperti □

Osservazione 626. Per la validità del teorema precedente, è essenziale che la funzione f che definisce l'insieme sia *continua*. Senza la richiesta di continuità di f, infatti, *qualsiasi* insieme si può rappresentare; per esempio, nella forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$

Osservazione 627. Se un insieme E è definito da più equazioni o disequazioni (in numero finito), che devono essere verificate *simultaneamente*, questo significa che E è assegnato come *intersezione* di più insiemi, ciascuno definito da una sola equazione o disequazione; se questi insiemi sono tutti aperti o tutti chiusi, E sarà aperto o chiuso, rispettivamente in base al teorema 22.3.2

Esempio 22.3.5. In $\mathbb{R}^2$ l'insieme di definizione di

$$g(x, y) = \frac{1}{\log(x + y)}$$

è $F = \{(x, y) : 0 < x + y \neq 1\}$ perciò è aperto, perché intersezione di due aperti (stiamo sfruttando il fatto che la funzione $x + y$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$)

Esempio 22.3.6. L'insieme di definizione di

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

è $G = \left\{(x, y) : x^2 - y \geq 0, 1 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$ perciò è chiuso (intersezione di due chiusi)

Esempio 22.3.7. Una curva piana definita da una equazione del tipo $f(x, y) = 0$ è un insieme chiuso (se f è continua). Per esempio la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ o la parabola di equazione $y = x^2$ sono insiemi chiusi

Definizione 22.3.5 (Interno)**.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice interno di E, e si indica E° l'insieme dei punti interni di E

Definizione 22.3.6 (Frontiera o bordo)**.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice frontiera di E, e si indica ∂E l'insieme dei punti di frontiera di E

Definizione 22.3.7 (Chiusura)**.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice chiusura di E, e si indica $\overline{E}$ l'insieme di $E \cup \partial E$

Osservazione 628. In particolare si ha sempre $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$

Esempio 22.3.8. Se E è il cerchio bucato

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme E non è ne aperto ne chiuso. Si ha

$$\begin{aligned}
\partial E &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \{(0, 0)\} \\
\overline{E} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\
\overline{E} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}
\end{aligned}$$

In questo caso le inclusioni $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$

Esempio 22.3.9. Sia D la circonferenza $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. Ogni punto di D è di frontiera, perciò l'interno di D è vuoto $D^\circ = \emptyset$

Osservazione 629. Ricordando che un punto di E è o interno o di frontiera, si vede subito che $E^\circ \cup \partial E = \overline{E}$. Inoltre dalle definizioni precedenti si ha che

- un insieme è aperto se e solo se coincide con il suo interno
- un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura
- un insieme aperto non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera
- un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di frontiera

Definizione 22.3.8 (Insieme limitato)**.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E si dice limitato se esiste una costante $k > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x} \in E$ si ha che $\|\mathbf{x}\| < k$.

Osservazione 630. In altre parole se è contenuto in una sfera di raggio abbastanza grande

Definizione 22.3.9 (Insieme illimitato)**.** Insieme non limitato

Osservazione 631. Come vedremo gli insiemi *chiusi e limitati* giocano un ruolo importante nello studio delle proprietà delle funzioni continue

Definizione 22.3.10 (Insieme connesso)**.** Un insieme E si dice connesso (per archi) se, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ esiste un arco di curva continuo contenuto in E, che ha per estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

Osservazione 632. Sostanzialmente, questo significa che E è composto "da un pezzo solo".

22.3.2 Proprietà topologiche delle funzioni continue

Osservazione 633. Vediamo ora i motivi per cui le nozioni introdotte sono utili; partiamo col teorema di Weierstrass che ha generalizzazione alle funzioni di più variabili

Teorema 22.3.5 (Weierstrass)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ sia continua. Allora f ammette minimo e massimo in E, ossia esistono $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in E$ tali che*

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M)$$

per ogni $\mathbf{x} \in E$

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione nel caso bidimensionale, sufficiente a illustrare l'idea. Poiché $E \subset \mathbb{R}^2$ è limitato, è senz'altro contenuto in un rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

Proviamo che f ammette massimo in E; sia

$$\Lambda = \sup_E f = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$$

(a priori Λ è finito o infinito; proveremo che in realtà è finito). Procediamo *per dicotomia*: dividiamo ognuno dei due intervalli $[a, b]$, $[c, d]$ in parti uguali, ottenendo così una suddivisione di R in 4 rettangoli uguali. Per almeno uno di questi, che chiamiamo R_1 sarà vero che

$$\Lambda = \sup_{R_1 \cap E} f$$

Ora suddividiamo R_1 in 4 rettangolini uguali; per uno di questi, che chiamiamo R_2 sarà vero

$$\Lambda = \sup_{R_2 \cap E} f$$

Così facendo costruiamo una successione di rettangoli $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ ciascuno contenuto nei precedenti, con le proprietà:

1. le successioni a_k e c_k sono monotone crescenti e limitate; b_k e d_k sono monotone decrescenti e limitate
2. $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$; $d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k} \to 0$
3. $\Lambda = \sup_{R_k \cap E} f$

Per il teorema di esistenza del limite per una successione monotona e limitata , dai punti 1 e 2 segue che le successioni a_k e b_k convergono a uno stesso limite $x_0 \in [a, b]$, mentre c_k e d_k convergono a uno stesso limite $y_0 \in [c, d]$. **TODO**: fare citazione
Distinguiamo ora due casi: $\Lambda < +\infty$,e $\Lambda = +\infty$ (proveremo che questo secondo caso in realtà non può verificarsi).
Se $\Lambda < +\infty$, per ogni k esiste un punto[1] $(x_k, y_k) \in R_k \cap E$ tale che

$$\Lambda - \frac{1}{k} < f(x_k, y_k) \leq \Lambda \tag{22.1}$$

Poiché $x_k \in [a_k, b_k]$, $a_k \to x_0$ e $b_k \to x_0$, per il teorema del confronto anche x_k to x_0; analogamente si mostra che $y_k \to y_0$. Dunque $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$; inoltre,

[1]Infatti, poiché $\Lambda - \frac{1}{k}$ è minore di Λ, che è il minimo dei maggioranti dei valori di $f(x, y)$ in $R_k \cap E_i$, $\Lambda - \frac{1}{k}$ non è un maggiorante, quindi esiste $(x_k, y_k) \in R_k \cap E$ con la proprietà precedente

poiché i punti (x_k, y_k) appartengono a E ed E è chiuso, anche $(x_0, y_0) \in E$ (per il teorema 22.3.3).

Ancora per il teorema del confronto, la 22.1 da

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \Lambda$$

D'altro canto, poiché f è continua e $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$ si ha che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0)$$

perciò $f(x_0, y_0) = \Lambda$. Quindi Λ è il massimo di f in E ed è assunto nel punto (x_0, y_0). In questo caso perciò il teorema è dimostrato.

Supponiamo ora che sia $\Lambda = +\infty$. Allora per ogni k esiste un punto $(x_k, y_k) \in R_k \cap E$ tale che

$$f(x_k, y_k) \geq k \tag{22.2}$$

Ragionando come sopra si prova che $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$ per un certo $(x_0, y_0) \in E$. Poiché f è continua in (x_0, y_0)

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0)$$

ma per la 22.2 $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = +\infty$, assurdo perché in (x_0, y_0) la funzione deve avere un valore finito □

Osservazione 634. Anche il teorema degli zeri ha un'utile estensione a più variabili

Teorema 22.3.6 (Degli zeri)**.** *Sia E un insieme connesso di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}$ sia continua. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono due punti di E tali che $f(\mathbf{x}) > 0$ e $f(\mathbf{y}) < 0$, allora esiste un terzo punto $\mathbf{z} \in E$ in cui f si annulla. In particolare, lungo ogni arco di curva continua (contenuto in E) che congiunge $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, c'è almeno un punto in cui f si annulla*

Osservazione 635. In questa versione multidimensionale, il concetto di *insieme connesso* si rivela essere una generalizzazione opportuna del concetto unidimensionale di *intervallo*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva continua, contenuto in E, che congiunge $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, ossia $\mathbf{r}(a) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{r}(b) = \mathbf{y}$. La funzione composta

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)), \quad t \in [a, b]$$

è una funzione (reale di variabile reale) continua in $[a, b]$; inoltre

$$g(a) = f(\mathbf{r}(a)) = f(\mathbf{x}) > 0$$
$$g(b) = f(\mathbf{r}(b)) = f(\mathbf{y}) < 0$$

TODO: fai rimando

Per il teorema degli zeri unidimensionale , esiste $t_0 \in [a, b]$ tale che $g(t_0) = 0$, ossia tale che $f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$. Il teorema è dimostrato, con $\mathbf{z} = \mathbf{r}(t_0) \in E$. □

Osservazione 636. Il teorema precedente torna utile nello studio del segno della funzione: se f è funzione continua, definita su dominio qualunque, l'insieme degli zeri di f spezza il dominio in un certo numero di insiemi connessi (in cui f è diversa da zero), su ciascuno dei quali il segno di f è costante. È sufficiente allora valutare il segno di f in un punto solo di ogni connesso per conoscere il segno in tutta quella componente.

22.3.3 Insiemi del piano definiti da equazioni/disequazioni

Sopragrafici, sottografici, semipiani Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo $I = [a, b]$, il suo grafico $y = f(x)$ può essere usato per definire alcuni concetti

Definizione 22.3.11 (Sopragrafico)**.** l'insieme di punti dove $y \geq f(x)$, ossia l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geq f(x)\}$$

rappresentato dalla regione del piano compresa tra le rette verticali $x = a$ e $x = b$ e che sta sopra il grafico di f (incluso quest'ultimo)

Definizione 22.3.12 (Sottografico)**.** Definizione speculare

Osservazione 637. Le disequazioni $y < f(x)$, $y > f(x)$ indicano gli stessi insiemi, privati della linea del grafico

Osservazione 638. Nel caso ci troviamo a dover determinare l'area (un semipiano) rappresentata da una disequazione

$$ax + by + c \geq 0$$

(rispettivamente ≤ 0, < 0, > 0) la cosa più semplice è esplicitare la disequazione rispetto ad y

Esempio 22.3.10.

$$2x - 3y + 1 \geq 0 \text{ la riscriviamo come} y \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

e questo mostra che il semipiano di interesse è il sottografico della retta $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Osservazione 639. Tutto quanto detto fino a qui si può riferire anche a funzioni $x = g(y)$ (laddove una esplicitazione di questo genere sia più comoda): basta girare il foglio e ragionare.

Esempio 22.3.11. L'espressione

$$x - y - e^y \geq 0$$

indica l'insieme dei punti che stanno alla *destra* del grafico della funzione

$$x = y + e^y$$

Esempio 22.3.12. L'insieme

$$\arctan y - 2x \geq 0$$

indica l'insieme dei punti che stanno a sinistra del grafico della funzione $x = \frac{1}{2} \arctan y$

Interno ed esterno di un cerchio o di un'ellisse

Osservazione 640 (Cerchio)*.* La disequazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

indica l'insieme di punti del piano la cui distanza (al quadrato) da (x_0, y_0) è minore di r^2. Perciò stiamo parlando del cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r. Se ci fosse la disuguaglianza $<$ sarebbe il cerchio privato della circonferenza, e se ci fosse la disuguaglianza $\geq$ o $>$ sarebbe la regione del piano *esterna* al cerchio, rispettivamente compresa o esclusa la circonferenza stessa

Osservazione 641 (Ellisse)*.* La disequazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \quad (\text{rispettivamente} \geq 1)$$

indica la regione del piano *interna* (rispettivamente esterna) all'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Disequazioni corrispondenti a curve più generali

Esempio 22.3.13 (Iperbole)**.** Consideriamo la disequazione

$$x^2 - y^2 \geq 1$$

Dato che $x^2 - y^2 = 1$ è l'equazione di un'*iperbole*, ci aspettiamo che la disequazione denoti una delle regioni in cui l'iperbole divide il piano.
Qui non è possibile una interpretazione in termini di distanza (e quindi di interno ed esterno) data nel caso del cerchio: in effetti l'iperbole è una in due rami, che divide il piano in tre regioni, tutte illimitate (non vi è una regione esterna ed una interna).
Usiamo questo esempio per illustrare un fatto generale.

Osservazione 642*.* Il procedimento da adottare:

1. se $f(x, y)$ è una funzione continua definita in tutto il piano, la disequazione $f(x, y) \neq 0$ definisce un insieme aperto del piano costituito da un certo numero (eventualmente infinito di aperto *connessi*. Supponiamo per semplicità che siano un numero finito: $A_1, \ldots, A_n$

2. studiamo ora il segno di f in ciascuna di queste regioni. Consideriamo ad esempio A_1: in essa per definizione $f(x, y) \neq 0$ inoltre sappiamo che f è continua in A_1 e che A_1 è aperto e connesso. Per il teorema degli zeri per funzione continue di più variabili bps cap 3 par 3.2 , se in A_1 esistessero due punti diversi in cui f ha segni opposti, dovrebbe esistere un terzo punto di A_1 in cui f si annulla, cosa impossibile. Concludiamo che f ha segno costante in A_1

   TODO: fixme

3. questo ragionamento si può ripetere per ciascuna componente connessa $A_1, \ldots, A_n$. In ciascuna regione A_i il segno di f non cambia (anche se può cambiare da una regione all'altra). È sufficiente allora valutare f in un solo punto di ciascuna regione per conoscere il segno di f in tutta quella regione

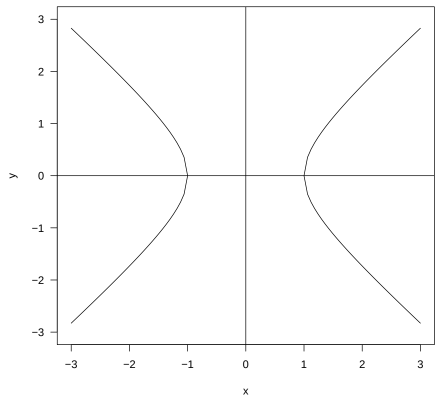


Figura 22.4: Curva $x^2 - y^2 - 1$

Esempio 22.3.14.

Esempio 22.3.15. Studiare il segno di

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$; l'insieme in cui si annulla $f(x, y) = 0$ è l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$. Questa curva spezza il piano in tre fasce su ognuna delle quali il segno di f è costante: basta calcolare f in un punto di ciascuna fascia per conoscere il segno in tutta la componente.
Per esempio

- $f(-2, 0) > 0$ e dunque in tale fascia (chiamiamola A_1), si ha che $f > 0$
- $f(0, 0) < 0$ dunque in tale (A_2) fascia $f < 0$
- $f(2, 0) > 0$ perciò in tale (A_3)fascia $f > 0$;

Pertanto il luogo descritto dalla disequazione

$$x^2 - y^2 \geq 1$$

è l'unione dell'insieme A_1 con l'insieme A_3 e con il grafico dell'iperbole

Sistemi di equazioni e disequazioni. Unioni e intersezioni di insiemi

Osservazione 643. Quando abbiamo un insieme definito da più equazioni o disequazioni che devono valere simultaneamente (o alternativamente), dovremmo considerare l'intersezione (o l'unione) degli insiemi definiti dalle singole relazioni

Esempio 22.3.16. L'espressione

$$1 < x \leq 2$$

rappresenta l'intersezione dei due semipiani $x > 1$ e $x \leq 2$ quindi la striscia verticale compresa tra le rette $x = 1$ (esclusa) e $x = 2$ compresa

Esempio 22.3.17. Le condizioni

$$y < 0 \text{ o } y > 2$$

rappresentano la regione esterna alla striscia compresa tra le rette orizzontali $y = 0$ e $y = 2$ ed esclude le rette stesse

Esempio 22.3.18. Come già visto le condizioni

$$y \geq x^2, x + y^2 \leq 1$$

rappresenta la regione interna al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e sta anche sopra il grafico della parabola $y = x^2$

22.4 Derivate parziali e piano tangente

22.4.1 Derivate parziali

Osservazione 644. Ci interessa ora definire il concetto di derivata per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Osservazione 645. La solita definizione di derivata, basata su limite del rapporto incrementale, non è applicabile in modo ovvio, perché se (x_0, y_0) è il punto in cui vogliamo derivare $f(x, y)$, cosa intendere per incremento della coppia di variabili? Non può essere un vettore perché non avrebbe poi senso dividere l'incremento di f per un vettore (solo il viceversa è ben definito).
La soluzione sta nell'incrementare solo una variabile alla volta

22.4.1.1 Nel caso bidimensionale

Osservazione 646. Nel caso di $n = 2$ si può tenere costante il valore di $y = y_0$ e derivare la funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y_0)$ nel punto x_0; oppure tener costante il valore di $x = x_0$ e derivare la funzione di una variabile $y \mapsto f(x_0, y)$ nel punto y_0.

Definizione 22.4.1 (Derivata parziali di f, calcolate in (x_0, y_0))**.** Si intendono i seguenti limiti, se esistono finiti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Esempio 22.4.1. Sia $f(x, y) = x^2 y^3$. Vogliamo calcolare la derivata parziale rispetto a x in $(1, 2)$: abbiamo due strade:

1. applicare la definizione, scrivendo prima la funzione di una variabile che si ottiene restringendo f alla retta $y = 2$, quindi calcolando la derivata di questa rispetto a x e valutando infine la derivata in $x = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{d}{dx}[f(x, 2)]_{|x=1} = \frac{d}{dx}[8x^2]_{|x=1} = (16x)_{|x=1} = 16$$

2. più speditamente procedendo così: la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$ in un generico punto (x,y) è la derivata di x^2y^3 rispetto a x, quando si pensi y costante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = 2xy^3$$

Questa è la derivata desiderata, in ogni punto (x,y); nel caso vogliamo valutarla in $(1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = (2xy^3)_{|(x,y)=(1,2)} = 16$$

Osservazione 647. Talvolta è strettamente necessario applicare il primo metodo (ossia la definizione), come si vede nel seguente esempio

Esempio 22.4.2. Calcolare la derivata di $z = y\sqrt{x}$ rispetto a x nel punto $(0,0)$:

- applicando il secondo metodo calcolando la derivata generica si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}(y\sqrt{x}) = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

ma valutando l'espressione trovata in $(0,0)$ si trova $0/0$ che non ha senso;

- applicando la definizione (ossia valutando parzialmente e poi calcolando la derivata) invece si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}(y\sqrt{x})_{|(x,y)=(0,0)} = \frac{d}{dx}(0\sqrt{x})_{|x=0} = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

La derivata parziale rispetto a x nell'origine pertanto esiste e vale zero.

Osservazione 648. I vantaggi che vi possono essere nell'usare il metodo di calcolo della derivata *in un punto* facendo uso della definizione sono i seguenti:

- la funzione $f(x,y_0)$ potrebbe risultare derivabile per un certo y_0 fissato, mentre non lo è per y generico, quindi il calcolo fatto in questo modo risulta praticabile *in più* casi
- la funzione $f(x,y_0)$ potrebbe risultare molto semplice (ad esempio costante) e quindi banale da derivare, mentre $f(x,y)$ potrebbe non esserlo

22.4.1.2 Nel caso generale

Osservazione 649. La generalizzazione è solo una questione di notazione.

Definizione 22.4.2 (Derivata parziale i-esima in $\mathbf{x}_0$)**.** Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, teniamo fisse tutte le coordinate di $\mathbf{x}$ eccetto la i-esima e calcoliamo il limite del rapporto incrementale di f in questa direzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h}, \quad \text{per } i = 1,\ldots,n$$

In notazione estesa, se $\mathbf{x}_0 = (x_1,\ldots,x_n)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h}$$

Osservazione 650. Per poter calcolare le derivate parziali di f in un punto $\mathbf{x}_0$ è necessario che anche il punto incrementato appartenga al dominio di f, almeno per un incremento abbastanza piccolo. Questo è certamente vero se il dominio di f è un insieme *aperto*. Pertanto d'ora in poi considereremo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto.

Definizione 22.4.3 (Funzione derivabile in un punto)**.** Funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per la quale esistono tutte le derivate parziali nel punto.

Definizione 22.4.4 (Funzione derivabile in un aperto)**.** Funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di A.

Definizione 22.4.5 (Funzione di classe $C^1(A)$)**.** Funzione le cui derivate parziali esistono e sono continue in tutto un aperto A; si scrive $f \in C^1(A)$

Definizione 22.4.6 (Gradiente)**.** Se f è derivabile in un punto, chiamiamo gradiente il vettore delle derivate parziali in quel punto

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$$

Esempio 22.4.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}^n$ e, infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)}\right) = \left(e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)}\right)(-2x_i) = -2x_i e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$$

che è definita per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Esempio 22.4.4. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|}$ è derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ tranne l'origine. Infatti per ogni $i = 1, \ldots, n$ e ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}\right) = \left(e^{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}} \cdot 2x_i = \frac{e^{\|\mathbf{x}\|} \cdot x_i}{\|\mathbf{x}\|}$$

TODO: check sul libro

espressione che perde significato per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In questo punti si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{|x_i|}\right)_{|x_i=0} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{|h|}-1}{h}$$

che non esiste

22.4.2 Piano tangente

Osservazione 651. Per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definire la derivata equivale a definire la retta tangente al suo grafico; per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il problema analogo è definire il *piano tangente* al grafico della funzione.

Osservazione 652. Ci poniamo qui di determinare tale piano: questo problema è la strada naturale per giungere alla nozione di *funzione differenziale*

Osservazione 653. Vediamo la procedura per la costruzione del piano tangente, *Nel caso* questo esista:

1. se sezioniamo il grafico $z = f(x, y)$ con il *piano verticale* dato dalle triplette con $y = y_0$ troviamo una curva (in questo piano) descritta dall'equazione $z = f(x, y_0)$. La retta tangente r_1 risiederà sul piano tangente che stiamo ricercando; nel piano $y = y_0$ la retta r_1 è descritta da
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$
ossia alla fine è una funzione $z = f(x)$ e stiamo determinando la retta passante per il punto $f(x_0, y_0)$ con inclinazione data dalla derivata e pesata per lo spostamento rispetto al punto x_0.
Nello spazio invece r_1 è individuata dal sistema
$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

2. ripetendo il sezionamento mediante il piano $x = x_0$ e cercando la retta tangente in $y = y_0$ avremo la retta r_2, anch'essa residente sul piano di nostro interesse. Analogamente la retta r_2 è individuata dal sistema
$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$
dove appunto cambia il piano considerato e dunque anche l'equazione della retta tangente.

Poiché in $\mathbb{R}^3$ due rette che si intersecano individuano un unico piano, questo dovrebbe essere il piano tangente; il piano che contiene entrambe le rette si costruisce partendo dal punto base e aggiungendo le variazioni della funzioni legate a variazioni delle variabili indipendenti
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{22.3}$$

Osservazione 654. L'equazione 22.3 si può scrivere ogni volta che $f(x, y)$ è derivabile: il piano che essa individua, per costruzione, contiene le rette tangenti alle sezioni che il grafico forma con i piano $x = x_0$ e $y = y_0$. Se questo è effettivamente il piano tangente, deve contenere anche tutte le rette tangenti che si ottengono selezionando il grafico con un piano verticale qualsiasi. Purtroppo, però non c'è garanzia che questo accada (come avviene nel secondo esempio a seguire) nella sola ipotesi di derivabilità di $f(x, y)$.

Esempio 22.4.5. Determiniamo il piano tangente al grafico di $z = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1)$. Partiamo dalle derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
Calcoliamo ora gli elementi necessari per l'equazione del piano
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2, \quad f(1, 1) = 2$$
L'equazione del piano è dunque:
$$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) = 2x + 2y - 2$$
Plottandolo si vede che è il piano tangente

Esempio 22.4.6. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

La funzione è nulla sugli assi x, y; calcolando le derivate parziali di f nell'origine mediante la definizione, esse esistono e sono nulle, pertanto la funzione è derivabile. Dato che anche f è nulla in $(0,0)$, il piano che uscirebbe dal calcolo è $z = 0$. Ma se si plotta tale piano esso non è tangente in $(0,0)$; anzi la funzione non è continua nell'origine

22.5 Differenziabilità e approssimazione lineare

Osservazione 655. L'ultimo esempio mostra un problema tipico del calcolo differenziale in più variabili, che non ha analogo nel caso unidimensionale: mentre in una variabile la derivata è equivalente all'esistenza della retta tangente e implica la continuità, in 2+ variabili *la sola derivabilità non implica ne la continuità ne l'esistenza del piano tangente.*

Osservazione 656. Nel caso di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proprietà fondamentale della retta tangente è espressa dalla seguente relazione:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h), \quad \text{per } h \to 0$$

(ossia stiamo scrivendo in altro modo il limite del rapporto incrementale per la variazione h tendente a 0); si nota come l'*incremento della funzione* $f(x+h) - f(x)$ coincide con il *differenziale* $f'(x)h$, ossia l'incremento calcolato lungo la retta tangente; i due incrementi differiscono per un infinitesimo $o(h)$ di ordine superiore rispetto all'incremento h della variabili indipendente.

Osservazione 657. Qual è allora la proprietà di f che garantisce che il piano sia realmente tangente? La *differenziabilità in più variabili*

22.5.1 Nel caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 22.5.1 (Funzione differenziabile in (x_0, y_0))**.** Funzione per la quale

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + o(\sqrt{h^2+k^2}), \quad \text{per } (h,k) \to (0,0) \tag{22.4}$$

Osservazione 658. Nella 22.4 il primo membro rappresenta l'incremento della funzione; al secondo, i primi due addendi rappresentano l'incremento calcolato lungo il piano tangente, mentre l'ultimo costituisce l'errore che si commette valutando l'incremento di f come incremento lungo il piano tangente. Il simbolo $o(\sqrt{h^2+k^2})$ indica per definizione, una funzione di (h,k) tale che

$$\lim_{(h,l)\to(0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{h^2+k^2} = 0$$

Osservazione 659. Pertanto la definizione stabilisce che in una funzione differenziabile, l'incremento registrato in f è uguale a quello lungo il piano tangente, più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento (h,k), nel caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, delle variabili indipendenti.

Osservazione 660. La condizione 22.4 garantisce che il piano 22.3 sia tangente al grafico di f (anzi, è una definizione precisa di cosa significhi piano tangente). Il piano tangente è dunque il piano di equazione 22.3 solo se la 22.4 è verificata; altrimenti non esiste

22.5.2 Nel caso generale

Osservazione 661. Anche in questo caso solo una generalizzazione di notazione.

Definizione 22.5.2 (Funzione differenziabile)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Diremo che f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ se esiste un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0} \tag{22.5}$$

o in altre parole

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{22.6}$$

Osservazione 662. Nella formula precedente $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ è l'incremento (variazione nello spazio) della variabile indipendente, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{a}^T \mathbf{h}$ è il prodotto scalare dei due vettori; la funzione f è definita nel punto $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ almeno quando $\|\mathbf{h}\|$ è abbastanza piccolo, perché per ipotesi il punto $\mathbf{x}_0$ è interno al dominio di definizione di f.

Osservazione 663. Mostriamo ora una proposizione che rende più comprensibile il legame col caso $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Proposizione 22.5.1. *Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, allora f è anche derivabile in $\mathbf{x}_0$ e il vettore $\mathbf{a}$ che compare nella 22.5 è il gradiente di f calcolato in $\mathbf{x}_0$:*

$$\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$$

Inoltre, f è continua in $\mathbf{x}_0$

Dimostrazione. Dato che è differenziabile vale la 22.6; vediamo allora cosa succede se nella 22.6 scegliamo come incremento un vettore $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_i$ con $h \in \mathbb{R}$ (abbastanza piccolo), ossia incrementiamo la variabile solo nella direzione parallela a un asse coordinato. Ponendo $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, si ha che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{h} = a_i h$ (dato che tutte le componenti di $\mathbf{h}$ sono nulle ad eccezione della i-esima, pari ad h). Effettuando la sostituzione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0) - a_i h}{h} = 0$$

da cui ri-arrangiando algebricamente leggiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = a_i$$

Questo limite per definizione è $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$, perciò $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = a_i$ per ogni $i = 1, 2 \ldots, n$ e allora appunto $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.
Dunque, visto che differenziabile, f è derivabile in x_0 (gli $a_i \in \mathbb{R}$ per ipotesi della definizione, e dunque le derivate parziali esistono e le funzioni sono derivabili).

Per mostrare che è continua, basta osservare che, direttamente dalla 22.5, se $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ il secondo membro della 22.5 tende a zero; di conseguenza tende a zero anche il primo membro, ossia $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \to f(\mathbf{x}_0)$ che esprime la continuità di f in $\mathbf{x}_0$ □

Osservazione 664. In base alla proposizione precedente, possiamo riscrivere la definizione di differenziabilità di f in $\mathbf{x}_0$ come:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(x_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + o(\|\mathbf{h}\|) \qquad (22.7)$$

per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$

Definizione 22.5.3 (Differenziale di f)**.** Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, si dice differenziale di f calcolato in $\mathbf{x}_0$ la funzione lineare $df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$df(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \to \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

Osservazione 665. Nel caso $n = 2$ il numero $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$ rappresenta l'incremento della funzione nel passare da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, calcolato lungo il piano tangente al grafico di f in $\mathbf{x}_0$

Osservazione 666. L'approssimazione dell'incremento di f mediante il suo differenziale (applicato ad $\mathbf{h}$) prende il nome di *linearizzazione* di f e, per le funzioni di più variabili (come già per quelle di una variabile sola), costituisce una semplice e tipica applicazione

Osservazione 667. Spesso, sottintendendo l'incremento $\mathbf{h}$ si scrive semplicemente $df(\mathbf{x}_0)$ intendendo $df(x_0)(\mathbf{h})$, cioè $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. La 22.7 prende allora la forma sintetica

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|)$$

che esprime appunto la linearizzazione di f.

Osservazione 668. Diamo anche la seguente definizione di iperpiano tangente

Definizione 22.5.4. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (x'_1, \ldots, x'_n)$ si dice iperpiano tangente al grafico di f l'iperpiano

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x'_i)$$

Osservazione 669. Questa è effettivamente l'equazione di un iperpiano nello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ delle variabili $(x_1, \ldots, x_n, z)$; nel caso $n = 2$ si ritrova la definizione di piano tangente data in precedenza

Osservazione 670. Riassumendo, abbiamo visto che:

- la definizione di differenziabilità di una funzione in un punto;
- differenziabilità implica la derivabilità, la continuità e, per definizione stessa, l'esistenza dell'iperpiano tangente.
- la sola derivabilità (cioè l'esistenza delle derivate parziali) non è sufficiente a garantire neppure la continuità della funzione

Osservazione 671. Pertanto la differenziabilità è una condizione più forte di continuità e di derivabilità. Purtroppo la differenziabilità *non è facile da verificare direttamente.* Nel caso $n = 2$ dimostrare la differenziabilità in (x_0, y_0), ossia la 22.4, significa provare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

e questo è un limite, in due variabili, che da certamente una forma di indeterminazione e va quindi trattato con i metodi illustrati nel paragrafo 22.2.3.

Osservazione 672. Pertanto è utile conoscere qualche condizione *sufficiente* (e di più facile verifica) che garantisca che la 22.4 valga. Il criterio adottato tipicamente è indicato nel prossimo teorema.

Teorema 22.5.2 (Condizione sufficiente di differenziabilità in un punto)**.** *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto e $\mathbf{x}_0 \in A$. Se le derivate parziali di f esistono in un intorno di $\mathbf{x}_0$ e sono continue, f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.*

Osservazione 673. In particolare, se le derivate parziali di f esistono e sono continue in tutto A, allora f è differenziabile in tutti i punti di A:

$$f \in C^1(A) \implies f \text{ è differenziabile in } A$$

L'implicazione inversa non vale, come si vedrà in seguito

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso $n = 2$ (il caso generale procede sulla stessa linea). Svolgiamo un ragionamento sostanzialmente unidimensionale: per valutare

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

muoviamoci dal punto $c(x_0, y_0)$ al punto $(x_0 + h, y_0 + k)$ incrementando le variabili una alla volta, ossia prima sul segmento orizzontale che unisce $c(x_0, y_0)$ a $c(x_0+h, y_0)$, poi sul segmento verticale che unisce quest'ultimo a (x_0+h, y_0+k). La funzione f ristretta a ciascuno dei due segmenti è una funzione di una sola variabile (z in funzione della variabile che varia, l'altra è fissa). Applicando il teorema di Lagrange:

- alla prima funzione $x \mapsto f(x, y_0)$ della sola variabile x possiamo scrivere

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \delta_1 h, y_0)h \tag{22.8}$$

  per un opportuno $\delta_1 \in (0, 1)$ (δ_1 dipendente da h)

- alla seconda funzione $y \mapsto f(x_0 + h, y)$ (occhio qui che è $x_0 + h$) della variabile y abbiamo invece

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \delta_2 k)k \tag{22.9}$$

  per un opportuno $\delta_2 \in (0, 1)$ (δ_2 dipendente da h e k).

Sommando membro a membro la 22.8 e la 22.9 si ha

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\delta_1 h,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\delta_2 k)k \quad (22.10)$$

poiché le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\delta_1 h,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\varepsilon_1(h)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\delta_2 k)k &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\varepsilon_2(h,k)\end{aligned}$$

con $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h,k) \to 0$ per $(h,k) \to (0,0)$. Sostituendo in 22.10 si ottiene:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\varepsilon_1(h)h+\varepsilon_2(h,k)k$$

Basta ora osservare che la quantità $\varepsilon_1(h)h+\varepsilon_2(h,k)k$ è anche $o(\sqrt{h^2+k^2})$ per $(h,k) \to (0,0)$, infatti:

$$\frac{|\varepsilon_1(h)h+\varepsilon_2(h,k)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \left|\frac{\varepsilon_1(h)h}{h}\right| + \left|\frac{\varepsilon_2(h,k)k}{k}\right| = |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \to 0$$

Pertanto si ritrova la

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+o(\sqrt{h^2+k^2})$$

che coincide con la definizione 22.5, specializzata al caso di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{h} = (h, k)$. □

Esempio 22.5.1. Riprendendo $z = x^2 + y^2$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Queste funzioni sono continue in tutto il piano, quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, in particolare è differenziabile in tutto il piano. Ciò significa che il piano calcolato in precedenza è effettivamente il piano tangente alla funzione nel punto assegnato.

Osservazione 674. Spesso non occorre nemmeno calcolare le derivate parziali per decidere se una funzione è C^1 in un aperto; è spesso sufficiente osservare la forma della funzione, ricordando le regole di derivazione e i teoremi sulla continuità delle funzioni elementari

Esempio 22.5.2. È ovvio che la funzione

$$f(x,y)=\frac{e^{3x^2y}-5\cos(xy)}{x^2+y^2}$$

al di fuori dell'origine è continua e ha derivate parziali continue, perché in base alle regole di derivazione, anche le derivate parziali saranno date da un quoziente di funzioni continue, il cui denominatore si annulla solo nell'origine. Pertanto $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e in tale insieme f è anche differenziabile

Osservazione 675. Il teorema 22.5.2, pur molto utile, da una condizione sufficiente, ma non necessaria per la differenziabilità

Esempio 22.5.3. La funzione

$$f(x,y) = xy^{1/3}$$

è definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Ci chiediamo in quanti punti è differenziabile. Partiamo calcolando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^{1/3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{3y^{2/3}}$$

la prima è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$, la seconda purché $y \neq 0$. Nei punti $(x_0, 0)$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ va calcolata in base alla definizione. Notiamo che se $x_0 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x_0 y^{1/3}\right)_{|y=0} = x_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{1/3}\right)_{|y=0} \quad \text{non esiste}$$

mentre se $x_0 = 0$

TODO: rivedere qui

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(0 \cdot y^{1/3})_{|y=0} = 0$$

in quanto $f(0,y)$ è identicamente nulla. Ricapitolando:

- nell'aperto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}$ entrambe le derivate parziali esistono e sono continue; pertanto $f \in C^1(A)$ e, per il teorema precedente, f è differenziabile in A

- nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ la funzione f non è derivabile (perché non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ quindi a maggior ragione non è differenziabile;

- rimane da studiare l'origine, in cui f è derivabile, ma il teorema precedente non è applicabile (perché l'origine non appartiene a un insieme aperto in cui le derivate parziali sono continue)

Nell'origine è quindi necessario applicare direttamente la definizione di differenziabilità. In questo caso non difficile, in quanto

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

per cui occorre provare che $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ovvero che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Passando in coordinate polari e utilizzando i metodo visti nel paragrafo 22.2.3 è immediato. Si conclude allora che f è differenziabile anche in $(0,0)$. Nell'origine però non è stato possibile applicare la condizione sufficiente espressa dal teorema

22.6 Derivate direzionali

Osservazione 676. Abbiamo visto che per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ misura la velocità di crescita di f nella direzione dell'asse x_i. Un problema naturale è quello di misurare la velocità di crescita di f anche in direzioni diverse da quelle degli assi.

Osservazione 677. Consideriamo un punto $\mathbf{x}_0$ e supponiamo di muoverci da li lungo la retta individuata da un versore $\mathbf{v}$. Tale retta ha equazione parametrica

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

con $t \in \mathbb{R}$; si ha che $t = 0$ corrisponde al punto $\mathbf{x}_0$. In seguito a tale spostamento, la funzione f subirà l'incremento

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)$$

Ci troviamo in una situazione unidimensionale (differenza di due numeri), pertanto basterà dividere per t e far tendere t a zero per ottener il tasso di incremento di f lungo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{x}_0$.

Definizione 22.6.1 (Derivata direzionale)**.** Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto, $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{v}$ un versore. Si dice derivata direzionale di f rispetto al versore $\mathbf{v}$, nel punto $\mathbf{x}_0$, il seguente limite, se esiste finito:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

Osservazione 678. Detto alternativamente: si considera la restrizione di f alla retta uscente da $\mathbf{x}_0$ in direzione $\mathbf{v}$, ossia

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$$

Il limite della definizione di derivata direzionale

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = g'(0)$$

Osservazione 679. Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali, corrispondenti ai versori canonici $\mathbf{e}_i$: $D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}_0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$

Osservazione 680. Nel caso particolare $n = 2$ un versore $\mathbf{v}$ assume la forma

$$\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

con θ l'angolo formato da $\mathbf{v}$ con l'asse x. Perciò si ha:

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

o anche ponendo $g(t) = f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)$,

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = g'(0)$$

In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) \quad \text{con } \mathbf{v} = \mathbf{e}_1, \text{ cioè } \theta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) \quad \text{con } \mathbf{v} = \mathbf{e}_2, \text{ cioè } \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Esempio 22.6.1. Per la funzione $z = xe^{xy}$, calcoliamo $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ per $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ generico. Si ha:

$$\begin{aligned} g(t) &= t\cos\theta e^{t^2\cos\theta\sin\theta} \\ g'(t) &= \cos\theta e^{t^2\cos\theta\sin\theta} + e^{t^2\cos\theta\sin\theta}(2t\cos\theta\sin\theta)t\cos\theta \\ &= \cos\theta e^{t^2\cos\theta\sin\theta}(1 + 2t^2\cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

e quindi

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = g'(0) = \cos\theta e^{0^2\cos\theta\sin\theta}(1 + 2\cdot 0^2\cos\theta\sin\theta) = \cos\theta$$

Per esempio, se $\theta = \pi/4$ si ha $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si noti che questa funzione è C^1, quindi differenziabile nell'origine.

Esempio 22.6.2. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ calcoliamo $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ con $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\begin{aligned} g(t) &= t(\cos\theta)^{2/3}(\sin\theta)^{1/3} \\ g'(t) &= (\cos\theta)^{2/3}(\sin\theta)^{1/3} \end{aligned}$$

per cui

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = g'(0) = (\cos\theta)^{2/3}(\sin\theta)^{1/3}$$

Perciò la funzione ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$; in particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (se $\theta = 0$ o $\theta = \pi/2$ si annulla uno a tra seno e coseno, il che fa annullare la funzione). Tuttavia, questa funzione non è differenziabile nell'origine, come si può verificare applicando la definizione o alternativamente come risulterà facilmente in seguito al prossimo teorema

Osservazione 681. Quest'ultimo esempio mostra che l'esistenza di tutte le derivate direzionali, di per sé, da un'informazione piuttosto povera sulla regolarità di una funzione: la funzione potrebbe non essere differenziabile pur possedendo tutte le derivate direzionali.

Osservazione 682. Un fatto notevole è che, se la funzione è differenziabile, tutte le informazioni date dalle derivate direzionali sono implicitamente contenute nelle derivate parziali; vale infatti l'importante

Teorema 22.6.1 (Formula del gradiente)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora per ogni versore $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ e vale l'identità*

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)v_i \tag{22.11}$$

Osservazione 683. A parole, la derivata direzionale è in questo caso il prodotto scalare del gradiente con il versore nella cui direzione si deriva; tutte le derivate direzionali risultano così combinazione lineare delle derivate parziali

Dimostrazione. Basta ricordare la definizione di differenziabilità

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}$$

e applicarla all'incremento $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$; si ha

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot t\mathbf{v} + o(t)$$

(ricordando che $\|\mathbf{v}\| = 1$). Dividendo per t

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} + \frac{o(t)}{t}$$

e facendo tendere t a zero, otteniamo che

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

poiché $\frac{o(t)}{t} \to 0$ □

Osservazione 684. Nel caso $n = 2$ la formula del gradiente assume la forma

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin\theta$$

con $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

Corollario 22.6.2 (Direzioni di massima e minima crescita)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora il vettore $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ indica la direzione (e il verso) di massimo accrescimento di f, ossia la direzione corrispondente alla massima derivata direzionale; $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ indica la direzione corrispondente alla minima derivata direzionale (che in generale è negativa); infine, nella direzione ortogonale al gradiente le derivate direzionali sono nulle*

Dimostrazione. Applicando la formula del gradiente, e ricordando che il prodotto scalare di due vettori è il prodotto dei moduli/norme per il coseno che formano, si sa che:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta$$

con $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo tra il generico $\mathbf{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Ora, per ipotesi $\mathbf{v}$ è un versore quindi $\|\mathbf{v}\| = 1$ e arriviamo a

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \cos\theta$$

Ora ci domandiamo: come scegliere $\mathbf{v}$ (ossia θ) al fine di massimizzare la derivata direzionale nel punto $\mathbf{x}_0$? Una volta fissato il punto $\mathbf{x}_0$ la derivata direzionale dipende esclusivamente da θ, dato che $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$ è un numero ben preciso.
Affinché la derivata direzionale:

- sia massima dobbiamo imporre $\cos\theta = 1$ ossia $\theta = 0$, ossia $\mathbf{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ debbono avere stessa direzione e stesso verso
- sia minima dobbiamo richiedere che $\cos\theta = -1$, ossia $\theta = \pi$; ossia che $\mathbf{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ abbiano stessa direzione ma versi opposti

- sia nulla dobbiamo richiedere $\cos\theta = 0 \iff \theta = \pi/2$ ossia che i due vettori siano perpendicolari.

$\square$

Esempio 22.6.3. Sia $f(x,y) = e^x + \sin 2y$. Calcoliamo le derivate direzionali nell'origine. Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, è sufficiente calcolare il gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = (e^x, 2\cos 2y); \quad \nabla f(0,0) = (1,2)$$

e quindi applicare la formula del gradiente: per ogni versore $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} = (1,2) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta$$

In particolare, la derivata direzionale massima si ha per il versore $\frac{\nabla f(0,0)}{\|\nabla f(0,0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, quella minima per $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, mentre nelle direzioni di $\mathbf{v} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ la derivata direzionale è nulla

Osservazione 685. Vediamo come la regola del gradiente possa essere utilizzata per escludere la differenziabilità di una funzione in un punto.

Esempio 22.6.4. La funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ *non soddisfa* la formula del gradiente nell'origine: infatti le sue derivate parziali sono nulle, mentre le derivate direzionali non sono tutte nulle (e quindi non possono essere combinazioni lineari delle derivate parziali). Ne segue che la funzione non è differenziabile nell'origine.

Esempio 22.6.5. Considerando

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calcoliamo le derivate direzionali in $(0,0)$ posto $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = (\text{per } t \neq 0) = \frac{t^3 \cos^2\theta \sin\theta}{t^4 \cos^4\theta + t^2 \sin^2\theta} = \frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

osserviamo che l'espressione trovata rappresenta $g(t)$ anche per $t = 0$, purché sia $\sin\theta \neq 0$ (tratteremo a parte il caso $\sin\theta = 0$). Si ha

$$g'(t) = \frac{\cos^2\theta\sin\theta(t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta) - 2t\cos^4\theta(t\cos^2\theta\sin\theta)}{(t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta)^2}$$

e

$$D_{\mathbf{v}}(0,0) = g'(0) = \frac{\cos^2\theta\sin^3\theta}{\sin^4\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}, \text{(purché sia } \sin\theta \neq 0)$$

Se $\sin\theta = 0$ stiamo considerando l'asse x, su cui f è identicamente nulla e le relative derivate direzionali ($\pm f_x(0,0)$) sono nulle.
In conclusione, esistono tutte le derivate direzionali di f nell'origine.
Osserviamo che per contro, questa funzione non è nemmeno continua in $(0,0)$.

Infatti $f(0,0) = 0$, ma se calcoliamo i valori di f lungo la curva $y = x^2$ (che passa per l'origine) troviamo:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

e pertanto f è discontinua in $(0,0)$. Notiamo quindi che la sola esistenza di tutte le derivate direzionali in un punto non comporta neppure la continuità della funzione

Osservazione 686. Riepilogando

$$f \in C^1(A) \implies \underbrace{\text{f differenziabile in } A}_{\text{cioè } f \text{ ha iperpiano tangente}} \implies \begin{cases} f \text{ continua in } A \\ f \text{ derivabile in } A \\ f \text{ ha derivate direzionali e vale la formula del gradiente} \end{cases}$$

Invece

$$f \text{ continua, derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali} \not\Longrightarrow f \text{ differenziabile}$$

e

$$f \text{ derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali} \not\Longrightarrow f \text{ continua}$$

22.7 Regole di calcolo delle derivate

22.7.1 Algebra

Teorema 22.7.1 (Formule di calcolo per derivate)**.** *Per ogni coppia di funzioni derivabili $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e le costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà del gradiente*

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \\ \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g \\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\nabla f - f \nabla g}{g^2} \end{aligned}$$

Osservazione 687. Esplicitamente (cioè componente per componente), le precedenti formule significano

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) &= g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Semplice, lasciata per esercizio □

Osservazione 688. Analoghe proprietà valgono per i differenziali, per esempio

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$$

$$\dots$$

22.7.2 Funzioni composte

Osservazione 689. La regola di derivazione delle funzioni composte assume varie forma a seconda del tipo di funzioni che si compongono. Vediamo ora due situazioni tipiche mentre il caso generale sarà trattato quando si vedranno le funzioni di più variabili a valori vettoriali $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Teorema 22.7.2 (Derivazione delle funzioni composte (1/2))**.** *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che la funzione composta $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ sia definita almeno in un intorno U di $\mathbf{x}_0 \in A$. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e g è derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$, allora la funzione composta*

$$h = g \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e si ha

$$\nabla h(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\nabla f(\mathbf{x}_0) \tag{22.12}$$

Dimostrazione. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, in particolare f è derivabile in $\mathbf{x}_0$; poiché g è derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$, dal teorema sulla derivata della funzione composta per funzioni reali di variabile reale, si ha subito che esistono le derivate parziali

TODO: check generale di questa dimostrazione

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

(infatti ogni derivata parziale si può vedere come derivata di una funzione di una variabile), da cui segue la formula 22.12. Questo tuttavia prova la *derivabilità* di h, ma non ancora la sua *differenziabilità* in $\mathbf{x}_0$. Per dimostrare questa, occorre ripercorrere anche la dimostrazione del teorema unidimensionale citato.
Dato che g è differenziabile in $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ possiamo scrivere:

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + kg'(y_0) + \omega(k)$$

con $\frac{\omega(k)}{k} \to 0$ per $k \to 0$. Se poniamo $\omega(0) = 0$, la precedente identità risulta verificata anche per $k = 0$ e possiamo allora scrivere $\omega(k) = k\varepsilon(k)$ con $\varepsilon(k) \to 0$ per $k\ to 0$, $\varepsilon(0) = 0$. Applicando questa identità a

$$k = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) - f(\mathbf{x}_0)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x}_0)) &= [g'(f(\mathbf{x}_0)) + \varepsilon(k)]\,[f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)] \\ &\overset{(1)}{=} [g'(f(\mathbf{x}_0)) + \varepsilon(k)]\,[\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(\mathbf{h})] \\ &= g'(f(\mathbf{x}_0))\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \{g'(f(\mathbf{x}_0))o(\mathbf{h}) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\varepsilon(k) + \varepsilon(k)o(\mathbf{h})\} \end{aligned}$$

con (1) per la differenziabilità di f in $\mathbf{x}_0$ Si tratta ora di mostrare che la quantità entro graffe è $o(\mathbf{h})$ per $\mathbf{h} \to 0$. Il primo addendo lo è per definizione; quanto agli altri due, osserviamo che per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ anche $k \to 0$ (poiché f è continua in $\mathbf{x}_0$), perciò $\varepsilon(k) \to 0$; dunque

TODO: check non dovrebbe essere qui $o(\|\mathbf{h}\|)$

$$\frac{|\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\varepsilon(k)|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\,\|\mathbf{h}\|\,|\varepsilon(k)|}{\|\mathbf{h}\|} = \|f(\mathbf{x}_0)\|\,|\varepsilon(k)| \to 0$$

$$\frac{|\varepsilon(k)o(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = |\varepsilon(k)|\,\frac{|o(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$$

e la dimostrazione è completa □

TODO: check queste norme e valori assoluti

Teorema 22.7.3 (Derivazione delle funzioni composte (2/2))**.** *Sia* $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *e* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che la funzione composta* $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ *sia definita almeno in un intorno* J *di* $t_0 \in I$*. Se* $\mathbf{r}$ *è derivabile in* t_0 *e* f *è differenziabile in* $\mathbf{r}(t_0)$*, allora la funzione composta*

$$g = f \circ \mathbf{r} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è derivabile in t_0 *e si ha*

$$g'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{r}(t_0)) r_i'(t_0) \tag{22.13}$$

TODO: check generale di questa dimostrazione

Dimostrazione. Il ragionamento è analogo alla precedente dimostrazione, anche se questa volta la formula 22.13 non è ovvia, ma discenderà proprio dalla dimostrazione. Poiché f è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ si ha

$$f(\mathbf{x}_0 + k) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{k} + \omega(k)$$

con $\frac{\omega(k)}{\|\urcorner\|} \to 0$ per $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$. Ragionando come nella precede dimostrazione possiamo scrivere $\omega(\mathbf{k}) = \|\mathbf{k}\| \, \varepsilon(\mathbf{k})$ con $\varepsilon(\mathbf{k}) \to 0$ per $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$, $\varepsilon(0) = 0$. Applicando questa identità a

TODO: check grassetti qui

$$\mathbf{k} = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t_0 + h)) - f(\mathbf{r}(t_0)) &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot [\mathbf{r}(t_0 + h)] - \mathbf{r}(t_0)] + |\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)| \, \varepsilon(\mathbf{k}) \\ &\overset{(1)}{=} \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot [\mathbf{r}'(t_0)h + o(h)] + |r'(t_0)h + o(h)| \, \varepsilon(\mathbf{k}) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot r'(t_0)h + \{\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot o(h) + |\mathbf{r}'(t_0)| \, h\varepsilon(\mathbf{k}) + o(h)\varepsilon(\mathbf{k})\} \end{aligned}$$

con (1) per la derivabilità di $\mathbf{r}$ in t_0. Ragionando come sopra, si mostra ancora che la quantità tra graffe è $o(h)$ per $h \to 0$, il che mostra che $f(\mathbf{r}(t))$ è differenziabile in t_0 e vale la 22.13 □

TODO: gradiente di funzione radiale pag 136 bramanti2??
TODO: ortogonalità del gradiente con le curve di livello 137
TODO: todohere qualche esercizio da bramanties 03 pag 43?

Osservazione 690. Una applicazione di tipo teorico della derivazione di funzioni composte consiste nel provare un analogo del teorema di Lagrange per funzioni di più variabili

Osservazione 691. Ricordiamo che il segmento di estremi $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ (percorso da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_1$) ha equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{x}_1 + (1 - t)\mathbf{x}_0, \quad t \in [0, 1]$$

L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che giacciono sul segmento (ossia il sostegno di $\mathbf{r}(t)$ verrà denotato con il simbolo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$

Teorema 22.7.4 (Del valore medio)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in* A*. Allora per ogni coppia di punti* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$ *esiste un punto* $\mathbf{x}^* \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ *tale che*

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

In particolare

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}^*)\| \, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Dimostrazione. Sia

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0, \quad t \in [0,1]$$

il segmento di estremi $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ e consideriamo la funzione

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)), \quad t \in [0,1]$$

continua e derivabile in $[0,1]$ per il teorema 22.7.3; per il teorema di Lagrange unidimensionale, esiste $t_0 \in (0,1)$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)$$

Ma

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) \\ g'(t_0) &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

da cui la tesi, ponendo $\mathbf{x}^* = \mathbf{r}(t_0)$ □

22.8 Derivate di ordine superiore e approssimazioni successive

22.8.1 Derivate di ordine superiore

Supponiamo che una funzione reale di due variabili $f(x,y)$ possieda per esempio la derivata parziale f_x in tutto un insieme aperto A. Possiamo allora chiederci se, a sua volta, la funzione f_x sia derivabile nei punti di tale insieme. In caso affermativo calcoliamo le derivate parziali di f_x che si indicano come segue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Analogamente le derivate parziali di f_y se esistono sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Più in generale, data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto, per cui una derivata parziale f_{x_i} esiste in tutto A se derivabile rispetto a x_j in A si indicherà tale derivata con

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Esempio 22.8.1. Data $f(x, y) = x^2 \sin y$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \\
&\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x \sin y) = 2 \sin y \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x \sin y) = 2x \cos y \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y) = 2x \cos y \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cos y) = -x^2 \sin y
\end{aligned}$$

Notiamo che le due derivate *miste*, f_{xy} e f_{yx} sono uguali, nonostante la funzione di partenza non mostri particolari simmetrie nelle due variabili. Questo fatto ha una validità generale.

Teorema 22.8.1 (di Schwartz)**.** *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Supponiamo che (per certi indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$) le derivate seconde miste $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$ esistano in un intorno di un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ e siano entrambe continue in $\mathbf{x}_0$; allora esse coincidono in $\mathbf{x}_0$.*

Osservazione 692. In particolare, se le derivate seconde miste $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$ esistono e sono continue in A, allora esse coincidono in tutto A.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso di una funzione di due variabili $f(x, y)$ (il ragionamento fatto si estende a n qualsiasi).
Sia $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$ la funzione f è definita, esistono le derivate seconde miste di f e, a maggior ragione, le derivate parziali prime; scegliamo un quadrato $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ contenuto in questo intorno e consideriamo la seguente quantità

$$Q = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

ben definita purché $|h| < \delta, |k| < \delta$.
Per un h fissato, consideriamo la funzione di una variabile

$$u(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$$

Notiamo che $Q = u(y_0 + k) - u(y_0)$. Inoltre, nelle nostre ipotesi la funzione u risulta derivabile in tutto $[y_0, y_0 + k]$. Applicando allora il teorema di Lagrange a u su questo intervallo, otteniamo

$$Q = u(y_0 + k) - u(y_0) = ku'(y_0 + \delta_1 k)$$

(per un opportuno $\delta_1 \in (0, 1)$ dipendente da h e k)

$$= k \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \delta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \delta_1 k) \right] =$$

(applicando ancora il teorema di Lagrange alla funzione $v(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(s, y_0 + \delta_1 k)$

$$= kh\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \delta_2 h, y_0 + \delta_1 k)\right]$$

(per un opportuno $\delta_2 \in (0,1)$ dipendente da h e k). Ora ripetiamo un discorso simile, ma scrivendo questa volta

$$Q = w(x_0 + h) - w(x_0)$$

con

$$w(t) = f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$$

Con passaggi analoghi si ha

$$\begin{aligned} Q = hw'(x_0 + \delta_3 h) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \delta_3 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \delta_3 h, y_0)\right] \\ &= hk\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \delta_3 h, y_0 + \delta_4 k)\right] \end{aligned}$$

per opportuni $\delta_3, \delta_4 \in (0,1)$ dipendenti da h e k. Uguagliando le due diverse espressioni trovate per Q e semplificando per hk abbiamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \delta_2 h, y_0 + \delta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \delta_3 h, y_0 + \delta_4 k)$$

Facciamo ora tendere h, k a zero. Si ha

$$\begin{aligned} (x_0 + \delta_2 h, y_0 + \delta_1 k) \to (x_0, y_0) \\ (x_0 + \delta_3 h, y_0 + \delta_4 k) \to (x_0, y_0) \end{aligned}$$

(perché $\delta_i \in (0,1)$ per $i = 1, \ldots, 4$) e, per la continuità delle derivate seconde miste, otteniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

che è la tesi.
Osserviamo infine che, poiché l'enunciato del teorema coinvolge le derivate parziali di f rispetto a sole due variabili, anche nel caso di funzioni di n variabili questa stessa dimostrazione è valida: le $n-2$ variabili rispetto alle quali non si calcolano le derivate giocano il ruolo (ininfluente) di parametri fissati □

Definizione 22.8.1. Una funzione che ha tutte le derivate parziali seconde continue in un aperto A si dice di classe $C^2(A)$.

Osservazione 693. Una funzione $C^2(A)$ ha derivate parziali prime che hanno derivate parziali continue, quindi sono differenziabili per il teorema 22.5.2; in particolare, anche le derivate parziali prime sono continue e allora f è differenziabile, anzi di classe $C^1(A)$.
Riassumendo: se $f \in C^2(A)$ allora $f \in C^1(A)$ (in particolare, f è differenziabile); le derivate parziali prime di f sono differenziabili; le derivate parziali seconde di f sono continue; in particolare, le derivate seconde miste di f sono uguali.

Osservazione 694. Per quanto l'ipotesi del teorema 22.5.2 sia solitamente verificata, esistono casi in cui una funzione possiede derivate seconde miste diverse tra loro

Esempio 22.8.2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si verifica che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mentre le derivate parziali seconde sono discontinue nell'origine.
Il teorema di Schwarz non è quindi applicabile e non possiamo affermare a priori che sia $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Calcoliamo dunque esplicitamente queste derivate. Il calcolo porta a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right)_{|y=0} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\right)_{|x=0} = 1$$

Pertanto $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Osservazione 695. Le definizioni di derivate parziali successive e il teorema di Schwarz si generalizzano a derivate di ordine k. Per esempio, per una funzione di tre variabili $f(x,y,z)$ di classe $C^4(A)$ si può affermare l'identità

$$\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y \partial x}$$

Più in generale diamo la seguente definizione

Definizione 22.8.2. Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto è classe $C^k(A)$ se tutte le derivate parziali fino all'ordine k esistono e sono continue in A:

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \quad \text{continue in } A$$

per ogni $i_1, \dots i_r \in \{1, \dots, n\}$, $1 \leq r \leq k$

Osservazione 696. Solitamente, quando si considerano derivate di ordine k di una funzione f di più variabili, ci si mette proprio in questa ipotesi; per il teorema di Schwarz, questo significa che nelle derivate parziali miste di ogni ordine $\leq k$ si può scambiare l'ordine di derivazione. Questo consente anche di introdurre una notazione sintetica, per le derivate successive di una funzione di n variabili, detta *notazione a multi-indice*

Definizione 22.8.3. Chiamiamo multi-indice (a n componenti) ogni n-upla di interi non negativi

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

L'intero

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_n$$

si chiama altezza del multi-indice α. Data una funzione $f \in C^k(A)$ si pone allora, se $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A$$

Il numero $|\alpha|$ è *l'ordine della derivata*

Esempio 22.8.3. Se $f \in C^4(\mathbb{R}^5)$ la derivata parziale

$$\frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial_{x_1} \partial_{x_3}^2 \partial_{x_5}}$$

si può indicare con $D^\alpha f(\mathbf{x})$ con $\alpha = (1, 0, 2, 0, 1)$ e $|\alpha| = 4$. Infatti,

$$D^{(1,0,2,0,1)} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{1+0+2+0+1} f(\mathbf{x})}{\partial_{x_1}^1 \partial_{x_2}^0 \partial_{x_3}^0 \partial_{x_5}^1} = \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial_{x_1} \partial_{x_3}^2 \partial x_5}$$

(per esempio $\partial_{x_2}^0$ significa che non calcoliamo nessuna derivata rispetto a x_2).

Osservazione 697. Si noti che la notazione a multi-indice presuppone che l'ordine in cui eseguiamo le derivate sia indifferente (teorema di Schwarz), il che consente di raggruppare le derivate rispetto alla medesima variabile. In altre parole, per precisare quale derivata parziale si tratta, è sufficiente dire quante volte deriviamo rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, \dots x_n$ (non avendo invece importanza l'ordine in cui eseguiamo tali derivate).

22.8.2 Differenziale secondo, matrice hessiana, formula di Taylor al secondo ordine

Osservazione 698. Come per le funzioni reali di variabile reale, uno degli strumenti più utili del calcolo differenziale che coinvolge l'uso delle derivate di ordine superiore è la formula di Taylor.

Osservazione 699. Qui ci concentriamo sulla formula di Taylor del second'ordine, sufficiente per due applicazioni significative: studio di massimi e minimi e di funzioni convesse

Definizione 22.8.4. Se $f \in C^2(A)$ e $\mathbf{x}_0 \in A$, si dice differenziale secondo di f in $\mathbf{x}_0$ la funzione[2]

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita da

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j \tag{22.14}$$

Osservazione 700. Con abuso di scrittura spesso si indica col medesimo simbolo $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ anche il valore del differenziale calcolato in corrispondenza dell'incremento $\mathbf{h}$, ossia si scrive (analogamente a quanto si fa con il differenziale primo)

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

[2] come si vedrà, una funzione di questo tipo si chiama *forma quadratica*

Osservazione 701. I coefficienti $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ che compaiono nel differenziale secondo possono essere ordinati in una matrice $n \times n$

Definizione 22.8.5 (Matrice hessiana di f in $\mathbf{x}_0$)**.** la matrice

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione 702. In particolare, se f è funzione di due variabili:

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

e il differenziale secondo applicato all'incremento (h, k) assume la forma:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

Osservazione 703. Per il teorema di Schwarz, se f è di classe $C^2(A)$, la matrice hessiana è simmetrica in ogni punto di A

Osservazione 704. Se la differenziabilità di una funzione di più variabili permette di approssimarne il grafico con quello del suo piano tangente, il fatto che una funzione sia di classe $C^2(A)$ (o più regolare ancora) permette di migliorare l'approssimazione.
Iniziamo con una formula di questo tipo che coinvolge le derivate fino al secondo ordine

Teorema 22.8.2 (Formula di Taylor, resto secondo Lagrange)**.** *Sia $f \in C^2(A)$; per ogni $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in A$, esiste un numero reale $\delta \in (0, 1)$, dipendente da $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{h}$ tale che*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{h})h_i h_j \tag{22.15}$$

Dimostrazione. Considerando la funzione di una variabile

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$$

che sotto le nostre ipotesi risulta di classe $C^2[0, 1]$. Scriviamo la formula di Taylor (unidimensionale) del second'ordine per g, con resto secondo Lagrange:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\delta) \tag{22.16}$$

per un opportuno $\delta \in (0, 1)$ che dipende da g, perciò da f, $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{h}$. Calcoliamo ora:

$$g(0) = f(\mathbf{x}_0); \quad g(1) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i;$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j$$

Sostituendo $g(1), g(0), g'(0), g''(\delta)$ nello sviluppo 22.16 si ha la 22.15 □

Teorema 22.8.3 (Formula di Taylor, resto secondo Peano). *Sia $f \in C^2(A)$. Per ogni $\mathbf{x}_0 \in A$ vale la formula*

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j+o\Big(\|\mathbf{h}\|^2\Big) \quad (22.17)$$

per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$

Osservazione 705. Il simbolo $o\Big(\|\mathbf{h}\|^2\Big)$ indica, analogamente al caso unidimensionale, una quantità tale che

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{o\Big(\|\mathbf{h}\|^2\Big)}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$$

dove il limita va ora inteso in $\mathbb{R}^n$ con le avvertenza che questo comporta trattandosi di una forma di indeterminazione

Osservazione 706. Esaminiamo i termini a secondo membro delle formula 22.17: dopo $f(\mathbf{x}_0)$, la prima sommatoria è il differenziale di f applicato all'incremento $\mathbf{h}$, mentre la seconda sommatoria è una forma quadratica nelle componenti h_i dell'incremento, che rappresenta il differenziale secondo di f in $\mathbf{x}_0$ applicato ad $\mathbf{h}$

Dimostrazione. La tesi consiste nel dimostrare che per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ è

$$\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - \Big[f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j\Big]}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad (22.18)$$

Calcoliamo la differenza che compare al numeratore della 22.18 usando la 22.15

$$\left|\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - [\ldots]}{\|\mathbf{h}\|^2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0+\delta\mathbf{h}) - f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)]h_i h_j}{\|\mathbf{h}\|^2}\right| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left|f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0+\delta\mathbf{h}) - f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)\right|$$

(con (1) essendo $\frac{|h_i h_j|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq 1$) dove δ dipende da $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{h}$, ma in ogni modo $\delta \in (0,1)$.
Pertanto $\|\delta\mathbf{h}\| \leq \|\mathbf{h}\|$ e per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ si ha $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{h} \to \mathbf{x}_0$.
D'altro canto per ipotesi $f \in C^2(A)$, perciò le funzioni $f_{x_i x_j}$ sono continue in $\mathbf{x}_0$ e, per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$

$$\left|f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0+\delta\mathbf{h}) - f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)\right| \to \mathbf{0}$$

da cui la tesi □

22.9 Ottimizzazione. Estremi liberi

22.9.1 Generalità sui problemi di ottimizzazione

Osservazione 707. Il termine ottimizzazione si riferisce ad un'ampia categoria di problemi che rivestono enorme importanza nelle scienze applicate; in generale si tratta di massimizzare o minimizzare una quantità, in gergo un obiettivo, sotto certe condizioni.
Nei modelli più semplici l'obiettivo è costituito da una funzione reale f di n variabili reali $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Osservazione 708. Conviene distinguere fra i seguenti casi, in cui si vede che le proprietà topologiche di A assumono un ruolo rilevante:

1. ricerca di estremi in *punti interni* al dominio A: si parla in questo caso di *estremi liberi*. In particolare, si è in questo caso se A è un insieme aperto
2. ricerca di estremi in un sottoinsieme *non aperto* o *sulla frontiera* di A. Si parla qui di *estremi vincolati* (es la massimizzazione di una funzione su un cerchio chiuso del piano o sul bordo).

Esempio 22.9.1. Siano assegnati nel piano xy tre punti $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$, che pensiamo disposti ai vertici di un triangolo qualsiasi. Si vogliono collegare questi punti con un cavo ad un quarto punto $\mathbf{p} = (x, y)$ da piazzare in modo da utilizzare meno cavo possibile. Per scegliere dove piazzare il punto, posto

$$d_i(x, y) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\| = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$$

per $i = 1, 2, 3$, si tratta di minimizzare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y)$$

corrispondente alla somma delle distanze di $\mathbf{p}$ dai tre punti dati. In questo caso $A = \mathbb{R}^2$ e si tratta della ricerca di estremi liberi

Esempio 22.9.2. Supponiamo di avere a disposizione n tipi di cibo $A_1, \ldots, A_n$ ciascuno dei quali contenga m sostanze nutritive $N_1, \ldots, N_m$. Siano, per $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$

- a_{ij} il contenuto calorico della sostanza N_j per unità di peso dell'alimento A_i
- c_i il costo dell'alimento A_i per unità di peso
- b_j il fabbisogno giornaliero della sostanza N_j (espresso in peso)

Il problema della dieta consiste nello scegliere la quantità x_i di cibo A_i, per $i = 1, \ldots, n$, in modo da minimizzare il costo totale

$$C(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sotto la condizione che la dieta sia sufficiente al fabbisogno di ogni sostanza, ossia sotto le condizioni

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & \text{per } i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq b_j & \text{per } j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Osservazione 709. Quest'ultimo si tratta di un tipico problema di *programmazione*, ovvero di ottimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza. In questo caso, data la linearità della funzione obiettivo e dei vincoli, è più precisamente un problema di *programmazione lineare*.

Osservazione 710. Formuliamo con precisione i concetti di estremo

Definizione 22.9.1 (Estremi assoluti)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Diciamo che $\mathbf{x}_0$ è punto di massimo (risp. minimo) assoluto per f in A e che $f(\mathbf{x}_0)$ è il massimo (risp. minimo) assoluto o globale di f in A se per ogni $\mathbf{x} \in A$ si ha $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (risp. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$)

Definizione 22.9.2 (Estremi relativi)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Diciamo che $\mathbf{x}_0$ è punto di massimo (risp. minimo) relativo o locale per f se esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (risp. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$)

Osservazione 711. Se le disuguaglianze delle definizioni sono strette, i punti di estremo e gli estremi si dicono *forti*, altrimenti si dicono *deboli*

Osservazione 712. Si pongono diverse questioni:

1. *Esistenza degli estremi*: ovviamente non si può garantire che esistano sempre punti in cui una funzione assume massimo o minimo (locali o globali). In molti casi il teorema di Weierstrass si rivela utile per provare l'esistenza di estremi globali: se A è chiuso e limitato ed f è continua in A, allora f possiede sia massimo che minimo.

   Esempio 22.9.3. Nel problema del triangolo non ha senso cercare i massimi globali in quanto la funzione f diventa grande a piacere se $\mathbf{x}_0$ si allontana dai vertici del triangolo. D'altra parte, se esiste, il punto di minimo starà all'interno di un cerchio chiuso C di raggio abbastanza grande. Ma allora ci si può ridurre a cercare il minimo su C, che è chiuso e limitato. Essendo f continua, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un punto $\mathbf{x}_0$ nel quale f ha il suo minimo globale (ossia il nostro problema ha soluzione e si può procedere alla ricerca di $\mathbf{x}_0$)

2. *Unicità degli estremi*: il fatto che un punto sia di estremo assoluto non ci garantisce che il massimo/minimo raggiunto in esso dalla funzione sia unico (a meno che l'estremo sia forte).
   Poter dimostrare che esiste un unico punto di minimo o di massimo può essere utile, ad esempio nel calcolo approssimato con metodi numerici.
   C'è in effetti un caso in cui il punto di minimo (massimo), se esiste, è unico: si tratta (come si vedrà) delle *funzioni strettamente convesse* (o *concave*).

   Esempio 22.9.4. Come si vedrà in seguito nell'esempio del triangolo la funzione f è strettamente convessa, pertanto il punto di minimo esiste ed è unico

3. *Ricerca e caratterizzazione dei punti di estremo*: come nel caso unidimensionale la ricerca degli estremi è basata su condizioni analitiche necessarie e/o sufficienti che tali punti debbono soddisfare:

   - nella ricerca di estremi liberi, lo strumento principale d'indagine è il calcolo differenziale sviluppato in precedenza
   - per estremi vincolati è necessario l'uso del calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali e sarà visto più avanti (si useranno il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per il caso di vincoli di di uguaglianza e quello dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker per i vincoli di disuguaglianza)

4. *algoritmi di calcolo*: tranne che in casi semplici, l'utilizzo dei metodi indicati al punto 3 porta a sistemi di equazioni non lineari che difficilmente si possono risolvere senza l'uso di un computer. Diventa quindi essenziale disporre di algoritmi che permettano il calcolo approssimato della soluzione con il grado di approssimazione desiderato. Qui si entra nel campo dell'Analisi Numerica, per cui si rimanda a test specializzati

22.9.2 Estremi liberi. Condizioni necessarie del prim'ordine

TODO: todohere bramanties 03 pag 61 pdf

Osservazione 713. Iniziamo a discutere la ricerca di massimi/minimi liberi, locali e/o globali per funzioni sufficientemente regolari. I punti $\mathbf{x}$ che si candidano sono interni al dominio A di f e, quindi, ci si può muovere attorno a essi in tutte le direzioni possibili. Per questo motivo, possiamo supporre direttamente che A sia aperto

Osservazione 714. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto. Procedendo come nel caso unidimensionale, cerchiamo di selezionare i candidati punti di estremo locale individuando una *condizione necessaria* che essi devono soddisfare. Vale il seguente

Teorema 22.9.1 (di Fermat)**.** *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto e $\mathbf{x}_0 \in A$ un punto di massimo o minimo locale per f. Se f è derivabile in $\mathbf{x}_0$ allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$*

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che $\mathbf{x}_0$ sia punto di minimo locale. Occorre dimostrare che ogni derivata parziale di f si annulla in $\mathbf{x}_0$. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$; muoviamoci da $\mathbf{x}_0$ lungo l'asse x_j considerando la funzione della variabile reale t data da:

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j)$$

La funzione g è ben definita in un intorno di $t = 0$ e, poiché $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale per f deduciamo che $t = 0$ è punto di minimo locale per g. D'altra parte g è derivabile in $t = 0$ e infatti per definizione di derivata parziale si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = g'(0)$$

Per il teorema di Fermat in una variabile (volume 1 capitolo 4 teorema 4.5) deve essere allora $g'(0) = 0$. In conclusione

TODO: fixme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n$$

□

Definizione 22.9.3 (Punti critici, o stazionari, di f)**.** I punti in cui il gradiente di una funzione f si annulla.

Osservazione 715. Il teorema precedente afferma quindi che, per cercare i punti di massimo o minimo locale nei quali una funzione è derivabile, occorre innanzitutto determinare tutti i suoi punti critici, ossia i punti $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ che risolvono il sistema di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{22.19}$$

E come nel caso di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non è detto che ogni punto critico sia effettivamente un punto di massimo o minimo

Osservazione 716. Una volta determinati i punti stazionari, sarà necessario studiarne la natura, ovvero stabilire per ciascuno di essi se è punto di minimo, massimo o nessuna delle due cose

Definizione 22.9.4 (Punto di sella (o di colle))**.** Punto stazionario che non è di minimo o di massimo[3]

Osservazione 717. Vi possono anche essere punti di estremo in cui f non è derivabile. Ad esempio

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

che ha come grafico un cono con vertice nell'origine, ha ivi un minimo globale. Ma le derivate parziali di f non esistono nell'origine. Questi punti vanno esaminati a parte.

Osservazione 718. A volte uno studio diretto può bastare per esaminare la natura dei punti stazionari, come per l'origine nel seguente esempio

Esempio 22.9.5. Cerchiamo i punti critici di

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y$$

Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3x^2 y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^3 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione da $x = 0$ oppure $y = 2/x$. Sostituendo queste nella seconda si trovano le soluzioni

$$(0, 0), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Questi sono tutti e soli i punti critici di f. Poiché f è differenziabile in tutti i punti del piano, per il teorema di Fermat non possono esservi altri punti di massimo e minimo.
Si tratta ora di decidere, per ciascuno di questi tre punti, se sia effettivamente un punto di estremo oppure no. Per l'origine è facile convincersi da un esame diretto che si tratta di un punto di minimo relativo; infatti $f(0, 0) = 0$ e in un intorno dell'origine f è non negativa poiché il termine $-x^3 y$ di quarto grado) è trascurabile rispetto a $3x^2 + y^2$, che è positivo. (Questa affermazione sarà giustificata più rigorosamente in seguito).

Osservazione 719. Vedremo nei prossimi paragrafi un *criterio generale* per lo studio dei punti critici, che ci consentirà di studiare i rimanenti due

[3]Nei testi di programmazione il termine punto di sella è riservato a punti critici nei quali f è minima lungo alcune direzioni e massima lungo altre

22.9.3 Forme quadratiche

22.9.3.1 Introduzione e loro necessità

Osservazione 720. In assenza di informazioni aggiuntive, un modo per determinare la natura di un punto critico è quello di utilizzare la formula di Taylor per analizzare il segno dell'incremento

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$$

Se infatti si riesce a stabilire che $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ si mantiene di segno positivo (risp. negativo) per ogni $\mathbf{h}$ di modulo abbastanza piccolo, possiamo dedurre che $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo (risp. massimo) locale. Se invece, al variare di $\mathbf{h}$, $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ cambia di segno, siamo in presenza di una sella/colle.

Osservazione 721. Rivediamo brevemente il caso unidimensionale. Sia f due volte derivabile e $f'(x_0) = 0$. Arrestiamo la formula di Taylor al second'ordine. Si trova:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad \text{per } h \to 0$$

Se ora $f''(x_0) > 0$ o < 0 il segno di $\Delta f(x_0)$ sarà > 0 o < 0, definitivamente per $h \to 0$ e possiamo concludere che x_0 è punto di minimo o massimo, rispettivamente. Se invece $f''(x_0) = 0$ occorre un'analisi più approfondita.

Osservazione 722. Nel caso multidimensionale, sia $f \in C^2(A)$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. procedendo allo stesso modo, si trova (applicando il teorema 22.8.3):

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(\left\|\mathbf{h}^2\right\|) \tag{22.20}$$

La 22.20 indica che la determinazione del segno dell'incremento $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ conduce ancora all'analisi del differenziale secondo di f in $\mathbf{x}_0$, ossia all'analisi del polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti di $\mathbf{h}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

Osservazione 723. Quest'ultima espressione è una *forma quadratica* L'analisi della natura dei punti stazionari conduce quindi a un problema puramente algebrico: lo *studio del segno di una forma quadratica*

22.9.3.2 Segno delle forme quadratiche

Definizione 22.9.5 (Forma quadratica definita su $\mathbb{R}^n$)**.** Definita come:

$$q(\mathbf{h}) = q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \tag{22.21}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, detti *coefficienti* della forma quadratica.

Definizione 22.9.6 (Forma quadratica nulla)**.** Forma quadratica dove tutti gli a_{ij} sono nulli:

Osservazione 724. Si può sempre supporre che $a_{ij} = a_{ji}$; se così non fosse basterebbe sostituire ai due coefficienti a_{ij} e a_{ji} la loro semisomma $(a_{ij} + a_{ji})/2$, lasciando così inalterata la sommatoria 22.21. Diviene così chiaro, tramite qualche esempio l'origine del nome di forma quadratica

Esempio 22.9.6. Nel caso di $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= a_{11}h_1h_1 + a_{12}h_1h_2 + a_{21}h_2h_1 + a_{22}h_2h_2 \\ &\overset{(1)}{=} a_{11}h_1^2 + a_{22}h_2^2 + a_{12} \cdot 2h_1h_2 \end{aligned}$$

(con (1) dato che $a_{12} = a_{21}$). Si vede che la sommatoria finale assomiglia allo sviluppo del quadrato di un binomio, con opportuni coefficienti scelti.

Esempio 22.9.7. Nel caso $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2, h_3) = a_{11}h_1h_1 + a_{12}h_1h_2 + a_{13}h_1h_3 &+ \\ + a_{21}h_2h_1 + a_{22}h_2h_2 + a_{23}h_2h_3 &+ \\ + a_{31}h_3h_1 + a_{32}h_3h_2 + a_{33}h_2h_3 & \end{aligned}$$

Ora, dato che

$$\begin{aligned} a_{12}h_1h_2 &= a_{21}h_2h_1 \\ a_{13}h_1h_3 &= a_{31}h_3h_1 \\ a_{23}h_2h_3 &= a_{32}h_3h_2 \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$q(h_1, h_2, h_3) = a_{11}h_1^2 + a_{22}h_2^2 + a_{33}h_3^2 + a_{12} \cdot 2h_1h_2 + a_{13} \cdot 2h_1h_3 + a_{23} \cdot 2h_2h_3$$

che assomiglia allo sviluppo del quadrato di un trinomio, con opportuni coefficienti.

Osservazione 725. Ogni forma quadratica risulta così biunivocamente associata a una matrice simmetrica $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$.

Osservazione 726. A volte è più comodo o significativo scrivere una forma quadratica come prodotto interno,

$$q(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{Mh}, \mathbf{h} \rangle$$

o direttamente in forma matriciale

$$q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{Mh}$$

Osservazione 727. Nel caso del differenziale secondo di una funzione f in un punto $\mathbf{x}$ la matrice $\mathbf{M}$ coincide con la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}$

Esempio 22.9.8. Le forme quadratiche seguenti corrispondono alle matrici indicate

$$q(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2 \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 + h_3^2 - 6h_1h_2 + 3h_1h_3 \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q(h_1, h_2) = f_{xx}(x, y)h_1^2 + 2f_{xy}(x, y)h_1h_2 + f_{yy}(x, y)h_2^2 \quad \mathbf{M} = \mathbf{H}_f(x, y)$$

Osservazione 728. Siamo interessati al segno che una forma quadratica assume al variare di $\mathbf{h}$.

Osservazione 729. Innanzitutto, essendo q un polinomio omogeneo di secondo grado si ha (basta farsi qualche esempio per convincersene):

$$q(t\mathbf{h}) = t^2 q(\mathbf{h}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

pertanto $q(\mathbf{h})$ assume segno costante su ogni retta passante per l'origine ed un generico $\mathbf{h}$ (origine esclusa, infatti si ha sempre $q(\mathbf{0}) = 0$).

Esempio 22.9.9. I seguenti esempi in $\mathbb{R}^2$ mostrano tutte le possibilità di comportamento:

- $h_1^2 + h_2^2$ è positiva per ogni $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$
- $-h_1^2 + h_2^2$ è positiva per $(h_1, h_2) = (0, 1)$ e negativa per $(h_1, h_2) = (1, 0)$
- $-h_1^2 - h_2^2$ è negativa per ogni $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$
- h_1^2 è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0, h_2)$
- $-h_1^2$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0, h_2)$

Questi esempi suggeriscono la seguente classificazione che si applica sia alla forma quadratica che alla matrice simmetrica ad essa associata

Definizione 22.9.7. Una forma quadratica $q(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:

- definita positiva (negativa) se, per ogni $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\mathbf{h}) > 0$ (< 0)
- semidefinita positiva (negativa) se, per ogni $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\mathbf{h}) \geq 0$ (≤ 0) ed esiste $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ tale che $q(\mathbf{h}) = 0$
- indefinita se, esistono $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ tali che $q(\mathbf{h}_1) > 0$ e $q(\mathbf{h}_2) < 0$

Osservazione 730. Le tre condizioni sono mutualmente esclusive; figura 3.17 pag 160 del bramanti illustra i grafici di alcune tipiche forme quadratiche appartenenti alle tre categorie di cui sopra

TODO: fixme

Osservazione 731. È sempre bene specificare lo spazio $\mathbb{R}^n$ in cui si opera quando si vuole classificare una forma quadratica; ad esempio la forma quadratica in a dell'immagine 3.17 è definita positiva in $\mathbb{R}^2$ ma semi-definita positiva in $\mathbb{R}^3$

TODO: fixme

Osservazione 732. Occorrono dei criteri per classificare una forma quadratica senza dover ricorrere alla definizione; lasciamoci guidare dal caso bidimensionale. Sia

$$q(h_1, h_2) = a \cdot h_1^2 + b \cdot 2h_1h_2 + c \cdot h_2^2, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \tag{22.22}$$

con a, b, c non tutti nulli. Se:

- $a = c = 0$, q è certamente indefinita: basta osservare che $q(1, 1) = 2b$ e $q(-1, 1) = -2b$

- $a \neq 0$ (nel caso $a = 0, c \neq 0$ si procede analogamente), q si può riscrivere nel modo seguente:

$$q(h_1, h_2) = a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2$$

I coefficienti dei quadrati sono a e $\frac{\det \mathbf{M}}{a}$; ragionando sul loro segno si deduce il seguente risultato

Teorema 22.9.2 (Segno delle forma quadratica in due variabili)**.** *Se $a \neq 0$, la forma quadratica 22.22 è*

1. definita positiva *(risp. negativa) se e solo se* $\det \mathbf{M} > 0$ *e* $a > 0$ *(risp.* $a < 0$*)*
2. indefinita *se e solo se* $\det \mathbf{M} < 0$
3. *semidefinita positiva (risp. negativa) se e solo se* $\det \mathbf{M} = 0$ *e* $a > 0$ *(risp.* $a < 0$*)*

Se $a = 0$ e $c \neq 0$ nelle affermazioni precedenti occorre sostituire a con c

Osservazione 733. La forma quadratica nulla si può considerare semidefinita sia positiva che negativa.

Esempio 22.9.10. Sia

$$q(h_1, h_2) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - 3h_2^2$$

La matrice corrispondente è

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Poiché $a_{11} = -2 < 0$, e $\det \mathbf{M} = 5 > 0$ la forma quadratica è definita negativa

Osservazione 734. Il punto importante nel teorema precedente è che il test fa intervenire non solo (il determinante de) la matrice $\mathbf{M}$, ma anche (quello di) una matrice 1×1, la matrice $\mathbf{M}_1 = [a]$. La naturale generalizzazione del teorema 22.9.2 alle forme quadratiche di n variabili fa intervenire tutte le n *sottomatrici principali di nord-ovest* $\mathbf{M}_k$ composte mediante le prime k righe e k colonne di $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \dots , \quad \mathbf{M}_n = \mathbf{M}$$

Definizione 22.9.8. I determinanti di queste matrici si chiamano *minori principali di nord-ovest.*

Osservazione 735. Vale il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare

Teorema 22.9.3 (Segno delle forma quadratica in n variabili)**.** *Sia* $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{M}\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$*. Allora:*

1. *q è definita positiva se e solo se* $\det \mathbf{M}_k > 0$ *per ogni* $k = 1, \dots, n$

2. *q è definita negativa se e solo se $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ (ovvero se $a_{11} < 0$, $\det \mathbf{M}_2 > 0$, $\det \mathbf{M}_3 < 0$, ...)*

Esempio 22.9.11. Sia

$$q(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2$$

La matrice corrispondente è

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Essendo:

$$a_{11} = 5 > 0, \quad \det \mathbf{A}_2 = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 15 > 0, \quad \det \mathbf{A} = 12 > 0$$

la forma quadratica è definita positiva

TODO: todohere sono arrivato qui nella revisione

22.9.4 Forme quadratiche. Test degli autovalori

Osservazione 736. Un importante test per determinare il segno di una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è basato sul segno degli autovalori della matrice $\mathbf{M}$.

Osservazione 737. Ricordiamo che un numero complesso λ e un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ si dicono, rispettivamente, autovalore ed autovettore (corrispondente a λ) di una matrice quadrata $\mathbf{M}$ di ordine n, se soddisfano la relazione:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

o equivalentemente

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{22.23}$$

con $\mathbf{I}_n$ ad indicare la matrice identità in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 738. La 22.23 ha soluzioni $\mathbf{v}$ non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare, ovvero se e solo se λ è soluzione dell'equazione

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0 \tag{22.24}$$

detta *equazione caratteristica*.

Osservazione 739. Il primo membro della 22.24 è un polinomio di grado n in λ e pertanto, in base al teorema fondamentale dell'algebra, esistono esattamente n autovalori di $\mathbf{M}$ (in $\mathbb{C}$) ciascuno contato secondo la propria molteplicità.

Le matrici $\mathbf{M}$ *simmetriche* posseggono importanti proprietà, che elenchiamo di seguito

1. gli autovalori di $\mathbf{M}$ sono numeri reali e possiedono autovettori reali
2. esistono n autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ che costituiscono una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$, ovvero

$$\mathbf{w}_i\mathbf{w}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

TODO: fix siamo sicuri qua? non dovrebbero essere invertiti 1 e 0

3. la matrice $\mathbf{S} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ le cui colonne sono gli autovettori di cui al secondo punto è ortogonale (cioè $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$) e diagonalizza $\mathbf{M}$; precisamente
$$\mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{22.25}$$
dove λ_j è l'autovalore corrispondente a $\mathbf{w}_j$

Sia ora $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{M}\mathbf{h}$. L'idea è di sfruttare le tre proprietà delle matrici simmetriche per scrivere q come somma di termini al quadrato moltiplicati per gli autovalori. Risalire da qui al segno di q diventa allora molto semplice.

Dalla 22.25 si ricava
$$\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
per cui si può scrivere
$$q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{M}\mathbf{h} = \mathbf{h}^T(\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T)\mathbf{h} = (\mathbf{S}^T\mathbf{h})^T\mathbf{\Lambda}(\mathbf{S}^T\mathbf{h}) \tag{22.26}$$
operiamo ora la trasformazione $\mathbf{k} = \mathbf{S}^T h$ che è biunivoca in $\mathbb{R}^n$. Sostituendo nella 22.26 si trova
$$q(\mathbf{h}) = q(\mathbf{S}\mathbf{k}) = \mathbf{k}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i^2 \tag{22.27}$$
Il procedimento che porta a scrivere q nella forma 22.27 si chiama *riduzione a forma canonica di q*. In altri termini, rispetto alla base ortonormale $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ la forma quadratica assume la forma 22.27. Questo ci consente di provare il seguente risultato:

Teorema 22.9.4. *La forma quadratica $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T\mathbf{M}\mathbf{h}$ è*

- *definita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{M}$ sono positivi (negativi);*
- *semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{M}$ son ≥ 0 (≤ 0) e almeno uno di essi è nullo;*
- *indefinita se $\mathbf{M}$ ha almeno un autovalore positivo e uno negativo*

Osservazione 740. La classificazione delle forme quadratiche si può basare quindi sullo studio del segno degli autovalori

Dimostrazione. Cominciamo a considerare la forma quadratica
$$\tilde{q}(\mathbf{k}) = q(\mathbf{S}\mathbf{k})$$
Dall'uguaglianza 22.27
$$\tilde{q}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i^2$$
leggiamo subito che per $\tilde{q}$ la tesi del teorema è vera. D'altro canto il fatto che la trasformazione $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{S}\mathbf{k}$ sia biunivoca, e in particolare che
$$\mathbf{S}\mathbf{k} = \mathbf{0} \iff k = \mathbf{0}$$

mostra che le forma quadratica q e $\tilde{q}$ hanno lo stesso segno (cioè q è definita positiva se e solo se $\tilde{q}$ è definita positiva e così via per gli altri casi). Questo conclude la dimostrazione □

Osservazione 741. Nel caso bidimensionale si può riottenere per questa via il risultato del teorema 22.9.2: consideriamo ancora la forma quadratica 22.22 con matrice associata $\mathbf{M}$

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}_2)=\det\begin{bmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-\lambda(a+c)+(ac-b^2)=\lambda^2-\lambda\operatorname{Tr}\mathbf{M}+\det\mathbf{M}=0$$

Detti λ_1, λ_2 gli autovalori di $\mathbf{M}$ si ha dunque $\lambda_1\lambda_2=\det\mathbf{M}$ e $\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{Tr}\mathbf{M}$. Interpretando allora quanto afferma il teorema 22.9.4 in termini di segno di $\det\mathbf{M}$ e $\operatorname{Tr}\mathbf{M}$ si riottiene in teorema 22.9.2

Osservazione 742. Concludiamo evidenziando la seguente proprietà delle forma quadratica *definite* che ci sarà utile nel prossimo paragrafo

Teorema 22.9.5. *Sia* $q(\mathbf{h})=\mathbf{h}^T\mathbf{M}\mathbf{h}$ *una forma quadratica in* $\mathbb{R}^n$. *Se* q *è definita positiva allora*

$$q(\mathbf{h})\geq\lambda_{\min}\|\mathbf{h}\|^2,\qquad\forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$$

dove $\lambda_{\min}$ *è il minimo autovalore di* $\mathbf{M}$. *Analogamente se* q *è definita negativa, allora*

$$q(\mathbf{h})\leq\lambda_{\max}\|\mathbf{h}\|^2,\qquad\forall\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$$

dove $\lambda_{\max}$ *(che è negativo) è il massimo autovalore di* $\mathbf{M}$.

Dimostrazione. Dalla 22.27 abbiamo

$$q(\mathbf{h})=q(\mathbf{S}\mathbf{k})=\mathbf{k}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{k}=\sum_{i=1}^n\lambda_ik_i^2$$

e perciò, se q è definita positiva, si ha

$$q(\mathbf{h})\geq\lambda_{\min}\sum_{i=1}^nk_i^2=\lambda_{\min}\|\mathbf{h}\|^2$$

mentre, se q è definita negativa, si ha

$$q(\mathbf{h})=\sum_{i=1}^n\lambda_ik_i^2\leq\lambda_{\max}\sum_{i=1}^nk_i^2=\lambda_{\max}\|\mathbf{h}\|^2$$

Per concludere basta osservare che $\|\mathbf{k}\|^2=\|\mathbf{h}\|^2$. Infatti, per l'ortogonalità di $\mathbf{S}\mathbf{S}^T=\mathbf{I}_n$, mentre la definizione di matrice trasposta equivale a

$$\left\langle\mathbf{S}^T\mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle=\langle\mathbf{x},\mathbf{S}\mathbf{y}\rangle,\qquad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

Possiamo allora scrivere

$$\|\mathbf{k}\|^2=\langle\mathbf{k},\mathbf{k}\rangle=\left\langle\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{k},\mathbf{k}\right\rangle=\langle\mathbf{S}\mathbf{k},\mathbf{S}\mathbf{k}\rangle=\|\mathbf{h}\|^2$$

Del resto la trasformazione $\mathbf{k}\mapsto\mathbf{S}\mathbf{k}$ rappresenta geometricamente una rotazione dello spazio $\mathbb{R}^n$, perciò le lunghezze dei vettori si conservano □

Osservazione 743. Interpretiamo i risultati raggiunti in termini di ottimizzazione di una forma quadratica. Se $q = q(\mathbf{h})$ è una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ si ha sempre $q(\mathbf{0}) = 0$ e $\nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
Quindi l'origine è sempre punto critico per q e la sua natura dipende dal segno di q (vedi figure 3.17)

DO: fixme

- se q è definita positiva (negativa), $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ è punto di minimo (massimo) globale forte
- se q è semidefinita positiva (negativa), $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ è il punto di minimo (massimo) globale debole
- se q è indefinita, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ è punto di sella

22.9.5 Studio della natura dei punti critici

Ci occupiamo ora di fornire strumenti utili a determinare la natura di un punto stazionario $\mathbf{x}_0$ per una funzione $f \in C^2(A)$. Come visto, essendo $\nabla(f) = \mathbf{0}$, la formula di Taylor al secondo ordine ha la seguente forma:

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(\|\mathbf{h}\|^2) \tag{22.28}$$

per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Per estrarre informazioni sulla natura del punto critico $\mathbf{x}_0$ occorre studiare e classificare la forma quadratica

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h} \tag{22.29}$$

dove $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ è la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}_0$. Nel caso in cui q sia definita oppure indefinita, la conclusione è indicata nel seguente teorema

Teorema 22.9.6. *Siano $f \in C^2(A)$ e $\mathbf{x}_0 \in A$ un punto critico per f. Se la forma quadratica 22.29 è:*

1. *definita positiva (negativa), allora $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo (massimo) locale forte*
2. *indefinita, allora $\mathbf{x}_0$ è punto di sella*

Dimostrazione. Rispettivamente

1. sia $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}$ è definita positiva. Dal teorema 22.9.5 abbiamo:

   $$q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} \|\mathbf{h}\|^2, \qquad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$$

   dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$. Dalla 22.28 otteniamo allora, per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$:

   $$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} q(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^2) \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|\mathbf{h}\|^2 + o(\|\mathbf{h}\|^2) = \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|\mathbf{h}\|^2 (1 + o(1))$$

   Poiché $\lambda_{\max} < 0$ e $1 + o(1) > 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, si deduce che $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) < 0$ per $\|\mathbf{h}\| \neq 0$, abbastanza piccolo e quindi $\mathbf{x}_0$ è punto di massimo locale forte

TODO: check qui grassetti

2. sia ora $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ indefinita. Esistono allora due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tali che $q(\mathbf{v}) > 0$ e $q(\mathbf{w}) < 0$. Valutiamo $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ lungo la retta $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Si ha, per $t \to 0$:
$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}q(t\mathbf{v}) + o(\|t\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{2}t^2(q(\mathbf{v}) + o(1))$$
e quindi, essendo $q(\mathbf{v}) + o(1) > 0$ definitivamente per $t \to 0$ si deduce che $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ per $|t| \neq 0$ abbastanza piccolo.
Ragionando analogamente, si mostra che $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$ per $|t| \neq 0$, abbastanza piccolo. Poiché $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ cambia segno in ogni intorno di $\mathbf{x}_0$, concludiamo che $\mathbf{x}_0$ è punto di sella

□

Rimane dubbio il caso in cui la 22.28 risulta una forma quadratica semidefinita. Ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente, possiamo comunque dedurre che: se $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ è non nulla e semidefinita positiva (negativa), allora $\mathbf{x}_0$ è di minimo (massimo) debole oppure di colle.

La situazione cambia se $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x})\mathbf{h}$ è semidefinita positiva o negativa non solo in $\mathbf{x}_0$ ma per ogni $\mathbf{x}$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$. In tal caso, infatti, vedremo nel prossimo paragrafo che in quell'intorno f è convessa (o concava, rispettivamente) e quindi $\mathbf{x}_0$ risulta punto di minimo (o massimo), debole.

Se $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ è nulla, ovviamente q non può dare alcuna informazione sulla natura di $\mathbf{x}_0$ e occorrerebbe ricorrere ai differenziali di ordine superiore.

Sintetizziamo brevemente una possibile strategia per la ricerca di estremi liberi di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con A sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$:

1. si isolano i punti in cui f non è regolare (ad esempio non derivabile una o due volte). Questi punti vanno esaminati a parte con uno studio in generale diretto ed adattato al caso concreto

2. tolti i punti anomali trovati al passo 1, si determinano gli eventuali punti critici di f risolvendo il sistema 22.19

3. si esamina la natura di ogni punto stazionario studiando il segno della forma quadratica 22.29. Se questa è definita o indefinita, si conclude usando il teorema 22.9.6. Se la 22.29 è nulla o è semidefinita, in generale si ricorre a uno studio diretto del segno dell'incremento $\Delta f(\mathbf{x}_0)$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$

Nel caso bidimensionale, le considerazioni ai passi 1 e 2 conducono alla seguente regola

Proposizione 22.9.7. *Sian $f \in C^2(A)$, A aperto in $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ un punto critico per f e*
$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$
la matrice hessiana di f nel punto critico. Allora:

1. se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$ *e*

- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *allora* (x_0, y_0) *è di minimo locale forte*

- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *allora* (x_0, y_0) *è di massimo locale forte*

(si noti che in questo caso $f_{xx}(x_0, y_0)$ *e* $f_{yy}(x_0, y_0)$ *hanno lo stesso segno)*

2. *se* $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) < 0$ *allora* (x_0, y_0) *è punto di sella*

3. *se* $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) = 0$ *occorre un'analisi ulteriore*

Osservazione 744. Vediamo alcuni esempi e osservazioni su come si utilizzano in pratica le idee precedenti

Esempio 22.9.12. Completiamo la ricerca degli estremi per la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - x^3y$$

Poiché f ha derivate di ogni ordine in $\mathbb{R}^2$, occorre considerare solo i punti critici $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. La matrice hessiana di f è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6 - 6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

In $(0, 0)$ abbiamo

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice ha autovalori 6 e 2 per cui è definita positiva: $(0, 0)$ è punto di minimo locale forte. Non può essere di minimo globale poiché, per esempio, $f(x, 1) \to -\infty$ se $x \to +\infty$.
Nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ abbiamo

$$\mathbf{H}_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice ha determinante negativo e perciò è indefinita: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è un punto di sella.
Infine in $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ abbiamo

$$\mathbf{H}_f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui anche $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ è punto di sella.

Tecnica delle restrizioni per provare che un punto è di sella

Esempio 22.9.13. Cerchiamo massimi e minimi locali per la funzione

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

Poiché f ha derivate di ogni ordine in $\mathbb{R}^2$, passiamo alla ricerca dei punti critici, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 12xy^2 = 4x(x^2 - 3y^2) = 0 \\ f_y(x, y) = -12x^2y + 4y^3 = 4y(y^2 - 3x^2) = 0 \end{cases}$$

Si trova l'unico punto critico $(0,0)$. Poiché la funzione è un polinomio omogeneo di grado 4, la sua matrice hessiana nell'origine ha tutti gli elementi nulli (perché?), quindi siamo nel caso dubbio. Come si può studiare la natura di questo punto? Osserviamo che lungo la retta $y = 0$ si ha

TODO: fixme

$$f(x,0) = x^4$$

che ha un punto di minimo in $x = 0$: lungo l'asse x, perciò, la funzione ha un punto di minimo nell'origine. Lo stesso accade lungo l'asse y: $f(0,y) = y^4$. Invece, lungo la retta $y = x$ si ha

$$f(x,x) = -4x^2$$

che ha un punto di massimo in $x = 0$. Pertanto $(0,0)$ non può essere ne di massimo ne di minimo: è un punto di sella

Osservazione 745. L'esempio precedente contiene una idea generale: se in un caso dubbio si riescono a trovare due rette (o due curve) diverse, lungo le quali la restrizione di f ha in un caso un massimo e nell'altro un minimo nel punto critico, allora quest'ultimo è un punto di sella. Alla stessa conclusione si arriva se, lungo una particolare curva, la funzione ha un flesso nel punto critico.
Si noti che, invece, il fatto che lungo due rette diverse la funzione abbia lo stesso comportamento (per esempio, punto di massimo) non prova nulla

Perturbazione di una forma quadratica

Esempio 22.9.14. Siano

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^3, \quad g(x,y) = x^2 - y^3$$

Poiché

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3x^2, 4y), \quad \nabla g(x,y) = (2x, -3y^2)$$

l'origine è punto critico[4] per entrambe. La matrice hessiana di f è

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2-6x & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono uguali a 2 e 4, per cui $\mathbf{H}_f(0,0)$ è definita positiva. Da ciò deduciamo che (0,0) è punto di minimo locale forte per f
La matrice hessiana di g è

$$\mathbf{H}_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{H}_g(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[4]Se f è un polinomio privo di termini di ordine uno, origine è sempre punto stazionario. Il differenziale secondo $d^2 f(\mathbf{0})$è dato dal complesse dei termini di secondo grado moltiplicato per due.

Gli autovalori sono uguali a 2 e 0, per cui $\mathbf{H}_g(0,0)$ è semidefinita positiva. Da ciò deduciamo che $(0,0)$ è un punto di minimo debole o di sella per g. Come si fa a decidere? In questo caso è semplice: muovendoci lungo l'asse $x = 0$ si ottiene $f(0,y) = -y^3$, che ha un flesso in $y = 0$. Deduciamo subito che $(0,0)$ è punto di sella per g

Esaminiamo i due esempi precedenti da un altro punto di vista, per illustrare l'idea principale che sta alla base dei ragionamenti precedenti.
La funzione f si scrive come somma:

- di una forma quadratica definita positiva $q(x,y) = x^2 + 2y^2$ e
- di un termine cubico $(-x^3)$ in teoria molto più piccolo quando si sta vicino all'origine

Possiamo dunque considerare f vicino all'origine come una piccola deformazione della forma quadratica q. Il calcolo fatto indica che, dato che nell'origine quest'ultima ha un minimo forte, deformandola poco li vicino le cose sostanzialmente non cambiano. Alla peggio il minimo non sarà più globale ma locale effetto mostrato in figura 3.18?? **TODO**: fixme

La funzione g si scrive invece come somma:

- di una forma quadratica semidefinita positiva $q_1(x,y) = x^2$ e
- di un termine cubico $(= -y^3)$

La forma quadratica $q_1(x,y) = x^2$ ha una linea di minimi deboli, tra cui l'origine. Perturbandola con il termine $-y^3$ si distrugge la configurazione di minimo debole. In figura 3.19 è mostrato il grafico di q_1 e della sua deformata $g(x,y) = x^2 - y^3$. L'origine non è più punto d'estremo, neanche locale **TODO**: fixme

Invitiamo il lettore a fare qualche altro esperimento al computer, per esempio con le funzioni:

$$f_1(x,y) = x^2+2y^2-x^2y, \qquad f_2(x,y) = -x^2-2y^2-xy^4, \qquad f_3(x,y) = x^2+xy^5$$

ottenute perturbando una forma quadratica con termini di grado superiore. I grafici mostreranno che l'origine è ancora punto di estremo (locale) per le prime due. Le cose funzionano bene con le forme quadratiche definite positive o negative. La terza nonostante si deformi la forma quadratica semidefinita positiva $q_3(x,y) = x^2$ con un termine di grado elevato , non ha un punto estremo in $(0,0)$

Massimi e minimi in più di due variabili

Esempio 22.9.15. Cerchiamo gli estremi liberi della funzione di tre variabili

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$$

I punti critici risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 6x + 2 - 2z = 0 \\ f_y(x,y,z) = 4y + 2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2z - 2x = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} z = x \\ y = -1/2 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Si trova l'unico punto critico

$$\mathbf{x}_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calcoliamo la matrice hessiana di f

$$\mathbf{H}_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dunque l'hessiana è costante. Per studiarne il segno, usiamo il teorema 22.9.3:

$$\det \mathbf{H}_f = 32 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 24 > 0, \quad 6 > 0$$

Poiché i minori principali di nord-ovest sono positivi, la forma quadratica è definita positiva. Il punto $\mathbf{x}_0$ è di minimo locale forte

Osservazione 746. Vediamo due esempi un po' meno accademici

Esempio 22.9.16 (Baricentro di n punti nel piano)**.** Dati n punti nel piano $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Cerchiamo un punto $\mathbf{p} = (x, y)$ tale che la somma dei quadrati delle distanze dagli n punti sia minima.
Si tratta dunque di minimizzare la funzione:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2\right]$$

Poiché f ha derivate continue di ogni ordine, passiamo alla ricerca dei punti critici, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \sum_{i=1}^{n} 2(x - x_i) = 2(nx - \sum_{i=1}^{n} x_i) = 0 \\ f_y(x, y) = \sum_{i=1}^{n} 2(y - y_i) = 2(ny - \sum_{i=1}^{n} y_i) = 0 \end{cases}$$

Si trova l'unico punto di coordinate:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

che coincide dunque col baricentro del sistema degli n punti. La matrice hessiana è costante

$$\begin{bmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{bmatrix}$$

ed è definita positiva. Dunque, il punto è effettivamente di minimo. Abbiamo quindi scoperto che il baricentro di n punti nel piano minimizza la somma dei quadrati delle distanze dagli n punti

Esempio 22.9.17 (Metodo dei minimi quadrati, retta di regressione)**.** Molti problemi interessanti delle scienze sperimentali si riducono alla ricerca di una funzione

$$y = \alpha + \beta x$$

detta retta di regressione, che sia il più possibile in accordo con una serie di osservazioni congiunge di due variabili

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

L'idea generale soggiacente è la seguente: per ragioni teoriche a priori, oppure perché lo constatiamo empiricamente, siamo convinti che due grandezze siano correlate tra loro. Vorremmo trovare un'espressione analitica esplicita della legge che lega le due grandezze e l'ipotesi più semplice è che possa trattarsi di una dipendenza di tipo $y = \alpha + \beta x$.

Per scrivere l'equazione (ossia per determinare i coefficienti α e β) consideriamo una serie di coppie di valori osservati (x_i, y_i) e cerchiamo la retta che passi il più possibile vicino a questi punti.
Supponiamo dunque di avere n osservazioni di due variabili (x, y)

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

dove supporremo i valori x_1, x_n non tutti uguali, per non svuotare d'interesse il problema. Non si pretende che la lineare tra y e x sia esatta, ossia

$$y_i = \alpha + \beta x_i, \quad \forall i$$

L'ipotesi è che essa valga, a meno di un errore ε_i ossia

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad \forall i$$

e cioè che il valore vero y_i sia pari al valore teorico $\alpha + \beta x_i$, "sporcato" dall'errore ε_i

Come determinare i parametri α e β in modo da minimizzare il complesso degli ε_i? La prima idea che viene in m mente è minimizzare la somma $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, ma ci si rende conto immediatamente che errori consistenti di segno opposto potrebbero compensarsi e rendere piccola la somma. La somma dei quadrati di tali errori (ovviamente funzioni di α, β) non permette compensazioni ed una buona misura dell'approssimazione. Tale somma è

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

e aggrega i quadrati delle distanze verticali dei punti (x_i, y_i) dalla retta.
Il problema è allora minimizzare la funzione $E(\alpha, \beta)$ che è definita su $\mathbb{R}^2$ e ha derivate parziali continue in ogni punto. Per determinare i punto stazionari calcoliamo le derivate parziali di E e uguagliamole a zero. Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n 2(y_i - \alpha - \beta x_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n 2(y_i - \alpha - \beta x_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \\ 2 \sum_{n=1}^n x_i (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \\ \sum_{n=1}^n x_i (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - n\alpha - \beta \sum_{n=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \alpha \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}$$

E si giunge al sistema lineare

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = n\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \tag{22.30}$$

Ponendo

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \quad \overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

I numeri $\overline{x}, \overline{y}, \overline{q}, \overline{p}$, rappresentano le medie aritmetiche delle ascisse, delle ordinate, dei quadrati delle ascisse e dei prodotti ascissa per ordinata rispettivamente. Dopo averne diviso le equazioni membro a membro per n, il sistema 22.30 si può riscrivere nel modo seguente:

$$\overline{q}\beta + \overline{x}\alpha = \overline{px}\beta + \alpha = \overline{y} \tag{22.31}$$

Per procedere nella risoluzione del sistema, è opportuno introdurre due quantità significative in statistica:

- la varianza della variabile x, definita da

  $$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

  è una misura di quanto le osservazioni x_i si discostino dal valore medio $\overline{x}$; dalla definizione è evidente che si tratta di una quantità ≥ 0, che si annulla se e solo se tutte le x_i sono uguali a $\overline{x}$ (e quindi uguali tra loro, circostanza che abbiamo escluso); il seguente calcolo elementare mostra un altro modo utile di scrivere la varianza

  $$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x^2 - 2x_i\overline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \overline{x}^2 + \overline{x}^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \overline{q} - \overline{x}^2\end{aligned}$$

- la covarianza delle variabili x e y, definita da

  $$\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

  il significato è il seguente: una covarianza positiva significa che le variabili x e y sono direttamente correlate (ossia, all'aumentare di x aumenta anche y); una covarianza negativa significa che le variabili x e y sono inversamente correlate (ossia all'aumentare di x diminuisce y)[5]. Un calcolo elementare analogo a quello fatto per la varianza mostra che

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1} n(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\right) - \overline{xy} = \overline{p} - \overline{xy}$$

[5]Per capire l'affermazione appena fatta: la covarianza è positiva se mediamente le quantità $(x_i - \overline{x})$ e $(y_i - \overline{y})$ hanno lo stesso segno; questo accade se a valori grandi di x_i (cioè maggiori del valore medio $\overline{x}$) corrispondono valori grandi di y_i (cioè maggiori del valore medio $\overline{y}$) e a valori piccoli di x_i corrispondono valori piccoli di y_i. Analogamente si ragiona nel caso della covarianza negativa

Tornando al sistema 22.31, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema

$$\det \begin{bmatrix} \overline{q} & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{bmatrix} = \overline{q} - \overline{x}^2 = \sigma_x^2$$

pertanto nelle nostre ipotesi è senz'altro positivo. Se ne deduce che il sistema22.31 ammette l'unica soluzione $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ data da

$$\overline{\beta} = \frac{\overline{p} - \overline{xy}}{\overline{q} - \overline{x}^2} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\overline{qy} - \overline{px}}{\overline{q} - \overline{x}^2} = \overline{y} - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\overline{x} \tag{22.32}$$

Il punto $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ è l'unico punto stazionario della funzione E, è punto di minimo assoluto, dato che E è somma di funzioni convesse[6]. In ogni caso, controlliamo esaminando la matrice hessiana di E , data da

$$\mathbf{H}_E(\alpha, \beta) = 2n \begin{bmatrix} \overline{q} & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha $\overline{q} > 0$ e $\det \mathbf{H}_E(\alpha, \beta) = \overline{q} - \overline{x}^2 > 0$ e quindi $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ è effettivamente punto di minimo globale.

22.10 Funzioni convesse di n variabili

Ci occupiamo qui delle funzioni convesse, una classe di funzioni importante per varie questioni, tra le quali l'ottimizzazione

Definizione 22.10.1 (Insieme convesso)**.** un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ si ha che $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq \Omega$ (dove $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ denota il segmento di estremi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$)

Definizione 22.10.2 (Insieme strettamente convesso)**.** si dice *strettamente convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ il segmento $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ privato degli estremi è $\subset \Omega$.

Definizione 22.10.3 (Epigrafico)**.** Si dice epigrafico di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'insieme

$$\operatorname{epi} f = \left\{ (\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \right\}$$

Definizione 22.10.4 (Funzione convessa)**.** Una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è convessa (strettamente convessa) se $\operatorname{epi} f$ è un sottoinsieme convesso (rispettivamente, strettamente convesso) di $\mathbb{R}^{n+1}$

Definizione 22.10.5 (Funzione concava)**.** Si dice che f è concava se $-f$ è convessa

Osservazione 747*.* Se l'insieme Ω su cui f è definita non è convesso, $\operatorname{epi} f$ non è mai convesso (fare un disegno), quindi d'ora in poi supponiamo che Ω sia sempre convesso. Osserviamo che

[6] Si giustificherà quest'affermazione in seguito

Proposizione 22.10.1. *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso) è convessa se e solo per ogni se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, $t \in [0,1]$ vale la condizione*

$$f(t\mathbf{x}_2 + (1-t)\mathbf{x}_1) \leq tf(\mathbf{x}_2) + (1-t)f(\mathbf{x}_1) \tag{22.33}$$

Se la 22.33 vale col segno $<$ per $t \in (0,1)$, la f è strettamente convessa.

Osservazione 748. Si invita il lettore a verificare questa proposizione. Si noti che il punto $\mathbf{x}_t = t\mathbf{x}_2 + (1-t)\mathbf{x}_1$ percorre il segmento $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ al variare di $t \in [0,1]$.
La 22.33 è l'analogo multidimensionale della proprietà di convessità per corde che abbiamo studiato per le funzioni di una variabile

Esempio 22.10.1. La funzione:

- $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}^n$
- $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ è convessa in $\mathbb{R}^n$ (ma non strettamente)

Osservazione 749. Anche se la condizione 22.33, a priori, ha senso per una funzione f qualsiasi (ossia non richiede, per aver senso, che la funzione sia continua, o derivabile, si dimostra che in effetti la 22.33 implica una certa regolarità

Teorema 22.10.2 (Regolarità delle funzioni convesse)**.** *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso). Se f è convessa allora:*

- *f è continua*
- *f ha derivate parziali destre e sinistre in ogni punto*
- *nei punti in cui è derivabile, f è differenziabile*

Dimostrazione. Omessa □

Osservazione 750. Vediamo qualche risultato che vale per funzioni convesse che a priori sono un po' più regolari

Teorema 22.10.3 (Convessità e piano tangente)**.** *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso), differenziabile in Ω. Allora f è convessa in Ω se e solo se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Omega$ si ha*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{22.34}$$

Osservazione 751. Il significato geometrico di 22.34 si vede bene in due dimensioni. Infatti, scritta esplicitamente in questo caso, si ha

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

che equivale ad affermare che il piano tangente in (x_0, y_0) sta sotto il grafico di f. Questo teorema risulta quindi l'analogo multidimensionale della proprietà di convessità per tangenti enunciata per le funzioni di una variabile

Dimostrazione. Sia f convessa e proviamo la 22.34. Riscriviamo la 22.33 nella forma

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

Per $t \to 0$ il primo membro tende a

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))_{|t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

poiché f è differenziabile (abbiamo applicato il teorema di derivazione delle funzioni composte); quindi

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

ossia

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

che è la 22.34.
Viceversa supponiamo ora valida la 22.34 e proviamo che f è convessa. Ponendo $\mathbf{x}_t = t\mathbf{x}_2 + (1-t)\mathbf{x}_1$, applichiamo la 22.34 nei punti $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_t$

$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_t) + \nabla f(\mathbf{x}_t) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_t) \tag{22.35}$$

Applicandola invece ai punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_t$ abbiamo

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_t) + \nabla f(\mathbf{x}_t) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_t) \tag{22.36}$$

Ora moltiplichiamo ambo i membri di 22.35 per t, ambo i membri di 22.36 per $1-t$ e sommiamo

$$tf(\mathbf{x}_2) + (1-t)f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_t) + \nabla f(\mathbf{x}_t) \cdot [t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_t) + (1-t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_t)] = f(\mathbf{x}_t)$$

in quanto $t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_t) + (1-t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$ come si verifica. Questo completa la dimostrazione □

Osservazione 752. Come per le funzioni di una variabile il segno della derivata seconda fornisce un criterio per studiare la convessità di una funzione, così per le funzioni di più variabili un analogo criterio è dato dallo studio del segno della forma quadratica data dal differenziale secondo

Teorema 22.10.4 (Convessità e matrice hessiana)**.** *Sia $f \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. Se per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ la forma quadratica $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva, allora f è convessa in Ω*

Dimostrazione. Applichiamo la formula di Taylor al secondo ordine con resto secondo Lagrange a due generici punti $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Omega$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i, x_j}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{h}) h_i h_j$$

con $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ per un opportuno $\delta \in (0,1)$ dipendente da $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$. Ora, poiché in ogni punto di Ω la forma quadratica $d^2 f$ è semidefinita positiva, si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{h}) h_i h_j \geq 0, \quad \forall \mathbf{h}$$

perciò

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

da cui si deduce la convessità di f, in base al teorema **??** □

22.10.1 Ottimizzazione di funzioni convesse e concave

Osservazione 753. Nel paragrafo 6 abbiamo visto che nella ricerca dei punti di massimo e minimo di una funzione (derivabile) il primo passo consiste nella ricerca dei punti stazionari, ossia quelli in cui il gradiente si annulla (condizione del prim'ordine); successivamente occorre in generale studiare ciascuno dei punti stazionari mediante la matrice hessiana (condizioni del second'ordine). Un importante caso in cui le condizioni del prim'ordine risultano sufficienti alla ricerca dei punti di massimo e minimo è quello delle funzioni convesse o concave, per le quali i punti stazionari, se esistono, sono di minimo globale o massimo globale rispettivamente. Infatti:

Proposizione 22.10.5. *Sia Ω un aperto convesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa (concava) e differenziabile in Ω, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se $\mathbf{x}_0$ è un punto critico per f, allora x_0 è punto di minimo (massimo) globale. Inoltre se f è strettamente convessa (concava), $\mathbf{x}_0$ è di minimo (massimo) globale forte e quindi in particolare il punto di minimo (massimo) globale è unico*

Dimostrazione. Se f è convessa e differenziabile, si ha

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{22.37}$$

Se $\mathbf{x}_0$ è critico, allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e quindi $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ da cui segue che $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo globale. Se, infine, f è strettamente convessa, la 22.37 vale in senso stretto per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, per cui $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo globale forte ed è unico. □

Esempio 22.10.2 (Problema di allocazione ottima)**.** Completiamo il problema di allocazione del punto in maniera tale da minimizzare la distanza. Ricordiamo che l'obiettivo da minimizzare è

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y)$$

dove

$$d_i(x, y) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\| = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$$

con $i = 1, 2, 3$ e $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ sono tre punti disposti ai vertici di un triangoli acutangolo. Sappiamo già che il minimo esiste; mostriamo che il punto di minimo è unico provando che f è strettamente convessa nel piano. Infatti, ogni addendo è convesso, non strettamente, poiché, per ogni $t \in (0, 1)$ e ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ si ha:

$$\|t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q} - \mathbf{p}_i\| = \|t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) + (1-t)(\mathbf{q} - \mathbf{p}_i)\| \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\| + (1-t)\|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i\|$$

Il segno di uguaglianza vale solo nel caso in cui i vettori $\mathbf{p} - \mathbf{p}_i$ e $\mathbf{q} - \mathbf{p}_i$ sono linearmente dipendenti. Ma allora deve essere, per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \neq \mathbf{q}$

$$f(t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{3} \|t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q} - \mathbf{p}_i\| < t\sum_{i=1}^{3} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\| + (1-t)\sum_{i=1}^{3} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i\| = tf(\mathbf{p}) + (1-t)f(\mathbf{q})$$

poiché il segno di uguale può valere solo nel caso in cui si ha simultaneamente che i vettori $\mathbf{p} - \mathbf{p}_i$ e $\mathbf{q} - \mathbf{p}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$ siano linearmente dipendenti

e ciò è impossibile. Dunque f è strettamente convessa e per la proposizione precedente il punto di minimo è unico.
Vogliamo ora determinare effettivamente tale punto di minimo. Osserviamo che f è differenziabile in tutti i punti del piano tranne che nei vertici del triangolo. Esaminiamo subito questi tre punti e facciamo vedere che nessuno di essi può essere il punto di minimo. Basta considerare il vertice comune ai due lati più corti. Infatti, sia per esempio $\mathbf{p}_1$ tale vertice e sia $\mathbf{q}$ il piede della perpendicolare condotta dal vertice $\mathbf{p}_2$ al lato opposto. Allora si controlla facilmente che:

$$f(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}_1\|+\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_2\|+\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_3\| = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}_2\|+\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3\| < \|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\|+\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3\| = f(\mathbf{p}_1)$$

per cui $\mathbf{p}_1$ non può essere il punto di minimo. Possiamo dunque limitarci a considerare gli altri punti. Cerchiamo allora i punti critici annullando il gradiente di f. Si trova il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x-x_1}{d_1(x,y)} + \dfrac{x-x_2}{d_2(x,y)} + \dfrac{x-x_3}{d_3(x,y)} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y-y_1}{d_1(x,y)} + \dfrac{y-y_2}{d_2(x,y)} + \dfrac{y-y_3}{d_3(x,y)} = 0 \end{cases}$$

Per risolverlo, notiamo che, introdotti i tre vettori (anzi, versori)

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{x-x_1}{d_1(x,y)}, \frac{y-y_1}{d_1(x,y)}\right), \quad \mathbf{w}_2 = \left(\frac{x-x_2}{d_2(x,y)}, \frac{y-y_2}{d_2(x,y)}\right), \quad \mathbf{w}_3 = \left(\frac{x-x_3}{d_3(x,y)}, \frac{y-y_3}{d_3(x,y)}\right)$$

il sistema equivale all'equazione vettoriale

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

Ora, tre versori non nulli nel piano possono avere per somma il vettore nullo solo se i punti del piano corrispondenti sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero, ovvero se l'angolo che ciascuno di essi forma con gli atri due è di 120 gradi (fig 3.22). Esiste un unico punto che soddisfa questa condizione ed è interno al triangolo (fig 3.22).
A titolo di confronto, il lettore è invitato a calcolare la matrice hessiana di f per rendersi conto che in questo caso l'analisi del segno dell'hessiana risulterebbe una strada più laboriosa per lo studio dei punti di massimo e minimo, rispetto alle considerazioni che abbiamo presentato qui

TODO: fixme
TODO: fixme

22.11 Funzioni definite implicitamente

22.11.1 Funzione implicita di una variabile

In precedenza si sono fatti alcuni esempi nei quali gli insiemi di punti definiti nel piano da una equazione $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, sono delle curve, dette linee di livello della funzione $z = f(x,y)$. Ciò non necessariamente sempre avviene come mostrato nei prossimi esempi

Esempio 22.11.1. L'insieme definito dall'equazione:

- $x^2 + y^2 = 1$ è una circonferenza (curva regolare)
- $x^2 + y^2 = 0$ è un punto (l'origine)

- $x^2 - y^2 = 0$ è l'unione di due rette $y = \pm x$
- $x^2 + y^2 = -1$ è vuoto

Anche con f molto regolare, l'insieme di livello definito da $f(x, y) = c$ non è necessariamente una curva ne una curva regolare

Ci poniamo di determinare le condizioni sotto le quali $f(x, y) = 0$ definisce una curva regolare. Più precisamente ci poniamo un problema più ristretto: data una funzione $f(x, y)$ definita in un aperto del piano e ivi regolare (almeno C^1) precisare le condizioni sotto le quali l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

Definizione 22.11.1 (Funzione definita implicitamente di $f(x, y) = 0$)**.** una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) tale che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in I$ si dice definita implicitamente dell'equazione $f(x, y) = 0$, o più brevemente funzione implicita

Affinché tale funzione implicita esista, è necessario che $f(x, y) = 0$ sia soddisfatta almeno in un punto (x_0, y_0); in tal caso sarà $g(x_0) = y_0$ e il problema è capire se una tale $g$può essere definita in tutto un intorno I di x_0. Inoltre vorremmo che $g(x)$ fosse abbastanza regolare (almeno derivabile).

Ragioniamo a ritroso: se una tal funzione $g(x)$ esiste ed è derivabile in I, essendo anche $f(x, y)$ differenziabile per ipotesi, possiamo derivare rispetto ad x l'identità

$$f(x, g(x)) = 0$$

ottenendo, per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

da cui si ricava che

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

per ogni $x \in I$in cui il denominatore non si annulla. In particolare

$$g'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

purché sia $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sotto ipotesi ragionevoli, l'esistenza e la derivabilità di g possono esser effettivamente dimostrate.

Teorema 22.11.1 (di Dini, della funzione implicita)**.** *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $C^1(A)$. Supponiamo che in un punto $(x_0, y_0) \in A$ sia*

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x : 0, y_0) \neq 0$$

Allora esiste un intorno I di x_0 in $\mathbb{R}$ e un'unica funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tal che $y_0 = g(x_0)$ e

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \textit{per ogni } x \in I$$

Inoltre $g \in C^1(I)$ e

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}, \quad \textit{per ogni } x \in I \tag{22.38}$$

Notiamo anche che, se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, ma in compenso $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, si può applicare il teorema scambiando i ruoli di x e y, ossia affermare che esiste un intorno J di y_0 e un'unica funzione $x = h(y)$ definita in J, tale che $x_0 = h(y_0)$ e

$$f(h(y), y) = 0, \quad \text{per ogni } y \in J$$

Inoltre $h \in C^1(J)$ e

$$h'(y) = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}, \quad \text{per ogni } y \in J \tag{22.39}$$

In sostanza, i punti in cui il teorema di Dini non è applicabile sono quelli in cui il gradiente di f si annulla, ossia i punti critici di f.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in vari passi:

1. *Esistenza e unicità della funzione implicita.* Per ipotesi $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ supponiamo per fissare le idee che sia $f_y(x_0, y_0) > 0$. Poiché per ipotesi f_y è continua in A, per il teorema di permanenza del segno (teorema 3.1 paragrafo 2.1) esiste un rettangolo

   TODO: fixme

   $$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

   in cui $f_y(x, y) > 0$. Allora la funzione di una variabile

   $$y \mapsto f(x_0, y)$$

   è continua e strettamente crescente in $[y_0 - b, y_0 + b]$. In particolare, poiché per ipotesi $f(x_0, y_0) = 0$, questo implica che

   $$f(x_0, y_0 - b) < 0, \quad f(x_0, y_0 + b) > 0$$

   Ancora per il teorema di permanenza del segno, esiste allora un intervallo

   $$I \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_0 - a, x_0 + a]$$

   tale che

   $$f(x, y_0 - b) < 0, \quad f(x, y_0 + b) > 0 \quad \text{per ogni } x \in I$$

   Se ora fissiamo un punto qualsiasi $\overline{x} \in I$, la funzione di una variabile

   $$y \mapsto f(\overline{x}, y)$$

   è continua su $[y_0 - b, y_0 + b]$, negativa in $y_0 - b$, positiva in $y_0 + b$ e strettamente crescente. Per il teorema degli zeri (per funzioni di una variabile) esiste uno e un sol punto $\overline{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$ tale che $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Ponendo $g(\overline{x}) = \overline{y}$ abbiamo dimostrato esistenza e unicità della funzione implicita sull'intervallo I.

2. *Continuità di g.* Mostriamo prima che g è continua in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$, ripetiamo la dimostrazione precedente con ε al posto di b; troveremo un δ_ε tale che per ogni $\overline{x} \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ esiste uno e un sol punto

$\overline{y} \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ tale che $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Per l'unicità della funzione implicita dev'essere $\overline{y} = g(\overline{x})$, da cui l'implicazione

$$\overline{x} \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \implies g(\overline{x}) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

che esprime la continuità di g in x_0. D'altro canto, la condizione

$$f_y(x, y) > 0 \text{ in } I \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

consente di ripetere lo stesso ragionamento in qualsiasi punto $x \in I$, perciò g è continua in I

3. Derivabilità di g. Applichiamo il teorema del valore medio (teorema 3.13 paragrafo 4.5 a f in due punti qualsiasi

TODO: fixme

$$(x, y), (x_1, y_1) \in I \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

Esisterà dunque un punto (x^*, y^*) sul segmento di estremi $(x, y), (x_1, y_1)$ tale che

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = f_x(x^*, y^*)(x_1 - x) + f_y(x^*, y^*)(y_1 - y)$$

Scegliendo ora $y_1 = g(x_1)$ e $y = g(x)$ avremo $f(x_1, y_1) = f(x, y) = 0$ e quindi

$$f_x(x^*, y^*)(x_1 - x) + f_y(x^*, y^*)(g(x_1) - g(x)) = 0$$

da cui

$$\frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{f_x(x^*, y^*)}{f_y(x^*, y^*)}$$

Essendo

$$f_y(x^*, y^*) \geq \min_R f_y(x, y) > 0$$

l'ultimo denominatore scritto non si annulla mai. Se ora (x, y) è fissato e $(x_1, y_1) \to (x, y)$ si avrà $(x^*, y^*) \to (x, y) = (x, g(x))$ e, per la continuità delle derivate prime,

$$-\frac{f_x(x^*, y^*)}{f_y(x^*, y^*)} \to -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

da cui si ricava che esiste

$$g'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

che è la formula desiderata per la derivata di g

4. *Continuità di g'*: la 22.38 esprime g' come funzione composta di funzioni continue, per cui essa è continua

□

Esempio 22.11.2. Consideriamo l'equazione

$$f(x, y) = e^{xy} + x - y - 1 = 0$$

soddisfatta per esempio in $(0,0)$. Poiché

$$f_y(x,y) = xe^{xy} - 1, \quad f_y(0,0) = -1 \neq 0$$

possiamo affermare che esiste un intorno I di 0 e una funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione, in I con $y(0) = 0$. Derivando rispetto a x l'identità

$$f(x, y(x)) = 0$$

si ottiene

$$e^{xy}(y + xy') + 1 - y' \tag{22.40}$$

da cui

$$y'(x) = -\frac{y(x)e^x + 1}{xe^{xy(x)} - 1}$$

Per esempio $y'(0) = 1$. In questo caso la funzione $y = y(x)$ non si sa scrivere esplicitamente: è proprio questo il caso più interessante, che mostra la potenza del teorema. Derivando ancora ambo i membri della 22.40 (pensando $y = y(x)$) si trova:

$$e^{xy}\left((y + xy')^2 + 2y' + xy''\right) - y'' = 0$$

da cui, inserendo $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si ricava

$$y''(0) = 2$$

iterando il procedimento possiamo calcolare le derivate successive di $y(x)$in $x = 0$ e, mediante lo sviluppo di MacLaurin, avere una buona approssimazione di $y(x)$, pur non conoscendone l'espressione esplicita.

Esempio 22.11.3. Considerando

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

soddisfatta, per esempio, nel punto $(1,0)$. Si ha

$$f_x(x,y) = 2x; \quad f_y(x,y) = -2y$$

Poiché $f_x(x,y) = 2 \neq 0$ si può affermare che esiste un intorno J di $y_0 = 0$ e una funzione $x = h(y)$ definita implicitamente dall'equazione; inoltre

$$h'(y) = -\frac{-2y}{2x} = \frac{y}{x}$$

In questo caso la funzione h si può scrivere esplicitamente

$$h(y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

(si noti che l'altro ramo della curva, $x = -\sqrt{y^2 + 1}$, non passa dal punto $(1,0)$ che abbiamo fissato).

Esempio 22.11.4. L'equazione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = 0 \tag{22.41}$$

è soddisfatta, per esempio in $(0,0)$. Poiché $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ non è possibile applicare il teorema in questo punto. In questo caso l'equazione è soddisfatta solo nell'origine ed è l'esistenza della funzione implicita che viene a cadere

Linee di livello Torniamo ora al problema da cui siamo partiti all'inizio di questo paragrafo: descrivere gli insiemi di livello di una funzione $z = f(x, y)$, regolare. Sia

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

Calcoliamo $\nabla f(x, y)$ e cerchiamo i punti critici di f, ossia i punti in cui il gradiente si annulla. Supponiamo che questi siano in numero finito, o per lo meno che ogni insieme E_c contenga solo un numero finito di questi. Allora, salvo un numero finito di eccezioni, in ogni punto di E_c risulterà applicabile il teorema di Dini, ossia l'insieme E_c si potrà rappresentare, in un intorno di quei punti, come grafico di una funzione C^1 del tipo $y = g(x)$ oppure del tipo $x = h(y)$. I valori di c per cui E_c contiene almeno un punto critico di f si dicono *valori critici*. Se c non è un valore critico nell'interno di ogni suo punto l'insieme E_c è effettivamente una curva regolare. Questa è una giustificazione precisa del motivo per cui gli insiemi E_c sono generalmente delle linee (linee di livello).

22.11.2 Funzione implicita di n variabili

Tutti i discorsi fatti sulle funzioni definite implicitamente da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ si possono generalizzare al caso di funzioni di n variabili. Per esempio, considerando

$$f(x, y, z) = 0 \tag{22.42}$$

con f di classe C^1 e supponiamo che sia soddisfatta in un certo punto (x_0, y_0, z_0). Ci chiediamo se esistono un intorno U di (x_0, y_0) nel piano e una funzione $z = g(x, y)$, definita e regolare in U, per cui risulti

$$f(x, y, g(x, y)) = 0, \quad \text{per ogni } (x, y) \in U$$

Diremo che g è definita implicitamente dalla 22.42. Se questo è vero, dovrà essere (derivato rispetto a x l'identità precedente)

$$f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y)) \cdot g_x(x, y) = 0$$

da cui

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \text{ e } g_z(x_0, y_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0, z_0)}{f_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{22.43}$$

Analogamente

$$g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \text{ e } g_y(x_0, y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0, z_0)}{f_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{22.44}$$

TODO: check grassetto

purché sia $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Si capisce allora come si generalizzi il teorema di Dini: se $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esistono un intorno di (x_0, y_0) e un'unica funzione $z = g(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y, z) = 0$ per cui valgono le 22.43-22.44. Se la derivata $f_z(x_0, y_0, z_0)$ si annulla, ma in compenso un'altra delle due non si annulla, si potrà esplicitare la variabile corrispondente, rispetto alle rimanenti due e si otterranno formule analoghe. Il lettore è invitato per esercizio a scrivere le formule che assegnano le due derivate parziali della funzione definita implicitamente, in ciascuno dei casi $f_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $f_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

L'enunciato preciso che vale in generale è il seguente e si può dimostrare analogamente a teorema **??**

Teorema 22.11.2 (di Dini: caso n-dimensionale)**.** *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$ e supponiamo che*

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0; \quad f_y(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0;$$

per un certo punto $(x_0, y_0) \in A$ (dove $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$). Allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ e un'unica funzione $g : U \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(U)$ tale che

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \textit{per ogni } \mathbf{x} \in U$$

$$g_{x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{f_{x_j}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{f_y(x, g(\mathbf{x}))} \quad \textit{per ogni } \mathbf{x} \in U,\ j = 1, \ldots, n$$

22.12 Complementi

22.12.1 Topologia e funzioni continue

22.12.1.1 Proprietà delle successioni in $\mathbb{R}^n$

Nel caso unidimensionale si è mostrato in analisi 1 (complementi al capitolo 6 libro 1) il teorema di Bolzano Weierstrass in $\mathbb{R}$ che afferma

TODO: fixme

Proposizione 22.12.1. *Se $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ è una successione limitata, allora essa ammette una sottosuccessione convergente*

Osservazione 754. Un enunciato perfettamente analogo vale in $\mathbb{R}^n$

Teorema 22.12.2 (di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ una successione limitata. Allora essa ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Considerando per $n = 2$ (la generalizzazione al caso generale è immediata) sia $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$ una successione limitata in $\mathbb{R}^2$. Questo significa che le due successioni $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \mathbb{R}$ sono entrambe limitate. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass unidimensionale, da $\{x_k\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}_{h=1}^{\infty}$ convergente; consideriamo la sottosuccessione $\{y_{k_h}\}_{h=1}^{\infty}$ corrispondente ai medesimi indici; anche questa, essendo limitata, avrà una sottosuccessione convergente, sia essa $\left\{y_{k_{h_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$. Consideriamo la corrispondente successione $\left\{x_{k_{h_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$; poiché questa successione è estratta da $\{x_{k_h}\}_{h=1}^{\infty}$ che già era convergente, sarà ancora convergente. Abbiamo quindi individuato una sottosuccessione convergente

$$\left\{y_{k_{h_i}}, x_{k_{h_i}},\right\}_{i=1}^{\infty}$$

estratta da $\{y_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$ e il teorema è dimostrato □

Osservazione 755. Si rifletta sul motivo per cui non è stato possibile estrarre in un colpo solo la sottosuccessione convergente di $\{y_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$ applicando simultaneamente il teorema di Bolzano-Weierstrass alle successioni $\{x_k\}, \{y_k\}$. Il punto delicato della dimostrazione è tutto qui.

Osservazione 756. Questo teorema serve tra l'altro a provare la completezza di $\mathbb{R}^n$, alla quale premettiamo la seguente definizione

Definizione 22.12.1 (Successioni di Cauchy in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Si dice che la successione soddisfa la condizione di Cauchy (o semplicemente che è una successione di Cauchy) se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall h, j \geq n_0 \text{ si ha } \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon$$

o più brevemente $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon$ definitivamente.

Teorema 22.12.3 (Completezza di $\mathbb{R}^n$)**.** *Se $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$, allora converge*

TODO: fixme

Dimostrazione. per esercizio , utilizzando il teorema di Bolzano-Weierstrass sopra enunciato e seguendo la stessa linea dimostrativa usata per provare questo risultato per le successioni di numeri reali (volume1, cap 6, complementi) □

22.12.1.2 Proprietà topologiche delle funzioni continue

Definizione 22.12.2 (Uniforme continuità)**.** Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega, \text{ se } \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq \delta, \text{ allora } \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| < \varepsilon$$

Osservazione 757. La continuità uniforme implica la continuità, ma è una condizione più forte, in generale. Vale tuttavia, anche per le funzioni di più variabili, il seguente

Teorema 22.12.4 (di Cantor-Heine)**.** *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato e $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua in K*

Osservazione 758. In altre parole una funzione continua può violare la condizione di uniforme continuità solo se il suo insieme di definizione non è chiuso oppure non è limitato

Dimostrazione. La dimostrazione si può condurre sulla falsariga di quella dell'analogo teorema per le funzioni di una variabile, sfruttando ora il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$ □

Teorema 22.12.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uniformemente continua in Ω. Allora f è prolungabile con continuità fino alla frontiera di Ω, ossia esiste una funzione $\tilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua in $\overline{\Omega}$ e tale che in Ω coincide con f.*

22.12.2 Funzioni omogenee

Osservazione 759. Qui ci occupiamo di una particolare classe di funzioni per le quali è possibile stabilire criteri semplici per studiare la continuità e la differenziabilità in un punto, anche in presenza di forme di indeterminazione, che non richiedano l'utilizzo esplicito della definizione di limite in più variabili

Definizione 22.12.3 (Funzione positivamente omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$)**.** Funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (eventualmente definita solo per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) non identicamente nulla, per la quale

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{\alpha} f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \lambda > 0 \tag{22.45}$$

Definizione 22.12.4 (Funzione omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$)**.** Funzione per la quale la 22.45 vale anche per $\lambda < 0$.

Osservazione 760. In quest'ultimo caso però ci sono delle ovvie restrizioni ai valori ammissibili di α; a noi interesseranno solo funzioni omogenee di grado α intero.

Osservazione 761. Se f è omogenea, è anche positivamente omogenea; il viceversa non è vero, come mostreranno gli esempi

Esempio 22.12.1.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

è omogenea di grado 0; infatti

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda^2 (xy)}{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = 1 \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lambda^0 \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

per qualsiasi λ diverso da 0.

Esempio 22.12.2.

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^3 y}{x^2 + y^2}$$

è omogenea di grado 2

Esempio 22.12.3.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{3x - 5y}$$

è omogenea di grado 1/3

Esempio 22.12.4.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è *positivamente* omogenea di grado 1, ma non è omogenea. Infatti

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \left(\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2 (x^2 + y^2)\right)^{1/2} = |\lambda| \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

Ora è $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{x})$ se e solo se $\lambda = |\lambda|$, ossia $\lambda > 0$ (da qui il positivamente omogenea) e nel caso $\alpha = 1$.

Esempio 22.12.5.

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^5}$$

è omogenea di grado -8

Osservazione 762. La maggior parte delle funzioni, come ad esempio xe^y, $x+y^2$, $\sin(xy)$ non è omogenea di nessun grado

Osservazione 763. Tra le funzioni omogenee, rivestono una certa importanza i polinomi omogenei: un polinomio (in qualsiasi numero di variabili) è una funzione omogenea di grado α.

Esempio 22.12.6. $x^3yz + 4x^2z^3$ è un polinomio omogeneo di grado 5 (in 3 variabili)

Osservazione 764. Se una funzione f è positivamente omogenea, i suoi valori sono completamente determinati da quelli che f assume nei punti $\mathbf{x}$ di modulo unitario. Infatti, dall'identità

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\|\mathbf{x}\| \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) = \|\mathbf{x}\|^{\alpha} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \tag{22.46}$$

leggiamo che, per conoscere il valore di $f(\mathbf{x})$ è sufficiente conoscere il valore di $f(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)$; ma $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è un punto di modulo unitario e questo significa appunto che i valori di f nei punti di modulo unitario determinano tutti gli altri.

Osservazione 765. In particolare, se una funzione è omogenea (o positivamente omogenea) di grado zero, significa che è costante su ogni retta (rispettivamente, semiretta) uscente dall'origine. Infatti, indicata con $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{v}$ l'equazione parametrica della retta, con $\mathbf{v}$ versore fissato e $t \in \mathbb{R}$ sarà

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t\mathbf{v}) = t^0 f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) = \text{costante}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ se la funzione è omogenea (e in tal caso la funzione è costante sull'intera retta), per ogni $t > 0$ se la funzione è positivamente omogenea (e in tal caso la funzione è costante sulla semiretta).

Esempio 22.12.7. Riprendendo l'esempio $f(x, y) = \sqrt[3]{3x - 5y}$, passiamo alle coordinate polari:

$$f(\rho, \theta) = \rho^{1/3} \sqrt[3]{3\cos\theta - 5\sin\theta}$$

La funzione $g(\theta) = \sqrt[3]{3\cos\theta - 5\sin\theta}$ coincide con la funzione f se $\rho = 1$ e determina i valori di f in tutto il piano, una volta noto che f è omogenea di grado $1/3$.
Se per esempio sapessimo che un'altra funzione f coincide con f per $\rho = 1$ ed è omogenea di grado -2 avremmo necessariamente:

$$h(\rho, \theta) = \rho^{-2} \cdot \sqrt[3]{3\cos\theta - 5\sin\theta}$$

Osservazione 766. Più in generale, per una generica funzione di due variabili positivamente omogenea di grado α vale la seguente rappresentazione in coordinate polari

$$f(\rho, \theta) = \rho^{\alpha} f(1, \theta)$$

In altri termini, le funzioni omogenee di due variabili sono tutte e solo quelle che, in coordinate polari, si scrivono nella forma

$$f(\rho, \theta) = p^{\alpha} g(\theta)$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualche funzione

$$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$$

Le funzioni omogenee sono più semplici da studiare, rispetto alle altre, dal punto di vista della continuità e della differenziabilità. Vale infatti il seguente

Teorema 22.12.6. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione positivamente omogenea di grado α definita e continua per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Allora:*

1. *f è continua anche nell'origine se $\alpha > 0$; in questo caso $f(\mathbf{0}) = 0$; f è discontinua nell'origine se $\alpha < 0$; è discontinua anche se $\alpha = 0$, tranne il caso banale in cui f è costante*

2. *f è differenziabile nell'origine se $\alpha > 1$; non è differenziabile nell'origine se $\alpha < 1$ tranne il caso banale in cui $\alpha = 0$ e f è costante; se $\alpha = 1$, f è differenziabile se e solo se è una funzione lineare (ossia $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ per qualche vettore costante $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*

Dimostrazione. Bramanti pag 194 □

Esempio 22.12.8.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

è omogenea di grado 0 e non costante: è discontinua in $\mathbf{0}$ (ma limitata)

Esempio 22.12.9.

$$f(x,y) = \frac{x^4+3x^3y}{x^2+y^2}$$

è omogenea di grado 2; è differenziabile in $\mathbf{0}$

Esempio 22.12.10.

$$f(x,y) = \sqrt[3]{3x-5y}$$

è omogenea di grado 1/3; è continua ma non differenziabile in $\mathbf{0}$

Esempio 22.12.11.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

è *positivamente* omogenea di grado 1, ma non è omogenea e non lineare; è continua ma non differenziabile in 0

Esempio 22.12.12.

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^5}$$

è omogenea di grado -8; è discontinua in $\mathbf{0}$ (e illimitata in un intorno di $\mathbf{0}$)

Osservazione 767. Come si nota, il teorema precedente è uno strumento potente per decidere la continuità o la differenziabilità di una funzione omogenea senza dover ogni volta studiare esplicitamente un limite in più variabili.

Osservazione 768. Per una funzione che pur non essendo omogenea sia somma di funzioni omogenee di gradi diversi, si possono ripetere analoghi ragionamenti

Esempio 22.12.13. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^4+3x^3y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione è somma di un termine positivamente omogeneo di grado 1 (ma non lineare) e un termine omogeneo di grado 2, entrambi continui fuori dall'origine. In base al teorema visto, il primo addendo è una funzione continua ma non differenziabile in $(0,0)$, il secondo è una funzione differenziabile in $(0,0)$. Ne segue che f è una funzione continua ma non differenziabile in $(0,0)$

Osservazione 769. Da qui esempi svolti del bramanties 03 pag 273

Osservazione 770. Cogliamo l'occasione per ricordare anche il seguente risultato per *funzioni radiali* che useremo talvolta accanto ai risultati validi per funzioni omogenee

Teorema 22.12.7 (Criterio di continuità e differenziabilità per funzioni radiali)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ *una funzione radiale, cioè* $f(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)$ *con* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e sia* f *continua fuori dall'origine. Allora:*

1. f *è continua in* $\mathbf{0}$ *se e solo se esiste finito* $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho)$
2. f *è differenziabile in* 0 *se e solo se esiste* $g'(0) = 0$

Dimostrazione. Facile esercizio □

Esempio 22.12.14. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{3/5} y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- stabilire in quali punti del piano è derivabile calcolando esplicitamente le derivate in tal caso (semplificando le espressioni trovate)
- stabilire in quali punti del piano è differenziabile
- determinare il più grande insieme aperto A del piano in cui f è C^1

Rispettivamente

- osserviamo che, fuori dall'origine la funzione è certamente derivabile se $x \neq 0$ (notare che la funzione di una variabile $x^{3/5}$ non è derivabile per $x = 0$). Di più, possiamo osservare fin da subito che f è C^1 nell'aperto $\{x \neq 0\}$ (osservando la forma analitica della funzione e notando che è composta di funzioni elementari regolari, tranne che per $x = 0$) e quindi è certamente differenziabile in quell'aperto (condizione sufficiente di differenziabilità cap 3, 4.3, thm 3.8 .

  TODO: fixme

  Calcoliamo per $x \neq 0$

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{3}{5x^{2/5}} y^3 (x^2+y^2) - 2x(x^{3/5}y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3y^5 - 7x^2y^3}{5x^{2/5}(x^2+y^2)^2}$$

  mentre

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^{3/5}y^2(x^2+y^2) - 2y(x^{3/5}y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^{3/5}y^4 + 3x^{13/5}y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

  Nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ f non è derivabile (perché $x^{3/5}$ non è derivabile in $x = 0$).

In $(0,0)$ invece f è derivabile con derivate nulle perché è identicamente nulla sugli assi; esplicitamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,0))_{|x=0} = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$$

e analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

- per gli ultimi due quesiti: abbiamo già osservato che $f \in C^1(A)$ con $A = \{x \neq 0\}$ ed è perciò ivi differenziabile.
  Nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ f non è differenziabile perché non è derivabile.
  Rimane da studiare l'origine. È importante capire perché questo punto va studiato a paste. Da una parte l'origine non appartiene all'aperto in cui f è C^1, quindi non c'è un motivo ovvie per affermare che f è differenziabile; d'altro canto, la funzione nell'origine è derivabile (con derivate parziali nulle), quindi non c'è un motivo ovvio per affermare che non è differenziabile.
  In queste situazioni, solitamente occorre rimboccarsi le maniche e applicare la definizione di differenziabilità che coinvolge il calcolo di un limite in due variabili ed è quindi un po' delicata; in questo esercizio però siamo facilitati dal fatto che f è una funzione continua fuori dall'origine e omogenea di grado $1 + \frac{3}{5} > 1$. Infatti

  $$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{3+\frac{3}{5}-2} \frac{x^{3/5} y^3}{x^2 + y^2}$$

  Perciò per le proprietà delle funzioni positivamente omogenee, f è differenziabile nell'origine.

TODO: Altri esercizi bramanties 03 da pag 274?

22.12.3 Differenziali e formula di Taylor di ordine superiore al secondo

Bramanti pag 197

Capitolo 23

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

23.1 Introduzione

Definizione 23.1.1 (Funzioni di più variabili a valori vettoriali)**.** Sono funzioni del tipo

$$\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Definizione 23.1.2 (Funzioni componenti)**.** $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ può essere descritta come:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, m$ dette funzioni componenti di $\mathbf{f}$.

Osservazione 771. Molti esempi possono essere rappresentati da funzioni di questo tipo:

- superfici in forma parametrica nello spazio $\mathbb{R}^3$ e più in generale varietà k-dimensionali
- trasformazioni di coordinate in $\mathbb{R}^n$
- campi vettoriali

Qui iniziamo con una carrellata di esempi introduttivi

23.1.1 Superfici in forma parametrica

Si è visto come una curva piana in forma parametrica è una funzione che descrive una linea più generale di quella che può essere descritta come grafico di una funzione di una variabile (es circonferenza è rappresentabile come curva in forma parametrica, ma non come grafico di funzione).

Analogamente il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ è superficie in $\mathbb{R}^3$ ma non ogni superficie "ragionevole" può essere grafico di una funzione di due variabili: ad esempio una sfera non è il grafico di una funzione.

Per rappresentare una superficie come una sfera, un ellissoide ecc, si può utilizzare una *rappresentazione implicita* come

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

oppure una *rappresentazione parametrica* analogamente a quanto accade per le curve. Le tre coordinate del punto mobile sulla superficie dipenderanno questa volta da due parametri (u, v) coerentemente al fatto che un punto vincolato a muoversi su una superficie assegnata ha due gradi di libertà (può scegliere tra due direzioni ortogonali di moto)

L'oggetto matematico che otteniamo, detto *superficie in forma parametrica* è quindi una funzione

$$\mathbf{r} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in A$$

dove A è un'opportuna regione del piano $\mathbb{R}^2$

Esempio 23.1.1. La sfera di raggio R e centro l'origine ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = R \sin\varphi \cos\theta \\ y = R \sin\varphi \sin\theta \\ z = R \cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

Si noti che R è fissato, mentre i due parametri (φ, θ) sono corrispondenti, rispettivamente, alla *colatitudine* e alla longitudine

Osservazione 772 (Utilità delle equazioni parametriche). In seguito si vedranno vari utilizzi delle formule parametriche; fin d'ora si può osservare che le equazioni parametriche contengono un insieme di *istruzioni esplicite* con cui per esempio un computer può tracciare la superficie, unendo i punto (x, y, z) che corrispondono a un insieme abbastanza fitto di coppie (u, v). Per contro, non esiste alcun metodo semplice e generale per determinare il grafico di una superficie assegnata nella forma implicita $f(x, y, z) = 0$

Osservazione 773. Le superfici in forma parametrica che si vedranno in seguito sono un caso particolare del concetto più astratto e generale di varietà k-dimensionale in forma parametrica in $\mathbb{R}^n$ che si vedranno poi.

23.1.2 Trasformazioni di coordinate

Un esempio importante di funzioni $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (con dominio e codominio della stessa dimensione) è dato dalle trasformazioni di coordinate in $\mathbb{R}^n$

23.1.2.1 Coordinate polari nel piano

Il punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere individuato anche assegnandone le coordinate polari (ρ, θ) già utilizzato in precedenza. Ricordando che:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

rappresenta la distanza di (x, y) dall'origine e θ è l'angolo formato tra il vettore (x, y) e l'asse x orientato positivamente. Pertanto si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi)$$

Questa trasformazione di coordinate si può vedere come una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) = \mathbf{f}(\rho, \theta)$. Le coordinate polari sono utili per rappresentare insiemi o funzioni aventi qualche simmetria rispetto all'origine

23.1.2.2 Coordinate cilindriche nello spazio

Per descrivere insiemi o funzioni in $\mathbb{R}^3$ che abbiano qualche simmetria rispetto all'asse z sono utili le coordinate cilindriche (ρ, θ, t) per le quali si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con } \rho \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi),\ t \in \mathbb{R}$$

Questa trasformazione di coordinate si può vedere come una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

23.1.2.3 Coordinate sferiche nello spazio

Per descrivere insiemi o funzioni in $\mathbb{R}^3$ che abbiano qualche simmetria rispetto all'origine, sono utili le coordinate sferiche (ρ, θ, φ) per le quali si ha

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho > 0,\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi)$$

Anche queste si possono vedere come una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si noti che la funzione $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che si ottiene da questa fissando il valore della prima variabile ρ rappresenta la superficie della sfera di raggio ρ, in forma parametrica

23.1.3 Campi vettoriali

Esempio 23.1.2. Il modo di un fluido (per esempio l'acqua in canale) può esser descritto assegnando, istante per istante e punto per punto, la velocità della particella d'acqua che si trova in quell'istante in quel punto. La velocità, d'altro canto è un vettore a tre componenti, perciò sarà una funzione:

$$\mathbf{v}(t, x, y, z) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Il moto si dice *stazionario* se $\mathbf{v}$ non dipende da t; si dice *piano* se $\mathbf{v}$ ha solo le prime due componenti non nulle e il punto da cui dipende è specificato dalle due sole componenti (x, y). Un moto stazionario piano è quindi descritto da una funzione:

$$\mathbf{v}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

In questo caso (campo bidimensionale di due variabili) è possibile visualizzare in parte questa funzione disegnando un certo numero di vettori $\mathbf{v}(x, y)$, spiccati dai punti corrispondenti.

Un campo vettoriale è quindi una funzione che ad ogni punto dello spazio fisico (o dello spazio-tempo) assegna un vettore che può avere il significato di *velocità* o di *forza* agente nel punto assegnato. Gli spazi $\mathbb{R}^n$ dominio e codominio sono quindi pensati in modi differenti: il primo come spazio fisico (insieme di punti), il secondo come insieme di vettori.

23.2 Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Osservazione 774. Vogliamo ora definire i concetti di limite, continuità, differenziabilità per una funzione di più variabili a valori vettoriali. Si uniscono qui due fatti: le nozioni di limite, continuità, differenziabilità per funzioni reali di più variabili (studiate in precedenza) e il fatto che, in generale, per studiare una funzione a valori vettoriali si può ragionare componente per componente come avviene nel caso di funzioni vettoriali di variabile reale. Pertanto questo studio non introdurrà nuove difficoltà sostanziali rispetto a quanto nel capitolo delle funzioni reali di più variabili.

Definizione 23.2.1 (Limite)**.** Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita almeno in un intorno del punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso e sia $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

se

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| = 0$$

Osservazione 775. Analogamente a quanto visto nel capitolo delle funzioni vettoriali di variabile reale, si dimostra che il limite si calcola componente per componente, ossia

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = \left(\lim_{\mathbf{x} \to x_\mathbf{0}} f_1(\mathbf{x}), \ldots \lim_{\mathbf{x} \to x_\mathbf{0}} f_m(\mathbf{x}) \right)$$

Definizione 23.2.2 (Continuità in un punto)**.** Si ha che $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Definizione 23.2.3 (Continuità in un aperto)**.** Continuità in tutti i punti che compongono l'aperto

Proposizione 23.2.1 (Condizione di continuità)**.** *La funzione* $\mathbf{f}$ *è continua (in un punto o in un aperto) se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Proposizione 23.2.2 (Differenziabilità)**.** *La funzione* $\mathbf{f}$ *è differenziabile in* $\mathbf{x}_0$ *se tutte le componenti* f_i *lo sono, ossia fattivamente se per* $i = 1, \ldots, m$ *valgono le relazioni*

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \textit{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}$$

Osservazione 776. Si possono riscrivere queste m relazioni in forma compatta usando una notazione matriciale. A tal fine introduciamo la matrice Jacobiana.

Definizione 23.2.4 (Matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$)**.** Matrice $m \times n$, che ha per righe i gradienti delle componenti di $\mathbf{f}$ (calcolati nel punto $\mathbf{x}_0$):

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Osservazione 777. Se rappresentiamo la funzione $\mathbf{f}$ e i punti $\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ come vettori colonna delle loro componenti:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}$$

e facciamo uso della matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$, valutata in $\mathbf{x}_0$ possiamo riesprimere la differenziabilità come segue

Definizione 23.2.5 (Differenziabilità 2)**.** In termini matriciali la differenziabilità di $\mathbf{f}$ si esprime con la relazione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0} \tag{23.1}$$

dove:

- $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ denota il prodotto matriciale (righe per colonne) tra la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ calcolata in $\mathbf{x}_0$ e il vettore incremento $\mathbf{h}$ è viene chiamato differenziale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ valutato per la variazione $\mathbf{h}$;
- il simbolo $o(\|\mathbf{h}\|)$ indica ora un vettore che, diviso per $\|\mathbf{h}\|$, tende a zero per $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Definizione 23.2.6 (Differenziale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$)**.** È la funzione lineare $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$$

Osservazione 778. Ragionando componente per componente e applicando la condizione sufficiente per la differenziabilità delle funzioni a valori reali si vede che

Teorema 23.2.3. *Condizione sufficiente affinché una funzione $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A aperto, risulti differenziabile in A è che tutti gli elementi della sua matrice Jacobiana siano funzioni continue in A*

Osservazione 779. Questo criterio è quello che applicheremo di solito per garantire la differenziabilità di una funzione di più variabili a valori vettoriali, senza dover verificare direttamente la definizione.

Osservazione 780. Anche nel caso vettoriale, inoltre, è vero che se $\mathbf{f}$ è differenziabile, a maggior ragione è derivabile e continua (ma non vale il viceversa).

Osservazione 781. Naturalmente le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e le funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ rientrano come casi particolari nella definizione appena data di differenziabilità. Con le notazioni introdotte, per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la Jacobiana è semplicemente il gradiente di f scritto come *vettore riga*, mentre per una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ la Jacobiana è semplicemente il vettore derivato di $\mathbf{f}$ scritto come vettore colonna. (non c'è niente di assoluto nella convenzione assunta su come scrivere righe e colonne nella Jacobiana, quindi altri testi potrebbero usare altre convenzioni; tuttavia è comodo fissare una convenzione e attenersi sempre a quella).

Osservazione 782. La nozione di matrice Jacobiana permette di enunciare il teorema di differenziazione delle funzioni composte in un'unica forma generale

Teorema 23.2.4 (Differenziazione di funzione composta)**.** *Siano* $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *e supponiamo che la funzione composta* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *sia ben definita almeno in un intorno* C *di* $\mathbf{x}_0 \in A$.

Se $\mathbf{f}$ *è differenziabile in* $\mathbf{x}_0$ *e* $\mathbf{g}$ *è differenziabile in* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, *anche* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *è differenziabile in* $\mathbf{x}_0$ *e la sua matrice Jacobiana si ottiene come prodotto (matriciale) delle matrici Jacobiane di* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{g}$, *calcolate nei punti* $\mathbf{x}_0$ *e* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, *rispettivamente:*

$$\mathbf{D}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) = \mathbf{Dg}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \tag{23.2}$$

Osservazione 783. Operativamente la formula si usa così. Posto $\mathbf{z} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{f}$

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial z_j}{\partial y_h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial y_h}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \tag{23.3}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$.

23.3 Superfici regolari in forma parametrica

Abbiamo visto che una *superficie in forma parametrica* è una funzione

$$\mathbf{r} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in A$$

dove A è una opportuna regione del piano $\mathbb{R}^2$.

Vogliamo capire come si legge, dalla parametrizzazione di sopra, il fatto che la superficie sia regolare (es dotata in punti punto di un piano tangente). Analogamente a quanto visto per superfici che sono grafico di una funzione di più variabili, sarà opportuno richiedere innanzitutto che la funzione $\mathbf{r}$ sia differenziabile (nel senso visto nel paragrafo precedente)

Ora, se fissiamo uno dei parametri, per esempio v e facciamo variare u otteniamo una curva disegnata sulla superficie. Più precisamente al variare del valore fissato $v = v_0$ otterremo una famiglia di curve; fissando (in ogni modo possibile) $u = u_0$ otterremo un'altra famiglia di curve sulla superficie. Queste linee si chiamano *linee coordinate*: per ogni punto della superficie passa esattamente una curva di ciascuna delle due famiglie.

Le linee coordinato hanno equazioni

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$$

e

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$$

Il vettore tangente a una linea coordinata è dato rispettivamente da:

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$$

e da

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

(dove abbiamo posto $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$). Poiché stiamo assumendo $\mathbf{r}$ differenziabile, questi due vettori sono certamente ben definiti.

Il piano tangente, da un punto di vista geometrico, dovrebbe essere l'unico piano che contiene entrambi questi vettori. Tale piano risulta ben definito se i due vettori sono entrambi non nulli e inoltre non sono paralleli (diversamente, infiniti piani soddisfano la richiesta). Queste condizioni si esprimo sinteticamente chiedendo che il prodotto vettoriali dei due vettori non si annulli

TODO: qui mettere a posto la notazione dobrevve essere $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (23.4)$$

Questa condizione è algebricamente equivalente al fatto che la matrice Jacobiana di $\mathbf{r}$ abbia caratteristica (rango?) due (cioè massima). Arriviamo alla seguente

TODO: fixme

Definizione 23.3.1. Una superficie parametrizzata da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, si dice *regolare* se $\mathbf{r}$ è differenziabile in A e inoltre la matrice Jacobiana di $\mathbf{r}$ ha caratteristica due in ogni punto di A. Se in qualche punto di A le condizioni vengono violate, chiameremo *punti singolari della superficie* i punti corrispondenti

Esempio 23.3.1. Scriviamo la matrice Jacobiana della sfera di raggio R e centro nell'origine. Indicando con $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \theta)$ la sua rappresentazione parametrica si ha

$$\mathbf{D}\mathbf{r}(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

I tre determinanti 2×2 che si ottengono sono:

$$R^2 \sin\varphi\cos\varphi \quad R^2\sin^2\varphi\sin\theta \quad R^2\sin^2\varphi\cos\theta$$

Dagli ultimi due si vede che per $\sin\varphi \neq 0$ il punto è regolare (perché $\sin\theta$ e $\cos\theta$ non si annullano contemporaneamente); invece, per $\sin\varphi = 0$ si annullano tutti e tre i determinanti e il punto è singolare. Ciò accade per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, cioè (per il significati di φ) nei poli della sfera: i poli sono dunque punti singolari; al

di fuori di questi, la superficie è regolare.
Ovviamente la singolarità non dipende dalla sfera intesa come oggetto geometrico (i poli sono punti come gli altri), ma dalla parametrizzazione scelta. Tuttavia, e questo dipende proprio dalla forma della sfera, si può dimostrare che non esiste alcuna parametrizzazione globale della sfera per la quale tutti i punti siano regolari

Il vettore 23.4, la cui esistenza e non annullamento definisce il concetto di regolarità della superficie, ha un altro significato geometrico: per le proprietà del prodotto vettoriale, esso è ortogonale al piano che contiene in vettori $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$, cioè al piano tangente. Tale vettore può quindi dirsi *normale* alla superficie. Il suo versore prende il nome di versore normale

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

Si noti che il verso di $\mathbf{n}$ dipende dall'ordine in cui consideriamo i parametri (u, v) e quindi dall'ordine in cui effettuiamo il prodotto vettoriale.

Esempio 23.3.2. Per la sfera parametrizzata come nell'esempio precedente si ha

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}R^2 \sin^2\varphi\cos\theta + \mathbf{j}R^2\sin^2\varphi\sin\theta + kR^2\sin\varphi\cos\varphi}{R^2\sin\varphi} = \mathbf{i}\sin\varphi\cos\theta + \mathbf{j}\sin\varphi\sin\theta + \mathbf{k}\cos\varphi$$

(notare che per la sfera centrata nell'origine è $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Si osserva che questo versore punta verso l'esterno della sfera, in ogni punto: si dirà perciò versore normale uscente, o normale esterna alla sfera. Se avessimo considerato θ come primo parametro e φ come secondo, avremmo ottenuto un versore normale *entrante*, o interno, anziché uscente. Si dice *orientazione di una superficie* una scelta coerente di uno dei due versi del versore normale in ogni punto della superficie, quando ciò è possibile. Qualcosa di più su questo problema sarà detto del capitolo 6, paragrafo 4.1

TODO: fixme

Scriviamo ora l'equazione del *piano tangente* alla superficie. Se $\mathbf{x}(x, y, z)$ è il punto mobile sul piano tangente e $\mathbf{x}_0$ il punto in cui vogliamo calcolare il piano tangente, il vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ dovrà essere ortogonale a $\mathbf{n}$, quindi anche $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. L'equazione del piano tangente è dunque:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 0$$

ossia

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} = 0$$

Superfici cartesiane (grafico di funzioni di due variabili) Il grafico di $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ è una superficie che si può scrivere in forma parametrica nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in A$$

Perciò il vettore normale si calcola come segue

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{bmatrix} = -\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \tag{23.5}$$

Quindi l'orientazione indotta dalla superficie è con la normale verso l'alto.

Si noti che se f è differenziabile in A, il suo grafico è sempre una superficie regolare (la matrice Jacobiana ha sempre un minore 2×2 con determinante uguale a 1).

Nella formula 23.5 solitamente le variabili u, v si continuano a chiamare x, y come nell'esempio seguente.

Esempio 23.3.3. Il paraboloide ellittico

$$z = x^2 + y^2$$

ha versore normale

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

Superfici di rotazione

23.4 Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ e funzioni definite implicitamente

Le curve e le superfici regolari nello spazio tridimensionale sono casi particolari di un concetto geometrico molto più generale: nello spazio $\mathbb{R}^n$ (di dimensione qualunque) possiamo considerare quei sottoinsiemi che si possono vedere come oggetti geometrici curvi, regolari, di dimensione k tra 1 (caso delle curve in $\mathbb{R}^n$, già visto) e $n - 1$ (caso delle *ipersuperfici* in R^n).

Questi oggetti si chiamano k-varietà, o varietà k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$: una varietà k dimensionale si può definire sia in forma parametrica, mediante una funzione $\mathbf{r} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ sia in forma implicita mediante un sistema di $n - k$ equazioni in n variabili

23.5 Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ in forma parametrica

Definizione 23.5.1. Si dice varietà regolare k-dimensionale in forma parametrica immersa in $\mathbb{R}^n$ (con $1 \leq k \leq n - 1$) una funzione $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^k$ tale che $\mathbf{r} \in C^1(\Omega)$ e la matrice Jacobiana di $\mathbf{r}$ ha rango k in ogni punto di Ω.

Notiamo che per $k = 1$ ritroviamo la definizione di curva regolare in $\mathbb{R}^n$ mentre per $k = 2$ e $n = 3$ ritroviamo la definizione di superficie regolare parametrizzata in $\mathbb{R}^3$.

Nel caso particolare $k = n - 1$ (e $n > 3$) la varietà si dice ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$.

Dal punto di vista dell'intuizione geometrica, la varietà k-dimensionale è l'immagine della funzione $\mathbf{r}$ in $\mathbb{R}^n$, più che la funzione stessa (così come quando pensiamo a una curva pensiamo al suo sostegno in $\mathbb{R}^n$, più che alla funzione che la definisce). Coerentemente con questa intuizione, vedremo l'aperto Ω come lo spazio dei parametri e diremo per esempio che un punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, \ldots, u_k$ di $\mathbb{R}^n$ *appartiene* alla varietà o *giace* sulla varietà. Possiamo anche pensare alla varietà k-dimensionale come a un oggetto geometrico, in un spazio n dimensionale, su cui una particella si può muovere con k gradi di libertà.

Il significato geometrico della richiesta di rango k della matrice Jacobiana è allora il seguente.

Per ogni punto $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k) \in \Omega$, consideriamo il corrispondente punto $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{r}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k)$ sulla varietà. Consideriamo ora le k curve (in $\mathbb{R}^n$), tutte passanti per $\overline{\mathbf{x}}$ e tracciate sulla varietà, di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}(\overline{u}_1, \ldots, t, \ldots, \overline{u}_k) \quad i = 1, \ldots, k$$

con t al posto i-esimo, definite per t in un intorno di $\overline{u}_i$, rispettivamente. La richiesta di rango massimo della Jacobiana di $\mathbf{r}$ significa che i k vettori tangenti in $\overline{\mathbf{x}}$ alle k curve ora descritte sono tra loro linearmente indipendenti. Questo significa che queste k famiglie di curve costituiscono un buon sistema di "linee coordinate" tracciate sulla varietà

Esempio 23.5.1. In $\mathbb{R}^4$ la varietà 3-dimensionale definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\phi_1 \\ x_2 = R\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ x_3 = R\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \\ x_4 = R\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3\cos\phi_4 \end{cases}$$

dove $\phi_1, \phi_2 \in [0, \pi]$, $\phi_3 \in [0, 2\pi)$ rappresenta l'ipersfera di raggio R e centro l'origine. Infetti è un'ipersuperficie in $\mathbb{R}^4$ e i suoi punti soddisfano la relazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

perciò è il luogo dei punti avente distanza R dall'origine. Verifichiamo la regolarità calcolando la matrice Jacobiana

$$\begin{bmatrix} -R\sin\phi_1 & 0 & 0 \\ R\cos\phi_1\cos\phi 2 & -R\sin\phi_1\sin\phi_2 & 0 \\ R\cos\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 & R\sin\phi_1 cos\phi_2\cos\phi_3 & -R\sin\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3 \\ R\cos\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3 & R\sin\phi_1\cos\phi_2\sin\phi_3 & R\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \end{bmatrix}$$

Ora il determinante della matrice 3×3 corrispondente alle righe 1,2,3 è

$$-R^3\sin^3\phi_1\sin^2\phi_2\sin\phi_3$$

mentre il determinante della matrice 3×3 corrispondente alle righe 1,2,4 è

$$R^3\sin^3\phi_1\sin^2\phi_2\cos\phi_3$$

Il confronto tra i due mostra che se $\sin\phi_1 \sin\phi_2 \neq 0$ la caratteristica della matrice è 3. D'altro canto, se $\sin\phi_1 = 0$ la seconda e la terza colonna della matrice sono nulle e se $\sin\phi_2 = 0$ la terza colonna della matrice è nulla. In conclusione: la caratteristica della matrice Jacobiana è massima se e solo se

$$\sin\phi_1 \sin\phi_2 \neq 0$$

I punti singolari dell'ipersuperficie sono dunque quelli che corrispondono a $\sin\phi_1 = 0$ cioè

$$(\pm R, 0, 0, 0)$$

(ovvero i due poli dell'ipersfera), e quelli che corrispondono a $\sin\phi_2 = 0$ cioè

$$(R\cos\phi_1, \pm R\sin\phi_1, 0, 0), \quad \text{per } \phi_1 \in [0, \pi]$$

che rappresentano complessivamente i punti della circonferenza massima $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ sul piano $x_3 = x_4 = 0$.
Scopriamo così che in 4 dimensioni l'ipersfera in forma parametrica ha una intera circonferenza di punti singolari, e non solo i due poli come in 3 dimensioni.

23.5.1 Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni

Abbiamo visto (capitolo 3, paragrafo 8) che un'equazione **TODO**: fixme

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

sotto ipotesi ragionevoli definisce implicitamente una funzione

$$y = g(x_1, \ldots, x_n)$$

Più in generale potremmo avere un sistema di m equazioni in $n + m$ variabili e la domanda naturale è se in questo caso riusciamo a "risolvere il sistema" esplicitando m variabili (ossia tante quante sono le equazioni a nostra disposizione) in funzione delle rimanenti n. Nel caso di un sistema di equazioni lineari, questo problema è ben noto in algebra lineare e la sua soluzione è fornita dal teorema di Rouché-Capelli: se la matrice del sistema ha rango massimo (cioè m) si riescono effettivamente a esplicitare m variabili in funzione delle altre n. Nel caso non lineare, il meglio che si può sperare, in generale, è che sia possibile fare questo localmente, ossia nell'intorno di un punto in cui si sa che il sistema è soddisfatto; l'analogo dell'ipotesi di rango massimo della matrice del sistema lineare sarà un'ipotesi di rango massimo sulla matrice del sistema linearizzato, ossia sulla matrice Jacobiana del sistema non lineare.

Arriviamo così a formulare una versione del teorema di Dini per sistemi di equazioni. Fissiamo anzitutto un po' di notazioni compatte. Scriviamo un sistema di m equazioni in $n + m$ variabili nella forma vettoriale:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

dove $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Denotiamo con $\mathbf{D_y f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ la matrice Jacobiana della funzione

$$\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$

calcolata nel punto $\mathbf{y}_0$, ossia la matrice $m \times m$ di elementi $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$ e con $\mathbf{D_x f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ la matrice Jacobiana della funzione

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$$

calcolata nel punto $\mathbf{x}_0$, ossia la matrice $m \times n$ di elementi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$

Teorema 23.5.1 (di Dini, della funzione implicita: caso generale)**.** *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^{n+m}$, $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(A)$ e supponiamo che nel punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ sia*

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0; \det \mathbf{D_y f}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 e un'unica funzione $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $g \in C^1(U)$, tale che, per ogni $\mathbf{x} \in U$

TODO: check grassetti qui, sull'=0

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$$

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D_y f}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{D_x f}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \tag{23.6}$$

Si noti che il calcolo della matrice Jacobiana della funzione implicita richiede il calcolo della matrice inversa della Jacobiana $\mathbf{D_y f}$, è quindi più laborioso rispetto al caso scalare.

Osservazione 784. Anche questo teorema, come il suo analogo scalare, ha un significato eminentemente teorico: non aiuta a scrivere esplicitamente la funzione implicita, ma a dimostrare che essa esiste, è unica e ha una certa regolarità.

Esempio 23.5.2. Consideriamo il sistema di due equazioni

$$x^2 + y^2 = 1 x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Il significato geometrico del sistema è: trovare l'intersezione tra il cilindro circolare che ha asse sull'asse z e raggio 1 (prima equazione) e l'ellissoide che ha centro l'origine, assi sugli assi coordinati, di lunghezze 1,2,2 rispettivamente (seconda equazione). Notiamo che soddisfano il sistema, per esempio, i punti:

$$(1, 0, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1, \sqrt{3})$$

Ci aspettiamo che l'intersezione delle due superfici consista di una o più curve più o meno regolari. Rappresentando il sistema in forma compatta come $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}$, scriviamo la matrice Jacobiana

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{bmatrix}$$

Si ha

$$\mathbf{Df}(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{di rango 1}$$

$$\mathbf{Df}(0, 1, \sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{di rango 2}$$

DO: fixme

Cominciamo dal punto $A(0,1,\sqrt{3})$. In base al teorema 4.3 , in un suo intorno è possibile esplicitare y e z in funzione di x, rappresentando così la linea di intersezione tra ellissoide e cilindro come curva regolare parametrizzata. In questo caso è anche possibile risolvere esplicitamente il sistema, ottenendo

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ z = \sqrt{3(1-x^2)} \end{cases}$$

per (x,y,z) in un intorno di $(0,1,\sqrt{3})$. Invece nel punto $B = (1,0,0)$ il teorema non è applicabile: l'intersezione tra le due superfici in un intorno di quel punto non è univocamente rappresentabile come curva regolare. Infatti questa intersezione consiste di due linee regolari che si intersecano proprio nel punto $B(1,0,0)$ figura? si si come no . Come mai il procedimento usato sopra per risolvere manualmente il sistema nell'intorno di $(0,1,\sqrt{3})$ fallisce in un intorno di $(1,0,0)$

TODO: fixme

23.5.2 Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ in forma implicita

Proseguendo il discorso iniziato nel paragrafo 4.1 , diamo ora la definizione di varietà k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ in forma cartesiana implicita. Il teorema della funzione implicita per i sistemi, appena dimostrato, consentirà di mettere in evidenza il nesso tra questo concetto e quello di varietà k-dimensionale in forma parametrica, introdotto nel paragrafo 4.1 .

TODO: fixme

TODO: fixme

Definizione 23.5.2. Si dice varietà k-dimensionale in forma implicita, immersa in $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme (non vuoto) di $\mathbb{R}^n$ del tipo:

$$M = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega to \mathbb{R}^{n-k}$, $f \in C^1(\Omega)$ e il rango di $\mathbf{Df}$ è uguale a $n-k$ in ogni punto di Ω. La varietà si dirà di classe C^m (per qualche intero $m \geq 1$) se, inoltre, $f \in C^m(\Omega)$; si dirà di classe C^∞ se è di classe C^m per ogni intero m

Esempio 23.5.3. Si noti che se $k = n-1$ la funzione f ha valori reali; in questo caso M è definita da un'unica equazione in n variabili: parliamo allora di *ipersuperficie in forma cartesiana implicita*; nel caso $n = 3$ si ha semplicemente una superficie in forma cartesiana implicita con la sfera in $\mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Esempio 23.5.4. Se $n = 3$, $k = 1$ abbiamo due equazioni in tre variabili che, se la condizione di rango è soddisfatta, individuerà una curva in forma cartesiana implicita (vista come intersezione di due superfici cartesiane), come nell'esempio 4.2

TODO: fixme

Se M è una varietà k-dimensionale in forma implicita e $\mathbf{x}_0$ è un punto qualsiasi di M cioè tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, l'ipotesi sul rango di $\mathbf{Df}$ consente di applicare il teorema della funzione implicita per i sistemi (dimostrato nel paragrafo 4.2) ed affermare che, posto

TODO: fixme

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0), \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^k, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$$

si può garantire l'esistenza di un intorno $U \subset \mathbb{R}^k$ di $\mathbf{u}_0$ e un'unica funzione $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, tale che $g \in C^1(U)$ e

TODO: check grasse

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{g}(\mathbf{u})) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in U$$

Questo significa che la varietà M ha coordinate esprimibili in funzione di esattamente k parametri $u_1, \ldots, u_k$. In altre parole, localmente, la varietà M si può vedere come varietà k-dimensionale in forma parametrica descritta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ \ldots \\ x_k = u_k & \text{per } (u_1, \ldots, u_k) \in U \\ x_{k+1} = g_1(u_1, \ldots, u_k) \\ \ldots \\ x_n = g_{n-k}(u_1, \ldots, u_k) \end{cases}$$

Esempio 23.5.5 (Varietà delle configurazioni di un corpo rigido)**.** Vogliamo descrivere lo spazio delle configurazioni possibili di un corpo rigido. La posizione di un corpo rigido nello spazio è individuata quando sono assegnate le posizioni di 3 suoi punti, purché non allineati. Dunque fissati 3 punti del corpo rigido $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ non allineati, di coordinate

$$\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, 3$$

ogni posizione del corpo sarà esprimibile mediante le 9 coordinate dei tre punti p_i, ossia: ogni posizione del corpo rigido è individuabile con un punto di $\mathbb{R}^9$. Non ogni punto di $\mathbb{R}^9$ individua però una posizione del corpo rigido: infatti, le coordinate dei 3 punti sono sottoposti al vincolo di avere mutue distanze fissate. In altre parole, proprio perché il corpo è rigido si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| &= a \\ \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3\| &= b \\ \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3\| &= c \end{aligned}$$

con a, b, c opportune costanti. Imponendo questi vincoli esplicitamente, si scrivono le tre equazioni:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = b^2 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = c^2 \end{cases}$$

Questo sistema può scriversi in forma vettoriale come un'equazione $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ con $\mathbf{f} : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbf{f}$ è infinitamente derivabile). Si noti che ad ogni 9-upla di numeri reali che soddisfa queste tre equazioni corrisponde una configurazione del corpo rigido. Dunque lo spazio delle configurazioni del corpo rigido è identificabile con il sottoinsieme M di $\mathbb{R}^9$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Se si scrive la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ si può constatare che, dall'ipotesi che $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ siano punti non allineati, segue che la matrice ha in ogni punto rango massimo, cioè 3. (Si lascia questa verifica al lettore). Ne concludiamo che lo spazio M delle configurazioni di un corpo rigido è una varietà 6-dimensionale (in forma implicita), immersa in R^9 di classe C^∞. Con linguaggio fisico, diciamo che il corpo rigido ha 6 *gradi di libertà*.

23.6 Trasformazioni di coordinate e loro inversione

23.6.1 Il teorema della funzione inversa

Abbiamo visto nel paragrafo 1.2 che una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si può vedere come una trasformazione di coordinate nello spazio $\mathbb{R}^n$. Ci interessa stabilire delle condizioni sotto le quali questa trasformazione è invertibile (requisito necessario per poter utilizzare questa funzione come trasformazione di coordinate). **TODO**: fixme

Sappiamo dall'algebra lineare che una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si rappresenta nella forma

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

per una certa matrice $\mathbf{A}$ $n \times n$ e risulta invertibile se e solo se $\det \mathbf{A} \neq 0$ (teorema di Cramer). In questo caso, anzi, è invertibile globalmente.

Nel caso di una funzione generica (ossia non lineare) $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{f} \in C^1(A)$ per qualche aperto $A subseteq \mathbb{R}^n$ non potremo sperare in generale di avere un risultato di invertibilità globale, come vedremo con gli esempi. Ci si può aspettare però che, quando il differenziale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ (che è la miglior approssimazione lineare di $\mathbf{f}$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$) è invertibile, cioè quando la matrice Jacobiana di $\mathbf{f}$ calcolata in $\mathbf{x}_0$ è invertibile, $\mathbf{f}$ risulti invertibile almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$. È questo il contenuto del prossimo teorema, che come vedremo segue dal teorema sulla funzione implicita che abbiamo enunciato nel paragrafo 4.2 . **TODO**: fixme

Ricordiamo prima che:

Definizione 23.6.1. Una funzione $\mathbf{f} : A \to B$ (A, B aperti di $\mathbb{R}^n$) si dice invertibile in A se è iniettiva, ossia se per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

f si dice suriettiva su B se per ogni $\mathbf{y} \in B$ esiste $\mathbf{x} \in A$ tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ si dice *biiettiva*, o *biunivoca* tra A e B se è iniettiva e suriettiva, ossia se per ogni $\mathbf{y} \in B$ esiste uno e un solo $\mathbf{x} \in A$ tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
In tal caso, la corrispondenza che associa ad ogni $\mathbf{y} \in B$ questo elemento $\mathbf{x} \in A$ univocamente determinato si dice *funzione inversa* di f.

Notiamo che se scegliamo $B = f(A)$ la funzione $\mathbf{f}$ risulta automaticamente suriettiva; perciò se $\mathbf{f}$ è iniettiva, la funzione inversa può essere sempre definita (con dominio $\mathbf{f}(A)$)

Teorema 23.6.1. *Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con A aperto, tale che $\mathbf{f} \in C^1(A)$. Supponiamo che per un dato punto $\mathbf{x}_0 \in A$ sia*

$$\det \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \neq 0 \tag{23.7}$$

Allora esistono un intorno U di $\mathbf{x}_0$ e un intorno V di $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ è biunivoca; inoltre, detta $\mathbf{g}: V \to U$ la corrispondenza inversa; si ha che $g \in C^1(V)$ e

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{Df}(\mathbf{x})^{-1}, \quad \textit{per ogni } \mathbf{x} \in U$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\mathbf{F} : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$$

Risulta $\mathbf{F} \in C^1(A \times \mathbb{R}^n)$; posto $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \det \mathbf{D_x F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$$

TODO: fixme

Perciò per il teorema di Dini per i sistemi (teorema 4.3) esiste un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{y}_0$ ed esiste un'unica funzione $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{g} \in C^1(V)$ e

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in V$$

e cioè

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{per ogni } \mathbf{y} \in V$$

Inoltre per ogni $\mathbf{y} \in V$

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{y}) = -\mathbf{D_x F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})^{-1} \mathbf{D_y F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))^{-1} \tag{23.8}$$

Poniamo $U = \mathbf{g}(V)$. L'insieme U contiene $\mathbf{x}_0 = g(\mathbf{y}_0)$ (per l'unicità di $\mathbf{g}$). Proviamo che

1. $\mathbf{f}(U) \subseteq V$. Infatti, se $\mathbf{x} \in U$, per definizione di U esiste $\mathbf{y} \in V$ tale che $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ e poiché
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$$
si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V$

2. $\mathbf{f}$ è iniettiva in U: infatti se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, allora esistono $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ tali che $\mathbf{g}(\mathbf{y}_i) = \mathbf{x}_i$ per $i = 1, 2$. D'altro canto
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \implies \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}_1)) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}_2)) \implies \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 \implies \mathbf{g}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_2) \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

3. $\mathbf{f}$ è suriettiva su V: infatti se $\mathbf{y} \in V$, posto $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ si ha che $\mathbf{x} \in U$ per definizione di U e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$.

TODO: fixme

Concludiamo che la funzione $\mathbf{f}$ è biounivoca tra U e V, $\mathbf{g}$ è la funzione inversa di $\mathbf{f}$ ristretta ad U e vale la 5.2 .
Osserviamo tuttavia che nulla garantisce che U sia un insieme *aperto* e quindi che sia un intorno di $\mathbf{x}_0$ (mentre per definizione V è un intorno di $\mathbf{y}_0$). La dimostrazione di questo fatto in effetti è un po delicata e la omettiamo. Fatta salva questa precisazione, la dimostrazione è completa. □

Esempio 23.6.1. Si consideri la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

chiaramente è $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo la matrice Jacobiana:

$$\mathbf{Df}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

Si ha

$$\det \mathbf{Df}(x, y) = e^{2x} \neq 0 \text{ per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Il teorema di invertibilità locale garantisce quindi che per ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno U di (x_0, y_0) in cui $\mathbf{f}$ è invertibile. Tuttavia, questo non consente di concludere che $\mathbf{f}$ sia invertibile globalmente; infatti per esempio:

$$\mathbf{f}(x, y + 2\pi) = \mathbf{f}(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

perciò la funzione non è iniettiva in tutto $\mathbb{R}^2$

Osservazione 785 (Invertibilità locale e globale)*.* Riflettiamo sul caso unidimensionale. Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1(a, b)$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, la funzione f' ha segno costante (se cambiasse di segno, per il teorema degli zeri dovrebbe anche annullarsi in almeno un punto, essendo una funzione continua); ma allora f è strettamente monotona in (a, b) e quindi è invertibile in tutto (a, b).

Osservazione 786*.* In altre parole, nel caso unidimensionale se le ipotesi del teorema di invertibilità locale sono soddisfatte in ogni punto di un intervallo aperto, la funzione è invertibile anche globalmente in quell'intervallo

Invece (come mostra l'esempio precedente), in dimensione maggiore di 1, anche se le ipotesi del teorema di invertibilità locale sono soddisfatte in ogni punto del dominio, la funzione può non essere invertibile globalmente; tutto ciò che si può affermare in questo caso è che ogni punto ha un intorno in cui la funzione è invertibile, il che si esprime anche dicendo che la funzione in ogni punto è *localmente invertibile*

Il teorema e l'osservazione precedente giustificano la prossima

Definizione 23.6.2. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una trasformazione di coordinate $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^n$ si dice *diffeomorfismo* (o anche diffeomorfismo globale) se $f \in C^1(A)$, $\mathbf{f}$ è globalmente invertibile in A e la sua funzione inversa $\mathbf{g} : \mathbf{f}(A) \to A$ è C^1 nel suo dominio $\mathbf{f}(A)$; si dice *diffeomorfismo locale* se $\mathbf{f} \in C^1(A)$ e ogni punto $\mathbf{x}_0 \in A$ ha un intorno $U \subset A$ in cui $\mathbf{f}$ è invertibile, con inversa C^1

Il teorema di inversione locale garantisce che una trasformazione di coordinate $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{f} \in C^1(A)$ e $\det \mathbf{Df}(\mathbf{x}) \neq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$ è un diffeomorfismo locale in A. Se queste condizioni sono soddisfatte con l'eccezione di qualche punto di A, questi punti si diranno *punti singolari* della trasformazione

Non ci sono condizioni altrettanto semplici, invece, che garantiscano che $\mathbf{f}$ sia un diffeomorfismo globale.

Riprendiamo ora gli esempi di trasformazioni di coordinate nel piano e nello spazio che abbiamo introdotto in precedenza e verifichiamone la regolarità

Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$ TODO?

Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ TODO?

Invarianza della dimensione Concludiamo il paragrafo con la seguente osservazione: il lettore potrebbe essersi chiesto come mai il problema dell'invertibilità locale di una funzione sia stato posto per trasformazioni di coordinate $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e non, più in generale, per funzioni $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con n e m diversi tra loro. È abbastanza intuitivo che non possano esserci funzioni regolari e biunivoche tra due spazi di dimensione diversa, ma si può dare una formulazione precisa a questo asserto e dimostrarlo? Vale il seguente

Teorema 23.6.2 (di Brower)**.** *Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}: A \to \mathbb{R}^n$ è continua e iniettiva in A, allora $\mathbf{f}(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ è biunivoca tra A e $\mathbf{f}(A)$ e $\mathbf{f}$ ha inversa continua*

Osservazione 787. L'ipotesi di iniettività nel teorema precedente è fondamentale. Si osservi infatti che una funzione continua non trasforma aperti in aperti (ne chiusi in chiusi) come mostra il seguente esempio

Esempio 23.6.2. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Questa funzione è continua; non è iniettiva (perché è pari); $A = \mathbb{R}$ è aperto, tuttavia $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ non è aperto

TODO: fixme

Non è difficile dimostrare (provare) che dal teorema precedente segue il seguente

Corollario 23.6.3. *Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, B un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{f}: A \to B$ è una funzione continua, biunivoca tra A e B, con inversa continua, allora $n = m$*

Questo è il motivo per cui non ci si pone neppure il problema dell'invertibilità di una funzione regolare tra due spazi di dimensione diversa.

Si osservi che il teorema di Brower (come il suo corollario) riguarda funzioni *continue*, non necessariamente regolari; si tratta di un teorema di natura essenzialmente *topologica* (e non di calcolo differenziale), dalla dimostrazione profonda, Notiamo anche che, da questo teorema, il punto che nella nostra dimostrazione del teorema di invertibilità locale non è stato provato (ossia il fatto che $U = \mathbf{g}(V)$ sia aperto) segue subito

23.6.2 Trasformazione di operatori differenziali

Come si trasforma un operatore differenziale eseguendo una trasformazione di coordinate? Sia, per esempio

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

una trasformazione regolare di coordinate nel piano e sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile. Sotto l'azione della trasformazione di coordinate, f diventerà funzione di u, v e, per il teorema sul differenziale di una funzione composta, si può scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial v}$$

L'utilità delle trasformazioni di coordinate nello studio degli operatori differenziali è illustrato nel prossimo esempio

Esempio 23.6.3. TODO esempio fisico

23.7 Ottimizzazione. Estremi vincolati

23.7.1 Vincoli di uguaglianza e moltiplicatori di Lagrange. Funzioni di due variabili

In molti problemi di ottimizzazione, le variabili indipendenti sono soggette a vincoli di vario tipo. Oltre a quelli già introdotti in capitolo 3 paragrafo 6.1 vediamo un altro esempio

TODO: fixme

Esempio 23.7.1 (Produzione sotto vincolo di budget)**.** Consideriamo un sistema microeconomico in cui i fattori di produzione siano il capitale K e il lavoro L. Sia $Y = Q(K, L)$ la funzione di produzione, dove K, L (positivi) sono misurati in euro, mentre Y, quantità prodotta, è misurata in relazione al bene prodotto.

Un problema economicamente interessante è massimizzare Y soddisfacendo un vincolo sui fattori produttivi, un budget $b > 0$ con cui acquistare i servizi di capitale e lavoro. Se una unità di capitale costa p_{cap} e una di lavoro costa p_{lav} la spesa per l'acquisto della combinazione (K, L) costa $Kp_{cap} + Lp_{lav}$.

Supponiamo che la spesa non possa eccedere il budget: ci troviamo di fronte al problema di determinare quali coppie (K^*, L^*) massimizzano Y nel rispetto della condizione di budget $Kp_{cap} + Lp_{lav} \leq b$

Ovviamente non conviene sottoutilizzare il budget quindi la coppia ottimale soddisferà $Kp_{cap} + Lp_{lav} = b$. Il problema che interessa risolvere è dunque

$$\begin{cases} \max Y \\ sub \\ Kp_{cap} + Lp_{lav} = b \end{cases}$$

Osservazione 788. Formalizziamo ora un problema di estremo vincolato, incominciando dal caso in cui la *funzione obiettivo* f (da ottimizzare) dipenda da due variabili legate da una equazione di *vincolo* (per semplicità ci limitiamo a considerare funzioni definite in tutto il piano)

Date due funzioni $f = f(x, y)$ e $g = g(x, y)$ dotate di derivate parziali continue in $\mathbb{R}^n$ si vogliono determinare gli estremi di f sotto la condizione di vincolo $g(x, y) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Scriviamo

$$\begin{cases} \max Y \\ sub \\ Kp_{cap} + Lp_{lav} = b \end{cases} \qquad \begin{cases} \min Y \\ sub \\ Kp_{cap} + Lp_{lav} = b \end{cases}$$

a seconda che si tratti di un problema di massimo o di minimo vincolato rispettivamente.

Il significato geometrico del problema (ad es di *massimo* vincolato) è illustrato in figura 4.17 : come esemplifica la figura, un punto di massimo per $f(x, y)$ soggetta a vincolo $g(x, y) = b$ non è necessariamente un punto di massimo, neppure locale, per $f(x, y)$ come funzione in $\mathbb{R}^2$: non si tratta di determinare gli estremi liberi e poi vedere se qualcuno di essi cade sulla curva descritta dal vincolo, ma di massimizzare (o minimizzare) la restrizione di f al vincolo (che è una funzione diversa da f)

TODO: fixme

La situazione più favorevole è quella in cui l'equazione di vincolo $g(x, y) = b$ definisce esplicitamente $y = y(x)$ o $x = x(y)$ oppure, più in generale, definisce una curva γ di equazioni parametriche $x = x(t), y = y(t)$, $t \in I$ dove I è un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$.

Il problema è allora ricondotto alla ricerca degli estremi della funzione reale di variabile reale

$$\phi(t) = f(x(t), y(t))$$

nell'intervallo I. In questo caso si dice che il vincolo è *esplicitabile*

Esempio 23.7.2 (Vincolo esplicitabile)**.** Riprendiamo il problema del massimo prodotto scegliendo come funzione di produzione la seguente (detta di Cobb-Douglas):

$$Y = aK^\alpha L^{1-\alpha} \qquad a > 0, 0 < \alpha < 1$$

Il problema è dunque

$$\begin{cases} \max aK^\alpha L^{1-\alpha} \\ sub \\ Kp_{cap} + Lp_{lav} = b \end{cases}$$

Ci si riconduce senza indugio a un problema di massimo libero per una funzione di una variabile, ricavando dal vincolo

$$K = \frac{b - Lp_{lav}}{p_{cap}}$$

e riscrivendo Y come funzione della sola variabile L

$$Y = h(L) = a\left(\frac{b - Lp_{lav}}{p_{cap}}\right)^\alpha L^{1-\alpha} = \frac{a}{p_{cap}^\alpha}(b - Lp_{lav})^\alpha L^{1-\alpha}$$

Si tratta perciò di massimizzare la funzione $h(L)$ nell'intervallo $0 < L < b/p_{lav}$. Uguagliando a zero h' si trova l'equazione:

$$-\alpha p_{lav}(b - Lp_{lav})^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + (1-\alpha)(b - Lp_{lav})^\alpha L^{-\alpha} = 0$$

ossia semplificando

$$-\alpha p_{lav}L + (1-\alpha))(b - Lp_{lav}) = 0$$

che da, per L e successivamente per K, i valori di ottimo

$$L^* = \frac{b(1-\alpha)}{p_{lav}}, K^* = \frac{b\alpha}{p_{cap}}$$

Questo è effettivamente un punto di massimo, come si vede facilmente dal cambiamento di segno di h' in L^*

Al lettore non sarà sfuggito che il metodo seguito è praticabile solo in presenza di vincoli amatoriali, che si lasciano esplicitare rispetto all'una o all'altra variabile. Ciò accade raramente, soprattutto nel caso che tratteremo più avanti, in cui le variabili sono più di due, in presenza di più di un vincolo.

Presentiamo quindi un metodo più generale, noto come metodo dei *moltiplicatori di Lagrange* che funziona quando il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi forma: parametrica, cartesiana esplicita o più in generale implicita.

Per illustrare il metodo, facciamo un'analogia con la strada percorsa nel caso dell'ottimizzazione libera: in quel caso abbiamo innanzitutto cercato di stabilire una condizione necessaria, del prim'ordine, affinché un punto (x^*, y^*) fosse di estremo.
Tale condizione, espressa dal teorema di Fermat, indica che in un punto di estremo il gradiente della funzione obiettivo si deve annullare. Ciò è ragionevole poiché in un problema di ottimizzazione libera, dal punto (x^*, y^*) ci si può muovere in ogni direzione pur di rimanere in un suo intorno. In altri termini, il teorema di Fermat afferma che le derivate lungo ogni direzione ammissibile si devono annullare. In un problema vincolato, tuttavia, se ci si muove da un punto di estremo lungo le direzioni parallele agli assi, in generale non si rispetta il vincolo e perciò le variazioni della funzione obiettivo lungo tali direzioni sono non ammissibili.

Quale direzione è ammissibile? Quali derivate direzionali devono annullarsi?

Sia (x^*, y^*) punto di estremo per la funzione $f$sotto il vincilo $g(x, y) = b$. Supponiamo che vicino a (x^*, y^*) il vincolo sia descritto da un arco di curva regolare, con retta tangente in (x^*, y) nella direzione del versore v. Ragioniamo come i pionieri del calcolo infinitesimale: se ci muoviamo in un intorno infinitesimale del punto (x^*, y^*) l'unica direzione ammissibile lungo cui muoversi è proprio la retta tangente, per cui la derivata direzionale di f nella direzione $\mathbf{v}$ dovrà annullarsi e cioè:

$$D_{\mathbf{v}} f(x^*, y^*) = 0$$

Per la formula del gradiente, ciò significa:

$$\nabla f(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{23.9}$$

che esprime l'ortogonalità tra i vettori $\nabla f(x^*, y^*)$ e $\mathbf{v}$

Questo è l'analogo del teorema di Fermat. Nel prossimo teorema, formalizziamo il ragionamento euristico appena fatto e traduciamo la 23.9 in forma più operativa

Teorema 23.7.1 (Moltiplicatori di Lagrange)**.** *Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e (x^*, y^*) punto di estremo vincolato per f sotto il vincolo*

$$g(x, y) = b$$

Se (x^*, y^*) è regolare per il vincolo, cioè $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$, allora esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}$ (detto moltiplicatore di Lagrange) tale che

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*) \tag{23.10}$$

Dimostrazione. Poiché (x^*, y^*) è un punto di estremo vincolato, si ha in particolare $g(x^*, y^*) = b$. Poiché inoltre $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ il teorema di Dini implica che in un intorno di (x^*, y^*) il vincolo $g(x,y) = b$ definisce un arco di curva regolare. Sia $x = x(t)$, $y = y(t)$ una parametrizzazione di tale arco con $x(0) = x^*$ e $y(0) = y^*$. Il vettore

$$\mathbf{v} = (x'(0), y'(0))$$

è non nullo e tangente al vincolo.

Consideriamo la restrizione di f sull'arco di curva, data dalla funzione $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$. Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e l'arco di curva è regolare, la funzione φ è derivabile in un intorno di $t = 0$ e

$$\varphi(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Ora il fatto che f abbia un estremo vincolato in (x^*, y^*) equivae ad affermare che φ ha un minimo (libero) in $t = 0$. Deve dunque essere $\varphi'(0) = 0$ ovvero

$$f_x(x^*, y^*)x'(0) + f_y(x^*, y^*)y'(0) = \nabla f(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ricordando ora che anche il vettore $\nabla g(x^*, y^*)$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ (vedi l'osservazione fatta sull'ortogonalità del gradiente con le curve di livello, capitolo 3, paragrafo 4.5) concludiamo che i due vettori $\nabla f(x^*, y^*)$ e $\nabla g(x^*, y^*)$ devono essere paralleli, ossia che deve esistere un numero λ^* tale che

TODO: fixme

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$$

□

Ribadiamo che la 23.10 esprime il fatto che se (x^*, y^*) verifica le ipotesi del teorema, allora la derivata di f lungo la tangente al vincolo si deve annullare, ed in tal caso diciamo che (x^*, y^*) è punto critico vincolato. È questa la corretta generalizzazione del teorema di Fermat al caso degli estremi vincolati

Osservazione 789. Introducendo la funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$, detta Lagrangiana definita da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$$

il teorema afferma che se (x^*, y^*) è punto di estremo vincolato, allora eisste λ^* tale che il punto (x^*, y^*, λ^*) sia punto critico libero per $\mathcal{L}$. Infatti i punti critici di $\mathcal{L}$. Infatti i punti critici di $\mathcal{L}$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = b - g = 0 \end{cases} \tag{23.11}$$

Le prime due equazioni coincidono con la 23.10 mentre la terza esprime la condizione di vincolo

La teoria sviluppata indica il seguente modo di procedere, noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:

1. si isolano gli eventuali punti non regolari dell'insieme $g(x, y) = b$ che vanno esaminati a parte

2. si cercano i punti critici liberi della Lagrangiana e cioè le soluzioni del sistema 23.11

3. si determina la natura dei punti critici. A questo proposito risulta spesso utile il teorema di Weierstrass, come si vede nel seguente esempio

Esempio 23.7.3. Si vogliono determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = xy$ soggetti al vincolo[1]

$$g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

Le funzioni f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e non vi sono punti singolari in $g(x,y) = 0$. La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

I punti critici sono soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = y - 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = x - 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$(1,1,1), \quad (-1,-1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1,1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

Dunque vi sono quattro punti critici vincolati: $\mathbf{p}_0 = (1,1)$, $\mathbf{p}_1 = (-1,-1)$, $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)$, $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1)$.

Ora essendo $E_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$ un insieme chiuso e limitato ed f continua, il teorema di Weierstrass[2], assicura l'esistenza di un punto di massimo e uno di minimo. Poiché $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$ e $f(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -1/3$ si deduce che $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ sono punti di massimo globali e $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ di minimo globali.

Il teorema **??** ha un'interessante interpretazione geometrica.

Introduciamo la famiglia degli insiemi di livello di f, definiti dall'equazione $f(x,y) = c$ $(c \in \mathbb{R})$.

Osserviamo che il vincolo corrisponde all'insieme di livello b di g. Sia ora (x^*, y^*) punto critico vincolato e $f(x^*, y^*) = c^*$ il livello critico di f corrispondente. Essendo per ipotesi $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ dalla 23.10 si deduce che

- se $\lambda^* = 0$ allora $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e il punto (x^*, y^*) è singolare per la linea di livello critica

- se invece $\lambda^* \neq 0$, allora la linea di livello critica è tangente al vincolo nel punto (x^*, y^*)

[1] Anche se in questo caso il vincolo si presta a una rappresentazione parametrica globale, è forse più semplice ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange

[2] capitolo 3, paragrafo 3.2

Significato economico del moltiplicatore. Prezzo ombra Il moltiplicatore λ^*non è un semplice elemento accessorio, ma ha un significato notevole, che vogliamo segnalare.

Un'informazione importante in un problema di ottimizzazione vincolata è la misura della sensibilità del valore estremo della funzione obiettivo (massimo o minimo) rispetto a una variazione di b che appare nell'equazione di vincolo. Pensando, per esempio, al caso della produzione ottima, b rappresenta il vincolo di budget ed è di indubbio interesse stabilire di quanto varia la produzione massima variando tale vincolo.

Supponiamo che, per ogni b in un intervallo $I = (b_1, b_2)$ si trovi un valore ottimo, per esempio di massimo, per la funzione f, sotto la condizione $g(x, y) = b$.

Per sottolineare la dipendenza da b, scriviamo

$$M(b) = f(x^*(b), y^*(b)), \quad \text{per il massimo vincolato di } f$$

Vogliamo dimostrare che

$$\lambda^*(b) = M'(b) \tag{23.12}$$

A tale scopo, scriviamo le condizioni del primo ordine

$$f_x(x^*(b), y^*(b)) = \lambda^*(b) g_x(x^*(b), y^*(b)) \tag{23.13}$$

$$f_y(x^*(b), y^*(b)) = \lambda^*(b) g_y(x^*(b), y^*(b)) \tag{23.14}$$

$$g(x^*(b), y^*(b)) = b \tag{23.15}$$

per ogni b nell'intervallo I. Deriviamo ora rispetto a b la 23.15; si trova:

$$g_x(x^*(x), y^*(b))\frac{dx^*}{db} + g_y(x^*(b), y^*(b))\frac{dy^*}{db} = 1$$

Moltiplichiamo per $\lambda^*(b)$ entrambi i membri di questa equazione e usiamo le 23.13, e 23.14; si ottiene:

$$f_x(x^*(b), y^*(b))\frac{dx^*}{db} + f_y(x^*(b), y^*(b))\frac{dy^*}{db} + \tag{23.16}$$

per cui dalla 23.16 si deduce la formula

$$M'(b) = \lambda^*(b)$$

o in termini di differenziali

$$dM = \lambda^* db \tag{23.17}$$

Il moltiplicatore $\lambda^*(b)$ rappresenta dunque la velocità di variazione del valore ottimo rispetto a b.

In termini economici la 23.17 indica di quanto aumenta la produzione ottima in conseguenza di un aumento Δb di budget: $\Delta M(b) \approx \lambda^* \Delta b$. Se $\Delta b = 1$ euro λ^* rappresenta il valore del corrispondente aumento di quantità prodotto in condizioni di ottimalità e prende il nome di prezzo ombra

Esempio 23.7.4. Nel caso del problema di produzione, nel punto di ottimo (K^*, L^*) si deve avere

$$\nabla Q = \lambda^* \nabla g$$

equivalente a

$$Q_K = \lambda^* g_K Q_L = \lambda^* g_L$$

Se $g_L \neq 0$ si deduce la relazione

$$\frac{Q_K}{Q_L} = \frac{g_K}{g_L} = \lambda^*$$

Per esempio, se $Q(K, L) = aK^\alpha L^{1-\alpha}$ ($a > 0$, $0 < \alpha < 1$) e il vincolo di bilancio è $g(K, L) = Kp_{cap} + Lp_{lav} = b$, nel punto di ottimo si deve avere:

$$\frac{\alpha L^*}{(1-\alpha)K^*} = \frac{p_{cap}}{p_{lav}} = \lambda^*$$

che regola le quantità ottime di lavoro e capitale e il prezzo ombra della risorsa prodotta in funzione dei prezzi dei fattori di produzione

23.7.2 Moltiplicatori di Lagrange. Il caso generale

Consideriamo ora problemi di ottimizzazione vincolata, per funzioni di n variabili ($n \geq 2$) con un numero m di vincoli di uguaglianza.

Siano date $m+1$ funzioni reali di n variabili $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tutte di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Si vogliono determinare gli estremi di f quando le variabili sono soggette alle m condizioni di vincolo:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 \\ \ldots g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m \end{cases} \tag{23.18}$$

Naturalmente, se i vincoli sono “indipendenti” la formulazione del problema è ragionevole solo se m, il numero di equazioni del vincolo, è *minore di* n, il numero di variabili. Già se fosse $m = n$ il sistema 23.18 è soddisfatto, in generale, al massimo da un numero finito di punti.

Se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ e raggruppiamo $g_1, \ldots, g_m$ nel vettore $\mathbf{g}$ allora il problema di ottimizzazione vincolata si può compattare nella seguente formulazione:

$$\begin{cases} \max f \\ sub \\ g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \min f \\ sub \\ g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \end{cases}$$

Come già nel caso più semplice, almeno in linea di principio, la situazione più favorevole è quella in cui dal sistema 23.18 si possono ricavare esplicitamente m variabili in funzione delle altre $m - n$, per esempio:

$$\begin{cases} x_1 = h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_m = h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{23.19}$$

Ciò significa che (vedi paragrafo 4.1) il sistema di vincoli definisce una *varietà di dimensione* $n - m$ in *forma parametrica* e il problema vincolato si riduce all'ottimizzazione libera della funzione

TODO: fixme

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

di $n - m$ variabili. Si capisce però che questa strada è il più delle volte impraticabile, per cui passiamo alla generalizzazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Ricordiamo che se $g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}^*$ si dice punto *regolare* per $\mathbf{g}$ se la matrice Jacobiana

$$\mathbf{Dg} = \begin{bmatrix} D_{x_1}g_1 & D_{x_2}g_1 & \dots & D_{x_n}g_1 \\ D_{x_1}g_2 & D_{x_2}g_2 & \dots & D_{x_n}g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{x_1}g_m & D_{x_2}g_m & \dots & D_{x_n}g_m \end{bmatrix}$$

ha rango m in $\mathbf{x}^*$. Equivalentemente, i vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$, $j = 1, \dots, m$ sono linearmente indipendenti. Esiste dunque un minore *non nullo* di ordine m estratto da $\mathbf{Dg}(\mathbf{x}^*)$. Se per esempio tale minore è

$$\det \begin{bmatrix} D_{x_1}g_1 & D_{x_2}g_1 & \dots & D_{x_n}g_1 \\ D_{x_1}g_2 & D_{x_2}g_2 & \dots & D_{x_n}g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{x_1}g_m & D_{x_2}g_m & \dots & D_{x_n}g_m \end{bmatrix}$$

TODO: fixme

il teorema sulle funzioni implicite (paragrafo 4.2) permette la rappresentazione 23.19 del sistema di vincoli, almeno in un intorno del punto $\mathbf{x}^*$.

Dato dunque un punto regolare $\mathbf{x}^*$, consideriamo una curva regolare in $\mathbb{R}^n$, assegnata da un vettore

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

che stia sulla varietà e passi per il punto $\mathbf{x}$. Precisamente, sia:

1. $\mathbf{r}$ definita in un intorno I di $t = 0$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^*$
2. $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$
3. per ogni $t \in I$
$$g(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{b}$$

o, più esplicitamente

$$g_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) = b_j \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m \tag{23.20}$$

Una curva con le proprietà indicate si costruisce facilmente, scegliendo prima $x_{m+1}(t), \dots, x_n(t)$ derivabili con continuità, in modo che $x_j(0) = x_j^*$ per $j = m+1, \dots, n$ e che per almeno un indice j si abbia $x_j'(0) \neq 0$. Si pone poi:

$$x_j(t) = h_j(x_{m+1}(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m$$

Vi sono almeno $n-m$ curve di questo tipo tali che i loro vettori velocità $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(0)$ siano linearmente indipendenti (perché?). Osserviamo inoltre che, derivando la 23.20 e calcolando in $t = 0$, si ottiene:

$$\nabla g_j(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m$$

per cui $\mathbf{v}$ è ortogonale a ognuno dei gradienti $\nabla g_j(\mathbf{r}(0))$. Per questo motivo, le direzioni $\mathbf{v}$ si dicono tangenziali ai vincoli.

Possiamo ora generalizzare il metodo dei moltiplicatori al nostro caso

Teorema 23.7.2 (Moltiplicatori di Lagrange, caso generale)**.** *Siano* $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$*,* $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ *e sia* $\mathbf{x}^*$ *punto di estremo vincolato per* f *rispetto al vincolo*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \tag{23.21}$$

Se $\mathbf{x}^*$ *è un punto regolare per* $\mathbf{g}$*, cioè se il rango di* $\mathbf{Dg}(\mathbf{x}^*)$ *è* m*, allora esistono* m *numeri reali* $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ *detti moltiplicatori di Lagrange, tali che*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) \tag{23.22}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{r}$ una curva soddisfacente le condizioni 1,2,3 indicate prima dell'enunciato del teorema. Consideriamo la funzione

$$\varphi(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

restrizione di f a tale curva. Essendo $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathbf{r}$ regolare, φ risulta derivabile e

$$\varphi'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Poiché la curva soddisfa il vincolo e $\mathbf{x}^*$ è di estremo per f, segue che $t = 0$ è punto di estremo locale per φ e quindi, ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(0)$, si ha

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{23.23}$$

Questa relazione vale per ogni curva regolare soddisfacente le condizioni 1,2,3. D'altra parte, per la discussione che precede l'enunciato del teorema, sappiamo che $\mathbf{v}$ è *ortogonale a ognuno* degli m vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$. Indicando con V lo spazio vettoriale generato dagli m vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ e con $V^\perp$ lo spazio ortogonale[3] a V, la 23.23 si può esprimere dicendo che

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \text{è ortogonale a } \mathbf{v} \text{ per ogni } \mathbf{v} \in V^\perp$$

ossia $\nabla f(\mathbf{x}^*) \in (V^\perp)^\perp = V$.

Poiché V è generato dai vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$, questo implica la 23.22, ossia $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ per $j = 1, \ldots, m$ □

Osserviamo che la 23.22 corrisponde a n equazioni scalari. Introduciamo la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(x_1, \ldots, x_n) - b_j]$$

dipendente da $n + m$ variabili reali. Il teorema 4.8 afferma che, se $\mathbf{x}^*$ è un punto regolare, allora esiste un vettore di moltiplicatori **TODO**: fixme

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$$

[3]Ricordiamo che, in $\mathbb{R}^n$ l'insieme dei vettori ortogonali a un sottospazio vettoriale V costituisce a sua volta uno spazio vettoriale, detto spazio ortogonale a V e indicato con $V^\perp$. Inoltre, vale la relazione $(V^\perp)^\perp = V$

tale che $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ è un punto critico libero per la Lagrangiana. Infatti i punti critici liberi per la Lagrangiana si trovano risolvendo il seguente sistema di $n+m$ equazioni in $n+m$ incognite

$$D_{x_1}\mathcal{L} = D_{x_1}f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{x_1} g_j = 0 \ldots D_{x_n}\mathcal{L} = D_{x_n}f - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_{x_n} g_j = 0 D_{\lambda_1}\mathcal{L} = b_1 - g_1 = 0 \ldots D_{\lambda_m}\mathcal{L} = b_m \tag{23.24}$$

Le prime n equazioni equivalgono alla 23.22 mentre le ultime m esprimono le condizioni di vincolo.

Per risolvere un problema di ottimizzazione vincolata col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dopo aver isolato i punti singolari per il vincolo, si determinano i punti critici vincolati risolvendo il sistema 23.24.

Si cerca poi di determinare la natura dei punti critici mediante considerazioni legate al problema specifico. Esistono anche condizioni sufficienti ma sono, in generale, di difficile uso, per cui preferiamo soprassedere.

Esempio 23.7.5 (Un problema isoperimetrico)**.** Applichiamo il metodo dei moltiplicatori per massimizzare la funzione $V(x, y, z) = xyz$, sotto la condizione:

$$g(x, y, z) = xy + xz + yz = A, \quad A > 0 \tag{23.25}$$

Si tratta di massimizzare il volume di un parallelepipedo di lati x, y, z sotto il vincolo che la superficie laterale assegnata (uguale a $2A$). Dato il significato delle variabili, ci limiteremo ad ammettere solo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Poiché $\nabla g = (y + z, x + z.x + y)$ si annulla solo nell'origine, la 23.25 rappresenta una superficie priva di punti singolari. Cerchiamo i punti critici risolvendo il sistema 23.24:

$$\begin{cases} V_x - \lambda g_x = yz - \lambda(y+z) = 0 \\ V_y - \lambda g_y = xz - \lambda(x+z) = 0 \\ V_z - \lambda g_z = xy - \lambda(x+y) = 0 \\ g = xy + xz + yz = A \end{cases}$$

Si vede subito che deve essere $\lambda \neq 0$ essendo $A > 0$. Si deduce allora che deve anche essere $x \neq 0, y \neq 0$ e $z \neq 0$. Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y, sottraendo membro a membro e semplificando per λ si trova

$$x(y + z) = y(x + z)$$

ossia $x = y$.

Analogamente, moltiplicando la terza equazione per z, la seconda per y e sottraendo membro a membro e semplificando per λ si trova $z = y$. Quindi $x = y = z$. Usando la quarta equazione si trova l'unico punto a coordinate positive

$$x^* = y^* = z^* = \frac{\sqrt{A}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^* = \frac{\sqrt{A}}{8}$$

con

$$V\left(\frac{\sqrt{A}}{2}, \frac{\sqrt{A}}{2}, \frac{\sqrt{A}}{2}\right) = \frac{A^{3/2}}{8}$$

Come facciamo a controllare che questo è il massimo valore ammissibile? basterebbe assicurarsi che il massimo esista, avendo trovato un solo punto critico vincolato (notiamo che il minimo è zero, assunto sul bordo del dominio, $x = 0$, o $y = 0$ o $z = 0$). Non si può però usare direttamente il teorema di Weierstrass in quanto il vincolo rappresenta una superficie chiusa ma illimitata.

Possiamo però pensare di ridurci a una parte di superficie contenuta nella sfera $B_R = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$ con un raggio abbastanza grande. Se infatti, per esempio, si avesse $x > R$, poiché dall'equazione di vincolo si ottiene $xy < A$ e $xz < A$, che implicano $y < A/x$ e $z < A/x$ si avrebbe per il volume:

$$V(x, y, z) = xyz < x\frac{A}{x}\frac{A}{x} < \frac{A^2}{R}$$

Per $R > 8\sqrt{A}$ si ha

$$\frac{A^2}{R} < \frac{A^{3/2}}{8}$$

e quindi, fuori dalla sfera B_R il volume è sempre minore di $A^{3/2}/8$. D'altra parte, in B_R, il massimo vincolato esiste per il teorema di Weierstrass e questo non può che essere $A^{3/2}$

Esempio 23.7.6. Esempio ellissoide? pag 244

23.8 Vincoli di disuguaglianza e teorema di Kuhn-Tucker

Considerare solo vincoli di uguaglianza costituisce a volte una seria limitazione. Specialmente nell'analisi economica ci si imbatte frequentemente nel problema di ottimizzare una funzione $f(\mathbf{x})$ quando la variabile $\mathbf{x}$ è soggetta a uno o più vincoli del tipo $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$, oltre alla condizione di non negatività delle sue componenti, cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. È questo un tipico problema di programmazione matematica alla quale sono dedicati numerosi testi specialistici. Per questa ragione, ci limitiamo ad accenare, senza dimostrare, al risultato più importante della teoria (il teorema di Kuhn-Tucker), riferendoci, per fissare le idee, al problema di massimo seguente.

Osservazione 790 (Problema). Siano date $m + 1$ funzioni reali di n variabili $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tutte di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Si vuole massimizzare f quando le variabili sono soggette alla condizione di non negatività e alle m condizioni di vincolo

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \ldots g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m$$

Diciamo che un punto di massimo per f sotto i vincoli indicati è soluzione del problema 6.3

TODO: fixme

Qui non c'è nessuna restrizione sul numero m di vincoli. Naturalmente supporremo che il sistema di vincoli non produca . . . l'insieme vuoto!

Osservando che $\max f = -\min(-f)$ è chiaro che i risultati per il problema di massimo possono essere facilmente adattati ai problemi di minimo. Gli estremi si intendono globali.

Anche in questo caso abbiamo bisogno di introdurre condizioni di regolarità dei vincoli. In programmazione ve ne sono di vari tipi e si chiamano più propriamente *condizioni di qualificazione dei vicoli.* Precisamente, indichiamo con $J(\mathbf{x}^*)$ l'insieme degli indici $j \in \{1, \dots, m\}$ tali che $g_j(\mathbf{x}^*) = b_j$. I vincoli corrispondenti si dicono attivi in $\mathbf{x}^*$.

La più semplice tra le condizioni di qualificazione dei vincoli è la seguente.

Definizione 23.8.1. Diciamo che i vincoli sono qualificati in $\mathbf{x}^*$ se i vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ per $j \in J(\mathbf{x}^*)$ sono linearmente indipendenti

La presenza dei vincoli di non negatività delle variabili, cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ non altera la qualificazione o meno dei vincoli in un punto. Il seguente teorema è fondamentale in programmazione

TODO: fixme

Teorema 23.8.1 (di Kuhn-Tucker)**.** *Sia* $\mathbf{x}^*$ *soluzione del problema* 6.3 . *Se i vincoli sono qualificati in* $\mathbf{x}^*$*, esiste un vettore di moltiplicatori*

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$$

(detti moltiplicatori di Kuhn-Tucker) tale che $\mathbf{x}^*$ *e* λ^* *sono soluzioni del seguente sistema di condizioni di ottimalità*

$$\begin{cases} D_{x_k} f(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* D_{x_k} g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \\ x_k^* \geq 0 \\ x_k^* \left[D_{x_k} f(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* D_{x_k} g_j(\mathbf{x}^*) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n \tag{23.26}$$

$$\begin{cases} b_i - g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 \\ \lambda_i^* \geq 0 \\ \lambda_i^* [b_i - g_i(\mathbf{x}^*)] = 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m \tag{23.27}$$

Si noti che le prime n condizioni 23.26 indicano che, se per un indice k si ha $x_k^* > 0$, allora deve essere:

$$D_{x_k} f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* D_{x_k} g_j(\mathbf{x}^*)$$

Dalle altre m condizioni 23.27 si deduce che, se un moltiplicatore λ_i^* è positivo, allora deve essere $b_i - g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ e cioè questo vincolo è attivo. Ne segue che nelle prime n condizioni intervengono solo i vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$.

Introducendo la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j [g_j(x_1, \dots, x_n) - b_j]$$

le condizioni di ottimalità si possono scrivere nella forma più concisa seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \leq 0, x_k \geq 0, x_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Infine, sottolineiamo che, se il problema fosse di minimo, cambierebbe solo il segno dei moltiplicatori, mentre le altre condizioni rimangono inalterate

Esempio 23.8.1. Si voglia minimizzare la funzione $f(x_1, x_2) = (1-x_1)^3 - x_2 - 1$ sotto i vincoli di non negatività delle variabili:

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Le condizioni di ottimalità sono:

$$\begin{cases} f_{x_1} = -3(1-x_1)^2 \leq 0 & x_1 \geq 0, x_1[-3(1-x_1)^2] = 0 \\ f_{x_2} = -1 \leq 0 & x_2 \geq 0, x_2[-1] = 0 \end{cases}$$

Si trova subito $x_2 = 0$ e poi $x_1 = 0$ oppure $x_1 = 1$. Le condizioni di Kuhn-Tucker selezionano dunque i due punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$ con $f(0, 0) = 0$ e $f(0, 1) = -1$. Osservando che $f \leq 0$ in tutto il primo quadrante, si deduce che $(0, 0)$ è il punto di minimo globale.

Capitolo 24

Calcolo integrale per funzioni di più variabili

24.1 Integrali doppi

24.1.1 Integrale di una funzione limitata definita su un rettangolo

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, ricordiamo che l'integrale

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

può vedersi come un limite di somme di Cauchy-Riemann:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_k)$$

dove supponiamo di aver diviso $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza $(b - a)/n$, t_k è un punto qualsiasi del k esimo intervallino e il limite è fatto per $n \to \infty$, cioè all'infittirsi della partizione. Più in generale, per ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata è possibile definire le somme di Cauchy-Riemann s_n; si dice che la funzione f è integrabile quando esiste finito il limite della successione s_n e inoltre tale limite non dipende da come si sono scelti i punti t_k nei rispettivi intervallini, a ogni passo della costruzione iterativa. Si dimostra poi che le funzioni continue su $[a, b]$ risultano effettivamente integrabili.

L'idea di *integrale doppio* per una funzione reale di due variabili è una naturale estensione di questa definizione, almeno nel caso più semplice di una funzione definita su un rettangolo: se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, consideriamo una partizione di $[a, b]$ in n intervallini di ampiezza $(b-a)/n$, mediante $n + 1$ punti x_h equispaziati

$$x_h = a + h\frac{b-a}{n}, \quad \text{per } h = 0, 1, \ldots, n$$
$$x_0 = a < x_1 <\leq< x_n = b$$

e una analoga partizione di $[c, d]$ in n intervallini di ampiezza $(d-c)/n$ mediante $n+1$ punti y_k:

$$y_k = c + k\frac{d-c}{n}, \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, n$$
$$y_0 = c < y_1 < \ldots < y_n = d$$

Queste due partizioni inducono una partizione del rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ in n^2 rettangolini

$$I_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k], \quad \text{per } h, k = 1, \ldots, n$$

ciascuno di area (indichiamo l'area con il valore assoluto)

$$|I_{hk}| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Sia $\mathbf{p}_{hk} = (x_{hk}, y_{hk}) \in I_{hk}$ un punto qualsiasi scelto in ciascuno rettangolino e consideriamo la somma di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk}) \tag{24.1}$$

Osserviamo il significato geometrico di s_n (per semplicità nel caso $f \geq 0$): ogni addendo è il prodotto dell'area del rettangolo I_{hk} per il valore $f(\mathbf{p}_{hk})$, quindi rappresenta il volume del parallelepipedo di base I_{hk} e altezza $f(\mathbf{p}_{hk})$; la somma s_n è quindi il volume di una certa regione tridimensionale che, all'infittirsi della partizione, ci aspettiamo approssimi sempre meglio la regione tridimensionale che sta sotto il grafico di f (e sopra il piano xy). Possiamo ora dare la seguente definizione

Definizione 24.1.1. Diremo che la funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ limitata, è *integrabile nel rettangolo* $R = [a, b] \times [c, d]$ se esiste finito $\lim_{n\to\infty s_n}$ con s_n definito come in 24.1 e se inoltre tale limite non dipende da come si sono scelti i punti $\mathbf{p}_{hk}$ nei rispettivi rettangolini I_{hk}, a ogni passo della costruzione. In tal caso questo limite si dirà *integrale doppio* di f sul rettangolo R e sarà indicato col simbolo

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk}) \tag{24.2}$$

Osserviamo che nel simbolo di integrale doppio le variabili di integrazione x, y sono *variabili mute*; questo significa per esempio, si ha

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, v)\, dx\, dv = \iint_R f(u, v)\, du\, dv$$

Come per le funzioni di una variabile, la definizione data lascia aperto il problema di capire quali funzioni risultino effettivamente integrabili.

Teorema 24.1.1. *Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.*

Dimostrazione. Omessa. La dimostrazione ricalca quella del teorema analogo per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, basandosi in particolare sulla proprietà di uniforme continuità di una funzione continua su un insieme chiuso e limitato $\square$

Per una funzione continua e non negativa su un rettangolo, l'integrale doppio ha il significato geometrico di volume della regione tridimensionale compresa tra il piano xy e il grafico della funzione; più precisamente, l'integrale doppio può costituire una *definizione rigorosa* di volume della regione in questione.

A questo punto si apre il problema del calcolo effettivo degli integrali doppi; anziché cercare di generalizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale, si rivela più utile un procedimento di *riduzione degli integrali doppia integrali iterati*, cioè al calcolo di successivi integrali in una variabile.

Per una formula utile, lasciamoci guidare dal significato geometrico dell'integrale doppio, come volume sotteso al grafico di $f(x, y)$.

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$; tracciamo un piano verticale parallelo all'asse x che taglierà il solido di cui vogliamo calcolare il volume lungo una regione piana, diciamo di area $A(y)$.
La fetta del solido che ha per base la striscia $(y, y + dy)$ avrà volume $A(y)dy$. Il volume totale si può ricostruire facendo variare y tra c e d e poi sommando i contributi delle singole fette. La somma totale non è altro che

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

A sua volta come calcolare l'area $A(y)$? Possiamo calcolarla per mezzo dell'integrale unidimensionale della funzione $x \mapsto f(x, y)$ con y fissato

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Ne segue allora

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Tutto ciò è intuitivo e lo enunciamo nel seguente risultato

Teorema 24.1.2 (di riduzione, per un rettangolo)**.** *Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora il suo integrale doppio si può calcolare come integrale iterato, al modo seguente*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \tag{24.3}$$

Il teorema precedente si potrebbe enunciare e dimostrare per una funzione integrabile qualsiasi, con qualche precisazione, ma per il momento ci limitiamo al caso di funzioni continue. Per la dimostrazione, premettiamo il seguente

Lemma 24.1.3. *Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione di una variabile*

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

è continua in $[a, b]$. Analogamente, la funzione di una variabile

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

è continua in $[c, d]$

Dimostrazione. La proprietà affermata è intuitiva; tralasciamo la dimostrazione che si basa (come il teorema di integrabilità delle funzioni continue) sull'uniforme continuità di f sul rettangolo R □

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema 24.1.2. Proviamo la prima uguaglianza in 24.3 (in modo analogo si può provare che l'integrale doppio è uguale all'altro integrale iterato).
Vogliamo applicare la definizione di integrale, dunque consideriamo una partizione del rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ in n^2 rettangolini I_{kh} (usiamo le stesse notazioni introdotte nella definizione di integrale).
Consideriamo la funzione di una variabile

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y)\ dy$$

continua in $[a, b]$ per il Lemma 24.1.3, e quindi integrabile[1]. Vogliamo mostrare che:

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\ dx\ dy$$

che è appunto la tesi. Possiamo scrivere

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \sum_{h=1}^{n} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi(x)\ dx$$

Ora applichiamo a φ, su ciascun intervallino $[x_{h-1}, x_h]$ il teorema della media[2]: per ogni h esiste un punto

$$x_h^* \in [x_{h-1}, x_h]$$

tale che

$$\int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi(x)\ dx = \varphi(x_h^*)(x_h - x_{h-1})$$

Dunque:

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \sum_{h=1}^{n} \varphi(x_h^*)\frac{(b-a)}{n} = \sum_{h=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} \int_c^d f(x_h^*, y)\ dy \tag{24.4}$$

Consideriamo ciascun integrale

$$\int_c^d f(x_h^*, y)\ dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_h^*, y)\ dy$$

Per ogni k fissato, la funzione di una variabile

$$y \mapsto f(x_h^*, y)$$

è continua in $[c, d]$. Applicando a ciascuna di queste funzioni ancora il teorema della media su ciascun intervallino $[y_{k-1}, y_k]$ otteniamo che esiste, per ogni h e ogni k, un punto

$$y_{hk}^* \in [y_{k-1}, y_k]$$

[1] Volume 1, capitolo 6, paragrafo 2.2
[2] v volume 1, capitolo 6, paragrafo 3, teorema 6.5

tale che

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_h^+, y)\, dy = f(x_h^*, y_{hk}^*)(y_k - y_{k-1})$$

Pertanto:

$$\int_c^d f(x_h^*, y)\, dy = \sum_{k=1}^n \frac{d-c}{n} f(x_h^*, y_{hk}^*)$$

e sostituendo nella 24.4

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{h=1}^n \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(d-c)}{n} f(x_h^*, y_{hk}^*) = \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk})$$

con $\mathbf{p}_{hk} = (x_h^*, y_{hk}^*)$. Abbiamo quindi dimostrato che per ogni n esiste una somma di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk})$$

relativa all'integrale doppio $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy$ tale che:

$$s_n = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

Poiché già sappiamo che la funzione f è integrabile (in quanto continua), passando al limite per $n \to \infty$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy$$

dunque integrale doppio e integrale iterato coincidono □

Osservazione 791. La tecnica di iterazione permette di ricondurre il calcolo di un integrarle doppio a quello di due integrali in una variabile, uno in sequenza all'altro; si osservi che mentre si calcola il primo integrale, quello più interno, la variabile diversa da quella rispetto a cui si integra va trattata come una costante

Esempio 24.1.1. Per calcolare

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2]} xe^{xy}\, dx\, dy$$

La funzione è continua sul rettangolo; calcoliamo l'integrale doppio come integrale iterato nel modo seguente

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\, dy \right) dx$$

Questo significa che prima calcoliamo l'integrale interno nella variabile y, pensando x come parametro fissato:

$$\int_0^2 xe^{xy}\, dy = [e^{xy}]_0^2 = e^{2x} - 1$$

quindi sostituiamo il risultato ottenuto (che è una funzione della sola x) nell'integrale esterno calcolando

$$\int_0^1 (e^{2x} - 1)\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 2$$

Questo è il valore dell'integrale doppio. Avremmo potuto procedere anche nell'altro ordine calcolando:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 x e^{xy}\, dx\right) dy$$

Lo studente è invitato a rifare il calcolo a questo modo. Si trova ovviamente lo stesso risultato, ma non necessariamente con la stessa facilità

Osservazione 792 (Funzioni a variabili separate). Quando si integra su un rettangolo una funzione del tipo $f(x)g(y)$, l'integrale doppio si calcola come prodotto di due integrali unidimensionali. Infatti:

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dy\right) dx = \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right) dx = \left(\int_c^d g(y)\, dy\right)$$

Esempio 24.1.2.

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2]} x^3 e^y\, dx\, dy = \left(\int_0^1 x^3\, dx\right)\left(\int_0^2 e^y\, dy\right) = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

24.1.2 Funzioni integrabili su dominio non rettangolari. Insiemi semplici, regolari, misurabili

Naturalmente il caso in cui la funzione integranda sia definita su un rettangolo è un caso particolare, scelto come punto di partenza. Se f è definita su un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitato, come si può definire l'integrale di f? Un'idea naturale è quella di considerare un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ che contiene Ω, definire f in tutto il rettangolo ponendola per definizione uguale a zero fuori di Ω e integrare sul rettangolo la funzione così ottenuta (applicando la definizione precedente). Se tale integrale esiste, diremo che f è integrabile in Ω. Detto più formalmente:

TODO: fixme

Definizione 24.1.2. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, sia $R = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenente Ω (fig 5.5) e sia $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ così definita

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

TODO: fixme

Se $\tilde{f}$ risulta integrabile in R (in base alla definizione 5.1), diremo che f è integrabile in Ω e porremo

$$\iint_\Omega f(x,y) = \ dx\, dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy$$

Osservazione 793. Nella definizione precedente il rettangolo R non è individuato univocamente; tuttavia si può dimostrare che l'integrabilità della funzione e il valore dell'integrale non dipendono dalla scelta di R

Si noti che, anche se f è continua in Ωin generale $\tilde{f}$ risulta discontinua in R, perché presenta un salto lungo il bordo di Ω. Pertanto senza fare qualche ipotesi sul dominio Ω non è ovvia neppure l'integrabilità delle funzioni continue e limitate in Ω. Si consideri in proposito il prossimo

Esempio 24.1.3. Sia Ω l'insieme dei punti del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ con coordinata x razionale, cioè

$$\Omega = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}$$

Vogliamo controllare se esiste

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \tag{24.5}$$

Si noti che l'integranda è costante in Ω Se estendiamo la funzione integranda a tutto il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ ponendola uguale a zero fuori da Ω, otteniamo la stessa funzione considerata nell'Esempio 1.1 , che già sappiamo non essere integrabile. Pertanto l'integrale. Pertanto l'integrale 24.5 non esiste. Si capisce che questo fatto è dovuto alle cattive proprietà del dominio Ω non certo della funzione integranda (costante!) **TODO**: fixme

Vogliamo quindi individuare delle condizioni sul dominio Ω che siano facili da esprimersi e sufficienti a garantire l'integrabilità di una funzione continua e limitata in Ω.

Restringiamo il discorso a funzioni definite su *particolari* insiemi, che saranno comunque più che sufficienti per la maggior parte delle applicazioni

Definizione 24.1.3 (Insiemi semplici, regolari)**.** Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice y-semplice se è del tipo

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

con $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Questo significa che tagliando E con una retta parallela all'asse y si ottiene sempre un segmento e che questo segmento varia con continuità al variare della retta.
Analogamente E si dirà x-semplice se è del tipo:

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$$

con $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue.
E si dirà *semplice* se è x-semplice o y-semplice; si dirà regolare se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

Osservazione 794. Per gli obiettivi di questo corso, consideriamo insiemi regolari

Esempio 24.1.4. l'insieme:

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x(1-x) \leq y \leq x(2-x^2)\right\}$$

è (per definizione) y-semplice; disegnandolo (fig 5.7) vediamo che non è anche x semplice in quanto certe rette orizzontali tagliano E in un insieme diverso da un segmento

Esempio 24.1.5. Il triangolo con estremi in $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,1)$ è sia x semplice sia y semplice. Si può rappresentare (y semplice) come:

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}$$

oppure (x-semplice) come:

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq 2$$

Esempio 24.1.6. Una corona circolare non è un insieme semplice, ma è regolare, potendosi decomporre per esempio come unione di due insiemi x- semplici o y-semplici

TODO: fixme

Esempio 24.1.7. L'insieme Ω dell'esempio 1.3 non è regolare: è unione di un numero infinito di segmenti verticali, ognuno dei quali è una regione y-semplice

Si noti che un insieme semplice è necessariamente chiuso e limitato, come si vede subito dalla definizione; di conseguenza anche un insieme regolare, essendo unione di un numero finito di insiemi semplici, è chiuso e limitato. In particolare una funzione continua su un dominio regolare ha massimo e minimo (per il teorema di Weierstrass) ed è perciò limitata. Veniamo ora al risultato di integrabilità che ci aspettiamo:

Teorema 24.1.4. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile in Ω*

TODO: fixme

Si noti che questo risultato contiene come caso particolare il teorema 5.1 , visto che un rettangolo è un insieme regolare; non dimostreremo questo risultato.

La nozione di integrale doppio permette non solo di dar senso al concetto di volume della regione tridimensionale che sta sotto il grafico di una funzione, ma anche di quello di area di una regione piana limitata

Definizione 24.1.4 (Insieme misurabile)**.** Un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dirà misurabile se la funzione costante 1 è integrabile in Ω. In tal caso, chiameremo misura (o area) di Ω, e indicheremo col simbolo $|\Omega|$ il numero

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

Per il teorema 5.4 ogni insieme regolare è misurabile (perché la funzione costante ad 1 in Ω è continua. Esistono tuttavia insiemi non misurabili come l'insieme Ω descritto nell'esempio 1.3

TODO: fixme

Si rifletta sul significato del concetto di *insiemi di misura nulla*, che sarà importante nello sviluppo della teoria dell'integrazione. In base alla definizione di integrale e di misura, è immediato convincersi della prossima

Proposizione 24.1.5 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla)**.** *Un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile e ha misura nulla se e solo se vale la seguente proprietà: detto R un rettangolo contenente Ω, considerata la suddivisione di Ω in n^2 rettangolini uguali (come nella definizione di integrale) e detta A_n la somma delle aree dei rettangolini che hanno intersezione non vuota con Ω si ha che $A_n \to 0$ per $n \to \infty$*

Notiamo esplicitamente che se la proprietà appena enunciata vale per un certo rettangolo R contenente Ω, allora vale per qualsiasi rettangolo R contenente Ω.

In parole povere un insieme di misura nulla può essere ricoperto da rettangolini di area complessiva piccola quanto si vuole. Quali sono, in pratica, gli insiemi di misura nulla? Vale per esempio il seguente risultato

Proposizione 24.1.6. *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora il grafico di g è un insieme di misura nulla*

In particolare quindi, un segmento ha misura nulla. Si faccia attenzione al significato di questo enunciato: la misura di cui si parla è l'area: certamente il grafico di una funzione continua o un segmento possono avere *lunghezza* positiva, ma la loro area è zero. Possiamo anche osservare quanto segue: l'integrale doppio è definito in $\mathbb{R}^2$ spazio di dimensione 2, e può essere utilizzato per definire l'area, che è una misura bidimensionale, dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Analogamente vedremo che mediamente l'integrale triplo (in $\mathbb{R}^3$, spazio di dimensione 3) potremo definire il volume, che è una misura tridimensionale. Vale anche la prossima

Proposizione 24.1.7. *Ł'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.*

Dalle due proposizioni precedenti segue subito il

Corollario 24.1.8. *Il bordo di un insieme regolare ha misura nulla.*

L'interesse di questi risultati sugli insiemi di misura nulla, in relazione al calcolo integrale, sta per esempio nel prossimo teorema, che estende in modo significativo la classe delle funzioni integrabili

Teorema 24.1.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una funzione limitata e continua a eccezione di un insieme di misura nulla di punti di discontinuità. Allora f è integrabile in Ω.*

Anche l'applicabilità del teorema di riduzione sul rettangolo si estende a funzioni che presentano per esempio qualche linea di punti di discontinuità

Teorema 24.1.10 (di riduzione, funzioni discontinue)**.** *Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, continua salvo un insieme di misura nulla di punti di discontinuità. Allora il suo integrale doppio si può calcolare come integrale iterato, cioè vale ancora la 1.3*

TODO: fixme

24.1.3 Proprietà elementari dell'integrale doppio

Prima di concentrarci sul calcolo, enunciamo le proprietà dell'integrale doppio (analoghe a quelle dell'integrale in una variabile)

Proposizione 24.1.11. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile, f, g funzioni integrabili in Ω, $c \in \mathbb{R}$ una costante. (Si noti la generalità delle ipotesi su f, su g e su Ω). Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. linearità dell'integrale*: le funzioni $f+g$, cf sono anch'esse integrabili e*

$$\iint_\Omega [f(x,y)+g(x,y)]\,dx\,dy = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$
$$\iint_\Omega cf(x,y)\,dx\,dy = c\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

In particolare:

$$\iint_\Omega c\,dx\,dy = c\,|\Omega|$$

2. *Positività e monotonia dell'integrale rispetto all'integranda:*

$$f \geq 0 \text{ in } \Omega \implies \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq 0;$$
$$f \geq g \text{ in } \Omega \implies \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy;$$
$$\left|\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy \leq c\,|\Omega|$$

se c è una costante per cui $|f(x,y)| \leq c$ in Ω

3. *monotonia dell'integrale rispetto al dominio di integrazione: se Ω' è un insieme limitato e misurabile contenuto in Ω, allora f risulta integrabile anche in Ω'; se inoltre $f(x) \geq 0$ in Ω risulta:*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy$$

4. *additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione: se Ω_1, Ω_2 sono domini regolari, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ha misura nulla e f è integrabile in $\Omega_1 \cup \Omega_2$ allora:*

$$\iint_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy \quad (24.6)$$

5. *proprietà di annullamento:*

$$|\Omega| = 0 \implies \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Dimostrazione. Le proprietà 1 e 2 si possono provare esattamente come le analoghe proprietà dell'integrale di funzioni di una variabile (volume 1 capitolo 6 paragrafo 3), a partire dalla definizione di integrale come limite di somme; le proprietà 3 e 4 sono un po' più difficili da dimostrare (non lo facciamo) la 5 segue subito dall'ultima delle 2 □

TODO: fixme

Osservazione 795. Vediamo altre proprietà dell'integrale che vale più specificamente per *funzioni continue* su domini opportuni

Teorema 24.1.12. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Allora valgono le seguenti proprietà*

6. *se Ω è aperto, valgono le proprietà di annullamento:*

(a) $|\Omega| > 0,\ f(x,y) \geq 0,\ \iint_\Omega f(x,y)\ dx\ dy = 0 \implies f(x,y) \equiv 0$ *in* Ω

(b) *se per ogni intorno circolare* $D \subset \Omega$ *si ha*

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = 0$$

allora necessariamente $f(x,y) \equiv 0$ *in* Ω

7. *se* Ω *è connesso, vale il teorema della media: esiste un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *tale che:*

$$\frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f(x,y)\ dx\ dy = f(x_0, y_0) \tag{24.7}$$

Dimostrazione. Per

- la prima del punto 6: ragionando per assurdo, se esiste un punto di Ω in cui f non si annulla, per esempio $f(x_0, y_0) = \delta > 0$ per il teorema di permanenza del segno (f continua) esiste un intorno circolare D di (x_0, y_0) ($D \subset \Omega$) in cui è $f \geq \delta/2$ e allora per il punto 3 del teorema precedente

$$0 = \iint_D f(x,y)\ dx\ dy \geq \iint_D f(x,y)\ dx\ dy \geq \frac{\delta}{2}\,|D|$$

assurdo

- per la seconda del punto 5 si dimostra in modo simile alla precedente. Se esiste un punto in Ω in cui $f$non si annulla, per esempio $f(x_0, y_0) = \delta > 0$, esiste un intorno circolare D di (x_0, y_0) ($D \subset \Omega$) in cui è $f \geq \delta/2$ e allora

$$0 = \iint_D f(x,y)\ dx\ dy \geq \frac{\delta}{2}\,|D|$$

assurdo

- per il punto 6: per il teorema di Weierstrass, f ha massimo M e minimo m in Ω; dalle disuguaglianze $m \leq f(x,y) \leq M$ per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ricava:

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|} \iint f(x,y)\ dx\ dy \leq M$$

Pertanto la media integrale di f, $\frac{1}{|\Omega|} \iint f(x,y)\ dx\ dy$ è un valore compreso tra il minimo e il massimo di $f$in Ω; poiché f è continua e Ω connesso, il teorema dei valori intermedi (capitolo 3, paragrafo 3.2) garantisce l'esistenza di un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ per cui vale la 1.7

TODO: fixme
TODO: fixme

□

24.2 Calcolo degli integrali doppi: metodo di riduzione

Ora che abbiamo stabilito le prime proprietà dell'integrale ed enunciato delle condizioni sufficienti per l'integrabilità, si pone il problema del calcolo operativo degli integrali doppi su domini *non rettangolari*. La tecnica di riduzione illustrata per gli integrali su domini rettangolari si estende in modo naturale a domini più generali, in particolare a domini semplici, sfruttando la rappresentazione analitica di questi domini

Teorema 24.2.1 (Di riduzione, per domini semplici)**.** *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e sia Ω un dominio x-semplice ossia*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \tag{24.8}$$

con $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora l'integrale doppio di f si può calcolare come integrale iterato nel modo seguente:

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy \tag{24.9}$$

Se invece Ω è y-semplice

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, vale la formula

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Se Ω è sia x-semplice che y-semplice, valgono entrambe le formule

Osservazione 796. Il significato geometrico della formula 24.9 è molto simile a quello già illustrato nel caso del teorema di riduzione per gli integrali su un rettangolo. Se Ω è un dominio x-semplice, tracciamo un piano verticale parallelo all'asse x; questo taglierà il solido di cui vogliamo calcolare il volume lungo una regione piana di area $A(y)$. Quest'area si calcola per mezzo dell'integrale unidimensionale della funzione $x \mapsto f(x, y)$ con y fissato

$$A(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx$$

dove l'unica differenza rispetto al caso del rettangolo è che ora l'intervallo di integrazione rispetto a x varia al variare di y.

Il volume totale del solido si ricostruisce poi integrando queste aree $A(y)$ per $y \in [c, d]$

Dimostrazione. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e sia R un rettangolo contenente Ω. Sia $\tilde{f}$ la funzione definita su tutto R prolungando f a zero fuori da Ω. Per il teorema thm:5.1 f è integrabile in Ω, ossia $\tilde{f}$ è integrabile in R. Inoltre, per il teorema **??**, per la funzione $\tilde{f}$ vale il teorema di riduzione sul rettangolo R. Infatti $\tilde{f}$ è discontinua solo su $\partial\Omega$, che è un insieme di misura nulla, per il corollario cor:5.5 . Scriviamo esplicitamente cosa significa questo, nell'ipotesi che Ω sia un dominio x-semplice come in 1.8

TODO: fixme

TODO: fixme

TODO: fixme

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \tilde{f}(x, y)\, dx \right) dy \tag{24.10}$$

Poiché $\tilde{f}$ coincide con f in Ω ed è zero al di fuori di Ω, per ogni $y \in [c, d]$ si ha

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx$$

che sostituita nella 1.10 da la tesi $\square$ **TODO**: fixme

Esempio 24.2.1. Calcolare

$$\iint_T xy\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo con vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Possiamo rappresentare T come insieme y-semplice

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\right\}$$

Quindi per calcolare l'integrale iterato, si blocca x tra 0 e 1 e si integra in y tra 0 e x; poi si integra in x tra 0 e 1:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Se avessimo rappresentato T invece come insieme x-semplice, cioè:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, y < x < 1\right\}$$

l'integrale si sarebbe calcolato come segue: si blocca y tra 0 e 1 e si integra in x tra y e 1; quindi si integra in y tra 0 e 1:

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy = \left[\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Osservazione 797. Se Ω è un dominio regolare, unione di un numero finito di domini semplici Ω_k che si intersecano a due a due solo lungo il bordo risulta, per l'additività dell'integrale

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove ognuno degli integrali a secondo membro si può calcolare come opportuno integrale iterato

Esempio 24.2.2. Sia D la porzione del quadrato $[0,1] \times [0,1]$che sta sopra a $y = \sqrt{x}$; calcolare

$$I = \iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy$$

Rappresentando D come dominio y-semplice, si ha

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\,dy$$

Ora, nell'integrale interno abbiamo una funzione che non ha primitiva elementare, per cui il calcolo esatto dell'integrale per questa via appare impraticabile.

Naturalmente l'integrale esiste, perché la funzione è continua e il dominio regolare e può essere calcolata numericamente con l'approssimazione voluta.
Proviamo in alternativa a rappresentare D come dominio x-semplice:

$$I = \int_0^1 \sin(y^3)\,dy \int_0^{y^2} dx = \int_0^1 y^2 \sin(y^3)\,dy = \left[-\frac{1}{3}\cos(y^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-\cos 1) \approx 0,153$$

In questo caso l'integrale interno è facilmente calcolabile, come pure è facilmente determinabile la primitiva nell'integrale esterno. La conclusione è che, quando entrambe le iterazioni sono possibili (perché il dominio è semplice rispetto a entrambi gli assi), la *scelta dell'ordine di iterazione* può essere importante

Esempio 24.2.3. Calcolare

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} (x + \sin y)\,dx\,dy$$

L'integrale, per linearità, è somma di due integrali, di x e di $\sin y$. ognuna di queste funzioni è dispari nella propria variabile e perciò ha integrale nullo su $[-1,1]$; ne segue che l'integrale doppio è pure nullo (senza bisogno di calcoli)

Esempio 24.2.4. Calcolare

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$

TODO: fixme

con D come in figura 5.13 . La rappresentazione analitica di D in questo caso è un po' complessa; la cosa più naturale è scrivere D come unione dei due insiemi seguenti:

$$D_1 = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1, \frac{x}{3} - 1 \le y \le x - 1\right\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 3, \frac{x}{3} - 1 \le y \le \sqrt{1-(x-2)^2}\right\}$$

Conseguentemente l'integrale si spezza nella somma di due integrali, ognuno dei quali si calcola come integrale iterato:

$$\iint_{D_1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{3}-1}^{x-1} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{3}-1}^{x-1} dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)$$

$$\iint_{D_2} xy\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{x}{3}-1}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy\right) dx = \int_1^3 \left(x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{3}-1}^{\sqrt{1-(x-2)^2}}\right) dx = \int_1^3 \left(-\frac{5}{9}x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 2\right.$$

Si conclude che

$$I = -\frac{1}{9} + \frac{10}{9} = 1$$

24.3 Calcolo degli integrali doppi: cambiamento di variabili

Nel calcolo degli integrali di funzioni di una variabile abbiamo visto che il metodo di integrazione per sostituzione risulta essere uno strumento potente. Vale la formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \tag{24.11}$$

dove $x = \phi(t)$ è una funzione derivabile e monotona da $\phi^{-1}([a,b])$ ad $[a,b]$.

Negli integrali di funzioni di due variabili (e, come vedremo in seguito, in quelli di n variabili), il procedimento analogo consiste nell'effettuare una trasformazione di coordinate nel piano: dovendo calcolare

$$\iint_D f(x,y)\; dxdey$$

si opera una trasformazione di coordinate $\mathbf{T} : D' \to D$, $(x,y) = \mathbf{T}(u,v)$ con

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

che porta a esprimere l'integranda in funzione di u, v

$$f(g(u,v), h(u,v))$$

mentre il dominio D viene trasformato in D'

Il problema è: come si trasforma l'integrale doppio? in altre parole qual è l'analogo bidimensionale della formula

$$dx = \phi'(t)\; dt \tag{24.12}$$

che si utilizza nella sostituzione 24.11? Per capirlo possiamo pensare alla 24.12 come a una formula che descrive come cambia l'elemento infinitesimo di lunghezza, sotto l'azione della sostituzione $x = \phi(t)$. Allora, in due variabili, la domanda diventa: come cambia sotto l'azione della trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

l'elemento infinitesimo d'area $dx\ dy$? Per rispondere ragioniamo nel piano (u,v). Il "rettangolo infinitesimo" compreso tra $u, u+\ du$ e $v, v+\ dv$ viene trasformato in un parallelogramma infinitesimo che ha per vertici i quattro punti

$$\begin{aligned} &(g(u,v+dv), h(u,v+dv)), \quad g(u+du,v+dv), h(u+du,v+dv) \\ &\qquad\qquad (g(u,v), h(u,v)) \quad g(u+du,v), h(u+du,v) \end{aligned}$$

Due lati adiacenti del parallelogramma sono quindi individuati dai vettori

$$(g(u+du,v), h(u+du,v)) - (g(u,v), h(u,v))$$

e

$$(g(u,v+dv), h(u,v+dv)) - (g(u,v), h(u,v))$$

uguali in prima approssimazione a

$$(g_u du, h_u du)$$

e

$$(g_v, dv, h_v dv)$$

rispettivamente. L'area del parallelogramma trasformato è quindi (in prima approssimazione) uguale al modulo del determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} g_u du & h_u du \\ g_v dv & h_v dv \end{bmatrix}$$

Ciò suggerisce la seguente formula di trasformazione dell'elemento infinitesimo d'area

$$dx\ dy = \left| \det \begin{bmatrix} g_u du & h_u du \\ g_v dv & h_v dv \end{bmatrix} \right|\ du\ dv$$

Si osservi che la matrice scritta non è altro che la matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate (più precisamente, è la sua trasposta, ma il determinante non cambia per trasposizione). Il precedente ragionamento euristico è confermato dal seguente teorema

Teorema 24.3.1 (Formula di cambiamento di variabili)**.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\mathbf{T} : D' \to D$, $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ con*

$$x = g(u, v)y = (h(u, v) \tag{24.13}$$

Una trasformazione di coordinate, o più precisamente, un diffeomorfismo globale[3] *che porta D'in D. Allora*

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \iint_{D'} f(g(u, v), h(u, v)) \left|\det \mathbf{DT}(u, v)\right|\ du\ dv$$

dove

$$\mathbf{DT}(u, v) = \begin{bmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{bmatrix}$$

indica la matrice Jacobiana della trasformazione

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema è lunga e delicata e verrà omessa □

Osservazione 798. Negli integrali di funzioni di una variabile, il criterio per scegliere una sostituzione consiste unicamente nel considerare la semplificazione che essa induce sulla funzione integranda. In due (o più) variabili, invece, una trasformazione di coordinate può avere come scopo sia semplificare la forma della funzione integranda sia semplificare la *forma del dominio* (per esempio ottenendo nelle nuove variabili un dominio di tipo rettangolare); meglio ancora quando si ottengono entrambe le cose contemporaneamente

Esempio 24.3.1 (Coordinate polari)**.** Passando in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

si ha

$$dx\ dy = \rho\ d\rho\ d\theta$$

formula che può essere giustificata direttamente (sul piano intuitivo) nel seguente modo: il "rettangolo infinitesimo" nel piano $\rho, theta$ individuato dai valori $\rho, rho + d\rho, \theta, \theta + d\theta$ viene trasformato in un settore di corona circolare, nel piano x, y che, in prima approssimazione, equivale a un rettangolo di lati $d\rho$ e $\rho d\theta$ (figura 5.14) e quindi area $\rho d\rho d\theta$.

TODO: fixme

L'integrale doppio si trasforma pertanto nel modo seguente

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

dove D' è il dominio D espresso nelle nuove variabili (ρ, θ). Questo cambiamento di variabili è utile al calcolo in molti casi in cui il dominio D ha qualche simmetria di tipo radiale, per cui si esprime facilmente in coordinate polari. Per esempio un cerchio, una corona circolare, un settore circolare, in coordinate polari diventano rettangoli, poiché sono espressi da relazioni del tipo $a \le \rho \le b$, $c \le \theta \le d$. Questo rende in generale più semplice il calcolo dell'integrale iterato, perché l'integrale interno ha estremi fissi anziché variabili. Se anche la funzione integranda ha qualche simmetria radiale (per esempio è radiale oppure è omogenea) le cose sono ancora più semplici.

Esempio 24.3.2. Calcoliamo

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

con $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$.
Si tratta di integrare sul quarto di cerchio espresso, in coordinate polari da: $\rho < 2$; $0 < \theta < \pi/2$. Passando in coordinate polari, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\rho\,drho\right)d\theta = \left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,dtheta\right)\left(\int_0^2 \rho^2\,d\rho\right) = \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{8}{9}$$

Si noti che, in questo esempio, in coordinate polari il dominio diventa un rettangolo e la funzione integranda si fattorizza nel prodotto $f(\rho)g(\theta)$; di conseguenza l'integrale doppio si fattorizza nel prodotto di due integrali unidimensionali

Esempio 24.3.3. Calcoliamo

$$I_R = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,drho\right)dtheta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^R = \pi(1-e^{-R^2})$$

In questo caso il dominio è radiale, la funzione integranda è radiale (indipendente da θ), perciò l'integrale doppio in coordinate polari si riduce a un solo integrale unidimensionale

Esempio 24.3.4 (Volume dell'ellissoide)**.** Calcoliamo il volume dell'ellissoide di semiassi a, b, c. Poiché ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

la metà superiore dell'ellissoide è il grafico della funzione

$$z = c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} \quad \text{per } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} < 1$$

[3]capitolo 4 paragrafo 5

Il volume cercato è quindi il doppio dell'integrale di questa funzione sul dominio $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$:

$$V = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1} c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\, dy$$

Questo integrale può essere facilmente calcolato mediante un cambio di variabili simile a quello polare, ma di tipo ellittico:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$$

che ha determinante jacobiano

$$\det \begin{bmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{bmatrix} = ab\rho$$

Quindi l'elemento d'area è $dx\, dy = ab\rho\, drho\, dtheta$ e l'integrale è

$$V = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 c\sqrt{1-\rho^2}a\rho\, drho\right) d\theta = 4\pi abc \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = 4\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc$$

Il risultato trovato è una formula che generalizza in modo naturale la formula del volume della sfera $\frac{4}{3}\pi r^3$

24.4 Integrali doppi generalizzati

Osservazione 799. Come per l'integrale unidimensionale, anche per gli integrali doppi è utile generalizzare la nozione di integrale comprendendo anche i casi in cui il dominio di integrazione e/o la funzione integranda siano illimitate. L'integrale generalizzato può essere definito come un opportuno limite di integrali doppi usuali. Non diamo definizioni astratte ma mostriamo attraverso esempi l'utilizzo.

Osservazione 800. Quando la funzione da integrare ha segno costante sul dominio di integrazione non ci sono troppi problemi

Esempio 24.4.1 (Integrale della Gaussiana)**.** Calcoliamo

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Si può calcolare questo integrale come

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{x^2+y^2<R^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \lim_{R\to+\infty} I_R$$

TODO: fixme

dove l'integrale I_R è stato calcolato nell'esempio 1.16 e vale $\pi(1 - e^{-R^2})$. Per $R \to +\infty$ otteniamo $I = \pi$. L'integrale generalizzato proposto, dunque, converge e il suo valore è π.

Osserviamo incidentalmente anche questo permette di calcolare l'integrale unidimensionale notevole

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, dt$$

Infatti

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy = J^2$$

da cui

$$J = \sqrt{I}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$$

Il risultato non è banale perché la funzione e^{-t^2} non ha una primitiva elementare ed è rilevante perché l'integrale della densità gaussiana e^{-t^2} gioca un ruolo molto importante in statistica. Nei complementi vediamo una applicazione di questo integrale notevole

Esempio 24.4.2. Calcoliamo

$$I = \iint_{x^2+y^2<1} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \, dx \, dy \text{per } \alpha > 0$$

La funzione è illimitata. Si può calcolare

$$\begin{aligned} I &= \lim_{r \to 0^+} \int_{r<x^2+y^2<1} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \, dx \, dy = \lim_{r \to 0^+} 2\pi \int_r^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho \; drho \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{r \to 0^+} \frac{2\pi}{2-\alpha} (1 - r^2 - \alpha) = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

con 1 per $\alpha \neq 2$. Se invece $\alpha = 2$ si ha

$$I = \lim_{r \to 0^+} -2\pi \log r = +\infty$$

Pertanto: l'integrale converge se $\alpha < 2$, diverge se $\alpha \geq 2$

Esempio 24.4.3. Un calcolo analogo mostra che

$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \, dx \, dy$$

converge se e solo se $\alpha > 2$.

La convergenza o meno di un integrale doppio generalizzato può essere studiata osservando la convergenza o meno dell'integrale iterato corrispondente, purché la funzione integranda abbia segno costante nell'insieme di integrazione, o per lo meno cambi di segno solo un numero finito di volte. In caso contrario, si possono presentare casi in cui il valore dell'integrale iterato non coincide con quello dell'integrale doppio

Esempio 24.4.4. Studiare la convergenza dell'integrale doppio

$$\iint_D e^{-xy}\, dx\, dy$$

con $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, oppure $D = \{(x, y) : x > 1, y > 1\}$.
Il dominio è illimitato, l'integranda è positiva; calcoliamo l'integrale iterato generalizzato

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} e^{-xy}\, dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left[\frac{e^{-xy}}{-y} \right]_a^{+\infty} dy = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{y}\, dy = \begin{cases} \text{se } a = 0 & \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y} \quad \text{che diverg} \\ \text{se } a = 1 & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy \quad \text{che co} \end{cases}$$

Nel secondo caso, non si sa calcolare il valore esatto dell'integrale

24.5 Il calcolo degli integrali tripli

Tutto quanto detto a proposito di integrali doppi si generalizza a dimensione superiore, cioè per funzioni reali di più variabili. Ci occupiamo qui degli integrali tripli e in seguito faremo un cenno a quelli di funzioni di n variabili.

Nella definizione i rettangoli $[a, b] \times [c, d]$ sono sostituiti dai parallelepipedi $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ dopo di che tutto procede inalterato e si arriva a definire l'integrale triplo di una funzione continua definita su un parallelepipedo.

Per quanto riguarda le funzioni definite su domini più generali, anche in questo caso se il dominio di integrazione ha una rappresentazione analitica abbastanza semplice, si dimostra che una funzione continua risulta integrabile e il suo integrale si può calcolare mediante opportune integrali iterati. Precisamente, si incontrano due situazioni tipiche: integrazione per fili e per strati

Integrazione per fili Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^3$ che si può rappresentare analiticamente nella forma:

$$\Omega = \{(x, y, z) : g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), (x, y) \in D\} \tag{24.14}$$

dove a sua volta D è un dominio regolare del piano e $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ sono continue.

Allora se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, f è integrabile in Ω e l'integrale si può calcolare mediante la formula (detta integrazione di fili):

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int g_1(x, y)^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy \tag{24.15}$$

Geometricamente la 24.15 significa che prima (nell'integrale più interno) si integra sul "filo" $z \in (g_1(x, y), g_2(x, y))$ e poi si fa variare (x, y) nel dominio D (figura?)

TODO: fixme

Esempio 24.5.1. Un dominio che si rappresenta facilmente nella forma richiesta dal teorema precedente è la semisfera superiore con centro nell'origine e raggio R:

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y, z) : 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega_1} x^2 z\,dx\,dy\,dz &= \iint_{x^2+y^2\le R^2}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 z\,dz\right)dx\,dy\\ &= \iint_{x^2+y^2\le R^2} x^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx\,dy\\ &= \iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{1}{2}x^2(R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy\end{aligned}$$

A questo punto l'integrale è ridotto a un integrale doppio; in questo caso il dominio circolare suggerisce di usare le coordinate polari, ottenendo

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{1}{2}\rho^2\cos^2\theta(R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^R(\rho^3R^2-\rho^5)\,d\rho\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}R^2-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^R = \frac{\pi}{24}R^6$$

Integrazione per strati Supponiamo ora che Ω sia un dominio di $\mathbb{R}^3$ rappresentabile nella forma

$$\Omega = \{(x,y,z) : h_1 \le z \le h_2, (x,y)\in\Omega(z)\}$$

dove, a sua volta, per ogni $z\in[h_1,h_2]$, $\Omega(z)$ è un dominio regolare del piano. Allora se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, f è integrabile in Ω e l'integrale si può calcolare mediante la formula (detta integrazione per strati)

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{h_1}^{h_2}\left(\iint_{\Omega(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$$

In questo caso si integra prima sulla sezione (strato) $Omega(\overline{z}) = \Omega\cap\{z=\overline{z}\}$ e poi si fa variare la quota $\overline{z}$ tra le quote minima e massima di z in Ω

Esempio 24.5.2. Un dominio che si rappresenta bene nella forma richiesta dall'integrazione per strati è il cono. Sia:

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \left(\frac{R}{h}z\right)^2, 0\le z\le h\right\}$$

il cono circolare di altezza h, raggio R, vertice nell'origine e asse lungo l'asse z. Per esempio

$$\iiint_{\Omega_2}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h\left(\iint_{x^2+y^2\le\frac{R}{h}z}(x^2+y^2)\,dx\,dy\right)dz =$$

(calcolando l'integrale interno in coordinate polari)

$$= \int_0^h\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{R}{h}z}\rho^3\,d\rho\right)d\theta\right)dz = 2\pi\int_0^h\frac{R^4}{4h^4}z^4\,dz = 2\pi\frac{R^4}{4h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{\pi}{10}R^4h$$

Nel seguito chiameremo domini regolari di $\mathbb{R}^3$ gli insiemi che si possono esprimere come unione di un numero finito di insiemi dei tipi 3.1 e 3.3

TODO: fixme
TODO: fixme

Cambio di variabili negli integrali tripli Anche per il calcolo degli integrali tripli può essere utile eseguire particolari trasformazioni di coordinate. Vale in proposito un teorema perfettamente analogo a quello enunciato per gli integrali doppi:

Teorema 24.5.1 (Formula di cambiamento di variabili negli integrali tripli)**.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\mathbf{T} : D' \to D$ un diffeomorfismo globale, con $(x, y, z) = \mathbf{T}(u, v, w)$*

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \tag{24.16}$$

Allora

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |\det \mathbf{DT}(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

dove $\mathbf{DT}(w, v, w)$ indica la matrice Jacobiana della trasformazione 24.16

Osservazione 801. In pratica il teorema precedente viene applicato osservando che l'elemento di volume si trasforma secondo la legge

$$dx\, dy\, dz = |\det \mathbf{DT}(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

TODO: fixme

Per esempio, per le *coordinate sferiche* (cap 4 par 5 abbiamo

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \rho > 0, \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

$$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

TODO: fixme

Per le coordinate cilindriche (fig)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \rho \in [0, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}$$

$$dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dt$$

Esempio 24.5.3. Calcoliamo

$$I = \iiint_{[0,2]\times[0,1]\times[0,3]} x?2y^3 z\, dx\, dy\, dz$$

Si ha

$$I = \int_0^2 x^2\, dx \int_0^1 y^3\, dy \int_0^3 z\, dz = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} = 3$$

24.6 Derivazione sotto il segno di integrale

Nella deduzione di molti modelli matematici delle scienze applicate ci si trova di fronte al problema di derivare integrali dipendenti da un parametro.

Esempio 24.6.1. Una misura dipendente dal parametro t oltre alle altre variabili può essere scritta così

$$M(t) = \iiint_D f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz$$

Si può essere interessati alla variazione di tale misura rispetto al parametro t, ossia

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \tag{24.17}$$

Come calcolare questa derivata? Ragioniamo così: l'integrale è un limite di somme; la derivata di una somma è la somma delle derivate; se anche l'operazione di limite può essere scambiata con quella di derivata, la derivata rispetto a t si può *portare sotto il segno di integrale.* Si ha allora

$$\frac{d}{dt} \iiint_D f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial l}(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \tag{24.18}$$

Si osservi che la derivata rispetto a t sotto il segno di integrale è una derivata parziale, perché f dipende anche da altre variabili

Sotto ipotesi ragionevoli, la 24.18 si può dimostrare. Vale il seguente

Teorema 24.6.1. *Sia $f : D \times [a, b] \to \mathbb{R}$ con D dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Indicando con $(\mathbf{x}, t)$ i punti di $D \times [a, b]$ supponiamo che f e f_t siano continue in $D \times [a, b]$; allora per ogni $t \in [a, b]$ vale la 24.18*

Lo stesso enunciato vale, a maggior ragione, per integrali doppi o semplici.

Le ipotesi di questo teorema possono essere indebolite, comprendendo in particolare anche il caso in cui gli integrali coinvolti siano generalizzati; questo richiede però una certa cautela. Rinunciando a dare un enunciato preciso in questo caso, diciamo solo che quando si applica la 24.18 bisogna sempre controllare che l'integrale a secondo membro *sia convergente*

Esempio 24.6.2. Mostriamo come la derivazione sotto il segno di integrale sia talvolta un metodo di calcolo di integrali definiti (a partire da altri già noti). Calcoliamo l'integrale (generalizzato) unidimensionale, dipendente dal parametro $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

Deriviamo ora rispetto ad a ambo i membri dell'identità trovata:

$$-\frac{\pi}{a^2} = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{2a}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$$

Abbiamo quindi così calcolato l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}, \quad \text{per ogni } a > 0$$

Il calcolo dello stesso integrale determinando la primitiva di $\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$ sarebbe stato più laborioso.

24.7 Complementi

24.7.1 La funzione Gamma di Eulero

Questa funzione compare in molte questioni probabilistiche. Poniamo per $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt \tag{24.19}$$

L'integrale nella 24.19 è l'integrale generalizzato della funzione reale di variabile reale $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ che dipende dal parametro x; la funzione f è continua in $(0, \infty)$; per $t \to +\infty$ tende a zero molto rapidamente e pertanto risulta integrabile; per $t \to 0^+$ si ha $f(t) \sim t^{x-1}$ che risulta integrabile purché l'esponente $x - 1$ sia > -1 ossia[4] per $x > 0$. Quindi l'integrale in 24.19 è ben definito per ogni $x > 0$ e il suo valore dipende dal parametro x. Pertanto è corretto dire che $\Gamma(x)$ è una funzione, definita in $(0, +\infty)$ a valori reali; Γ viene detta appunto funzione Gamma di Eulero. Nel prossimo teorema alcune proprietà importanti

Teorema 24.7.1. *1. La funzione* Γ *è derivabile infinite volte in* $(0, +\infty)$

2. per ogni $x > 1$ *vale la formula di ricorrenza*

$$\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$$

3. per ogni n *intero positivo è*

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

4. vale l'identità

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\, du$$

Osservazione 802. Le proprietà 1 e 3 ci dicono che la funzione Γ si può vedere come una funzione regolare (infinitamente derivabile) che interpola i valori del fattoriale, cioè che assume i valori $(x-1)!$ quando il suo argomento x è intero, ma è definita su tutta la semiretta $x > 0$. Non stupisce di conseguenza che, alla pari dell'espressione $n!$, la funzione Gamma compaia in tante formule matematiche notevoli

Dimostrazione. Rispettivamente:

1. abbiamo viso in precedenza il problema della derivazione sotto il segno di integrale; anche se nel caso degli integrali generalizzati non abbiamo enunciato un risultato preciso, possiamo osservare che

$$\frac{d^k}{dx^k}[t^{x-1}e^{-t}] = t^{x-1}e^{-t}(\log t)^k$$

e che l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\log t)^k\, dt$$

[4]vedere i criteri di integrabilità studiati per gli integrali generalizzati in una variabile nel volume 1, capitolo 6, paragrafo 8

converge per ogni k. Si può dimostrare (non lo facciamo) che la derivata k-esima della funzione Γ si può effettivamente calcolare derivando sotto il segno di integrale; pertanto Γ è derivabile infinite volte

2. Integriamo per parti nell'integrale generalizzato:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} (t^{x-1})(e^{-t})\, dt = [-t^{x-1}e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (x-1)t^{x-2}e^{-t}\, dt \\ &= 0 + (x-1)\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

dove si è inteso (coerentemente alla definizione di integrale generalizzato):

$$[-t^{x-1}e^{-t}]_0^{+\infty} = \lim_{r\to+\infty}(-r^{x-1}e^{-r}) - \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon^{x-1}e^{-\varepsilon}) = 0 + 0$$

perché per ipotesi $x > 1$

3. dalla 2 abbiamo

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \tag{24.20}$$

mentre direttamente dalla definizione, osserviamo che

$$\Gamma(1) = 1 \tag{24.21}$$

Per ricorrenza delle 24.20 e 24.21 segue che $\Gamma(n) = (n-1)!$

4. è sufficiente calcolare l'integrale che definisce $\Gamma(x)$ col cambio di variabili $t = u^2$

□

Funzione Gamma sui semiinteri Sono a volte utili i valori che $\Gamma(x)$ assume per x semiintero, ossia quando $x = n/2$ con n intero positivo

Se n è pari, $n = 2k$, sappiamo già che

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma(k) = (k-1)! = \left(\frac{n}{2}-1\right)!$$

Occupiamoci quindi del caso n dispari, cioè $n = 2k+1$ con k intero positivo. Il caso più semplice è $k = 0$: dalla 4 del teorema precedente si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} u^{2\cdot\frac{1}{2}-1}e^{-u^2}\, du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du$$

Abbiamo calcolato questo integrale nell'esempio 2.1 del paragrafo 2 provando che vale $\sqrt{\pi}$. Quindi **TODO**: fixme

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Più in generale, usando più volte la formula di ricorrenza per la gamma (punto 2 del teorema) abbiamo, per $k \geq 1$:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k - 1 + \frac{1}{2}\right) =$$
$$\left(k - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(k - 2 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k - 2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(k - 2 + \frac{1}{2}\right)\dots\left(2 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots 5 \cdot 3}{2^{k-1}}\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$$

dove il simbolo $(2k-1)!!$ (semifattoriale) indica per definizione il prodotto di tutti gli interi dispari da $(2k-1)$ in giu:

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3$$

Possiamo quindi scrivere

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{24.22}$$
$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi} \quad \text{per } n \text{ dispari} \geq 3 \tag{24.23}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{per } n \text{ pari} \tag{24.24}$$

24.7.2 Definizioni e proprietà elementari degli integrali in $\mathbb{R}^n$

La definizione di integrale per una funzione di n variabili a valori reali, limitata e definita su un insieme limitato, generalizza in modo naturale quella di integrale doppio e triplo e non la ripeteremo in dettaglio: schematicamente, si considerano funzioni definite su un (iper) parallelepipedo

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n]$$

si suddivide ogni intervallino in k parti uguali (e quindi l'n-scatola iniziale in k^n n-scatole uguali), si definisce in modo naturale una successione $\{s_k\}$ di somme di Cauchy-Riemann di $f : Q \to \mathbb{R}$ e si da la definizione di funzione integrabile e di integrale. Successivamente, si estende la definizione a funzioni definite su un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, al solito modo.

Osserviamo solo che, dal punto di vista notazionale, un integrale in n variabili viene solitamente con un unico simbolo di integrale, nel modo seguente:

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

dove quindi il simbolo $\int_\Omega$ indica già l'integrale multiplo.

Valgono inalterate le proprietà formali dell'integrale (linearità monotonia) così come il fatto che le funzioni continue su un dominio regolare risultino integrabili.

La tecnica di riduzione degli integrali multipli a integrali in dimensione inferire si adatta in maniera naturale, ma è complicata dalle numerose possibilità che ora sostituiscono le sole due forme di integrazione (per fili e per strati) che si presentavano per gli integrali tripli.

Il teorema sul cambio di variabili negli integrali multipli vale in maniera analoga e anche in questo caso il modulo del determinante jacobiano della trasformazione compare nell'espressione dell'elemento infinitesimo di volume.

In questo contesto, facciamo qualche osservazione sull'uso delle coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ e su alcune questioni collegate

Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ La trasformazione di coordinate che lega coordinate euclidee e polari (dette anche ipersferiche) in $\mathbb{R}^n$ è data da

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta_1 \\ x_2 = \rho \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_3 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ \dots \\ x_{n-1} = \rho \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\ x_n = \rho \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \end{cases} \tag{24.25}$$

dove $\rho = \|\mathbf{x}\|$, l'ultimo angolo θ_{n-1} varia in $[0, 2\pi)$ mentre tutti gli altri variano in $[0, \pi]$

Si può dimostrare che l'elemento infinitesimo di volume ha la forma

$$dx_1\, dx_2 \dots\, dx_n = \rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{n-1}\, d\rho\, d\theta_1\, d\theta_2 \dots\, d\theta_{n-1}$$

Per certi scopi, è sufficiente ricordare che l'elemento infinitesimo ha la forma

$$dx_1\, dx_2 \dots\, dx_n = \rho^{n-1}\, d\rho \cdot \omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})\, d\theta_1\, d\theta_2 \dots\, d\theta_{n-1}$$

per una opportuna funzione ω (quest'ultimo fatto si capisce facilmente osservando la struttura delle equazioni 24.25 e quindi la forma che assumerà la matrice Jacobiana)