Probabilità

29 luglio 2023

Indice

1 Calcolo combinatorio

Fattoriale In R il fattoriale è ottenuto mediante la funzione `factorial`; poi nei casi di fattoriali di numeri molto grandi si può utilizzare `lfactorial` che calcola il logaritmo naturale del fattoriale di un numero, ossia $\log(n!)$. Nell'ultimo esempio di sotto si ha che approssimativamente $1000000! = 10^{5565709}$

```
factorial(4)

## [1] 24

factorial(1000000)

## [1] Inf

lfactorial(1000000)

## [1] 12815518

# convertiamo in logaritmo base 10
lfactorial(1000000)/log(10)

## [1] 5565709
```

Coefficiente binomiale Il coefficiente binomiale è implementato in R, mediante `choose`, mentre `lchoose` ne calcola il logaritmo:

```
choose(4,2)

## [1] 6

choose(1e06, 500)

## [1] Inf

lchoose(1e06, 500)

## [1] 4296.3
```

Permutazioni Per determinare tutte le permutazioni di un vettore si può utilizzare `permn` dal pacchetto `combinat`:

```
combinat::permn(1:3)

## Error in loadNamespace(x):  non c'è alcun pacchetto chiamato 'combinat'
```

Combinazioni Per la determinazione delle combinazioni degli elementi da un vettore `x` presi tot (nell'esempio 2) alla volta si usa `combn`:

```
combn(letters[1:4], 2)

##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
## [1,] "a"  "a"  "a"  "b"  "b"  "c"
## [2,] "b"  "c"  "d"  "c"  "d"  "d"
```

2 Simulazione

2.1 Impostazione del seme

Ogni volta che si simulano variabili casuali, è necessario impostare il seme della generazione con `set.seed`, al fine di assicurare riproducibilità su altre macchine della generazione effettuata.
Ogni volta che si reimposta il seme della generazione, la simulazione "riparte" ottenendo gli stessi risultati, come mostra il seguente esempio

```
set.seed(1)
rnorm(3)

## [1] -0.6264538  0.1836433 -0.8356286
```

Nome variabile	`varcas`	Tipo v.c.
Binomiale	`binom`	discreta
Chi-squared	`chisq`	continua
F	`f`	continua
Ipergeometrica	`hyper`	discreta
Normale	`norm`	continua
Poisson	`pois`	discreta
T di Student	`t`	continua
Uniforme	`unif`	continua

Tabella 1: Variabili casuali standard in R

```
rnorm(3)

## [1]  1.5952808  0.3295078 -0.8204684

set.seed(1)
rnorm(3)   #uguale alla prima sequenza generata

## [1] -0.6264538  0.1836433 -0.8356286
```

Sulla scelta del seme: meglio che sia casuale

2.2 Generazione di numeri casuali ed estrazioni da un'urna

2.2.1 Variabili casuali e funzioni rilevanti

In R si prevede che per la generica variabile casuale `varcas`, i cui principali tipi sono riportati in tabella 1 vi siano 4 funzioni principali:

- `dvarcas(x,..` genera la distribuzione di probabilità o la funzione di densità della v.c. nei valori x, con parametri della vc specificati al posto dei ...
- `pvarcas(x,..` genera la funzione di ripartizione della v.c. nei valori x, con parametri della vc specificati al posto dei ...
- `qvarcas(prob,..` genera i quantili della v.c. nei valori designati da `prob`, con parametri della vc specificati al posto dei ...
- `rdvarcas(n,..` genera n valori pseudo casuali per la vc, con parametri della vc specificati al posto dei ...

Ai fini della simulazione, le funzioni più utili sono quelle della famiglia `rvarcas`.

2.2.2 L'uso di `sample`

La funzione **`sample`** estrae casualmente da un set di oggetti scalari (es vettore).

```
str(sample)

## function (x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
```

dove:

- `x` è l'oggetto (urna) dalla quale effettuare il sampling
- `size` è il numero di campioni estratti
- `replace` specifica se il campionamento deve esser fatto con reimmissione
- `prob` specifica la probabilità di estrazione di ogni elemento in x (qualora questa non sia uniforme)

Di default il sampling è effettuato senza replacement:

```
set.seed(2)
sample(1:10, 3)

## [1] 5 6 9

sample(1:10, 3)

## [1] 8 1 5

## permutazione
sample(1:5)

## [1] 1 4 5 3 2

sample(1:5)

## [1] 3 1 5 2 4

## campionamento con ripetizione
sample(1:4, 4, replace=T)

## [1] 4 2 3 3
```

La funzione sample permette di fatto di di **estrarre da una distribuzione arbitraria** (prima la specifichiamo nel vettore, poi estraraiamo da essa) e questo può esser utile nelle applicazioni pratiche. Particolarmente utile è l'opzione `prob` che specifica la probabilità di estrazione di ogni singolo elemento.
Alcuni esempi seguenti simulano un dado a 6 facce, prima equilibrato, poi truccato (con 6 molto più probabile)

```r
## 5 lanci da dado equilibrato
sample(1:6, 10, replace=T)

##  [1] 1 6 1 4 3 6 1 6 5 6

## 5 lanci da dado non equilibrato
sample(1:6, 10, replace=T, prob = c(rep(.1,5), .5) )

##  [1] 4 6 1 6 6 6 1 5 1 6
```

2.3 L'impiego di `replicate`

Supponendo di volere simulare diversi campioni e su si essi dover applicare una funzione per analizzare la distribuzione dei risultati, possiamo utilizzare replicate

```r
str(replicate)

## function (n, expr, simplify = "array")
```

Ad esempio per calcolare la media di 5 campioni composti ciascuno da 100 estrazioni da un'urna normale

```r
replicate(5, mean(rnorm(100)))

## [1] -0.018463541 -0.003781908  0.101662525  0.231861455 -0.027696960
```

2.4 Applicazioni varie

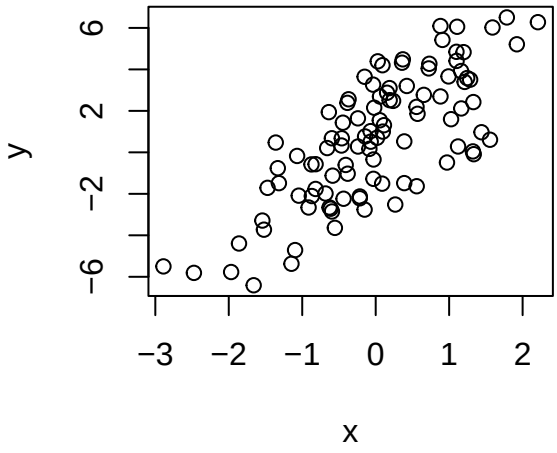
2.4.1 Simulazione di dati per un modello di regressione

Supponendo di voler simulare dal seguente modello lineare

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

con $\epsilon \sim N(0, 4)$, assumendo $x \sim N(0, 1)$, $\beta_0 = 0.5$ e $\beta_1 = 2$

```r
set.seed(20)
x <- rnorm(100)
e <- rnorm(100, 0, 2) # la varianza è 4 ma qui dobbiamo impostare sd
y <- 0.5 + 2*x + e
plot(x,y)
```



Se x è **binaria**, invece, usiamo `rbinom`

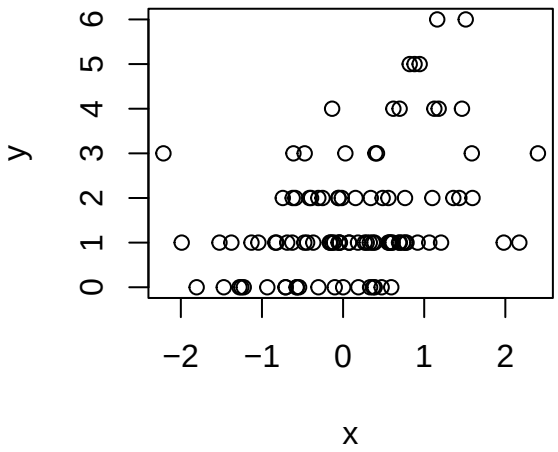
```
set.seed(10)
x <- rbinom(100, 1, 0.5)
e <- rnorm(100, 0, 2)
y <- 0.5 + 2*x + e
```

Supponiamo ora di voler simulare da un modello di poisson, con dati di conteggio, ed errore poissoniano dove

$$Y \sim Poisson(\mu) \tag{1}$$
$$\log \mu = \beta_0 + \beta_1 x \tag{2}$$

e dove $\beta_0 = 0.5$ e $\beta_1 = 0.3$. Dobbiamo impiegare la funzione `rpois`:

```
set.seed(1)
x <- rnorm(100)
log.mu <- 0.5 + 0.3*x  # predittore lineare
y <- rpois(100, exp(log.mu))
plot(x, y)
```


y
0
1
2
3
4
5
6
−2
−1
0
1
2
x