

Übungsstunde 4

Freitag, 13. Oktober 2023 09:01

Bisher: EA konstruieren welcher eine Sprache erkennt

Jetzt: Existenz eines EA widerlegen via Nichtregularitätsbeweise

Nichtregularitätsbeweise:

Möglichkeit: Lemma 3.3 > Pumping-Lemma > Kolmogorov

Zunächst zeigen wir die Nichtregularität von $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ anhand aller Methoden

Via Lemma 3.3: Widerspruchssannahme: Angenommen L ist regulär. $\Sigma := \{0, 1\}$

Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, S, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Betrachte die $|Q|+1$

Wörter $\underline{O^i}$ für $k \in \{1, \dots, |Q|+1\}$ Wie beim PL steht und fällt der Beweis durch die Wahl der Wörter. Diese sind $\underline{(O, O^2, \dots, O^{|Q|+1})}$. Da die Menge der Wörter größer ist als die Anzahl Zustände $|Q|$ existieren nach dem Schubfachprinzip $i, j \in \{1, \dots, |Q|+1\}$ mit $i < j$ s.d. $\hat{s}(q_0, \underline{O^i}) = \hat{s}(q_0, \underline{O^j})$. Nach Lemma 3.3 muss nun $\forall z \in \{0, 1\}^*$: $\underline{O^i z} \in L \Leftrightarrow \underline{O^j z} \in L$ gelten.

Wähle $z = \underline{1^l}$. Dann gilt $\underline{O^i 1^l} \in L$ aber $\underline{O^j 1^l} \notin L$ $\not\rightarrow$ Widerspruch \square

Lets Pump: Widerspruchssannahme: Angenommen L ist regulär

Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| > n_0 \exists x, y, z \in \{0, 1\}^*$ s.d. $w = xyz$ und

$$i) |y|x| \leq n_0$$

$$ii) |x| > 1$$

$$iii) M := \{y x^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L \text{ oder } M \cap L = \emptyset.$$

Wir wählen das Wort $w = \underline{O^{n_0} 1^{n_0}}$. Da $|w| = 2n_0 > n_0 \exists x, y, z \in \{0, 1\}^*$ s.d.

wegen i) $y = \underline{O^l}$, $x = \underline{O^m}$ mit $l, m \in \mathbb{N}$ und $l+m \leq n_0$, also insbesondere

wegen ii) $m \geq 1$. Also $z = \underline{O^{n_0-(l+m)} 1^{n_0}}$.

Insbesondere ist dies die einzige mögliche Zerlegung von w , welche die Voraussetzungen des PL erfüllt!

$$\text{Fall 1: } k=1. yxz = \underline{O^l O^m O^{n_0-(m-l)} 1^{n_0}} = \underline{O^{n_0} 1^{n_0}} \notin L$$

$$\text{Fall 2: } k=0. yx^0 z = yz = \underline{O^l O^{n_0-(l+m)} 1^{n_0}} = \underline{O^{n_0-m} 1^{n_0}} \in L, \text{ da } 1 \leq m \leq n_0 \not\rightarrow$$

Dies ist ein Widerspruch zu iii), also ist L nicht regulär. \square

Via Kolmogorov-Komplexität: Widerspruchsaussnahme: Angenommen L ist regulär.

! Kolmogorov kann nur über dem Alphabet Σ_{bool} verwendet werden, also z.B. nicht

über $\{0, 1, \#\}$! Wähle $x = \underline{0^d} \underline{1^d}$ Betrachte die Sprache $L_x = \{y \in \{0, 1\}^* \mid xy \in L\}$

Vielleicht ist das $\underline{1^d}$ Wort in L_x $\underline{1^d}$. Nach Satz 3.1 $\exists c \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$K(\underline{1^d}) \leq \lceil \log_2(\underline{1^d} + 1) \rceil + c = c + 1 = d$$

Da es nur endlich viele Programme mit binärer Länge $\leq d$ ($\sum_{i=1}^d 2^i = 2^{d+1} - 2$) gibt, aber ∞ -viele Wörter der Form 0^m , ist dies ein Widerspruch. Also ist L nicht regulär. \square

Alles in blau sind Stellen, die je nach vorgegebener Sprache angepasst werden müssen.

Bei der KK ist es oft sinnvoll, das jeweils zweite Wort der Sprache L_x zu betrachten. Allgemein ist die KK für gewöhnlich die kompakteste Lösung.

Aufgabe: Zeige mittels dem Pumping-Lemma, dass $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Per Widerspruch. Angenommen L sei regulär. Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$\forall w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| > n_0 \exists x, y, z \in \{0, 1\}^*$ s.d. $w = xyz$ und

i) $|xy| \leq n_0$

ii) $|x| > 1$

iii) $M := \{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = 0^{n_0} 1^{n_0}$. Da $|w| = 2n_0 > n_0 \exists x, y, z \in \{0, 1\}^*$ s.d.

wegen i) $y = 0^L$, $x = 0^m$ mit $L, m \in \mathbb{N}$ und $L+m \leq n_0$, also insbesondere

wegen ii) $m \geq 1$. Also $z = 0^{n_0-(L+m)} 1^{n_0}$.

Insbesondere ist dies die einzige mögliche Zerlegung von w , welche die Voraussetzungen des PL erfüllt! Wir zeigen nun, dass iii) nicht erfüllt ist.

Fall 1: $k=1$. $yxz = 0^L 0^m 0^{n_0-(m+L)} 1^{n_0} = 0^{n_0} 1^{n_0} \notin L$

Fall 2: $k=0$. $yx^0z = yz = 0^L 0^{n_0-(L+m)} 1^{n_0} = 0^{n_0-m} 1^{n_0} \in L$, da $1 \leq m \leq n_0$. \checkmark

Dies ist ein Widerspruch zu iii), also ist L nicht regulär. \square

Aufgabe: Zeige, dass $L_2 = \{0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir verwenden die Methode der KK.

Beweis per Widerspruch. Angenommen L_2 sei regulär. Wähle $x = 0^{\binom{2n}{n}}$. Betrachte die Suffixsprache $L_x = \{y \in \{0\}^* \mid xy \in L_2\}$. Setze $m := \binom{2(n+1)}{n+1} - \binom{2n}{n}$. Dann ist das zweite Wort in L_x 0^m . Nach Satz 3.1 existiert eine von m & n unabhängige Konstante C , s.d. $K(0^m) \leq C + \lceil \log_2(2+1) \rceil \leq C+2 =: d$.

Da es nur endlich viele Programme mit binärer Länge $\leq d$ ($\sum_{i=1}^d 2^i = 2^{d+1} - 2$) gibt, aber ∞ -viele Wörter der Form 0^m , ist dies ein Widerspruch. Also ist L_2 nicht regulär. \square

Aufgabe: Zeige, dass $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir beweisen per Widerspruch. Angenommen L sei regulär. Sei $L_{0^m1} = \{y \in \{0,1\}^* \mid 0^m1y \in L\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_2$. $y = 0^m1$ ist das erste Wort in L_{0^m1} für jedes m . Nach Satz 3.1 existiert eine von m unabhängige Konstante c , s.d. $K(0^m1) \leq \lceil \log_2(1+1) \rceil + c =: d$. Dies kann nicht sein, da eine endliche Menge von Programmen der Länge höchstens d keine unendliche Menge von verschiedenen Wörtern der Form 0^m1 generieren kann. Folglich ist L nicht regulär. \square

Aufgabe: $\tilde{L} = \{w \in \{0,1\}^* \mid |uw|_0 = |u|_1 \text{ für alle Präfixe } u \text{ von } w\}$ ist nicht regulär.

Das PL bietet sich häufig an, wenn wir Zählbedingungen in der Sprache haben. Widerspruchsbeweis. Angenommen \tilde{L} ist regulär. Sei n_0 die Konstante aus dem PL. Wir wählen das Wort $w = 1^{n_0} 0^{n_0}$. Offenbar gilt $|w| \geq n_0$.

Also muss es eine Zerlegung $w = yxz$ von w geben der die Bedingungen im PL erfüllt. Wegen

i) gilt: $|yx| \leq n_0 \Rightarrow y = 1^L \text{ und } x = 1^m \text{ für } L, m \in \mathbb{N} \text{ mit } L+m \leq n_0$, insbesondere $m \leq n_0$.

Wegen ii) gilt weiter $m > 0$. Da $w \in \tilde{L}$, gilt nach ii), dass auch $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1^{n_0+(k-1)m} 0^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{L}$ (da $yx^0z = 1^{n_0-m} 0^{n_0} \notin \tilde{L}$) da $n_0 - m < n_0$ und da jedes Wort ein Präfix von sich selbst ist. \square

Jecke lieder:

Stadt met K - Kasalla

Mer losse d'r Dom in Kölle - Bläck Fööss

Denn wenn et Trömmelche jent - Räuber

E+ jitt kei Wood - Cat Ballou

Jecket video:

Monster among men - Das Freak

Kir Royal - fette Ansage (Mario Adorf)

Warum Deutsche Lichtenstein lieben sollte | ZDF Magazin Royale 2³⁰ - 2⁵⁵ min