Übungsstunde 5

Sonntag, 22. Oktober 2023 10:39

Nicht-Regularität: $L = \{ w^i \mid i \in \mathbb{N} \} \subseteq \{0\}^*$ mit $|w_{i+1}| - |w_i| \geq \log_2 \log_2 i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ ist nicht regulär

Beweis: Angenommen L ist regulär. Da wir eine Bedingung über die Länge der Wörter gegeben haben, nehmen wir das **PL** um einen Widerspruch herzuleiten.
Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall w \in \{0\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x, z zerlegen lässt, s.d. 1) $|yx| \leq n_0$, 2) $|x| \geq 1$ und 3) $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} =: M \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$
Sei $w \in L$ mit $i > 2^{2^{n_0}}$ $\left(|w_{i+1}| - |w_i| \geq \log_2 \log_2 2^{2^{n_0}} = n_0 \right)$. Dann muss es eine Zerlegung $w_i = yxz$ welche 1) - 3) erfüllt geben. Mit 1) & 2) folgt: $1 \leq |x| \leq n_0$.
Da $w_i \in L$ gilt nach 3): $M \subseteq L$, aber $|yx^2z| > |w_i|$ und $|yx^2z| \leq |yx| + n_0 + |z|$
$= |w_i| + n_0 = |w_i| + \log_2 \log_2 i \leq |w_{i+1}|$ also $yx^2z \notin L$ $\lightning$ $\square$

Minimaler Automat:

Aufgabe: Jeder EA der $L_3 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält das Teilwort ab gleich oft wie ba$\}$ akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein EA mit $L(M) = L_3$.
Seien $x, y \in \{a,b\}^*$ $x \neq y$, s.d. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$. Dann gilt $\forall z \in \{a,b\}^*$:

$$xz \in L(M) \iff yz \in L(M)$$

Wir konstruieren nun 5 paarweise verschiedene Wörter $w_i \in \{a,b\}^*$, $1 \leq i \leq 5$, s.d. für ein $z \in \{a,b\}^*$ Folgendes gilt: $\neg (w_i z \in L(M) \iff w_j z \in L(M))$ (I) für $1 \leq i < j \leq 5$.
Nach obigem Lemma müssen dann alle w_i, $1 \leq i \leq 5$ in verschiedenen Startzuständen liegen.
(i.e. $\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$, $1 \leq i < j \leq 5$).
Wähle $w_1 = \lambda$, $w_2 = a$, $w_3 = b$, $w_4 = ab$, $w_5 = ba$

	w_2	w_3	w_4	w_5
w_1	b	a	λ	λ
w_2	/	ba	λ	λ
w_3	/	/	λ	λ
w_4	/	/	/	a

Einträge sind z

Damit haben wir 5 paarweise verschiedene Wörter mit Eigenschaft (I), woraus folgt, dass M mindestens 5 Zustände hat.

Aufgabe: Jeder EA der $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b) \bmod 3 = 1 \text{ oder } w \text{ endet mit } b\}$ akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein EA mit $L(M) = L_3$.
Seien $x, y \in \{a,b\}^*$ $x \neq y$, s.d. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$. Dann gilt $\forall z \in \{a,b\}^*$:

$$xz \in L(M) \iff yz \in L(M)$$

Wir konstruieren nun 5 paarweise verschiedene Wörter $w_i \in \{a,b\}^*$, $1 \leq i \leq 5$, s.d. für ein $z \in \{a,b\}^*$ folgendes gilt: $\neg(w_i z \in L(M) \iff w_j z \in L(M))$ (I) für $1 \leq i < j \leq 5$.
Nach obigem Lemma müssen dann alle w_i, $1 \leq i \leq 5$ in verschiedenen Startzuständen liegen. (i.e. $\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$, $1 \leq i < j \leq 5$).

Wähle $w_1 = \lambda$, $w_2 = a$, $w_3 = b$, $w_4 = ab$, $w_5 = aa$

	w_2	w_3	w_4	w_5
w_1	λ	λ	λ	aa
w_2	/	aa	aaa	λ
w_3	/	/	a	λ
w_4	/	/	/	λ

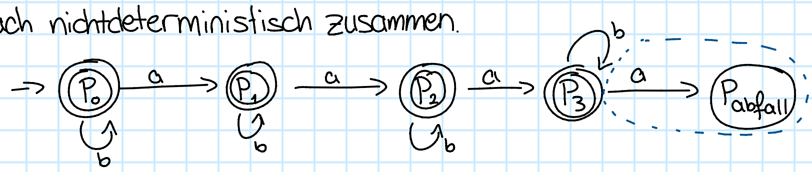
Einträge sind z

Damit haben wir 5 paarweise verschiedene Wörter mit Eigenschaft (I), woraus folgt, dass M mindestens 5 Zustände hat. $\square$

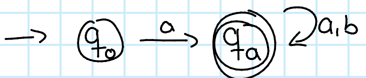
NEA $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \leq 3 \text{ oder } w \text{ beginnt mit } a\}$

Lösung: Wenn wir in einer Sprache eine "oder" Bedingung haben, ist dies ein starkes Indiz für die Konstruktion eines NEA. Wir konstruieren zuerst jeweils einen NEA für die in L enthaltenen Teilsprachen $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \leq 3\}$ und $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } a\}$ und fügen sie danach nichtdeterministisch zusammen.

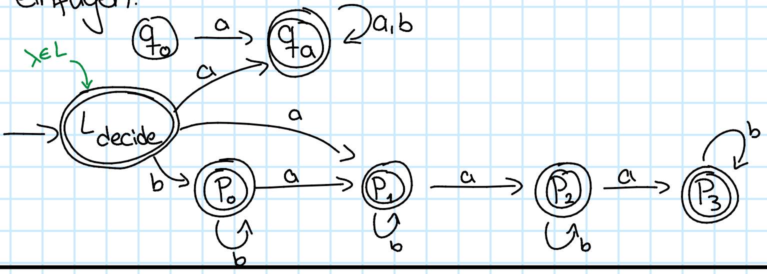
L_1:



L_2:



Wir fügen obige NEA's nun zusammen, indem wir zu beginn einen nichtdeterministischen Zstd. einfügen.



$\square$

Aufgabe: Sei $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ eine beliebige binäre Funktion zur Kodierung von Binärwörtern. Sei $n \in \mathbb{N}$, zeige, dass für min. die Hälfte aller Wörter $w \in \{0,1\}^{\leq n}$ gilt: $|f(w)| \geq |w|$

Beweis: Sei $A = \{0,1\}^{<n}$, $B = \{0,1\}^{\leq n}$. Es gilt: $|A| = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$, $|B| = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Bemerke, dass $|f(w)| < |w|$ für $w \in B \iff f(w) \in A$.

Da f injektiv ist, gilt dass die Anzahl $w \in B$ mit $f(w) \in A$ nicht grösser als $|A|$ sein kann. Definiere $B_{\geq} := B - \underbrace{\{w \in B \mid f(w) \in A\}}_{=: B_<} = \{w \in B \mid |f(w)| \geq |w|\}$. Folglich:

$|B_{\geq}| = |B| - |B_<| \geq |B| - |A| > |B|/2$ $\square$

Aufgabe:

a) Gebe eine steigende unendliche Folge natürlicher Zahlen an, s.d. bei der Faktorisierung aller dieser Zahlen insgesamt nur endlich viele Primfaktoren vorkommen

b) Sei $(n_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ eine steigende ∞-Folge mit KK $K(n_i) \geq \lceil \log_2(n_i) \rceil$.

Zeige, dass bei der Faktorisierung aller Zahlen n_i insgesamt ∞-viele Primfakt. vorkommen.

Beweis:

a) $(3^n)_{n \geq 1}$

b) Beweis per Widerspruch. Angenommen es kommen nur endlich viele Primzahlen vor.

Sei p_m die grösste vorkommende Primzahl. Dann lässt sich jede Zahl n_i eindeutig als $n_i = p_1^{r_{i,1}} \cdot \ldots \cdot p_m^{r_{i,m}}$ für $r_{i,1}, \ldots, r_{i,m} \in \mathbb{N}$ darstellen. Sei A ein Programm, das für gegebene $r_{i,1}, \ldots, r_{i,m}$ die binäre Darstellung von n_i erzeugt. Sei c die bin. Länge des Teils von A, der $\forall i \in \mathbb{N}$ gleich ist (alles außer $r_{i,1}, \ldots, r_{i,m}$):

$$K(n_i) \leq c + \sum_{j=1}^{m} \lceil \log_2(r_{i,j} + 1) \rceil \overset{r_{i,j} \leq \log_2 n_i \ \forall j \in \{1,\ldots,m\}}{\leq} c + m \cdot \lceil \log_2(\log_2 n_i + 1) \rceil \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Dann gilt aber $\lceil \log_2(n_i) \rceil \leq c + m \lceil \log_2(\log_2(n_i) + 1) \rceil$ $\forall i$ (m, c sind Konstant) $\lightning$

Da die Ungleichung nur für endlich viele Zahlen erfüllt sein kann. $\square$

Aufgabe: Sei $w_n = 0^{2^{2^{3n}}} \in \{0\}^*$. Finde eine möglichst gute obere Schranke für $K(w_n)$ in der Länge $|w_n|$ an.

Lösung: Folgendes Programm generiert w_n:

```
begin
  N := 2^(2^(3*n))
  for i = 1, ..., N begin
    write(0)
  end
end
```

Das Programm ist $\forall n \in \mathbb{N}$ identisch bis auf die binäre Länge von n. Folglich gilt: $K(w_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c$

Da $|w_n| = 2^{2^{3n}}$, gilt $n = \frac{1}{3} \log_2(\log_2(|w_n|))$ $\square$

Behaupt.: Sei $(p_i)_{i\geq 1}$ alle Primzahlen s.d. $p_i < p_{i+1}$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq n_0$: $K(p_n) < \log_2(p_n) - 2$

Hinweis: Aus dem Primzahlsatz folgt $p_n \in \Theta(n \cdot \ln(n))$ p_n nach oben und unten durch $n \cdot \ln(n)$ beschränkt

Beweis: Es lässt sich ein einfacher Algorithmus konstruieren, der aus n die n-te Primzahl p_n generiert. Also $K(p_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + e \doteq \log_2(n) + c$.

Hinweis $\Rightarrow$ $p_n \geq d \cdot n \cdot \ln(n)$ für ein $d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\log_2(p_n) - 2 \geq \log_2(d n \ln(n)) - 2 = \log_2(d) + \underbrace{\log_2(n)}_{\text{Worst case, also } <\text{, dann alles super}} + \log_2(\ln(n)) - 2$$

Setze nun die Abschätzung ein: $K(p_n) \leq \log_2(n) + c \overset{!}{<} \log_2(d) + \log_2(n) + \log_2(\ln(n)) - 2$

$$\iff c < \log_2(d) + \log_2(\ln(n)) - 2$$

$$\iff c - \log_2(d) + 2 < \log_2(\ln(n))$$

$$\iff \exp(2^{c - \log_2(d) + 2}) < n$$

Somit gilt die Behauptung $\forall n \geq n_0 := \exp\left(\frac{2^{c+2}}{d}\right) + 1$ $\square$

Beh.: $L = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0},\ n \leq m \leq 2n\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Benutze Lemma 3.3

Sei L regulär. Dann $\exists$ EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Betrachte $(\lambda, 0, \ldots, 0^{|Q|})$.

Nach dem Schubfachprinzip existieren $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ mit $i < j$ s.d. $\delta^*(q_0, 0^i) = \delta^*(q_0, 0^j)$.

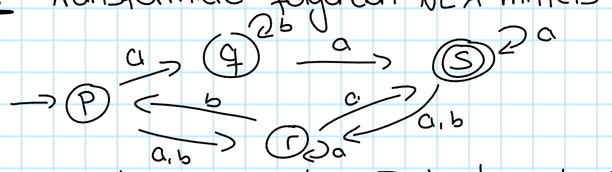
Nach Lemma 3.3. gilt $\forall z \in \{0,1\}^*$: $0^i z \in L \iff 0^j z \in L$.

Wähle $z = 1^i$. Dann gilt $0^i 1^i \in L$, aber $0^j 1^i \notin L$, da $j > i$ ↯ $\square$

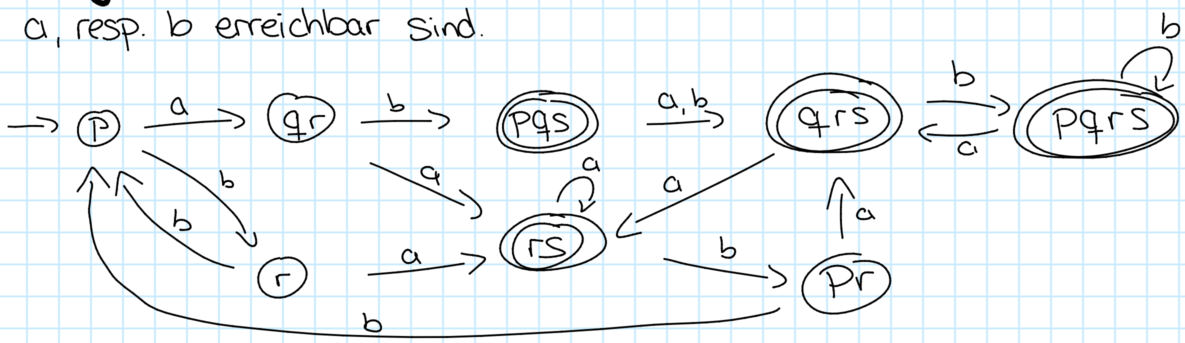
⚠ Nach Satz 3.2. existiert zu jedem NEA M ein EA A, s.d. $L(M) = L(A)$.

Diese Transformation gelingt uns mittels der Potenzmengenkonstruktion.

Aufgabe: Transformiere folgenden NEA mittels Potenzmengenkonstruktion in einen EA.



Lösung: Wir schauen in jedem Zustand, welche Zustände durch das Einlesen von a, resp. b erreichbar sind.



$\square$

Serienbingo:

A13 sehr wichtig

A14 Das Cardio unter den Kraftübungen

A15 sehr wichtig

Bonusaufgabe: **a)** sehr wichtig

b) nein