

**Analysis I/II – Aufgabensammlung**  
**(aus alten Basis-Prüfungen)**  
ETH Zürich

Berücksichtige Prüfungen:  
HS15 / HS14 / FS14 i / FS14 ii / FS13 / HS12

<b>Induktion</b>	<b>3</b>
<b>Komplexe Zahlen - Umrechnung</b>	<b>3</b>
<b>Grenzwert Bestimmung</b>	<b>3</b>
<b>Supremum / Infimum und Maximum / Minimum</b>	<b>4</b>
<b>Umkehrsatz</b>	<b>5</b>
<b>Konvergenz (mit teilweise Grenzwert Bestimmung) / Grenzfunktionen</b>	<b>5</b>
<b>Stetigkeit</b>	<b>6</b>
<b>Potenzreihen</b>	<b>7</b>
<b>Existenz einer Lösung (wahrscheinlich Piccard-Lindelöf) und Taylor-Polynom</b>	<b>8</b>
<b>Taylor-Polynom</b>	<b>8</b>
<b>Differential-Gleichungen</b>	<b>8</b>
<b>Differenzieren</b>	<b>9</b>
<b>Integrale</b>	<b>10</b>
Normale Berechnung (mit üblichen Methoden):	10
Wegintegrale	11
Integrale über Gebiete:	13
Fläche von Gebieten:	14
Oberflächenintegrale	16
<b>Kritische Punkte / Extrempunkte</b>	<b>16</b>
<b>Kurvendiskussion</b>	<b>18</b>

## Induktion

- b) [3 Punkte] Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes  $n \geq 1$  und  $0 \leq \epsilon \leq 1$  gilt:

$$(1 + \epsilon)^n \leq 1 + (2^n - 1)\epsilon. \quad (\text{FS 13})$$

## Komplexe Zahlen - Umrechnung

- b) [3 Punkte] Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2 + i)e^{i\pi/2} + \frac{i - 1}{2 + i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form  $z = x + iy$ , mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . (HS 15)

- a) i) [2 Punkte] Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{2i - 4}{1 + i} - \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

in der Form  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- ii) [1 Punkt] Schreiben Sie die komplexe Zahl  $z = -2 + 2i$  in Polarform.

(HS14)

- a) [2 Punkte] Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form  $x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\sqrt{\sqrt{3}i - 1}$$

(FS 14 i)

- a) [2 Punkte] Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form  $x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{2 - i}{4 + 3i}$$

(FS 13)

## Grenzwert Bestimmung

- a) [3 Punkte] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right).$$

(HS 15)

- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) \cdot \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

(HS 14)

- c) [2 Punkte] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + x + 2}{e^{-x} + 3x + \sin x}.$$

(FS 14 i)

- a) [5 Punkte] Sei  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$  mit  $a_0 = 1$  und  $\mathbb{N} \ni n \geq 0$ . Finden Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt ist.

(FS 14 i)

2. a) [6 Punkte] Sei  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$  mit  $a_0 = \sqrt{2}$  und  $\mathbb{N} \ni n \geq 0$ . Finden Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt ist.

(FS 14 ii)

- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{e^x - 1}{x} \right).$$

(FS 14 ii)

- c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{x \sin x}.$$

(FS 13)

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{(x+3)(x+6)} \right),$$

(2 Punkte)

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin(x) + 2x^2}{4\ln(1+x) - \sin(4x) + 2x^2},$$

(2 Punkte)

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}, \text{ wobei } p, q \text{ ganze strikt positive Zahlen bezeichnen.}$$

(2 Punkte)

(HS 12)

## Supremum / Infimum und Maximum / Minimum

- b) [2 Punkte] Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{1 + |\cos(x)|}{1 + x^4} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

falls diese existieren.

(FS 14 i)

3. Finden Sie das Maximum und das Minimum der Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = |x^2 - x| + |x|.$$

(2 Punkte)

(HS 12)

## Umkehrsatz

- c) [4 Punkte] Berechnen Sie  $(g^{-1})'(0)$  für  $g(x) := \int_0^{2x} e^{t^2} dt$ .

(HS 14)

## Konvergenz (mit teilweise Grenzwert Bestimmung) / Grenzfunktionen

- a) [5 Punkte] Die Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$  ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \quad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$  auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  falls dieser existiert.

- b) [2 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 3}.$$

- c) [2 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\log 3)^n}.$$

(HS 15)

2. a) [2 Punkte] Untersuchen Sie die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$$a_n = \arctan(n) \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

auf Konvergenz.

- b) [2 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{2^n 3^n}.$$

- c) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge  $f_n(x) := \sin(\frac{x}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert. Bestimmen Sie die Grenzfunktion  $f$ .

(HS 14)

- b) [2 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(FS 14 ii)

2. a) [4 Punkte] Untersuchen Sie die Zahlenfolge  $a_n = \frac{1 - \sqrt{(1 + \frac{2}{n})(1 - \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}}$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Ist sie beschränkt? Konvergiert sie? Wenn ja: Was ist der Grenzwert?  
b) [4 Punkte] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^j}{2^{j+1} - j}$$

(FS 13)

1. Zeigen Sie dass, die rekursiv definierte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge wächst und durch  $c = 2$  beschränkt ist.

(4 Punkte)

(HS 12)

## Stetigkeit

3. Sei  $f_n(x) = \begin{cases} 1 - 2nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 0, & \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}, \\ 1 - 2n + 2nx, & 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$  und  $f_n(x+k) = f_n(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$

- a) [1 Punkte] Machen Sie eine Skizze von  $f_n(x)$ .  
b) [2 Punkte] Zeigen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :  $f_n(x)$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  gleichmäßig stetig.  
c) [4 Punkte] Konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  punktweise auf  $\mathbb{R}$ ? Begründen Sie!  
Falls ja, bestimmen Sie die Limesfunktion und untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

(FS 14 i)

- b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  konvergiert.

(FS 13)

3. Sei  $f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}$  für  $x \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) [4 Punkte] Zeigen Sie:  $f_n(x)$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  (fixiert) auf  $[0, \infty)$  gleichmäßig stetig.  
Hinweis: Für  $n$  fix dürfen Sie verwenden, dass  $|f'_n(x)|$  auf dem Intervall  $[1, \infty)$  für  $x \rightarrow \infty$  monoton fallend ist.

(FS 13)

## Potenzreihen

- c) [4 Punkte] Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

durch eine Potenzreihe in  $x$  dar.

(HS 15)

3. [8 Punkte] Die Funktionen
- $f, g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
- seien gegeben durch

$$f(x) := \int_0^x \log(y+1) dy \quad \text{und} \quad g(x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{(k+1) \cdot k}.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  existiert, so dass für alle  $x \in [0, 1)$  gilt:

$$f(x) + C = g(x)$$

und bestimmen Sie die Konstante  $C$ .**Hinweis:** Taylor-Entwicklung.

(HS 14)

**(Nicht sicher ob es wirklich eine Potenzreihen Aufgabe ist)**

- b) [2 Punkte] Für welche
- $x$
- konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{j+2}{j} \right)^j x^j ?$$

**Hinweis:** Bestimmen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzverhalten am Rand.

(FS 14 i)

4. a) [5 Punkte] Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

für  $x \geq 0$ , die konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

besitzt.

**Hinweis:** Betrachten Sie  $f'(x)$ .

(FS 13)

## Existenz einer Lösung (wahrscheinlich Piccard-Lindelöf) und Taylor-Polynom

### 3. Die Gleichung

$$\ln(x) = \frac{4(x-1)}{5} \quad (1)$$

besitzt die Lösung  $x = 1$ .

- a) [3 Punkte] Beweisen Sie die Existenz einer zweiten Lösung  $x_*$  der Gleichung (1) im Bereich  $(1, \infty)$ .  
 Hinweis:  $\ln(1.2) > \frac{0.8}{5}$  und  $\ln(1.6) < \frac{2.4}{5}$ .
- b) [2 Punkte] Sei  $g(x) := \ln(x) - \frac{4(x-1)}{5}$ . Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion  $g(x)$  um  $x = 1$ .
- c) [3 Punkte] Mit Hilfe von b) geben Sie eine Approximation von  $x_*$ .

(FS 14 ii)

## Taylor-Polynom

- b) [2 Punkte] Bestimmen Sie  $T_3(x)$ , das Taylorpolynom 3. Ordnung von  $f$  um den Punkt  $x = 0$ , und rechnen Sie den Näherungswert  $T_3(1) \approx f(1)$ .

(FS 13)

### 4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x \sin x.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom fünfter Ordnung zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

(2 Punkte)

(HS 12)

## Differential-Gleichungen

4. a) [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 27e^{2x}.$$

- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$t \cdot y'(t) + 2y(t) = 2, \quad t > 0$$

mit der Anfangsbedingung  $y(1) = 0$ .

(HS 15)

5. a) [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 10y = 3 \cdot e^{2x}.$$

- b) [3 Punkte] Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 2 + xy^2 + 2y^2 + x$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ .

(HS 14)



6. [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 5y'' + 15y' - 11y = e^x.$$

(FS 14 i)

5. a) [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 10y' + 28y = 29xe^{-x}.$$

- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 3 + 3y - x - xy,$$

welche die Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  erfüllt.

(FS 14 ii)

6. a) [5 Punkte] Für welche Werte des Parameters  $a \in \mathbb{R}$  strebt die allgemeine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung  $y'' + 2y' + ay = 0$  unabhängig von den Anfangsbedingungen gegen 0 für  $x \rightarrow \infty$ ?
- b) [4 Punkte] Finden Sie eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Lösung  $y(x) = e^{-x} + 2xe^{-x}$  ist. Was sind dann die Anfangsbedingungen bei  $x = 0$ ?

(FS 13)

8. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

(2 Punkte)

- b) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter  $q$ . Für welche Werte von  $q$  bleiben **alle** Lösungen für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt?

**Hinweis.** Sorgfältige Fallunterscheidung für Nullstellen des charakteristischen Polynoms!

(5 Punkte)

(HS 12)

## Differenzieren

- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2} dt.$$

(FS 14 ii)

## Integrale

Normale Berechnung (mit üblichen Methoden):

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) [4 Punkte]  $\int (2x^3 + 2x) \log(x^2 + 1) dx.$

b) [4 Punkte]  $\int \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$

c) [3 Punkte]  $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^3} dx.$

(HS 15)

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) [3 Punkte]  $\int e^{2x} \sin(3x) dx.$

b) [4 Punkte]  $\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2} dx.$

c) [3 Punkte]  $\int \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx.$

(HS 14)

a) [2 Punkte]  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$

b) [3 Punkte]  $\int \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-5x-6} dx.$

Hinweis:  $x = -1$  ist eine Nullstelle des Polynoms  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ . Ausklammern!

(FS 14 i)

4. Berechnen Sie:

a) [3 Punkte]  $\int_0^1 \ln(x)(x^2 - 1) dx.$

b) [4 Punkte]  $\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6} dy.$

c) [3 Punkte]  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

(FS 14 ii)

**5. Berechnen Sie:**

a) [2 Punkte]  $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$

b) [3 Punkte]  $\int \cos(x) \cosh(x) dx .$

c) [3 Punkte]  $\int \frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1} dx.$

(FS 13)

**7. Bestimmen Sie den Wert folgender Integrale**

a)

$$\int_0^2 x^2 \ln(1+x^3) dx,$$

(2 Punkte)

b)

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin(2x) dx,$$

(2 Punkte)

(HS 12)

Wegintegrale

**7. Gegeben sei das Vektorfeld**

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v(x, y) = (6 + 2xy, 3y^2 + \alpha x^2).$$

a) [4 Punkte] Für welche Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $v$  ein konservatives Vektorfeld?

b) [5 Punkte] Berechnen Sie mit dem in Teilaufgabe a) errechneten Wert von  $\alpha$  das Wegintegral

$$\int_{\gamma} v \, ds,$$

entlang der Kurve

$$\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

(Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie das konservative Vektorfeld  $v(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy).$ )

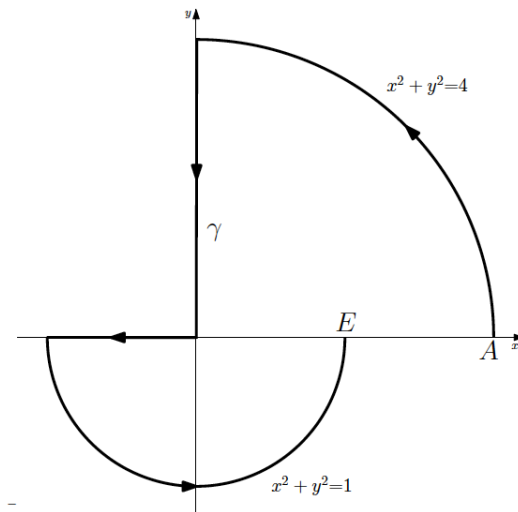
(HS 15)

8. [10 Punkte] Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

entlang des eingezeichneten Wegs  $\gamma$  (vom Anfangspunkt  $A$  bis zum Endpunkt  $E$ ) für das Vektorfeld

$$v(x, y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



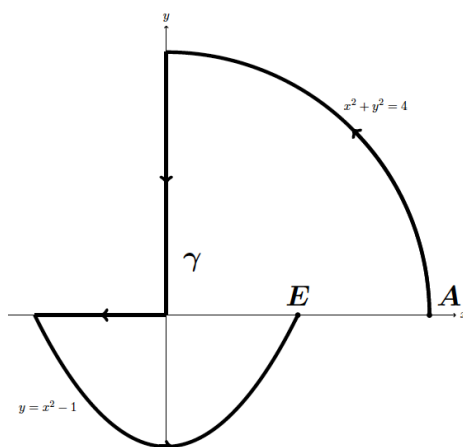
(HS 14)

8. [10 Punkte] Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} v \cdot d\vec{s}$$

entlang des eingezeichneten Wegs  $\gamma$  (vom Anfangspunkt  $A$  bis zum Endpunkt  $E$ ) für das Vektorfeld

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 + x^3 \\ -y \end{pmatrix}.$$



(FS 14 ii)

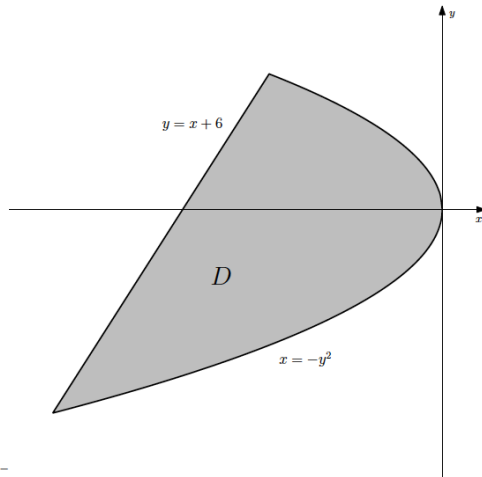
(unterscheidet sich nur im Vektorfeld von der oberen Aufgabe)

## Integrale über Gebiete:

5. a) [5 Punkte] Berechnen Sie das Integral

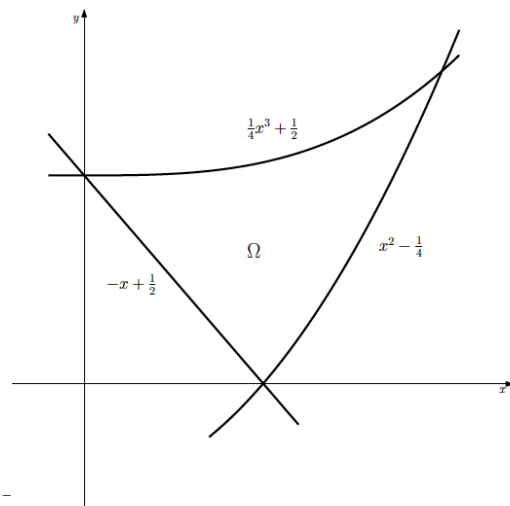
$$\iint_D \frac{4}{9} y^2 dx dy$$

über dem Gebiet  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 6, x \leq -y^2\}$ .



(HS 15)

6. a) [7 Punkte] Integrieren Sie die Funktion  $f(x, y) = \frac{1}{x}$  über den geschlossenen Bereich, der in der Figur mit  $\Omega$  bezeichnet ist.

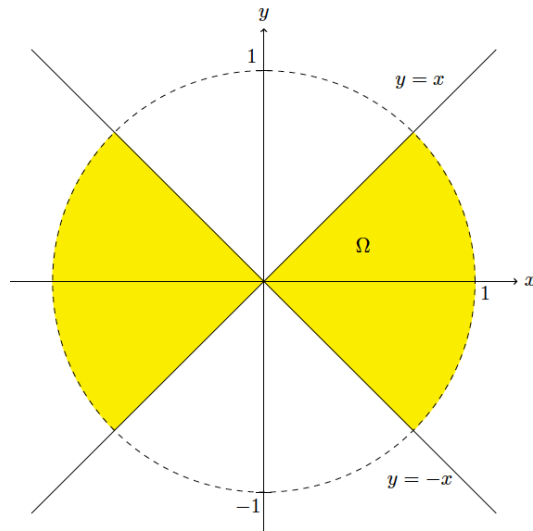


(HS 14)

- c) [3 Punkte] Integrieren Sie die Funktion

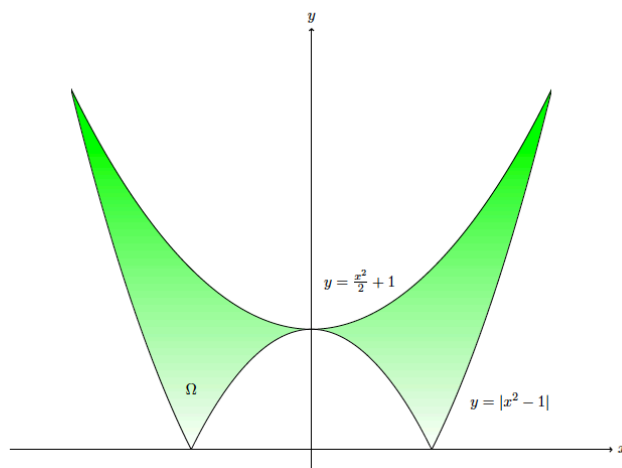
$$f(x, y) = |x| \sqrt{x^2 + y^2}$$

über den in der Figur schraffierten Bereich  $\Omega$ .



(FS 14 i)

6. a) [7 Punkte] Integrieren Sie die Funktion  $f(x, y) = y$  über den in der Figur schraffierten Bereich  $\Omega$ .



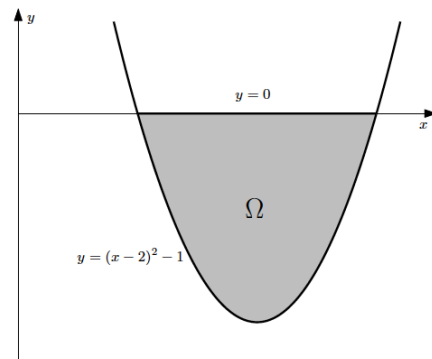
(FS 14 ii)

Fläche von Gebieten:

b) [5 Punkte] Berechnen Sie die Fläche des Gebiets

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 - 1 \leq y \leq 0\}$$

unter Verwendung des Satzes von Green.

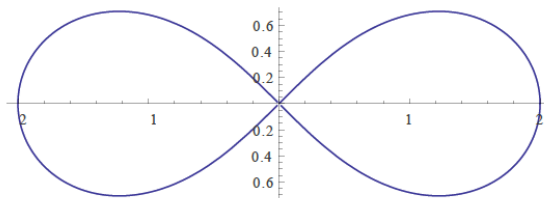


(HS 15)

b) [3 Punkte] Die Kurve  $\gamma$  ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung

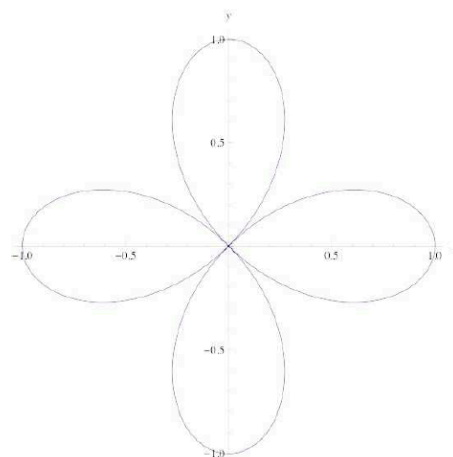
$$r = 2 \cdot \sqrt{\cos(2\theta)} \quad \text{für } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi].$$

Berechnen Sie die durch  $\gamma$  eingeschlossene Fläche  $F$ .



(HS 14)

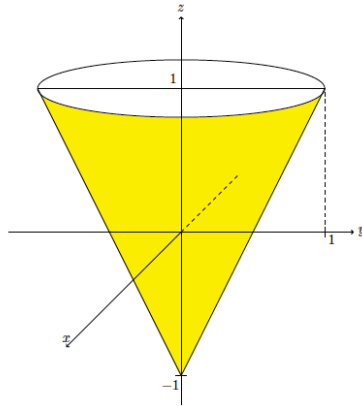
b) [3 Punkte] Sei die Kurve  $\gamma$  in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung  $r = \cos(2\vartheta)$  mit  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . Die unterstehende Figur zeigt  $\gamma$  in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche.



(FS 14 ii)

## Oberflächenintegrale

8. [7 Punkte] Berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{M}$ , wobei  $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x^2}{2}, -xy, x^2 + 3z^2 - 3)$  und  $M$  die Mantelfläche des Kegels



bezeichnet. Wir wählen die Orientierung der Fläche so, dass der dazugehörige Normalvektor nach Aussen zeigt.

(FS 14 i)

8. [6 Punkte] Berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\iint_S F \cdot dS$ , wobei  $F(x, y, z) = (x(1-z), x^2z - y, \frac{z^3}{3})$  ist und  $S$  die Oberfläche (Mantelfläche, Boden und Deckel) des Zylinders  $x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1$  bezeichnet.

(FS 13)

## Kritische Punkte / Extremalpunkte

6. Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 + 2xy - 4x - 2y.$$

- a) [6 Punkte] Bestimmen Sie sowohl den grössten als auch den kleinsten Wert, den die Funktion  $f$  auf dem Viereck

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

annimmt.

- b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene  $\Sigma$  zur Fläche

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

im Punkt  $Q := (1, 1, f(1, 1))$ .

(HS 15)



7. Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x, y) := 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{48}.$$

- a) [6 Punkte] Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion  $f$  und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
- b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene  $\Sigma$  zur Fläche

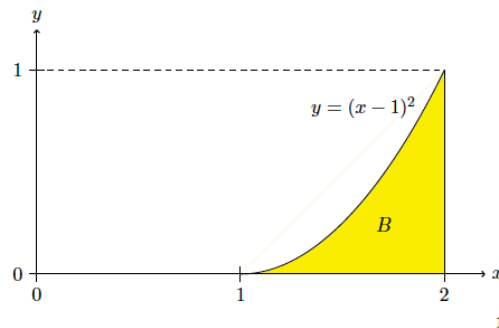
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

im Punkt  $P := (0, \frac{1}{2}, f(0, \frac{1}{2}))$ .

(HS14)

7. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := \frac{(x-1)^2}{2} + \cos(y)$ .

- a) [4 Punkte] Finden Sie die kritischen Punkte von  $f(x)$  und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.
- b) [7 Punkte] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion auf dem Bereich  $B$  der untenstehenden Figur.



Bemerkung:  $\cos(1) = 0.54030 \dots$

(FS 14 i)

7. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := 5 - \frac{2}{3\sqrt{3}} - x(x^2 - 1) - y^2$ .

- a) [6 Punkte] Finden Sie die kritischen Punkte von  $f(x)$  und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Sei  $S$  die Fläche des Graphen von  $f$ , d.h.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}.$$

- b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Tangentialebene  $\Sigma$  zur Fläche  $S$  im Punkt  $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)$ .

(FS 14 ii)

7. [8 Punkte] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion  $f(x, y, z) := xy - \frac{z}{2}$  auf der Kugeloberfläche mit Zentrum im Ursprung und mit Radius 1.

(FS 13)

## Kurvendiskussion

6. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, und ihr Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

(6 Punkte)

(HS 12)