4. Erdsatellit

Ein Satellit der Masse 1 Tonne bewegt sich in einer Höhe $H = 12'000$ km über der Erdoberfläche auf einer Kreisbahn um die Erde.
Die Gravitationskonstante ist $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, der Erdradius ist $R_E = 6380$ km und die Erdmasse beträgt $M_E = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Was ist die Erdbeschleinigung $g(R)$ beim Radius R der Satelliten-Umlaufbahn? (*1 Punkt*)

b) Was ist die Geschwindigkeit v des Satelliten auf der Umlaufbahn? (*1 Punkt*)

c) Wie gross ist die Fluchtgeschwindigkeit beim Radius R der Umlaufbahn? (*1 Punkt*)

d) Welche Arbeit (Energie) W ist erforderlich, um den Satelliten aus der Ruhe von der Erdoberfläche auf seine (kreisförmige) Umlaufbahn zu bringen (der Luftwiderstand wird vernachlässigt)? (*1 Punkt*)
Bemerkung: Berechnen Sie die totale mechanische Energie $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$ des Satelliten auf der Umlaufbahn und auf der Erdoberfläche.

Lösung: 4. Erdsatellit

a) Erdbeschleunigung:

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{F_G}{m} = G\,\frac{M_E\,m}{r^2}\,\frac{1}{m} \\ &= G\,\frac{M_E}{r^2} && r:\ \text{Abstand vom Erdzentrum} \\ \Rightarrow g(R) &= G\,\frac{M_E}{(R_E+H)^2} && (0.5\,\text{Pkt.}) \\ &= 1.18\,\text{m/s}^2 && (0.5\,\text{Pkt.}) \end{aligned}$$

b) Auf der Kreisbahn mit Radius R gilt

$$\begin{aligned} F_Z &= F_G && (0.25\,\text{Pkt.}) \\ \rightarrow m\,\frac{v^2}{R} &= G\frac{M_E\,m}{R^2} \\ &= G\frac{M_E\,m}{(R_E+H)^2} \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{G\,M_E}{R_E+H}} && (0.5\,\text{Pkt.}) \\ &= 4666\,\text{m/s} && (0.25\,\text{Pkt.}) \end{aligned}$$

c) Fluchtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} E_{mech} &= E_{kin} + E_{pot} = 0 \\ \rightarrow \frac{1}{2}m\,v^2 &= G\,\frac{M_E\,m}{R} = G\,\frac{M_E\,m}{R_E+H} && (0.5\,\text{Pkt.}) \\ v_{Fl} &= \sqrt{2\,\frac{G\,M_E}{R_E+H}} && (0.25\,\text{Pkt.}) \\ &= 6599\,\text{m/s} && (0.25\,\text{Pkt.}) \end{aligned}$$

d)

Die totale Arbeit ist die Differenz der mechanische Energie

$$W = E_{mech}(R) - E_{mech}(R_E) \qquad \text{wobei } R = R_E + H \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$

Mechanische Energie auf der Kreisbahn:

$$\begin{aligned} E_{mech}(R) &= E_{kin}(R) + E_{pot}(R) \\ &= \frac{1}{2}\,m\,v^2(R) - G\,\frac{M_E\,m}{R} \qquad (0.25\,\text{Pkt.}) \end{aligned}$$

Aus $F_Z = F_G$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{m\,v^2}{R} &= G\,\frac{M_E\,m}{R^2} \to m\,v^2 = G\,\frac{M_E\,m}{R} \\ \to E_{mech}(R) &= -G\,\frac{M_E\,m}{2\,R} \end{aligned}$$

Mechanische Energie auf der Erdoberfläche:

$$\begin{aligned} E_{mech}(R_E) &= 0 - G\,\frac{M_E\,m}{R_E} \\ \to W &= -G\,\frac{M_E\,m}{2\,R} + G\,\frac{M_E\,m}{R_E} \\ &= G\,M_E\,m\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2\,(R_E+H)}\right) \qquad (0.25\,\text{Pkt.}) \\ &= 5.18 \cdot 10^{10}\,\text{J} = 51.8\,\text{GJ} \qquad (0.25\,\text{Pkt.}) \end{aligned}$$

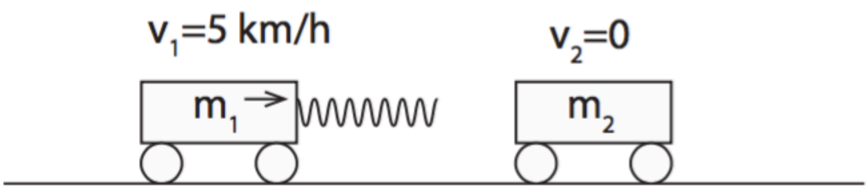
Ein Eisenbahnwagen ($m_1 = 60\,\mathrm{t}$) fährt mit $v_1 = 5\,\mathrm{km/h}$ auf einen ruhenden ($v_2 = 0\,\mathrm{km/h}$) Wagen ($m_2 = 45\,\mathrm{t}$) auf. Am Ende des ersten Wagens befindet sich eine Feder (Federkonstante $2 \times 10^5\,\mathrm{N/m}$).

a) (3 Punkte) Es komme zu einem vollkommen elastischen Stoss zwischen den beiden Wagen. Dabei wird die Feder komprimiert und danach wieder entlastet. Wie gross sind die Endgeschwindigkeiten der beiden Wagen?

b) (2 Punkte) Beim Stoss wird die Feder um die Länge $20\,\mathrm{cm}$ zusammengedrückt. Wie schnell bewegen sich die beiden Wagen im Moment der maximalen Kompression?

c) (2 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall, bei dem sich <u>keine</u> Feder zwischen den beiden Wagen befindet und sie sich so unglücklich ineinander verkeilen, dass sie verbunden bleiben, aber immer noch reibungsfrei auf den Schienen stehen. Wie gross ist die Endgeschwindigkeit in diesem Falle?

d) (1 Punkte) Wie gross ist der prozentuale Anteil an kinetischer Energie nach dem Zusammenprall bezüglich der kinetischen Energie vor dem Zusammenprall für die beiden Fälle (elastischer und unelastischer Stoss)?



a)

Bei elastischen Stössen gilt Energie- und Impulserhaltung:

$$\sum \vec{p} = \sum \vec{p}'$$
$$\sum E = \sum E'$$

Mit der ersten Gleichung erhält man

$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$
$$\rightarrow v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2'$$

Energieerhaltung kann geschrieben werden als

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_1^{2\prime}}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^{2\prime}}{2}$$

Einsetzen in die Gleichung für v_1' ergibt:

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'\right)^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^{2\prime}}{2}$$
$$\cancel{m_1 \cdot v_1^2} = \cancel{m_1 \cdot v_1^2} - 2 v_1 m_2 v_2' + \frac{m_2^2}{m_1} \cdot v_2^{2\prime} + m_2 \cdot v_2^{2\prime}$$
$$0 = \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) v_2^{2\prime} - 2 v_1 m_2 v_2'$$
$$\rightarrow v_2' = \frac{2 v_1 m_2}{\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)} = \frac{2 v_1}{\frac{m_2}{m_1} + 1}$$
$$v_2' = 1.587 \text{ m/s} \quad (5.713 \text{ km/h})$$

Nochmaliges Einsetzen in den Ausdruck für v_1' ergibt

$$v_1' = 0.199 \text{ m/s} \quad (0.716 \text{ km/h}) \tag{5}$$

b)

Um die Feder um 20 cm zusammen zu drücken, wird eine Energie von

$$E_{\text{Feder}} = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2} = 4000 \text{ J} \tag{6}$$

benötigt. Diese Energie wird in der Feder als potentielle Energie erhalten. Somit ist der Ausdruck für die Energieerhaltung

$$E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v'^2}{2} + E_{\text{Feder}}$$
$$\rightarrow v'^2 = \frac{\left(m_1 \cdot v_1^2 - 2 \cdot E_{\text{Feder}}\right)}{(m_1 + m_2)}$$
$$v'^2 = 1.026 \ \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v' = 1.013 \text{ m/s} \quad (3.647 \text{ km/h})$$

c)

Für komplett unelastische Stösse können wir die Impulserhaltung verwenden:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$
$$\rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2)}$$
$$v' = 0.794 \text{ m/s} \quad (2.858 \text{ km/h})$$

d)

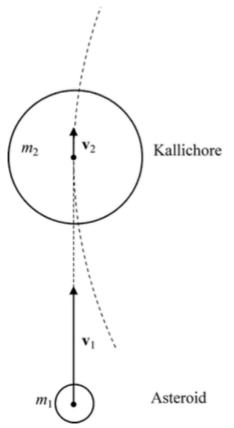
Der Anteil kinetische Energie, der im System bleibt, ist 100 % im ersten Fall (elastischer Stoss), während im Fall des unelastischen Stosses gilt

$$E' = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v'^2}{2} = 33\,097.9 \text{ J} \quad \text{wobei}$$
$$E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \ 57\,870.4 \text{ J}$$

Damit ist der Anteil kinetischer Energie, der im System verbleibt, etwa 57.2 %.

Aufgabe 2: Einschlag eines Asteroids (4 Punkte)

Ein kleiner Asteroid bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit auf Kallichore, einen Mond von Jupiter, zu. Die Flugbahn folgt einer Geraden durch den Mittelpunkt von Kallichore und entlang der Tangente seiner Bahn (siehe Abbildung). Der Asteroid schlägt permanent in die Oberfläche von Kallichore ein und das System zerlegt sich nicht in Stücke ('völlig inelastischer Stoss'). *Gegeben*: Masse und Geschwindigkeit des Asteroids $m_1 = 5.0 \times 10^{11}$ kg und $v_1 = 25 \times 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; Masse und Geschwindigkeit von Kallichore $m_2 = 1.5 \times 10^{13}$ kg und $v_2 = 2.3 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.



a. Berechnen Sie die Änderung der Geschwindigkeit von Kallichore beim Einschlag.

$\Delta v =$ ________________________ $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b. Wieviel mechanische Energie wird beim Einschlag in Wärme umgesetzt?

$\Delta E_{\text{mech}} =$ ________________________ J.

Aufgabe 2: Einschlag eines Asteroids (4 Punkte)

a. Wir nutzen den Impulserhaltungssatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_G,$$

wobei v_G die Geschwindigkeit von Kallichore nach dem Einschlag ist. Auflösen nach v_G ergibt

$$v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit ist somit gleich

$$\Delta v = v_G - v_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = \frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{5.0 \cdot 10^{11} \times (25 - 2.3) \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{11} + 1.5 \cdot 10^{13}} = 730\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Wegen $m_1 << m_2$, gilt annäherungsweise

$$\Delta v \approx \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_2) = 760\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

b. Die Änderung der mechanischen Energie ist gleich

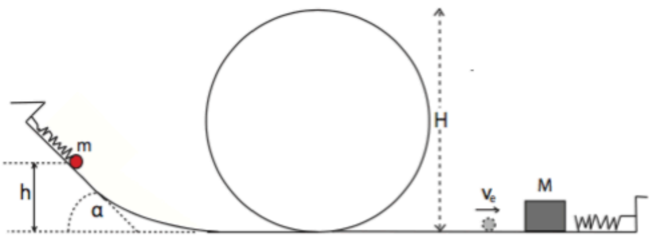
$$\begin{aligned}
\Delta E_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 \\
&= \frac{5.0 \cdot 10^{11} \times 1.5 \cdot 10^{13}}{2 \times (5 \cdot 10^{11} + 1.5 \cdot 10^{13})} \times (25 - 2.3)^2 \cdot 10^6 = 1.2 \cdot 10^{20}\,\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

Wegen $m_1 << m_2$, gilt annäherungsweise

$$\Delta E_{\text{mech}} \approx \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_2)^2 = 1.3 \cdot 10^{20}\,\mathrm{J}.$$

Diese Energie entspricht 28 Gigaton TNT Sprengkraft, d.h. fünf Mal dem ganzen Atomwaffen-Vorrat auf der Erde.

Aufgabe 1: Looping



Eine Masse $m = 50\,\mathrm{g}$ durchläuft die abgebildete Bahn mit einem Looping der Höhe $H = 2.0\,\mathrm{m}$. Die Kugel wird zunächst durch Eindrücken und Loslassen einer Feder mit Federkonstanten $D = 4.5\,\mathrm{N/cm}$ beschleunigt. In Ruhelage befindet sich die Spitze dieser Feder in Höhe $h = 0.50\,\mathrm{m}$ über der Horizontalen. Die Bahn schliesst zu Beginn mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = 30°$ ein. Wir betrachten den Fall, in dem die Masse m im höchsten Punkt des Loopings die Strecke gerade nicht verlässt. Reibungseffekte sind zu vernachlässigen. Setzen Sie Zahlen erst am Ende einer Herleitung ein.

a) Welche Aussage ist korrekt?
   - i) Da die Anfangsposition der Masse $h < H$ ist, wird die Kugel es nicht schaffen einen Looping zu machen.
   - ii) Sie wird den Looping schaffen, wenn die Summe von Spannenergie der Feder und die Höhenenergie am Anfang gleich der potenziellen Energie im höchsten Punkt des Loopings ist.
   - iii) Sie wird es schaffen, wenn die kinetische Energie am tiefsten Punkt gleich der potenziellen Energie am höchsten Punkt des Loopings ist.
   - iv) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

b) Um welche Strecke Δx muss die Feder für den oben beschriebenen Fall eingedrückt werden? Mit welcher Geschwindigkeit v_e verlässt die Kugel den Looping, mit anderen Worten, welche Geschwindigkeit hat sie am tiefsten Punkt des Loopings, nachdem sie diesen durchlaufen hat?

c) Auf der Horizontalen nach dem Looping liegt ein Klotz der Masse $M = 500\,\mathrm{g}$, dessen Seitenflächen mit einem Klebstoff beschichtet sind. Die Masse m bleibt nach dem Stoss an M kleben und beide Körper bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit weiter. Welcher Anteil der kinetischen Energie geht dabei "verloren"? Am Ende der Bahn befindet sich eine weitere Feder mit derselben Federkonstante $D = 4.5\,\mathrm{N/cm}$. Wie weit wird diese eingedrückt?

d) Wie ist kinetische Energie "verloren" gegangen?
   - i) In diesem Fall handelt es sich um eine Verletzung der Energieerhaltung, weil es sich nicht um ein geschlossenes System handelt.
   - ii) Sie wurde als potenzielle Energie im Klebstoff gespeichert.
   - iii) In Schallenenergie, Wärmeenergie, chemische Energie, usw...
   - iv) Sie ist in der potenziellen Energie der Feder gespeichert.

Aufgabe 1: Looping

a) iv) Die Gesamtenergie der Masse m bleibt bei ihrer Bewegung auf der Achterbahn erhalten (keine Reibung). Die Energie zu Anfang der Bewegung - zusammengesetzt aus der potentiellen Energie der eingedrückten Feder und der potentiellen Energie der Masse - muss dabei der Summe der minimalen kinetischen Energie und potentiellen Energie im höchsten Punkt entsprechen:

$$mg(h + \Delta x \sin\alpha) + \frac{1}{2}D(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{min}}^2 + mgH. \tag{1}$$

b) Die minimale Geschwindigkeit v_{min} erhält man aus der Bedingung, dass die Zentripetalkraft im höchsten Punkt des Loopings in diesem Fall genau der Gravitationskraft entspricht:

$$\frac{2mv_{\text{min}}^2}{H} \stackrel{!}{=} mg\,, \qquad \left(v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{gH}{2}} \approx 3.1\,\text{m/s} \approx 11.3\,\text{km/h}\right) \tag{2}$$

Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}D(\Delta x)^2 + mg\sin\alpha\Delta x - mg\left(\frac{5}{4}H - h\right) = 0 \tag{3}$$

und das Resultat (die negative Lösung für Δx ist unphysikalisch)

$$\Delta x = -\frac{\sin\alpha}{D}mg + \sqrt{\left(mg\frac{\sin\alpha}{D}\right)^2 + \frac{2gm}{D}\left(\frac{5}{4}H - h\right)} \tag{4}$$

$$\approx 6.5\,\text{cm} \tag{5}$$

Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{e}} = \frac{1}{2}mv_{\text{min}}^2 + mgH = \frac{5}{4}mgH \tag{6}$$

$$v_{\text{e}} = \sqrt{\frac{5}{2}gH} \approx 7.0\,\text{m/s} = 25\,\text{km/h}. \tag{7}$$

c) Es gilt die Impulserhaltung:

$$mv_{\text{e}} = (m+M)v_{\text{n}}\,, \qquad \left(v_{\text{n}} = \frac{m}{M+M}\sqrt{\frac{5}{2}gH} \approx 0.64\,\text{m/s} \approx 2.3\,\text{km/h}\right) \tag{8}$$

Der Anteil Q der kinetischen Energie, die bei diesem inelastischen Stoss in innere Energie umgewandelt wird, ist

$$Q = \frac{mv_{\text{e}}^2 - (m+M)v_{\text{n}}^2}{mv_{\text{e}}^2} = 1 - \frac{(m+M)v_{\text{n}}^2}{mv_{\text{e}}^2} \tag{9}$$

$$= 1 - \frac{m}{m+M} = \frac{M}{m+M} = 10/11 \approx 0.91 \tag{10}$$

Die Feder wird zusammengedrückt um

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m+M}{D}v_{\text{n}}^2} = \sqrt{\frac{m^2}{(m+M)D}v_{\text{e}}^2} \tag{11}$$

$$= \sqrt{\frac{5m^2}{2D(M+m)}gH} \approx 2.2\,\text{cm} \tag{12}$$

d) iii) Wie in der Vorlesung gesehen, geht bei inelastischen Stössen die kinetische Energie in verschiedene Formen über (Schallenenergie, Wärmeenergie, chemische Energie, usw...).

Aufgabe 2: Gravitation

a) Eine vertikal aufgehängte Feder (mit unbekannter Federkonstanten), an der die Masse m angehängt wird, dehnt sich um die Länge Δl. Zieht man ein wenig weiter und lässt dann los, schwingt die Masse mit der Periodendauer T. Wie kann man mit dieser Anordnung den Wert der Erdbeschleunigung g bestimmen?

i) Man kann das direkt von der statischen Ausdehnung Δl bestimmen.

ii) Man kann das von der statischen Ausdehnung Δl bestimmen aber dazu muss man die Schwingungsperiode messen.

iii) Man kann das alleine aus der Messung der Schwingungsperiode bestimmen.

iv) Es geht nicht. Die Erdbeschleunigung kann man nur bei Experimenten zum freien Fall messen.

b) Ein geostationärer Satellit befindet sich immer über demselben Punkt des Aequators; d.h seine Umlaufszeit um die Erde beträgt ein Sterntag (1 Sterntag = 86164 s, ist definiert als das Zeitintervall zwischen zwei oberen Meridiandurchgängen des Frühlingspunktes).
$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, $m_{Erde} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{Erde} = 6370$ km. Wie hoch über dem Aequator befindet sich ein geostationäre Satellit ungefähr?

i) 42000 km

ii) 29000 km

iii) 36000 km

iv) Es gibt zu wenige Informationen um das zu bestimmen.

Eine Masse $m = 1$ kg befindet sich in einer Höhe $h = 100$ m über der Mondoberfläche.
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}; Mondmasse $M_{Mond} = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg; Mondradius $R_{Mond} = 1738$ km.

c) Berechnen Sie die Mondbeschleunigung g_M und die potentielle Energie E_{pot} der Masse (bezüglich der Mondoberfläche).

d) Die Masse wird in Ruhe losgelassen. Mit welcher Geschwindigkeit v trifft sie auf die Mondoberfläche auf?

Aufgabe 2: Gravitation

a) ii) Wenn man die Ausdehnung der Feder misst und die Federkonstante bekannt ist, kann man g bestimmen. In der Ruhelage der Masse, gilt $mg = k\Delta l$. Es folgt $g = k\Delta l/m$. Die unbekannte Federkonstante bestimmt man mit der Schwingungsperiode $\omega = 2\pi/T = \sqrt{(k/m)}$, so dass $k = 4m(\pi/T)^2$ (Gl 3.12 im Skript).

b) iii) Ein geostationärer Satellit bewegt sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω der Erdrotation auf einer Kreisbahn um die Rotationsachse der Erde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad T = 1 \text{ Sterntag} = 86'165 \text{ s}$$

Auf einer Kreisbahn mit Radius R ist die Beschleunigung des Satelliten gegeben durch:

$$a_Z = \frac{v^2}{R} \quad ; \quad v = \frac{2R\pi}{T}$$

$\rightarrow a_Z = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ ist die Zentripetalbeschleunigung.
Diese Beschleunigung ist durch die Gravitationskraft der Erde gegeben:

$$F_G = G\frac{m_{Sat} \cdot m_E}{R^2} \quad \rightarrow \quad a_G = \frac{F_G}{m_{Sat}} = G\frac{m_E}{R^2}$$

Mit $a_Z = a_G$ folgt: $\frac{4\pi^2 R}{T^2} = G\frac{m_E}{R^2}$

$$R^3 = G\frac{m_E T^2}{4\pi^2} = 7.53 \cdot 10^{22} \text{ m}^3$$

$\rightarrow R \simeq 42'228$ km.

Höhe über dem Aequator: $\underline{H = R - R_E = 35'857 \text{ km}}$

c) Kraft, die der Mond auf m ausübt: (Die Höhe von 100 m ist vernachlässigbar verglichen mit dem Mondradius)

$$F_G = G\frac{M_{\text{Mond}} \cdot m}{R^2_{\text{Mond}}} \rightarrow \underline{g_M} = \frac{F_G}{m} = G\frac{M_{\text{Mond}}}{R^2_{\text{Mond}}} = \underline{1.62 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

Die potentielle Energie ist:

$$\underline{E_{pot}} = m \cdot g_M \cdot h \quad ; \quad h = 100 \text{ m}$$
$$= \underline{162.3 \text{ Nm} = 162.3 \text{ J}}$$

d) Energieerhaltung: Die potentielle Energie wird beim freien Fall in kinetische Energie umgewandelt:

$$E_{pot} = E_{kin} \rightarrow m \cdot g_M \cdot h = \frac{m}{2}v^2$$

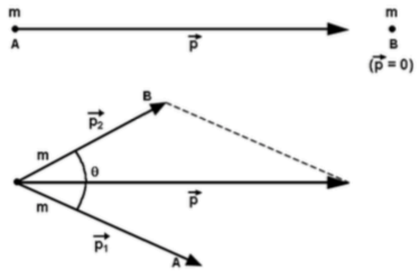
$$\underline{v} = \sqrt{2g_M h} = \underline{18.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Aufgabe 3: Relativistische Kollisionen

Betrachte ein Teilchen mit Masse m, das sich mit relativistischer Geschwindigkeit auf ein anderes ruhendes Teilchen derselben Masse zubewegt (siehe Abbildung). Vor der Kollision hat das Teilchen eine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = E_0$. Nach der Kollision haben beide Teilchen die gleiche Geschwindigkeit und somit auch die kleiche kinetische Energie $E'_{\text{kin}} = E_0/2$. Der Winkel zwischen ihren Bahnen sei θ.

a) Zeigen Sie unter Benützung von Energie- und Impulserhaltung, dass der Zusammenhang $\cos(\theta) = E_0/(E_0 + 4mc^2)$ gilt.

b) Wie gross ist der Winkel θ im ultrarelativistischen Grenzfall? Wie gross im nichtrelativistischen Fall?



c) Betrachten Sie einen Körper mit Masse m, der mit Hilfe einer auf ihn wirkenden konstanten Kraft F beschleunigt wird. Der Körper sei anfangs in Ruhe, sodass zum Zeitpunkt $t = 0$ sein Impuls $p = 0$ ist. Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg x und die Geschwindigkeit des Körpers v als Funktion der Zeit. Überprüfen Sie insbesondere, dass er im Grenzfall $t \to \infty$ asymptotisch die Lichtgeschwindigkeit erreicht, ohne sie zu überschreiten.

Aufgabe 3: Relativistische Kollisionen

a) Mittels Impulserhaltung findet man:

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos(\theta) \tag{15}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{p^2 - (p_1^2 + p_2^2)}{2p_1p_2} \tag{16}$$

wobei $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$ die Impulse der Teilchen nach der Kollision und $\vec{p}$ der Impuls des einlaufenden Teilchens sind.

Man muss nun diese Impulse mit der kinetischen Energie und mit der Masse in Verbindung bringen, was mittels des Ausdrucks $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ gelingt. Die Energie des einlaufenden Teilchens ist $E = mc^2 + E_0$, während die Energie der auslaufenden Teilchen $E_1 = E_2 = mc^2 + E_0/2$ ist. Daher erhält man:

$$p^2c^2 = E^2 - m^2c^4 = (mc^2 + E_0)^2 - m^2c^4 = E_0^2 + 2E_0mc^2, \tag{17}$$

$$p_1^2c^2 = p_2^2c^2 = E_1^2 - m^2c^4 = (mc^2 + \frac{E_0}{2})^2 - m^2c^4 = \frac{E_0^2}{4} + E_0mc^2, \tag{18}$$

was zum folgenden Ausdruck für den Winkel zwischen den auslaufenden Teilchen führt:

$$\cos(\theta) = \frac{E_0^2 + 2E_0mc^2 - 2\left(\frac{E_0^2}{4} + E_0mc^2\right)}{2\left(\sqrt{\frac{E_0^2}{4} + E_0mc^2}\right)^2} \tag{19}$$

$$= \frac{\frac{E_0^2}{2}}{2\left(\frac{E_0^2}{4} + E_0mc^2\right)} \tag{20}$$

$$= \frac{E_0}{E_0 + 4mc^2}. \tag{21}$$

b) Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $E_0 \ll mc^2$, sodass $\cos(\theta) \to 0$, und $\theta \to \pi/2$ gehen. Im ultrarelativistischen Fall ist hingegen $E_0 \gg mc^2$, sodass $\cos(\theta) \to 1$ und $\theta \to 0$ sind.

c) Die Kraft ist gegeben durch

$$F = \frac{dp}{dt}. \tag{22}$$

Im Falle einer konstanten Kraft ist der Impuls eine lineare Funktion der Zeit, also

$$p = Ft. \tag{23}$$

Da der Impuls als

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{24}$$

geschrieben werden kann, erhält man die Gleichung

$$Ft = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{25}$$

Es folgt

$$\left(\frac{F}{mc}\right) t = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \left(\frac{F}{mc}\right)^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2}. \tag{26}$$

Diese Gleichung löst man nach v/c auf und erhält

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{F}{mc} t\right)}{\sqrt{1 + \frac{F}{mc}^2 t^2}}. \tag{27}$$

Im Grenzfall $t \to \infty$ erhält man

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{v}{c} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(\frac{F}{mc}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{F}{mc}^2}} = 1, \tag{28}$$

wie es sein muss: die Lichtgeschwindigkeit wird asymptotisch erreicht. Bemerke, dass aus Gleichung (27),

$$\frac{v}{c} = \frac{mc}{F} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{F}{mc}\right)^2 t^2} - \text{const} \right) \tag{29}$$

folgt. Wegen $v = \frac{dx}{dt}$ erhält man den zurückgelegten Weg als

$$x(t) - x(0) = c \left(\frac{mc}{F}\right) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{F}{mc}\right)^2 t^2} - 1 \right). \tag{30}$$

Bemerke, dass Gleichung (30) zwischen einer beschleunigten Bewegung für kleine t und einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit für grosse t interpoliert.

Aufgabe 4: Energieerhaltung und Federbremse

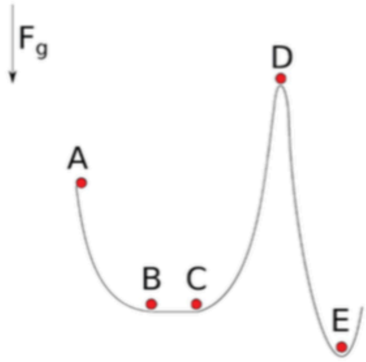
a) Eine Kugel werde in Ruhe am Punkt A der aufgezeichneten Bahn platziert. Sie bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Erdanziehung. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt (E_{pot}=potentielle Energie, E_{kin}=kinetische Energie)?

i) $E_{pot}(A)+E_{kin}(B)=E_{pot}(E)$

ii) $E_{pot}(A)>E_{pot}(B)=E_{kin}(C)$; D und E werden nicht erreicht.

iii) $E_{kin}(A)=E_{pot}(B)+E_{kin}(B)$; $E_{pot}(D)=E_{kin}(E)$

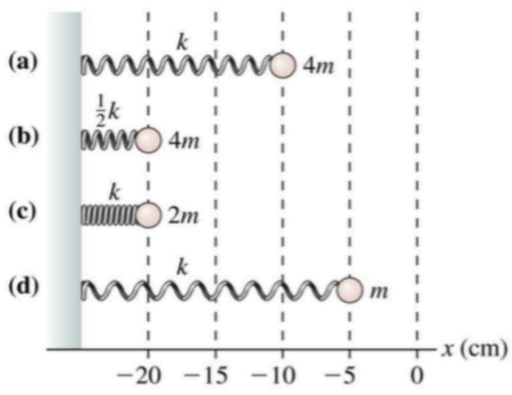
iv) $E_{pot}(A)=E_{kin}(B)+E_{pot}(C)$; D und E werden nicht erreicht.



b) Vier Federn mit gegebenen Federkonstanten werden ausgehend von ihrer Ruhelage bei $x = 0$ cm gestaucht. Sie sind mit unterschiedlichen Massen verbunden. Reihen Sie die Federn gemäss der maximalen Geschwindigkeit, die bei den Schwingungen auftreten, von höchster zu niedrigster!

i) $c > b > a = d$

ii) $c > b > a > d$



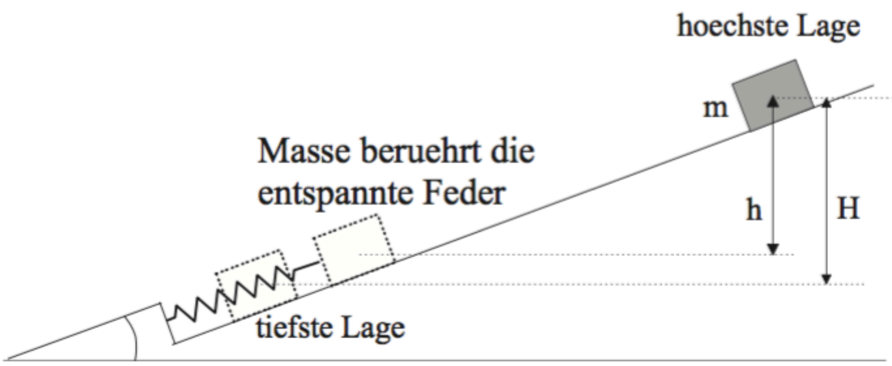
iii) $d > a > b > c$

iv) $a = d > b > c$

Ein Körper der Masse m kann sich reibungslos auf der schiefen Ebene bewegen (siehe Figur, Neigungswinkel zur Horizontalen ist α). Am unteren Ende der Ebene ist eine Feder mit der Federkonstante k befestigt. Zur Zeit $t = 0$ wird die Masse in der Höhe h aus der Ruhe losgelassen und gleitet über die Ebene nach unten, wo sie von der Feder abgebremst wird; h ist der Höhenunterschied zwischen der Position der Masse zur Zeit $t = 0$ und der Position, wenn sie die entspannte Feder gerade berührt (s. Figur).

c) Wie gross ist der Höhenunterschied H zwischen der ursprünglichen Lage der Masse und ihrer *tiefsten* Lage, wenn die Ferder am stärksten zusammengedrückt ist?

d) Diskutieren Sie auch die physikalische Bedeutung der zweiten Lösung, die Sie bei c) bekommen.



Aufgabe 4: Federbremse

a) iv) B und C haben gleiche kinetische und potenzielle Energie, deren Summe gleich der Anfangsenergie im Punkt A ist. D wird nicht erreicht weil die potenzielle Energie von D höher ist als die Anfangsenergie.

b) i) Die Geschwindigkeit bestimmt man durch Ableitung von $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$. Das Maximum ist dann $v_{max} = A\omega = A\sqrt{k/m}$.

c) Differenz der potentiellen Energie der Masse m zwischen höchster und tiefster Lage:

$$\Delta E_{pot}^{m} = mgH$$

Diese Energie wird verwendet, um die Feder um eine Strecke Δx zusammenzudrücken:

$$E_{pot}^{Feder} = \tfrac{k}{2}\Delta x^2$$

Im tiefsten Punkt ist die Masse in Ruhe, hat also keine kinetische Energie:

$$\text{Energieerhaltung: } \Delta E_{pot}^{m} = E_{pot}^{Feder} \text{ oder:}$$
$$mgH = \frac{k}{2}\Delta x^2$$

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \sin\alpha &= H - h \\ \Delta x &= \frac{H-h}{\sin\alpha} \\ mgH &= \frac{k}{2}\left(\frac{H-h}{\sin\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2mgH\sin^2\alpha = k(H-h)^2 = k(H^2 - 2hH + h^2) \\ &kH^2 - 2(kh + mg\sin^2\alpha)H + kh^2 = 0 \\ &H^2 - 2H\left(h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha\right) + h^2 = 0 \\ &\underline{H = h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha \pm \sqrt{\left(h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha\right)^2 - h^2}} \end{aligned}$$

Für die tiefste Lage (H maximal) muss der Wurzelausdruck addiert werden:

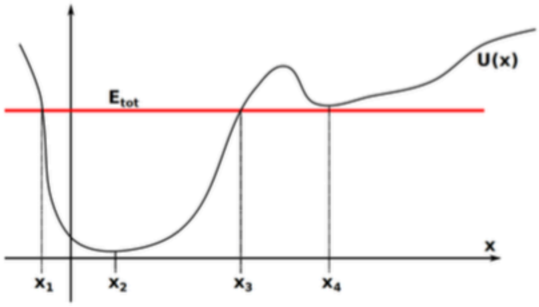
$$\underline{H = h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha + \sqrt{\left(h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha\right)^2 - h^2}}$$

d) Der Term $H_0 \doteq h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha$ entspricht der (neuen) Ruhelage der Feder, wenn die Komponente des Gewichts parallel zur schiefen Ebene die Feder zusammen drückt. Die Wurzel $H_1 \doteq \sqrt{\left(h + \frac{mg}{k}\sin^2\alpha\right)^2 - h^2}$ entspricht der zusätzlichen Höhendifferenz von der Ruhelage H_0 bis zum tiefsten Punkt H, verursacht durch die kinetische Energie von m bei der Ruhelage H_0.

Falls die Masse mit der Feder verbunden wäre, würde sie harmonisch um die Ruhelage H_0 auf der schiefen Ebene schwingen. Die Masse bewegt sich also periodisch zwischen dem höchsten Punkt der Schwingung $H = H_0 - H_1$ und dem tiefsten Punkt $H = H_0 + H_1$ hin und her.

Aufgabe 2: Der Gradient

a) Welche Aussagen bezüglich eines Massenpunktes im gezeigten Potential ist falsch?



i) Die kinetische Energie im Punkt x_1 ist Null.

ii) Im Punkt x_1 wirkt eine Netto Kraft.

iii) Im Punkt x_2 wirkt keine Netto Kraft.

iv) Im Punkt x_3 wirkt keine Netto Kraft.

b) Der Gradient $\vec{\nabla}(x^2y + 3xz)$ ist

i) $2xy + x^2 + 3x$

ii) $2xy + x^2 + 3$

iii) $2xy + x^2 + 3x + 3z$

iv) $(2xy + 3z)\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + 3x\vec{e_z}$

Gegeben sei eine skalare Funktion $\phi(x, y)$ in den kartesischen Koordinaten x und y. Die Gleichung $\phi(x, y) =$ konstant, definiert Kurven in der x-y-Ebene, auf denen die Funktion ϕ einen konstanten Wert hat. Die differentielle Änderung $d\phi$ der Funktion ϕ bei einer infinitesimalen Verschiebung $\vec{dr} = (dx, dy)$ gegeben durch $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$, $d\phi$ heisst totales Differential der Funktion ϕ.

c) Zeigen Sie, dass der Gradient $\vec{\nabla}\phi$ überall senkrecht zu den Kurven $\phi(x, y) =$ konstant steht.

d) Geben Sie die differentielle Änderung $d\phi$ pro Wegelement ds ($\frac{d\phi}{ds}$) für eine beliebige Richtung $\vec{dr}$ an. Das Wegelement ds ist definiert durch $ds = |\vec{dr}| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.
Zeigen Sie, dass der Gradient in die Richtung der maximalen Zunahme von ϕ pro Wegstrecke ds zeigt.

Aufgabe 2: Der Gradient

a) iv) ist falsch weil im Punkt x_3 die Steigung der Kurve nicht null ist.

b) iv) Der Gradient einer Funktion ist ein Vektor. Die richtige Antwort ist:

$$\vec{\nabla}(x^2y + 3xz) = \begin{pmatrix} 2xy + 3z \\ x^2 \\ 3x \end{pmatrix}$$

c) Entlang der Kurven $\Phi(x, y) = $ konst. , gilt $d\Phi = 0$

$$\begin{aligned} d\Phi(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y\right) \cdot (dx\ \vec{e}_x + dy\ \vec{e}_y) \\ &= \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

für d$\vec{r}$ entlang der Kurven $\Phi(x, y) = $ konst. $\underline{\rightarrow \vec{\nabla}\Phi \perp d\vec{r}}$.
D.h., $\vec{\nabla}\Phi$ steht senkrecht auf den Kurven $\Phi(x, y) = $ konst.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} d\Phi(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \\ \vec{\nabla}\Phi &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \quad ; \quad d\vec{r} = (dx,\ dy) \\ \rightarrow \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \end{aligned}$$

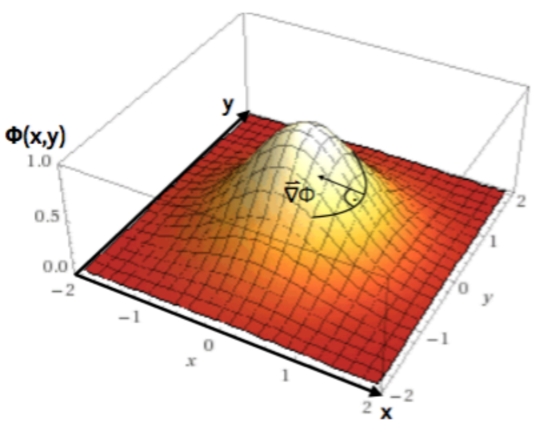
$\frac{d\vec{r}}{ds}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung $d\vec{r}$, da $ds = |d\vec{r}|$.

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{ds} = |\vec{\nabla}\Phi| \cdot \cos\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen $d\vec{r}$ und $\vec{\nabla}\Phi$ ist.

Falls $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla}\Phi \rightarrow \alpha = 0$ oder $\cos\alpha = 1$.

$\rightarrow \frac{d\Phi}{ds}$ ist maximal für $\alpha = 0$, d.h. die differentielle Zunahme $d\Phi$ pro Wegstück ds ist maximal für eine Verschiebung $d\vec{r}$ in Richtung des Gradienten $\vec{\nabla}\Phi$.



Beispiel für $\Phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Aufgabe 3: Weltraumaufzug

Der Science-Fiction Schrifsteller R.A. Heinlein beschreibt im Roman „Friday“(deutsch: Freitag) einen Satelliten („Weltraumaufzug“), der aus einem langen, direkt über dem Äquator plazierten Seil besteht. Das Seil ist entlang des Radius zum Erdinneren ausgerichtet und bewegt sich so, dass es dem Erdbeobachter scheint, als sei es an einem festen Punkt über dem Äquator aufgehängt. Das untere Seilende hängt dabei knapp über der Erdoberfläche.

Nehmen Sie an, dass die lineare Massendichte des Seils ρ_l konstant ist und es unzerreissbar sei. Der Radius der Erde ist R ist 6370 km und die Erdmasse $M_E = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Wie lang müsste so ein Seil sein?
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die die Gravitationskraft des Seils als Funktion seiner Länge l. ρ_l ist die lineare Massendichte des Seils (Gewicht pro Länge).

$$F_G(l) = \int_R^{(R+l)} \frac{GM_E}{r^2} \rho_l \, \mathrm{d}r \, .$$

b) Wie gross ist die Entfernung eines geostationären Satelliten vom Erdmittelpunkt?

c) Vergleichen Sie die Länge mit der Höhe eines geostationären Satellits. Falls es einen Unterschied gibt, erklären Sie diesen.

a) Damit der Satellit in seinem Orbit bleibt, muss die zentripetale Beschleunigung im Gleichgewicht mit der Beschleunigung durch die Gravitation sein. Die Gravitation kann man mit die foldende Integral rechnen:

$$F_G = \int_R^{(R+l)} \frac{GM_E}{r^2}\rho_l \mathrm{d}r, \tag{3}$$

wobei l für die Länge des Seils, M_E für die Erdmasse , R für den Radius der Erde, G für die Gravitationkonstante und ρ_l für die linear Massendichte der Seils ($[kg/m]$) steht.

$$F_G = \int_R^{(R+l)} \frac{GM_E}{r^2}\rho_l \mathrm{d}r = GM\rho_l \left| -\frac{1}{r} \right|_R^{R+l} = \frac{\rho_l GMl}{(R+l)\,R} \tag{4}$$

Die zentripetale Kraft kann mit einem Integral über den Radius r berechnet werden:

$$F_Z = \int_R^{(R+l)} \omega^2 r \rho_l \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho_l\omega \left| r^2 \right|_R^{R+l} = \frac{1}{2}\rho_l\omega^2 \left(2Rl + l^2\right) \tag{5}$$

Die Gravitationskraft übernimmt die Aufgabe der Zentripetalkraft, d.h. $F_G = F_Z$. Also erhalten wir

$$\frac{\rho_l GMl}{(R+l)\,R} = \frac{1}{2}\rho_l\omega^2\left(2Rl + l^2\right) \Longrightarrow R\,(2R+l)\,(R+l) = \frac{2GM}{\omega^2} \tag{6}$$

Löst man die quadratische Gleichung nach l, erhält man:

$$\frac{-3R \pm \sqrt{9R^2 + 4\cdot\left(2\cdot G\cdot M_E/R/\omega^2 - R^2\right)}}{2} \frac{-3R}{2} \pm \frac{\sqrt{R^2 + 8\cdot G\cdot M_E/(R\omega^2)}}{2} \tag{7}$$

Nur die positive Lösung ist physikaltisch sinnvoll. Einsetzen ergibt daher (mit $\omega = 2\pi/24\,\mathrm{h} = 7.27\cdot 10^{-5}\,/\mathrm{s}$):

$$l \approx 1.44\cdot 10^8\,\mathrm{m} = 144'000\,\mathrm{km} \tag{8}$$

b) Die Zentripetalkraft muss für eine stabile Position genau gleich der Erdanziehung sein:

$$m\omega^2 r = mGM_E/r^2 \to r^3 = GM_E/\omega^2 \tag{9}$$

Die Umlaufzeit des Satelliten beträgt einen Tag:

$$T = 2\pi/\omega = 1\,d = 24\cdot 3600\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s} \tag{10}$$

Damit ergibt sich für $\omega = 7.2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ und $r = 4.25\cdot 10^7\,\mathrm{m} = 42500\,\mathrm{km}$.

c) Die Länge der Seile ist deutlich grösser als die Höhe eines geostationären Satellitens. Je näher das Seil an die Erdoberfläche heranreicht, desto mehr macht sich die Erdanziehung bemerkbar, ausserdem nimmt die nötige Zentripetalkraft mit kleiner werdendem Abstand ab. Würde das Seil nur bis zum Geostationären Orbit gehen, würde es von der Erde angezogen werden. Dies muss durch die zusätzliche Länge (so genannte Oberlänge) ausgeglichen werden.
Weitere Details, inklusive eine Diskussion über die Machbarkeit solch eines Weltraumfahrstuhls, findet man unter http://www.drg-gss.org/typo3/html/index.php?id=50 .

Aufgabe 4: Von einer Kraft geleistete Arbeit

a) Zwei Kisten der Massen m und $2m$ werden mit der gleichen konstante Kraft F auf einer reibungsfreien Ebene angeschoben. Welche der Massen hat nach eine Abstand s die grössere kinetische Energie?

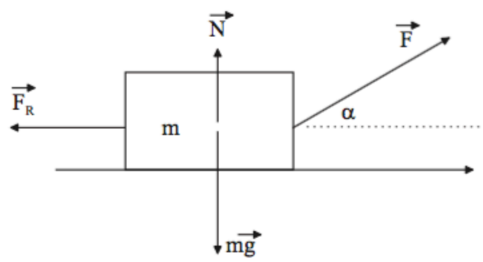
   i) Die Leichteste.

   ii) Die Schwerste.

   iii) Beide haben die gleiche kinetische Energie.

   iv) Man muss deren Geschwindigkeit kennen um eine Antwort zu geben.

Eine Masse von 100 kg liegt auf einer horizontalen Unterlage. Eine Kraft $\vec{F}$ greift an der Masse unter einem Winkel $\alpha = 30°$ zur Horizontalen an (siehe Figur). Bei einer Verschiebung der Masse auf der Unterlage bewirke die Reibung eine konstante Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Die Reibungskraft betrage $|\vec{F_R}| = 0.2|\vec{N}|$, wobei $\vec{N}$ die Normalkraft der Unterlage auf die Masse m ist. (Erdbeschleunigung $g = 9.8\ m/s^2$)

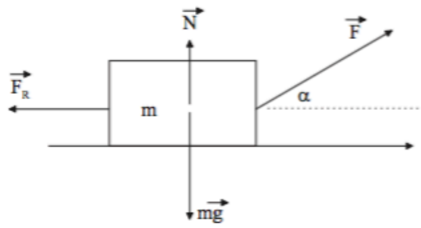


b) Wie gross muss $|\vec{F}|$ sein, damit sich die Masse mit konstanter Geschwindigkeit auf der Unterlage verschiebt, und wie gross sind in diesem Fall $|\vec{N}|$ und $|\vec{F_R}|$?

c) Welche Arbeit leistet die Kraft $\vec{F}$ beim Verschieben der Masse um 100 m bei konstanter Geschwindigkeit.

Aufgabe 4: Von einer Kraft geleistete Arbeit

a) iii) Beide Kisten erhalten durch das Anschieben die gleiche kinetische Energie $E_{kin} = F \cdot s$



b) Wenn sich die Masse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, muss die resultierende Kraft auf die Masse verschwinden:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_R + m\vec{g} = 0$$

Zerlegung der Kräft in die Komponenten parallel und senkrecht zur Unterlage:

$$\text{senkrechte Komponente: } |\vec{N}| + |\vec{F}| \sin\alpha - mg = 0$$
$$\text{parallele Komponente: } |\vec{F}| \cos\alpha - F_R = 0 \quad ; \quad F_R = 0.2|\vec{N}|$$

Addieren der beiden Gleichungen ergibt:

$$F(\sin\alpha + 5\cos\alpha) = mg$$

$$\underline{F} = \frac{mg}{\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{980 \text{ kg m/s}}{4.83} = 202.9 \text{ kg m/s}^2$$
$$= \underline{202.9 \text{ Newton}}$$

$$|\vec{N}| = 5|\vec{F}|\cos\alpha = 878.6 \text{ kg m/s}^2 = \underline{878.6 \text{ Newton}}$$
$$|\vec{F}_R| = 0.2|\vec{N}| = \underline{175.7 \text{ kg m/s}^2}$$

c) Definition der Arbeit die eine Kraft $\vec{F}$ entlang eines Weges s zwischen den Punkten 1 und 2 leistet:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad : \quad \text{Linienintegral entlang des Weges } s$$

In unserem Problem ist $\vec{F}$ ein konstanter Vektor, d.h.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$
$$= F \Delta r \cos\alpha \quad ; \quad \Delta r = 100 \text{ m}$$
$$= F_R \Delta r$$

$$W_{12} = 175.7 \text{ N} \cdot 100 \text{ m} = 1.76\ 10^4 \text{ Nm}$$
$$= \underline{1.76\ 10^4 \text{ J} = 17.6 \text{ kJ}}$$