Analysis I/II – Aufgabensammlung
(aus alten Basis-Prüfungen)

ETH Zürich

Berücksichtige Prüfungen:
HS15 / HS14 / FS14 i / FS14 ii / FS13 / HS12

Induktion

b) [*3 Punkte*] Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \geq 1$ und $0 \leq \epsilon \leq 1$ gilt:

$$(1+\epsilon)^n \leq 1 + (2^n - 1)\epsilon.$$

(FS 13)

Komplexe Zahlen - Umrechnung

b) [*3 Punkte*] Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(HS 15)

a) i) [*2 Punkte*] Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{2i-4}{1+i} - \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) [*1 Punkt*] Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = -2 + 2i$ in Polarform.

(HS14)

a) [*2 Punkte*] Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{\sqrt{3}i - 1}$$

(FS 14 i)

a) [*2 Punkte*] Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2-i}{4+3i}$$

(FS 13)

Grenzwert Bestimmung

a) [*3 Punkte*] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right).$$

(HS 15)

b) [*3 Punkte*] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x \to \pi/2} \tan(x) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

(HS 14)

c) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x) + x + 2}{e^{-x} + 3x + \sin x}.$$

(FS 14 i)

a) [*5 Punkte*] Sei $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$ mit $a_0 = 1$ und $\mathbb{N} \ni n \geq 0$. Finden Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

(FS 14 i)

2. a) [*6 Punkte*] Sei $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ mit $a_0 = \sqrt{2}$ und $\mathbb{N} \ni n \geq 0$. Finden Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

(FS 14 ii)

b) [*4 Punkte*] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(FS 14 ii)

c) [*3 Punkte*] Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert (falls vorhanden):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{x \sin x}.$$

(FS 13)

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{(x+3)(x+6)}\right),$$

(2 *Punkte*)

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin(x) + 2x^2}{4\ln(1+x) - \sin(4x) + 2x^2},$$

(2 *Punkte*)

c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1},$$ **wobei p, q ganze strikt positive Zahlen bezeichnen.**

(2 *Punkte*)

(HS 12)

Supremum / Infimum und Maximum / Minimum

b) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{1 + |\cos(x)|}{1 + x^4} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

falls diese existieren.

(FS 14 i)

3. Finden Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x^2 - x| + |x|.$$

(2 *Punkte*)

(HS 12)

Umkehrsatz

c) [*4 Punkte*] Berechnen Sie $(g^{-1})'(0)$ für $g(x) := \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt$.

(HS 14)

Konvergenz (mit teilweise Grenzwert Bestimmung) / Grenzfunktionen

a) [*5 Punkte*] Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

b) [*2 Punkte*] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 3}.$$

c) [*2 Punkte*] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\log 3)^n}.$$

(HS 15)

2. a) [*2 Punkte*] Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \arctan(n) \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

auf Konvergenz.

b) [*2 Punkte*] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^n}{2^n 3^n}.$$

c) [*4 Punkte*] Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n(x) := \sin(\frac{x}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Bestimmen Sie die Grenzfunktion f.

(HS 14)

b) [*2 Punkte*] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(FS 14 ii)

2. a) [*4 Punkte*] Untersuchen Sie die Zahlenfolge $a_n = \frac{1-\sqrt{(1+\frac{2}{n})(1-\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ist sie beschränkt? Konvergiert sie? Wenn ja: Was ist der Grenzwert?

b) [*4 Punkte*] Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^j}{2^{j+1}-j}$$

(FS 13)

1. Zeigen Sie dass, die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}, \quad n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge wächst und durch $c = 2$ beschränkt ist.

(4 Punkte)

(HS 12)

Stetigkeit

3. Sei $f_n(x) = \begin{cases} 1-2nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 0, & \frac{1}{2n} \leq x \leq 1-\frac{1}{2n}, \\ 1-2n+2nx, & 1-\frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$ und $f_n(x+k) = f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $k \in \mathbb{Z}$

a) [*1 Punkte*] Machen Sie eine Skizze von $f_n(x)$.

b) [*2 Punkte*] Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig stetig.

c) [*4 Punkte*] Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ punktweise auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie!
Falls ja, bestimmen Sie die Limesfunktion und untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(FS 14 i)

b) [*4 Punkte*] Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmässig gegen die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ konvergiert.

(FS 13)

3. Sei $f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}$ für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) [*4 Punkte*] Zeigen Sie: $f_n(x)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ (fixiert) auf $[0,\infty)$ gleichmässig stetig.
Hinweis: Für n fix dürfen Sie verwenden, dass $|f_n'(x)|$ auf dem Intervall $[1,\infty)$ für $x \to \infty$ monoton fallend ist.

(FS 13)

Potenzreihen

c) [*4 Punkte*] Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

durch eine Potenzreihe in x dar.

(HS 15)

3. [*8 Punkte*] Die Funktionen $f, g : [0,1) \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) := \int_0^x \log(y+1)dy \quad \text{und} \quad g(x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)\cdot k}.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in [0,1)$ gilt:

$$f(x) + C = g(x)$$

und bestimmen Sie die Konstante C.
Hinweis: Taylor-Entwicklung.

(HS 14)

(Nicht sicher ob es wirklich eine Potenzreihen Aufgabe ist)

b) [*2 Punkte*] Für welche x konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j}\right)^j x^j \ ?$$

Hinweis: Bestimmen Sie den Konvergenzradius und das Konvergenzverhalten am Rand.

(FS 14 i)

4. a) [*5 Punkte*] Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

für $x \geq 0$, die konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie $f'(x)$.

(FS 13)

Existenz einer Lösung (wahrscheinlich Piccard-Lindelöf) und Taylor-Polynom

3. Die Gleichung

$$\ln(x) = \frac{4(x-1)}{5} \tag{1}$$

besitzt die Lösung $x = 1$.

a) [*3 Punkte*] Beweisen Sie die Existenz einer zweiten Lösung $x_\star$ der Gleichung (1) im Bereich $(1, \infty)$.
Hinweis: $\ln(1.2) > \frac{0.8}{5}$ und $\ln(1.6) < \frac{2.4}{5}$.

b) [*2 Punkte*] Sei $g(x) := \ln(x) - \frac{4(x-1)}{5}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $g(x)$ um $x = 1$.

c) [*3 Punkte*] Mit Hilfe von b) geben Sie eine Approximation von $x_\star$.

(FS 14 ii)

Taylor-Polynom

b) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie $T_3(x)$, das Taylorpolynom 3. Ordnung von f um den Punkt $x = 0$, und rechnen Sie den Näherungswert $T_3(1) \approx f(1)$.

(FS 13)

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x \sin x.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom fünfter Ordnung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(*2 Punkte*)

(HS 12)

Differential-Gleichungen

4. a) [*7 Punkte*] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 27e^{2x}.$$

b) [*3 Punkte*] Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$t \cdot y'(t) + 2y(t) = 2, \quad t > 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

(HS 15)

5. a) [*7 Punkte*] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 10y = 3 \cdot e^{2x}.$$

b) [*3 Punkte*] Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 2 + xy^2 + 2y^2 + x$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(HS 14)

6. [*7 Punkte*] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 5y'' + 15y' - 11y = e^x.$$

(FS 14 i)

5. a) [*7 Punkte*] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 10y' + 28y = 29xe^{-x}.$$

b) [*4 Punkte*] Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 3 + 3y - x - xy,$$

welche die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt.

(FS 14 ii)

6. a) [*5 Punkte*] Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ strebt die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'' + 2y' + ay = 0$ unabhängig von den Anfangsbedingungen gegen 0 für $x \to \infty$?

b) [*4 Punkte*] Finden Sie eine homogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Lösung $y(x) = e^{-x} + 2xe^{-x}$ ist. Was sind dann die Anfangsbedingungen bei $x = 0$?

(FS 13)

8. **a)** **Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung**

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

(*2 Punkte*)

b) **Die Differentialgleichung**

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q. Für welche Werte von q bleiben alle Lösungen für $x \to \infty$ beschränkt ?
Hinweis. **Sorgfältige Fallunterscheidung für Nullstellen des charakteristischen Polynoms !**

(*5 Punkte*)

(HS 12)

Differenzieren

c) [*2 Punkte*] Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(FS 14 ii)

Integrale

Normale Berechnung (mit üblichen Methoden):

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) [*4* ***Punkte***] $\int (2x^3 + 2x)\log(x^2+1)\,dx.$

   b) [*4* ***Punkte***] $\int \dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx.$

   c) [*3* ***Punkte***] $\int_0^\infty \dfrac{x}{(1+x^2)^3}dx.$

(HS 15)

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) [*3* ***Punkte***] $\int e^{2x}\sin(3x)dx.$

   b) [*4* ***Punkte***] $\int \dfrac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}dx.$

   c) [*3* ***Punkte***] $\int \dfrac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx.$

(HS 14)

a) [2 ***Punkte***] $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx.$

b) [3 ***Punkte***] $\int \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-5x-6}dx.$
Hinweis: $x=-1$ ist eine Nullstelle des Polynoms x^3+2x^2-5x-6. Ausklammern!

(FS 14 i)

4. Berechnen Sie:

a) [3 ***Punkte***] $\int_0^1 \ln(x)(x^2-1)dx.$

b) [4 ***Punkte***] $\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6}dy.$

c) [3 ***Punkte***] $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

(FS 14 ii)

5. Berechnen Sie:

a) [*2 Punkte*] $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

b) [*3 Punkte*] $\int \cos(x)\cosh(x) dx$.

c) [*3 Punkte*] $\int \frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1} dx$.

(FS 13)

7. Bestimmen Sie den Wert folgender Integrale

a)

$$\int_0^2 x^2 \ln(1+x^3)\,dx,$$

(*2 Punkte*)

b)

$$\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\,dx,$$

(*2 Punkte*)

(HS 12)

Wegintegrale

7. Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x,y) = (6 + 2xy, 3y^2 + \alpha x^2).$$

a) [*4 Punkte*] Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist v ein konservatives Vektorfeld?

b) [*5 Punkte*] Berechnen Sie mit dem in Teilaufgabe a) errechneten Wert von α das Wegintegral

$$\int_\gamma v\,ds,$$

entlang der Kurve

$$\gamma : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

(Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie das konservative Vektorfeld $v(x,y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$.)

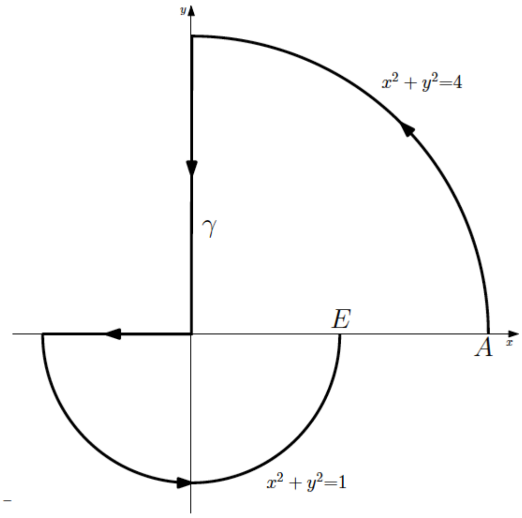
(HS 15)

8. [*10 Punkte*] Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy \\ -y^3 + x^2 \end{pmatrix}.$$



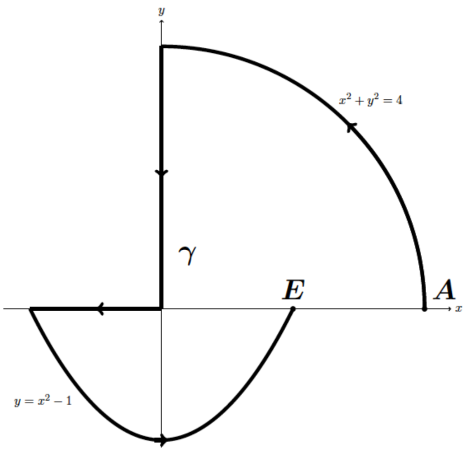
(HS 14)

8. [*10 Punkte*] Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$$

entlang des eingezeichneten Wegs γ (vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E) für das Vektorfeld

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 + x^3 \\ -y \end{pmatrix}.$$



(FS 14 ii)

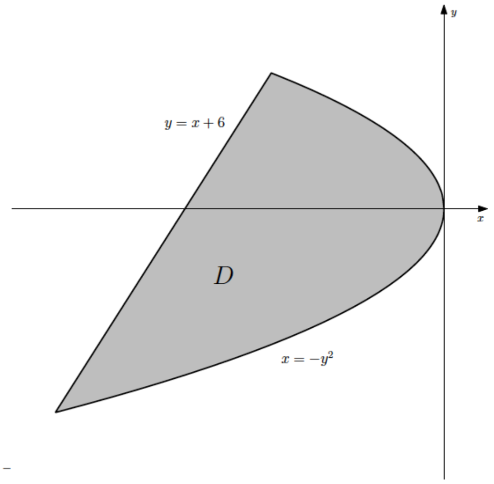
(unterscheidt sich nur im Vektorfeld von der oberen Aufgabe)

Integrale über Gebiete:

5. a) [*5 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

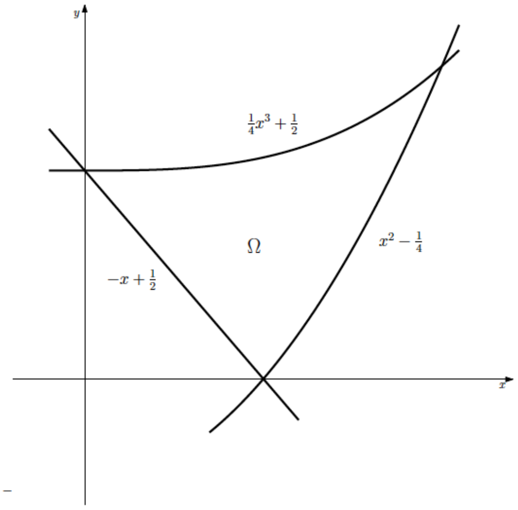
$$\iint\limits_D \frac{4}{9} y^2 \, dx \, dy$$

über dem Gebiet $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 6,\ x \leq -y^2\}$.



(HS 15)

6. a) [*7 Punkte*] Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x}$ über den geschlossenen Bereich, der in der Figur mit Ω bezeichnet ist.

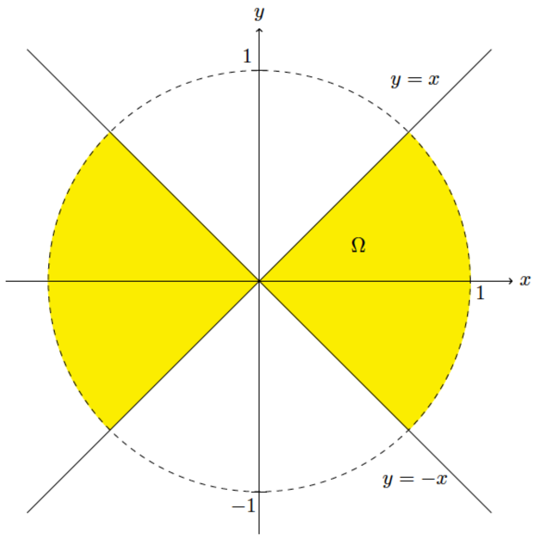


(HS 14)

c) [*3 Punkte*] Integrieren Sie die Funktion

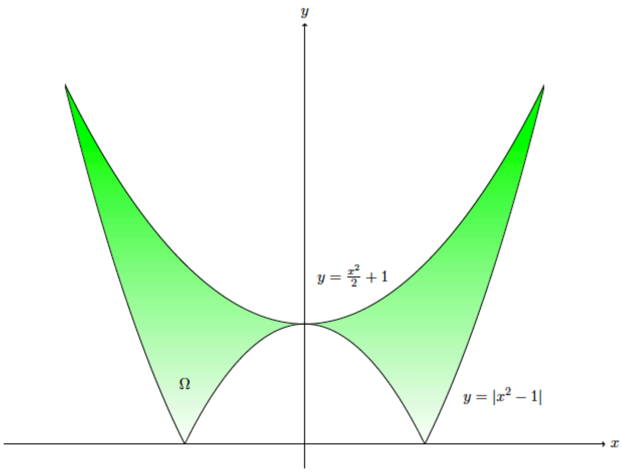
$$f(x,y) = |x|\sqrt{x^2+y^2}$$

über den in der Figur schraffierten Bereich Ω.



(FS 14 i)

6. a) [*7 Punkte*] Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = y$ über den in der Figur schraffierten Bereich Ω.



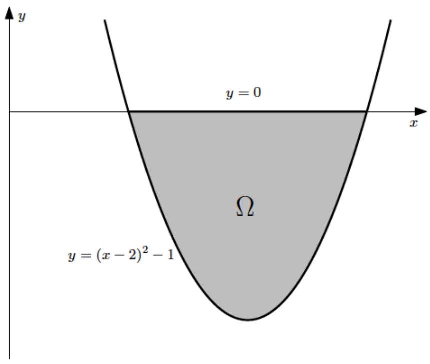
(FS 14 ii)

Fläche von Gebieten:

b) [*5 Punkte*] Berechnen Sie die Fläche des Gebiets

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 - 1 \leq y \leq 0\}$$

unter Verwendung des Satzes von Green.

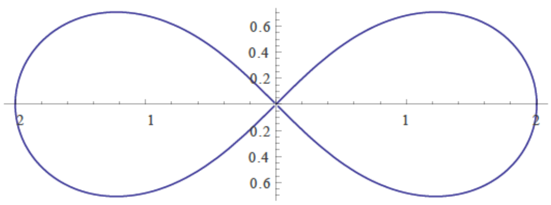


(HS 15)

b) [*3 Punkte*] Die Kurve γ ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung

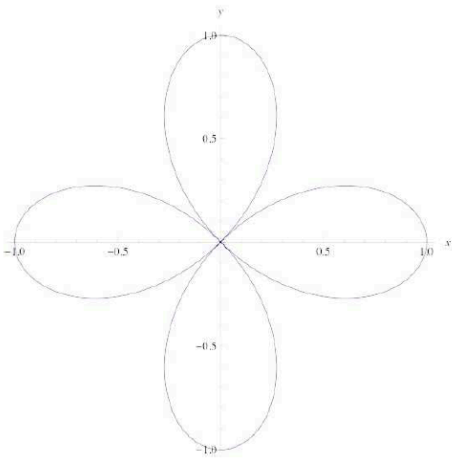
$$r = 2 \cdot \sqrt{\cos(2\theta)} \quad \text{für} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi].$$

Berechnen Sie die durch γ eingeschlossene Fläche F.



(HS 14)

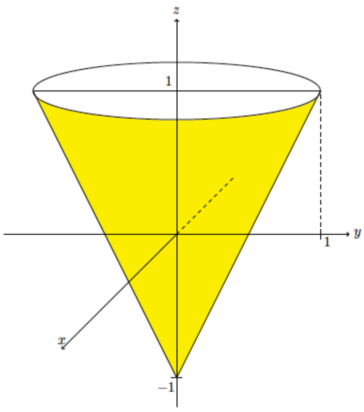
b) [*3 Punkte*] Sei die Kurve γ in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = \cos(2\vartheta)$ mit $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Die unterstehende Figur zeigt γ in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche.



(FS 14 ii)

Oberflächenintegrale

8. [*7 Punkte*] Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{M}$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{x^2}{2}, -xy, x^2 + 3z^2 - 3)$ und M die Mantelfläche des Kegels



bezeichnet. Wir wählen die Orientierung der Fläche so, dass der dazugehörige Normalvektor nach Aussen zeigt.

(FS 14 i)

8. [*6 Punkte*] Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_S F \cdot dS$, wobei $F(x,y,z) = (x(1-z), x^2 z - y, \frac{z^3}{3})$ ist und S die Oberfläche (Mantelfläche, Boden und Deckel) des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$ bezeichnet.

(FS 13)

Kritische Punkte / Extremalpunkte

6. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 + 2xy - 4x - 2y.$$

a) [*6 Punkte*] Bestimmen Sie sowohl den grössten als auch den kleinsten Wert, den die Funktion f auf dem Viereck

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

annimmt.

b) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Fläche

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y)\}$$

im Punkt $Q := (1,1,f(1,1))$.

(HS 15)

7. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{48}.$$

a) [*6 Punkte*] Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

b) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Fläche

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$$

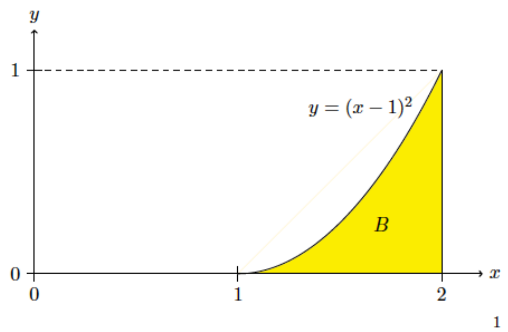
im Punkt $P := (0, \frac{1}{2}, f(0, \frac{1}{2}))$.

(HS14)

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \frac{(x-1)^2}{2} + \cos(y)$.

a) [*4 Punkte*] Finden Sie die kritischen Punkte von $f(x)$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

b) [*7 Punkte*] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion auf dem Bereich B der untenstehenden Figur.



Bemerkung: $\cos(1) = 0.54030\ldots$

(FS 14 i)

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := 5 - \frac{2}{3\sqrt{3}} - x(x^2-1) - y^2$.

a) [*6 Punkte*] Finden Sie die kritischen Punkte von $f(x)$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Sei S die Fläche des Graphen von f, d.h.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y)\}.$$

b) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie die Tangentialebene Σ zur Fläche S im Punkt $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)$.

(FS 14 ii)

7. [*8 Punkte*] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) := xy - \frac{z}{2}$ auf der Kugeloberfläche mit Zentrum im Ursprung und mit Radius 1.

(FS 13)

Kurvendiskussion

6. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

(6 Punkte)

(HS 12)