ETH Physik - Formelsammlung

Laurin Brandner — Jakub Kotal — Nino Scherrer

2. Semester 2016

1 Allgemeines

1.1 SI Einheiten

Physikalische Grösse	Fundamentale Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Ekektrische Stromstärke	Ampère	A
Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

1.2 Winkel

$$2\pi rad = 360$$

$$1rad = \frac{170}{\pi} \approx 57.296$$

Umrechnen:
Radiant $\rightarrow$ Grad: Winkel*180/π
Grad $\rightarrow$ Radiant: Winkel*π/180

1.3 Raum und Zeit

Raum = Abstand zwischen 2 Orten
Zeit = Dauer bestimmter, reproduzierbarer Prozesse

Beispielgrössen

$$1 \text{ pc} = 3,0857 * 10^{16} m = 206'247 \text{ A.U.}$$

wobei pc = Parsec und A.U. = Astronomical Unit = mittlerer Abstand zwischen Erde und Sonne

Grösse des sichtbaren Universums $\approx 10^{10}$ pc
Grösse der Milchstrasse (unsere Galaxie) $\approx 10^4$ pc
Kleinste bekannte Grösse = Plankschе Länge $\approx 10^{-35}$ m

Alter des Universums ca 4.3 * 10^{17} s
Alter der Erde ca. 5 Milliarden Jahre
Umlauf der Erde um die Sonne = 1 Jahr

1.4 Koordinatensysteme

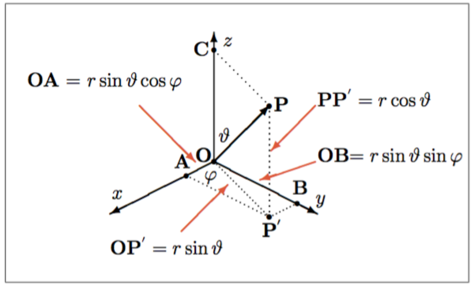
Weil kein "absoluter" Punkt im Raum existiert, muss ein Punkt **P** im Raum immer bezglich einem anderen Punkt **O (Ursprung)** definiert werden

Die kartesischen Koordinaten
Im kartesischen Koordinatensystem definiert man 3 zueinander senkrechte Richtungen x (vorne-hinten), y (links-rechts), z (oben-unten). Der Punkt P wird bezgl. des Ursprungs mit drei kartesischen Koordinaten lokalisiert:

$$\mathbf{OP} = (x, y, z) = (OA, OB, OC)$$

wobei A = Projektion von P auf die x-Achse
B = Projektion von P auf die y-Achse
C = Projektion von P auf die z-Achse

Die Kugelkoordinaten
Im Kugelkoordinatensystem wird ein Punkt **P** im Raum durch 3 Koordinaten dargestellt, wobei
r = Abstand zwischen **O** und **O**: **OP** = (r, ϑ, φ)
ϑ = Winkel zwischen **OP** und z-Achse; $0 \le \vartheta \le \pi$
φ = Winkel zwischen **OP'** und x-Achse; $0 \le \varphi \le 2\pi$



Wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dann liegt P auf der x-y-Ebene, man wird dann die zweidimensionalen **Polarkoordinaten** (r, φ) verwenden.

Umrechnen von Koordinatensystemen
von Kugel- zu kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * sin\vartheta * cos\varphi \\ r * sin\vartheta * sin\varphi \\ r * cos\vartheta \end{pmatrix}$$

von kartesischen zu Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ arctan(\frac{y}{x}) \\ arccos(\frac{z}{r}) \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten
Zylindrische Koordinaten sind Polarkoordinaten mit einer dritten, senkrechten, Koordinaten ergnzt.

$$\mathbf{OP} = (\rho, \varphi, z)$$

von Zylinder- zu kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho * cos\varphi \\ \rho * sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

von kartesischen zu Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ arctan(\frac{y}{x}) \\ z \end{pmatrix}$$

1.5 Vektoren

Skalarprodukt:

$$a \cdot b = |a||b|cos\varphi$$

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ist. Wenn das Skalarprodukt verschwindet, ist a oder b = 0 oder die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Cosinussatz:

$$|c|2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|cos\varphi$$

Vektorprodukt:

$$c = a \times b = -b \times a$$

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)e_x + (a_z b_x - a_x b_z)e_y + (a_x b_y - a_y b_x)e_z$$

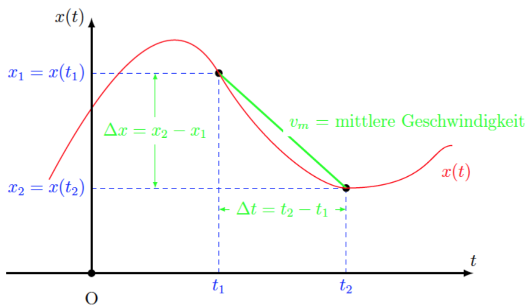
$$c = absin\varphi$$

wobei der Betrag des Vektors **c** gleich der Flche des Parallelogramms ist, welche **a** und **b** aufspannen. **c** steht senkrecht auf **a** und **b**. Wenn die Vektoren parallel sind, ist das Vektorprodukt gleich 0.

2 Kinematik

2.1 Allgemeine Zusammenhänge

$$Weg \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} Geschwindigkeit \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} Beschleunigung$$



Verschiebung:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad oder \quad V = at$$

Beschleunigung

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad oder \quad a = \frac{V}{t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.2 Integration der Bewegung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad dx = v(t)dt$$

dx = Weg innerhalb des Zeitintervalls dt

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt' = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0$$

Schlussendlich folgt daraus:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' + x_0$$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')dt' + v_0$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$
x_0 entspricht dem Startpunkt
v_0 entspricht der Startgeschwindigkeit

Bewegung gleichförmig und geradlinig
$v(t) = konst. \Rightarrow a(t) = 0$ gilt:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Bewegung gleichförmig beschleunigt und geradlinig
$a(t) = a_0 = konst.$ gilt:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

Spezialfall: $x_0 = v_0 = t_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$$
$$v(t) = a_0 t$$
$$a(t) = a_0$$

2.3 Freier Fall / Gravitation

In der Nähe der Erdoberfläche fühlt jeder Köper, ubabhängig von seinem Gewicht, dieselbe Beschleunigung (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird).

$$h = \frac{1}{2}a_0 t^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mit Fallhöhe h und Fallzeit t.

Hinweis : Es existiert eine Grenzgeschwindigkeit, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit (quadratisch) des Körpers zu nimmt.

2.4 Bewegung in mehreren Dimensionen

$$r = r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)e_r(t)$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_x(t)e_x + v_y(t)e_y = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{de_r}{dt}e_y = \underbrace{\frac{dr}{dt}e_r}_{1} + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi}_{2}$$

1 : radiale Geschwindigkeit V_r
2 : Winkelgeschwindigkeit V_φ senkrecht zu e_r in Richtung e_φ

Vereinfacht dargestellt:
$V(t) = V_r + V_\varphi \quad$ mit $V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi = r\omega e_\varphi$

Beschleunigung:

$$a(t) = a_x(t)e_x + a_y(t)e_y = \frac{dv_x}{dt}e_x + \frac{dv_y}{dt}e_y = \frac{d^2x}{dt^2}e_x + \frac{d^2y}{dt^2}e_y$$

In Polarkoordinaten:

$$a(t) = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}e_x - r\left(\frac{d\varphi}{dt}e_y\right)^2}_{1} e_r + \left(\underbrace{2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}}_{2}\right) e_\varphi$$

1 = radiale Beschleunigung
2 = Winkelbeschleunigung

2.5 Zerlegung/Integration der Bewegung (mehrdimensional)

Aus den Bewegungsgleichungen sieht man, dass die zueinander senkrecht stehenden x- und y-Bewegungen voneinander unabhänig sind.
=> Bei 3 Dimensionen kann diese Betrachtung einfach erweitert werden

$$v(t) = v_0 + a_0(t)$$

$$r(t) = r_0 + V_0 t \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$= \left(x_0 + v_{0x} + \frac{1}{2}a_{0x}t'2\right)e_x + \left(y_0 + v_{0y} + \frac{1}{2}a_{0y}t'2\right)e_y$$

2.6 Bahnkurve beim Ballwurf

Zur Zeit t_{max} erreicht die Kugel den höchsten Punkt ihrer Bahnkurve. In diesem Punkt verschwindet die vertikale Geschwindigkeit:

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Die maximale Höhe der Kugel ist:

$$y_{max} = y_0 + \frac{{v_{0y}}^2}{2g}$$

2.7 Schuss auf fallende Platte

Eventuell noch mit Beispiel ergnzen

2.8 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \omega t$$

mit Winkelgeschwindigkeit ω und Periode T:

$$\varphi(T) = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Strecke:

$$s(t) = r\varphi(t) = r\omega t$$

Vektorielle Darstellung

$$r(t) = r\cos(\varphi(t))e_x + r\sin(\varphi(t))e_y$$

Da Bewegung gleichförmig (ω = konstant) folgt:

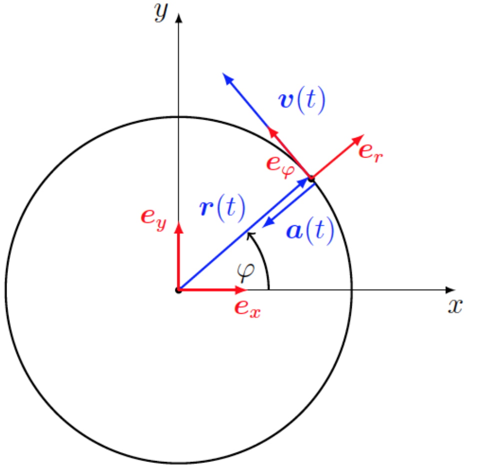
$$r(t) = r\cos(\omega t)e_x + r\sin(\omega t)e_y$$

2.8.1 Geschwindigkeitsvektor

Betrag: $|\vec{v}| = r\omega = konst.$
Die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zum Ortsvektor.

2.8.2 Beschleunigungsvektor = Zentripetalbeschleunigung

Zeigt in Richtung Zentrum des Kreises mit Betrag: $\vec{a} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$



2.8.3 Fluchtgeschwindigkeit

Geschwindigkeit, um ein Gravitationsfeld zu verlassen (z.B. Erde), wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist.

$$v = \sqrt{2gr}$$

3 Dynamik

3.1 Definitionen

3.1.1 Masse

Masse ist Eigenschaft eines Köpers $\Rightarrow$ überall gleich (im Gegensatz zu Gewicht).

3.1.2 Lineare Impuls

Der lineare Impuls ist definiert als

$$p = mv \qquad \text{mit Einheit} \qquad \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow p_A + p_B = 0$$

In einem isolierten System ist der **Gesamtimpuls** erhalten.

3.1.3 Kraft

Die Kraft ist die zeitliche änderung des Impulses:

$$F = ma(t) \qquad \text{mit Einheiten} \qquad 1N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

3.2 Newtonsche Gesetze

3.2.1 Trägheitsprinzip

Ein Köper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn er isoliert ist.

3.2.2 Aktionsprinzip

Die Beschleunigung eines Köpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt.

3.2.3 Aktions-Reaktions-Prinzip

Zu jeder Aktion gehört eine gleich grosse Reaktion, die denselben Betrag besitzt aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

3.3 Raketenantrieb

$v(t)$ Geschwindigkeit der Rakete bezüglich dem festen Koordinatensystem

u Konstante Ausstossgeschwindigkeit des Gases *relativ zur Rakete* (relativ zum festgelegten Koordinatensystem mit Geschwindigkeit $v - u$)

$M(t)$ Gesamtmasse, also Rakete + Treibstoff zur Zeit t

Der **Gesamtimpuls** der Rakete zur Zeit t ist gleich

$$p(t) = M(t)v(t)$$

Auf die Rakete wirkt die **Schubkraft** F

$$F = u\frac{dm}{dt}$$

Und die **Geschwindigkeit**

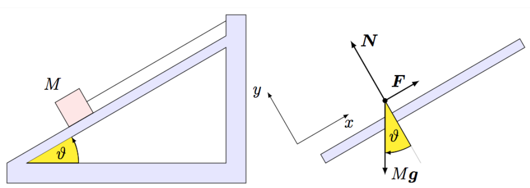
$$v(t) - v_0 = -u(\ln(M_0 - m) - \ln(M_0))$$

wobei M_0 die Anfangsmasse und m die Gesamtmasse des ausgestossenen Gases ist.
Oder als Funktion der ausgestossenen Masse (mit $v_0 = 0$)

$$v = u\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{m}{M_0}}\right)$$

3.4 Schiefe Ebene

3.4.1 Statischer Fall



$$F + N + Mg = 0$$

Daraus folgt

$$F = Mg\sin(\vartheta)$$
$$N = Mg\cos(\vartheta)$$

3.4.2 Dynamischer Fall

$$N + Mg = F_{res} = Ma$$

Dank der Normalkraft verschwindet die Beschleunigung in y-Richtung. In x-Richtung ist sie gleich

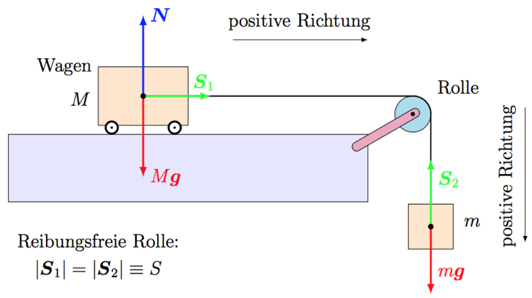
$$a_x = -g\sin(\vartheta)$$

3.5 Federkraft

$$F = -k(x - x_0) = -k\Delta x$$

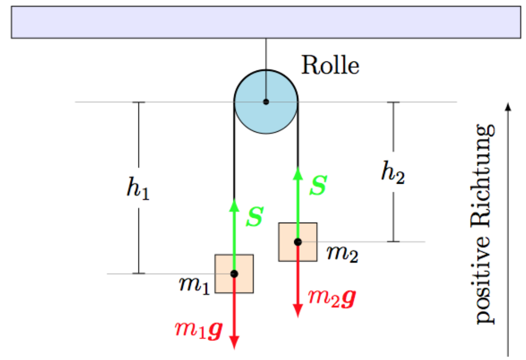
wobei k die Federkonstante mit Einheit $\frac{N}{m}$, x_0 die Länge der Feder im unbelasteten Zustand ist.

3.6 Bewegung mit Rollen



$$S = Ma$$
$$a = \frac{m}{M + m}g$$

3.7 Atwoodsche Fallmaschine



$$a_1 = -a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$
$$S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad \text{wobei} \qquad |a_1| = |a_2| < g$$

3.8 Harmonische Schwingungen

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

wobei A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und δ die Phasenkonstante ist.

Die **Kreisfrequenz** ω hängt dabei nur von der Rückstellkraftkonstante k und der Masse m ab

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Der Winkel der Sinusfunktion wird als **Phase** der Schwingung bezeichnet

$$\varphi(t) = \omega t + \delta$$

wobei δ die ursprüngliche Phase zur Zeit $t = 0$ ist.

Die **Periode** T ist die Zeit, die benötigt wird, um eine vollständige Schwingung durchzuführen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die **Frequenz** v ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeit

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Die **Kraft** F zeigt immer Richtung Ursprung und ist gleich

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t)$$

3.9 Gravitation

$$F_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \qquad \text{wobei} \qquad F_{12} = -F_{21}$$

Hinweis: Alle Körper, unabhängig von ihren Massen, werden von der Erde gleich beschleunigt.

4 Energie

4.1 Energieerhaltung

Bei allen Vorgängen muss die Gesamtenergie eines Systems und seiner Umgebung erhalten werden.

$$E_{tot} = E_{Masse} + E_{kin} + E_{pot} + E_{chem} + \text{usw.} = \text{konst.}$$

4.2 Relativistische Grössen

$$\text{Geschwindigkeitsparameter} \equiv \frac{v}{c}$$

Für hohe Geschwindigkeiten giltet der relativistische Impuls:

$$p = \gamma m v$$

mit dem **Lorentzfaktor** γ

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

4.3 Kinetische Energie

4.3.1 Klassisch ($v < 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

4.3.2 Relativistisch ($v \geq 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

4.4 Potentielle Energie der Gravitation

Die **potentielle Energie** eines Körpers auf der Höhe h ist gleich

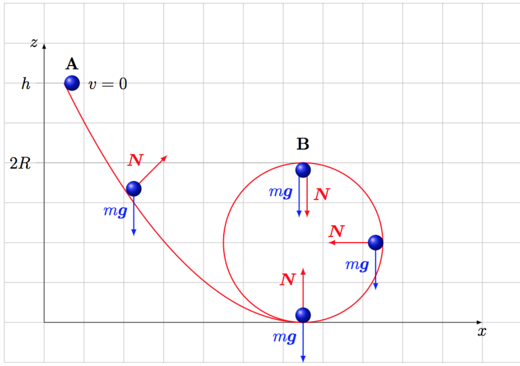
$$E_{pot}(h) = mgh$$

Die **Gesamtenergie** eines Körpers im freien Fall von der Höhe h ist gleich

$$E(y) = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{mgy}_{\text{potentiell}}$$

falls der *Luftwiderstand* vernachlässigt werden darf.

4.5 Looping



Ist die Geschwindigkeit kleiner als v_{min}, löst sich der Ball vom Kreis

$$v_{min} = \sqrt{gR}$$

Die Höhe h, von der die Kugel fallen gelassen werden muss, ist gleich

$$h = \frac{5}{2}R > 2R$$

4.6 Arbeit

Die **Arbeit** W ist gleich dem Produkt der Komponente der Kraft längs der Verschiebung und der Verschiebung selbst

$$W = F\Delta x \cos(\vartheta)$$

4.6.1 Arbeit der Federkraft

Die **Arbeit** zwischen den Verschiebungen x_1 und x_2 ist gleich

$$W_{12} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

4.7 Leistung

Die **Leistung** P ist die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$$

4.8 Allgemeine potentielle Energie

4.8.1 Konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit längs eines geschlossenen Wegs ist gleich null. Die Arbeit ist unabhängig vom zurückgelegten Weg.Potentielle Energie ist für diese Art von Kräften definiert.
Beispiel: Gravitationskraft, Federkraft

4.8.2 Nicht-konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit hängt vom Weg ab.
Beispiel: Reibungskraft

4.9 Arbeit-Energie-Theorem

Die Arbeit, die an einem Körper zwischen zwei Punkten (1) und (2) geleistet wird, ist gleich der änderung seiner kinetischen Energie zwischen diesen Punkten.

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

4.10 Mechanische Energie

$$E_{mech} \equiv E_{kin} + E_{pot}$$

Die mechanische Energie wird *erhalten*, wenn nur konservative Kräfte wirken.
Die änderung der mechanischen Energie ist gleich der Arbeit, die von *nicht-konservativen* Kräften geleistet wird.

4.11 Bremsweg

Betrachtet wird das Gleiten auf einer **schiefen** Ebene mit der Starthöhe h und dem Neigungswinkel ϑ. Dann ist der **Bremsweg** L

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)}$$

Ist die Ebene **waagrecht**, so gilt:

$$L = \frac{v_0^2}{2a}$$

5 Mechanische Wellen

5.1 Wellenfunktion

$$\xi = \xi(x,t)$$

x = Raumkoordinate
t = Zeit

Wellentypen:

1. Seilwellen: $\xi(x,t)$ beschreibt transversale Auslenkung des Seils
2. Federwellen: $\xi(x,t)$ beschreibt transversale oder logitudinale Verformung der Feder
3. Gaswellen: $\xi(x,t)$ beschreibt den Druck des Gase

Vereinfachung - Weglassen der Dispersion
Normalerweis verändert sich die Form des Wellenberges mit der Zeit (=Dispersion). Wir werden dies allerdings weglassen und den Wellenberg als stabile Form betrachten.
Zudem nehmen wir die Welle zur Zeit t=0 an. Daraus folgt:

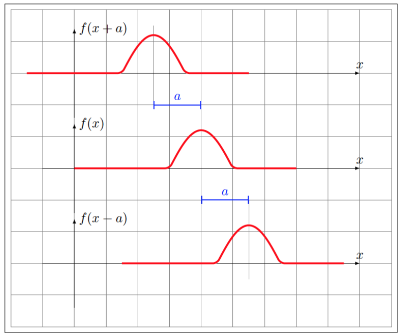
$$\xi(x, t=0) = f(x)$$

Welle nach links:

$$\xi = f(x - vt)$$

Welle nach rechts:

$$\xi = f(x + vt)$$



5.2 Harmonische Wellen

Laufende harmonische Welle:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\{k(x \pm vt)\}$$

k = Wellenzahl $\quad \xi_0$ = Amplitude

Wobei k und v:

$$k(x+\lambda) = kx + 2\pi \implies k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$$

$$\nu = \frac{\omega}{\pi}$$

ν = Frequenz der Welle, ω = Kreisfrequenz,
v = Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Wellengleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

	Medium	Temperatur	Ausbreitungs-geschwindigkeit [m/s]
Gase:			
	Luft	0°C	331
	Luft	20°C	343
	Helium	20°C	965
	Wasserstoff	20°C	1284
Flüssigkeiten:			
	Wasser	0°C	1402
	Wasser	20°C	1482
	Seewasser	20°C	1522
Festkörper: (longitudinale Wellen)			
	Aluminium		6420
	Stahl		5941
	Granit		6000

Tabelle 5.1: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen.

5.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit transversaler, elastischer Seilwellen

Längendichte des Seils:

$$p = \frac{M}{L}$$

M = Masse des Seils, L = Länge des Seils

$$v^2 = \frac{S}{p} \implies v = \pm\sqrt{\frac{S}{p}}$$

wobei S die Spannung des Seils und p die Längendichte ist.

5.5 Wellen im Festkörper

Eine Deformation ist elastisch wenn der Festkörper seine Form wieder annimmt, wenn die Kräfte nicht mehr wirken.
Meisten Körper sind nur bis zu einem bestimmten Grenze der Kräfte elastisch = Elastizitätsgrenze
Relative Längenänderung:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Innerhalb der Elastizittsgrenze gilt das Hooksche Gesetz:

$$F = YA\frac{\Delta l}{l} = YA\epsilon$$

wobei: F = Kraft (die zieht), A = Querschnitt, Y = Elastizittsmodul

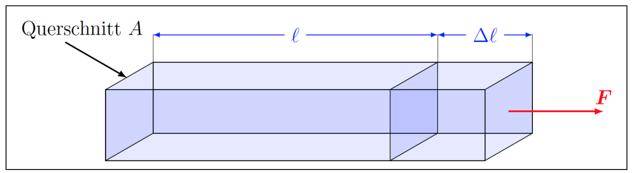


Abbildung 5.13: Lineare Verformung eines Stabes unter Normalbelastung.

Einheit des Elastizitätsmodul:

$$[Y] = \frac{N}{m^2}$$

Deformationswellen

1. Longitudinale Wellen: Breiten sich in allen Medien aus.

2. Transversale Wellen: Breiten sich nur in festen Körpern aus

Longitudinale, elastische Wellen im Festkörper

$$v^2 = \frac{Y}{P} \implies v \pm \sqrt{\frac{Y}{p}}$$

Einheit des Elastizitätsmodul ist wiederum:

$$[Y] = \frac{N}{m^2}$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Medium	Elastizitäts-modul [GN/m²]	Ausbreitungs-geschwindigkeit [m/s]
Aluminium	100	6420
Stahl	200	5941
Granit	200	6000

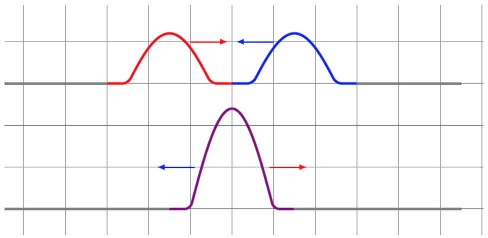
Tabelle 5.2: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von longitudinalen Wellen.

5.6 Prinzip der Superposition

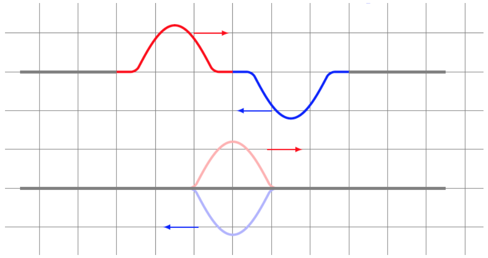
Vereinfacht kann die Superposition folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$$

Sich aufsummierende Wellen:



Sich ausgleichende Wellen:



5.7 Stehende Wellen

Beispiel: Seite, die auf beiden Seiten befestigt ist.
$\implies$ Auslenkung in eine harmonische Schwingung durch eine äussere Kraft

Grundfrequenz = erste Eigenfrequenz $\nu_1 \implies$ Die erste Welle davon = erste Harmonische

Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Eigenfrequenz ν_n :

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

wobei n = 1,2,3,...

Die Frequenz der n'ten Harmonischen kann als Funktion der Grundfrequenz (erste Harmonische) betrachtet werden:

$$\nu_n = n\nu_1$$

wobei:

$$\nu_1 = \frac{v}{2L}$$

Zudem folgt im Zusammenhang mit der bestimmten Geschwindigkeit:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{p}}$$

Randbedingung stehender Wellen
Aus dem Prinzip der Superposition folgt:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$
$$= \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)$$
$$= 2\xi_0 \sin(kx) + cos(\omega t)$$

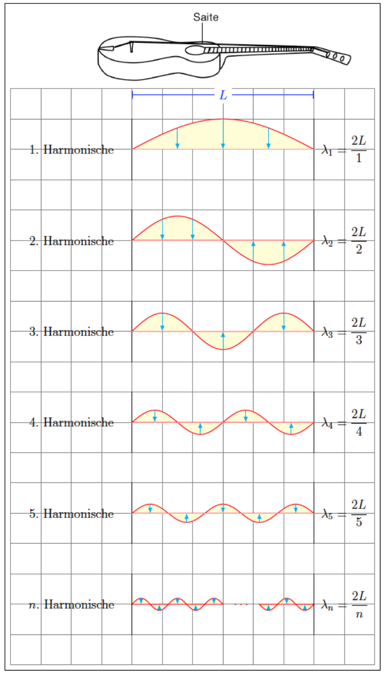
Es folgt daraus, dass eine Punkt an einem beliebigen Ort x eine einfache harmonische Bewegung hat, und dass die Amplitude von Ort zu Ort verschieden ist.
$\implies$ Ist die Saite allerdings links und rechts befestigt, existiert eine Randbedingung bei x=0 (=L):

$$\xi_0(0,t) = \xi_0(L,t) = 0$$

Daher folgt:

$$\xi_0(L,t) = 2\xi_0 \sin(kL) + cos(\omega t) = 0$$

$$\implies \sin(kL) = 0$$



Die Bedingung wird erfüllt wenn die Wellenzahl k oder die Wellenlänge folgende Werte besitzen:

$$k_n L = \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, ...$$

oder:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Wellenfunktion der n'ten Harmonischen:

$$= 2\xi_0 \sin(k_n x) + cos(\omega_n t)$$

wobei:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \; und \; \omega_n = 2\pi\nu_n \quad n = 1, 2, 3, ...$$

6 Relativität

6.1 Relativbewegung

Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, messen verschiedene Geschwindigkeiten und Beschleunigungen:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{relativ zu O}} = \frac{dR(t)}{dt} + \underbrace{v'(t)}_{\text{relativ zu O'}}$$

$$\underbrace{a(t)}_{\text{relativ zu O}} = \frac{d^2R(t)}{dt^2} + \underbrace{a'(t)}_{\text{relativ zu O'}}$$

6.2 Scheinkräfte

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten. Es ist *nicht beschleunigt*.

Die **Zentrifugalkraft** ist eine fiktive, nach aussen gerichtete Kraft:

$$F_{ZF} = m(r'\omega^2)e_r$$

Die **Corioliskraft** wirkt senkrecht zur radialen Geschwindigkeit:

$$F_C = m(2v'\omega)e_\varphi$$

Hinweis: Ein Bezugssystem, das feste Koordinaten relativ zur Erdoberfläche hat ist kein Inertialsystem, da die Erde sich dreht/beschleunigt ist.

6.3 Transformationen

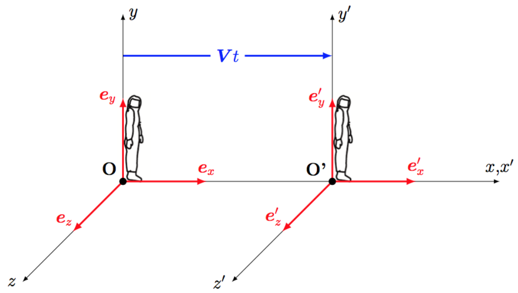
6.3.1 Ereignis

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$$

wobei das Produkt ct die Lichtgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ mal die Zeit $[s]$ ist.

6.3.2 Galileitransformation

Wir betrachten zwei Beobachter O und O', die sich relativ zueinander mit *konstanter Geschwindigkeit* bewegen.



Bewegt sich der Beobachter O' in positive Richtung der x-Achse des Bezugssystems O, so ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x - \beta ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \text{von O nach O'}$$

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x' + \beta ct \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \text{von O' nach O}$$

wobei der **Geschwindigkeitsparameter** $\beta = \frac{V}{c}$ ist.

6.3.3 Lorentz-Transformation

Der **Lorentz-Faktor** ist gleich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Dann ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \text{von O nach O'}$$

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \text{von O' nach O}$$

6.3.4 Geschwindigkeitstransformation

Der **Geschwindigkeitsvektor** u bezüglich O kann wie folgt berechnet werden

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x}$$
$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{\beta}{c}u'_x)}$$

6.4 Relativitätstheorie

6.4.1 Raumzeit-Intervall

Räumliche und zeitliche Entfernungen sin in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich. Nur das **Raumzeit-Intervall** Δs ist gleich für alle Beobachter.

$$\Delta s^2 = \underbrace{(c\Delta t)^2}_{\substack{\text{zeitliche} \\ \text{Entfernung}}} - \underbrace{\Delta r^2}_{\substack{\text{räumliche} \\ \text{Entfernung}}}$$

6.4.2 Zeitdilatation

Das in einem bewegten Bezugssystem gemessene Zeitintervall ist immer um den Faktor γ grösser als das Eigenzeitintervall:

$$\underbrace{\Delta t'}_{\substack{\text{bezüglich } O' \\ \text{gemessene Zeit}}} = \underbrace{\gamma \cdot \Delta\tau}_{\substack{\text{bezüglich } O \\ \text{gemessene Zeit}}}$$

wobei $\Delta\tau$ das Eigenzeitintervall ist (Zeit im Ruhesystem gemessen).

Daraus folgt, dass Vorgänge länger zu dauern scheinen, wenn sie in einem System ablaufen, das sich relativ zum Beobachter bewegt.

6.4.3 Längenkontraktion

Die räumliche Entfernung zwischen zwei Punkten erscheint geringer, wenn sich der Beobachter relativ zu diesen Punkten bewegt, als wenn er relativ zu ihnen ruht:

$$\underbrace{\Delta x'}_{\substack{\text{bezüglich } O' \\ \text{gemessene Länge}}} = \underbrace{\frac{\Delta\lambda}{\gamma}}_{\substack{\text{bezüglich } O \\ \text{gemessene Länge}}}$$

wobei $\Delta\lambda$ die Eigenlänge ist (Länge im Ruhesystem gemessen).