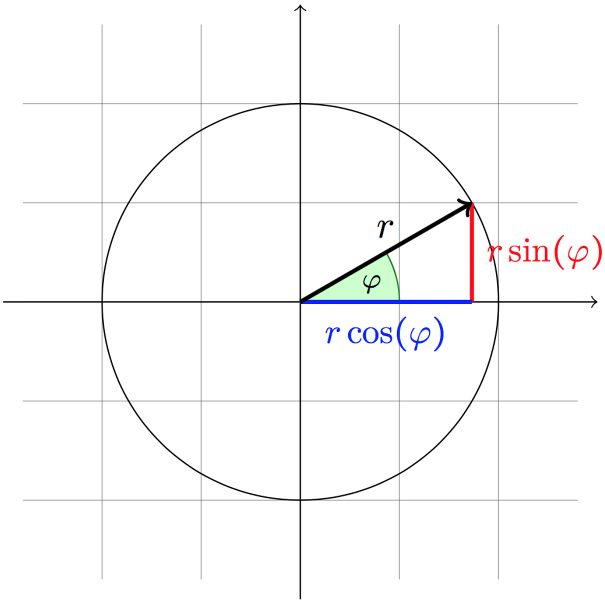
# 1 Mengen

| | |
|---|---|
| **Obere Schranke:** | $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A: \ a \leq b$ |
| **Supremum:** | kleinste obere Schranke $\sup A$ |
| **Infimum:** | grösste untere Schranke $\inf A$ |
| **Maximum/Minimum:** | $\sup A \in A$, $\inf A \in A$ |

# 2 Komplexe Zahlen

## 2.1 Polarform




$$
\begin{aligned}
z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi} \\
r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\varphi &= \arctan(\frac{y}{x}) = \\
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi) \\
zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)} \\
\sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q} \\
e^{i\frac{\pi}{2}} &= i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1
\end{aligned}
$$

## 2.2 Identitäten

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= x - iy \\
(a, b) \cdot (b, c) &= (ac - bd, ad + bc) \\
i &= \sqrt{-1} \\
i^2 &= -1 \\
|zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2
\end{aligned}
$$

# 3 Trigonometrie

$$
\sin(0) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\pi) = 0
$$
$$
\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \cos(\pi) = -1
$$

$$
\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\
\sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1
\end{aligned}
$$

# 4 Grenzwert

## 4.1 Dominanz

$$
\begin{aligned}
\text{Für } x \to +\infty: &\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x \\
\text{Für } x \to 0: &\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha
\end{aligned}
$$

## 4.2 Tipps

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0 \\
\lim_{x\to a} (1+\frac{1}{\odot})^{\odot} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty \\
\lim_{x\to a} (1+\odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0
\end{aligned}
$$

## 4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha}+\beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha}+\beta)\frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta}$$

## 4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

### Anforderung

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "$0^0$", "$\infty^0$" oder "$1^\infty$" für $x \to 0$

### Vorgehen

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

## 4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

### Anforderung

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$.
Falls die Grenzwerte $0 \neq \infty$ verschieden sind, kann man umformen: $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

### Vorgehen

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)}$$

# 5 Folgen und Reihen

# 6 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 6.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

## 6.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 6.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom $m$-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei $\xi$ zwischen $a$ und $b$ liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x+a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

# 7 Integration

## 7.1 Elementare Integrale

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^\alpha$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\log(x) + C$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x} + C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x) + C$ |

## 7.2 Regeln

**Direkter Integral** $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

**Partielle Integration** $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

**mit Polynomen** $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

**Substitution** $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

### 7.3 Tipps

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\log|\cos(x)|$$
$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

# 8 Differentialgleichungen

## 8.1 Grundbegriffe

| | |
|---|---|
| **Ordnung:** | höchste vorkommende Ableitung |
| **linear:** | alle $y$-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel $y^2$, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$) |
| **homogen:** | Gleichung ohne Störfunktionen |
| **Störfunktion:** | Term, der rein von der Funktionsvariablen $x$ abhängt |

## 8.2 Methoden

| | **Problem** | **Anforderungen** |
|---|---|---|
| **Trennung der Variablen** | $y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$ | 1. Ordnung |
| **Variation der Konstanten** | $y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$ | 1. Ordnung<br>inhomogen |
| **Euler-Ansatz** | $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$ | n. Ordnung<br>linear<br>homogen |
| **Direkter Ansatz** | $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$ | n. Ordnung<br>linear<br>inhomogen |

### 8.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x\tan y = 0, \;\; y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\quad \frac{dy}{dx} = -x\tan y$

**konstante Lösungen** $\quad y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\quad \frac{dy}{\tan y} = -xdx$

integrieren $\quad \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int xdx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Anfangsbedingung gebrauchen $\quad \sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

**Lösung** $\quad y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

### 8.2.2 Variation der Konstanten

**Grundsatz:** $\quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$$
\begin{array}{rl}
 & y' - y = 1,\ y(0) = 0 \\
\text{homogener Ansatz} & y' = y \\
\textbf{konstante Lösungen} & y(x) \equiv 0 \\
\text{Trennung} & \dfrac{dy}{y} = dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log|y| = x \\
\textbf{homogene Lösung} & y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R} \\
\text{partikulärer Ansatz} & y_p(x) = A(x)e^x \\
\text{einsetzen} & A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \displaystyle\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \\
\textbf{partikuläre Lösung} & y_p(x) = -1 \\
\textbf{Lösung} & y(x) = Ae^x - 1 \text{ mit Anfangsbedingung } A = 1 \\
 & \Rightarrow y(x) = e^x - 1
\end{array}
$$

### 8.2.3 Euler-Ansatz

$$
\begin{array}{rl}
 & y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
\text{Euler-Ansatz} & y(x) = e^{\lambda x} \\
\text{einsetzen} & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
\textbf{charakt. Polynom} & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
\text{Nullstellen} & 4, -2 \\
\textbf{allgemeine Lösung} & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\
\text{Anfangsbedingung gebrauchen} & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\
 & \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}e^{-4}, B = \dfrac{2}{3}e^2 \\
\textbf{Lösung} & y(x) = \dfrac{1}{3}e^{4x-4} + \dfrac{2}{3}e^{2-2x}
\end{array}
$$

*Bemerkung:* Zu einer $m$-fachen Nullstelle $\lambda$ gehören die $m$ linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur $m$-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, $x$, ... , $x^{m-1}$.

### 8.2.4 Direkter Ansatz

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

| **Inhomogener Term** $b(x)$ | **Ansatz für** $y_p(x)$ | **zu bestimmen** |
|---|---|---|
| Polynom | $Ax^2 + Bx + C$ | $A$, $B$, $C$ |
| $ce^{kx}$ | $Ae^{kx}$ | $A$ |
| $c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$ | $A\sin(kx) + B\cos(kx)$ | $A$, $B$ |

$$
\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}
$$

# 9 Wegintegral

## 9.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\ dt$$

$$
\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \\
\text{parametrisieren} \quad & \text{hier bereits gegeben} \\
\gamma \text{ ableiten} \quad & \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix} \\
\text{in Formel einsetzen} \quad & \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\
& = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt \\
\textbf{Lösung} \quad & 2\pi - 0 + \pi = 3\pi
\end{aligned}
$$

## 9.2 In Potenzialfeldern

**Anforderung:** Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**. Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 \; dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$$

**Potenzial:** $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

**Lösung:** $$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$$

### 9.3 Satz von Green

**Anforderung:** Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

**Grundsatz:** $$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}) \; dxdy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen: $$rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

Normalbereich: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

in Formel einsetzen: $$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 \; dxdy = -\mu(E) = -\pi$$

## 10 Flächenintegral

### 10.1 Normalbereich

**Grundsatz:** $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_\Omega F \; d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \; F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy \; d\mu, \; \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $$\int_\Omega xy \; d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx \; x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big)dx = \frac{1}{12}$$

### 10.2 Satz von Green

$$\textbf{Grundsatz:}\quad \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s}, \text{ falls } rot(\vec{v}) = 1$$

Flächeninhalt der Ellipse $E$, berandet durch$x = a\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

**Wegintegral ausrechnen** $\mu(E) = \pi ab$

## 11 Kurvendiskussion

### 11.1 Extrema/Minima

**Kritischer Punkt:** $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0)$ nicht den maximalen Rang besitzt, also falls $Rang(df(p_0)) < \min n, m$.