1 Allgemein

1.1 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\pi) = 0,\ \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

1.2 Potenzgesetze

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
(a^n)^m &= a^{nm} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^{\frac{b}{n}} &= \sqrt[n]{a^b}
\end{aligned}$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

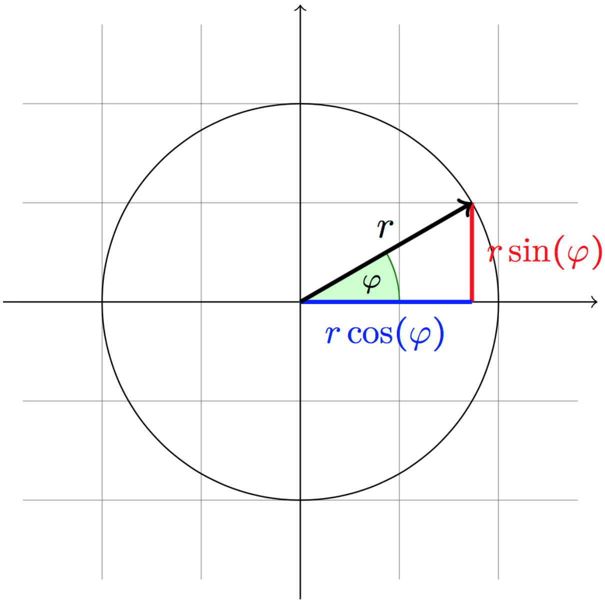
Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2.2 Identitten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) =$$
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$
$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$
$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\overline{z} = x - iy$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty : \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0 : \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert ”0^0”, ”∞^0” oder ”1^∞” für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu ntzlich.

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder ”$\frac{0}{0}$” oder ”$\frac{\infty}{\infty}$” mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$\frac{f(x)}{g(x)}$	”$\frac{0}{\infty}$”	$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$f(x)g(x)$	”$0\cdot\infty$”	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	”$\infty - \infty$”	$\frac{f(x)i(x)-h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

5 Folgen

5.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0\ \exists N = N(K) \in \mathbb{N},$ sodass $\forall n \geq N : |a_n| > K$

5.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschrnkt** ist und monoton **steigt/fllt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

2. Schtze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab

3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lsst sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
   - falls Grenzwert $= 0$:
     - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
     - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= \infty$:
     - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
     - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^\infty a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

mann muss noch prufen ob es in bereich konvergiert oder im aussen von bereich konvergiert, dazu eine formel benutzen.

6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$
$$lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e^a$$
$$\sum_{k=1}^n 2k-1 = n^2$$

7 Stetigkeit

7.1 Stetigkeitskriterien

Weierstrass-Kriterium

Fr alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass fr alle $|x-a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Gleichmssige Stetigkeit

Fr alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass fr alle $|x-y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmssig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschrnkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmssige Stetigkeit.

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmssige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmssig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmssig falls:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmssige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

8 Ableitungen

8.1 Elementare Ableitungen

$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{2}{\cos(2x)+1}$
$\log(\alpha + x)$	$\frac{1}{\alpha+x}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$

9 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

9.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

9.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

9.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x+a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

9.4 Hauptsatz von calculus

$$f(x) = \int_{l}^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) * \frac{d}{dx}m(x)$$

wo m(x) hat der Form ax^b und $l \epsilon \mathbb{R}$

10 Integration

10.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

10.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

10.3 Tipps

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\log|\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+(\frac{x}{\alpha})^2} = \arctan(x)$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1} = sinh(x)$$

11 Differentialgleichungen

11.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

11.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

11.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\quad \frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $\quad y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\quad \frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\quad \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int x dx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Anfangsbedingung gebrauchen $\quad \sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $\quad y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

11.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $\quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$$y' - y = 1,\ y(0) = 0$$

homogener Ansatz	$y' = y$
konstante Lösungen	$y(x) \equiv 0$
Trennung	$\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log\lvert y\rvert = x$
homogene Lösung	$y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R}$
partikulärer Ansatz	$y_p(x) = A(x)e^x$
einsetzen	$A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$
partikuläre Lösung	$y_p(x) = -1$
Lösung	$y(x) = Ae^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$
	$\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

11.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz	$y(x) = e^{\lambda x}$
einsetzen	$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$
charakt. Polynom	$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$
Nullstellen	$4, -2$
allgemeine Lösung	$y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$
Anfangsbedingung gebrauchen	$y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$
	$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$
Lösung	$y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

11.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für $y_p(x)$**	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

$$
\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}
$$

11.3 Komplexe zahlen

Falls der charakteristische Polynom ist komplex und hat der form $a + i\sqrt{b}$, dann hat die homogene Losung die form:

$$y(x) = e^{ax}(c_1 cos(\sqrt{b}x) + C_2 sin(\sqrt{b}x))$$

Wo a ist die komplexe losung von charakteristische polynom.

12 Vektorfelder

12.1 Operatoren

12.1.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

12.1.2 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Lnge ist gleich der maximalen nderung von f.

12.1.3 Hessematrix

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls a hat in x0 nur positive eigenwerte dann ist es eine maximalstelle, falls sie hat nur negative eingewerte dann ist es eine minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein sattelpunkt.

12.1.4 Rotation

Fr ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit Komponenten v_1, v_2, v_3:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

12.2 Divergenz

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + ...$$

12.3 Integrabilitatsbedigungen

$$\frac{\vartheta v_i}{\vartheta x_j} = \frac{\vartheta v_j}{\vartheta x_i}, \forall i \neq j$$

Falls diese ist erfllt dann ist der Feld ein Potenzialfeld und konservativ.

12.4 Potenzialfeld

Ein potenzialfled ist konservativ. Der potenzial Φ eines Potenzialfeld:

$$\bigtriangledown \Phi \doteq v$$

Bemerkung: Falls $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist $\vec{v}$ konservativ.

13 Wegintegral

13.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\ dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{parametrisieren} \quad & \text{hier bereits gegeben} \\
\gamma \text{ ableiten} \quad & \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix} \\
\text{in Formel einsetzen} \quad & \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\ dt \\
& = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt \\
\textbf{Lösung} \quad & 2\pi - 0 + \pi = 3\pi
\end{aligned}$$

13.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0) \\
\text{gleichsetzen:} \quad & \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi \\
& \frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 \; dy = xe^{xy} + C(x) \\
\text{ableiten:} \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\
& \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \\
\textbf{Potenzial:} \quad & \Phi = xe^{xy} + \text{const.} \\
\textbf{Lösung:} \quad & \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2
\end{aligned}$$

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \; dxdy$$

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0) \\
\text{Rotation berechnen:} \quad & rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1 \\
\text{Normalbereich:} \quad & E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \\
\text{in Formel einsetzen:} \quad & \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 \; dxdy = -\mu(E) = -\pi
\end{aligned}$$

13.4 Tips

parametrisierung eines kreises: x=r*cos(t) y= r*sin(t) dxdy= rdrdt dxdy=$|rs \times rt|$

14 Flussintegrale oberflacheintegrale

14.1 1 methode

1. Die flache parametrisieren nach u und v: $\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v)$.
2. berechnen $\Phi_u = \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta u}$ und $\Phi_v = \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta v}$. Und krossprodukt berechnen $\Phi_u \times \Phi_v$
3. benutzen die Formel:

$$\int_S v * ndo = \pm \int_a^b \int_c^d v(\Phi(u,v)) * (\Phi_u \times \Phi_v) dudv$$

14.2 Gauss

$$\int_{\vartheta V} v * ndo = \int_V div(v) d\mu$$

15 Flächenintegral

15.1 Normalbereich

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
$$\int_\Omega F \; d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \; F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy \; d\mu, \;\; \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $\int_\Omega xy \; d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx \; x \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big) dx = \frac{1}{12}$$

15.2 Satz von Green

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $rot(\vec{v}) = 1$

Flächeninhalt der Ellipse E, berandet durch$x = a\cos(\theta), \;\; y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \;\; \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen $\mu(E) = \pi ab$

16 Kurvendiskussion

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\mathrm{rank}(df(p_0)) < \min\{m,n\}$ gilt
Kandidaten fr Extrema: $p_0 \in \Omega$ fr welchen $df(p_0) = 0$ gilt

16.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten fr Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
   (a) $\mathrm{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum
   (b) $\mathrm{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum
   (c) $\mathrm{Hess}(f)(p_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

16.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedinung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L: $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedinung anwenden (mssen alle Nebenbedingung erfllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
   falls g differenzierbar:
   (a) nicht-regulre Punkte finden mit $dg = 0$
   (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung berprfen

   falls g nicht differenzierbar:
   (a) nicht-regulre Punkte der Teilstcke des Randes
   (b) Eckpunkte des Gebietes berprfen