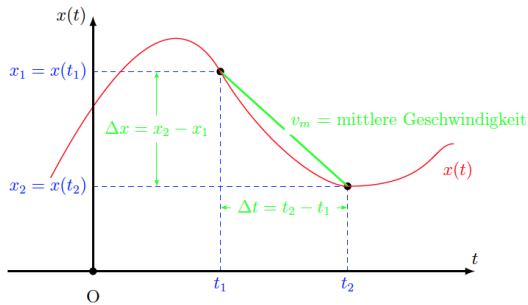


1 Kinematik

1.1 Allgemeine Zusammenhänge

Weg $\xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}}$ Geschwindigkeit $\xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}}$ Beschleunigung



Verschiebung:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ oder } V = at$$

Beschleunigung

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ oder } a = \frac{V}{t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

1.2 Integration der Bewegung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v(t)dt$$

dx = Weg innerhalb des Zeitintervalls dt

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0$$

Schlussendlich folgt daraus:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' + x_0$$

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t')dt' + v_0$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$

x_0 entspricht dem Startpunkt

v_0 entspricht der Startgeschwindigkeit

Falls die Bewegung gleichförmig und geradlinig ($v(t) = \text{konst.} \Rightarrow a(t) = 0$) gilt:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Falls die Bewegung gleichförmig beschleunigt und geradlinig ($a(t) = a_0 = \text{konst.}$) gilt:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

Spezialfall: $x_0 = v_0 = t_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2$$

$$v(t) = a_0t$$

$$a(t) = a_0$$

1.3 Freier Fall / Gravitation

In der Nähe der Erdoberfläche fühlt jeder Körper, unabhängig von seinem Gewicht, dieselbe Beschleunigung (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird).

$$h = \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mit Fallhöhe h und Fallzeit t .

Hinweis : Es existiert eine Grenzggeschwindigkeit, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit (quadratisch) des Körpers zu nimmt.

1.4 Bewegung in mehreren Dimensionen

$$r = r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)e_r(t)$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_x(t)e_x + v_y(t)e_y = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{de_r}{dt}e_y = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_1 e_r + r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_2 e_\varphi$$

1 : radiale Geschwindigkeit V_r

2 : Winkelgeschwindigkeit V_φ senkrecht zu e_r in Richtung e_φ

Vereinfacht dargestellt:

$$V(t) = V_r + V_\varphi \quad \text{mit } V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi = r\omega e_\varphi$$

1.5 Bahnkurve beim Ballwurf

Zur Zeit t_{max} erreicht die Kugel den höchsten Punkt ihrer Bahnkurve. In diesem Punkt verschwindet die vertikale Geschwindigkeit:

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Die maximale Höhe der Kugel ist:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

1.6 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \omega t$$

mit Winkelgeschwindigkeit ω und Periode T :

$$\varphi(T) = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

1.6.1 Geschwindigkeitsvektor

Betrag: $|\vec{v}| = r\omega = \text{konst.}$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zum Ortsvektor.

1.6.2 Beschleunigungsvektor = Zentripetalbeschleunigung

Zeigt in Richtung Zentrum des Kreises mit Betrag: $\vec{a} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$

