

1 Lineare Gleichungssysteme und Gauss elimination

Ein Gleichungssystem ist linear falls man kann ihn in diese Art schreiben:

$$Ax + By = C \quad (1)$$

Wo A und B dürfen nicht gleichzeitig 0 sein.

Erst tauschen wir die Gleichungssystem in eine Matrix:

$$A * x = b \quad (2)$$

Wo A sind die Koeffizienten von die Gleichungen, x die Unbekanten und b die Lsungen. Fur die Auflsung, tauschen wir die Matrix A in eine diagonalisierte matrix durch pivotierung.

In eine Gaus elimination dürfen wir:

1. Zeile vertauschen
2. Addition und Subtraktion eines vielfachen der pivotzeile zu eine andere Zeile.

Eine quadratische lineare Gleichungssystem wo eindeutige Lsungen berechenbar sind is regular, sonst ist er singular.

Rang Der rang eine Matrix ist die Anzahl von lineare unabhnigige Zeilen (Anzahl pivotelemente).

Die Anzahl der freien variablen ist $n - r$.

Der Gleichungssytem hat mindestens eine Losung wenn:

1. $r = m$
2. $r < m$ und $c_{r+1} = c_{r+2} = \dots = c_m = 0$

Gibt es losungen dann:

1. $r = n \Rightarrow$ losung ist eindeutig.
2. $r < n \Rightarrow$ gibt eine $n - r$ parametrische losungsschar.

Korollar 1.3 *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \left. \begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{hat genau} \\ \text{eine Lösung} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} r = n = m \quad \text{oder} \\ \left\{ \begin{array}{l} r = n < m \quad \text{und} \\ c_{r+1} = \dots = c_m = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \\
 (ii) \quad & \left. \begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{hat für jedes } \mathbf{b} \\ \text{(mindestens) eine Lösung} \end{array} \right\} \iff r = m, \\
 (iii) \quad & \left. \begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{hat für jedes } \mathbf{b} \\ \text{genau eine Lösung} \end{array} \right\} \iff r = m = n.
 \end{aligned}$$

Ein Gleichungssystem heisst homogen falls die rechte Seite aus nullen besteht.

2 Matrizen und Vektoren

2.1 Notation

A_{xy} x ist die vertikale und y die Horizontale.

$\mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbb{C}^{m \times n}$

Sind die mengen reellen und complexen Matrizen.

$\mathbb{E}^{m \times n}$ ist die Menge alle Matrizen.

2.2 Rechnen mit Matrizen

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

Satz 2.1 *Die Addition, die Multiplikation und die skalare Multiplikation von Matrizen (und Vektoren) haben die folgenden Eigenschaften, vorausgesetzt dass die Operationen definiert sind:*

$$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A}), \quad (2.6)$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}), \quad (2.7)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = (\alpha\mathbf{A}) + (\beta\mathbf{A}), \quad (2.8)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) + (\alpha\mathbf{B}), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{Add. kommutativ}), \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (\text{Add. assoziativ}), \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{Mult. assoziativ}), \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = (\mathbf{AC}) + (\mathbf{BC}) \quad (\text{Add./Mult. distributiv}), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{AB}) + (\mathbf{AC}) \quad (\text{Add./Mult. distributiv}), \quad (2.14)$$

$A \times B = O$ auch wenn $A \neq O \wedge B \neq O$

ist A eine $m \times n$ Matrix, dann ist A^T die $n \times m$, die transponierte Matrix. Gleiche bei komplexe Zahlen mit die konjugiert-komplexe: A^H von \bar{A}

Eine Matrix ist symmetrisch/hermitesch falls $A^H = A$ und ist schiefsymmetrisch falls $A^T = -A$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$A^T A$ und AA^T sind immer symmetrisch.

2.3 Skalarprodukt, die norm, lange und Winkel von Vektoren

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (3)$$

Der Cosinussatz:

$$\|y - x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\varphi \quad (4)$$

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (5)$$

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \quad (6)$$

Satz 2.9 Für das Skalarprodukt (2.48) im \mathbb{R}^n gilt:

(S1) Es ist **linear** im zweiten Faktor:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle && \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \\ \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(S2) Es ist **symmetrisch**:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(S3) Es ist **positiv definit**:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &\geq 0 && \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 0 &\implies & \mathbf{x} = \mathbf{o}.\end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt (2.47) im \mathbb{C}^n gelten (S1) und (S3) analog für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, aber (S2) wird ersetzt durch:

(S2') Es ist **Hermiteisch**:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

(S4) Es ist auch **linear** im ersten Faktor:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{für alle } \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \\ \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle && \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt (2.47) im \mathbb{C}^n ist **sesquilinear** [sesquilinear], d.h. zusätzlich zu (S1) gilt:

(S4') Es ist **konjugiert-linear** im ersten Faktor:

$$\langle \mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

Lange eines Vektors:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} \quad (7)$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (8)$$

Die Norm

1. positiv definit: $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Sie ist dem Betrage nach homogen: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. Die Dreiecksungleichung: $\|x \pm y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ für alle x, y

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x_k| \quad (10)$$

Senkrecht

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y \quad (11)$$

für $x \perp y$ gilt:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (12)$$

2.4 Das äußere Produkt und die orthogonale Projektion auf eine Gerade

2.4.1 Äußere Produkt

Das äußere Produkt eines m -Vektors x und eines n -Vektors y ist die $m \times n$ Matrix xy^H

Eine $m \times n$ Matrix hat genau dann den Rang 1, wenn sie das äußere Produkt eines m -Vektors $x \neq 0$ und eines n -Vektors $y \neq 0$ ist.

2.4.2 Orthogonale Projektion

Die orthogonale Projektion $P_y x$ des Vektors x auf die durch die Vielfachen von y ($\neq 0$) erzeugte Gerade durch den Ursprung ist gegeben durch:

$$P_y x := uu^H x \quad (13)$$

wo

$$u := \frac{y}{\|y\|} \quad (14)$$

2.5 Matrizen als lineare Abbildungen

$$A : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m, x \mapsto Ax \quad (15)$$

Der bild von A

$$\text{im} A := \{Ax \in \mathbb{E}^m; x \in \mathbb{E}^n\} \quad (16)$$

2.6 Die inverse Matrix

$$AA^{-1} = I_n \quad (17)$$

Die folgende aussagen sind equivalent:

1. A ist invertierbar
2. es gibt genau ein A^{-1}
3. A ist regular, $\text{rang } A = n$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (18)$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (19)$$

2.7 Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine Matrix heisst unitär falls $A^H A = I_n$, heisst auch orthogonal falls $A^T A = I_n$

falls A und B sind unitäre:

1. A^{-1} ist unitär
2. AB ist unitär

Eine unitäre abbildung ist:

1. length preserving
2. angle preserving

Therefore:

$$\|Ax\| = \|x\|, \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad (20)$$

2.8 Strukturierte Matrizen

Mehrere Type von Matrizen. schau im skript 2.9

3 Die LR-Zerlegung

$$PA = LR \quad (21)$$

Die Matrix A ist umgewandelt in eine obere und untere Dreiecksmatrix.

$$Lc = Pb \quad (22)$$

$$Rx = c \quad (23)$$

Wir lösen die zwei letzte durch Rückwertseinsetzen und Vorwartseinsetzen.

3.0.1 Die L matrix

Die L matrix hat 1 auf die Diagonale und der Rest sind die inversen der Termen mit dem ich hab die Pivotzeilen multipliziert in der gauss algorithmus.

3.0.2 Die R matrix

Ist die obere Dreiecksmatrix die ich mit gauss erhalte.

wenn wir die lr zerlegung für ein parameter machen und wir erhalten ein x über dies parameter, dann hat a eine eindeutige lösung für jede parameter.

3.1 Die LDR zerlegung

$$PA = LDR_1 \quad (24)$$

$$R_1 := D^{-1}R \quad (25)$$

D ist gleich die Pivotelemente.

3.2 Untermatrizen für LR-Zerlegung

Eine $m \times n$ Matrix A vom Rang $r \leq \min\{m, n\}$ lässt sich genau dann ohne Zeilenvertauschungen LRzerlegen, wenn die r führenden Hauptuntermatrizen A_k ($k=1, \dots, r$) regulär sind.

Algorithmus 3.3 (LR–Zerlegung durch Updating) *Zur LR–Zerlegung einer regulären Matrix A , deren $n - 1$ führende Hauptuntermatrizen A_k ($k = 1, \dots, n - 1$) regulär sind, setze man zunächst $L_1 := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $R_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$. Für $k = 1, \dots, n - 1$ teile man dann A_{k+1} gemäss (3.58) in vier Blöcke auf und berechne*

$$\sigma_{k+1} := a_{k+1,k+1} - \mathbf{c}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{b}_k, \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{L}_{k+1} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_k & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{c}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} & 1 \end{array} \right), \quad (3.61b)$$

$$\mathbf{R}_{k+1} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_k & \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{b}_k \\ \hline \mathbf{o}^\top & \sigma_{k+1} \end{array} \right). \quad (3.61c)$$

Dabei erhält man $\mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{b}_k$ und $(\mathbf{R}_k^\top)^{-1} \mathbf{c}_k$ durch Vorwärtseinsetzen. Der Algorithmus bricht nur ab, wenn entgegen der Voraussetzung eine der Hauptuntermatrizen singulär ist, und zwar ist $\sigma_k = 0$ (und damit \mathbf{R}_k singulär) genau dann, wenn A_k singulär ist.

3.3 Die Cholesky-Zerlegung

Wir nehmen die $PA = LDR_1$ zerlegung wo D ist die diagonale von R . Falls A symmetrisch ist dann ist $P = I$, und $R_1 = L^T$.

$$A = LDL^T \quad (26)$$

Jetzt kann man setzen

$$R_2 := D^{\frac{1}{2}} L^T \quad (27)$$

Cholesky Zerlegung

$$A = R_2^T R_2 \quad (28)$$

3.3.1 Positiv definit

Eine reell symmetrische $n \times n$ Matrix A heisst positiv definit falls:

$$x^T A x > 0 (\geq \text{dann positiv semidefinit}) \quad (29)$$

Eine reell symmetrische oder Hermitesche Matrix, die positiv definit ist, ist regulär.

4 Vektorräume

Die Elemente einer bestimmten Menge lassen sich in natürlicher Weise addieren und mit einer reellen (oder komplexen) Zahl multiplizieren (strecken), wobei das Resultat beider Operationen je wieder ein Element der Menge ist und gewisse einfache Regeln gelten.

Die Axiome von Vektorräumen:

- (V1) $x + y = y + x$ $(\forall x, y \in V),$
- (V2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(\forall x, y, z \in V),$
- (V3) es gibt ein ausgezeichnetes Element $o \in V$ mit
 $x + o = x$ $(\forall x \in V),$
- (V4) zu jedem $x \in V$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $-x \in V$ mit
 $x + (-x) = o,$
- (V5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ $(\forall \alpha \in \mathbb{E}, \forall x, y \in V),$
- (V6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}, \forall x \in V),$
- (V7) $(\alpha \beta)x = \alpha(\beta x)$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}, \forall x \in V),$
- (V8) $1x = x$ $(\forall x \in V).$

Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{E} . Für alle $x, y \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{E}$ gilt:

$$0x = o \quad (30)$$

$$\alpha 0 = o \quad (31)$$

$$\alpha x = o \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = o \quad (32)$$

$$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x) \quad (33)$$

Zu $x, y \in V$ existiert $z \in V$ mit $x+z=y$, wobei z eindeutig bestimmt ist und gilt:
 $z = y + (-x).$

Subtraction:

$$y - x = y + (-x) \quad (34)$$

4.1 Körper

Ein Körper [field] ist eine nichtleere Menge K auf der eine Addition und eine multiplication definiert sind. Mit folgende Axiome:

$$(K1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}),$$

$$(K2) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}),$$

$$(K3) \quad \text{es gibt ein ausgezeichnetes Element } 0 \in \mathbb{K} \text{ mit} \\ \alpha + 0 = \alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}),$$

$$(K4) \quad \text{zu jedem } \alpha \in \mathbb{K} \text{ gibt es ein eindeutig bestimmtes } -\alpha \in \mathbb{K} \text{ mit} \\ \alpha + (-\alpha) = 0,$$

$$(K5) \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}),$$

$$(K6) \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}),$$

$$(K7) \quad \text{es gibt ein ausgezeichnetes Element } 1 \in \mathbb{K}, 1 \neq 0, \text{ mit} \\ \alpha \cdot 1 = \alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}),$$

$$(K8) \quad \text{zu jedem } \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0 \text{ gibt es ein eindeutig bestimmtes} \\ \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \text{ mit } \alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1,$$

$$(K9) \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}),$$

$$(K10) \quad (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}).$$

4.2 Unterraum, Erzeugendensysteme

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum [subspace], falls sie bezu glich Addition und skal arer Multiplikation abgeschlossen ist.

$$x + y \in U, \alpha x \in U (\forall x, y \in U, \forall \alpha \in \mathbb{E}) \quad (35)$$

Ein Unterraum ist selbst ein Vektorraum.

4.2.1 Lineare Hulle

Die Menge aller Linearkombinationen von a_1, \dots, a_l heisst der von a_1, \dots, a_l aufgespannte (oder: erzeugte) Unterraum [subspace spanned by a_1, \dots, a_l ; span] oder die lineare Hulle von a_1, \dots, a_l [linear hull]:

$$\text{span} \{a_1, \dots, a_l\} := \left\{ \sum y_k a_k; y_1, \dots, y_l \in \mathbb{E} \right\}$$

die vetoren a_1, \dots, a_l sind Erzeugendensystem [die spanning set] von span.

4.3 Basen

Ein linear unabha ngiges Erzeugendensystem eines Vektorraums V heisst Basis [basis] von V .

Besitzt ein Vektorraum V ein endliches Erzeugendensystem, so besteht jede Basis von V aus derselben Zahl von Vektoren.

Dimension Die Zahl der Basisvektoren (in jeder Basis) eines Vektorraumes V mit endlichem Erzeugendensystem heisst Dimensi on [dimension] von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Zwei Unterraume U und U' eines Vektorraumes V mit der Eigenschaft, dass jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung hat, heissen komplement ar [complementary]. Wir nennen dann V die direkte Summe [direct sum] von U und U' und schreiben:

$$V = U \oplus U' \quad (36)$$

4.4 Basiswechsel, Koordinatentransformation

Wir koennen die koordinaten von ein Punkt in eine Basis in die Koordinate von ein neue Basis umwalden indem wir eine Basiswechselmatrix benutzten. Die invers von diese Matrix macht der umgekehrte weg.

5 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen heisst linear, wenn sie die linearen Beziehungen invariant (unverändert) lässt. Wählt man in den Vektorräumen Basen, so induziert eine solche Abbildung eine lineare Abbildung der Koordinaten. Falls die Räume endlich-dimensional sind, wird diese durch eine Matrix repräsentiert. Dies ist, in Kürze, der grundlegende Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen.

5.1 Definition, Beispiele, Matrixdarstellung

Ist F bijektiv, so ist die inverse Abbildung [inverse map, inverse mapping, inverse transformation] F^{-1} definiert.

F ist surjektiv falls $\text{rang } F = \dim$ von abbildungs Matrix, F ist injektiv falls

DEFINITION: Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$, $x \mapsto Fx$ zwischen Vektorräumen X und Y (über \mathbb{E}) heisst **linear** [linear map, linear transformation], wenn für alle $x, \tilde{x} \in X$ und alle $\gamma \in \mathbb{E}$ gilt

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}, \quad F(\gamma x) = \gamma Fx$$

die spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n$

X ist der Definitionsraum [domain], Y der Bildraum [image space] der Abbildung.

Isomorphismus Eine eindeutige lineare Abbildung von X auf Y heisst Isomorphismus [isomorphism]. Ist $X = Y$, so heisst sie Automorphismus [automorphism].

Ist $F : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, so ist die inverse Abbildung $F^{-1} : Y \rightarrow X$ linear und auch ein Isomorphismus.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F} & Y \\
 \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \\
 \mathbb{E}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{E}^m
 \end{array}$$

Es bedeutet, dass

$$F = \kappa_Y^{-1} \mathbf{A} \kappa_X, \quad \mathbf{A} = \kappa_Y F \kappa_X^{-1}.$$

kommutativ

5.2 Kern, Bild und Rang

$$F : X \rightarrow Y \quad (37)$$

Wo $\dim X = n$, $\dim Y = m$.

5.2.1 Kern

Der Kern [kernel] $\ker F$ von F ist das Urbild von $0 \in Y$.

$$\ker f := \{x \in X; Fx = 0\} \subseteq X \quad (38)$$

$\ker f$ ist ein Unterraum von X , und $\operatorname{im} F$ ist ein Unterraum von Y .

Ist U ein Unterraum von X , so ist dessen Bild FU ein Unterraum von Y . Ist W ein Unterraum von $\operatorname{im} F$, so ist dessen Urbild $F^{-1}W$ ein Unterraum von X .

F ist genau dann injektiv, wenn $\ker F = \{0\}$ ist.

$$\dim X - \dim \ker F = \dim \operatorname{im} F \quad (39)$$

Um eine Base von kern zu finden: lösen wir einfach die Matrix $Ax = 0$;
 Um eine base von bild zu finden: Wir können einfach nehmen die spalten
 die linear unabhängig sind (die die Pivotelemente haben).

5.2.2 Rang

Der Rang [rank] einer linearen Abbildung F ist gleich der Dimension des
 Bildes von F .

Korollar 5.8 *Es gelten die folgenden drei Äquivalenzen:*

- | | | | | |
|-------|-----------------------|-----------------------|--------|---------------------------|
| (i) | $F : X \rightarrow Y$ | <i>injektiv</i> | \iff | $\text{Rang } F = \dim X$ |
| (ii) | $F : X \rightarrow Y$ | <i>bijektiv, d.h.</i> | \iff | $\text{Rang } F = \dim X$ |
| | | <i>Isomorphismus</i> | | $= \dim Y$ |
| (iii) | $F : X \rightarrow X$ | <i>bijektiv, d.h.</i> | \iff | $\text{Rang } F = \dim X$ |
| | | <i>Automorphismus</i> | \iff | $\ker F = o$ |

5.2.3 Isomorph

Zwei Vektorräume X und Y heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus
 $F : X \rightarrow Y$ gibt.

Zwei Vektorräume endlicher Dimension sind genau dann isomorph, wenn
 sie die gleiche Dimension haben.

Korollar 5.10 Sind $F : X \rightarrow Y$, $G : Y \rightarrow Z$ lineare Abbildungen (wobei $\dim X, \dim Y < \infty$), so gilt:

- i) $\text{Rang } FG \leq \min\{\text{Rang } F, \text{Rang } G\}$,
- ii) $G \text{ injektiv} \implies \text{Rang } GF = \text{Rang } F$,
- iii) $F \text{ surjektiv} \implies \text{Rang } GF = \text{Rang } G$.

5.3 Matrizen als lineare Abbildungen

$\mathfrak{R}(A) := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ wo a_i sind die kolumnenvektoren von A . $\mathfrak{R}(A)$ ist der kolonnenraum von $A = \text{Im } a$.

Der lösungsraum des homogenen systems $Ax=0$, heisst Nullraum $\mathfrak{N}(A) = \ker A$.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn b im Kolonnenraum von A liegt.

Satz 5.12 Bezeichnet r den Rang der Matrix A und \mathcal{L}_0 den Lösungsraum von $Ax = 0$, so ist

$$\dim \mathcal{L}_0 \equiv \dim \mathcal{N}(A) \equiv \dim \ker A = n - r . \quad (5.36)$$

Der rang einer $m \times n$ matrix A ist gleich:

1. Anzahl Pivotelemente
2. $\dim \text{im } A$
3. Dimensions des kolonnenraums (anzahl linear unabhängiger kolonnen).
4. Dimesnions des Zeilenraums (anzahl linear unabhängiger Zeilen).

$\mathfrak{R}(A)$ ist gleich der Menge b für die $Ax=b$ eine Lösung x hat.
 $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{E}^{p \times m}$ dann gilt:

1. $\text{Rang } BA \leq \min \{ \text{rang } B, \text{Rang } A \}$
2. $\text{rang } B = m (\leq p) \Rightarrow \text{rang } BA = \text{rang } A$
3. $\text{rang } a = m (\leq n) \Rightarrow \text{rang } BA = \text{rang } B$

$A \in \mathbb{E}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{E}^{m \times m}$ dann gilt:

1. $\text{Rang } BA \leq \min \{ \text{rang } B, \text{Rang } A \}$
2. $\text{rang } B = m \Rightarrow \text{rang } BA = \text{rang } A$
3. $\text{rang } a = m \Rightarrow \text{rang } BA = \text{rang } B$

Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist invertierbar
2. A ist regulär
3. $\text{Rang } A = n$
4. Spaltenvektoren und Zeilenvektoren sind linear unabhängig
5. $\text{im } A := \mathfrak{R}(A) = \mathbb{E}^n$
6. $\ker A := \mathfrak{N}(A) = \{0\}$
7. die lineare Abbildung $A : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ ist ein Automorphismus
8. A ist die Transformationsmatrix einer Koordinatentransformation in \mathbb{E}^n
9. es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ sodass $A^k = 0$.
- 10.

Wenn die Matrix regulär ist, dann $Ax=0$ hat keine nicht trivialen Lösungen.

5.4 Affine Raume und die allgemeine Losung eines inhomogenen Gleichungssystems

Eine affiner teilraum, ist wenn wir zu einer Unterraum von V U ein teil von V addieren.

Eine affine Abbildung ist wenn wir zu eine Bildmenge von eine lineare Abbildung ein Teil von diese Menge addieren: $H : X \rightarrow y_0 + Y, x \mapsto y_0 + Fx$

Die losungsmenge ℓ_b des affinen Teilraum $Ax=b$, ist gleich ℓ_0 den losungsraum des homogenen systems $Ax=0$ plus irgend eine losung des inhomogenen system x_0 .

$$\ell_b = \ell_0 + x_0 \quad (40)$$

5.5 Die Abbildungsmatrix bei Koordinaten- transformation

$F : X \rightarrow Y$, $x \mapsto y$ eine lineare Abbildung,

$A : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$, $\xi \mapsto \eta$ die entsprechende Abbildungsmatrix,

$T : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\xi' \mapsto \xi$ eine Transformationsmatrix im \mathbb{E}^n ,

$S : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^m$, $\eta' \mapsto \eta$ eine Transformationsmatrix im \mathbb{E}^m .

$$\begin{array}{ccc}
 x \in X & \xrightarrow[\text{lin. Abb.}]{F} & y \in Y \\
 \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten-} \\ \text{abbildung bzgl.} \\ \text{“alten” Basen)} \end{array} \\
 \xi \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{A} & \eta \in \mathbb{E}^m \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten} \\ \text{bzgl. “alten”} \\ \text{Basen)} \end{array} \\
 T^{-1} \downarrow \uparrow T & & S^{-1} \downarrow \uparrow S \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten-} \\ \text{transformation)} \end{array} \\
 \xi' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{B} & \eta' \in \mathbb{E}^m \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten} \\ \text{bzgl. “neuen”} \\ \text{Basen)} \end{array}
 \end{array} \tag{5.48}$$

Es gilt also

20

$$\boxed{y = F x, \quad \eta = A \xi, \quad \xi = T \xi', \quad \eta = S \eta', \quad \eta' = B \xi'}.$$

Ähnlich A und B heissen ähnlich falls es existiert ein T sodass: $A \mapsto B = T^{-1}AT$

6 Vektorräume mit Skalarprodukt

6.1 Norm

Ein Norm in einem Vektorraum:

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| \quad (41)$$

Sie ist positiv definit, homogen und der Dreiecksungleichung gilt.
Ein Vektorraum mit einer Norm heisst normierter Vektorraum

6.2 Vektorräume mit Skalarprodukt

Skalarprodukt in einem reellen oder komplexen Vektorraum:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{E}, x, y \mapsto \langle x, y \rangle \quad (42)$$

Er ist linear, symmetrisch und positiv definit (wie bei normalen Skalarprodukten)

falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ Euklidischer Vektorraum oder orthogonaler Vektorraum, falls $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ unitärer Vektorraum.

Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (43)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.
Winkel ist gleich bei normal, und falls orthogonal dann Skalarprodukt = 0.

Pythagoras

$$x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (44)$$

Satz 6.5 (Parsevalsche Formel) *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt mit $\xi_k := \langle b_k, x \rangle$ und $\eta_k := \langle b_k, y \rangle$ ($k = 1, \dots, n$):*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\xi_k} \eta_k = \boldsymbol{\xi}^H \boldsymbol{\eta} = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle , \quad (6.24)$$

das heisst das Skalarprodukt zweier Vektoren in V ist gleich dem (Euklidischen) Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren im \mathbb{E}^n . Insbesondere gilt:

$$\|x\| = \|\boldsymbol{\xi}\| , \quad (6.25)$$

$$\angle(x, y) = \angle(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) , \quad (6.26)$$

$$x \perp y \iff \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\eta} . \quad (6.27)$$

6.3 Gram schmidt algorithmus

Um eine nicht orthogonale und nicht unitäre Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ in eine orthonormale Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ umzuwandeln.

$$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|} \quad (45)$$

$$b_{k'} := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j, \quad (46)$$

$$b_k := \frac{b_{k'}}{\|b_{k'}\|} \quad (47)$$

Es gibt verschiedene Typen von Vektorräumen:

1. topologischer Vektorraum(mit Umgebungsbegriff)
2. Banachraum(mit Vektornorm)
3. Hilbertraum(mit Skalarprodukt und zugehöriger Vektornorm)

6.4 Orthogonale Komplemente

In einem Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt kann man jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthonormalen Basis ergänzen.

orthogonale komplement In einem endlich-dimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt heisst der zu einem echten Unterraum U orthogonale komplementäre Unterraum das orthogonale Komplement von U und wird mit U^\perp

$$U^\perp := \{x \in V; x \perp U\} \quad (48)$$

Wir nennen dann V eine direkte Summe orthogonaler Komplemente

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \quad (49)$$

Satz 6.9 Für eine komplexe $m \times n$ -Matrix mit Rang r gilt

$$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) = (\mathcal{R}(\mathbf{A}^H))^{\perp} \subset \mathbb{E}^n}, \quad \boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}^H) = (\mathcal{R}(\mathbf{A}))^{\perp} \subset \mathbb{E}^m}. \quad (6.45)$$

Insbesondere ist

$$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}^H) = \mathbb{E}^n}, \quad \boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}^H) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}^m} \quad (6.46)$$

und

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) &= r, & \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) &= n - r, \\ \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^H) &= r, & \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^H) &= m - r. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Bei reellen Matrizen kann überall \mathbf{A}^H durch \mathbf{A}^T ersetzt werden.

6.5 Orthogonale und unitäre Basiswechsel und Koordinatentransformationen

Wenn beide Basen sind orthonormal dann:

$$I = T^T T \quad (50)$$

Die Inverse von der Basiswechselmatrix $T^{-1} = T^T$ vereinfacht viel die Rechnung

Korollar 6.12 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.11 gilt, wenn $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{T}^H \boldsymbol{\eta}$ ein weiteres Paar von alten und neuen Koordinaten bezeichnet, dass*

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle} . \quad (6.54)$$

Insbesondere gilt

$$\|\boldsymbol{\xi}'\| = \|\boldsymbol{\xi}\| , \quad (6.55)$$

$$\angle (\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}') = \angle (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) , \quad (6.56)$$

$$\boldsymbol{\xi}' \perp \boldsymbol{\eta}' \iff \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\eta} . \quad (6.57)$$

6.6 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Ein Abbildung F heisst unitär falls er zwischen zwei unitären Vektorräume ist und:

$$\langle Fx, Fy \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X \quad (51)$$

Satz 6.13 Für eine orthogonale oder unitäre Abbildung $F : X \rightarrow Y$ gilt:

- (i) $\|Fx\|_Y = \|x\|_X$ ($\forall x \in X$), d.h. F ist **längentreu** [length preserving] (oder: **isometrisch** [isometric]);
- (ii) $x \perp y \implies Fx \perp Fy$, d.h. F ist **winkeltreu** [angle preserving];
- (iii) $\ker F = \{0\}$, d.h. F ist injektiv.

Ist $\dim X = \dim Y < \infty$, so gilt zusätzlich:

- (iv) F ist ein Isomorphismus.
- (v) Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von X , so ist $\{Fb_1, \dots, Fb_n\}$ eine Orthonormalbasis von Y ;
- (vi) F^{-1} ist unitär (bzw. orthogonal);
- (vii) Die Abbildungsmatrix \mathbf{A} bezüglich orthonormierten Basen in X und Y ist unitär (bzw. orthogonal).

Wenn F und G sind unitär dann ist auch $F \circ G$ unitär
 Eine Matrix ist unitär wenn seine abbildung unitär ist

6.7 Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen

Eine lineare Abbildung heisst beschränkt wenn es ein γ existiert sodass:

$$\|F(x)\|_Y \leq \gamma \|x\|_X, (\forall x \in X) \quad (52)$$

Die Gesamtheit solcher linearer Abbildungen (Operatoren) F zwischen X und Y heisst $\ell(X, Y)$

Die operator Norm hat die folgenden Eigenschaften:

1. positiv definit
2. homogen
3. Dreiecksungleichung
4. $\|F \circ G\| \leq \|F\| + \|G\|$
5. $\|Fx\|_Y \leq \|F\| \|x\|_X, (\forall F \in \ell(X, Y), \forall x \in X)$

Matrix norm Ist eine Norm die hat alle diese Eigenschaften

Konditionszahl

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (53)$$

7 Die Methode der kleinsten Quadrate und die QRZerlegung einer Matrix

7.1 Orthogonalprojektionen

Eine lineare Abbildung $P: \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ heisst Projektion falls:

$$P^2 = P \quad (54)$$

Eine Projektion heisst Orthogonalprojektion falls:

$$\ker P \perp \operatorname{im} P \Rightarrow N(P) \perp \mathfrak{R}(P) \quad (55)$$

Sonst ist es eine schiefe Projektion

Ist P ein Projektor so ist auch $I - P$ ein Projektor und $\operatorname{im}(I - P) = \ker P$,
 $\ker(I - P) = \operatorname{im} P$.

Für ein Projektor:

1. P is orthogonaler projektor
2. $I-P$ is orthogonaler projektor
3. $P^T = P$

Die Orthogonalprojektion P_A den Kolonnenraum im A

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H \quad (56)$$

Für eine Orthogonalprojektion P gilt:

$$\|y - Py\|_2 = \min_{z \in \text{im } P} \|y - z\|_2 \quad (57)$$

7.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

Es gibt ein lineares Gleichungssystem $Ax=y$ für den wir wissen, dass es keine Lösung gibt. Wir suchen also eine Lösung $r := y - Ax$ sodass die euklidische Norm $\|r\|^2$ minimal wird.

Lösung:

$$A^T Ax = A^T y \quad (58)$$

Wo x ist die Lösung.

7.3 Die QR-Zerlegung einer Matrix

Wir zerlegen die Matrix $m \times n$ A in QR , wo $m \times n$ Q ist eine orthonormale Matrix und $n \times n$ rechteckige Matrix R .

Wir finden Q mit dem Gram-Schmidt Algorithmus und R :

$$r_{kk} := \|q_k\|, r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle \quad (59)$$

Mit der QR -Zerlegung können wir auch das kleinste Quadrat finden mit:

$$Rx = Q^H y \quad (60)$$

7.4 Die QRZerlegung mit Pivotieren

Wenn man die matrix zeilen tauschen will weil es irgendwo ein null gibt:

Algorithmus 7.2 (modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren mit Kolonnen-Pivotieren) *Es sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n) \in \mathbb{E}^{m \times n}$. Man berechne:*

$$\left. \begin{array}{l}
 \mathbf{q}_1 := \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_i := \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1 \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_i \rangle \quad (i = 2, \dots, n); \\
 \text{wähle } p \geq k \text{ mit } \|\tilde{\mathbf{q}}_p\| \neq 0 \text{ und} \\
 \text{vertausche Kolonnen } p \text{ und } k; \text{ berechne} \\
 \mathbf{q}_k := \frac{\tilde{\mathbf{q}}_k}{\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|}, \\
 \tilde{\mathbf{q}}_i := \tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_k \langle \mathbf{q}_k, \tilde{\mathbf{q}}_i \rangle \quad (i = k + 1, \dots, n); \\
 \text{ist } \|\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}\| = \dots = \|\tilde{\mathbf{q}}_n\| = 0, \\
 \text{so gilt } \text{Rang } \mathbf{A} = k \text{ und man ist fertig}
 \end{array} \right\} (k = 2, \dots, n).$$

(7.40)

$$AP = QR \quad (61)$$

8 Determinanten

8.1 Permutationen

Jede Permutation p als Produkt von Transpositionen t_k benachbarter Elemente dargestellt werden, es kann mehrere oder wenige transpositionen geben aber sind immer gerade oder ungerade.

Det hat folgende eigenschaften:

1. Hat A eine Zeile aus Nullen, so ist $\det A = 0$
2. $\det(yA) = y^n \det A$
3. Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.
4. Addiert man zu einer Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile von A, so ändert sich der Wert von $\det A$ nicht.
5. Ist A eine Diagonalmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.
6. Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

$$\det A \neq 0 \iff \text{Rang} A = n \iff A \text{ regulär} \quad (62)$$

Durch Eigenschaft 4 kann man die Determinante mit Gauß finden.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (63)$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \quad (64)$$

$$\det A^T = \det A \quad (65)$$

8.2 Entwicklung nach Zeilen und Spalten

Zu jedem Element a_{kl} einer $n \times n$ -Matrix A werde die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix $A_{[k,l]}$ definiert durch Streichen der Zeile k und der Spalte l von A.

$$(-1)^{k+l} \det A_{[k,l]} \quad (66)$$

Wir wählen eine Zeile aus, dann gehen wir durch die Matrix auf diese Zeile und addieren wir alle Determinanten von oben mal der ersten Zahl von dieser Zeile.

9 Eigenwerte und Eigenvektoren

9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen und linearen Abbildungen

Die Menge aller Eigenwerte von F heißt Spektrum $\sigma(F)$

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ ist gleich der Dimension von E_λ

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I) \quad (67)$$

Um die Eigenwerte zu finden : $\det(A - yI) = 0$. Wir finden die y . Dann nehmen wir dieses y und setzen wir in $A - yI$ und die Vektoren für die $(A - yI)x=0$ sind die Eigenvektoren.

Singular Eine (quadratische) Matrix A ist genau dann singular, wenn sie 0 als Eigenwert hat.

9.2 Ähnlichkeitstransformationen; die Eigenwertzerlegung

Ähnlichen Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom; sie haben also die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte (A und B sind ähnlich wenn $B = T^{-1}AT$). Eine zu F gehörende Abbildungsmatrix ist genau dann diagonal, wenn die gewählte Basis von V aus lauter Eigenvektoren von F besteht.

Eine Basis aus Eigenvektoren von F heisst Eigenbasis von F

A ist die Matrix V ist die Eigenbasis und Λ ist die Diagonalmatrix:

$$A = V \Lambda V^{-1} \quad (68)$$

wo Λ hat die Eigenwerte auf der Diagonale.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Für jeden Eigenwert gilt, dass die geometrische Vielfachheit kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

9.3 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Für symmetrische Matrizen:

1. alle Eigenwerte sind reell
2. Die reellen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal
3. Es gibt eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren u_1, \dots, u_n von A .
4. Für die orthogonale Matrix U gilt : $U^T A U = \Lambda := \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$

10 Singular wert Zerlegung

Wir zerlegen A:

$$A = U\Sigma V^T \quad (69)$$

U und V sind orthonormale unitäre Matrizen, und Σ ist eine diagonale Matrix.

$$A^T A = V \Sigma^T \Sigma V^T \quad (70)$$

$$AV = U\Sigma \quad (71)$$

1. In der ersten Gleichung sehen wir, dass $\Sigma^T \Sigma$ sind die Eigenwerte von $A^T A \Rightarrow \Sigma$ ist gleich die Wurzel von diesen Eigenwerten
2. V ist gleich die normierten Eigenvektoren von vorher.
3. Dann benutzen wir $AV = U\Sigma$ um U zu finden.