Mengen

- **Teilmenge** (A ⊆ B)
  $x \in A \Rightarrow x \in B$
- **Beschränkung**
  Es exisitieren C_1, C_2 sodass $\forall x \in M$ gilt: $C_1 \leq x \leq C_2$
- **Obere/Untere Schranke**
  Ist M nach oben beschränkt mit C_2, dann nennt alle $C \leq C_2$ eine obere Schranke (dito untere Schranke)
- **Supremum** (sup A) = kleinste obere Schranke
  a = sup A, falls $\forall x \in A : x \leq a$
- **Infimum** (inf A) = grösste untere Schranke
  a = inf A, falls $\forall x \in A : x \geq a$
- **Maximum / Minimum**
  muss immer zur Menge gehören
  $infM \in M \Rightarrow minM = infM$
  $supM \in M \Rightarrow maxM = supM$

Stetige Funktion auf einem kompakten Bereich nimmt stets ihr Min. und Max. an (Satz von Weierstrass)

Identitäten / Tricks

$A \cup B = \{x \vert x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap B = \{x \vert x \in A \vee x \in B\}$
$A^c = \{x \vert x \in A \wedge x \notin B\}$	$A \backslash B = \{x \vert x \in A \vee x \in B\}$
$sup(-A) = -inf(A)$	$inf(-A) = -sup(A)$
$max(-A) = -min(A)$	$min(-A) = -max(A)$

$sup(A \cup B) = max\{supA, supB\}$
$inf(A \cup B) = min\{infA, infB\}$
Ist M abgeschlossen und beschränkt → ∃ Min. und Max.

Funktionen

Sei f : X → Y eine Abbildung

- **surjektiv**, falls jedes y ∈ Y mind. ein Urbild hat.
  $\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x)$
- **injektiv**, falls jedes y ∈ Y höchstens ein Urbild hat.
  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- **bijektiv**, falls jedes y ∈ Y genau ein Urbild hat.
  $\forall y \in Y \; \exists! x \in X : y = f(x)$
- **monoton steigend/fallend**, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt (respektiv $> \to \geq$)
- **streng mononton steigend/fallend**, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) < f(x_2)$ folgt (respektiv $> \to >$)

Komplexe Zahlen

Normalform	z = x+iy
Polarform	$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r \cdot e^{i\phi}$ $x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi$ $r = \vert z \vert = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\arg \phi = \arg(z) \quad \begin{cases} +\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \\ \text{undef} & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

(Tipps)
$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
$1 = -e^{i\pi} = e^0 \quad -1 = e^{i\pi} = i^2$
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Konjugierte Form	$\overline{z} = x - iy = r \cdot e^{-i\phi}$
Realteil	$Re(z) = x = \frac{z+\overline{z}}{2}$
Imaginärteil	$Im(z) = y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Addi.	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
Multipl.	$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ $z_1 \cdot z_2 = (r_1r_2) \cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
Potenz	$z^n = (r \cdot e^{i\phi})^n = r^n \cdot e^{in\phi}$
Betrag	$\vert z \vert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = r$
Bruch	→ mit komplex konjugiertem Nenner erweitern $\frac{3+4i}{4-3i} = \frac{(3+4i)*(4+3i)}{(4-3i)*(4+3i)} = \frac{12+9i+16i-12}{16+12i-12i+9} = \frac{25i}{25} = i$

Wurzel $\sqrt{\sqrt{3}i - 1} \Rightarrow$ Substitution $\sqrt{u}$ mit u = $\sqrt{3}i - 1$
(1) u in Polarkord. $|u| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$
$\phi = arccos(\frac{x}{|z|}) = arccos(\frac{-1}{|2|}) = \frac{2\pi}{3}$
$\Longrightarrow u = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
(2) einsetzen in $\sqrt{u} \to \sqrt{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}}$
(3) $x = rcos(\phi)$, $y = rsin(\phi) \Rightarrow \sqrt{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

Einheitswurzeln

Moivre-Formel:	$z^n = r^n e^{n\phi i} = r^n(cos(n\phi) + isin(n\phi))$
n'te Wurzeln:	$w_k = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\phi+2k\pi}{n}) + isin(\frac{\phi+2k\pi}{n})$ wobei k= 0,.., n-1

Folgen

Eine reele Folge heisst...

konvergent:	wenn $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert
divergent:	wenn $\lim_{n\to\infty} a_n$ nicht existiert
Nullfolge:	wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist
alternierend:	wenn die Vorzeichen der Folgenglieder abwechseln
absolut konvergent:	wenn $\lim_{n\to\infty} \vert a_n \vert$ existiert
unbeschränkt:	falls a_n nicht beschränkt ist ⟶ Solche Fkt. sind stets divergent

Häufungspunkte

Ein Häufungspunkt ist ein Grenzwert (Limes) einer Teilfolge.

- Limes superior = grösster Häufungspunkt
- Limes inferior = kleinster Häufungspunkt

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$, so ist der Limes a einziger Häufungspunkt der Folge a_n und jede Teilfolge konvergiert auch gegen a.
(ii) a_n zwei verschiedene Häufungspunkte → Folge ist divergent

Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge a_n - d.h eine für die gilt $\exists M \; \forall n : |a_n| < M$ - besitzt eine konvergente Teilfolge bzw. einen Häufungspunkt. (Satz von Bolzano-Weierstrass)

Monotone Konvergenz

Sei a_n eine nach oben (unten) beschränkte Folge und monoton wachsend (fallend). Dann konvergiert a_n mit

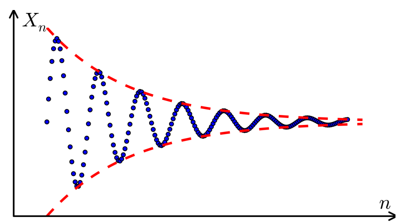
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Cauchy-Folge

Folge bei welcher der Abstand zwischen den Folgeglieder im Verlauf der Folge beliebig klein wird.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \epsilon$$

$$\boxed{\text{Jede Cauchy-Folge} \longleftrightarrow \text{konvergente Folge (im } \mathbb{R}^n)}$$



Grenzwerte Regeln

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n * b_n = a * b$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} k * a_n = k * a$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls b$\neq$ 0

(v) Falls $a_n \leq b_n \implies a \leq b$

Verfahren / Tricks (zur Grenzwertbestimmung)

Dominanz

$x \to +\infty$ $\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

$x \to 0$ $\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$

Brüche

$\to$ durch stärksten-wachsenden Term des Nenners dividieren

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + ln(n)}{\sqrt{n^4 - n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + ln(n)}{n^2\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{ln(n)}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \to 1$$

Wurzeln

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

Bernoulli-de-l'hopital $\quad \frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 * \infty$, $\infty - \infty$

Für $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$: $\quad \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Für $0 * \infty$: $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x) * g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

$\to$ Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ $\longrightarrow$ l'Hopital anwenden

Für $\infty - \infty$: $\quad \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{j(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

$e^{log(x)}$ Trick $\quad 0^0$, ∞^0 , 1^∞

(i) Funktion umschreiben: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)log(f(x))}$

(ii) L'Hopital anwenden im Exponenten

(da e^x: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig ist, dürfen wir den Limes in den Exponenten ziehen)

Sandwich $\quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ mit $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$

(i) Term in f(x) abschätzen

(ii) Grenzwerte von g(x) und h(x) bestimmen

Falls nun $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ gilt, $\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sin(\frac{1}{x})$ $\quad \to$ (i) $-1 \leq sin(\frac{1}{x}) \leq 1$

$g(x) = -x^2, h(x) = x^2$ $\quad \to (ii) \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

Folg. Sandwich-Theorem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Taylor $\quad$ (bei Schwierigen)

Oft lassen sich schwierige Grenzwerte schneller mithilfe einer oder mehrer Taylorentwicklungen bestimmen. $\to$ Dazu approximiert man einfach die Terme mithilfe Taylor! Es werden allerdings nur so viele Terme betrachtet bis sie sich gegenseitig nicht mehr aufheben.

Nützliche Taylorentwicklungen: (an $x = 0$)

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + ... \\ cos(x) &= 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + ... \\ log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \end{aligned}$$

Fundamental Limes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

Substitution

!! Eventuell Limes anpassen bei Substitution (siehe Beispiel)

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - cos\frac{1}{x})\right) \longrightarrow \textbf{Substitution mit: } y = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1 - cosy}{y^2} \overset{*}{=} \lim_{y\to 0} \frac{siny}{2y} \overset{*}{=} \lim_{y\to 0} \frac{cosy}{2} = \frac{1}{2}$$

(*) Anwendung von L'Hopital

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} ln(n) = \infty$ (also divergent)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

Weitere Beispiele:

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$ (mit p,q $\in \mathbb{Z}_+$) $\overset{\text{BdH}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sin(x)}$ (Fall $\frac{0}{0}$) $\overset{\text{BdH}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos(x)} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tan^3 x}{x(1 - cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{tan^3 x}{x^3} * \frac{x^2}{1 - cos(x)} = 2$

  Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Reihen

- Partialsumme $S_N c = a_0 + a_1 + ... + a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$
- Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist **konvergent** mit Grenzwert s, falls die Folge der Partialsummen (S_m), $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert.
- **Absolut konvergent**, falls sogar die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

$\boxed{\text{Absolute Konvergenz} \Rightarrow \text{Konvergenz (aber nicht retour)}}$

Notwendige Kriterien für Konvergenz

(i) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \longrightarrow$ Reihe bestimmt nicht konvergent!

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium (Faktoren wie $n!, a^n$ in a_n)

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium ($b_n = (a_n)^n$)

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten-, Minorantenkriterium (Verw. wichtiger Reihen)

Es seien $a_n,\ b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n\ \forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkrit.)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkrit.)}$$

Cauchy-Kriterium == ANPASSEN

$|\sum_{k=l}^{n} a_k| \to 0 \qquad (n \geq l,\ l \to \infty)$

Leibnizkriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Umformen der Reihe (Wurzeltrick, PBZ, ...)

Oft kann die Reihe mithilfe der Partialbrüche oder des Wurzeltricks auf eine einfachere Form gebracht werden. Falls die Partialsumme S_m bestimmbar ist, kann man auch den Limes dieser berechnen, da gemäss Def. gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Wichtige Reihen

harmonische Reihe (divergent)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

alternierende harmonische Reihe (konvergent)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

geometrische Reihe

$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

konvergent für $|q| < 1 : \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Potenzreihe (in z mit Zentrum c und Koeffizientenfolge a_n)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

konvergiert innerhalb des Konvergenzradius ρ

$$|z-c| < \rho := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

und divergiert ausserhalb, d.h $|z-c| > \rho$.

Die Ableitung $f'(x)$ hat denselben Konvergenzradius wie $f(x)$ und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$

Weiter dürfen Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise integriert werden.

$\rightarrow$ Potenzreihen-Darstellung (Aufgaben)

- Verwendung des Hauptsatzes der Diff./Integral Rechnung (Bsp: $\int_0^x f(x)dx \longrightarrow F(x) - F(0)$ um F'(x) zu bestimmen)
- Verwendung der speziellen Taylorreihen + Integrieren
- Umformen.

Exponentialreihe

$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergent für $|x| < e$

$exp(1) = \frac{1}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Regeln:

- $exp(r) = e^r$
- $exp(x+y) = exp(x) + exp(y)$
- $exp(ix) = cos(x) + isin(x)$

Zeta-Funktion (konvergent für $s > 1$)

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad (s > 0)$$

$\rightarrow$ Verwendung für Minoranten/Majorantenkriterium
!! $\Rightarrow$ Auch möglich mit $c * \zeta(s)$ wobei c unabängig von k

Spezielle Taylorreihen

e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
e^{-x^2}	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$
$sin(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$cos(x)$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

Stetigkeit

- $f(x)$ ist an der Stelle x_0 **stetig**, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  $\to$ d.h. Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ exisitiert und ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0.
- $\lim_{x^+ \to x_0} f(x) = \lim_{x^- \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  (linker Grenzwert = rechter Grenzwert)
- f ist auf Ω stetig, falls f in jedem Punkt a $\in \Omega$ stetig ist.
- Ist f differenzierbar auf dem kompletten Def.-Bereich, dann ist f auch stetig **(Differenzierbarkeit $\to$ Stetigkeit)**

Komposition / Addition stetiger Funktionen

Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind $f + g$, αf und $h \circ f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ stetig.

Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x-a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \Omega$$

- Ist f' **auf Ω beschränkt** $\Rightarrow$ f Lipschitz-stetig.
- Lipschitz-Stetigkeit $\Rightarrow$ gleichmässige Stetigkeit.

Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

- Ist f **stetig und kompakt** $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig.

Stetig ergänzbar

Falls eine Funktion eine Unstetigkeitsstelle x_0 enthält, kann die Funktion stetig ergänzt werden, falls linker Grenzwert = rechter Grenzwert.
$\Rightarrow$ Fkt. ist dann mit $\lim_{x \to x_0} f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ergänzbar (Beachtung der Notation).

Bsp: Stetigkeit zeigen

- Normaler Beweis
- Glm. Stetigkeit.
- Stetig ergaenzbar
- evtl. Lipschitz stetig

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \to \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

Zwischenwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Streng monoton wachsende Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$. Dann ist die Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv und die Umkehrabbildung stetig.

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Differenzierbarkeit

f heisst differenzierbar an der Stelle x_0 falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0.

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 diffbar, so ist f in diesem Punkt auch stetig. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht.

Klasse C^m

- $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst von der Klasse $\mathbf{C^1(\Omega)}$ wenn die Funktion $x \mapsto f'(x)$ stetig ist.
- Die Funktion f heisst weiter von der Klasse $\mathbf{C^m(\Omega)}$, falls f m-mal differenzierbar ist und die Ableitungsfunktionen $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ stetig sind.

Ableitungsregeln

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar. Dann sind $f + g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch ${}^f/_g$ an der Stelle x_o diffbar, und es gilt

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $({}^f/_g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar, und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. Dann ist die Funktion $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar mit

- $(g \circ f)'(x_0) = g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

Tangente

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie in $]a, b[$ diffbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Daraus folgt direkt: Falls $f' \geq 0$ $(f' > 0)$ $\forall x \in]a, b[$, so ist f (streng) monoton wachsend.

Umkehrsatz

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$. Setze

$$-\infty \leq c := \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) =: d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv und $f^{-1} :]c, d[\to \mathbb{R}$ ist diffbar mit

$$\left(f^{-1}\right)' |_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

oder äquivalent

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Nullstellen

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und besitzt zwei Nullstellen $x_1 < x_2$. Dann gibt es mindestens eine lokale Extremalstelle $x_0 \in]x_1, x_2[$.
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar und f' habe genau n Nullstellen. Dann hat die Funktion f höchstens $n + 1$ Nullstellen.

Kurvendiskussion

	notwendig	hinreichend
Extremalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0$ $\wedge f''(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$ $\wedge f'''(x) \neq 0$

- $f'(x) \geq 0 \to f$ monoton steigend
- $f'(x) > 0 \to f$ streng monoton steigend
- $f'(x) \leq 0 \to f$ monoton fallend
- $f'(x) < 0 \to f$ streng monoton fallend

Taylor-Polynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung der Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ um den Punkt a

$$T_m f(x; a) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x - a) + \ldots + f^{(m)}(a)\frac{(x - a)^m}{m!}$$

hat die Approximationseigenschaft

$$r_m f(x; a) = f(x) - T_m f(x; a)$$

$$= f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!} \text{für ein } \xi \in]a, x[$$

!! eventuell mit Beispiel ergaenzen

Ableitungstabelle ($\to$ Komplett im Appendix)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{n^{n-1}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^{\alpha x+\beta}$	$\alpha e^{\alpha x+\beta}$
e^{x^α}	$\alpha x^{\alpha-1}e^{x^\alpha}$
α^x	$\alpha^x ln(\alpha)$
x^x	$x^x(ln(x) + 1)$
x^{x^α}	$x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln(x) + x^{a-1}\right)$ $= x^{x^a+a-1}\left(a\ln(x) + 1\right)$
$ln(\alpha x + \beta)$	$\frac{\alpha}{\alpha x+\beta}$
$sin(\alpha x + \beta)$	$\alpha cos(\alpha x + \beta)$
$cos(\alpha x + \beta)$	$-\alpha sin(\alpha x + \beta)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$cosh(x)$
$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sinh(x)$
$tanh(x)$	$\frac{1}{cosh^2(x)}$

Differentialgleichungen

- **linear**, alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Potenzen)
- **homogen**, falls keine Terme vorkommen, die rein von x abhängen (also Gleichung $= 0$)
- **inhomogen**, falls Gleichung $\neq 0$ (Störterm vorhanden)
- **Ordnung** := höchst vorkommende Ableitung

Überblick der Verfahren

- 1. Ordnung homogen $\rightarrow$ Trennung der Variablen
- 1. Ordnung inhomogen $\rightarrow$ Variation der Konstanten
- n'ter Ordnung, linear, homogen $\rightarrow$ Euler-Ansatz
- n'ter Ordnung, linear, inhomogen $\rightarrow$ Direkter Ansatz

---

Differentialgleichungen erster Ordnung

Homogen (Trennung der Variablen)

$$y' = h(x)g(x)$$

(i) $y' = \frac{dy}{dx}$

(ii) Konstante Lösungen $\rightarrow$ Anfangsbedingung erfüllt?

(iii) Gleichung separieren

(iv) Auf beiden Seiten integrieren (Integrationskonstante c)

(v) Anfangsbeding. in $C = e^c \in \mathbb{R}$ einsetzen (falls vorhanden)

Beispiel: $y' + x\tan(y) = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

(i) $\frac{dy}{dx} = -x\tan(y)$

(ii) Es existiert eine konstante Lösung $y(x) = 0$, welche allerdings die Anfangsbedingung nicht erfüllt!

(iii) $\frac{dy}{tan(y)} = -xdx$

(iv) $\int \frac{cos(x)}{sin(y)}dy = -\int xdx \Rightarrow log|sin(y)| = -\frac{x^2}{2} + c$
Daraus folgt: $|sin(y)| = e^c e^{-x^2/2} \Rightarrow sin(y) = \pm e^c e^{-x^2/2} = Ce^{-x^2/2}$ (wobei $C = \pm e^c \in \mathbb{R}$)

(v) Anfangsbedingung einsetzen $\Rightarrow C = 1$
$\Rightarrow y(x) = arcsin(e^{-x^2/2})$

Inhomogen (Variation der Konstanten)

$$y' = h(x)y + b(x)$$

Grundsatz: $y(x) =$ homogene Lösung $+$ partikuläre Lösung

(i) Homogene Lösung berechnen (analog links)

(ii) Partikuläre Lösung bestimmen

  (a) C $\rightarrow$ C(x)
  $y_p(x) = C(x) \cdot y_{Homo}$

  (b) in Diff'Gleichung einsetzten
  $y'(x) = C(x) \cdot y'_{Homo} + C'(x) \cdot y_{Homo}$
  ($C(x) \cdot y'_{Homo}$ kürzt sich immer weg)

  (c) Integrieren um $C(x)$ zu erhalten

  (d) Anfangsbedinung einsetzen in $C(X)$

(iii) $y(x) = y_{Homo} + y_p$

(iv) Anfangsbedingung in C einsetzen

Beispiel: $y' - y = 1$, $y(0) = 0$

(i) **Homo. Lsg** von: $y' - y = 0$
- Konst. Lösung: $y(x) = 0$ löst die homogene Gleichung

- Falls $y \neq 0$, dürfen die Variabeln getrennt werden:
$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow log|y| = x + c$
Somit ist $y_{Homo} = Ce^x$ wobei $C = e^c \in \mathbb{R}$

(ii) **Partikuläre. Lsg**

  (a) $y_p(x) = C(x) \cdot e^x$

  (b) Einsetzen: $C'e^x - Ce^x - Ce^x = 1 \Rightarrow C'e^x = 1$
  $\Rightarrow C' = e^{-x}$

  (c) $C(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

  (d) Anfangsbedingung einsetzen in C(x)
  $y_p(x) = C(x) \cdot e^x = -e^{-x} * e^x = -1$

(iii) $y(x) = y_{Homo} + y_p = Ce^x - 1$

(iv) Mit der Anfangsbedingung erhalten wir:
$y(0) = Ce^x - 1 = 0 \Rightarrow C = 1$
also daher: $\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

Substitution

Einige Differentialgleichungen sind nicht nicht direkt separierbar $\Rightarrow$ Substitution
+ System linearer DGL

Lineare Differentialgleichungen n'ter Ordnung

Homogen (Euler-Ansatz)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$$

(i) Einsetzen des Euler-Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$
$a_n y^{(n)} e^{\lambda x} + a_{n-1} y^{(n-1)} e^{\lambda x} + ... + a_0 e^{\lambda x} = 0$

(ii) Euler wegkürzen = Charakteristisches Polynom bilden
$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 = 0$

(iii) Nullstellen und deren Vielfachheit bestimmen

(iv) Fundamentalsystem (F-Syst.)

- Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen:
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{m-1} e^{\lambda x}$
- Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören:
$1, x, ..., x^{m-1}$

(v) Allgemeine Lösung bilden (anhand F-Syst.)

(vi) Konstanten ermitteln mit Anfangsbedingungen

(vii) Lösung mit berechneten Konstanten

Beispiel: $y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$

(i) $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8 e^{\lambda x} = 0$

(ii) $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

(iii) Nullstellen 4, -2 mit je Vielfachheit 1

(iv) Fundamentalsystem: e^{4x}, e^{-2x}

(v) Allgemeine Lösung: $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

(vi) Konstanten A, B bestimmen (mit Anfangsbedingungen)
$y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1$ und $y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$
$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}$ und $B = \frac{2}{3}e^2$

(vii) Lsg: $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Hinweis: Fundamentalsystem bei mehrfacher Nullstelle

Inhomogen (Direkter Ansatz)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$$

Grundsatz: $y(x) =$ homogene Lösung + partikuläre Lösung

(i) Homogene Lösung berechnen

(ii) Partikuläre Lösung berechnen

(a) Wahl des Ansatzes $y_p(x)$
$\Rightarrow$ Der Ansatz $y_p(x)$ hat dieselbe Form wie der inhomogene Term $b(x)$

(b) Notwendigen Ableitungen bestimmen

(c) Ansatz einsetzen in Diff'Gleichung

(d) Koeffizientenvergleich

(e) $y_p(x)$ bilden (Koeffizienten in Ansatz einsetzen)

(iii) Gesamtlösung: $y(x) = y_{Homo} + y_p$

Wahl des Ansatzes:

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$
Polynom	$ax^2 + bx + c$
ce^{kx}	ae^{kx}
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$a \sin(kx) + b \cos(kx)$

Bei Verkettung mehrer Formen:
$\rightarrow$ Falls $b(x)$ Summe/Produkt von zwei Formen sein sollte, kombiniert man die Ansätze nach dem selben Prinzip
- Bsp: $y_p(x) = Ax + B + (C \sin(x) + D \cos(x))e^{3x}$

Beispiel: $y'' + y' + \frac{1}{4}y = cos(x)$

(i) **Homo. Lsg:**
- Mit Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ ergibt sich:
$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2$
- Nst: $\lambda = -\frac{1}{2}$ mit Vielfachheit 2
- Fundamental-System.: $e^{-x/2}$, $xe^{-x/2}$
- $y_{Homo} = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2}$

(ii) **Partikuläre Lösung**

(a) Ansatz-Wahl: $b(x)$ hat die Form $cos(x)$
$\Rightarrow$ Ansatz $y_p(x) = a * cos(x) + b * sin(x)$

(b) Vorkommen der 1'sten und 2'ten Ableitung
$y_p'(x) = -a * sin(x) + b * cos(x)$
$y_p''(x) = -a * cos(x) - b * sin(x)$

(c) Eingesetzt in Diff'gleichung ergibt sich:
$(-a + b + \frac{a}{4})cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)sin(x) = cos(x)$

(d) Koeffizientenvergleich liefert:
$-\frac{3}{4}a + b = 1$ und $-a - \frac{3}{4}b = 0$
$\Rightarrow a = -\frac{12}{25}$ und $b = \frac{16}{25}$

(e) $y_p(x) = -\frac{12}{25}cos(x) + \frac{16}{25}sin(x)$

(iii) **Lsg:** $y(x) = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2} - \frac{12}{25}cos(x) + \frac{16}{25}sin(x)$

Faktorisierung des charakteristischen Polynoms

- Nullstellen suchen und Polynomdivison anwenden
- Sobald quadratisch und keine einfachen Nullstellen mehr
$\rightarrow$ Mitternachtsformel, liefert komplexe Nullstellen

Bsp: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 15\lambda - 11 = 0 \rightarrow$ Nullstelle 1: $\lambda_1 = 1$
$(\lambda^2 - 4\lambda + 11)(\lambda - 1) = 0 \quad \rightarrow$ Anw. Mitternachtformel
$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2} = 2 \pm i\sqrt{7}$ (komplex. Nullstellenpaar)

Differentialgleichungen mit komplexen Nullstellen

Falls das charakteristische Polynom komplexe Lösungen besitzt, hat das Fundamentalsystem und die Lösung folgende Gestalt:

$\lambda_i = a + ib \quad \Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^{ax}\cos(bx)$
$\lambda_{i+1} = a - ib \quad \Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^{ax}\sin(bx)$

Komplexes Nullstellenpaar:
$\lambda = k \pm hi \rightarrow$ Fundamentalystem: $e^{(k+ih)}$, $e^{(k-ih)}$
$y_{Homo} = Ae^{(k+ih)} + Be^{(k-ih)}$
$\Rightarrow y_{Homo} = e^{Re(\lambda)x}(\tilde{A}\ sin(Im(\lambda)) + \tilde{B}\ cos(Im(\lambda)))$

Bsp: $\lambda = 2 \pm 3i$
$\Rightarrow y_{Homo} = e^{2x}(\tilde{A}\ sin(3x) + \tilde{B}\ cos(3x))$

Integration in $\mathbb{R}$

Hauptsatz der Differential/Integralrechnung (HDI)

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann ist die Funktion

$$F : x \to \int_a^x f\ dx,\ x \in [a,b]$$

auf $[a,b]$ stetig differenzierbar mit $F' = f$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften des Integrals

Seien $f, g \in C^0(]a,b[)$ mit Stammfunktionen $F, G \in C^1(]a,b[)$, dann gelten folgende Eigenschaften des Integrals:

Linearität:
$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

Monotonie:
$f \leq g \implies \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$ (mit $a < x_0 < x_1 < b$)

Additivität:
$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx$
(mit $a < x_0 \leq x_1 \leq x_2 < b$)

Abschätzung:
$\left|\int_a^b f\ dx\right| \leq \int_a^b |f|\ dx \leq ||f||_{C^0}(b-a) = \int_a^b ||f||_{C^0}\ dx$

Direktes Integral

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x))$$

Bsp 1:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{e^x+1}e^x dx = log(e^x+1) + c$$

(da $f = \frac{1}{x}$, $g = e^x + 1$ und $g' = e^x$)

Bsp 2:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}e^x dx = arcsin(e^x) + c$$

(da $f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g = e^x + 1$ und $g' = e^x$)

Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

$\Rightarrow$ Tipp: Erweiterung mit $1 \cdot$ ...
($\rightarrow$ Part. Integ. evtl. mehrmals hintereinander anwenden)

Wahl von f' ($\uparrow$) und g ($\downarrow$)

- $\uparrow$: x^n, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$
- $\downarrow$: x^n, arcsin, arccos, arctan, arsinh, ...
- "egal" : e^x, sin, cos, sinh, cosh

Bsp: (mehrfache Anw.)
$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx$
$x^2 e^x - 2\int x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$
$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

Integration rationaler Funktionen

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

- Fall Grad(p) $\geq$ Grad(q) $\Rightarrow$ Polynomdivision p(x):q(x)
  Resultat + $\frac{Rest}{Nenner}$ $\Rightarrow$ Gebietsadd. nutzen
- Fall Grad(p) < Grad(q) $\Rightarrow$ PBZ (siehe Appendix)
  Gebietsadd. nutzen

$\Rightarrow$ Integration der umgewandelten Form

Integration durch Substitution

Unbestimmte Integrale:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$g'(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dx = g'(t)dt$$

Bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

mit $x = \varphi(t)$, und $dx = \varphi'(t)dt$

$\Rightarrow$ Unbedingt Integrationsgrenzen beachten!

Standard-Substitutionen

-	$e^x, sinh(x), cosh(x)$ $e^x = t \quad \rightarrow x = log(t)$ und $dx = \frac{1}{t}dt$ wobei: $cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
-	$log(x)$ $log(x) = t \quad \rightarrow x = e^t$ und $dx = e^t dt$
-	$\sqrt[\alpha]{Ax+B}$ $\sqrt[\alpha]{Ax+B} = t$ Bsp: $\sqrt{x} = t \quad \rightarrow x = t^2$und $dx = 2tdt$
-	cos, sin, tan in geraden Potenzen $tan(x) = t \quad \rightarrow x = arctan(t)$ und $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ $\rightarrow$ Sinus, Cosinus können wie folgt ersetzt werden: $sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$ (dx wie oben)
-	cos, sin, tan in ungeraden Potenzen $tan(\frac{x}{2}) = t \quad \rightarrow x = 2\arctan(t)$ und $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ $\rightarrow$ Sinus, Cosinus können wie folgt ersetzt werden: $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (dx wie oben)

Tipps

- Bei unbestimmten Integralen immer **Integrationskonstante c**
- Immer auf trigonometrische Teile achten um mit Sub. einfacher zu lösen

Uneigentliche Integrale

Einsatz falls ein Integral mind. an einer Integralgrenze nicht definiert ist (Unstetigkeit oder ∞) . Oder auch bei einer Unstetigkeitsstelle im Integralintervall!

Trick: Mit endlichem R berechnen und Limes ermitteln

$$\text{Bsp:} \quad \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$$

$$\text{Allgemein:} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{R\to b, \epsilon\to a} \int_\epsilon^R f(x)dx$$

Bei zwei kritischen Grenzen:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha\to a} \int_\alpha^c f(x)dx + \lim_{\beta\to b} \int_c^\beta f(x)dx$$

$\rightarrow$ Konvergenz/Integralwert unabhängig von der Wahl von c!

Bei kritischer Grenze innerhalb des Intervalls (Unstetigkeit):

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$

$\rightarrow$ wobei c die Unstetigkeitstelle ist.

Beispiele:

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0}[-\frac{1}{x}]_1^\epsilon$
   $= \lim\limits_{\epsilon\to 0} -1 + \frac{1}{\epsilon} = \infty$ (Uneig. Integ. existiert nicht)

2. $\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx$ $\quad\rightarrow$ Unstetig in 0 und unbeschränkt in ∞
   $\longrightarrow$ Beide Grenzen uneigentlich (Berechnung in 2 Teilen)

$$\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-1} e^u\,du = e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} e^{-1},$$

$$\int_1^R \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{R}} e^u\,du = e^{-\frac{1}{R}} - e^{-1} \xrightarrow{R\to\infty} 1 - e^{-1}.$$

$\Rightarrow$ Unteigentliche Integral konvergent mit $e^{-1}+1-e^{-1} = 1$

Integraltabelle ($\rightarrow$ Komplette im Appendix)

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Differenzierbarkeit

Partielle Differenzierbarkeit

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i partiell differenzierbar, falls:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

existiert.

Totale Differenzierbarkeit

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Hier ist $df(x_0) = A$ das Differential von f (Jaccobi-Matrix) an der Stelle x_0.

Klasse C^m

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, $f \in C^1(\Omega)$, falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ in jede Richtung e_i partiell differenzierbar ist und falls jede partielle Ableitung stetig ist. Die Funktion f heisst weiter von der Klasse C^m, falls $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega)_{1\leq i\leq n}$.

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{Partielle Ableitung von f nach } x_i$$

$\Rightarrow$ Alle Variablen ausser x_i werden als Konstante betrachtet.

Richtungsableitung

$$D_v f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y)}{h} = df(x, y)\cdot v$$

$\Rightarrow$ Richtungsvektor v nur auf $|v|$ normieren falls nach der Steigung gefragt wird!

Bsp: $\quad f(x, y) = (x - 2y)^3, \quad p_0 = (6, 2), \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$df(x, y) = (3(x - 2y)^2, -2 \cdot 3(x - 2y)^2$

$D_v f(p_0) = df(p_0) \cdot v = (12, -24) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 24 - 24 = 0$

Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = df^T$$

$\Rightarrow$ Zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs

Hesse-Matrix

Matrix mit allen zweifachen partiellen Ableitungen der Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Identische gemischte Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$

$\Rightarrow$ Hesse-Matrix symmetrisch

Satz von Schwarz (Kommutativität 2ter Ableit.)

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall i, j \in 1, ..., n$$

Allgemein: Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf Ω m-mal partiell diff'bar und sind alle m-ten Ableitungen in Ω stetig $\Rightarrow$ Reihenfolge der Differentation spielt bei allen partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq$m keine Rolle!

Vektorwertige Funktionen

Vekorwertige Funktionen

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x_1, ..., x_n) \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Differenzial / Jaccobi-Matrix

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\to$ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Ableitungsregeln

- Kettenregel

$$d(f \circ g)(x_o) = df(g(x_0))\, dg(x_0) \quad \text{wobei: } f \circ g = f(g(x))$$

Bsp: $\quad f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix} \qquad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ y + z \end{pmatrix}$

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$df(g(x, y, z)) = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y + z & xy \end{pmatrix}$$

$$df(g(x, y, z)) \cdot dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xy} & 0 \\ y + z & xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ y^2 + yz & 2xy + xz & xy \end{pmatrix}$$

- Umkehrsatz

Ist $det(df(x_0)) \neq 0$, so ist f lokal umkehrbar.

$$d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1} = \text{Inverse der Jaccobi-Matrix von f}$$

Taylorentwicklung mit mehreren Variabeln

- Formel mit mehreren Variablen
- Beispiel fr 3te Ordnung

Kritische / Reguläre Punkte

- Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  Kriterium : $df(p_0) = 0 \to$ Kritischer Punkt
- Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  Kriterium: Rang $(df(p_0))$ nicht max. $\to$ Kritischer Punkt $(Rang(df(p_0)) \leq min\{m, n\})$

$\Rightarrow$ Nicht kritische Punkte = Reguläre Punkte

Bei Funktionen mit mehreren Variablen werden alle partiellen Ableitungen = 0 gesetzt!

Extremwertaufgaben in mehreren Dim.

(1) Notwendige Bedingung:

Ist $x_0 \in \Omega$ ein lokaler Extremalpunkt (Max., Min.) von f, so gilt:

$$df(x_0) = 0 \text{d.h. } x_0 \text{ ist ein kritischer Punkt}$$

$\to$ Kritische Punkte sind Kandidaten für Extremalstellen Sattelpunkte (keine Extrema) sind jedoch auch kritische Punkte.

(2) Kandidaten-Unterscheidung:

- $Hess(f)(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow x_0$ lokales Min. von f
- $Hess(f)(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow x_0$ lokales Max. von f
- $Hess(f)(x_0)$ indefinit $\Rightarrow x_0$ Sattelpunkt von f
- $det(Hess(f)(x_0)) = 0 \Rightarrow$ Entartung

- Eigenwerte:

(i) Diagonale der Hesse-Matrix parametrisieren mit (- λ)

(ii) Determinate = 0 setzen und λ's ermitteln

- Definitheit:
  - positiv definit: nur positive Eigenwerte
  - negativ definit: nur negative Eigenwerte
  - indefinit: sowohl positive als auch negative. Eigenwerte

- Hesse-Matrix:

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Gegeben: Fkt f und Nebenbedingung-Fkt g, ...
Gesucht: Extremum der Fkt. f unter NB $g = 0$

(i) Linie (=) oder Fläche ($\leq, <, >, \geq$)

(ii) NB umschreiben zu: $g = 0$

(iii) Kandidaten ermitteln

(a) Linie
  - Nicht reguläre Punkte mit $dg = 0$
    $\to$ Testen ob NB auch erfüllt wird
  - Reguläre Punkte mit $dL = 0$ (Lagrange)

(b) Fläche
  - Kritische Punkte innerhalb mit $df = 0$
    $\to$ Prüfen ob innerhalb Fläche
  - Rand untersuchen mit Langrange
    - Falls einfacher Rand:
      - Verfahren wie bei einer Linie anwenden
    - Falls komplizierter Rand:
      (a) Rand stückweise parametrisieren
      $\to$ Kritische Punkte der Stücke ermitteln
      (b) Eckpunkte

(iv) Typen der Kandidaten ermitteln
$\to$ Meistens durch Einsetzen in Fkt.
oder ansonsten Hesse-Matrix

- Langrange Multiplikatoren Regel

x_0 ist ein kritischer Punkt falls ein λ exisitert, s.d. $dL(x_0) = 0$

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = f - \lambda \cdot g$$

$$\text{Kritische Punkte von L falls: } dL(x_0) = 0$$

- Lagrange mit mehreren NB's

$$\text{Lagrange-Funktion: } L = f - \lambda \cdot g_1 - \mu \cdot g_2$$

- Verfahren zur Ermittlung:

- Fkt. L partiell ableiten nach x_1, ..., x_n
- Gleichungssystem lösen
– λ's gleichsetzen und NB verwenden (evtl. Fallunterscheid.)
– Gleichungen in einander einsetzen
$\Rightarrow$ Keine Lösungen vergessen!!

Rand-Parametrisierung - Beispiel:

- Auf dem Viereck $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y$
  $\to$ Unterteilung in 4 Teilstücke
  (1) $f(0, y) = -2y \to \frac{df}{dy} = -2 \neq 0$
  (2) $f(2, y) = 4 + 4y - 4 - 2y \to \frac{df}{dy} = 2 \neq 0$
  (3) $f(x, 0) = x^2 - 4x \to \frac{df}{dx} = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
  (4) $f(x, 2) = x^2 + 4x - 4x - 4 \to \frac{df}{dx} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
  + Eckpunkte (+ evtl. weiteren Kandidaten)

Viel verwendete NB's: (mit Ursprung 0)

- Kugeloberfläche
  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - radius^2 = 0$
- Kugelinhalt
  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq radius^2$
  Rand + Inneres analysieren
- Kreis
  $g(x, y) = x^2 + y^2 - radius^2 = 0$
- Kreisfläche
  $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq radius^2$

Min./Max. Abstand - Beispiel / Trick

Abstandsfunktion von Punkt P:

$f(x, y, z) = \left(\sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2 + (z - P_z)^2}\right)^2$

Nun kann diese Fkt. unter der NB (Bsp.: Gleichung eines Körpers) minimiert(max.) werden mit Lagrange
$\to$ Schlussendlich $\sqrt{}$ ziehen nicht vergessen!

Tangentialebene bestimmen

Gegeben:	Funktion $f(x, y) = ...$ Fläche S $:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| z = f(x, y)\}$ Punkt Q $:= (x, y, f(x, y))$
Gesucht:	Tangentialebene an S in Punkt Q $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| z = ...\}$
Verfahren:	Falls $f(Q_x, Q_y)$ kritischer Punkt der Fkt. f $\Rightarrow$ Tangentialebene konstant mit: $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| z = f(Q_x, Q_y)\}$
Allg. Formel:	$z = f(Q_x, Q_y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - Q_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - Q_y)$

Implizite Funktionen

Ziel: Auflösung des Gleichungsystems $f(x, y) = 0$ nach x oder y

Der Satz ueber implizite Funktionen gibt Aussagen darueber, ob und unter welchen Bedingungen eine solche lokale Aufloesung existiert oder nicht

Untermatrix M des Differentials Invertierbar (det $\neq 0$) $\Rightarrow$ so ist $f(x, y)$ nach x oder y (je nach Untermatrix M) auflösbar (Zeichnung und Beispiel ergaenzen)

Beispiel: Kann man $f(x, y) = 0$ in der Nähe von $(x, y) = (1, 1)$ nach y auflösen?
$\Rightarrow$ Es ist implizt möglich, ohne f explizit zu kennen

Falls wir nach x,y aufloesen wollen, muessen wir die partiellen Ableitungen nach x und y betrachten

Ableitung Bestimmbar (Formel)

$$\phi' = -(M)^{-1} \cdot (RestderMatrix)$$

Beispiel mit Aufloesung nach x und z (Seite 134)

Beispiele:
$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$
Nach y aufloesen $\quad y = \phi(x)$ mit $\phi(1) = 1$

$f(x, \phi(x)) = 0$

BESSER FORMULIEREN (KLARER) + LOESUNGSSATZ dazuschreiben (Es existiert eine Umgebung mit blabla)

Integration im $\mathbb{R}^n$

Uebersicht der Verfahren
- Linien-Integrale (Wegintegrale, Potentialfelder, Green) + Umwandlung in Polarkoordinaten

Vektorfelder, 1-Formen und Potentiale

Vekorfeld:
Funktion die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

1-Form λ: $\quad (\lambda = v^T)$

Bsp: $\quad v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$

Rotation:

$$rot(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Divergenz:

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Konservative Vektorfelder

– Potential ermitteln

Linien-Integrale

- Wegintegral /Potentialmethode

- Vektorfeld $\vec{v}$ ist meistens gegeben
(manchmal auch als 1-Form λ wobei $\lambda = v^T$)

1. (Prüfen ob ein Potential existiert $\rightarrow$ Vereinfachung)
   - Falls ja $\rightarrow$ Weiter mit Punkt 5
2. Parametrisierung der Kurve γ

$$\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \gamma(t)$$

3. Berechne $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t)$ (jede Komp. nach t ableiten)
4. Formel benutzen (Aufpassen: Skalarprodukt)

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle dt$$

- -

5. Falls ein Potential mit $V = \nabla f$ existiert:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(Ende)) - f(\gamma(Anfang))$$

- Satz von Green (Linienintegrale)

siehe Aufgabe 13.3 (Aufpassen auf Richtung)

- Wichtige Parametrisierungen:

Siehe ZF VT
- Parabel - Einheitskreis - Viertelkreis - Ellipse - ... + Tipps fr gerade Strecke (Muster)

Flächen-Integrale

- Integration auf Normalbereichen:

Sei

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit stetigen Funktion f, g, und sei $F \in C^0$. Dann gilt:

$$\int_\Omega F d\mu = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy dx$$

Beispiel: mit Menge als Normalbereich schreiben + Tipps fr Betraege

- Satz von Green (Flächen):

1. Rand parametrisieren

$$\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \gamma(t)$$

2. Berechne $\dot{\gamma}$(Jede Komponente nach t ableiten)
3. $\vec{v}$ wählen (beide haben $rot(\vec{v}) = 1$):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad oder \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Formel anwenden:

$$\mu(C) \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{falls: } rot(\vec{v}) = 1$$

$$= \int_a^b \langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle dt$$

- Satz von Fubini / Iterierte Integrale (Quadern):

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$\Rightarrow$ Auf Grenzen aufpassen (Aufabe 12.2)

Fluss(Oberfläche)-Integrale

- Normale Flussintegrale (EVTL LOESCHEN)

1. Fläche S parametrisieren, d.h. finde:

$$\Phi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3,$$

$$(u,v) \to \Phi(u,v) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v))$$

2. Berechne $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$

3. Kreuzprodukt $\Phi_u \times \Phi_v$ berechnen

4. Formel benutze:

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} do = \pm \int_a^b \int_c^d \langle \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \rangle dudv$$

- Satz von Gauss

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} do = \int_V div(\vec{v}) d\mu$$

wobei:

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Beispiel mit Kugelkoordinaten und normales Beispiel mit Fluss durch Mantel, Wegnahme von Deckel und Boden

---

Transformationssatz

Substitutionsregel

- Satz von Stokes

Erlaubt es Flussintegrale mithilfe von Wegintegralen zu berechnen.

Oft vorkommende Integrale Wichtige Koordinatentransformationen 13.3 (Seite 218)

1-Formen

Wichtige Verfahren / Grundlagen / Einsortieren

Partialbruchzerlegung (PBZ)

- Nenner in Linear-Faktoren zerlegen (Faktorisieren $\rightarrow$ nicht 2 identische Faktoren (siehe 2. Beispiel)
- Gleichung aufstellen mit $\frac{A}{...} + \frac{B}{...} + ...$
- Gleichnahmig machen
- Koeffizientenverglich mittels Matrix (Gauss anwenden)

Zum Ansatz werden jeweils abhngig von der Art der Nullstellen folgende Summanden hinzugefgt:

1. einfache Nullstelle x_i : $\quad \frac{a_{i1}}{x-x_i}$
2. j-fache Nullstelle x_i : $\quad \frac{a_{i1}}{x-x_i} + \cdots + \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j}$
3. komplexe Nullstellenpaare: $\frac{b_i x+c_i}{x^2+p_i x+q_i}$ mit $x^2+p_i x+q_i = (x-z_i)(x-\overline{z_i})$ wobei das Nennerpolynom die beiden Nullstellen $z_i, \overline{z_i}$ hat.

Beispiel 1 und Beispiel 2