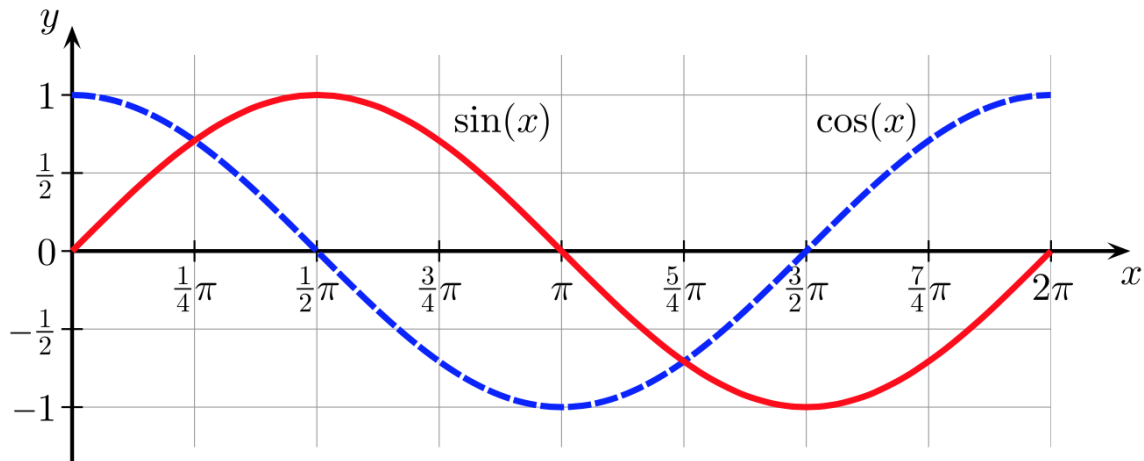


# 1 Allgemein

## 1.1 Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

## 1.2 Potenzgesetze

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\a^1 &= a \\a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\(a^n)^m &= a^{nm} \\\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\a^{\frac{b}{n}} &= \sqrt[n]{a^b}\end{aligned}$$

## 2 Mengen

### 2.1 Definitionen

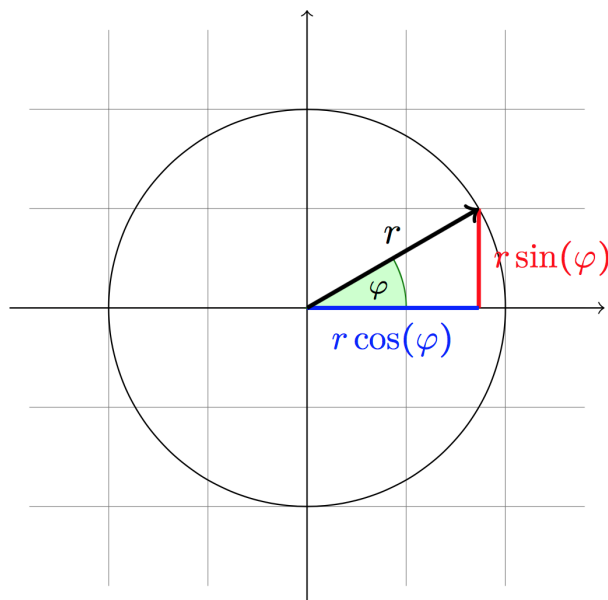
<b>Obere/Untere Schranke:</b>	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
<b>Supremum:</b>	kleinste obere Schranke $\sup A$
<b>Infimum:</b>	grösste untere Schranke $\inf A$
<b>Maximum/Minimum:</b>	$\sup A \in A, \inf A \in A$

### 2.2 Identitäten

$$\begin{aligned}A + B &:= \{a + b | a \in A, b \in B\} \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B \\ \sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}\end{aligned}$$

## 3 Komplexe Zahlen

### 3.1 Polarform



$$\begin{aligned}z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi} \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{je nach Quadrant}) \\ x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)} \\ \sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q} \\ e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} &= i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1\end{aligned}$$

## 3.2 Identitäten

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \\ |zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2\end{aligned}$$

## 4 Grenzwert

### 4.1 Dominanz

Für  $x \rightarrow +\infty$ :  $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für  $x \rightarrow 0$ :  $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

### 4.2 Fundamentallimes

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0\end{aligned}$$

### 4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

### 4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

**Anforderung:** Term der Form  $f(x)^{g(x)}$  mit Grenzwert " $0^0$ ", " $\infty^0$ " oder " $1^\infty$ " für  $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

*Tipp:* Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

### 4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

**Anforderung:** Term der Form  $\frac{f(x)}{g(x)}$  mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit  $g'(x) \neq 0$ .

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	" $0 \cdot \infty$ "	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	" $\infty - \infty$ "	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

## 5 Folgen

### 5.1 Definition

**Konvergenz:**  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , sodass  $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

**Divergenz:**  $\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}$ , sodass  $\forall n \geq N : |a_n| > K$

### 5.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen:  $a_n \leq a_{n+1}$  oder  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ .
2. Schätze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit  $a_n \geq a$ )

## 6 Reihen

### 6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
<b>Limes des allgemeinen Glieds</b>		zeigt nur Divergenz
<b>Majoranten- und Minorantenkriterium</b>		ersten Glieder spielen keine Rolle
<b>Quotientenkriterium</b>	$a_n$ mit Faktoren wie $n!$ , $a^n$ , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
<b>Wurzelkriterium</b>	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
<b>Leibnitz-Kriterium</b>	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
<b>Absolute Konvergenz</b>	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
<b>Sandwich-Theorem</b>	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

### Limes des allgemeinen Glieds

**Bemerkung:** Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1.  $\sum_n a_n$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  berechnen
  - falls Grenzwert  $\neq 0 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $= 0 \Rightarrow$  keine Aussage

## Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien  $a_n, b_n > 0$  mit  $a_n \geq b_n \forall n$  ab einem gewissen  $n_0$ . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ **konvergent**} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ **divergent**} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

## Vergleichskriterium

1.  $\sum_n a_n$  und  $\sum_n b_n$  gegeben mit  $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  berechnen
  - falls Grenzwert = 0:
    - $\sum_n a_n$  divergent  $\Rightarrow \sum_n b_n$  **divergent**
    - $\sum_n b_n$  konvergent  $\Rightarrow \sum_n a_n$  **konvergent**
  - falls Grenzwert =  $\infty$ :
    - $\sum_n a_n$  konvergent  $\Rightarrow \sum_n b_n$  **konvergent**
    - $\sum_n b_n$  divergent  $\Rightarrow \sum_n a_n$  **divergent**

## Quotientenkriterium

1.  $\sum_n a_n$  mit  $a_n \neq 0$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  berechnen
  - falls Grenzwert  $> 1 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $< 1 \Rightarrow$  **konvergent**
  - falls Grenzwert = 1  $\Rightarrow$  keine Aussage

## Wurzelkriterium

1.  $\sum_n a_n$  mit  $a_n \neq 0$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  berechnen
  - falls Grenzwert  $> 1 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $< 1 \Rightarrow$  **konvergent**
  - falls Grenzwert = 1  $\Rightarrow$  keine Aussage

## Leibniz-Kriterium

1.  $\sum_n (-1)^n a_n$  gegeben
2. **konvergent**, falls:
  - (a)  $a_n \geq 0$
  - (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
  - (c)  $a_n$  monoton fallend

## Absolute Konvergenz

1.  $\sum_n (-1)^n a_n$  gegeben
2. **konvergent**, falls  $\sum_n |a_n|$  konvergent

## 6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$  mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

**Konvergent**, falls  $0 < |r| < 1$  mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

## 6.3 Potenzreihe

Reihe der Form  $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ . **Konvergent**, falls  $|x| < \rho$ . In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

man muss noch prüfen ob es in bereich konvergiert oder im aussen von bereich konvergiert, dazu eine formel benutzen.

### 6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^a$$
$$\sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$$

## 7 Stetigkeit

### 7.1 Stetigkeitskriterien

#### Weierstrass-Kriterium

Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta(\epsilon, a) > 0$ , sodass für alle  $|x - a| < \delta$  gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

## Gleichmässige Stetigkeit

Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta(\epsilon) > 0$ , sodass für alle  $|x - y| < \delta$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

*Bemerkung:* Ist  $f$  **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

## Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante  $L \in \mathbb{R}$ , sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

*Bemerkung:* Ist  $f'$  **auf  $\Omega$  beschränkt**, so ist  $f$  Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

## Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$  konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

## Gleichmässige Konvergenz

**Grundsatz:** Falls eine Folge stetiger Funktionen  $f_n$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert, ist  $f$  stetig.

$f_n(x)$  konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

*Bemerkung:* Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

# 8 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert  $f'(x_0)$  existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 8.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

## 8.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 8.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung von  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm  $R_m^a(x)$ , wobei  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

### 8.4 Hauptsatz von Calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx}m(x)$$

wobei  $m(x)$  der Form  $ax^b$  ist mit  $l \in \mathbb{R}$

## 9 Integration

### 9.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	$c$	$cx$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$c \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	$c^x$	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x  - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x  - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

### 9.2 Regeln

**Direkter Integral**  $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$

**Partielle Integration**  $\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$

**mit Polynomen**  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \Rightarrow$  Partialbruchzerlegung

**Substitution**  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$  mit  $x = \varphi(t)$



### 9.3 Tipps

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\ \int \frac{1}{x - \alpha} \, dx &= \log(x - \alpha) \\ \int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} \, dx &= \arctan(x) \\ \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \sinh(x) + C\end{aligned}$$

## 10 Differentialgleichungen

### 10.1 Grundbegriffe

- Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung  
**linear:** alle  $y$ -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel  $y^2$ ,  $(y'')^3$ ,  $\sin(y)$ ,  $e^{y'}$ )  
**homogen:** Gleichung ohne Störfunktionen  
**Störfunktion:** Term, der rein von der Funktionsvariablen  $x$  abhängt

### 10.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
<b>Trennung der Variablen</b>	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
<b>Variation der Konstanten</b>	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
<b>Euler-Ansatz</b>	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
<b>Direkter Ansatz</b>	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

### 10.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen  $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

**konstante Lösungen**  $y(x) \equiv 0$  erfüllt jedoch  $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$  nicht

Trennung  $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren  $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$   
 $\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen  $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

**Lösung**  $y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$

### 10.2.2 Variation der Konstanten

**Grundsatz:**  $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$$y' - y = 1, \quad y(0) = 0$$

homogener Ansatz  $y' = y$

**konstante Lösungen**  $y(x) \equiv 0$

Trennung  $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = x$

**homogene Lösung**  $y_{\text{homo}}(x) = Ae^x, \quad A = e^C \in \mathbb{R}$

partikulärer Ansatz  $y_p(x) = A(x)e^x$

einsetzen  $A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

**partikuläre Lösung**  $y_p(x) = -1$

**Lösung**  $y(x) = Ae^x - 1$  mit Anfangsbedingung  $A = 1$   
 $\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

### 10.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen  $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

**charakt. Polynom**  $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen  $4, -2$

**allgemeine Lösung**  $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen  $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$   
 $\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$

**Lösung**  $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

*Bemerkung:* Zu einer  $m$ -fachen Nullstelle  $\lambda$  gehören die  $m$  linear unabhängigen Lösungen  $e^{\lambda x}$ ,  $x \cdot e^{\lambda x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$ . Zur  $m$ -fachen Nullstelle  $\lambda = 0$  gehören die Lösungen  $1, x, \dots$ ,  $x^{m-1}$ .

*Komplexe Nullstellen:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form  $\alpha \pm \beta i$  liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

#### 10.2.4 Direkter Ansatz

**Grundsatz:**  $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	$A, B, C$
$ce^{kx}$	$Ae^{kx}$	$A$
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	$A, B$

*Bemerkung:* Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit  $x$ .

$$\begin{aligned}
 & y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
 \text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
 \text{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
 \text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \\
 & \Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x) \\
 \text{Einsetzen} \quad & \left(-a + b + \frac{a}{4}\right) \cos(x) + \left(-b - a + \frac{1}{4}b\right) \sin(x) = \cos(x) \\
 \text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
 \text{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x) \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)
 \end{aligned}$$

## 11 Vektorfelder

### 11.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

## 11.2 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von  $f$  und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von  $f$ .

*Bemerkung:*  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

## 11.3 Hessematrix

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls  $a$  hat in  $x_0$  nur positive Eigenwerte dann ist es eine Maximalstelle, falls sie hat nur negative Eigenwerte dann ist es eine Minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein Sattelpunkt.

## 11.4 Rotation

$$\text{In } \mathbb{R}^3 : \text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ in } \mathbb{R}^2 : \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

*Bemerkung:* Falls  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ , dann ist  $\vec{v}$  konservativ (Potenzialfeld).

## 11.5 Divergenz

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots$$

## 11.6 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Das Potenzial  $\Phi$  eines Potenzialfeldes ist gleich:

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

Für ein Potenzialfeld gilt  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$  und es erfüllt die **Integrabilitätsbedingungen**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

# 12 Wegintegral

## 12.1 Standardmethode

$$\text{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

$$\gamma \text{ ableiten} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$\text{Lösung} \quad 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$$

## 12.2 In Potenzialfeldern

**Anforderung:** Das Vektorfeld  $\vec{v}$  ist **konservativ** (= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen von } (1, 0) \text{ nach } (-1, 0)$$

$$\text{gleichsetzen:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ableiten:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\ &\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \Phi = xe^{xy} + \text{const.}$$

$$\text{Lösung:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 + C - 1 - C = -2$$

## 12.3 Satz von Green

**Anforderung:** Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen mit Radius 1 um } (0, 0)$$

$$\text{Rotation berechnen:} \quad \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich:} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

## 13 Flächenintegral

### 13.1 Koordinatentransformationen

#### 13.1.1 Polarkoordinaten ( $\mathbb{R}^2$ )

$$\text{Variablen: } \begin{array}{l} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \end{array} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = r \, dr d\phi$$

#### 13.1.2 Elliptische Koordinaten ( $\mathbb{R}^2$ )

$$\text{Variablen: } \begin{array}{l} x = ra \cos(\phi) \\ y = rb \sin(\phi) \end{array} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = abr \, dr d\phi$$

#### 13.1.3 Zylinderkoordinaten ( $\mathbb{R}^3$ )

$$\begin{array}{l} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{array} \quad \text{Variablen: } \quad \text{Volumenelement: } dxdydz = r \, dr d\phi dz$$

#### 13.1.4 Kugelkoordinaten ( $\mathbb{R}^3$ )

$$\begin{array}{l} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{array} \quad \text{Variablen: } \quad \text{Volumenelement: } dxdydz = r^2 \, dr \sin(\theta) \, d\theta d\phi$$

### 13.2 Normalbereich

$$\text{Grundsatz: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int_{\Omega} F \, d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \, F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

$$\text{als Normalbereich schreiben: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen: } \int_{\Omega} xy \, d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx \, x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle  $F(x, y) = 1$ . Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle  $F(r, \phi) = r$ .

### 13.3 Satz von Green

**Anforderung:** Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz: } \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \text{ falls } \text{rot}(\vec{v}) = 1$$

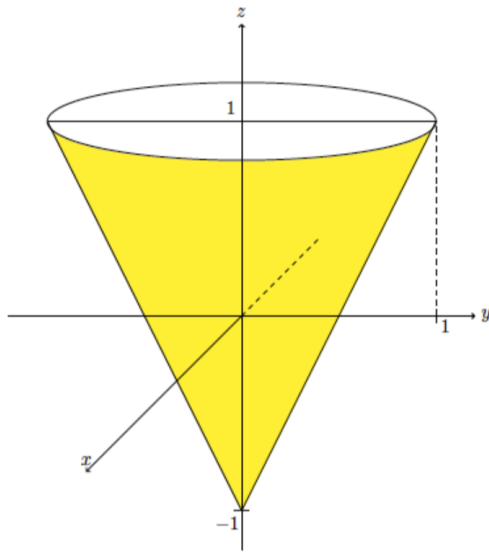
Flächeninhalt der Ellipse  $E$ , berandet durch  $x = a \cos(\theta)$ ,  $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren:  $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen:  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$  oder  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

**Wegintegral ausrechnen:**  $\mu(E) = \pi ab$

## 14 Oberflächenintegral



gegeben:  $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 + 3z^2 - 3 \end{pmatrix}$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels  
(von Innen nach Aussen)

**Vorgehen:** Fluss durch den ganzen Kegel  
mit **Satz von Gauss** berechnen  
Fluss durch Deckel  
mit **Standardmethode** berechnen

### 14.1 Standardmethode

**Grundsatz:**  $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do$

Normalvektor:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorfeld anpassen:  $z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

**Grundsatz anwenden:**  $\iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dx dy = \iint_D x^2 dx dy$

**Koordinatentransformation:**  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos(\phi) \, dr d\phi = \frac{\pi}{4}$

### 14.2 Satz von Gauss

**Grundsatz:**  $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\mu$

wobei  $\vec{n}$  die nach aussen gerichtete Normale längs  $\partial V$  bezeichnet.

Divergenz berechnen:  $\operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$

**Grundsatz anwenden:** 
$$\int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr \, dr = 2\pi$$

*Bemerkung:* In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

## 15 Kurvendiskussion

**kritischer Punkt:**  $p_0 \in \Omega$  für welchen  $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$  gilt

**Kandidaten für Extrema:**  $p_0 \in \Omega$  für welchen  $df(p_0) = 0$  gilt

### 15.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden  $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
  - (a)  $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$  positiv definit  $\Rightarrow$  lokales Minimum
  - (b)  $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$  negativ definit  $\Rightarrow$  lokales Maximum
  - (c)  $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$  indefinit  $\Rightarrow$  Sattelpunkt

*Bemerkung:* Falls alle Eigenwerte von  $A$  grösser als 0 sind, dann ist  $A$  **positiv definit**. Hat  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

### 15.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben:  $f = xyz$  mit Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**Lagrange-Bedingung:**  $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von  $L$ :  $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen:  $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Kandidaten:**  $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in  $f$  einsetzen:  $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

**Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:**

1. Lagrange-Bedingung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung falls  $g$  differenzierbar:
  - (a) nicht-reguläre Punkte finden mit  $dg = 0$
  - (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfen



falls  $g$  nicht differenzierbar:

- (a) nicht-reguläre Punkte der Teilstücke des Randes
- (b) Eckpunkte des Gebietes überprüfen