

1 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin(\pi) = 0, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(0) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos(\pi) = -1, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$

2.2 Identitten

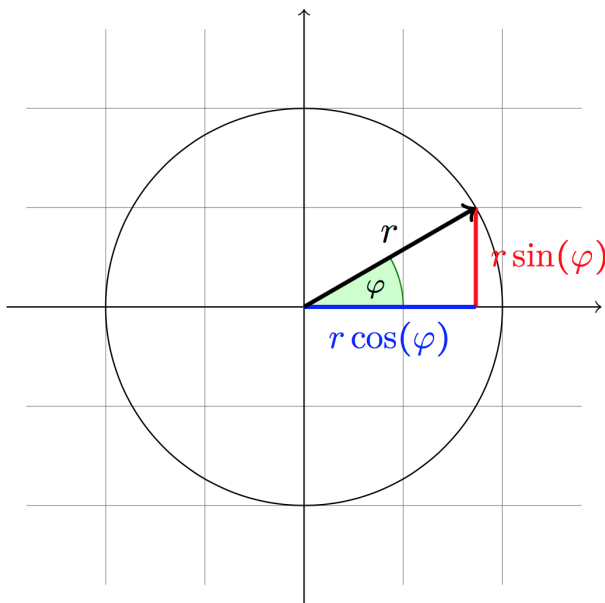
$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \pmod{\frac{2\pi}{q}}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = i, e^{i\pi} = -1, e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \\ |zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2\end{aligned}$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

Für $x \rightarrow +\infty$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für $x \rightarrow 0$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

4.2 Tipps

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0\end{aligned}$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert " 0^0 ", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

Falls die Grenzwerte $0 \neq \infty$ verschieden sind, kann man umformen: $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zwei Polyzisten zu benutzen mit sin, cos, tan oder $-1^n \dots$ sonst induktion: $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$ oder direct. Mit eine recursive folge, um Grenzwert zu finden, setzen a_n mit a und a finden. Oder direct mit $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

5 Reihen

5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	alternierende Reihe	
Absolute Konvergenz	sin, cos	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ berechnen
 - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n$ ab einem gewissen n_0 . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ **konvergent**} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ **divergent**} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
 - falls Grenzwert $= 0$:
 - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
 - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= \infty$:
 - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
 - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
 - (a) $a_n \geq 0$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 - (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

5.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

5.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

5.3.1 Tipps

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ e^x &= \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

6 Stetigkeit

6.1 Stetigkeitskriterien

Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmässig Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7.1 Umkehrrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7.4 Hauptsatz von calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) * \frac{d}{dx}m(x)$$

wo $m(x)$ hat der Form ax^b und $l \in \mathbb{R}$

8 Integration

8.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

8.2 Regeln

$$\begin{array}{ll}
 \text{Direkter Integral} & \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) \\
 \text{Partielle Integration} & \int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \\
 \text{mit Polynomen} & \int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx \Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \\
 \text{Substitution} & \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \text{ mit } x = \varphi(t)
 \end{array}$$

8.3 Tipps

$$\begin{aligned}
 \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\
 \int \frac{1}{x - \alpha} &= \log(x - \alpha) \\
 \int \frac{1}{1 + x^2} &= \arctan(x) \\
 \int \sinh(x) &= \cosh(x) + C \\
 \int \cosh(c) &= \sinh(s) + C
 \end{aligned}$$

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung
linear: alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2 , $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen: Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$\begin{aligned} & y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2} \\ \text{umformen} \quad & \frac{dy}{dx} = -x \tan y \\ \text{konstante Lösungen} \quad & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ nicht} \\ \text{Trennung} \quad & \frac{dy}{\tan y} = -x dx \\ \text{integrieren} \quad & \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C \\ & \Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad & \sin(y(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1 \\ \text{Lösung} \quad & y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}}) \end{aligned}$$

9.2.2 Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} \text{Grundsatz:} \quad & y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x) \\ & y' - y = 1, \quad y(0) = 0 \\ \text{homogener Ansatz} \quad & y' = y \\ \text{konstante Lösungen} \quad & y(x) \equiv 0 \\ \text{Trennung} \quad & \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = x \\ \text{homogene Lösung} \quad & y_{\text{homo}}(x) = Ae^x, \quad A = e^C \in \mathbb{R} \\ \text{partikulärer Ansatz} \quad & y_p(x) = A(x)e^x \\ \text{einsetzen} \quad & A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\ \text{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -1 \\ \text{Lösung} \quad & y(x) = Ae^x - 1 \text{ mit Anfangsbedingung } A = 1 \\ & \Rightarrow y(x) = e^x - 1 \end{aligned}$$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0 \\ \text{Euler-Ansatz} \quad & y(x) = e^{\lambda x} \\ \text{einsetzen} \quad & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\ \text{charakt. Polynom} \quad & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\ \text{Nullstellen} \quad & 4, -2 \\ \text{allgemeine Lösung} \quad & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\ \text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\ & \Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2 \\ \text{Lösung} \quad & y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x} \end{aligned}$$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen $1, x, \dots$, x^{m-1} .

9.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$$

homogener $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

homogene Lösung $\Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Ansatz wählen $y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$

$$\Rightarrow y_p'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y_p''(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$$

Einsetzen $(-a + b + \frac{a}{4}) \cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b) \sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich $-\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

Lösung $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

9.3 Komplexe zahlen

Falls der charakteristische Polynom ist komplex und hat der form $a + i\sqrt{b}$, dann hat die homogene Lösung die form:

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos(\sqrt{b}x) + C_2 \sin(\sqrt{b}x))$$

Wo a ist die komplexe lösung von charakteristische polynom.

10 Vektorfelder

10.1 Operatoren

10.1.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

10.1.2 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrates von f und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von f .

10.1.3 Hessematrix

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls A hat in x_0 nur positive Eigenwerte, dann ist es eine Maximalstelle, falls sie nur negative Eigenwerte, dann ist es eine Minimalstelle, falls sie beide hat, dann ist es ein Sattelpunkt.

10.1.4 Rotation

Für ein Vektorfeld \vec{v} mit Komponenten v_1, v_2, v_3 :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

10.2 Divergenz

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots$$

10.3 Integrabilitatsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

Falls diese ist erfüllt, dann ist der Feld ein Potenzialfeld und konservativ.

10.4 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Der Potenzial Φ eines Potenzialfeld:

$$\nabla \Phi = v$$

Bemerkung: Falls $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist \vec{v} konservativ.

11 Wegintegral

11.1 Standard Methode

$$\text{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

$$\gamma \text{ ableiten} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$\text{Lösung} \quad 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$$

11.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld \vec{v} ist **konservativ** (= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen von } (1, 0) \text{ nach } (-1, 0)$$

$$\text{gleichsetzen:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ableiten:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\ &\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \Phi = xe^{xy} + \text{const.}$$

$$\text{Lösung:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 + C - 1 - C = 2$$

11.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen mit Radius 1 um } (0, 0)$$

$$\text{Rotation berechnen:} \quad \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich:} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

11.4 Tips

parametrisierung eines kreises: $x=r*\cos(t)$ $y= r*\sin(t)$ $dx dy= r dr dt$ $dx dy=|rs \times rt|$

12 Flussintegrale oberflacheintegrale

12.1 1 methode

1. Die fläche parametrisieren nach u und v: $\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)$.
2. berechnen $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$. Und krossprodukt berechnen $\Phi_u \times \Phi_v$
3. benutzen die Formel:

$$\int_S v * ndo = \pm \int_a^b \int_c^d v(\Phi(u, v)) * (\Phi_u \times \Phi_v) du dv$$

12.2 Gauss

$$\int_{\partial V} v * ndo = \int_V \operatorname{div}(v) d\mu$$

13 Flächenintegral

13.1 Normalbereich

Grundsatz: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy d\mu, \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen: } \int_{\Omega} xy d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

13.2 Satz von Green

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 1$

Flächeninhalt der Ellipse E , berandet durch $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen $\mu(E) = \pi ab$

14 Kurvendiskussion

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\text{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt

Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

14.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
 - (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit \Rightarrow lokales Minimum
 - (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit \Rightarrow lokales Maximum
 - (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit \Rightarrow Sattelpunkt

14.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L : $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedingung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
falls g differenzierbar:
 - (a) nicht-regulre Punkte finden mit $dg = 0$
 - (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfen
falls g nicht differenzierbar:
 - (a) nicht-regulre Punkte der Teilstücke des Randes
 - (b) Eckpunkte des Gebietes überprüfen