1 Lineare Gleichungssysteme und Gauss elimination

Ein Gleichungssystem ist linear falls man kann ihn in diese Art schreiben:

$$Ax + By = C \tag{1}$$

Wo A und B darfen nicht gleichzeitig 0 sein.
Erst tauschen wir die Gleichungssystem in eine Matrix:

$$A * x = b \tag{2}$$

Wo A sind die Koeffizienten von die Gleichungen, x die Unbekanten und b die Lsungen. Fur die Auflsung, tauschen wir die Matrix A in eine diagonalisierte matrix durch pivotierung.
In eine Gaus elimination darfen wir:

1. Zeile vertauschen
2. Addition und Subtraktion eines vielfachen der pivotzeile zu eine andere Zeile.

Eine quadratische lineare Gleichungssystem wo eindeutige Lsungen berechenbar sind is regular, sonst ist er singular.

Rang Der rang eine Matrix ist die Anzahl von lineare unabhngige Zeilen (Anzahl pivotelemente).
Die Anzahl der freien variablen ist n - r.
Der Gleichungssytem hat mindestens eine Losung wenn:

1. $r = m$
2. $r < m$ und $c_{r+1} = c_{r+2} = c_m = 0$

Gibt es losungen dann:

1. $r = n \Rightarrow$ losung ist eindeutig.
2. $r < n \Rightarrow$ gibt eine n - r parametrige losungsschar.

Korollar 1.3 *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$(i) \quad \left.\begin{array}{c} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \textit{hat genau} \\ \textit{eine Lösung} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} r = n = m \quad \textit{oder} \\ \left\{\begin{array}{c} r = n < m \quad \textit{und} \\ c_{r+1} = \cdots = c_m = 0 \end{array}\right\} \end{array}\right.,$$

$$(ii) \quad \left.\begin{array}{c} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \textit{hat für jedes } \mathbf{b} \\ (\textit{mindestens}) \textit{ eine Lösung} \end{array}\right\} \iff r = m\,,$$

$$(iii) \quad \left.\begin{array}{c} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \textit{hat für jedes } \mathbf{b} \\ \textit{genau eine Lösung} \end{array}\right\} \iff r = m = n\,.$$

Ein Gleichungssytem heisst homogen falls die rechte Seite aus nullen besteht.

2 Matrizen und Vektoren

2.1 Notation

A_{xy} x ist die vertikale und y die Horizontale.
$\mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbb{C}^{m \times n}$
Sind die mengen reelen und complexen Matrizen.
$\mathbb{E}^{m \times n}$ ist die Menge alle Matrizen.

2.2 Rechnen mit Matrizen

$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = AB_{m\times p}$

Satz 2.1 *Die Addition, die Multiplikation und die skalare Multiplikation von Matrizen (und Vektoren) haben die folgenden Eigenschaften, vorausgesetzt dass die Operationen definiert sind:*

$$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A}), \tag{2.6}$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}), \tag{2.7}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = (\alpha\mathbf{A}) + (\beta\mathbf{A}), \tag{2.8}$$

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) + (\alpha\mathbf{B}), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad (\textit{Add. kommutativ}), \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (\textit{Add. assoziativ}), \tag{2.11}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \qquad (\textit{Mult. assoziativ}), \tag{2.12}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = (\mathbf{AC}) + (\mathbf{BC}) \qquad (\textit{Add./Mult. distributiv}), \tag{2.13}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{AB}) + (\mathbf{AC}) \qquad (\textit{Add./Mult. distributiv}), \tag{2.14}$$

$A \times B = O$ auch wenn $A \neq O \wedge B \neq O$
ist A eine m×n Matrix, dann ist A^Tdie n×m, die transponierte Matrix. Gleiche bei komplexe Zahlen mit die konjugiert-komplexe:A^H von $\overline{A}$
Eine Matrix ist symmetrisch/hermitesch falls $A^H = A$ und ist schiefsymmetrisch falls $A^T = -A$
$(AB)^T = B^T A^T$
$A^T AundAA^T$ sind immer symmetrisch.

2.3 Skalarprodukt, die norm, lange und Winkel von Vektoren

$$\| x \|= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \tag{3}$$

Der Cosinussatz:

$$\| y - x \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| cos\varphi \tag{4}$$

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 \tag{5}$$

$$cos\varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\| x \| \| y \|} \tag{6}$$

Satz 2.9 *Für das Skalarprodukt* (2.48) *im* $\mathbb{R}^n$ *gilt:*

(S1) Es ist **linear** *im zweiten Faktor:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle \mathbf{x}, \alpha\, \mathbf{y} \rangle = \alpha\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(S2) Es ist **symmetrisch***:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(S3) Es ist **positiv definit***:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \qquad \textit{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{o}\,.$$

Für das Skalarprodukt (2.47) *im* $\mathbb{C}^n$ *gelten (S1) und (S3) analog für alle* $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ *und* $\alpha \in \mathbb{C}$*, aber (S2) wird ersetzt durch:*

(S2') Es ist **Hermitesch***:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} \qquad \textit{für alle } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

(S4) Es ist auch **linear** *im ersten Faktor:*

$$\langle \mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{w},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}, \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle \alpha\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Das Skalarprodukt (2.47) *im* $\mathbb{C}^n$ *ist* ***sesquilinear*** *[*sesquilinear*], d.h. zusätzlich zu (S1) gilt:*

(S4') Es ist **konjugiert-linear** *im ersten Faktor:*

$$\langle \mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \qquad \textit{für alle } \mathbf{w},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

Lange eine vektor:

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} \tag{7}$$

Die schwarze ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \| \tag{8}$$

Die norm

1. positiv definit: $\| x \| \geq 0, \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Sie ist dem Betrage nach homogen: $\| \alpha x \| = |\alpha| \; \| x \|$
3. Die Dreiecksungleichung: $\| x \pm y \| \leq \| x \| + \| y \|$ fur alle x, y

$$\| x \|_p := (|x_1|^p + ... + |x_n|^P)^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

$$\| x \|_\infty := max|x_k|k = 1, ..., n \tag{10}$$

Senkrecht

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y \tag{11}$$

fals $x \perp y$ gillt:

$$\| x \pm y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \tag{12}$$

2.4 Das aussere Produkt und die orthogonale Projektion auf eine Gerade

2.4.1 Aussere Produkt

Die aussere produkt eine m Vektors x une eines n vektors y ist die $m \times n$ Matrix xy^H
Eine m×n Matrix hat genau dann den Rang 1, wenn sie das aussere Produkt eines mVektors x≠o und eines n Vektors y≠o ist.

2.4.2 Orthogonale Porjektion

Die orthogonale Projektion $P_y x$ des nVektors x auf die durch die Vielfachen von y ($\neq$o) erzeugte Gerade durch den Ursprung ist gegeben durch:

$$P_y x := uu^H x \tag{13}$$

wo

$$u := \frac{y}{\parallel y \parallel} \tag{14}$$

2.5 Matrizen als lineare Abbildungen

$$A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m, x \mapsto Ax \tag{15}$$

Der bild von A

$$imA := \{Ax\epsilon\mathbb{E}^m; x\epsilon\mathbb{E}^n\} \tag{16}$$

2.6 Die inverse Matrix

$$AA^-1 = I_n \tag{17}$$

Die folgende aussangen sind equivalent:

1. A ist invertierbar
2. es gibt genau ein A^-1
3. A ist regular, rang A = n

$$(AB)^-1 = b^-1A^-1 \tag{18}$$

$$(A^T)^-1 = (A^-1)^T \tag{19}$$

2.7 Orthogonale und unit are Matrizen

Eine Matrix heisst unitar falls $A^h A = I_n$, heisst auch orthogonal falls $A^T A = I_n$
falls A und B sind unitare:

1. A^-1 ist unitar
2. AB ist unitar

Eine unitare abbildung ist:

1. length preserving
2. angle preserving

Therefore:

$$\parallel Ax \parallel = \parallel x \parallel, \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \tag{20}$$

2.8 Strukturierte Matrizen

Mehrere Type von Matrizen. schau im skript 2.9

3 Die LR-Zerlegung

$$PA = LR \tag{21}$$

Die Matrix A ist umgewandelt in eine obere und untere Dreieckmatrix.

$$Lc = Pb \tag{22}$$

$$Rx = c \tag{23}$$

Wir losen die zwei letzte durch Ruckwertseinsetzen und Vorwartseinsetzen.

3.0.1 Die L matrix

Die L matrix hat 1 auf die Diagonale und der Rest sind die Termen mit dem ich hab die Pivotzeilen multipliziert in der gauss algorithmus.

3.0.2 Die R matrix

Ist die obere Dreiecksmatrix die ich mit gauss erhalte.

3.1 Die LDR zerlegung

$$PA = LDR_1 \tag{24}$$

$$R_1 := D^-1R \tag{25}$$

D ist gleich die Pivotelemente.

3.2 Untermatrizen fur LR zerlegung

Eine mn Matrix A vom Rang r l asst sich genau dann ohne Zeilenvertauschungen LRzerlegen, wenn die r fu hrenden Hauptuntermatrizen A_k (k=1,...,r)regul ar sind.

Algorithmus 3.3 (LR–Zerlegung durch Updating) *Zur LR–Zerlegung einer regulären Matrix* $\mathbf{A}$, *deren* $n-1$ *führende Hauptuntermatrizen* $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ *regulär sind, setze man zunächst* $\mathbf{L}_1 := \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$. *Für* $k = 1, \ldots, n-1$ *teile man dann* $\mathbf{A}_{k+1}$ *gemäss* (3.58) *in vier Blöcke auf und berechne*

$$\sigma_{k+1} := a_{k+1,k+1} - \mathbf{c}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{b}_k \,, \tag{3.61a}$$

$$\mathbf{L}_{k+1} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_k & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{c}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} & 1 \end{array} \right), \tag{3.61b}$$

$$\mathbf{R}_{k+1} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_k & \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{b}_k \\ \hline \mathbf{o}^\top & \sigma_{k+1} \end{array} \right). \tag{3.61c}$$

Dabei erhält man $\mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{b}_k$ *und* $(\mathbf{R}_k^\top)^{-1}\mathbf{c}_k$ *durch Vorwärtseinsetzen. Der Algorithmus bricht nur ab, wenn entgegen der Voraussetzung eine der Hauptuntermatrizen singulär ist, und zwar ist* $\sigma_k = 0$ *(und damit* $\mathbf{R}_k$ *singulär) genau dann, wenn* $\mathbf{A}_k$ *singulär ist.*

3.3 Die Cholesky-Zerlegung

Wir nehmen die PA = LDR_1 zerlegung wo D ist die diagonale von R.
Falls A symmetrisch ist dann ist P = I, und $R_1 = L^T$.

$$A = LDL^T \tag{26}$$

Jetzt kann mann setzen

$$R_2 := D^{\frac{1}{2}} L^T \tag{27}$$

Cholesky Zerlegung

$$A = R_2^T R_2 \tag{28}$$

3.3.1 Positiv definit

Eine reell symmetrische n n Matrix A heisst positiv definit falls:

$$x^T AX > 0 (\geq dannpositivsemidefinit) \tag{29}$$

Eine reell symmetrische oder Hermitesche Matrix, die positiv definit ist, ist regul ar.

4 Vektorr aume

Die Elemente einer bestimmten Menge lassen sich in natu rlicher Weise addieren und mit einer reellen (oder komplexen) Zahl multiplizieren (strecken), wobei das Resultat beider Operationen je wieder ein Element der Menge ist und gewisse einfache Regeln gelten.
Die axiome von Vektorraume:

(V1) $x + y = y + x \qquad (\forall x, y \in V)$,

(V2) $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (\forall x, y, z \in V)$,

(V3) es gibt ein ausgezeichnetes Element $o \in V$ mit
$x + o = x \qquad (\forall x \in V)$,

(V4) zu jedem $x \in V$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $-x \in V$ mit
$x + (-x) = o$,

(V5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{E},\ \forall x, y \in V)$,

(V6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \qquad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E},\ \forall x \in V)$,

(V7) $(\alpha\,\beta)x = \alpha(\beta x) \qquad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E},\ \forall x \in V)$,

(V8) $1x = x \qquad (\forall x \in V)$.

Es sei V ein Vektorraum u ber $\mathbb{E}$. Fu r alle x, y ϵ V und alle $\alpha\epsilon\mathbb{E}$ gilt:

$$0x = o \tag{30}$$

$$\alpha 0 = o \tag{31}$$

$$\alpha x = o \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = o \tag{32}$$

$$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x) \tag{33}$$

Zu x,y ϵV existiert z ϵV mit x+z=y,wobei z eindeutig bestimmt ist und gilt:
z = y + (x).

Substraction:

$$y - x = y + (-x) \tag{34}$$

4.1 Korper

Ein Ko rper [field] ist eine nichtleere Menge K auf der eine Addition und eine multiplication definiert sind. Mit folgende Axiome:

(K1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$,

(K2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \qquad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K})$,

(K3) es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{K}$ mit
$\alpha + 0 = \alpha \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{K})$,

(K4) zu jedem $\alpha \in \mathbb{K}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $-\alpha \in \mathbb{K}$ mit
$\alpha + (-\alpha) = 0$,

(K5) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \qquad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$,

(K6) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \qquad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K})$,

(K7) es gibt ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathbb{K}$, $1 \neq 0$, mit
$\alpha \cdot 1 = \alpha \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{K})$,

(K8) zu jedem $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$,

(K9) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \qquad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K})$,

(K10) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \qquad (\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K})$.

4.2 Unterr aume, Erzeugendensysteme

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum [subspace], falls sie bezu glich Addition und ska- larer Multiplikation abgeschlossen ist.

$$x + y\epsilon\mathbb{U}, \alpha x\epsilon\mathbb{U}(\forall x, y\epsilon\mathbb{U}, \forall\alpha\epsilon\mathbb{E}) \tag{35}$$

Ein Unterraum ist selbst ein Vektorraum.

4.2.1 Lineare Hulle

Die Menge aller Linearkombinationen von a1, . . . , al heisst der von a1, . . . , al aufgespannte (oder: erzeugte) Un- terraum [subspace spanned by a1,...,al; span] oder die lineare Hu lle von a1, . . . , al [linear hull]:

span $\{a_1, .., a_l\} := \{\sum y_k a_k; y_1, .., y_l \epsilon\mathbb{E}\}$

die vetoren $a_1, ..a_l$ sind Erzeugendensystem [die spanning set] von span.

4.3 Basen

Ein linear unabha ngiges Erzeugendensystem eines Vektorraums V heisst Basis [basis] von V.
Besitzt ein Vektorraum V ein endliches Erzeugendensy- stem, so besteht jede Basis von V aus derselben Zahl von Vektoren.

Dimension Die Zahl der Basisvektoren (in jeder Basis) eines Vektorraumes V mit endlichem Erzeugensystem heisst Dimensi- on [dimension] von V und wird mit dim V bezeichnet.
Zwei Unterra ume U und U eines Vektorraumes V mit der Eigenschaft, dass jedes x ϵ V eine eindeutige Darstellung hat, heissen komplement ar [complementary]. Wir nennen dann V die direkte Summe [direct sum] von U und U und schreiben:

$$V = U \oplus U' \tag{36}$$

4.4 Basiswechsel, Koordinatentransformation

Wir konnen die koordinaten von ein Punkt in eine Basis in die Koordinate von ein neue Basis umwalden indem wir eine Basiswechselmatrix benutzten. Die invers von diese Matrix macht der umgekehrte weg.

5 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung zwischen zwei Vektorra umen heisst linear, wenn sie die linearen Beziehungen invariant (un- vera ndert) la sst. Wa hlt man in den Vektorra umen Basen, so in- duziert eine solche Abbildung eine lineare Abbildung der Koordi- naten. Falls die Ra ume endlich-dimensional sind, wird diese durch eine Matrix repra sentiert. Dies ist, in Ku rze, der grundlegende Zu- sammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen.

5.1 Definition, Beispiele, Matrixdarstellung

Ist F bijektiv, so ist die inverse Abbildung [inverse map, inverse mapping, inverse transformation] F1 definiert.

DEFINITION: Eine Abbildung $F : X \to Y$, $x \mapsto Fx$ zwischen zwei Vektorräumen X und Y (über $\mathbb{E}$) heisst **linear** [*linear transformation*], wenn für alle $x, \widetilde{x} \in X$ und alle $\gamma \in \mathbb{E}$ gilt

$$F(x + \widetilde{x}) = Fx + F\widetilde{x}, \qquad F(\gamma x) = \gamma(Fx)\,. \tag{5.1}$$

X ist der Definitionsraum [domain], Y der Bildraum [image space] der Abbildung.

Isomorphismus Eine eineindeutige lineare Abbildung von X auf Y heisst Isomorphismus [isomorphism]. Ist X = Y , so heisst sie Automorphismus [automorphism].
st F : X → Y ein Isomorphismus, so ist die inverse Abbildung $F^{-}1$: Y → X linear und auch ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] & \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Es bedeutet, dass

$$\boxed{F = \kappa_Y^{-1}\,\mathbf{A}\,\kappa_X\,, \qquad \mathbf{A} = \kappa_Y\,F\,\kappa_X^{-1}\,.}$$

kommutati

5.2 Kern, Bild und Rang

$$F : X \to Y \tag{37}$$

Wo dim X = n, dim Y = m.

5.2.1 Kern

Der Kern [kernel] ker F von F ist das Urbild von o ϵ Y.

$$kerf := \{x\epsilon X; Fx = o\} \subseteq X \tag{38}$$

Ker f is ein Unterraum von X, und im F ist ein Unterraum von Y.
Ist U ein Unterraum von X, so ist dessen Bild FU ein Unterraum von Y. Ist W ein Unterraum von im F, so ist dessen Urbild F1W ein Unterraum von X.
F ist genau dann injektiv, wenn ker F = {o} ist.

$$dimX - dimkerF = dimimF \tag{39}$$

5.2.2 Rang

Der Rang [rank] einer linearen Abbildung F ist gleich der Dimension des Bildes von F.

Korollar 5.8 *Es gelten die folgenden drei Äquivalenzen:*

(i) $F : X \to Y$ *injektiv* $\iff$ $\mathsf{Rang}\, F = \mathsf{dim}\, X$

(ii) $F : X \to Y$ *bijektiv, d.h. Isomorphismus* $\iff$ $\mathsf{Rang}\, F = \mathsf{dim}\, X = \mathsf{dim}\, Y$

(iii) $F : X \to X$ *bijektiv, d.h. Automorphismus* $\iff$ $\mathsf{Rang}\, F = \mathsf{dim}\, X$ $\iff$ $\mathsf{ker}\, F = o$

5.2.3 Isomorph

Zwei Vektorra ume X and Y heissen isomorph, falls es einen Isomorphismus F : X → Y gibt.
Zwei Vektorr aume endlicher Dimension sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Korollar 5.10 *Sind $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ lineare Abbildungen (wobei $\mathsf{dim}\, X$, $\mathsf{dim}\, Y < \infty$), so gilt:*

i) $\mathsf{Rang}\, FG \leq \min\{\mathsf{Rang}\, F, \mathsf{Rang}\, G\}$,

ii) G *injektiv* $\Longrightarrow$ $\mathsf{Rang}\, GF = \mathsf{Rang}\, F$,

iii) F *surjektiv* $\Longrightarrow$ $\mathsf{Rang}\, GF = \mathsf{Rang}\, G$.

5.3 Matrizen als lineare Abbildungen

$\Re(A) :+ \text{span}\{a_1, ..., a_n\}$ wo a sind die kollonenvektoren von A. $\Re(A)$ ist der kolonnenraum von A = Im a.
Der losungsraum des homogenen systems Ax=o, heisst Nullraum $\aleph(A) =$ ker A.
Das Gleichungssystem Ax = b ist genau dann l osbar, wenn b im Kolonnenraum von A liegt.

Satz 5.12 *Bezeichnet r den Rang der Matrix $\mathbf{A}$ und $\mathcal{L}_0$ den Lösungsraum von $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, so ist*

$$\boxed{\dim \mathcal{L}_0 \equiv \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \equiv \dim \ker \mathbf{A} = n - r\,.} \tag{5.36}$$

Der rang einer m × n matrix A ist gleich:

1. Anzahl Pivotelemente
2. dim im A
3. Dimensions des kolonnenraums (anzahl linear unabhangiger kolonnen).
4. Dimesnions des Zeilenraums (anzahl linear unabhangiger Zeilen).

$\Re(A)$ is gleich der Menge b fur die Ax=b eine losung x hat.
$A\epsilon\mathbb{E}^{m\times n}$, $B\epsilon\mathbb{E}^{p\times m}$ dann gilt:

1. Rang BA $\leq$ min {rang B, Rang A}
2. rang B = m($\leq p$) $\Rightarrow$ rang BA = rang A
3. rang a = m($\leq n$) $\Rightarrow$ rang BA = rang B

$A\epsilon\mathbb{E}^{m\times m}$, $B\epsilon\mathbb{E}^{m\times m}$ dann gilt:

1. Rang BA $\leq$ min {rang B, Rang A}
2. rang B = m $\Rightarrow$ rang BA = rang A
3. rang a = m $\Rightarrow$ rang BA = rang B

Matrix A $\epsilon\mathbb{E}^{n\times n}$ sind folgende aussagen aquivalent:

1. A ist invertiebar
2. A ist regular
3. Rang A = n
4. kollonenvektoren und Zeilenvektoren sind linear unabhangig
5. im A := $\Re(A) = \mathbb{E}^n$
6. ker A := $\aleph(A) = \{o\}$
7. die lineare Abbildung A : $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ ist ein Automorphismus
8. A ist die Transformationsmatrix einer Koordinatentransformation in $\mathbb{E}^n$

5.4 Affine R aume und die allgemeine Lo sung eines inhomogenen Gleichungssystems

Eine affiner teiraum, ist wenn wir zu einer Unterraum von V U ein teil von V addieren.
Eine affine Abbildung ist wenn wir zu eine Bildmenge von eine lineare Abbildung ein Teil von diese Menge addieren:$H : X \to y_0 + Y$, $x \mapsto y_0 + Fx$
Die losungsmenge ℓ_b des affinen Teilraum Ax=b, ist gleich ℓ_0 den losungsraum des homogenen systems Ax=o plus irgend eine losung des inhomogenen system x_0.

$$\ell_b = \ell_0 + x_0 \tag{40}$$

5.5 Die Abbildungsmatrix bei Koordinaten- transformation

$$
\begin{aligned}
F: &\quad X \to Y\,, \quad x \mapsto y \quad \text{eine lineare Abbildung,}\\
\mathbf{A}: &\quad \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m\,, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\eta} \quad \text{die entsprechende Abbildungsmatrix,}\\
\mathbf{T}: &\quad \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n\,, \quad \boldsymbol{\xi}' \mapsto \boldsymbol{\xi} \quad \text{eine Transformationsmatrix im } \mathbb{E}^n,\\
\mathbf{S}: &\quad \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m\,, \quad \boldsymbol{\eta}' \mapsto \boldsymbol{\eta} \quad \text{eine Transformationsmatrix im } \mathbb{E}^m.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
x \in X \arrow[r, "F", "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] & \\
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] \arrow[r, "\mathbf{A}", "\text{Abb.matrix}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{T}^{-1}"'] & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{S}^{-1}"'] & \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "\mathbf{T}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}", "\text{Abb.matrix}"'] & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\mathbf{S}"'] &
\end{tikzcd}
\tag{5.48}
$$

(Koordinaten- abbildung bzgl. "alten" Basen)

(Koordinaten bzgl. "alten" Basen)

(Koordinaten- transformation)

(Koordinaten bzgl. "neuen" Basen)

Es gilt also

$$
\boxed{y = F\,x\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi}\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{\xi}'\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\eta}'\,, \quad \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\xi}'}\,. \tag{5.49}
$$

Anhlich A und B heissen ahnlich falls es existiert ein T sodass: $A \mapsto B = T^-1AT$

6 Vektorr aume mit Skalarprodukt

6.1 Norm

Ein norm in ein Vektorraum:

$$\| \, . \, \| : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \| \, x \, \| \tag{41}$$

Sie ist positiv definit, homogen und der Dreiecksungleichung gilt.
Ein Vektorraum mit einer Norm heisst normierter Vektorraum

6.2 Vektorr aume mit Skalarprodukt

Skalarproduct in einem reelen oder komplexen Vektorraum:

$$\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{E}, x, y \mapsto \langle x, y \rangle \tag{42}$$

Er ist linear, symmetrisch und positiv definit(wie bei normalen skalarprodukt)
falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ Euklidischer Vektorraum oder orthogonaler Vektorraum, falls$\mathbb{E} = \mathbb{C}$ unit arer Vektorraum.

Schwarzsche ungleichung

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| \, x \, \| \| \, y \, \| \tag{43}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x und y linear abh angig sind.
Winkel ist gleich bei normal, und falls orthogonal dann skalarprodukt = 0.

Pythagores

$$x \perp \Rightarrow \| \, x \pm y \, \|^2 = \| \, x \, \|^2 + \| \, y \, \|^2 \tag{44}$$

Satz 6.5 (Parsevalsche Formel) *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt mit* $\xi_k :\equiv \langle b_k, x \rangle$ *und* $\eta_k :\equiv \langle b_k, y \rangle$ $(k = 1, \ldots, n)$*:*

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} \eta_k = \boldsymbol{\xi}^{\mathsf{H}} \boldsymbol{\eta} = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle \ ,} \tag{6.24}$$

das heisst das Skalarprodukt zweier Vektoren in V *ist gleich dem (Euklidischen) Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren im* $\mathbb{E}^n$*. Insbesondere gilt:*

$$\|x\| = \|\boldsymbol{\xi}\| \,, \tag{6.25}$$

$$\sphericalangle\,(x, y) = \sphericalangle\,(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \,, \tag{6.26}$$

$$x \perp y \iff \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\eta} \,. \tag{6.27}$$

6.3 Gram schmidt algorithmus

Um eine nicht orthogonale und nicht unitare Basis{a1,...,an} ein eine orthonormale basis{b1,...,bn} umwalden.

$$b_1 := \frac{a_1}{\| \ a_1 \ \|} \tag{45}$$

$$b_{k'} := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j, \tag{46}$$

$$b_k := \frac{b_{k'}}{\| \ b_{k'} \ \|} \tag{47}$$

Es gibt verschiedene Type von Vektorraume:

1. topologischer Vektorraum(mit Umgebungsbegriff)
2. Banachraum(mit Vektornorm)
3. Hilbertraum(mit Skalarprodukt und zu- geho riger Vektornorm)

6.4 Orthogonale Komplemente

In einem Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt kann man jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthonormalen Basis erg anzen.

orthogonale komplement In einem endlich-dimensionalen Vektorraums V mit Skalarprodukt heisst der zu einem echten Unterraum U orthogo- nale komplementa re Unterraum das orthogonale Komplement von U und wird mit $U^{\perp}$

$$U^{\perp} := \{x \epsilon V; x \perp U\} \tag{48}$$

Wir nennen dann V eine direkte Summe orthogonaler Komplemente

$$dimU + dimU^{\perp} = dimV \tag{49}$$

Satz 6.9 *Für eine komplexe $m \times n$–Matrix mit Rang r gilt*

$$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left(\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})\right)^{\perp} \subset \mathbb{E}^n}, \qquad \boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) = \left(\mathcal{R}(\mathbf{A})\right)^{\perp} \subset \mathbb{E}^m}. \tag{6.45}$$

Insbesondere ist

$$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) = \mathbb{E}^n}, \qquad \boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbb{E}^m} \tag{6.46}$$

und

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) &= r\,, & \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) &= n - r\,, \\ \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) &= r\,, & \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) &= m - r\,. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Bei reellen Matrizen kann überall $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ durch $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ ersetzt werden.

6.5 Orthogonale und unit are Basiswechsel und Koordinatentransformationen

Wenn beide Basen sind orthonormal dann:

$$I = T^T T \tag{50}$$

Die invers von der basiswechselmatrix $T^-1 = T^T$ vereinfachet viel die Rechnung

Korollar 6.12 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.11 gilt, wenn* $\boldsymbol{\eta}$ *und* $\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{T}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\eta}$ *ein weiteres Paar von alten und neuen Koordinaten bezeichnet, dass*

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle}\,. \tag{6.54}$$

Insbesondere gilt

$$\|\boldsymbol{\xi}'\| = \|\boldsymbol{\xi}\|\,, \tag{6.55}$$

$$\sphericalangle\,(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}') = \sphericalangle\,(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\,, \tag{6.56}$$

$$\boldsymbol{\xi}' \perp \boldsymbol{\eta}' \iff \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\eta}\,. \tag{6.57}$$

6.6 Orthogonale und unit are Abbildungen

Ein Abbildung F heisst unitar falls er zwischen zwei untare Vektorraume ist und:

$$\langle Fx, Fy \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X \tag{51}$$

Satz 6.13 *Für eine orthogonale oder unitäre Abbildung $F : X \to Y$ gilt:*

(i) $\|Fx\|_Y = \|x\|_X \ (\forall x \in X)$, *d.h. F ist* ***längentreu*** *[length preserving] (oder:* ***isometrisch*** *[isometric]);*

(ii) $x \perp y \implies Fx \perp Fy$, *d.h. F ist* ***winkeltreu*** *[angle preserving];*

(iii) $\mathsf{ker}\ F = \{o\}$, *d.h. F ist injektiv.*

Ist $\mathsf{dim}\, X = \mathsf{dim}\, Y < \infty$, *so gilt zusätzlich:*

(iv) *F ist ein Isomorphismus.*

(v) *Ist* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *eine Orthonormalbasis von X, so ist* $\{Fb_1, \ldots, Fb_n\}$ *eine Orthonormalbasis von Y;*

(vi) F^{-1} *ist unitär (bzw. orthogonal);*

(vii) *Die Abbildungsmatrix* $\mathbf{A}$ *bezüglich orthonormierten Basen in X und Y ist unitär (bzw. orthogonal).*

Wenn F und G sind unitar dann ist auch FoG unitar
Eine Matrix ist unitar wenn seine abbildung unitar ist

6.7 Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen

Eine lineare Abbildung heisst beschrankt wenn es ein γ exisitier sodass:

$$\| F(x) \|_Y \leq \gamma \| x \|_X, (\forall x \epsilon X) \tag{52}$$

Die Gesamtheit solcher linearer Abbildungen (Operatoren) F zwischen X und Y heisst $\ell(X, Y)$
Die operator Norm hat die folgenden Eigenschaften:

1. positiv definit
2. homogen
3. dreicksungleichung
4. $\| F \circ G \| \leq \| F \| + \| G \|$
5. $\| Fx \|_Y \leq \| F \| \| x \|_X$, $(\forall F \epsilon \ell(X, Y), \forall x \epsilon X)$

Matrix norm Ist eine Norm die hat alle diese Eigenschaften

Konditionszahl

$$\kappa(A) = \| A \| \| A^{-}1 \| \tag{53}$$

7 Die Methode der kleinsten Quadrate und die QRZerlegung einer Matrix

7.1 Orthogonalprojektionen

Eine lineare Abbildung $P : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ heisst Projektion falls:

$$P^2 = P \tag{54}$$

Eine Projektion heisst Orthogonalprojektion falls:

$$kerP \perp imP \Rightarrow N(P) \perp \Re(P) \tag{55}$$

Sonst ist es eine schife projektion
Ist P ein projektor so ist auch I - P eine Projektor und im(I-P) = ker P, ker(I-P) = im P.
Fur ein Projektor:

1. P is orthogonaler projektor
2. I-P is orthogonaler projektor
3. $P^T = P$

Die Orthogonalprojektion PA den Kolonnenraum im A

$$P_A := A(A^H A)^- 1 A^H \tag{56}$$

Fu r eine Orthogonalprojektion P gilt:

$$\| y - Py \|_2 = min_{z \epsilon im P} \| y - z \|_2 \tag{57}$$

7.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

Es gibt eine lineare Gleichungsystem Ax=y fur den weiss man, dass es kein losung gibt. Wir suchen also ein losung r := y - Ax sodass euklidische norm $\| r \|^2$ minimal wird.
Losung:

$$A^T Ax = A^T y \tag{58}$$

Wo x ist die losung.

7.3 Die QRZerlegung einer Matrix

Wir zerlegen die Matrix $m \times n$ A in QR, wo $m \times n$ Q ist eine orthonormalen Matrix und $n \times n$ rechtdreiecksmatrix R.
Wir finden Q mit der gramschmidt algorithmus und R:

$$r_{kk} :=\| q_{k'} r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle \tag{59}$$

Mit der QR zerlegung konnen wir auch der kleinste quadrat finden mit:

$$Rx = Q^H y \tag{60}$$

7.4 Die QRZerlegung mit Pivotieren

Wenn man die matrix zeilen tauschen will weil es irgendwo ein null gibt:

Algorithmus 7.2 (modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren mit Kolonnen-Pivotieren) *Es sei* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^{m \times n}$. *Man berechne:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{q}_1 := \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \qquad \widetilde{\mathbf{q}}_i := \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_1 \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_i \rangle \quad (i = 2, \dots, n); \\ &\left.\begin{aligned} &\textit{wähle } p \geq k \textit{ mit } \; \|\widetilde{\mathbf{q}}_p\| \neq 0 \quad \textit{und} \\ &\textit{vertausche Kolonnen } p \textit{ und } k\textit{; berechne} \\ &\mathbf{q}_k := \frac{\widetilde{\mathbf{q}}_k}{\|\widetilde{\mathbf{q}}_k\|}, \\ &\widetilde{\mathbf{q}}_i := \widetilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_k \langle \mathbf{q}_k, \widetilde{\mathbf{q}}_i \rangle \quad (i = k+1, \dots, n); \\ &\textit{ist} \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_{k+1}\| = \dots = \|\widetilde{\mathbf{q}}_n\| = 0, \\ &\textit{so gilt} \quad \mathsf{Rang}\, \mathbf{A} = k \quad \textit{und man ist fertig} \end{aligned}\right\} (k = 2, \dots, n). \end{aligned}} \tag{7.40}$$

$$AP = QR \tag{61}$$

8 Determinaten

8.1 Permutationen

Jede Permutation p als Produkt von Transpositionen tk benachbarter Elemente dargestellt werden, es kann mehrere oder wenige transpositonen geben aber sind immer gerade oder ungerade.
Det hat folgende eigenschaften:

1. Hat a eine zeile aus nullen, so ist det A = 0
2. det(yA) = y^n det A
3. Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist det A = 0.
4. Addiert man zu einer Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile von A, so andert sich der Wert von det A nicht.
5. Ist A eine Diagonalmatrix, so ist det A gleich dem Produkt der Diagonalelemente.
6. Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist det A gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

$$detA \neq 0 \iff ranga = n \iff Aregular \tag{62}$$

Durch Eigenschaft 4 kann mann der Determinante mit gauss finden.

$$det(AB) = detA \cdot detB \tag{63}$$

$$detA^-1 = (detA)^-1 \tag{64}$$

$$detA^T = detA \tag{65}$$

8.2 Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen

Zu jedem Element akl einer n nMatrix A werde die (n - 1) × (n - 1)Untermatrix A[k,l] definiert durch Streichen der Zeile k und der Kolonne l von A.

$$(-1)^{k+l} detA_{[k,l]} \tag{66}$$

Wir wahlen eine zeile aus, dann gehen wir durch die Matrize auf diese zeile und addieren wir alle determinate von oben

9 Eigenwerte und Eigenvektoren

9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen und linearen Abbildungen

Die Menge aller Eigenwerte von F heisst Spektrum $\sigma(F)$
Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes y ist gleich der Dimension von E_y

$$dimE_y = dimker(A - yI) \tag{67}$$

Um die Eigenwerte zu finde : det(A - yI) = 0. Wir finden die y. Dann nehmen wir dies y und setzen wir in A - yI und die Vektoren fur die geht (A - yI)x=0 sind die Eigenvektoren.

Singular Eine (quadratische) Matrix A ist genau dann singul ar, wenn sie 0 als Eigenwert hat.

9.2 A hnlichkeitstransformationen; die Eigenwertzerlegung

Ahnlichen Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom; sie haben also die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte (A und B sind ahnlich wenn B = $T^{-}1AT$). Eine zu F geh orende Abbildungsmatrix ist genau dann diagonal, wenn die gew ahlte Basis von V aus lauter Eigenvektoren von F besteht.
Eine Basis aus Eigenvektoren von F heisst Eigenbasis von F
A ist die Matrix V ist die eigenbasis und ∧ ist die diagonal matrix:

$$A = V \wedge V^{-}1 \tag{68}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabh angig.
Fu r jeden Eigenwert gilt, dass die geometrische Viel- fachheit kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.
Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn fu r jeden Eigenwert die geometrische gleich der algebraischen Viel- fachheit ist.

9.3 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Fur symmetrischer Matrizen:

1. alle eigenwerte sind reel
2. Die reellen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal
3. Es gibt eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren u1,...,un von A.
4. Fu r die orthogonale Matrix U gilt :$U^T AU = \wedge := diag(y_1, ..., y_n)$

10 Singular wert Zerlegung

Wir zerlegen A:

$$A = U\Sigma V^T \tag{69}$$

U und V sind orthonoramle unitare matrizen, und Σ ist eine diagonale matrix.

$$A^t A = V\Sigma^T \Sigma V^T \tag{70}$$

$$AV = U\Sigma \tag{71}$$

1. In der erste Gleichung sehen wir das $\Sigma^T\Sigma$ sind die Eigenwerte von $A^T A \Rightarrow \Sigma$ ist gleich die Wurzel von diese Eigenwerte

2. V is gleich die normierte Eigenvektoren von vorher.

3. Dann benutzen wir AV = UΣ um U zu finden.