1 Matrizen

symmetrisch	$A^T = A$, quadratisch
schiefsymmetrisch	$A^T = -A$
hermitesch	$A^H = A$, quadratisch
unitÃďr	$A^H A = I_n$ also $A^{-1} = A^H$
orthogonal	$A^T A = I_n$ also $A^{-1} = A^T$

1.1 RegulÃďr

Sei $A^{m \times n}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten **regulÃďr** mit Rang r:

- A ist quadratisch
- $r = n$
- A ist invertierbar
- Die Zeilen- und Kolonnenvektoren sind linear unabhÃďngig und erzeugen $\mathbb{E}^m$ bzw. $\mathbb{E}^n$
- 0 ist kein Eigenwert
- $\det(A) \neq 0$
- Die lineare Abbildung A ist bijektiv
- fÃijr jedes b in $Ax = b$ gibt es genau eine LÃűsung
- die Kolonnen bilden eine Basis

1.2 Multiplikation

$A \cdot B = C$ ist definiert, falls A gleichviele Kolonnen hat wie B Zeilen. C hat dann gleichviele Zeilen wie A und gleichviele Kolonnen wie B.

2 LR-Zerlegung

$$Ax = b,\ PA = LR \Rightarrow Lc = Pb,\ Rx = c$$

2.1 Pivotierung

3 VektorrÃďume

3.1 Vektor

LÃďnge, 2-Norm	$\|\|x\|\| :\equiv \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Winkel	$\varphi = \arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{\|\|x\|\|\|\|y\|\|}$

3.2 VektorrÃďume

Unterraum	von span S mit $S = a_1, ..., a_2$ aufgespannt bzw. die Menge aller Linearkombinationen von S
Erzeugendensystem	die Menge S
Basis	linear unabhÃďngiges Erzeugendensystem
Dimension	die Anzahl Basisvektoren

4 Lineare Abbilungen

Sei $F : X \mapsto Y$ mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$

Matrixdarstellung	A, so dass $F(x) = Ax$
Kern	$\{x \in X; Fx = 0\}$, alle Vektoren in X, die auf 0 zeigen
Bild	alle Vektoren in Y, die von X mit F erreicht werden
Rang	Rang $F :\equiv \dim \operatorname{im} F$
	Dimension des Kolonnenraums
	Dimension des Zeilenraums
Kolonnenraum	$\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A)$, der von den Kolonnen von F aufgespannte Unterraum
Nullraum	ker $A = \mathcal{N}(A)$

Aus der **Dimensionsformel** $\dim X - \dim\ \ker F = \text{Rang } F$ folgt, falls F:

injektiv	keine Kollisionen
	Kolonnenvektoren linear unabhÃďngig
	Rang $F = \dim X$
	ker $F = \{0\}$
surjektiv	es wird jedes Element in Y erreicht
	Rang $F = \dim Y$
bijektiv, d.h. Isomorphismus	Rang $F = \dim X = \dim Y$
bijektiv, d.h. Automorphismus	Rang $F = \dim\ X$
	ker $F = 0$

4.1 Bestimmung der Basis fÃijr Kern/Bild

1. Gauss anwenden
2. Basis des **Bildes**
   (a) Alle linear unabhÃďngigen Kolonnenvektoren (alle mit Pivot)
3. Basis des **Kerns**
   (a) Setze $Fx = 0$
   (b) Berechne von freien Variablen abhÃďngige LÃűsung
   (c) Klammere freie Variablen aus

BEISPIEL TODO

4.2 Bestimmung der Matrixdarstellung A von F bezÃijglich B_X und B_Y

Tipp: Die Kolonnen von A die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren. BEISPIEL TODO

4.3 Transformation

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
x \in X \arrow[r, "F", "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] & \\
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] \arrow[r, "\mathbf{A}", "\text{Abb.matrix}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{T}^{-1}"'] & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{S}^{-1}"'] & \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "\mathbf{T}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}", "\text{Abb.matrix}"'] & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\mathbf{S}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.48}$$

(Koordinaten-abbildung bzgl. "alten" Basen)

(Koordinaten bzgl. "alten" Basen)

(Koordinaten-transformation)

(Koordinaten bzgl. "neuen" Basen)

Es gilt also

$$\boxed{y = F\,x\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi}\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{\xi}'\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\eta}'\,, \quad \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\xi}'}\,. \tag{5.49}$$

Diesen Formeln oder dem Diagramm entnimmt man, dass für die Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$, die die Abbildung F bezüglich den "neuen" Basen in $\mathbb{E}^m$ und $\mathbb{E}^n$ beschreibt, gilt

$$\mathbf{B}\,\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{S}^{-1}\,\boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}\,\boldsymbol{\xi}'$$

Da $\boldsymbol{\xi}'$ beliebig ist, ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}\,. \tag{5.50}$$

Aus Satz 5.16 folgt im übrigen wegen $\mathsf{Rang}\ \mathbf{S}^{-1} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{T} = n$, dass $\mathsf{Rang}\ \mathbf{B} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A}$ ist, und in ähnlicher Weise folgt aus Korollar 5.10, dass $\mathsf{Rang}\ F = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A}$ ist:

$$\boxed{\mathsf{Rang}\ F = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{B}}\,. \tag{5.51}$$

Im Falle einer linearen Abbildung von X *in sich*, ist natürlich $Y = X$, $\kappa_Y = \kappa_X$, $\mathbf{S} = \mathbf{T}$. Aus (5.50) wird damit

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}\,. \tag{5.52}$$