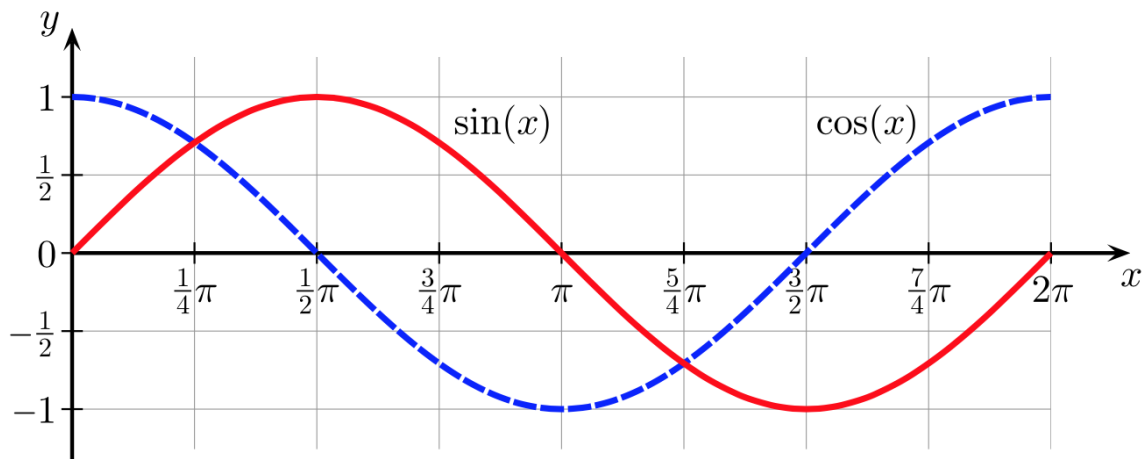


1 Allgemein

1.1 Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

1.2 Potenzgesetze

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$$

1.3 Logarithmus

$$\log(0) = \text{undef.}$$

$$\log(1) = 0$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$
kompakt:	abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen:	z.B. $[0, 1]$

2.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

2.2 Identitäten

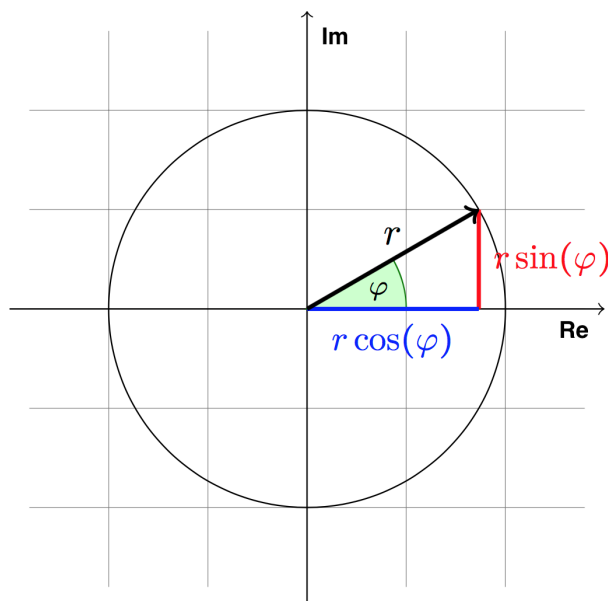
$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{je nach Quadrant})$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \\ |zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2\end{aligned}$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

Für $x \rightarrow +\infty$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für $x \rightarrow 0$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

4.2 Fundamentallimes

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0\end{aligned}$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert " 0^0 ", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

4.5 Substitution

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

4.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	" $0 \cdot \infty$ "	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	" $\infty - \infty$ "	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

4.7 Wichtige Grenzwerte

$$\begin{array}{ll}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 & \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}
\end{array}$$

5 Folgen

5.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n| > K$

5.2 Beweis

Entweder **Grenzwert berechnen**, oder:

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. Schätze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen \sum^∞

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Absolute Konvergenz	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Sandwich-Theorem	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ berechnen
 - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n$ ab einem gewissen n_0 . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ konvergent} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergent} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
 - falls Grenzwert $= 0$:
 - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
 - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= \infty$:
 - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
 - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
 - (a) $a_n \geq 0$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 - (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsomme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Konvergenzverhalten am Rand: Es muss noch überprüft werden, ob die Reihe für genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$n^2 = \sum_{k=1}^n 2k - 1$$

$$\text{harmonische: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

6.3.2 Potenzreihenentwicklung

$$\text{Grundsatz: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

7 Stetigkeit

7.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' auf Ω beschränkt, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

7.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

7.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f stetig und kompakt, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

7.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

7.5 Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

gegeben: $f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f_n(x) = (1 - x^2)x^n$

punktweisen Limes berechnen: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$

\Rightarrow konvergiert gegen 0

Supremum berechnen: $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$

Maximum finden: $\frac{d}{dx} f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^2) - 2xx^n = x^{n-1}(n - (n+2)x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum

Limes berechnen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_2) = 0$

Folgerung: f_n konvergiert auf $[0, 1]$ glm. gegen f

8 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

8.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

8.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

8.4 Hauptsatz von Calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

9 Integration

9.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

9.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ mit $x = \varphi(t)$

9.3 Tipps

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\ \int \frac{1}{x - \alpha} \, dx &= \log(x - \alpha) \\ \int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} \, dx &= \arctan(x) \\ \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \sinh(x) + C\end{aligned}$$

9.4 Uneigentliche Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) \, dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^k f(x) \, dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_k^R f(x) \, dx\end{aligned}$$

Gibt es eine Unstetigkeitsstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$

10 Differentialgleichungen

10.1 Grundbegriffe

- Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung
linear: alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2 , $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen: Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

10.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

10.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$
 $\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$

10.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y'(x+1) + y = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}$$

Trennung $\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1}$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \sqrt{5}$ nicht

integrieren $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x+1}$
 $\Rightarrow \ln |y| = -\ln |x+1| + C$

Homogene Lösung $y_h(x) = \frac{C}{x+1}$, mit $C = \pm e^C \in \mathbb{R} \setminus 0$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

einsetzen $(\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2})(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3$
 $C'(x) = x^3$

$$C(x) = \frac{x^4}{4}$$

partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$

allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

Anfangsbedingung benutzen $y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5}$

Lösung $y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

10.2.3 Euler-Ansatz

$$\begin{array}{ll}
 & y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz} & y(x) = e^{\lambda x} \\
 \text{einsetzen} & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
 \text{charakt. Polynom} & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
 \text{Nullstellen} & 4, -2 \\
 \text{allgemeine Lösung} & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\
 \text{Anfangsbedingung gebrauchen} & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\
 & \Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2 \\
 \text{Lösung} & y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}
 \end{array}$$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen $1, x, \dots$, x^{m-1} .

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

10.2.4 Direkter Ansatz

$$\text{Grundsatz: } y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x .

$$\begin{array}{ll}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
\text{homogene Lösung} & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} & y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \\
& \Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x) \\
\text{Einsetzen} & \left(-a + b + \frac{a}{4}\right) \cos(x) + \left(-b - a + \frac{1}{4}b\right) \sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} & -\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\text{partikuläre Lösung} & y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x) \\
\text{Lösung} & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)
\end{array}$$

11 Vektorfelder

11.1 Differenzial (für $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$)

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11.2 Gradient (für $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$)

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von f .

11.3 Hessematrix (für $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$)

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

11.4 Rotation (für $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ oder $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$)

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{in } \mathbb{R}^2: \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Bemerkung: Falls $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist \vec{v} konservativ (Potenzialfeld).

11.5 Divergenz (für $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$)

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots$$

11.6 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Das Potenzial Φ eines Potenzialfeldes ist gleich:

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

Für ein Potenzialfeld gilt $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$ und es erfüllt die **Integrabilitätsbedingungen**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

Berechnung eines Potenzials

gegeben: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}$

Nach y integrieren: $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$

Nach x ableiten: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{konst.}$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{konst.}$

12 Wegintegral

12.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

γ ableiten $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

in Formel einsetzen $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt$
 $= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt$

Lösung $2\pi - 0 + \pi = 3\pi$

12.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld \vec{v} ist **konservativ** (= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

Grundsatz: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$
 $\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

Lösung: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

12.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn) immer der vektorfeld $(-y,0)$ oder $(0,x)$.

Grundsatz: $\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen: $\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

Normalbereich: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

in Formel einsetzen: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$

$$\int \int_{\Omega} \text{rot} v dx dy = \int_{\gamma_1} v(\gamma_1(t)) * \gamma_1' dt + \int_{\gamma_2} v(\gamma_2(t)) * \gamma_2' dt + \dots \quad (1)$$

12.4 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in \mathbb{R}^3 , der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz: $\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} do$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \text{ Rand der oberen Hälfte der Einheitssphäre mit Radius 1}$$

$$\text{Rotation berechnen: } \text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Einheitssphäre parametrisieren: } \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalvektor berechnen: } \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) \cos(\phi) \\ \sin^2(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Grundsatz anwenden: } \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{\pi}{2}$$

13 Flächenintegral

13.1 Koordinatentransformationen

13.1.1 Polarkoordinaten (\mathbb{R}^2)

$$\text{Variablen: } \begin{matrix} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \end{matrix} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = r \, dr d\phi$$

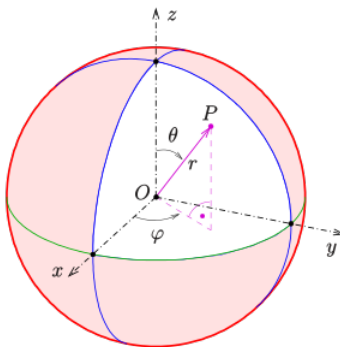
13.1.2 Elliptische Koordinaten (\mathbb{R}^2)

$$\text{Variablen: } \begin{matrix} x = ra \cos(\phi) \\ y = rb \sin(\phi) \end{matrix} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = abr \, dr d\phi$$

13.1.3 Zylinderkoordinaten (\mathbb{R}^3)

$$\text{Variablen: } \begin{matrix} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{matrix} \quad \text{Volumenelement: } dxdydz = r \, dr d\phi dz$$

13.1.4 Kugelkoordinaten (\mathbb{R}^3)



$$\text{Variablen: } \begin{matrix} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{matrix}$$

$$\text{Volumenelement: } dxdydz = r^2 \, dr \sin(\theta) \, d\theta d\varphi$$

13.2 Normalbereich

Grundsatz: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy d\mu, \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen: } \int_{\Omega} xy d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x, y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r, \phi) = r$.

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz: } \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \text{ falls } \text{rot}(\vec{v}) = 1$$

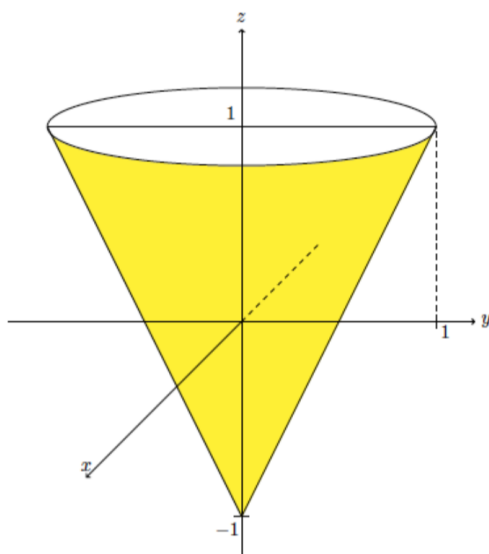
Flächeninhalt der Ellipse E , berandet durch $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen: $\mu(E) = \pi ab$

14 Oberflächenintegral



$$\text{gegeben: } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 + 3z^2 - 3 \end{pmatrix}$$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels
(von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Kegel
mit **Satz von Gauss** berechnen
Fluss durch Deckel
mit **Standardmethode** berechnen

14.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do$

Normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorfeld anpassen: $z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

Grundsatz anwenden: $\iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dx dy = \iint_D x^2 dx dy$

Koordinatentransformation: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2(\phi) dr d\phi = \frac{\pi}{4}$

14.2 Satz von Gauss

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\mu$

wobei \vec{n} die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

Divergenz berechnen: $\operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$

Grundsatz anwenden: $\int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr \, dr = 2\pi$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

14.3 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in \mathbb{R}^3 , der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz: $\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \, do$

15 Kurvendiskussion

Extremalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt

Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

15.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
 - (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit \Rightarrow lokales Minimum
 - (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit \Rightarrow lokales Maximum
 - (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit \Rightarrow Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grösser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

15.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L : $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedingung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
falls g differenzierbar:
 - (a) nicht-reguläre Punkte finden mit $dg = 0$
 - (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfenfalls g nicht differenzierbar:
 - (a) nicht-reguläre Punkte der Teilstücke des Randes
 - (b) Eckpunkte des Gebietes überprüfen

andere Möglichkeit falls Nebenbedingungen sind einfach:

1. Kandidaten im Inneren suchen
2. die Funktion $\frac{d}{dy}f(\text{eckpunkt1}, y) = 0$ lösen und sehen ob Punkt in Bereich ist.
3. das Gleiche machen für eckpunkt2 in y und dann für beide Eckpunkte für x .
4. weitere Kandidaten sind die Eckpunkte.