

# 8 Elektromagnetismus

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$   
 $e = 1.60216 \cdot 10^{-19} C$

## 8.1 Coulombsche Gesetz

Die **Coulombsche (elektrostatische) Kraft**, die eine Punktladung  $Q$  (Quelle) auf eine Ladung  $q$  (Testladung) ausübt, ist gleich:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad [F] = N$$

wobei  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante und  $r$  der Ortsvektor der Ladung  $q$  ist. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Ladung  $Q$ .

## 8.2 Elektrisches Feld

Das **elektrische Feld** ist nach Gauss definiert als:

$$E(r) \equiv \frac{F(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{V(r)}{r} \quad [E(r)] = \frac{V}{m}$$

Handelt es sich beim Kondensator um ein **Zylinder**, so gilt:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad [\lambda] = \frac{C}{m}$$

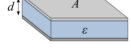
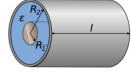

wobei  $\lambda$  die Ladungsdichte pro Meter ist. Das zweite Teilchen der Ladung  $q$  und Masse  $m$  spürt die Kraft des Feldes:

$$F(r) = qE(r)$$

Für eine positive Ladung  $q$  zeigt die Kraft in die Richtung des Feldes.

Es erfährt eine **Beschleunigung**:

$$a = \frac{q}{m} E$$

Bezeichnung	Kapazität	Elektrisches Feld	Schematische Darstellung
Plattenkondensator	$C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$	$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$	
Zylinderkondensator	$C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{l}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$	$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r}$	
Kugelkondensator	$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r}$	
Kugel	$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \cdot R_1$		

Es bedeuten:  
 $A$  die Elektrodenfläche,  $d$  deren Abstand,  $l$  deren Länge,  $R_1$  sowie  $R_2$  deren **Radien**,  $\epsilon_0$  die **elektrische Feldkonstante** des Vakuums,  $\epsilon_r$  die **relative Permittivität** des Dielektrikums und  $Q$  die **elektrische Ladung**.

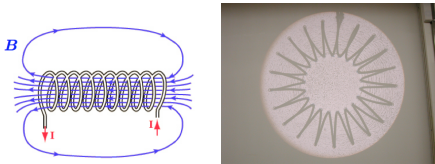
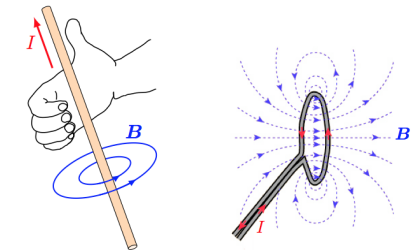
### 8.2.1 Elektrische Feldlinien

- 1. Beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen oder im Unendlichen
- 2. An bestimmten Punkt ist die **Liniendichte** proportional zur Stärke des Feldes an diesem Punkt
- 3. Um einzelne Punktladungen sind die Linien kugelsymmetrisch verteilt
- 4. Anzahl Feldlinien um eine Punktladung ist zur Grösse der Ladung proportional

## 8.3 Magnetisches Feld

**Richtung:** Elektrische Feldlinien beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen. Magnetische Feldlinien bilden geschlossene Schleifen Richtung Südpol.

**Kraft:** Das elektrische Feld übt seine Kraft längs der Feldlinien aus. Die Kraft des magnetischen Feldes wirkt nur auf bewegte Ladungen und zwar senkrecht zum B-Feld und zur Bewegungsrichtung.



Magnetisches Feld durch einen Draht, Ring, Solenoid, Torus

## 8.4 Energie im elektrischen Feld

Es wird **Arbeit** geleistet, wenn der Abstand zwischen zwei ungleichnamigen (ziehen sich an) Ladungen vergrößert wird bzw. erhält man Arbeit, wenn die Ladungen gleichnamig sind. Diese Arbeit wird als **elektrische potentielle Energie** gespeichert.

$$E_{pot}^e(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

### 8.4.1 Elektrisches Potential

Das **elektrische Potential**  $V$  ist ein Skalarfeld und entspricht der potentiellen Energie für eine Einheitsladung:

$$V(r) = \frac{E_{pot}^e(r)}{q} \quad [V(r)] = V$$

### 8.4.2 Elektrische Spannung

Die **elektrische Spannung** ist gleich dem Potentialunterschied zwischen zwei Punkten:

$$U_{1,2} = V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr \quad [U] = V$$

## 8.5 Elektrische Ladung in elektrischen und magnetischen Feldern

### 8.5.1 Lorentzkraft

Die **allgemeine elektromagnetische Kraft** ist gleich

$$F = F_E + F_B = q(E + v \times B)$$

wobei  $E$  das elektrische Feld und  $B$  das magnetische Feld ist. Sie haben die Einheiten:

$$[E] = \frac{N}{C}, \quad [B] = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = T$$

## Magnetische Kraft:

1. Proportional zur Geschwindigkeit. Wirkt nur auf bewegte Teilchen.
2. Wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des Feldes
3.  $|F_B| = |q||v||B|\sin(\alpha)$ , wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $v$  und  $B$  ist

## 8.6 Elektrische Strom

### 8.6.1 Stromstärke

Die **elektrische Stromstärke** ist definiert als:

$$I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -enAv_D \quad [I] = A = \frac{C}{s}$$

wobei  $v_D$  der Driftgeschwindigkeit und  $n$  der Dichte der beweglichen Elektronen entspricht.

Die positive Stromrichtung folgt der Flussrichtung der positiven Ladungen.

## Driftgeschwindigkeit:

Gegeben:

**Kupferdraht:** ein Elektron pro Atom,  $8.93 \frac{g}{cm^3}$ ,  
 $63.5 \frac{g}{mol}$   
**Querschnittsfläche:**  $1 mm^2$   
**Stromstärke:**  $1 A$

$$n = \frac{8.93 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{23}}{mol}}{63.5 \frac{g}{mol}} = 8.5 \cdot 10^{22} \frac{\text{Elektronen}}{cm^3}$$

$$|v_D| = \frac{I}{enA} = 0.07 \frac{cm}{s}$$

Die Driftgeschwindigkeit lässt sich auch mit der Beschleunigung  $a$  und der mittleren Zeit zwischen zwei Elektron-Ion Kollisionen  $\tau$  abschätzen:

$$v_D = a\tau = \frac{-eE}{m}\tau = -\mu E$$

### 8.6.2 Ohmsches Gesetz

$$U_{AB} = RI = \left(\frac{L}{\sigma A}\right)I \quad [\sigma] = \frac{A}{Vm} = (\Omega m)^{-1}, \quad [R] = \Omega$$

wobei  $\sigma$  die **Leitfähigkeit** und  $L$  die Länge des Leiters ist.

## 8.7 Kraft auf elektrischen Strom

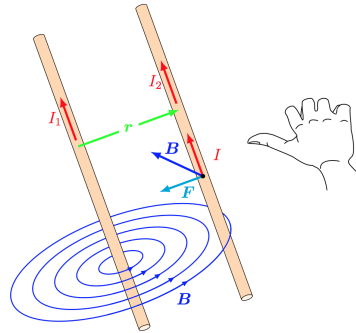
Die Gesamtkraft auf einen Leiter der Querschnittsfläche  $A$  und Länge  $L$  ist:

$$F = ALn(-e)v_D \times B = L(-enAv_D) \times B = LI \times B$$

Für ein differentielles Element des Stroms ist sie gleich:

$$dF = L dI \times B = I dL \times B$$

### 8.7.1 Kraft zwischen zwei parallelen Leitern



$$F \approx \frac{LI_1I_2}{r} \quad \text{vektoriell:} \quad F = LI \times B$$

Fließen die zwei Ströme in die gleiche Richtung, so ziehen sich die Leiter an.

## 8.8 Elektrische Kapazität

In einem **Kondensator** wird Energie in einem elektrischen Feld gespeichert.

Die **Kapazität des Kondensators**  $C$  ist gleich:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [C] = F = \frac{C}{V}$$

wobei  $Q$  die Ladung des Kondensators und  $V$  die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist.

Die **gespeicherte Energie** (bzw. geleistete Arbeit zum Laden) ist gleich:

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

## 8.9 Ladungs- und Stromdichte

### 8.9.1 Ladungsdichte

Die **Raumladungsdichte** ist ein Skalarfeld und ist gleich:

$$\rho(r) = \frac{dq}{dV}$$

### 8.9.2 Stromdichte

Die **Stromdichte** bezeichnet Stromstärke pro Fläche und ist gleich:

$$j = \frac{I}{A}$$

**Vektoriell** ist sie gleich:

$$I = \iint_A j(r) \cdot dA$$

### 8.9.3 Kontinuitätsgleichung

Sie besagt, dass wenn sich die elektrische Ladung in einem Punkt  $r$  ändert, muss in diesem Punkt ein elektrischer Strom fließen.

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial t} + \nabla \cdot j(r) = 0$$

## 8.10 Elektrischer Fluss

Der elektrische Fluss durch eine Fläche  $A$  wird definiert als der Fluss des elektrischen Feldes durch die Fläche:

$$\Phi_E = \iint_A E \cdot dA$$

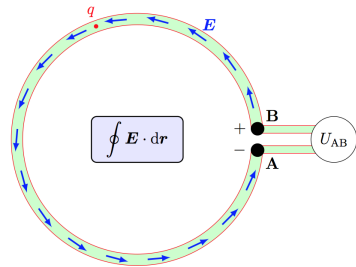
## 8.11 Magnetischer Fluss

$$\Phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Die Divergenz des magnetischen Feldes muss in jedem Punkt des Raumes gleich null sein:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

## 8.12 Induktionsgesetz



Das Linienintegral des elektrischen Feldes über die geschlossene Schleife ist gleich der Induktionsspannung  $U_{ind}$ :

$$U_{ind} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$