

Aufgabe 1: Wärmekapazität eines idealen Gases

- a) Die Wärmekapazität C_p eines idealen Gases bei konstantem Druck ist:
- Kleiner als diejenige bei konstantem Volumen C_V , weil ein Teil der zugeführten Wärme für die Volumenänderung aufgewendet wird.
 - Grösser als diejenige bei konstantem Volumen C_V , weil während eines Prozesses unter konstantem Druck die Wärmemenge komplett für die Temperaturerhöhung gebraucht wird.
 - Grösser als diejenige bei konstantem Volumen C_V , weil die Gasmoleküle durch die Volumenänderung einen zusätzlichen Freiheitsgrad gewinnen.
 - Keine von den obigen Aussagen ist richtig.
- b) Ein Stück Silber ($M_{\text{Ag}}=350 \text{ g}$, $m_{\text{Ag}}=108 \text{ g/mol}$) und ein Stück Kupfer ($M_{\text{Cu}}=206 \text{ g}$, $m_{\text{Cu}}=63.5 \text{ g/mol}$) haben die gleiche Anfangstemperatur. Beide werden in isolierten Behältern mit 1 MJ Energie geheizt. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
- Die Endtemperaturen der Körper sind gleich.
 - Die Endtemperatur des Silberstücks ist höher.
 - Die Endtemperatur des Kupferstücks ist höher.
 - Um die Frage zu beantworten, muss die Anfangstemperatur bekannt sein.

In einem Gefäss des Volumens $V = 101$ befindet sich ein einatomiges, ideales Gas (z.B. ein Edelgas). Der Druck beträgt $p = 10 \text{ bar}$ und die Temperatur ist $T = 20^\circ\text{C}$.

Für ein einatomiges Gas gilt $\gamma = 1 + nR/C_V = \frac{5}{3}$, wobei C_V die Wärmekapazität des Gases bei konstantem Volumen ist und die Gaskonstante $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$.

- c) Berechne die Wärmekapazität C des Gases bei konstantem Volumen V .
- d) Wie gross ist der Druck p_1 des Gases nach der Zuführung von Wärme $\Delta Q = 1 \text{ kJ}$?

Aufgabe 1: Wärmekapazität eines idealen Gases

- a) iv) Die Wärmekapazität bei konstantem Druck C_p ist grösser als diejenige bei konstantem Volumen C_V , weil bei einem Prozess unter konstantem Druck die zugeführte Energie in Form von Wärme nicht nur für die Temperaturerhöhung gebraucht wird, sondern auch für die Volumenänderung. Dadurch leistet das System Arbeit, die Temperaturänderung ΔT pro Energie ΔQ fällt also kleiner aus. Da $\Delta T = \frac{\Delta Q}{C}$ muss $C_p > C_V$.
- b) iv) Wenn der Temperaturverlauf ausserhalb von Phasenübergängen verläuft stimmt i), weil die beiden Stücke aus gleich vielen Molen bestehen (Skript 7.8):

$$n_{\text{Ag}} = \frac{M_{\text{Ag}}}{m_{\text{Ag}}} = \frac{350\text{g}}{108\text{g/mol}} = 3.24\text{mol}$$
$$n_{\text{Cu}} = \frac{M_{\text{Cu}}}{m_{\text{Cu}}} = \frac{206\text{g}}{63.5\text{g/mol}} = 3.24\text{mol}$$

und $\Delta T = \frac{\Delta Q}{cn}$ (Skript 7.34) wobei die molare Wärmekapazität eines Festkörpers c nach der "Dulong-Petitsch Regel" gegeben ist durch: (Skript 7.41)

$$c \sim 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Durchläuft der Temperaturverlauf einen Phasenübergang (Schmelzpunkt von Silber ist 960°C , derjenige von Kupfer 1085°C), wird ein Teil der zugeführten Wärmeenergie für diesen Phasenübergang benutzt. Die Endtemperaturen sind verschieden.

- c) Aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases folgt:

$$pV = nRT$$
$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{10^6 \cancel{\text{N}} \cdot 10^{-2} \cancel{\text{m}^3} \text{mol} \cdot \text{K}}{\cancel{\text{N}} \cdot 8.314 \cancel{\text{J}} \cdot 293.15 \cancel{\text{K}}} = \underline{4.1 \text{ mol}}$$

wobei $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Weiter gilt:

$$\gamma - 1 = \frac{nR}{C} = \frac{2}{3} \rightarrow C = \frac{3}{2}nR$$
$$C = \underline{51.2 \text{ J/K}}$$

- d) Aus $\Delta Q = C_V \Delta T$ bei konstantem Volumen V folgt

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{10^3 \text{ J}}{51.2 \text{ J/K}} = 19.5 \text{ K}.$$

Nach der Wärmezufuhr beträgt die Temperatur T_1 also

$$T_1 = (293 + 19.5) \text{ K} = 312.5 \text{ K}$$
$$p_1 = nR \frac{T_1}{V} = 34.1 \frac{\text{J}}{\cancel{\text{K}}} \cdot \frac{312.5 \cancel{\text{K}}}{10^{-2} \text{ m}^3} = 1.07 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \underline{10.7 \text{ bar}}$$

Aufgabe 2: Adiabatische Expansion

- a) Ein System besteht aus einer bestimmten Menge eines idealen Gases in einem Zylinder mit beweglichem Kolben. Bei einer adiabatischen Expansion nimmt die Temperatur des Systems ab. Warum?
- i) Vom System wird Wärme abgegeben, wenn sich der Kolben bewegt.
 - ii) Der Druck des Gases bleibt konstant.
 - iii) Das System nimmt Wärme auf, wenn es Arbeit verrichtet.
 - iv) Die vom System verrichtete Arbeit geht vollständig auf Kosten der inneren Energie.
- b) In welchem Prozess mit gleicher Volumenzunahme wird das Gas mehr Arbeit leisten?
- i) Adiabatische Expansion.
 - ii) Isotherme Expansion.
 - iii) Da Anfangszustand und Volumenzunahme gleich sind, werden beide gleich sein.
 - iv) In beiden Fällen leistet das Gas keine Arbeit, da es sich um eine Expansion handelt.

Drei Mol eines einatomigen idealen Gases (Isentropenexponent $\gamma = 1 + \frac{nR}{C} = \frac{5}{3}$) seien in einem thermisch isolierten Behälter eingeschlossen (d.h., das Gas hat keinen Wärmeaustausch mit der Umgebung, $dQ = 0$); die Temperatur ist $T_1 = 20^\circ\text{C}$ und der Druck $p_1 = 5$ bar. Das Volumen des Behälters kann durch einen beweglichen Kolben verändert werden. Die Gaskonstante ist $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

- c) Was ist die Temperatur und der Druck des Gases, nach einer adiabatischen Expansion auf das Volumen $V_2 = 2V_1$?
- d) Welche mechanische Arbeit leistet das Gas während dieser adiabatischen Expansion?

Aufgabe 2: Adiabatische Expansion

- a) iv) In einer adiabatischen Expansion findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt ($dQ = 0$), deswegen folgt aus dem ersten Hauptsatz ($dU = dQ + dW$), dass die vom System verrichtete Arbeit (dW) vollständig in innere Energie übergeht. dW beschreibt die am Gas verrichtete Arbeit, bei einer adiabatischen Expansion verrichtet das Gas Arbeit, die Temperatur sinkt also.
- b) ii) Bei der adiabatischen Expansion nimmt der Druck p stärker ab, als bei der isothermen Expansion mit gleicher Volumenzunahme, weil die Temperatur T abnimmt und $pV = nRT$ gilt. Das heisst, die vom Gas geleistete Arbeit ist immer grösser in einer isothermen Expansion.

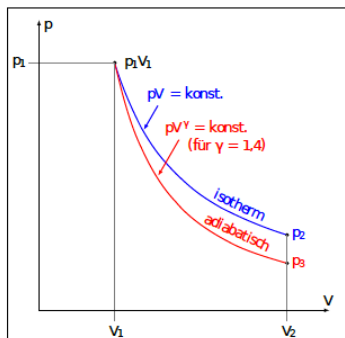


Figure 7.31 aus dem Skript: Vergleich der isothermen und adiabatischen Expansion des idealen Gases. Die geleistete Arbeit entspricht der Fläche unter der jeweiligen Kurve.

- c) Aus der Adiabaten Gleichung

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}$$

folgt

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}$$

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 \quad V_2 = 2V_1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} T_1 \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} T_1$$

$$= 0.63 \cdot 293.15 \text{ K} = 184.67 \text{ K} = \underline{-88.5^\circ\text{C}}$$

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$pV = nRT$$

folgt

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = nR = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} p_1 = 0.5 \cdot 0.63 \cdot p_1 = 1.57 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \underline{1.57 \text{ bar}}$$

- d) Aus der Adiabaten Gleichung

$$p \cdot V^\gamma = \text{konstant} = K \quad \rightarrow \quad p = \frac{K}{V^\gamma}$$

$$W = \int_1^2 dW \stackrel{\text{Skript 7.76}}{=} - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = -K \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{K}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$= -\frac{1}{1-\gamma} \left(\underbrace{p_2 V_2^\gamma V_2^{1-\gamma}}_K - \underbrace{p_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma}}_K \right) = -\frac{1}{1-\gamma} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase $pV = nRT$ und $n = 3 \text{ mol}$ folgt

$$W = -\frac{nR}{1-\gamma} (T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) \quad \text{wobei} \quad \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{9R}{2} (T_2 - T_1) = \underline{-4059 \text{ J}}$$

Bemerkung: Per Definition ist die Arbeit negativ, wenn das Gas gegen aussen Arbeit leistet, d.h., wenn die innere Energie des Gases abnimmt.

Alternative Lösung:

Da die innere Energie U einer gegebenen Menge eines idealen Gases nur von der Temperatur T abhängt, kann die Änderung ΔU für eine gegebene Temperaturdifferenz ΔT berechnet werden als:

$$\Delta Q = 0 \quad \Delta U = \Delta Q + \Delta W = c \cdot \Delta T$$

$$\gamma = 1 + \frac{nR}{c} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{9R}{2}$$

$$\rightarrow \Delta W = \frac{9R}{2} \Delta T = \underline{\underline{\frac{9R}{2} (T_2 - T_1)}}$$

Für ein gegebenes Temperaturintervall ΔT ist ΔU (eines idealen Gases) eindeutig definiert und unabhängig davon, ob diese Änderung durch die Zufuhr einer Wärmemenge ΔQ oder durch eine mechanische Arbeit W verursacht wurde.

Aufgabe 3: Wärmestrahlung eines Planetens

Der "super-Earth" Exoplanet *55 Cancri e* (*Nature* **532**, 207-209 (14 April 2016)¹) ohne Atmosphäre weist eine gebundene Rotation zu seinem Stern auf (vgl. Mond zur Erde). Das bedeutet, dass immer die gleiche Seite der Sonne zugewandt ist. Es gibt also eine heiße, dem Stern zugewandte Seite ($T_S = 2700\text{ K}$) und eine kalte Rückseite ($T_R = 1380\text{ K}$). Betrachte den Planeten als schwarzen Körper.

- a) Wie viel Energie mehr strahlt der Planet von der warmen Sonnenseite als von der Rückseite aus ins All?
- i) gleich viel
 - ii) 1.96 mal soviel
 - iii) 14.7 mal soviel
 - iv) 1320 mal soviel
- b) Um wie viel sind die Wellenlängen bei denen die Spektralverteilungsfunktion der beiden Planetenseiten ein Maximum haben λ_{\max} gegeneinander verschoben?
- i) $\lambda_R = \frac{1}{14.7} \cdot \lambda_S$
 - ii) $\lambda_R = 1.18 \cdot \lambda_S$
 - iii) $\lambda_R = 1.96 \cdot \lambda_S$
 - iv) $\lambda_R = 14.7 \cdot \lambda_S$

Ein Planet kreise in einer Entfernung von $d = 2.3 \cdot 10^9\text{ m}$ um einen Stern der eine Oberflächentemperatur von $T = 3000\text{ K}$ aufweist und einen Radius von $R = 6.5 \cdot 10^8\text{ m}$ hat. Die Boltzmann-Konstante ist $k = 1.281 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$, die Plancksche Konstant $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$ und die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8}\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$. Auch der Stern kann als schwarzer Körper betrachtet werden.

- c) Zeichne das Spektrum dieses Sterns auf. Welche Farbe hat er? (Benutze ein Computerprogramm, z.B. www.wolframalpha.com)
- d) Was ist die Strahlungsleistung die auf 1 m^2 Planetenoberfläche trifft? Vergleiche mit der Solar-konstanten der Erde von $E_0 = 1367\text{ W/m}^2$.

Aufgabe 3: Wärmestrahlung eines Planetens

- a) iii) $S_{\text{emittiert}} \propto T^4$ das heisst,

$$\frac{S_S}{S_R} = \frac{T_S^4}{T_R^4} = \left(\frac{T_S}{T_R}\right)^4 = \left(\frac{2700\text{ K}}{1380\text{ K}}\right)^4 = 1.96^4 \approx \underline{14.7}$$

- b) iii) Aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{konstant} = 2898\mu\text{mK}$$

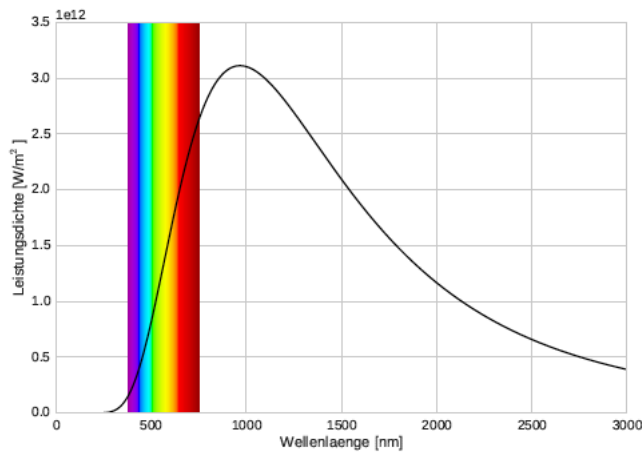
folgt

$$\lambda_R = \frac{T_S}{T_R} \lambda_S = \frac{2700\text{ K}}{1380\text{ K}} \lambda_S = \underline{1.96 \cdot \lambda_N}$$

c) Die Spektralverteilung ist gegeben durch

$$S(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}.$$

Das optische Spektrum spannt sich von 280 nm von Violett über Blau, Grün, Gelb, Orange und Rot bis 780 nm.



Das Spektrum des Sterns hat ein Maximum im nicht sichtbaren Infraroten $\lambda_{max} = \frac{2898 \mu\text{mK}}{300 \text{ K}} = 966 \text{ nm}$. Die Intensität im roten Bereich ist höher als im Blauen Teil. Deshalb wird der Stern Rot erscheinen.

d) Das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschreibt die aufsummierte Ausstrahlung eines "schwarzen Körpers" pro Oberfläche

$$S(T = 3000\text{K}) = \sigma \cdot T^4 \approx 4.59 \text{ MW/m}^2$$

Die Oberfläche des Sterns ist gegeben durch $A_S = 4\pi R^2 \approx 5.3 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$. Somit ist die gesamte abgestrahlte Leistung

$$P_{\text{total}} = A_S \cdot S(T) = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \approx 2.4 \cdot 10^{25} \text{ W}$$

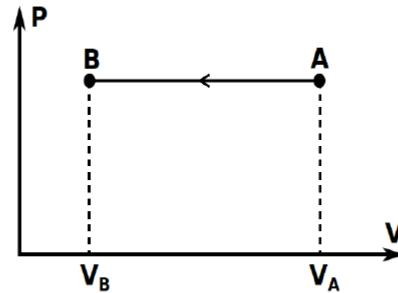
Diese Energie verteilt sich auf eine Kugeloberfläche von $A = 4\pi d^2$, was zu folgender Solarkonstante führt

$$E_P = \frac{P_{\text{total}}}{A} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma T^4}{4\pi \cdot d^2} \approx \frac{(6.5 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2}{(2.3 \cdot 10^9)^2 \text{ m}^2} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} \cdot 3000^4 \text{ K}^4 \approx \underline{367 \text{ kW/m}^2}$$

Die Solarkonstante dieses Sterns ist also viel grösser (270 mal) als jene der Erde. Deshalb ist der Stern auch so viel wärmer.

Aufgabe 4: Isotherme Expansion

- a) Welche der folgenden Prozesse sind isotherm?
- i) Einem Gas wird eine Wärme Q zugeführt, es dehnt sich aus und verrichtet Volumenarbeit.
 - ii) Ein Gas wird in einem geschlossenen Behälter erwärmt, der Behälter dehnt sich nicht aus.
 - iii) Ein Luftpaket steigt in die Atmosphäre auf, es findet kein Austausch von Wärme mit der Umgebung statt.
 - iv) An einem Gas wird die äussere Arbeit W verrichtet, das Volumen wird kleiner und die dabei entstehende Wärme wird abgegeben.
- b) Ein Kolben ist gefüllt mit einem idealen Gas. Das Gas wird vom thermodynamischen Zustand A zu dem Zustand B gebracht, wie im pV-Diagramm gezeigt. Wie gross ist die vom Gas verrichtete Arbeit?



- i) Die Arbeit ist gleich der Fläche unter der Kurve.
- ii) Es wird keine Arbeit verrichtet.
- iii) Die Arbeit entspricht der Fläche unter der Kurve aber ihr Wert ist negativ.
- iv) Die vom Gas verrichtete Arbeit wird vollständig in innere Energie umgewandelt.

Einem Mol eines einatomigen idealen Gases muss bei der isothermen Expansion vom Volumen V_1 zum Volumen $V_2 = 2V_1$ aus einem Wärmereservoir die Wärme $Q = 2000 \text{ J}$ zugeführt werden. Gaskonstante $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

- c) Bei welcher Temperatur T findet diese isotherme Expansion statt?
- d) Um wieviel hätte sich die Temperatur des Gases erhöht, wenn die Wärme Q bei konstantem Volumen zugeführt worden wäre?

Aufgabe 4: Isotherme Expansion

a) i) und iv) sind isotherme Prozesse

i) isotherme Expansion

ii) isochor: konstantes Volumen.

iii) adiabatisch: Kein Austausch von Wärme mit der Umgebung, alle drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur ändern sich.

iv) isotherme Kompression

b) iii) Die am Gas geleistete Arbeit ist

$$W = \int_A^B dW = \int_{V_A}^{V_B} -pdV$$

also die Fläche unter der Kurve im pV-Diagramm. Da es sich um eine Kompression handelt, verrichtet der Kolben am Gas Arbeit. Das Vorzeichen ist also negativ.

c) Die innere Energie U einer gegebenen Menge eines idealen Gases hängt nur von der Temperatur T ab. Bei einer isothermen Expansion ($T = \text{konst}$) gilt also

$$dU = 0 \quad (\text{Isotherm})$$

$$dU = dQ + dW \quad (1. \text{ Hauptsatz})$$

$$\rightarrow dQ = -dW = p \cdot dV$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_1^2 dQ = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \quad \text{mit} \quad pV = nRT \\ &= nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{Q}{nR \ln 2} = \frac{2000 \text{ J}}{1 \text{ mol} \cdot R \cdot \ln 2} \approx \underline{347 \text{ K} \simeq 74^\circ\text{C}}$$

d) Wärmekapazität eines einatomigen, idealen Gases (für konstantes Volumen):

$$\gamma - 1 = \frac{nR}{C} = \frac{2}{3} \quad (\text{vgl. Aufgabe 1c})$$

$$C = \frac{3}{2}nR = 12.5 \text{ J/K} \quad \text{mit } n = 1 \text{ mol}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C} = \underline{160.4 \text{ K}}$$

Das Gas hätte sich bei konstantem Volumen um 160.4°C erwärmt.

Aufgabe 3: Temperatur und Druck von Gasen

- a) In den Bergen Pasta zu kochen dauert länger als auf Meereshöhe. Stimmt das?
- i) Nein, diese Aussage stimmt nicht. Das Wasser kocht immer bei 100°C unabhängig auf welcher Höhe man sich befindet und es dauert immer gleich lang.
 - ii) Durch die Kälte in der Höhe ist die Pasta eher gefroren und muss deshalb länger gekocht werden.
 - iii) Ja, das stimmt weil das Wasser kocht bei einer niedrigeren Temperatur als 100°C , da der äussere Luftdruck kleiner ist. Dadurch braucht es länger, bis die Pasta bei dieser niedrigeren Temperatur bereit ist.
 - iv) Ich weiss es nicht. Ich verkoche die Pasta immer.
- b) Bei welcher Temperatur haben die folgenden Skalen (Fahrenheit und Celsius, Fahrenheit und Kelvin, Celsius und Kelvin) denselben Wert?
- i) -40 , 574 , Nie
 - ii) $+40$, -85 , 0
 - iii) Nie, Nie, Nie
 - iv) -40 , 0 , 585
- c) Zur Abschätzung der mittleren Molekülabstände nehmen wir an, dass ein Molekül das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge d einnimmt. Die Molmassen betragen $m_{\text{He}}^{\text{mol}} = 4 \text{ g}$, $m_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{mol}} = 18 \text{ g}$, und die Avogadro-Konstante beträgt $6.0 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol. Berechnen Sie die mittleren Molekülabstände für ^4He -Gas bei STD (Standard Temperatur und Druck; 0°C , 1 atm), die Dichte bei dieser Bedingung beträgt $\rho_{\text{He}}(\text{STD}) = 0.179 \text{ g}/\ell$.
- d) Wir betrachten ein Argongas, dessen Atome sich alle mit der Geschwindigkeit $v_{\text{Ar}} = 425 \text{ m/s}$ senkrecht auf eine Wand der Fläche A zu bewegen (in positiver x -Richtung) und dort elastisch zurück gestreut werden. Die Teilchendichte n_{Ar} der Argonatome, die sich auf die Wand zu bewegen, betrage $n_{\text{Ar}} = 2.69 \cdot 10^{19} / \text{cm}^3$. Welchen Druck erzeugen die Argonatome auf die Fläche A (die Argonatome haben nach dem elastischen Stoss denselben Impulsbetrag, bewegen sich aber in negativer x -Richtung)? Die auf die Fläche ausgeübte Kraft ist gleich dem während eines Zeitintervalls Δt übertragenen Impuls dividiert durch Δt . Die Molmasse von Argon betraegt $m_{\text{Ar}}^{\text{mol}} = 40 \text{ g}$.
- Verwenden Sie für die Atommasse die Schätzung $m_{\text{Ar}} \approx A_{\text{Ar}} \cdot m_N$, mit der Nukleonmasse $m_N \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
-

Aufgabe 3: Temperatur und Druck von Gasen

- a) iii) In den Bergen ist der äussere Luftdruck kleiner und deswegen kocht das Wasser bei einer niedrigeren Temperatur als 100°C .
- b) i) Gegeben T_C , T_F und T_K respektiv die Celsius, Fahrenheit und Kelvin Temperaturen, wir haben die folgenden Relationen:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$$

$$T_C = T_K - 273.15$$

Wenn $T_F = T_C$,

$$T_F = 1.8 T_F + 32$$

und

$$T_F = T_C = -40$$

Wir können T_C mit $T_K - 273.15$ ersetzen und erhalten

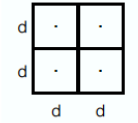
$$T_F = 1.8 (T_K - 273.15) + 32$$

Wenn $T_F = T_K$ dann

$$T_F = T_K = 574$$

Da $T_C = T_K - 273.15$ gibt es keinen Wert mit $T_C = T_K$.

- c) Für die Abschätzung nehmen wir an, dass der mittlere Molekülabstand gleich der Kantenlänge d eines Würfels ist:



STP: $\rho_{He} = 0.179 \text{ g/l} = 0.179 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$.

Masse eines ^4He -Atoms: $m_{He} = \frac{4\text{g}}{6.0 \cdot 10^{23}} = 6.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

$$\rightarrow \text{Teilchendichte: } n_{He} = \frac{\rho_{He}}{m_{He}} = 2.68 \cdot 10^{19} / \text{cm}^3$$

\rightarrow Ein He-Atom nimmt (im Mittel) ein Volumen V_{He} ein:

$$V_{He} = \frac{1}{n_{He}} = 3.73 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^3 \doteq d_{He}^3$$

$$d_{He} = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$$

- d) Impulsübertrag eines Argonatoms auf die Fläche A beim elastischen Stoß:

$$\Delta p_{\text{Atom}} = p_{\text{vor}} - p_{\text{nach}} = m_{Ar} v_{Ar} - m_{Ar} (-v_{Ar}) = 2m_{Ar} v_{Ar}$$

Die Anzahl N der Argonatome, die im Zeitintervall Δt auf die Fläche A treffen und reflektiert werden, ist gleich der Anzahl Atome im Volumen $V = A \cdot v_{Ar} \cdot \Delta t$, die sich auf die Fläche zubewegen:

$$N = n_T \cdot V = n_T \cdot A \cdot v_{Ar} \cdot \Delta t$$

Im Zeitintervall Δt auf die Fläche A übertragener Impuls:

$$\Delta p = N \cdot \Delta p_{\text{Atom}} = n_T \cdot A \cdot v_{Ar} \cdot \Delta t \cdot 2m_{Ar} v_{Ar}$$

Die durch den Impulsübertrag bewirkte mittlere (senkrechte) Kraft F auf die Fläche A:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = n_T \cdot A \cdot 2m_{Ar} v_{Ar}^2$$

Durch die Stöße erzeugter Druck auf die Fläche A:

$$p = \frac{F}{A} = n_T 2m_{Ar} v_{Ar}^2 \text{ Hier bezeichnet } p \text{ den Druck und nicht den Impuls!}$$

Mit folgenden Beziehungen:

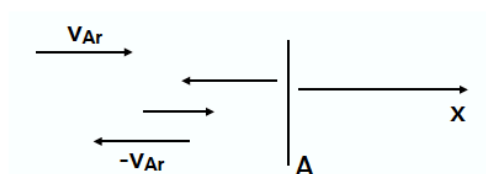
$$m_{Ar} = \frac{m_{ar}^{\text{mol}}}{N_A} = 6.67 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 6.67 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$n_{Ar} = 2.69 \cdot 10^{19} / \text{cm}^3 = 2.69 \cdot 10^{25} / \text{m}^3$$

$$v_{Ar} = 425 \text{ m/s,}$$

folgt:

$$p = 6.48 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 6.48 \text{ bar}$$



Aufgabe 4: Ideales Gas

- a) Zwei gleich grosse Zimmer sind durch eine offene Türe miteinander verbunden. Ein Zimmer ist geheizt und hat eine um 5°C höhere Temperatur als das andere. In welchem Zimmer befindet sich die grössere Anzahl der Luftmoleküle? Nehmen Sie an, dass die Luft ein ideales Gas sei.
- In dem geheizten Zimmer.
 - In demjenigen ohne Heizung.
 - Es gibt in beiden gleich viel Luft nur die Geschwindigkeit der Luftmoleküle ist anders.
 - Es gibt zuwenige Informationen um das zu beantworten.
- b) Wie ändert sich der Druck eines idealen Gases mit fester Teilchenzahl, wenn 1) die Temperatur des Gases bei konstantem Volumen abnimmt 2) das Volumen des Gases bei konstanter Temperatur abnimmt.
- In beiden Fällen nimmt er ab.
 - In Fall 1) nimmt er zu, weil er in Fall 2) abnimmt.
 - In Fall 2) nimmt er zu, weil er in Fall 1) abnimmt.
 - In beiden Fällen nimmt er zu.

Gegeben ist 1 m^3 eines idealen Gases bei einer Temperatur von 20°C und einem Druck von 1 bar.

- c) Berechnen Sie die Anzahl Moleküle (Atome) des Gases.
- d) Berechnen Sie das Gewicht des Gases, falls es sich um Luft handelt. Luft setzt sich hauptsächlich aus folgenden relativen Anteilen der Anzahl Moleküle zusammen: 78% N_2 , 21% O_2 und 1% Ar. Die Molmassen sind $m_{\text{N}_2}^{\text{mol}} = 28\text{ g}$, $m_{\text{O}_2}^{\text{mol}} = 32\text{ g}$ und $m_{\text{Ar}}^{\text{mol}} = 40\text{ g}$. Die Avogadro-Zahl beträgt $N_A = 6.0 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol und die Boltzmann-Konstante ist $k = 1.381 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$.
-

Aufgabe 4: Ideales Gas

- a) ii) Die Zimmer sind gleich gross also haben sie dasselbe Volumen V und sind durch eine offene Türe miteinander verbunden, d.h. der Druck p ist derselbe. Das Produkt pV ist konstant und daher muss nRT denselben Wert haben, d.h. in dem kälteren Zimmer muss die Anzahl Teilchen n grösser sein.
- b) iii) Mit $pV = nRT$, wo nR konstant ist, es folgt $p \propto T$ ($V = \text{konst.}$) und $p \propto 1/V$ ($T = \text{konst.}$).
- c) Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\begin{aligned} pV &= nRT = NkT \quad ; \quad N = nN_A : \text{Anzahl Moleküle} \\ V &= 1\text{ m}^3 \\ p &= 1\text{ bar} = 10^5\text{ N/m}^2 \\ T &= (273.15 + 20)\text{ K} \end{aligned}$$

$$\underline{N} = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5\text{ N/m}^2 \cdot 1\text{ m}^3}{1.381 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}} = \underline{2.47 \cdot 10^{25}}$$

- d) Die Atom- und Molekülmassen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} m_{\text{N}_2} &= \frac{m_{\text{N}_2}^{\text{mol}}}{N_A} = 4.67 \cdot 10^{-23}\text{ g} \\ m_{\text{O}_2} &= \frac{m_{\text{O}_2}^{\text{mol}}}{N_A} = 5.33 \cdot 10^{-23}\text{ g} \\ m_{\text{Ar}} &= \frac{m_{\text{Ar}}^{\text{mol}}}{N_A} = 6.67 \cdot 10^{-23}\text{ g} \\ \underline{m_{\text{Luft}}} &= N(0.78 \cdot m_{\text{N}_2} + 0.21 \cdot m_{\text{O}_2} + 0.01 \cdot m_{\text{Ar}}) \\ &= \underline{1183\text{ g} \simeq 1.2\text{ kg}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Ein Wetterballon hätte — prall gefüllt — das Volumen $V_{\max} = 50 \text{ m}^3$. Zum Zeitpunkt 1 wird der Ballon am Erdboden beim Druck $p_1 = 1.0 \text{ bar}$ und der Temperatur $T_1 = 7^\circ \text{ C}$ mit Wasserstoffgas gefüllt. Das H_2 -Gas nimmt das Volumen $V_1 = \frac{1}{6}V_{\max}$ ein. *Hinweis:* Nehmen Sie an, das Wasserstoffgas habe insgesamt fünf Freiheitsgrade und verhalte sich als ideales Gas.

Der Ballon wird losgelassen und steigt anschliessend so rasch auf, dass durch die Ballonhülle praktisch keine Wärme ausgetauscht wird. Zum Zeitpunkt 2 hat er die Operationshöhe erreicht. Dort ist der Innen- und Aussendruck auf $p_2 = 0.2 \text{ bar}$ abgefallen.

Durch Sonneneinstrahlung wird der Ballon anschliessend aufgeheizt. Das Füllgas dehnt sich aus bis der Ballon zum Zeitpunkt 3 prall gefüllt ist. Der Druck bleibt dabei konstant $p_3 = p_2$.

- a) (1 Punkte) Welche Stoffmenge n enthält der Ballon nach der Befüllung?
- b) (2 Punkte) Skizzieren Sie die beiden Zustandsänderungen im p-V-Diagramm.
- c) (2 Punkte) Was sind Volumen V_2 und Temperatur T_2 des Gases zum Zeitpunkt 2?
- d) (1 Punkte) Was ist die Temperatur T_3 des Gases zum Zeitpunkt 3?
- e) (2 Punkte) Welche Wärme ΔQ_{23} hat das Gas bei der Erwärmung aufgenommen?

Aufgabe 2:

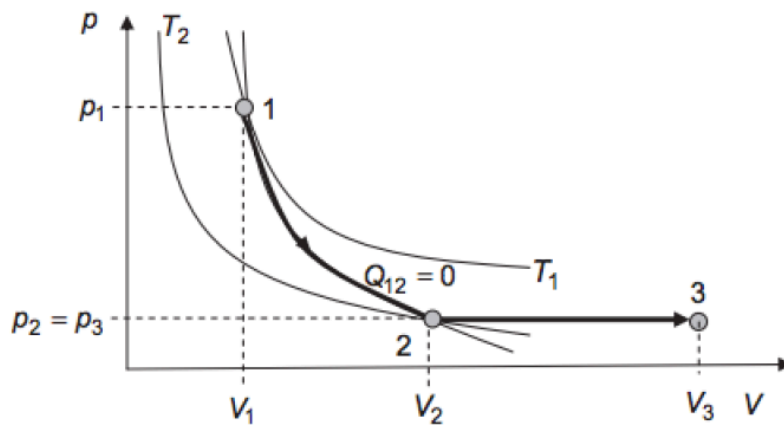


Abbildung 1: pV Diagramm

a)

Mithilfe der idealen Gasgleichung $pV = nRT$ folgt

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Eingesetzt ergibt sich für

$$n = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot \frac{1}{6} 50 \text{ m}^3}{8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 280 \text{ K}} = 358 \text{ mol}$$

b)

Es handelt sich um eine adiabatische und eine isobare Zustandsänderung. Qualitativ skizziert in Abb. 1.

c)

Mit der Adiabatangleichung $pV^\kappa = \text{const}$ und $\kappa = 7/5$ fuer das zweiatomige Gas folgt

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{7/5} = \frac{1}{6} \cdot 50 \text{ m}^3 \cdot 5^{7/5} = 26.3 \text{ m}^3$$

Damit ist die Temperatur $T_2 = 177 \text{ K}$.

d)

Bei einer isobaren Zustandsaenderung ist p konstant und deshalb $\frac{V}{T}$ konstant. Es folgt $T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \left(\frac{50}{26.3} \right) \text{ m}^3 \cdot 177 \text{ K} = 337 \text{ K}$.

e)

Die zugeführte Wärme ΔQ ist gegeben als $c_p n \Delta T$ mit $c_p = 7/2 R$ und berechnet sich zu

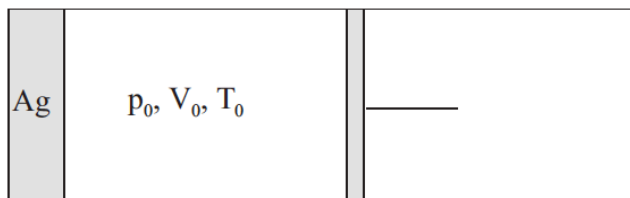
$$\frac{7}{2} \cdot 358 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot (337 - 177) \text{ K} = 1.66 \text{ MJ}$$

5. Ideales Gas

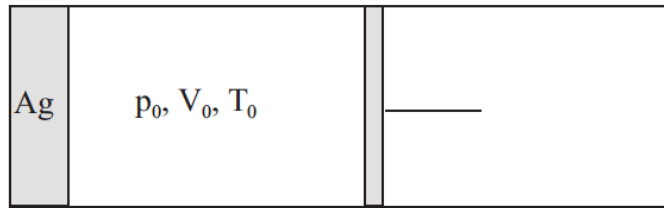
In einem thermisch nach aussen isolierten Gefäss mit dem Volumen $V_0 = 100 \text{ l}$ befinden sich 5 mol eines einatomigen, idealen Gases ($\gamma = 5/3$) bei einem Druck $p_0 = 2 \text{ bar}$. An der linken Gefässwand ist ein Stück Silber montiert mit der Masse $m_{Ag} = 1 \text{ kg}$ (siehe Figur, das vom Silber eingenommene Volumen ist **nicht** in V_0 enthalten); das Silber ist mit dem Gas im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T_0 . Das Gasvolumen ist auf der rechten Seite mit einem reibungsfrei beweglichen Kolben dicht abgeschlossen.

Die Boltzmannkonstante ist $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, die Gaskonstante ist $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$, die Avogadrozahl ist $6.0 \cdot 10^{23} \text{ /mol}$ und die Molmasse von Silber beträgt $m_{Ag} = 108 \text{ g/mol}$.

- Was ist die Anfangstemperatur T_0 des Gases, und wie gross ist seine Wärmekapazität C (bei konstantem Volumen)? (1 Punkt)
- Durch den beweglichen Kolben werde das Gas auf das Volumen $V_1 = 0.75V_0$ komprimiert. Die Kompression passiert so schnell, dass der Wärmeaustausch zwischen dem Gas und dem Silber während der Kompression vernachlässigbar ist, d.h., die Kompression kann als adiabatisch betrachtet werden. Wie gross ist der Druck p_1 und die Temperatur T_1 unmittelbar nach der Kompression? (1 Punkt)
- Nach einer Weile stellt sich ein neues thermisches Gleichgewicht zwischen dem Silber und dem Gas (mit Volumen V_1) bei der Temperatur T_m ein. Wie gross ist T_m ? (1 Punkt)
Hinweis: Verwenden Sie das Gesetz von Dulong-Petit für die Wärmekapazität von Silber.
- Welche Arbeit W wurde bei der adiabatischen Kompression von aussen am Gas geleistet? (1 Punkt)



Lösung: 5. Ideales Gas



a) Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$\begin{aligned} p_0 V_0 &= n R T_0 \\ T_0 &= \frac{p_0 V_0}{n R} \\ &= \frac{2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m}^3}{5 \text{ mol } R \text{ m}^2} = 481 \text{ K} \end{aligned}$$

Wärmekapazität eines einatomigen idealen Gases bei konstantem Volumen:

$$C_{Gas} = \frac{3}{2} N k = \frac{3}{2} n N_A k = \frac{3}{2} n R = 62.4 \text{ J/K}$$

b) Adiabatische Zustandsänderung:

$$p V^\gamma = \textit{konst.}$$

oder

$$T V^{\gamma-1} = \textit{konst.}$$

d.h.

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

mit $V_1 = 0.75 V_0$

$$T_1 = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\gamma-1} T_0 = \left(\frac{1}{0.75} \right)^{2/3} T_0 = 583 \text{ K}$$

und

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

$$p_1 = \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^\gamma p_0 = \left(\frac{1}{0.75} \right)^{5/3} p_0 = 3.23 \text{ bar}$$

c) Mischtemperatur T_m

Energiesatz:

$$C_{Ag}(T_m - T_0) = C_{Gas}(T_1 - T_m)$$

Dulong-Petit:

Molare Wärmekapazität von Festkörpern:

$$c \simeq 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

mol Silber:

$$n_{Ag} = \frac{1000 \text{ g}}{10 \text{ g}} \text{ mol} = 9.26 \text{ mol}$$

Wärmekapazität von 1 kg Silber:

$$C_{Ag} = 9.26 \cdot 25 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 231.5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$(C_{Ag} + C_{Gas})T_m = C_{Gas}T_1 + C_{Ag}T_0$$

$$T_m = \frac{C_{Gas}T_1 + C_{Ag}T_0}{C_{Gas} + C_{Ag}} = 502.7 \text{ K}$$

d) Bei der adiabatischen Kompression geleistete Arbeit:

$$W_0 = - \int_{V_0}^{V_1} p \, dV = \int_{V_1}^{V_0} p \, dV$$

mit: $p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma$

$$= p_0 V_0^\gamma \int_{V_1}^{V_0} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{1 - \gamma} V^{1-\gamma} \Big|_{V_1}^{V_0}$$

$$= \frac{p_0 V_0^\gamma}{1 - \gamma} \left[\frac{1}{V_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right]$$

$$= \frac{p_0 V_0^\gamma}{1 - \gamma} \frac{1}{V_1^{1-\gamma}} \left[\frac{1}{0.75^{\gamma-1}} - 1 \right]$$

mit $\gamma - 1 = 2/3$

$$W = \frac{3}{2} p_0 V_0 \left[\frac{1}{0.75^{\gamma-1}} - 1 \right] = 0.32 p_0 V_0 = 6.34 \text{ kJ}$$

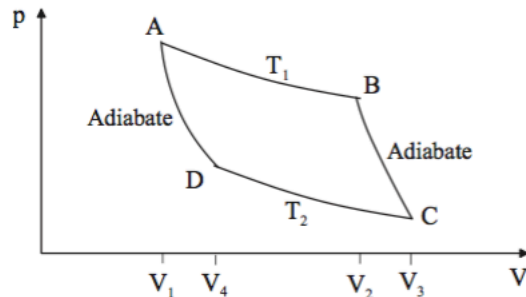
Aufgabe 1: Carnotsche Wärmekraftmaschine

- a) Um die Effizienz einer Carnot-Maschine zu erhöhen, sollte man
- die Temperatur des warmen Reservoirs senken.
 - die Temperatur des kalten Reservoirs erhöhen.
 - die Temperatur des warmen Reservoirs erhöhen.
 - das Verhältnis des maximalen zum minimalen Volumen des Reservoirs vergrößern.
- b) An einem feuchten Tag kondensiert Wasser auf einer kalten Oberfläche. Was geschieht während der Kondensation mit der Entropie des Wassers?
- Sie steigt.
 - Sie bleibt konstant.
 - Sie sinkt.
 - Es hängt von der Temperatur der Oberfläche ab.

Eine Carnotsche Wärmekraftmaschine arbeite zwischen zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturen T_1 und T_2 ($T_1 > T_2$) und benutze ein ideales Gas als Arbeitsmedium. Ein Zyklus der Maschine besteht aus vier Schritten ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, siehe Skizze):

- Schritt: Das Arbeitsgas ist in Kontakt mit dem Reservoir der Temperatur T_1 und expandiert isotherm vom Volumen V_1 zum Volumen V_2 .
- Schritt: Das Arbeitsgas ist thermisch isoliert und expandiert adiabatisch zum Volumen V_3 .
- Schritt: Das Gas wird im Kontakt mit dem Reservoir der Temperatur T_2 isotherm vom Volumen V_3 auf das Volumen V_4 komprimiert.
- Schritt: Das Arbeitsgas ist thermisch isoliert und wird adiabatisch auf das ursprüngliche Volumen V_1 komprimiert.

- c) Wieviel Wärme wird dem Reservoir im 1. Schritt entnommen? Was ist die totale mechanische Arbeit, die die Maschine während eines ganzen Zyklus leistet?
- d) Berechnen Sie den Wirkungsgrad ε dieser Maschine für $T_1 = 400^\circ\text{C}$ und $T_2 = 20^\circ\text{C}$.



Aufgabe 1: Carnotsche Wärmekraftmaschine

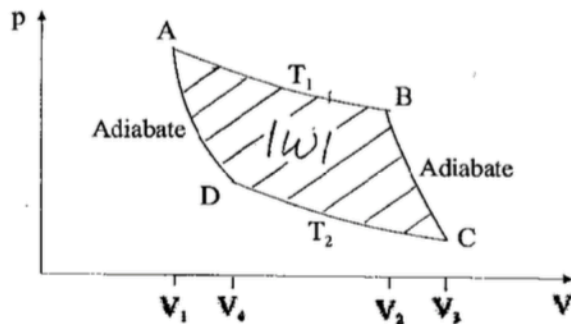
- a) iii) Der Wirkungsgrad (Effizienz) ist definiert als, $\eta = 1 - T_K/T_W$, wobei T_K die Temperatur des kalten und T_W diejenige des warmen Reservoirs ist. Um die Effizienz zu erhöhen muss man den Faktor T_K/T_W minimieren, also entweder T_W erhöhen und/oder T_K verkleinern.
- b) iii) Wenn Wasser kondensiert, sinkt die Entropie, da der flüssige Zustand geordneter ist als der Gaszustand. Die Entropie der Umgebung hingegen nimmt zu.
- c) Isotherme Expansion bei der Temperatur T : ($dU = 0$)

$$|Q| = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \quad \text{mit} \\ W_1 &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad ; \quad W_2 = - \int_{V_2}^{V_3} p dV \\ W_3 &= - \int_{V_3}^{V_4} p dV = \int_{V_4}^{V_3} p dV \quad (V_4 < V_3) \\ W_4 &= - \int_{V_4}^{V_1} p dV = \int_{V_1}^{V_4} p dV \quad (V_1 < V_4) \end{aligned}$$

D.h., $|W| = -W$ ist gleich der Fläche des Vierecks $ABCD$, das durch die 2 Isothermen und die zwei Adiabaten begrenzt ist:



Da in einer adiabatischen Expansion (Kompression) geleistete Arbeit nur von der Temperaturdifferenz abhängt, kompensieren sich die bei den Schritten 2 und 4 geleisteten Arbeiten:

$$W_2 + W_4 = - \int_{V_2}^{V_3} p dV + \int_{V_1}^{V_4} p dV = - \frac{nR}{\gamma - 1} [T_1 - T_2 - (T_1 - T_2)] = 0$$

$$\begin{aligned}\rightarrow |W| &= -W_1 - W_3 = \int_{V_1}^{V_2} p dV - \int_{V_4}^{V_3} p dV \\ &= nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - nRT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Adiabatangleichung $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ (adiabatische Expansion $3 \rightarrow 4$) und $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ (adiabatische Kompression $4 \rightarrow 1$) erhält man $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ und damit

$$|W| = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) (T_1 - T_2)$$

d) Wirkungsgrad der Carnot-Maschine:

$$\epsilon = \frac{|W|}{|Q|}$$

$$|W| = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) (T_1 - T_2) \quad \text{Aufg. c)}$$

$$|Q| = nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{293.15 \text{ K}}{673.15 \text{ K}} = \underline{0.56}$$