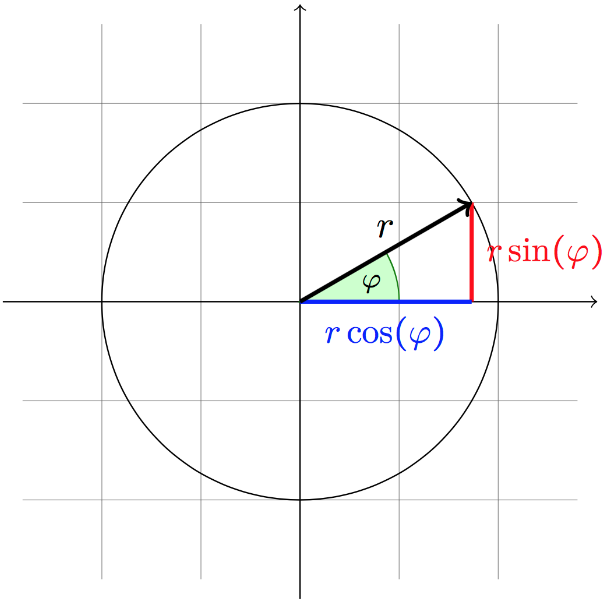
1 Mengen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2 Komplexe Zahlen

2.1 Polarform



$$
\begin{aligned}
z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi} \\
r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\varphi &= \arctan(\frac{y}{x}) = \\
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi) \\
zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)} \\
\sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q} \\
e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} &= i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1
\end{aligned}
$$

2.2 Identitäten

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= x - iy \\
z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \\
(a,b)\cdot(c,d) &= (ac - bd, ad + bc) \\
i &= \sqrt{-1} \\
i^2 &= -1 \\
|z|^2 &= z\overline{z} \\
|zw|^2 &= (zw)\cdot\overline{(zw)} = |z|^2|w|^2
\end{aligned}
$$

3 Trigonometrie

$$
\sin(0) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\pi) = 0,\ \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}
$$
$$
\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}
$$

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\
\sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Tipps

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1+\frac{1}{\odot})^\odot = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1+\odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha}+\beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha}+\beta)\frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0" oder "1^∞" für $x \to 0$

Vorgehen

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$.
Falls die Grenzwerte $0 \neq \infty$ verschieden sind, kann man umformen: $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

Vorgehen

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)}$$

5 Folgen und Reihen

6 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

6.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x+a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7 Integration

7.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

7.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

7.3 Tipps

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\log|\cos(x)|$$
$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

8 Differentialgleichungen

8.1 Grundbegriffe

Ordnung:	höchste vorkommende Ableitung
linear:	alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen:	Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion:	Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

8.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

8.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x\tan y = 0, \;\; y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\quad \frac{dy}{dx} = -x\tan y$

konstante Lösungen $\quad y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\quad \frac{dy}{\tan y} = -xdx$

integrieren $\quad \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int x dx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Anfangsbedingung gebrauchen $\quad \sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $\quad y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

8.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $\quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

	$y' - y = 1,\ y(0) = 0$
homogener Ansatz	$y' = y$
konstante Lösungen	$y(x) \equiv 0$
Trennung	$\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log\lvert y\rvert = x$
homogene Lösung	$y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R}$
partikulärer Ansatz	$y_p(x) = A(x)e^x$
einsetzen	$A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$
partikuläre Lösung	$y_p(x) = -1$
Lösung	$y(x) = Ae^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$
	$\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

8.2.3 Euler-Ansatz

	$y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$
Euler-Ansatz	$y(x) = e^{\lambda x}$
einsetzen	$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$
charakt. Polynom	$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$
Nullstellen	$4, -2$
allgemeine Lösung	$y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$
Anfangsbedingung gebrauchen	$y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$
	$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$
Lösung	$y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

8.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für $y_p(x)$**	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

$$
\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}
$$

9 Wegintegral

9.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\ dt$$

$$
\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \\
\text{parametrisieren} \quad & \text{hier bereits gegeben} \\
\gamma \text{ ableiten} \quad & \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix} \\
\text{in Formel einsetzen} \quad & \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\
& = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt \\
\textbf{Lösung} \quad & 2\pi - 0 + \pi = 3\pi
\end{aligned}
$$

9.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**. Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 \; dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \overset{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$

$$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

Lösung: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

9.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz: $\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}) \; dxdy$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen: $rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

Normalbereich: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

in Formel einsetzen: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 \; dxdy = -\mu(E) = -\pi$

10 Flächenintegral

10.1 Normalbereich

Grundsatz: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_\Omega F \; d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \; F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy \; d\mu, \; \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $\int_\Omega xy \; d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx \; x \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big) dx = \frac{1}{12}$$

10.2 Satz von Green

$$\textbf{Grundsatz:}\quad \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \text{ falls } rot(\vec{v}) = 1$$

Flächeninhalt der Ellipse E, berandet durch$x = a\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen $\mu(E) = \pi ab$

11 Kurvendiskussion

11.1 Extrema/Minima

Kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0)$ nicht den maximalen Rang besitzt, also falls $Rang(df(p_0)) < \min n, m$.