2. Seilwelle

Ein Seil mit der Massenbelegung (Längendichte) ρ_L ist mit der Seilkraft $S = 200$ N entlang der x-Achse gespannt (Gravitation wird vernachlässigt). Zur Zeit $t = 0$ wird das Seilende bei $x = 0$ mit der Frequenz $\nu = 5$ Hz senkrecht zum Seil harmonisch ausgelenkt, d.h., die Anregungsfunktion ist $F(t) \equiv \xi(0, t) = A \sin(\omega t)$.

a) Geben Sie für die Randbedingung $\xi(0, t) = A \sin(\omega t), \forall t$, die Wellenfunktion $\xi(x, t)$ der sich im Seil ausbreitenden harmonischen Welle an. (*1 Punkt*)

b) Die Welle erreicht den Punkt $x_0 = 20$ m zur Zeit $t_0 = 0.45$ s. Was ist die Massenbelegung ρ_L des Seils, und was ist die Wellenzahl k der Welle? (*1 Punkt*)

c) Die Amplitude der Welle sei $A = 2$ mm. Wie gross ist die maximale transversale Kraft $|F_t|_{max}$ (nur Betrag) auf ein 1 cm langes Massenelement dm des Seils (F_t wird auf der Länge von 1 cm ($\ll \lambda$) als konstant angesehen)? (*1 Punkt*)

d) Berechnen Sie für $A = 2$ mm die Auslenkung $y = \xi(x, t)$, die Transversalgeschwindigkeit v_t und die Transversalbeschleunigung a_t für den Punkt $x_P = 20$ m zur Zeit $t_P = 0.52$ s. (*1 Punkt*)

Lösung: 2. Seilwelle

a) Ansatz:

$$\xi\,(x,t) = A\,\sin\,(k\,x - \omega\,t) \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$
$$\to \xi\,(0,t) = A\,\sin\,(-\omega\,t) = -A\,\sin\,(\omega\,t) = F(t)$$
$$\to \xi\,(x,t) = -A\,\sin\,(k\,x - \omega\,t) = A\,\sin\,(\omega\,t - k\,x) \qquad (0.75\,\text{Pkt.})$$

b) Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho_L}} = \frac{x_0}{t_0} = 44.4\,\text{m/s}$$
$$\to \rho_L = \frac{S}{v^2} \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$
$$= \frac{200\,\text{N}}{(44.4\,\text{m/s})^2} = 0.101\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \approx 100\,\frac{\text{g}}{\text{m}} \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$

Die Wellenzahl k wird via die Wellenlänge berechnet:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{44.4\,\text{m/s}}{5\,/\text{s}} = 8.89\,\text{m}$$
$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$
$$= 0.707\,/\text{m} \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$

c)

$$F_t = a_t \cdot dm = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial\, t^2} \cdot dm$$
$$dm = \rho_L \cdot \Delta x$$
$$= 100\,\text{g/m} \cdot 1\,\text{cm} = 1.0\,\text{g} = 10^{-3}\,\text{kg}$$

$$\xi(x,t) = A\,sin(\omega\,t - k\,x)$$
$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial\, t} = A\,\omega\,cos(\omega\,t - k\,x)$$
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial\, t^2} = -A\,\omega^2\,sin(\omega\,t - k\,x)$$
$$\to |a_t| = \left|\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial\, t^2}\right|_{max} = A\,\omega^2 \qquad \text{wobei } \omega = 2\pi\nu \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$
$$|F_t| = a_t\,dm = A\,\omega^2\,dm \qquad (0.5\,\text{Pkt.})$$
$$= 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 2\,\text{mm} \cdot (10\pi\,/\text{s})^2 \approx 2 \cdot 10^{-3}\,\text{N} \qquad (0.25\,\text{Pkt.})$$

d)

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \xi\,(x,t) = A\,\sin\,(\omega\,t - k\,x) \\ v_t(t) &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\,\omega\,\cos\,(\omega\,t - k\,x) \\ a_t(t) &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\,\omega^2\,\sin\,(\omega\,t - k\,x) \end{aligned}\right\}$$

(total 0.5 Pkt. minus 0.25 Pkt. pro falsche Zeile)

für $t_p = 0.52\,\text{s}$ und $x_p = 20\,\text{m}$ ist:

$$\omega\,t_p - k\,x_p = 10\,\pi\,/\text{s} \cdot 0.52\,\text{s} - \frac{2\,\pi}{\lambda} \cdot 20\,\text{m} = 2.20\,\text{rad}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \xi(x_p,t_p) &= 1.62\,\text{mm} \\ v_t(x_p,t_p) &= -36.9\,\text{m/s} \\ a_t(x_p,t_p) &= -1597\,\text{mm/s}^2 = -1.6\,\text{m/s}^2 \end{aligned}\right\}$$

(total 0.5 Pkt. minus 0.25 Pkt. pro falsche Zeile)

Aufgabe 1: Schwingende Saite

a) Eine sinusoidale transversale Welle propagiert in negativer x-Richtung einer Saite. Sie hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = 15\,\mathrm{m/s}$, Amplitude $A = 0.08\,\mathrm{m}$ und Wellenlänge $\lambda = 0.3\,\mathrm{m}$. Die transversale Auslenkung der Saite an der Stelle $x = 0\,\mathrm{m}$ zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ ist Null und $-0.08\,\mathrm{m}$ bei $t = 0.005\,\mathrm{s}$. Für eine Phase $\phi \in [0, 2\pi]$, ist die Wellenfunktion $y(x,t)$:

- i) $y(x,t) = 8\ \mathrm{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.2\mathrm{s}} + \frac{x}{0.3\mathrm{m}}\right) + \pi\right]$
- ii) $y(x,t) = 0.08\ \mathrm{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.02\mathrm{s}} + \frac{x}{0.3\mathrm{m}}\right) + \pi\right]$
- iii) $y(x,t) = 8\ \mathrm{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.2\mathrm{s}} + \frac{x}{3.\mathrm{m}}\right) + \pi\right]$
- iv) $y(x,t) = 0.08\ \mathrm{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.002\mathrm{s}} + \frac{x}{0.3\mathrm{m}}\right) + \pi\right]$

Eine Stahlsaite ($\rho_{\mathrm{Stahl}} = 7.8\ \mathrm{g/cm^3}$) mit einem Durchmesser $d = 1\ \mathrm{mm}$ und einer Länge $L = 1\ \mathrm{m}$ wird mit einer Kraft von 200 N gespannt und ist an beiden Enden fixiert (die Gravitation wird vernachlässigt).

b) Wenn die Spannung doppelt so gross wäre, wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in der Saite

- i) sich verdoppeln .
- ii) zweimal kleiner sein.
- iii) gleich bleiben.
- iv) keine der obigen Aussagen trifft zu.

c) Was ist Frequenz ν_1 und Wellenlänge λ_1 der Grundschwingung? Geben Sie die Bewegungsgleichung $\xi(x,t)$ der Auslenkung der Saite für die n-te Harmonische an.

d) Berechnen Sie die Energie der schwingenden Saite für die Grundschwingung mit einer maximalen Amplitude (in der Mitte der Saite) von 2 mm.
Hinweis: Berechnen Sie die kinetische Energie eines differentiellen Massenelements dm beim Nulldurchgang und integrieren Sie die Beiträge aller Massenelemente der Saite.

Aufgabe 1: Schwingende Saite

a) ii) $\nu = v/\lambda = 50\,\text{Hz}$, $T = 1/\nu = 0.02\,\text{s}$ und $k = 2\pi/\lambda = 20.9\,\text{m}^{-1}$

Die Wellenfunktion für Propagation in $-$x Richtung ist

$$y(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \phi\right].$$

d.h.:

$$y(x,t) = 0.08\,\text{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.02\text{s}} + \frac{x}{0.3\text{m}}\right) + \phi\right].$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0,0) = 0\,\text{m}$ und $y(0, 0.005\text{s}) = -0.08\,\text{m}$ folgt $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -1$ und somit für ein $\phi \in [0, 2\pi)$, dass $\phi = \pi$ ist. Die resultierende Wellenfunktion ist

$$y(x,t) = 0.08\,\text{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0.02\text{s}} + \frac{x}{0.3\text{m}}\right) + \pi\right].$$

b) iv) Keine der obigen Aussagen trifft zu, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v \propto \sqrt{S}$ (Spannung).

c) Längendichte der Saite:

$$\rho = \frac{M}{L} = \frac{(\frac{d}{2})^2 \pi \cancel{L} \cdot \rho_{Stahl}}{\cancel{L}} = 0.061 \text{ g/cm} = 6.1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$\underline{v} = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{200 \text{ Nm}}{6.1 \cdot 10^{-3} \text{kg}}} = \underline{181 \text{ m/s}}$$

Randbedingung für die n-te Harmonische:

$$n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = L \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Grundschwingung: $n = 1 \rightarrow \underline{\lambda_1 = 2L = 2m}$

$$v = \lambda_n \cdot \nu_n \quad \rightarrow \quad \nu_n = \frac{v}{\lambda_n} \quad \rightarrow \quad \underline{\nu_1} = \frac{v}{\lambda_1} = 90.5 \text{ /s} = \underline{90.5 \text{ Hz}}$$

n-te Harmonische:

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\omega_n t \cdot \sin(k_n x)$$

wo $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ und $\omega_n = 2\pi\nu_n$

d) Beim Durchgang der schwingenden Saite durch die Null-Lage (gestreckte Saite) ist die potentielle Energie der Saite null und die kinetische Energie maximal.

Wir betrachten ein Massenelement $dm = \rho dx$ der Saite am Ort x: kinetische Energie von dm:

$$dE_{kin} = \frac{dm}{2} v_t^2 \quad ; \quad v_t = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\xi_0 \omega_n \sin\omega_n t \cdot \sin k_n x$$

$n = 1$

Die Geschwindigkeit $v_t(t)$ ist (für alle x) maximal (Nulldurchgang) wenn $\sin\omega_1 t = 1$:

$$\rightarrow dE_{\text{kin,max}} = \frac{dm}{2} v_{t,\text{max}}^2 = \frac{dm}{2} (2\xi_0 \omega_1 \sin k_1 x)^2$$

wobei $dm = \rho dx$.

E sei die mechanische Energie der schwingenden Saite:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin,max}} = \text{ konstant}$$

$$E = E_{\text{kin,max}} = \int dE_{\text{kin,max}} \quad : \quad \text{Integration über alle Massenelemente } dm = \rho dx$$

$$E = \frac{4\xi_0^2 \omega_1^2}{2} \rho \int_0^L \sin^2 k_1 x \cdot dx \quad ; \quad L = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\rightarrow \int_0^{\lambda/2} \sin^2 kx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda/2} (\sin^2 kx + \cos^2 kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda/2} dx = \frac{\lambda}{4}$$

$$\rightarrow \underline{E = \frac{4\xi_0^2 \lambda_1 \rho}{8} \omega_1^2}$$

Mit $\xi_0 = 1\text{mm}$, $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi \cdot 90.5$ /s, $\lambda_1 = 2\text{m}$ und $\rho = 6.1 \cdot 10^{-3}$ kg/m

$$\underline{E = 0.002 \text{ J} = 2\text{mJ}}$$

Aufgabe 3: Seilwellen

a) Ein schweres Drahtseil (m=1 kg) der Länge $L = 10\,\text{m}$ hängt unter dem Einfluss der Schwerkraft an einem Aufhängepunkt. Das untere Ende des Seils ist frei. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Transversalwellen ist:

   i) 100 cm/s
   ii) 10 m/s
   iii) 100 mm/s
   iv) nicht konstant

b) Welche Aussage trifft zu, wenn in Aufgabe a) das Drahtseil als unendlich dünn (d.h. massenlos) betrachtet wird und am unteren Ende 1 kg Gewicht aufgehängt wird?

Ein langes Seil mit einer Massenbelegung von 0.1 kg/m steht unter einer konstanten Spannung von 100 N (die Gravitation wird vernachlässigt). Ein Motor führe dem Seil bei $x = 0$ durch eine harmonische (transversale) Auslenkung mit einer Frequenz von 5 Hz und einer Amplitude A = 4 cm Energie zu.

c) Wie gross sind die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der harmonischen Welle im Seil und ihre Wellenlänge λ?

d) Wie gross ist die maximale transversale Geschwindigkeit $v_{t,max}$ eines Massenelements dm, und wie gross ist die maximale transversale Rückstellkraft pro Länge, die auf die Massenelemente wirkt?

Anmerkung: In der Vorlesung sowie Übung wird *Spannung* synonym zur *Spannkraft* gebraucht und trägt damit die Einheit Newton (N) anstatt von $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Aufgabe 3: Seilwellen

a) iv) Die Ausbreitunggeschwindigkeit v ist in diesem Problem nicht konstant über die Länge des Drahtseils, da die Spannungskraft S an einem bestimmten Punkt des Seils durch das Gewicht des unterhalb dieses Punktes hängenden Teilstücks der Länge $L - x$ bestimmt ist. Wir messen x vom Aufhängepunkt an. Die Kraft im Seil in Abhängigkeit von der Entfernung zum Aufhängepunkt ist also:

$$S(x) = m(x)g = \frac{L-x}{L}Mg.$$

Die Ausbreitunggeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{L-x}{L}Mg\frac{L}{M}} = \sqrt{(L-x)g},$$

wobei $\rho = \frac{M}{L}$ die Masse pro Längeneinheit ist.

b) ii) In diesem Fall ist die Spannung konstant. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer transversalen Welle in einem Seil mit Spannung S ist:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \qquad \rho\text{: Längendichte des Seils}$$

mit $\rho = 0.1$ kg/m , $S = 10$ N, es gilt

$$\rightarrow \underline{v} = \sqrt{\frac{10\ \cancel{kg}m \cdot m}{0.1\ \cancel{kg}s^2}} = \sqrt{100}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \ 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Mit $\rho = 0.1$ kg/m , $S = 100$ N, es gilt (siehe b))

$$\rightarrow \underline{v} = \sqrt{\frac{100\ \cancel{kg} m \cdot m}{0.1\ \cancel{kg} s^2}} = \sqrt{1000}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \ 31.6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Wellenlänge: Die harmonische Welle breitet sich während einer Schwingungsdauer T (Periode) um eine Wellenlänge λ aus.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu,$$

wobei ν die Frequenz der Welle ist. $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5$ Hz $= 5$ /s.

$$\underline{\lambda = \frac{v}{\nu} = \ 6.3\ \mathrm{m}}$$

d) Transversale Auslenkung:

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$

A =4 cm, $\omega = 2\pi\nu$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.993$ /m.

Wir betrachten ein Massenelement des Seils bei $x = x_0$:

$$\xi(x_0,t) = A \cdot \sin(kx_0 - \omega t + \phi)$$

transversale Geschwindigkeit v_t des Massenelements:

$$v_t = \left|\frac{\partial \xi(x_0,t)}{\partial t}\right|_{max} = A\omega \quad \text{für alle } x_0!$$

$$\underline{v_{t,max}} = A\omega = \ \underline{1.26\ \mathrm{m/s}}$$

Transversale Rückstellkraft:

$$F_t = dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -dmA\omega^2 \sin(kx_0 - \omega t + \phi); \quad dm = \rho dx$$

$$\left|\frac{F_t}{dx}\right|_{max} = A\rho\omega^2 = \ 3.94\ \mathrm{N/m}$$

oder:

$$F_t = S \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\frac{F_t}{dx} = S \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -ASk^2 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{F_t}{dx}\right|_{max} &= S \cdot Ak^2 \\ &= S \cdot A \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = S \cdot A \cdot \frac{4\pi^2\nu^2}{v^2} \quad ; v = \lambda\nu; v^2 = \frac{S}{\rho} \\ &= \cancel{S} \cdot A\frac{\omega^2}{\cancel{S}}\rho = A\rho\omega^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Superposition von harmonischen Wellen

a) Welche ist die richtige Sortierung der Ausbreitungsgeschwindikeiten der folgenden Materialien (von klein nach gross):

i) O_2 (gas), N_2 (gas), H_2O (flüssig), Stahl (fest)

ii) N_2(gas), CO_2 (gas), Messing (fest), H2O (flüssig)

iii) CO_2 (gas), N_2 (gas), H_2O (flüssig), Kupfer (fest)

iv) H_2(gas), N_2 (fest), H_2O (flüssig), Aluminum (fest)

Zwei Quellen Q_1 und Q_2 im Abstand d senden (eindimensionale) harmonische Wellen in positiver x-Richtung aus (siehe Figur). Die Quellen schwingen mit derselben Frequenz $\nu = 4$ Hz und derselben Amplitude A; die Quelle Q_2 schwingt um $\delta = \pi/4$ phasenverschoben gegenüber der Quelle Q_1. Rechts der Quelle Q_1 interferieren die beiden harmonischen Wellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist $v = 12$ m/s.

b) Was ist die Wellenlänge λ und die Wellenzahl k der emittierten Wellen?

i) $\lambda = 3$ m, $k = 6\pi$ m^{-1}

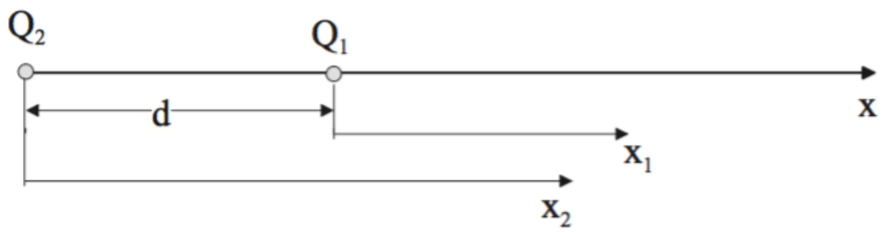
ii) $\lambda = 2$ m, $k = \pi$ m^{-1}

iii) $\lambda = 3$ m, $k = \frac{2}{3}\pi$ m^{-1}

iv) $\lambda = 2$ m, $k = 4\pi$ m^{-1}

c) Geben Sie die Wellengleichungen für die von den Quellen Q_1 und Q_2 emittierten Wellen $\xi_1(x_1, t)$, $\xi_2(x_2, t)$ und für die Superposition $\xi(x_1, d, t) = \xi_1(x_1, t) + \xi_2(x_2, t)$ an, wobei $x_2 = x_1 + d$ gilt.

d) Wie gross müsste d gewählt werden, damit die Superposition der Wellen für alle x rechts von Q_1 verschwindet (destruktive Interferenz)?



Aufgabe 4: Superposition

a) iii) Je grösser die Masse des Gasmölekulen, desto langsamer wird sich die Welle ausbreiten. Mit zunehmende Festigkeit wird die Welle sich schneller ausbreiten.

b) iii) Wellenlänge und Wellenzahl:

$$v = \lambda \cdot \nu \quad \rightarrow \quad \underline{\lambda} = \frac{v}{\nu} = \frac{12 \text{ m/s}}{4 \text{ /s}} = \underline{3 \text{ m}}$$

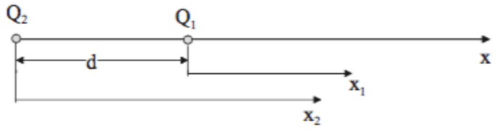
$$\underline{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2.09 \text{ 1/m}}$$

c) Wellengleichungen $\xi_1(x_1, t)$ und $\xi_2(x_2, t)$ siehe Figur.
Superposition:

$$\begin{aligned}\xi_1(x_1, d, t) &= \xi_1(x_1, t) + \xi_2(x_2, t) \\ &= A \cdot \sin(kx_1 - \omega t) + A \cdot \sin(k(x_1 + d) - \omega t + \delta) \\ &= A \cdot \sin(kx_1 - \omega t) + A \cdot \sin(kx_1 - \omega t + k \cdot d + \delta)\end{aligned}$$

mit $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ erhält man:

$$\xi(x_1, d_1, t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{k \cdot d + \delta}{2}\right)}_{\text{Amplitude } A'} \cdot \sin\left(kx_1 - \omega t + \frac{kd + \delta}{2}\right)$$



$$\begin{aligned}\xi_1(x_1, t) &= A \cdot \sin(kx_1 - \omega t) \\ \xi_2(x_2, t) &= A \cdot \sin(kx_2 - \omega t + \delta) \quad ; \quad x_2 = x_1 + d\end{aligned}$$

d) Destruktive Interferenz erhält man für $\cos\left(\frac{kd+\delta}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \frac{kd+\delta}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, wobei $n = 0, 1, 2...$

$$\begin{aligned}k \cdot d + \delta &= (2n+1)\pi \\ k \cdot d &= (2n+1)\pi - \delta \\ d &= \frac{(2n+1)\pi - \delta}{k}\end{aligned}$$

mit $\delta = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\underline{d_n} = \frac{(2n + \frac{3}{4})\pi}{k} &= \frac{2\pi}{k}n + \frac{\frac{3}{4}\pi}{k} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}n \\ &= \frac{3}{4}\frac{\lambda}{2} + n\lambda = \underline{1.13 \text{ m} + n \cdot 3\text{m}}\end{aligned}$$