

1 Allgemein

1.1 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin(\pi) = 0, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos(0) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos(\pi) = -1, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

1.2 Potenzgesetze

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{a^b}$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$

2.2 Identitten

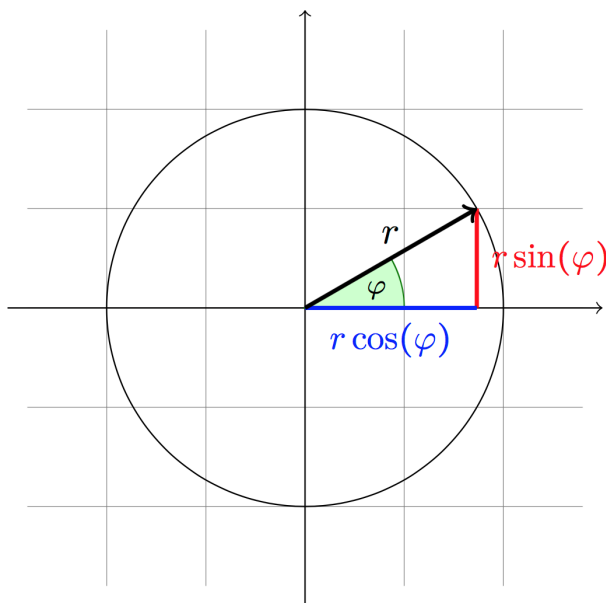
$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \pmod{\frac{2\pi}{q}}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \rightarrow +\infty : \quad \dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$

$$\text{Für } x \rightarrow 0 : \quad \dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$$

4.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{\alpha} + \beta) \frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert " 0^0 ", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu ntzlich.

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$\frac{f(x)}{g(x)}$	" $\frac{0}{0}$ "	$\frac{f(x)}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}$
$f(x)g(x)$	" $0 \cdot \infty$ "	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	" $\infty - \infty$ "	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

5 Folgen

5.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n| > K$

5.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschrnkt** ist und monoton **steigt/fllt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. Schtze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Absolute Konvergenz	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Sandwich-Theorem	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ berechnen
 - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n$ ab einem gewissen n_0 . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ **konvergent** (Majorantenkriterium)}$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ **divergent** (Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
 - falls Grenzwert $= 0$:
 - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
 - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= \infty$:
 - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
 - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
 - (a) $a_n \geq 0$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 - (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

6.3.1 Tipps

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ e^x &= \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

7 Stetigkeit

7.1 Stetigkeitskriterien

Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

8 Ableitungen

8.1 Elementare Ableitungen

$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{2}{\cos(2x)+1}$
$\log(\alpha + x)$	$\frac{1}{\alpha+x}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$

9 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

9.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

9.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

9.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

9.4 Hauptsatz von calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) * \frac{d}{dx}m(x)$$

wo $m(x)$ hat der Form ax^b und $l \in \mathbb{R}$

10 Integration

10.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

10.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ mit $x = \varphi(t)$

10.3 Tipps

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x - \alpha} = \log(x - \alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} = \arctan(x)$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

11 Differentialgleichungen

11.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel $y^2, (y'')^3, \sin(y), e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

11.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

11.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$
 $\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$

11.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$$y' - y = 1, \quad y(0) = 0$$

homogener Ansatz $y' = y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$

Trennung $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = x$

homogene Lösung $y_{\text{homo}}(x) = A e^x, \quad A = e^C \in \mathbb{R}$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = A(x) e^x$

einsetzen $A' e^x + A e^x - A e^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -1$

Lösung $y(x) = A e^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$
 $\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

11.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen $4, -2$

allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$$

Lösung $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen $1, x, \dots$, x^{m-1} .

11.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$$

homogener $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

homogene Lösung $\Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Ansatz wählen $y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$

$$\Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$$

Einsetzen $(-a + b + \frac{a}{4}) \cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b) \sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich $-\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

Lösung $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

11.3 Komplexe zahlen

Falls der charakteristische Polynom ist komplex und hat der form $a + i\sqrt{b}$, dann hat die homogene Lösung die form:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(\sqrt{b}x) + C_2 \sin(\sqrt{b}x))$$

Wo a ist die komplexe Lösung von charakteristischem Polynom.

12 Vektorfelder

12.1 Operatoren

12.1.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

12.1.2 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von f .

12.1.3 Hessematrix

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls a hat in x_0 nur positive Eigenwerte dann ist es eine Maximalstelle, falls sie hat nur negative Eigenwerte dann ist es eine Minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein Sattelpunkt.

12.1.4 Rotation

Für ein Vektorfeld \vec{v} mit Komponenten v_1, v_2, v_3 :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

12.2 Divergenz

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots$$

12.3 Integrabilitatsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

Falls diese ist erfüllt dann ist der Feld ein Potenzialfeld und konservativ.

12.4 Potenzialfeld

Ein potenzialfeld ist konservativ. Der potenzial Φ eines Potenzialfeld:

$$\nabla\Phi \doteq v$$

Bemerkung: Falls $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist \vec{v} konservativ.

13 Wegintegral

13.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

$$\gamma \text{ ableiten} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$\textbf{Lösung} \quad 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$$

13.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld \vec{v} ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen von } (1, 0) \text{ nach } (-1, 0)$$

$$\text{gleichsetzen:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ableiten:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\ &\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\textbf{Potenzial:} \quad \Phi = xe^{xy} + \text{const.}$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 + C - 1 - C = 2$$

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz:
$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen:
$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

Normalbereich:
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

in Formel einsetzen:
$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

13.4 Tips

parametrisierung eines kreises: $x=r*\cos(t)$ $y=r*\sin(t)$ $dx dy = r dr dt$ $dx dy = |rs \times rt|$

14 Flussintegrale oberflacheintegrale

14.1 1 methode

1. Die fläche parametrisieren nach u und v: $\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)$.
2. berechnen $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$. Und krossprodukt berechnen $\Phi_u \times \Phi_v$
3. benutzen die Formel:

$$\int_S v * ndo = \pm \int_a^b \int_c^d v(\Phi(u, v)) * (\Phi_u \times \Phi_v) du dv$$

14.2 Gauss

$$\int_{\partial V} v * ndo = \int_V \text{div}(v) d\mu$$

15 Flächenintegral

15.1 Normalbereich

Grundsatz:
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy d\mu, \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben:
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

in Formel einsetzen:
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

15.2 Satz von Green

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $\text{rot}(\vec{v}) = 1$

Flächeninhalt der Ellipse E , berandet durch $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen $\mu(E) = \pi ab$

16 Kurvendiskussion

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\text{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt

Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

16.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
 - (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit \Rightarrow lokales Minimum
 - (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit \Rightarrow lokales Maximum
 - (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit \Rightarrow Sattelpunkt

16.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L : $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedingung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
falls g differenzierbar:
 - (a) nicht-reguläre Punkte finden mit $dg = 0$
 - (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfen

falls g nicht differenzierbar:

- (a) nicht-regulre Punkte der Teilstcke des Randes
- (b) Eckpunkte des Gebietes berprfen