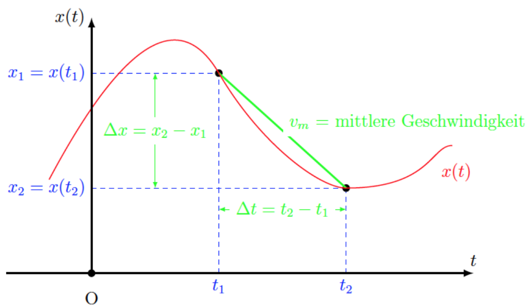
2 Kinematik

2.1 Allgemeine Zusammenhänge

$$Weg \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} Geschwindigkeit \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} Beschleunigung$$



Verschiebung:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad oder \quad V = at$$

Beschleunigung:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad oder \quad a = \frac{V}{t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.2 Integration der Bewegung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad dx = v(t)dt$$

dx = Weg innerhalb des Zeitintervalls dt

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt' = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0$$

Schlussendlich folgt daraus:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' + x_0$$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')dt' + v_0$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$
x_0 entspricht dem Startpunkt
v_0 entspricht der Startgeschwindigkeit

Bewegung gleichförmig und geradlinig
$v(t) = konst. \Rightarrow a(t) = 0$ gilt:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Bewegung gleichförmig beschleunigt und geradlinig
$a(t) = a_0 = konst.$ gilt:

$$v(t) = a_0 t + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Spezialfall: $x_0 = v_0 = t_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$$
$$v(t) = a_0 t$$
$$a(t) = a_0$$

2.3 Freier Fall / Gravitation

In der Nähe der Erdoberfläche fühlt jeder Köper, ubabhängig von seinem Gewicht, dieselbe Beschleunigung (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird).

$$h = \frac{1}{2}a_0 t^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mit Fallhöhe h und Fallzeit t.

Hinweis : Es existiert eine Grenzgeschwindigkeit, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit (quadratisch) des Körpers zu nimmt.

2.4 Bewegung in mehreren Dimensionen

$$r = r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)e_r(t)$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_x(t)e_x + v_y(t)e_y = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{de_r}{dt}e_y = \underbrace{\frac{dr}{dt}e_r}_{1} + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi}_{2}$$

1 : radiale Geschwindigkeit V_r
2 : Winkelgeschwindigkeit V_φ senkrecht zu e_r in Richtung e_φ

Vereinfacht dargestellt:
$V(t) = V_r + V_\varphi$ mit $V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi = r\omega e_\varphi$

Beschleunigung:

$$a(t) = a_x(t)e_x + a_y(t)e_y = \frac{dv_x}{dt}e_x + \frac{dv_y}{dt}e_y = \frac{d^2x}{dt^2}e_x + \frac{d^2y}{dt^2}e_y$$

In Polarkoordinaten:

$$a(t) = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}e_x - r\left(\frac{d\varphi}{dt}e_y\right)^2}_{1} e_r + \left(\underbrace{2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}}_{2}\right) e_\varphi$$

1 = radiale Beschleunigung
2 = Winkelbeschleunigung

2.5 Zerlegung/Integration der Bewegung (mehrdimensional)

Aus den Bewegungsgleichungen sieht man, dass die zueinander senkrecht stehenden x- und y-Bewegungen voneinander unabhänig sind.
=> Bei 3 Dimensionen kann diese Betrachtung einfach erweitert werden

$$v(t) = v_0 + a_0(t)$$

$$r(t) = r_0 + V_0 t \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$= \left(x_0 + v_{0x} + \frac{1}{2}a_{0x}t'2\right) e_x + \left(y_0 + v_{0y} + \frac{1}{2}a_{0y}t'2\right) e_y$$

2.6 Bahnkurve beim Ballwurf

Zur Zeit t_{max} erreicht die Kugel den höchsten Punkt ihrer Bahnkurve. In diesem Punkt verschwindet die vertikale Geschwindigkeit:

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Die maximale Höhe der Kugel ist:

$$y_{max} = y_0 + \frac{{v_{0y}}^2}{2g}$$

2.7 Schuss auf fallende Platte

Eventuell noch mit Beispiel ergnzen

2.8 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \omega t$$

mit Winkelgeschwindigkeit ω und Periode T:

$$\varphi(T) = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Strecke:

$$s(t) = r\varphi(t) = r\omega t$$

Vektorielle Darstellung

$$r(t) = r\cos(\varphi(t))e_x + r\sin(\varphi(t))e_y$$

Da Bewegung gleichförmig (ω = konstant) folgt:

$$r(t) = r\cos(\omega t)e_x + r\sin(\omega t)e_y$$

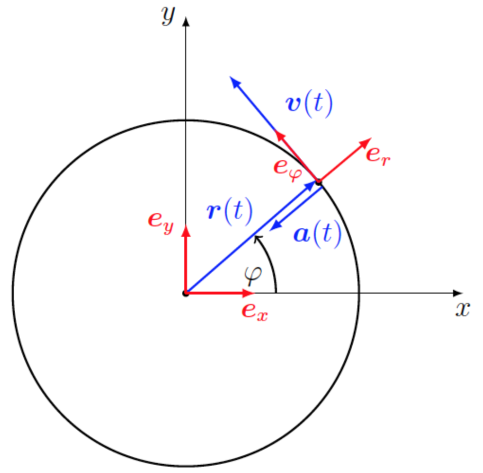
2.8.1 Geschwindigkeitsvektor

Betrag: $|\vec{v}| = r\omega = konst.$
Die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zum Ortsvektor.

2.8.2 Beschleunigungsvektor = Zentripetalbeschleunigung

Zeigt in Richtung Zentrum des Kreises mit Betrag:

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$



2.8.3 Fluchtgeschwindigkeit

Geschwindigkeit, um ein Gravitationsfeld zu verlassen (z.B. Erde), wobei G die Gravitationskonstante ist.

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$