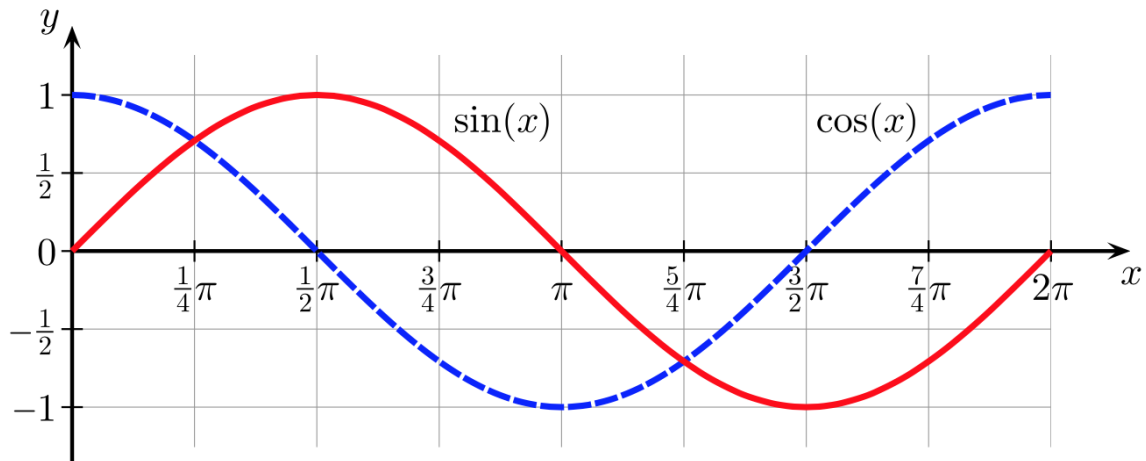


1 Allgemein

1.1 Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

1.2 Potenzgesetze

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 \\a^1 &= a \\a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\(a^n)^m &= a^{nm} \\\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\a^{\frac{b}{n}} &= \sqrt[n]{a^b}\end{aligned}$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

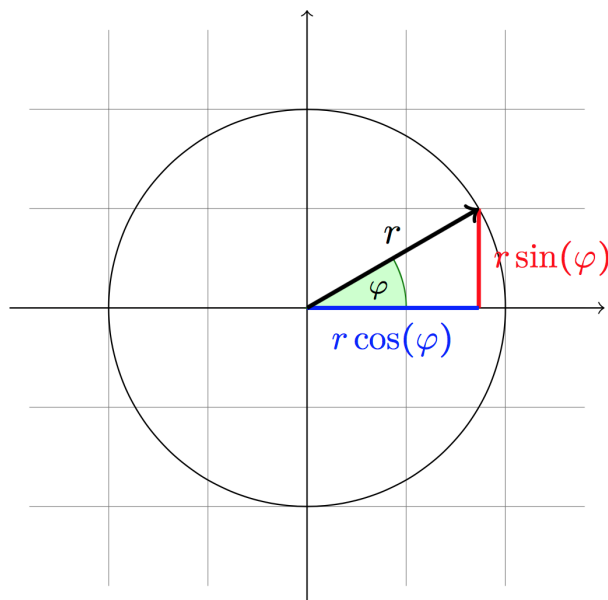
Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$

2.2 Identitten

$$\begin{aligned}A + B &:= \{a + b | a \in A, b \in B\} \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B \\ \sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}\end{aligned}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$\begin{aligned}z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi} \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{je nach Quadrant}) \\ x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)} \\ \sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q} \\ e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} &= i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1\end{aligned}$$

3.2 Identitäten

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \\ |zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2\end{aligned}$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

Für $x \rightarrow +\infty$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für $x \rightarrow 0$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

4.2 Fundamentallimes

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0\end{aligned}$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert " 0^0 ", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu ntzlich.

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	" $0 \cdot \infty$ "	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	" $\infty - \infty$ "	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

5 Folgen

5.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n| > K$

5.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. Schütze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Absolute Konvergenz	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Sandwich-Theorem	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ berechnen
 - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n$ ab einem gewissen n_0 . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ konvergent} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergent} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
 - falls Grenzwert = 0:
 - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
 - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
 - falls Grenzwert = ∞ :
 - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
 - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert = 1 \Rightarrow keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert = 1 \Rightarrow keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
 - (a) $a_n \geq 0$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 - (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

7 Stetigkeit

7.1 Stetigkeitskriterien

Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' auf Ω **beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

8 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

8.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

8.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

8.4 Hauptsatz von Calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

9 Integration

9.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

9.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ mit $x = \varphi(t)$

9.3 Tipps

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x - \alpha} \, dx = \log(x - \alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} \, dx = \arctan(x)$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C$$

10 Differentialgleichungen

10.1 Grundbegriffe

- Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung
- linear:** alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2 , $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
- homogen:** Gleichung ohne Störfunktionen
- Störfunktion:** Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

10.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

10.2.1 Trennung der Variable

$$\begin{aligned}
 & y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2} \\
 \text{umformen} \quad & \frac{dy}{dx} = -x \tan y \\
 \text{konstante Lösungen} \quad & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ nicht} \\
 \text{Trennung} \quad & \frac{dy}{\tan y} = -x dx \\
 \text{integrieren} \quad & \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C \\
 & \Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}} \\
 \text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad & \sin(y(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1 \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})
 \end{aligned}$$

10.2.2 Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}
 \text{Grundsatz:} \quad & y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x) \\
 & y' - y = 1, \quad y(0) = 0 \\
 \text{homogener Ansatz} \quad & y' = y \\
 \text{konstante Lösungen} \quad & y(x) \equiv 0 \\
 \text{Trennung} \quad & \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = x \\
 \text{homogene Lösung} \quad & y_{\text{homo}}(x) = A e^x, \quad A = e^C \in \mathbb{R} \\
 \text{partikulärer Ansatz} \quad & y_p(x) = A(x) e^x \\
 \text{einsetzen} \quad & A' e^x + A e^x - A e^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\
 \text{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -1 \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = A e^x - 1 \text{ mit Anfangsbedingung } A = 1 \\
 & \Rightarrow y(x) = e^x - 1
 \end{aligned}$$

10.2.3 Euler-Ansatz

$$\begin{aligned}
 & y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz} \quad & y(x) = e^{\lambda x} \\
 \text{einsetzen} \quad & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
 \text{charakt. Polynom} \quad & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
 \text{Nullstellen} \quad & 4, -2 \\
 \text{allgemeine Lösung} \quad & y(x) = A e^{4x} + B e^{-2x} \\
 \text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad & y(1) = A e^4 + B e^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4A e^4 - 2B e^{-2} = 0 \\
 & \Rightarrow A = \frac{1}{3} e^{-4}, \quad B = \frac{2}{3} e^2 \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = \frac{1}{3} e^{4x-4} + \frac{2}{3} e^{2-2x}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1 , x , \dots , x^{m-1} .

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lsung:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

10.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lsung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x .

$$\begin{aligned}
 & y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
 \text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
 \text{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
 \text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \\
 & \Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x) \\
 \text{Einsetzen} \quad & \left(-a + b + \frac{a}{4}\right) \cos(x) + \left(-b - a + \frac{1}{4}b\right) \sin(x) = \cos(x) \\
 \text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
 \text{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x) \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)
 \end{aligned}$$

11 Vektorfelder

11.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11.2 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrates von f und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von f .

Bemerkung: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

11.3 Hessematrix

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls A hat in x_0 nur positive Eigenwerte dann ist es eine Maximalstelle, falls sie hat nur negative Eigenwerte dann ist es eine Minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein Sattelpunkt.

11.4 Rotation

$$\text{In } \mathbb{R}^3 : \text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ in } \mathbb{R}^2 : \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Bemerkung: Falls $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist \vec{v} konservativ (Potenzialfeld).

11.5 Divergenz

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots$$

11.6 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Das Potenzial Φ eines Potenzialfeldes ist gleich:

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

Für ein Potenzialfeld gilt $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ und es erfüllt die **Integrabilitätsbedingungen**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

12 Wegintegral

12.1 Standardmethode

$$\text{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

$$\gamma \text{ ableiten} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$\text{Lösung} \quad 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$$

12.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld \vec{v} ist **konservativ** (= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen von } (1, 0) \text{ nach } (-1, 0)$$

$$\text{gleichsetzen:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ableiten:} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\ &\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \Phi = xe^{xy} + \text{const.}$$

$$\text{Lösung:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 + C - 1 - C = -2$$

12.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{Kreisbogen mit Radius 1 um } (0, 0)$$

$$\text{Rotation berechnen:} \quad \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich:} \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen:} \quad \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

13 Flächenintegral

13.1 Koordinatentransformationen

13.1.1 Polarkoordinaten (\mathbb{R}^2)

$$\text{Variablen: } \begin{array}{l} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \end{array} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = r \, dr d\phi$$

13.1.2 Elliptische Koordinaten (\mathbb{R}^2)

$$\text{Variablen: } \begin{array}{l} x = ra \cos(\phi) \\ y = rb \sin(\phi) \end{array} \quad \text{Volumenelement: } dxdy = abr \, dr d\phi$$

13.1.3 Zylinderkoordinaten (\mathbb{R}^3)

$$\begin{array}{l} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{array} \quad \text{Variablen: } \quad \text{Volumenelement: } dxdydz = r \, dr d\phi dz$$

13.1.4 Kugelkoordinaten (\mathbb{R}^3)

$$\begin{array}{l} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{array} \quad \text{Variablen: } \quad \text{Volumenelement: } dxdydz = r^2 \, dr \sin(\theta) \, d\theta d\phi$$

13.2 Normalbereich

$$\text{Grundsatz: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int_{\Omega} F \, d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \, F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

$$\text{als Normalbereich schreiben: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen: } \int_{\Omega} xy \, d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx \, x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x, y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r, \phi) = r$.

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz: } \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \text{ falls } \text{rot}(\vec{v}) = 1$$

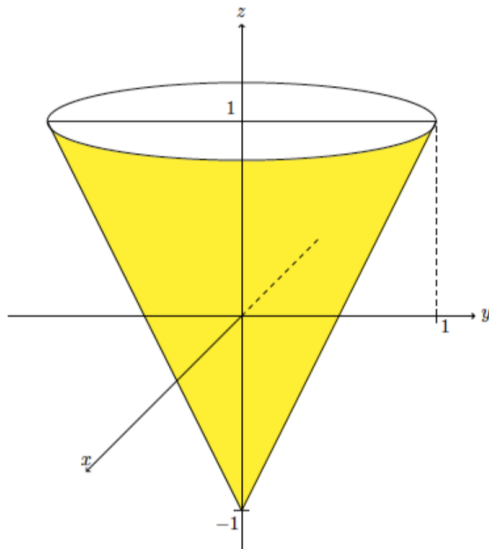
Flächeninhalt der Ellipse E , berandet durch $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen: $\mu(E) = \pi ab$

14 Oberflächenintegral



gegeben: $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 + 3z^2 - 3 \end{pmatrix}$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels
(von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Kegel
mit **Satz von Gauss** berechnen
Fluss durch Deckel
mit **Standardmethode** berechnen

14.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\mu$

Normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorfeld anpassen: $z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

Grundsatz anwenden: $\iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dx dy = \iint_D x^2 dx dy$

Koordinatentransformation: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos(\phi) \, dr d\phi = \frac{\pi}{4}$

14.2 Satz von Gauss

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\mu = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\mu$

wobei \vec{n} die nach aussen gerichtete Normale lngs ∂V bezeichnet.

Divergenz berechnen: $\operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$

Grundsatz anwenden:
$$\int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr \, dr = 2\pi$$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

15 Kurvendiskussion

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt

Kandidaten fr Extrema: $p_0 \in \Omega$ fr welchen $df(p_0) = 0$ gilt

15.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten fr Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
 - (a) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit \Rightarrow lokales Minimum
 - (b) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit \Rightarrow lokales Maximum
 - (c) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ indefinit \Rightarrow Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grsser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

15.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L : $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedingung anwenden (mssen alle Nebenbedingung erfflen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung falls g differenzierbar:
 - (a) nicht-regulre Punkte finden mit $dg = 0$
 - (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung berprfen

falls g nicht differenzierbar:

- (a) nicht-regulre Punkte der Teilstcke des Randes
- (b) Eckpunkte des Gebietes berprfen