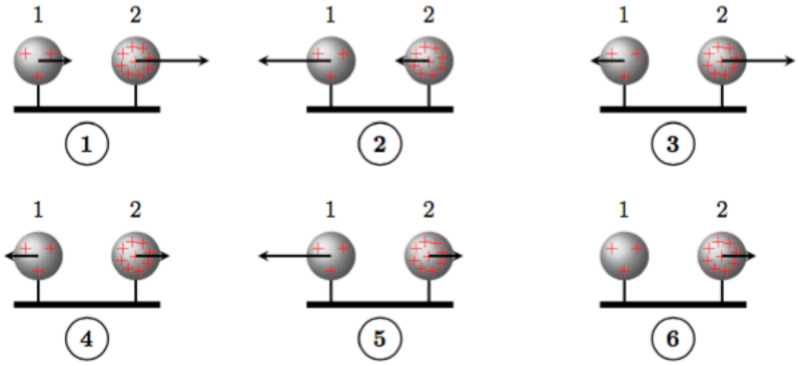
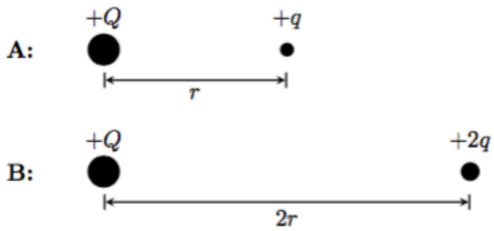
**Aufgabe 2:** Elektrischer Dipol

a) Zwei homogen (positiv) geladene Kugeln werden in die Nähe voneinander gebracht. Die Ladung auf Kugel 2 ist drei mal so gross wie jene auf Kugel 1. Welches Kräftediagramm ist eine korrekte Darstellung der Richtung und Stärke der elektrostatischen Kräfte?




b) Zwei Punkladungen werden unabhängig voneinander in die Nähe einer Ladung $+Q$ gebracht. Im Fall A wird eine Ladung $+q$ in eine Entfernung $r$ der Ladung $+Q$ gebracht. Im Fall B wird eine Ladung von $+2q$ in eine Entfernung von $2r$ der Ladung $+Q$ gebracht.




Was können Sie über die potentielle Energie der Ladung $+q$ im Fall A sagen, verglichen mit der potentiellen Energie der Ladung $+2q$ im Fall B (relativ zu einer Position in einer sehr grossen Entfernung von der Ladung $+Q$)?

i) Die potentielle Energie im Fall A ist grösser als jene im Fall B.

ii) Die potentielle Energie im Fall A ist kleiner als jene im Fall B.

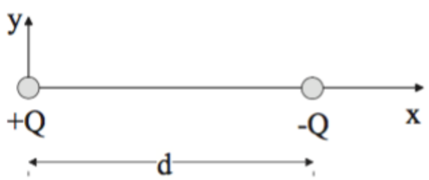
iii) Die potentielle Energie ist in beiden Fällen gleich.

iv) Die gegebenen Informationen sind nicht ausreichend.

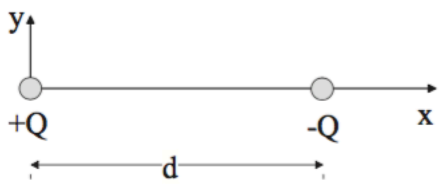
Zwei Punktladungen $+Q$, resp. $-Q$ befinden sich in einem Abstand $d = 1$ m voneinander (siehe Skizze); $Q = 10^{-6}$ C, $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C/Vm.

c) Berechnen Sie das elektrische Feld als Funktion von $x$ auf der Verbindungsgeraden zwischen den zwei Ladungen, d.h. $0 < x < d$.

d) Berechnen Sie das elektrische Feld des Dipols als Funktion von $y$ auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsgeraden zwischen den zwei Ladungen.



**Aufgabe 2:** Elektrischer Dipol




a) iv) Die zwei Ladungen sind gleichnamig, also stossen sie sich ab. Die Stärke der Kräfte ist dieselbe wegen des Coulombschen Gesetzes.

b) iii) Die potentielle Energie $E_{pot} \propto q/r$, also falls Ladung und Abstand sich verdoppeln, wird die potentielle Energie gleich bleiben.

c) In jedem Punkt werden die Felder, die von $+Q$ und $-Q$ erzeugt werden vektoriell addiert:

$$\vec{E} = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-Q}$$

Auf der $x$-Achse gibt es nur eine $x$-Komponente; beide Felder, $\vec{E}_{+Q}$ und $\vec{E}_{-Q}$ zeigen in pos. $x$-Richtung.

Auf der $x$-Achse gilt: $E_y = E_z = 0$

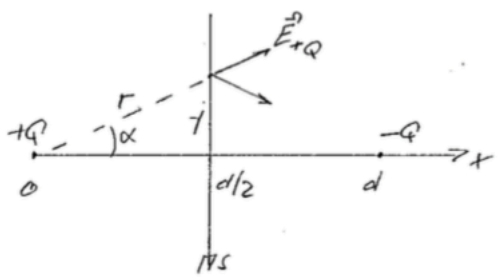
Beide Ladungen erzeugen ein Coulomb-Feld:

$$\underline{E_x(x)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(d-x)^2} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]}$$

Numerisch:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{10^{-6}\cancel{C}\,\mathrm{Vm}}{4\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cancel{C}} \simeq \underline{9\cdot 10^3\ \mathrm{Vm}}$$

d) Es gibt auch auf der Mittelsenkrechten nur eine $x$-Komponente des Feldes, die $y$- und $z$-Komponenten von $\vec{E}_{+Q}$ und $\vec{E}_{-Q}$ kompensieren einander:




Auf der Mittelsenkrechten (MS) gilt:

$$E_{x,+Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot\cos\alpha = E_{x,-Q}$$

$$\cos\alpha = \frac{d/2}{r} = \frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + y^2}}$$

$$\underline{E_x(y)} = E_{x,+Q} + E_{x,-Q} = 2\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{r^3} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{[(d/2)^2 + y^2]^{3/2}}}$$

## Aufgabe 3: Elektrischer Strom

a) In einem Draht (Länge $L$, Querschnitt $A$) fliesst ein Strom $I$ und man misst eine Spannung $V$. Man nimmt den Draht und man schneidet ihn in drei gleich lange Stücke. Diese werden parallel verbunden mit gleichgrossem Abstand (wie für die 2 Drähte des Demonstrationsexperiments des Ohmschen Gesetzes, welches in der Vorlesung betrachtet wurde). Die Stromquelle wird den gleichen Strom $I' = I$ durch den Draht liefern. Wie gross wird jetzt die gemessene Spannung $V'$ sein?

   i) $V' = 9\,V$

   ii) $V' = \frac{1}{9}V$

   iii) $V' = V$

   iv) $V' = 0.3\,V$

b) In jedem einzelnen Draht von Punkt a) fliesst ein Strom $I' = 1/3\,I$. Die resultierende Kraft des erzeugten B-Feldes der zwei äusseren Drähte auf den mittleren Draht ist:

   i) proportional zu $I'^3$

   ii) proportional zu $I'^2$

   iii) Es wird gar keine resultierende Kraft wirken.

   iv) Die gegebenen Informationen sind nicht ausreichend.

Wir betrachten einen langen, geraden Eisendraht mit einer Querschnittsfläche von $A = 1$ mm$^2$. Am Draht ist eine Spannung angelegt, so dass über einem Drahtstück von 1 m Länge eine Spannung von 1 V abfällt. Für Eisen ist die Leitfähigkeit $\sigma_{Fe} = 10^7$ A/Vm und wir nehmen an, dass es im Eisen pro Atom ein (freies) Leitungselektron gibt. Die Dichte von Eisen beträgt $\rho_{Fe} = 7.86$ g/cm$^3$, die Molmasse ist 55.8 g/mol, und die Avogadrozahl ist $6 \cdot 10^{23}$/mol.

c) Was ist der Widerstand $R$ eines 1 m langen Drahtstücks und welcher Strom $I$ fliesst im Draht?

d) Was ist die Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen im Draht?

## Aufgabe 3: Elektrischer Strom

a) ii) Der Widerstand ist $R \propto L/A$, also wenn $L' = L/3$ und $A' = 3A$ wird wegen der Ohmschen Gesetz $V' = V/9$.

b) iii) Die resultierende Kraft wird gleich Null sein weil sich die zwei abstossenden Kräfte des erzeugten B-Feldes der zwei äusseren Drähten auf den mittleren Draht kompensieren.

c)

$$U = R \cdot I \quad ; \quad \underline{R} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{1 \text{ m Vm}}{10^7 \text{ A } (10^{-3}\text{m})^2}$$
$$= 10^{-1}\frac{\text{V}}{\text{A}} = \underline{0.1\ \Omega}$$

$$\underline{I} = \frac{U}{R} = \frac{1 \text{ V}}{0.1 \text{ V}}\text{A} = \underline{10 \text{ A}}.$$

d)

$$I = -enAv_D \qquad n = \text{Anzahl Leitungselektronen / cm}^3$$
$$= \text{Anzahl Fe-Atome / cm}^3$$

$$n = \rho_{Fe}\frac{1}{m_{\text{mol}}} \cdot N_A$$
$$n = 7.86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1}{55.8}\frac{\text{mol}}{\text{g}} \cdot 6 \cdot 10^{23}\,\frac{\text{Atome}}{\text{mol}} = 8.45 \cdot 10^{22}/\text{cm}^3$$

$$|v_D| = \frac{I}{e \cdot n \cdot A} = \frac{10 \text{ A cm}^3}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8.45 \cdot 10^{22}\,(0.1 \text{ cm})^2}$$
wobei 1 C = 1 As
$$\rightarrow \underline{v_D = 0.07 \text{ cm/s}}$$

**Aufgabe 4:** Vergleich Coulombkraft und Gravitation

a) Betrachten Sie das elektrische Potential einer elektrischen Punktladung Q. Wie sehen die Flächen gleichen Potentials (Äquipotentialflächen) aus?

b) Nach klassischer Vorstellung besteht ein Wasserstoffatom aus einem Proton (Ladung $+e$) als Kern und einem Elektron (Ladung $-e$), das um den Kern kreist. Bestimmen Sie die elektrische Anziehungskraft der beiden Teilchen unter der Annahme, dass die Bahn des Elektrons kreisförmig ist ($r = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m).

c) Vergleichen Sie das Ergebnis aus b) mit der gravitativen Anziehungskraft zwischen Elektron und Proton ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg).

d) Bestimmen Sie die Bahngeschwindigkeiten des Elektrons, wenn der Kern als ruhend angenommen wird. Muss man relativistisch rechnen?

---

**Aufgabe 4:** Vergleich Coulombkraft und Gravitation

a) Die elektrischen Feldlinien einer Punktladung verlaufen radial nach aussen, das Feld ist daher radialsymmetrisch. Die Äquipotentialflächen müssen daher Kugelschalen sein, deren Mittelpunkt am Ort der Punktladung liegt.

b) Unter der Annahme einer kreisförmigen Bahn gilt:

$$\begin{aligned} F_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e q_p}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1e)(+1e)}{r^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \left(\frac{1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{As}}{5.3 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}}\right)^2 \approx -8.2 \cdot 10^{-8}\mathrm{N}. \end{aligned}$$

(Die Einheit Volt kann umgeformt werden zu: $1V = 1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}}$).

c) Vergleich mit der gravitativen Anziehungskraft zwischen Elektron und Proton:
Für die gravitative Anziehungskraft gilt:

$$F_G = G \cdot \frac{m_e m_p}{r^2} = 6.674 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}} \cdot \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}{(5.3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m})^2} \approx 3.61 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{N}.$$

Dies ist:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8.19 \cdot 10^{-8}\mathrm{N}}{3.61 \cdot 10^{-47}\mathrm{N}} = 2.27 \cdot 10^{39}$$

mal schwächer als die Coulombkraft zwischen den beiden Teilchen!

d) Wenn das Elektron in einer Kreisbahn umläuft, übernimmt die Coulombkraft die Aufgabe der Zentripetalkraft. Da das Proton viel schwerer ist als das Elektron vernachlässigen wir, dass beide um einen gemeinsamen Schwerpunkt rotieren und nähren den Schwerpunkt als den Massenschwerpunkt des Protons:

$$\begin{aligned} F_Z &= |F_C| \\ m_e\frac{v^2}{r} &= |\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e q_p}{r^2}| \\ v^2 &= |\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1e)(+1e)}{m_e r}| \\ v &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \\ &= \sqrt{\frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{As})^2}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \cdot 5.3 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}}} \\ &\approx 2.19 \cdot 10^6\,\mathrm{ms^{-1}} = 7.28 \cdot 10^{-3}\,c. \end{aligned}$$

Diese Bahngeschwindigkeit ist eher klein, man braucht also nicht relativisitisch zu rechnen.

## 6. Kugelkondensator

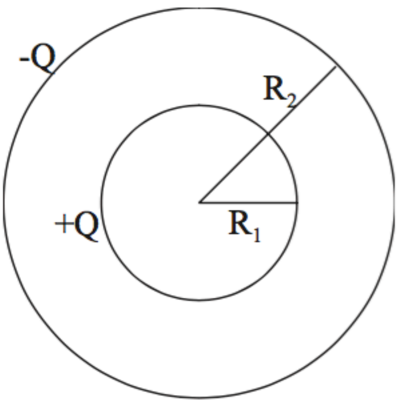
Der Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrisch angeordneten, leitenden Hohlkugeln mit den Radien $R_1 = 10$ cm und $R_2 = 20$ cm (siehe Figur). Der Kugelkondensator ist mit einer Ladung $Q$ (äussere Kugel $-Q$, innere Kugel $+Q$) homogen geladen.
$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C$^2$/Nm$^2$ $= 8.854 \cdot 10^{-12}$ C/Vm, $Q = 10^{-8}$ C.
Bemerkung: Verwechseln Sie nicht das Symbol $C$ für Coulomb (Einheit der elektrischen Ladung) mit dem (gleichen) Symbol $C$ für die Kapazität eines Kondensators.

a) Berechnen Sie mit dem Gesetz von Gauss das elektrische Feld $E(r)$ als Funktion von $Q$ und $r$ im Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$ *(1 Punkt)*

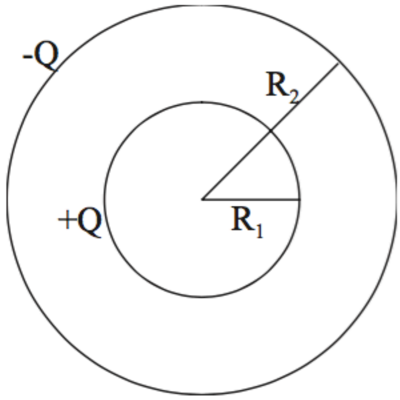
b) Skizzieren Sie das elektrische Feld $E(r)$ als Funktion des Radius $r$ im Bereich $0 \leq r \leq 30$ cm. *(1 Punkt)*

c) Wie gross ist die Spannung $U$ zwischen den geladenen Hohlkugeln? *(1 Punkt)*

d) Wie gross ist die Kapazität $C$ des Kugelkondensators, und welche Energie $E$ steckt im elektrischen Feld des geladenen Kondensators? *(1 Punkt)*



**Lösung: 6. Kugelkondensator**




a) Gesetz von Gauss: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{eingeschlossen}$
und $\vec{E} \| \mathrm{d}\vec{A}$ überall:

$$\rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad \text{für } R_1 \leq r \leq R_2$$

b)

| | | |
|---|---|---|
| für $r \leq R_1$ gilt | $E(r) = 0$ | $(Q_{eing} = 0)$ |
| für $R_1 \leq r \leq R_2$ gilt | $E(r) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ | |
| für $r \geq R_2$ gilt | $E(r) = 0$ | $(Q_{eing} = 0)$ |

c)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$\rightarrow U = 449\,\mathrm{V}$$

d) Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = 22.3\,\mathrm{pF}$$

Die Energie $E$ ist gleich der Arbeit $W$, die zum Aufladen des Kondensators aufgewendet werden muss:
Verschieben der Ladung $\mathrm{d}Q$ gegen die Spannung $V(Q)$

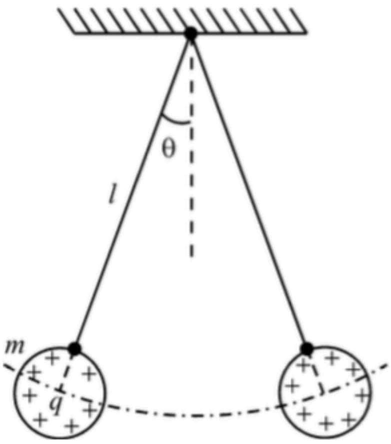
$$\mathrm{d}W = V(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q$$

$$\rightarrow E = W = \int_0^Q \mathrm{d}W = \frac{Q^2}{2\,C} = \frac{1}{2}\,C\,V^2$$

$$E = 2.24 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

## Aufgabe 3: Zwei geladene Kugeln am Draht (5 Punkte)

Zwei kleine Kugeln gleicher Masse $m$ sind an dünnen, massenlosen Fäden der gleichen Länge $l$ am gleichen Punkt aufgehängt (siehe Abbildung). Die Kugeln haben die gleiche Ladung $q$. Die Erdbeschleunigung ist $g$. Das System befindet sich im Gleichgewicht.




a. Zeichnen Sie in die Abbildung die auf die Kugeln wirksamen Kräfte ein.

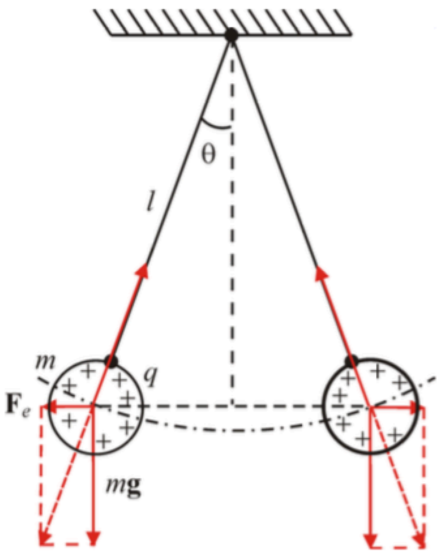
b. Zeigen Sie, dass für den Auslenkungswinkel $\theta$ folgende Beziehung gilt:

$$\tan\theta \cdot \sin^2\theta = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}.$$

---

## Aufgabe 3: Zwei geladene Kugeln am Draht (5 Punkte)

a. Die auf die Kugeln wirksamen Kräfte sind eingezeichnet:




b. Im Gleichgewicht gilt

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg},$$

wobei die elektrostatische Kraft zwischen den geladenen Kugeln auf Distanz $2l\sin\theta$ gegeben ist durch

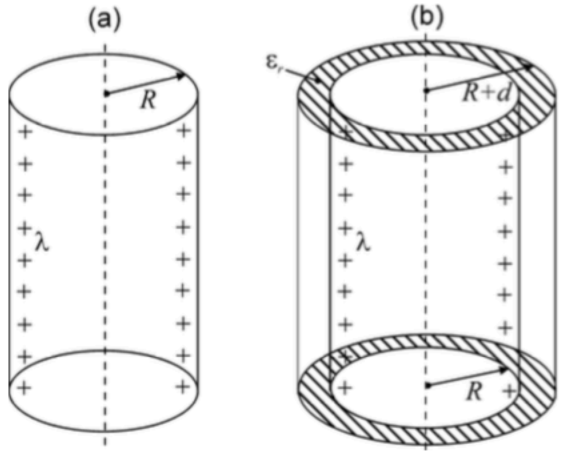
$$F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l\sin\theta)^2}$$

Wir kombinieren diese Gleichungen und erhalten

$$\tan\theta \cdot \sin^2\theta = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}.$$

## Aufgabe 4: Geladener Zylinder (6 Punkte)

Auf der Oberfäche eines unendlich langen, massiven Zylinders aus Metall sind freie Ladungen homogen verteilt (siehe Abbildung a). Der Zylinder hat einen Radius $R = 2.0 \times 10^{-2}\,\text{m}$. Die Ladungsdichte auf der Zylinderoberfläche beträgt $\lambda = 1.1 \times 10^{-12}$ Coulomb pro Meter Längeneinheit entlang der Zylinderachse.




a. Berechnen Sie das elektrische Feld umittelbar an der Zylinderoberfläche:

$$E(r = R^{+}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

Auf den Zylinder wird nun eine isolierende Polythänschicht mit einer Dicke $d = 2.0 \times 10^{-3}\,\text{m}$ angebracht (siehe Abbildung b). Polythän hat eine Dielektrizitätszahl von $\varepsilon_r = 2.3$.

b. Berechnen Sie das elektrische Feld an beiden Seiten der äusseren Oberfläche der Schicht:

$$E(r = R + d^{-}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\,\mathrm{N\,C^{-1}},$$

$$E(r = R + d^{+}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

c. Skizzieren Sie für den beschichtete Zylinder den Verlauf des elektrischen Feldes und des elektrischen Potentials als Funktion von $r$ im Intervall $0 \leq r < \infty$.

## Aufgabe 4: Geladener Zylinder (6 Punkte)

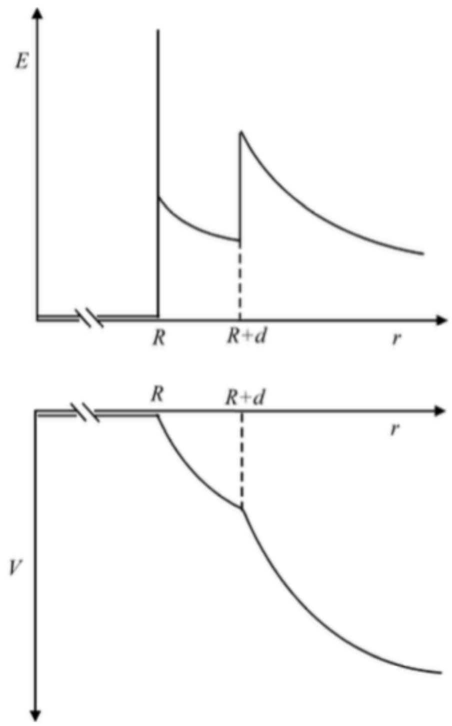
a. Gauss-Dose: Zylinder mit Radius $r \geq R$. Herleitung der Formel analog zu (3.24) und (3.25) im Vorlesungsskript.

$$E(r = R^+) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1.1 \cdot 10^{-12}}{2\pi \times 8.9 \cdot 10^{-12} \times 2.0 \cdot 10^{-2}} = 1.0\,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

b. Das elektrische Feld innerhalb der Polythänschicht ist um einen Faktor $\varepsilon_r = 2.3$ geschwächt.

$$\begin{aligned} E(r = R + d^-) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R+d)} \\ &= \frac{1.1 \cdot 10^{-12}}{2\pi \times 8.9 \cdot 10^{-12} \times 2.3 \times (2.0 \cdot 10^{-2} + 2.0 \cdot 10^{-3})} = 0.39\,\mathrm{N\,C^{-1}}. \\ E(r = R + d^+) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(R+d)} = 2.3 \times 0.39 = 0.90\,\mathrm{N\,C^{-1}}. \end{aligned}$$

c. Skizze vom Verlauf des elektrischen Felds en des elektrischen Potentials als Funktion von $r$:




In der Skizze wurde das Potential auf $r = R$ Null gesetzt. Dies führt zu

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R}{r}).$$

Man kann den Nullpunkt auch an einem anderen Ort Null setzen.

## Aufgabe 5: Induktion bei der Eisenbahn (5 Punkte)

Ein Zugwaggon hat eine Breite $d = 3.0\,\mathrm{m}$. Der Waggon ist leer, und dessen vertikale Wände bestehen aus Metallplatten. Der Waggon fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 60$ Kilometer pro Stunde an einem Ort wo die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes gleich $B = 0.61 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}$ ist. Wir nehmen an, der Waggon macht keinen elektrischen Kontakt zu dem Boden.

a. Berechnen Sie die induzierte Spannungsdifferenz zwischen den Seitenwänden.

$V =$ ______________________ V.

b. Wie gross ist das elektrische Feld innerhalb des Waggons in dessen Ruhesystem?

$E =$ ______________________ $\mathrm{V\,m^{-1}}$.

c. Berechnen Sie die Ladungsdichte $\sigma$ auf den ebenen Seitenwänden unter der Annahme dass sie unendlich ausgedehnt sind.

$\sigma =$ ______________________ $\mathrm{C\,m^{-2}}$.

---

## Aufgabe 5: Induktion bei der Eisenbahn (5 Punkte)

a. Unter Einfluss der magnetischen Kraft $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ bewegen sich die Elektronen seitwärts, und die äusseren Oberflächen der gegenüberliegenden Seitenwände werden positiv und negativ geladen. Das Anhäufen der Ladungen an den Seitenwänden

induziert ein elektrisches Gegenfeld. Sobald das Gegenfeld gleich $\mathbf{E}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ist, stoppt die Bewegung der Ladungen weil die Summe der magnetischen und der elektrischen Kraft dann zu Null aufaddiert. Für den Betrag der induzierten Spannungsdifferenz erhalten wir

$$V = vBd = \frac{60 \cdot 10^3}{3600} \times 0.61 \cdot 10^{-4} \times 3.0 = 3.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}.$$

b. Im Ruhesystem des Waggons ist die magnetische Kraft gleich Null. Dafür ist in diesem Bezugssystem ein auswendiges elektrisches Feld anwesend, das auf den äusseren Oberflächen der Seitenwände ebenso viel Influenzladung induziert als jene berechnet mit Hilfe der magnetischen Kraft im Ruhesystem der Eisenbahnschienen. Im inneren Raum des Waggons ist das netto Feld gleich Null.

c. Das elektrische Feld an der Oberfläche der Seitenwände is im Betrag gleich $E = vB$ und hat zur Ladungsdichte $\sigma$ folgende Beziehung:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \varepsilon_0 vB = 8.9 \cdot 10^{-12} \times \frac{60 \cdot 10^3}{3600} \times 0.61 \cdot 10^{-4} = 9.0 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{C\,m^{-2}}.$$

## Aufgabe 1: Kondensatoren

Wir betrachten einen Plattenkondensator bestehend aus zwei metallischen (ebenen) Platten mit je der Fläche $A = 25\ \text{cm}^2$ und dem Abstand $d = 1$ cm (siehe Figur). Der Kondensator wird mit einer Spannung $V = 1$ kV aufgeladen; zwischen den Platten bildet sich ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ aus, und ausserhalb des Kondensators verschwindet das elektrische Feld ($E = 0$, Randeffekte werden vernachlässigt). $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ C^2/(N \cdot m^2)$.

a) Wie gross ist die Feldstärke $|\vec{E}|$ zwischen den Platten?
   - i) $|\vec{E}| = 1$ kV
   - ii) $|\vec{E}| = 10$ V
   - iii) $|\vec{E}| = 100$ V/mm
   - iv) $|\vec{E}| = 1$ kV/m

b) Welche der folgenden Aussagen ist richtig. Die gespeicherte Energie zwischen den Platten ist:
   - i) linear zu der Kapazität $C$ des Kondensators und der angelegten Spannung.
   - ii) proportional zu der Kapazität $C$ des Kondensators und quadratisch mit der Ladung auf den Platten.
   - iii) invers proportional zu der Kapazität $C$ des Kondensators und linear mit der Ladung auf den Platten.
   - iv) proportional zu der Kapazität $C$ des Kondensators und quadratisch mit der angelegten Spannung.

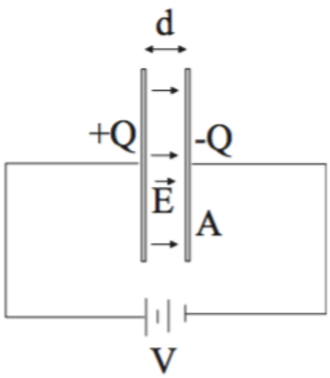
c) Was ist die Kapazität $C$ des Kondensators?

d) Welche Arbeit wurde geleistet, um den Kondensator aufzuladen?

Zwei leitende Zylinder mit den Radien $R_1$= 5 cm, $R_2$= 10 cm und gleicher Länge $L$= 1 m sind konzentrisch angeordnet. Der innere Zylinder hat die positive Ladung $Q = 5 \times 10^{-8}$ C, während der äussere Zylinder die Ladung $-Q$ hat.

e) Berechnen Sie die Feldstärke $E(r)$ als Funktion des Radius $r$.
*Hinweis*: Verwenden Sie das Gesetz von Gauss mit einer geschlossenen Zylinderfläche mit einem Radius $r$ für $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ und $r > R_2$. Randeffekte werden vernachlässigt, d.h. zwischen den Zylindern ist das E-Feld überall radial gerichtet und auserhalb des äusseren Zylinders gilt überall $E = 0$.

f) Wie gross ist die Spannung $U$ zwischen den zwei Zylindern?



## Aufgabe 1: Kondensatoren

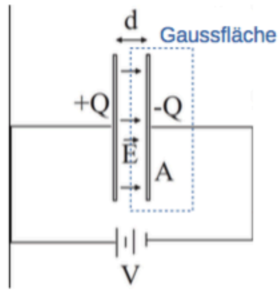
a) iii) Es gilt:

$$U_{AB} \doteq \int_A^B \vec{E} \cdot dr = E \cdot d = V = 1 \text{ kV}$$

$$E = \frac{V}{d} = 1 \text{ kV/cm}$$

b) iv) Die Energie $E$ ist definiert als: $E = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$

c) Wir zeichnen eine Skizze:




$$Q = C \cdot V \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{V}$$

$$\text{Satz von Gauss: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$Q = \epsilon_0 \cdot A \cdot E = \epsilon_0 \cdot \frac{A \cdot V}{d}$$

Und damit gilt:

$$\underline{C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}}$$

$$C = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-4}\text{m}^2}{10^{-2}\text{m}}$$

$$1\text{VAs} = \ 1 \text{ VC} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} \rightarrow \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = 1\frac{\text{C}}{\text{Vm}} = 1\frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$\underline{C = 2.21 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 2.21 \text{ pF}}$$

d)

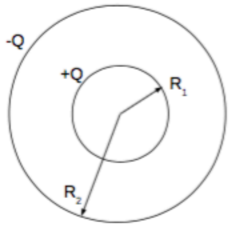
$$\underline{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.21 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot 10^6 \text{V}^2$$

$$= 1.11 \cdot 10^{-6} \text{ VC} = \underline{1.11 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$$

e) Das $\vec{E}$-Feld zeigt radial vom inneren zum äusseren Zylinder (von der positiven zur negativen Ladung). Das Gesetz von Gauss lautet dann:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{eing.}}$$

wobei $Q_{\text{eing.}}$ die von der Fläche eingeschlossene Ladung ist.




Wir wählen einen Zylinder mit Radius $r$ und Länge $L$ als Gaussfläche:

$\rightarrow$ Grund- und Deckfläche (Kreise) tragen nicht zum Integral bei, da $\vec{E} = 0$ oder $\vec{E} \perp d\vec{A}$.

Integral über den Zylindermantel:

$r < R_1$ : $Q_{\text{eing.}} = 0 \rightarrow E(r) = 0$, für $r < R_1$

$R_1 \leq r \leq R_2$ : Auf dem Zylindermantel steht das $\vec{E}$-Feld überall senkrecht auf die Fläche, und der Betrag $|\vec{E}|$ ist aus Symmetriegründen konstant,

d.h. $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

$$\rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Zyl'mantel}} E dA = E(r) \int_{\text{Zyl'mantel}} dA = E(r) \cdot 2\pi r L$$

$$E(r) 2\pi r \cdot L = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\rightarrow \underline{E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{Q}{r}} \quad , \text{ für } \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$r > R_2$ : $Q_{\text{eing.}} = -Q + Q = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$, für $\quad r > R_2$.

f) Es gilt:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{ist unabhängig von gewählten Weg}$$

Wir wählen den radialen Weg: $\vec{E} \parallel d\vec{r}$:

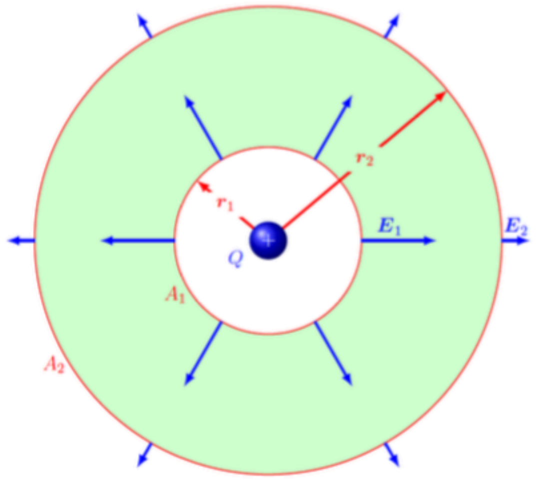
$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln 2$$

$$\underline{U} = \frac{5 \cdot 10^{-8} \cancel{C} \mathrm{Nm}^{\cancel{2}}}{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \mathrm{C}^{\cancel{2}} \cdot \cancel{1\,\mathrm{m}}} \ln 2 = 623 \, \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}} = 623 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \underline{623 \, \mathrm{V}}$$

## Aufgabe 2: Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld (Generator)

a) Zwei kugelförmige (geschlossene) Oberflächen, die als $A_1$ und $A_2$ bezeichnet werden, schliessen in deren Mittelpunkt eine Punktladung Q ein. Welche der folgenden Aussagen ist richtig.



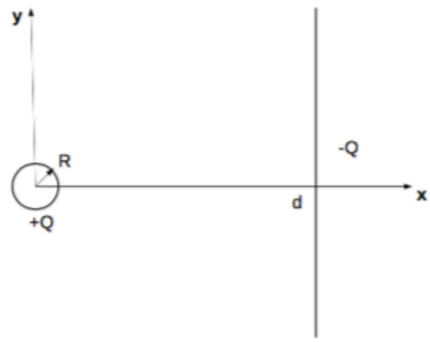

i) Der elektrische Fluss durch $A_2$ ist grösser als durch $A_1$, da $A_2$ grösser als $A_1$ ist.

ii) Der elektrische Fluss durch $A_1$ ist grösser als durch $A_2$, da das elektrische Feld bei $A_1$ grösser ist als bei $A_2$.

iii) Der elektrische Fluss ist für beide Oberflächen der gleiche.

iv) Der elektrische Fluss durch $A_1$ ist grösser als durch $A_2$, da die Feldliniendichte bei $A_1$ grösser ist als bei $A_2$.

b) Eine homogene Kugel mit Ladung Q und Radius R im Ursprung und eine unendlich ausgedehnte Metallplatte mit Ladung -Q sind wie in der Skizze angeordnet. Welche der folgenden Aussagen ist richtig.




i) Die elektrischen Feldlinien sind gleich wie die von einem elektrischen Dipol, welcher durch zwei Punktladungen Q bei (0,0) und -Q bei (d,0) erzeugt wird.

ii) Die elektrischen Feldlinien sind gleich wie die von einem elektrischen Dipol, welcher durch zwei Punktladungen Q bei (0,0) und -Q bei (2d,0) erzeugt wird.

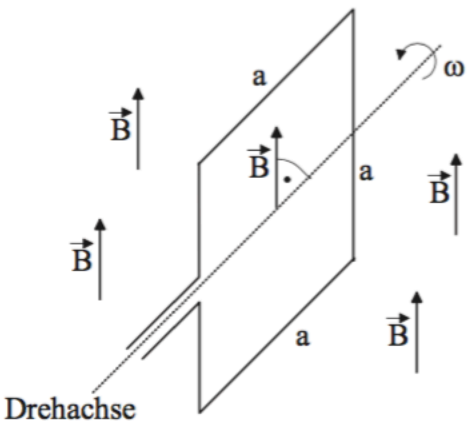
iii) Die elektrischen Feldlinien in der Region $r > R$ sind gleich wie die von einem elektrischen Dipol, welcher durch zwei Punktladungen Q bei (0,0) und -Q bei (2d,0) erzeugt wird.

iv) Die elektrischen Feldlinien in der Region $r > R$ sind gleich wie die von einem elektrischen Dipol, welcher durch zwei Punktladungen Q bei (0,0) und -Q bei (d,0) erzeugt wird.

Eine quadratische Leiterschleife mit Seitenlängen $a = 1$ m befindet sich in einem homogenen, vertikalen Magnetfeld $|\vec{B}| = 1$ T. Die Schleife rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot 50$ Hz um eine horizontale Drehachse (angetrieben durch eine mechanische Kraft, z.B. durch eine Turbine). Die Drehachse ist parallel zu zwei Seiten und geht durch den Mittelpunkt der Leiterschleife (siehe Abbildung).

c) Berechnen Sie der Magnetischen Fluss durch die Leiterschleife als Funktion der Zeit.

d) Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U_{ind}$ als Funktion der Zeit.

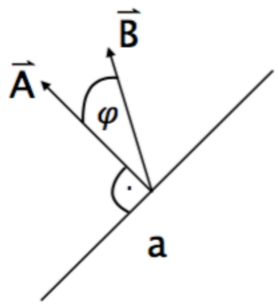


**Aufgabe 2:** Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld

a) iii) Aus dem Gaussschen Satz folgt dass der Fluss $\Phi = Q_{\text{eing.}}/\epsilon_0$ und damit unabhängig von den Oberflächen ist.

b) iii) Da die Feldlinien auf der Platte senkrecht stehen, kann man die Platte als Spiegel für die Feldlinien betrachten.

c) $\vec{A}$: Flächenvektor steht senkrecht auf der Schleifenebene:




Magn. Fluss durch die Leiterschleife:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \vec{A}\cdot\vec{B} \quad ; \quad |\vec{A}| = a^2 = 1 \text{ m}, |\vec{B}| = 1 \text{ T} \\ &= A \cdot B \cdot \cos\phi \\ &= a^2 B \cos\phi = a^2 B \cos\omega t\end{aligned}$$

d)

$$\underline{U_{\text{ind.}}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -a^2 B(-\omega)\sin\omega t = a^2 B\omega \sin\omega t = \underline{U_0 \sin\omega t}$$

$$U_0 = a^2 B\omega = 1 \text{ m}^2 \cdot\ 1 \text{ T}\cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad 1 \text{ T} = 1\frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

$$\rightarrow \underline{U_0 = 100\cdot\pi \text{ V} = 314 \text{ V}}$$