1 Mengen

Obere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2 Komplexe Zahlen

$$(a,b)\cdot(b,c) = (ac - bd, ad + bc)$$

3 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\pi) = 0$$
$$\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \cos(\pi) = -1$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Fr } x \to +\infty:\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Fr } x \to 0:\quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Tipps

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha}+\beta)\frac{\sqrt{\alpha}-\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0" oder "1^∞" fr $x \to 0$

Vorgehen

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$.
Falls die Grenzwerte $0 \neq \infty$ verschieden sind, kann man umformen: $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

Vorgehen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g(x)}$$

5 Folgen und Reihen

6 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7 Integration

7.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

7.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

7.3 Tipps

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\log|\cos(x)|$$
$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

8 Differentialgleichungen

8.1 Trennung der Variable

Anforderung

Ist 1. Ordnung mit der Form $y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$

Vorgehen

$$y' + x \tan y = 0, \; y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Umformen $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

Konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -xdx$

Integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int xdx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin y(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

8.2 Variation der Konstanten

$$y(x) = y_{\text{Homo}}(x) + y_p(x)$$

Anforderung

Inhomogenes Problem 1. Ordnung mit der Form $y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$

Vorgehen

	$y' - y = 1,\ y(0) = 0$
Homogener Ansatz	$y' = y$
Konstante Lösungen	$y(x) \equiv 0$
Trennung	$\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log\|y\| = x$
Homogene Lösung	$y_{\text{Homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R}$
Partikulärer Ansatz	$y_p(x) = A(x)e^x$
Einsetzen	$A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x}$
Partikuläre Lösung	$y_p(x) = -1$
Lösung	$y(x) = Ae^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$
	$\Rightarrow y(x) = e^x - 1$