

ETH Physik - Formelsammlung

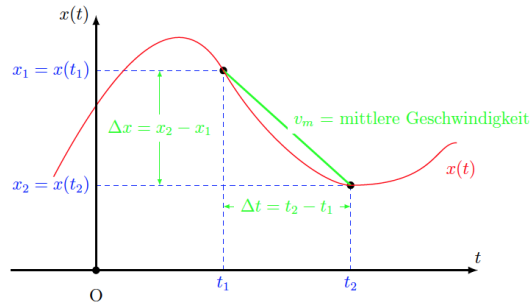
Laurin Brandner — Jakub Kotal — Nino Scherrer

2. Semester 2016

2 Kinematik

2.1 Allgemeine Zusammenhänge

$\text{Weg} \xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}} \text{Geschwindigkeit} \xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}} \text{Beschleunigung}$



Verschiebung:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ oder } V = at$$

Beschleunigung

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ oder } a = \frac{V}{t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2.2 Integration der Bewegung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v(t)dt$$

dx = Weg innerhalb des Zeitintervalls dt

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0$$

Schlussendlich folgt daraus:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' + x_0$$

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t')dt' + v_0$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$

x_0 entspricht dem Startpunkt

v_0 entspricht der Startgeschwindigkeit

Bewegung gleichförmig und geradlinig

$v(t) = \text{konst.} \Rightarrow a(t) = 0$ gilt:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Bewegung gleichförmig beschleunigt und geradlinig

$a(t) = a_0 = \text{konst.}$ gilt:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

Spezialfall: $x_0 = v_0 = t_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2$$

$$v(t) = a_0t$$

$$a(t) = a_0$$

2.3 Freier Fall / Gravitation

In der Nähe der Erdoberfläche fühlt jeder Körper, unabhängig von seinem Gewicht, dieselbe Beschleunigung (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird).

$$h = \frac{1}{2}a_0t^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mit Fallhöhe h und Fallzeit t .

Hinweis : Es existiert eine Grenzggeschwindigkeit, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit (quadratisch) des Körpers zunimmt.

2.4 Bewegung in mehreren Dimensionen

$$r = r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)e_r(t)$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_x(t)e_x + v_y(t)e_y = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{de_r}{dt}e_y = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_1 e_r + r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_2 e_\varphi$$

1 : radiale Geschwindigkeit V_r

2 : Winkelgeschwindigkeit V_φ senkrecht zu e_r in Richtung e_φ

Vereinfacht dargestellt:

$$V(t) = V_r + V_\varphi \quad \text{mit } V_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} e_\varphi = r\omega e_\varphi$$

Beschleunigung:

$$a(t) = a_x(t)e_x + a_y(t)e_y = \frac{dv_x}{dt}e_x + \frac{dv_y}{dt}e_y = \frac{d^2x}{dt^2}e_x + \frac{d^2y}{dt^2}e_y$$

In Polarkoordinaten:

$$a(t) = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}e_x - r\left(\frac{d\varphi}{dt}e_y\right)^2}_{1}e_r + \underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)}_2e_\varphi$$

1 = radiale Beschleunigung

2 = Winkelbeschleunigung

2.5 Zerlegung/Integration der Bewegung (mehrdimensional)

Aus den Bewegungsgleichungen sieht man, dass die zueinander senkrecht stehenden x- und y-Bewegungen voneinander unabhängig sind.

=> Bei 3 Dimensionen kann diese Betrachtung einfach erweitert werden

$$v(t) = v_0 + a_0(t)$$

$$r(t) = r_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2$$

$$= \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2\right)e_x + \left(y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2\right)e_y$$

2.6 Bahnkurve beim Ballwurf

Zur Zeit t_{max} erreicht die Kugel den höchsten Punkt ihrer Bahnkurve. In diesem Punkt verschwindet die vertikale Geschwindigkeit:

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Die maximale Höhe der Kugel ist:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

2.7 Schuss auf fallende Platte

Eventuell noch mit Beispiel ergnzen

2.8 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \omega t$$

mit Winkelgeschwindigkeit ω und Periode T :

$$\varphi(T) = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Strecke:

$$s(t) = r\varphi(t) = r\omega t$$

Vektorielle Darstellung

$$r(t) = r\cos(\varphi(t))e_x + r\sin(\varphi(t))e_y$$

Da Bewegung gleichförmig ($\omega = \text{konstant}$) folgt:

$$r(t) = r\cos(\omega t)e_x + r\sin(\omega t)e_y$$

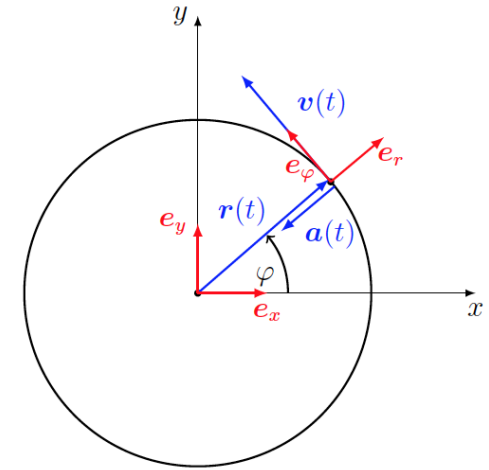
2.8.1 Geschwindigkeitsvektor

Betrag: $|\vec{v}| = r\omega = \text{konst.}$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zum Ortsvektor.

2.8.2 Beschleunigungsvektor = Zentripetalbeschleunigung

Zeigt in Richtung Zentrum des Kreises mit Betrag: $\vec{a} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$



3 Dynamik

3.1 Definitionen

3.1.1 Masse

Masse ist Eigenschaft eines Körpers \Rightarrow überall gleich (im Gegensatz zu Gewicht).

3.1.2 Lineare Impuls

Der lineare Impuls ist definiert als

$$p = mv \quad \text{mit Einheit} \quad \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow p_A + p_B = 0$$

In einem isolierten System ist der **Gesamtimpuls** erhalten.

3.1.3 Kraft

Die Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses:

$$F = ma(t) \quad \text{mit Einheiten} \quad 1N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

3.2 Newtonsche Gesetze

3.2.1 Trägheitsprinzip

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn er isoliert ist.

3.2.2 Aktionsprinzip

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt.

3.2.3 Aktions-Reaktions-Prinzip

Zu jeder Aktion gehört eine gleich grosse Reaktion, die denselben Betrag besitzt aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

3.3 Raketenantrieb

$v(t)$ Geschwindigkeit der Rakete bezüglich dem festen Koordinatensystem

u Konstante Ausstossgeschwindigkeit des Gases *relativ zur Rakete* (relativ zum festgelegten Koordinatensystem mit Geschwindigkeit $v - u$)

$M(t)$ Gesamtmasse, also Rakete + Treibstoff zur Zeit t

Der **Gesamtimpuls** der Rakete zur Zeit t ist gleich

$$p(t) = M(t)v(t)$$

Auf die Rakete wirkt die **Schubkraft** F

$$F = u \frac{dm}{dt}$$

Und die **Geschwindigkeit**

$$v(t) - v_0 = -u(\ln(M_0 - m) - \ln(M_0))$$

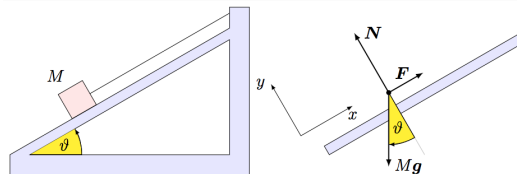
wobei M_0 die Anfangsmasse und m die Gesamtmasse des ausgestossenen Gases ist.

Oder als Funktion der ausgestossenen Masse (mit $v_0 = 0$)

$$v = u \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{m}{M_0}}\right)$$

3.4 Schiefe Ebene

3.4.1 Statischer Fall



$$F + N + Mg = 0$$

Daraus folgt

$$F = Mg \sin(\vartheta)$$

$$N = Mg \cos(\vartheta)$$

3.4.2 Dynamischer Fall

$$N + Mg = F_{res} = Ma$$

Dank der Normalkraft verschwindet die Beschleunigung in y -Richtung. In x -Richtung ist sie gleich

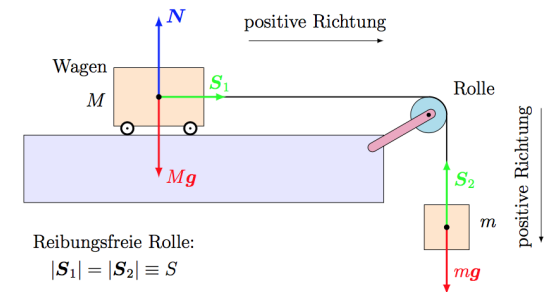
$$a_x = -g \sin(\vartheta)$$

3.5 Federkraft

$$F = -k(x - x_0) = -k\Delta x$$

wobei k die Federkonstante mit Einheit $\frac{N}{m}$, x_0 die Länge der Feder im unbelasteten Zustand ist.

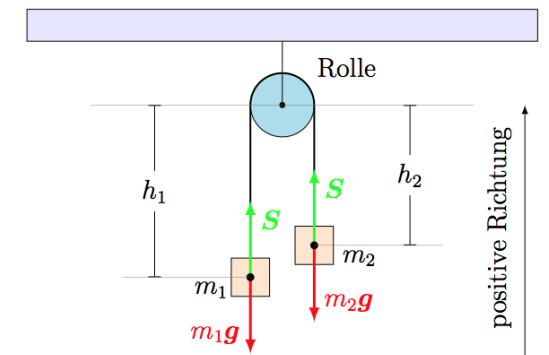
3.6 Bewegung mit Rollen



$$S = Ma$$

$$a = \frac{m}{M + m}g$$

3.7 Atwoodsche Fallmaschine



$$a_1 = -a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

$$S = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \quad \text{wobei} \quad |a_1| = |a_2| < g$$

3.8 Harmonische Schwingungen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

wobei A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und δ die Phasenkonstante ist.

Die **Kreisfrequenz** ω hängt dabei nur von der Rückstellkraftkonstante k und der Masse m ab

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Der Winkel der Sinusfunktion wird als **Phase** der Schwingung bezeichnet

$$\varphi(t) = \omega t + \delta$$

wobei δ die ursprüngliche Phase zur Zeit $t = 0$ ist.

Die **Periode** T ist die Zeit, die benötigt wird, um eine vollständige Schwingung durchzuführen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die **Frequenz** v ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeit

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Die **Kraft** F zeigt immer Richtung Ursprung und ist gleich

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t)$$

3.9 Gravitation

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad \text{wobei} \quad F_{12} = -F_{21}$$

Hinweis: Alle Körper, unabhängig von ihren Massen, werden von der Erde gleich beschleunigt.

4 Energie

4.1 Energieerhaltung

Bei allen Vorgängen muss die Gesamtenergie eines Systems und seiner Umgebung erhalten werden.

$$E_{tot} = E_{Masse} + E_{kin} + E_{pot} + E_{chem} + \text{usw.} = \text{konst.}$$

4.2 Relativistische Grössen

$$\text{Geschwindigkeitsparameter} \equiv \frac{v}{c}$$

Für hohe Geschwindigkeiten gilt der relativistische Impuls:

$$p = \gamma mv$$

mit dem **Lorentzfaktor** γ

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4.3 Kinetische Energie

4.3.1 Klassisch ($v < 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

4.3.2 Relativistisch ($v \geq 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

4.4 Potentielle Energie der Gravitation

Die **potentielle Energie** eines Körpers auf der Höhe h ist gleich

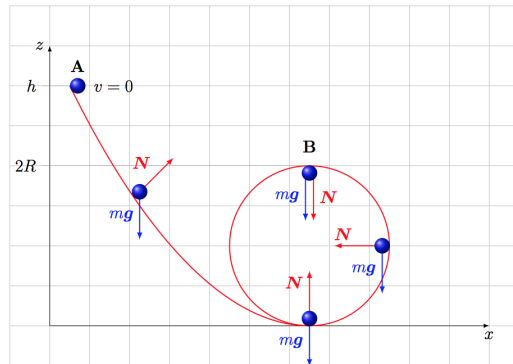
$$E_{pot}(h) = mgh$$

Die **Gesamtenergie** eines Körpers im freien Fall von der Höhe h ist gleich

$$E(y) = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{mgy}_{\text{potentiell}}$$

falls der *Luftwiderstand* vernachlässigt werden darf.

4.5 Looping



Ist die Geschwindigkeit kleiner als v_{min} , löst sich der Ball vom Kreis

$$v_{min} = \sqrt{gR}$$

Die Höhe h , von der die Kugel fallen gelassen werden muss, ist gleich

$$h = \frac{5}{2}R > 2R$$

4.6 Arbeit

Die **Arbeit** W ist gleich dem Produkt der Komponente der Kraft längs der Verschiebung und der Verschiebung selbst

$$W = F \Delta x \cos(\vartheta)$$

4.6.1 Arbeit der Federkraft

Die **Arbeit** zwischen den Verschiebungen x_1 und x_2 ist gleich

$$W_{12} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

4.7 Leistung

Die **Leistung** P ist die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$$

4.8 Allgemeine potentielle Energie

4.8.1 Konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit längs eines geschlossenen Wegs ist gleich null. Die Arbeit ist unabhängig vom zurückgelegten Weg. Potentielle Energie ist für diese Art von Kräften definiert.
Beispiel: Gravitationskraft, Federkraft

4.8.2 Nicht-konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit hängt vom Weg ab.
Beispiel: Reibungskraft

4.9 Arbeit-Energie-Theorem

Die Arbeit, die an einem Körper zwischen zwei Punkten (1) und (2) geleistet wird, ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie zwischen diesen Punkten.

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

4.10 Mechanische Energie

$$E_{mech} \equiv E_{kin} + E_{pot}$$

Die mechanische Energie wird *erhalten*, wenn nur konservative Kräfte wirken.

Die Änderung der mechanischen Energie ist gleich der Arbeit, die von *nicht-konservativen* Kräften geleistet wird.

4.11 Bremsweg

Betrachtet wird das Gleiten auf einer schiefen Ebene mit der Starthöhe h und dem Neigungswinkel ϑ . Dann ist der **Bremsweg** L

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta))}$$

5 Mechanische Wellen

5.1 Wellenfunktion

$$\xi = \xi(x, t)$$

x = Raumkoordinate

t = Zeit

Wellentypen:

1. Seilwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale Auslenkung des Seils
2. Federwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale oder longitudinale Verformung der Feder
3. Gaswellen: $\xi(x, t)$ beschreibt den Druck des Gase

Vereinfachung - Weglassen der Dispersion

Normalerweise verändert sich die Form des Wellenberges mit der Zeit (=Dispersion). Wir werden dies allerdings weglassen und den Wellenberg als stabile Form betrachten.

Zudem nehmen wir die Welle zur Zeit t=0 an. Daraus folgt:

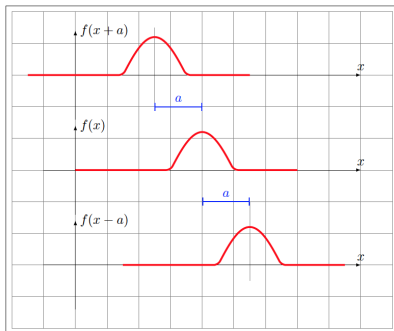
$$\xi(x, t = 0) = f(x)$$

Welle nach links:

$$\xi = f(x - vt)$$

Welle nach rechts:

$$\xi = f(x + vt)$$



5.2 Harmonische Wellen

Laufende harmonische Welle:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\{k(x \pm vt)\}$$

k = Wellenzahl ξ_0 = Amplitude

Wobei k und v:

$$k(x + \lambda) = kx + 2\pi \implies k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \nu \lambda$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

ν = Frequenz der Welle, ω = Kreisfrequenz,

v = Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Wellengleichung:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - v^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} = 0$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

	Medium	Temperatur	Ausbreitungsgeschwindigkeit [m/s]
Gase:	Luft	0°C	331
	Luft	20°C	343
	Helium	20°C	965
	Wasserstoff	20°C	1284
Flüssigkeiten:	Wasser	0°C	1402
	Wasser	20°C	1482
	Seewasser	20°C	1522
Festkörper: (longitudinale Wellen)	Aluminium		6420
	Stahl		5941
	Granit		6000

Tabelle 5.1: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen.

5.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit transversaler, elastischer Seilwellen

Längendichte des Seils:

$$p = \frac{M}{L}$$

M = Masse des Seils, L = Länge des Seils

$$v^2 = \frac{S}{p} \implies v = \pm \sqrt{\frac{S}{p}}$$

wobei S die Spannung des Seils und p die Längendichte ist.

5.5 Wellen im Festkörper

5.6 Prinzip der Superposition

5.7 Stehende Wellen

6 Relativität

6.1 Relativbewegung

Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, messen verschiedene Geschwindigkeiten und Beschleunigungen:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{relativ zu } O} = \frac{dR(t)}{dt} + \underbrace{v'(t)}_{\text{relativ zu } O'}$$

$$\underbrace{a(t)}_{\text{relativ zu } O} = \frac{d^2 R(t)}{dt^2} + \underbrace{a'(t)}_{\text{relativ zu } O'}$$

6.2 Scheinkräfte

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten. Es ist *nicht beschleunigt*.

Die **Zentrifugalkraft** ist eine fiktive, nach aussen gerichtete Kraft:

$$F_{ZF} = m(r'\omega^2)e_r$$

Die **Corioliskraft** wirkt senkrecht zur radialen Geschwindigkeit:

$$F_C = m(2v'\omega)e_\varphi$$

Hinweis: Ein Bezugssystem, das feste Koordinaten relativ zur Erdoberfläche hat ist kein Inertialsystem, da die Erde sich dreht/beschleunigt ist.

6.3 Transformationen

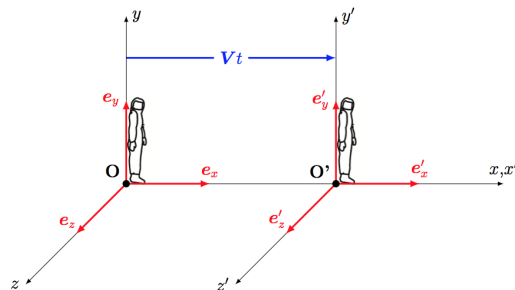
6.3.1 Ereignis

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$$

wobei das Produkt ct die Lichtgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ mal die Zeit $[s]$ ist.

6.3.2 Galileitransformation

Wir betrachten zwei Beobachter O und O' , die sich relativ zueinander mit *konstanter Geschwindigkeit* bewegen.



Bewegt sich der Beobachter O' in positive Richtung der x-Achse des Bezugssystems O , so ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} x' = x - \beta ct \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = ct \end{cases} \quad \text{von } O \text{ nach } O'$$

$$\begin{cases} x = x' + \beta ct \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = ct' \end{cases} \quad \text{von } O' \text{ nach } O$$

wobei der **Geschwindigkeitsparameter** $\beta = \frac{V}{c}$ ist.

6.3.3 Lorentz-Transformation

Der **Lorentz-Faktor** ist gleich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dann ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad \text{von } O \text{ nach } O'$$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases} \quad \text{von } O' \text{ nach } O$$

6.3.4 Geschwindigkeitstransformation

Der **Geschwindigkeitsvektor** u bezüglich O kann wie folgt berechnet werden

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{\beta}{c} u'_x)}$$

6.4 Relativitätstheorie

6.4.1 Raumzeit-Intervall

Räumliche und zeitliche Entfernungen sind in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich. Nur das **Raumzeit-Intervall** Δs ist gleich für alle Beobachter.

$$\Delta s^2 = \underbrace{(c\Delta t)^2}_{\text{zeitliche Entfernung}} - \underbrace{\Delta r^2}_{\text{räumliche Entfernung}}$$

6.4.2 Zeitdilatation

Das in einem bewegten Bezugssystem gemessene Zeitintervall ist immer um den Faktor γ grösser als das Eigenzeitintervall:

$$\underbrace{\Delta t'}_{\text{bezüglich } O' \text{ gemessene Zeit}} = \underbrace{\gamma \cdot \Delta \tau}_{\text{bezüglich } O \text{ gemessene Zeit}}$$

wobei $\Delta \tau$ das Eigenzeitintervall ist (Zeit im Ruhesystem gemessen).

Daraus folgt, dass Vorgänge länger zu dauern scheinen, wenn sie in einem System ablaufen, das sich relativ zum Beobachter bewegt.

6.4.3 Längenkontraktion

Die räumliche Entfernung zwischen zwei Punkten erscheint geringer, wenn sich der Beobachter relativ zu diesen Punkten bewegt, als wenn er relativ zu ihnen ruht:

$$\underbrace{\Delta x'}_{\text{bezüglich } O' \text{ gemessene Länge}} = \underbrace{\frac{\Delta x}{\gamma}}_{\text{bezüglich } O \text{ gemessene Länge}}$$

wobei $\Delta\lambda$ die Eigenlänge ist (Länge im Ruhesystem gemessen).