

1 Matrizen

symmetrisch	$A^T = A$, $AB = BA$, quadratisch
schiefsymmetrisch	$A^T = -A$
hermitesch	$A^H = A$, quadratisch
unitär	$A^H A = I_n$ also $A^{-1} = A^H$, Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal
orthogonal	$A^T A = I_n$ also $A^{-1} = A^T$

1.1 Regulär

Sei $A^{m \times n}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten **regulär** mit Rang r :

- A ist quadratisch
- $r = n$
- A ist invertierbar
- Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind linear unabhängig und erzeugen \mathbb{E}^m bzw. \mathbb{E}^n
- 0 ist kein Eigenwert
- $\det(A) \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- Die lineare Abbildung A ist bijektiv
- für jedes b in $Ax = b$ gibt es genau eine Lösung
- die Spalten bilden eine Basis

1.2 Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$B = \text{diag}(2, 3, 4, 5) \Rightarrow B^{-1} = \text{diag}(1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$$

1.3 Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Operationen

$A \cdot B = C$ ist definiert, falls A gleichviele Spalten hat wie B Zeilen. C hat dann gleichviele Zeilen wie A und gleichviele Spalten wie B .

$$\begin{aligned}(\alpha A)B &= \alpha(AB) = A(\alpha)B \\(\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\(A + B)C &= AC + BC \\(\alpha A)^T &= \alpha A^T \\(A + B)^T &= A^T + B^T \\(AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

2 LR-Zerlegung

Grundsatz: $Ax = b$, $PA = LR \Rightarrow Lc = Pb$, $Rx = c$

wobei R A nach Gauss aufgelöst ist, und L die Inverse der Zeilensubtraktionen hält

Pivotierung: Nullen oder relativ kleine Zahlen können als Pivot nicht gebraucht werden. Man benutzt normalerweise die **Kolonennmaximumstrategie** (wählt immer das betragsmässig grösste Element in der Spalte aus).

3 Vektorräume

3.1 Vektor

$$\begin{array}{ll} \text{Länge, 2-Norm} & \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ \text{Winkel} & \varphi = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right) \end{array}$$

3.2 Orthonormalbasen

Unterraum	von $\text{span } S$ mit $S = a_1, \dots, a_2$ aufgespannt bzw. die Menge aller Linearkombinationen von S
Erzeugendensystem	die Menge S
Basis	linear unabhängiges Erzeugendensystem
Dimension	die Anzahl Basisvektoren

3.3 Skalarprodukt

$$\begin{array}{ll} \text{linear} & \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ & \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\ \text{symmetrisch} & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\ \text{positiv definit} & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ & \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}$$

3.4 Norm

$$\begin{array}{ll} \text{positiv definit} & \|x\| \geq 0 \\ & \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Homogenität} & \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \\ \text{Dreiecksungleichung} & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{array}$$

3.5 Orthogonalisierungsverfahren

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|} \\ \tilde{b}_2 &= a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1 \\ b_2 &= \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} \\ \tilde{b}_3 &= a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2 \\ b_3 &= \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} \end{aligned}$$

4 Lineare Abbildungen

Sei $F : X \mapsto Y$ mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$ heisst **linear**, falls:

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}, \quad F(\gamma x) = \gamma(Fx)$$

Matrixdarstellung	A , so dass $F(x) = Ax$
Kern	$\{x \in X; Fx = 0\}$, alle Vektoren in X , die auf 0 zeigen
Bild	alle Vektoren in Y , die von X mit F erreicht werden
Rang	$\text{Rang } F := \dim \text{im } F$ Dimension des Spaltenraums Dimension des Zeilenraums
Kolonnenraum	im $A = \mathcal{R}(A)$, der von den Kolonnen von F aufgespannte Unter- raum
Nullraum	$\ker A = \mathcal{N}(A)$

Aus der **Dimensionsformel** $\dim X - \dim \ker F = \text{Rang } F$ folgt, falls F :

injektiv	keine Kollisionen Spaltenvektoren linear unabhängig $\text{Rang } F = \dim X$ $\ker F = \{0\}$
surjektiv	es wird jedes Element in Y erreicht $\text{Rang } F = \dim Y$
bijektiv, d.h. Isomorphismus	$\text{Rang } F = \dim X = \dim Y$
bijektiv, d.h. Automorphismus	$\text{Rang } F = \dim X$ $\ker F = 0$

4.1 Bestimmung der Basis für Kern/Bild

1. Gauss anwenden
2. Basis des **Bildes**
 - (a) Alle linear unabhängigen Spaltenvektoren (alle mit Pivot)
3. Basis des **Kerns**
 - (a) Setze $Fx = 0$
 - (b) Berechne von freien Variablen abhängige Lösung
 - (c) Klammere freie Variablen aus

BEISPIEL TODO

4.2 Bestimmung der Abbildungsmatrix

Grundsatz: Die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren.

gegeben: $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$$

gesucht: Abbildungsmatrix A bezüglich $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Grundsatz anwenden: $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.3 Transformation

$$\begin{array}{ccc}
 x \in X & \xrightarrow[\text{lin. Abb.}]{F} & y \in Y \\
 \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten-} \\ \text{abbildung bzgl.} \\ \text{“alten” Basen)} \end{array} \\
 \xi \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{A}} & \eta \in \mathbb{E}^m \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten} \\ \text{bzgl. “alten”} \\ \text{Basen)} \end{array} \\
 \mathbf{T}^{-1} \downarrow \uparrow \mathbf{T} & & \mathbf{S}^{-1} \downarrow \uparrow \mathbf{S} \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten-} \\ \text{transformation)} \end{array} \\
 \xi' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{B}} & \eta' \in \mathbb{E}^m \quad \begin{array}{l} \text{(Koordinaten} \\ \text{bzgl. “neuen”} \\ \text{Basen)} \end{array}
 \end{array} \quad (5.48)$$

Es gilt also

$$\boxed{y = Fx, \quad \eta = \mathbf{A}\xi, \quad \xi = \mathbf{T}\xi', \quad \eta = \mathbf{S}\eta', \quad \eta' = \mathbf{B}\xi'}. \quad (5.49)$$

Diesen Formeln oder dem Diagramm entnimmt man, dass für die Abbildungsmatrix \mathbf{B} , die die Abbildung F bezüglich den “neuen” Basen in \mathbb{E}^m und \mathbb{E}^n beschreibt, gilt

$$\mathbf{B}\xi' = \eta' = \mathbf{S}^{-1}\eta = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\xi = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\xi'$$

Da ξ' beliebig ist, ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}. \quad (5.50)$$

Aus Satz 5.16 folgt im übrigen wegen $\text{Rang } \mathbf{S}^{-1} = \text{Rang } \mathbf{T} = n$, dass $\text{Rang } \mathbf{B} = \text{Rang } \mathbf{A}$ ist, und in ähnlicher Weise folgt aus Korollar 5.10, dass $\text{Rang } F = \text{Rang } \mathbf{A}$ ist:

$$\boxed{\text{Rang } F = \text{Rang } \mathbf{A} = \text{Rang } \mathbf{B}}. \quad (5.51)$$

Im Falle einer linearen Abbildung von X *in sich*, ist natürlich $Y = X$, $\kappa_Y = \kappa_X$, $\mathbf{S} = \mathbf{T}$. Aus (5.50) wird damit

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}. \quad (5.52)$$

5 Projektionen

Projektion	lineare Abbildung für die gilt $P^2 = P$
Orthogonalprojektion	<ol style="list-style-type: none">1. Projektion für die gilt $\ker P \perp \operatorname{im} P$2. P ist quadratisch3. $I - P$ ist orthogonaler Projektor4. $P^T = P$

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H$$

$$P_Q := Q Q^H \quad \text{falls Kolonnen von } Q \text{ orthonormal}$$

5.1 Methode der kleinsten Quadrate

Beispiel 7.4 Seite 7-7 im Skript

5.2 QR-Zerlegung

Grundsatz: $A = QR$

$$\begin{aligned} \text{mit } q_1 &:= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle, \quad q_k := \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|} \\ r_{11} &:= \|a_1\|, \quad r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle, \quad r_{kk} := \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gram-Schmidt: } r_{11} = \|a_1\|, \quad q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = q_1^T a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\tilde{q}_2 = (I - q_1 q_1^T) a_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\tilde{q}_2\| = 5$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = (I - q_1 q_1^T)(I - q_2 q_2^T) a_3$$

und so weiter...

$$\text{Lösung: } Q = (q_1, q_2, q_3), \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

6 Determinante

Es gilt:

- $\det A = 0 \Rightarrow Ax = b$ ist nicht lösbar
- A hat eine Zeile lauter Nullen $\Rightarrow \det A = 0$
- A hat zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det A = 0$
- A ist eine Diagonalmatrix $\Rightarrow \det A = \text{Produkt der Diagonalelemente}$
- A ist eine Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det A = \text{Produkt der Diagonalelemente}$

6.1 Identitäten

$$\det(\gamma A) = \gamma^n \det A$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \quad \text{falls } A \text{ regulär}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^H) = \det(A)$$

6.2 Berechnung

6.3 Dimension 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

6.4 Dimension 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + dbi + ahf)$$

6.5 Allgemeine Dimension $n \times n$

Grundsatz: $\det A = a_{kl} \mathcal{K}_{kl}$
wobei $\mathcal{K}_{kl} := (-1)^{k+l} \det A_{[k,l]}$

Tipp: Wähle die Zeile/Spalte aus mit den meisten Nullen.

gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

entwickeln nach der 2. Zeile: $\mathcal{K}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$

$$\mathcal{K}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 28$$

Lösung: $\det A = a_{21} \mathcal{K}_{21} + a_{22} \mathcal{K}_{22} + a_{23} \mathcal{K}_{23} + a_{24} \mathcal{K}_{24}$
 $= 2(-12) + 4(-2) + 6(-2) + 3(28) = 40$

7 Eigenwerte und -vektoren

Betrachte eine lineare Abbildung $F: V \mapsto V, x \mapsto Fx$:

Eigenwert	$\lambda \in \mathbb{E}$, so dass $Fv = \lambda v$
Eigenvektor	$v \in V, v \neq 0$, so dass $Fv = \lambda v$
Eigenraum	gehört zu spezifischem Eigenwert $E_\lambda := \{v \in V; Fv = \lambda v\}$
Spektrum	$\sigma(F)$, Menge aller Eigenwerte von F

7.1 Berechnung der Eigenwerte

$$\textbf{Grundsatz: } E_\lambda = \ker (F - \lambda I) = \det(F - \lambda I)$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{char. Polynom: } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \mathcal{X}_A(\lambda)$$

$$\text{Nullstellen finden: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

$$\textbf{Eigenwerte: } \sigma(A) = \{1, 2, -1\}$$

7.2 Berechnung der Eigenvektoren

Eigenwerte in A einsetzen

4	-1	3	0
8	-2	6	0
-4	1	-3	0

5	-1	3	0
8	-1	6	0
-4	1	-2	0

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Spektralzerlegung

$$\textbf{Grundsatz: } AV = V\Lambda \Leftrightarrow A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 12 & -2 & 12 \\ 12 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte bestimmen: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren bestimmen: } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Eigenbasis: } V = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: A muss diagonalisierbar sein, d.h. die **geometrische Vielfachheit** der Eigenwerte muss mit der **algebraischen Vielfachheit** übereinstimmen.

7.4 Hauptachsentransformation

gegeben: $Q(x_1, x_2, x_3) = 221x_1^2 + 144x_1x_2 + 480x_1x_3 + 179x_2^2 + 360x_2x_3 + 100x_3^2$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} 221 & 72 & 240 \\ 72 & 179 & 180 \\ 240 & 180 & 100 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung: $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ -0.8 & 0.36 & 0.48 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & -0.8 \\ 0.64 & 0.48 & 0.6 \end{pmatrix}$

neue Koordinaten: $\tilde{x}_1 = 0.6x_1 - 0.8x_2$

$$\tilde{x}_2 = 0.48x_1 + 0.36x_2 - 0.8x_3$$

$$\tilde{x}_3 = 0.64x_1 + 0.48x_2 + 0.6x_3$$

Hauptachsendarstellung: $Q(x) = Q(\tilde{x}) = 125\tilde{x}_1^2 - 125\tilde{x}_2^2 + 500\tilde{x}_3^2$

8 Singulärwertzerlegung

Grundsatz: $A = U\Sigma V^T$

mit $\Sigma := \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

wobei Σ hat die gleiche Dimension wie A

$$AA^T = U\Sigma_m^2 U^T, \quad A^T A = V\Sigma_n^2 V^T$$

$\{u_1, \dots, u_r\}$ ist Basis von $\text{im } A \equiv \mathcal{R}(A)$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ ist Basis von $\text{im } A^T \equiv \mathcal{R}(A^T)$

$\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ ist Basis von $\ker A^H \equiv \mathcal{N}(A^H)$

$\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ ist Basis von $\ker A \equiv \mathcal{N}(A)$

gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T A$ und AA^T berechnen: $B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte berechnen: $\sigma(B) = \{6, 1\}$, $\sigma(C) = \{0, 1, 6\}$

Grundsatz anwenden: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, da $\sigma(B)$ mit $|\sigma(B)| = 2$ passt

Eigenvektoren berechnen: $V = (b_1|b_2)$, $U = (c_1|c_2|c_3)$

8.1 Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

8.2 Konditionszahl

$$\mathcal{K}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Die Spektralnorm einer Matrix entspricht dem maximalen **Singulärwert**.

9 Differentialgleichungen

9.1 Erster Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

Grundsatz: $y(t) = V e^{t\Lambda} c$

mit $c = V^{-1} y_0$

gegeben: $\dot{y}_1(t) = -2y_1(t) + 2y_3(t)$

$\dot{y}_2(t) = -2y_1(t) - 3y_2$

$\dot{y}_3(t) = -3y_3(t)$

$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Grundsatz anwenden: $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung: $y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

9.2 Höhere Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

Grundsatz: zu System 1. Ordnung umschreiben

gegeben: $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0$

$x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0$

umformen: $y_1(t) = x(t), y_2(t) = \dot{x}(t)$

$\dot{y}_1 = y_2$

$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2$

$y_1(0) = 3, y_2(0) = 0$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

System 1. Ordnung lösen: $y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$

Lösung: $x(t) = x(t) = y_1(t) = 2e^{-t} + e^{2t}$

10 Maschinenzahlen

$$\text{gegeben: } x = \pm 0.bbb \times 2^{\pm bb}$$

$$\text{grösste positive Zahl: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad \frac{7}{8} \times 2^3 = 7$$

$$\text{Maschinengenauigkeit: } 2^{-3} = \frac{1}{8}$$