1 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\pi) = 0,\ \sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(0) = 1,\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1\end{aligned}$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b,\ \exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2.2 Identitten

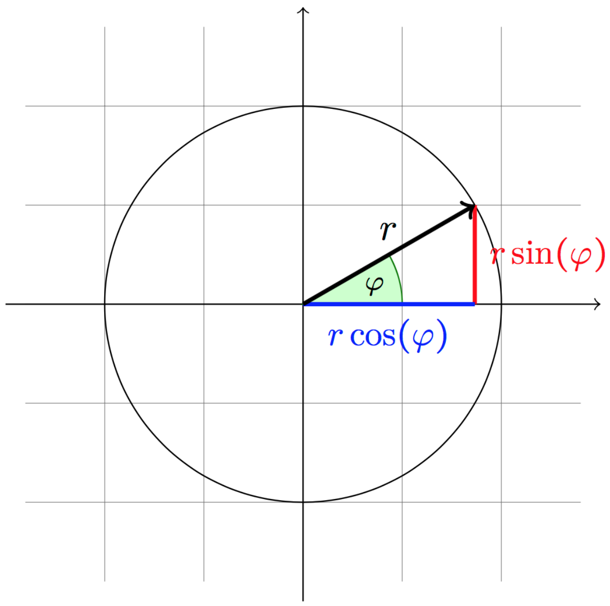
$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$\begin{aligned}z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}\\ r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi &= \arctan(\frac{y}{x}) =\\ x &= r\cos(\varphi)\\ y &= r\sin(\varphi)\\ zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}\\ \sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\phi},\ \text{wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}\\ e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} &= i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1\end{aligned}$$

3.2 Identitäten

$$\overline{z} = x - iy$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|zw|^2 = (zw)\cdot\overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Tipps

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0" oder "1^∞" für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$. Falls die Grenzwerte $0 \neq \infty$ verschieden sind, kann man umformen: $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)}$$

Zwei Polizisten zu benutzen mit sin, cos, tan oder -1^n... sonst induktion:$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$ oder direct. Mit eine recursive folge, um Grenzwert zu finden, setzen a_n mit a und a finden. Oder direct mit $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

5 Reihen

5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	alternierende Reihe	
Absolute Konvergenz	sin, cos	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lsst sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
   - falls Grenzwert $= 0$:
     - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
     - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= \infty$:
     - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
     - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
    - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
    - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
    - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
    - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
    - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
    - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
    (a) $a_n \geq 0$
    (b) $\lim_{n \mapsto \infty} a_n = 0$
    (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

5.2 Geometrische Reihe

$$S_N = \sum_k^n a * r^k \tag{1}$$

$$S_N = \frac{a - a * r^{n+1}}{1 - r} \tag{2}$$

falls $0 < |r| < 1$ dann

$$\sum_0^\infty a * r^k = \frac{a}{1 - r} \tag{3}$$

5.3 Potenzreihen

Potenzreihen haben der Form $\sum_0^\infty a_n x^n$.

Der konvergenz radius

$$\rho = lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \tag{4}$$

$$\rho = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5}$$

wenn $|x| < \rho$ dann konvergiert die Reihe. In diesem gebiet darf man die Reihe ableiten und Integrieren.

5.3.1 Tips

$$cos(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{6}$$

$$sin(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{7}$$

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \tag{8}$$

6 Stetigkeit

Kriterien fur stetigkeit:

1. f ist auf Ω definiert
2. $lim_{x\to a}$f(x)=f(a) und existiert (ist nicht gleich ∞ und gleich von beide seite von a).

Weierstrass-kriterium fur alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$ sodass fur alle $|x-a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{9}$$

6.1 Gleichmassigstetigkeit

fur alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$ sodass fur alle $|x-y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{10}$$

δ hangt nur von ϵ ab nicht wie weierstrass-kriterium. Falls f ist stetig und kompakt, dann ist er gleichmassig stetig.

6.2 Lipschitz-stetigkeit

Muss ein $L\epsilon\mathbb{R}$ sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|f(x) - f(y)|, \forall x, y\epsilon\Omega \tag{11}$$

Eine funktion ist lipschitz stetig wenn sein erste ableitung ist auf Ω beschrankt.

6.3 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert Punktweise falls:

$$\forall x\epsilon\Omega, lim_{n\to\infty}f_n(x) = f(x) \tag{12}$$

6.4 Gleichmassig konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert gleichmassig falls:

$$lim_{n\to\infty}, sup|f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{13}$$

Beide diese Funktionen mussen stetig sein. Diese bedigung ist starker als Punktweise konvergenz.

7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x + a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7.4 Hauptsatz von calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt \tag{14}$$

$$f'(x) = g(m(x)) * \frac{d}{dx}m(x) \tag{15}$$

wo m(x) hat der Form ax^b und $l\epsilon\mathbb{R}$

8 Integration

8.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

8.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

8.3 Tipps

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\log|\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$
\begin{aligned}
& y' + x\tan y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2} \\
\text{umformen}\quad & \frac{dy}{dx} = -x\tan y \\
\textbf{konstante Lösungen}\quad & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ nicht} \\
\text{Trennung}\quad & \frac{dy}{\tan y} = -xdx \\
\text{integrieren}\quad & \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int xdx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C \\
& \Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}} \\
\text{Anfangsbedingung gebrauchen}\quad & \sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1 \\
\textbf{Lösung}\quad & y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})
\end{aligned}
$$

9.2.2 Variation der Konstanten

$$\textbf{Grundsatz:}\quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

$$
\begin{aligned}
& y' - y = 1,\ y(0) = 0 \\
\text{homogener Ansatz}\quad & y' = y \\
\textbf{konstante Lösungen}\quad & y(x) \equiv 0 \\
\text{Trennung}\quad & \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log|y| = x \\
\textbf{homogene Lösung}\quad & y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R} \\
\text{partikulärer Ansatz}\quad & y_p(x) = A(x)e^x \\
\text{einsetzen}\quad & A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x} \\
\textbf{partikuläre Lösung}\quad & y_p(x) = -1 \\
\textbf{Lösung}\quad & y(x) = Ae^x - 1 \text{ mit Anfangsbedingung } A = 1 \\
& \Rightarrow y(x) = e^x - 1
\end{aligned}
$$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$
\begin{aligned}
& y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
\text{Euler-Ansatz}\quad & y(x) = e^{\lambda x} \\
\text{einsetzen}\quad & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
\textbf{charakt. Polynom}\quad & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
\text{Nullstellen}\quad & 4, -2 \\
\textbf{allgemeine Lösung}\quad & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\
\text{Anfangsbedingung gebrauchen}\quad & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\
& \Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2 \\
\textbf{Lösung}\quad & y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

9.2.4 Direkter Ansatz

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

$$\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x), \; y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1, \; -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}$$

9.3 Komplexe zahlen

Falls der charakteristische Polynom ist komplex und hat der form $a + i\sqrt{b}$, dann hat die homogene Losung die form:

$$y(x) = e^{ax}(c_1 cos(\sqrt{b}x) + C_2 sin(\sqrt{b}x)) \tag{16}$$

Wo a ist die komplexe losung von charakteristische polynom.

10 Wegintegral

10.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) \; dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren: hier bereits gegeben

γ ableiten: $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix}$

in Formel einsetzen:
$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt$$

Lösung $2\pi - 0 + \pi = 3\pi$

10.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**. Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix},\ \text{Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2\ dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$

$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

Lösung: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

10.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})\ dxdy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix},\ \text{Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen: $rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

Normalbereich: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

in Formel einsetzen: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1\ dxdy = -\mu(E) = -\pi$

11 Flächenintegral

11.1 Normalbereich

Grundsatz: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_\Omega F\ d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\ F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy\ d\mu,\ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $\int_\Omega xy\ d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx\ x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big) dx = \frac{1}{12}$$

11.2 Satz von Green

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $rot(\vec{v}) = 1$

Flächeninhalt der Ellipse E, berandet durch$x = a\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen $\mu(E) = \pi ab$

12 Kurvendiskussion

12.1 Extrema/Minima

Kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0)$ nicht den maximalen Rang besitzt, also falls $Rang(df(p_0)) < \min n, m$.