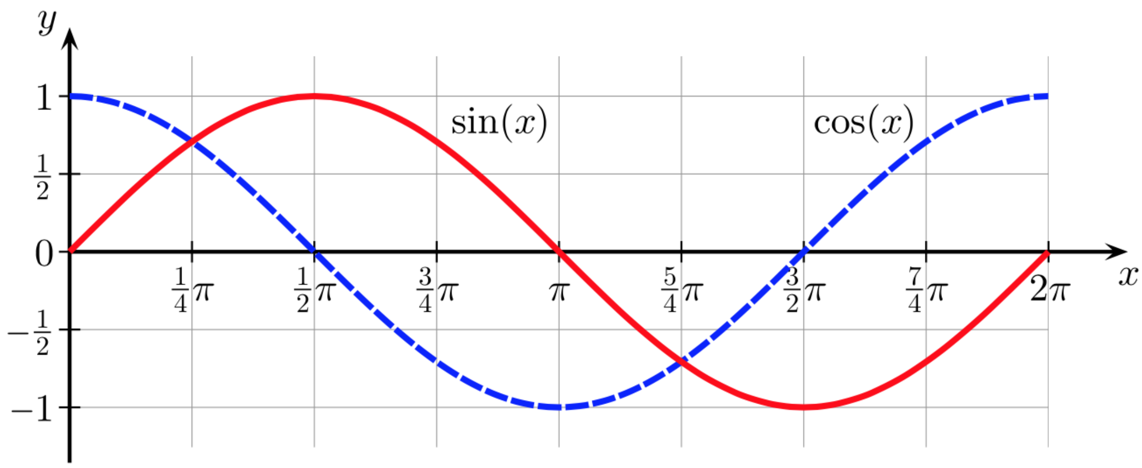
1 Allgemein

1.1 Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$$

1.2 Potenzgesetze

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
(a^n)^m &= a^{nm} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^{\frac{b}{n}} &= \sqrt[n]{a^b}
\end{aligned}$$

1.3 Logarithmus

$$\begin{aligned}
\log(0) &= \text{undef.} \\
\log(1) &= 0
\end{aligned}$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

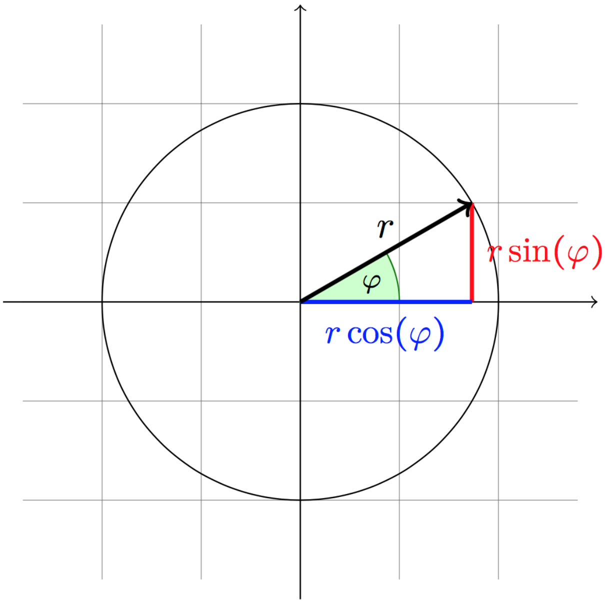
1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

2.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\arg(z) = \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Quadrant)}$$
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$
$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \quad \text{mod } \frac{2\pi}{q}$$
$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\overline{z} = x - iy$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|zw|^2 = (zw)\cdot\overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0" oder "1^∞" für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

4.5 Substitution

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

4.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	"$0 \cdot \infty$"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"$\infty - \infty$"	$\frac{f(x)i(x)-h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

4.7 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0}\frac{e^n-1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

5 Folgen

5.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \text{sodass}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0\ \exists N = N(K) \in \mathbb{N},\ \text{sodass}\ \forall n \geq N : |a_n| > K$

5.2 Beweis

Entweder **Grenzwert berechnen**, oder:

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. Schätze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen $\sum^{\infty}$

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
   - falls Grenzwert $= 0$:
     - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
     - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= \infty$:
     - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
     - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n \mapsto \infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Konvergenzverhalten am Rand: Es muss noch berprft werden, ob die Reihe fr genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1$$

6.3.2 Potenzreihenentwicklung

$$\textbf{Grundsatz:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

7 Stetigkeit

7.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf** Ω **beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

7.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

7.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

7.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

7.5 Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

$$\begin{aligned}
\text{gegeben:}\quad & f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ f_n(x) = (1-x^2)x^n \\
\textbf{punktweisen Limes berechnen:}\quad & \lim_{n\to\infty} (1-x^2)x^n = 0 \equiv f(x) \\
& \Rightarrow \text{ konvergiert gegen } 0 \\
\text{Supremum berechnen:}\quad & \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \\
\text{Maximum finden:}\quad & \frac{d}{dx} f_n(x) n x^{n-1}(1-x^2) - 2x x^n = x^{n-1}(n-(n+2)x^2) = 0 \\
& \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2 \text{ ist Maximum} \\
\textbf{Limes berechnen:}\quad & \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) = 0 \\
\textbf{Folgerung:}\quad & f_n \text{ konvergiert auf } [0,1] \text{ glm. gegen } f
\end{aligned}$$

8 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

8.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

8.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x+a)^{m+1},\ \text{wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

8.4 Hauptsatz von Calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

9 Integration

9.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

9.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

9.3 Tipps

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\log|\cos(x)|$$
$$\int \frac{1}{x-\alpha} \; dx = \log(x-\alpha)$$
$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+(\frac{x}{\alpha})^2} \; dx = \arctan(x)$$
$$\int \sin^2(x) \; dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$
$$\int \cos^2(x) \; dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$
$$\int \sqrt{x^2+1} \; dx = \sinh(x) + C$$

9.4 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(x) \; dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x) \; dx$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \; dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^k f(x) \; dx + \lim_{R\to\infty} \int_k^R f(x) \; dx$$

Gibt es eine Unstetigkeitsstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x) \; dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \; dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \; dx$$

10 Differentialgleichungen

10.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

10.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

10.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x\tan y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x\tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -xdx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int xdx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

10.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$y' - y = 1,\ y(0) = 0$

homogener Ansatz $y' = y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$

Trennung $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log|y| = x$

homogene Lösung $y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R}$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = A(x)e^x$

einsetzen $A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x}$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -1$

Lösung $y(x) = Ae^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$

$\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

10.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen $4, -2$

allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$

Lösung $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

10.2.4 Direkter Ansatz

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x.

$$\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x), \;\; y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1, \;\; -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}$$

11 Vektorfelder

11.1 Differenzial (für f: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$)

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11.2 Gradient (für f: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$)

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Länge ist gleich der maximalen änderung von f.

11.3 Hessematrix (für f: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$)

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

11.4 Rotation (für f: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ oder f: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$)

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \text{ rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ in } \mathbb{R}^2: \text{ rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Bemerkung: Falls $\text{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist $\vec{v}$ konservativ (Potenzialfeld).

11.5 Divergenz (für f: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$)

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + ...$$

11.6 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Das Potenzial Φ eines Potenzialfeldes ist gleich:

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

Für ein Potenzialfeld gilt $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ und es erfüllt die **Integrabilitätsbedinungen**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

Berechnung eines Potenzials

$$\begin{aligned} \text{gegeben:} \quad & \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \\ \textbf{Nach y integrieren:} \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 \, dy = xe^{xy} + C(x) \\ \textbf{Nach x ableiten:} \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \overset{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{konst.} \\ \textbf{Potenzial:} \quad & \Phi = xe^{xy} + \text{konst.} \end{aligned}$$

12 Wegintegral

12.1 Standardmethode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t))\cdot\dot{\vec{\gamma}}(t)\ dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren: hier bereits gegeben

γ ableiten: $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix}$

in Formel einsetzen:
$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1-2\cos(t)+\cos^2(t))\ dt$$

Lösung $2\pi - 0 + \pi = 3\pi$

12.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix},\ \text{Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2\ dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \overset{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$

$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

Lösung: $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

12.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_C (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})\ dxdy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

$$\text{Rotation berechnen:} \quad rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich:} \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 \; dxdy = -\mu(E) = -\pi$$

12.4 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \; do$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \text{ Rand der oberen Hälfte der Einheitssphäre mit Radiu}$$

$$\text{Rotation berechnen:} \quad rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Einheitssphäre parametrisieren:} \quad \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalvektor berechnen:} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \; \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\phi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \; do = \frac{\pi}{2}$$

13 Flächenintegral

13.1 Koordinatentransformationen

13.1.1 Polarkoordinaten ($\mathbb{R}^2$)

Variablen: $\begin{matrix} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin(\phi) \end{matrix}$ **Volumenelement:** $dxdy = r \; drd\phi$

13.1.2 Elliptische Koordinaten ($\mathbb{R}^2$)

Variablen: $\begin{matrix} x = ra\cos(\phi) \\ y = rb\sin(\phi) \end{matrix}$ **Volumenelement:** $dxdy = abr \; drd\phi$

13.1.3 Zylinderkoordinaten ($\mathbb{R}^3$)

$$\textbf{Variablen:} \quad \begin{aligned} x &= r\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) \\ z &= z \end{aligned} \quad \textbf{Volumenelement:} \quad dxdydz = r\ drd\phi dz$$

13.1.4 Kugelkoordinaten ($\mathbb{R}^3$)

$$\textbf{Variablen:} \quad \begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned} \quad \textbf{Volumenelement:} \quad dxdydz = r^2\ dr\ \sin(\theta)\ d\theta d\phi$$

13.2 Normalbereich

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int_\Omega F\ d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\ F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy\ d\mu,\ \ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $\displaystyle\int_\Omega xy\ d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx\ x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big)dx = \frac{1}{12}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x,y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r,\phi) = r$.

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \text{ falls } rot(\vec{v}) = 1$$

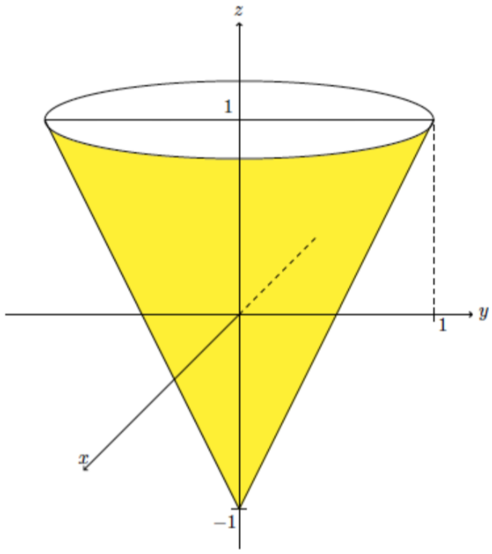
Flächeninhalt der Ellipse E, berandet durch $x = a\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen: $\mu(E) = \pi ab$

14 Oberflächenintegral



gegeben: $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 + 3z^2 - 3 \end{pmatrix}$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels (von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Kegel mit **Satz von Gauss** berechnen
Fluss durch Deckel mit **Standardmethode** berechnen

14.1 Standardmethode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \; do$$

$$\text{Normalvektor:} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorfeld anpassen:} \quad z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dxdy = \iint_D x^2 \; dxdy$$

$$\textbf{Koordinatentransformation:} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos(\phi) \; drd\phi = \frac{\pi}{4}$$

14.2 Satz von Gauss

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \; do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \; d\mu$$

wobei $\vec{n}$ die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

$$\text{Divergenz berechnen:} \quad \operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr \; dr = 2\pi$$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

14.3 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\ do$$

15 Kurvendiskussion

Extremalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt
Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

15.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
   (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum
   (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum
   (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grösser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

15.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedinung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L: $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedinung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
   falls g differenzierbar:
   (a) nicht-reguläre Punkte finden mit $dg = 0$
   (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfen

   falls g nicht differenzierbar:
   (a) nicht-reguläre Punkte der Teilstücke des Randes
   (b) Eckpunkte des Gebietes überprüfen