5 Mechanische Wellen

5.1 Wellenfunktion

$$\xi = \xi(x, t)$$

x = Raumkoordinate
t = Zeit

Wellentypen:

1. Seilwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale Auslenkung des Seils
2. Federwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale oder logitudinale Verformung der Feder
3. Gaswellen: $\xi(x, t)$ beschreibt den Druck des Gase

Vereinfachung - Weglassen der Dispersion
Normalerweis verändert sich die Form des Wellenberges mit der Zeit (=Dispersion). Wir werden dies allerdings weglassen und den Wellenberg als stabile Form betrachten.
Zudem nehmen wir die Welle zur Zeit t=0 an. Daraus folgt:

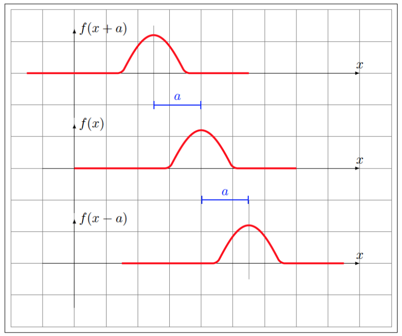
$$\xi(x, t = 0) = f(x)$$

Welle nach links:

$$\xi = f(x - vt)$$

Welle nach rechts:

$$\xi = f(x + vt)$$



5.2 Harmonische Wellen

Laufende harmonische Welle:

$$\xi(x, t) = \xi_0 sin\{k(x \pm vt)\}$$

k = Wellenzahl ξ_0 = Amplitude

Wobei k und v:

$$k(x + \lambda) = kx + 2\pi \implies k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$$

$$\nu = \frac{\omega}{\pi}$$

ν = Frequenz der Welle, ω = Kreisfrequenz,
v = Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Wellengleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - v^2\frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

	Medium	Temperatur	Ausbreitungs-geschwindigkeit [m/s]
Gase:			
	Luft	0°C	331
	Luft	20°C	343
	Helium	20°C	965
	Wasserstoff	20°C	1284
Flüssigkeiten:			
	Wasser	0°C	1402
	Wasser	20°C	1482
	Seewasser	20°C	1522
Festkörper: (longitudinale Wellen)			
	Aluminium		6420
	Stahl		5941
	Granit		6000

Tabelle 5.1: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen.

5.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit transversaler, elastischer Seilwellen

Längendichte des Seils:

$$p = \frac{M}{L}$$

M = Masse des Seils, L = Länge des Seils

$$v^2 = \frac{S}{p} \implies v = \pm\sqrt{\frac{S}{p}}$$

wobei S die Spannung des Seils und p die Längendichte ist.

5.5 Wellen im Festkörper

Eine Deformation ist elastisch wenn der Festkörper seine Form wieder annimmt, wenn die Kräfte nicht mehr wirken.
Meisten Körper sind nur bis zu einem bestimmten Grenze der Kräfte elastisch = Elastizitätsgrenze
Relative Längenänderung:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Innerhalb der Elastizittsgrenze gilt das Hooksche Gesetz:

$$F = YA\frac{\Delta l}{l} = YA\epsilon$$

wobei: F = Kraft (die zieht), A = Querschnitt, Y = Elastizittsmodul

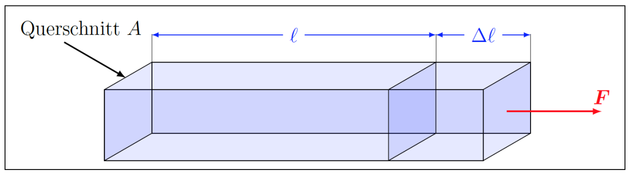


Abbildung 5.13: Lineare Verformung eines Stabes unter Normalbelastung.

Einheit des Elastizitätsmodul:

$$[Y] = \frac{N}{m^2}$$

Deformationswellen

1. Longitudinale Wellen: Breiten sich in allen Medien aus.
2. Transversale Wellen: Breiten sich nur in festen Körpern aus

Longitudinale, elastische Wellen im Festkörper

$$v^2 = \frac{Y}{P} \implies v \pm \sqrt{\frac{Y}{p}}$$

Einheit des Elastizitätsmodul ist wiederum:

$$[Y] = \frac{N}{m^2}$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Medium	Elastizitäts-modul [GN/m²]	Ausbreitungs-geschwindigkeit [m/s]
Aluminium	100	6420
Stahl	200	5941
Granit	200	6000

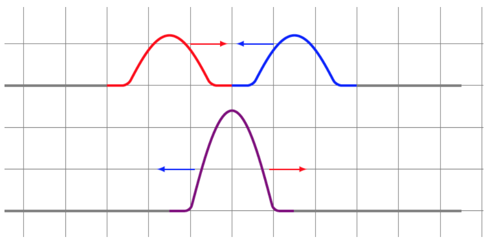
Tabelle 5.2: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von longitudinalen Wellen.

5.6 Prinzip der Superposition

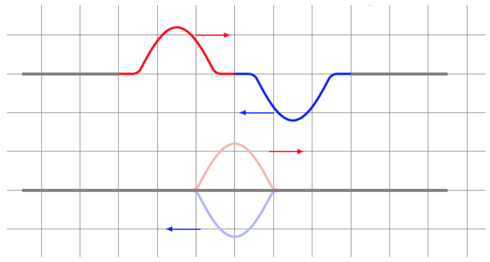
Vereinfacht kann die Superposition folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$$

Sich aufsummierende Wellen:



Sich ausgleichende Wellen:



5.7 Stehende Wellen

Beispiel: Seite, die auf beiden Seiten befestigt ist.
$\implies$ Auslenkung in eine harmonische Schwingung durch eine äussere Kraft

Grundfrequenz = erste Eigenfrequenz $\nu_1 \implies$ Die erste Welle davon = erste Harmonische

Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Eigenfrequenz ν_n :

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

wobei n = 1,2,3,...

Die Frequenz der n'ten Harmonischen kann als Funktion der Grundfrequenz (erste Harmonische) betrachtet werden:

$$\nu_n = n\nu_1$$

wobei:

$$\nu_1 = \frac{v}{2L}$$

Zudem folgt im Zusammenhang mit der bestimmten Geschwindigkeit:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{p}}$$

Randbedingung stehender Wellen
Aus dem Prinzip der Superposition folgt:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$
$$= \xi_0 sin(kx - \omega t) + sin(kx + \omega t)$$
$$= 2\xi_0 sin(kx) + cos(\omega t)$$

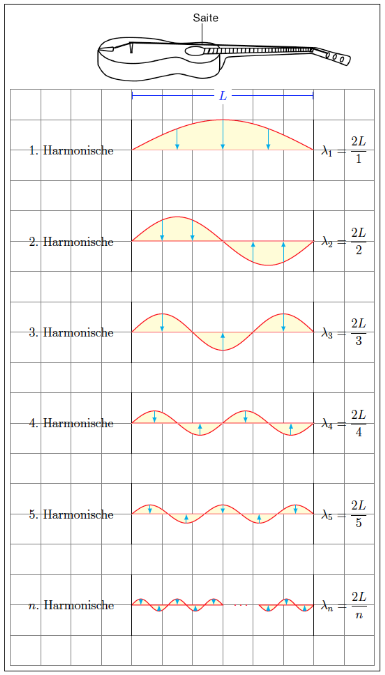
Es folgt daraus, dass eine Punkt an einem beliebigen Ort x eine einfache harmonische Bewegung hat, und dass die Amplitude von Ort zu Ort verschieden ist.
$\implies$ Ist die Saite allerdings links und rechts befestigt, existiert eine Randbedingung bei x=0 (=L):

$$\xi_0(0,t) = \xi_0(L,t) = 0$$

Daher folgt:

$$\xi_0(L,t) = 2\xi_0 sin(kL) + cos(\omega t) = 0$$

$$\implies sin(kL) = 0$$



Die Bedingung wird erfüllt wenn die Wellenzahl k oder die Wellenlänge folgende Werte besitzen:

$$k_nL = \frac{2\pi}{\lambda_n}L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, ...$$

oder:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Wellenfunktion der n'ten Harmonischen:

$$= 2\xi_0 sin(k_nx) + cos(\omega_nt)$$

wobei:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \; und \; \omega_n = 2\pi\nu_n \quad n = 1, 2, 3, ...$$