Aufgabe 1: Ellipsenbahn

a) Hat die Richtung des Geschwindigkeitsvektors bei einer beliebigen Bewegung eines Teilchens eine besondere Beziehung zur Richtung des Ortsvektors?

   i) Ja, der Geschwindigkeitsvektor steht immer senkrecht auf dem Ortsvektor.

   ii) Da der Geschwindigkeitsvektor die zeitliche Ableitung des Ortsvektors ist, sind ihre Richtungen in einer festen Beziehung zueinander.

   iii) Nein, es gibt keine besondere Beziehung.

   iv) Ja, der Geschwindigkeitsvektor ist immer parallel zu dem Ortsvektor.

b) Kann ein Teilchen eine Kurve durchlaufen ohne beschleunigt zu werden?

   i) Ja, falls es sich in einem Kreis bewegt.

   ii) Ja, falls die Geschwindigkeit konstant bleibt.

   iii) Nein.

   iv) Nur wenn die Reibung vernachlässigbar ist.

Ein Massenpunkt bewege sich auf einer Ellipse mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b; das Zentrum der Ellipse sei im Koordinatenursprung O, die Halbachse a liegt auf der x-Achse und b auf der y-Achse. Der Ortsvektor des Massenpunkts als Funktion der Zeit ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch $\vec{r(t)} = (x(t), y(t)) = (a \cdot cos(\phi), b \cdot sin(\phi))$, mit $\phi = \omega t$ und konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = (v_x, v_y)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t) = (a_x, a_y)$ des Massenpunkts als Funktion der Zeit.

d) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung $\vec{a}$ immer zum Zentrum der Ellipse zeigt.

---

a) iii) Das hängt von der Art der Bewegung ab. Zum Beispiel, in einer Kreisbewegung, steht der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf dem Ortsvektor, aber in geradliniger Bewegung sind diese zwei parallel zueinander (siehe Abb. 2.11 des Skripts).

b) iii) Nein, um die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu ändern, braucht man eine Kraft (Zentripetalkraft im Fall der Kreisbewegung), die eine Beschleunigung verursacht.

c) Ellipsengleichung in Parameterdarstellung: (Parameter $\phi = \omega t$: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos\phi = a\cos\omega t \\ y(t) &= b\sin\phi = b\sin\omega t \end{aligned}\right\} \text{Ellipsengleichung}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -a\omega\sin\omega t \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = b\omega\cos\omega t \end{aligned}$$

Beschleuningung:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t \\ a_y(t) &= \frac{dv_y(t)}{dt} = -b\omega^2\sin\omega t \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = (a_x, a_y) &= -\omega^2(a\cos\omega t, b\cos\omega t) \\ &= -\omega^2(x, y) = -\omega^2\vec{r} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel -\vec{r}$; der Vektor $-\vec{r}$ zeigt zum Zentrum.

Aufgabe 2: Integration einer eindimensionalen Bewegung

Im abgebildeten Graphen sind die Geschwindigkeiten $v(t)$ von zwei Rennautos A und B aufgetragen. Zum Zeitpunkt t_0 beginnen die Autos das Rennen, welches zum Zeitpunkt t_1 endet.

a) i) Obwohl A langsamer geworden ist, hat es eine längere Strecke als B zurückgelegt
   ii) Da A abgebremst hat, hat B die längere Strecke zurückgelegt.
   iii) Obwohl A und B beschleunigt haben, hat A die längere Strecke zurückgelegt.
   iv) A und B haben die gleiche Strecke zurückgelegt.

b) Wann haben A und B die gleiche Beschleunigung?
   i) Zum Zeitpunkt t_1.
   ii) Nie.
   iii) Irgendwann zwischen t_0 und t_1.
   iv) Zum Zeitpunkt t_0.

c) Gegeben sei die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v(t) = 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (1 - e^{-t/3\text{s}})$. Berechnen Sie den Ort $x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und die Beschleuniging $a(t)$ als Funktion der Zeit und plotten Sie die Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 10s$.

d) Die Beschleunigung als Funktion der Zeit sei $a(t) = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin \omega t$ ($\omega = 1/\text{s}$). Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ und den Ort $x(t)$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $x(0) = 10\,\text{m}$, und plotten Sie $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 30\,\text{s}$.

Aufgabe 2: Integration einer eindimensionalen Bewegung

a) iii) Die zurückgelegte Strecke ist das Integral der Geschwindigkeit, d.h. die Fläche unter den Kurven. Deswegen hat A die längere Strecke zurückgelegt. Die Aussage i) ist nicht richtig, weil A nicht langsamer geworden ist, sondern nur die Beschleunigung abgenommen hat.

b) iii) Die Beschleunigung ist die Ableitung von $v(t)$ und irgendwann zwischen t_0 und t_1 sind die Tangenten von den Kurven A und B parallel zueinander.

c) Die Geschwindigkeit ist gegeben:

$$\begin{aligned}
v(t) &= 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,(1 - e^{-t/(3s)}) \\
x(t) &= \int v(t)\,dt + x_0; \quad x_0 : \text{Integrationskonstante} \\
&= 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \int (1 - e^{-t/(3s)})dt + x_0 \\
&= 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}(t + 3\text{s} \cdot e^{-t/(3s)}) + x_0
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung: $x(0) = 9\text{ m} + x_0 = 0 \rightarrow x_0 = -9\text{ m}.$

$$\rightarrow x(t) = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,(t + 3se^{-t/(3s)}) - 9\text{ m}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,(0 + \frac{1}{3s} \cdot e^{-t/(3s)}) = e^{-t/(3s)}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d) Die Beschleunigung ist bekannt:

$$\begin{aligned}
a(t) &= 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin \omega t; \quad \omega = \frac{1}{\text{s}} \\
v(t) &= \int a(t)\,dt + v_0; \quad v_0 : \text{ Integrationskonstante} \\
&= -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\frac{1}{\omega} \cos \omega t + v_0 = -5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cos \omega t + v_0
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
v(0) &= -5\frac{\text{m}}{\text{s}} + v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad v_0 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \\
v(t) &= 5\frac{\text{m}}{\text{s}}(2 - \cos \omega t) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} - 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cos \omega t
\end{aligned}$$

$$x(t) = \int v(t)\,dt + x_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}(2t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t) + x_0$$

Anfangsbedingung: $x(0) = x_0 = 10\text{ m}$

$$x(t) = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 5\text{ m} \sin \omega t + 10\text{ m}$$

Aufgabe 3: Mondbahn

In dieser Aufgabe bestimmen wir die Bahn des Mondes um die Sonne unter einigen vereinfachenden Annahmen. Dabei ist das Konzept der gleichmässigen Kreisbewegung von zentraler Bedeutung.

Wir gehen davon aus, dass die Bahn der Erde um die Sonne sowie die Bahn des Mondes um die Erde jeweils Kreisbahnen in derselben (xy-)Ebene sind und können deshalb das Problem auf zwei Dimensionen vereinfachen. Die Bahnen haben Kreisfrequenzen von $\omega_{\text{Erde}} = \omega_{\text{E}}$ bzw. $\omega_{\text{Mond}} = \omega_{\text{M}}$ und Radien $R_{\text{S,E}}$ bzw. $R_{\text{E,M}}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich die Erde und der Mond auf der x-Achse mit $x > 0$ und der Mond besitzt den maximalen Abstand zur Sonne.

a) Bestimme die Bahn des Mondes in der xy-Ebene.

b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Mondbahn nicht periodisch ist?
Hinweis: Betrachte das Verhältnis $\frac{\omega_{\text{E}}}{\omega_{\text{M}}}$

c) Bestimme die Beschleunigung, die auf den Mond wirkt. Was ist der Betrag der Beschleunigung? Welche besondere Situation würde zur Zeit $t = 0.25\,s$ auftauchen, falls $R_{\text{S,E}} = 9\,R_{\text{E,M}}$, $\omega_{\text{M}} = 3\,\omega_{\text{E}}$ und $\omega_{\text{E}} = 2\pi\ \text{s}^{-1}$?

d) Bonus: Skizziere die Bahn für $R_{\text{S,E}} = 3\,R_{\text{E,M}}$ [1], $\omega_{\text{M}} = 4\,\omega_{\text{E}}$ und $\omega_{\text{E}} = 2\pi\ \text{s}^{-1}$, wenn nötig unter Verwendung eines Taschenrechners oder Computers.

Hinweis: Um das Zeichnen (oder Plotten) zu vereinfachen kann man zudem $R_{\text{E,M}} = 1$ wählen.

Aufgabe 3: Mondbahn

a) Man setze die Sonne in den Ursprung. Die Bewegung des Mondes setzt sich aus zwei Kreisbewegungen zusammen, der Bewegung der Erde um die Sonne und jener des Mondes um die Erde. Die zugehörigen Bahnen $\vec{r}_{\text{E}}(t)$ und $\vec{r}_{\text{M}}(t)$ sind

$$\vec{r}_{\text{E}}(t) = R_{\text{S,E}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_{\text{E}}\,t) \\ \sin(\omega_{\text{E}}\,t) \end{pmatrix}, \text{ und } \vec{r}_{\text{M}}(t) = R_{\text{E,M}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_{\text{M}}\,t) \\ \sin(\omega_{\text{M}}\,t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Die Bahn der zusammengesetzten Mondbewegung um die Sonne $\vec{r}_{\text{M,S}}$ ist folglich die (vektorielle) Summe der Bahn der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde. Somit gilt

$$\vec{r}_{\text{M,S}}(t) = \vec{r}_{\text{E}} + \vec{r}_{\text{M}} = \begin{pmatrix} R_{\text{S,E}}\cos(\omega_{\text{E}}\,t) + R_{\text{E,M}}\cos(\omega_{\text{M}}\,t) \\ R_{\text{S,E}}\sin(\omega_{\text{E}}\,t) + R_{\text{E,M}}\sin(\omega_{\text{M}}\,t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

b) Die entscheidende Grösse um die Periodizität der Bahn zu beurteilen ist das Verhältnis

$$z = \frac{\omega_{\text{M}}}{\omega_{\text{E}}} \tag{9}$$

zwischen den Frequenzen. Ist $z \in \mathbb{Z}$, also eine ganze Zahl, so wird nach einem Umlauf der Erde, der Mond z vollständige Umdrehungen um die Erde vollzogen haben. Somit ist er wieder in der Ausgangslage. Die Bahn ist periodisch.
Ist hingegen $z \in \mathbb{Q}$, also eine rationale Zahl, so lassen sich sicher mindestens zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $z = \frac{p}{q}$. Dass heisst aber, dass nach q Erdumdrehungen der Mond p Umdrehungen um die Erde vollzogen haben wird. Die Bahn ist also periodisch. Nur falls $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sich also als irrationale Zahl nicht als Bruch schreiben lässt, werden Mond- und Erdumdrehungen niemals gleichzeitig vollendet sein. Siehe Abb. 1

c) Man erhält die Beschleunigung durch zweimalige zeitliche Differentiation.

$$\vec{v}_{\text{M,S}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{M,S}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} R_{\text{S,E}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_{\text{E}}\,t) + R_{\text{E,M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_{\text{M}}\,t) \\ R_{\text{S,E}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega_{\text{E}}\,t) + R_{\text{E,M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega_{\text{M}}\,t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{pmatrix} -R_{\text{S,E}}\omega_{\text{E}}\sin(\omega_{\text{E}}\,t) - R_{\text{E,M}}\omega_{\text{M}}\sin(\omega_{\text{M}}\,t) \\ R_{\text{S,E}}\omega_{\text{E}}\cos(\omega_{\text{E}}\,t) + R_{\text{E,M}}\omega_{\text{M}}\cos(\omega_{\text{M}}\,t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= R_{\text{S,E}}\omega_{\text{E}} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_{\text{E}}\,t) \\ \cos(\omega_{\text{E}}\,t) \end{pmatrix} + R_{\text{E,M}}\,\omega_{\text{M}} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_{\text{M}}\,t) \\ \cos(\omega_{\text{M}}\,t) \end{pmatrix} \tag{12}$$

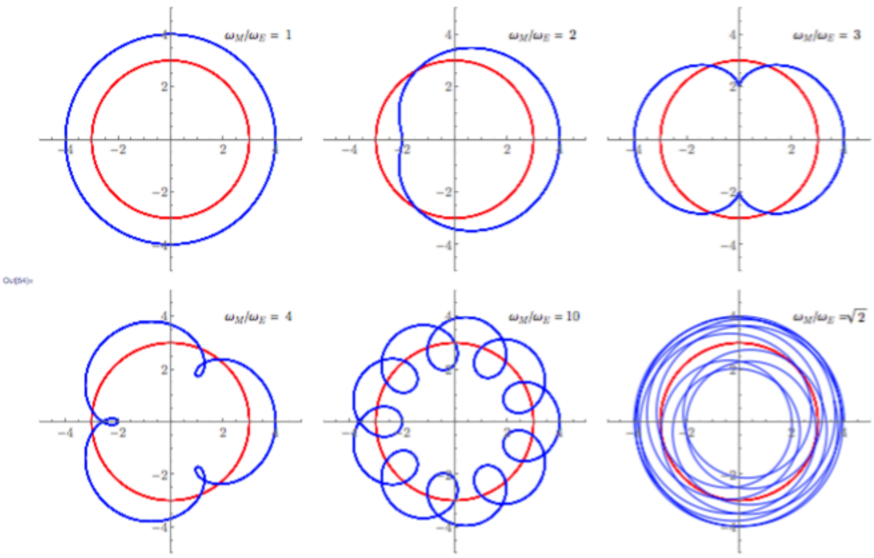


Abbildung 1: Mond- (blau) und Erdbahn (rot) in Aufgabe für verschiedene Werte von z. Es wurde hier von $t = 0\,\mathrm{s}$ bis $t = 10\,\mathrm{s}$ geplottet.

Somit erhalten wir eine Gesamtbeschleunigung des Mondes von

$$\vec{a}_{M,S} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M,S}}{\mathrm{d}t} = -R_{\mathrm{S,E}}\,\omega_{\mathrm{E}}^2 \begin{pmatrix}\cos(\omega_{\mathrm{E}}\,t)\\ \sin(\omega_{\mathrm{E}}\,t)\end{pmatrix} - R_{\mathrm{E,M}}\,\omega_{\mathrm{M}}^2 \begin{pmatrix}\cos(\omega_{\mathrm{M}}\,t)\\ \sin(\omega_{\mathrm{M}}\,t)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Für den Betrag ergibt sich mittels Skalarpodukt

$$a^2 = (R_{\mathrm{S,E}}\,\omega_{\mathrm{E}}^2\cos(\omega_{\mathrm{E}}\,t) + R_{\mathrm{E,M}}\,\omega_{\mathrm{M}}^2\cos(\omega_{\mathrm{M}}\,t))^2 + (R_{\mathrm{S,E}}\,\omega_{\mathrm{E}}^2\sin(\omega_{\mathrm{E}}\,t) + R_{\mathrm{E,M}}\,\omega_{\mathrm{M}}^2\sin(\omega_{\mathrm{M}}\,t))^2. \tag{14}$$

Für die angegebenen Werte erhält man $a = 0$ zur Zeit $t = 0.25\,s$. Denn durch Anwenden der binomischen Formel und Faktorisieren findet man unter Verwendung der benutzten Werte

$$a \propto (1 + \cos(2\pi\,t)\cos(6\pi\,t) + \sin(2\pi\,t)\sin(6\pi\,t)) = 0\,. \tag{15}$$

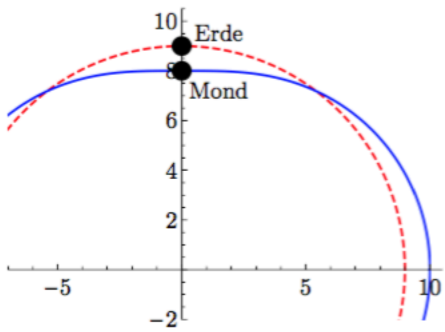
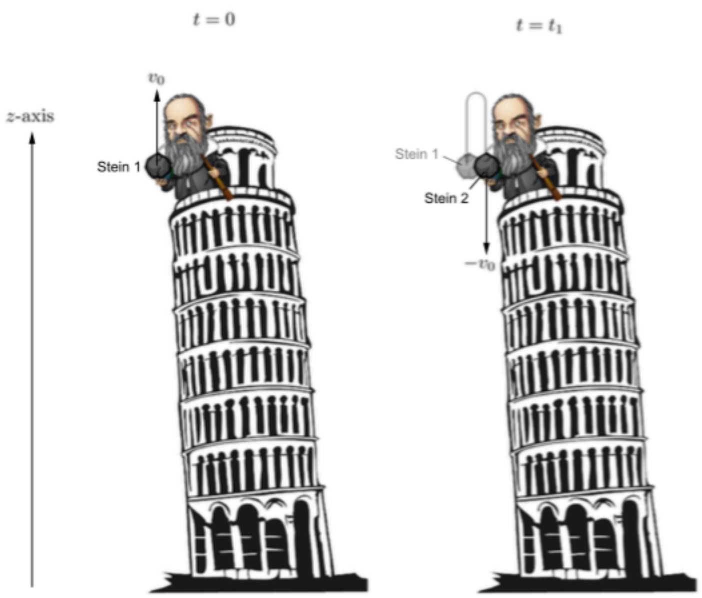


Abbildung 2: Mond- (blau) und Erdbahn (rot) in Aufgabe c).

Aufgabe 4: Kugelgeschoss



Galileis Schüler und erster Biograf Vincenzo Viviani behauptete, dass Galileo bei Experimenten auf dem schon damals schiefen Turm von Pisa die Fallgesetze entdeckt hätte (in Galileis Schriften und Manuskripten findet sich jedoch kein Hinweis auf solche Versuche). Es heisst Galileo liess zwei unterschiedlich schwere Steine zur selben Zeit vom Turm fallen und beobachtete, dass der Zeitpunkt des Aufpralls auf dem Boden gleich war. Weniger bekannt ist eine Legende, die erzählt, dass beim ersten Versuch etwas schief gegangen ist. Der Grund dafür war, dass sein unfähiger Schüler Vincenzo (am Turmfuss platziert) abgelenkt war und nicht auf die fallenden Steine achtete. Vor lauter Wut warf Galileo einen ersten Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1(t = 0) = +v_0$ gerade nach oben. Noch immer rasend warf er einen zweiten Stein der gleichen Masse mit Anfangsgeschwindigkeit $v_2(t_1) = -v_0$ gerade nach unten als der erste Stein zum Zeitpunkt t_1 an ihm, auf dem Weg nach unten, vorbeipfiff $(z_1(t_1) = z_2(t_1))$. Der Luftwiderstand soll zunächst ignoriert werden. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

a) i) Beide Steine treffen den armen Assistenten gleichzeitig
   ii) Der zweite Stein trifft den armen Assistenten vor dem ersten Stein
   iii) Welcher Stein zuerst auftrifft hängt von den Massen ab
   iv) Der erste Stein trifft den armen Assistent vor dem zweiten Stein

b) Welche Aussage trifft zu, wenn die Luftwiderstand berücksichtigt wird?

Eine Kugel werde vom Boden mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α zur Horizontalen abgeschossen (der Luftwiderstand wird vernachlässigt); $g = 9.8\ m/s^2$.

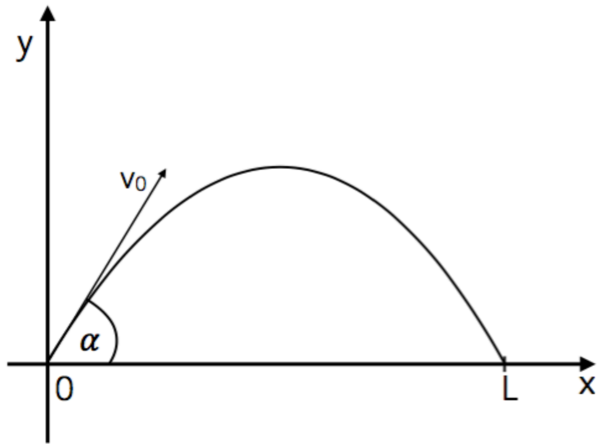
c) Wie gross muss der Winkel α sein, damit die Kugel möglichst weit fliegt?

d) Was ist die maximale Höhe, die die Kugel mit $v_0 = 100$ m/s und $\alpha = 30°$ erreicht?

Aufgabe 4: Kugelgeschoss

a) i) Beide Steine treffen den armen Assistenten gleichzeitig. Die erste, mit $v_1(t=0) = v_0$ nach oben geschossene Kugel, kommt zurück mit $v_1(t_1) = -v_0$, sodass wenn Galileo die zweite Kugel nach unten wirft, beide Kugeln diesselbe Geschwindigkeit und Richtung am gleichen Ortspunkt besitzen.

b) ii) Wenn der Luftwiderstand berücksichtig wird, kommt die erste Kugel mit einer kleineren Geschwindigkeit $v_1(t_1) < v_1(t=0)$ zu Galileo zurück .



c) Wir kennen:

$$v(x) = v_0 \cos\alpha = konst \quad \rightarrow x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad (x_0 = 0)$$
$$v(y) = v_0 \sin\alpha - g \cdot t \quad \rightarrow y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \quad (y_0 = 0)$$

T sei der Zeitpunkt, zu dem die Kugel wieder auf dem Boden auftrifft:

$$x(T) \equiv L; \quad y(t) = 0$$
$$y(T) = v_0 \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2 = 0$$

Es folgt damit, dass $T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Die Lösung $T = 0$ entspricht den Anfangsbedingungen (x=y=0).

$$x(t) \equiv L(\alpha, v_0) = v_x \cdot T = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

$\sin 2\alpha$ ist maximal für $2\alpha = 90° \rightarrow \alpha_{max} = 45°$.

$\rightarrow$ Bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 (Betrag) ist die horizontale Flugdistanz maximal für $\alpha = 45°$.

Gegeben sind $v_0 = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\alpha = 30°$

$$L(v_0, \alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{(100\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \sin 60° = \ 884 \text{ m}$$

c) Die Höhe ist maximal bei $v_y = 0$:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g \cdot t_{max} = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g} \sin\alpha = \frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow y_{max} = y\left(\frac{T}{2}\right) &= v_0 \sin\alpha \frac{T}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ &= v_0 \sin\alpha \frac{v_0}{g} \sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \ 127.5 \text{ m}\end{aligned}$$

Aufgabe 1: Sportliche Kinematik

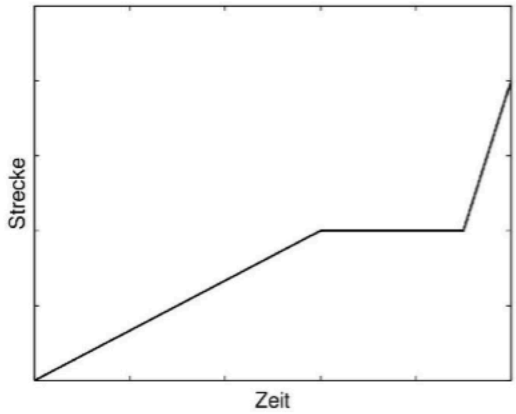
a) Der Plot zeigt die zurückgelegte Strecke eines Radfahrers gegen die Zeit. Welchen Ausflug wird der Radfahrer wohl am wahrscheinlichsten unternommen haben?

   i) Start am Züriberg, hinunter in die Stadt, einmal quer durch Zürich nach Altstetten und hoch auf den Hönggerberg.

   ii) Start am Bellevue, um den See nach Rapperswil zum Kaffee und auf der anderen Seite zurück nach Zürich.

   iii) Start in Zürich, hoch auf den Uetliberg zur Entspannung bei einem Bier und wieder hinunter in die Stadt.

   iv) Start in Oerlikon, hoch auf den Hönggerberg, direkt weiter nach Altstetten zum Tee.



b) Sprinter A hat 10 m vor der Ziellinie einen Vorsprung von 2 m auf Sprinter B. Beide laufen an diesem Moment mit der gleichen Geschwindigkeit von 10 m/s. Sprinter B hat noch ein wenig Reserve, um sein Tempo zu erhöhen, während A seine Geschwindigkeit nur konstant halten kann. Wie stark muss B beschleunigen (konstant), so dass das Rennen im Fotofinish entschieden werden muss?

   i) $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$

   ii) $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$

   iii) $a = 4\ \mathrm{m/s^2}$

   iv) $a = 6\ \mathrm{m/s^2}$

c) Ein Schwimmer überquert einen Fluss (Breite 100 m) mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 1.06 m/s senkrecht zur Strömungsrichtung. Er erreicht das andere Ufer 50 m flussabwärts. Wie hoch ist die Fliessgeschwindigkeit des Flusses und was ist die Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Ufer?

d) Um die Bewegung des Flusses zu kompensieren, sollte der Schwimmer nicht den nächsten Punkt des gegenüberliegenden Ufers anpeilen, sondern einen anderen. Welcher Punkt ist dies, wenn der Schwimmer nach wie vor eine Geschwindigkeit von 1.06 m/s hat?

Aufgabe 1: Sportliche Kinematik

a) iii) Da der Radfahrer es bei einem Bier belassen hat, kann er den Berg schneller herunterfahren als hoch.

b) iii) A braucht $t = 10\,\mathrm{m}/(10\,\mathrm{m/s}) = 1\,\mathrm{s}$ bis zur Ziellinie. B kann ihn einholen, wenn er seine 12 m bis zum Ziel ebenfalls in 1 s zurücklegt. Lösen der Gleichung $12\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s} + 1/2\,a \cdot (1\,\mathrm{s})^2$ ergibt, dass er dazu mit $a = 4\mathrm{m/s2}$ beschleunigen muss.

c) Weil der Schwimmer direkt auf das gegenüberliegende Ufer zielt, benötigt er zum Überqueren des Flusses die Zeit

$$t = \frac{100\,\mathrm{m}}{1.06\,\mathrm{m/s}} = 94.3\,\mathrm{s}. \tag{1}$$

In dieser Zeit wird er um 50 m abgetrieben; daher ist die Fliessgeschwindigkeit $v_f = 0.5\,\mathrm{m/s}$.

Die Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Ufer ist also

$$\vec{v} = 0.5\,\mathrm{m/s} \cdot \vec{e}_x + 1.06\,\mathrm{m/s} \cdot \vec{e}_y, \tag{2}$$

und ihr Betrag ist 1.2 m/s.

d) Auf den ersten Blick scheint es, als müsse der Schwimmer auf einen Punkt zuhalten, der 50 m flussaufwärts vom Startpunkt liegt, also in einer Richtung, die um 26.6° nach oben weist. Aber der Fluss treibt ihn um 50 m ab, wenn er geradeaus schwimmt, und zwar 94.3 s lang. Flussaufwärts schwimmen bedeutet daher, dass die zum Überqueren nötige Zeit grösser ist, der Schwimmer also um mehr als 50 m abgetrieben wird. Die exakte Bedingung lautet, dass der Schwimmer um einen solchen Winkel flussaufwärts schwimmen muss, dass die x-Komponente der 1.06 m/s genau gleich der Flussgeschwindigkeit von 0.5 m/s ist:

$$\sin(\alpha) \cdot 1.06\,\mathrm{m/s} \stackrel{!}{=} v_f. \tag{3}$$

Der dafür einzuhaltende Winkel gegen die Querrichtung ergibt sich zu $\alpha = 30.0°$. Also muss der Schwimmer auf den Punkt zuhalten, der

$$\tan(\alpha) \cdot 100\,\mathrm{m} = 57.7\,\mathrm{m} \tag{4}$$

flussaufwärts am jenseitigen Ufer liegt.

Aufgabe 2: Gleichförmige Kreisbewegung

a) Ein Achterbahnwagen durchfährt einen Looping mit Radius r. Wie gross muss seine Geschwindigkeit am obersten Punkt mindestens sein, damit er die Bahn noch berührt?

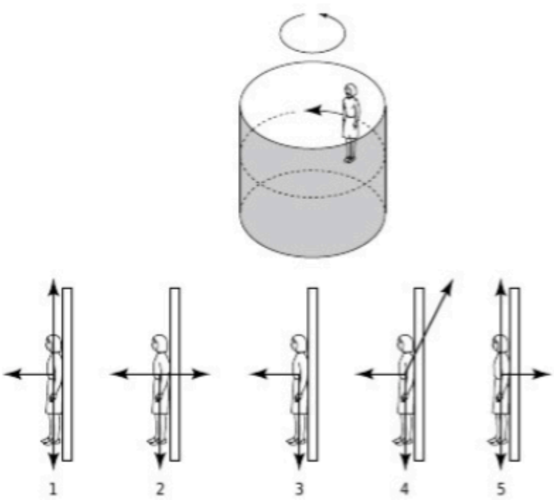
i) rg

ii) $2rg$

iii) $\sqrt{rg}$

iv) $\sqrt{2rg}$

b) Eine Person befindet sich in einer gleichförmig drehenden Trommel (d.h. Winkelgeschwindigkeit ω ist konstant), welche sich so schnell dreht, dass die Person an der Wand "kleben" bleibt. Welches Diagramm für die auf die Person wirkenden Kräfte ist korrekt? Wie heissen die drei Kräfte?



Eine Kugel wird von einer Kanone auf einer kleinen Anhöhe in horizontaler Richtung abgeschossen. Wir betrachten die Erde als Kugel mit einem Radius von $R_E = 6370\,\text{km}$. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ und ist immer zum Erdzentrum gerichtet; der Luftwiderstand und die Erdrotation werden vernachlässigt.

c) Wie gross muss die Mündungsgeschwindigkeit v_0 der Kugel beim Verlassen der Kanone sein, damit sie mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn um die ganze Erde fliegt, ohne zu Boden zu fallen? Vergleichen Sie diese Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit v_{rot} eines erdfesten Punkts auf dem Äquator, verursacht durch die Erdrotation.

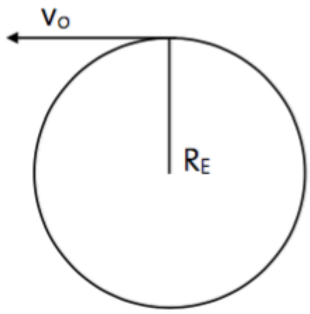
d) Wie lange dauert ein voller Umlauf der Kugel um die Erde?

Aufgabe 2: Gleichförmige Kreisbewegung

a) Die Zentripetalkraft muss mindenstens so gross sein wie die Gravitationskraft, d.h. $F_Z = mv^2/r = mg = F_g$. Daraus folgt für die Geschwinfigkeit: $v = \sqrt{rg}$

b) Diagramm 1 zeigt die korrekten Kräfte. Die auf die Person wirkende Gewichtskraft F_g ist in jeder Abbildung eingezeichnet. Diese muss kompensiert werden durch die Reibungskraft an der Wand F_R, da die Person andernfalls herunterfallen würde. Weil die Person von oben gesehen einer Kreisbewegung folgt, muss eine Kraft zum Kreismittelpunkt vorhanden sein – diese Zentripetalkraft F_Z wird von der Wand auf die Person ausgeübt.

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung mit einer Geschwindigkeit v und einem Radius r muss eine Zentripetalbeschleunigung a_z wirken: $a_z = \frac{v^2}{r}$ (Skript Gl. 2.126).



c) Die für die gleichförmige Kreisbewegung notwendige Zentripetalbeschleunigung ist die Erdanziehung, d.h., $a_z = g$. Daraus folgt mit dem gegebenen Radius für die Geschwindigkeit der Kugel:

$$a_z = g = \frac{v_0^2}{R_E} \quad \rightarrow v_0 = \sqrt{g \cdot R_E} = 7.901\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Die Erde dreht sich in etwa 24 Stunden einmal um sich selbst. Zusammen mit dem Radius ergibt sich die Geschwindigkeit:

$$\underline{v_{rot}} = \frac{u_E}{\text{Tag}} = \frac{2\pi R_E}{\underbrace{\underline{86\,164\,\text{s}}}_{1\ \text{Sternentag}}} = 464.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\simeq 6\%\ \text{von}\ v_0\ !)$$

d) Die Umlaufsdauer T ist gegeben durch:

$$T = \frac{u_E}{v_0} = \frac{2\pi \cdot R_E}{\sqrt{g \cdot R_E}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_E}{g}} = 5066\,\text{s} \simeq\ 1.4\,\text{h}$$

Aufgabe 4d: (2 Punkte)

Ein Kanonier feuert eine Kugel aus seiner Kanone unter einem Winkel von 40° zur Horizontalen ab. Danach schiesst er eine zweite Kugel mit der gleichen Geschwindigkeit, allerdings unter einem Winkel von 50°. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

a) Die zweite Kugel fliegt weiter als die erste

b) Die erste Kugel fliegt weiter als die zweite

c) Die zweite Kugel ist länger in der Luft als die erste

d) Die erste Kugel ist länger in der Luft als die zweite

→ c) richtig

Aufgabe 3: Kinematik und Weltraumtechnik

Die Landesonde Philae ($m_S = 100$ kg) landete im Herbst 2014 mit einer Aufsetzgeschwindigkeit v_A auf dem Kometen "Tschuri" ($m_K = 10^{13}$ kg, für diese Aufgabe näherungsweise eine Kugel mit $r_K = 1$ km). Auf der Oberfläche ist die Sonde zuerst abgeprallt.

a) Nehmen Sie an, der Stoss war elastisch, d.h. die Geschwindigkeit der Sonde ändert sich von v_A zu $-v_A$. Welcher Kraft müssen die Landebeine gemeinsam über eine Zeit Δt standhalten?

   i) $F \approx \frac{m_S v_A}{\Delta t}$

   ii) $F \approx \frac{m_K v_A}{\Delta t}$

   iii) $F \approx \frac{2 m_K v_A}{\Delta t}$

   iv) $F \approx \frac{2 m_S v_A}{\Delta t}$

Eine Rakete mit Anfangsmasse M_0 (inkl. Treibstoff) wird von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben gestartet, d.h. ihre Anfangsgeschwindigkeit ist null. Die Ausströmgeschwindigkeit u der Gase relativ zur Rakete sei konstant.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete als Funktion der Zeit und der ausgestossenen Gasmasse $m(t)$, unter der Annahme einer konstanten Erdbeschleunigung $g = 9.8$ m/s^2 (der Luftwiderstand wird vernachlässigt, siehe Skript Abschnitt 3.7.3).

Die Saturn-V-Rakete, die im Apollo-Programm verwendet wurde, hatte eine Anfangsmasse $M_0 = 3 \cdot 10^6$ kg. Bei einer Verbrennungsrate von $dm/dt = 14 \cdot 10^3$ kg/s entwickelte die Rakete eine Schubkraft von $F_{\text{Sch}} = 35 \cdot 10^6 N$. Wenn die erste Stufe ausgebrannt ist, wiegt die Rakete noch 25% der Anfangsmasse.

c) Berechnen Sie: die Ausstossgeschwindigkeit u, die Verbrennungszeit t_v (Zeit bis aller Treibstoff der ersten Stufe verbrannt ist), die Beschleunigung beim Abheben vom Boden, die Beschleunigung zur Zeit t_v unmittelbar vor dem Ende der ersten Stufe, die Geschwindigkeit zur Zeit t_v, sowie die Höhe h der Rakete über dem Boden zur Zeit t_v. Nehmen sie dafür an, dass die Schubkraft die ganze Zeit konstant bleibt (in Wirklichkeit ist sie im Vakuum höher als auf Meereshöhe) und dass die Rakete ohne Luftwiderstand gerade nach oben steigt (in Wirklichkeit dreht man schon früh ein wenig horizontal).

Aufgabe 3: Kinematik und Weltraumtechnik

a) Die richtige Lösung lautet iv); da sich beim elastischen Stoss die Geschwindigkeit der Sonde von v_A zu $-v_A$ ändert, ist $\Delta p = 2v_A m_s$ und $F = \Delta p/\Delta t = 2v_A m_s/\Delta t$.

b) Vorlesung, Gl. 3.37: Schubkraft der Rakete

$$F_{sch} = u \cdot \tfrac{dm}{dt} \text{ mit}$$

m : Masse der ausgestossenen Verbrennungsgase

u : Ausstossgeschwindigkeit relativ zur Rakete

M : Masse der Rakete (inklusive Brennstoff)

Bei einer senkrecht nach oben startenden Rakete wirkt die Gravitation der Schubkraft entgegen.
Die Gesamtkraft auf die Rakete ergibt sich folgenderweise:

$$F_{tot} = F_{sch} - Mg = Ma \quad ; \quad a: \text{Beschleunigung der Rakete}$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}F_{sch} - g = \frac{u}{M}\frac{dm}{dt} - g$$

$$\rightarrow \Delta v \equiv v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{dv}{dt'}dt' \quad ; \quad v(0) = 0$$
$$= u\int_0^t \frac{1}{M(t')}\frac{dm}{dt'}dt' - g\int_0^t dt'$$

Die Integration des 1. Termes ist analog zum Fall <u>ohne</u> Gravitation (siehe Vorlesung):

$$dm = -dM u\int_0^t \frac{1}{M(t')}\frac{dm}{dt'}dt' \qquad = -u\int_{M(0)}^{M(t)} \frac{dM}{M} \quad ; \quad \text{wo } M(0) = M_0 \text{ und } M(t) = M_0$$
$$= u\ln\frac{M_0}{M_0 - m(t)} \quad ; \quad (\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b))$$

Integration des 2. Terms, dem Gravitationsbeitrag:

$$g\int_0^t dt' = gt$$
$$\underline{\rightarrow v(t) = u\ln\frac{M_0}{M_0 - m(t)} - gt}$$

$F_{sch} = u \cdot \frac{dm}{dt} \rightarrow u = \frac{F_{sch}}{dm/dt}$

$$\underline{u} = \frac{35 \cdot 10^6 \text{ kg m s}^{-2}}{14 \cdot 10^3 \text{ kg s}^{-1}} = 2500 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.5 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Berechnung der Verbrennungszeit t_v:

$M_0 = 3 \cdot 10^6$ kg
Treibstoff: $0.75M_0 = 2.25 \cdot 10^6$ kg

$$\underline{t_v} = \frac{0.75M_0}{dm/dt} = \underline{160.7 \text{ s}}$$

Beschleunigung: $a = \frac{u}{M} \cdot \frac{dm}{dt}$ - g
Anfangsbeschleunigung:

$$\underline{a(0)} = \frac{u}{M} \cdot \frac{dm}{dt} - g = \ (11.67 \text{ -}9.81)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \ 1.86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$= \underline{0.19\ g}$$

$\underline{a(t_v)} = \frac{u}{M(t_v)} \cdot \frac{dm}{dt} - g \quad$ wo $\quad M(t_v) = \ 0.25\ M_0$
$\underline{a(t_v)} = \ 36.9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \ \underline{3.76\ g}$

$\underline{v(t_v)} = u \cdot \ln \frac{M_0}{0.25 M_0} - g \cdot t_v = 1889\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq \underline{1.9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}$

c) Höhe h der Rakete über dem Boden zur Zeit t_v:

$$h = \int_0^{t_v} v(t')dt' = u \int_0^{t_v} \ln \frac{M_0}{M_0 - m(t')} dt' - \frac{g}{2} t_v^2$$

$$m(t') = \frac{dm}{dt'} \cdot t' \quad , \quad \text{da } \frac{dm}{dt'} = \text{ konstant}$$

$$h = -u \int_0^{t_v} \ln \left(1 - \underbrace{\frac{1}{M_0} \frac{dm}{dt'}}_{\doteq c} t' \right) dt' - \frac{g}{2} t_v^2$$

mit $1 - ct' \doteq x$ folgt $\frac{dx}{dt'} = -c \rightarrow dt' = -\frac{1}{c} dx$

$$h = \frac{u}{c} \int_1^{1-ct_v} \ln x dx - \frac{g}{2} t_v^2 \quad ; \quad x > 0 \text{ da:}$$

$$1 - ct_v = 1 - \frac{1}{M_0} \frac{dm}{dt'} \cdot \frac{0.75 M_0}{dm/dt'}$$
$$= 1 - 0.75 = \ 0.25$$

Dadurch ergibt sich folgender Ausdruck für h:

$$\begin{aligned} h &= \frac{u}{c} \left[x(\ln x - 1) \Big|_1^{1-ct_v} \right] - \frac{g}{2} t_v^2 \\ &= \frac{u}{c} \{ (1 - ct_v) \left[\ln(1 - ct_v) - 1 \right] - (\underbrace{\ln 1}_{0} - 1) \} - \frac{g}{2} t_v^2 \\ &= \frac{u}{c} \{ 0.25 \left[\ln 0.25 - 1 \right] + 1 \} - \frac{g}{2} t_v^2. \end{aligned}$$

Und mit

$$\frac{u}{c} = \frac{2500\,\mathrm{m/s}}{\frac{14}{3} \cdot 10^{-3} \mathrm{s}^{-1}} = 535.7\,\mathrm{km} \quad \text{und}$$
$$\frac{g}{2} t_v^2 = 126.5\,\mathrm{km}$$

folgt schliesslich

$$\Rightarrow \underline{h} = 0.403 \ \cdot \frac{u}{c} - \frac{g}{2} t_v^2 = \underline{89.6\,\mathrm{km.}}$$