

ETH Physik - Formelsammlung

Laurin Brandner — Jakub Kotal — Nino Scherrer

2. Semester 2016

1 Allgemeines

1.1 SI Einheiten

Physikalische Grösse	Fundamentale Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	Ampère	A
Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

1.2 Winkel

$$2\pi rad = 360$$

$$1 rad = \frac{170}{\pi} \approx 57.296$$

Umrechnen:

Radian \rightarrow Grad: Winkel $\cdot 180/\pi$

Grad \rightarrow Radian: Winkel $\cdot \pi/180$

1.3 Raum und Zeit

Raum = Abstand zwischen 2 Orten

Zeit = Dauer bestimmter, reproduzierbarer Prozesse

Beispielgrössen

$$1 \text{ pc} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m} = 206'247 \text{ A.U.}$$

wobei pc = Parsec und A.U. = Astronomical Unit = mittlerer Abstand zwischen Erde und Sonne

Grösse des sichtbaren Universums $\approx 10^{10}$ pc

Grösse der Milchstrasse (unsere Galaxie) $\approx 10^4$ pc

Kleinste bekannte Grösse = Plancksche Länge $\approx 10^{-35}$ m

Alter des Universums ca $4.3 \cdot 10^{17}$ s

Alter der Erde ca. 5 Milliarden Jahre

Umlauf der Erde um die Sonne = 1 Jahr

1.4 Koordinatensysteme

Weil kein "absoluter" Punkt im Raum existiert, muss ein Punkt **P** im Raum immer bezgl. einem anderen Punkt **O** (**Ursprung**) definiert werden

Die kartesischen Koordinaten

Im kartesischen Koordinatensystem definiert man 3 zueinander senkrechte Richtungen x (vorne-hinten), y (links-rechts), z (oben-unten). Der Punkt P wird bezgl. des Ursprungs mit drei kartesischen Koordinaten lokalisiert:

$$\mathbf{OP} = (x, y, z) = (OA, OB, OC)$$

wobei A = Projektion von P auf die x-Achse

B = Projektion von P auf die y-Achse

C = Projektion von P auf die z-Achse

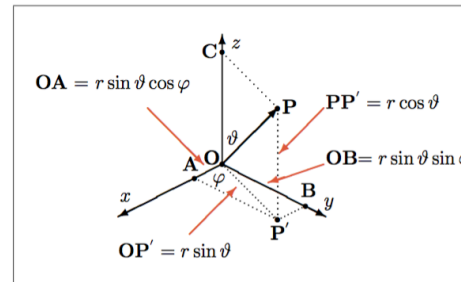
Die Kugelkoordinaten

Im Kugelkoordinatensystem wird ein Punkt **P** im Raum durch 3 Koordinaten dargestellt, wobei

r = Abstand zwischen **O** und **P**: $\mathbf{OP} = (r, \vartheta, \varphi)$

ϑ = Winkel zwischen \mathbf{OP} und z-Achse; $0 \leq \vartheta \leq \pi$

φ = Winkel zwischen \mathbf{OP}' und x-Achse; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



Wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dann liegt P auf der x-y-Ebene, man wird dann die zweidimensionalen **Polarkoordinaten** (r, φ) verwenden.

Umrechnen von Koordinatensystemen

von Kugel- zu kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \sin \vartheta * \cos \varphi \\ r * \sin \vartheta * \sin \varphi \\ r * \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

von kartesischen zu Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten

Zylindrische Koordinaten sind Polarkoordinaten mit einer dritten, senkrechten, Koordinaten ergänzt.

$$\mathbf{OP} = (\rho, \varphi, z)$$

von Zylinder- zu kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho * \cos \varphi \\ \rho * \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

von kartesischen zu Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{pmatrix}$$

1.5 Vektoren

Skalarprodukt:

$$a \cdot b = |a||b|\cos \varphi$$

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ist. Wenn das Skalarprodukt verschwindet, ist a oder b = 0 oder die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Cosinussatz:

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos \varphi$$

Vektorprodukt:

$$c = a \times b = -b \times a$$

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)e_x + (a_z b_x - a_x b_z)e_y + (a_x b_y - a_y b_x)e_z$$

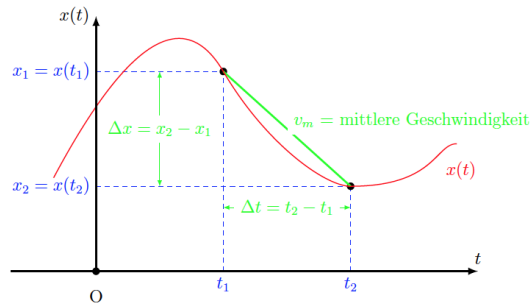
$$c = ab \sin \varphi$$

wobei der Betrag des Vektors **c** gleich der Fläche des Parallelogramms ist, welche **a** und **b** aufspannen. **c** steht senkrecht auf **a** und **b**. Wenn die Vektoren parallel sind, ist das Vektorprodukt gleich 0.

2 Kinematik

2.1 Allgemeine Zusammenhänge

$\text{Weg} \xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}} \text{Geschwindigkeit} \xrightleftharpoons[\text{integrieren}]{\text{ableiten}} \text{Beschleunigung}$



Verschiebung:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ oder } V = at$$

Beschleunigung:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ oder } a = \frac{V}{t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2.2 Integration der Bewegung

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v(t)dt$$

dx = Weg innerhalb des Zeitintervalls dt

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0$$

Schlussendlich folgt daraus:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t')dt' + x_0$$

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t')dt' + v_0$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$

x_0 entspricht dem Startpunkt

v_0 entspricht der Startgeschwindigkeit

Bewegung gleichförmig und geradlinig

$v(t) = \text{konst.} \Rightarrow a(t) = 0$ gilt:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Bewegung gleichförmig beschleunigt und geradlinig

$a(t) = a_0 = \text{konst.}$ gilt:

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Spezialfall: $x_0 = v_0 = t_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$$

$$v(t) = a_0 t$$

$$a(t) = a_0$$

2.3 Freier Fall / Gravitation

In der Nähe der Erdoberfläche fühlt jeder Körper, unabhängig von seinem Gewicht, dieselbe Beschleunigung (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird).

$$h = \frac{1}{2}a_0 t^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mit Fallhöhe h und Fallzeit t .

Hinweis : Es existiert eine Grenzggeschwindigkeit, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit (quadratisch) des Körpers zunimmt.

2.4 Bewegung in mehreren Dimensionen

$$r = r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)e_r(t)$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_x(t)e_x + v_y(t)e_y = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y$$

In Kugelkoordinaten:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}e_r + r \frac{de_r}{dt}e_y = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_1 e_r + r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_2 e_\varphi$$

1 : radiale Geschwindigkeit V_r

2 : Winkelgeschwindigkeit V_φ senkrecht zu e_r in Richtung e_φ

Vereinfacht dargestellt:

$$V(t) = V_r + V_\varphi \quad \text{mit } V_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} e_\varphi = r\omega e_\varphi$$

Beschleunigung:

$$a(t) = a_x(t)e_x + a_y(t)e_y = \frac{dv_x}{dt}e_x + \frac{dv_y}{dt}e_y = \frac{d^2x}{dt^2}e_x + \frac{d^2y}{dt^2}e_y$$

In Polarkoordinaten:

$$a(t) = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}e_x - r\left(\frac{d\varphi}{dt}e_y\right)^2}_{1}e_r + \underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)}_2e_\varphi$$

1 = radiale Beschleunigung

2 = Winkelbeschleunigung

2.5 Zerlegung/Integration der Bewegung (mehrdimensional)

Aus den Bewegungsgleichungen sieht man, dass die zueinander senkrecht stehenden x- und y-Bewegungen voneinander unabhängig sind.

=> Bei 3 Dimensionen kann diese Betrachtung einfach erweitert werden

$$v(t) = v_0 + a_0(t)$$

$$r(t) = r_0 + V_0t + \frac{1}{2}a_0t^2$$

$$= \left(x_0 + v_{0x} + \frac{1}{2}a_{0x}t'^2\right)e_x + \left(y_0 + v_{0y} + \frac{1}{2}a_{0y}t'^2\right)e_y$$

2.6 Bahnkurve beim Ballwurf

Zur Zeit t_{max} erreicht die Kugel den höchsten Punkt ihrer Bahnkurve. In diesem Punkt verschwindet die vertikale Geschwindigkeit:

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Die maximale Höhe der Kugel ist:

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

2.7 Schuss auf fallende Platte

Eventuell noch mit Beispiel ergänzen

2.8 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \omega t$$

mit Winkelgeschwindigkeit ω und Periode T :

$$\varphi(T) = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Strecke:

$$s(t) = r\varphi(t) = r\omega t$$

Vektorielle Darstellung

$$r(t) = r\cos(\varphi(t))e_x + r\sin(\varphi(t))e_y$$

Da Bewegung gleichförmig ($\omega = \text{konstant}$) folgt:

$$r(t) = r\cos(\omega t)e_x + r\sin(\omega t)e_y$$

2.8.1 Geschwindigkeitsvektor

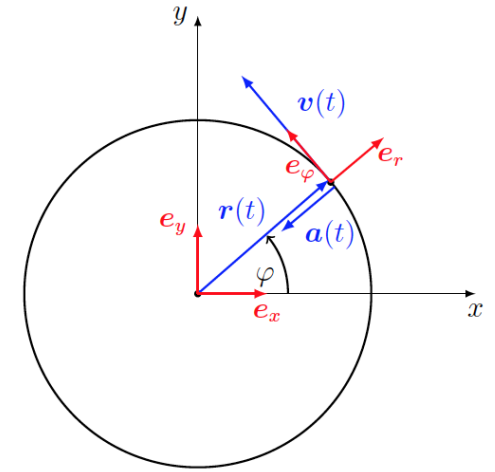
Betrag: $|\vec{v}| = r\omega = \text{konst.}$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist senkrecht zum Ortsvektor.

2.8.2 Beschleunigungsvektor = Zentripetalbeschleunigung

Zeigt in Richtung Zentrum des Kreises mit Betrag:

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$



2.8.3 Fluchtgeschwindigkeit

Geschwindigkeit, um ein Gravitationsfeld zu verlassen (z.B. Erde), wobei G die Gravitationskonstante ist.

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$

3 Dynamik

3.1 Definitionen

3.1.1 Masse

Masse ist Eigenschaft eines Körpers \Rightarrow überall gleich (im Gegensatz zu Gewicht).

3.1.2 Lineare Impuls

Der lineare Impuls ist definiert als

$$p = mv \quad [p] = \frac{kg \cdot m}{s} = Ns$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{v_B}{v_A} \Rightarrow p_A + p_B = 0$$

In einem isolierten System ist der **Gesamtimpuls** erhalten. Für hohe Geschwindigkeiten gilt der relativistische Impuls:

$$p = \gamma mv$$

3.1.3 Kraft

Die Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses:

$$F = ma(t) \quad [F] = N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

3.2 Newtonsche Gesetze

3.2.1 Trägheitsprinzip

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn er isoliert ist.

3.2.2 Aktionsprinzip

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt.

3.2.3 Aktions-Reaktions-Prinzip

Zu jeder Aktion gehört eine gleich grosse Reaktion, die denselben Betrag besitzt aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

3.3 Raketenantrieb

$v(t)$ Geschwindigkeit der Rakete bezüglich dem festen Koordinatensystem

u Konstante Ausstossgeschwindigkeit des Gases *relativ zur Rakete* (relativ zum festgelegten Koordinatensystem mit Geschwindigkeit $v - u$)

$M(t)$ Gesamtmasse, also Rakete + Treibstoff zur Zeit t

Der **Gesamtimpuls** der Rakete zur Zeit t ist gleich

$$p(t) = M(t)v(t)$$

Auf die Rakete wirkt die **Schubkraft** F

$$F = u \frac{dm}{dt}$$

Und die **Geschwindigkeit**

$$v(t) - v_0 = -u(\ln(M_0 - m) - \ln(M_0))$$

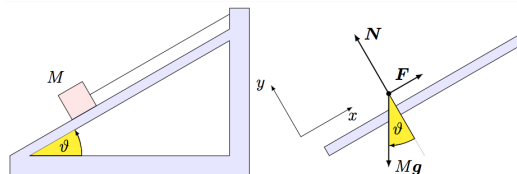
wobei M_0 die Anfangsmasse und m die Gesamtmasse des ausgestossenen Gases ist.

Oder als Funktion der ausgestossenen Masse (mit $v_0 = 0$)

$$v = u \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{m}{M_0}}\right)$$

3.4 Schiefe Ebene

3.4.1 Statischer Fall



$$F + N + Mg = 0$$

Daraus folgt

$$F = Mg \sin(\vartheta)$$

$$N = Mg \cos(\vartheta)$$

3.4.2 Dynamischer Fall

$$N + Mg = F_{res} = Ma$$

Dank der Normalkraft verschwindet die Beschleunigung in y -Richtung. In x -Richtung ist sie gleich

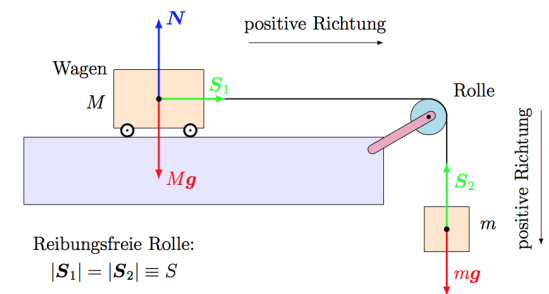
$$a_x = -g \sin(\vartheta)$$

3.5 Federkraft

$$F = -k(x - x_0) = -k\Delta x$$

wobei k die Federkonstante mit Einheit $\frac{N}{m}$, x_0 die Länge der Feder im unbelasteten Zustand ist.

3.6 Bewegung mit Rollen

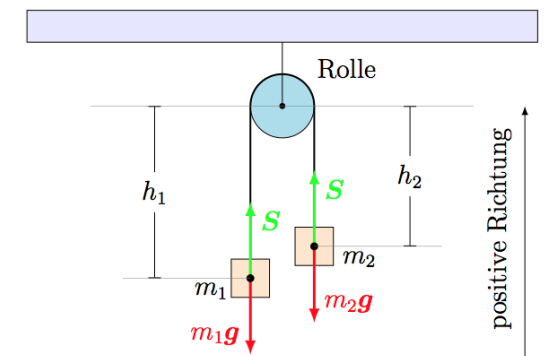


Reibungsfreie Rolle:
 $|S_1| = |S_2| \equiv S$

$$S = Ma$$

$$a = \frac{m}{M + m}g$$

3.7 Atwoodsche Fallmaschine



$$a_1 = -a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

$$S = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \quad \text{wobei} \quad |a_1| = |a_2| < g$$

3.8 Harmonische Schwingungen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

wobei A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und δ die Phasenkonstante ist.

Die **Kreisfrequenz** ω hängt dabei nur von der Rückstellkraftkonstante k und der Masse m ab

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\omega] = \text{Hz} = \frac{1}{s}$$

Der Winkel der Sinusfunktion wird als **Phase** der Schwingung bezeichnet

$$\varphi(t) = \omega t + \delta$$

wobei δ die ursprüngliche Phase zur Zeit $t = 0$ ist.

Die **Periode** T ist die Zeit, die benötigt wird, um eine vollständige Schwingung durchzuführen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die **Frequenz** v ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeit

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Die **Kraft** F zeigt immer Richtung Ursprung und ist gleich

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t)$$

3.9 Gravitation

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad \text{wobei} \quad F_{12} = -F_{21}$$

Hinweis: Alle Körper, unabhängig von ihren Massen, werden von der Erde gleich beschleunigt.

3.10 Drehmoment

Das Drehmoment ist definiert als das Produkt 'Kraft x Hebel'

$$M = F \cdot h \quad [M] = Nm$$

4 Energie

4.1 Energieerhaltung

Bei allen Vorgängen muss die Gesamtenergie eines Systems und seiner Umgebung erhalten werden.

$$E_{tot} = E_{Masse} + E_{kin} + E_{pot} + E_{chem} + \text{usw.} = \text{konst.}$$
$$[E] = J = Nm$$

4.2 Lorentzfaktor

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4.3 Kinetische Energie

4.3.1 Klassisch ($v < 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

4.3.2 Relativistisch ($v \geq 0.3c$)

Gesamtenergie

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

4.4 Potentielle Energie der Gravitation

Die **potentielle Energie** eines Körpers auf der Höhe h ist gleich

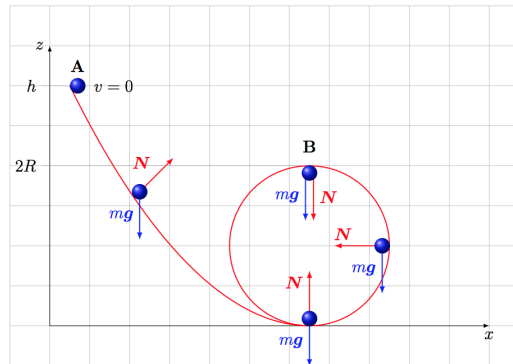
$$E_{pot}(h) = mgh$$

Die **Gesamtenergie** eines Körpers im freien Fall von der Höhe h ist gleich

$$E(y) = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{mgy}_{\text{potentiell}}$$

falls der *Luftwiderstand* vernachlässigt werden darf.

4.5 Looping



Ist die Geschwindigkeit kleiner als v_{min} , löst sich der Ball vom Kreis

$$v_{min} = \sqrt{gR}$$

Die Höhe h , von der die Kugel fallen gelassen werden muss, ist gleich

$$h = \frac{5}{2}R > 2R$$

4.6 Arbeit

Die **Arbeit** W ist gleich dem Produkt der Komponente der Kraft längs der Verschiebung und der Verschiebung selbst

$$W = F \Delta x \cos(\vartheta)$$

4.6.1 Arbeit der Federkraft

Die **Arbeit** zwischen den Verschiebungen x_1 und x_2 ist gleich

$$W_{12} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

4.7 Leistung

Die **Leistung** P ist die in der Zeiteinheit verrichtete Arbeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$$

4.8 Allgemeine potentielle Energie

4.8.1 Konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit längs eines geschlossenen Wegs ist gleich null. Die Arbeit ist unabhängig vom zurückgelegten Weg. Potentielle Energie ist für diese Art von Kräften definiert.
Beispiel: Gravitationskraft, Federkraft

4.8.2 Nicht-konservative Kräfte

Die geleistete Arbeit hängt vom Weg ab.
Beispiel: Reibungskraft

4.9 Arbeit-Energie-Theorem

Die Arbeit, die an einem Körper zwischen zwei Punkten (1) und (2) geleistet wird, ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie zwischen diesen Punkten.

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

4.10 Mechanische Energie

$$E_{mech} \equiv E_{kin} + E_{pot}$$

Die mechanische Energie wird *erhalten*, wenn nur konservative Kräfte wirken.

Die Änderung der mechanischen Energie ist gleich der Arbeit, die von *nicht-konservativen* Kräften geleistet wird.

4.11 Bremsweg

Betrachtet wird das Gleiten auf einer **schiefen** Ebene mit der Starthöhe h und dem Neigungswinkel ϑ . Dann ist der **Bremsweg** L

$$L = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta))}$$

Ist die Ebene **waagrecht**, so gilt:

$$L = \frac{v_0^2}{2a}$$

5 Mechanische Wellen

5.1 Wellenfunktion

$\xi = \xi(x, t)$

x = Raumkoordinate
t = Zeit

Wellentypen:

- 1. Seilwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale Auslenkung des Seils
- 2. Federwellen: $\xi(x, t)$ beschreibt transversale oder longitudinale Verformung der Feder
- 3. Gaswellen: $\xi(x, t)$ beschreibt den Druck des Gase

Vereinfachung - Weglassen der Dispersion

Normalerweise verändert sich die Form des Wellenberges mit der Zeit (=Dispersion). Wir werden dies allerdings weglassen und den Wellenberg als stabile Form betrachten. Zudem nehmen wir die Welle zur Zeit t=0 an. Daraus folgt:

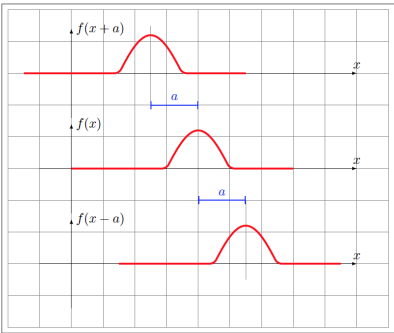
$\xi(x, t = 0) = f(x)$

Welle nach links:

$\xi = f(x - vt)$

Welle nach rechts:

$\xi = f(x + vt)$



5.2 Harmonische Wellen

Laufende harmonische Welle:

$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\{k(x \pm vt)\}$

k = Wellenzahl ξ_0 = Amplitude

Wobei k und v:

$k(x + \lambda) = kx + 2\pi \implies k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$v = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

ν = Frequenz der Welle, ω = Kreisfrequenz,
 v = Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Wellengleichung:

$\frac{d^2\xi}{dt^2} - v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

	Medium	Temperatur	Ausbreitungsgeschwindigkeit [m/s]
Gase:	Luft	0°C	331
	Luft	20°C	343
	Helium	20°C	965
	Wasserstoff	20°C	1284
Flüssigkeiten:	Wasser	0°C	1402
	Wasser	20°C	1482
	Seewasser	20°C	1522
Festkörper: (longitudinale Wellen)	Aluminium		6420
	Stahl		5941
	Granit		6000

Tabelle 5.1: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen.

5.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit transversaler, elastischer Seilwellen

Längendichte des Seils:

$p = \frac{M}{L}$

M = Masse des Seils, L = Länge des Seils

$v^2 = \frac{S}{p} \implies v = \pm \sqrt{\frac{S}{p}}$

wobei S die Spannung des Seils und p die Längendichte ist.

5.5 Wellen im Festkörper

Eine Deformation ist elastisch wenn der Festkörper seine Form wieder annimmt, wenn die Kräfte nicht mehr wirken. Meisten Körper sind nur bis zu einem bestimmten Grenze der Kräfte elastisch = Elastizitätsgrenze
Relative Längenänderung:

$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Innerhalb der Elastizitätsgrenze gilt das Hooksche Gesetz:

$F = YA \frac{\Delta l}{l} = YA\epsilon$

wobei: F = Kraft (die zieht), A = Querschnitt, Y = Elastizitätsmodul

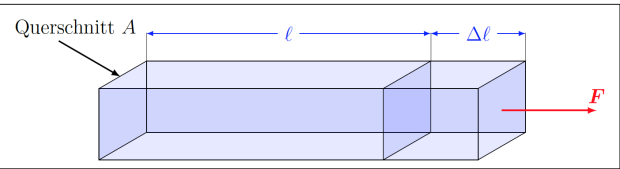


Abbildung 5.13: Lineare Verformung eines Stabes unter Normalbelastung.

Einheit des Elastizitätsmodul:

$[Y] = \frac{N}{m^2}$

Deformationswellen

1. Longitudinale Wellen: Breiten sich in allen Medien aus.
2. Transversale Wellen: Breiten sich nur in festen Körpern aus

Longitudinale, elastische Wellen im Festkörper

$$v^2 = \frac{Y}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Einheit des Elastizitätsmodul ist wiederum:

$$[Y] = \frac{N}{m^2}$$

Einige Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Medium	Elastizitätsmodul [GN/m ²]	Ausbreitungsgeschwindigkeit [m/s]
Aluminium	100	6420
Stahl	200	5941
Granit	200	6000

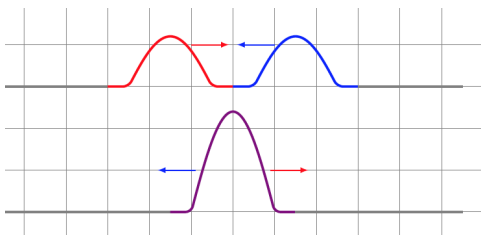
Tabelle 5.2: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von longitudinalen Wellen.

5.6 Prinzip der Superposition

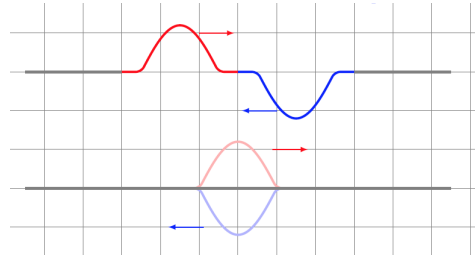
Vereinfacht kann die Superposition folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$$

Sich aufsummierende Wellen:



Sich ausgleichende Wellen:



5.7 Stehende Wellen

Beispiel: Saite, die auf beiden Seiten befestigt ist.

⇒ Auslenkung in eine harmonische Schwingung durch eine äussere Kraft

Grundfrequenz = erste Eigenfrequenz ν_1 ⇒ Die erste Welle davon = erste Harmonische

Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Eigenfrequenz ν_n :

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

wobei $n = 1, 2, 3, \dots$

Die Frequenz der n'ten Harmonischen kann als Funktion der Grundfrequenz (erste Harmonische) betrachtet werden:

$$\nu_n = n\nu_1$$

wobei:

$$\nu_1 = \frac{v}{2L}$$

Zudem folgt im Zusammenhang mit der bestimmten Geschwindigkeit:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

Randbedingung stehender Wellen

Aus dem Prinzip der Superposition folgt:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) \\ &= \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \\ &= 2\xi_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass eine Punkt an einem beliebigen Ort x eine einfache harmonische Bewegung hat, und dass die Amplitude von Ort zu Ort verschieden ist.

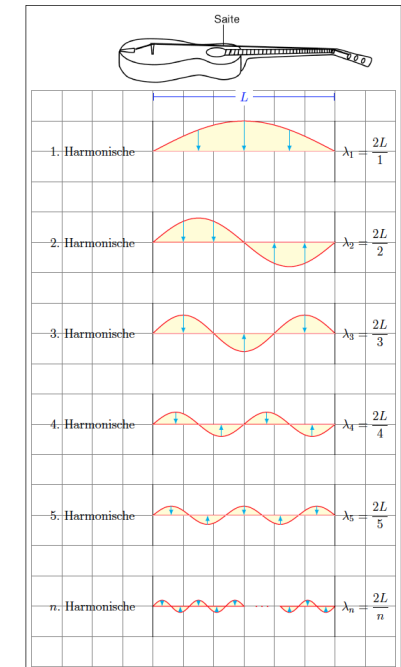
⇒ Ist die Saite allerdings links und rechts befestigt, existiert eine Randbedingung bei $x=0$ ($=L$):

$$\xi_0(0, t) = \xi_0(L, t) = 0$$

Daher folgt:

$$\xi_0(L, t) = 2\xi_0 \sin(kL) \cos(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(kL) = 0$$



Die Bedingung wird erfüllt wenn die Wellenzahl k oder die Wellenlänge folgende Werte besitzen:

$$k_n L = \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

oder:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wellenfunktion der n 'ten Harmonischen:

$$= 2\xi_0 \sin(k_n x) + \cos(\omega_n t)$$

wobei:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ und } \omega_n = 2\pi\nu_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

6 Relativität

6.1 Relativbewegung

Beobachter, die sich relativ zueinander bewegen, messen verschiedene Geschwindigkeiten und Beschleunigungen:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{relativ zu } O} = \frac{dR(t)}{dt} + \underbrace{v'(t)}_{\text{relativ zu } O'}$$

$$\underbrace{a(t)}_{\text{relativ zu } O} = \frac{d^2 R(t)}{dt^2} + \underbrace{a'(t)}_{\text{relativ zu } O'}$$

6.2 Scheinkräfte

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten. Es ist *nicht beschleunigt*.

Die **Zentrifugalkraft** ist eine fiktive, nach aussen gerichtete Kraft:

$$F_{ZF} = m(r'\omega^2)e_r$$

Die **Corioliskraft** wirkt senkrecht zur radialen Geschwindigkeit:

$$F_C = m(2v'\omega)e_\varphi$$

Hinweis: Ein Bezugssystem, das feste Koordinaten relativ zur Erdoberfläche hat ist kein Inertialsystem, da die Erde sich dreht/beschleunigt ist.

6.3 Transformationen

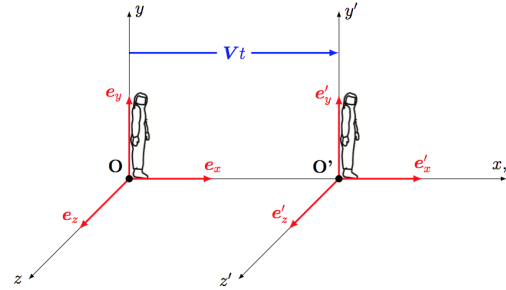
6.3.1 Ereignisse

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$$

wobei das Produkt ct die Lichtgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$ mal die Zeit $[s]$ ist.

6.3.2 Galileitransformation

Wir betrachten zwei Beobachter O und O' , die sich relativ zueinander mit *konstanter Geschwindigkeit* bewegen.



Bewegt sich der Beobachter O' in positive Richtung der x-Achse des Bezugssystems O , so ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x - \beta ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{von } O \text{ nach } O'$$

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x' + \beta ct' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{von } O' \text{ nach } O$$

wobei der **Geschwindigkeitsparameter** $\beta = \frac{V}{c}$ ist.

6.3.3 Lorentz-Transformation

Der **Lorentz-Faktor** ist gleich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dann ist die Transformation gleich

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{von } O \text{ nach } O'$$

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{von } O' \text{ nach } O$$

6.3.4 Geschwindigkeitstransformation

Der **Geschwindigkeitsvektor** u bezüglich O kann wie folgt berechnet werden

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{\beta}{c} u'_x)}$$

6.4 Relativitätstheorie

6.4.1 Raumzeit-Intervall

Räumliche und zeitliche Entfernungen sind in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich. Nur das **Raumzeit-Intervall** Δs ist gleich für alle Beobachter.

$$\Delta s^2 = \underbrace{(c\Delta t)^2}_{\text{zeitliche Entfernung}} - \underbrace{\Delta r^2}_{\text{räumliche Entfernung}}$$

6.4.2 Zeitdilatation

Das in einem bewegten Bezugssystem gemessene Zeitintervall ist immer um den Faktor γ grösser als das Eigenzeitintervall:

$$\underbrace{\Delta t'}_{\text{bezüglich } O' \text{ gemessene Zeit}} = \underbrace{\gamma \cdot \Delta \tau}_{\text{bezüglich } O \text{ gemessene Zeit}}$$

wobei $\Delta \tau$ das Eigenzeitintervall ist (Zeit im Ruhesystem gemessen).

Daraus folgt, dass Vorgänge länger zu dauern scheinen, wenn sie in einem System ablaufen, das sich relativ zum Beobachter bewegt.

6.4.3 Längenkontraktion

Die räumliche Entfernung zwischen zwei Punkten erscheint geringer, wenn sich der Beobachter relativ zu diesen Punkten bewegt, als wenn er relativ zu ihnen ruht:

$$\underbrace{\Delta x'}_{\text{bezüglich } O' \text{ gemessene Länge}} = \underbrace{\frac{\Delta x}{\gamma}}_{\text{bezüglich } O \text{ gemessene Länge}}$$

wobei $\Delta\lambda$ die Eigenlänge ist (Länge im Ruhesystem gemessen).

$$1 \text{ electronVolt} = 1.6 * 10^{-19} J$$

7 Temperatur, Gase, Thermodynamik

7.1 Atome

Der massenzahl: $A = Z + N$ wo Z ist die anzahl protonen und electronen, N ist die Anzahl Neutronen.

7.2 Temperatur / Gasthermometer

Druck von ein Gas

$$p = \frac{F}{A} \quad (1)$$

F ist die Kraft und A die Fläche.

pascal: NM^{-2} , 1 atm = $1,0125 \cdot 10^5$ Pa, 1 bar = 10^5 Pa

7.3 Absolute Temperatur / Kelvin-Skala

7.4 Ideale Gase

$$pV = NkT \quad (2)$$

wo k die boltzman konstante, N die Anzahl der gas-molekule, T die temperatur(K), V die Volume(m^3) und p die Druck(Pa).

7.5 Wärmeenergie und Wärmekapazität

Wärmekapazität C:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (3)$$

Wo Q ist die energie benötigt um den korper temperatur um T tauschen. Mann kann auch die wärmekapazität pro masse oder pro mol definieren. Wenn ΔT nicht zu gross ist, ist C eine konstante.

Wärmekapazität einer idealen einatomiges Gasses bei konstanten Volume V

$$C_V = \frac{3}{2}Nk \quad (4)$$

Wärmekapazität einer idealen einatomiges Gasses bei konstanten Druck p

$$C_p = \frac{5}{2}Nk = C_V + Nk \quad (5)$$

Die wärmekapazität von meisten korper ist nur abhängig von Anzahl Molen:

$$c \approx 25 \frac{J}{mol \cdot K} \quad (6)$$

7.5.1 Mischtemperatur

$$C_1(T_{ende} - T_0) = C_2(T_1 - T_{ende}) \quad (7)$$

7.6 Latente Wärme

Energie gebraucht für ein Phasenübergang

$$Q = mL \quad (8)$$

Wo L eine konstante spezifisch zu jede Substanz ist.

7.7 Wärmestrahlung

Jeder korper emittiert und absorbiert strahlung. Wenn er warmer als sein Umgebung ist dann emittiert er mehr als er absorbiert und vis versa, bis thermische gleichgewicht.

Die Austrahlung

$$S(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (9)$$

Wobei σ eine konstante ist und die unitat von $S(T) = \frac{J}{sm^2}$ und $0 \leq \epsilon \leq 1$ bei idealen Fall.

7.8 Erster Hauptsatz - Thermodynamik

In einem geschlossenen System wird nach einer Zeit ein thermisches Gleichgewicht erreicht.

Die innere Energie U ist die gesamte Energie in einem System. U hängt nur von anfang und endzustand. $U = U_e - U_a$.

Innere Energie des idealen Gasses

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}pV \quad (10)$$

$$dU = dQ + dW \quad (11)$$

7.9 Mechanische Arbeit eines expandierenden Gases

Die energie ist von Gas geleistet

$$dW = -Fdx = -(pA)dx = -pdV \quad (12)$$

$$W = - \int_{V_a}^{V_e} pdV = -p(V_e - V_a) \quad (13)$$

bei konstanten Druck

7.9.1 Isotherme expansion

Temperatur des gasses bleibt konstant und energie kommt von aussen.

$$Q = \int dQ = - \int dW = -W \quad (14)$$

7.9.2 Adiabatische Ausdehnung

Keine wärme wird dem Gas ausgetauscht $\Rightarrow dQ = 0$, Temperatur des Gases während der adiabatischen Expansion abnimmt. Bei der adiabatischen Expansion wird die im Gas gespeicherte Wärmeenergie in mechanische Arbeit umgewandelt.

$$pV^\gamma = konst \quad (15)$$

$$TV^{\gamma-1} = konst \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

7.10 Thermische Prozesse des idealen Gases

7.11 Wärmemaschine

Wärme ist in energie umgewandelt

$$Q_{isotherm} = -W_{isotherm} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (17)$$

V_1 anfangs volum, n ist Anzahl Atomen.

Wirkungsgrad Der Wirkungsgrad einer Wärmemaschine ist definiert als Verhältnis der geleisteten Arbeit zur zugeführten Wärme:

$$\epsilon = \frac{|W|}{|Q_W|} = \frac{|Q_W| - |Q_K|}{|Q_W|} = 1 - \frac{|Q_K|}{|Q_W|} \quad (18)$$

Leistungszahl In ähnlicher Weise ist die Leistungszahl einer Wärmepumpe definiert als das Verhältnis der Wärme, die dem kalten Reservoir entnommen wurde ($Q_K > 0$), und der zugeführten mechanischen Arbeit ($W > 0$):

$$c_L = \frac{Q_K}{W} \quad (19)$$

7.12 Zweiter Hauptsatz - Thermodynamik

8 Elektromagnetismus

8.1 Coulombsche Gesetz

Die **Coulombsche (elektrostatische) Kraft**, die eine Punktladung Q (Quelle) auf eine Ladung q (Testladung) ausübt, ist gleich:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad [F] = N$$

wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante und r der Ortsvektor der Ladung q ist. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Ladung Q .

8.2 Elektrisches Feld

Das **elektrische Feld** ist nach Gauss definiert als:

$$E(r) \equiv \frac{F(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{V(r)}{r} \quad [E(r)] = \frac{V}{m}$$

Handelt es sich beim Kondensator um ein **Zylinder**, so gilt:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad [\lambda] = \frac{C}{m}$$

wobei λ die Ladungsdichte pro Meter ist.

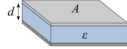
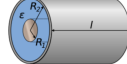
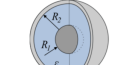
Das zweite Teilchen der Ladung q und Masse m spürt die Kraft des Feldes:

$$F(r) = qE(r)$$

Für eine positive Ladung q zeigt die Kraft in die Richtung des Feldes.

Es erfährt eine **Beschleunigung**:

$$a = \frac{q}{m} E$$

Bezeichnung	Kapazität	Elektrisches Feld	Schematische Darstellung
Plattenkondensator	$C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$	$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$	
Zylinderkondensator	$C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$	$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r}$	
Kugelkondensator	$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r}$	
Kugel	$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \cdot R_1$		

Es bedeuten:

A die Elektrodenfläche, d deren Abstand, l deren Länge, R_1 sowie R_2 deren Radien, ϵ_0 die **elektrische Feldkonstante** des Vakuums, ϵ_r die **relative Permittivität** des Dielektrikums und Q die **elektrische Ladung**.

8.2.1 Elektrische Feldlinien

1. Beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen oder im Unendlichen
2. An bestimmten Punkt ist die **Liniendichte** proportional zur Stärke des Feldes an diesem Punkt
3. Um einzelne Punktladungen sind die Linien kugelsymmetrisch verteilt
4. Anzahl Feldlinien um eine Punktladung ist zur Grösse der Ladung proportional

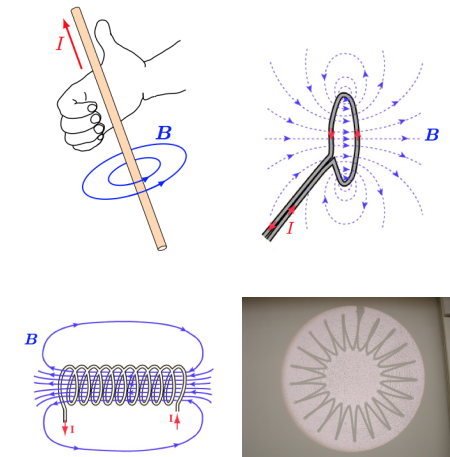
8.3 Magnetisches Feld

Richtung: Elektrische Feldlinien beginnen bei positiven Ladungen und enden bei negativen.

Magnetische Feldlinien bilden geschlossene Schleifen Richtung Südpol.

Kraft: Das elektrische Feld übt seine Kraft längs der Feldlinien aus.

Die Kraft des magnetischen Feldes wirkt nur auf bewegte Ladungen und zwar senkrecht zum B-Feld und zur Bewegungsrichtung.



Magnetisches Feld durch einen Draht, Ring, Solenoid, Torus

8.4 Energie im elektrischen Feld

Es wird **Arbeit** geleistet, wenn der Abstand zwischen zwei ungleichnamigen (ziehen sich an) Ladungen vergrößert wird bzw. erhält man Arbeit, wenn die Ladungen gleichnamig sind. Diese Arbeit wird als **elektrische potentielle Energie** gespeichert.

$$E_{pot}^e(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

8.4.1 Elektrisches Potential

Das **elektrische Potential** V ist ein Skalarfeld und entspricht der potentiellen Energie für eine Einheitsladung:

$$V(r) = \frac{E_{pot}^e(r)}{q} \quad [V(r)] = V$$

8.4.2 Elektrische Spannung

Die **elektrische Spannung** ist gleich dem Potentialunterschied zwischen zwei Punkten:

$$U_{1,2} = V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr \quad [U] = V$$

8.5 Elektrische Ladung in elektrischen und magnetischen Feldern

8.5.1 Lorentzkraft

Die **allgemeine elektromagnetische Kraft** ist gleich

$$F = F_E + F_B = q(E + v \times B)$$

wobei E das elektrische Feld und B das magnetische Feld ist. Sie haben die Einheiten:

$$[E] = \frac{N}{C}, \quad [B] = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = T$$

Magnetische Kraft:

1. Proportional zur Geschwindigkeit. Wirkt nur auf bewegte Teilchen.
2. Wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des Feldes
3. $|F_B| = |q||v||B| \sin(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen v und B ist

8.6 Elektrische Strom

8.6.1 Stromstärke

Die **elektrische Stromstärke** ist definiert als:

$$I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -enAv_D \quad [I] = A = \frac{C}{s}$$

wobei v_D der Driftgeschwindigkeit und n der Dichte der beweglichen Elektronen entspricht.

Die positive Stromrichtung folgt der Flussrichtung der positiven Ladungen.

Driftgeschwindigkeit:

Gegeben:

Kupferdraht: ein Elektron pro Atom, $8.93 \frac{g}{cm^3}$, $63.5 \frac{g}{mol}$

Querschnittsfläche: $1mm^2$

Stromstärke: $1A$

$$n = \frac{8.93 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{23}}{mol}}{63.5 \frac{g}{mol}} = 8.5 \cdot 10^{22} \frac{\text{Elektronen}}{cm^3}$$

$$|v_D| = \frac{I}{enA} = 0.07 \frac{mm}{s}$$

Die Driftgeschwindigkeit lässt sich auch mit der Beschleunigung a und der mittleren Zeit zwischen zwei Elektron-Ion Kollisionen τ abschätzen:

$$v_D = a\tau = \frac{-eE}{m}\tau = -\mu E$$

8.6.2 Ohmsches Gesetz

$$U_{AB} = RI = \left(\frac{L}{\sigma A}\right)I \quad [\sigma] = \frac{A}{Vm} = (\Omega m)^{-1}$$

wobei σ die **Leitfähigkeit** und L die Länge des Leiters ist.

8.7 Kraft auf elektrischen Strom

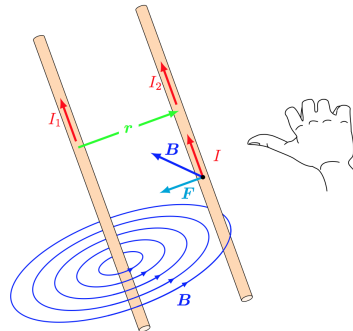
Die Gesamtkraft auf einen Leiter der Querschnittsfläche A und Länge L ist:

$$F = ALn(-e)v_D \times B = L(-enAv_D) \times B = LI \times B$$

Für ein differentielles Element des Stroms ist sie gleich:

$$dF = L dI \times B = I dL \times B$$

8.7.1 Kraft zwischen zwei parallelen Leitern



$$F \approx \frac{LI_1I_2}{r} \quad \text{vektoriell: } F = LI \times B$$

Fließen die zwei Ströme in die gleiche Richtung, so ziehen sich die Leiter an.

8.8 Elektrische Kapazität

In einem **Kondensator** wird Energie in einem elektrischen Feld gespeichert.

Die **Kapazität des Kondensators** C ist gleich:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [C] = F = \frac{C}{V}$$

wobei Q die Ladung des Kondensators und V die Potenzialdifferenz zwischen den Platten ist.

Die **gespeicherte Energie** (bzw. geleistete Arbeit zum Laden) ist gleich:

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

8.9 Ladungs- und Stromdichte

8.9.1 Ladungsdichte

Die **Raumladungsdichte** ist ein Skalarfeld und ist gleich:

$$\rho(r) = \frac{dq}{dV}$$

8.9.2 Stromdichte

Die **Stromdichte** bezeichnet Stromstärke pro Fläche und ist gleich:

$$j = \frac{I}{A}$$

Vektoriell ist sie gleich:

$$I = \iint_A j(r) \cdot dA$$

8.9.3 Kontinuitätsgleichung

Sie besagt, dass wenn sich die elektrische Ladung in einem Punkt r ändert, muss in diesem Punkt ein elektrischer Strom fließen.

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial t} + \nabla \cdot j(r) = 0$$

8.10 Elektrischer Fluss

Der elektrische Fluss durch eine Fläche A wird definiert als der Fluss des elektrischen Feldes durch die Fläche:

$$\Phi_E = \iint_A E \cdot dA$$

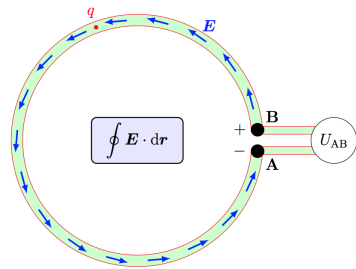
8.11 Magnetischer Fluss

$$\Phi_B = \iint_A B \cdot dA$$

Die Divergenz des magnetischen Feldes muss in jedem Punkt des Raumes gleich null sein:

$$\nabla \cdot B(r) = 0$$

8.12 Induktionsgesetz



Das Linienintegral des elektrischen Feldes über die geschlossene Schleife ist gleich der Induktionsspannung U_{ind} :

$$U_{ind} = \oint E \cdot dr = -\frac{d}{dt} \iint_A B \cdot dA = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

8 Quantenmechanik

Balmer-Rydberg-Formel Fr ein festes m (z.B. $m = 2$) liefert die Formel eine Serie von Linien mit Wellenlngen, die sich nhern, wenn die Zahl n zunimmt.

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$$

wobei m und n positive ganze Zahlen sind.

Frequenz einer Wellenlge

$$v = \frac{c}{\lambda} = Rc(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$$

Energie eines Atoms

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m_e v_e^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Diese Gleichung entspricht der klassischen Mechanik (wenn sich das Elektron mit Radius r um das Proton bewegt).

Geht ein Atom von der Energie E_n in die niedrigere Energie E_m ber, so ist die Frequenz v des emittierten Lichts gleich

$$v = \frac{1}{h}(E_n - E_m)$$

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}$$

Elektron Der **Drehimpuls** ist ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar und somit auf bestimmte Werte beschrnkt.

$$L = rp = rm_e v = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

Die max. kin. Energie, die ein Elektron nach dem Verlassen einer mit Licht bestrahlten Metalloberfche haben kann, ist

gleich

$$E_k = hv - A$$

wobei A die Austrittsarbeit ist.

Die Energie eines einzelnen Elektrons ist gleich

$$E = hv = \frac{h\omega}{2\pi} \equiv \hbar\omega$$

Der Impuls eines einzelnen Elektrons ist gleich

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar k}{2\pi} \equiv \hbar k$$

Photon Die Energie eines einzelnen Photons ist gleich

$$E = hv = \frac{hc}{\lambda}$$