

# 1 Matrizen

symmetrisch	$A^T = A$ , $AB = BA$ , quadratisch
schiefsymmetrisch	$A^T = -A$
hermitesch	$A^H = A$ , quadratisch
unitär	$A^H A = I_n$ also $A^{-1} = A^H$ , Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal
orthogonal	$A^T A = I_n$ also $A^{-1} = A^T$

## 1.1 Regulär

Sei  $A^{m \times n}$  mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten **regulär** mit Rang  $r$ :

- $A$  ist quadratisch
- $r = n$
- $A$  ist invertierbar
- Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind linear unabhängig und erzeugen  $\mathbb{E}^m$  bzw.  $\mathbb{E}^n$
- 0 ist kein Eigenwert
- $\det(A) \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- Die lineare Abbildung  $A$  ist bijektiv
- für jedes  $b$  in  $Ax = b$  gibt es genau eine Lösung
- die Spalten bilden eine Basis

## 1.2 Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$B = \text{diag}(2, 3, 4, 5) \Rightarrow B^{-1} = \text{diag}(1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$$

## 1.3 Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Operationen

$A \cdot B = C$  ist definiert, falls  $A$  gleichviele Spalten hat wie  $B$  Zeilen.  $C$  hat dann gleichviele Zeilen wie  $A$  und gleichviele Spalten wie  $B$ .

$$\begin{aligned}(\alpha A)B &= \alpha(AB) = A(\alpha B) \\(\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\(A + B)C &= AC + BC \\(\alpha A)^T &= \alpha A^T \\(A + B)^T &= A^T + B^T \\(AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

# 2 LR-Zerlegung

**Grundsatz:**  $Ax = b$ ,  $PA = LR \Rightarrow Lc = Pb$ ,  $Rx = c$

wobei  $R$   $A$  nach Gauss aufgelöst ist, und  $L$  die Inverse der Zeilensubtraktionen hält

**Pivotierung:** Nullen oder relativ kleine Zahlen können als Pivot nicht gebraucht werden. Man benutzt normalerweise die **Kolonennmaximumstrategie** (wählt immer das betragsmässig grösste Element in der Spalte aus).

### 3 Vektorräume

#### 3.1 Vektor

$$\begin{array}{ll} \text{Länge, 2-Norm} & ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ \text{Winkel} & \varphi = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||}\right) \end{array}$$

#### 3.2 Orthonormalbasen

Unterraum	von span $S$ mit $S = a_1, \dots, a_2$ aufgespannt bzw. die Menge aller Linearkombinationen von $S$
Erzeugendensystem	die Menge $S$
Basis	linear unabhängiges Erzeugendensystem
Dimension	die Anzahl Basisvektoren

#### 3.3 Skalarprodukt

$$\begin{array}{ll} \text{linear} & \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ & \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\ \text{symmetrisch} & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\ \text{positiv definit} & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ & \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}$$

#### 3.4 Norm

$$\begin{array}{ll} \text{positiv definit} & ||x|| \geq 0 \\ & ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Homogenität} & ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \\ \text{Dreiecksungleichung} & ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \end{array}$$

#### 3.5 Orthogonalisierungsverfahren

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{||a_1||} \\ \tilde{b}_2 &= a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1 \\ b_2 &= \frac{\tilde{b}_2}{||\tilde{b}_2||} \\ \tilde{b}_3 &= a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2 \\ b_3 &= \frac{\tilde{b}_3}{||\tilde{b}_3||} \end{aligned}$$

### 4 Lineare Abbildungen

Sei  $F : X \mapsto Y$  mit  $\dim X = n$  und  $\dim Y = m$  heisst **linear**, falls:

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}, \quad F(\gamma x) = \gamma(Fx)$$

<b>Matrixdarstellung</b>	$A$ , so dass $F(x) = Ax$
<b>Kern</b>	$\{x \in X; Fx = 0\}$ , alle Vektoren in $X$ , die auf 0 zeigen
<b>Bild</b>	alle Vektoren in $Y$ , die von $X$ mit $F$ erreicht werden
<b>Rang</b>	$\text{Rang } F := \dim \text{im } F$ Dimension des Spaltenraums Dimension des Zeilenraums
<b>Kolonnenraum</b>	im $A = \mathcal{R}(A)$ , der von den Kolonnen von $F$ aufgespannte Unter- raum
<b>Nullraum</b>	$\ker A = \mathcal{N}(A)$

Aus der **Dimensionsformel**  $\dim X - \dim \ker F = \text{Rang } F$  folgt, falls  $F$ :

<b>injektiv</b>	keine Kollisionen Spaltenvektoren linear unabhängig $\text{Rang } F = \dim X$ $\ker F = \{0\}$
<b>surjektiv</b>	es wird jedes Element in $Y$ erreicht $\text{Rang } F = \dim Y$
<b>bijektiv, d.h. Isomorphismus</b>	$\text{Rang } F = \dim X = \dim Y$
<b>bijektiv, d.h. Automorphismus</b>	$\text{Rang } F = \dim X$ $\ker F = 0$

#### 4.1 Bestimmung der Basis für Kern/Bild

1. Gauss anwenden
2. Basis des **Bildes**
  - (a) Alle linear unabhängigen Spaltenvektoren (alle mit Pivot)
3. Basis des **Kerns**
  - (a) Setze  $Fx = 0$
  - (b) Berechne von freien Variablen abhängige Lösung
  - (c) Klammere freie Variablen aus

BEISPIEL TODO

#### 4.2 Bestimmung der Abbildungsmatrix

**Grundsatz:** Die Spalten von  $A$  sind die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren.

gegeben:  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$$

gesucht: Abbildungsmatrix  $A$  bezüglich  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

Grundsatz anwenden:  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Matrix formen:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

### 4.3 Transformation

$$\begin{array}{ccc}
 x \in X & \xrightarrow[\text{lin. Abb.}]{F} & y \in Y \\
 \kappa_X \downarrow \uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \downarrow \uparrow \kappa_Y^{-1} \quad \text{(Koordinaten-abbildung bzgl. "alten" Basen)} \\
 \xi \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{A} & \eta \in \mathbb{E}^m \quad \text{(Koordinaten bzgl. "alten" Basen)} \\
 \mathbf{T}^{-1} \downarrow \uparrow \mathbf{T} & & \mathbf{S}^{-1} \downarrow \uparrow \mathbf{S} \quad \text{(Koordinaten-transformation)} \\
 \xi' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{B} & \eta' \in \mathbb{E}^m \quad \text{(Koordinaten bzgl. "neuen" Basen)}
 \end{array} \tag{5.48}$$

Es gilt also

$$\boxed{y = Fx, \quad \eta = A\xi, \quad \xi = T\xi', \quad \eta = S\eta', \quad \eta' = B\xi'}. \tag{5.49}$$

Diesen Formeln oder dem Diagramm entnimmt man, dass für die Abbildungsmatrix  $B$ , die die Abbildung  $F$  bezüglich den "neuen" Basen in  $\mathbb{E}^m$  und  $\mathbb{E}^n$  beschreibt, gilt

$$B\xi' = \eta' = S^{-1}\eta = S^{-1}A\xi = S^{-1}AT\xi'$$

Da  $\xi'$  beliebig ist, ergibt sich

$$\boxed{B = S^{-1}AT, \quad A = SBT^{-1}}. \tag{5.50}$$

Aus Satz 5.16 folgt im übrigen wegen  $\text{Rang } S^{-1} = \text{Rang } T = n$ , dass  $\text{Rang } B = \text{Rang } A$  ist, und in ähnlicher Weise folgt aus Korollar 5.10, dass  $\text{Rang } F = \text{Rang } A$  ist:

$$\boxed{\text{Rang } F = \text{Rang } A = \text{Rang } B}. \tag{5.51}$$

Im Falle einer linearen Abbildung von  $X$  *in sich*, ist natürlich  $Y = X$ ,  $\kappa_Y = \kappa_X$ ,  $S = T$ . Aus (5.50) wird damit

$$\boxed{B = T^{-1}AT, \quad A = TBT^{-1}}. \tag{5.52}$$

## 5 Projektionen

<b>Projektion</b>	lineare Abbildung für die gilt $P^2 = P$
<b>Orthogonalprojektion</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Projektion für die gilt <math>\ker P \perp \operatorname{im} P</math></li><li>2. <math>P</math> ist quadratisch</li><li>3. <math>I - P</math> ist orthogonaler Projektor</li><li>4. <math>P^T = P</math></li></ol>

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H$$

$$P_Q := Q Q^H \quad \text{falls Kolonnen von } Q \text{ orthonormal}$$

### 5.1 Methode der kleinsten Quadrate

Beispiel 7.4 Seite 7-7 im Skript

### 5.2 QR-Zerlegung

**Grundsatz:**  $A = QR$

$$\begin{aligned} \text{mit } q_1 &:= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle, \quad q_k := \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|} \\ r_{11} &:= \|a_1\|, \quad r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle, \quad r_{kk} := \|\tilde{q}_k\| \end{aligned}$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gram-Schmidt: } r_{11} = \|a_1\|, \quad q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = q_1^T a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\tilde{q}_2 = (I - q_1 q_1^T) a_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\tilde{q}_2\| = 5$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = (I - q_1 q_1^T)(I - q_2 q_2^T) a_3$$

und so weiter...

$$\text{Lösung: } Q = (q_1, q_2, q_3), \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

## 6 Determinante

Es gilt:

- $\det A = 0 \Rightarrow Ax = b$  ist nicht lösbar
- $A$  hat eine Zeile lauter Nullen  $\Rightarrow \det A = 0$
- $A$  hat zwei gleiche Zeilen  $\Rightarrow \det A = 0$
- $A$  ist eine Diagonalmatrix  $\Rightarrow \det A = \text{Produkt der Diagonalelemente}$
- $A$  ist eine Dreiecksmatrix  $\Rightarrow \det A = \text{Produkt der Diagonalelemente}$

### 6.1 Identitäten

$$\det(\gamma A) = \gamma^n \det A$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \quad \text{falls } A \text{ regulär}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^H) = \det(A)$$

## 6.2 Berechnung

## 6.3 Dimension $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

## 6.4 Dimension $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + dbi + ahf)$$

## 6.5 Allgemeine Dimension $n \times n$

**Grundsatz:**  $\det A = a_{kl} \mathcal{K}_{kl}$   
wobei  $\mathcal{K}_{kl} := (-1)^{k+l} \det A_{[k,l]}$

*Tipp:* Wähle die Zeile/Spalte aus mit den meisten Nullen.

gegeben:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

entwickeln nach der 2. Zeile:  $\mathcal{K}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$

$$\mathcal{K}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 28$$

**Lösung:**  $\det A = a_{21} \mathcal{K}_{21} + a_{22} \mathcal{K}_{22} + a_{23} \mathcal{K}_{23} + a_{24} \mathcal{K}_{24}$   
 $= 2(-12) + 4(-2) + 6(-2) + 3(28) = 40$

## 7 Eigenwerte und -vektoren

Betrachte eine lineare Abbildung  $F: V \mapsto V, x \mapsto Fx$ :

<b>Eigenwert</b>	$\lambda \in \mathbb{E}$ , so dass $Fv = \lambda v$
<b>Eigenvektor</b>	$v \in V, v \neq 0$ , so dass $Fv = \lambda v$
<b>Eigenraum</b>	gehört zu spezifischem Eigenwert $E_\lambda := \{v \in V; Fv = \lambda v\}$
<b>Spektrum</b>	$\sigma(F)$ , Menge aller Eigenwerte von $F$



## 7.1 Berechnung der Eigenwerte

$$\textbf{Grundsatz: } E_\lambda = \ker (F - \lambda I) = \det(F - \lambda I)$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{char. Polynom: } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \mathcal{X}_A(\lambda)$$

$$\text{Nullstellen finden: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

$$\textbf{Eigenwerte: } \sigma(A) = \{1, 2, -1\}$$

## 7.2 Berechnung der Eigenvektoren

**Eigenwerte** in  $A$  einsetzen

4	-1	3	0
8	-2	6	0
-4	1	-3	0

5	-1	3	0
8	-1	6	0
-4	1	-2	0

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 7.3 Spektralzerlegung

$$\textbf{Grundsatz: } AV = V\Lambda \Leftrightarrow A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\text{gegeben: } A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 12 & -2 & 12 \\ 12 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte bestimmen: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren bestimmen: } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Eigenbasis: } V = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Bemerkung:*  $A$  muss diagonalisierbar sein, d.h. die **geometrische Vielfachheit** der Eigenwerte muss mit der **algebraischen Vielfachheit** übereinstimmen.

## 7.4 Hauptachsentransformation

gegeben:  $Q(x_1, x_2, x_3) = 221x_1^2 + 144x_1x_2 + 480x_1x_3 + 179x_2^2 + 360x_2x_3 + 100x_3^2$

Matrix formen:  $A = \begin{pmatrix} 221 & 72 & 240 \\ 72 & 179 & 180 \\ 240 & 180 & 100 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung:  $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ -0.8 & 0.36 & 0.48 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & -0.8 \\ 0.64 & 0.48 & 0.6 \end{pmatrix}$

neue Koordinaten:  $\tilde{x}_1 = 0.6x_1 - 0.8x_2$

$$\tilde{x}_2 = 0.48x_1 + 0.36x_2 - 0.8x_3$$

$$\tilde{x}_3 = 0.64x_1 + 0.48x_2 + 0.6x_3$$

Hauptachsendarstellung:  $Q(x) = Q(\tilde{x}) = 125\tilde{x}_1^2 - 125\tilde{x}_2^2 + 500\tilde{x}_3^2$

## 8 Singulärwertzerlegung

Grundsatz:  $A = U\Sigma V^T$

mit  $\Sigma := \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ , wobei  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

wobei  $\Sigma$  hat die gleiche Dimension wie  $A$

$$AA^T = U\Sigma_m^2 U^T, \quad A^T A = V\Sigma_n^2 V^T$$

$\{u_1, \dots, u_r\}$  ist Basis von  $\text{im } A \equiv \mathcal{R}(A)$

$\{v_1, \dots, v_r\}$  ist Basis von  $\text{im } A^T \equiv \mathcal{R}(A^T)$

$\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$  ist Basis von  $\ker A^H \equiv \mathcal{N}(A^H)$

$\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  ist Basis von  $\ker A \equiv \mathcal{N}(A)$

gegeben:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T A$  und  $AA^T$  berechnen:  $B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte berechnen:  $\sigma(B) = \{6, 1\}$ ,  $\sigma(C) = \{0, 1, 6\}$

Grundsatz anwenden:  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , da  $\sigma(B)$  mit  $|\sigma(B)| = 2$  passt

Eigenvektoren berechnen:  $V = (b_1|b_2)$ ,  $U = (c_1|c_2|c_3)$

### 8.1 Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

### 8.2 Konditionszahl

$$\mathcal{K}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Die Spektralnorm einer Matrix entspricht dem maximalen **Singulärwert**.

## 9 Differentialgleichungen

### 9.1 Erster Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

$$\textbf{Grundsatz: } y(t) = V e^{t\Lambda} c$$

$$\text{mit } c = V^{-1} y_0$$

$$\text{gegeben: } \dot{y}_1(t) = -2y_1(t) + 2y_3(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = -2y_1(t) - 3y_2$$

$$\dot{y}_3(t) = -3y_3(t)$$

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$$

$$\text{Matrix formen: } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Spektralzerlegung: } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Grundsatz anwenden: } c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Lösung: } y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

### 9.2 Höhere Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

**Grundsatz:** zu System 1. Ordnung umschreiben

$$\text{gegeben: } \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0$$

$$x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0$$

$$\textbf{umformen: } y_1(t) = x(t), y_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2$$

$$y_1(0) = 3, y_2(0) = 0$$

$$\text{Matrix formen: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{System 1. Ordnung lösen: } y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Lösung: } x(t) = x(t) = y_1(t) = 2e^{-t} + e^{2t}$$

## 10 Maschinenzahlen

$$\text{gegeben: } x = \pm 0.bbb \times 2^{\pm bb}$$

$$\text{grösste positive Zahl: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad \frac{7}{8} \times 2^3 = 7$$

$$\text{Maschinengenauigkeit: } 2^{-3} = \frac{1}{8}$$