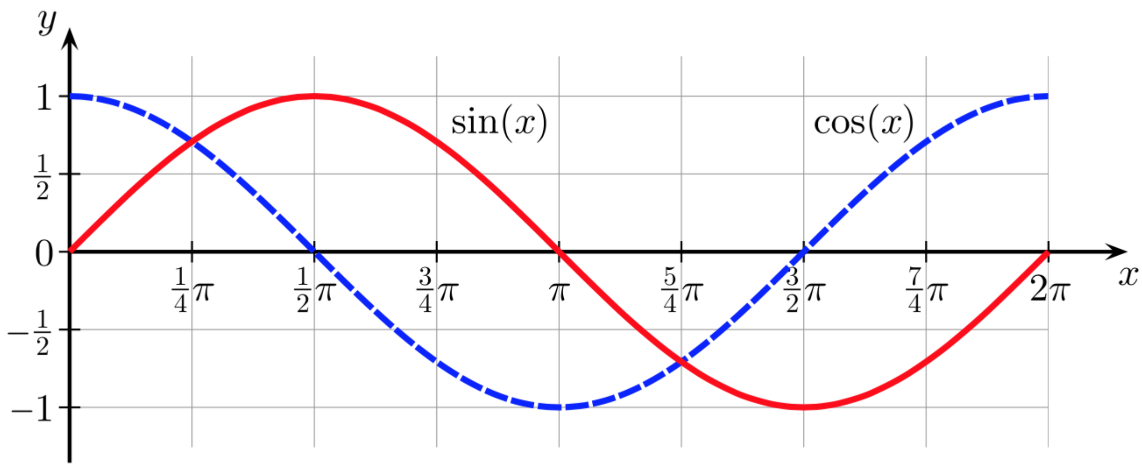
1 Allgemein

1.1 Trigonometrie



Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\
\sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

1.2 Potenzgesetze

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
(a^n)^m &= a^{nm} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^{\frac{b}{n}} &= \sqrt[n]{a^b}
\end{aligned}
$$

2 Mengen

2.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$

2.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

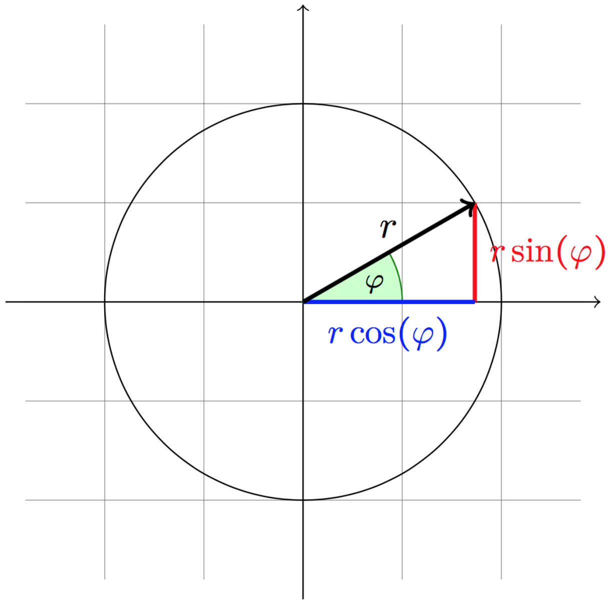
1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

2.2 Identitäten

$$
\begin{gathered}
A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\} \\
\sup(A + B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A + B) = \inf A + \inf B \\
\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}
\end{gathered}
$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Quadrant)}$$
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$
$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$
$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

3.2 Identitäten

$$\overline{z} = x - iy$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

4.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin\odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan\odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$-Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0" oder "1^∞" für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	"$0 \cdot \infty$"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"$\infty - \infty$"	$\frac{f(x)i(x)-h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

4.6 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

5 Folgen

5.1 Definition

$$\textbf{Konvergenz:} \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \text{sodass}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\textbf{Divergenz:} \quad \forall K > 0\ \exists N = N(K) \in \mathbb{N},\ \text{sodass}\ \forall n \geq N : |a_n| > K$$

5.2 Beweis

Entweder **Grenzwert berechnen**, oder:

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. Schätze den Grenzwert durch die ersten paar Terme ab
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$)

6 Reihen $\sum^{\infty}$

6.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen

- falls Grenzwert $= 0$:
  - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
  - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
- falls Grenzwert $= \infty$:
  - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
  - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

6.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1-r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

6.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^\infty a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Konvergenzverhalten am Rand: Es muss noch berprft werden, ob die Reihe fr genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

6.3.1 Tipps

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1$$
$$harmonische: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

6.3.2 Potenzreihenentwicklung

$$\textbf{Grundsatz:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

7 Stetigkeit

7.1 Stetigkeitskriterien

Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf** Ω **beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \to \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

8 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

8.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

8.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

8.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x + a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

8.4 Hauptsatz von Calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

9 Integration

9.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

9.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

9.3 Tipps

$$\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\log|\cos(x)|$$
$$\int \frac{1}{x-\alpha} \; dx = \log(x-\alpha)$$
$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+(\frac{x}{\alpha})^2} \; dx = \arctan(x)$$
$$\int \sin^2(x) \; dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$
$$\int \cos^2(x) \; dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$
$$\int \sqrt{x^2+1} \; dx = \sinh(x) + C$$

9.4 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(x) \; dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x) \; dx$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \; dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^k f(x) \; dx + \lim_{R\to\infty} \int_k^R f(x) \; dx$$

Gibt es eine Unstetigkeitstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x) \; dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \; dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \; dx$$

10 Differentialgleichungen

10.1 Grundbegriffe

Ordnung:	höchste vorkommende Ableitung
linear:	alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen:	Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion:	Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

10.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

10.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int x dx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

10.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

$y' - y = 1,\ y(0) = 0$

homogener Ansatz $y' = y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$

Trennung $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log|y| = x$

homogene Lösung $y_{\text{homo}}(x) = Ae^x,\ A = e^C \in \mathbb{R}$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = A(x)e^x$

einsetzen $A'e^x + Ae^x - Ae^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -1$

Lösung $y(x) = Ae^x - 1$ mit Anfangsbedingung $A = 1$

$\Rightarrow y(x) = e^x - 1$

10.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen $4, -2$

allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$

Lösung $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

10.2.4 Direkter Ansatz

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x.

$$\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ \ y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1,\ \ -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}$$

11 Vektorfelder

11.1 Differenzial

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11.2 Gradient

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Länge ist gleich der maximalen änderung von f.
Bemerkung: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

11.3 Hessematrix

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Falls a hat in x0 nur positive eigenwerte dann ist es eine maximalstelle, falls sie hat nur negative eingewerte dann ist es eine minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein sattelpunkt.

11.4 Rotation

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \ \mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \ \text{in } \mathbb{R}^2: \ \mathrm{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Bemerkung: Falls $\mathrm{rot}(\vec{v}) = 0$, dann ist $\vec{v}$ konservativ (Potenzialfeld).

11.5 Divergenz

$$\mathrm{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + ...$$

11.6 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Das Potenzial Φ eines Potenzialfeldes ist gleich:

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

Für ein Potenzialfeld gilt $\mathrm{rot}(\vec{v}) = 0$ und es erfüllt die **Integrabilitätsbedinungen**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

12 Wegintegral

12.1 Standardmethode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) \ dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren: hier bereits gegeben

γ ableiten: $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix}$

in Formel einsetzen:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt$$

Lösung $2\pi - 0 + \pi = 3\pi$

12.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix},\ \text{Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2\ dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \overset{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$

$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$

Potenzial: $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

Lösung: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

12.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn) immer der vektorfeld (-y,0) oder (0,x).

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})\ dxdy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix},\ \text{Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

Rotation berechnen: $rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

Normalbereich: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

in Formel einsetzen: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1\ dxdy = -\mu(E) = -\pi$

$$\int\int_{\Omega} rotv dx dy = \int_{\gamma_1} v(\gamma_1(t)) * \gamma_1' dt + \int_{\gamma_2} v(\gamma_2(t)) * \gamma_2' dt + ... \tag{1}$$

12.4 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz: $$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\ do$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix},\ \text{Rand der oberen Hälfte der Einheitssphäre mit Radiu}$$

Rotation berechnen: $$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$$

Einheitssphäre parametrisieren: $$\Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Normalvektor berechnen: $$\Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix},\ \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\phi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Grundsatz anwenden: $$\int_H \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\ do = \frac{\pi}{2}$$

13 Flächenintegral

13.1 Koordinatentransformationen

13.1.1 Polarkoordinaten ($\mathbb{R}^2$)

Variablen: $$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi)$$ **Volumenelement:** $$dxdy = r\ drd\phi$$

13.1.2 Elliptische Koordinaten ($\mathbb{R}^2$)

Variablen: $$x = ra\cos(\phi) \quad y = rb\sin(\phi)$$ **Volumenelement:** $$dxdy = abr\ drd\phi$$

13.1.3 Zylinderkoordinaten ($\mathbb{R}^3$)

Variablen: $$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi) \quad z = z$$ **Volumenelement:** $$dxdydz = r\ drd\phi dz$$

13.1.4 Kugelkoordinaten ($\mathbb{R}^3$)

Variablen: $\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$ **Volumenelement:** $dxdydz = r^2\ dr\ \sin(\theta)\ d\theta d\phi$

13.2 Normalbereich

Grundsatz: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$

$$\int_\Omega F\ d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\ F(x,y)$$

$$\int_\Omega xy\ d\mu,\ \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \ge x^2, x \ge y^2\}$$

als Normalbereich schreiben: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: $\int_\Omega xy\ d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx\ x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big) dx = \frac{1}{12}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x,y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r,\phi) = r$.

13.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma = \partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $rot(\vec{v}) = 1$

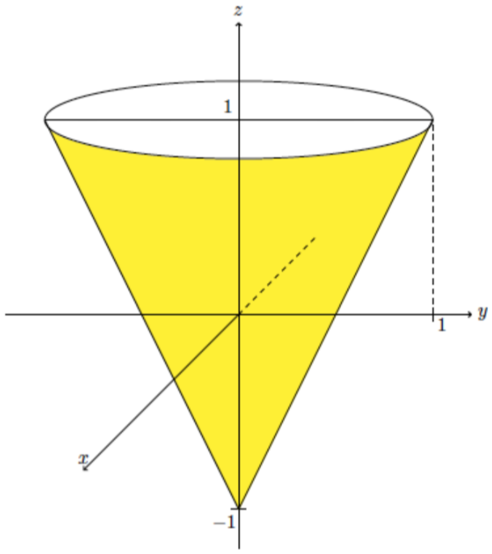
Flächeninhalt der Ellipse E, berandet durch $x = a\cos(\theta),\ y = b\sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen: $\mu(E) = \pi ab$

14 Oberflächenintegral



gegeben: $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2+3z^2-3 \end{pmatrix}$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels (von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Kegel mit **Satz von Gauss** berechnen
Fluss durch Deckel mit **Standardmethode** berechnen

14.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}\; do$

Normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorfeld anpassen: $z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

Grundsatz anwenden: $\iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dxdy = \iint_D x^2\; dxdy$

Koordinatentransformation: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos(\phi)\; drd\phi = \frac{\pi}{4}$

14.2 Satz von Gauss

Grundsatz: $\int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}\; do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v})\; d\mu$

wobei $\vec{n}$ die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

Divergenz berechnen: $\operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$

Grundsatz anwenden: $\int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr\; dr = 2\pi$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

14.3 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\ do$$

15 Kurvendiskussion

Extremalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt
Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

15.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
   (a) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum
   (b) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum
   (c) $\operatorname{Hess}(f)(p_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grösser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

15.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben: $f = xyz$ mit Nebenbedinung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lagrange-Bedingung: $L = f - \lambda g = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

kritische Punkte von L: $dL = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xy}{2z}$$

Lambdas gleichsetzen: $x^2 = y^2 = z^2 \wedge g \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Kandidaten: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

in f einsetzen: $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Vorgehen um alle Kandidaten zu finden:

1. Lagrange-Bedinung anwenden (müssen alle Nebenbedingung erfüllen)
2. Kandidaten der Nebenbedingung
   falls g differenzierbar:
   (a) nicht-reguläre Punkte finden mit $dg = 0$
   (b) gefundene Punkte mit Nebenbedingung überprüfen

   falls g nicht differenzierbar:
   (a) nicht-reguläre Punkte der Teilstücke des Randes
   (b) Eckpunkte des Gebietes überprüfen

andere moglichkeit falls nebebidingungen sind einfach:

1. kandidaten im inneren suchen
2. die function $\frac{d}{dy}$f(eckpunt1,y)=0 losen und sehen ob punckt in bereich ist.
3. das gleiche machen fur eckpunkt2 in y und dann fur beide eckepunkte fur x.
4. weitere kandidaten sind die eckepunkte.