

# 1 Trigonometrie

$$\sin(0) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin(\pi) = 0, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos(0) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos(\pi) = -1, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

## 2 Mengen

### 2.1 Definitionen

<b>Obere/Untere Schranke:</b>	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
<b>Supremum:</b>	kleinste obere Schranke $\sup A$
<b>Infimum:</b>	grösste untere Schranke $\inf A$
<b>Maximum/Minimum:</b>	$\sup A \in A, \inf A \in A$

### 2.2 Identitten

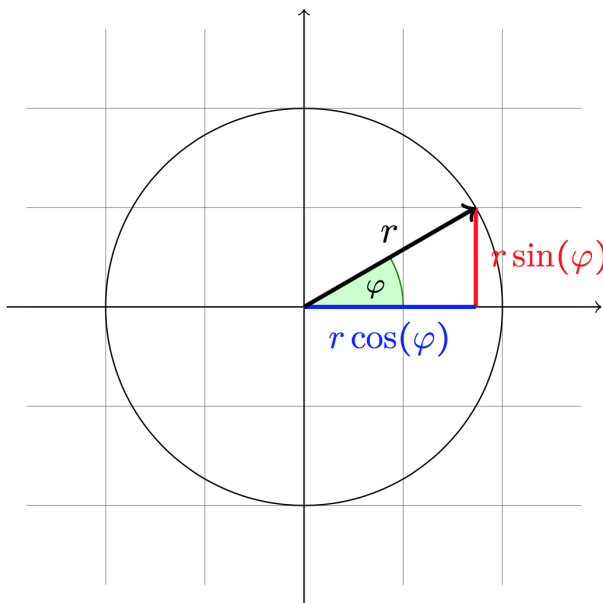
$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

## 3 Komplexe Zahlen

### 3.1 Polarform



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = i, e^{i\pi} = -1, e^{-i\pi} = -1$$

## 3.2 Identitäten

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \\ |zw|^2 &= (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2\end{aligned}$$

## 4 Grenzwert

### 4.1 Dominanz

Für  $x \rightarrow +\infty$ :  $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für  $x \rightarrow 0$ :  $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

### 4.2 Tipps

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0\end{aligned}$$

### 4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

### 4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

**Anforderung:** Term der Form  $f(x)^{g(x)}$  mit Grenzwert " $0^0$ ", " $\infty^0$ " oder " $1^\infty$ " für  $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

### 4.5 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

**Anforderung:** Term der Form  $\frac{f(x)}{g(x)}$  mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit  $g'(x) \neq 0$ .

Falls die Grenzwerte  $0 \neq \infty$  verschieden sind, kann man umformen:  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ .

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zwei Polyzisten zu benutzen mit sin, cos, tan oder  $-1^n \dots$  sonst induktion:  $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$  oder direct. Mit eine recursive folge, um Grenzwert zu finden, setzen  $a_n$  mit a und a finden. Oder direct mit  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ .

## 5 Reihen

### 5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
<b>Limes des allgemeinen Glieds</b>		zeigt nur Divergenz
<b>Majoranten- und Minorantenkriterium</b>		ersten Glieder spielen keine Rolle
<b>Quotientenkriterium</b>	$a_n$ mit Faktoren wie $n!$ , $a^n$ , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
<b>Wurzelkriterium</b>	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
<b>Leibnitz-Kriterium</b>	alternierende Reihe	
<b>Absolute Konvergenz</b>	sin, cos	

#### Limes des allgemeinen Glieds

**Bemerkung:** Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1.  $\sum_n a_n$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  berechnen
  - falls Grenzwert  $\neq 0 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $= 0 \Rightarrow$  keine Aussage

#### Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien  $a_n, b_n > 0$  mit  $a_n \geq b_n \forall n$  ab einem gewissen  $n_0$ . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ **konvergent**} \quad (\text{Majorantenkriterium})$$

$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ **divergent**} \quad (\text{Minorantenkriterium})$$

#### Vergleichskriterium

1.  $\sum_n a_n$  und  $\sum_n b_n$  gegeben mit  $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  berechnen
  - falls Grenzwert  $= 0$ :
    - $\sum_n a_n$  divergent  $\Rightarrow \sum_n b_n$  **divergent**
    - $\sum_n b_n$  konvergent  $\Rightarrow \sum_n a_n$  **konvergent**
  - falls Grenzwert  $= \infty$ :
    - $\sum_n a_n$  konvergent  $\Rightarrow \sum_n b_n$  **konvergent**
    - $\sum_n b_n$  divergent  $\Rightarrow \sum_n a_n$  **divergent**

### Quotientenkriterium

1.  $\sum_n a_n$  mit  $a_n \neq 0$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  berechnen
  - falls Grenzwert  $> 1 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $< 1 \Rightarrow$  **konvergent**
  - falls Grenzwert  $= 1 \Rightarrow$  keine Aussage

### Wurzelkriterium

1.  $\sum_n a_n$  mit  $a_n \neq 0$  gegeben
2. Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  berechnen
  - falls Grenzwert  $> 1 \Rightarrow$  **divergent**
  - falls Grenzwert  $< 1 \Rightarrow$  **konvergent**
  - falls Grenzwert  $= 1 \Rightarrow$  keine Aussage

### Leibniz-Kriterium

1.  $\sum_n (-1)^n a_n$  gegeben
2. **konvergent**, falls:
  - (a)  $a_n \geq 0$
  - (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
  - (c)  $a_n$  monoton fallend

### Absolute Konvergenz

1.  $\sum_n (-1)^n a_n$  gegeben
2. **konvergent**, falls  $\sum_n |a_n|$  konvergent

## 5.2 Geometrische Reihe

$$S_N = \sum_k^n a * r^k \quad (1)$$

$$S_N = \frac{a - a * r^{n+1}}{1 - r} \quad (2)$$

falls  $0 < |r| < 1$  dann

$$\sum_0^\infty a * r^k = \frac{a}{1 - r} \quad (3)$$

## 5.3 Potenzreihen

Potenzreihen haben der Form  $\sum_0^\infty a_n x^n$ .

## Der konvergenz radius

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4)$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (5)$$

wenn  $|x| < \rho$  dann konvergiert die Reihe. In diesem gebiet darf man die Reihe ableiten und Integrieren.

### 5.3.1 Tips

$$\cos(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (6)$$

$$\sin(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (7)$$

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (8)$$

## 6 Stetigkeit

Kriterien fur stetigkeit:

1. f ist auf  $\Omega$  definiert
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  und existiert (ist nicht gleich  $\infty$  und gleich von beide seite von a).

**Weierstrass-kriterium** fur alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta(\epsilon, a) > 0$  sodass fur alle  $|x - a| < \delta$  gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (9)$$

### 6.1 Gleichmassigstetigkeit

fur alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta(\epsilon) > 0$  sodass fur alle  $|x - y| < \delta$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (10)$$

$\delta$  hangt nur von  $\epsilon$  ab nicht wie weierstrass-kriterium. Falls f ist stetig und kompakt, dann ist er gleichmassig stetig.

### 6.2 Lipschitz-stetigkeit

Muss ein  $L \in \mathbb{R}$  sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \Omega \quad (11)$$

Eine funktion ist lipschitz stetig wenn sein erste ableitung ist auf  $\Omega$  beschränkt.

### 6.3 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$  konvergiert Punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (12)$$

## 6.4 Gleichmassig konvergenz

$f_n(x)$  konvergiert gleichmassig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (13)$$

Beide diese Funktionen müssen stetig sein. Diese bedingung ist stärker als Punktweise konvergenz.

## 7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert  $f'(x_0)$  existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 7.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

### 7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom  $m$ -ter Ordnung von  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm  $R_m^a(x)$ , wobei  $\xi$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

### 7.4 Hauptsatz von calculus

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt \quad (14)$$

$$f'(x) = g(m(x)) * \frac{d}{dx} m(x) \quad (15)$$

wo  $m(x)$  hat der Form  $ax^b$  und  $l \in \mathbb{R}$

## 8 Integration

### 8.1 Elementare Integrale

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

## 8.2 Regeln

$$\begin{aligned}
 \textbf{Direkter Integral} \quad & \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) \\
 \textbf{Partielle Integration} \quad & \int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \\
 \textbf{mit Polynomen} \quad & \int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx \Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \\
 \textbf{Substitution} \quad & \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \text{ mit } x = \varphi(t)
 \end{aligned}$$

## 8.3 Tipps

$$\begin{aligned}
 \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\
 \int \frac{1}{x - \alpha} &= \log(x - \alpha) \\
 \int \frac{1}{1 + x^2} &= \arctan(x)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C \tag{17}$$

$$\int \cosh(c) = \sinh(s) + C \tag{18}$$

## 9 Differentialgleichungen

### 9.1 Grundbegriffe

**Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung  
**linear:** alle  $y$ -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel  $y^2$ ,  $(y'')^3$ ,  $\sin(y)$ ,  $e^{y'}$ )  
**homogen:** Gleichung ohne Störfunktionen  
**Störfunktion:** Term, der rein von der Funktionsvariablen  $x$  abhängt

### 9.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
<b>Trennung der Variablen</b>	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
<b>Variation der Konstanten</b>	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
<b>Euler-Ansatz</b>	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
<b>Direkter Ansatz</b>	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

### 9.2.1 Trennung der Variable

$$\begin{array}{ll}
 & y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2} \\
 \text{umformen} & \frac{dy}{dx} = -x \tan y \\
 \text{konstante Lösungen} & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ nicht} \\
 \text{Trennung} & \frac{dy}{\tan y} = -x dx \\
 \text{integrieren} & \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C \\
 & \Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}} \\
 \text{Anfangsbedingung gebrauchen} & \sin(y(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1 \\
 \text{Lösung} & y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})
 \end{array}$$

### 9.2.2 Variation der Konstanten

$$\begin{array}{ll}
 \text{Grundsatz:} & y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x) \\
 & y' - y = 1, \quad y(0) = 0 \\
 \text{homogener Ansatz} & y' = y \\
 \text{konstante Lösungen} & y(x) \equiv 0 \\
 \text{Trennung} & \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \log |y| = x \\
 \text{homogene Lösung} & y_{\text{homo}}(x) = A e^x, \quad A = e^C \in \mathbb{R} \\
 \text{partikulärer Ansatz} & y_p(x) = A(x) e^x \\
 \text{einsetzen} & A' e^x + A e^x - A e^x = 1 \Rightarrow A' = e^{-x} \Rightarrow A(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\
 \text{partikuläre Lösung} & y_p(x) = -1 \\
 \text{Lösung} & y(x) = A e^x - 1 \text{ mit Anfangsbedingung } A = 1 \\
 & \Rightarrow y(x) = e^x - 1
 \end{array}$$

### 9.2.3 Euler-Ansatz

$$\begin{array}{ll}
 & y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz} & y(x) = e^{\lambda x} \\
 \text{einsetzen} & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
 \text{charakt. Polynom} & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
 \text{Nullstellen} & 4, -2 \\
 \text{allgemeine Lösung} & y(x) = A e^{4x} + B e^{-2x} \\
 \text{Anfangsbedingung gebrauchen} & y(1) = A e^4 + B e^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4A e^4 - 2B e^{-2} = 0 \\
 & \Rightarrow A = \frac{1}{3} e^{-4}, \quad B = \frac{2}{3} e^2 \\
 \text{Lösung} & y(x) = \frac{1}{3} e^{4x-4} + \frac{2}{3} e^{2-2x}
 \end{array}$$



*Bemerkung:* Zu einer  $m$ -fachen Nullstelle  $\lambda$  gehören die  $m$  linear unabhängigen Lösungen  $e^{\lambda x}$ ,  $x \cdot e^{\lambda x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$ . Zur  $m$ -fachen Nullstelle  $\lambda = 0$  gehören die Lösungen  $1, x, \dots, x^{m-1}$ .

#### 9.2.4 Direkter Ansatz

**Grundsatz:**  $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	$A, B, C$
$ce^{kx}$	$Ae^{kx}$	$A$
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	$A, B$

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$$

homogener  $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden  $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

**homogene Lösung**  $\Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Ansatz wählen  $y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$

$$\Rightarrow y_p'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y_p''(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$$

Einsetzen  $(-a + b + \frac{a}{4}) \cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b) \sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich  $-\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0$

**partikuläre Lösung**  $y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

**Lösung**  $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

### 9.3 Komplexe zahlen

Falls der charakteristische Polynom ist komplex und hat der form  $a + i\sqrt{b}$ , dann hat die homogene Lösung die form:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(\sqrt{b}x) + C_2 \sin(\sqrt{b}x)) \quad (19)$$

Wo  $a$  ist die komplexe lösung von charakteristische polynom.

## 10 Vektorfelder

### 10.1 Gradient

$$\text{grad}(f) = \nabla = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad (20)$$

Der gradient zeigt in die richtung der maximalen zuwachsrate von  $f$  und seine länge ist gleich der maximalen andernung von  $f$ .

## 10.2 Rotation

Für ein Vektorfeld mit Komponenten:  $v_1, v_2, v_3$ .

$$\operatorname{rot}(v) = \nabla \times v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Falls  $\operatorname{rot}(v)=0$  dann ist  $v$  konservativ.

## 10.3 Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j \quad (22)$$

Falls diese ist erfüllt dann ist der Feld ein Potenzialfeld und konservativ.

## 10.4 Potenzialfeld

Ein Potenzialfeld ist konservativ. Der Potenzial  $\Phi$  eines Potenzialfeld:

$$\nabla \Phi = v \quad (23)$$

## 10.5 Divergenz

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots \quad (24)$$

# 11 Wegintegral

## 11.1 Standard Methode

$$\textbf{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

$$\gamma \text{ ableiten } \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$\textbf{Lösung } 2\pi - 0 + \pi = 3\pi$$

## 11.2 In Potenzialfeldern

**Anforderung:** Das Vektorfeld  $\vec{v}$  ist **konservativ** (=Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

gleichsetzen:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

ableiten:  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy}$

$$\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.}$$

**Potenzial:**  $\Phi = xe^{xy} + \text{const.}$

**Lösung:**  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$

### 11.3 Satz von Green

**Anforderung:** Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\text{Grundsatz: } \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

$$\text{Rotation berechnen: } \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich: } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

### 11.4 Tips

parametrisierung eines kreises:  $x=r*\cos(t)$   $y=r*\sin(t)$   $dx dy = r dr dt$   $dx dy = |rs \times rt|$

## 12 Flussintegrale oberflacheintegrale

### 12.1 1 methode

1. Die fläche parametrisieren nach u und v:  $\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v)$ .
2. berechnen  $\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$  und  $\Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ . Und krossprodukt berechnen  $\Phi_u \times \Phi_v$
3. benutzen die Formel:

$$\int_S v * ndo = \pm \int_a^b \int_c^d v(\Phi(u,v)) * (\Phi_u \times \Phi_v) du dv \quad (25)$$

### 12.2 Gauss

$$\int_{\partial V} v * ndo = \int_V \text{div}(v) d\mu \quad (26)$$

## 13 Flächenintegral

### 13.1 Normalbereich

**Grundsatz:**  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\int_{\Omega} F \, d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \, F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

als Normalbereich schreiben:  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

in Formel einsetzen: 
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy \, d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx \, x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

### 13.2 Satz von Green

**Grundsatz:**  $\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ , falls  $\text{rot}(\vec{v}) = 1$

Flächeninhalt der Ellipse  $E$ , berandet durch  $x = a \cos(\theta)$ ,  $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren:  $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen:  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$  oder  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

**Wegintegral ausrechnen**  $\mu(E) = \pi ab$

## 14 Kurvendiskussion

### 14.1 Extrema/Minima

**Kritischer Punkt:**  $p_0 \in \Omega$  für welchen  $df(p_0)$  nicht den maximalen Rang besitzt, also falls  $\text{Rang}(df(p_0)) < \min n, m$ . Falls  $df(p_0) = 0$

### 14.2 Hesse matrix

$$Hess(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Falls  $a$  hat in  $x_0$  nur positive eigenwerte dann ist es eine maximalstelle, falls sie hat nur negative eingewerte dann ist es eine minimalstelle, falls sie hat beide dann ist es ein sattelpunkt.

### 14.3 Ohne nebenbedigungen

1. finden  $df(x)=0$
2. hesse matrix finden ob es max min oder sattelpunkt ist.

## 14.4 Mit Nebenbedingungen

**Lagrange multiplikator**  $g$  ist die bedingung und  $f$  die hauptfunktio, falls  $x_0$  ein max oder min ist dann gilt:

$$L = f - \lambda g \quad (28)$$

$$dL(x_0) = 0 \quad (29)$$

1. finden die Kandidaten im inneren von Gebiet wie vorher
2. schreibe den Rand in:  $\partial\Omega = g^{-1}\{0\}$
3. Stelle die funktion  $L = f - \lambda g$
4. die Kritische punkte der lagrange funktion sind kandidaten wo the ableitung muss gleich 0 sein und  $g$  muss gleich null sein.
5. Eckpunkte sind auch noch kandidate

Mann kann auch aussert lagrange einfach die gerade die um den Gebiet gehen und sie ableiten und gleich 0 stellen.

Um die tangential zu der ebene von eine extramastelle von diese ebene zu finden, die ebene  $z=f(\text{extremestelle})$ (die ebene ist constant weil es eine extrema stelle ist).