1 Matrizen

symmetrisch	$A^T = A$, $AB = BA$, quadratisch
schiefsymmetrisch	$A^T = -A$
hermitesch	$A^H = A$, quadratisch
unitär	$A^H A = I_n$ also $A^{-1} = A^H$, Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal
orthogonal	$A^T A = I_n$ also $A^{-1} = A^T$

1.1 Regulär

Sei $A^{m\times n}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten **regulär** mit Rang r:

- A ist quadratisch
- $r = n$
- A ist invertierbar
- Die Zeilen- und Kolonnenvektoren sind linear unabhängig und erzeugen $\mathbb{E}^m$ bzw. $\mathbb{E}^n$
- 0 ist kein Eigenwert
- $\det(A) \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- Die lineare Abbildung A ist bijektiv
- für jedes b in $Ax = b$ gibt es genau eine Lösung
- die Kolonnen bilden eine Basis

1.2 Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$B = \operatorname{diag}(2,3,4,5) \Rightarrow B^{-1} = \operatorname{diag}(1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$$

1.3 Permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Operationen

$A \cdot B = C$ ist definiert, falls A gleichviele Kolonnen hat wie B Zeilen. C hat dann gleichviele Zeilen wie A und gleichviele Kolonnen wie B.

$$\begin{aligned}
(\alpha A)B &= \alpha(AB) = A(\alpha)B \\
(\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\
(A + B)C &= AC + BC \\
(\alpha A)^T &= \alpha A^T \\
(A + B)^T &= A^T + B^T \\
(AB)^T &= B^T A^T
\end{aligned}$$

2 LR-Zerlegung

Grundsatz:	$Ax = b,\ PA = LR \Rightarrow Lc = Pb,\ Rx = c$
wobei	R A nach Gauss aufgelöst ist, und L die Inverse der Zeilensubtraktionen hält

Pivotierung: Nullen oder relativ kleine Zahlen können als Pivot nicht gebraucht werden. Man benutzt normalerweise die **Kolonennmaximumstrategie** (wählt immer das betragsmässig grösste Element in der Spalte aus).

3 Vektorräume

3.1 Vektor

Länge, 2-Norm	$\|\|x\|\| :\equiv \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Winkel	$\varphi = \arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{\|\|x\|\|\|\|y\|\|}$

3.2 Orthonormalbasen

Unterraum	von span S mit $S = a_1, ..., a_2$ aufgespannt bzw. die Menge aller Linearkombinationen von S
Erzeugendensystem	die Menge S
Basis	linear unabhängiges Erzeugendensystem
Dimension	die Anzahl Basisvektoren

3.3 Skalarprodukt

linear	$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
	$\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
symmetrisch	$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
positiv definit	$\langle x, x\rangle \geq 0$
	$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

3.4 Norm

positiv definit	$\|\|x\|\| \geq 0$
	$\|\|x\|\| = 0 \Rightarrow x = 0$
Homogenität	$\|\|\alpha x\|\| = \|\alpha\|\|\|x\|\|$
Dreiecksungleichung	$\|\|x + y\|\| \leq \|\|x\|\| + \|\|y\|\|$

3.5 Orthogonaliserungsverfahren

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1}{||a_1||} \\
\tilde{b}_2 &= a_2 - \langle b_1, a_2\rangle b_1 \\
b_2 &= \frac{\tilde{b}_2}{||\tilde{b}_2||} \\
\tilde{b}_3 &= a_3 - \langle b_1, a_3\rangle b_1 - \langle b_2, a_3\rangle b_2 \\
b_3 &= \frac{\tilde{b}_3}{||\tilde{b}_3||}
\end{aligned}
$$

4 Lineare Abbilungen

Sei $F : X \mapsto Y$ mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$ heisst **linear**, falls:

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}, \; F(\gamma x) = \gamma(Fx)$$

Matrixdarstellung	A, so dass $F(x) = Ax$
Kern	$\{x \in X; Fx = 0\}$, alle Vektoren in X, die auf 0 zeigen
Bild	alle Vektoren in Y, die von X mit F erreicht werden
Rang	Rang $F :\equiv \dim \operatorname{im} F$
	Dimension des Kolonnenraums
	Dimension des Zeilenraums
Kolonnenraum	$\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A)$, der von den Kolonnen von F aufgespannte Unterraum
Nullraum	$\ker A = \mathcal{N}(A)$

Aus der **Dimensionsformel** $\dim X - \dim\ \ker F = \text{Rang } F$ folgt, falls F:

injektiv	keine Kollisionen
	Kolonnenvektoren linear unabhängig
	Rang $F = \dim X$
	$\ker F = \{0\}$
surjektiv	es wird jedes Element in Y erreicht
	Rang $F = \dim Y$
bijektiv, d.h. Isomorphismus	Rang $F = \dim X = \dim Y$
bijektiv, d.h. Automorphismus	Rang $F = \dim\ X$
	$\ker F = 0$

4.1 Bestimmung der Basis für Kern/Bild

1. Gauss anwenden
2. Basis des **Bildes**
   (a) Alle linear unabhängigen Kolonnenvektoren (alle mit Pivot)
3. Basis des **Kerns**
   (a) Setze $Fx = 0$
   (b) Berechne von freien Variablen abhängige Lösung
   (c) Klammere freie Variablen aus

BEISPIEL TODO

4.2 Bestimmung der Abbildungsmatrix

Grundsatz: Die Kolonnen von A sind die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren.

gegeben: $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$$

gesucht: Abbildungsmatrix A bezÃijglich $(\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

Grundsatz anwenden: $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.3 Transformation

$$
\begin{array}{ccccl}
x \in X & \xrightarrow[\text{lin. Abb.}]{F} & y \in Y & & \\
\kappa_X \big\downarrow \big\uparrow \kappa_X^{-1} & & \kappa_Y \big\downarrow \big\uparrow \kappa_Y^{-1} & & \text{(Koordinaten-abbildung bzgl. ``alten'' Basen)} \\
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{A}} & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m & & \text{(Koordinaten bzgl. ``alten'' Basen)} \\
\mathbf{T}^{-1} \big\downarrow \big\uparrow \mathbf{T} & & \mathbf{S}^{-1} \big\downarrow \big\uparrow \mathbf{S} & & \text{(Koordinaten-transformation)} \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n & \xrightarrow[\text{Abb.matrix}]{\mathbf{B}} & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m & & \text{(Koordinaten bzgl. ``neuen'' Basen)}
\end{array}
\tag{5.48}
$$

Es gilt also

$$
\boxed{y = F\,x\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi}\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{\xi}'\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}\,\boldsymbol{\eta}'\,, \quad \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\xi}'}\,. \tag{5.49}
$$

Diesen Formeln oder dem Diagramm entnimmt man, dass für die Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$, die die Abbildung F bezüglich den "neuen" Basen in $\mathbb{E}^m$ und $\mathbb{E}^n$ beschreibt, gilt

$$
\mathbf{B}\,\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{S}^{-1}\,\boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}\,\boldsymbol{\xi}'
$$

Da $\boldsymbol{\xi}'$ beliebig ist, ergibt sich

$$
\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}\,. \tag{5.50}
$$

Aus Satz 5.16 folgt im übrigen wegen $\mathsf{Rang}\ \mathbf{S}^{-1} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{T} = n$, dass $\mathsf{Rang}\ \mathbf{B} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A}$ ist, und in ähnlicher Weise folgt aus Korollar 5.10, dass $\mathsf{Rang}\ F = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A}$ ist:

$$
\boxed{\mathsf{Rang}\ F = \mathsf{Rang}\ \mathbf{A} = \mathsf{Rang}\ \mathbf{B}}\,. \tag{5.51}
$$

Im Falle einer linearen Abbildung von X *in sich*, ist natürlich $Y = X$, $\kappa_Y = \kappa_X$, $\mathbf{S} = \mathbf{T}$. Aus (5.50) wird damit

$$
\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}}\,. \tag{5.52}
$$

5 Projektionen

Projektion	lineare Abbildung für die gilt $P^2 = P$
Orthogonalprojektion	1. Projektion für die gilt $\ker P \perp \operatorname{im} P$ 2. P ist quadratisch 3. $I - P$ ist orthogonaler Projektor 4. $P^T = P$

$$P_A :\equiv A(A^H A)^{-1} A^H$$
$$P_Q :\equiv QQ^H \quad \text{falls Kolonnen von } Q \text{ orthonormal}$$

5.1 Methode der kleinsten Quadrate

Beispiel 7.4 Seite 7-7 im Skript

5.2 QR-Zerlegung

Grundsatz: $A = QR$

mit $q_1 := \dfrac{a_1}{||a_1||},\ \tilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j,\ a_k \rangle, q_k := \dfrac{\tilde{q}_k}{||\tilde{q}_k||}$

$r_{11} :\equiv ||a_1||,\ r_{jk} :\equiv \langle q_j, a_k \rangle,\ r_{kk} :\equiv ||\tilde{q}_k||$

$$\text{gegeben:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gram-Schmidt:} \quad r_{11} = ||a_1||, \ q_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = q_1^T a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\tilde{q}_2 = (I - q_1 q_1^T) a_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = ||\tilde{q}_2|| = 5$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{||\tilde{q}_2||} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = (I - q_1 q_1^T)(I - q_2 q_2^T) a_3$$

und so weiter...

$$\textbf{Lösung:} \quad Q = (q_1, q_2, q_3), \ R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

6 Determinante

Es gilt:

- $\det A = 0 \Rightarrow Ax = b$ ist nicht lösbar
- A hat eine Zeile lauter Nullen $\Rightarrow \det A = 0$
- A hat zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det A = 0$
- A ist eine Diagonalmatrix $\Rightarrow \det A =$ Produkt der Diagonalelemente
- A ist eine Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det A =$ Produkt der Diagonalelemente

6.1 Identitäten

$$\begin{aligned} \det(\gamma A) &= \gamma^n \det A \\ \det(AB) &= \det A \cdot \det B \\ \det(A^{-1}) &= \det(A)^{-1} \quad \text{falls A regulär} \\ \det(A^T) &= \det(A) \\ \det(A^H) &= \det(A) \end{aligned}$$

6.2 Berechnung

6.3 Dimension 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

6.4 Dimension 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + dbi + ahf)$$

6.5 Allgemeine Dimension $n \times n$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \det A = a_{kl}\mathcal{K}_{kl}$$
$$\text{wobei} \quad \mathcal{K}_{kl} :\equiv (-1)^{k+l} \det A_{[k,l]}$$

Tipp: Wähle die Zeile/Spalte aus mit den meisten Nullen.

$$\text{gegeben:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{entwickeln nach der 2. Zeile:} \quad \mathcal{K}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\mathcal{K}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathcal{K}_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 28$$

$$\textbf{Lösung:} \quad \det A = a_{21}\mathcal{K}_{21} + a_{22}\mathcal{K}_{22} + a_{23}\mathcal{K}_{23} + a_{24}\mathcal{K}_{24}$$
$$= 2(-12) + 4(-2) + 6(-2) + 3(28) = 40$$

7 Eigenwerte und -vektoren

Betrachte eine lineare Abbildung $F : V \mapsto V, x \mapsto Fx$:

Eigenwert	$\lambda \in \mathbb{E}$, so dass $Fv = \lambda v$
Eigenvektor	$v \in V, v \neq 0$, so dass $Fv = \lambda v$
Eigenraum	gehört zu spezifischem Eigenwert $E_\lambda :\equiv \{v \in V; Fv = \lambda v\}$
Spektrum	$\sigma(F)$, Menge aller Eigenwerte von F

7.1 Berechnung der Eigenwerte

$$\textbf{Grundsatz:} \quad E_\lambda = \ker\,(F-\lambda I) = \det(F-\lambda I)$$

$$\text{gegeben:} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{char. Polynom:} \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2\lambda+1) = \mathcal{X}_A(\lambda)$$

$$\text{Nullstellen finden:} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$$

$$\textbf{Eigenwerte:} \quad \sigma(A) = \{1, 2, -1\}$$

7.2 Berechnung der Eigenvektoren

Eigenwerte in A einsetzen

4	-1	3	0
8	-2	6	0
-4	1	-3	0

5	-1	3	0
8	-1	6	0
-4	1	-2	0

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Spektralzerlegung

$$\textbf{Grundsatz:} \quad AV = V\Lambda \Leftrightarrow A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\text{gegeben:} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 12 & -2 & 12 \\ 12 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte bestimmen:} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren bestimmen:} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Eigenbasis:} \quad V = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: A muss diagonalisierbar sein, d.h. die **geometrische Vielfachheit** der Eigenwerte muss mit der **algebraischen Vielfachheit** übereinstimmen.

7.4 Hauptachsentransformation

gegeben: $Q(x_1, x_2, x_3) = 221x_1^2 + 144x_1x_2 + 480x_1x_3 + 179x_2^2 + 360x_2x_3 + 100x_3^2$

Matrix formen: $A = \begin{pmatrix} 221 & 72 & 240 \\ 72 & 179 & 180 \\ 240 & 180 & 100 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung: $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ -0.8 & 0.36 & 0.48 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & -0.8 \\ 0.64 & 0.48 & 0.6 \end{pmatrix}$

neue Koordinaten: $\tilde{x}_1 = 0.6x_1 - 0.8x_2$

$\tilde{x}_2 = 0.48x_1 + 0.36x_2 - 0.8x_3$

$\tilde{x}_3 = 0.64x_1 + 0.48x_2 + 0.6x_3$

Hauptachsendarstellung: $Q(x) = Q(\tilde{x}) = 125\tilde{x}_1^2 - 125\tilde{x}_2^2 + 500\tilde{x}_3^2$

8 Singulärwertzerlegung

Grundsatz: $A = U\Sigma V^T$

mit $\Sigma :\equiv \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$, wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r$

wobei Σ hat die gleiche Dimension wie A

$AA^T = U\Sigma_m^2 U^T$, $A^T A = V\Sigma_n^2 V^T$

$\{u_1, ..., u_r\}$ ist Basis von im $A \equiv \mathcal{R}(A)$

$\{v_1, ..., v_r\}$ ist Basis von im $A^T \equiv \mathcal{R}(A^T)$

$\{u_{r+1}, ..., u_m\}$ ist Basis von ker $A^H \equiv \mathcal{N}(A^H)$

$\{v_{r+1}, ..., v_n\}$ ist Basis von ker $A \equiv \mathcal{N}(A)$

gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T A$ und AA^T berechnen: $B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte berechnen: $\sigma(B) = \{6, 1\}$, $\sigma(C) = \{0, 1, 6\}$

Grundsatz anwenden: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, da $\sigma(B)$ mit $|\sigma(B)| = 2$ passt

Eigenvektoren berechnen: $V = (b_1|b_2)$, $U = (c_1|c_2|c_3)$

8.1 Spektralnorm

$$||A||_2 = \sigma_1$$

8.2 Konditionszahl

$$\mathcal{K}(A) = ||A||_2 \; ||A^{-1}||_2$$

Die Spektralnorm einer Matrix entspricht dem maximalen **Singulärwert**.

9 Differentialgleichungen

9.1 Erster Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(t) = V e^{t\Lambda} c$$
$$\text{mit} \quad c = V^{-1} y_0$$

$$\begin{aligned}
\text{gegeben:} \quad & \dot{y}_1(t) = -2y_1(t) + 2y_3(t) \\
& \dot{y}_2(t) = -2y_1(t) - 3y_2(t) - 4y_3(t) \\
& \dot{y}_3(t) = -3y_3(t) \\
& y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \\
\text{Matrix formen:} \quad & A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\textbf{Spektralzerlegung:} \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\
\text{Grundsatz anwenden:} \quad & c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
& y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\textbf{Lösung:} \quad & y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

9.2 Höhere Ordnung, homogen, linear, konstante Koeffizienten

Grundsatz: zu System 1. Ordnung umschreiben

$$\begin{aligned}
\text{gegeben:} \quad & \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0 \\
& x(0) = 3,\ \dot{x}(0) = 0 \\
\textbf{umformen:} \quad & y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \dot{x}(t) \\
& \dot{y}_1 = y_2 \\
& \dot{y}_2 = 2y_1 + y_2 \\
& y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 0 \\
\text{Matrix formen:} \quad & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\textbf{System 1. Ordnung lösen:} \quad & y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \\
\textbf{Lösung:} \quad & x(t) = x(t) = y_1(t) = 2e^{-t} + e^{2t}
\end{aligned}$$

10 Maschinenzahlen

gegeben:	$x = \pm 0.bbb \times 2^{\pm bb}$
grösste positive Zahl:	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},\ \frac{7}{8} \times 2^3 = 7$
Maschinengenauigkeit:	$2^{-3} = \frac{1}{8}$