4 pratybos. Tiesinio atvaizdžio branduolys ir vaizdas.

Paulius Drungilas ir Jonas Jankauskas

Turinys

Kas yra tiesinio atvaizdžio branduolys ir defektas? Tarkim, $(V, +)$, $(W, +)$ yra tiesinės erdvės virš kūno K, o $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinio atvaizdžio branduoliu vadinama aibė

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{v \in V : f(v) = O\}.$$

Branduolį sudaro visi vektoriai, kurie atvaizduojami į erdvės W nulinį vektorių. Branduolys $\mathrm{Ker}\,(f)$ yra V poerdvis. Branduolio dimensija yra vadinama tiesinio atvaizdžio **defektu**:

$$\mathrm{def}\,(f) = \dim_K \mathrm{Ker}\,(f).$$

Atvaizdis, kurio branduolyje yra nenulinių vektorių, (t.y. $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \mathcal{O}$), yra vadinamas **išsigimusiu**.

1. **pavyzdys.** Imkime $V = W = \mathbb{R}$, ir nagrinėkime tiesinį atvaizdį (erdvės $\mathbb{R}$ transformaciją) $f(v) = -4v$. Tuomet $f(v) = 0$, kai $v = 0$. Vadinasi, šio atvaizdžio branduolys yra nulinis poerdvis $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathcal{O}$, o defektas $\mathrm{def}\,(f) = 0$.

2. **pavyzdys.** Tegul $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$. Tiesinis atvaizdis f vektoriui $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ priskiria skaičių $f(v) = 2x_1 - x_2$. Vektoriaus v vaizdas $f(v)$ lygus 0, kai

$$2x_1 - x_2 = 0, \qquad x_2 = 2x_1.$$

Pažymėkime $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tuomet $x_2 = 2t$. Vadinasi, atvaizdžio f branduolys yra sudarytas iš vektorių

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{(t, 2t), t \in \mathbb{R}\} =< (1, 2) >$$

Kadangi branduolio vektoriai yra vieno vektoriaus $(1, 2)$ realieji kartotiniai, tai $\mathrm{def}\,(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\,(f) = 1$. Branduolys sudarytas iš vektorių v, kurie statmeni vektoriui $(2, -1)$, nes $f(v) = 2x_1 - x_2$ yra lygus vektorių $(2, -1)$ ir v skaliarinei sandaugai.

3. **pavyzdys.** Tegul $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$. Rasime tiesinio atvaizdžio, kurio matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

branduolį ir defektą. Pažymėkime branduolio vektorių $v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$. Skaičiuojame $f(v)$ ir prilyginame nuliniam vektoriui:

$$f(v) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Sudauginę matricas, gauname lygčių sistemą:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & 0, \\ \beta_1 & + & 2\beta_2 & + & 3\beta_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

Taigi, vektorius v yra statmenas vektoriams $u_1 = (1, 1, 1)$ ir $u_2 = (1, 2, 3)$. Pažymėkime $U =< u_1, u_2 >$. Tuomet $\mathrm{Ker}\,(f) = U^\perp$, $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus U^\perp$. Kadangi vektoriai u_1 ir u_2 yra tiesiškai nepriklausomi, tai $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$. Tuomet

$$\dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} U = 3 - 2 = 1.$$

Vadinasi, branduolys yra sudarytas iš vektorių, kurie yra vieno nenulinio vektoriaus kartotiniai. Vienas iš tokių galimų vektorių yra

$$v = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Taigi, $\mathrm{Ker}\,(f) =< (1, -2, 1) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 1$. Šis atvaizdis yra išsigimęs.

4. **pavyzdys.** Rasime tiesinio atvaizdžio $f : C^2[0, 1] \to C[0, 1]$, kuris kiekvienai funkcijai $v \in C^2[0, 1]$ priskiria antrąją išvestinę $f(v) = v''$, branduolį.

Išsprendę paprastąją diferencialinę lygtį $v''(t) = 0$, randame $v(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Vadinasi,

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{at + b, a, b \in \mathbb{R}\} = < 1, t > .$$

Taigi, $\mathrm{def}\,(f) = 2$.

Kaip rasti branduolį ir suskaičiuoti defektą? Tarkime, tiesinės erdvės V ir W yra baigtinių dimensijų, $\dim_K V = m$, $\dim_K W = n$. Užrašykime tiesinio atvaizdžio

$$f : V \to W$$

matricą A iš anksto pasirinktose erdvių V ir W bazėse:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

(*Kaip skaičiuoti tiesinių atvaizdžių matricas, žr. praeitų pratybų "Tiesiniai atvaizdžiai" konspektą*).
Nežinomąjį branduolio vektorių pažymime $v = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Gauname matricų lygtį

$$f(v) = vA = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (0, 0, \ldots, 0).$$

Ši lygčių sistema ekvivalenti tiesinei lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_1 & + & \alpha_{21}\beta_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m1}\beta_m & = & 0 \\ \alpha_{12}\beta_1 & + & \alpha_{22}\beta_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m2}\beta_m & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & \\ \alpha_{1n}\beta_1 & + & \alpha_{2n}\beta_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\beta_m & = & 0 \end{cases}$$

Gautos lygčių sistemos koeficientų matrica yra lygi transponuotai matricai A. Lygčių sistemą sprendžiame Gauso būdu. Ją suvedame į trikampį arba trapecinį pavidalą pavidalą, kurio įstrižainėje yra r kintamųjų su nenuliniais koeficientais. Jeigu $r = m$, tai vienintelis sprendinys yra nulinis sprendinys. Jei $r < m$, tai $m - r$ kintamųjų, kurie nepatenka į pagrindinę įstrižainę, pažymime parametrais (t_1, t_2, ..., t_{m-r}) ir perkeliame į kitą pusę. Tuomet išsprendžiame kintamuosius pagrindinėje įstrižainėje. Gautą vektorių $v = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ išskleidę pagal parametrus, gauname išraišką

$$v = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \cdots + t_{m-r} w_{m-r}, \quad t_j \in K$$

kur $w_1, w_2, \ldots, w_{m-r}$ yra tiesiškai nepriklausomi vektoriai. Tuomet

$$\operatorname{def}(f) = m - r, \qquad \operatorname{Ker}(f) = < w_1, w_2, \ldots, w_{m-r} > .$$

5. **pavyzdys.** Rasti tiesinės transformacijos $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, kurios matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

branduolį ir suskaičiuoti defektą.

Sprendimas. Vektoriaus $v \in \operatorname{Ker}(f)$ koordinates pažymėkime $v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Kadangi $f(v) = vA = O$, gauname lygtį

$$v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0).$$

Ši lygtis ekvivalenti sistemai

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \beta_1 & & & + & \beta_3 & - & \beta_4 & = & 0 \\ 2\beta_1 & + & \beta_2 & + & 4\beta_3 & - & \beta_4 & = & 0 \\ 2\beta_1 & + & 3\beta_2 & + & 8\beta_3 & + & \beta_4 & = & 0 \\ 5\beta_1 & + & \beta_2 & + & 7\beta_3 & - & 4\beta_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Gauso būdu sistemą pertvarkome į trapecinį pavidalą:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \beta_1 & & & + & \beta_3 & - & \beta_4 & = & 0 \\ 2\beta_1 & + & \beta_2 & + & 4\beta_3 & - & \beta_4 & = & 0 \\ 2\beta_1 & + & 3\beta_2 & + & 8\beta_3 & + & \beta_4 & = & 0 \\ 5\beta_1 & + & \beta_2 & + & 7\beta_3 & - & 4\beta_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \ \cdot(-2)\ \ \cdot(-5) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdot(-3)\ \ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

Trečioji ir ketvirtoji lygtys išsiprastina. Gauname

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \beta_1 & & & + & \beta_3 & - & \beta_4 & = & 0 \\ & & \beta_2 & + & 2\beta_3 & + & \beta_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Vadinasi, pagrindiniai kintamieji yra β_1, β_2, o β_3 ir β_4 – parametrai. Pažymėkime $\beta_3 = t$, $\beta_4 = s$, čia $t, s \in \mathbb{R}$. Išsprendę pagrindinius kintamuosius, gauname

$$\begin{cases} \beta_1 & = & - & t & + & s \\ & \beta_2 = & - & 2t & - & s \end{cases}$$

Taigi,

$$v = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (-t + s, -2t - s, t, s), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Išskleidę pagal parametrus, gauname:

$$v = t(-1, -2, 1, 0) + s(1, -1, 0, 1), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suskaičiavome, kad branduolys $\operatorname{Ker}(f)$ yra dviejų tiesiškai nepriklausomų vektorių tiesinis apvalkalas.
Atsakymas: $\operatorname{def}(f) = 2$, $\operatorname{Ker}(f) =< (-1, -2, 1, 0), (1, -1, 0, 1) >$.

Kas yra tiesinio atvaizdžio vaizdas ir rangas? Tarkime, $f : V \to W$ yra tiesinis atvaizdis. Aibė, sudaryta iš visų erdvės V vektorių vaizdų $f(v)$

$$\operatorname{Im}(f) = f(V) = \{f(v), v \in V\}$$

yra vadinama atvaizdžio f **vaizdu**. Vaizdas $\operatorname{Im}(f)$ yra erdvės W poerdvis. Skaičiuojant tiesinio atvaizdžio vaizdą, užtenka surasti erdvės V bazinių vektorių vaizdus: $\operatorname{Im}(f)$ yra bazinių vektorių vaizdų tiesinis apvalkalas.
Atvaizdžio f vaizdo dimensija yra vadinama atvaizdžio f **rangu**:

$$\operatorname{rg}(f) = \dim_K \operatorname{Im}(f).$$

Jeigu erdvės V ir W yra baigtinės dimensijos, o A yra atvaizdžio f matrica, tai atvaizdžio rangas yra lygus matricos A rangui:

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A).$$

6. **pavyzdys.** Tegul $V = W = \mathbb{R}$ virš realiųjų skaičių kūno, $f(v) = -4v$. Rasime f vaizdą. Kadangi erdvė $V = \mathbb{R}$ yra vienmatė, tai ją generuoja bet kuris nenulinis vektorius, sakykime, $v = 1$. Tuomet $f(v) = -4$, o $\operatorname{Im}(f) =< -4 >= \mathbb{R}$. Vadinasi, atvaizdžio f rangas yra 1.

7. **pavyzdys.** Tegul $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$. Atvaizdis f atvaizduoja vektorių $v = (x_1, x_2)$ į vektorių $f(v) = (x_1 + x_2, 0, x_1 - x_2)$. Rasime f vaizdą. Pirmiausia, išsirinkime V bazę. Paprastumo dėlei imkime standartinę bazę $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Skaičiuojame

$$f(e_1) = (2, 0, 1), \qquad f(e_2) = (2, 0, -1)$$

Taigi, Im $(f) =< (2,0,1),(2,0,-1) >$, rg $(f) = 2$.

8. **pavyzdys.** Imkime

$$V = \mathbb{R}_3[t] = \{at^2 + bt + c : a,b,c \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \mathbb{R}_4[t] = \{at^3 + bt^2 + ct + d : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

ir tiesinį atvaizdį

$$f(v) = \int_0^t v(s)ds.$$

Bazinių erdvės V vektorių $1, t, t^2$ vaizdai $f(1) = t$, $f(t) = t^2/2$, $f(t^2) = t^3/3$ yra tiesiškai nepriklausomi. Jų tiesinis apvalkalas yra poerdvis Im (f):

$$\text{Im } (f) =< t, t^2/2, t^3/3 >, \qquad \text{rg } (f) = 3.$$

Kaip surasti vaizdą ir suskaičiuoti atvaizdžio rangą? Tarkime, kad A yra tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matrica:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

iš anksto nurodytose bazėse V ir W bazėse. Tuomet matricos A eilutės yra erdvės v bazinių vektorių v_j vaizdų koordinatės:

$$f(v_1) = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n})$$

$$f(v_1) = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n})$$

$$\vdots$$

$$f(v_m) = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$$

Suskaičiuoti rangą ir rasti vaizdo Im (f) bazę galima dviem būdais:

I būdas: Gauso pertvarkymais su matricos A eilutėmis suvedame matricą į trikampį arba trapecinį pavidalą. Tiesinio atvaizdžio rangas rg (f) yra lygus gautos matricos nenulinių eilučių skaičiui. Jeigu pertvarkymų metu nekaitaliojame eilučių vietomis, tai pertvarkytos matricos nenulinės eilutės atitinka tiesiškai nepriklausomus vektorius pradinėje matricoje, kurių sudaro Im (f) bazę.

II būdas: Tiesinio atvaizdžio f rangas yra lygus didžiausiai nenulinio $r \times r$ minoro, sudaryto iš matricos A eilučių ir stulpelių eilei. Matricos A eilutės, kurios patenka į didžiausią nenulinį minorą, yra Im (f) bazinių vektorių koordinatės. Didžiausias nenulinis minoras skaičiuojamas *aprėpiančiųjų minorų metodu*: pirmiausia pasirenkame bet kurį nenulinį langelį ir jį pažymime M_1. Suskaičiavus nenulinį $k-$ osios eilės minorą M_k, skaičiuojami $k+1-$ os eilės minorai, kurie aprėpia M_k. Jeigu jie visi lygus nuliui, arba skaičius $k+1$ viršija matricos A matmenis, tuomet skaičiavimas baigtas: M_k ir yra ieškomas didžiausios eilės nenulinis A minoras. Jeigu ne, pasirenkame bet kurį aprėpiantįjį minorą $M_{k+1} \neq 0$, ir kartojame skaičiavimus toliau.

9. **pavyzdys.** Rasti tiesinės transformacijos $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, kurios matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

vaizdą Im (f) ir suskaičiuoti rangą rg (f).

Sprendimas. ***I būdas:*** Atliekame Gauso veiksmus, kol gauname trapecinį pavidalą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \downarrow \\ \\ \cdot 1 \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \downarrow \\ \cdot(-1) \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gavome matricą su dviem nenulinėmis eilutėmis, taigi rg $(f) = 2$. Matome, kad du pirmieji pradinės matricos vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi, o kiti išsiprastina. Taigi Im $(f) =< (1,2,2,5), (0,1,3,1) >$.

II būdas: Skaičiuojame aprėpiančiuosius minorus:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tečios eilės minorai, aprėpiantys M_2 yra

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Jie visi lygūs 0, todėl didžiausio nenulinio minoro eilė yra 2. Gavome, kad $\mathrm{rg}\,(f) = 2$. Kadangi nenulinis minoras M_2 sudarytas iš pirmųjų dviejų matricos A eilučių, tai $\mathrm{Im}\,(f) =< (1,2,2,5),(0,1,3,1) >$

Rango ir defekto formulė. Tegul $\dim_K V = m$. Tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ rangas ir defektas tarpusavyje yra susiję formule:

$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{def}\,(f) = m.$$

Ši lygybė dažnai naudojama skaičiuojant defektą $\mathrm{def}\,(A)$. Šiuo atveju nebereikia skaičiuoti paties atvaizdžio branduolio $\mathrm{Ker}\,(f)$.

10. **pavyzdys.** 9 pavyzdyje suskaičiavome, kad tiesinės transformacijos, kurios matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

rangas $\mathrm{rg}\,(f) = 2$. Pagal rango ir defekto formulę, $\mathrm{def}\,(f) = m - \mathrm{rg}\,(f) = 4 - 2 = 2$. Kaip tik tokį atsakymą gavome 5 pavyzdžio sprendime, kur suradome matricos branduolį ir suskaičiavome branduolio dimensiją.

11. **pavyzdys.** Rasti tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ defektą, kai

$$V = \mathbb{R}_2[t] = \{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}, \qquad W = \mathbb{R} \quad \text{virš kūno } \mathbb{R},$$

$$f(v) = \int_0^1 v(t)(1-2t)dt$$

Kadangi $f(v)$ formulėje yra apibrėžtinis integralas, tai $f(v) \in \mathbb{R}$. Be to, vaizdas $\mathrm{Im}\,(f) \neq \mathcal{O}$, nes $f(t) = -1/6 \neq 0$. Vadinasi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$, todėl $\mathrm{rg}\,(f) = 1$. Be to, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = 3$. Suskaičiuojame, kad

$$\mathrm{def}\,(f) = m - \mathrm{rg}\,(f) = 3 - 1 = 2.$$

Uždaviniai.

1. **uždavinys.** Rasti tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ branduolį, suskaičiuoti defektą (standartinėse bazėse):

a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$;
b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 4x_3$;

c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, f matrica standartinėje bazėje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix};$$

d) $V = W = \mathbb{R}^3$, f matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & -19 \end{pmatrix};$$

e) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$, f matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -11 \\ 1 & 6 & 19 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

f) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^4$, f matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

Atsakymai:

a) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (1,3) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 1$.
b) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (1,3,0),(0,4,1) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 2$.
c) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (9,-11,1) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 1$.
d) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (-11,-4,1) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 1$.
e) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (-3,1,0,1),(-7,3,1,0) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 2$.
f) $\mathrm{Ker}\,(f) =< (-4,1,0,1),(-3,1,1,0) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 2$.

2. **uždavinys.** Duota tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matrica A standartinėje bazėje. Suskaičiuokite f rangą, raskite Im (f).

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 7 \\ 10 & 31 \\ 21 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 5 & -17 & -13 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -11 & 12 & 2 \\ 5 & 16 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 10 \\ 4 & 12 & 9 & 23 \\ 3 & 9 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Atsakymai:

a) $\mathrm{Im}\,(f) =< (1, 2, 3) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 1.$
b) $\mathrm{Im}\,(f) =< (-1, 5), (4, 7), (21, 3) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 2.$
c) $\mathrm{Im}\,(f) =< (1, -2, 3), (-2, 5, -2) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 2.$
d) $\mathrm{Im}\,(f) =< (1, -1, 1), (5, -5, 6) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 2.$
e) $\mathrm{Im}\,(f) =< (1, 3, -2, 0), (-4, -11, 12, 2), (2, 4, -12, -4) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 3.$
f) $\mathrm{Im}\,(f) =< (1, 3, 2, 5), (4, 12, 9, 23) >, \ \mathrm{rg}\,(f) = 2.$

3. **uždavinys.** a) Rasti tiesinio atvaizdžio $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$

$$f(v) = \int_0^1 v(t)(24t - 6)dt$$

branduolį, suskaičiuoti defektą. Pagal rango ir defekto formulę, suskaičiuoti rangą.

b) Rasti tiesinės transformacijos $f : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$

$$f(v) = v'''(t) - 7v''(t)$$

vaizdą, rangą. Pagal rango ir defekto formulę, suskaičiuoti defektą.

Atsakymai:

a) $\mathrm{Ker}\,(f) =< 6t - 5, 3t^2 - 2) >$, $\mathrm{def}\,(f) = 2$, $\mathrm{rg}\,(f) = 1.$
b) $\mathrm{Im}\,(f) =< -14, -42t + 6 >$, $\mathrm{rg}\,(f) = 2$, $\mathrm{def}\,(f) = 2.$