Matematinė analizė II Uždavinynas
Pavasario semestras

Jurgita Markevičiūtė, Raimondas Malukas

1 Išvestinių taikymas

1. Džeimsas Bondas yra vienoje pusėje 12 mylių platumo kanjono, kurio kitoje pusėje yra slapta karinė bazė nutolusi nuo jo per 20 mylias, iki kurios jam reikia nusigauti. Džeimsas Bondas turi įtaisą kuriuo gali persikelti per kanjoną tiesia linija 3 mylių per valandą greičiu. Persikėlęs jis gali tęsti savo misiją pėsčiomis 5 mylių per valandą greičiu. Kur kitoje kanjono pusėje jam geriausiai persikelti, kad iki karinės bazės jis nusigautų greičiausiai?

2. Lordas nusprendė pastatyti stačiakampį aptvarą ant uolos kuri yra upės krantas. Jis turi 1000 pėdų tvoros, bet jam nereikia tverti tos uolos pusės kuri yra prie upės krantas (krantas yra tiesi linija). Kokie aptvaro išmatavimai duos didžiausią aptveriamą plotą?

3. Viela kuri yra ilgio L yra padalinama į dvi dalis. Viena dalis yra sulenkiama į apskritimą, kita į kvadratą. Kokiomis proporcijomis reikia padalinti vielą, kad gautų figūrų plotai būtų maksimalūs?

4. Cilindro, kurio aukštis yra h, o pagrindo spindulys r, tūris yra $V = \pi r^2 h$, o paviršiaus plotas $S = 2\pi r(r + h)$.
   (a) Kokie turėtų būti uždaros cilindrinės skardinės, kurios tūris yra 2000π kubinių colių, išmatavimai, kad jai pagaminti būtų sunaudota mažiausiai skardos?
   (b) Kokio didžiausio tūrio skardinė gali būti padaryta iš 600π kvadratinių colių skardos gabalo?
   (c) Ištirkite kaip pasikeičia šie atsakymai, jei skardinė turi vieną atvirą galą.

5. Raskite tokį kreivės $y = x^2$ tašką, kurios yra arčiausiai taško $(16, \frac{1}{2})$.

6. Stačiakampis yra įbrėžtas į elipsę, kurios lygtis yra $x^2 + 4y^2 = 4$. Raskite didžiausio ploto tokio stačiakampio išmatavimus.

7. *Normandiškas langas* yra stačiakampio su puslankiu viršuje formos. Puslankio diametras sutampa su stačiakampio pločiu.
   (a) Parodyti, kad didžiausio ploto normandiškas langas su fiksuotu perimetru P yra tas, kurio stačiakmpio aukštis yra pusė jo pločio.
   (b) Kaip pasikeičia problema, jeigu mes fiksuotume reikalingo rėmo ilgį, laikydami, kad prie išorinio rėmo dar reikia rėmo dalies, stačiakampio viršui?

8. Pateikite pavyzdį funkcijos apibrėžos tiesėje $\mathbb{R}$, kuri turi lokalų maksimumą taške a, bei lokalų minimumą taške b, bet $f(a) < f(b)$.

9. Turime du koridorius kurie susijungia stačiu kampu, ir kurio vieno plotis yra w_1, o kito w_2. Kokio maksimalaus ilgio kopėčias galima pranešti šiuo praėjimu?

2 Vieno kintamojo funkcijų integravimas

1. Pasinaudodami kintamųjų keitimu suintegruokite
   (a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
   (b) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$
   (c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
   (d) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$
   (e) $\int \frac{dx}{\sin x}$
2. Pasinaudodami integravimu dalimis suintegruokite
   (a) $\int x^2 \arccos x dx$
   (b) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
   (c) $\int \arctan \sqrt{x} dx$
   (d) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$
   (e) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$
3. Suintegruoti naudojantis kintamųjų keitimu:
   (a) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
   (c) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$
4. Naudojant racionaliųjų funkcijų integravimo metodus suintegruoti:
   (a) $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)}$
   (b) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$
   (c) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
5. Rasti iracionaliųjų funkcijų integralus
   (a) $\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}$
   (b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$
   (c) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$
6. Suintegruoti trigonometrines funkcijas
   (a) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
   (b) $\int \tan^5 x$
   (c) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$
7. Rasti integralus:
   (a) $\int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$
   (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$
   (c) $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$

3 Euklidinės erdvės: pagrindinės sąvokos

1. $\mathbb{R}^3$ erdvės vektoriams $x = (3, 0, -1)$ ir $y = (1, 2, 3)$ rasti:
   (a) vektorių $3x - y$;
   (b) skaliarinę sandaugą $x \cdot y$;
   (c) euklidinius ilgius $\|x\|_2$ ir $\|y\|_2$;
   (d) euklidinį atstumą $\rho_2(x, y)$.

2. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} &x \cdot x > 0, \text{ jei } x \neq 0, \\ &x \cdot y = y \cdot x, \\ &x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \cdot y) + \mu(x \cdot z). \end{aligned}$$

3. Tegul $a, b, c \in \mathbb{R}$ ir bet kuriems $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tegul
$$q(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$$
   Su kokiais $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcijai $q(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ galioja savybės:
$$\begin{aligned} &q(x, x) > 0, \text{ jei } x \neq 0, \\ &q(x, y) = q(y, x), \\ &q(x, \lambda y + \mu z) = \lambda q(x, y) + \mu q(x, z). \end{aligned}$$

4. Tegu $x, y \in \mathbb{R}^d$ ir $\| \cdot \|$ yra norma erdvėje $\mathbb{R}^d$. Įrodyti, kad
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

5. Įrodyti, kad funkcijoms $\| \cdot \|_1$ ir $\| \cdot \|_{\max}$ galioja savybės:
   (a) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq 0$;
   (b) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$;
   (c) visiems $x \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
   (d) visiems $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

6. Pavaizduoti erdvės $\mathbb{R}^d$ aibes $\{\|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_1 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_{\max} = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$

4 Euklidinės erdvės: vektorių sekos konvergavimas

1. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul
$$x_n := \left(\frac{n}{1+n}, \frac{1-n}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$$
Naudojant tik sekos konvergavimo apibrėžimą, įrodyti, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių $(1, -1)$, kai $n \to \infty$.

2. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tegul $x_n := (e^{-n} \sin n, e^{-n} \cos n) \in \mathbb{R}^2$. Ar vektorių seka (x_n) turi ribą? Atsakymą pagrįsti.

3. Tarkime, kad $\mathbb{R}^d$ erdvės elementų seka (x_n) konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$ ir $\mathbb{R}^d$ erdvės elementų seka (y_n) yra aprėžta. Įrodyti, kad $x_n \cdot y_n \to 0$, kai $n \to \infty$.

4. Tarkime, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių y. Įrodyti, kad bet kuris jos posekis (x_{n_k}) taip pat konverguoja į vektorių y.

5. Parodyti, kad jei $\|x_n - x\|_{\max} \to 0$, tai $\|x_n\|_{\max} \to \|x\|_{\max}$.

6. Tegu
$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$$
Rasti (pateikti įrodymus)

   (a) $\lim x_n$;

   (b) $\lim \|x_n\|_2$;

   (c) $\lim \|x_n\|_1$;

   (d) $\lim \|x_n\|_{\max}$.

5 Euklidinės erdvės: atvirosios ir uždarosios aibės; kompaktinės aibės

1. Tegu $a, b \in \mathbb{R}^d$ ir $a \leq b$. Įrodyti, kad uždarasis stačiakampis $[a, b]$ yra uždaroji aibė.

2. Tegul A yra euklidinės erdvės aibė ir tegul $\mathcal{F}$ yra tokių šios erdvės uždarųjų aibių F rinkinys, kurioms $A \subset F$. Įrodyti, kad $\overline{A} = \cap \mathcal{F}$.

3. Įrodyti, kad aibė $A \in \mathbb{R}^d$ yra atviroji tada ir tik tada, kai su kiekvienu elementu $x \in A$ egzistuoja toks atvirasis stačiakampis $(a, b) \subset \mathbb{R}^d$, kad $x \in (a, b) \subset A$.

4. Tegul $0 \leq r < R$. Įrodyti, kad aibė $\{x \in \mathbb{R}^d : r < \|x\|_2 < R\}$, vadinama atviruoju žiedu, yra atviroji.

5. Tegul A yra euklidinės erdvės aibė ir tegul $\mathcal{G}$ yra tokių šios erdvės atvirųjų aibių G rinkinys, kurioms $G \subset A$. Įrodyti, kad $A^\circ = \cup \mathcal{G}$.

6. Tegu aibė $A = \{\|x\|_{\max} \leq 2, x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Tegu $C = A \cap B$
   (a) Ar C yra atvira, ar uždara? Pagrįskite savo atsakymą.
   (b) Rasti C°
   (c) Rasti $\overline{C}$

7. Ar aibių rinkinys
$$\big\{\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - k\|_1 < 1\} : k \in \mathbb{Z}^d\big\}$$
   yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ atvirasis denginys? Atsakymą pagrįsti.

8. Įrodyti, kad kiekviena, baigtinį elementų skaičių turinti, euklidinės erdvės aibė yra kompaktinė.

9. Tegu aibė $A = \{\|x\|_{\max} \leq 2, x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Tegu $C = A \cap B$ Ar aibė C yra santykinai atvira aibės A atžvilgiu, ar ji yra santykinai uždara? Pagrįskite savo atsakymą.

10. Imkime tą pačią aibę C. Ar taškas $(-1, 0)$ priklauso aibei C? Koks vidinis, sąlyčio, ribinis ar izoliuotas šis taškas yra aibei C? Ar įmanoma sukonstruoti aibės C taškų seką konverguojančią į $(-1, 0)$? Jei įmanoma sukonstruokite, ir parodykite konvergavimą, jeigu neįmanoma įrodykite.

11. Tegu $A = \{x \in R^3 : x_2 \geq 2, x_1^2 + x_3^2 = 1\}$.
    (a) Rasti A°.
    (b) Rasti $\overline{A}$.
    (c) Ar aibė A yra kompaktiška? Pagrįsti atsakymą.
    (d) Sukonstruoti tokią aibės A taškų seką, kuri nekonverguotų.

12. Įrodyti, kad aibės $A \subset \mathbb{R}^d$ savybės (a), (b), (c) yra ekvivalenčios:
    (a) A yra aprėžta
    (b) egzistuoja toks uždarasis stačiakampis $[a, b] \subset \mathbb{R}^d$, kad $A \subset [a, b]$.
    (c) egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_{max} \leq R\}$
    (d) egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq R\}$

13. Tegul C yra iškiloji euklidinės erdvės aibė. Įrodyti, kad jos uždarinys $\overline{C}$ taip pat iškiloji aibė.

14. Tegu $A = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $B_- = \{(-2, -2) < x < (0, 0), x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B_+ = \{(0, 0) < x < (2, 2), x \in \mathbb{R}^2\}$. Parodyti, kad aibės $A_- = A \cap B_-$ ir $A_+ = A \cap B_+$ yra iškilos, bei rasti vektorių $p \in \mathbb{R}^2$ tokį, kad
$$\sup\{p \cdot x : x \in A_-\} \leq \inf\{p \cdot x : x \in A_+\}$$

15. Sukonstruoti tokį skaitų rinkinį kompaktinių aibių, kurių sąjunga nėra kompaktinė aibė.
16. Tegul K yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė. Tada egzistuoja tokie vektoriai $u \in K$ ir $v \in K$, kad

$$\|u\|_2 \le \|x\|_2 \le \|v\|_2\,, \text{ visiems } x \in K$$

17. Tegul K yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė ir $y \notin K$. Įrodyti, kad egzistuoja toks elementas $u \in K$, kad

$$\|u - y\|_2 \le \|x - y\|_2\,, \text{ visiems } x \in K,$$

t.y. egzistuoja artimiausias y-ui aibės K elementas.

6 Funkcijos: konvergavimas

1. Parodyti, kad funkcijai $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ galioja

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1 \quad \text{ir} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1,$$

bet $\lim_{x\to 0; y\to 0} f(x,y)$ neegzistuoja.

2. Ar egzistuoja riba $\lim_{x\to 0; y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}$?

3. Rasti ribas $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$ ir $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$, čia

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \quad a=\infty, b=\infty$$
$$f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}, \quad a=\infty, b=0+$$
$$f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}, \quad a=\infty, b=\infty$$
$$f(x,y) = \frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy}, \quad a=0, b=\infty$$
$$f(x,y) = \log_x(x+y), \quad a=1, b=0.$$

4. Raskite ribas

$$\lim_{x\to\infty; y\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$
$$\lim_{x\to\infty; y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$
$$\lim_{x\to 0; y\to a} \frac{\sin xy}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty; y\to\infty} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$$
$$\lim_{x\to\infty; y\to\infty} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0; y\to 0} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$
$$\lim_{x\to 1; y\to 0} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

5. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2}.$$

Parodyti, kad

$$\lim_{x_1\to 0}\left(\lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)\right) = \lim_{x_2\to 0}\left(\lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\right) = 0$$

bet $\lim_{x\to 0} f(x)$ neegzistuoja.

6. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}.$$

Parodyti, kad $\lim_{x_1\to 0}(\lim_{x_2\to 0} f(x_1,x_2))$ ir $\lim_{x_2\to 0}(\lim_{x_1\to 0} f(x_1,x_2))$ neegzistuoja, bet $\lim_{x\to 0} f(x)$ egzistuoja.

7 Funkcijos: tolydinės funkcijos

1. Įrodyti, kad funkcijos

   (a) $(x, y) \to x + y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$

   (b) $(\lambda, x) \to \lambda x$ iš $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$

   (c) $(x, y) \to x \cdot y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ $\mathbb{R}$

   yra tolydžios.

2. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

   Ar ši funkcija tolydi taške $(0, 0)$? Atsakymą pagrįsti.

3. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2, & \text{jei } x_1 x_2 > 0, \\ 0, & \text{jei } x_1 x_2 \leq 0. \end{cases}$$

   Kuriuose $\mathbb{R}^2$ taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

4. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2 x_2}{|x_2 - x_1^2|}, & \text{jei } x_1 \neq x_2, \\ 0, & \text{jei } x_1 = x_2. \end{cases}$$

   Kuriuose $\mathbb{R}^2$ taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

5. Įrodyti, kad projekcija $\pi_h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija su kiekvienu $h \in \{1, \ldots, d\}$.

6. Tegul $X \subset \mathbb{R}^p$, $f : X \to \mathbb{R}^q$ ir $g : X \to \mathbb{R}^d$. Funkcija $f \oplus g : \mathbb{R}^{q+d}$ su reikšmėmis $(f \oplus g)(x) := (f(x), g(x))$ vadina funkcijų f ir g *tiesiogine suma*. Įrodyti, kad $f \oplus g$ yra tolydi tada ir tik tada, kai f yra tolydi ir g yra tolydi.

7. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(2, 0)\} \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x_1, x_2) := \frac{1}{(x_1 - 2)^2 + x_2^2}$$

   Ar ši funkcija tolygiai tolydi aibėje $O_1((0, 0))$? Ar ji yra tolygiai tolydi aibėje $O_2((0, 0))$? Atsakymą pagrįsti.

8 Funkcijos: tiesinės funkcijos

1. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ su visais $x \in \mathbb{R}^2$. Ar ši funkcija tiesinė? Jei taip, rast jos matricinę formą.

2. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 x_2)$ su visais $x \in \mathbb{R}^2$. Ar ši funkcija tiesinė? Jei taip, rast jos matricinę formą.

3. Tegul $f, g \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ir $\lambda \in R$. Įrodyti, kad

$$[f + g] = [f] + [g] \text{ ir } [\lambda f] = \lambda[f]$$

4. Įrodyti, kad tiesinė funkcija yra tolygiai tolydi.

5. Tegu $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ yra tapatinga funkcija, t.y. funkcija su reikšmėmis $f(x) = x$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$. Rasti $[f]$ ir $\|f|$.

6. Tegu $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ yra tiesinių funkcijų erdvė su norma $\|f\|$. Parodyti, kad ši norma nėra suderinta su $\|\cdot\|_2$, t.y.

$$\|f\| \neq \sup_{\|x\|_2 = 1} \|f(x)\|_2$$

9 Funkcijos: iškilosios aibės ir funkcijos

1. Tegu X - netuščia iškiloji euklidinės erdvės aibė. Įrodyti, kad funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ yra iškila tada ir tik tada, kai aibė $K = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ yra iškila.

2. Parodyti aibių iškilumą:

   (a) Atviras rutulys $O_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ ir $r > 0$

   (b) Aibė $x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2$.

3. Tarkime, kad C yra iškiloji euklidinės erdvės aibė. Tegul $k \geq 1$, $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset C$, o skaičiai $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$ tokie, kad $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$. Įrodyti, kad $\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \in C$.

4. Tegul C yra iškiloji euklidinės erdvės aibė. Įrodyti, kad jos uždarinys $\overline{C}$ taip pat iškiloji aibė.

5. Tarkime, kad funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra nemažėjanti ir iškila, o funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra iškila. Įrodyti, kad kompozicija $g \circ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra iškila funkcija.

6. Tegul $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Įrodyti, kad f yra kvazi-įgaubta.

10 Funkcijų sekos

1. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul
$$f_n(x) := x_1^n x_2^n$$
Kokioje aibėje šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) paprastai konverguoja ir kokioje aibėje ši seka tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

2. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x \in \mathbb{R}$ tegul
$$f_n(x) := \left(\frac{1}{1+nx}, \frac{x}{n}\right).$$
Įrodyti, kad šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) intervale $[0, 1]$ tolygiai nekonverguoja.

3. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x \in \mathbb{R}$ tegul
$$f_n(x) := \left(\frac{x}{1+nx}, \frac{x}{n}\right).$$
Įrodyti, kad šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) intervale $[0, 1]$ tolygiai konverguoja.

4. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul
$$f_n(x) = \left(\frac{\sin nx_1}{n}, \frac{\cos nx_1}{n}\right).$$
Ar šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja paprastai? Ar ji aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.

5. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul
$$f_n(x) = (\sin(x_1/n), \cos(x_1/n)).$$
Ar šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja paprastai? Ar ji aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.

6. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^p$ ir (f_n) yra funkcijų seka apibrėžta aibėje X ir reikšmes įgyjanti euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^q$. Įrodyti, kad (f_n) tolygiai nekonverguoja į 0 tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia X aibės elementų seka (x_n), kad vektorių seka $f_n(x_n)$ nekonverguoja į 0.

7. Tarkime, kad funkcijų sekos (f_n) ir (g_n) aibėje X tolygiai konverguoja. Įrodyti, kad aibėje X tolygiai konverguoja funkcijų seka $(f_n + g_n)$.

8. Tarkime, kad aibėje $X \subset \mathbb{R}^p$ apibrėžta ir reikšmes įgyjanti euklidinėje erdvėje funkcijų seka (f_n) tolygiai konverguoja į funkciją $f : X \to \mathbb{R}^q$, o funkcija $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d$ yra tolydi. Įrodyti, kad funkcijų seka $(F \circ f_n)$ tolygiai konverguoja į funkciją $F \circ f$.

9. Tegu $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ir $f_u := f(x - u)$, $u \in \mathbb{R}^p$. Įrodyti
   (a) f yra tolydi tada ir tik tada, kai su bet kuria, į nulį konverguojančia $\mathbb{R}^p$ elementų seka (u_n), funkcijų seka (f_{u_n}) paprastai konverguoja į f;
   (b) f yra tolygiai tolydi tada ir tik tada, kai su bet kuria į nulį konverguojančia $\mathbb{R}^p$ elementų seka (u_n), funkcijų seka (f_{u_n}) tolygiai konverguoja į f.

10. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} x_1^j x_2^j$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, aibėje
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$$
tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

11. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} x_1^j x_2^j$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, aibėje

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

12. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty}(x^j, (1-x)^j)$, $x \in \mathbb{R}$, intervale $[0, 1]$ paprastai konverguoja? Kokioje aibėje ši eilutė konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.

11 Diferencijavimas: funkcijos išvestinė ir Jacobi'o matrica

1. Tarkime, kad $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ir $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$. Įrodyti: jei $h(x) \to 0$, kai $x \to 0$, ir $g = o(h)$, kai $x \to 0$, tai $g(x) \to 0$, kai $x \to 0$.

2. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$f(x) := (x_1x_2 - 2x_1 + x_2 + 5, x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 + 4)$$
kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Naudojantis tik apibrėžimu rasti šios funkcijos išvestinę ir *Jacobi*o matricą.

3. Tegul funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tiesinė. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama, o jos išvestinė funkcija yra pastovioji funkcija $Df = f$, t.y. funkcija su reikšmėmis $Df(x) = f$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$.

4. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tolydi taške $u \in \mathbb{R}^p$ ir egzistuoja tokia afininė funkcija $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, kad $f(u+x) - T(u+x) = o(x)$, kai $x \to 0$. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama taške u ir kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$
$$Df(u)(x) = T(u + x) - T(u) = T(x) - T(0)$$

5. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^p$ yra atvira aibė, o funkcija $f : U \to \mathbb{R}^q$ yra diferencijuojama taške $u \in U$. Įrodyti, kad f yra tolydi taške u.

6. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške $u \in \mathbb{R}^d$. Tegul $x \in \mathbb{R}^d$ ir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $g(t) := f(u + tx)$ kiekvienam $t \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad g yra diferencijuojama taške 0 ir rasti $g'(0)$.

7. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in R$. Įrodyti, kad funkcija yra diferencijuojama ir rasti *Jacobi*o matricą $Jf(u)$.

12 Diferencijavimas: kryptinės ir dalinės išvestinės

1. Funkcijos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cos(x_2 x_3).$$

   (a) Rasti funkcijos f visas dalines išvestines

   (b) Rasti funkcijos f kryptinę išvestinę taške $(1, 2, 3)$ kryptimi $(1, -1, 0)$.

2. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama funkcija. Rasti funkcijos $g(x_1, x_2) = f(x_1+x_2, x_1-x_2)$ išvestinę.

3. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra diferencijuojama funkcija, $f(x) = (\exp(-\|x\|_2), \cos(\|x\|_2))$ Rasti funkcijos $g(r, \phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ išvestinę.

4. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) := (x_1^{1/3} + x_2^{1/3})^3$$

   kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Įrodyti, kad ši funkcija turi kryptines išvestines taške $(0, 0)$ visomis kryptimis, bet nėra tame taške diferencijuojama.

5. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0 \\ 0, & \text{jei } x = 0 \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija nėra tolydi taške $(0, 0)$, bet turi jame dalines išvestines.

13 Diferencijavimas: vidutinės reikšmės teoremos; antros eilės išvestinės

1. Tegul $p > 0$ ir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^p}, & \text{jei } x \neq 0, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

   Kokioms p reikšmėms pirmoji dalinė išvestinė $D_1 f$ yra tolydi taške $(0, 0)$.

2. Tegu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama funkcija ir $l_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$ yra trys vienas kitam statmeni vektoriai. Parodyti, kad kiekvienam taške $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\sum_{i=1}^{3} (D_{l_i} f(u))^2 = \sum_{i=1}^{3} (D_i f(u))^2$$

3. Įrodyti, kad funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra afininė tada ir tik tada, kai f yra diferencijuojama ir jos išvestinė funkcija yra pastovioji funkcija.

4. Tegu $U \subset \mathbb{R}^p$ yra atvira iškila aibė ir funkcija $f : U \to \mathbb{R}^q$ yra diferencijuojama. Parodyti, kad jei $x, y \in U$, tai egzistuoja toks $z \in (x, y)$, kad

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq \|Df(z)(y - x)\|_2$$

5. Tarkime, kad $K \subset \mathbb{R}^2$ yra aibė taškų $x = (x_1, x_2)$ ribojama tiesėmis $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ir $x_1 + x_2 = 9$. Tegul $f : K \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = 4 - (1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Įrodyti, kad šios funkcijos maksimali reikšmė 4 įgyjama taške $(1, 1)$ ir minimali reikšmė -61 įgyjama taškuose $(0, 9)$ ir $(9, 0)$. Paaiškinti, kaip tai derinasi su būtino ekstremumo sąlyga.

6. Tarkime, kad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(3x_1^2 - x_2), \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Įrodyti, kad nulis yra funkcijos f kritinis taškas, bet nėra lokalaus ekstremumo taškas. *Nuoroda:* nagrinėti reikšmes $f(0, t)$ ir $f(t, 2t^2)$, kai t yra arti nulio.

7. Tegu $f \in L(\mathbb{R}^P, \mathbb{R}^q)$ parodyti, kad $D^2 f(u) = 0$, kiekvienam $u \in \mathbb{R}^p$.

8. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(r, \phi) = r(\cos\phi, \sin\phi)$$

   Parodyti, kad f yra du kartus diferencijuojama ir rasti $D^2 f(u)$ bei $d^2 f(u)(r, \phi)$.

9. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = 16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 40x_2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Rasti šios funkcijos ekstremumo taškus ir nustatyti jų tipą.

10. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = 2x_2^2 - x_1(x_1 - 1)^2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Įrodyti, kad ši funkcija turi lokalųjį minimumą taške $(1/3, 0)$ ir balno tašką $(1, 0)$.

11. (Tiesinė regresija) Tarkime, kad vektoriai $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$, intepretuojami kaip realių duomenų reikšmės geometrinėje plokštumoje. Šių duomenų *regresijos tiese* vadinama tokia geometrinės plokštumos tiesė, kad vertikalių atstumų tarp duomenų ir tiesės kvadratų suma įgyja mažiausią reikšmę. Tegul $x_1, \ldots, x_n$ nėra visi tarpusavyje lygūs. Įrodyti, kad šios tiesės lygtis $y = c + \lambda x$ turi tokią išraišką:

$$\lambda = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \text{ ir } c = \overline{y} - \lambda\overline{x} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$

čia naudojami žymėjimai

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \overline{xy} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

12. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Tegu $x_1, \ldots, x_n$ yra skaičiai. Apibrėžkime funkciją $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taip:

$$L(a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Įrodyti, kad šios funkcijos ekstremumo taškas yra

$$(\widehat{a}, \widehat{\sigma^2}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,\right)$$

Parodyti, kad tai funkcija L šiame taške įgyja maksimumą. *Nuoroda.*Pasinaudoti tuo, kad L ir $\log L$ įygja maksimumą tame pačiame taške.

14 Integravimas: Lebesgue matas

1. Įrodyti, kad iracionaliųjų skaičių intervale $[0,1]$ aibės *Lebesgue* išorinis matas yra vienas, t.y. $\lambda_1^*([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = 1$

2. Tarkime, kad V yra realiųjų skaičių atviras intervalas. Įrodyti, kad

$$\lambda_1^*(V) = \lambda_1^*(V \cap (0,\infty)) + \lambda_1^*(V\backslash(0,\infty))$$

3. Tarkime, kad $u \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$ ir $u \leq v$. Įrodyti, kad lygybė

$$\lambda_d^*(V) = \lambda_d^*(V \cap (u,v)) + \lambda_d^*(V\backslash(u,v))$$

galioja su bet kuriuo atviruoju stačiakampiu V .

4. Įrodyti, kad mačioms aibėms galioja savybės:
   (a) jei $A \subset \mathbb{R}^d$ mati, tai $\mathbb{R}^2\backslash A$ mati.
   (b) jei euklidinės erdvs poaibiai $A_1, \ldots, A_n$ yra matūs, tai aibės $\cup_{i=1}^n A_i$ ir $\cap_{i=1}^n A_i$ yra mačios.
   (c) kiekviena euklidinės erdvės aibė, kurios *Lebesgue* išorinis matas yra nulis, yra mati.

5. Tegu $A_1, A_2, \ldots$ yra bet koks mačiųjų aibių skaitus rinkinys, parodyti, kad jungtis $\cup A_j$ ir sankirta $\cap A_j$ yra mačios aibės.

6. Tegul $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ yra didėjanti euklidinės erdvės mačiųjų aibių seka. Įrodyti, kad

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$$

15 Integravimas: Mačios funkcijos

1. Tegu X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^p$ matus poaibis ir $f : X \to \mathbb{R}$ yra funkcija. Įrodyti, kad funkcija f yra mati tada ir tik tada, kai aibė

$$\{x \in X : f(x) \geq R\} = f^{-1}[[r, \infty]]$$

yra mati su kiekvienu $r \in \mathbb{R}$.

2. Tegu $X \in \mathbb{R}^p$ yra mati aibė. Parodyti, kad jei $f : X \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija, tai mačios yra funkcijos $|f|$, $\max\{f, 0\}$ ir $\min\{f, 0\}$.

3. Tegu $X \subset \mathbb{R}^p$ yra mati ir (f_n) yra X aibėje apibrėžta ir aprėžta funkcijų seka. Įrodyti, kad jei kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, f_n yra mati, tai funkcija $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ irgi yra mati.

4. Tegu f ir g yra paprastos funkcijos. Parodyti, kad fg irgi yra paprasta funkcija.

5. Parodyti, kad funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra didėjančios paprastų funkcijų sekos (ϕ_n) ribinė funkcija. Rasti $\int_0^2 \phi_n$ ir $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \phi_n$. Ar $\int_0^2 xdx = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \phi_n(x)$.

Literatūra

[1] Rimas Norvaiša, *Matematinė analizė I.* Paskaitų konspektas, Vilnius, 4.10 variantas, 2011.

[2] Rimas Norvaiša, *Matematinė analizė II.* Paskaitų konspektas, Vilnius, 3.5 variantas, 2011.

[3] B. Demydovič *Matematinės analizės paskaitų rinkinys* Mokslas, Maskva, 1969.