RIBA

G. Stepanauskas

2011 08 13

Turinys

1 SKAIČIAI

1.1 Natūralieji skaičiai

1.2 Sveikieji skaičiai

1.3 Racionalieji skaičiai

1.4 Realieji skaičiai

2 FUNKCIJA

2.1 Funkcijos apibrėžimas. Jos grafikas. Įvairiai užduotos funkcijos.

2.2 Atvirkštinė funkcija.

2.3 Sudėtinė funkcija.

2.4 Funkcijų periodiškumas ir lygiškumas.

2.5 Elementariosios funkcijos.

3 AIBĖS IR JŲ RĖŽIAI

4 SEKA

4.1 Posekiai

4.2 Montoninės sekos

5 SEKOS RIBA

1 apibrėžimas. *Skaičius a vadinamas sekos x_n riba, jei kiekvienam teigiamam skaičiui ε egzistuoja (galima surasti) toks natūralusis skaičius N, kad visiems $n > N$ teisinga nelygybė*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ribų trumpiniai (žymėjimai): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ arba $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, arba $x_n \to a$.
Sekos ribos apibrėžimą galima užrašyti ir simboliais:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Sekos, turinčios (baigtines) ribas, vadinamos konverguojančiomis sekomis. Jeigu seka ribos neturi arba ta riba begalinė (begalinę ribą apibrėšime vėliau), tai seka vadinama diverguojančia.

5.1 Konverguojančių sekų savybės

1 teorema. *Seka gali turėti ne daugiau kaip vieną ribą.*

Įrodymas. Tarkime, kad seka x_n turi dvi skirtingas ribas a ir b, $a \neq b$. Iš ribos apibrėžimo turime, kad

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Kai $n > N = \max(N_1, N_2)$, abi parašytos nelygybės yra teisingos. Jos teisingos $\forall\varepsilon > 0$, taigi ir, kai $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{4}$. Bet, kai $n > N$,

$$4\varepsilon = |a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Gautas prieštaravimas, $4\varepsilon < 2\varepsilon$, paneigia prielaidą, kad seka gali turėti dvi skirtingas ribas. Teorema įrodyta.

2 teorema. *Konverguojanti seka yra aprėžta.*

Įrodymas. Iš konverguojančios sekos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Iš paskutiniosios nelygybės turime, kad

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

kai $n > N$. Už intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ribų gali būti tik baigtinis skaičius sekos x_n narių, t.y. tik nariai $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Galime paimti

$$m = \min(a - \varepsilon, x_1, \ldots, x_N), \qquad M = \max(a + \varepsilon, x_1, \ldots, x_N).$$

Skaičiai m ir M ir bus sekos x_n apatinis ir viršutinis rėžiai. Seka x_n yra aprėžta:

$$\forall n\ m \leqslant x_n \leqslant M.$$

Teorema įrodyta.

3 teorema. (Ribinis perėjimas nelygybėse.) *Tegul* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *ir* $\forall n\ x_n \leqslant y_n$. *Tuomet* $a \geqslant b$.

Įrodymas. Tarkime, priešingai, $a < b$. Iš ribos apibrėžimo turime, kad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Kai $n > N = \max(N_1, N_2)$, abi parašytos nelygybės yra teisingos. Jos teisingos $\forall \varepsilon > 0$, taigi ir, kai $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Bet, kai $n > N$, iš jų gauname, kad

$$x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} = b - \frac{b-a}{2} = b - \varepsilon < y_n.$$

Gautas prieštaravimas, $x_n < y_n$, paneigia prielaidą, kad $a < b$. Taigi $a \geqslant b$. Teorema įrodyta.

4 teorema. (Veiksmai su ribomis.) *Tegul* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *(*a *ir* b *– baigtinės ribos). Tuomet*

1.

$$x_n + y_n \to a + b; \tag{1}$$

2.

$$x_n \cdot y_n \to a \cdot b; \tag{2}$$

3.

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b},\ b \neq 0. \tag{3}$$

Įrodymas. Iš ribos apibrėžimo turime, kad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

1. Kai $n > N = \max(N_1, N_2)$, abi parašytos nelygybės yra teisingos. Kadangi

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leqslant |x_n-a|+|y_n-b| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1,$$

kai $n > N$, tai (1) lygybė teisinga.

Pastebėkime, jeigu griežtai laikytumės ribos apibrėžimo, tai paskutinės nelygybės dešiniojoje pusėje turėtume gauti ε, bet gautasis ε_1 nekeičia esmės. Nesunku suprasti, kad ir ε_1 gali būti bet koks teigiamas skaičius, kai ε yra bet koks teigiamas skaičius, t.y. kai ε perbėga visus teigiamus skaičius, tai ε_1 taip pat perbėga visus teigiamus skaičius. Kituose įrodymuose nekreipsime į tai dėmesio. Svarbu, kad panašių nelygybių dešiniosiose pusėse gautume pakankamai mažus dydžius, kai tik ε maži (tai galės būti šaknys, laipsniai, daugikliai, kuriuose yra ε, ir pan.).

2. Kaip ir anksčiau, iš ribos apibrėžimo turime, kad

$$\begin{aligned} (4)\quad |x_n y_n - ab| &= |(x_n y_n - x_n b) + (x_n b - ab)| \\ &\leqslant |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a| \leqslant |x_n|\varepsilon + |b|\varepsilon, \end{aligned}$$

kai $n > N = \max(N_1, N_2)$. Kadangi konverguojanti seka yra aprėžta (žr. 2 teoremą), tai egzistuoja toks M, kad $|x_n| \leqslant M\ \forall n$. Tęsdami (4) nelygybę gausime

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M\varepsilon + |b|\varepsilon = (M + |b|)\varepsilon.$$

Taigi (2) nelygybė teisinga.

3. Šioje dalyje pirmiausia parodysime, kad

$$|y_n| \geqslant \frac{|b|}{2}, \tag{5}$$

kai tik n pakankamai dideli, t.y. $n > N_3$. Iš ribos apibrėžimo turime, kad teigiamam skaičiui $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$

$$\exists N_3 : n > N_3 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$$

arba

$$b - \frac{|b|}{2} < y_n < b + \frac{|b|}{2}. \tag{6}$$

Tegul $b > 0$. Tuomet iš kairiosios (6) nelygybės pusės gausime

$$|y_n| = y_n > b - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Tegul $b < 0$. Tuomet iš dešiniosios (6) nelygybės pusės gausime

$$y_n < b + \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

arba
$$|y_n| = -y_n > -\frac{b}{2} = \frac{|b|}{2}\,.$$

Taigi (5) nelygybė teisinga, kai tik $n > N_3$.

Dabar iš ribos apibrėžimo ir gautosios (5) nelygybės turėsime

$$(7) \quad \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - a y_n}{b y_n}\right| \leqslant \frac{2}{b^2}|x_n b - a y_n|$$
$$= \frac{2}{b^2}|(x_n b - ab) + (ab - a y_n)| \leqslant \frac{2}{b^2}(|x_n b - ab| + |ab - a y_n|)$$
$$= \frac{2}{b^2}(|b||x_n - a| + |a||b - y_n|) < \frac{2}{b^2}(|b|\varepsilon + |a|\varepsilon) = \frac{2}{b^2}(|b| + |a|)\varepsilon,$$

kai $n > N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Taigi (3) nelygybė teisinga. Teorema įrodyta.

5 teorema. (Monotoninės sekos ribos egzistavimo požymis.) *Jei seka yra monotoninė ir aprėžta, tai ji turi ribą.*

Įrodymas. Tegul seka yra nemažėjanti, $x_n \not\downarrow$. Kadangi ji yra aprėžta iš viršaus, tai ji turi tikslų viršutinį rėžį $\sup x_n = a$, be to $x_n \leqslant a$. Įrodysime, kad a yra šios sekos riba.

Iš tikslaus viršutinio rėžio apibrėžimo išplaukia, kad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : x_N > a - \varepsilon.$$

Kadangi seka nemažėjanti, tai

$$n > N \Rightarrow x_n \geqslant x_N > a - \varepsilon.$$

Perrašę turėsime

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Vadinasi $x_n \to a$. Teorema įrodyta.

6 teorema. (Tarpinės sekos ribos teorema.) *Tegul $x_n \to a$, $y_n \to a$, ir $\forall n\ x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$. Tuomet ir $z_n \to a$.*

Įrodymas. Iš ribos apibrėžimo turime, kad

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : n > N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Kai $n > N = \max(N_1, N_2)$, abi parašytos nelygybės yra teisingos. Iš teoremos sąlygos ir šių nelygybių lengvai gausime

$$a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < a + \varepsilon.$$

Taigi

$$|z_n - a| < \varepsilon, \text{ kai } n > N.$$

Tai reiškia. kad $z_n \to a$. Teorema įrodyta.

7 teorema. (Bolcano-Vejerštraso lema.) *Kiekviena aprėžta seka turi konverguojantį posekį.*

Įrodymas. Kadangi seka x_n aprėžta, tai egzistuoja toks intervalas $[a_1, b_1]$, kad visi $x_n \in [a, b]$. Padalykime intervalą $[a_1, b_1]$ pusiau ir tą jo pusę, kurioje yra be galo daug sekos x_n narių, pažymėkime $[a_2, b_2]$. Toliau jau intervalą $[a_2, b_2]$ padalykime pusiau ir tą jo pusę, kurioje yra be galo daug sekos x_n narių, pažymėkime $[a_3, b_3]$. Taip toliau dalydami intervalus gausime mažėjančių intervalų seką:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$$

Intervalo $[a_2, b_2]$ ilgis $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. Intervalo $[a_3, b_3]$ ilgis $b_3 - a_3 = \dfrac{b_1 - a_1}{2^2}$. Intervalo $[a_k, b_k]$ ilgis $b_k - a_k = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$.

Kairiųjų intervalų galų seka $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ yra nemažėjanti ir aprėžta iš viršaus. Iš 5 teoremos išplaukia, kad ji turi ribą:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Tokią pat ribą turi ir dešiniųjų intervalų galų seka $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, nes

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}((b_k - a_k) + a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} + \lim_{k\to\infty} a_k = 0 + a = a.$$

Dabar parinkime sekos x_n posekį tokiu būdu:

$$\begin{aligned}
&x_{n_1} \in [a_1, b_1],\\
&x_{n_2} \in [a_2, b_2],\ n_2 > n_1,\\
&\ldots\ldots\\
&x_{n_k} \in [a_k, b_k],\ n_k > n_{k-1},\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Taip parinkti galime, nes intervaluose $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, yra be galo daug sekos narių.

Kadangi

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k,$$

tai iš 6 teoremos išplaukia, kad posekis x_{n_k} yra konverguojantis, t.y. turi ribą:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Teorema įrodyta.

Nedaug ką pakeitus teoremos įrodyme galima būtų įrodyti tokią teoremą.

8 teorema. *Kiekviena aprėžta seka turi monotoninį konverguojantį posekį.*

5.2 Skaičius e

Imkime seką

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{8}$$

Įrodysime, kad ji turi ribą. Pasinaudosime monotoninės sekos ribos egzistavimo požymiu, 5 teorema. Parodysime, kad seka yra didėjanti ir aprėžta iš viršaus.

1. Pritaikę Niutono binomo formulę, gausime

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\,\frac{1}{n^3} + \ldots \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-2))}{2\cdot 3\ldots(n-1)}\,\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{2\cdot 3\ldots n}\,\frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Vietoje n įrašę $n+1$ gausime x_{n+1}:

$$
\begin{aligned}
(10)\quad x_{n+1} == 2 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Palyginkime x_n su x_{n+1}. Atitinkamų dėmenų daugikliai skliaustuose yra didesni pas x_{n+1}. Beto x_{n+1} turi vienu dėmeniu daugiau. Taigi $\forall n\ x_{n+1} > x_n$. Seka x_n yra didėjanti, $x_n \uparrow$.

2. Parodysime sekos x_n aprėžtumą. (9) formulėje išmeskime visus daugiklius, esančius skliaustuose. Jie yra mažesni už 1. Dėl to reiškinys tik padidės. Dar pasinaudokime nelygybe $k! \geqslant 2^{k-1}$. Taigi iš (9) formulės turėsime, kad

$$
\begin{aligned}
(11)\quad x_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}
$$

Taip pat aišku (nes seka yra didėjanti), kad $x_n \geqslant x_1 = 2$. Taigi seka x_n yra aprėžta:

$$2 \leqslant x_n < 3.$$

3. Monotoninė ir aprėžta seka turi ribą (žr. 5 teoremą). Sekos $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ riba vadinama skaičiumi e ir žymima taip pat e:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Apytikslė skaičiaus e reikšmė 5 ženklų po kablelio tikslumu yra tokia:

$$\mathrm{e} \approx 2,71828.$$

Skaičius e yra vienas iš svarbesnių skaičių matematikoje ir fizikoje. Dažnai naudojami logaritmai pagrindu e. Jie vadinami natūraliaisiais logaritmais ir žymimi

$$\log_{\mathrm{e}} x = \log x = \ln x.$$

Rodiklinė funkcija, kurios pagrindas e, taip pat svarbi ir dažnai pasitaiko. Ji vadinama eksponentine funkcija ir žymima

$$e^x = \exp x.$$

5.3 Sekos konvergavimo Koši kriterijus

2 apibrėžimas. *Seka x_n vadinama Koši seka, jei*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{12}$$

Koši sekos apibrėžimo (12) sąlygas galima pakeisti ekvivalenčiomis:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{13}$$

9 teorema. *Seka x_n konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra Koši seka.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad $x_n \to a$. Tuomet

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Aišku, jei $m > N$, tai $|x_m - a| < \varepsilon$. Iš parašytų pareinamybių turėsime, kad

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \\ &\leqslant |x_n - a| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1.\end{aligned} \tag{14}$$

Taigi x_n yra Koši seka. Teoremos būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Tarkime,kad x_n yra Koši seka. 1. Pirmiausia įrodysime Koši sekos aprėžtumą. Iš Koši sekos apibrėžimo išplaukia, kad

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

kai tik n ir $m > N$. Paimkime $m = N + 1$. Tuomet

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon,\ \text{kai tik } n > N.$$

Arba

$$x_{N+1} - \varepsilon < x_n < x_{N+1} + \varepsilon,\ \text{kai } n > N.$$

Matome, kad už intervalo $(x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon)$ ribų gali papulti tik baigtinis skaičius sekos x_n narių, t.y. tik nariai $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Paimkime

$$m = \min(x_{N+1} - \varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_N), M = \max(x_{N+1} + \varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Dabar jau aišku, kad $\forall n \; m \leqslant x_n \leqslant M$. Taigi Koši seka yra aprėžta.

2. Iš Koši sekos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 : n > N_1, m > N_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{15}$$

Kadangi pagal pirmąją įrodymo dalį seka yra aprėžta, tai ji turi konverguojantį posekį (žr. 7 teoremą) $x_{n_k} \to a$.

Iš ribos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 : k > N_2 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \tag{16}$$

Paimkime $N = \max(N_1, N_2)$ ir įvertinkime $|x_k - a|$, kai $k > N$. Galime užrašyti

$$|x_k - a| = |(x_k - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|.$$

Iš posekio apibrėžimo turėsime, kad indeksas n_k yra nemažesnis už k, $n_k \geqslant k$. Todėl, kai $k > N$, iš (15) pareinamybės gausime, kad

$$|x_k - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

Atsižvelgę dar ir į (16) pareinamybę, turėsime

$$|x_k - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1, \text{ kai } k > N.$$

Taigi seka x_n konverguoja. Teoremos pakankamumas įrodytas.

5.4 Begalinės ribos

3 apibrėžimas. *Sakysime, kad sekos x_n riba yra begalybė (seka diverguoja į begalybę), jei*

$$\forall E > 0 \; \exists N : n > N \Rightarrow |x_n| > E.$$

Trumpiniai (žymėjimai): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ arba $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, arba $x_n \to \infty$.

4 apibrėžimas. *Sakysime, kad sekos x_n riba yra plius begalybė (seka diverguoja į plius begalybę), jei*

$$\forall E > 0 \; \exists N : n > N \Rightarrow x_n > E.$$

Trumpiniai (žymėjimai): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ arba $x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, arba $x_n \to +\infty$.

5 apibrėžimas. *Sakysime, kad sekos x_n riba yra minus begalybė (seka diverguoja į minus begalybę), jei*

$$\forall E > 0 \; \exists N : n > N \Rightarrow x_n < -E.$$

Trumpiniai (žymėjimai): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ arba $x_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, arba $x_n \to -\infty$.

6 FUNKCIJOS RIBA

6.1 ...

7 FUNKCIJOS TOLYDUMAS

7.1 ...

8 TOLYDŽIŲJŲ FUNKCIJŲ SAVYBĖS

8.1 ...

9 GRAIKIŠKOS RAIDĖS

Nr.	Didžiosios raidės	Mažosios raidės	Tarimas
1		α	alfa
2		β	beta
3	Γ	γ	gama
4	Δ	δ	delta
5		ε, ϵ	epsilion
6		ζ	dzeta
7		η	eta
8	Θ	θ, ϑ	teta
9		ι	jota
10		$\kappa, \varkappa$	kapa
11	Λ	λ	lambda
12		μ	miū
13		ν	niū
14	Ξ	ξ	ksy
15		o	o
16	Π	π, ϖ	py
17		ρ, ϱ	ro
18	Σ	σ, ς	sigma
19		τ	tau
20	Υ	υ	upsilion
21	Φ	φ, ϕ	fy
22		χ	chy
23	Ψ	ψ	psy
24	Ω	ω	omega