TIESINĖS ERDVĖS IR TIESINIAI ATVAIZDŽIAI

2012 m. kovo 16 d.

Turinys

skyrius 1

TIESINĖS ERDVĖS IR TIESINIAI ATVAIZDŽIAI

1.1 Tiesinės erdvės

Šiame skyriuje nagrinėsime tiesines erdves virš kūno k. Tai svarbus matematinis objektas.

1.1.1 apibrėžimas. Abelio grupė $(V,+)$ vadinama *tiesine erdve* virš kūno $(k,+,*)$, jei apibrėžtas atvaizdis (išorinis kompozicijos dėsnis)

$$\circ : k \times V \to V$$

tenkinantis sąlygas: bet kuriems $\alpha, \beta \in k$, $u, v \in V$,

1. $(\alpha * \beta) \circ u = \alpha \circ (\beta \circ u)$;
2. $1 \circ u = u$, 1– kūno k vienetinis elementas;
3. $(\alpha + \beta) \circ u = \alpha \circ u + \beta \circ u$;
4. $\alpha \circ (u + v) = \alpha \circ u + \alpha \circ v$.

1.1.2 pastaba. Tiesinės erdvės $(V,+)$ virš kūno k elementai dažniausiai yra vadinami *vektoriais*.

1.1.3 pavyzdys. Sakykime, $(k,+,*)$ yra kūnas, $(V,+) = (k,+)$. Apibrėžkime atvaizdį

$$\circ = * : k \times k \to k, \ (\alpha, u) \mapsto \alpha \circ u := \alpha * u, \ \alpha, u \in k.$$

Abelio grupė $(k,+)$ yra tiesinė erdvė virš kūno $(k,+,*)$, nes kūno elementų daugyba tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1-4 sąlygas.

1.1.4 pavyzdys. Sakykime, $(k, +, *)$ – kūnas, $(V, +) = (k^n, +)$. Sudėtis $+$ aibėje k^n apibrėžiama taip:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in k^n.$$

Apibrėžkime atvaizdį $\circ : k \times k^n \to k^n$ taip: bet kuriems $\lambda \in k$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$,

$$\lambda \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := (\lambda * \alpha_1, \lambda * \alpha_2, \ldots, \lambda * \alpha_n).$$

Įsitikinsime, kad atvaizdis $\circ$ tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo $1 - 4$ sąlygas.

1. Jei $\lambda, \mu \in k$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$, tai

$$(\lambda * \mu) \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = ((\lambda * \mu) * \alpha_1, (\lambda * \mu) * \alpha_2, \ldots, (\lambda * \mu) * \alpha_n)$$

$$= (\lambda * (\mu * \alpha_1), \lambda * (\mu * \alpha_2), \ldots, \lambda * (\mu * \alpha_n))$$

$$= \lambda \circ (\mu * \alpha_1, \mu * \alpha_2, \ldots, \mu * \alpha_n) = \lambda \circ (\mu \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

2. Akivaizdu, kad kiekvienam $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$,

$$1 \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

3. Jei $\lambda, \mu \in k$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$, tai

$$(\lambda + \mu) \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= ((\lambda + \mu) * \alpha_1, (\lambda + \mu) * \alpha_2, \ldots, (\lambda + \mu) * \alpha_n) =$$

$$= (\lambda * \alpha_1 + \mu * \alpha_1, \lambda * \alpha_2 + \mu * \alpha_2, \ldots, \lambda * \alpha_n + \mu * \alpha_n) =$$

$$= (\lambda * \alpha_1, \lambda * \alpha_2, \ldots, \lambda * \alpha_n) + (\mu * \alpha_1, \mu * \alpha_2, \ldots, \mu * \alpha_n) =$$

$$= \lambda \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \mu \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

4. Jei $\lambda \in k$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in k^n$, tai

$$\lambda \circ \big((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\big)$$

$$= \lambda \circ (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$= (\lambda * (\alpha_1 + \beta_1), \lambda * (\alpha_2 + \beta_2), \ldots, \lambda * (\alpha_n + \beta_n))$$

$$= (\lambda * \alpha_1 + \lambda * \beta_1, \lambda * \alpha_2 + \lambda * \beta_2, \ldots, \lambda * \alpha_n + \lambda * \beta_n)$$

$$= (\lambda * \alpha_1, \lambda * \alpha_2, \ldots, \lambda * \alpha_n) + (\lambda * \beta_1, \lambda * \beta_2, \ldots, \lambda * \beta_n)$$

$$= \lambda \circ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \lambda \circ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Taigi $(k^n, +)$ yra tiesinė edvė virš kūno k, vadinama *n-mate tiesine erdve virš k*. Kai $n = 2$, $(k^2, +)$ dažnai yra vadinama *plokštuma* virš kūno k.

1.1.5 pavyzdys. Sakykime, X – netuščia aibė, $(k, +, *)$ – kūnas. Nagrinėkime k^X – visų atvaizdžių $f : X \to k$, – aibę. Apibrėžkime aibės k^X elementų sudėtį: bet kuriems $f, g \in k^X$,

$$k^X \times k^X \xrightarrow{+} k^X,\ (f, g) \mapsto f + g,\ (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ x \in X.$$

Įsitikinkite, kad $(k^X, +)$ – Abelio grupė.

Apibrėžkime atvaizdį: kiekvienam $\alpha \in k$, kiekvienam $f \in k^X$,

$$k \times k^X \xrightarrow{\circ} k^X,\ (\alpha, f) \mapsto \alpha \circ f,\ (\alpha \circ f)(x) := \alpha f(x),\ x \in X.$$

Šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo $1 - 4$ sąlygas.

Taigi $(k^X, +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k. Jei $X = \{1, 2, \dots, n\}$, tai tiesinė erdvė k^X yra k^n, nagrinėta 1.1.4 pavyzdyje.

1.1.6 pavyzdys. 1.1.5 pavyzdį galima apibendrinti. Sakykime, X – netuščia aibė, $(V, +)$ –tiesinė erdvė virš kūno k. Nagrinėkime visų atvaizdžių $f : X \to V$ aibę V^X. Aibės elementų sudėtį apibrėžkime taip: bet kuriems $f, g \in V^X$,

$$V^X \times V^X \xrightarrow{+} V^X,\ (f, g) \mapsto f + g,\ (f + g)(x) := f(x) + g(x),\ x \in X.$$

Galite įsitikinti, kad $(V^X, +)$ – Abelio grupė.

Apibrėžkime atvaizdį: kiekvienam $\alpha \in k$, kiekvienam $f \in k^X$,

$$k \times V^X \xrightarrow{\circ} V^X,\ (\alpha, f) \mapsto \alpha \circ f,\ (\alpha \circ f)(x) := \alpha f(x),\ x \in X.$$

Šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1–4 sąlygas.

Taigi $(V^X, +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k. Jei $X = \{1, 2, \dots, n\}$, tai tiesinė erdvė V^X yra žymima V^n. Vėliau tiesines erdves V^n aptarsime įvairių operacijų su tiesinėmis erdvėmis požiūriu.

Jei $(V, +) = (k, +)$, tai erdvė V^X yra tiesinė erdvė k^X, nagrinėta 1.1.5 pavyzdyje.

1.1.7 pavyzdys. Sakykime, k – kūnas, $k[t]$ – polinomų su koeficientais kūne k žiedas. Kaip žinome, $k[t]$ – polinomų sudėties $+$ atžvilgiu yra Abelio grupė. Taip pat yra apibrėžta polinomų daugyba iš kūno k elementų, t. y. apibrėžtas atvaizdis

$$k \times k[t] \xrightarrow{\cdot} k[t],\ (\alpha, f(t)) \mapsto \alpha f(t),\ \alpha \in k, f(t) \in k[t].$$

Šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1–4 sąlygas. Taigi polinomų su koeficientais kūne k žiedas $k[t]$ yra tiesinė erdvė virš kūno k.

1.1.8 pavyzdys. Sakykime, $\mathbb{R}[0, 1]$ – tolydžių funkcijų, apibrėžtų uždarame intervale $[0, 1]$ ir įgyjančių reikšmes realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$, aibė. Aibėje $\mathbb{R}[0, 1]$ apibrėžta sudėtis $+$:

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t),\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[0, 1].$$

Akivaizdu, kad $(\mathbb{R}[0,1],+)$ – Abelio grupė. Kaip žinome, yra apibrėžta tolydžių funkcijų daugyba iš realiųjų skaičių, t. y. yra apibrėžtas atvaizdis:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}[0,1] \dot{\to} \mathbb{R}[0,1],\ (\alpha \cdot f)(t) := \alpha f(t),\ \alpha \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{R}[0,1].$$

Ši atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1–4 sąlygas. Taigi $(\mathbb{R}[0,1],+)$ – tiesinė erdvė virš kūno $\mathbb{R}$.

1.1.9 pavyzdys. Sakykime, $k = \mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių kūnas, $V = (\mathbb{R},+)$ – realiųjų skaičių grupė skaičių sudėties atžvilgiu. Apibrėžkime atvaizdį

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \dot{\to} \mathbb{R},\ (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta,\ \alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Abelio grupė $(\mathbb{R},+)$ yra tiesinė erdvė virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

1.1.10 pastaba. Tiesinės erdvės apibrėžime išorinio kompozicijos dėsnį žymėjome simboliu $\circ$, o kūno elementų daugybos dėsnį – $*$. Šių simbolių formulėse neberašysime, išskyrus tuos atvejus, kai formulių užrašai dviprasmiškai gali būti suprasti. Be to, vietoje užrašo "$(V,+)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k" dažnai rašysime "V yra tiesinė erdvė virš kūno k", t. y. užraše $(V,+)$ praleisime Abelio grupės V elementų sudėties ženklą $+$.

Dabar, remdamiesi tiesinės ervės apibrėžimu, įrodysime keletą paprastų teiginių.

1.1.11 teiginys. *Sakykime, $(V,+)$ – tiesinė erdvė virš kūno k, 0 – kūno k nulinis elementas, O – Abelio grupės $(V,+)$ nulinis elementas. Tuomet kiekvienam $v \in V$, $0 \cdot v = O$.*

Įrodymas. Galime parašyti lygybes: $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Prie lygybės $0v+0v = 0v$ abiejų pusių pridėję grupės $(V,+)$ elementui $0v$ priešingą elementą $-0v$, gauname: $(0v+0v)+(-0v) = 0v+(-0v)$ arba $0v = O$. □

1.1.12 teiginys. *Sakykime, $(V,+)$ – tiesinė erdvė virš kūno k, 0 – kūno k nulinis elementas, o O – Abelio grupės $(V,+)$ nulinis elementas. Tuomet kiekvienam $\alpha \in k$, $\alpha \cdot O = O$.*

Įrodymas. Galime parašyti: $\alpha O = \alpha(O+O) = \alpha O + \alpha O$. Kaip ir 1.1.11 teiginyje, gauname, kad $\alpha O = O$. □

1.1.13 teiginys. *Sakykime, $(V,+)$ – tiesinė erdvė virš kūno k. Jei $\alpha v = O$, tai $\alpha = 0$ arba $v = O$ (t. y. bent vienas iš elementų $\alpha \in k$ arba $v \in V$ yra nulinis).*

Įrodymas. Jei $\alpha \neq 0$, tai lygybės $\alpha v = O$ abi puses padauginę iš kairės iš α^{-1}, gauname: $\alpha^{-1}\alpha v = \alpha^{-1}O = O$, t. y. $v = O$. □

1.1.14 teiginys. *Sakykime,* $(V, +)$ *– tiesinė erdvė virš kūno* k*. Tuomet kiekvienam* $u \in V$*,* $(-1)u = -u$ *(*$-u$ *– priešingas elementas elementui* u *grupėje* $(V, +)$*, o* -1 *– priešingas elementas elementui* 1 *kūne* k*).*

Įrodymas. Galime parašyti: $O = 0u = (1 + (-1))u = 1u + (-1)u = u + (-1)u$. Iš lygybės $u + (-1)u = O$ matome, kad $(-1)u = -u$. □

1.2 Tiesinės erdvės tiesinis poerdvis

1.2.1 apibrėžimas. Netuščias tiesinės erdvės $(V, +)$ virš kūno k poaibis W yra vadinamas tiesinės erdvės V *tiesiniu poerdviu*, jei

1. $u_1, u_2 \in W \Rightarrow u_1 + u_2 \in W$;
2. $\alpha \in k$, $u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$.

Tiesinės erdvės tiesinio poerdvio apibrėžime 1 – 2 sąlygas galima pakeisti viena, ekvivalenčia sąlygoms 1 – 2.

1.2.2 apibrėžimas. Netuščias tiesinės erdvės $(V, +)$ virš kūno k poaibis W yra vadinamas tiesinės erdvės V tiesiniu poerdviu, jei bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, $u_1, u_2 \in W$, vektorius

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in W.$$

Įrodykite, kad šie apibrėžimai yra ekvivalentūs.

1.2.3 teiginys. *Tiesinės erdvės* $(V, +)$ *tiesinis poerdvis* W *yra tiesinė erdvė virš kūno* k*.*

Įrodymas. Vektorių sudėtis aibėje W apibrėžta, nes, remiantis tiesinio poerdvio apibrėžimo 1-ąja sąlyga, jei $u_1, u_2 \in W$, tai ir $u_1 + u_2 \in W$.

1. Aibės W vektorių sudėtis $+$ asociatyvi, kadangi yra asociatyvi tiesinės erdvės V vektorių sudėtis.
2. Įrodysime, kad $O \in W$. Kadangi $W \neq \emptyset$, tai egzistuoja $u \in W$. Tuomet, remiantis tiesinio poerdvio apibrėžimo 2-ąja sąlyga, $0u = O \in W$, čia $0 \in k$.
3. Jei $u \in W$, tai, remiantis tiesinio poerdvio apibrėžimo 2-ąja sąlyga, $-u = (-1)u \in W$.
4. Aibės W vektorių sudėtis $+$ komutatyvi.

Vadinasi, $(W, +)$ – Abelio grupė.

Remdamiesi tiesinio poerdvio apibrėžimo 2-ąja sąlyga, matome, kad yra apibrėžtas atvaizdis

$$k \times W \xrightarrow{\cdot} W,$$

kuris yra atvaizdžio

$$k \times V \dot{\to} V,$$

siaurinys iki poaibio $k \times W$. Vadinasi, atvaizdis

$$k \times W \dot{\to} W,$$

tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1 – 4 aksiomas. Taigi tiesinės erdvės $(V, +)$ virš kūno k tiesinis poerdvis W yra tiesinė erdvė virš k. $\square$

1.2.4 pavyzdys. Kiekvienoje tiesinėje erdvėje V virš kūno k poaibiai $\{O\}$ ir V yra tiesinės erdvės V tiesiniai poerdviai, vadinami *trivialiais*.

1.2.5 pavyzdys (Plokštumos k^2 tiesiniai poerdviai)**.** $\{(0,0)\}$ ir k^2 – plokštumos k^2 (k – kūnas) trivialūs tiesiniai poerdviai.

Be trivialių plokštumos k^2 tiesinių poerdvių egzistuoja dar šie: kiekvienam plokštumos k^2 vektoriui $u = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $\alpha, \beta \in k$, egzistuoja tiesinis poerdvis

$$L(u) = L((\alpha, \beta)) := \{\lambda \cdot (\alpha, \beta) \mid \lambda \in k\},$$

vadinamas *tiese*, sudarytas iš k^2 vektorių, proporcingų vektoriui (α, β). Plokštumos k^2 tiesiniai poerdviai $L((\alpha, \beta))$ ir $L((\gamma, \delta))$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$, sutampa tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $\mu \in k^*$, kad $\mu \cdot (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$. Įrodykite.

Plokštumos k^2, k – kūnas, tiesinius poerdvius galima ir kitaip aprašyti. Tiesė $L((\alpha, \beta))$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, yra sudaryta iš visų tokių vektorių $(\gamma_1, \gamma_2) \in k^2$, kurių koordinatės γ_1 ir γ_2 tenkina lygtį: $\beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0$. Matematinių simbolių žymenimis galime užrašyti taip:

$$L((\alpha, \beta)) = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in k^2 \mid \beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0\}.$$

Iš tikrųjų, lygties $\beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0$, $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, kiekvieną sprendinį $(\gamma_1, \gamma_2) \in k^2$ galima užrašyti taip: $\lambda \cdot (\alpha, \beta)$, $\lambda \in k$. Vėliau įsitikinsime, kiekvienos tiesinės erdvės kiekvieną tiesinį poerdvį sudaro tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė.

1.2.6 pavyzdys (Trimatės tiesinės erdvės k^3 tiesiniai poerdviai)**.** $\{(0,0,0)\}$ ir k^3 – trimatės tiesinės erdvės k^3 (k – kūnas) trivialūs tiesiniai poerdviai.

<u>**Tiesės.**</u> Kiekvienam nenuliniam vektoriui $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in k^3$, egzistuoja tiesinis poerdvis

$$L((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) := \{\lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \lambda \in k\},$$

vadinamas trimatės tiesinės erdvės k^3 *tiese*. Tiesinės erdvės k^3 dvi tiesės $L((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$ ir $L((\beta_1, \beta_2, \beta_3))$ sutampa tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $\lambda \in k^*$, kad

$$\lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Plokštumos. Nenulinių vektorių porai $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in k^3$, tenkinančiai sąlygą $L(v_1) \neq L(v_2)$, egzistuoja trimatės tiesinės erdvės k^3 tiesinis poerdvis

$$L(v_1, v_2) = L((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) :=$$

$$= \{\mu_1 \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mu_2 \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \mu_1, \mu_2 \in k\},$$

vadinamas trimatės tiesinės erdvės k^3 *plokštuma.*

1.2.7 pavyzdys. Apibendrinsime 1.2.5 ir 1.2.6 pavyzdžių konstrukciją. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$. Apibrėžkime tiesinės erdvės V tiesinį poerdvį

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_s) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s \mid \alpha_j \in k,\ 1 \leq j \leq s\},$$

vadinamą vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$ *tiesiniu apvalkalu.*

Sakykime, kad vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$ tenkina sąlygas: $v_1 \neq O$, kiekvienam $j = 2, 3, \ldots, s$, $v_j \notin L(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1})$. Sutarę, kad $L(\emptyset) := \{O\}$, pastarąsias sąlygas galime užrašyti taip: kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$, $v_j \notin L(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1})$.

Aptarsime šias sąlygas. Jei $v_1 \neq O$, tai vektoriaus v_1 tiesinis apvalkalas $L(v_1)$ yra tiesė. Jei $v_2 \notin L(v_1)$, tai vektorių v_1 ir v_2 tiesinis apvalkalas $L(v_1, v_2)$ – plokštuma. Panašiai, jei $v_3 \notin L(v_1, v_2)$, tai vektorių tiesinis apvalkalas $L(v_1, v_2, v_3)$ – trimatė erdvė it t. t.. Aptariamos sąlygos, – tai tiesinės erdvės *dimensijos* intuityvaus suvokimo matematinis apibūdinimas. Jei vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$ tenkina aptariamas sąlygas, tai šie vektoriai yra vadinami *tiesiškai nepriklausomais*, o šių vektorių tiesinis apvalkalas $L(v_1, v_2, \ldots, v_s)$ yra vadinamas tiesinės erdvės V *s-mačiu tiesiniu poerdviu.* Tai labai svarbios sąvokos. Šias sąvokas vėliau suformuluosime įvairiomis ekvivalenčiomis formomis ir aptarsime išsamiai.

1.2.8 pavyzdys. Sakykime, X – netuščia aibė, V – tiesinė erdvė virš kūno k. Nagrinėkime virš kūno k tiesinę erdvę $(V^X, +)$. Jei Y – netuščias aibės poaibis, L – tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis, tai L^Y yra tiesinės erdvės $(V^X, +)$ tiesinis poerdvis. Įsitikinkite.

1.3 Veiksmai su poerdviais

1.3.1. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k, $\mathcal{P}(V)$ – aibės V visų poaibių aibė. Kaip žinome, aibėje $\mathcal{P}(V)$ apibrėžti kompozicijos dėsniai $\cap$ ir $\cup$. Dabar apibrėšime aibės V poaibių sudėtį $+$.

1.3.2 apibrėžimas. Jei X, $Y \in \mathcal{P}(V)$ ir $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, tai $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Jei bent viena iš aibių X ar Y yra tuščia, tai $X + Y := \emptyset$.

Taigi apibrėžėme atvaizdį:

$$\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) \xrightarrow{+} \mathcal{P}(V).$$

Kai kurie tiesinės V poaibiai yra tiesiniai poerdviai. Pažymėkime $\mathcal{P}o(V)$ tiesinės erdvės V visų tiesinių poerdvių aibę. Pastebėsime, kad kompozicijos dėsniai $+$ ir $\cap$ aibėje $\mathcal{P}(V)$ indukuoja kompozicijos dėsnius poaibyje $\mathcal{P}o(V)$. Tuo tikslu įrodysime teiginį: jei $X, Y \in \mathcal{P}o(V)$, tai $X + Y \in \mathcal{P}o(V)$ ir $X \cap Y \in \mathcal{P}o(V)$.

1.3.3 teiginys. *Jei X ir Y yra tiesinės erdvės V tiesiniai poerdviai, tai $X + Y$ ir $X \cap Y$ yra tiesinės erdvės tiesiniai poerdviai.*

Įrodymas. Jei $v_1, v_2 \in X + Y$, tai egzistuoja tokie $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, kad $v_1 = x_1 + y_1$, $v_2 = x_2 + y_2$. Tuomet bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Kaip matome, vektorius $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ yra užrašomas dviejų vektorių $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ir $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ suma. Kadangi X ir Y yra tiesinės erdvės tiesiniai poerdviai ir $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, tai bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in X, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y.$$

Vadinasi, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in X + Y$.

Antrąją šio teiginio dalį paliekame įrodyti skaitytojui. $\square$

Pratimai.

1. Įrodykite: jei L_1, L_2, L_3 – tiesinės erdvės V virš kūno k tiesiniai poerdviai, tai

$$(L_1 + L_2) \cap L_3 \supset (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3).$$

2. Įrodykite: jei L_1, L_2, L_3 – tiesinės erdvės V virš kūno k tiesiniai poerdviai, tai

$$(L_1 \cap L_2) + L_3 \subset (L_1 + L_3) \cap (L_2 + L_3).$$

1.3.4 pavyzdys. Sakykime, $V = k^2$, k – kūnas,

$$L_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in k\},\ L_2 = \{(0, \alpha) \mid \alpha \in k\},\ L_3 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in k\}.$$

Įsitikinkite, kad

$$L_1 + L_2 = k^2,\ L_1 + L_3 = k^2,\ L_2 + L_3 = k^2,\ L_1 \cap L_2 = \{(0, 0)\}.$$

Šiuo atveju, kaip matome,

$$(L_1 + L_2) \cap L_3 = L_3,\ (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3) = \{O\},$$

t. y.

$$(L_1 + L_2) \cap L_3 \neq (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3).$$

Panašiai, bendruoju atveju

$$(L_1 \cap L_2) + L_3 \neq (L_1 + L_3) \cap (L_2 + L_3).$$

Pailiustruokite pavyzdžiu, kad iš tikrųjų bendruoju atveju tiesiniai poerdviai $(L_1 \cap L_2) + L_3$ ir $(L_1 + L_3) \cap (L_2 + L_3)$ nėra lygūs.

Pateiktas pavyzdys iliustruoja, kad kompozicijos dėsniai $+$ ir $\cap$ aibėje $\mathcal{P}o(V)$ nėra susiję nei vienu distributyvumo dėsniu. Tuo labiau kompozicijos dėsniai $+$ ir $\cap$ nėra susiję nei vienu distributyvumo dėsniu aibėje $\mathcal{P}(V)$.

Paminėsime dar ir šias kompozicijos dėsnių $+$ ir $\cap$ aibėje $\mathcal{P}o(V)$ savybes: kiekvienam $L \in \mathcal{P}o(V)$,

1. $L + L = L$;

2. $L \cap L = L$.

1.4 Tiesiniai atvaizdžiai

1.4.1. Tiesinę erdvę V virš kūno sutarkime žymėti (V, k), jos nulinį elementą – O_V. Sakykime, (V, k) ir (W, k) tiesinės erdvės, O_V, O_W – jų nuliniai elementai.

1.4.2 apibrėžimas. Atvaizdis $f : V \to W$ yra vadinamas *tiesiniu atvaizdžiu*, jei bet kuriems $\alpha \in k$, v, v_1, $v_2 \in V$,

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$;

2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

Šias sąlygas galima pakeisti viena sąlyga.

1.4.3 apibrėžimas. Atvaizdis $f : V \to W$ yra vadinamas tiesiniu atvaizdžiu, jei bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$,

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

1.4.4. Visų tiesinių atvaizdžių $f : V \to W$ aibę pažymėkime $L_k(V, W)$ arba $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

1.4.5 teiginys. *Sakykime,* (V, k) *ir* (W, k) *tiesinės erdvės,* O_V*,* O_W *– jų nuliniai elementai,* $f : V \to W$ *– tiesinis atvaizdis. Tuomet*

1. *$f(O_V) = O_W$;*

2. *Kiekvienam $v \in V$, $f(-v) = -f(v)$.*

Įrodymas. 1. Remiantis tiesinio atvaizdžio apibrėžimu galima parašyti: $f(O_V) = f(O_V + O_V) = f(O_V) + f(O_V)$. Iš šios lygybės matome, kad $f(O_V) = O_W$.

2. Remiantis tiesinio atvaizdžio apibrėžimu galima parašyti: $O_W = f(O_V) = f(v+(-v)) = f(v)+f(-v)$. Iš šios lygybės matome, kad $f(-v) = -f(v)$. □

1.4.6. Apibrėšime aibės $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ elementų sudėtį bei išorinį kompozicijos dėsnį:

$$k \times \mathrm{Hom}_k(V, W) \to \mathrm{Hom}_k(V, W).$$

1.4.1 Aibės $\mathbf{Hom}_k(V, W)$ elementų sudėtis

Sakykime, $f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Apibrėžkime atvaizdį

$$f + g : V \to W,\ (f + g)(v) = f(v) + g(v),\ v \in V.$$

Įsitikinsime, kad taip apibrėžtas atvaizdis $f + g : V \to W$ yra tiesinis.

1.4.7 teiginys. *Jei $f, g \in Hom_k(V, W)$, tai ir $f + g \in Hom_k(V, W)$.*

Įrodymas. Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tuomet

$$(f + g)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) \\ &= \alpha_1(f(v_1) + g(v_1)) + \alpha_2(f(v_2) + g(v_2) \\ &= \alpha_1(f + g)(v_1) + \alpha_2(f + g)(v_2). \end{aligned}$$

□

1.4.8. Taigi apibrėžtas atvaizdis:

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \times \mathrm{Hom}_k(V, W) \xrightarrow{+} \mathrm{Hom}_k(V, W),$$

$$(f, g) \xrightarrow{+} f + g,\ (f + g)(v) := f(v) + g(v),\ v \in V, f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W).$$

Lengva įsitikinti, kad $(\mathrm{Hom}_k(V, W), +)$ yra Abelio grupė. Šios grupės nulinis elementas, – tai nulinis atvaizdis $O : V \to W$, priskiriantis kiekvienam $v \in V$ tiesinės erdvės W nulinį vektorių O_W.

1.4.9 apibrėžimas (Atvaizdžio $k \times \mathrm{Hom}_k(V, W) \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Hom}_k(V, W)$ apibrėžimas)**.** Sakykime, $\mu \in k$, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Apibrėžkime atvaizdį

$$\mu f : V \to W,\ (\mu f)(v) := \mu f(v),\ v \in V.$$

1.4.10 teiginys. *Jei $\mu \in k$, $f \in Hom_k(V, W)$, tai $\mu f \in Hom_k(V, W)$.*

Įrodymas. Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tuomet

$$(\mu f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \mu f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

$$= \mu(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) = \alpha_1(\mu f)(v_1) + \alpha_2(\mu f)(v_2).$$

□

1.4.11. Taigi apibrėžtas atvaizdis:

$$k \times \mathrm{Hom}_k(V, W) \dot{\to} \mathrm{Hom}_k(V, W),\ (\mu, f) \dot{\mapsto} \mu f,$$

$$(\mu f)(v) = \mu f(v),\ v \in V, \mu \in k, f \in \mathrm{Hom}_k(V, W).$$

Pratimas. Įsitikinkite, kad šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1-4 sąlygas.

Taigi $(\mathrm{Hom}_k(V, W), +)$ yra tiesinė tiesinė erdvė virš kūno k.

1.4.12. Sakykime, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}_k(W, Z)$. Apibrėžkime šių atvaizdžių kompoziciją $g \circ f : V \to Z$: kiekvienam $v \in V$, $(g \circ f)(v) := g(f(v)) \in Z$. Įsitikinsime, kad atvaizdis $g \circ f : V \to Z$ yra tiesinis.

1.4.13 teiginys. *Jei atvaizdžiai $f : V \to W$ ir $g : W \to Z$ yra tiesiniai, tai atvaizdis $g \circ f : V \to Z$ yra tiesinis.*

Įrodymas. Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tuomet

$$(g \circ f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = g(f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2))$$

$$g(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) = \alpha_1 g(f(v_1)) + \alpha_2 g(f(v_2))$$
$$= \alpha_1(g \circ f)(v_1) + \alpha_2(g \circ f)(v_2).$$

□

1.4.14. Taigi apibrėžtas atvaizdis:

$$\circ : \mathrm{Hom}_k(V, W) \times \mathrm{Hom}_k(W, Z) \to \mathrm{Hom}_k(V, Z),\ (f, g) \mapsto g \circ f,$$

$$f \in \mathrm{Hom}_k(V, W), g \in \mathrm{Hom}_k(W, Z).$$

Šis atvaizdis tenkina sąlygas: bet kuriems $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_k(W, Z)$, $\alpha \in k$,

1. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$;
2. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$;
3. $g \circ (\alpha f) = (\alpha g) \circ f = \alpha(g \circ f)$.

Atvaizdis

$$\circ : \mathrm{Hom}_k(V, W) \times \mathrm{Hom}_k(W, Z) \to \mathrm{Hom}_k(V, Z),$$

tenkinantis aukščiau užrašytas 1 – 3 sąlygas, yra vadinamas *dvitiesiniu.*

1.4.15. Panagrinėkime tiesinę erdvę $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$. Atvaizdis

$$\circ : \mathrm{Hom}_k(V, V) \times \mathrm{Hom}_k(V, V) \to \mathrm{Hom}_k(V, V),$$

yra tiesinės erdvės $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$ elementų asociatyvus kompozicijos dėsnis, kurį vadinsime tiesinės erdvės $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$ elementų daugyba. Kadangi atvaizdis $\circ$ turi savybes:

1. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$;
2. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f,\ f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$,

tai tiesinės erdvės $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$ elementų sudėtis ir daugyba, kaip matome, yra susieti distributyvumo dėsniais.

Kadangi atvaizdis $\circ$ turi savybę:

3. $g \circ (\alpha f) = (\alpha g) \circ f = \alpha(g \circ f),\ \alpha \in k,\ f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$,

tai tiesinės erdvės $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$ elementų daugyba yra suderinta su tiesinės erdvės $(\mathrm{Hom}_k(V, V), k)$ struktūra.

1.4.16. Taigi $(\mathrm{Hom}_k(V, V), +, \circ)$ yra algebra virš kūno k, kuriai priklauso vienetas id. Šios algebros visi elementai $f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$, kurių kiekvienam egzistuoja atvirkštinis elementas, atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu sudaro grupę, kuri yra žymima $\mathrm{GL}(V, k)$ ir vadinama *pilnąja tiesinės erdvės V tiesinių transformacijų grupe* (o kartais pavadinimas yra trumpinimas ir $\mathrm{GL}(V, k)$ yra vadinama *pilnąja tiesine grupe* virš kūno k). Grupė $\mathrm{GL}(V, k)$, – tai tiesinės erdvės (V, k) simetrijų grupė.

1.4.17 apibrėžimas. Tiesinės erdvės V ir W virš kūno k yra vadinamos *izomorfinėmis*, jei egzistuoja tiesinė bijekcija $f : V \to W$, t. y. f – bijekcija ir f – tiesinis atvaizdis. Tiesinė bijekcija $f : V \to W$ vadinama tiesinių erdvių V ir W *izomorfizmu.*

Pratimas. Sakykime, V ir W yra tiesinės erdvės virš kūno k. Įrodykite, kad, jei $f : V \to W$ – tiesinė bijekcija, tai ir f^{-1} yra tiesinis atvaizdis.

1.4.18 teiginys. *Sakykime, (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tuomet kiekvienam tiesinės erdvės V tiesiniam poerdviui L, kiekvianam tiesinės erdvės W tiesiniam poerdviui N,*

1. *$f(L)$ – tiesinės erdvės W tiesinis poerdvis;*

2. *$f^{-1}(N)$ – tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis;*

3. *$f^{-1}(f(L)) = L + f^{-1}(O_W)$.*

Įrodymas. 1. Sakykime, w_1, $w_2 \in f(L)$. Tuomet egzistuoja tokie l_1, $l_2 \in L$, kad $f(l_1) = w_1$, $f(l_2) = w_2$. Bet kuriems α_1, $\alpha_2 \in k$,

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(l_1) + \alpha_2 f(l_2) = f(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \in f(L),$$

kadangi $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \in L$ (priminsime: jei L – tiesinis poerdvis, l_1, $l_2 \in L$, tai bet kuriems α_1, $\alpha_2 \in k$, $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \in L$).

2. Sakykime, kad u_1, $u_2 \in f^{-1}(N)$. Tuomet $f(u_1)$, $f(u_2) \in N$. Kadangi N – tiesinės erdvės W tiesinis poerdvis, tai bet kuriems α_1, $\alpha_2 \in k$,

$$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) =\in N.$$

Vadinasi, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in f^{-1}(N)$, nes

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) =\in N.$$

3. Akivaizdu, kad $L \subset f^{-1}(f(L))$ ir $f^{-1}(O_W) \subset f^{-1}(f(L))$ (kadangi $\{O_V\} \subset L$, tai $f^{-1}(f(O_V)) \subset f^{-1}(f(L))$, o $f(O_V) = O_W$). Kadangi $f^{-1}(f(L))$ tiesinės ervės V tiesinis poerdvis, tai $L + f^{-1}(O_W) \subset f^{-1}(f(L))$. Lieka įrodyti, kad $f^{-1}(f(L)) \subset L + f^{-1}(O_W)$.

Sakykime, kad $u \in f^{-1}(f(L))$. Tuomet $f(u) \in f(L)$. Vadinasi, egzistuoja toks $l \in L$, kad $f(u) = f(l)$. Šią lygybę galime užrašyti taip: $f(u - l) = O_W$. Kaip matome, $u - l \in f^{-1}(O_W)$ arba

$$u \in l + f^{-1}(O_W) \subset L + f^{-1}(O_W).$$

□

1.4.19 apibrėžimas. Sakykime, (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis $f^{-1}(O_W)$ yra vadinamas tiesinio atvaizdžio f *branduoliu* ir yra žymimas $\ker f$.

1.4.20 apibrėžimas. Sakykime, (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, L ir N – atitinkamai šių tiesinių erdvių tiesiniai poerdviai, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinės erdvės (W, k) tiesinis poerdvis $f(L)$ yra vadinamas tiesinės erdvės (V, k) tiesinio poerdvio L *vaizdu*, o tiesinės erdvės (W, k) tiesinis poerdvis $f^{-1}(N)$ – tiesinės erdvės (W, k) tiesinio poerdvio N *pirmavaizdžiu*.

1.4.21 išvada. *Sakykime, (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Jei L – tiesnės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis ir $\ker f \subset L$, tai $f^{-1}(f(L)) = L$.*

1.4.22 teiginys. *Sakykime, (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$ – siurjektyvus tiesinis atvaizdis. Tuomet egzistuoja bijekcija tarp tiesinės erdvės (W, k) tiesinių poerdvių aibės ir tarp tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių, turinčių savyje* $\ker f$, *aibės.*

Įrodymas. Įrodymą paliekame skaitytojui. □

1.4.23 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to W$, čia (V, k), (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, yra injektyvus tada ir tik tada, kai* $\ker f = \{O_V\}$.

Įrodymas. Įrodymą paliekame skaitytojui. □

1.5 Tiesinių erdvių tiesioginės sumos

1.5.1. Tiesinių erdvių tiesioginės sumos yra skirstomos į vidines ir išorines. Tam tikrais atvejais tiesinės erdvės tiesinių poerdvių suma yra vadinama tiesiogine suma. Ši tiesinės erdvės tiesinių poerdvių tiesioginė suma ir yra suprantama vidine. Tiesinių erdvių išorinė tiesioginė suma, – tai tam tikras veiksmas, kuriuo remiantis iš duotų tiesinių erdvių yra sudaroma nauja tiesinė erdvė. Kaip vėliau pamatysime, esminio skirtumo tarp tiesinių erdvių vidinių ir išorinių tiesioginių sumų nėra.

Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, O_V – šios tiesinės erdvės nulinis vektorius.

1.5.2 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_1 ir L_2 suma $L_1 + L_2$ yra vadinama *tiesiogine* ir yra žymima $L_1 \oplus L_2$, jei $L_1 \cap L_2 = \{O_V\}$.

Ši tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_1 ir L_2 tiesioginė suma $L_1 \oplus L_2$ ir yra vadinama *vidine*.

1.5.3. Įrodysime pagrindinę tiesinių poerdvių tiesioginės sumos savybę.

1.5.4 teorema. *Teiginiai:*

> *Tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_1 ir L_2 suma $L_1 + L_2$ yra tiesioginė;*
>
> *Tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_1 ir L_2 sumos $L_1 + L_2$ kiekvienam vektoriui v egzistuoja tokie vieninteliai vektoriai $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$, kad $v = l_1 + l_2$;*

yra ekvivalentūs.

Įrodymas. 1. $\Rightarrow$ 2. Imkime $v \in L_1 \oplus L_2$. Tarkime, kad vektorių v galima užrašyti dviejų vektorių, priklausančių tiesiniams poerdviams L_1 ir

L_2, suma dvejais skirtingais būdais: $v = l_1 + l_2 = l_1' + l_2'$, $l_1, l_1' \in L_1$, $l_2, l_2' \in L_2$, $l_1 \neq l_1'$. Tuomet

$$L_1 \ni l_1 - l_1' = l_2' - l_2 \in L_2.$$

Vadinasi, $O \neq l_1 - l_1' = l_2' - l_2 \in L_1 \cap L_2 = \{O_V\}$. Prieštara.

2. $\Rightarrow$ 1. Imkime $l \in L_1 \cap L_2$. Galime užrašyti lygybę: $O_V = O_V + O_V = l + (-l) \in L_1 + L_2$. Kadangi kiekvienas tiesinių poerdvių L_1, L_2 sumos $L_1 + L_2$ vektorius yra užrašomas dviejų vektorių, priklausančių atitinkamai tiesiniams poerdviams L_1 ir L_2, suma vieninteliu būdu, tai gauname, kad $l = O_V$. Vadinasi, $L_1 \cap L_2 = \{O_V\}$, t. y. tiesinių poerdvių L_1, L_2 suma $L_1 + L_2$ yra tiesioginė. $\square$

1.5.5. Dabar galime apibrėžti tiesinės erdvės tiesinių poerdvių baigtinės šeimos tiesioginę sumą.

1.5.6 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_j, $1 \leq j \leq n$, suma $\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ yra vadinama *tiesiogine* ir yra žymima $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} L_j$, jei kiekvianas vektorius $v \in \sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ yra vienareikšmiškai užrašomas n vektorių $l_j \in L_j$, $1 \leq j \leq n$, suma $v = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j$.

Pratimas. Įrodykite, kad tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių L_j, $1 \leq j \leq n$, suma $\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai kiekvienam s, $1 \leq s \leq n$,

$$L_s \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} L_j = \{O_V\}.$$

1.5.7 apibrėžimas. Tiesinė erdvė (V, k) yra vadinama tiesinių poerdvių L_j, $1 \leq j \leq n$, *tiesiogine suma*, jei

$$V = \bigoplus_{j=1}^{n} L_j.$$

Šiuo atveju egzistuoja *kanoninės projekcijos* $\mathrm{pr}_j : V \to L_j$, $1 \leq j \leq n$, apibrėžiamos taip: jei vektorius $v \in V$ yra vienarekšmiškai užrašomas n vektorių $l_j \in L_j$, $1 \leq j \leq n$, suma $v = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j$, tai $\mathrm{pr}_j(v) = l_j$, $1 \leq j \leq n$.

Pratimas. Sakykime, kad $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} L_j$. Įrodykite, kad kanoninės projekcijos $\mathrm{pr}_j : V \to L_j$, $1 \leq j \leq n$, yra tiesiniai atvaizdžiai (t. y. tenkina sąlygą: bet kuriems $\alpha, \beta \in k$, $u, v \in V$, $\mathrm{pr}_j(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot \mathrm{pr}_j(u) + \beta \cdot \mathrm{pr}_j(v)$, $1 \leq j \leq n$).

1.5.8. Sakykime, (V_1, k) ir (V_2, k) – tiesinės erdvės virš kūno k. Apibrėžkime aibės $V_1 \times V_2$ elementų sudėtį:

$$(V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \xrightarrow{+} V_1 \times V_2,$$

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \overset{+}{\mapsto} (u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$u_1, v_1 \in V_1,\ u_2, v_2 \in V_2$.

Akivaizdu, kad $(V_1 \times V_2, +)$ yra Abelio grupė.

Apibrėžkime atvaizdį:

$$k \times (V_1 \times V_2) \xrightarrow{\cdot} V_1 \times V_2,$$

$$(\alpha, (v_1, v_2)) \overset{\cdot}{\mapsto} \alpha \cdot (v_1, v_2) := (\alpha v_1, \alpha v_2),\ \alpha \in k,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Įsitikinkite, kad šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1-4 sąlygas.

Kaip matome, Abelio grupė $(V_1 \times V_2, +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k.

1.5.9 apibrėžimas. Tiesinė erdvė $(V_1 \times V_2, +)$ virš kūno k yra vadinama tiesinių erdvių (V_1, k) ir (V_2, k) *tiesiogine suma* ir yra žymima $V_1 \oplus V_2$.

Ši tiesinių erdvių (V_1, k) ir (V_2, k) tiesioginė suma $V_1 \oplus V_2$ ir yra vadinama *išorine*.

1.5.10. Panašiai galima apibrėžti baigtinio skaičiaus tiesinių erdvių išorinę tiesioginę sumą.

Sakykime, (V_j, k), $1 \leq j \leq n$, – tiesinės erdvės virš kūno k. Aibėje

$$\prod_{j=1}^{n} V_j = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$$

galime apibrėžti elementų sudėtį paelemenčiui: jei

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \prod_{j=1}^{n} V_j,$$

tai

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Akivaizdu, kad $(\prod\limits_{j=1}^{n} V_j, +)$ yra Abelio grupė.

Aibės $\prod\limits_{j=1}^{n} V_j$ elementų daugybą iš kūno k elementų galime apibrėžti taip: jei $\alpha \in k$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \prod\limits_{j=1}^{n} V_j$, tai

$$\alpha \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) := (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n).$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžtas atvaizdis:

$$k \times \prod_{j=1}^{n} V_j \dot{\to} \prod_{j=1}^{n} V_j,$$

tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1 – 4 sąlygas.

Taigi Abelio grupė $(\prod\limits_{j=1}^{n} V_j, +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k.

1.5.11 apibrėžimas. Tiesinė erdvė $(\prod\limits_{j=1}^{n} V_j, +)$ virš kūno k yra vadinama tiesinių erdvių (V_j, k), $1 \leq j \leq n$, *išorine tiesiogine suma* ir yra žymima $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} V_j$ (taip yra žymima ir vidinė tiesioginė suma).

1.5.12. Galima apibrėžti tiesinių erdvių virš kūno k šeimos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tiesioginę sandaugą. Aibės $\prod\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ elementų sudėtį apibrėžkime taip: jei $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ir $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \prod\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$, tai

$$\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} + \{v_\alpha\}_{\alpha \in I} := \{u_\alpha + v_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

Aibės $\prod\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ elementų daugybą iš kūno k elementų apibrėžkime taip: jei

$$\lambda \in k, \quad \{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} V_\alpha,$$

tai

$$\lambda \cdot \{u_\alpha\}_{\alpha \in I} := \{\lambda u_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžtas atvaizdis:

$$k \times \prod_{\alpha \in I} V_\alpha \dot{\to} \prod_{\alpha \in I} V_\alpha,$$

tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1 – 4 sąlygas.

1.5.13 apibrėžimas. Tiesinė erdvė $(\prod\limits_{\alpha \in I} V_\alpha, +)$ virš kūno k vadinama tiesinių erdvių virš kūno k šeimos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *tiesiogine sandauga* ir yra žymima $\prod\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$.

1.5.14 teiginys. *Tiesinės erdvės* $(\prod_{\alpha\in I} V_\alpha, +)$ *virš kūno* k *poaibis, sudarytas iš vektorių*

$$\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} V_\alpha,$$

kurių tik baigtinis skaičius koordinačių u_α*,* $\alpha \in I$*, nelygus nuliniams vektoriams* O_{V_α}*,* $\alpha \in I$*, yra erdvės* $\prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ *tiesinis poerdvis, vadinamas tiesinių erdvių virš kūno* k *šeimos* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *tiesiogine suma ir žymimas* $\bigoplus_{\alpha\in I} V_\alpha$*. Jei indeksų aibė* I *yra baigtinė, tai tiesinių erdvių virš kūno* k *šeimos* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *tiesioginė suma* $\bigoplus_{\alpha\in I} V_\alpha$ *sutampa su šios tiesinių erdvių šeimos tiesiogine sandauga.*

Įrodymas. Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui. □

1.5.15. Dabar aptarsime ryšį tarp tiesinių erdvių išorinių ir vidinių tiesioginių sumų.

Tiesinių erdvių (V_j, k), $1 \le j \le n$, tiesioginę sumą $\bigoplus_{j=1}^n V_j$ galime interpretuoti kaip tiesinės erdvės $\bigoplus_{j=1}^n V_j$ tiesinių poerdvių

$$\tilde{V}_j =: \{(O_{V_1}, O_{V_2}, \dots, O_{V_{j-1}}, v, O_{V_{j+1}}, \dots, O_{V_n}) \mid v \in V_j\},\ 1 \le j \le n,$$

tiesioginę sumą. Be to, tiesinė erdvė V_j yra izomorfinė erdvės $\bigoplus_{j=1}^n V_j$ tiesiniam poerdviui $\tilde{V}_j$, $1 \le j \le n$. Atvaizdžiai

$$f_j : V_j \to \tilde{V}_j,\ f_j(u) = (O_{V_1}, O_{V_2}, \dots, O_{V_{j-1}}, u, O_{V_{j+1}}, \dots, O_{V_n}),\ u \in V_j,$$

$1 \le j \le n$, yra tiesinės bijekcijos. Įsitikinkite.

Kaip matome, tiesinių erdvių išorinę tiesioginę sumą galima interpretuoti kaip vidinę. Dabar įsitikinsime, kad vidinę tiesioginę sumą galima interpretuoti kaip išorinę.

Sakykime, kad tiesinės erdvės V tiesinių poerdvių L_j, $1 \le j \le n$, tiesioginė suma yra $L = \bigoplus_{j=1}^n L_j$. Nagrinėkime tiesinių erdvių L_j, $1 \le j \le n$, išorinę tiesioginę sumą ir šią sumą laikinai pažymėkime $W = \prod_{j=1}^n L_j$.

1.5.16 teiginys. *Tiesinės erdvės* L *ir* W *yra izomorfinės.*

Įrodymas. Nagrinėkime atvaizdį

$$f : L \to W,\ L \ni l = \sum_{j=1}^{n} l_j \mapsto (l_1, l_2, \dots, l_n) \in W.$$

Įsitikinsime, kad f yra tiesinė bijekcija.

Kadangi kiekvienas tiesinės erdvės L vektorius l vienareikšmiškai yra užrašomas tiesinių poerdvių L_j vektorių l_j, $1 \leq j \leq n$, suma, tai f yra injektyvus atvaizdis. Kadangi kiekvienam vektorių $l_j \in L_j$, $1 \leq j \leq n$, rinkiniui vektorius $\sum\limits_{j=1}^{n} l_j$ priklauso L, tai atvaizdis f yra siurjektyvus. Akivaizdu, kad f yra tiesinis atvaizdis. Vadinasi, f yra tiesinė bijekcija, t. y. tiesinės erdvės L ir W yra izomorfinės. □

1.5.17. Kaip matome, tarp tiesinių erdvių vidinių ir išorinių tiesioginių sumų nėra esminio skirtumo. Pastebėsime, kad ryšį tarp tiesinių erdvių vidinių ir išorinių tiesioginių sumų aptarėme tik tuo atveju, kai nagrinėjame tik baigtinį tiesinių erdvių skaičių. Panašiai būtų galima įrodyti, kad esminio skirtumo tarp vidinių ir išorinių tiesioginių sumų nėra ir tuo atveju, kai nagrinėjamos tiesinių erdvių šeimų su begalinėmis indeksų aibėmis tiesioginės sumos.

1.5.18. Sakykime, (V, k) tiesinė erdvė virš kūno k. Kyla klausimas, ar kiekvienam tiesinės erdvės (V, k) tiesiniam poerdviui L egzistuoja toks tiesinis poerdvis M, kad tiesinė erdvė (V, k) būtų tiesinių poerdvių L ir M tiesiogine suma: $V = L \oplus M$?

1.5.19 teorema. *Kiekvienam tiesinės erdvės (V, k) tiesiniam poerdviui L egzistuoja bent vienas toks tiesinis poerdvis M, kad tiesinė erdvė (V, k) yra tiesinių poerdvių L ir M tiesiogine suma: $V = L \oplus M$.*

Įrodymas. Tiesinio poerdvio M egzistavimui įrodyti remsimės Corno lema (**??** teorema). Visų tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių N, turinčių savybę $N \cap L = \{O_V\}$, aibę pažymėkime X. X įdėties sąryšio $\subset$ atžvilgiu yra sutvarkyta aibė. Įsitikinsime, kad sutvarkytoji aibė X tenkina visas Corno lemos prielaidas.

Tarkime, Y sutvarkytosios aibės $(X, \subset)$ indukuotosios tvarkos atžvilgiu yra tiesiškai sutvarkytas poaibis. Taigi Y yra sudarytas iš tiesinės erdvės (V, k) tiesinių poerdvių, turinčių savybes:

1. $(\forall N \in Y)(N \cap L = \{O_V\})$;
2. $(\forall N_1, N_2 \in Y)((N_1 \subset N_2) \vee (N_2 \subset N_1))$.

Įrodysime, kad Y aprėžta iš viršaus. Pažymėkime $U := \bigcup\limits_{N \in Y} N$. Akivaizdu, kad kiekvienam $N \in Y$, $N \subset U$. Jei $U \in X$, tai aibė Y yra aprėžta iš viršaus. Lieka įrodyti, kad $U \in X$, t. y. lieka įrodyti, kad U yra tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis ir $U \cap L = \{O_V\}$.

Sakykime, v_1, $v_2 \in U$. Tuomet egzistuoja toks $N_0 \in Y$, kad v_1, $v_2 \in N_0$. Kadangi N_0 yra tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis, tai bet kuriems α_1, $\alpha_2 \in k$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in N_0 \subset U$. Taigi U yra tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis.

Dabar įsitikinsime, kad $U \cap L = \{O_V\}$. Tarkime, kad $v \in U \cap L$, t. y. $v \in U$ ir $v \in L$. Kadangi $v \in U$, tai egzistuoja toks $N' \in Y \subset X$, kad $v \in N'$. Vadinasi, $v \in N' \cap L = \{O_V\}$, t. y. $v = O_V$.

Taigi įrodėme, kad $U \in X$. Remdamiesi Corno lema, gauname, kad sutvarkytoje aibėje $(X, \subset)$ egzistuoja bent vienas maksimalus elementas M. M turi šias savybes:

1. $M \cap L = \{O_V\}$;
2. Jei tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis N tenkina sąlygą $N \cap L = \{O_V\}$, tai $M \not\subset N$.

Teigiame, kad $V = L \oplus M$.

Tarkime, kad $V \neq L \oplus M$. Vadinasi, egzistuoja toks $v \in V$, kad $v \notin L \oplus M$. Pažymėkime $\tilde{M} := M + L(v)$ (t. y. $L(v) = kv$). Akivaizdu, kad $M \subset \tilde{M}$ ir $M \neq \tilde{M}$. Vadinasi, $\tilde{M} \cap L \neq \{O_V\}$. Jei $l \neq O_V$, $l \in \tilde{M} \cap L$, tai egzistuoja toks $\alpha \in k$ ir $m \in M$, kad $l = \alpha v + m$. Bet $\alpha \neq 0$. Priešingu atveju $l = m \in L \cap M = \{O_V\}$, kas prieštarauja tam, kad $l \neq O_V$. Vadinasi, $\alpha v = l - m \in L + M$ arba $v = \alpha^{-1}(l - m) \in L + M$. Tai prieštarauja vektoriaus v parinkimui. Taigi $V = L \oplus M$. Teorema įrodyta. □

1.5.20 pastaba. Vėliau įsitikinsime, kad baigtinės dimensijos tiesinėms erdvėms šios teoremos įrodymas visiškai paprastas. Mes teoremą įrodėme bendruoju atveju.

1.5.21 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) tiesinis poerdvis M, tenkinantis sąlygą $V = L \oplus M$, yra vadinamas tiesiniam poerdviui L *papildomuoju poerdviu.*

1.5.22. Tiesinės erdvės (V, k) tiesiniam poerdviui L papildomųjų poerdvių egzistuoja ne vienas. Galima įrodyti labai svarbų faktą: jei $L \oplus M_1 = L \oplus M_2$, tai tiesiniai poerdviai M_1 ir M_2 yra izomorfiniai. Tuo tikslu kiekvienam tiesinės erdvės (V, k) tiesiniam poerdviui L kanoniniu būdu sukonstruosime tiesinę erdvę, izomorfinę kiekvienam tiesinio poerdvio L papildomajam poerdviui.

1.6 Tiesinės erdvės faktorerdvė pagal tiesinį poerdvį

1.6.1. Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, L – tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis. Apibrėžkime tiesinėje erdvėje (V, k) sąryšį $\underset{L}{\sim}$: $v_1 \underset{L}{\sim} v_2$ tada ir tik tada, kai $v_1 - v_2 \in L$. Akivaizdu, kad: bet kuriems v_1, v_2, $v_3 \in V$,

1. $v_1 \underset{L}{\sim} v_1$;

2. Jei $v_1 \underset{L}{\sim} v_2$, tai $v_2 \underset{L}{\sim} v_1$;

3. Jei $v_1 \underset{L}{\sim} v_2$, $v_2 \underset{L}{\sim} v_3$, tai $v_1 \underset{L}{\sim} v_3$.

Taigi $\underset{L}{\sim}$ yra ekvivalentumo sąryšis tiesinėje erdvėje (V, k), vadinamas ekvivalentumo sąryšiu pagal tiesinį poerdvį L. Dažnai vietoje $u \underset{L}{\sim} v$ yra rašoma $u \equiv v (\operatorname{mod} L)$.

1.6.2 teiginys. *Tiesinės erdvės (V, k) elemento v ekvivalentumo klasė pagal ekvivalentumo sąryšį $\underset{L}{\sim}$ yra $v + L = \{v + l \mid l \in L\}$.*

Įrodymas. Jei $u \underset{L}{\sim} v$, tai $u - v = l \in L$, t. y. $u = v + l$, $l \in$ arba $u \in v + L$. Jei $w \in v + L$, tai $w - v \in L$, t. y. $w \underset{L}{\sim} v$. □

1.6.3. Aibės V faktoraibę pagal ekvivalentumo sąryšį $\underset{L}{\sim}$ žymėsime V/L. Apibrėšime aibės V/L elementų sudėtį + ir jos elementų daugybą iš kūno k elementų.

1.6.1 Aibės V/L elementų sudėtis.

Bet kurių aibės V/L elementų $v_1 + L$, $v_2 + L$ sumą apibrėžkime taip:

$$(v_1 + L) + (v_2 + L) := v_1 + v_2 + L.$$

Įsitikinkite, kad aibės V/L elementų sudėtis apibrėžta korektiškai, t. y., jei $v_1' + L = v_1 + L$, $v_2' + L = v_2 + L$, tai $(v_1' + L) + (v_2' + L) = (v_1 + L) + (v_2 + L)$.

1.6.4 teiginys. $(V/L, +)$ *yra Abelio grupė.*

Įrodymas. 1. Akivaizdu, kad sudėtis + aibėje V/L – asociatyvi.

2. $L = O_V + L$ – nulinis (neutralus) elementas sudėties atžvilgiu.

3. Aibės V/L elementui $v+L$ priešingas (simetrinis) elementas yra $-v+L$.

4. Aibės elementų V/L sudėtis + komutatyvi.

□

1.6.2 Aibės V/L elementų daugyba iš kūno k elementų.

Apibrėžkime aibės V/L elementų daugybą iš kūno k elementų taip: kiekvienam $\alpha \in k$ ir kiekvienam $v + L \in V/L$,

$$(\alpha, v + L) \mapsto \alpha \cdot (v + L) := \alpha v + L.$$

Galima įsitikinti, kad atvaizdis

$$k \times V/L \dot{\to} V/L,\ \alpha(v + L) := \alpha v + L,\ \alpha \in k,\ v + L \in V/L,$$

apibrėžtas korektiškai ir tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo $1 - 4$ sąlygas.

Taigi Abelio grupė $(V/L, +)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k.

1.6.5 apibrėžimas. Tiesinė erdvė $(V/L, k)$ yra vadinama tiesinės erdvės V *faktorerdve* pagal tiesinį poerdvį L.

1.6.6. Sakykime, $(V/L, k)$ yra tiesinės erdvės V faktorerdvė pagal tiesinį poerdvį L. Apibrėžkime atvaizdį

$$j : V \to V/L,\ j(u) := u + L,\ u \in V.$$

Įsitikinsime, kad atvaizdis j yra tiesinis.

Sakykime, α_1, $\alpha_2 \in k$, u_1, $u_2 \in V$. Tuomet

$$j(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + L = (\alpha_1 u_1 + L) + (\alpha_2 u_2 + L) =$$

$$= \alpha_1(u_1 + L) + \alpha_2(u_2 + L) = \alpha_1 j(u_1) + \alpha_2 j(u_2).$$

1.6.7 apibrėžimas. Sakykime, $(V/L, k)$ yra tiesinės erdvės V faktorerdvė pagal tiesinį poerdvį L. Tiesinis atvaizdis

$$j : V \to V/L,\ j(u) := u + L,\ u \in V,$$

vadinamas *kanoniniu atvaizdžiu* iš tiesinės erdvės į faktorerdvę.

1.6.8. Sakykime, $(V/L, k)$ yra tiesinės erdvės V faktorerdvė pagal tiesinį poerdvį L. Akivaizdu, kad kanoninio atvaizdžio

$$j : V \to V/L,\ j(u) := u + L,\ u \in V$$

branduolys $\ker j$ yra lygus L.

1.6.9 teorema. *Sakykime, L yra tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinis poerdvis, M – tiesiniam poerdviui L papildomasis poerdvis. Tuomet tiesinės erdvės M ir V/L yra izomorfinės.*

Įrodymas. Įrodysime, kad kanoninio atvaizdžio $j : V \to V/L$ siaurinys $j\big|_M \to V/L$ yra izomorfizmas.

Pirmiausia įrodysime, kad tiesinis atvaizdis $j\big|_M \to V/L$ yra injektyvus. Tuo tikslu įsitikinsime, kad $\ker j\big|_M = \{O_V\}$. Sakykime, $u \in \ker j\big|_M$, t. y. $u \in M$ ir $j\big|_M(u) = u + L = L$. Kaip matome, $u \in M$ ir $u \in L$. Kadangi $M \cap L = \{O_V\}$, tai $u = O_V$.

Lieka įrodyti, kad tiesinis atvaizdis $j\big|_M$ yra siurjektyvus. Imkime bet kurį tiesinės erdvės V/L elementą $v + L$, $v \in V$. Kadangi $V = L \oplus M$, tai egzistuoja tokie $l \in L$, $u \in M$, kad $v = l+u$. Tuomet $j\big|_M(u) = u+L = v+L$, $u \in M$, nes $u - v = l \in L$. □

1.6.10 išvada. *Jei tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesiniai poerdviai L, M ir N tenkina sąlygą $L \oplus M = L \oplus N$, tai tiesiniai poerdviai M ir N yra izomorfiniai.*

Įrodymas. Tiesinė erdvė $(L \oplus M)/L = (L \oplus N)/L$ yra izomorfinė tiek tiesiniam poerdviui M, tiek ir tiesiniam poerdviui N. Vadinasi, tiesiniai poerdviai M ir N yra izomrfiniai. □

1.7 Tiesinės erdvės bazė, dimensija

Šiame skyrelyje nagrinėsime tiesinės erdvės (V, k) tik baigtines vektorių šeimas.

Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ – vektorių šeima. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį

$$f_{(v_1,v_2,\dots,v_n)} : k^n \to V,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,\ \alpha_j \in k,\ 1 \le j \le n.$$

1.7.1 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) vektoriai $v_1, v_2, \dots, v_n$ vadinami *tiesiškai nepriklausomais*, jei tiesinis atvaizdis $f_{(v_1,v_2,\dots,v_n)} : k^n \to V$ yra injektyvus.

1.7.2 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) vektoriai $v_1, v_2, \dots, v_n$ vadinami *tiesiškai nepriklausomais*, jei

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = O \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Akivaizdu, kad 1 ir 2 apibrėžimai yra ekvivalentūs.

1.7.3 išvada. *Tiesinės erdvės (V, k) tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimos $v_1, v_2, \dots, v_n$ netuščio pošeimio vektoriai $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_s}$ – tiesiškai nepriklausomi.*

Įrodymas. Įrodymas gaunamas remiantis 1-uoju ir 2-uoju apibrėžimais. □

1.7.4 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V,k) vektoriai $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ vadinami *tiesiškai priklausomais*, jei egzistuoja tokie $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \in k$, kurių bent vienas nelygus 0, kad $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = O$.

1.7.5 pastaba. Tiesinės erdvės (V,k) vektoriai $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ yra tiesiškai priklausomi, jei jie nėra tiesiškai nepriklausomi.

1.7.6 pavyzdys. Šeima iš vieno vektoriaus $v \in V$ yra tiesiškai nepriklausoma tada ir tik tada, kai $v \neq O_V$.

1.7.7 pavyzdys. Vektoriai $O_V, v \in V$ yra tiesiškai priklausomi, nes $1 \cdot O_V + 0 \cdot v = O_V$.

1.7.8 pavyzdys. Vektorių šeima $v, v, u_1, \ldots, u_s \in V$ – tiesiškai priklausoma, nes $1 \cdot v + (-1) \cdot v + 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_s = O_V$.

1.7.9 pavyzdys. Vektoriai (α_1, α_2), $(\beta_1, \beta_2) \in k^2$, k – kūnas, yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} := \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

1.7.10 pavyzdys. Panašiai kaip ir 1.7.9 pavyzdyje, vektoriai

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3),\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in k^3,$$

k – kūnas, tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} :=$$

$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \neq 0.$$

1.7.11 apibrėžimas. Sakoma, kad tiesinės erdvės (V,k) vektorius v yra *tiesiškai išreiškiamas* vektoriais $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_s \in V$, jei egzistuoja tokie α_1, $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s \in k$, kad $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s$.

1.7.12 teiginys. *Jei tiesinės erdvės (V,k) vektorius v yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_s \in V$, o kiekvienas v_j, $1 \leq j \leq s$, – tiesiškai išreiškiamas vektoriais $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_t \in V$, tai v yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_t$.*

Įrodymas. Kadangi vektorius $v \in V$ yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_s \in V$, tai egzistuoja tokie $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s \in k$, kad

$v = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i v_i$. Kadangi kiekvienas v_i, $1 \leq i \leq s$, – tiesiškai išreiškiamas vektoriais $w_1, w_2, \ldots, w_t$, tai kiekvienam i, $1 \leq i \leq s$, egzistuoja tokie $\beta_{ij} \in k$, $1 \leq j \leq t$, kad $v_i = \sum\limits_{j=1}^{t} \beta_{ij} w_j$. Vadinasi,

$$v = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \sum_{j=1}^{t} \beta_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{t} (\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \beta_{ij}) w_j = \sum_{j=1}^{t} \gamma_j w_j,$$

$\gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i \beta_{ij}$, $1 \leq j \leq t$. □

1.7.13 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimos $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ir $w_1, w_2, \ldots, w_t$ yra vadinamos *ekvivalenčiomis*, jei pirmosios vektorių šeimos kiekvienas vektorius v_i, $1 \leq i \leq s$, yra tiesiškai išreiškiamas antrosios vektorių šeimos vektoriais w_j, $1 \leq j \leq t$, ir atvirkščiai: antrosios vektorių šeimos kiekvienas vektorius w_j, $1 \leq j \leq t$, yra tiesiškai išreiškiamas pirmosios vektorių šeimos vektoriais v_i, $1 \leq i \leq s$. Jei tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ekvivalenti vektorių šeimai $w_1, w_2, \ldots, w_t$, tai rašysime

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}.$$

1.7.14. Tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimų klasėje sąryšis $\sim$ yra refleksyvus, simetrinis, tranzityvus:

1. Kiekvienai tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimai $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$,
$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \sim \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}.$$
2. Jei $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$, tai $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\} \sim \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$.
3. Jei $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ ir $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\} \sim \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$, tai $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \sim \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$.

Įrodysime lemą, turinčią fundamentalią reikšmę pagrindžiant tiesinės erdvės dimensijos sąvoką.

1.7.15 lema (Lema apie pakeitimą)**.** *Tarkime, tiesinės erdvės (V, k) vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_s$ tiesiškai nepriklausomi ir kiekvienas šios šeimos vektorius v_i, $1 \leq i \leq s$, – tiesiškai išreiškiamas vektoriais $w_1, w_2, \ldots, w_t$. Tuomet $s \leq t$ ir egzistuoja toks vektorių šeimos $w_1, w_2, \ldots, w_t$ pošeimis $w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_s}$, kad jo vektorius pakeitę vektoriais $v_1, v_2, \ldots, v_s$, gauname vektorių šeimą, ekvivalenčią šeimai $w_1, w_2, \ldots, w_t$.*

Įrodymas. Lemą įrodysime matematinės indukcijos metodu pagal tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičių pirmojoje vektorių šeimoje.

Pirmas žingsnis. Jei $s = 1$, tai $v_1 \neq O_V$ ir egzistuoja tokie α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_t \in k$, kad

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_t w_t.$$

Paprastumo dėlei galime tarti, kad $\alpha_1 \neq 0$ (priešingu atveju galima pernumeruoti vektorių šeimos vektorius w_1, w_2, $\ldots$, w_t taip, kad koeficientas būtų nelygus 0 prie pirmojo vektoriaus). Tuomet

$$w_1 = \alpha_1^{-1} v_1 - \alpha_1^{-1} \alpha_2 w_2 - \cdots - \alpha_1^{-1} \alpha_t w_t.$$

Pakeitę vektorių w_1 vektoriumi v_1, gauname vektorių šeimą v_1, w_2, $\ldots$, w_t, ekvivalenčią šeimai w_1, w_2, $\ldots$, w_t.

Antrasis žingsnis (indukcinė prielaida). Tarkime, kad lemos teiginys teisingas tuo atveju, kai pirmoji vektorių šeima yra sudaryta ne daugiau kaip iš $s - 1$ tiesiškai nepriklausomų vektorių.

Trečiasis žingsnis. Tarkime, tiesinės erdvės (V, k) vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, v_s – tiesiškai nepriklausomi ir kiekvienas šios šeimos vektorius v_i, $1 \leq i \leq s$, yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais w_1, w_2, $\ldots$, w_t. Pastebėsime, kad vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, v_{s-1} yra tiesiškai nepriklausomi. Remdamiesi indukcine prielaida, galime tvirtinti, kad egzistuoja toks vektorių šeimos w_1, w_2, $\ldots$, w_t pošeimis w_{j_1}, w_{j_2}, $\ldots$, $w_{j_{s-1}}$, kad jo vektorius pakeitę vektoriais v_1, v_2, $\ldots$, v_{s-1}, gauname vektorių šeimą, ekvivalenčią šeimai w_1, w_2, $\ldots$, w_t. Paprastumo dėlei galime tarti, kad vektoriais v_1, v_2, $\ldots$, v_{s-1} pakeitėme pirmuosius $s - 1$ vektorius w_1, w_2, $\ldots$, w_{s-1}. Taigi

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, w_s, \ldots, w_t\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}.$$

Kadangi v_s yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais w_1, w_2, $\ldots$, w_t, tai jis yra tiesiškai išreiškiamas ir ekvivalenčios vektorių šeimos vektoriais v_1, v_2, $\ldots$, v_{s-1}, w_s, $\ldots$, w_t. Iš čia matome, kad $t \geq s$. Taipogi egzistuoja tokie $\alpha_i \in k$, $\beta_j \in k$, $1 \leq i \leq s - 1$, $s \leq j \leq t$, kad

$$v_s = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{s-1} v_{s-1} + \beta_s w_s + \cdots + \beta_t w_t.$$

Bent vienas iš koeficientų $\beta_j \in k$, $s \leq j \leq t$, nelygus nuliniam elementui 0, nes priešingu atveju vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, v_s būtų tiesiškai priklausomi. Paprastumo dėlei sakykime, kad $\beta_s \neq 0$. Tuomet

$$w_s = \beta_s^{-1} v_s - \beta_s^{-1} \alpha_1 v_1 - \cdots - \beta_s^{-1} \alpha_{s-1} v_{s-1} - \beta_s^{-1} \beta_{s+1} w_{s+1} - \cdots - \beta_s^{-1} \beta_t w_t.$$

Dabar akivaizdu, kad

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s, w_{s+1}, \ldots, w_t\} \sim \{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, w_s, \ldots, w_t\},$$

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, w_s, \ldots, w_t\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_t\}.$$

Taigi

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s, w_{s+1}, \ldots, w_t\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_t\}.$$

□

1.7.16 išvada. *Jei v_1, v_2, ..., v_s ir w_1, w_2, ..., w_t yra ekvivalenčios tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimos, tai $s = t$.*

Įrodymas. Remdamiesi lema apie pakeitimą, gauname $s \leq t$ ir $t \leq s$. Vadinasi, $s = t$. □

1.7.17 teiginys. *Jei tiesinės erdvės (V, k) vektoriai v_1, v_2, ..., v_s yra tiesiškai nepriklausomi, o v, v_1, v_2, ..., v_s – tiesiškai priklausomi, tai vektorius v vienareikšmiškai yra išreiškiamas vektoriais v_1, v_2, ..., v_s.*

Įrodymas. Kadangi v, v_1, v_2, ..., v_s yra tiesiškai priklausomi, tai egzistuoja tokie $\alpha \in k$, $\beta_j \in k$, $1 \leq j \leq s$, kurių bent vienas nelygus nuliniam elementui 0, kad

$$\alpha v + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = O_V.$$

Pastebėsime, kad $\alpha \neq 0$, nes priešingu atveju vektoriai v_1, v_2, ..., v_s būtų tiesiškai priklausomi. Taigi

$$v = -\alpha^{-1}\beta_1 v_1 - \cdots - \alpha^{-1}\beta_s v_s.$$

Kaip matome, vektorius v yra išreiškiamas vektoriais v_1, v_2, ..., v_s. Sakykime, kad

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s,\ v = \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \cdots + \alpha'_s v_s,$$

$\alpha_j, \alpha'_j \in k, 1 \leq j \leq s$. Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gauname:

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)v_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)v_2 + \cdots + (\alpha_s - \alpha'_s)v_s = O_V.$$

Kadangi vektoriai v_1, v_2, ..., v_s yra tiesiškai nepriklausomi, tai $\alpha_1 - \alpha'_1 = \alpha_2 - \alpha'_2 = \cdots = \alpha_s - \alpha'_s = 0$, t. y. $\alpha_1 = \alpha'_1$, $\alpha_2 = \alpha'_2$, ..., $\alpha_s = \alpha'_s$. □

1.7.18 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s pošeimis v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r} yra vadinamas *maksimaliu tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimiu*, jei

1. v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r} – tiesiškai nepriklausomi vektoriai;
2. Kiekvienam vektoriui v_i, $1 \leq i \leq s$, vektoriai v_i, v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r} – tiesiškai priklausomi.

1.7.19 išvada. *Jei v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r} yra tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimis, tai kiekvienas šeimos vektorius v_j, $1 \leq j \leq s$, yra vienareikšmiškai tiesiškai išreiškiamas pošeimio vektoriais v_{j_m}, $1 \leq m \leq r$.*

Įrodymas. Išvados teiginio įrodymas gaunamas remiantis maksimalaus tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimio apibrėžimo 2-ąja sąlyga ir 1.7.17 teiginiu. □

1.7.20 teorema. *Bet kurie tiesinės erdvės* (V, k) *baigtinės vektorių šeimos* v_1, v_2, ..., v_s *maksimalūs tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimiai turi vieną ir tą patį vektorių skaičių.*

Įrodymas. Sakykime, v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_r} ir v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_t} yra tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s maksimalūs tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimiai. Tuomet

$$\{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}\} \sim \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}\},$$

nes, remiantis 1.7.19 išvada, kiekvienas vektorius v_{j_m}, $1 \leq m \leq r$, tiesiškai yra išreiškiamas vektoriais v_{i_l}, $1 \leq l \leq t$ ir atvirkščiai. Remdamiesi 1.7.16 išvada, gauname, kad $r = t$. □

1.7.21 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) baigtinės vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s vektorių skaičius maksimaliame tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimyje yra vadinamas vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s *rangu*. Vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s, rangą žymėsime $\operatorname{rg}\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ arba $\operatorname{rg}\{v_j\}_{j=1}^{s}$.

Matricos $A \in M_{m \times n}(k)$ *rangu* vadinsime jos eilučių (tiesinės erdvės k^n vektorių) šeimos rangą ir žymėsime $\operatorname{rg} A$.

Taigi, jei tiesinės erdvės (V, k) baigtinės vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_s rangas lygus r, tai egzistuoja šios vektorių šeimos bent vienas maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimis, turintis r vektorių. Visi kiti maksimalūs tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimiai (jei jie tik egzistuoja) taip pat turi r vektorių.

1.7.22 teiginys. *Jei tiesinės erdvės* (V, k) *baigtinės vektorių šeimos*

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \ \ \textit{ir} \ \ \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$$

yra ekvivalenčios, tai

$$\operatorname{rg}\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} = \operatorname{rg}\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}.$$

Įrodymas. Šio svarbaus teiginio įrodymas paliekamas skaitytojui. □

1.7.23 pavyzdys. $\operatorname{rg}\{O_V\} = 0$ (O_V – tiesinės erdvės (V, k) nulinis vektorius).

1.7.24 pavyzdys. $\operatorname{rg}\{v, v\} = 1$, jei $v \neq O_V$ (v – tiesinės erdvės (V, k) vektorius).

1.7.25 pavyzdys. $\operatorname{rg}\{\underbrace{v, v, \ldots, v}_{n}\} = 1$, jei $v \neq O_V$ (v – tiesinės erdvės (V, k) vektorius).

1.7.26 pavyzdys. Sakykime, k – kūnas, δ_{ij} – Kronekerio simbolis, apibrėžiamas taip:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i = j, \\ 0, & \text{jei } i \neq j. \end{cases}$$

Tegu

$$e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn}) \in k^n,\ 1 \leq j \leq n.$$

Tuomet kiekvienam j, $1 \leq j \leq n$, $\operatorname{rg}\{e_1, e_2, \ldots, e_j\} = j$.

1.7.27 (Svarbi prielaida)**.** Dabar padarysime svarbią prielaidą apie tiesines erdves virš kūno k.

Tarkime, kad tiesinėje erdvėje (V, k) virš kūno k egzistuoja bent viena tokia baigtinė vektorių šeima v_1, v_2, $\ldots$, v_s, kad šių vektorių tiesinis apvalkalas $L(v_1, v_2, \ldots, v_s)$ virš kūno k sutampa su tiesine erdve (V, k). Tokia tiesinė erdvė (V, k) vadinama *baigtinės dimensijos* arba *baigtiniamate* tiesine erdve virš kūno k. Jei tiesinė erdvė netenkina minėtos sąlygos, tai ji vadinama *begaliniamate* tiesine erdve virš kūno k.

Sakykime, v_1, v_2, $\ldots$, v_s – tokia tiesinės erdvės (V, k) vektorių šeima, kad

$$V = L(v_1, v_2, \ldots, v_s).$$

Išrinkime vektorių šeimos v_1, v_2, $\ldots$, v_s maksimalų tiesiškai nepriklausomų vektorių pošeimį v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r}. Tuomet $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_s) = L(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r})$. Tiesinės erdvės (V, k) vektoriai v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r} turi savybes:

1. Vektoriai v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r} – tiesiškai nepriklausomi;

2. Kiekvienam tiesinės erdvės (V, k) vektoriui v, vektorių šeima v, v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r} – tiesiškai priklausoma.

Antrąją savybę galima suformuluoti ir taip:

2'. Kiekvienas tiesinės erdvės (V, k) vektorius v vienareikšmiškai yra išreiškiamas vektoriais v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r}.

Kitais žodžiais tariant, v_{j_1}, v_{j_2}, $\ldots$, v_{j_r} yra maksimali tiesiškai nepriklausomų vektorių šeima tiesinėje erdvėje (V, k).

1.7.28 teiginys. *Jei* $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *ir* $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ *yra maksimalios tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimos tiesinėje erdvėje* (V, k)*, tai jos yra ekvivalenčios ir* $r = t$*.*

Įrodymas. Kadangi kiekvienas pirmos šeimos vektorius tiesiškai yra išreiškiamas antros šeimos vektoriais ir atvirkščiai, tai teiginyje nurodytos vektorių šeimos yra ekvivalenčios. Kadangi kiekviena vektorių šeima yra sudaryta iš tiesiškai nepriklausomų vektorių, tai, remdamiesi 1.7.16 išvada, gauname, kad $r = t$. □

1.7.29 apibrėžimas. Bet kuri tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k maksimali tiesiškai nepriklausomų vektorių šeima v_1, v_2, …, v_n yra vadinama tiesinės erdvės (V, k) *baze.*

1.7.30 apibrėžimas. Tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k kurios nors bazės vektorių skaičius yra vadinamas tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k *dimensija.* Tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k dimensija žymima $\dim_k V$.

1.7.31 apibrėžimas. Sakykime, tiesinės erdvės (V, k) vektorius v yra užrašytas šios tiesinės erdvės bazės vektoriais v_1, v_2, …, v_n:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,\ \alpha_j \in k,\ 1 \le j \le n.$$

Kūno k elementai α_j, $1 \le j \le n$, yra vadinami vektoriaus $v \in V$ *koordinatėmis* tiesinės erdvės V bazėje v_1, v_2, …, v_n.

1.7.32 teorema. *n-matė tiesinė erdvė (V, k) virš kūno k yra izomorfinė tiesiniai erdvei k^n.*

Įrodymas. Išsirinkime n-matės tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k bazę v_1, v_2, …, v_n. Kiekvienas tiesinės erdvės (V, k) vektorius v vienareikšmiškai išreiškiamas bazės vektoriais, t. y.

$$(\forall v)(v \in V)(\exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k)(v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n).$$

Galime apibrėžti atvaizdį :

$$f : V \to k^n,\ V \ni v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n.$$

Įsitikinsime, kad šis atvaizdis yra tiesinė bijekcija.

Sakykime, $v, v' \in V$ ir

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ v' = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j v_j.$$

Tuomet bet kuriems $\lambda, \mu \in k$,

$$\begin{aligned} f(\lambda v + \mu v') = f(\lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j + \mu \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j v_j) = f(\sum_{j=1}^{n} (\lambda \alpha_j + \mu \alpha'_j) v_j) \\ = (\lambda \alpha_1 + \mu \alpha'_1, \lambda \alpha_2 + \mu \alpha'_2, \ldots, \lambda \alpha_n + \mu \alpha'_n) \\ = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \mu(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = \lambda f(v) + \mu f(v'). \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad f yra bijekcija. □

1.7.33 teiginys. *Sakykime, L – tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinis poerdvis. Tuomet*

1. $\dim_k L \leq \dim_k V$*;*

2. *Bet kurią tiesinio poerdvio L bazę galima papildyti vektoriais iki tiesinės erdvės V bazės.*

Įrodymas. 1. Sakykime, v_1, v_2, …, v_n yra tiesinės erdvės V bazė. Jei u_1, u_2, …, $u_r \in L$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai, remiantis lema apie pakeitimą (1.7.15 lema), $r \leq n$ (pastebėsime, kad kiekvienas vektorius u_j, $1 \leq j \leq r$, tiesiškai yra išreiškiamas tiesinės erdvės V bazės vektoriais v_1, v_2, …, v_n). Taigi tiesinio poerdvio L bazė negali turėti daugiau vektorių negu tiesinės erdvės V bazė, t. y. $\dim_k L \leq \dim_k V$.

2. Sakykime, u_1, u_2, …, $u_r \in L$ yra tiesinio poerdvio bazė, o v_1, v_2, …, v_n yra tiesinės erdvės V bazė. Tuomet remdamiesi lema apie pakeitimą (1.7.15 lema), gauname: egzistuoja toks bazės v_1, v_2, …, v_n pošeimis v_{j_1}, v_{j_2}, …, v_{j_r}, kurio vektorius pakeitę vektoriais u_1, u_2, …, u_r, gauname vektorių šeimą, ekvivalenčią bazei v_1, v_2, …, v_n, t. y. naują bazę, kuriai priklauso vektoriai u_1, u_2, …, u_r. □

1.7.34 pastaba. Jei L – tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinis poerdvis, u_1, u_2, …, $u_r \in L$ – tiesinio poerdvio L bazė, u_1, u_2, …, u_r, v_{r+1}, v_{r+2}, …, v_n – tiesinės erdvės V bazė. Tuomet $V = L \oplus L(v_{r+1}, v_2, \ldots, v_n)$.

Pavyzdžiai ir pratimai.

1. Sakykime, kad k – kūnas, k^n – tiesinė erdvė virš kūno k, δ_{ij} – Kronekerio simbolis. Vektoriai

$$e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn}) \in k^n,\ 1 \leq j \leq n.$$

yra tiesiškai nepriklausomi. Iš tikrųjų, jei $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = O$, t. y.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n}),$$

tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Tuo tarpu kiekvienam $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n$, vektoriai v, e_1, ..., e_n, – tiesiškai priklausomi. Iš tikrųjų, galime parašyti lygybę:

$$\begin{aligned} &1 \cdot v - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_n e_n \\ &= (\alpha_1 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_2, \ldots, \alpha_n - \alpha_n) = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n}), \end{aligned}$$

kurioje, kaip matome, ne visi koeficientai $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, yra lygūs kūno k nuliniam elementui 0.

Vadinasi, e_1, e_2, ..., e_n, yra tiesinės erdvės k^n bazė.

2. Sakykime, $v_1, v_2, \dots, v_s$ yra tiesinės erdvės (V, k) vektoriai, $L(v_1, v_2, \dots, v_s)$ – šių vektorių tiesinis apvalkalas (t. y. $L(v_1, v_2, \dots, v_s) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s \mid \alpha_1, \dots, \alpha_s \in k\}$). Įsitikinkite, kad
$$\dim_k L(v_1, v_2, \dots, v_s) = \operatorname{rg}\{v_1, v_2, \dots, v_s\}.$$
3. Tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k vektoriai v_1, v_2, ..., v_s yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai kiekvienam j, $1 \le j \le s$, $v_j \notin L(v_1, \dots, v_{j-1})$. Įrodykite.
4. Sakykime, k – baigtinis kūnas, turintis q elementų, k^n – tiesinė erdvė virš kūno k. Kiek tiesinėje erdvėje k^n yra skirtingų vektorių šeimų v_1, v_2, ..., v_r, sudarytų iš r tiesiškai nepriklausomų vektorių? a) Sutarkime, kad dvi vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r ir u_1, u_2, ..., u_s nėra skirtingos tada ir tik tada, kai $r = s$ ir $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, ..., $v_r = u_r$. b) Sutarkime, kad dvi vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r ir u_1, u_2, ..., u_r yra skirtingos tada ir tik tada, kai jos skiriasi bent vienu vektoriumi.

   Atsakymas: a) $(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{r-1})$, b) $\frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{r-1})}{r!}$.
5. Sakykime, k – baigtinis kūnas, turintis q elementų, k^n – tiesinė erdvė virš kūno k. Kiek yra skirtingų dimensijos r virš kūno k tiesinės erdvės k^n tiesinių poerdvių?

1.7.35 teorema. *Sakykime, L_1 ir L_2 – tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesiniai poerdviai. Tuomet*
$$\dim_k(L_1 + L_2) + \dim_k(L_1 \cap L_2) = \dim_k L_1 + \dim_k L_2.$$

Įrodymas. Tarkime, kad u_1, u_2, ..., u_t – tiesinio poerdvio $L_1 \cap L_2$ bazė, u_1, u_2, ..., u_t, v_1, v_2, ..., v_s – tiesinio poerdvio L_1 bazė, o u_1, u_2, ..., u_t, w_1, w_2, ..., w_r – tiesinio poerdvio L_2 bazė. Įsitikinsime, kad u_1, u_2, ..., u_t, v_1, v_2, ..., v_s, w_1, w_2, ..., w_r yra tiesinio poerdvio $L_1 + L_2$ bazė. Tuo tikslu įrodysime, kad šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi ir kiekvienas tiesinio poerdvio $L_1 + L_2$ vektorius tiesiškai yra išreiškiamas nurodytais vektoriais.

Sakykime, kad
$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r = O_V.$$
Tuomet
$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_r w_r \in L_1 \cap L_2.$$
Kadangi u_1, u_2, ..., u_t – tiesinio poerdvio $L_1 \cap L_2$ bazė, tai egzistuoja tokie $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t \in k$, jog
$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_r w_r = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_t u_t,$$

arba

$$\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_t u_t = O_V.$$

Iš čia gauname, jog $\gamma_1 = \ldots = \gamma_r = \delta_1 = \ldots = \delta_t = 0$, nes vektoriai u_1, u_2, $\ldots$, u_t, $w_1, \ldots, w_r$ yra tiesiškai nepriklausomi (poerdvio L_1 bazė). Vadinasi,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_t u_t + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = O_V,$$

todėl $\alpha_1 = \ldots = \alpha_t = \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$ (nes u_1, u_2, $\ldots$, u_t, v_1, v_2, $\ldots$, v_s, – tiesinio poerdvio L_1 bazė). Taigi vektoriai u_1, u_2, $\ldots$, u_t, v_1, v_2, $\ldots$, v_s, w_1, w_2, $\ldots$, w_r yra tiesiškai nepriklausomi.

Lieka įrodyti, kad kiekvienas tiesinio poerdvio $L_1 + L_2$ vektorius tiesiškai yra išreiškiamas vektoriais u_1, u_2, $\ldots$, u_t, v_1, v_2, $\ldots$, v_s, w_1, w_2, $\ldots$, w_r. Pastebėsime, kad tiesinio poerdvio $L_1 + L_2$ kiekvienas vektorius v yra užrašomas dviejų vektorių $l_1 \in L_1$ ir $l_2 \in L_2$ suma. Kiekvienas tiesinio poerdvio L_1 vektorius tiesiškai yra išreiškiamas šio poerdvio bazės vektoriais u_1, u_2, $\ldots$, u_t, v_1, v_2, $\ldots$, v_s, o kiekvienas tiesinio poerdvio L_2 vektorius tiesiškai yra išreiškiamas L_2 bazės vektoriais u_1, u_2, $\ldots$, u_t, w_1, w_2, $\ldots$, w_r. Taigi kiekvienas tiesinio poerdvio $L_1 + L_2$ vektorius tiesiškai išreiškiamas vektoriais u_1, u_2, $\ldots$, u_t, v_1, v_2, $\ldots$, v_s, w_1, w_2, $\ldots$, w_r. Dabar galime parašyti lygybes: $\dim_k L_1 \cap L_2 = t$, $\dim_k L_1 = t + s$, $\dim_k L_2 = t + r$, $\dim_k(L_1 + L_2) = t + s + r$. Vadinasi,

$$\dim_k(L_1 + L_2) + \dim_k(L_1 \cap L_2) = \dim_k L_1 + \dim_k L_2.$$

□

1.7.36 išvada. *Tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinių poerdvių L_1 ir L_2 suma $L_1 + L_2$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai* $\dim_k(L_1 + L_2) = \dim_k L_1 + \dim_k L_2$.

Pratimas. Įrodykite, kad tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinių poerdvių L_1, L_2, $\ldots$, L_r suma $L_1 + L_2 + \cdots + L_r$ yra tiesioginė tada ir tik tada, kai $\dim_k(L_1 + L_2 + \cdots + L_r) = \dim_k L_1 + \dim_k L_2 + \cdots + \dim_k L_r$.

1.7.37 teorema. *Sakykime, L – tiesinės erdvės (V, k) virš kūno k tiesinis poerdvis. Tuomet* $\dim_k L + \dim_k V/L = \dim_k V$.

Įrodymas. Išsirinkime tiesinio poerdvio L bazę u_1, u_2, $\ldots$, u_r. Papildykime šią tiesinio poerdvio bazę iki tiesinės erdvės V bazės u_1, u_2, $\ldots$, u_r, v_1, v_2, $\ldots$, v_s. Teigiame, kad $v_1 + L$, $v_2 + L$, $\ldots$, $v_s + L$ tiesinės erdvės V/L bazė.

Sakykime, kad

$$\alpha_1(v_1 + L) + \alpha_2(v_2 + L) + \cdots + \alpha_s(v_s + L) = L,$$

α_1, α_2, ..., $\alpha_s \in k$. Pertvarkę šią lygybę, gauname:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + L = L,$$

t. y. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s \in L$. Vadinasi, vektorius $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s$ yra išreiškiamas tiesinio poerdvio L bazės vektoriais: egzistuoja tokie β_1, β_2, ..., $\beta_r \in k$, kad

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r.$$

Kadangi vektoriai u_1, u_2, ..., u_r, v_1, v_2, ..., v_s, yra tiesinės erdvės V bazė, tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$. Taigi tiesinės erdvės V/L vektoriai $v_1 + L$, $v_2 + L$, ..., $v_s + L$ yra tiesiškai nepriklausomi.

Lieka įrodyti, kad kiekvienas tiesinės erdvės V/L vektorius $v + L$, $v \in V$, yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $v_1 + L$, $v_2 + L$, ..., $v_s + L$. Tuo tikslu tiesinės erdvės V vektorių v užrašykime šio erdvės bazės u_1, u_2, ..., u_r, v_1, v_2, ..., v_s vektoriais: egzistuoja tokie α_1, α_2, ..., $\alpha_s \in k$, β_1, β_2, ..., $\beta_r \in k$, kad

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r.$$

Vadinasi,

$$v + L = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r + L =$$

$$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + L = \alpha_1 (v_1 + L) + \alpha_2 (v_2 + L) + \cdots + \alpha_s (v_s + L).$$

$\square$

Dabar įrodysime bendresnę teoremą.

1.7.38 teorema. *Sakykime,* (V, k) *ir* (W, k) *– tiesinės erdvės,* $f : V \to W$ *– tiesinis atvaizdis. Tuomet* $\dim_k \ker f + \dim_k \mathrm{Im} f = \dim_k V$.

Įrodymas. Sakykime, w_1, w_2, ..., w_s – tiesinio poerdvio $\mathrm{Im}\, f \subset W$ bazė, o u_1, u_2, ..., u_r – tiesinio poerdvio $\ker f$ bazė. Egzistuoja tokie vektoriai v_1, v_2, ..., $v_s \in V$, kad $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, ..., $f(v_s) = w_s$. Teigiame, kad vektoriai u_1, u_2, ..., u_r, v_1, v_2, ..., $v_s \in V$ yra tiesinės erdvės V bazė. Pirmiausia įsitikinsime, kad šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi.

Sakykime, kad

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r = O_V.$$

Tuomet

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r) = f(O_V) = O_W,$$

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_s f(v_s) + \beta_1 f(u_1) + \beta_2 f(u_2) + \cdots + \beta_r f(u_r) =$$

$$= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_s w_s = O_W.$$

Kadangi vektoriai w_1, w_2, $\ldots$, w_s yra tiesinio poerdvio $\mathrm{Im} f \subset W$ bazė, tai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$. Vadinasi, $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r = O_V$. Kadangi vektoriai u_1, u_2, $\ldots$, u_r yra tiesinio poerdvio $\ker f$ bazė, tai ir $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$. Įrodėme, kad vektoriai u_1, u_2, $\ldots$, u_r, v_1, v_2, $\ldots$, $v_s \in V$ yra tiesiškai nepriklausomi.

Lieka įsitikinti, kad kiekvienas tiesinės erdvės V vektorius yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$. Sakykime, $v \in V$. Vektorius $f(v) \in Imf$ yra tiesiškai išreiškiamas vektoriais w_1, w_2, $\ldots$, w_s: egzistuoja tokie $\alpha_j \in k$, $1 \le j \le s$, kad

$$f(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_s w_s.$$

Šią lygybę galime perrašyti taip:

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_s f(v_s),$$

arba

$$f(v - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_s v_s) = O_W.$$

Kadangi vektorius $v - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_s v_s$ priklauso tiesinio atvaizdžio f branduoliui $\ker f$, tai šis vektorius yra išreiškiamas tiesinio poerdvio $\ker f$ vektoriais: egzistuoja tokie β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_r \in k$, kad

$$v - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_s v_s = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r.$$

Kaip matome,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_r u_r.$$

Kadangi $\dim_k \ker f = r$, $\dim_k \mathrm{Im} f = s$, $\dim_k V = r + s$, tai teoremos įrodymas baigtas. □

1.7.39 apibrėžimas. Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tiesinio atvaizdžio f vaizdo $\mathrm{Im} f$ dimensija virš kūno k $\dim_k \mathrm{Im} f$ vadinama tiesinio atvaizdžio f *rangu* ir žymima $\mathrm{rg}\, f$, o $\dim_k$ ker f yra vadinama tiesinio atvaizdžio f *defektu* ir žymima $\mathrm{df}\, f$.

1.7.40 teiginys. *Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis, v_1, v_2, $\ldots$, v_n – tiesinės erdvės bazė. Tuomet*

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}.$$

Įrodymas. Įrodymas išplaukia iš lygybės $\mathrm{Im}\, f = L(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$. □

1.8 Tiesinio atvaizdžio matrica

1.8.1. Tarkime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, v_1, v_2, …, v_n – tiesinės erdvės V bazė. Jei f, $g \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ tokie tiesiniai atvaizdžiai, kad $f(v_j) = g(v_j)$, $1 \leq j \leq n$, tai kiekvienam $v \in V$, $f(v) = g(v)$. Kitaip tariant, jei tiesinių atvaizdžių f ir g reikšmės yra lygios kokios nors bazės vektoriuose, tai tie tiesiniai atvaizdžiai yra lygūs. Iš tikrųjų, kadangi kiekvienas vektorius $v \in V$ vienareikšmiškai yra išreiškiamas bazės vektoriais v_1, v_2, …, v_n:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,\ \alpha_j \in k,\ 1 \leq j \leq n,$$

tai

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$$

$$= \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) + \cdots + \alpha_n g(v_n) = g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = g(v).$$

Vadinasi, norint nusakyti tiesinį atvaizdį $f : V \to W$, pakanka nurodyti tiesinės erdvės V kokios nors bazės vektorių v_1, v_2, …, v_n vaizdus $f(v_1)$, $f(v_2)$, …, $f(v_n) \in W$. Tuomet bet kurio vektoriaus $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \in V$ vaizdas apibrėžiamas vienareikšmiškai: $f(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f(v_j)$.

Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, $f : V \to W$, – tiesinis atvaizdis, v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_r – atitinkamai tiesinių erdvių V ir W bazės. Tiesinės erdvės V bazės vektorių v_1, v_2, …, v_n vaizdus $f(v_1)$, $f(v_2)$, …, (v_n) užrašę tiesinės erdvės W bazės vektoriais w_1, w_2, …, w_r, gauname:

$$\begin{cases} f(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \cdots + \alpha_{1r} w_r \\ f(v_2) = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \cdots + \alpha_{2r} w_r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(v_n) = \alpha_{n1} w_1 + \alpha_{n2} w_2 + \cdots + \alpha_{nr} w_r. \end{cases}$$

Taigi kiekvienam tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$, išrinkę tiesinių erdvių V ir W bazes v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_r, galime priskirti bazės vektorių v_j, $1 \leq j \leq n$, vaizdų $f(v_j)$, $1 \leq j \leq n$, koordinačių tiesinės erdvės W bazėje w_1, w_2, …, w_r, lentelę:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nr}, \end{pmatrix}$$

čia $\alpha_{ij} \in k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$. Tokia lentelė, kaip žinome, yra vadinama matrica ir dažniausiai žymima $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$ arba $||\alpha_{ij}||_{i,j=1}^{n,r}$.

Ir atvirkščiai, turėdami matricą $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, galime vienareikšmiškai apibrėžti tiesinį atvaizdį $f : V \to W$. Pirmiausia sudarome vektorius $u_j = \alpha_{j1}w_1 + \alpha_{j2}w_2 + \cdots + \alpha_{jr}w_r$, $1 \le j \le n$, o po to nurodome ieškomo tiesinio atvaizdžio f reikšmes tiesinės erdvės V bazės vektoriuose v_j, $1 \le j \le n$: $f(v_j) = \alpha_{j1}w_1 + \alpha_{j2}w_2 + \cdots + \alpha_{jr}w_r$, $1 \le j \le n$. Kaip žinome, tiesiniam atvaizdžiui $f : V \to W$ apibrėžti, pakanka nurodyti tiesinės erdvės V bazės vektorių vaizdus.

1.8.2. Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, v_1, v_2, ..., v_n ir w_1, w_2, ..., w_r – atitinkamai tiesinių erdvių V ir W bazės. Tuomet, kaip matome, egzistuoja abipus vienareikšmė atitinkamybė tarp tiesinių atvaizdžių $f : V \to W$ ir matricų $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$. Į tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matricą $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, ..., v_n ir w_1, w_2, ..., w_r, galima žiūrėti kaip į vektoriaus $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ koordinates (priminsime, kad $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ yra tiesinė erdvė virš kūno k). Pažymėkime $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ tiesinį atvaizdį, apibrėžtą taip:

$$f_{ij}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_i w_j,\ \alpha_i \in k,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r.$$

Įsitikinsime, kad vektoriai $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, sudaro tiesinės erdvės $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ bazę.

1.8.3 teiginys. *Vektoriai $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, yra tiesiškai nepriklausomi.*

Įrodymas. Sakykime, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_{ij} = O_{V,W}$ ($O_{V,W} : V \to W$ – nulinis tiesinis atvaizdis). Tuomet kiekvienam v_m, $1 \le m \le n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_{ij}(v_m) = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{mj} w_j = O_W$. Kadangi vektoriai w_j, $1 \le j \le r$, sudaro tiesinės erdvės W bazę, tai bet kuriems m, j, $1 \le m \le n$, $1 \le j \le r$, $\alpha_{mj} = 0$. □

1.8.4 teiginys. *Sakykime, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis, kurį atitinka matrica $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, ..., v_n ir w_1, w_2, ..., w_r. Tuomet $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_{ij}$.*

Įrodymas. Norint įsitikinti tiesinių atvaizdžių f ir $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{ij} f_{ij}$ lygybe, pakanka įsitikinti, kad tiesinės erdvės V bazės vektoriuose v_1, v_2, ..., v_n šių atvaizdžių reikšmės yra lygios.

Tiesinis atvaizdis f vektoriui v_m priskiria vektorių $f(v_m) = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{mj} w_j$, $1 \le m \le n$.

Tiesinis atvaizdis $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_{ij}f_{ij}$ vektoriui v_m priskiria vektorių

$$(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}f_{ij})(v_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}f_{ij}(v_m)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\delta_{im}w_j=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{mj}w_j,\ 1\le m\le n,$$

čia δ_{mj} – Kronekerio simbolis:

$$\delta_{mj}=\begin{cases}1, & \text{jei } m=j,\\ 0, & \text{jei } m\ne j.\end{cases}$$

Kaip matome, $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_{ij}f_{ij}$. □

1.8.5 išvada. $\dim_k \mathrm{Hom}_k(V,W)=\dim_k V\cdot\dim_k W$.

Įrodymas. Kadangi tiesiniai atvaizdžiai $f_{ij}\in\mathrm{Hom}_k(V,W)$, $1\le i\le n$, $1\le j\le r$, sudaro tiesinės erdvės $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ bazę, tai $\dim_k\mathrm{Hom}_k(V,W)=nr=\dim_k V\cdot\dim_k W$. □

1.9 Veiksmai su tiesiniais atvaizdžiais

1.9.1. Tarkime, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, $\dots$, v_n ir w_1, w_2, $\dots$, w_r, tiesinius atvaizdžius $f,g,f+g\in\mathrm{Hom}_k(V,W)$ atitinka matricos $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $(\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$ ir $(\gamma_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij}\in k$, $1\le i\le n$, $1\le j\le r$. Įsitikinsime, kad

$$(\gamma_{ij})_{i,j=1}^{n,r}=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r}.$$

Užrašykime lygybes:

$$f(v_i)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}w_j,\ 1\le i\le n,$$

$$g(v_i)=\sum_{j=1}^{r}\beta_{ij}w_j,\ 1\le i\le n,$$

$$(f+g)(v_i)=\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}w_j,\ 1\le i\le n.$$

Kadangi $(f+g)(v_i)=f(v_i)+g(v_i)$, $1\le i\le n$, tai $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le r$. Taip ir turėjo būti: bet kurioje tiesinės erdvės $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ bazėje vektorių f ir g sumos $f+g$ koordinatės yra lygios vektorių f ir g koordinačių sumai.

1.9.2 apibrėžimas. Matrica $(\alpha_{ij}+\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$ vadinama *matricų* $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$ ir $(\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, *suma* ir yra rašoma:

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r} + (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r} = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r},$$

(atkreipkite dėmesį, kad yra sudedami atitinkami matricų elementai).

1.9.3 apibrėžimas. Visų matricų $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, aibę pažymėkime $M_{nr}(k)$. Tuo atveju, kai $n = r$, vietoje $M_{nr}(k)$ rašysime $M_n(k)$.

Akivaizdu, kad $(M_{nr}(k), +)$ yra Abelio grupė. Galime apibrėžti atvaizdį:

$$k \times M_{nr}(k) \dot{\to} M_{nr}(k),\ \beta \cdot (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r} := (\beta \cdot \alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}.$$

Šis atvaizdis tenkina tiesinės erdvės apibrėžimo 1 – 4 sąlygas.

Taigi $(M_{nr}(k), +)$ – tiesinė erdvė virš kūno k.

Galima įsitikinti, kad jei tiesinio atvaizdžio $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ matrica yra

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r},$$

esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, $\ldots$, v_n ir w_1, w_2, $\ldots$, w_r, tai tiesinio atvaizdžio λf matrica yra $(\lambda\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$.

Taigi teisingas toks teiginys:

1.9.4 teiginys. *Tiesinės erdvės* $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ *ir* $(M_{nr}(k), +)$ *yra izomorfinės.*

1.9.5 pastaba. Tiesinės erdvės $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ ir $(M_{nr}(k), +)$ yra izomorfinės, bet nėra kanoniškai izomorfinės. Tiesinių erdvių $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ ir $(M_{nr}(k), +)$ izomorfizmas priklauso nuo tiesinių erdvių V ir W bazių parinkimo.

1.9.6. Sakykime, (V, k), (W, k), (U, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, v_1, v_2, $\ldots$, v_n – tiesinės erdvės V bazė, w_1, w_2, $\ldots$, w_r – tiesinės erdvės W bazė ir u_1, u_2, $\ldots$, u_t – tiesinės erdvės U bazė. Tarkime, tiesinių atvaizdžių $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}_k(W, U)$ ir $g \circ f \in \mathrm{Hom}_k(V, U)$ matricos, aukščiau nurodytose bazėse, yra $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $(\beta_{ij})_{i,j=1}^{r,t}$ ir $(\gamma_{ij})_{i,j=1}^{n,t}$, $\alpha_{ij}, \beta_{jl}, \gamma_{il} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, $1 \le l \le t$. Įrodysime, kad

$$\gamma_{il} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}\beta_{jl},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le l \le t.$$

Užrašykime lygybes:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} w_j,\ 1 \le i \le n,$$

$$g(w_j) = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl} u_l, \ 1 \leq j \leq r,$$

$$f(v_i) = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{ij} u_l, \ 1 \leq i \leq n.$$

Remdamiesi tiesinio atvaizdžio $g \circ f : V \to U$ apibrėžimu, galime parašyti:

$$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} w_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} g(w_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl} u_l = \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ij} \beta_{jl} u_l = \sum_{l=1}^{t} (\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \beta_{jl}) u_l.$$

Remdamiesi pastarąja lygybe, matome, kad

$$\gamma_{il} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \beta_{jl}, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq l \leq t.$$

1.9.7 apibrėžimas. Matrica $(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \beta_{jl})_{i,l=1}^{n,t}$ yra vadinama *matricų* $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$ ir $(\beta_{ij})_{i,j=1}^{r,t}$ *sandauga* ir rašoma:

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r} \cdot (\beta_{ij})_{i,j=1}^{r,t} = (\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \beta_{jl})_{i,l=1}^{n,t}.$$

1.9.8. Taigi apibrėžta matricų daugyba $\cdot$:

$$M_{n,r}(k) \times M_{r,t}(k) \xrightarrow{\cdot} M_{n,t}(k).$$

1.9.9 pastaba. Kaip paprastai daugybos ženklo $\cdot$ tarp dauginamųjų matricų nerašysime.

1.9.10 pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad dvi matricas $A \in M_{n,r}(k)$ ir $B \in M_{r,t}(k)$ galima sudauginti tada ir tik tada, kai pirmoji matrica A turi tiek stulpelių, kiek antroji matrica B turi eilučių. Matricų A ir B sandauga $AB \in M_{n,t}(k)$ turi tiek eilučių, kiek ir matrica A, o stulpelių – tiek, kiek ir matrica B. Matricų A ir B sandaugos AB ij-asis elementas yra gaunamas matricos A i-osios eilutės elementus paelemenčiui sudauginus su matricos B j-ojo stulpelio elementais ir gautus rezultatus sudėjus.

1.9.11 pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad bendruoju atveju matricų daugyba apibrėžta tarp skirtingų matricų aibių $M_{n,r}(k)$ ir $M_{r,t}(k)$ elementų, o šių aibių elementų sandauga priklauso trečiajai aibei $M_{n,t}(k)$, kuri nėra lygi pirmosioms aibėms. Tik atskiru atveju, kai $n = r = t$, galima sudauginti bet kuriuos matricų aibės $M_n(k)$ elementus, kurių sandaugos rezultatas taip pat priklauso tai pačiai matricų aibei $M_n(k)$.

1.9.12 (Matricų daugybos savybės)**.** 1. Matricų daugyba asociatyvi: bet kurioms matricoms $A \in M_{n,r}(k)$, $B \in M_{r,s}(k)$, $C \in M_{s,t}(k)$, teisinga lygybė $(AB)C = A(BC)$;

2. Matricų daugyba dvitiesinė: bet kurioms matricoms $A, B \in M_{n,r}(k)$, $C, D \in M_{r,s}(k)$, kiekvienam $\alpha \in k$, teisingos lygybės:

   i) $(A + B)C = AC + BC$,

   ii) $A(C + D) = AC + AD$;

   iii) $(\alpha A)C = \alpha(AC) = A(\alpha C)$.

3. Egzistuoja tokios matricos $\mathbf{1}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(k)$, $\mathbf{1}_r = (\delta_{ij})_{i,j=1}^r \in M_r(k)$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis, kad kiekvienai matricai $A \in M_{n,r}(k)$,

   i) $\mathbf{1}_n \cdot A = A$;

   ii) $A \cdot \mathbf{1}_r = A$.

1.9.13 išvada. *$(M_n(k), +, \cdot)$ yra asociatyvus žiedas su vienetu, kurio struktūra yra suderinta su tiesinės erdvės $M_n(k)$ virš kūno k struktūra. Taigi $(M_n(k), +, \cdot)$ yra algebra virš kūno k. ($(M_n(k), +, \cdot)$ yra vadinama n-tos eilės su koeficientais kūne k matricų algebra ir paprastai žymima $M_n(k)$.)*

1.9.14 apibrėžimas. Matrica $A \in M_n(k)$ yra vadinama *apgręžiama*, jei egzistuoja tokia matrica $B \in M_n(k)$, kad $AB = BA = \mathbf{1}_n$. Matrica B vadinama *atvirkštine matrica* matricai A ir yra žymima A^{-1}.

1.9.15 teiginys. *Matricų algebros $M_n(k)$ visų apgręžiamų matricų aibė $GL_n(k)$ matricų daugybos atžvilgiu sudaro grupę. ($GL_n(k)$ yra vadinama pilnąja tiesine n-tos eilės matricų su koeficientais kūne k grupe.)*

Įrodymas. Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui. □

1.9.16. Sakykime, (V, k) – tiesimė erdvė virš kūno k, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, – šios tiesinės erdvės bazė. Kaip žinome, kiekvienas tiesinės erdvės V vektorius u yra užrašomas bazės vektoriais:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,\ \alpha_j \in k,\ 1 \le j \le n.$$

Šią vektoriaus $u \in V$ išraišką galima užrašyti matricų sandauga:

$$u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\ \alpha_j \in k,\ 1 \le j \le n.$$

1.9.17 pastaba. Bendruoju atveju matricos eilutės elementų neskiriame kableliais, tuo tarpu pirmosios matricos - eilutės elementus atskyrėme kableliais. Tai padarėme todėl, kad tiesinės erdvės V vektoriaus koordinatės taip surašytos yra tiesinės erdvės k^n elementas. Gali atrodyti keistai ir antroji matrica - stulpelis, kurios elementai yra tiesinės erdvės V bazės vektoriai. Svarbu tai, kad tokių matricų daugyba apibrėžta: kūno k elementus galima sudauginti su tiesinės erdvės V elementais ir gautus tiesinės erdvės vektorius galima sudėti.

Trumpumo dėlei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ žymėsime ${}_1\underline{\alpha}_n$, o matricą

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

žymėsime $v \downarrow_n^1$. Tuomet vektoriaus $u \in V$ išraiška matricų sandauga atrodo taip:

$$u =_1 \underline{\alpha}_n \cdot v \downarrow_n^1 .$$

1.9.18. Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k, tiesinį atvaizdį $f : V \to W$ atitinka matrica $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, $\ldots$, v_n ir w_1, w_2, $\ldots$, w_r. Tuomet galime parašyti lygybes:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} w_j,\ 1 \le i \le n.$$

Šias lygybes taip pat galima užrašyti matricų sandauga:

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r. \end{pmatrix}$$

Trumpumo dėlei sutarę matricą

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}$$

žymėti $f(v \downarrow_n^1)$ arba $f(v) \downarrow_n^1$, pastarųjų lygybių užrašas matricų sandauga atrodo taip:

$$f(v \downarrow_n^1) = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r} \cdot w \downarrow_r^1 .$$

1.9.19. Sakykime, (V,k) ir (W,k) –tiesinės erdvės virš kūno k, tiesinį atvaizdį $f : V \to W$ atitinka matrica $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, …, v_n ir w_1, w_2, …, w_r. Kadangi tiesinių erdvių V ir W bazės yra nurodytos, tai V ir W galime sutapatinti su tiesinėmis erdvėmis k^n ir k^r:

$$V \xrightarrow{h} k^n,\ V \ni u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in k^n,$$

$$W \xrightarrow{g} k^r,\ W \ni w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_r w_r \mapsto (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in k^r.$$

Tiesinį atvaizdį $f : V \to W$, sutapatinus V ir W su k^n ir k^r nurodytu būdu, atitinka toks tiesinis atvaizdis $\widehat{f} : k^n \to k^r$, kad diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ k^n & \xrightarrow{\widehat{f}} & k^r \end{array}$$

yra komutatyvi, t. y. bet kuriam $v \in V$, $g(f(v)) = \widehat{f}(h(v))$. Įsitikinsime, kad tiesinis atvaizdis $\widehat{f} : k^n \to k^r$ yra apibrėžiamas taip:

$$\widehat{f}((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} =$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{jr}).$$

Tuo tikslu užrašykime

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ji} w_i) = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{ji}) w_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j1} w_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j2} w_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{jr} w_r.$$

Kaip matome, vektoriaus, kurio koordinatės tiesinės erdvės V bazėje v_1, v_2, …, v_n yra $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, vaizdo koordinatės tiesinės erdvės W bazėje w_1, w_2, …, w_r yra

$$(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_{jr} w_r).$$

1.9.20 teiginys. *Tegul V – tiesinė erdvė virš kūno k. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra tiesinė bijekcija tada ir tik tada, kai atvaizdžio f matricai kokioje nors erdvės V bazėje egzistuoja atvirkštinė matrica.*

Įrodymas. Tarkime, jog atvaizdis $f : V \to V$ yra tiesinė bijekcija. Tuomet $f^{-1} : V \to V$ – taip pat tiesinis atvaizdis. Tegul $v_1, v_2, \dots, v_n$ – tiesinės erdvės V bazė, o A ir B – atitinkamai tiesinių atvaizdžių f ir f^{-1} matricos šioje bazėje, t. y.

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f^{-1}(v_1) \\ f^{-1}(v_2) \\ \vdots \\ f^{-1}(v_n) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Tuomet

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(f^{-1}(v_1)) \\ f(f^{-1}(v_2)) \\ \vdots \\ f(f^{-1}(v_n)) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

t. y. $B \cdot A = \mathbf{1}_n$. Vadinasi, matrica B yra atvirkštinė matricai A.

Tarkime, jog tiesinio atvaizdžio f matricai A erdvės V bazėje $v_1, v_2, \dots, v_n$ egzistuoja atvirkštinė matrica A^{-1}. Tegul $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \ker f$. Tuomet

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot A = (0, 0, \dots, 0).$$

Šią lygybę padauginę iš dešinės iš matricos A^{-1}, gauname: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$, t. y. $\ker f = \{O_V\}$. Todėl iš 1.4.23 teiginio išplaukia, jog f – injektyvus atvaizdis. Kadangi $\dim_k \ker f = 0$, tai iš 1.7.38 teoremos išplaukia, jog $\dim_k \operatorname{Im} f = \dim_k V$, t. y. $\operatorname{Im} f = V$ ($\operatorname{Im} f \subset V$). Taigi f – tiesinė bijekcija. □

1.10 Perėjimo matrica iš vienos bazės į kitą

1.10.1. Sakykime, $v_1, v_2, \dots, v_n$ ir $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \dots, \widetilde{v}_n$ – tiesinės erdvės (V, k) dvi bazės. Kiekvienas antrosios bazės vektorius $\widetilde{v}_j$, $1 \le j \le n$, tiesiškai išreiškiamas pirmosios bazės vektoriais:

$$\widetilde{v}_j = t_{j1} v_1 + t_{j2} v_2 + \dots + t_{jn} v_n, \ 1 \le j \le n.$$

Šias lygybes galima užrašyti matricų sandauga:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_1 \\ \widetilde{v}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n, \end{pmatrix}, \ t_{ij} \in k, \ 1 \le i, j \le n.$$

1.10.2 apibrėžimas. $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ yra vadinama *perėjimo matrica* iš bazės $v_1, v_2, \ldots, v_n$ į bazę $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$.

Sakykime, $T' = (t'_{ij})_{i,j=1}^n$ yra perėjimo matrica iš bazės $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$ į bazę $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Tuomet galime parašyti lygybes:

$$\widetilde{v} \downarrow_1^n = Tv \downarrow_1^n, \ v \downarrow_1^n = T'\widetilde{v} \downarrow_1^n .$$

Remdamiesi šiomis lygybėmis, gauname:

$$\widetilde{v} \downarrow_1^n = Tv \downarrow_1^n = TT'\widetilde{v} \downarrow_1^n$$

ir

$$v \downarrow_1^n = T'\widetilde{v} \downarrow_1^n = T'Tv \downarrow_1^n .$$

Vadinasi, $TT' = T'T = \mathbf{1}_n$, t. y. $T' = T^{-1}$ arba $T = T'^{-1}$. Taigi perėjimo matrica iš vienos bazės į kitą yra apgręžiama.

1.10.3 pastaba. Perėjimo matrica $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ iš bazės $v_1, v_2, \ldots, v_n$ į bazę $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$ yra tiesinio atvaizdžio

$$V \to V, \ \ v_j \mapsto \widetilde{v}_j, \ \ 1 \le j \le n,$$

matrica bazėje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

1.10.4. Išnagrinėsime sąsają tarp tiesinės erdvės vektoriaus koordinačių skirtingose bazėse.

Sakykime, (V, k) – tiesinė erdvė virš kūno k, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ir $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \ldots, \widetilde{v}_n$ – tiesinės erdvės V bazės, T – perėjimo matrica iš pirmosios bazės į antrąją. Tarkime, kad vektoriaus $u \in V$ koordinatės šiose bazėse yra $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ir $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$. Tuomet

$$u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)v \downarrow_1^n = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)\widetilde{v} \downarrow_1^n .$$

Kadangi $\widetilde{v} \downarrow_1^n = Tv \downarrow_1^n$, tai

$$u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)v \downarrow_1^n = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)Tv \downarrow_1^n .$$

Taigi vektoriaus $u \in V$ koordinates tiesinės erdvės V pirmojoje ir antrojoje bazėse ir perėjimo matricą iš pirmosios bazės į antrąją sieja lygybė:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)T.$$

1.10.5. Išnagrinėsime, kaip keičiasi tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matrica, keičiant tiesinių erdvių V ir W bazes.

Tarkime, esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W bazėms v_1, v_2, $\dots$, v_n ir w_1, w_2, $\dots$, w_r, tiesinį atvaizdį $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ atitinka matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\alpha_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, o esant fiksuotoms šių tiesinių erdvių bazėms $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$, $\dots$, $\widetilde{v}_n$ ir $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$, $\dots$, $\widetilde{w}_r$ tiesinį atvaizdį f atitinka matrica $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r}$, $\beta_{ij} \in k$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$. Sakykime, kad perėjimo matrica iš tiesinės erdvės V pirmosios bazės į antrąją yra T, o perėjimo matrica iš tiesinės erdvės W pirmosios bazės į antrąją yra R. Tuomet remdamiesi tiesinio atvaizdžio matricos ir perėjimo matricos iš vienos bazės į kitą apibrėžimais, galime parašyti lygybes:

$$f(v\downarrow_n^1) = f(v)\downarrow_n^1 = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,r} w\downarrow_r^1 = Aw\downarrow_r^1, \tag{1.1}$$

$$f(\widetilde{v}\downarrow_n^1) = f(\widetilde{v})\downarrow_n^1 = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,r} \widetilde{w}\downarrow_r^1 = B\widetilde{w}\downarrow_r^1, \tag{1.2}$$

$$\widetilde{v}\downarrow_1^n = Tv\downarrow_1^n,\ \widetilde{w}\downarrow_1^r = Rw\downarrow_1^r. \tag{1.3}$$

(1.2) formulėje $\widetilde{v}\downarrow_n^1$ ir $\widetilde{w}\downarrow_1^r$ pakeitę (1.3) lygybių dešiniosiomis pusėmis, gauname:

$$f(Tv\downarrow_1^n) = BRw\downarrow_1^r.$$

Kadangi f – tiesinis atvaizdis, tai $f(Tv\downarrow_1^n) = Tf(v\downarrow_1^n)$. Į pastarąją lygybę vietoje $f(v\downarrow_1^n)$ įrašę (1.1) lygybės dešiniąją pusę, gauname:

$$TAw\downarrow_r^1 = BRw\downarrow_1^r.$$

Taigi matricas $A, B \in M_{nr}(k)$, $T \in M_n(k)$, $R \in M_r(k)$ sieja lygybė:

$$TA = BR.$$

1.10.6. Taigi tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matricas A ir B, gautas esant fiksuotoms tiesinių erdvių V ir W skirtingoms bazių poroms ir perėjimo matricas T ir R iš pirmųjų bazių į antrąsias, sieja lygybė: $TA = BR$.

1.10.7. Sakykime, $V = W$ – tiesinė erdvė virš kūno k, v_1, v_2, $\dots$, v_n ir $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$, $\dots$, $\widetilde{v}_n$ – skirtingos šios tiesinės erdvės bazės, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis. Tarkime, kad tiesinės erdvės V pirmojoje bazėje tiesiniam atvaizdžiui f priskiriama matrica A, antrojoje bazėje – matrica B, T – perėjimo matrica iš pirmosios bazės į antrąją. Tuomet matricas A, B ir T sieja lygybė:

$$TA = BT.$$

Pastarąją lygybę galime perrašyti taip: $B = TAT^{-1}$.

1.10.8 apibrėžimas. Matricos $A, B \in M_n(k)$, čia k – kūnas, yra vadinamos *panašiomis*, jei egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $T \in M_n(k)$ (t. y. $\det T \ne 0$), kad $B = TAT^{-1}$.

1.10.9 išvada. *Tiesinį atvaizdį $f : V \to V$ atitinkančios matricos skirtingose tiesinės erdvės V bazėse yra panašios.*

1.10.10 apibrėžimas. Kintamojo t polinomas $\varphi_A(t) := \det(A - t \cdot \mathbf{1}_n)$ yra vadinamas matricos A *charakteringuoju polinomu.*

1.10.11 teiginys. *Panašių matricų charakteringieji polinomai yra lygūs.*

Įrodymas. Sakykime, matricos A ir B yra panašios, t. y. egzistuoja tokia neišsigimusi matrica T, kad $B = TAT^{-1}$. Tuomet $\varphi_B(t) = \det(B - t\mathbf{1}_n) = \det(TAT^{-1} - t\mathbf{1}_n) = \det(T(A - t\mathbf{1}_n)T^{-1}) = \det T \cdot \det(A - t\mathbf{1}_n) \cdot \det T^{-1} = \det(A - t\mathbf{1}_n) = \varphi_A(t)$. □

1.10.12 apibrėžimas. Sakykime, V – tiesinė erdvė virš kūno k. Tiesinį atvaizdį $f : V \to V$ atitinkančios matricos A kurioje nors tiesinės erdvės V bazėje $v_1, v_2, \ldots, v_n$ charakteringasis polinomas $\varphi_A(t)$ yra vadinamas tiesinio atvaizdžio f *charakteringuoju polinomu* ir yra žymimas $\varphi_f(t)$.

1.10.13 pastaba. Tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ charakteringojo polinomo apibrėžimas korektiškas, kadangi tiesinį atvaizdį atitinkančios matricos skirtingose bazėse yra panašios, o panašių matricų charakteringieji polinomai yra lygūs.