1 FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

1.1 Funkcijos išvestinės sąvoka

Išvestinės sąvoka yra viena svarbiausių matematikos sąvokų.

Tegul funkcija $y = f(x)$ yra apibrėžta taško x_0 aplinkoje. Tarkime, kad x priklauso tai aplinkai.

1 apibrėžimas. *Dydis*

$$\Delta x := x - x_0$$

vadinamas funkcijos $y = f(x)$ **argumento pokyčiu** *arba* **prieaugliu**. *Kartais pabrėžiama, kad tas pokytis yra taške* x_0.

2 apibrėžimas. Funkcijos $y = f(x)$ **pokyčiu** *arba* **prieaugliu** *taške* x_0 *atitinkančiu argumento* x *pokytį* Δx *vadinsime skirtumą*

$$\Delta f(x_0) = \Delta f = \Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1 tvirtinimas. *Funkcija* $f(x)$ *yra tolydi taške* x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Įrodymas. Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, kai

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

arba

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

arba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

◀

Funkcijos ir jos argumento pokyčių santykis išreiškia funkcijos kitimo vidutinį greitį intervale $[x_0; x_0 + \Delta x]$:

$$v_{vid.} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Vidutinio greičio riba, kai nepriklausomo kintamojo pokytis artėja prie nulio,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

vadinama *funkcijos kitimo greičiu* taške x_0 arba *išvestine.*

3 apibrėžimas. *Jei $\exists$ baigtinė funkcijos ir jos argumento pokyčių santykio riba, kai Δx artėja prie nulio:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{3}$$

tai ji vadinama **funkcijos** $y = f(x)$ **išvestine** *taške* x_0.

Išvestinę žymime $f'(x_0)$ arba $y'|_{x=x_0}$, arba $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

Išvestinę galime apskaičiuoti įvairiuose funkcijos apibrėžimo aibės X taškuose, todėl išvestinė yra kintamojo x funkcija, žymima $f'(x)$, y', y'_x arba $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Funkcijos išvestinės radimą vadiname tos funkcijos diferencijavimu.

1 pavyzdys. *Raskime funkcijos lygios pastoviam dydžiui, t.y. $y = c$, išvestinę.*

Sprendimas. Kadangi

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0,$$

tai

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Todėl

$$c' = 0 \tag{4}$$

◀

2 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, išvestinę.*

Sprendimas. Kadangi

$$\begin{aligned} &\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= ((x+\Delta x)-x)((x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\dots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}), \end{aligned}$$

tai, pritaikę Niutono binomo formulę, gausime

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Perėję pastarojoje lygybėje prie ribos, kai Δx artėja prie nulio, (naudojamės išvestinės apibrėžimu, (3) formule) randame laipsninės funkcijos $y = x^n$ išvestinę:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

◀

3 pavyzdys. *Apskaičiuokime funkcijos $y = \sqrt[5]{x}$ išvestinę taške $x_0 = 0$.*

Sprendimas. Funkcijos pokytis

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[5]{\Delta x},$$

o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = +\infty.$$

Kadangi gautoji riba yra begalinė, tai funkcija $y = \sqrt[5]{x}$ taške $x_0 = 0$ išvestinės neturi. ◀

1.2 Išvestinės fizikinė prasmė

1. Jau apibrėžiant funkcijos išvestinę (1) ir (2) formulėse minėjome, kad išvestinė tai funkcijos kitimo greitis taške x. Čia ir glūdi išvestinės mechaninė prasmė. Jeigu $s(t)$ žymi kūno nueitą kelią priklausomai nuo laiko t, tai to kūno greitis yra kelio išvestinė:

$$v(t) = s'(t),$$

o kūno pagreitis yra greičio išvestinė arba kelio antroji išvestinė:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

2. Tegul $y = f(t)$ žymi elektros kiekį, pratekantį laidininko skerspjūviu per laiką t. Santykis $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ reikš vidutinį srovės stiprumą laiko intervale nuo t iki $t + \Delta t$. Taigi $f'(t)$ nusakys srovės, pratekančios laidininko skerspjūviu, stiprumą laiko momentu t.

1.3 Išvestinės geometrinė prasmė

1.4 Vienpusės išvestinės

Vienpusės išvestinės apibrėžiamos vienpusių ribų pagalba.

4 apibrėžimas. Išvestine iš dešinės *arba* **dešinine išvestine** *vadinama funkcijos ir argumento pokyčių santykio riba, kai argumento pokytis $\Delta x \to +0$, (ši riba turi egzistuoti ir būti baigtinė):*

$$f'(x_0 + 0) := \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Išvestine iš kairės *arba* **kairine išvestine** *vadinama funkcijos ir argumento pokyčių santykio riba, kai argumento pokytis* $\Delta x \to -0$, *(ši riba turi egzistuoti ir būti baigtinė):*

$$f'(x_0 - 0) := \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Iš ribų teorijos išplaukia, kad funkcijos išvestinės tam tikrame taške egzistavimas ekvivalentus jos vienpusių išvestinių tame taške lygybei.

4 pavyzdys. *Apskaičiuokime funkcijos* $y = |x|$ *dešininę ir kairinę išvestines taške* $x_0 = 0$.

Sprendimas. Pagal vienpusių išvestinių apibrėžimą

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Dešininė ir kairinė funkcijos $y = |x|$ išvestinės taške $x_0 = 0$ atitinkamai yra lygios 1 ir -1. (Taip pat galima daryti išvadą, kad ši funkcija taške $x_0 = 0$ išvestinės neturi, nes dešininė ir kairinė išvestinės nėra tarpusavyje lygios.)

◀

1.5 Funkcijos diferencialas

5 apibrėžimas. *Funkcija* $y = f(x)$ *yra vadinama* **diferencijuojama** *taške* x_0, *jei jos pokytį* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *galima išreikšti suma dviejų dėmenų, pirmasis iš kurių yra tiesinis* Δx *atžvilgiu, o antrasis yra aukštesnės eilės negu* Δx *nykstantis dydis, t.y.*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x); \tag{6}$$

čia A *yra pastovus dydis, konstanta.*

Dažnai yra patogu naudoti (6) formulės ekvivalenčią išraišką

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \Delta x; \tag{7}$$

čia $\alpha = \alpha(\Delta x)$ yra nykstantis dydis, $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Iš apibrėžimo matyti, kad $A\Delta x$, kai $A \neq 0$, yra pagrindinė pokyčio Δy dalis.

1 teorema. *Funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške $x_0 \iff$ taške x_0 $\exists$ išvestinė $f'(x_0) = A$.*

Įrodymas. Būtinumas ($\Longrightarrow$). Kai funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama, tai iš (6) lygybės turime, kad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Todėl $\exists$ riba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0).$$

Taigi taške x_0 $\exists$ išvestinė ir $f'(x_0) = A$.

Pakankamumas ($\Longleftarrow$). Tarkime, kad $\exists$ išvestinė taške x_0 ir $f'(x_0) = A$. Tuomet

$$f'(x_0) = A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Iš šios lygybės gauname, kad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - A \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

arba

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Taigi funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama taške x_0. ◀

Iš įrodytos teoremos išplaukia, kad teiginiai "funkcija turi išvestinę" ir "funkcija yra diferencijuojama" yra ekvivalentūs.

6 apibrėžimas. *Reiškinys $f'(x_0)\Delta x$ vadinamas* **funkcijos** $y = f(x)$ **diferencialu** *taške x_0 ir žymimas df arba $df(x_0)$, arba dy. Taigi diferencialas taške x:*

$$dy = df(x) := f'(x)\Delta x. \tag{8}$$

Panaudoję (8) formulę funkcijai $y = x$, gausime, kad

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x.$$

Todėl.

7 apibrėžimas. Nepriklausomo kintamojo x **diferencialu** *vadinsime jo pokytį:*

$$dx := \Delta x. \tag{9}$$

1.6 Diferencialo geometrinė prasmė

1.7 Funkcijos išvestinės ir jos tolydumo ryšys

2 teorema. *Jei funkcija $f(x)$ turi išvestinę taške x, tai ji šiame taške yra tolydi.*

Įrodymas. Kadangi funkcija turi išvestinę taške x, tai $\exists$ baigtinė riba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Todėl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

arba

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = o(1),$$

arba

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x)\Delta x + o(\Delta x)) = 0.$$

Dabar iš 1 tvirtinimo jau išplaukia funkcijos tolydumas taške x. ◀

Atvirkščias teiginys nėra teisingas: iš funkcijos tolydumo tam tikrame taške neišplaukia, kad tame taške funkcija turi išvestinę. Jį patvirtina anksčiau išnagrinėti 3 ir 4 pavyzdžiai: funkcijos $y = \sqrt[5]{x}$ ir $y = |x|$ yra tolydžios taške $x = 0$, tačiau jame išvestinės neturi.

Taigi funkcijos tolydumas taške yra tik būtina tos funkcijos išvestinės egzistavimo sąlyga. Trūkio taškuose funkcijos negali turėti išvestinės.

1.8 Išvestinių skaičiavimo taisyklės

3 teorema. *Jei funkcijos $u(x)$ ir $v(x)$ turi išvestines taške x, tai funkcijos $cu(x)$ (c – konstanta), $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$ ir $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (jei $v(x) \neq 0$) irgi turi išvestines šiame taške. Be to,*

$$(cu)' = cu', \tag{10}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{11}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{12}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{13}$$

Įrodymas.
1.

$$(cu(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x}$$
$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'(x).$$

2.

$$(u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u'(x) \pm v'(x).$$

3.

$$(u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \tag{14}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)) + (u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x) \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x) \right).$$

Funkcija $v(x)$ turi išvestinę taške x, tai iš 2 teoremos išplaukia, kad funkcija $v(x)$ yra ir tolydi taške x. Vadinasi

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x).$$

Pasinaudoję šia riba, tęsdami (14) lygybes, turėsime

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

4. Kadangi $v(x) \neq 0$ ir yra tolydi taške x, tai iš tolydžiųjų funkcijų savybių išplaukia, kad $\exists$ taško x aplinka, kurioje funkcija $v(x) \neq 0$. Imkime Δx tokį mažą, kad ir taškas $x + \Delta x$ priklausytų tai aplinkai. Tada ir $v(x + \Delta x) \neq 0$, ir mes galėsime dalyti ne tik iš $v(x)$, bet ir iš $v(x + \Delta x)$.

Taigi

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x+\Delta x)}\right)+\left(\dfrac{u(x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\,\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\,\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).
\end{aligned}
$$

Dabar kaip ir ankstesnėje dalyje, pasinaudoję funkcijos $v(x)$ tolydumu, tęsdami (15) lygybes, turėsime

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)}-\frac{u(x)}{v^2(x)}v'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

◀

Suformuluosime diferencialo savybes, tiesiogiai išplaukiančias iš išvestinių skaičiavimo taisyklių bei diferencialo apibrėžimo.

Išvada.

$$
\begin{aligned}
&(16)\quad & d(cu) &= c\,du,\ \ c - const,\\
&(17)\quad & d(u\pm v) &= du \pm dv,\\
&(18)\quad & d(uv) &= u\,dv + v\,du,\\
&(19)\quad & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},\ v\neq 0.
\end{aligned}
$$

4 teorema. (Sudėtinės funkcijos diferencijavimas.) *Tarkime, kad funkcija $u = u(x)$ taške x_0 turi išvestinę $u'_x = u'(x_0)$, o funkcija $y = f(u)$ taške $u_0 = u(x_0)$ – išvestinę $y'_u = f'(u_0)$. Tarkime taip pat, kad taško x_0 aplinkoje apibrėžta sudėtinė funkcija $y = f(u(x))$. Tada ta sudėtinė funkcija taške x_0 turi išvestinę y'_x, lygią išvestinių y'_u ir u'_x sandaugai:*

$$y'_x = y'_u\,u'_x.$$

Įrodymas. Funkcija $y = f(u)$ turi išvestinę taške u_0, taigi ji yra ir diferencijuojama šiame taške (žr. 1 teoremą). Iš diferencijuojamumo ((7) formulė) išplaukia, kad

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u, \quad \alpha \overset{\Delta u\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Padaliję abi šios lygybės puses iš pokyčio $\Delta x \neq 0$, apskaičiuosime abiejų pusių ribas, kai $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\,. \tag{20}$$

Funkcija $u(x)$ yra diferencijuojama taške x_0, tai ji yra tame taške ir tolydi (žr. 2 teoremą). Toliau iš $u(x)$ tolydumo turėsime (1 tvirtinimas), kad $\Delta u \to 0$, kai $\Delta x \to 0$. Taigi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0.$$

Tęsdami (20) formulę gauname

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\, u'(x_0) + 0\, u'(x_0)$$

arba

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

◀

5 teorema. (Atvirkštinės funkcijos išvestinė.) *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $x = g(y)$. Jeigu funkcija $y = f(x)$ taške $x = x_0$ turi nelygią nuliui išvestinę $f'(x_0)$, tai taške $y_0 = f(x_0)$ egzistuoja atvirkštinės funkcijos $x = g(y)$ išvestinė, lygi $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Taigi*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}\,. \tag{21}$$

Įrodymas. Suteikime argumentui y pokytį $\Delta y \neq 0$. Tuomet funkcijos $x = g(y)$ pokytis

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0). \tag{22}$$

Įsitikinsime, kad $\Delta x \neq 0$. Tarkime, priešingai, $\Delta x = 0$. Tada iš (22) formulės išplaukia, kad

$$g(y_0 + \Delta y) = g(y_0) = x_0.$$

Iš pastarųjų lygybių ir atvirkštinės funkcijos apibrėžimo gauname, kad

$$y_0 + \Delta y = y_0 = f(x_0)$$

arba

$$\Delta y = 0.$$

Tai prieštarauja mūsų prielaidai, kad $\Delta y \neq 0$. Taigi $\Delta x \neq 0$.

Todėl

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{23}$$

Įsitikinsime, kad $\Delta x \to 0$, kai $\Delta y \to 0$. Kadangi $\exists$ išvestinė $f'(x_0)$, tai funkcija y diferencijuojama (žr. 1 teoremą). Taigi

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\,\Delta x, \quad \alpha \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{24}$$

Kadangi $f'(x_0) \neq 0$, tai galima paimti tokį mažą Δx, kad $f'(x_0) + \alpha \neq 0$. Tada iš (24) išplaukia, kad

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{f'(x_0) + \alpha}.$$

Iš pastarosios lygybės jau turėsime, kad $\Delta x \to 0$, kai $\Delta y \to 0$.

Pereikime prie ribos (23) lygybėje:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Gavome formulę

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

◀

(21) formulės geometrinė prasmė ....

1.9 Pagrindinių elementariųjų funkcijų išvestinės

1. Pastovaus dydžio išvestinė. Jau 1 pavyzdyje paskaičiavome, kad pastovaus dydžio išvestinė yra lygi nuliui.

$$\boxed{c' = 0}$$

2. Trigonometrinių funkcijų išvestinės.

a) Funkcijos $y = \sin x$ pokytis

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Todėl

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

b) Funkcijos $y = \cos x$ išvestinei surasti naudosime sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo formulę:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

c)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

d)

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x}(-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

3. Logaritminės funkcijos išvestinė.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x}\ln \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a}.$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

4. Rodiklinės funkcijos išvestinė. Rodiklinės funkcijos $y = a^x$ išvestinei rasti naudosime atvirkštinės funkcijos (šiuo atveju funkcijos $x = \log_a x$) išvestinės skaičiavimo taisyklę:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$$

5. Laipsninės funkcijos išvestinė.

$$(x^\alpha)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha (\ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

6. Atvirkštinių trigonometrinių funkcijų išvestinės.

a) Funkcija $y = \arcsin x$ apibrėžta, kai $x \in [-1, 1]$,

ir turi atvirkštinę funkciją $x = \sin y$. Atvirkštinė funkcija apibrėžta intervale $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Bet ši atvirkštinė funkcija turi teigiamą išvestinę, kai $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kadangi išvestinės skaičiavimui naudosime atvirkštinės funkcijos skaičiavimo taisyklę, o toje taisyklėje reikalaujama, kad atvirkštinės funkcijos išvestinė nebūtų lygi nuliui, tai $\arcsin x$ išvestinę paskaičiuosime tik atvirame intervale, $x \in (-1, 1)$.

Galima būtų kalbėti ir apie išvestines intervalo galuose, t.y. taškuose ± 1, bet tik apie vienpuses išvestines. Naudodami išvestinės apibrėžimą galėtume įsitikinti, kad funkcijos pokyčio ir argumento pokyčio santykio vienpusės ribos šiuose galiniuose intervalo taškuose yra begalinės. Taigi išvestinė juose neegzistuoja. Tai galima matyti ir iš arksinuso grafiko. Jo liestinės taškuose ± 1 yra lygiagrečios y ašiai.

Taigi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Kadangi $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tai $\cos y > 0$ ir $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$. Todėl

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b) Funkcija $y = \arccos x$ turi atvirkštinę funkciją $x = \cos y$, kurios išvestinė nelygi nuliui, kai $y \in (0, \pi)$, o $x \in (-1, 1)$. Todėl

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) Funkcija $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi/2, \pi/2)$, yra atvirkštinė funkcijai $x = \operatorname{tg} y$. Todėl

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

d) Analogiškai apskaičiuojama funkcijos $y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi)$, išvestinė:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

1.10 Logaritminė išvestinė

Skaičiuojant funkcijų išvestines, kartais yra patogu ieškoti funkcijos logaritmo išvestinės. Išvestinės skaičiavimas ypač palengvėja, kai funkcija yra išreikšta kelių dauginamųjų sandauga. Funkcijos logaritmo išvestinė vadinama logaritmine išvestine. Funkcijos išvestinė ir logaritminė išvestinė taškuose, kuriuose $y \neq 0$, susietos sąryšiu:

$$(\ln|y|)' = \frac{|y|'}{|y|} = \begin{cases} \dfrac{y'}{y}, & \text{kai } y > 0, \\ \dfrac{(-y)'}{-y} = \dfrac{y'}{y}, & \text{kai } y < 0. \end{cases}$$

Taigi bet kokiu atveju, jei tik $y \neq 0$,

$$y' = y(\ln|y|)'. \tag{25}$$

5 pavyzdys. *Raskime funkcijos*

$$y = \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}$$

išvestinę.

Sprendimas. Naudodami (25) formulę, turėsime

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\right)' &= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\left(\ln\frac{(x+1)^2|x-1|}{(2x^2+3)^3}\right)' \\
&= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\big(2\ln|x+1| + \ln|x-1| - 3\ln(2x^2+3)\big)' \\
&= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{12x}{2x^2+3}\right) \\
&= \frac{(x+1)(-6x^3-2x^2+21x-3)}{2x^2+3)^4}.
\end{aligned}$$

◀

6 pavyzdys. *Raskime funkcijos*

$$y = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}$$

išvestinę, kai $x > -1/2$ *(tada* $\operatorname{arctg}(2x+1) > 0$*).*

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
&\left((\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\right)' = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\left(\ln(\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\right)' \\
&= (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\left((x^2+1)\ln\operatorname{arctg}(2x+1)\right)' = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1} \\
&\quad\times\left(2x\ln\operatorname{arctg}(2x+1) + (x^2+1)\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x+1)}\,\frac{2}{1+(2x+1)^2}\right) \\
&= (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\left(2x\ln\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{x^2+1}{(2x^2+2x+1)\operatorname{arctg}(2x+1)}\right).
\end{aligned}$$

◀

1.11 Diferencialo formos invariantiškumas

Jeigu funkcija $y = f(x)$ diferencijuojama, tai jos diferencialas

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x. \tag{26}$$

Jeigu x yra nepriklausomas kintamasis, tai

$$\Delta x = \mathrm{d}x$$

ir (26) formulę galima užrašyti taip:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{27}$$

Tarkime, kad x yra priklausomas kintamasis, t.y. $x = g(t)$, o t nepriklausomas kintamasis. Tuomet y yra sudėtinė kintamojo t funkcija

$$y = f(g(t)).$$

Pagal sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklę funkcijos y diferencialą galime užrašyti taip:

$$\mathrm{d}y = (f(g(t)))'\mathrm{d}t = f'(x)g'(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Matome, kad ir priklausomo kintamojo x atveju (27) yra teisinga. Ši savybė vadinama **diferencialo formos invariantiškumu**.

7 pavyzdys. *Suskaičiuokime funkcijos $y = \mathrm{e}^{\cos x}$ diferencialą.*

Sprendimas. 1 būdas. Funkcija $y = \mathrm{e}^{\cos x}$ yra nepriklausomo kintamojo x funkcija. Todėl

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

2 būdas. Pasinaudodami funkcijos diferencialo formos invariantiškumu galime jos diferencialą suskaičiuoti ir taip:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = -\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

◀

1.12 Diferencialas ir apytikslis skaičiavimas

Jei funkcija $y = f(x)$ diferencijuojama, tai jos prieauglis

$$\Delta y = f'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha\,\Delta x, \quad \alpha \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0. \tag{28}$$

Jei $f'(x) \neq 0$, tai pirmas (28) formulės dėmuo $f'(x)\,\mathrm{d}x$ yra pagrindinis, kai Δx yra mažas. Taigi, kai Δx maži, turime apytikslę formulę

$$\Delta y \approx f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Jos absoliutinė paklaida yra lygi $\alpha\,\Delta x$, o santykinė paklaida

$$\frac{\Delta y - f'(x)\,\mathrm{d}x}{\Delta x} = \alpha \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Taigi santykinė paklaida yra kiek norima maža, kai Δx pakankamai mažas. Kadangi $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, tai (29) formulė gali būti užrašyta ir taip:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{30}$$

Kaip tik ši forma ir naudojama apytiksliame skaičiavime.

Užrašykime keletą apytikslio skaičiavimo formulių konkrečioms funkcijoms.

8 pavyzdys. *Užrašykime apytikslio skaičiavimo formulę reiškinio $\sqrt[n]{1+\Delta x}$ reikšmėms paskaičiuoti, kai Δx maži.*

Sprendimas. Naudokime (30) formulę. Šiuo atveju

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x}, \quad x = 0, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}, \quad f'(0) = \frac{1}{n}\,.$$

Taigi

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n}\,\Delta x.$$

◀

Funkcijoms $\sin x$, e^x, $\ln(1+x)$, kai Δx yra maži, analogiškai gautume, kad

$$\sin\Delta x \approx \Delta x,$$

$$\mathrm{e}^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x,$$

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x.$$

2 Aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai

2.1 Aukštesniųjų eilių išvestinės

Sakykime, kad funkcija $y = f(x)$ turi išvestinę kiekviename aibės X taške. Tuomet $f'(x)$ yra nauja kintamojo x funkcija $g(x)$. Jei funkcija $g(x)$ diferencijuojama, tai galime kalbėti apie jos išvestinę $g'(x) = (f'(x))'$, kuri vadinama funkcijos $f(x)$ antrąja išvestine ir žymima $f''(x)$, y'', y''_{xx}, y''_{x^2} arba $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. Analogiškai, kai $f''(x)$ irgi yra diferencijuojama funkcija, apibrėžiame trečiosios eilės išvestinę $f'''(x) := (f''(x))'$, kuri žymima ir $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$. Ir taip toliau, jei taško x aplinkoje egzistuoja $(n-1)$-osios eilės išvestinė, tai n-tosios eilės išvestinė apibrėžiama kaip šios $(n-1)$-osios išvestinės išvestinė:

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)';$$

dar rašoma:

$$y^{(n)} := \left(y^{(n-1)}\right)', \quad \text{arba} \quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Funkcija vadinama n kartų diferencijuojama taške $x \in X$, jei šiame taške egzistuoja visų eilių tos funkcijos išvestinės imtinai iki n-tosios eilės.

9 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = \ln x$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
y' &= (\ln x)' = \frac{1}{x}\,,\\
y'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,,\\
y''' &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1\cdot 2}{x^3}\,,\\
y^{IV} &= \left(\frac{2!}{x^3}\right)' = -\frac{3!}{x^4}\,,\\
&-----------\\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\,.
\end{aligned}$$

◀

10 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = \cos x$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas.

$$
\begin{aligned}
y' &= (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \\
y'' &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + x), \\
y''' &= (\cos(\pi + x))' = -\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right), \\
&-- - - - - - - - - - \\
y^{(n)} &= \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).
\end{aligned}
$$

◀

6 teorema. (Leibnico formulė.) *Jei funkcijos $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ turi išvestines iki n-tosios eilės, tai*

$$
(uv)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k.
$$

Čia C_n^k – binominiai koeficientai,

$$
C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{kai } k = 1, 2, \dots, n,
$$

ir $C_n^0 = 1$.

11 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = x^4 \mathrm{e}^{-x}$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas. Pasinaudoję Leibnico formule ir žinodami, kad $(x^4)^{(k)} = 0$, kai $k > 4$, gausime

$$
\begin{aligned}
\left(x^4 \mathrm{e}^{-x}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\mathrm{e}^{-x})^{(n-k)} (x^4)^{(k)} \\
&= C_n^0 (\mathrm{e}^{-x})^{(n)} (x^4)^{(0)} + C_n^1 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-1)} (x^4)^{(1)} + C_n^2 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-2)} (x^4)^{(2)} \\
&\quad + C_n^3 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-3)} (x^4)^{(3)} + C_n^4 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-4)} (x^4)^{(4)} \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} x^4 + n(-1)^{n-1} \mathrm{e}^{-x} 4x^3 + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} \mathrm{e}^{-x} 12x^2 \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (-1)^{n-3} \mathrm{e}^{-x} 24x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} (-1)^{n-4} \mathrm{e}^{-x} 24 \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} \left(x^4 - 4nx^3 + 6n(n-1)x^2 - 4n(n-1)(n-2)x\right. \\
&\qquad \left. + n(n-1)(n-2)(n-3)\right).
\end{aligned}
$$

◀

2.2 Akštesniųjų eilių diferencialai

Tarkime, $y = f(x)$ yra diferencijuojama funkcija. Tuomet

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

yra jos diferencialas. Diferencialas taip pat yra kintamojo x funkcija, t.y. $\mathrm{d}y = g(x)$. Šios funkcijos (funkcijos $g(x)$) diferencialas vadinamas **antruoju** funkcijos $y = f(x)$ **diferencialu** ir žymimas

$$\mathrm{d}^2 y := \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Apskritai, ***n*-asis** funkcijos $y = f(x)$ **diferencialas** yra $n-1$-ojo diferencialo diferencialas:

$$\mathrm{d}^n y := \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} y).$$

Kai x yra nepriklausomas kintamasis, tai $\mathrm{d}x = \Delta x$ yra pastovus dydis (konstanta). Todėl

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\mathrm{d}x = f''(x)(\mathrm{d}x)^2 = f''(x)\,\mathrm{d}x^2,$$

nes nepriklausomojo kintamojo diferencialo kvadrate $(\mathrm{d}x)^2$ skliaustai paprastai praleidžiami, t.y. rašoma

$$(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x^2.$$

Analogiškai gautume, kad

$$\mathrm{d}^3 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 y) = f'''(x)(\mathrm{d}x)^3 = f'''(x)\,\mathrm{d}x^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)(\mathrm{d}x)^n = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n.$$

Kai x yra priklausomas kintamasis, t.y. $x = g(t)$, aukštesnių eilių diferencialų formulės yra sudėtingesnės.

Raskime funkcijos $y = f(x)$ antros eilės diferencialą, kai x priklausomas kintamasis:

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x). \tag{31}$$

Čia, pasinaudoję funkcijų sandaugos diferencialo skaičiavimo (18) taisykle, tęsdami (31), turėsime

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 y &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}f'(x) + f'(x)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x)\\ &= f''(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + f'(x)\,\mathrm{d}^2 x = f''(x)(\mathrm{d})^2 + f'(x)\,\mathrm{d}^2 x.\end{aligned}$$

Dar aukštesnių eilių diferencialų formulės yra dar sudėtingesnės.

12 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = x^5$ ketvirtąjį diferencialą.*

Sprendimas.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= 5x^4\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}^2y &= 20x^3\,\mathrm{d}x^2, \\ \mathrm{d}^3y &= 60x^2\,\mathrm{d}x^3, \\ \mathrm{d}^4y &= 120x\,\mathrm{d}x^4. \end{aligned}$$

◀

13 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = u^5$ trečiąjį diferencialą, kai kintamasis $u = u(x)$ yra kito kintamojo x funkcija.*

Sprendimas.

$$\mathrm{d}y = 5u^4\,\mathrm{d}u,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2y = 5\left(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}(u^4) + u^4\,\mathrm{d}(\mathrm{d}u)\right) = 5\left(\mathrm{d}u\,4u^3\,\mathrm{d}u + u^4\,\mathrm{d}^2u\right) \\ = 20u^3(\mathrm{d}u)^2 + 5u^4\,\mathrm{d}^2u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3y &= 20\left((\mathrm{d}u)^2\,\mathrm{d}(u^3) + u^3\,\mathrm{d}\left((\mathrm{d}u)^2\right)\right) + 5\left(\mathrm{d}^2u\,\mathrm{d}(u^4) + u^4\,\mathrm{d}(\mathrm{d}^2u)\right) \\ &= 20\left((\mathrm{d}u)^2 3u^2\,\mathrm{d}u + u^3 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}(\mathrm{d}u)\right) + 5\left(\mathrm{d}^2u\,4u^3\,\mathrm{d}u + u^4\,\mathrm{d}^3u\right) \\ &= 60u^2(\mathrm{d}u)^3 + 60u^3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}^2u + 5u^4\,\mathrm{d}^3u. \end{aligned}$$

◀

3 Neišreikštinių funkcijų diferencijavimas

Jei funkcija duota lygtimi

$$y = f(x),$$

tai ji vadinama išreikštine, nes kintamasis y yra išreikštas kintamuoju x.

Tarkime, x ir y yra susieti lygtimi

$$F(x, y) = 0. \tag{32}$$

(32) lygtyje, pasirinkus x reikšmę iš kintamojo x apibrėžimo srities, kintamasis y yra surandamas išsprendus šią lygtį. Taigi pagal funkcijos apibrėžimą, y galime laikyti x funkcija (turime taisyklę, pagal kurią pasirinktam x surandame y). Todėl sakome, kad (32) apibrėžia neišreikštinę funkciją.

Kartais iš neišreikštinės lygties galima surasti y ir užrašyti išreikštinę funkciją. Pavyzdžiui, iš lygties

$$x^2 + 2x + y - 7 = 0$$

galime užrašyti, kad

$$y = 7 - x^2 - 2x.$$

Tačiau ne kiekvieną neišreikštinę funkciją galime pakeisti išreikštine. Pavyzdžiui, iš lygties

$$y^3 + \mathrm{e}^{xy} + \sin x + \cos y = 0$$

y vargu ar surasime.

Ir vis tik kaip reikėtų ieškoti funkcijos $y = y(x)$ išvestinės (kai pati funkcija duota neišreikštai) neieškant išreikštinės funkcijos. Pakanka paskaičiuoti (32) lygybės abiejų pusių išvestines x atžvilgiu, turint galvoje, kad y yra argumento x funkcija (skaičiuojant išvestines remiamasi sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykle), ir jas sulyginti. Sakoma, kad (32) lygybė diferencijuojama panariui. Išdiferencijavus abi (32) lygybės puses x atžvilgiu, reikia gautą lygtį išspręsti y' atžvilgiu. Tokia lygtis yra pirmojo laipsnio lygtis y' atžvilgiu ir todėl visuomet lengvai išsprendžiama. Išsprendę gausime

$$y' = y'(x).$$

Kad pasirinkę x galėtume surasti y' reikšmę, neužtenka gautos lygybės, nes reikia žinoti ir atitinkamą y reikšmę (paskaičiuojamą iš (32) lygybės). Todėl į atsakymą reikėtų įtraukti abi lygtis, gautą išvestinės y' išraišką ir pradinę (32) lygtį.

14 pavyzdys. *Suraskime funkcijos $y = y(x)$ išvestinę, kai ji duota neišreikštai:*

$$xy + \mathrm{e}^y + x^3 = 0. \tag{33}$$

Sprendimas. Diferencijuokime abi (33) lygybės puses. Turėsime

$$(xy)'_x + (\mathrm{e}^y)'_x + (x^3)'_x = (0)'_x,$$

$$y + xy' + \mathrm{e}^y y' + 3x^2 = 0,$$

$$y' = -\frac{y + 3x^2}{x + \mathrm{e}^y}.$$

Taigi galutinai turime, kad

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y + 3x^2}{x + \mathrm{e}^y}, \\ xy + \mathrm{e}^y + x^3 = 0. \end{cases}$$

◀

Norėdami surasti neišreikštai duotos funkcijos $y = y(x)$ aukštesnių eilių išvestines, (32) lygtį turėtume diferencijuoti kelis kartus ir į gautą išraišką įstatyti anksčiau gautas žemesnių eilių išvestines. Arba, kai jau gauname $n-1$-ąją išvestinę, dar kartą paskaičiuoti jos išvestinę ir įstatyti į gautą formulę pirmosios išvestinės išraišką. Į atsakymą vėl reikėtų įtraukti gautą n-osios išvestinės išraišką ir (32) pradinę lygtį.

15 pavyzdys. *Suraskime funkcijos $y = y(x)$ antrąją išvestinę, kai ji duota neišreikštai:*

$$xy^3 - y + x^3 = 6. \tag{34}$$

Sprendimas. Pirmas būdas. (34) lygybę diferencijuokime panariui du kartus:

$$y^3 + 3xy^2y' - y' + 3x^2 = 0, \tag{35}$$

$$3y^2y' + 3y^2y' + 6xy(y')^2 + 3xy^2y'' - y'' + 6x = 0,$$
$$(1 - 3xy^2)y'' = 6\left(y^2y' + xy(y')^2 + x\right),$$

$$y'' = 6\,\frac{y^2y' + xy(y')^2 + x}{1 - 3xy^2}. \tag{36}$$

Iš (35) surandame pirmąją išvestinę ir įstatome į antrosios išvestinės (36) išraišką:

$$y' = \frac{y^3 + 3x^2}{1 - 3xy^2}, \tag{37}$$

$$y'' = 6\,\frac{y^2\dfrac{y^3 + 3x^2}{1 - 3xy^2} + xy\,\dfrac{(y^3 + 3x^2)^2}{(1 - 3xy^2)^2} + x}{1 - 3xy^2} = 6\,\frac{-2xy^7 + 6x^3y^4 + 9x^5y + y^5 - 3x^2y^2 + x}{(1 - 3xy^2)^3}.$$

Taigi

$$\begin{cases} y'' = 6\,\dfrac{-2xy^7 + 6x^3y^4 + 9x^5y + y^5 - 3x^2y^2 + x}{(1 - 3xy^2)^3}, \\ xy^3 - y + x^3 = 6. \end{cases}$$

Antras būdas. Antrąją išvestinę suraskime iš pirmos išvestinės išraiškos, t.y. iš (37) lygybės. Taigi

$$y'' = \left(\frac{y^3+3x^2}{1-3xy^2}\right)'_x = \frac{(y^3+3x^2)'(1-3xy^2)-(y^3+3x^2)(1-3xy^2)'}{(1-3xy^2)^2}$$
$$= \frac{(3y^2y'+6x)(1-3xy^2)+(y^3+3x^2)(3y^2+6xyy')}{(1-3xy^2)^2}$$
$$= \frac{(-3xy^4+18x^3y+3y^2)\,y'+3y^5-9x^2y^2+6x}{(1-3xy^2)^2}.$$

Įstatę y' iš (37), gausime

$$y'' = \frac{(-3xy^4+18x^3y+3y^2)\,\dfrac{y^3+3x^2}{1-3xy^2}+3y^5-9x^2y^2+6x}{(1-3xy^2)^2}$$
$$= 6\,\frac{-2xy^7+6x^3y^4+9x^5y+y^5-3x^2y^2+x}{(1-3xy^2)^3}.$$

Taigi

$$\begin{cases} y'' = 6\,\dfrac{-2xy^7+6x^3y^4+9x^5y+y^5-3x^2y^2+x}{(1-3xy^2)^3}, \\ xy^3-y+x^3=6. \end{cases}$$

◀

4 Funkcijų, apibrėžtų parametrinėmis lygtimis, diferencijavimas

Funkcija $y=y(x)$ gali būti apibrėžta ir lygtimis

$$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \tag{38}$$

Parametro t kitimo aibė gali būti intervalas $[\alpha,\beta]$ arba kitokia aibė, tarkime, T. Pasirinkus parametrą t, iš (38) surandame x ir y. Šiam x ir priskiriame šį y. Taip gauname funkciją $y=y(x)$ (t.y. taisyklę, x reikšmėms priskiriančią y reikšmes, panaudojant tarpinį kintamąjį, parametrą t). Jei funkcija $y=y(x)$ apibrėžta (38) lygtimis, sakome, kad ji apibrėžta parametrinėmis lygtimis (parametriniu būdu).

Jei funkcija duota išreikštai, t.y. $y = f(x)$, tai visada galima pereiti prie parametrinių lygčių:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Atvirkščiai, nuo parametrinių lygčių pereiti prie išreikštinės funkcijos formos galima tada, kai galima rasti funkcijos $x = \phi(t)$ atvirkštinę funkciją $t = \phi^{-1}(x)$. Šį t įstatę į funkciją $y = \psi(t)$, gausime išreikštinę funkciją

$$y = \psi(\phi^{-1}(x)) = g(x).$$

Bet nevisada galima surasti funkcijai $x = \phi(t)$ atvirkštinę funkciją.

Kaip reikėtų skaičiuoti funkcijos $y = f(x)$ išvestines, kai funkija apibrėžta parametrinėmis lygtimis? Tarkime, kad funkcijos $x = \phi(t)$ ir $y = \psi(t)$ turi išvestines $\phi'(t)$ ir $\psi'(t)$. Taip pat tarkime, kad funkcija $x = \phi(t)$ turi atvirkštinę funkciją $t = \phi^{-1}(x)$. Tuomet šios funkcijos išvestinė, pagal atvirkštinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisyklę, yra

$$t'_x = (\phi^{-1}(x))'_x = \frac{1}{\phi'(t)} \quad (\phi'(t) \neq 0).$$

Pasinaudoję sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo taisykle, turėsime

$$y'_x = (\psi(\phi^{-1}(x)))' = \psi'(t)(\phi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0).$$

Kadangi gavome funkciją y'_x išreištą per t, tai pridėję funkciją $x = \phi(t)$, vėl turėsime, kad y'_x duota parametrinėmis lygtimis:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \chi(t) \quad (\phi'(t) \neq 0). \end{cases} \tag{39}$$

Užrašyta (39) formulė yra teisinga ir bendruoju atveju, reikalaujant tik išvestinių $\psi'(t)$, $\phi'(t)$ ($\phi'(t) \neq 0$) egzistavimo (nereikalaujant, kad egzistuotų funkcijos $x = \phi(t)$ atvirkštinė funkcija).

Aukštesniųjų eilių išvestinės skaičiuojamos analogiškai. Pavyzdžiui, ieškant antrosios eilės išvestinės y''_{xx}, reikia naudoti pirmos išvestinės y'_x parametrines (39) lygtis. Paskaičiavę gautume, kad

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y''_{xx} = \dfrac{\chi'(t)}{\phi'(t)} = \dfrac{\psi''(t)\phi'(t) - \phi''(t)\psi'(t)}{(\phi'(t))^3} \quad (\phi'(t) \neq 0). \end{cases} \tag{40}$$

16 pavyzdys. *Suraskime funkcijos $y = y(x)$, duotos parametrinėmis lygtimis*

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + t, \\ y = t^3 + t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

pirmąją, antrąją ir trečiąją išvestines.

Sprendimas.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 1}{\mathrm{e}^t + 1}\,.$$

Taigi pirmoji išvestinė, užrašyta parametrinėmis lygtimis, yra

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + t, \\ y'_x = \dfrac{3t^2 + 1}{\mathrm{e}^t + 1} \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Skaičiuojame antrąją išvestinę.

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(3t^2 + 1)'(\mathrm{e}^t + 1) - (\mathrm{e}^t + 1)'(3t^2 + 1)}{(\mathrm{e}^t + 1)(\mathrm{e}^t + 1)^2} = \frac{(-3t^2 + 6t - 1)\mathrm{e}^t + 6t}{(\mathrm{e}^t + 1)^3}\,.$$

Taigi antroji išvestinė, užrašyta parametrinėmis lygtimis, yra

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + t, \\ y''_{xx} = \dfrac{(-3t^2 + 6t - 1)\mathrm{e}^t + 6t}{(\mathrm{e}^t + 1)^3} \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Paskaičiuokime trečiąją išvestinę. Analogiškai gausime

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(6t^2 - 18t + 8)\mathrm{e}^{2t} + (-3t^2 - 18t + 11)\mathrm{e}^t + 6}{(\mathrm{e}^t + 1)^5}\,.$$

Taigi trečioji išvestinė, užrašyta parametrinėmis lygtimis, yra

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + t, \\ y'''_{xxx} = \dfrac{(6t^2 - 18t + 8)\mathrm{e}^{2t} + (-3t^2 - 18t + 11)\mathrm{e}^t + 6}{(\mathrm{e}^t + 1)^5} \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

◀

5 Pagrindinės diferencijuojamų funkcijų teoremos

5.1 Ferma teorema

7 teorema. *Tarkime, kad funkcija* $f(x)$

- *yra apibrėžta intervale* (a, b),
- *taške* $x = c$ *įgyja ekstremumą,*
- *taške* $x = c$ *egzistuoja baigtinė išvestinė* $f'(c)$.

Tuomet $f'(c) = 0$.

5.2 Rolio teorema

8 teorema. *Tarkime, kad funkcija* $f(x)$

- *yra tolydi intervale* $[a, b]$,
- *diferencijuojama intervale* (a, b),
- $f(a) = f(b)$.

Tuomet egzistuoja toks taškas $c, c \in (a, b)$, *kad* $f'(c) = 0$.

5.3 Lagranžo teorema

9 teorema. *Tarkime, kad funkcija* $f(x)$

- *yra tolydi intervale* $[a, b]$,
- *diferencijuojama intervale* (a, b).

Tuomet egzistuoja toks taškas $c, c \in (a, b)$, *kad*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

5.4 Koši teorema

10 teorema. *Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$*

- *yra tolydžios intervale $[a, b]$,*
- *diferencijuojamos intervale (a, b),*
- *$g'(x) \neq 0$ intervale (a, b).*

Tuomet egzistuoja toks taškas $c, c \in (a, b)$, kad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

5.5 Lopitalio teorema

11 teorema. *Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$*

1. *yra tolydžios ir diferencijuojamos taško $x = a$ aplinkoje, išskyrus galbūt patį tašką $x = a$,*
2. *$g'(x) \neq 0$ minėtoje aplinkoje,*
3. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,*
4. *egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Tuomet egzistuoja ir riba $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ir teisinga lygybė

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

1 pastaba. *Lopitalio teorema yra teisinga, jeigu trečia sąlyga pakeičiama tokia:*

3'. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

2 pastaba. *Lopitalio teorema ir 1 pastaba yra teisingos, jeigu $x \to \infty$, $x \to +\infty$ ar $x \to -\infty$, t.y. vietoj baigtinio taško a aplinkos nagrinėjamos begalybės aplinkos.*

6 Teiloro formulė

Nagrinėkime funkciją $f(x)$, apibrėžtą intervale (a, b). Tegul ji turi šiame intervale išvestines iki n-osios eilės. Paimkime fiksuotą intervalo (a, b) tašką x_0 ir kitą tašką $x \in (a, b)$. Pažymėkime

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

o

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Tada galime užrašyti tokią formulę:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

arba

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x). \end{aligned}} \tag{41}$$

Ši formulė vadinama **Teiloro formule**. $P_n(x)$ yra daugianaris x atžvilgiu, o $r_n(x)$ vadinama **liekana** arba **liekamuoju Teiloro formulės nariu**. $P_n(x)$ yra gana paprasta funkcija, patogi įvairiuose skaičiavimuose, taikymuose. Bet aišku, kad (41) formulė efektyvi tik tada, kai liekaną galime kaip nors įvertinti, kai ji nedidelė, t.y. kai ji artėja prie nulio n augant. Reikia žinoti kaip tą liekaną užrašyti kokiu nors aiškiu, paprastu būdu.

12 teorema. (Teiloro teorema.) *Tegul $f(x)$ intervale (a, b) turi išvestines iki $(n+1)$-osios eilės, tegul $x, x_0 \in (a, b)$. Tuomet tarp taškų x_0 ir x yra toks taškas ξ, kad (41) Teiloro formulės liekana*

$$\boxed{r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.} \tag{42}$$

Įrodymas. Intervale $[x_0, x] \subset (a, b)$ apibrėžkime funkciją

$$\phi(z) = f(x) - f(z) - f'(z)(x - z) - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n, \quad z \in [x_0, x].$$

Kadangi $f(z)$ turi išvestines iki $(n+1)$-osios eilės, tai $f(z), f'(z), f''(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ yra tolydžios funkcijos ir turi išvestines. Todėl ir $\phi(z)$ yra tolydi intervale $[x_0, x]$ ir turi išvestinę intervale (x_0, x). Jos išvestinė

$$\phi'(z) = -f'(z) - f''(z)(x-z) + f'(z) - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + f''(z)(x-z)$$
$$- \cdots - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Paimkime dar vieną funkciją

$$\psi(z) = (x-z)^{n+1}.$$

Ši funkcija taip pat tolydi intervale $[x_0, x]$ ir turi išvestinę intervale (x_0, x). Be to, jos išvestinė šiame intervale nelygi nuliui:

$$\psi'(z) = -(n+1)(x-z)^n \neq 0, \quad z \in (x_0, x).$$

Funkcijoms $\phi(z)$ ir $\psi(z)$ galima taikyti (**??**) Koši formulę. Taigi egzistuoja toks $\xi \in (x_0, x)$, kad

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \tag{43}$$

Kadangi

$$\phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = r_n(x), \quad \phi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$
$$\psi(x) = 0, \quad \psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}, \quad \psi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n,$$

tai (43) formulė tampa tokia:

$$\frac{0 - r_n(x)}{0 - (x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}.$$

Iš čia

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Teiloro teorema įrodyta. ◀

6.1 Teiloro formulės liekamieji nariai

Teiloro formulės (42) liekana vadinama **Lagranžo formos liekamuoju nariu** arba tiesiog **Lagranžo liekana**.

Naudojamos ir kitokios Teiloro formulės liekanos formos. Štai prie tų pačių sąlygų kaip ir 12 teoremoje teisinga tokia liekanos $r_n(x)$ išraiška:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \text{ su tam tikru } \xi \in (x_0, x). \tag{44}$$

Pastaroji liekanos forma vadinama **Koši formos liekana** arba tiesiog **Koši liekana**.

Sprendžiant įvairius uždavinius dažnai nereikia tikslaus Teiloro formulės liekamojo nario, o užtenka tik jo nykimo greičio. Tokiems tikslams pakanka (45) **Peano liekamojo nario**.

3 pastaba. *Sakykime, funkcija $f(x)$ intervale (a, b) turi išvestines iki $n-1$-osios eilės imtinai, o pačiame taške x_0 n-osios eilės išvestinę*[1]*, tada*

$$\boxed{r_n(x) = o((x-x_0)^n).} \tag{45}$$

6.2 Makloreno formulė

Makloreno formule paprastai vadinama Teiloro formulė, kai joje $x_0 = 0$. Taigi (41) Teiloro formulėje paėmę $x_0 = 0$, gausime Makloreno formulę:

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).} \tag{46}$$

6.3 Kai kurių elementariųjų funkcijų reiškimas Makloreno formule

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$. Kadangi visiems n

$$f^{(n)} = \mathrm{e}^x, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

tai šios funkcijos Makloreno formulė bus tokia:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).} \tag{47}$$

[1]Taigi funkcija $f(x)$ tenkina silpnesnes sąlygas negu anksčiau.

Paėmę (42) Lagranžo liekamąjį narį gautume, kad

$$r_n(x) = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{\xi} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ir } \forall \xi \in (0,x).$$

2. $f(x) = \sin x$. Kadangi

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kai } n = 4k, \\ \cos x, & \text{kai } n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{kai } n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{kai } n = 4k+3, \end{cases}$$

tai

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{kai } n = 2k, \\ 1, & \text{kai } n = 4k+1, \\ -1, & \text{kai } n = 4k+3. \end{cases}$$

Ir galime užrašyti Makloreno formulę:

(48) $$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x).}$$

Iš (42) Lagranžo liekamojo nario gauname, kad

$$|r_{2n}(x)| = \left|\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\cos\xi\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ir } \forall \xi \in (0,x).$$

3. $f(x) = \cos x$. Kadangi

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kai } n = 4k, \\ -\sin x, & \text{kai } n = 4k+1, \\ -\cos x, & \text{kai } n = 4k+2, \\ \sin x, & \text{kai } n = 4k+3, \end{cases}$$

tai

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{kai } n = 4k, \\ -1, & \text{kai } n = 4k+2, \\ 0, & \text{kai } n = 2k+1. \end{cases}$$

Todėl Makloreno formulė tokia:

(49) $$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x).}$$

Vėl iš (42) Lagranžo liekamojo nario gauname, kad

$$|r_{2n+1}(x)| = \left|\frac{x^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\cos\xi\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ir } \forall \xi \in (0, x).$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Kadangi

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

tai $\ln(1+x)$Makloreno formulė:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).} \tag{50}$$

Naudojant liekamojo nario formą galima būtų parodyti, kad šiai funkcijai

$$r_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{kai } x \in (-1, 1].$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Kadangi

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),$$

tai

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \dots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + r_n(x).\end{aligned}} \tag{51}$$

Liekamasis narys

$$r_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{kai } x \in (-1, 1).$$

Atskiru atveju, kai $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $r_n(x) = 0$. Tuomet gauname žinomą Niutono binomo formulę

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}\,x + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^2 + \dots + x^n. \tag{52}$$

O iš pastarosios formulės išplaukia

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n \\ &= a^n\left(1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right) \\ &= a^n + \frac{n}{1!}\,a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \dots + x^n.\end{aligned} \tag{53}$$

6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Panašiai galima įsitikinti, kad šiuo atveju

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_{2n}(x).} \tag{54}$$

Liekana

$$r_{2n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{kai } x \in [-1, 1].$$

Skyrelio pabaigoje pateiksime sudėtingesnės funkcijos pavyzdį.

17 pavyzdys. *Užrašykime funkcijos $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ Makloreno formulę iki nario su x^5.*

Sprendimas. 1 būdas. Pirmosios penkios funkcijos $f(x)$ išvestinės yra tokios:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(1-x)\mathrm{e}^{2x-x^2},\\
f''(x) &= 2(1-4x+2x^2)\mathrm{e}^{2x-x^2},\\
f'''(x) &= 4(-1-3x+6x^2-2x^3)\mathrm{e}^{2x-x^2},\\
f^{IV}(x) &= 4(-5+8x+12x^2-16x^3+4x^4)\mathrm{e}^{2x-x^2},\\
f^{V}(x) &= 8(-1+25x-20x^2-20x^3+20x^4-4x^5)\mathrm{e}^{2x-x^2}.
\end{aligned}$$

Apskaičiavę jų reikšmes taške $x_0 = 0$, turėsime

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = -4, \quad f^{IV}(0) = -20, \quad f^{V}(0) = -8.$$

Taigi funkcijos $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ Makloreno formulė iki nario su x^5 yra tokia:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x-x^2} &= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{-4x^3}{3!} + \frac{-20x^4}{4!} + \frac{-8x^5}{5!} + r_5(x)\\
&= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + r_5(x).
\end{aligned}$$

2 būdas. Tegul $t = 2x - x^2$. Užrašykime funkcijos e^t Makloreno formulę iki nario su t^5. Formulėje (47) paėmę $n = 5$, turėsime

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + r_5(t).$$

Vietoje t įstatykime $2x - x^2$ ir visus narius su aukštesniais laipsniais negu x^5

įtraukime į liekamąjį narį. Gausime

$$\begin{aligned}
e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2} + \frac{(2x-x^2)^3}{6} \\
&\quad + \frac{(2x-x^2)^4}{24} + \frac{(2x-x^2)^5}{120} + r_5(2x - x^2) \\
&= 1 + 2x - x^2 + \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2} + \frac{8x^3 - 12x^4 + 6x^5 - x^6}{6} \\
&\quad + \frac{16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8}{24} \\
&\quad + \frac{32x^5 - 80x^6 + 80x^7 - 40x^8 + 10x^9 - x^{10}}{120} + r_5(2x - x^2) \\
&= 1 + 2x + \left(-x^2 + \frac{4x^2}{2}\right) + \left(\frac{-4x^3}{2} + \frac{8x^3}{6}\right) \\
&\quad + \left(\frac{x^4}{2} + \frac{-12x^4}{6} + \frac{16x^4}{24}\right) + \left(\frac{6x^5}{6} + \frac{-32x^5}{24} + \frac{32x^5}{120}\right) + r_5^*(x) \\
&= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + r_5^*(x).
\end{aligned}$$

◀

6.4 Teiloro formulės taikymas apytiksliame skaičiavime

18 pavyzdys. *Įvertinkime apytikslės formulės*

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

paklaidą,

(a) *kai* $|x| \le \frac{1}{2}$,

(b) *kai* $|x| \le 0.1$.

Sprendimas. Iš (49) Makloreno formulės, paėmę $n = 2$, turime

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\cos\xi, \quad \xi \in (0, x).$$

Taigi liekanos modulis nedidesnis kaip

$$\frac{|x^6|}{720}\cos\xi \le \frac{1}{2^6 \cdot 720} = \frac{1}{46\,080} \approx 0.000\,02,$$

kai $|x| \le \frac{1}{2}$. Tikslumas yra nemažesnis kaip $\frac{1}{46\,080}$. Pavertus dešimtaine trupmena turėsime nemažiau kaip 4 ženklus po kablelio tikslius.

Ir liekanos modulis neviršija

$$\frac{1}{1\,000\,000 \cdot 720} = \frac{1}{720\,000\,000} \approx 0.000\,000\,001,$$

kai $|x| \le 0.1$. Tikslumas yra nemažesnis kaip $\frac{1}{720\,000\,000}$. Pavertus dešimtaine trupmena turėsime nemažiau kaip 8 ženklus po kablelio tikslius. ◀

19 pavyzdys. *Kokioms x reikšmėms apytikslė formulė*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \tag{55}$$

teisinga su absoliutine paklaida nedidesne kaip 0.001*?*

Sprendimas. Iš (48) formulės turime

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + r_4(x).$$

Čia

$$r_4(x) = \frac{x^5}{120}\cos\xi, \quad \xi \in (0, x).$$

Turi būti

$$\left|\frac{x^5}{120}\cos\xi\right| \le 0.001.$$

Pastarasis reikalavimas bus patenkintas, kai

$$\frac{|x^5|}{120} \le 0.001, \quad |x^5| \le 0.12, \quad |x| \le 0.12^{1/5} \approx 0.65.$$

Taigi (55) apytikslė formulė su paklaida nedidesne kaip 0.001 gali būti naudojama, kai $|x| \le 0.65$. ◀

20 pavyzdys. *Suskaičiuokime* e *skaitinę reikšmę* 0.001 *tikslumu.*

Sprendimas. (47) formulėje paėmę $x = 1$, turėsime

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n(1).$$

Liekana

$$r_n(1) = \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{\xi} \le \frac{3}{(n+1)!},$$

nes $\xi \in (0, 1)$, o $\mathrm{e} < 3$. Turi būti

$$\frac{3}{(n+1)!} \le 0.001, \quad (n+1)! \ge 3 \cdot 1\,000 = 3\,000.$$

Paėmę $n = 5$, gausime, kad $(n+1)! = 6! = 720$, o paėmę $n = 6$, kad $(n+1)! = 7! = 5\,040$. Taigi pakanka paimti $n = 6$. Turėsime

$$\mathrm{e} \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1\,957}{720} \approx 2.718$$

0.001 tikslumu. ◀

6.5 Teiloro formulės taikymas ribų skaičiavime

21 pavyzdys. *Suraskime ribą*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Sprendimas. Pasinaudoję (48) formule, kai $n = 2$, su (45) Peano liekamuoju nariu, gausime

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3!} + o(x) \right) = \frac{1}{6}\,.$$

◀

22 pavyzdys. *Suraskime ribą*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

Sprendimas. Pasinaudoję (47), (49) ir (48) formulėmis su (45) Peano liekamuoju nariu, gausime

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + o(z^2),$$

o kai $z = -\frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4); \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5); \\ \sin x &= x + o(x^2). \end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}{x^4 + o(x^5)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{1 + o(x)} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

◀

7 Graikiškos raidės

Nr.	Didžiosios raidės	Mažosios raidės	Tarimas
1		α	alfa
2		β	beta
3	Γ	γ	gama
4	Δ	δ	delta
5		ε, ϵ	epsilion
6		ζ	dzeta
7		η	eta
8	Θ	θ, ϑ	teta
9		ι	jota
10		$\kappa, \varkappa$	kapa
11	Λ	λ	lambda
12		μ	miū
13		ν	niū
14	Ξ	ξ	ksy
15		o	o
16	Π	π, ϖ	py
17		ρ, ϱ	ro
18	Σ	σ, ς	sigma
19		τ	tau
20	Υ	υ	upsilion
21	Φ	φ, ϕ	fy
22		χ	chy
23	Ψ	ψ	psy
24	Ω	ω	omega