1 FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

1.1 Funkcijos išvestinės sąvoka

Išvestinės sąvoka yra viena svarbiausių matematikos sąvokų.

Tegul funkcija $y = f(x)$ yra apibrėžta taško x_0 aplinkoje. Tarkime, kad x priklauso tai aplinkai.

1 apibrėžimas. *Dydis*

$$\Delta x := x - x_0$$

vadinamas funkcijos $y = f(x)$ **argumento pokyčiu** *arba* **prieaugliu**. *Kartais pabrėžiama, kad tas pokytis yra taške* x_0.

2 apibrėžimas. **Funkcijos** $y = f(x)$ **pokyčiu** *arba* **prieaugliu** *taške* x_0 *atitinkančiu argumento* x *pokytį* Δx *vadinsime skirtumą*

$$\Delta f(x_0) = \Delta f = \Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1 tvirtinimas. *Funkcija* $f(x)$ *yra tolydi taške* x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Įrodymas. Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, kai

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

arba

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

arba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

◀

Funkcijos ir jos argumento pokyčių santykis išreiškia funkcijos kitimo vidutinį greitį intervale $[x_0; x_0 + \Delta x]$:

$$v_{vid.} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Vidutinio greičio riba, kai nepriklausomo kintamojo pokytis artėja prie nulio,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

vadinama *funkcijos kitimo greičiu* taške x_0 arba *išvestine*.

3 apibrėžimas. *Jei $\exists$ baigtinė funkcijos ir jos argumento pokyčių santykio riba, kai Δx artėja prie nulio:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{3}$$

tai ji vadinama **funkcijos** $y = f(x)$ **išvestine** *taške* x_0.

Išvestinę žymime $f'(x_0)$ arba $y'|_{x=x_0}$, arba $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

Išvestinę galime apskaičiuoti įvairiuose funkcijos apibrėžimo aibės X taškuose, todėl išvestinė yra kintamojo x funkcija, žymima $f'(x)$, y', y'_x arba $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Funkcijos išvestinės radimą vadiname tos funkcijos diferencijavimu.

1 pavyzdys. *Raskime funkcijos lygios pastoviam dydžiui, t.y. $y = c$, išvestinę.*

Sprendimas. Kadangi

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0,$$

tai

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Todėl

$$c' = 0 \tag{4}$$

◀

2 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, išvestinę.*

Sprendimas. Kadangi

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= ((x+\Delta x) - x)((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}), \end{aligned}$$

tai, pritaikę Niutono binomo formulę, gausime

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Perėję pastarojoje lygybėje prie ribos, kai Δx artėja prie nulio, (naudojamės išvestinės apibrėžimu, (3) formule) randame laipsninės funkcijos $y = x^n$ išvestinę:

$$(5)\quad (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}.$$

◀

3 pavyzdys. *Apskaičiuokime funkcijos $y = \sqrt[5]{x}$ išvestinę taške $x_0 = 0$.*

Sprendimas. Funkcijos pokytis

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt[5]{\Delta x},$$

o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = +\infty.$$

Kadangi gautoji riba yra begalinė, tai funkcija $y = \sqrt[5]{x}$ taške $x_0 = 0$ išvestinės neturi. ◀

1.2 Išvestinės fizikinė prasmė

1. Jau apibrėžiant funkcijos išvestinę (1) ir (2) formulėse minėjome, kad išvestinė tai funkcijos kitimo greitis taške x. Čia ir glūdi išvestinės mechaninė prasmė. Jeigu $s(t)$ žymi kūno nueitą kelią priklausomai nuo laiko t, tai to kūno greitis yra kelio išvestinė:

$$v(t) = s'(t),$$

o kūno pagreitis yra greičio išvestinė arba kelio antroji išvestinė:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

2. Tegul $y = f(t)$ žymi elektros kiekį, pratekantį laidininko skerspjūviu per laiką t. Santykis $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ reikš vidutinį srovės stiprumą laiko intervale nuo t iki $t + \Delta t$. Taigi $f'(t)$ nusakys srovės, pratekančios laidininko skerspjūviu, stiprumą laiko momentu t.

1.3 Išvestinės geometrinė prasmė

1.4 Vienpusės išvestinės

Vienpusės išvestinės apibrėžiamos vienpusių ribų pagalba.

4 apibrėžimas. **Išvestine iš dešinės** *arba* **dešinine išvestine** *vadinama funkcijos ir argumento pokyčių santykio riba, kai argumento pokytis $\Delta x \to +0$, (ši riba turi egzistuoti ir būti baigtinė):*

$$f'(x_0 + 0) := \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Išvestine iš kairės *arba* **kairine išvestine** *vadinama funkcijos ir argumento pokyčių santykio riba, kai argumento pokytis $\Delta x \to -0$, (ši riba turi egzistuoti ir būti baigtinė):*

$$f'(x_0 - 0) := \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Iš ribų teorijos išplaukia, kad funkcijos išvestinės tam tikrame taške egzistavimas ekvivalentus jos vienpusių išvestinių tame taške lygybei.

4 pavyzdys. *Apskaičiuokime funkcijos $y = |x|$ dešininę ir kairinę išvestines taške $x_0 = 0$.*

Sprendimas. Pagal vienpusių išvestinių apibrėžimą

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Dešininė ir kairinė funkcijos $y = |x|$ išvestinės taške $x_0 = 0$ atitinkamai yra lygios 1 ir -1. (Taip pat galima daryti išvadą, kad ši funkcija taške $x_0 = 0$ išvestinės neturi, nes dešininė ir kairinė išvestinės nėra tarpusavyje lygios.)

◀

1.5 Funkcijos diferencialas

5 apibrėžimas. *Funkcija $y = f(x)$ yra vadinama* **diferencijuojama** *taške x_0, jei jos pokytį $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ galima išreikšti suma dviejų* *dėmenų, pirmasis iš kurių yra tiesinis Δx atžvilgiu, o antrasis yra aukštesnės eilės negu Δx nykstantis dydis, t.y.*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x); \tag{6}$$

čia A yra pastovus dydis, konstanta.

Dažnai yra patogu naudoti (6) formulės ekvivalenčią išraišką

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x; \tag{7}$$

čia $\alpha = \alpha(\Delta x)$ yra nykstantis dydis, $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Iš apibrėžimo matyti, kad $A\Delta x$, kai $A \neq 0$, yra pagrindinė pokyčio Δy dalis.

1 teorema. *Funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške $x_0 \Longleftrightarrow$ taške x_0 $\exists$ išvestinė $f'(x_0) = A$.*

Įrodymas. Būtinumas ($\Longrightarrow$). Kai funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama, tai iš (6) lygybės turime, kad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Todėl $\exists$ riba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0).$$

Taigi taške x_0 $\exists$ išvestinė ir $f'(x_0) = A$.

Pakankamumas ($\Longleftarrow$). Tarkime, kad $\exists$ išvestinė taške x_0 ir $f'(x_0) = A$. Tuomet

$$f'(x_0) = A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Iš šios lygybės gauname, kad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - A \stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

arba

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Taigi funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama taške x_0. ◀

Iš įrodytos teoremos išplaukia, kad teiginiai "funkcija turi išvestinę" ir "funkcija yra diferencijuojama" yra ekvivalentūs.

6 apibrėžimas. *Reiškinys $f'(x_0)\Delta x$ vadinamas* **funkcijos** $y = f(x)$ **diferencialu** *taške x_0 ir žymimas df arba $df(x_0)$, arba dy. Taigi diferencialas taške x:*

$$dy = df(x) := f'(x)\Delta x. \tag{8}$$

Panaudoję (8) formulę funkcijai $y = x$, gausime, kad

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x.$$

Todėl.

7 apibrėžimas. **Nepriklausomo kintamojo x diferencialu** *vadinsime jo pokytį:*

$$dx := \Delta x. \tag{9}$$

1.6 Diferencialo geometrinė prasmė

1.7 Funkcijos išvestinės ir jos tolydumo ryšys

2 teorema. *Jei funkcija $f(x)$ turi išvestinę taške x, tai ji šiame taške yra tolydi.*

Įrodymas. Kadangi funkcija turi išvestinę taške x, tai $\exists$ baigtinė riba

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Todėl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \xrightarrow{\Delta x} 0$$

arba

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = o(1),$$

arba

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x)\Delta x + o(\Delta x)) = 0.$$

Dabar iš 1 tvirtinimo jau išplaukia funkcijos tolydumas taške x. ◀

Atvirkščias teiginys nėra teisingas: iš funkcijos tolydumo tam tikrame taške neišplaukia, kad tame taške funkcija turi išvestinę. Jį patvirtina anksčiau išnagrinėti 3 ir 4 pavyzdžiai: funkcijos $y = \sqrt[5]{x}$ ir $y = |x|$ yra tolydžios taške $x = 0$, tačiau jame išvestinės neturi.

Taigi funkcijos tolydumas taške yra tik būtina tos funkcijos išvestinės egzistavimo sąlyga. Trūkio taškuose funkcijos negali turėti išvestinės.

1.8 Išvestinių skaičiavimo taisyklės

3 teorema. *Jei funkcijos $u(x)$ ir $v(x)$ turi išvestines taške x, tai funkcijos $cu(x)$ (c – konstanta), $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$ ir $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (jei $v(x) \neq 0$) irgi turi išvestines šiame taške. Be to,*

$$(cu)' = cu', \tag{10}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{11}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{12}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{13}$$

Įrodymas.

1.

$$\begin{aligned}(cu(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'(x).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(u(x) \pm v(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$

3.

$$(14)\quad (u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)) + (u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\, v(x+\Delta x) + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\, u(x) \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\, v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x}\, u(x) \right).$$

Funkcija $v(x)$ turi išvestinę taške x, tai iš 2 teoremos išplaukia, kad funkcija $v(x)$ yra ir tolydi taške x. Vadinasi

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x).$$

Pasinaudoję šia riba, tęsdami (14) lygybes, turėsime

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

4. Kadangi $v(x) \neq 0$ ir yra tolydi taške x, tai iš tolydžiųjų funkcijų savybių išplaukia, kad $\exists$ taško x aplinka, kurioje funkcija $v(x) \neq 0$. Imkime Δx tokį mažą, kad ir taškas $x + \Delta x$ priklausytų tai aplinkai. Tada ir $v(x + \Delta x) \neq 0$, ir mes galėsime dalyti ne tik iš $v(x)$, bet ir iš $v(x + \Delta x)$.

Taigi

$$(15)\quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x+\Delta x)}\right) + \left(\dfrac{u(x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\, \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\, \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\, \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\, \frac{\Delta v}{\Delta x} \right).$$

Dabar kaip ir ankstesnėje dalyje, pasinaudoję funkcijos $v(x)$ tolydumu, tęsdami (15) lygybes, turėsime

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - \frac{u(x)}{v^2(x)}\, v'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

◀

Suformuluosime diferencialo savybes, tiesiogiai išplaukiančias iš išvestinių skaičiavimo taisyklių bei diferencialo apibrėžimo.

Išvada.

$$d(cu) = c\,du, \;\; c - const, \tag{16}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{17}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{18}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\,, v \neq 0. \tag{19}$$

4 teorema. (Sudėtinės funkcijos diferencijavimas.) *Tarkime, kad funkcija $u = u(x)$ taške x_0 turi išvestinę $u'_x = u'(x_0)$, o funkcija $y = f(u)$ taške $u_0 = u(x_0)$ – išvestinę $y'_u = f'(u_0)$. Tarkime taip pat, kad taško x_0 aplinkoje apibrėžta sudėtinė funkcija $y = f(u(x))$. Tada ta sudėtinė funkcija taške x_0 turi išvestinę y'_x, lygią išvestinių y'_u ir u'_x sandaugai:*

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

Įrodymas. Funkcija $y = f(u)$ turi išvestinę taške u_0, taigi ji yra ir diferencijuojama šiame taške (žr. 1 teoremą). Iš diferencijuojamumo ((7) formulė) išplaukia, kad

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta u, \quad \alpha \xrightarrow{\Delta u \to 0} 0.$$

Padalinę abi šios lygybės puses iš pokyčio $\Delta x \neq 0$, apskaičiuosime abiejų pusių ribas, kai $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\,. \tag{20}$$

Funkcija $u(x)$ yra diferencijuojama taške x_0, tai ji yra tame taške ir tolydi (žr. 2 teoremą). Toliau iš $u(x)$ tolydumo turėsime (1 tvirtinimas), kad $\Delta u \to 0$, kai $\Delta x \to 0$. Taigi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0.$$

Tęsdami (20) formulę gauname

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\, u'(x_0) + 0\, u'(x_0)$$

arba

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

◀

5 teorema. (Atvirkštinės funkcijos išvestinė.) *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $x = g(y)$. Jeigu funkcija $y = f(x)$ taške $x = x_0$ turi nelygią nuliui išvestinę $f'(x_0)$, tai taške $y_0 = f(x_0)$ egzistuoja atvirkštinės funkcijos $x = g(y)$ išvestinė, lygi $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Taigi*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}\,. \tag{21}$$

Įrodymas. Suteikime argumentui y pokytį $\Delta y \neq 0$. Tuomet funkcijos $x = g(y)$ pokytis

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0). \tag{22}$$

Įsitikinsime, kad $\Delta x \neq 0$. Tarkime, priešingai, $\Delta x = 0$. Tada iš (22) formulės išplaukia, kad

$$g(y_0 + \Delta y) = g(y_0) = x_0.$$

Iš pastarųjų lygybių ir atvirkštinės funkcijos apibrėžimo gauname, kad

$$y_0 + \Delta y = y_0 = f(x_0)$$

arba

$$\Delta y = 0.$$

Tai prieštarauja mūsų prielaidai, kad $\Delta y \neq 0$. Taigi $\Delta x \neq 0$.

Todėl

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}\,. \tag{23}$$

Įsitikinsime, kad $\Delta x \to 0$, kai $\Delta y \to 0$. Kadangi $\exists$ išvestinė $f'(x_0)$, tai funkcija y diferencijuojama (žr. 1 teoremą). Taigi

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\,\Delta x, \quad \alpha \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0. \tag{24}$$

Kadangi $f'(x_0) \neq 0$, tai galima paimti tokį mažą Δx, kad $f'(x_0) + \alpha \neq 0$. Tada iš (24) išplaukia, kad

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{f'(x_0) + \alpha}\,.$$

Iš pastarosios lygybės jau turėsime, kad $\Delta x \to 0$, kai $\Delta y \to 0$.

Pereikime prie ribos (23) lygybėje:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \, .$$

Gavome formulę

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \, .$$

◀

(21) formulės geometrinė prasmė ....

1.9 Pagrindinių elementariųjų funkcijų išvestinės

1. Pastovaus dydžio išvestinė. Jau 1 pavyzdyje paskaičiavome, kad pastovaus dydžio išvestinė yra lygi nuliui.

$$\boxed{c' = 0}$$

2. Trigonometrinių funkcijų išvestinės.

a) Funkcijos $y = \sin x$ pokytis

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) .$$

Todėl

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x .$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

b) Funkcijos $y = \cos x$ išvestinei surasti naudosime sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo formulę:

$$\begin{aligned}(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x .\end{aligned}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

c)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

d)

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x}(-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

3. Logaritminės funkcijos išvestinė.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x}\ln \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a}.$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

4. Rodiklinės funkcijos išvestinė. Rodiklinės funkcijos $y = a^x$ išvestinei rasti naudosime atvirkštinės funkcijos (šiuo atveju funkcijos $x = \log_a x$) išvestinės skaičiavimo taisyklę:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x\ln a.$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$$

5. Laipsninės funkcijos išvestinė.

$$(x^\alpha)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha (\ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

6. Atvirkštinių trigonometrinių funkcijų išvestinės.

a) Funkcija $y = \arcsin x$ apibrėžta, kai $x \in [-1, 1]$, ir turi atvirkštinę funkciją $x = \sin y$. Atvirkštinė funkcija apibrėžta intervale $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Bet ši atvirkštinė funkcija turi teigiamą išvestinę, kai $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kadangi išvestinės skaičiavimui naudosime atvirkštinės funkcijos skaičiavimo taisyklę, o toje taisyklėje reikalaujama, kad atvirkštinės funkcijos išvestinė nebūtų lygi nuliui, tai $\arcsin x$ išvestinę paskaičiuosime tik atvirame intervale, $x \in (-1, 1)$.

Galima būtų kalbėti ir apie išvestines intervalo galuose, t.y. taškuose ± 1, bet tik apie vienpuses išvestines. Naudodami išvestinės apibrėžimą galėtume įsitikinti, kad funkcijos pokyčio ir argumento pokyčio santykio vienpusės ribos šiuose galiniuose intervalo taškuose yra begalinės. Taigi išvestinė juose neegzistuoja. Tai galima matyti ir iš arksinuso grafiko. Jo liestinės taškuose ± 1 yra lygiagrečios y ašiai.

Taigi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Kadangi $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tai $\cos y > 0$ ir $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Todėl

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

b) Funkcija $y = \arccos x$ turi atvirkštinę funkciją $x = \cos y$, kurios išvestinė nelygi nuliui, kai $y \in (0, \pi)$, o $x \in (-1, 1)$. Todėl

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) Funkcija $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi/2, \pi/2)$, yra atvirkštinė funkcijai $x = \operatorname{tg} y$. Todėl

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

d) Analogiškai apskaičiuojama funkcijos $y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi)$, išvestinė:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

1.10 Logaritminė išvestinė

Skaičiuojant funkcijų išvestines, kartais yra patogu ieškoti funkcijos logaritmo išvestinės. Išvestinės skaičiavimas ypač palengvėja, kai funkcija yra išreikšta kelių dauginamųjų sandauga. Funkcijos logaritmo išvestinė vadinama logaritmine išvestine. Funkcijos išvestinė ir logaritminė išvestinė taškuose, kuriuose $y \neq 0$, susietos sąryšiu:

$$(\ln|y|)' = \frac{|y|'}{|y|} = \begin{cases} \dfrac{y'}{y}\,, & \text{kai } y > 0, \\ \dfrac{(-y)'}{-y} = \dfrac{y'}{y}\,, & \text{kai } y < 0. \end{cases}$$

Taigi bet kokiu atveju, jei tik $y \neq 0$,

$$y' = y(\ln|y|)'. \tag{25}$$

5 pavyzdys. *Raskime funkcijos*

$$y = \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}$$

išvestinę.

Sprendimas. Naudodami (25) formulę, turėsime

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\right)' &= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\left(\ln\frac{(x+1)^2|x-1|}{(2x^2+3)^3}\right)' \\
&= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\Big(2\ln|x+1| + \ln|x-1| - 3\ln(2x^2+3)\Big)' \\
&= \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2x^2+3)^3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{12x}{2x^2+3}\right) \\
&= \frac{(x+1)(-6x^3-2x^2+21x-3)}{2x^2+3)^4}.
\end{aligned}$$

◀

6 pavyzdys. *Raskime funkcijos*

$$y = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}$$

išvestinę, kai $x > -1/2$ *(tada* $\operatorname{arctg}(2x+1) > 0$*).*

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
&\Big((\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\Big)' = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\Big(\ln(\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\Big)' \\
&= (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\Big((x^2+1)\ln\operatorname{arctg}(2x+1)\Big)' = (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1} \\
&\times\left(2x\ln\operatorname{arctg}(2x+1) + (x^2+1)\,\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x+1)}\,\frac{2}{1+(2x+1)^2}\right) \\
&= (\operatorname{arctg}(2x+1))^{x^2+1}\left(2x\ln\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{x^2+1}{(2x^2+2x+1)\operatorname{arctg}(2x+1)}\right).
\end{aligned}$$

◀

1.11 Diferencialo formos invariantiškumas

1.12 Diferencialas ir apytikslis skaičiavimas

2 Aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai

2.1 Aukštesniųjų eilių išvestinės

Sakykime, kad funkcija $y = f(x)$ turi išvestinę kiekviename aibės X taške. Tuomet $f'(x)$ yra nauja kintamojo x funkcija $g(x)$. Jei funkcija $g(x)$ diferencijuojama, tai galime kalbėti apie jos išvestinę $g'(x) = (f'(x))'$, kuri vadinama funkcijos $f(x)$ antrąja išvestine ir žymima $f''(x)$, y'', y''_{xx}, y''_{x^2} arba $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

Analogiškai, kai $f''(x)$ irgi yra diferencijuojama funkcija, apibrėžiame trečiosios eilės išvestinę $f'''(x) := (f''(x))'$, kuri žymima ir $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$. Ir taip toliau, jei taško x aplinkoje egzistuoja $(n-1)$-osios eilės išvestinė, tai n-tosios eilės išvestinė apibrėžiama kaip šios $(n-1)$-osios išvestinės išvestinė:

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)';$$

dar rašoma:

$$y^{(n)} := \left(y^{(n-1)}\right)', \quad \text{arba} \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Funkcija vadinama n kartų diferencijuojama taške $x \in X$, jei šiame taške egzistuoja visų eilių tos funkcijos išvestinės imtinai iki n-tosios eilės.

7 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = \ln x$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
y' &= (\ln x)' = \frac{1}{x}\,,\\
y'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,,\\
y''' &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1\cdot 2}{x^3}\,,\\
y^{IV} &= \left(\frac{2!}{x^3}\right)' = -\frac{3!}{x^4}\,,\\
&-- -- -- -- -- --\\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\,.
\end{aligned}$$

◀

8 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = \cos x$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
y' &= (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right),\\
y'' &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + x)\,,\\
y''' &= (\cos(\pi + x))' = -\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),\\
&-- -- -- -- -- --\\
y^{(n)} &= \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).
\end{aligned}$$

◀

6 teorema. (Leibnico formulė.) *Jei funkcijos $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ turi išvestines iki n-tosios eilės, tai*

$$(uv)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k.$$

Čia C_n^k – binominiai koeficientai,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{kai } k = 1, 2, \dots, n,$$

ir $C_n^0 = 1$.

9 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = x^4 \mathrm{e}^{-x}$ n-tosios eilės išvestinę.*

Sprendimas. Pasinaudoję Leibnico formule ir žinodami, kad $(x^4)^{(k)} = 0$, kai $k > 4$, gausime

$$\begin{aligned}
\left(x^4\mathrm{e}^{-x}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\mathrm{e}^{-x})^{(n-k)} (x^4)^{(k)} \\
&= C_n^0 (\mathrm{e}^{-x})^{(n)} (x^4)^{(0)} + C_n^1 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-1)} (x^4)^{(1)} + C_n^2 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-2)} (x^4)^{(2)} \\
&\quad + C_n^3 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-3)} (x^4)^{(3)} + C_n^4 (\mathrm{e}^{-x})^{(n-4)} (x^4)^{(4)} \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} x^4 + n(-1)^{n-1} \mathrm{e}^{-x} 4x^3 + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} \mathrm{e}^{-x} 12x^2 \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (-1)^{n-3} \mathrm{e}^{-x} 24x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} (-1)^{n-4} \mathrm{e}^{-x} 24 \\
&= (-1)^n \mathrm{e}^{-x} \left(x^4 - 4nx^3 + 6n(n-1)x^2 - 4n(n-1)(n-2)x \right. \\
&\qquad \left. + n(n-1)(n-2)(n-3)\right).
\end{aligned}$$

◀

2.2 Akštesniųjų eilių diferencialai

3 Neišreikštinių funkcijų diferencijavimas

4 Funkcijų, apibrėžtų parametrinėmis lygtimis, diferencijavimas

5 Pagrindinės diferencijuojamų funkcijų savybės...........

6 Lopitalio taisyklė......gali būti įtraukta į pagr.dif.f.s.

7 Teiloro formulė.........

8 Funkcijų tyrimas..........