2 pratybos. Vektoriai plokštumoje

Paulius Drungilas

Turinys

Vektorius v, kurio koordinatės yra (x_0, y_0) - tai vektorius, kurio pradžia yra koordinačių pradžios taškas $\mathcal{O}(0,0)$, o pabaiga – taškas (x_0, y_0).

Vektorių $v_1(x_1, y_1)$ ir $v_2(x_2, y_2)$ suma yra vektorius $v_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Skaičiaus $a \in \mathbb{R}$ ir vektoriaus $v(x, y)$ sandauga, žymima $a \cdot v$, yra vektorius, kurio koordinatės yra $(a \cdot x, a \cdot y)$.

Vektoriaus $v(x, y)$ ilgis, žymimas $|v|$, lygus $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Vektorių v_1 ir v_2 skaliarinė sandauga, žymima $v_1 \cdot v_2$, yra skaičius

$$v_1 \cdot v_2 = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos\varphi,$$

kur φ – kampas tarp vektorių v_1 ir v_2.

Vektorių $v_1(x_1, y_1)$ ir $v_2(x_2, y_2)$ skaliarinę sandaugą galima skaičiuoti ir kitu būdu:

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Kampas φ tarp vektorių $v_1(x_1, y_1)$ ir $v_2(x_2, y_2)$ randamas pagal formulę

$$\cos\varphi = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

1. **pastaba.** Kampas tarp vektorių visada priklauso intervalui $[0, \pi]$. Jei vektorių skaliarinė sandauga yra teigiamas skaičius, tai kampas tarp jų – smailusis ($\in [0, \pi/2]$). Jei skaliarinė sandauga yra neigiamas skaičius, tai kampas tarp vektorių – bukasis ($\in (\pi/2, \pi]$).

Vektorių $v_1(x_1, y_1)$ ir $v_2(x_2, y_2)$ statmenumo sąlyga:

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \quad \text{t. y.} \quad x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0.$$

Vektorių $v_1(x_1, y_1)$ ir $v_2(x_2, y_2)$ kolinearumo (lygiagretumo) sąlyga:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff x_1 y_2 = y_1 x_2.$$

2. **pavyzdys.** Rasime parametro a reikšmę, su kuria vektoriai $v_1(1,4)$ ir $v_2(a,-5)$ yra statmeni.

Sprendimas. Vektoriai statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi 0. Taigi parametro a reikšmę rasime iš lygybės

$$1 \cdot a + 4 \cdot (-5) = 0.$$

Iš čia $a = 20$. □

3. **pastaba.** Vektoriai $v_1(a,b)$ ir $v_2(b,-a)$ visada statmeni.

4. **pavyzdys.** Rasime kampą φ tarp vektorių $v_1(1,2)$ ir $v_2(-3,4)$.

Sprendimas. Iš aukščiau pateiktos formulės, gauname

$$\cos\varphi = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2+2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Taigi $\cos\varphi = \sqrt{5}/5$ ir $\varphi = \arccos\left(\sqrt{5}/5\right) \approx 63^\circ$. □

5. **pavyzdys.** Rasime parametro a reikšmę, su kuria vektoriai $v_1(1,4)$ ir $v_2(3,a)$ yra kolinearūs.

Sprendimas. Duoti vektoriai kolinearūs tada ir tik tada, kai jų koordinatės proporcingos (žr. aukščiau pateiktą formulę)

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{a}.$$

Taigi $a = 12$. □

Uždaviniai.

1*. Atlikite veiksmus su vektoriais: a) $2 \cdot (1,-5) - 3 \cdot (2,4)$; b) $-(1,7) + 2 \cdot (4,1) - 3 \cdot (0,3)$; c) $4 \cdot (1,2) - 3 \cdot (1,1)$.

2*. Raskite vektoriaus v ilgį, kai a) $v = (3,-4)$; b) $v = (-15,8)$; c) $v = (5,12)$; d) $v = (-12,-35)$; e) $v = (1,3)$.

3*. Atlikite veiksmus: a) $(1,2) \cdot (-2,3)$; b) $(4,-5) \cdot (3,-2)$; c) $((1,4)+(2,3)) \cdot (-1,2)$; d) $(2 \cdot (3,4) - (1,2)) \cdot (-(1,1) + 3 \cdot (-2,5))$.

4*. Su kokia parametro λ reikšme vektoriai v_1 ir v_2 yra statmeni, kai a) $v_1 = (1,5)$, $v_2 = (\lambda,-3)$; b) $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (3\lambda,-4)$; c) $v_1 = (0,7)$, $v_2 = (5\lambda,0)$; d) $v_1 = (2+\lambda,3)$, $v_2 = (2,1-\lambda)$.

5*. Su kokia parametro λ reikšme vektoriai v_1 ir v_2 yra kolinearūs, kai a) $v_1 = (2, \lambda)$, $v_2 = (-3, 4)$; b) $v_1 = (1, -5)$, $v_2 = (2 - \lambda, 3)$; c) $v_1 = (2 + \lambda, 3)$, $v_2 = (1 - \lambda, 2)$.

6*. Ar kampas tarp vektorių v_1 ir v_2 yra smailusis, kai a) $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (4, -1)$; b) $v_1 = (-2, -5)$, $v_2 = (4, -3)$; c) $v_1 = (3, -5)$, $v_2 = (2, 2)$; d) $v_1 = (-2, -3)$, $v_2 = (-4, 2)$.

7*. Raskite kampą tarp vektorių v_1 ir v_2, kai a) $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 1)$; b) $v_1 = (-1, 3)$, $v_2 = (6, 2)$; c) $v_1 = (3, 4)$, $v_2 = (12, -5)$.

8. Duotos trikampio viršūnės $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ ir $C(6, 0)$. Raskite šio trikampio kampus.

9. Duotos trikampio viršūnės $A(1, 3)$, $B(4, 7)$ ir $C(7, 2)$. Raskite šio trikampio plotą.

10. Ar trikampis, kurio viršūnės $A(1, 2)$, $B(5, 6)$ ir $C(9, 0)$, yra lygiašonis?

11. Įrodykite, jog keturkampis, kurio viršūnės $A(2, 3)$, $B(4, 8)$, $C(14, 4)$ ir $C(12, -1)$, yra stačiakampis.

12. $\mathcal{O}x$ ašyje raskite tokį tašką M, kad atstumas nuo taško $A(3, -3)$ būtų lygus 5.