

5 PRATYBOS. PLOKŠTUMA ERDVĖJE

Paulius Drungilas

TURINYS

Uždaviniai

4

Bendroji plokštumos erdvėje lygtis yra

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kur $a \neq 0$ arba $b \neq 0$ arba $c \neq 0$. Vektorius $\vec{n}(a, b, c)$ visada statmenas šiai plokštumai ir vadinamas tos plokštumos **normalės vektoriumi**.

Plokštumos, einančios per tašką $A(x_0, y_0, z_0)$ ir statmenos nenuliniam vektoriui $\vec{n}(a, b, c)$, lygtis yra :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Plokštumos, einančios per tašką $A(x_0, y_0, z_0)$ ir lygiagrečios vektoriams $\vec{a}(n_1, m_1, l_1)$ ir $\vec{b}(n_2, m_2, l_2)$, lygtis yra :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_1 & m_1 & l_1 \\ n_2 & m_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Plokštumos, einančios per tris taškus $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ ir $C(x_2, y_2, z_2)$, lygtis yra :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kampas φ tarp plokštumų $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ skaičiuojamas pagal formulę

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Plokštumų $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ lygiagretumo sąlyga yra :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

o šių plokštumų statmenumo sąlyga yra :

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

Taško $A(x_0, y_0, z_0)$ atstumas d iki plokštumos $ax + by + cz + d = 0$ yra :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. **pavyzdys.** Įsitikinsime, kad plokštumos $x + 2y + 2z - 5 = 0$ ir $x + 4y + 8z - 13 = 0$ nėra lygiagrečios, nėra statmenos, ir rasime lygtis plokštumų, kurios duotųjų plokštumų sudaromus dvisienius kampus dalintų pusiau.

Sprendimas. Vektorius $\vec{n}_1 (1, 2, 2)$ yra statmenas plokštumai $p_1 : x + 2y + 2z - 5 = 0$, o vektorius $\vec{n}_2 (1, 4, 8)$ yra statmenas plokštumai $p_2 : x + 4y + 8z - 13 = 0$. Kadangi vektoriai \vec{n}_1 ir \vec{n}_2 nėra kolinearūs (koordinatės neproporcingos) ir nėra statmeni (skalioarinė sandauga $\neq 0$), tai ir plokštumos p_1 ir p_2 nėra nei lygiagrečios, nei statmenos.

Plokštumos, kurios plokštumų p_1 ir p_2 sudaromus dvisienius kampus dalija pusiau, sudaro aibę erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo plokštumų p_1 ir p_2 .

Tarkime, jog taškas $A(x, y, z)$ yra vienodai nutolęs nuo plokštumų p_1 ir p_2 . Taško $A(x, y, z)$ atstumas iki plokštumos p_1 yra

$$\frac{|x + 2y + 2z - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}},$$

o šio taško atstumas iki plokštumos p_2 yra

$$\frac{|x + 4y + 8z - 13|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}}.$$

Šie atstumai sutampa, todėl

$$\frac{|x + 2y + 2z - 5|}{3} = \frac{|x + 4y + 8z - 13|}{9}.$$

Vadinasi,

$$\frac{x + 2y + 2z - 5}{3} = \pm \frac{x + 4y + 8z - 13}{9}.$$

Jei

$$\frac{x + 2y + 2z - 5}{3} = \frac{x + 4y + 8z - 13}{9},$$

tai gauname plokštumos lygtį $x + y - z - 1 = 0$, o jei

$$\frac{x + 2y + 2z - 5}{3} = -\frac{x + 4y + 8z - 13}{9},$$

tai gauname plokštumos lygtį $2x + 5y + 7z - 14 = 0$. Taigi plokštumų, kurios p_1 ir p_2 plokštumų sudaromus dvisienius kampus dalija pusiau, lygtys yra $x + y - z - 1 = 0$ ir $2x + 5y + 7z - 14 = 0$. \square

2. pavyzdys. Rasime taško $A(3, 6, 5)$ projekciją P plokštumoje $x + 2y + 3z - 2 = 0$ ir taškui A simetrišką tašką A_1 šios plokštumos atžvilgiu.

Sprendimas. Tegul taško P koordinatės yra $P(x, y, z)$. Šis taškas priklauso duotai plokštumai, todėl teisinga lygybė $x + 2y + 3z - 2 = 0$. Kadangi taškas P yra taško A projekcija duotoje plokštumoje, tai vektorius \vec{AP} ($x - 3, y - 6, z - 5$) yra statmenas duotai plokštumai. Vektorius $\vec{a}(1, 2, 3)$ yra statmenas plokštumai $x + 2y + 3z - 2 = 0$, todėl vektoriai \vec{AP} ir \vec{a} yra lygiagretūs ir teisinga lygybė

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 6}{2} = \frac{z - 5}{3}.$$

Iš šių sąlygų randame : $x = 1, y = 2$ ir $z = -1$. Tada $P(1, 2, -1)$.

Tegul taško A_1 koordinatės yra $A_1(x_1, y_1, z_1)$. Taškas P yra atkarpos AA_1 vidurys. Todėl teisingos lygybės

$$\frac{3 + x_1}{2} = 1, \quad \frac{6 + y_1}{2} = 2, \quad \frac{5 + z_1}{2} = -1.$$

Iš čia gauname $x_1 = -1, y_1 = -2, z_1 = -7$ ir $A_1(-1, -2, -7)$. \square

3. pavyzdys. Rasime parametro m reikšmę, su kuria plokštumos $x + y + mz - 1 = 0$, $x - 2y - 3z + 2 = 0$ ir $10x - 5y - z + 1 = 0$ turi tiksliai vieną bendrą tašką.

Sprendimas. Ieškodami šių plokštumų sankirtos taškų, sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} x + y + mz - 1 = 0 \\ x - 2y - 3z + 2 = 0 \\ 10x - 5y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Ši sistema turės vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & -5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Suskaičiavę šį determinantą gauname, jog duotosios plokštumos kirsis tik viename taške, kai $m \neq 14/5$. \square

Uždaviniai.

- 1*. Raskite taško $A(1, 2, 1)$ atstumą iki plokštumos $2x + 3y + z - 2 = 0$.
Ats.: $\sqrt{14}/2$.
- 2*. Įsitikinkite, kad plokštumos $2x + y - 3z + 5 = 0$ ir $4x + 2y - 6z + 7 = 0$ yra lygiagrečios ir raskite
a) atstumą tarp plokštumų;
b) plokštumą, vienodai nutolusią nuo šių plokštumų.
Ats.: a) $3\sqrt{14}/28$; b) $8x + 4y - 12z + 17 = 0$.
- 3*. Įsitikinkite, kad plokštumos $x + 2y + 2z - 5 = 0$ ir $x + 4y + 8z - 13 = 0$ nėra lygiagrečios, nėra statmenos, ir raskite lygtis plokštumų, kurios duotųjų plokštumų sudaromus dvisienius kampus dalintų pusiau. (Žr. 1 pavyzdį.)
Ats.: $x + y - z - 1 = 0$ ir $2x + 5y + 7z - 14 = 0$.
- 4*. Kokios turi būti parametrų a ir b reikšmės, kad plokštumos

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ x - y + 3z - 3 &= 0 \\ 3x + ay + z + b &= 0 \end{aligned}$$

- a) turėtų tikrai vieną bendrą tašką;
b) eitų per vieną tiesę;
c) poromis kirsdamosi sudarytų tris skirtingas lygiagrečias tieses.
Ats.: a) $a \neq -1/3$; b) $a = -1/3$, $b = -11/3$; c) $a = -1/3$, $b \neq -11/3$.
- 5*. Raskite lygtį plokštumos,
a) einančios per tašką $A(1, 2, 2)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}(1, -2, 3)$;
b) einančios per tris taškus $A(1, 2, 1)$, $B(1, -1, 3)$ ir $C(2, 2, 3)$;
c) einančios per tašką $A(1, 2, 1)$ ir lygiagrečios plokštumai $x + 3y - 2z + 7 = 0$;
d) einančios per tašką $A(1, 2, 1)$ ir lygiagrečios vektoriams $\vec{a}(2, 1, 2)$ ir $\vec{b}(3, 1, 5)$;
e) einančios per tašką $A(1, 2, 1)$ ir statmenos susikertančioms plokštumoms $2x + 3y - z + 5 = 0$ ir $3x + y + 4z + 9 = 0$.
Ats.: a) $x - 2y + 3z - 3 = 0$; b) $6x - 2y - 3z + 1 = 0$; c) $x + 3y - 2z - 5 = 0$; d) $3x - 4y - z + 6 = 0$; e) $13x - 11y - 7z + 16 = 0$.

- 6*. Raskite aibę erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo taškų $A(1, 3, 2)$ ir $B(5, 1, 10)$.
Ats.: plokštuma $2x - y + 4z - 28 = 0$.
- 7*. Raskite taško $A(2, -3, -6)$ projekciją plokštumoje $x + y + z - 4 = 0$.
Ats.: $(17/3, 2/3, -7/3)$.
- 8*. Suskaičiuokite kampą tarp plokštumų $3y - z + 10 = 0$ ir $2y + z - 3 = 0$.
Ats.: 45° .
- 9*. Erdvėje duotas trikampis, kurio viršūnės yra taškai $A(-1, 0, 0)$, $B(4, -1, -1)$ ir $C(2, 3, 1)$. Raskite:
a) trikampio ABC plokštumos lygtį;
b) lygtį plokštumos, kuri eina per viršūnę A ir yra statmena vidurio linijai, lygiagrečiai kraštinei AC .
10. Raskite piramidės, ribojamos plokštumos $3x - 4y + 6z - 24 = 0$ ir koordinatinių plokštumų Oxy , Oxz bei Oyz , tūrį.
Ats.: 32.
11. Duoti du taškai $A(4, -2, 3)$ ir $B(7, 1, -2)$ bei dvi plokštumos $P_1 : 3x + 2y - z + 8 = 0$ ir $P_2 : 2x - 3y + 5z + 2 = 0$. Nustatykite:
a) Ar taškai A ir B priklauso tam pačiam plokštumų P_1 ir P_2 sudarytam dvisieniam kampui?
b) Ar taškai A ir B priklauso gretimiems (turintiems bendrą sieną) plokštumų P_1 ir P_2 sudarytiems dvisieniams kampams?
c) Ar taškai A ir B priklauso priešingiems (neturintiems bendros sienos) plokštumų P_1 ir P_2 sudarytiems dvisieniams kampams?
Ats.: a) taip; b) ne; c) ne.