FUNKCIJŲ TYRIMAS

G. Stepanauskas

2009 12 12

Turinys

1 Funkcijos monotoniškumas

1 apibrėžimas. *Funkcija $f(x)$ vadinama* ***didėjančia*** *(**mažėjančia**)* ***intervale*** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *(intervalas gali būti ir uždaras, ir begalinis), jei*

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2)). \tag{1}$$

Žymima $f(x) \uparrow$ $(f(x) \downarrow)$.

Funkcija $f(x)$ vadinama ***nedidėjančia*** *(**nemažėjančia**)* ***intervale*** $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *(intervalas gali būti ir uždaras, ir begalinis), jei*

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ (f(x_1) \leq f(x_2)). \tag{2}$$

Žymima $f(x) \not\uparrow$ $(f(x) \not\downarrow)$.

Visos šios keturios rūšys funkcijų vadinamos ***monotoninėmis*** *funkcijomis. Funkcijos, tenkinančios* (1) *reikalavimą, vadinamos* ***griežtai monotoninėmis****, o funkcijos, tenkinančios* (1)*, vadinamos* ***negriežtai monotoninėmis****.*

1 teorema. *Tegul funkcija* $f(x)$ *intervale* (a,b) *turi teigiamą (neigiamą) išvestinę. Tuomet* $f(x)$ *didėja (mažėja) intervale* (a,b)*.*

Įrodymas. Tegul $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ ir $x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. Iš Lagranžo formulės gausime

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2),$$
$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \quad \text{t.y. } f(x) \uparrow .$$

Kai $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, įrodymas analogiškas. Teorema įrodyta. ◀

Teoremos sąlyga $f'(x) > 0 (< 0)$ nėra būtina funkcijai didėti (mažėti). Teoremos teiginys yra teisingas ir tada, kai $f'(x) = 0$ baigtiniam intervalo (a,b) taškų skaičiui, o kituose intervalo (a,b) taškuose yra teigiama (neigiama).

2 Funkcijos ekstremumai

2 apibrėžimas. *Funkcijos* $f(x)$ *reikšmė* $f(x_0)$ *vadinama fukcijos lokaliuoju* ***maksimumu*** *(****minimumu****), jei egzistuoja tokia taško* x_0 *aplinka* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$*, kad*

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \ (f(x) \geq f(x_0)). \tag{3}$$

Jeigu teisinga ir

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 \ \Rightarrow f(x) < f(x_0) \ (f(x) > f(x_0)), \tag{4}$$

tai maksimumo (minimumo) taškas x_0 *vadinamas lokaliuoju* ***griežtojo maksimumo*** *(****minimumo****) tašku.*

Funkcijos lokalieji maksimumai ir minimumai vadinami funkcijos ***ekstremumais****.*

Jeigu funkcija $f(x)$ apibrėžta uždarame (pusiau uždarame) intervale $[a,b]$ ($[a,b)$ arba $(a,b]$), tai taškuose a ir b (viename iš jų) funkcija gali įgyti kraštinius maksimumą arba minimumą. Taškas a vadinamas **kraštinio maksimumo** (**minimumo**) tašku, jei egzistuoja tokia taško a dešininė aplinka $(a, a+\delta)$, kad

$$\forall x \in (a, a + \delta) \ \Rightarrow f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a)). \tag{5}$$

Analogiškai apibrėžiamas kraštinis maksimumas ir minimumas taške b.

2.1 Būtina ekstremumo sąlyga

2 teorema. *Tarkime, funkcija $f(x)$ yra abibrėžta intervale (a, b), o jo vidiniame taške c turi ekstremumą. Jei taške c funkcija $f(x)$ turi išvestinę, tai $f'(c) = 0$.*

Taigi **būtina ektremumo** (taške $x = c$) **sąlyga** – funkcijos išvestinė tame taške lygi nuliui: $f'(c) = 0$.

Pastebėkime, kad tai tik būtina ekstremumo sąlyga. Jei kokiame nors taške $f'(x_0) = 0$, tai dar nereiškia, kad taške x_0 funkcija turės ekstremumą. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^3$ taške $x = 0$ ekstremumo neturi nors $f'(0) = 0$.

Ekstremumas gali būti ir tokiame taške, kuriame funkcija neturi išvestinės. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = |x|$ taške $x = 0$ neturi išvestinės, tačiau taškas $x = 0$ yra funkcijos minimumo taškas. Kitas pavyzdys $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ši funkcija taške $x = 0$ neturi nei išvestinės, nei ekstremumo.

Taškai, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba išvestinės neturi vadinami funkcijos **kritiniais taškais**.

2.2 Pakankamos ekstremumo sąlygos

3 teorema. *Tarkime, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 yra tolydi ir taško x_0 aplinkoje $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (išskyrus galbūt patį tašką x_0) turi baigtinę išvestinę $f'(x)$. Tuomet*

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$(x_0, x_0 + \delta)$	
jei $f'(x)$	$+$	$-$	$\Rightarrow x_0$ *yra* $f(x)$ *maksimumo taškas*
jei $f'(x)$	$-$	$+$	$\Rightarrow x_0$ *yra* $f(x)$ *minimumo taškas*
jei $f'(x)$	$+$	$+$	$\Rightarrow x_0$ *nėra* $f(x)$ *ekstremumo taškas*
jei $f'(x)$	$-$	$-$	$\Rightarrow x_0$ *nėra* $f(x)$ *ekstremumo taškas*

Įrodymas. Tegul $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$. Iš Lagranžo formulės turėsime

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \ c \text{ yra tarp } x \text{ ir } x_0 \tag{6}$$

Tegul išvestinė taške x_0 keičia ženklą iš $+$ į $-$, t.y. patenkinta pirma sąlyga lentelėje. Tuomet kai $x < x_0$, $f'(c) > 0$, o kai $x > x_0$, $f'(c) < 0$. Taigi dešinioji (6) lygybės pusė visada neigiama, nes daugikliai yra priešingų ženklų. Neigiama turi būti ir dešinioji (6) lygybės pusė. Todėl $f(x) < f(x_0)$, kai $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, ir taške x_0 funkcija turi maksimumą.

Kai išvestinė taške x_0 keičia ženklą iš $-$ į $+$, įrodymas analogiškas.

Kai išvestinė abiejose taško x_0 pusėse yra teigiama, t.y. turi ženklą $+$, tuomet $f(x) < f(x_0)$, kai $x \in (x_0-\delta, x_0)$, ir $f(x) > f(x_0)$, kai $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Todėl ekstremumo taške x_0 funkcija neturės.

Kai išvestinė abiejose taško x_0 pusėse yra neigiama, t.y. turi ženklą $-$, samprotaujame analogiškai. Teorema įrodyta. ◀

4 teorema. *Tarkime, kad* $f'(x_0) = 0$. *Tuomet*

jei $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$ x_0 *yra* $f(x)$ *maksimumo taškas*
jei $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$ x_0 *yra* $f(x)$ *minimumo taškas*

Įrodymas. Antroji funkcijos $f(x)$ išvestinė yra pirmosios išvestinės išvestinė. Todėl

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Tegul $f''(x_0) < 0$. Iš ribos savybių turėsime, kad egzistuoja tokia taško x_0 aplinka $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kad jei

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Iš pastarosios nelygybės gausime, kad $f'(x)$ taške x_0 keičia ženklą iš $+$ į $-$. Taigi taške x_0 turime maksimumą.

Kai $f''(x_0) > 0$, įrodymas analogiškas. Teorema įrodyta. ◀

5 teorema. *Tarkime, kad* $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *taške* x_0 *funkcija* $f(x)$ *turi tolydžią* n*-ąją išvestinę,* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *ir* n *– lyginis skaičius. Tuomet*

jei $f^{(n)}(x_0) < 0$	$\Rightarrow$ x_0 *yra* $f(x)$ *maksimumo taškas*
jei $f^{(n)}(x_0) > 0$	$\Rightarrow$ x_0 *yra* $f(x)$ *minimumo taškas*

Įrodymas. Užrašykime funkcijos $f(x)$ Teiloro formulę su Lagranžo liekamuoju nariu:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ } c \text{ yra tarp } x \text{ ir } x_0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Tarkime, $f^{(n)}(x_0) < 0$. Kadangi $f^{(n)}(x)$ yra tolydi funkcija taške x_0, tai egzistuoja tokia taško x_0 aplinka $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kad joje $f^{(n)}(x) <$

0. Imkime x iš minėtos aplinkos, tuomet ir c priklausys tai aplinkai ir $f^{(n)}(c) < 0$. Kadangi n yra lyginis skaičius, tai (7) lygybės dešinioji pusė visada neteigiama. Tokia turi būti ir kairioji. Taigi $f(x) \leq f(x_0)$ ir todėl funkcija $f(x)$ taške x_0 turi maksimumą.

Kai $f^{(n)}(x_0) > 0$, įrodymas analogiškas. Teorema įrodyta. ◀

3 Funkcijos grafiko išgaubtumas

3 apibrėžimas. *Funkcijos $f(x)$ grafikas vadinamas* ***išgaubtu*** *(iškilu)* ***aukštyn*** *(**žemyn**) intervale (a, b), jeigu visuose intervalo (a, b) taškuose egzistuoja grafiko liestinė ir jeigu visi grafiko taškai šiame intervale yra po liestine (virš liestinės), nubrėžta per bet kurį grafiko tašką $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$.*

6 teorema. *Tegul funkcija $f(x)$ intervale (a, b) turi neigiamą (teigiamą) antrąją išvestinę. Tuomet funkcijos $f(x)$ grafikas intervale (a, b) yra išgaubtas aukštyn (žemyn).*

Įrodymas. Tarkime $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$. Tegul x_0 bet kuris intervalo (a, b) taškas. Funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtis yra tokia:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{8}$$

Užrašykime funkcijos $f(x)$ Teiloro formulę:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2, \ c \text{ yra tarp } x \text{ ir } x_0. \tag{9}$$

Dabar iš (8) lygties atimkime (9) lygtį. Gausime

$$Y - f(x) = -\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Pastarosios lygybės dešinioji pusė nemažesnė už 0 $\forall x \in (a, b)$. Todėl

$$Y - f(x) \geq 0,$$

ir $f(x)$ grafiko taškai intervale (a, b) yra po grafiko liestine. Taigi funkcijos $f(x)$ grafikas yra išgaubtas aukštyn.

Kai $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, įrodymas analogiškas. Teorema įrodyta. ◀

4 Funkcijos grafiko vingių taškai

4 apibrėžimas. *Funkcijos $f(x)$ grafiko taškas $(c, f(c))$ vadinamas grafiko* ***vingio*** *(perlinkio) tašku, jei egzistuoja grafiko liestinė taške $(c, f(c))$ ir tokia taško c aplinka, kurioje funkcijos $f(x)$ grafikas į kairę ir į dešinę nuo taško c turi skirtingo išgaubtumo kryptis.*

4.1 Būtina funkcijos grafiko vingio taško sąlyga

7 teorema. *Tegul taškas $(c, f(c))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas ir taške c funkcija turi tolydžią antrąją išvestinę. Tuomet $f''(c) = 0$.*

Įrodymas. Tarkime $f''(c) > 0$. Tuomet iš funkcijos $f''(x)$ tolydumo taške c išplaukia, kad egzistuoja taško c aplinka $(c - \delta, c + \delta)$ kurioje $f''(x)$ išlieka teigiama. Todėl intervale $(c-\delta, c+\delta)$ funkcijos grafikas bus išgaubtas aukštyn ir taškas c nebus vingio taškas. Gautoji prieštara paneigia prielaidą, kad $f''(c) > 0$.

Kai $f''(c) < 0$, samprotaujame analogiškai. Taigi $f''(c) = 0$. Teorema įrodyta. ◀

Grafiko vingio taškas gali būti ir toks, kuriame funkcija neturi antrosios išvestinės. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ taške $x = 0$ neturi net pirmosios išvestinės, tačiau taškas $x = 0$ yra funkcijos grafiko vingio taškas.

4.2 Pakankamos funkcijos grafiko vingio taškų sąlygos

8 teorema. *Tarkime, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 yra tolydi ir jos grafikas turi liestinę taške $(x_0, f(x_0))$. Be to, tegul taško x_0 aplinkoje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (išskyrus galbūt patį tašką x_0) turi baigtinę antrąją išvestinę $f''(x)$. Tuomet*

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$(x_0, x_0 + \delta)$	
jei $f''(x)$	$+$	$-$	$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ *yra vingio taškas*
jei $f''(x)$	$-$	$+$	$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ *yra vingio taškas*
jei $f''(x)$	$+$	$+$	$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ *nėra vingio taškas*
jei $f''(x)$	$-$	$-$	$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ *nėra vingio taškas*

Įrodymas. Kai $f''(x)$ į kairę ir į dešinę nuo x_0 turi skirtingus ženklus, tai, remiantis 6 teorema, iškilumo kryptis į kairę ir į dešinę nuo x_0 nevienoda. Taigi taške $(x_0, f(x_0))$ funkcijos grafikas turės vingį.

Jeigu $f''(x)$ į kairę ir į dešinę nuo x_0 turi vienodus ženklus, tai iškilumo kryptis į kairę ir į dešinę nuo x_0 ta pati. Todėl taške $(x_0, f(x_0))$ funkcijos grafikas vingio neturės. Teorema įrodyta. ◀

9 teorema. *Tarkime, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 turi baigtinę trečiąją išvestinę, $f''(x_0) = 0$, o $f'''(x_0) \neq 0$. Tuomet taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas.*

Įrodymas. Kadangi funkcija taške x_0 turi trečiąją išvestinę, tai kažkokioje taško x_0 aplinkoje turi antrąją ir pirmąją išvestines. Todėl $f(x)$ yra tolydi taške x_0 ir jos grafikas turi liestinę taške $(x_0, f(x_0))$.

Tarkime, $f'''(x_0) > 0$. Pagal išvestinės apibrėžimą

$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0}.$$

Iš ribos savybių išplaukia, kad egzistuoja tokia taško x_0 aplinka, kurioje

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

Iš pastarosios nelygybės turime, kad $f''(x)$ į kairę nuo x_0 yra neigiama, o į dešinę nuo x_0 yra teigiama. Iš 8 teoremos gauname, kad taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas.

Kai $f'''(x_0) < 0$, samprotaujame analogiškai. Teorema įrodyta. ◀

10 teorema. *Tarkime, kad $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, taške x_0 funkcija $f(x)$ turi tolydžią n-ąją išvestinę, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ir n – nelyginis skaičius. Tuomet taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas.*

Įrodymas. Pagal teoremos sąlygas grafiko liestinė taške $(x_0, f(x_0))$ egzistuoja, nes funkcija $f(x)$ turi pirmąją išvestinę taške x_0, ir pati funkcija taške x_0 yra tolydi. Užrašykime Teiloro formulę funkcijai $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{IV}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}, \ c \text{ yra tarp } x \text{ ir } x_0 \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Tarkime, $f^{(n)}(x_0) < 0$. Kadangi $f^{(n)}(x)$ yra tolydi funkcija taške x_0, tai egzistuoja tokia taško x_0 aplinka $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kad joje $f^{(n)}(x) < 0$. Imkime x iš minėtos aplinkos, tuomet ir c priklausys tai aplinkai ir $f^{(n)}(c) < 0$. Kadangi n yra nelyginis skaičius, tai (10) lygybės dešinioji pusė bus teigiama, kai $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, ir neigiama, kai $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Tokia turi būti ir kairioji. Iš 8 teoremos gauname, kad taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas.

Kai $f^{(n)}(x_0) > 0$, įrodymas analogiškas. Teorema įrodyta. ◀

5 Funkcijos grafiko asimptotės

5 apibrėžimas. *Tiesė $x = a$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **vertikaliąja asimptote**, jei bent viena iš ribų*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad ar \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

yra lygi $+\infty$ arba $-\infty$.

6 apibrėžimas. *Tegul funkcija $f(x)$ yra apibrėžta pakankamai dideliems x, t.y. kai $x \to +\infty$ (dideliems neigiamiems skaičiams, t.y. kai $x \to -\infty$). Tiesė*

$$Y = kx + b$$

vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **pasvirąja asimptote**, *kai $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), jei*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \ \left(\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0\right).$$

Kai $k = 0$ pasviroji asimptotė vadinama **horizontaliąja**.

11 teorema. *Funkcijos $f(x)$ grafikas turi pasvirąją asimptotę $Y = kx + b$, kai $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \ \ ir \ \ \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b \tag{11}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k \ \ ir \ \ \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b\right).$$

Įrodymas. Būtinumas. Tegul funkcijos grafikas turi pasvirąją asimptotę. Tuomet

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b\\
&\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - kx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}\\
&\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k\\
&\Rightarrow \text{ teoremos (11) sąlygos patenkintos.}
\end{aligned}$$

Teoremos sąlygų būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Tegul teoremos (11) sąlygos yra patenkintos. Tuomet

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b\\
&\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0\\
&\Rightarrow \text{ funkcijos grafikas turi pasvirąją asimptotę.}
\end{aligned}$$

Teoremos sąlygų pakankamumas įrodytas.

Kai $x \to -\infty$ įrodymas yra lygiai toks pat. Teorema įrodyta. ◀

6 Bendroji funkcijos tyrimo schema

1. Nustatoma funkcijos apibrėžimo sritis. Jeigu yra trūkio taškai, apskaičiuojamos funkcijos ribos jiems iš kairės ir iš dešinės. Apskaičiuojamos ribos apibrėžimo srities galuose.

2. Randami koordinatinių ašių ir funkcijos grafiko susikirtimo taškai.

3. Randamos funkcijos grafiko vertikaliosios ir pasvirosios asimptotės arba nustatoma, kad jų nėra.

4. Surandami funkcijos monotoniškumo intervalai bei ekstremumo taškai. Suskaičiuojamos funkcijos reikšmės ekstremumo taškuose.

5. Surandami funkcijos grafiko pastovios krypties išgaubtumo intervalai bei grafiko vingio taškai.

6. Pagal gautus duomenis braižomos funkcijos grafiko asimptotės ir funkcijos grafikas.

7. Nustatoma funkcijos reikšmių kitimo sritis.