Algebra

G. Stepanauskas

2012 08 15

Turinys

1 Matricos

1.1 Matricos sąvoka

1.1 apibrėžimas. *Stačiakampė skaičių lentelė, turinti eilutes ir stulpelius, vadinama* ***matrica****.*

Paprastai ta skaičių lentelė parašoma skliaustuose, bet nebūtinai. Mes matricas žymėsime didžiosiomis lotyniškomis raidėmis ir skaičių lentelę rašysime tarp paprastų skliaustų.

1.1 pavyzdys. *Štai poros matricų pavyzdžiai:*

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 9 & 16 \\ -6 & 1/3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matricą sudarantys skaičiai vadinami **matricos elementais**. Bendruoju atveju matricos elementus žymėsime mažosiomis lotyniškomis raidėmis su indeksais, nurodančiais matricos elemento vietą matricoje, t.y. jo eilutę (pirmasis indeksas) ir stulpelį (antrasis indeksas):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Taigi a_{ij} yra matricos elementas, esantis i-ojoje eilutėje ir j-ajame stulpelyje.

Užrašytoji (1.1) formulėje matrica A turi m eilučių ir n stulpelių. Šie eilučių ir stulpelių skaičiai vadinami matricos **matavimais** arba matricos **eile**, o pati matrica $\mathbf{m \times n}$ **eilės matrica**. Jeigu reikia akcentuoti matricos eilę, matrica žymima $\mathbf{A_{m\times n}}$.

Matricoms žymėti naudojami ir tokie žymėjimai:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m\times n}. \tag{1.2}$$

1.2 Matricų rūšys

Matricos, turinčios vienodą skaičių eilučių ir vienodą skaičių stulpelių, t.y tos pačios eilės, vadinamos **vienarūšėmis**.

Vienarūšės matricos gali būti palyginamos. Dvi vienarūšės matricos $A_{m\times n}$ ir $B_{m\times n}$ yra **lygios** tik tada, kai $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$. Rašoma

$$A = B.$$

Matrica, gaunama iš matricos A, sukeitus jos eilutes ir stulpelius vietomis, vadinama **transponuotąja matrica**. Ji žymima A^T. Jei

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tai

$$A^T = A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.2 pavyzdys. *Matricos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

transponuotoji matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrica, kurios visi elementai yra lygūs 0, vadinama **nuline** matrica. Žymima

$$O = O_{m\times n} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica, turinti vienodą skaičių eilučių ir stulpelių, t.y. $A = A_{n\times n}$, vadinama **kvadratine matrica**, o skaičius n – jos **eile**. Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sudaro jos **pagrindinę įstrižainę**, o elementai $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – **šalutinę įstrižainę**.

Kvadratinė matrica, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai yra lygūs 1, t.y. $a_{ii} = 1$, o visi kiti elementai yra lygūs 0, t.y. $a_{ij} = 0, i \neq j$, vadinama **vienetine matrica**. Žymima

$$E = E_{n\times n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kvadratinė matrica, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai yra nelygūs 0, t.y. $a_{ii} \neq 0\ \forall i$, o visi kiti elementai yra lygūs 0, vadinama **diagonaline matrica**:

$$D = D_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kvadratinės matricos, kurių visi elementai, esantys virš pagrindinės įstrižainės, arba visi elementai po pagrindine įstrižaine, yra lygūs 0, vadinamos **trikampėmis matricomis**. *Apatinė* trikampė matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \text{ kai } i < j,$$

ir *viršutinė* trikampė matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \text{ kai } i > j.$$

Kvadratinė matrica $A = (a_{ij})$ vadinama **simetrine matrica**, jei $a_{ij} = a_{ji}$. Simetrinė matrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.3 pavyzdys. *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

yra simetrinė matrica.

1.3 Matricų tiesiniai veiksmai

Matricų aibėje apibrėžiami du tiesiniai veiksmai: matricos daugyba iš skaičiaus ir matricų sudėtis.

Skačiaus α ir matricos $A_{m\times n} = (a_{ij})$ sandauga vadinama matrica $B_{m\times n} = (b_{ij})$, kurios elementai $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, t.y.

$$\alpha A = A\alpha = \alpha(a_{ij}) := (\alpha a_{ij}) = (b_{ij}) = B. \tag{1.3}$$

Pats veiksmas vadinamas **matricos daugyba iš skaičiaus**.

Dviejų vienarūšių **matricų $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ir $B_{m\times n} = (b_{ij})$ suma** vadinama matrica $C_{m\times n} = (c_{ij})$, kurios elementai $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, t.y.

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C. \tag{1.4}$$

Veiksmas vadinamas **matricų sudėtimi**.

Matrica $(-1)A$ vadinama **priešinga matrica** matricai A ir žymima $-A$. Veiksmas, kai sudedama matrica A ir matrica priešinga matricai B, t.y. matrica $-B$, vadinamas **matricų atimtimi** ir žymimas $A - B$. Matricų A ir B **skirtumas** yra matrica

$$A + (-B) =: A - B. \tag{1.5}$$

1.4 pavyzdys. *Tegul*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuomet

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Matricų daugyba

Matricą A galima padauginti iš matricos B tik tuomet, kai matricos A stulpelių skaičius lygus matricos B eilučių skaičiui, t.y. $A = A_{m\times\mathbf{k}}$, o $B = B_{\mathbf{k}\times n}$.

1.2 apibrėžimas. ***Matricų*** $A_{m\times k}$ ***ir*** $B_{k\times n}$ ***sandauga*** *vadinama matrica* $C_{m\times n}$, *kurios elementai* c_{ij} *paskaičiuojami pagal formulę*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}. \tag{1.6}$$

Taigi

$$A_{m\times k}B_{k\times n} := C_{m\times n} = (c_{ij}). \tag{1.7}$$

1.5 pavyzdys. *Tegul*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raskime AB *ir* BA.

Sprendimas.

$$\begin{aligned} A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ = C_{2\times 2} &= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 + (-1)\times(-5) & 1\times 2 + 2\times 3 + (-1)\times 1 \\ 2\times 1 + 0\times 2 + 1\times(-5) & 2\times 2 + 0\times 3 + 1\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = D_{3\times 3} &= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 2 + 2\times 0 & 1\times(-1) + 2\times 1 \\ 2\times 1 + 3\times 2 & 2\times 2 + 3\times 0 & 2\times(-1) + 3\times 1 \\ (-5)\times 1 + 1\times 2 & (-5)\times 2 + 1\times 0 & (-5)\times(-1) + 1\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \\ -3 & -10 & 6 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jeigu matricos A ir B yra kvadratinės tos pačios eilės matricos, tai sandaugos AB ir BA yra vienarūšės matricos. Jas galima palyginti. Jeigu $AB = BA$, tai matricos A ir B vadinamos **komutuojančiomis**.

1.6 pavyzdys. *Patikrinkime ar matricos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yra komutuojančios.

Sprendimas.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad BA = \begin{pmatrix} -7 & -10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Taigi $AB \neq BA$. Matricos A ir B nėra komutuojančios. ◄

1.1 užduotis. *Įsitikinkite, kad matricos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

yra komutuojančios.

1.2 užduotis. (*) *Įsitikinkite, kad yra teisinga lygybė*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

2 Determinantai

3 Tiesinių lygčių sistemos

4 Vektoriai ir vektorinės erdvės

5 Daugianariai

5.1 Įvadas

5.1 apibrėžimas. n-*ojo laipsnio daugianariu* (arba ***polinomu***) $f_n(x)$ *vadinama išraiška*

$$f_n(x) = f(x) = f := a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

*x vadinamas polinomo **kintamuoju** (arba nežinomuoju), $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – polinomo **koeficientais**, a_n – **vyriausiuoju koeficientu**, $a_k x$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – polinomo **nariais**, $a_n x$ – **vyriausiuoju nariu**, a_0 – **laisvuoju nariu**.*

Polinomas $f_0(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$, yra nulinio laipsnio polinomas. Polinomo tapatingai lygaus nuliui (nulinio polinomo) $f(x) = 0$ laipsnis yra neapibrėžtas (kartais jis prilyginamas $-\infty$). Polinomo $f_n(x)$ laipsnis n yra žymimas: $n =: \deg f$.

Sulyginti galima tik to paties laipsnio polinomus. Du n-ojo laipsnio polinomai

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ir

$$g_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x_{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

yra **lygūs**, jei visi koeficientai prie atitinkamų kintamojo laipsnių sutampa

$$a_k = b_k \ \forall k.$$

Bet kokius du polinomus galima **sudėti**. Sudedami koeficientai prie atitinkamų kintamojo laipsnių, o neturintys atitinkamų kito polinomo koeficientų (kai laipsniai nesutampa) paliekami napakeisti.

Priešingas veiksmas sudėčiai – **atimtis** atliekama analogiškai.

Polinomų **daugyba** taip pat galima tarp bet kurių polinomų. Dviejų polinomų

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ir

$$g_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x_{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

sandauga yra polinomas

$$h_{n+m}(x) = f_n(x) \cdot g_m(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

kurio koeficientai

$$c_{n+m} = a_n b_m,\ d_{n+m-1} = a_{n-1}b_1 + a_1 b_{m-1},\ \ldots,\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1,\ c_0 = a_0 b_0.$$

Polinomų sandaugos laipsnis yra lygus dauginamųjų laipsnių sumai.

Atvirkščias daugybai veiksmas – **dalyba** polinomų aibėje bendrai **negalima**. Ta prasme polinomų aibė primena sveikųjų skaičių aibę. Vėliau išsiaiškinsime, kad galėsime dalyti tik kai kuriuos polinomus iš kai kurių, kaip ir sveikieji skaičiai gali dalytis ir gautis sveikasis skaičius tik tam tikrais atvejais.

5.2 Daugianarių dalyba su liekana

Nors dalybos veiksmas polinomams nėra apibrėžtas, bet dalyba su liekana, kaip ir sveikiesiems skaičiams, yra apibrėžiama.

5.1 teorema. *Bet kuriems dviems polinomams $f_n(x)$ ir $g_m(x)$ egzistuoja kiti du polinomai $q(x)$ ir $r(x)$, tokie, kad*

$$f_n(x) = g_m(x)q(x) + r(x). \tag{5.1}$$

Be to, polinomo $r(x)$ laipsnis yra mažesnis už polinomo $g_m(x)$ laipsnį arba $r(x) = 0$. Polinomai $q(x)$ ir $r(x)$, tenkinantys šią sąlygą, apibrėžiami vienareikšmiškai.

Įrodymas. Pirma dalis – (5.1) *formulės įrodymas.* Jei $n < m$, tai galime paimti $q(x) = 0,\ r(x) = f_n(x)$, ir lygybė (5.1) yra teisinga.

Tegul $n \geqslant m$ ir

$$f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0, \quad g_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_0,\ b_m \neq 0.$$

Polinomo

$$f_{(1)}(x) = f_n(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} g_m(x) \tag{5.2}$$

laipsnis yra mažesnis už n, nes koeficientai prie x^n (5.2) lygybės dešiniojoje pusėje susiprastina. Tegul $\deg f_{(1)} = n_1$, o vyriausiasis $f_{(1)}$ koeficientas $a_{n_1,1}$. Jeigu $n_1 \geqslant m$, tai analogiškai kaip ir (5.2) lygybėje

$$f_{(2)}(x) = f_{(1)}(x) - \frac{a_{n_1,1}}{b_m}\, x^{n_1-m} g_m(x), \quad \deg f_2 = n_2 < n_1. \tag{5.3}$$

Toliau, jei $n_2 \geqslant m$, ir $f_(2)$ vyriausiasis koeficientas yra $a_{n_2,2}$, procesą pratęsiame:

(5.4) $$f_{(3)}(x) = f_{(2)}(x) - \frac{a_{n_2,2}}{b_m}\, x^{n_2-m} g_m(x), \quad \deg f_3 = n_3 < n_2.$$

Taip tęskime tiek kartų (tarkime k kartų), kol sukonstruoto polinomo $f_{(k)}(x)$ laipsnis pasidarys mažesnis už m (arba $f_{(k)}(x) = 0$), t.y. $\deg f_{(k)} = n_k < m$ (arba $f_{(k)}(x)$ laipsnis neapibrėžtas). Taip tikrai atsitiks, nes polinomų $f_{(j)}$ laipsniai mažėja,

$$n > n_1 > n_2 > \cdots > n_k,$$

ir būtinai po baigtinio skaičiaus žingsnių (tą skaičių žymime k) n_k taps mažesniu už m. Taigi k-ame žingsnyje gausime

(5.5) $$f_{(k)}(x) = f_{(k-1)}(x) - \frac{a_{n_{k-1},k-1}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m} g_m(x), \quad \deg f_3 = n_3 < n_2.$$

Dabar, sudėję (5.2), (5.3), (5.4), ..., (5.5) ir suprastinę panašius narius, turėsime

(5.6)
$$f_{(k)}(x) = f_n(x) - \left(\frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a_{n_1,1}}{b_m}\, x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1},k-1}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m} \right) g_m(x).$$

Pažymėję

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a_{n_1,1}}{b_m}\, x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1},k-1}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m}, \quad r(x) = f_{(k)}(x)$$

ir įstatę į (5.6) lygybę, gausime (5.1) formulę. Taip pat turėsime, kad $\deg r < \deg g_m$ arba, kad $r(x) = 0$.

Antra dalis – vienareikšmiškumo įrodymas. Tegul teisinga (5.1) lygybė ir egzistuoja dar du polinomai $\tilde{q}(x)$ ir $\tilde{r}(x)$, tokie, kad

(5.7) $$f_n(x) = g_m(x)\tilde{q}(x) + \tilde{r}(x)$$

ir $\deg \tilde{r} < m$ arba $\tilde{r}(x) = 0$. Sulyginę (5.1) ir (5.7) lygybių dešiniąsias puses gausime

$$g_m(x)q(x) + r(x) = g_m(x)\tilde{q}(x) + \tilde{r}(x),$$

(5.8) $$g_m(x)(q(x) - \tilde{q}(x)) = \tilde{r}(x) - r(x).$$

(5.8) lygybės dešiniosios pusės laipsnis yra mažesnis už m, Jei kairiojoje pusėje polinomų skirtumas $q(x) - \tilde{q}(x) \neq 0$, tai kairiosios pusės laipsnis bus nemažesnis už m. Taigi (5.8) lygybė galima tik tada, kai $q(x) - \tilde{q}(x) = 0$, t.y., kai $q(x) = \tilde{q}(x)$. Bet tada kairioji pusė yra lygi 0. Tuomet nuliui turi būti lygi ir dešinioji pusė, t.y. $\tilde{r}(x) = r(x)$. Vienareikšmiškumas, o tuo pačiu ir visa teorema įrodyti. ◀

(5.1) formulėje polinomas $q(x)$ vadinamas **dalmeniu** (polinomo $f(x)$ dalybos iš polinomo $g(x)$ dalmeniu), o $r(x)$ **liekana** (polinomo $f(x)$ dalybos iš polinomo $g(x)$ liekana).

Norint praktiškai atlikti polinomų dalybą su liekana, reikia paprasčiausiai dalyti polinomus kampu, kol gausime liekaną, kurios laipsnis mažesnis už daliklio laipsnį.

5.3 Daugianarių dalikliai

5.2 apibrėžimas. *Jei dalinant polinomą $f(x)$ iš polinomo $g(x)$, dalybos liekana $r(x)$ yra lygi nuliui, tai sakysime, kad* ***polinomas*** $f(x)$ ***dalijasi iš polinomo*** $g(x)$ *arba kad polinomas $g(x)$ dalo polinomą $f(x)$, o polinomą $g(x)$ vadinsime polinomo $f(x)$* ***dalikliu****.*

Iš 5.1 teoremos išplaukia, kad, jei $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$, tai egzistuoja vienintelis polinomas $q(x)$ toks, kad

$$f(x) = g(x)\,q(x).$$

Šiuo atveju ir polinomas $q(x)$ bus polinomo $f(x)$ dalikliu.

Pastaba. Kiekvienas polinomas dalijasi iš bet kurio nulinio laipsnio polinomo.

Iš tikrųjų, jei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, o $g(x) = b_0 \neq 0$, tai

$$f(x) = b_0 \left(\frac{a_n}{b_0}\, x^n + \frac{a_{n-1}}{b_0}\, x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{b_0} \right) = g(x)\,q(x).$$

5.3 apibrėžimas. *Polinomas $h(x)$ vadinamas polinomų $f(x)$ ir $g(x)$* ***bendru dalikliu****, jei jis dalo abu polinomus ir $f(x)$, ir $g(x)$.*

5.4 apibrėžimas. *Dviejų nelygių nuliui polinomų $f(x)$ ir $g(x)$* ***didžiausiu bedruoju dalikliu****, vadinamas toks polinomas $d(x)$, kuris yra jų bendras daliklis ir kuris dalijasi iš bet kokio kito bendro šių polinomų daliklio.*

Didžiausias bendrasis daliklis žymimas taip:

$$d(x) = DBD(f(x), g(x)) = (f(x), g(x)).$$

Taip apibrėžę polinomų didžiausią bendrąjį daliklį, jų mes turėsime daug, nes jei polinomas $d(x)$ yra polinomų $f(x)$ ir $g(x)$ didžiausias bedrasis daliklis, tai tokiu bus ir bet kuris polinomas, gautas $d(x)$ padauginus iš nelygaus nuliui skaičiaus, t.y. $c\,d(x), c \neq 0$. Taigi, kad nebūtų daugiareikšmiškumo, sutariama, kad didžiausiu bendruoju dalikliu laikysime polinomą, kurio **vyriausiasis koeficientas yra lygus vienetui**.

Apibrėžėme polinomų didžiausią bendrąjį daliklį, bet nežinome, ar visos polinomų poros jį turės. Atsakymas teigiamas – taip turės. Tuojau šį tvirtinimą pagrįsime ir pateiksime algoritmą kaip tą didžiausią bendrąjį daliklį surasti.

Sveikųjų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį galima surasti išskaidžius skaičius pirminiais daugikliais. Polinomų didžiausią bendrąjį daliklį irgi galima būtų ieškoti tokiu būdu, bet polinomų skaidymas mažesnio laipsnio polinomais yra daug sudėtingesnis uždavinys negu didžiausio bendrojo daliklio suradimas. Sveikiesiems skaičiams egzistuoja ir kitas didžiausio bendrojo daliklio suradimo būdas – **nuoseklios dalybos algoritmas** arba **Euklido algoritmas**. Šis būdas lengvai pritaikomas ir polinomams. Prieš pateikdami įrodymus pateiksime patį Euklido algoritmą atskirai.

Euklido algoritmas polinomams. Tegul duoti du polinomai $f(x)$ ir $g(x)$. Daliname polinomą $f(x)$ iš $g(x)$, gauname liekaną $r_1(x)$. Toliau daliname polinomą $g(x)$ iš $r_1(x)$, gauname liekaną $r_2(x)$. Toliau daliname $r_1(x)$ iš $r_2(x)$, gauname liekaną $r_3(x)$, ir t.t., ir t.t. Kadangi liekanų laipsniai visą laiką mažėja, tai šitoje grandinėje turime prieiti prie tokios vietos, kai liekana bus lygi nuliui, t.y. polinomai pasidalins be liekanos. Toje vietoje Euklido algoritmas ir pasibaigs. Užrašykime **Euklido algoritmo** procesą:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)q_1(x) + r_1(x),\\
g(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\\
r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-3}(x) &= r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

5.2 teorema. *Polinomų $f(x)$ ir $g(x)$ didžiausias bedrasis daliklis yra Euklido algoritmo paskutinė (nenulinė) liekana $r_k(x)$. (Norint išvengti daugiareikšmiškumo reikėtų liekaną $r_k(x)$ padalinti iš jos vyriausiojo koeficiento.) Taigi* $DBD(f(x), g(x)) = \dfrac{r_k(x)}{\text{vyr. } r_k(x) \text{ koef.}}$.

Įrodymas. Iš paskutinės iš (5.9) lygybių išplaukia kad $r_{k-1}(x)$ dalijasi iš $r_k(x)$. Vadinasi priešpaskutinės lygybės abu dešiniosios pusės dėmenys dalijasi iš $r_k(x)$. Taigi iš $r_k(x)$ dalijasi ir priešpaskutinės lygybės dešinioji pusė. Todėl dalijasi ir kairioji, t.y. dalijasi ir liekana $r_{k-2}(x)$. Toliau tokiu pat būdu kildami (5.9) lygybėmis aukštyn įsitikinsime, kad iš $r_k(x)$ dalijasi $r_{k-3}(x), \dots, r_2(x), r_1(x)$. Toliau iš antros lygybės gausime, kad iš $r_k(x)$ dalijasi $g(x)$, o iš pirmosios, kad iš $r_k(x)$ dalijasi ir $f(x)$. Taigi $r_k(x)$ yra polinomų $f(x)$ ir $g(x)$ bendras daliklis.

Reikia parodyti, kad bet kuris kitas polinomų $f(x)$ ir $g(x)$ bendras daliklis dalins $r_k(x)$, tuomet teorema bus įrodyta. Tegul polinomas $\varphi(x)$ yra polinomų $f(x)$ ir $g(x)$ bendras daliklis. Pirmosios iš (5.9) lygybių kairioji pusė ir dešiniosios pusės pirmas dėmuo dalijasi iš $\varphi(x)$, todėl ir $r_1(x)$ taip pat dalinsis iš $\varphi(x)$. Pereidami prie antrosios ir kitų lygybių, samprotaudami analogiškai, gausime, kad $r_2(x), r_3(x), \dots, r_{k-1}(x), r_k(x)$ dalijasi iš $\varphi(x)$. Taigi $r_k(x)$ dalijasi iš $\varphi(x)$. Teorema įrodyta. ◀

Polinomai $f(x)$ ir $g(x)$, kurių didžiausias bedrasis daliklis yra lygus 1, vadinami **tarpusavyje pirminiais**.

5.4 Daugianarių šaknys

5.5 apibrėžimas. *Skaičius c vadinamas polinomo $f(x)$ šaknimi, jei $f(c) = 0$.*

5.3 teorema. *Skaičius c yra polinomo $f(x)$ šaknis tada ir tik tada, kai polinomas $f(x)$ dalijasi iš $x - c$.*

Įrodymas. Pakankamumas ($\Longleftarrow$). Tarkime, kad polinomas $f(x)$ dalijasi iš $x-c$. Tada

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

ir, aišku, $f(c) = 0$. Pakankamumas įrodytas.

Būtinumas ($\Longrightarrow$). Tarkime, c yra polinomo $f(x)$ šaknis, t.y. $f(c) = 0$. Dalinkime $f(x)$ iš $x - c$:

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x).$$

Gautoje lygybėje vietoje x įrašykime c. Gausime $0 = 0 \cdot q(x) + r(x)$. Taigi $r(x) = 0$, t.y. polinomas $f(x)$ dalijasi iš $x - c$. Būtinumas, o tuo pačiu ir teorema įrodyti. ◀

5.6 apibrėžimas. *Skaičius c yra vadinamas polinomo $f(x)$* **k-*ojo kartotinumo šaknimi***, *jei $f(x)$ dalijasi iš $(x - c)^k$, bet nesidalija iš $(x - c)^{k+1}$, t.y.*

$$f(x) = (x - c)^k q(x) \text{ ir } q(c) \neq 0.$$

5.7 apibrėžimas. *n-ojo laipsnio polinomo $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$* ***išvestine*** *vadinamas $n - 1$-ojo laipsnio polinomas*

$$f'_{n-1}(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

5.4 teorema. *Jei c yra polinomo $f(x)$ k-ojo kartotinumo šaknis, $k > 1$, tai išvestinei $f'(x)$ šaknies kartotinumas bus vienetu mažesnis, t.y. $k - 1$.*

Įrodymas. Tegul c yra polinomo $f(x)$ k-ojo kartotinumo šaknis, t.y.

$$f(x) = (x - c)^k q(x) \text{ ir } q(c) \neq 0.$$

Paskaičiuokime išvestinę

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-c)^{k-1}q(x) + (x-c)^k q'(x) \\ &= (x-c)^{k-1}(kq(x) + (x-c)q'(x)) = (x-c)^{k-1}h(x) \\ &\qquad \text{ir } h(c) = kq(c) + 0\,q'(0) = kq(c) \neq 0. \end{aligned}$$

Taig c yra išvestinės $f'(x)$ $k - 1$-ojo kartotinumo šaknis. ◀

Jeigu polinomas $f(x)$ turi keletą daliklių, tai tuos daliklius galime užrašyti kaip daugiklius, o patį polinomą $f(x)$ užrašyti keleto daugiklių sandauga. Polinomus, kaip ir sveikuosius skaičius, galime skaidyti daugiklių sandauga. Sveikuosius skaičius galime užrašyti (vienareikšmiškai) pirminių skaičių (tokių, kurie jau toliau į daugiklius nesiskaido) sandauga. O kaip su polinomais? Taip pat. Polinomus vieninteliu būdu galima užrašyti neišskaidomų polinomų sandauga. Jau iš anksčiau žinome, kad antrojo laipsnio polinomas, kuris turi dvi realias šaknis, išsiskaido į dviejų pirmo laipsnio polinomų sandaugą, o polinomas, kuris realių šaknų neturi į tokią sandaugą neišsiskaido. Išsamų atsakymą į šį klausimą duoda 5.5 teorema. Teoremą pateiksime be įrodymo.

5.5 teorema. *Kiekvienas polinomas su realiais koeficientais vieninteliu būdu (į dauginamųjų tvarką neatsižvelgiama) išsiskaido į pirmojo ir antrojo laipsnių polinomų su realiais koeficientais sandaugą. Į skaidinį įeinantys antrojo laipsnio polinomai turi neigiamus diskriminantus ir yra neišskaidomi.*

Kitame skyriuje kalbėsime apie realiųjų skaičių plėtinį – kompleksinius skaičius. Polinomai kompleksinių skaičių aibėje (kai koeficientai ir šaknys gali būti kompleksiniai) jau išsiskaido tik į pirmo laipsnio polinomus.

6 Kompleksiniai skaičiai

6.1 Įvadas

Žinome **natūraliuosius skaičius**. Jie žymimi $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Ypatingas natūralusis skaičius yra **vienetas**, žymimas **1**. Vienetas tai tarsi didelio pastato plyta, iš kurių pastatytas visas natūraliųjų skaičių pastatas. Sudedant vienetukus galime gauti visus kitus natūraliuosius skaičius. Kitų skaičių žymėjimai įvedami, kad skaičiavimai nebūtų baisiai griozdiški. Natūraliuosius skaičius galima **palyginti, sudėti, dauginti**. Juos sudėdami ir daugindami vėl gauname natūraliuosius skaičius.

Ypatinga natūraliųjų skaičių dalis yra **pirminiai skaičiai**. Tai natūralieji skaičiai, didesni už 1, ir tokie, kurie dalijasi tik iš 1 ir iš paties savęs. Pirminiams skaičiams žymėti naudojama raidė $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}.$$

Jau graikai įrodė, kad pirminių skaičių yra be galo daug. Labai svarbūs yra pirminiai skaičiai skaidant natūraliuosius skaičius daugikliais.

6.1 teorema. (Pagrindinė aritmetikos teorema.) *Kiekvienas didesnis už vienetą natūralusis skaičius vieninteliu būdu išskaidomas pirminių skaičių sandauga. Į dauginamųjų tvarką neatsižvelgiama.*

Natūraliųjų skaičių savybes nagrinėja **aritmetika**.

Natūraliuosius skaičius sudėdami vėl gauname natūraliuosius. Bet atlikdami priešingą veiksmą – **atimtį**, nevisada gausime natūraliuosius skaičius. Natūraliųjų skaičių jau neužtenka. Už natūraliųjų skaičių aibę platesnė aibė yra **sveikųjų skaičių** aibė. Ji žymima $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Sveikųjų skaičių aibė išsprendžia atimties problemą. Dviejų sveikųjų skaičių skirtumas visada yra sveikasis skaičius. Ypatingą vietą sveikųjų skaičių aibėje užima **nulis**, žymimas **0**. Jis nekeičia sumos reikšmės. Sveikieji skaičiai ir jų savybės jau yra **algebros** objektas.

Sveikuosius skaičius daugindami vėl gauname sveikuosius. Atlikdami atvirkštinį veiksmą – **dalybą**, nevisada gausime sveikuosius. Sveikųjų skaičių aibė praplečiama iki **racionaliųjų skaičių** aibės. Šituo praplėtimu išsprendžiama dalybos problema. Racionaliųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

6.1 pavyzdys. *Kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra lygus 1, įstrižainės ilgis negali būti lygus racionaliam skaičiui.*

Sprendimas. Uždavinį išspręsime prieštaros būdu. Pažymėkime kvadrato įstrižainės ilgį raide a. Tarkime, kad a yra racionalus skaičius. Taigi

$$a = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Galime laikyti, kad trupmena $\frac{m}{n}$ yra nesuprastinama, nes, jeigu ji būtų suprastinama, tai imtume ir suprastintume, ir iš naujo pažymėtume; gautume nesuprastinamą trupmeną. Iš Pitagoro teoremos gausime

$$a^2 = 1^2 + 1^2, \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad m^2 = 2n^2. \tag{6.2}$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad m yra lyginis skaičius (nes m^2 yra lyginis skaičius, dalijasi iš 2). Todėl galime pažymėti

$$m = 2k.$$

Dabar iš (6.2) turime

$$4k^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2k^2.$$

Taigi n yra taip pat lyginis skaičius. Pažymėkime $n = 2l$. Įstatę m ir n į (6.1) lygybę gausime

$$a = \frac{2k}{2l}.$$

Taigi a yra suprastinama trupmena. Tai prieštarauja pradinei prielaidai, kad a galima užrašyti racionaliu skaičiumi. Įrodėme, kad vienetinio kvadrato įstrižainės ilgis nėra racionalus skaičius. ◀

Matome, kad racionalių skaičių neužtenka atkarpų ilgiams matuoti. Racionaliųjų skaičių aibė praplečiama, įtraukiant visus galimus atkarpų ilgius, taip pat paliekamas nulis ir įtraukiami ir neigiami atkarpų ilgiai. Tokia aibė gali būti sutapatinta su visų tiesės taškų aibe (fiksuojant tiesėje nulį ir ilgio vienetą). Naujoji skaičių aibė vadinama **realiųjų skaičių** aibe ir žymima $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} := (-\infty, \infty).$$

Realiųjų skaičių aibėje, kaip ir siauresnėse skaičių aibėse, išlieka palyginimas ir pagrindiniai veiksmai – sudėtis ir daugyba. Išvestiniai (nepagrindiniai) veiksmai – atimtis ir dalyba (jei dalinama ne iš 0) taip pat galimi.

Naudodami realiuosius skaičius galime surasti kai kurių polinomų šaknis, t.y., pavyzdžiui, išspręsti tokias lygtis:

$$x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + 5x + 6 = 0, \quad x^3 - 2x^2 - x + 3 = 0.$$

Bet yra daug polinomų, kurie neturi šaknų realiųjų skaičių aibėje. Pavyzdžiui, net lygtis

$$x^2 + 1 = 0 \tag{6.3}$$

neturi sprendinių realiųjų skaičių aibėje. Kitame skyrelyje taip praplėsime realiųjų skaičių aibę, kad bet kokio namažesnio kaip pirmo laipsnio polinomas toje platesnėje skaičių aibėje turės šaknį.

6.2 Kompleksinio skaičiaus sąvoka

6.1 apibrėžimas. ***Kompleksiniu skaičiumi*** *vadinama* ***sutvarkyta realiųjų skaičių pora*** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Kompleksinius skaičius, kaip ir kitokius skaičius, žymėsime raidėmis. Visa kompleksinių skaičių aibė žymima raide $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

6.2 apibrėžimas. *Pirmoji kompleksinio skaičiaus (a, b) komponentė a vadinama **realiąja** kompleksinio skaičiaus **dalimi**, o antroji komponentė b vadinama **menamąja** kompleksinio skaičiaus **dalimi**.*

Jei kompleksinis skaičius $z = (a, b)$, tai realioji ir menamoji dalys žymimos taip:

$$a = Re\, z, \quad b = Im\, z.$$

Taip apibrėžti kompleksiniai skaičiai sutapatinami su plokštumos taškais arba su vektoriais, jungiančiais koordinačių centrą (tašką $(0, 0)$) su tašku (a, b). Horizontalioji ašis yra realioji ašis. Vertikalioji ašis yra menamoji ašis. Horizontaliosios ašies taškai atvaizduoja realiuosius skaičius. **Realieji skaičiai** sutampa su kopleksiniais skaičiais, kurių menamosios dalys yra lygios nuliui, t.y. $(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \mathbf{a}$. Kompleksiniai skaičiai, kurių realiosios dalys yra lygios nuliui, t.y. skaičiai $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ vadinami **menamaisiais skaičiais**. Taigi, kompleksiniai skaičiai, iš tikrųjų, yra realiųjų skaičių plėtinys.

Menamasis skaičius $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ vaidina ypatingą vaidmenį visų kompleksinių skaičių aibėje ir vadinamas **menamu vienetu**. Menamas vienetas žymimas raide i:

$$i := (0, 1).$$

Du kompleksiniai skaičiai (a, b) ir (c, d) yra lygūs tada ir tik tada, kai jų realios ir menamos dalys sutampa, t.y. $a = b$ ir $c = d$:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = b, c = d.$$

Taškai plokštumoje irgi sutampa tik šiuo atveju.

Realieji skaičiai gali būti palyginami "didesnis - mažesnis" prasme. Pagal dviejų realiųjų skaičių vietą realiųjų skaičių tiesėje galima pasakyti, kuris iš jų yra didesnis, o kuris mažesnis. Tai labai svarbi realiųjų skaičių savybė. Kompleksiniai skaičiai praranda šią savybę. Kaip ir taškai plokštumoje realieji skaičiai yra **nepalyginami**.

6.3 Kompleksinių skaičių sudėtis ir daugyba

6.3 apibrėžimas. *Dviejų kompleksinių skaičių (a, b) ir (c, d) **suma** vadinamas kompleksinis skaičius $(a + b, c + d)$:*

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d) \tag{6.4}$$

.

Kompleksinių skaičių sudėtį galima pavaizduoti geometriškai kaip vektorių sudėtį, kadangi patys vektoriai sutapatinami su kompleksiniais skaičiais.

6.4 apibrėžimas. *Dviejų kopleksinių skaičių (a, b) ir (c, d) **sandauga** vadinamas kompleksinis skaičius $(ac - bd, ad + bc)$:*

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{6.5}$$

6.1 užduotis. (*) *Patikrinkite, kad apibrėžti kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos veiksmai realiųjų skaičių aibėje sutampa su įprastais realiųjų skaičių sudėties ir daugybos veiksmais.*

6.2 užduotis. (*) *Patikrinkite lygybę*

$$2(a,b) = (2a, 2b).$$

Priešingas sudėčiai **atimties** veiksmas apibrėžiamas taip:

$$(a,b) - (c,d) := (a - b, c - d).$$

6.3 užduotis. (*) *Patikrinkite, kad apibrėžtas kompleksinių skaičių atimties veiksmas realiųjų skaičių aibėje sutampa su įprastu realiųjų skaičių atimties veiksmu.*

O atvirkščias daugybai **dalybos** veiksmas apibrėžiamas taip:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} := \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \quad (c,d) \neq (0,0). \tag{6.6}$$

6.4 užduotis. (*) *Patikrinkite, kad apibrėžtas kompleksinių skaičių dalybos veiksmas realiųjų skaičių aibėje sutampa su įprastu realiųjų skaičių dalybos veiksmu.*

6.2 teorema. *Kompleksinį skaičių* (a,b) *galima užrašyti ir taip*:

$$(a,b) = a + ib.$$

Įrodymas.

$$\begin{aligned} a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) &= (a,0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) \\ &= (a,0) + (0,b) = (a+0, 0+b) = (a,b). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6.3 teorema. *Kompleksinio skaičiaus* i *kvadratas yra lygus* -1 :

$$i^2 = -1.$$

Įrodymas.

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1. \quad \blacktriangleleft$$

Jau žinome dvi kompleksinio skaičiaus z užrašymo formas. Jos turi savo pavadinimus:

$z = (a,b)$ – **vektorinė** užrašymo forma,

$z = a + ib$ – **algebrinė** užrašymo forma.

Naudojant algebrinį kompleksinio skaičiaus užrašą yra patogiau atlikti daugybos ir dalybos veiksmus, nereikia atsiminti sudėtingų (6.5) ir (6.6) formulių, bet reikia atsiminti, kad $i^2 = -1$. Atliekant daugybą reikia paprasčiausiai daugyti:

$$(a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Truputį sudėtingiau atliekant dalybą:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

Matome, kad atliekant dalybą, reikia ir skaitiklį, ir vardiklį padaugyti iš skaičiaus, kuris skiriasi nuo vardiklio tik priešinga menama dalimi.

Kompleksinis skaičius, kuris skiriasi nuo kompleksinio skaičiaus $z = a + ib$ tik priešinga menama dalimi, t.y. skaičius $a - ib$ vadinamas **sujungtiniu** kompleksiniu skaičiumi skaičiui z. Jis žymimas $\bar{\mathbf{z}}$. Kompleksinio skaičiaus ir jo sujungtinio skaičiaus sandauga yra realusis skaičius:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2.$$

6.4 Kompleksinio skaičiaus modulis ir argumentas

6.5 apibrėžimas. *Kompleksinio skaičiaus $z = (a, b)$* ***moduliu*** *vadinamas neneigiamas skaičius $\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}$.*

Žymima

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}. \tag{6.7}$$

Kompleksinio skaičiaus modulis sutampa su jį atitinkančio plokštumos vektoriaus moduliu (ilgiu), t.y. atstumu nuo koordinačių pradžios iki taško, atitinkančio kompleksinį skaičių. Kompleksinio skaičiaus modulis dar vadinamas kompleksinio skaičiaus **absoliutiniu didumu**.

6.5 užduotis. (*) *Parodykite, kad kompleksiniams skaičiams lygybė*

$$z^2 = |z|^2,$$

bendrai paėmus, nėra teisinga. Ji teisinga tik tada, kai kompleksinis skaičius z yra realus.

6.6 užduotis. (*) *Parodykite, kad visiems kompleksiniams skaičiams z yra teisinga lygybė*

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

6.6 apibrėžimas. *Kampas φ tarp teigiamos abscisių ašies krypties ir kompleksinį skaičių atitinkančio vektoriaus vadinamas kompleksinio skaičiaus* ***argumentu****.*

Žymima

$$\varphi := \arg z. \tag{6.8}$$

Dekarto koordinačių sistemoje kompleksinį skaičių atitinka taškas. Pereikime prie polinės koordinačių sistemos. Pirmoji polinė koordinatė – atstumas atitiks kompleksinio skaičiaus modulį. Antroji polinė koordinatė – kampas tarp teigiamos abscisių ašies krypties ir kompleksinį skaičių atitinkančio vektoriaus atitiks kompleksinio skaičiaus argumentą. Argumentas φ gali įgyti bet kokias realias reikšmes, tiek teigiamas, tiek neigiamas, bet teigiamos reikšmės skaičiuojamos, kai kampas imamas pagal laikrodžio rodyklę, o neigiamos – prieš laikrodžio rodyklę. Apskritai kompleksinio skaičiaus argumentas yra daugiareikšmė funkcija. Jei argumentai skiriasi 2π kartotiniu, tai jie atitinka tą patį plokštumos tašką. Taigi kompleksinio skaičiaus argumentas turi be galo daug reikšmių, kurios skiriasi viena nuo kitos 2π kartotiniu. Argumentas neapibrėžtas tik vienam kompleksiniam skaičiui 0.

Dekarto koordinates x, y ir polines koordinates r, ϕ sieja sąryšiai: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Todėl kompleksinio skaičiaus $z = a + ib$ realiąją ir menamąją dalis su moduliu ir argumentu sieja tokios lygybės:

$$a = |z|\cos\varphi, \quad b = |z|\sin\varphi.$$

Iš pastarųjų lygybių gauname dar vieną, trečiąją, kompleksinio skaičiaus užrašymo formą:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \textbf{trigonometrinė}\text{ užrašymo forma.}$$

Naudojant trigonometrinę užrašymo formą yra lengva atlikti dviejų kompleksinių skaičių daugybą.

6.4 teorema. *Sudauginant du kompleksinius skaičius jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami. Tegul* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, *o* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *tada*

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Įrodymas.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6.7 užduotis. (*) *Parodykite, kad dalinant du kompleksinius skaičius jų moduliai padalinami, o argumentai atimami. T.y., kai* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, *o* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),\ z_2 \neq 0$, *tai*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Naudojant kompleksinių skaičių trigonometrinį užrašą lengva geometriškai interpretuoti jų daugybą. Taškas, atitinkantis kompleksinių skaičių $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ir $z_2 = |z_1|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sandaugą, yra apskritimo su centru koordinačių centre ir su spinduliu $|z_1||z_2|$ susikirtimo su pustiese $y = \tan(\varphi_1+\varphi_2)x,\ x > 0$, taškas.

Pastaba. Eksponentinę funkciją $y = \mathrm{e}^z$ galima apibrėžti, kai argumentas z kinta visoje kompleksinėje plokštumoje. Ši rodiklinė funkcija turi daug vertingų savybių, labai daug naudojama. Bet suprasti jos elgesį galima tik pastudijavus kompleksinę analizę. Šiame kurse tam neturime laiko. Funkcijos argumentu paėmę grynai menamą skaičių $i\varphi$ gautume, kad $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Iš čia gauname dar vieną labai dažnai naudojamą kompleksinio skaičiaus užrašymo formą:

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi} - \textbf{eksponentinė}\text{ užrašymo forma.}$$

6.5 Kompleksinio skaičiaus kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas iš kompleksinio skaičiaus

Kadangi jau žinome kaip dauginti kompleksinius skaičius, tai galime kompleksinį skaičių pakelti natūraliuoju laipsniu. Naudokime komplesinio skaičiaus trigonometrinį užrašą:

$$\begin{aligned} z^n &= (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ &= \underbrace{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\ldots\cdot|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{n \text{ kartų}} \\ &= |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Taigi keliant kompleksinį skaičių natūraliuoju ***laipsniu*** **n** *reikia jo modulį pakelti laipsniu n, o argumentą padauginti iš n.*

6.7 apibrėžimas. *Kompleksinį skaičių w vadinsime* **n**-*ojo* ***laipsnio šaknimi*** *iš kompleksinio skaičiaus z, jei*

$$w^n = z.$$

Žymima

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}.$$

Taip apibrėžę n-ojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus, gausime lygiai n skirtingų šaknų, išskyrus šaknis iš 0; jų bus visuomet viena ir lygi 0. Štai iš vieneto gausime lygiai dvi skirtingas kvadratines šaknis

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{1} = -1,$$

o iš ketverto – lygiai keturias

$$\sqrt[4]{1} = 1, \quad \sqrt[4]{1} = -1, \quad \sqrt[4]{1} = i, \quad \sqrt[4]{1} = -i.$$

Taigi *n-ojo laipsnio šaknis iš kompleksinio skaičiaus yra daugiareikšmė funkcija.* Norint rasti visas kompleksines šaknis iš kompleksinio skaičiaus z patogu naudoti trigonometrinį užrašą, prisimenant, kad argumentas įgyja be galo daug reikšmių, kurios skiriasi viena nuo kitos 2π kartotiniu. Norėdami atskirti paprastas šaknis, kurios naudojamos realiųjų skaičių aibėje, jas vadinsime **aritmetinėmis šaknimis** ir žymėsime prirašydami po šaknies ženklu "+". Pavyzdžiui, $_+\sqrt{4} = 2$. Simbolį "+" galima ir praleisti, jei iš teksto aišku, kad imama aritmetinė šaknis.

Traukiant kompleksinę n-ojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus z reikia ištraukti paprastą aritmetinę šaknį iš kompleksinio skaičiaus modulio $|z|$, o jo argumentą padalinti iš n. Atsižvelgdami į argumento daugiareikšmiškumą, gausime n skirtingų kompleksinių šaknų.

6.2 pavyzdys. *Ištraukime 4-ojo laipsnio šaknį iš 1.*

Sprendimas.

$$1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k, \;\; k\in\mathbb{Z}.$$

Kadangi 1 modulis yra 1 ir aritmetinė šaknis iš 1 yra taip pat 1, tai

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4} = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = 0\ (k = 4l), \\ i, & \text{kai } k = 1\ (k = 4l+1), \\ -1, & \text{kai } k = 2\ (k = 4l+2), \\ -i, & \text{kai } k = 3\ (k = 4l+3). \end{cases} \blacktriangleleft$$

6.3 pavyzdys. *Ištraukime 3-ojo laipsnio šaknį iš $-1+i$.*

Sprendimas.

$$-1 + i = {}_{+}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right),\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\sqrt[3]{-1+i} = {}_{+}\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$$
$$= \begin{cases} {}_{+}\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), & \text{kai } k = 0, \\ {}_{+}\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right), & \text{kai } k = 1, \\ {}_{+}\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right), & \text{kai } k = 2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Naudojant kompleksinio skaičiaus trigonometrinę išraišką galima geometriškai interpretuoti šaknies traukimą iš kompleksinio skaičiaus. Visos n-ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus z bus ant apskritimo, kurio centras sutampa su koordinačių centru, o spindulys yra lygus ${}_{+}\sqrt[n]{|z|}$. Pirma šaknis yra šio apskritimo ir pustiesės $\phi = \frac{\arg z}{n}$, užrašytos polinėje koordinačių sistemoje, susikirtimo taškas. Į minėtą apskritimą įbrėžkime taisyklingąjį n-kampį, kurio viena viršūnė sutampa su pirmąja šaknimi. Visos kitos šaknys bus įbrėžtojo daugiakampio kitos viršūnės. Taigi n daugiakampio viršūnių atitinka skirtingas kompleksinio skaičiaus n-ojo laipsnio šaknis.

Mokėdami traukti šaknis iš kompleksinių skaičių jau galime spręsti bet kokias antrojo laipsnio ir kai kurias aukštesnių laipsnių lygtis. Prieš pateikiant keletą lygčių sprendimo pavyzdžių, suformuluokime teoremą (be įrodymo) apie daugianario su realiais koeficientais kompleksines šaknis.

6.5 teorema. *Jeigu daugianaris su realiais koeficientais turi kompleksinę šaknį z_1, kurios menama dalis yra nelygi 0, tai šio daugianario šaknimi bus ir sujungtinis skaičiui z_1 skaičius $\bar{z}_1$.*

6.4 pavyzdys. *Išspręskime lygtį*

$$z^2 + 1 = 0.$$

Sprendimas.

$$z^2 + 1 = 0,$$
$$z^2 = -1,$$
$$z = \sqrt{-1} = \pm i. \quad \blacktriangleleft$$

6.5 pavyzdys. *Išspręskime lygtį*

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Sprendimas. Pirmas būdas.

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm (\pm 2i)}{2} = 2 \pm i.$$

Antras būdas. Tegul šios kvadratinės lygties šaknys $z_1 = a+ib$ ir $z_2 = c+id$. Tuomet

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 5 = (z - z_1)(z - z_2) &= (z - (a + ib))(z - (c + id)) \\ &= z^2 - az - ibz - cz + ac + ibc - idz + iad - bd \\ &= z^2 - ((a + c) + i(b + d))z + (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Daugianaris gautos lygybės kairiojoje pusėje bus lygus daugianariui dešiniojoje pusėje, kai koeficientai prie vienodų z laipsnių bus lygūs, t.y.

$$\begin{cases} -((a + c) + i(b + d)) = -4, \\ (ac - bd) + i(ad + bc) = 5. \end{cases} \tag{6.9}$$

Kompleksiniai skaičiai lygūs tik tada, kai yra lygios jų realios ir menamos dalys. Todėl iš (6.9) lygčių sistemos gausime naują keturių lygčių sistemą

$$\begin{cases} -(a + c) = -4, \\ b + d = 0, \\ ac - bd = 5, \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

Ją išsprendę gausime, kad $a = c = 2$, $b = -d = \pm 1$. Taigi turėsime dvi skirtingas šaknis

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i.$$

Trečias būdas. Mūsų daugianaris yra su realiais koeficientais. Pažymėkime jo šaknį $z_1 = a + ib$. Aišku, kad $b \neq 0$, nes lygties diskriminantas yra neigiamas ir dėl to lygtis realių sprendinių neturi. Iš 6.5 teoremos turime, kad daugianario šaknimi bus ir sujungtinis skaičius $\bar{z}_1 = a - ib$. Todėl

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 5 = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = (z - (a + ib))(z - (a - ib)) \\ = z^2 - 2az + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Iš čia turime

$$\begin{cases} -2a = -4, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Išsprendę gausime, kad $a = 2$, $b = \pm 1$. Taigi vėl turime dvi skirtingas šaknis

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i. \quad \blacktriangleleft$$

6.6 Pagrindinė algebros teorema

6.6 teorema. (Pagrindinė algebros teorema.) *Kiekvienas daugianaris su bet kokiais kompleksiniais koeficientais, jei jo laipsnis nemažesnis už vienetą, turi bent vieną kompleksinę šaknį.*

Šią teoremą, pasitelkę geometrinę interpretaciją, įrodysime per paskaitą.

Pateiksime dar vieną teoremą apie n-ojo laipsnio daugianario šaknų skaičių.

6.7 teorema. *Kiekvienas n-ojo laipsnio, $n \geqslant 1$, daugianaris $f_n(z)$ su kompleksiniais koeficientais turi lygiai n kompleksinių šaknų, įskaitant ir jų kartotinumą.*

Įrodymas. Iš 6.6 teoremos išplaukia, kad daugianaris $f_n(z)$ turi bent vieną kompleksinę šaknį, tarkime, z_1. Tuomet daugianaris $f_n(z)$ dalijasi iš tiesinio daugianario $z - z_1$:

$$f_n(z) = (z - z_1)g_{n-1}(z).$$

Jei daugianaris $g_{n-1}(z)$ nėra nulinio laipsnio, t.y. $n - 1 > 0$, tuomet iš 6.6 teoremos vėl išplaukia, kad daugianaris $g_{n-1}(z)$ turi bent vieną kompleksinę šaknį, tarkime, z_2. Tada

$$g_{n-1}(z) = (z - z_2)h_{n-2}(z),$$

o

$$f_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)h_{n-2}(z).$$

Taip galėsime tęsti n kartų, kol liks nulinio laipsnio daugianaris. Gausime, kad daugianaris $f_n(z)$ turi lygiai n šaknų. Kai kurios iš tų šaknų gali sutapti, t.y. gali būti kartotinės. ◄

Literatūra

1. **V. Pekarskas.** *Trumpas matematikos kursas*, Technologija, Kaunas, 2006.
2. **S. Janušauskaitė, A. Marčiukaitienė, D. Prašmantienė, N. Ratkienė.** *Tiesinė algebra ir matematinė analizė*, Technologija, Kaunas, 2003.
3. **Z. Furmonavičienė, S. Janušauskaitė, A. Marčiukaitienė, D. Prašmantienė, N. Ratkienė.** *Tiesinė algebra ir matematinė analizė, Uždavinių sprendimai*, Technologija, Kaunas, 2003.

---

4. **G. Misevičius, A. Pincevičius, R. J. Rakauskas, R. Eidukevičius.** *Aukštoji matematika*, TEV, Vilnius, 1999 .
5. **A. Apynis, E. Stankus.** *Matematika, Taikymai ekonomikoje ir versle*, Leidybos centras, Vilnius, 1995.