Grafų teorija

Vytas Zacharovas

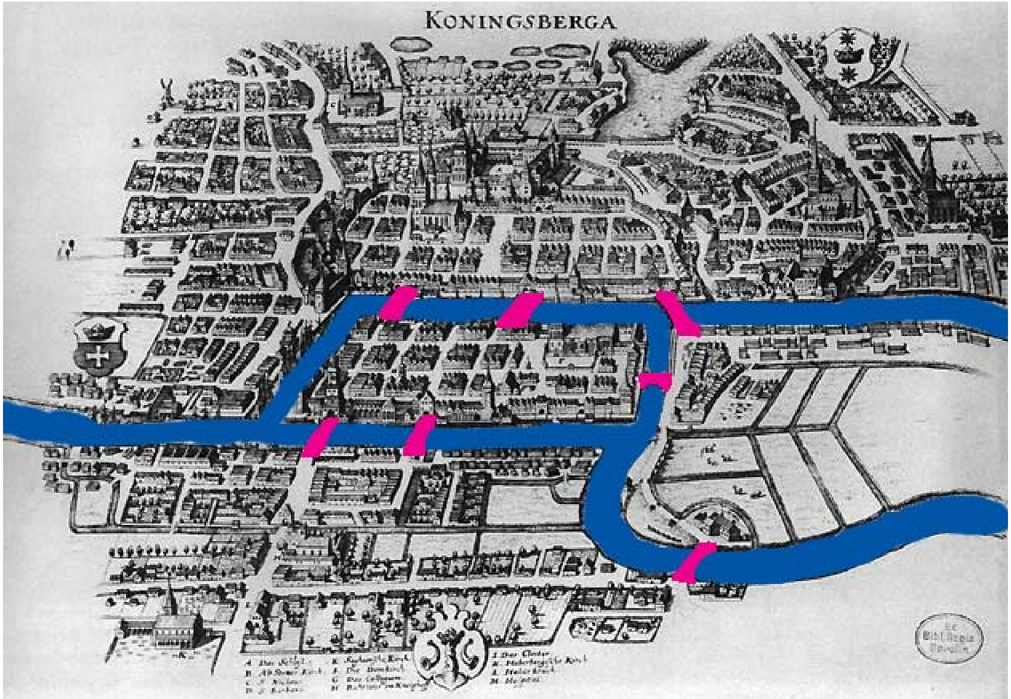
2014 m. liepos 17 d.

1 Septynių Königsbergo tiltų problema

Königsberg'o (dabartinis Kaliningradas) miestą į keturias dalis dalija Pregel upė. Miesto dalis tarpusavyje jungia 7 tiltai. Ar galima pereiti visus 7 miesto tiltus tik po vieną kartą?

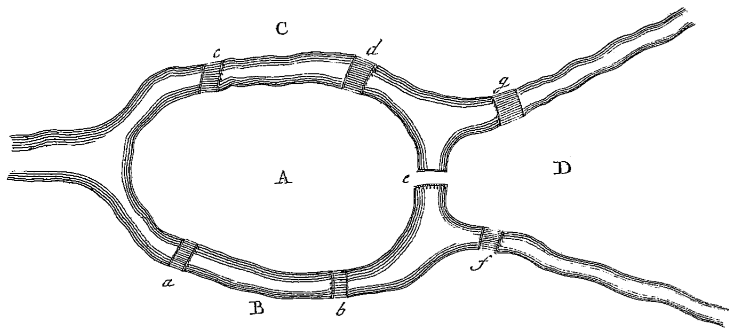
Žemiau pateiktame plane mėlyna spalva yra paryškinta upė Pregel, o raudona – jos krantus jungiantys tiltai.

1 pav.: Kionigsbergo planas

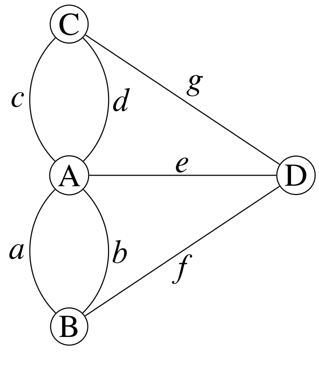


Šios problemos sprendimą 1735m. pateikė Euleris.

Atmesdami uždavinio sprendimui neesmines detales esančias aukščiau pateiktame Königsberg'o plane mes gausime ką nors panašaus į sekantį brėžinį paimtą iš originalaus Eulerio straipsnio.



Šiame brėžinyje lotyniškomis raidėmis A, B, C ir D yra žymimos keturios Königsberg'o miesto dalys, kurias viena nuo kitos skiria Pregel upė. Kadangi uždavinio sprendimui jokios įtakos nedaro informacija apie miesto dalių ploto dydį bei konfigūraciją, tai aukščiau pateiktą planą mes toliau galime supaprastinti skirtingas miesto dalis A, B, C ir D žymėdami keturiais taškais plokštumoje, o jas jungiančius tiltus vaizduodami kaip linijas jungiančias atitinkamus taškus.



Pastaba 1.1. *Pastebėkime, kad kiekvieną iš keturių regionų A, B, C ir D su likusiais jungia* nelyginis *skaičius tiltų.*

Tarkime, kad egzistuoja maršrutas leidžiantis pereiti visus tiltus po vieną kartą. Tuomet pastebėkime, kad

1. Iš regiono su nelyginiu skaičiumi tiltų išėjęs keleivis negalės baigti keliones tame pačiame regione.

2. Išskyrus pradinį ir galinį regioną iš visų kitų regionų išeinančių tiltų skaičius turi būti lyginis.

Iš šių pastebėjimų išplaukia, kad jeigu egzistuotų maršrutas, leidžiantis apeiti visus tiltus po vieną kartą, tai egzistuotų daugiausiai du regionai, iš kurių išeinančių tiltų skaičius būtų nelyginis. Kadangi Eulerio uždavinio atveju turime penkis regionus ir iš visų jų išeinančių tiltų skaičius yra nelyginis tai gauta prieštara įrodo, kad neegzistuoja maršrutas apeinantis visus Königsberg'o tiltus po viena karta.

2 Grafo apibrėžimas. Pagrindinės sąvokos

2.1 Formalus grafo apibrėžimas

Apibrėžimas 2.1 (Bendras grafo apibrėžimas)**.** *Orientuotu grafu G vadiname porą (V, E), kur V yra baigtinė aibė $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, o $E \subset V \times V$ yra aibė sudaryta iš V elementų porų. Aibė V yra vadinama viršūnių aibe, o E yra vadinama briaunų aibe.*

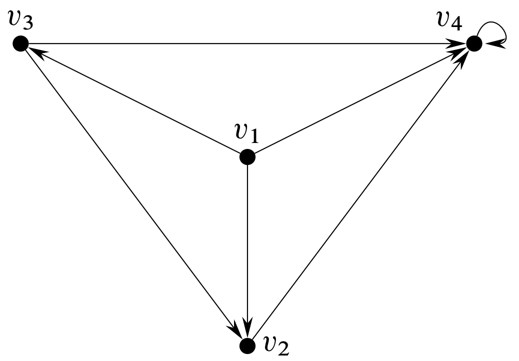
Orientuotą grafą $G = (V, E)$ mes galime grafiškai pavaizduoti plokštumoje atidėję $n = |V|$ taškų ir kiekvienai porai $(v_i, v_j) \in E$ priskyrę rodyklę einančią iš taško v_i į tašką v_j.

Kompiuterio atmintyje grafas $G = (V, E)$ gali būti saugomas kaip matrica $M = (a_{ij})$ kur

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{jeigu} \quad (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Taip sukonstruota matrica M yra vadinama grafo G *gretimumo matrica*.

Pavyzdys 2.1 (Orientuoto grafo pavyzdys)**.** Tarkime $G = (V, E)$, kur $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ir $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_2, v_4), (v_4, v_4)\}$ Tuomet tokį grafą mes galime pavaizduoti kaip



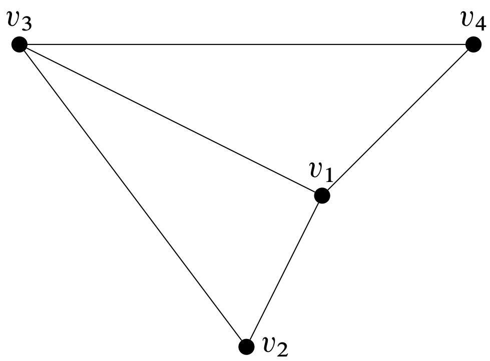
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Apibrėžimas 2.2. *Briaunos (v_j, v_j) kurių pradžia ir galas sutampa yra vadinamos* kilpomis.

Apibrėžimas 2.3. *Neorientuotu grafu vadinama pora* (V, E) *kur* E *yra nesutvarkytų porų* (v_i, v_j) *aibė. Kitaip tariant neorientuoto grafo atveju mes nelaikome, kad poromis* (v_i, v_j) *ir* (v_j, v_i) *nusakomos briaunos yra skirtingos.*

Toliau nagrinėsime neorientuotus grafus be kilpų. Tokius grafus kompiuterio atmintyje mes galime išsaugoti kaip simetriškas matricas, kurių įstrižainėje yra nuliai.

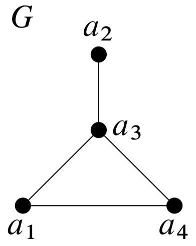
Pavyzdys 2.2 (Neorientuoto grafo pavyzdys)**.** Tarkime $G = (V, E)$, kur $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ir $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_2), (v_3, v_4), \}$ Tuomet tokį grafą mes galime pavaizduoti kaip



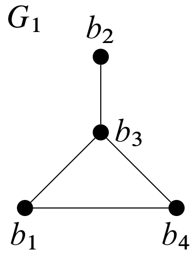
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Izomorfiniai grafai

Grafas $G = (V, E)$, kurio viršūnių aibė yra $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, o briaunų aibė yra $E = \{(a_1, a_4), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_2, a_3)\}$ gali būti pavaizduotas plokštumoje kaip



Jeigu pakeisime viršūnių pavadinimus iš a_i į b_i gausime *formaliai* skirtingą grafą $G_1 = (V_1, E_1)$, kur $V_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ir $E_1 = \{(b_1, b_4), (b_1, b_3), (b_3, b_4), (b_2, b_3)\}$ kuris gali būti pavaizduotas plokštumoje kaip



Nors formaliai grafai G ir G_1 yra skirtingi, tačiau iš esmės jų struktūra yra ta pati. Apibendrindami toliau vadinsime du grafus *izomorfiškais* jeigu jie skiriasi tik viršūnių pavadinimais. Tikslus formalus izomorfizmo sąvokos apibrėžimas bus toks.

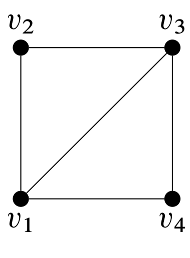
Apibrėžimas 2.4 (Grafų izomorfizmas)**.** *Du grafai $G_1 = (V_1, E_1)$ ir $G_2 = (V_2, E_2)$ yra vadinami izomorfiniais jeigu egzistuoja tokia abipus vienareikšmė atitiktis (bijekcija) tarp šių grafų viršūnių $f : V_1 \to V_2$, kad bet kurios dvi viršūnės v_i, v_j priklausančios grafui G_1 bus sujungtos briauna $(v_i, v_j) \in E_1$ tada ir tik tada kai bus sujungtos briauna atitinkamos viršūnės $f(v_i)$, $f(v_j)$ grafe G_2 t.y. $\big(f(v_i), f(v_j)\big) \in E_2$. Tokiu atveju rašome $G_1 \cong G_2$.*

Šis apibrėžimas galioja kaip orientuotiems tiek ir neorientuotiems grafams.

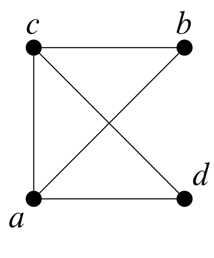
Izomorfiški grafai grafų teorijos požiūriu nėra laikomi skirtingais, kadangi visos izomofiškų grafų savybės, nepriklausančios nuo viršūnių pavadinimų, tokios kaip viršūnių skaičius, briaunų skaičius ir panašiai, yra vienodos.

Kadangi tą patį grafą mes galime pavaizduoti plokštumoje daugeliu būdų, neretai pamačius dviejų grafų brėžinius plokštumoje nėra lengva nustatyti ar jie yra izomorfiški.

Pavyzdys 2.3 (Izomorfiškų grafų pavyzdys)**.** Izomorfiški yra grafai



ir

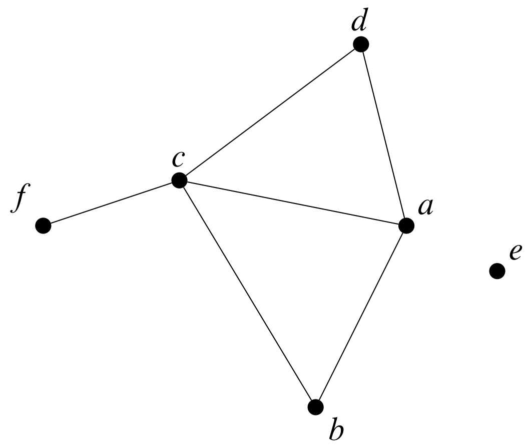


kadangi egzistuoja bijekcija $f : \{v_1, v_2, v_3, v_3\} \to \{a, b, c, d\}$, tokia, kad $f(v_1) = a$, $f(v_2) = b$, $f(v_3) = c$, $f(v_4) = d$.

2.3 Viršūnės laipsnis. Rankų paspaudimo teorema

Apibrėžimas 2.5. *Grafo $G = (V, E)$ viršūnės $v_j \in V$ laipsniu* $\deg(v_j)$ *vadinsime iš viršūnės v_j išeinančių briaunų skaičių.*

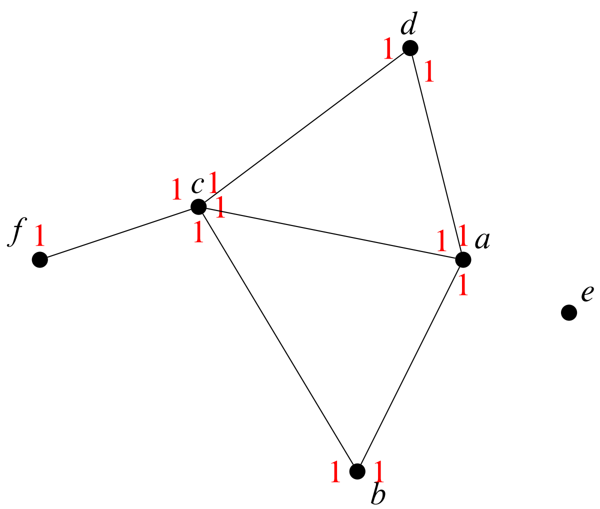
Pavyzdys 2.4. Tarkime yra duotas grafas $G = (V, E)$ su viršūnėmis $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ir briaunomis $E = \{(f, c), (c, d), (d, a), (c, a), (c, b), (a, b)\}$.



Tuomet grafo G briaunų laipsniai bus lygūs

$$\deg(c) = 4, \quad \deg(f) = 1, \quad \deg(e) = 0, \quad \deg(d) = 2$$

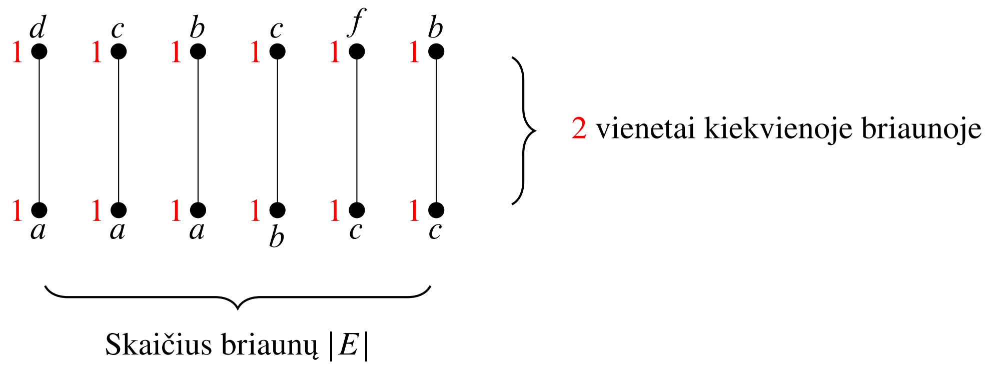
Grafo briaunų laipsnius galime paskaičiuoti prie kiekvienos briaunos galo prirašę po vienetą. Tuomet viršūnės laipsnis bus lygus sumai vienetų prirašytų prie iš jos išeinančių briaunų.



Iš čia nesunku matyti, kad suma visu viršūnių laipsnių

$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e)$$

bus lygi sumai visų vienetų prirašytų prie briaunų viršūnių. Šią sumą galime paskaičiuoti visas grafą sudarančias briaunas kartu su prie jų galų "prilipdytais" vienetais išrašę eilute.



Taigi, suma visų grafo viršūnių laipsniu bus lygi padaugintam iš 2 grafo briaunų skaičiui

$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) = 2|E| = 2 \cdot 6 = 12$$

Teorema 2.1 (Rankų paspaudimo teorema)**.** *Tegu $G = (V, E)$ yra grafas. Tuomet visų grafo G viršūnių laipsnių suma yra lygi grafo briaunų skaičiui padaugintam iš dviejų*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

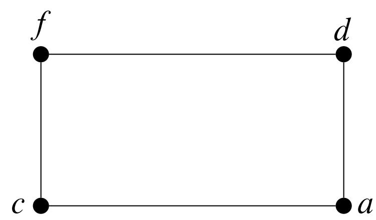
Įrodymas. Iš tikrųjų, kiekviena grafo briauna grafo viršūnių laipsnių sumą padidina lygiai 2.

□

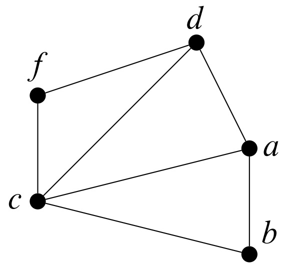
2.4 Pografiai

Apibrėžimas 2.6 (Grafo pografis)**.** *Grafas $G' = (V', E')$ yra vadinamas grafo $G = (V, E)$ pografiu ir rašome, kad $G' \subset G$ jeigu $V' \subset V$ ir $E' \subset E$.*

Pavyzdys 2.5. Grafas



yra grafo



pografis.

2.5 Keliai, trasos, takai bei grafo jungumo sąvoka

Apibrėžimas 2.7. *Seka*

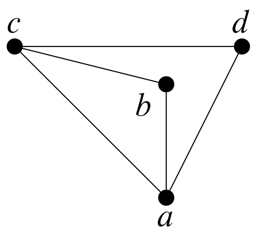
$$v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}, \ldots, v_{j_N}$$

sudaryta iš grafo $G = (V, E)$ viršūnių yra vadinama keliu *jeigu bet kuriuos du gretimus šios sekos elementus jungia briauna, t.y. $(v_{j_k}, v_{j_{k+1}}) \in E$ su visais $1 \leqslant k \leqslant N - 1$.*

Pavyzdys 2.6. Seka

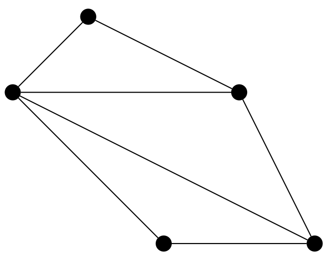
$$c, b, a, d, a, d, a, d, c, b, c$$

yra kelias grafe



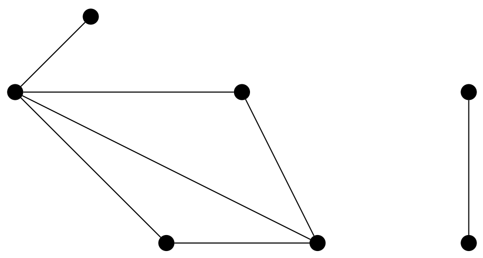
Apibrėžimas 2.8. *Grafas $G = (V, E)$ yra vadinamas* jungiu *jeigu bet kuriai viršūnių porai $u, v \in V$ egzistuoja jas jungiantis kelias, t.y toks kelias kurio pradine viršūnė yra u o galinė – v.*

Pavyzdys 2.7. Grafas



yra jungus.

Pavyzdys 2.8 (Nejungaus grafo pavyzdys)**.** Grafas



nėra jungus.

Apibrėžimas 2.9 (Grafų sąjunga)**.** *Tarkime duoti du grafai* $G_1 = (V_1, E_1)$*,* $G_2 = (V_2, E_2)$ *tokie, kad jų viršūnių aibės nesikerta* $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$*. Tuomet grafų* G_1 *ir* G_2 *sąjunga* $G_1 \bigcup G_2$ *vadinsime grafą* $(V_1 \bigcup V_2, E_1 \bigcup E_2)$*.*

Teorema 2.2. *Kiekvienas grafas* $G = (V, E)$ *yra savo jungių pografių sąjunga.*

Įrodymas. Fiksuokime bet kurią grafo viršūnę $v \in V$. Tegu $V_1 \subset V$ bus aibė visų grafo G viršūnių kurias galima sujungti su v keliu. Tuomet jeigu kaip $E_1 \subset E$ pažymėsime aibę grafo G briaunų kurių abu galai priklauso V_1, tai grafas $G_1 = (V_1, E_1)$ bus grafo G jungusis pografis. Taigi

$$G = (V, E) = G_1 \bigcup \big(V \setminus V_1, E \setminus E_1\big)$$

Toliau pasirenkame bet kuria viršūnę $v_2 \in V \setminus V_1$ ir išskiriame grafo $\big(V \setminus V_1, E \setminus E_1\big)$ jungųjį pogrupį G_2, kuriam priklauso v_2. Tęsdami šį procesą toliau mes gauname

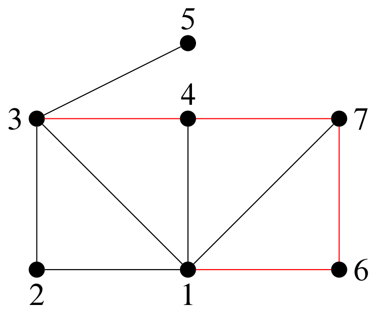
$$G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup \cdots \bigcup G_s.$$

$\square$

Apibrėžimas 2.10. Trasa *grafe vadinamas* kelias*, kurio visos briaunos yra skirtingos. Uždara* trasa *yra vadinama* grandine*.* Taku *grafe vadinamas kelias, kurio visos viršūnės yra skirtingos. Uždaras* takas *yra vadinamas* ciklu*.*

Apibrėžimas 2.11. *Kelio, tako, trasos, grandinės arba ciklo* ilgiu *vadinsime jį sudarančių briaunų skaičių.*

Pavyzdys 2.9 (Tako pavyzdys)**.** Grafe

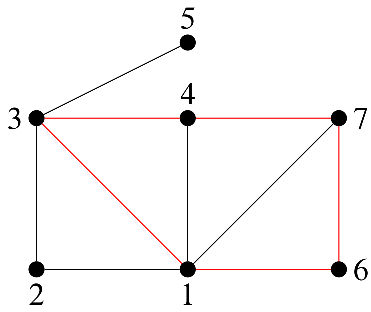


viršūnių seka

$$3, 4, 7, 6, 1$$

yra takas kurio ilgis yra lygus 4, taip pat yra *trasa*

Pavyzdys 2.10 (Ciklo pavyzdys)**.** Grafe

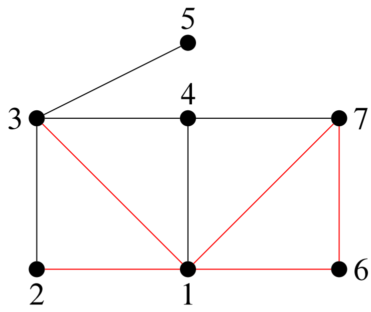


viršūnių seka

$$3, 4, 7, 6, 1, 3$$

yra *ciklas* (uždaras takas) kurio ilgis yra lygus 5, taip pat yra *grandinė*

Pavyzdys 2.11 (Trasos kuri nėra takas pavyzdys)**.** Grafe

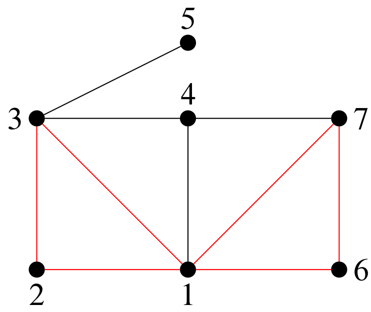


viršūnių seka

$$3, 1, 7, 6, 1, 2$$

yra *trasa*, bet nėra *takas*

Pavyzdys 2.12 (Grandinės kuri nėra ciklas pavyzdys)**.** Grafe



viršūnių seka

$$3, 1, 7, 6, 1, 2, 3$$

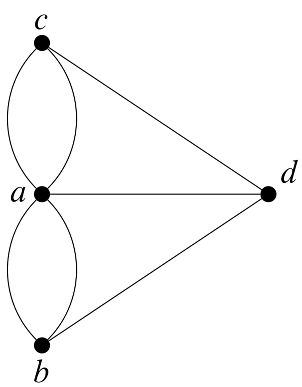
yra *grandine*, bet nėra *ciklas*

2.6 Multigrafai

Multigrafe, skirtingai nuo paprasto grafo dvi viršūnes gali jungti kelios briaunos. Formalus apibrėžimas yra toks

Apibrėžimas 2.12. Multigrafu *vadiname baigtinių aibių pora* (V, E)*, kur* V *– virsuniu aibe, o* E *– viršūnių poru multiaibė. Multiabe vadiname "aibę" kurios elementai gali kartotis.*

Pavyzdys 2.13 (Multigrafo pavyzdys)**.** Multigrafo pavyzdys yra Eulerio grafas.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$G = (V, E)$, kur

$$V = \{a, b, c, d\},$$

o

$$E = \{(c, d), (a, d), (b, d), (c, a), (c, a), (a, b), (a, b)\}$$

Kadangi multigrafe dvi viršūnes gali jungti daugiau nei dvi briaunos, tai kelias multigrafe yra apibrėžiamas kaip seka viršūnių ir briaunų

$$a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, a_n$$

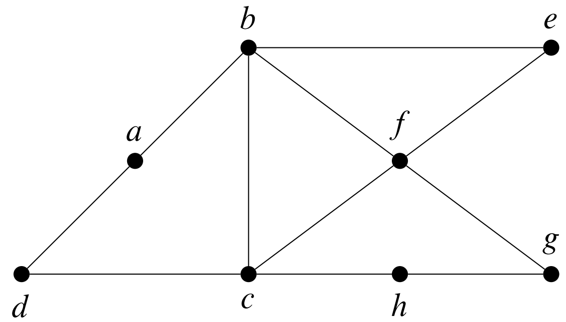
kur β_j yra briauna jungianti viršūnes a_j ir a_{j+1}. Analogiškai modifikuojami ir trasos bei tako apibrėžimai.

3 Eulerio trasos ir grandinės

Apibrėžimas 3.1. *Eulerio grandine multigrafe yra vadinamas toks uždaras kelias grafe, kuris pereina visas grafo briaunas po vieną kartą.*

Multigrafas arba grafas, kuriame egzistuoja Eulerio grandinė yra vadinamas Eulerio multigrafu arba Eulerio grafu atitinkamai.

Pavyzdys 3.1. Grafas

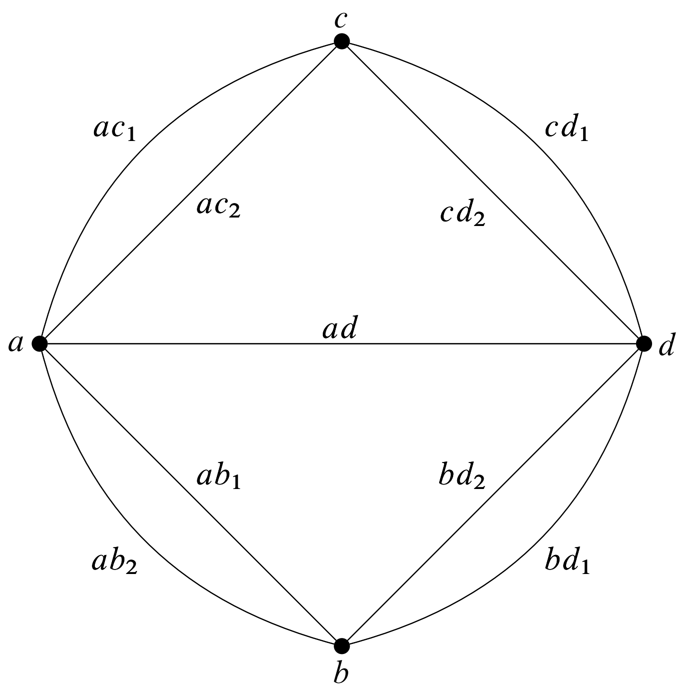


yra Eulerio grafas kadangi turi Eulerio grandinę

$$a \to b \to e \to f \to g \to h \to c \to f \to b \to c \to d \to a$$

Apibrėžimas 3.2. *Eulerio trasa multigrafe yra vadinamas toks kelias grafe, kuris pereina visas grafo briaunas po vieną kartą.*

Pavyzdys 3.2 (Eulerio trasos pavyzdys)**.** Sekantis grafas nėra Eulerio grafas, kadangi neturi uždaros grandinės apeinančios visas jo briaunas.



Tačiau šis grafas turi Eulerio trasą

$$a, ac_1, c, cd_1, d, bd_1, b, ab_2, a, ac_2, cd_2, bd_2, b, ab_1, a, ad, d$$

jungiančią viršūnes a ir d ir apeinančią visas grafo briaunas po vieną kartą.

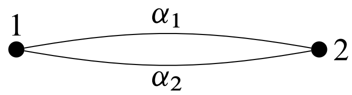
Sekanti teorema atsako i klausimą, kokias sąlygas turi tenkinti multigrafas, kad jame egzistuotu Eulerio grandinė. Nagrinėsime multigrafus be kilpų.

Teorema 3.1. *Jungus multigrafas turi Eulerio grandinę tada ir tik tada, kai kiekvienos jo viršūnės laipsnis yra lyginis.*

Būtinumo įrodymas. Tarkime, kad multigrafe G yra Eulerio grandinė. Tuomet, multigrafas yra akivaizdžiai jungus. Įsitikinkime, kad kiekvienos jo viršūnės laipsnis yra lyginis.

Paimkime bet kokią multigrafo viršūnę $v \in G$ ir įsitikinkime, kad iš šios viršūnės išeinančių briaunų skaičius yra lyginis. Eulerio grandinė perbėga visas grafo viršūnes po viena karta. Pradekime kelionę Eulerio grandine viršūnėje v, praeitas briaunas pažymėdami raudona spalva. Iš viršūnės v išėjusi Eulerio grandinė nudažys vieną iš v išeinančią briauną raudona spalva. Pirmą kartą grįžusi į viršūnę v Eulerio grandinė nudažys raudona spalva vieną papildomą briauną. Kiekvieną kartą iš mūsų viršūnės išėjusi ir atgal grįžusi Eulerio grandinė nudažys raudona spalva po dvi briaunas. Kadangi kelionė Eulerio grandine pasibaigs viršūnėje v, kurioje ji ir prasidėjo, tai keliones gale bus raudona spalva nudažytas lyginis skaičius briaunų išeinančių iš v. Be to, kadangi Eulerio grandinė perbėga *visas* multigrafo briaunas, vadinasi, kelionės gale bus raudonai nudažytos visos briaunos išeinančios iš v. Tuo pačiu tokiu briaunų skaičius bus lyginis. $\square$

Pakankamumo įrodymas. Tarkime G yra jungus multigrafas. Įrodinėsime pasinaudodami indukcija pagal multigrafo briaunų skaičių. Jeigu multigrafas turi tik vieną viršūnę, tuomet jis neturi briaunų ir teorema yra triviali. Jeigu jungus multigrafas be kilpų turi tik dvi briaunas, tai jis turės pavidalą



Tuomet Eulerio grandinė musu grafe bus

$$1, \alpha_1, 2, \alpha_2, 1$$

Todėl tarkime, kad teorema yra teisinga, kai mūsų grafo G briaunų skaičius yra ne didesnis už natūrinį skaičių $n \geqslant 1$. Tarkime, kad G yra multigrafas, kurio briaunų skaičius yra $n + 1$. Fiksuokime grafe G kokią nors viršūnę $v \in G$ ir sukonstruokime grandinę kuriai priklauso $v \in G$. Tą galime padaryti sekančiu būdu. Iš viršūnės v judėdami viena iš jos išeinančia briauna pereiname į kitą viršūnę. Iš jos pereiname i dar kita viršūnę, ir t.t. kiekviena karta rinkdamiesi dar ne panaudotą briauną. Kadangi kiekvienos grafo viršūnės laipsnis yra lyginis, anksčiau ar vėliau musų kelione mus atves atgal i v, tuo pačiu mes gausime grandinę

$$v, \beta_1, v_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, v$$

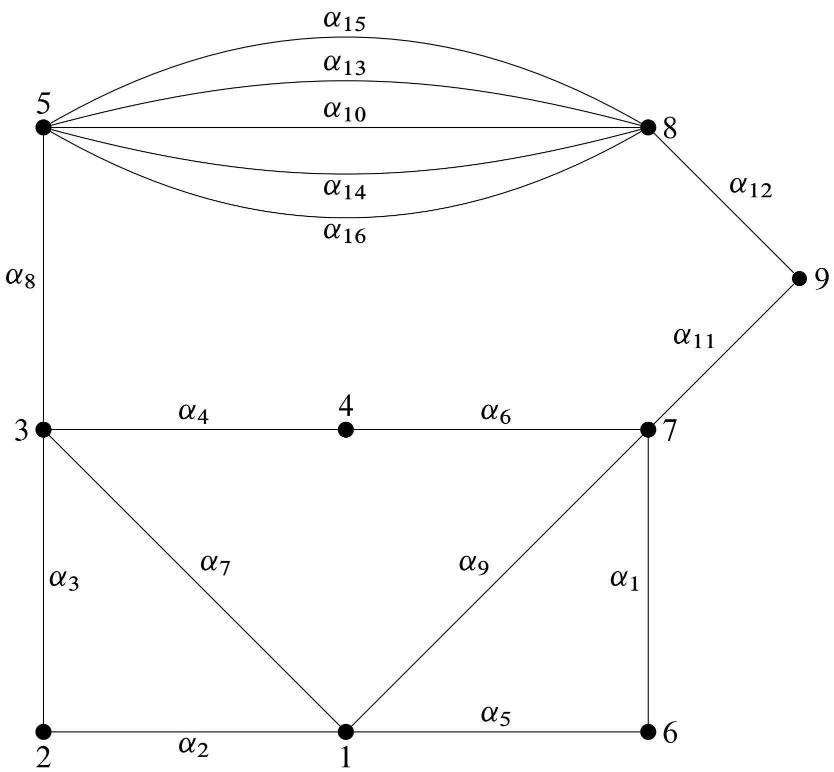
grafe G. Jeigu musu gautai grandinei priklauso visos grafo briaunos, tai ši grandinė bus Eulerio grandine ir tuo pačiu teoremos įrodymas bus baigtas. Priešingu atveju išmeskime iš grafo G visas briaunas priklausančias mūsų sukonstruotai grandinei. Naujai gautas grafas G_1 nebūtinai bus jungus, jį mes galėsime išreikšti kaip keliu jungių komponenčių sumą

$$G_1 = C_1 + C_2 + \cdots + C_i$$

Kadangi komponenčių C_j briaunų skaičius yra mažesnis nei $n + 1$, tai joms tinka indukcijos prielaida. O tai reiškia, kad jose yra Eulerio grandinės. Pasinaudodami tuo mes galime sukonstruoti Eulerio grandinę pradiniame grafe G. Iš tikrųjų, tegu C_k yra komponentė, kuriai priklauso viršūnė v. Išėję iš viršūnės v mes judėdami komponenetės C_k Eulerio grandine pereiname visas C_k briaunas ir sugrįžtame į v. Po to, judėdami mūsų grandine pereiname prie kitos komponentės C_{k_1}, perbėgę visas jos briaunas pereiname prie kitos komponentės ir t.t. kol sugrįžtame į v.

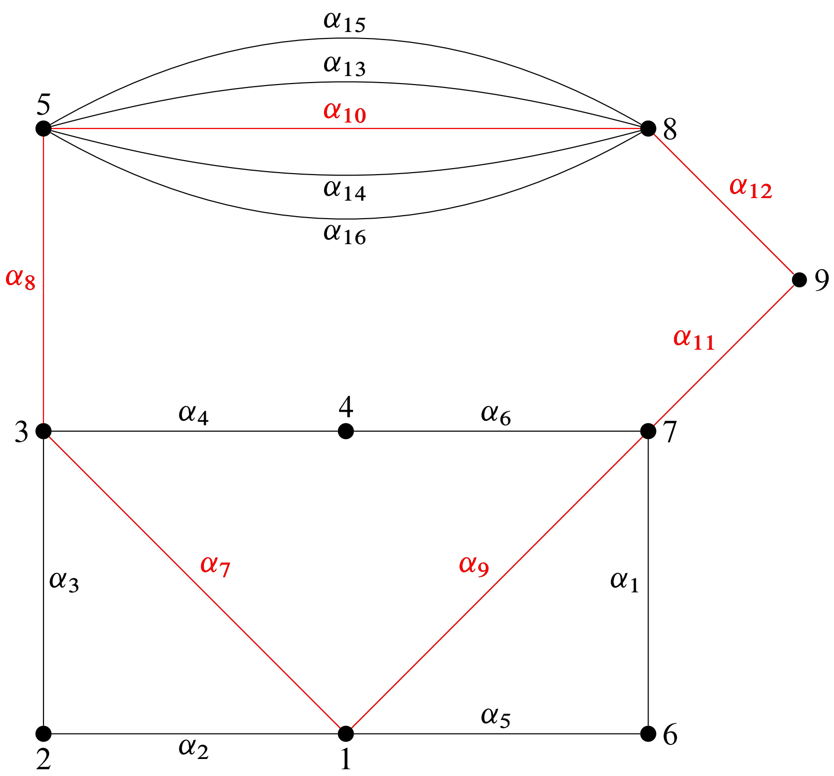
Teorema įrodyta. $\square$

Pavyzdys 3.3 (Eulerio grandinės multigrafe konstravimas)**.** Tarkime mūsų multigrafas G yra

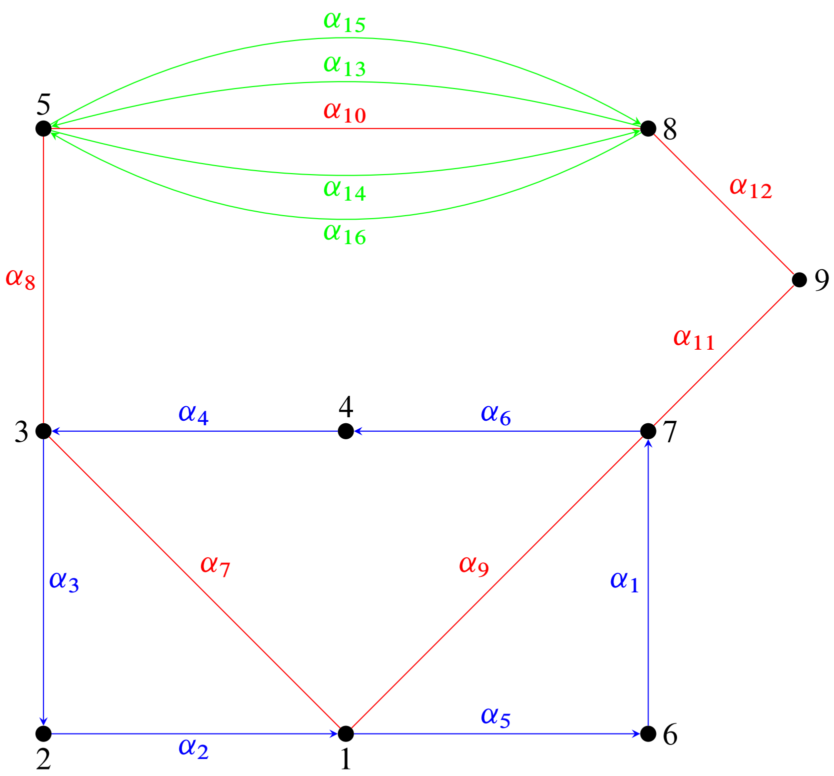


Pirmame žingsnyje surandame šiame multigrafe kokią nors grandinę, pvz:

$$\alpha_9, 7, \alpha_{11}, 9, \alpha_{12}, \alpha_{10}, 5, \alpha_8, 3, \alpha_7, 1$$



Toliau surandame Eulerio grandines visose trijose susidariusiose komponentėse ir apjungiame jas į vieną grandinę.



Taigi Eulerio grandinė mūsų multigrafe bus

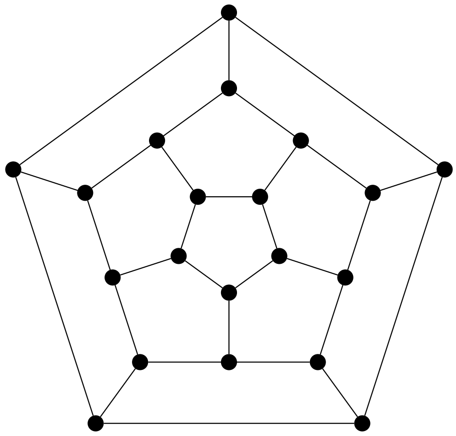
$$\begin{aligned}
&1, \alpha_5, 6, \alpha_1, 7, \alpha_6, 4, \alpha_4, 3, \alpha_3, 2, \alpha_2, 1,\\
&\alpha_9, 7, \alpha_{11}, 9, \alpha_{12},\\
&8, \alpha_{13}, 5, \alpha_{14}, 8, \alpha_{16}, 5, \alpha_{15}, 8,\\
&\alpha_{10}, 5, \alpha_8, 3, \alpha_7, 1
\end{aligned}$$

Ką tik įrodytos teoremos įrodymą mes galime apibendrinti Eulerio trasos atvejui.

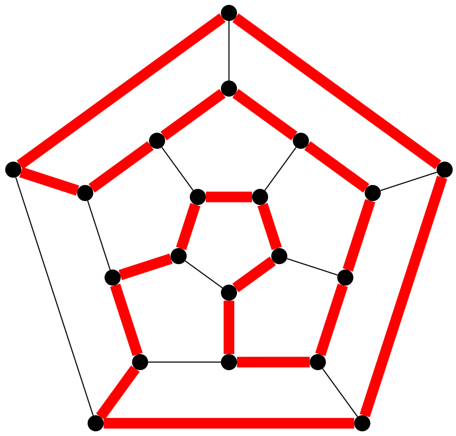
Teorema 3.2. *Jungiame multigrafe G egzistuoja Eulerio trasa tada ir tik tada kai jame yra lygiai dvi viršūnės kurių laipsniai yra nelyginiai.*

4 Hamiltono grafai

1857m. Airių matematikas Hamiltonas sugalvojo galvosūkį reikalaujantį surasti uždarą kelią, kuris apeitų visas grafo



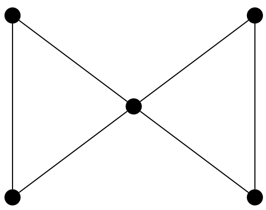
viršūnes po vieną kartą. Šio uždavinio sprendimas yra



Apibrėžimas 4.1. *Grafo* hamiltono ciklu *yra vadinamas ciklas grafe G kuriam priklauso visos grafo G viršūnės.*

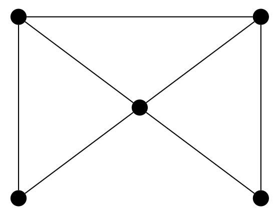
Apibrėžimas 4.2. *Grafas, kuriame egzistuoja Hamiltono ciklas yra vadinamas* hamiltono grafu.

Pavyzdys 4.1. Grafas

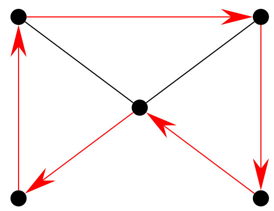


neturi Hamiltono ciklo, nes bet kuris uždaras kelias apeinantis visas šio grafo viršūnes turės pereiti vidurinę viršūnę bent du kartus.

Pavyzdys 4.2. Grafas



jau turės ciklą apeinantį visas grafo viršūnes

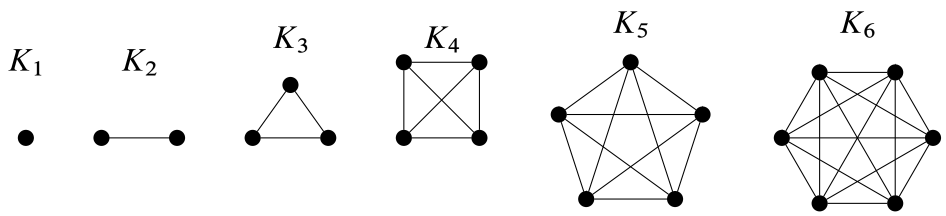


Taigi, šis grafas yra Hamiltono.

Būtinos ir pakankamos sąlygos patikrinti ar duotas grafas yra Hamiltono yra kol kas nežinomos.

Apibrėžimas 4.3. *Pilnuoju grafu K_n yra vadinamas grafas (V, E) turintis $n = |V|$ viršūnių ir visas įmanomas jas jungiančias briaunas, t.y. $|E| = n(n-1)/2$*

Pavyzdys 4.3. Pirmieji šeši pilni grafai turi sekantį pavidalą.



Nesunku matyti, kad pilni grafai K_n yra Hamiltono grafai.

Teorema 4.1 (Ores teorema). *Tarkime grafas $G = (V, E)$ turi ne mažiau kaip tris viršūnes $|V| = n \geqslant 3$. Jeigu bet kuriai porai viršūnių $u, v \in V$, kurios nėra sujungtos briauna $(u, v) \notin E$, teisinga nelygybė*

$$\deg(u) + \deg(v) \geqslant n.$$

tai G yra Hamiltono grafas.

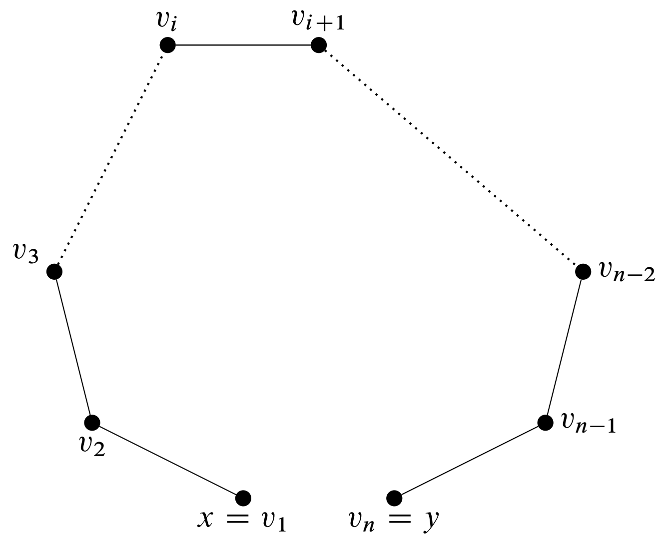
Įrodymas. Įrodinėsime prieštaros būdu. Tarkime, kad egzistuoja grafas $G = (V, E)$ pasižymintis teoremoje nurodyta savybe, tačiau neturintis Hamiltono ciklo. Paimkime dvi grafo G viršūnes a ir b, tarp kurių nėra briaunos. Pridėję prie grafo G naują briauną (a, b) mes gausime grafą $G_1 = (V_1, E_1) = (V, E \cup \{(a, b)\})$. Jei G_1 turi Hamiltono ciklą, sustojam. Jeigu ne, paimame kitą porą grafo G_1 briauna nesujungtų viršūnių ir jas sujungę briauna gausime grafą G_2. Tęsiam papildomų briaunų prijungimo procesą tol, kol po kažkurio, tarkime $s + 1$-ojo, žingsnio gausime Hamiltono grafą. Turėsime seką grafų

$$\underbrace{G, G_1, G_2, \ldots, G_s}_{\text{nehamiltoniniai grafai}}, \quad \underbrace{G_{s+1}}_{\text{hamiltoninis}}$$

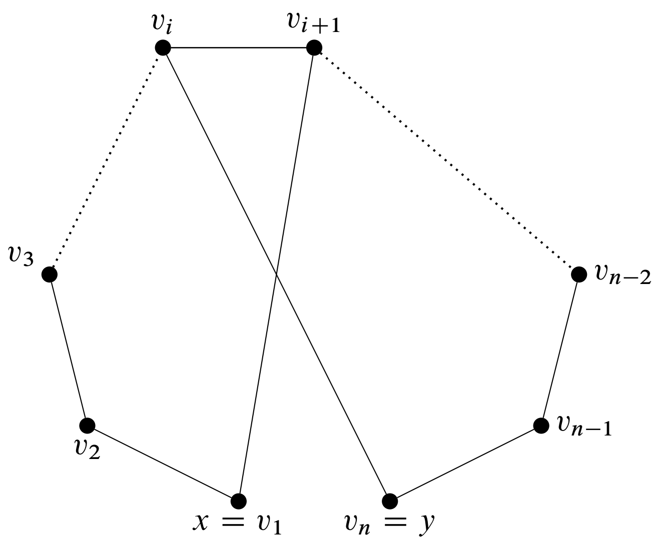
Paskutinis nehamiltoninis grafas G_s pasižymės ta savybe, kad sujungus dvi kažkurias jo viršūnes x ir y mes gausime Hamiltono ciklą

$$(x =)v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots v_{n-1} \to v_n (= y) \to x$$

apeinantį visas grafo viršūnes. O tai reikš, kad grafe G_s bus takas prasidedantis x ir pasibaigiantis y ir apeinantis visas grafo viršūnes.

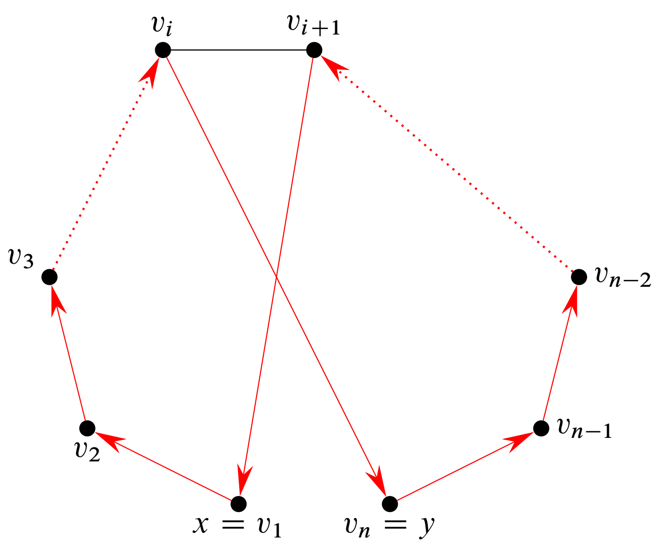


Pastebėkime, kad jeigu galinė tako viršūnė v_n bus sujungta su kokia nors viršūne v_i, tai pradinė tako viršūnė v_1 negalės būti sujungta su po v_i sekančia viršūne v_{i+1}. Nes jeigu pasitaikytų tokia situacija



tai reikštu, jog musu grafas G_s turi Hamiltono ciklą kurio pagal mūsų prielaidą jis turėti negali.

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_i \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots v_{i+1} \to v_1$$



Vadinasi jeigu v_n bus sujungta su viršūnėmis

$$v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{\deg(v_n)}} = v_{n-1}$$

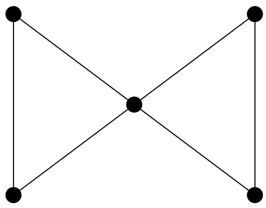
kur $2 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{\deg(v_n)} = n - 1$ tai viršūnė v_1 negalės būti sujungta su viršūnėmis

$$v_{j_1+1}, v_{j_2+1}, \ldots, v_{j_{\deg(v_n)+1}=v_n}$$

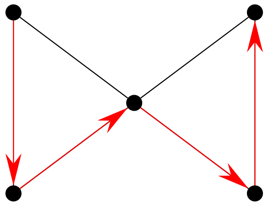
O tai reiškia, kad v_1 gales būti sujungta daugiausiai tik su $n - 1 - \deg(v_n)$ viršūnėmis
$$\{v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\} \setminus \{v_{j_1+1}, v_{j_2+1}, \ldots, v_{j_{\deg(v_n)}+1}\}$$
Tai reiškia, kad skaičius $\deg(v_1)$ viršūnių su kuriomis v_1 yra sujungta briauna tenkina nelygybe
$$\deg(v_1) \leqslant n - 1 - \deg(v_n)$$
arba kitais žodžiais
$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \leqslant n - 1.$$
O tai jau prieštarauja teoremos prielaidai, kad
$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geqslant n.$$
Teorema įrodyta.

Apibrėžimas 4.4. *Hamiltono taku grafe $G = (V, E)$ vadinamas takas pereinantis visas grafo viršūnes po vieną kartą.*

Pavyzdys 4.4. Grafas



neturi Hamiltono ciklo, bet turi Hamiltono taką



□

5 Planarieji grafai

Apibrėžimas 5.1. *Grafas arba multigrafas $G = (V, E)$ yra vadinamas* planariuoju *arba* plokščiu *jeigu jį galima pavaizduoti plokštumoje taip, kad jo briaunos nesikirstų niekur išskyrus viršūnių taškus.*

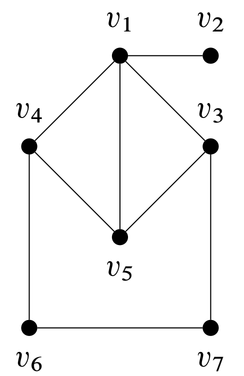
Pavyzdys 5.1. Grafas $G = (V, E)$, su viršūnių aibe

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

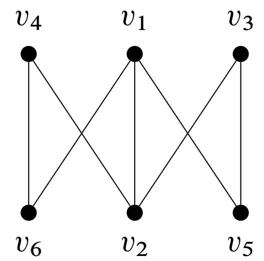
ir briaunų aibe

$$\begin{aligned} E = \{&(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_3), \\ &(v_3, v_5), (v_3, v_7), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_6, v_7)\} \end{aligned}$$

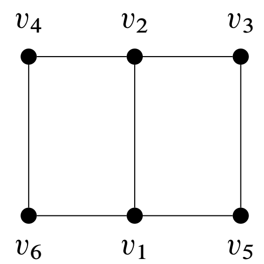
yra plokščias nes jį mes galime pavaizduoti plokštumoje taip, kad jo briaunos kirstųsi tik grafo viršūnėse.



Pavyzdys 5.2. Grafas

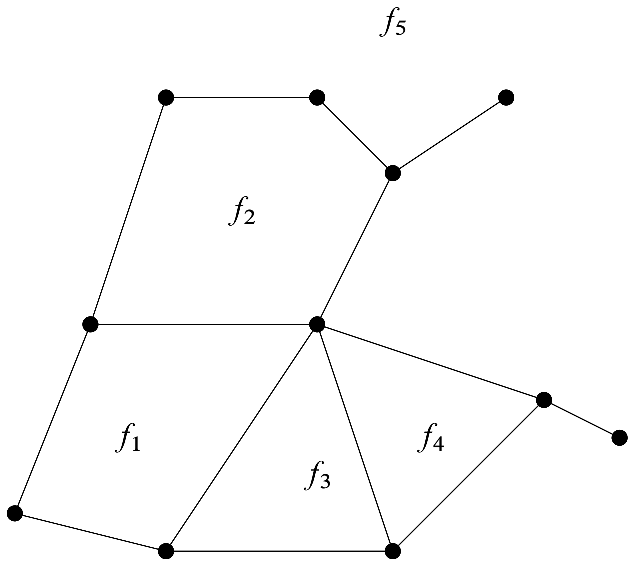


taip pat yra plokščias, nes mes jį galime pavaizduoti plokštumoje kaip



Apibrėžimas 5.2. *Tarkime, kad grafas arba multigrafas G yra pavaizduotas plokštumoje taip, kad jo briaunos nesikerta nekur išskyrus grafo viršūnes. Tuomet plokštumos sritis apribotas grafo briaunomis vadinsime* regionais *arba* veidais.

Pavyzdys 5.3. Plokštumoje pavaizduotas grafas



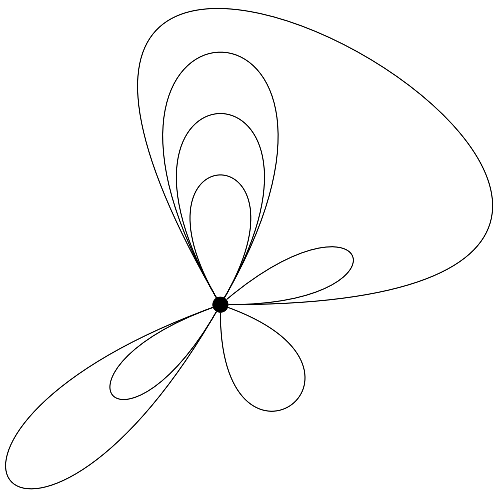
turi 5 regionus: f_1, f_2, f_3, f_4 ir f_5.

Teorema 5.1 (Eulerio daugiakampių formulė)**.** *Tegu $G = (V, E)$ yra jungus planarus grafas arba multigrafas. Tuomet skaičius f regionų į kuriuos plokstumą padalija G brėžinys plokštumoje, toks, kad jo briaunos kertasi tik viršūnėse, tenkina formulę*

$$f + v - e = 2, \tag{1}$$

kur $v = |V|$ yra skaičius G viršūnių, o $e = |E|$ yra skaičius jo briaunų.

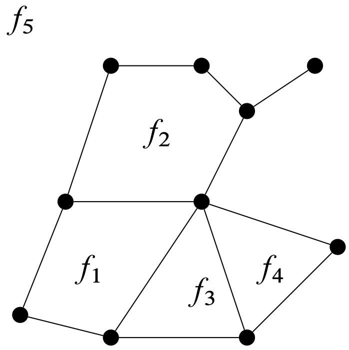
Įrodymas. Iš pradžių panagrinėkime atvejį, kai multigrafas turi tik vieną viršūnę.



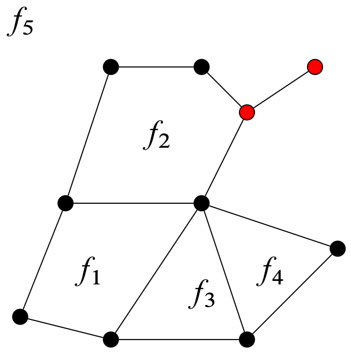
Šiuo atveju visos multigrafo briaunos bus kilpos. Kiekviena prie vienintelės grafo viršūnės pridėta kilpa padalija vieną kurį nors anksčiau buvusį vientisą regioną į dvi dalis. Tuo pačiu kiekviena papildoma briauna padidina regionų skaičių vienetu. Taigi, to atveju, kai multigrafas turi tik vieną viršūnę, jo regionų skaičius bus vienetu didesnis už jo briaunų skaičių.

$$f = e + 1.$$

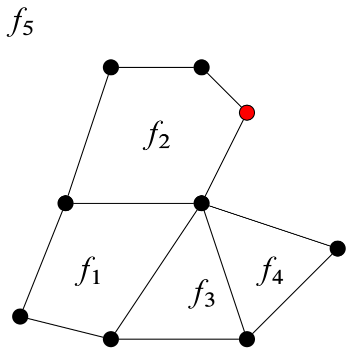
Tuo atveju, kai grafas turi daugiau nei vieną viršūnę, pasirenkame dvi briauna sujungtas viršūnes ir jas sutraukiame taip, kad naujai gautame grafe briaunos nesikirstų niekur išskyrus viršūnes. Gausime grafą turintį viena briauna ir viena viršūne mažiau. Kartojame procesą kol liks tik viena viršūnė. Viršinių sutraukimo procesą mes galime iliustruoti grafu



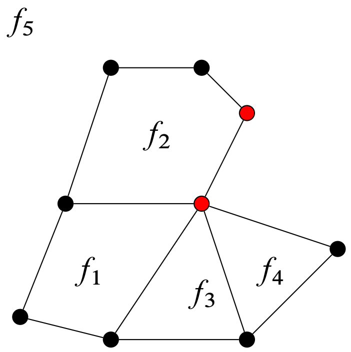
Šiame grafe pasirenkame dvi briauna sujungtas viršūnes (brėžinyje nuspalvintas raudonai)



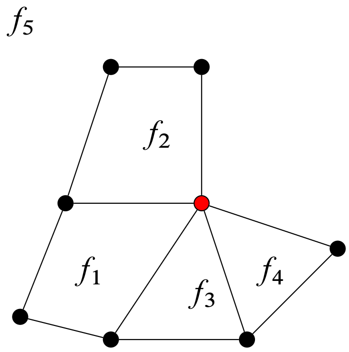
Sutraukę pasirinktas viršūnes taip, kad naujai gautame grafe briaunos nesikirstų, gausime grafą



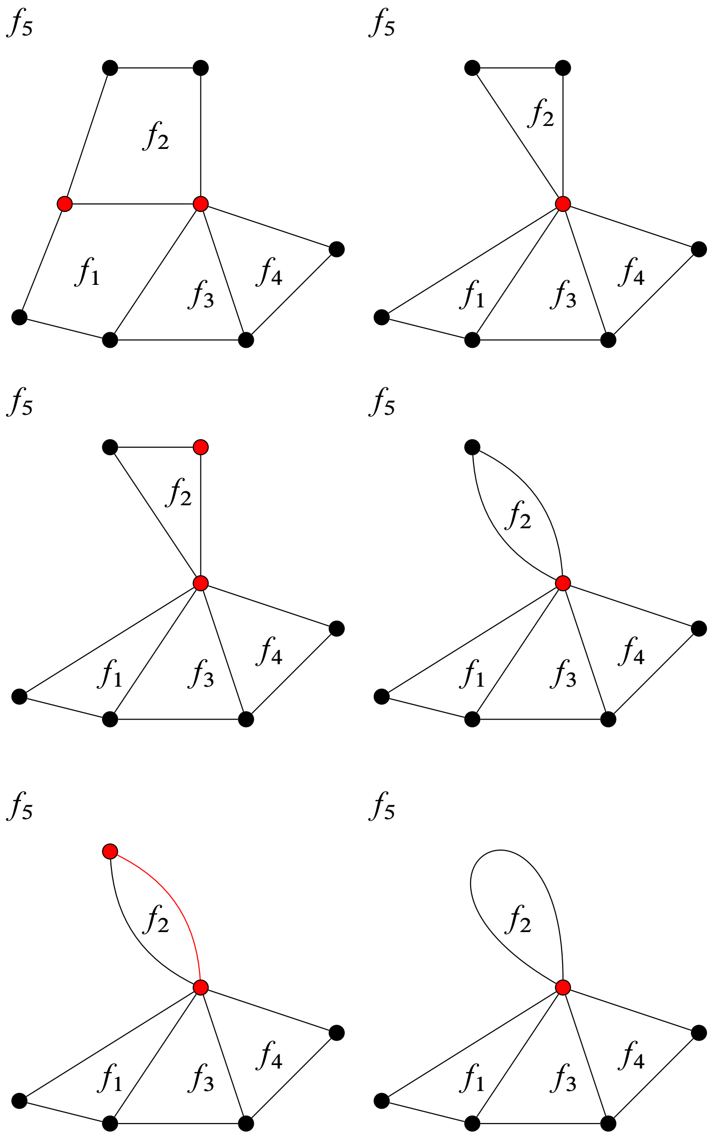
Toliau naujai gautame grafe pasirenkame dar vieną porą briauna sujungtų viršū-nių.

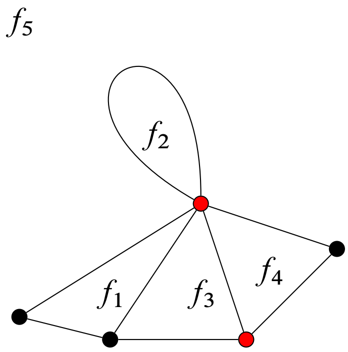
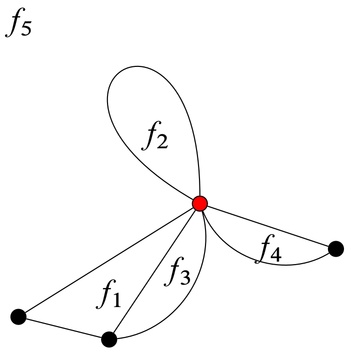
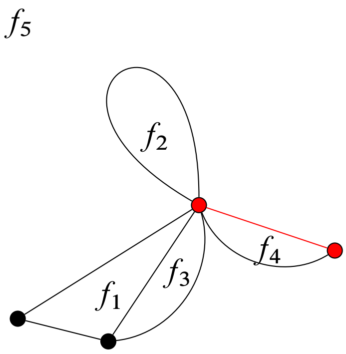
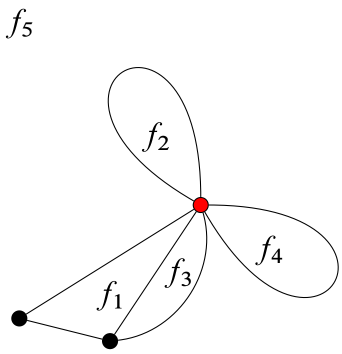
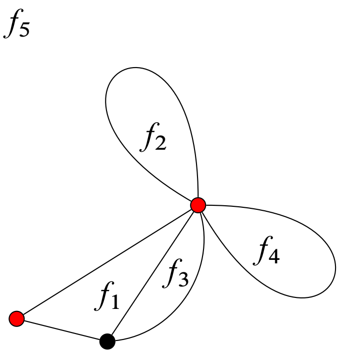
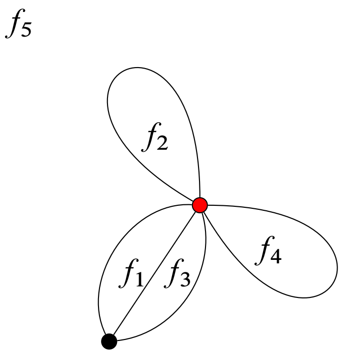


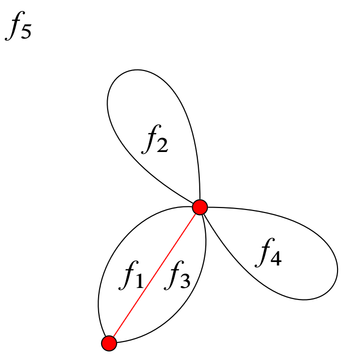
ir jas sutraukiame

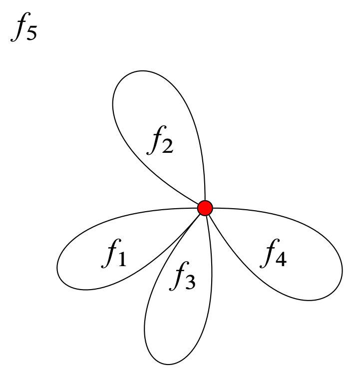


Kartodami procesą toliau gausime seką grafų




f_5
f_2
f_1
f_3
f_4

f_5
f_2
f_1
f_3
f_4

f_5
f_2
f_1
f_3
f_4

f_5
f_2
f_1
f_3
f_4

f_5
f_2
f_1
f_3
f_4

f_5
f_2
f_1
f_3
f_4





Kiekviename žingsnyje atlikę dviejų viršūnių sutraukimo procesą mes gausime multigrafą turintį viena viršūne ir viena briauna mažiau. Taigi, viršūnių sutraukimo proceso gale gausime multigrafą turintį tik vieną viršūnę ir e' briaunų, kurių kiekis bus $v-1$ briauna mažesnis už pradinio grafo briaunų skaičių

$$e' = e - (v-1) = e - v + 1.$$

Multigrafo veidų skaičius f liks nepakitęs. Todėl

$$f = e' + 1$$

įstate čia vietoje e' dydį $e - v + 1$ gausime

$$f = e' + 1 = e - v + 1 + 1 = e - v + 2$$

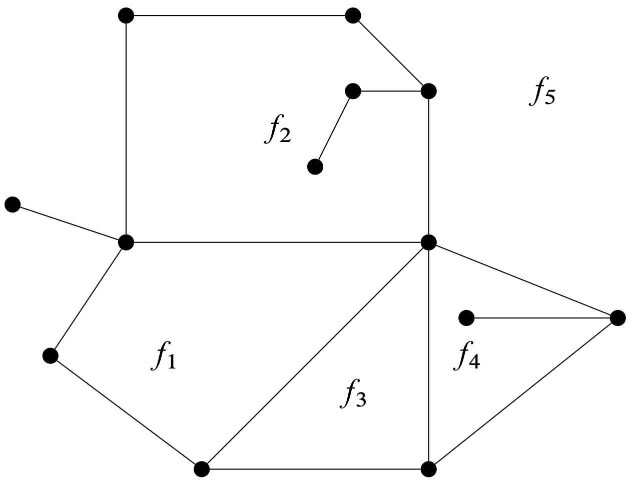
perkėlę viską į kairę pusę gausime

$$f - e + v = 2$$

Teorema įrodyta. $\square$

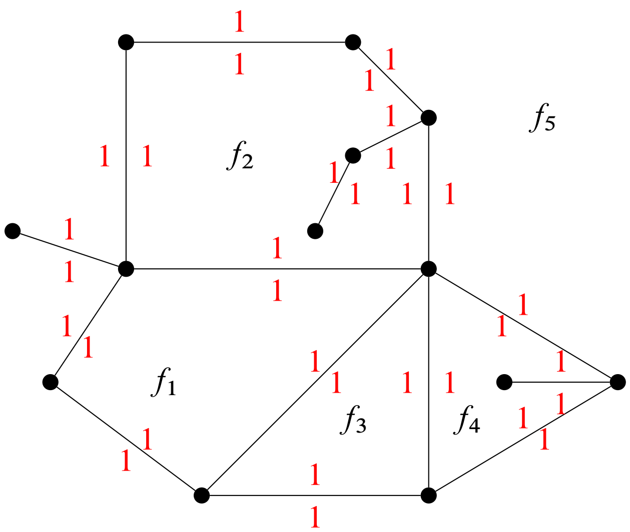
Apibrėžimas 5.3. *Plokštumoje pavaizduoto planaraus grafo G veido f_i laipsniu* $\deg(f_i)$ *vadinsime skaičių briaunų, kurias reikia pereiti apeinant veido kraštą.*

Pavyzdys 5.4. Tarkime mūsų grafas G yra



Čia turime $\deg(f_3) = 3$ tačiau $\deg(f_4) = 5$, kadangi viena briauna gulinti veido f_4 viduje yra apeinama du kartus apeinant šio veido kraštus.

Planaraus grafo veido laipsnį galime taip pat vaizdžiai apibrėžti sekančiu būdu. Prie kiekvienos briaunos abiejų pusių prirašome po vienetą. Tuomet grafo veido laipsniu bus skaičius vienetų esančių to veido viduje.



Suma visų regionų laipsnių bus lygi skaičiui visų vienetų mūsų brėžinyje, kuris savo ruožtu bus lygus padaugintam iš 2 grafo briaunų skaičiui (nes kiekviena briauna įneša po 2 vienetus į bendrą vienetų sumą).

$$\deg(f_1) + \deg(f_2) + \deg(f_3) + \deg(f_4) + \deg(f_5) = 2|E|$$

Taigi, iš ką tik išnagrinėto pavyzdžio padarome išvadą, kad galioja sekanti teorema.

Teorema 5.2. *Jeigu $G = (V, E)$ yra planarus grafas, o $R_1, R_2, \ldots, R_f$ yra jo regionai, tai suma visų regionų laipsnių yra lygi grafo briaunų skaičiui padaugintam iš dviejų*

$$\deg(R_1) + \deg(R_2) + \cdots + \deg(R_f) = 2|E| \tag{2}$$

Jeigu G yra paprastas planarus grafas (ne multigrafas!) be kilpų tai bet kurį jo regioną riboja ne mažiau kaip trys briaunos. Vadinasi kiekvino jo regiono laipsnis bus nemažesnis už trejetą

$$\deg(R_2) \geqslant 3$$

todėl

$$\begin{aligned} 2|E| &= \deg(R_1) + \deg(R_2) + \cdots + \deg(R_f) \\ &\geqslant \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{f} \\ &= 3f. \end{aligned}$$

Išvada 5.3. *Jeigu $G = (V, E)$ yra planarus grafas be kilpų, tai skaičius jo regionų f tenkina nelygybę*

$$f \leqslant \frac{2}{3}e$$

kur $e = |E|$ yra grafo briaunų skaičius.

Ką tik įrodytas planaraus grafo regionų skaičiaus f įvertis iš viršaus kartu su Eulerio formule

$$f - e + v = 2$$

duoda sekančioje teoremoje suformuluotą nelygybę, kurią turi tenkinti bet kokio planaraus grafo briaunų ir viršūnių skaičiai.

Teorema 5.4. *Tegu grafas $G = (V, E)$ neturi kilpų ir yra planarus, tuomet*

$$e \leqslant 3v - 6$$

kur $e = |E|$ ir $v = |V|$ yra grafo G briaunų ir viršūnių skaičius atitinkamai

Įrodymas. Pritaikę nelygybę $f \leqslant (2/3)e$ įvertinti planaraus grafo regionų skaičių f įeinantį į Eulerio formulę (1) gausime nelygybę

$$2 = f - e + v \leqslant \frac{2}{3}e - e + v = -\frac{1}{3}e + v$$

Padauginę abi nelygybės puses iš 3 gausime

$$6 \leqslant 3v - e$$

Perkėlę dėmenį e į kairę pusę, o 6 į dešinę pusę gausime teoremos nelygybę.

Teorema įrodyta. □

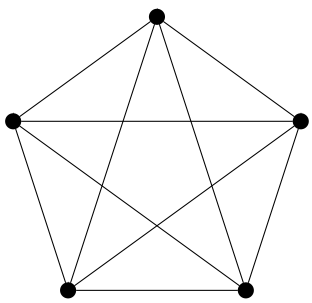
Vadinasi, jeigu grafo G briaunų ir viršūnių skaičius netenkina nelygybės

$$e \leqslant 3v - 6,$$

tai jis nebus planarus.

Išvada 5.5. *Grafas*

$$K_5$$



nėra planarus.

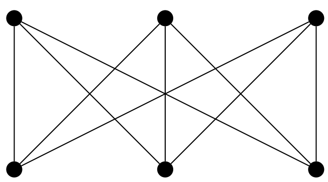
Įrodymas. Grafas K_5 turi $v = 5$ viršūnes ir $e = 10$ briaunų. Taigi

$$3v - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

tuo pačiu $10 = e \geqslant 3v - 6 = 9$. Taigi, nelygybė $e \leqslant 3v - 6$ nebus patenkinta. □

Grafas $K_{3,3}$, kuris gali būti pavaizduotas kaip

$$K_{3,3}$$



tenkina nelygybę $e \leqslant 3v - 6$ tačiau vis tiek yra neplanarus.

Uždavinys 5.1. Įrodykite, kad grafas $K_{3,3}$ nėra planraus

Nurodymas. Įrodymas gali būti gautas sekant žemiau pateiktais žingsniais.

1. Darome prielaida, jog grafas $K_{3,3}$ yra planarus

2. Įsitikinkite, kad mažiausias grafo $K_{3,3}$ ciklo ilgis yra lygus 4. Remiantis kuo įrodykite, kad jeigu sis grafas butu planarus tai visu jo regionu R_i laipsniai $\deg(R_i)$ butu ne mažesni už 4.

3. Kombinuodami nelygybę $\deg(R_i) \geqslant 4$ su grafo regionų laipsnių sumos formule (2) gausime grafo $K_{3,3}$ regionų skaičiaus f įvertį iš viršaus.

4. Pritaikę gautą regionu skaičiaus f įvertį Eulerio formulei (1) gauname nelygybę tarp $K_{3,3}$ briaunų ir viršūnių.

5. Įsitikinkite, kad kad ką tik gauta nelygybė nebus patenkinta jeigu į ją įstatysime $K_{3,3}$ briaunų ir viršūnių skaičių. Gauta prieštara reikš, kad mūsų prielaida, jog grafas $K_{3,3}$ yra planarus yra neteisinga.

□

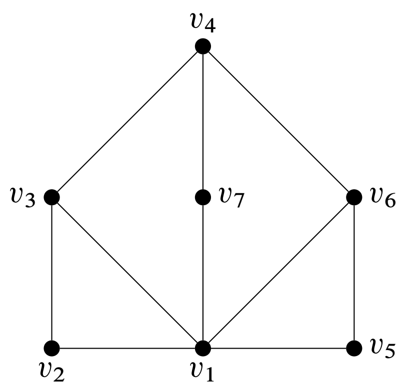
Apibrėžimas 5.4. *Tegu $G = (V, E)$ yra grafas be kilpų. Tegu grafas G' yra gautas pridėjus prie grafo G papildomą naują viršūnę a ir pakeitus vieną grafo G briauną $(u, v) \in E$ dviem briaunomis (u, a) ir (a, v). Tuomet grafa G' mes vadinsime G* elementariuoju padaliniu *(angl. elementary subdivision) vadinsime grafa G'. Kitais žodžiais $G' = (V', E')$ yra grafas kurio viršūnių aibė V' yra lygi*

$$V' = V \cup \{a\},$$

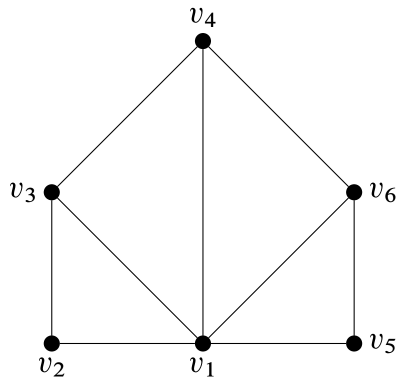
o briaunų aibė E' yra

$$E' = (E \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(u, a), (a, v)\}$$

Pavyzdys 5.5. Grafas



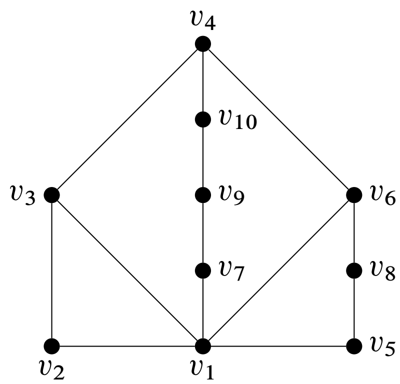
yra grafo



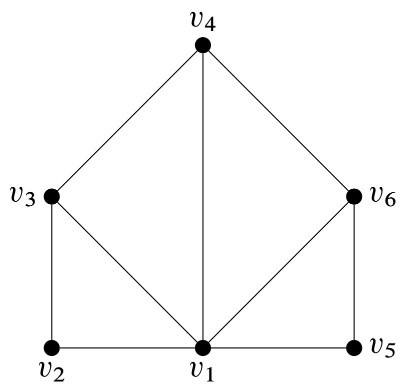
elementarusis padalinys gautas pridėjus vieną viršūnę v_7 ir pakeitus briauną (v_1, v_4) dvejomis briaunomis (v_1, v_7) ir (v_4, v_7).

Apibrėžimas 5.5. *Grafas G' yra vadinamas grafo G* padaliniu *(angl. subdivision) jeigu jis yra gautas iš grafo G vienas po kito atlikus baigtinį skaičių elementariųjų padalinių*

Pavyzdys 5.6. Grafas



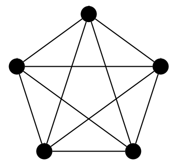
yra grafo



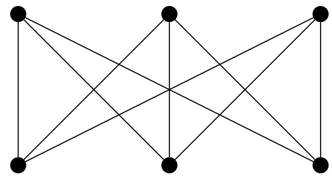
padalinys

Teorema 5.6 (Kuratovskio)**.** *Grafas yra planarus tada ir tik tada, kai jis neturi pografio izomorfiško grafo K_5 arba grafo $K_{3,3}$ padaliniams.*

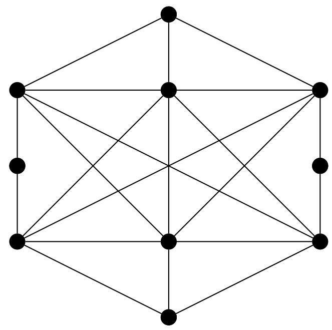
K_5



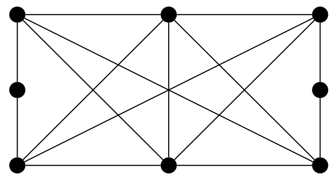
$K_{3,3}$



Pavyzdys 5.7. Grafas



nėra planarus nes turi pografį

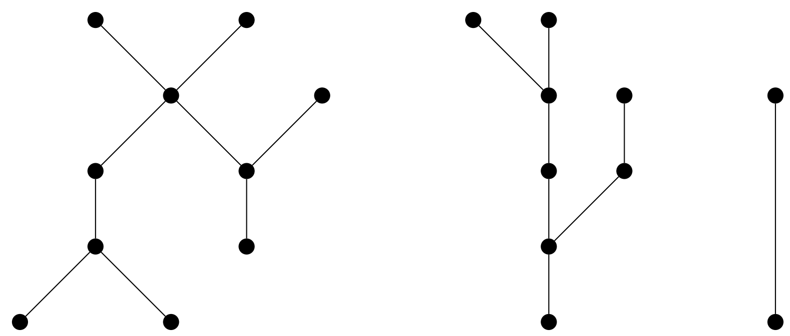


kuris yra grafo $K_{3,3}$ padalinys.

6 Miškai ir medžiai

Apibrėžimas 6.1. Mišku *vadinamas grafas neturintis ciklų.*

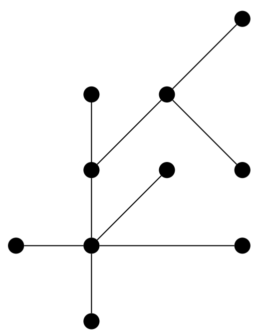
Pavyzdys 6.1. Grafas



yra *miškas*.

Apibrėžimas 6.2. Medžiu *vadinamas* jungus *grafas neturintis ciklų. Kitaip tariant medis yra jungus miškas.*

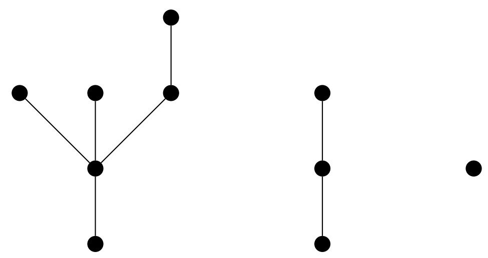
Pavyzdys 6.2. Grafas



yra medis.

Išvada 6.1. *Kiekvienas* medis *yra* miškas*, tačiau ne kiekvienas* miškas *yra* medis.

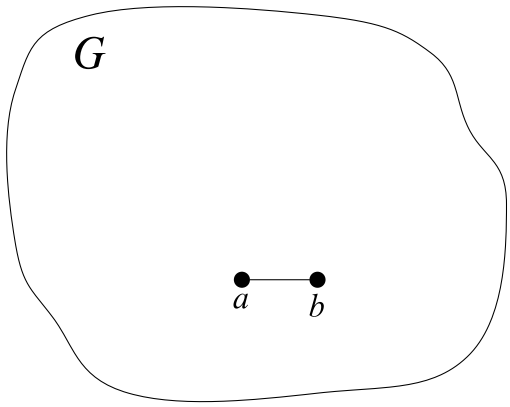
Pavyzdys 6.3. Grafas

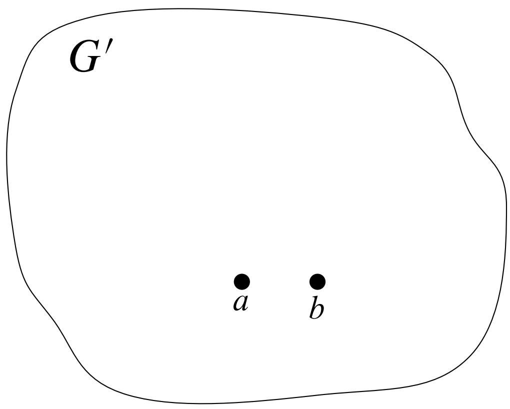


yra *miškas* bet nėra *medis*.

Teorema 6.2. *Jungus grafas G yra medis tada ir tik tada, kai išmetus bet kurią jo briauną yra gaunamas grafas turintis dvi komponentes.*

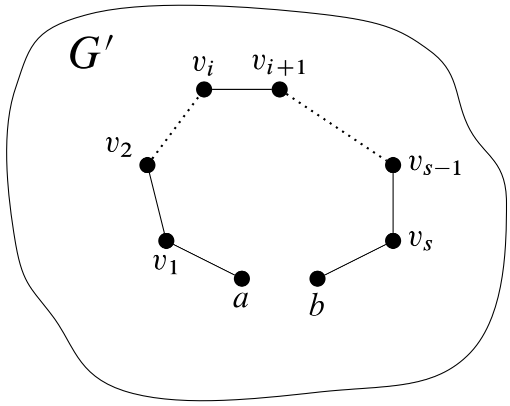
Įrodymas.Būtinumas. Tarkime, kad G yra medis. Įrodysime, kad išbraukę bet kurią jo briauną mes gausime nejungų grafą. Iš tikrųjų, tarkime, kad grafe G yra briauna (a, b), kurią išmetus mes gausime jungų grafą $G' = (V, E_1)$, čia $E_1 = E \setminus \{(a, b)\}$.





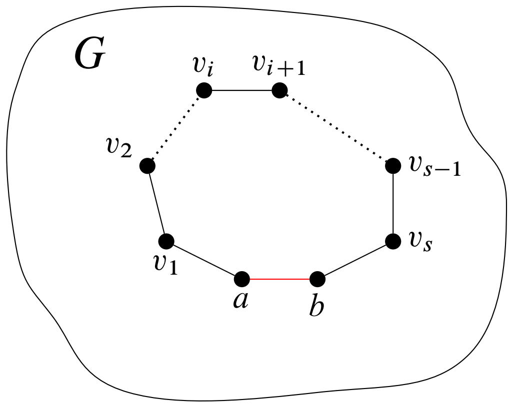
Pagal mūsų prielaidą grafas G' bus jungus. Jungiame grafe bet kurios dvi viršūnės gali būti sujungtos taku. Tame tarpe viršūnės a ir b taip pat bus sujungtos kuriuo nors taku

$$a \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots v_s \to b$$

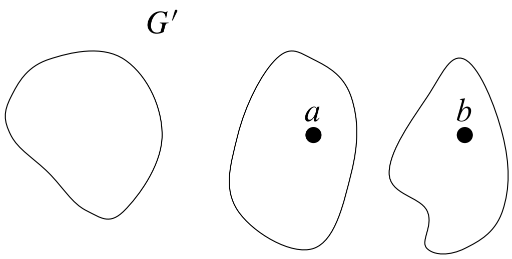


o tai reikš, kad pradiniame grafe G, kuris turėjo briauną (a, b) egzistavo ciklas

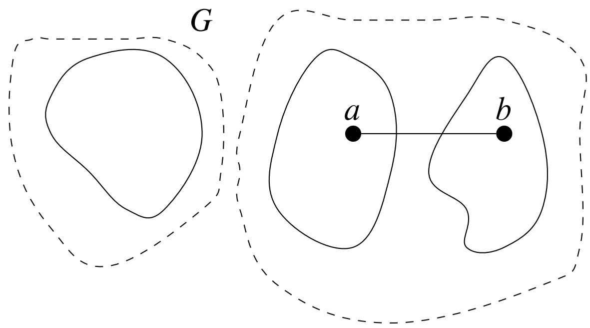
$$a \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots v_s \to b \to a.$$



Gauta prieštara įrodo, kad iš medžio išmetus vieną briauną gautas grafas bus nejungus. Kodėl toks grafas turės lygiai dvi komponentes? Jei grafas gautas išmetus viena briauna turėtų $k \geqslant 3$ komponentes,



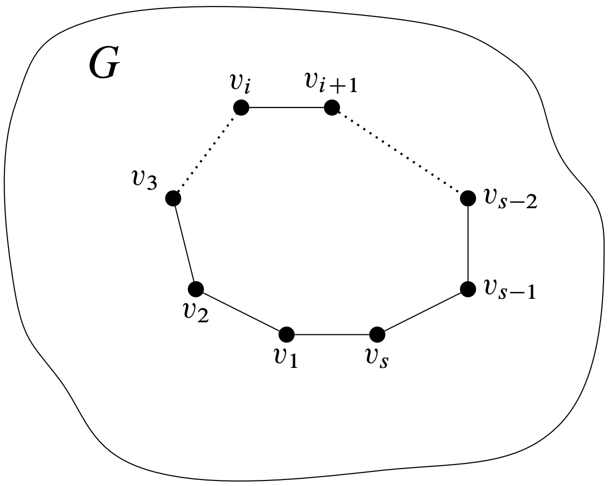
tai gražinus išbrauktą briauna mes sujungtume daugiausiai dvi komponentes,



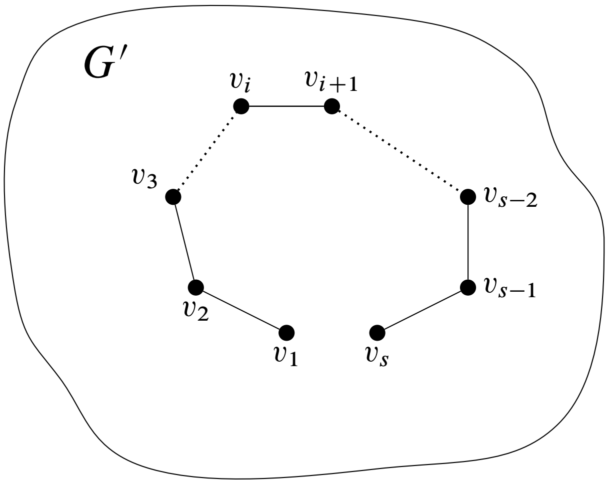
o tai reikštu, kad pradinis grafas turėjo mažiausiai $k - 1 \geqslant 2$ komponentes t. y. buvo nejungus.

□

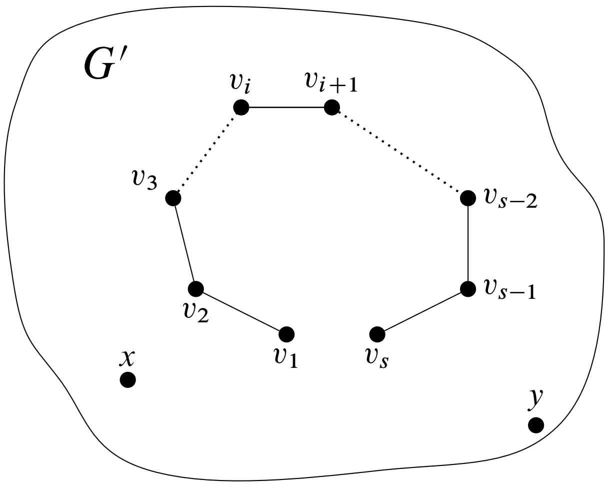
Pakankamumas. Tarkime, kad G yra jungus grafas iš kurio išmetus bet kurią briauną gaunamas grafas su dviem komponentėmis. Tereikia įrodyti, kad toks grafas neturi ciklų. Tarkime grafas G turi cikla



Išmeskime iš grafo G vieną to ciklo briauną (v_1, v_s) ir pažymėkime naujai gautą grafą G'.

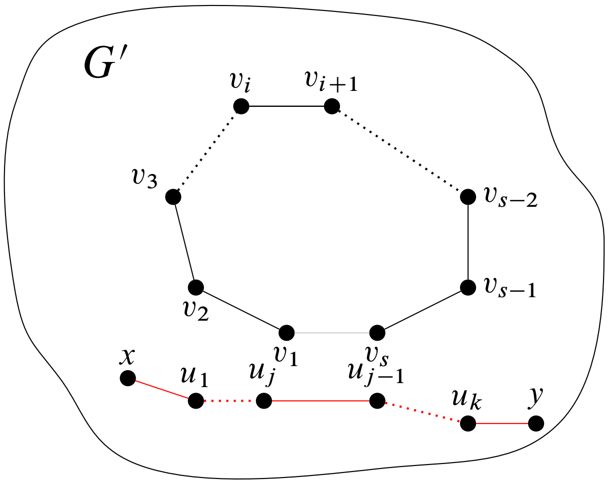


Įrodysime, kad naujai gautas grafas G' yra jungus. Parenkame dvi grafo G' viršūnes x ir y.

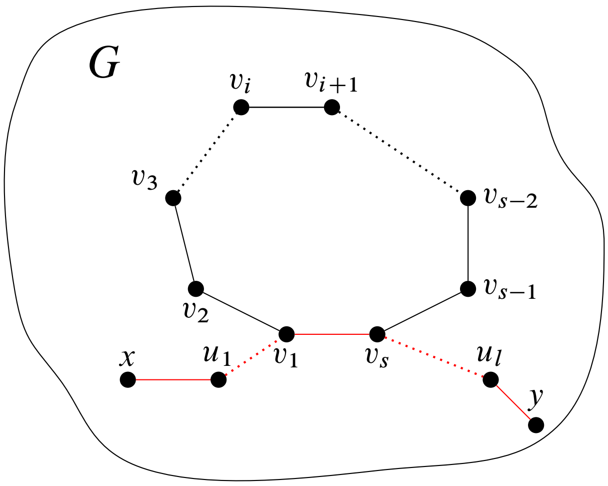


Kadangi grafas G buvo jungus, tai jame buvo ir takas jungiantis x ir y. Toliau įrodysime, kad takas jungiantis x ir y egzistuoja ir grafe G'. Yra galimi du atvejai.

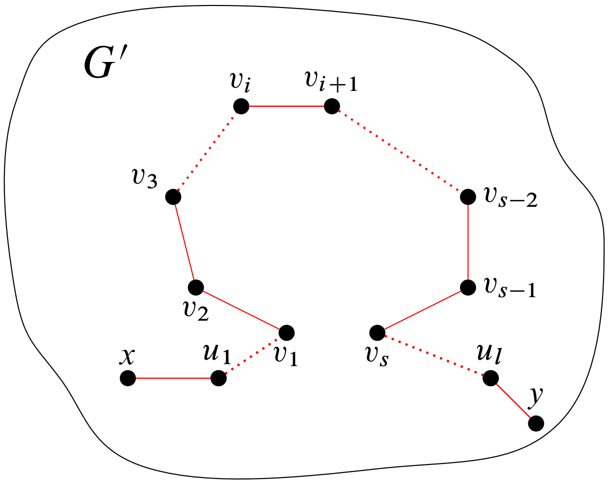
1. Jeigu takas grafe G jungiantis x ir y neina per briauną (v_1, v_s), tai jis bus takas ir grafe G'.



2. Jeigu takas jungiantis x ir y eina per briauną (v_1, v_s),



tai šiuo atveju mes galime taką modifikuoti taip, kad jis neitų per briauną (v_1, v_s), o tai reškia, kad toks modifikuotas takas bus taku ir grafe G', kuris neturi briaunos (v_1, v_s).

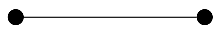


Abiem atvejais grafe G' egzistuos takas jungiantis x ir y. Kadangi x ir y buvo pasirinkti bet kokie tai gausime, kad G' yra jungus. Gautoji prieštara įrodo, kad grafe G nėra ciklų. $\square$

Teorema 6.3. *Jeigu grafas $G = (V, E)$ yra medis, tai jo briaunų skaičius yra vienetu mažesnis už jo viršūnių skaičių*

$$|E| = |V| - 1$$

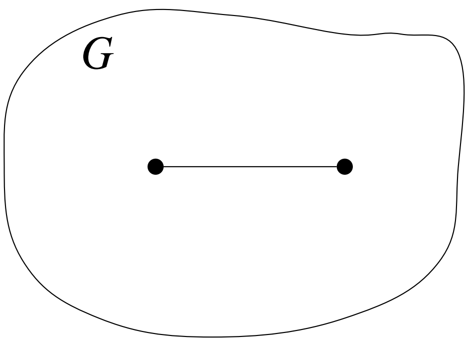
Įrodymas. Įrodinėsime indukcijos metodu pagal grafo briaunų skaičių. Tarkime, kad grafas turi tik vieną briauną $|E| = 1$. Tuomet jis galės turėti tik dvi viršūnes $|V| = 2$.



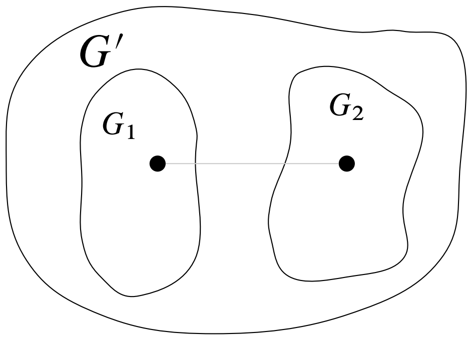
Taigi,

$$|E| = 1 = 2 - 1 = |V| - 1.$$

Tarkime, kad teorema yra teisinga visiems grafams turintiems ne daugiau kaip n briaunų. Įrodysime, kad ji yra teisinga grafams turintiems $n + 1$ briauną. Tarkime, kad grafas $G = (V, E)$ yra jungus ir turi lygiai $n+1$ briauną. Tuomet pasirenkame grafe G viena briauna, ir ja ištriname.



Naujai gautas grafas G' bus sudarytas iš dviejų komponenčių $G_1 = (V_1, E_1)$ ir $G_2 = (V_2, E_2)$.



Komponentės $G_1 = (V_1, E_1)$ ir $G_2 = (V_2, E_2)$ bendrai paėmus turi tokį patį skaičių viršūnių kaip ir grafas $G = (V, E)$ t.y.

$$|V| = |V_1| + |V_2|$$

Tačiau jų bendras briaunų skaičius bus vienetu mažesnis už G briaunų skaičių

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1$$

Kadangi abiems grafams G_1 ir G_2 priklausančių briaunų skaičiai neviršija n, tai jiems tinka indukcijos hipotezė. Vadinasi

$$|E_1| = |V_1| - 1$$
$$|E_2| = |V_2| - 1$$

Sudėję abi šias lygtis panariui turėsime

$$|E_1| + |E_2| = |V_1| + |V_2| - 2$$

Prisiminę, kad $|V| = |V_1| + |V_2|$ ir $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$ gausime

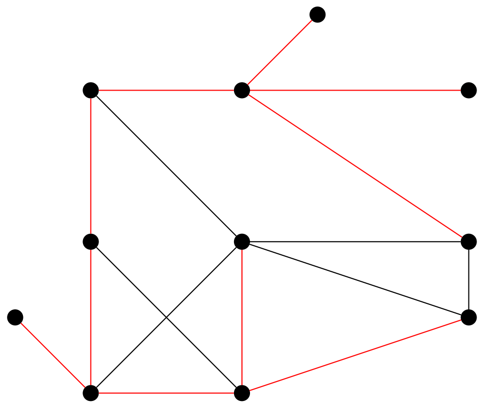
$$|E| = |V| - 1.$$

Teorema įrodyta. □

Teiginys 6.4. *Jungiame grafe egzistuoja medis, kurio viršūnių aibė sutampa su grafo viršūnių aibe. Toks medis yra vadinamas grafo* dengiančiuoju medžiu

Įrodymas. Jeigu jungiame grafe G yra briauna, kuria išmetus grafas išlieka jungus, tai išmetę šią briauną gausime jungų grafą G_1. Jeigu grafe G_1 nėra briaunos kurią išmetus naujai gautas grafas tampa nejungus, tai G_1 bus dengiantis medis. Priešingu atveju tęsiame procesą toliau, kol gausime grafą G_j iš kurio išmetus bet kurią briauną naujai gautas grafas bus nejungus. □

Pavyzdys 6.4 (Dengiančiojo medžio pavyzdys)**.** Žemiau pateiktame grafe raudona spalva yra pažymėtos dengiančiojo medžio briaunos.



Išvada 6.5. *Jeigu grafas $G = (V, E)$ yra jungus, tai jo briaunų ir viršūnių skaičius turi tenkinti nelygybę*

$$|E| \geqslant |V| - 1.$$

Proof. Teiginys 6.4 teigia, kad kiekvienas jungus grafas $G = (V, E)$ turi bent vieną pografį $T = (V_1, E_1)$, kuris yra dengiantysis medis. Kadangi T yra medis, tai kaip teigia teorema 6.3 jo viršūnių ir briaunų skaičių sieja tapatybė

$$|E_1| = |V_1| - 1. \tag{3}$$

Pagal apibrėžimą, dengiančiojo medžio T viršūnių aibė V_1 sutampa su grafo G viršūnių aibe $V_1 = V$, o jo briaunų aibė E_1 yra grafo G briaunų aibės E poaibis $E_1 \subset E$, todėl

$$|V_1| = |V|$$
$$|E_1| \leqslant |E|.$$

Kombinuodami šiuos įverčius su tapatybe (3) kurią tenkina medžio T viršūnių ir briaunų skaičius mes gauname nelygybę

$$|E| \geqslant |E_1| = |V_1| - 1 = |V| - 1.$$

□

Išvada 6.6. *Jungus grafas $G = (V, E)$ yra medis tada ir tik tada kai jo briaunų ir viršūnių skaičiai tenkina tapatybe*

$$|E| = |V| - 1$$

Įrodymas. Tai, kad kiekvieno medžio viršūnių ir briaunų skaičiai tenkina išvadoje suformuluotą tapatybę jau įrodėme teoremoje 3.

Iš kitos pusės, tarkime, kad $G = (V, E)$ yra jungus grafas kurio viršūnių ir briaunų skaičius tenkina tapatybę $|E| = |V| - 1$. Iš tokio grafo išbraukus bet kokią briauną gausime grafą $G' = (V, E')$ kuris turės viena briauna mažiau, taigi jo briaunų ir viršūnių skaičiai tenkins tapatybę $|V| = |E'| - 2$. Iš čia išplaukia, kad toks grafas G' bus nejungus, nes jis netenkins nelygybės suformuluotos išvadoje 6.5, kurią turi tenkinti bet koks jungus grafas. Taigi, iš jungaus grafo tenkinančio teoremoje suformuluotą tapatybę išbraukę bet kokią briauną gausime nejungų grafą. Remiantis teorema 6.2 toks grafas bus medis.

□

Apibrėžimas 6.3. *Grafo* $G = (V, E)$ lapu *vadiname jo viršūnę* $v \in V$ *iš kurios išeina tik viena briauna t.y.* $\deg(v) = 1$.

Teorema 6.7. *Bet koks medis* $G = (V, E)$ *turintis ne mažiau kaip dvi viršūnes* $|V| \geqslant 2$ *turi bent du lapus.*

Įrodymas. Kadangi $G = (V, E)$ yra medis tai

$$|E| = |V| - 1.$$

Iš kitos pusės, kaip ir bet kokiam grafui medžiui G galioja rankų paspaudimo teorema

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2(|V| - 1).$$

Pagal apibrėžimą G yra jungus, vadinasi visų jo viršūnių laipsniai yra nenuliniai $\deg(v) \geqslant 1$. Jeigu grafas G neturėtų lapų, tai visų jo viršūnių laipsniai būtų nemažesni už dvejetą, t.y. $\deg(v) \geqslant 2$ visoms grafo viršūnėms $v \in V$. O iš čia gautume nelygybę prieštaraujančią rankų paspaudimo tapatybei

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geqslant \sum_{v \in V} 2 = 2|V|.$$

Jeigu medis G turėtų tik vieną lapą, tai analogiškai samprotaudami vėl gautume neteisingą nelygybę

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geqslant 2(|V| - 1) + 1 = 2|V| - 1.$$

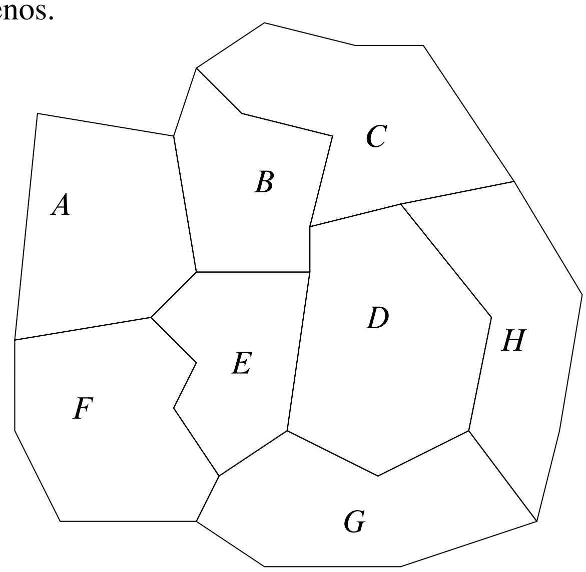
□

7 Grafo viršūnių spalvinimo problema

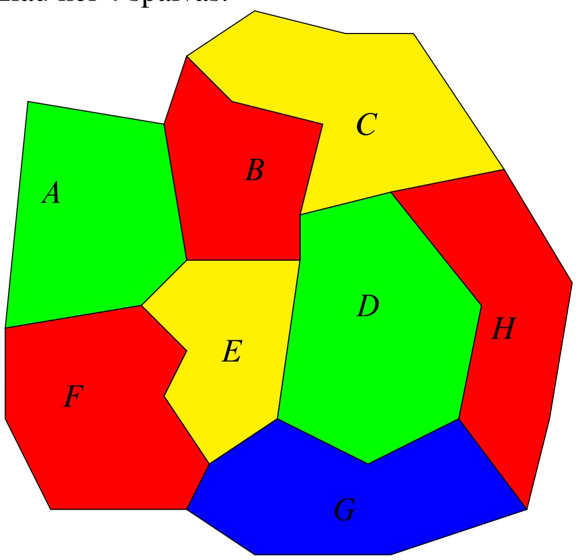
7.1 Žemėlapio spalvinimo problema

Turime nuspalvinti žemėlapį taip, kad dvi turinčios bendrą sieną valstybės būtų nudažytos skirtingomis spalvomis. Kiek mažiausiai spalvų užtenka norint nuspalvinti duotą žemėlapį?

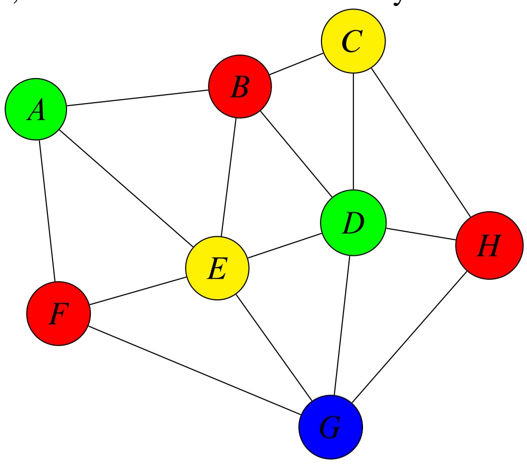
Panagrinėkime pavyzdį žemėlapio, kuriame yra pavaizduotos 7 valstybių A, B, C, D, E, F, G, H sienos.



Nesunku matyti, kad tokį žemėlapį mes negalėsime nudažyti panaudodami ne mažiau nei 4 spalvas.



Kaip ir Kionigsbergo tiltų problemos atveju gavę žemėlapį, kurį reikėtų nuspalvinti jame bus daug uždavinio sprendimui nereikalingos informacijos, pvz. valstybes ribojančių sienų tiksli konfigūracija, valstybių plotai ir t.t. Vienintelė informacija, kurios reikia norint išspręsti žemėlapio spalvinimo problemą yra žinoti tarp kurių valstybių yra siena, o tarp kurių nėra. Taigi, žemėlapio spalvinimo uždavinį mes galime spręsti plokštumoje atidėję taškus atstovaujančius žemėlapyje pavaizduotoms valstybėms ir sujungdami du atidėtus taškus briauna tada ir tik tada, kai taškus atitinkančios valstybės turi bendrą sieną.



Taigi, norėdami nuspalvinti žemėlapį mes turėsime parinkti spalvas atitinkamo grafo viršūnėms taip, kad dvi briauna sujungtos viršūnės būtų nudažytos skirtinga spalva.

Pastebėkime, kad jeigu grafas yra gautas iš žemėlapio, tai tokį grafą mes galime pavaizduoti plokštumoje taip, kad jo briaunos nesikirstų. Kitaip tariant, jis bus *planarus*.

Apibrėžimas 7.1. *Grafo $G = (V, E)$ nuspalvinimu yra vadinamas atvaizdis $f : V \to S$, kur $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ yra baigtinė aibė, vadinama spalvų aibe.*

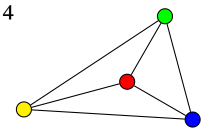
Apibrėžimas 7.2. *Grafo $G = (V, E)$ nuspalvinimas f yra vadinamas* korektišku*, jeigu bet kurios grafo viršūnės $a, b \in V$ kurios yra sujungtos briauna $(a, b) \in E$ yra nuspalvintos skirtingom spalvom*

$$f(a) \neq f(b).$$

Apibrėžimas 7.3. *Grafo G* chromatiniu skaičiumi *yra vadinamas mažiausias kiekis spalvų kurių reikia norint* korektiškai *nuspalvinti grafą G. Šis dydis yra žymimas kaip $\chi(G)$.*

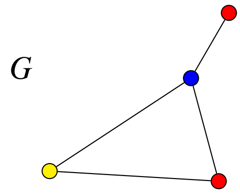
Pavyzdys 7.1. Grafą K_4 mes galime nuspalvinti keturiomis spalvomis.

K_4



Kadangi mažesnio nei keturių spalvų rinkinio neužtenka norint korektiškai nuspalvinti K_4 tai turime, kad šio grafo chromatinis skaičius yra $\chi(K_4) = 4$.

Pavyzdys 7.2. Tegu G yra grafas



Nesunku matyti, kad $\chi(G) = 3$.

Pavyzdys 7.3 (Dažnių paskirstymo problema)**.** Turime n radijo, televizijos arba kt. stočių transliuojančių radijo signalus. Jeigu dvi stotys yra pakankamai arti viena kitos jos transliuodamos tuo pačiu dažniu gali viena kitai trukdyti. Mūsų tikslas parinkti kiekvienai stočiai transliavimo dažnį taip, kad stotys esančios arti viena kitos transliuotų skirtingais dažniais. Be to, norime panaudoti kuo mažiau skirtingų dažnių.

Teorema 7.1. *Pilno grafo K_n chromatinis skaičius yra*

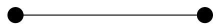
$$\chi(K_n) = n.$$

Proof. Iš tikrųjų, kiekvienai iš n grafo pilno grafo K_n viršūnių priskyrę po skirtingą spalvą, mes galėsime grafą pilną grafą nudažyti n spalvomis. Kitaip tariant $\chi(K_n) \leqslant n$. Iš kitos pusės, mažesnio nei n skaičiaus spalvų neužteks norint korektiškai nudažyti K_n, nes bet kuri pilno grafo viršūnių pora yra sujungta briauna, o tai reiškia, kad visos pilno grafo viršūnės privalės būti nudažytos skirtingomis spalvomis. $\square$

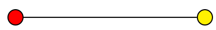
Teorema 7.2. *Bet kokio medžio $T = (V, E)$, turinčio daugiau nei vieną viršūnę $|V| \geqslant 2$ chromatinis skaičius yra lygus dviem*

$$\chi(T) = 2.$$

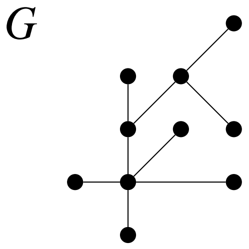
Įrodymas. Įrodinėsime indukcijos metodu. Jeigu medis turi tik dvi viršūnes $|V| = 2$, tai jis turi pavidalą



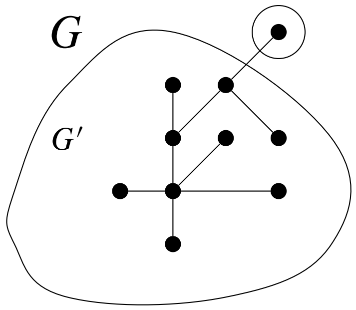
O tai reiškia, kad jis gali būti nudažytas dviem spalvom



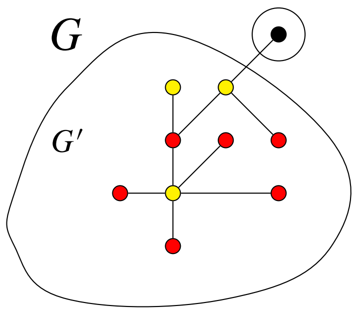
Tarkime, kad dviejų spalvų pakanka nudažyti visus medžius kurie turi ne daugiau kaip n viršūnių. Tegu G bus medis turintis $|V| = n + 1$ viršūnes.



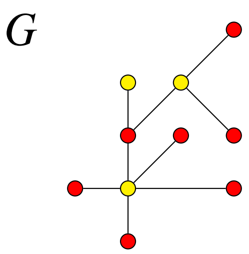
Remiantis teorema 6.7 medis G turės bent du lapus. Pasirenkame vieną medžio G lapą. Išmetę pasirinktą lapą kartu su iš jo išeinančia briauna mes gausime medį G' turintį $|V|-1=n$ viršūnių.



Taigi, grafą G' mes galime nuspalvinti panaudodami dvi spalvas.



Tuomet, nuspalvinę išmestą lapą spalva skirtinga nei spalva viršūnės su kuria ji yra sujungta briauna, gausime grafo G korektišką nuspalvinimą.



Teorema įrodyta. $\square$

Teorema 7.3. *Bet kurio grafo $G = (V, E)$ chromatinis skaičius neviršija jo maksimalaus laipsnio viršūnės laipsnio $\max_{v \in V} \deg(v)$ ir vieneto sumos*

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_{v \in V} \deg(v).$$

Klausimas 7.1. *Koks yra planaraus grafo chromatinis skaičius?*

Teorema 7.4 (Keturių spalvų teorema, 1976)**.** *Kiekvienas planarusis grafas gali būti korektiškai nuspalvintas daugiausiai su* 4 *spalvom. Kitaip tariant jeigu G – planarus, tai*

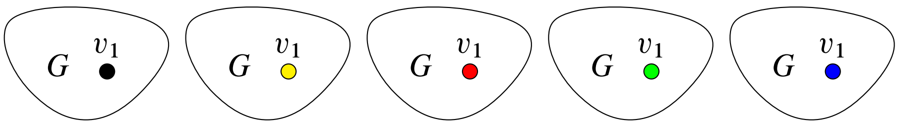
$$\chi(G) \leqslant 4$$

7.2 Chromatiniai polinomai

Grafo chromatinis skaičius $\chi(G)$ su kuriuo ką tik susipažinome yra lygus mažiausiam skaičiui spalvų, kuriu pakanka norint korektiškai nuspalvinti grafą G. Jeigu spalvų skaičius yra didesnis arba lygus $\chi(G)$ tuomet tą patį grafą G mes galėsime nuspalvinti daugeliu būdų. Musu užduotis bus suskaičiuoti tiksliai keliais būdais ta pati grafa mes galėsime nuspalvinti turėdami λ spalvų.

Apibrėžimas 7.4. *Skaičių skirtingi būdų kuriais galime nudažyti neorientuota grafa G panaudodami ne daugiau kaip λ spalvų žymėsime kaip $P(G, \lambda)$. Dydis $P(G, \lambda)$ yra funkcija priklausanti nuo natūrinio skaičiaus λ kurią vadinsime* chromatiniu polinomu.

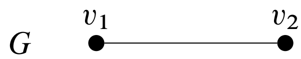
Pavyzdys 7.4. Panagrinėkime grafą $G = (V, E)$ turintį tik vieną viršūnę $V = \{v_1\}$, $E = \emptyset$. Tuomet skaičius būdų, kuriais mes galime nudažyti grafą G panaudodami λ spalvų bus lygus λ. Vadinasi šiuo atveju $P(G, \lambda) = \lambda$. Pvz. Jeigu $\lambda = 5$ tuomet galimi tokie spalvinimo variantai



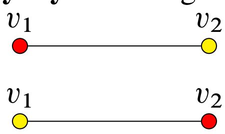
Teiginys 7.5. *Jeigu grafas $G = (V, E)$ neturi briaunų $E = \emptyset$, tai jo chromatinis polinomas yra lygus $P(G, \lambda) = \lambda^{|V|}$*

Įrodymas. Iš tikrųju, kadangi grafas briaunų neturi, tai jo viršūnes mes galime spalvinti nepriklausomai viena nuo kitos. Jeigu grafas turi n viršūnių, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tai viršūnę v_1 mes galime nuspalvinti λ būdų, v_2 mes galime nuspalvinti λ būdų ir t.t. Vadinasi iš viso bus λ^n variantų nuspalvinti mūsų grafą. □

Pabandysime apskaičiuoti chromatinį polinomą grafo G, kuris yra sudarytas iš dviejų viršūnių ir jas jungiančios briaunos

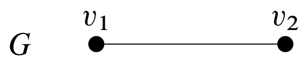


Pavyzdys 7.5. Jeigu $\lambda = 2$ tai bus du būdai nudažyti mūsų grafą

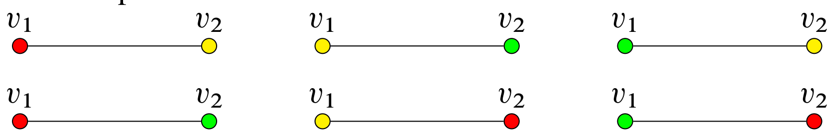


Vadinasi $P(G, 2) = 2$.

Pavyzdys 7.6. Jeigu $\lambda = 3$ tai grafą G

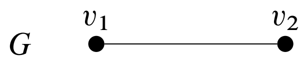


galėsime nuspalvinti $3 \cdot 2 = 6$ būdas



Vadinasi $P(G, 3) = 6$.

Teiginys 7.6. *Grafo*

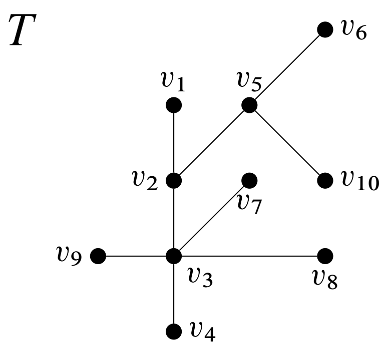


chromatinis polinomas yra lygus $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)$.

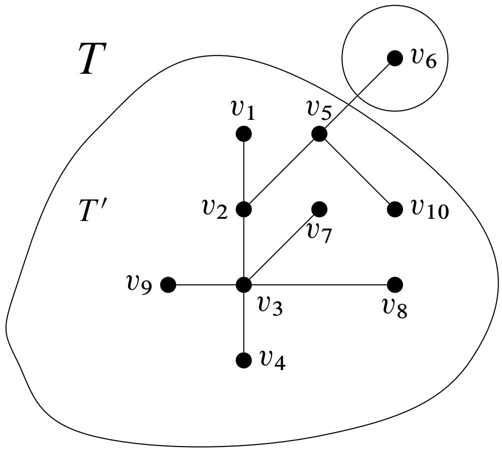
Proof. Viršunę v_1 mes galime nuspalvinti λ būdų. Kadangi viršūnės v_1 ir v_2 yra sujungtos briauna, tai mes negalime jų nudažyti tą pačia spalva. Taigi, parinkus v_1 spalvą λ būdų mes galėsime parinkti v_2 nuspalvinimą $\lambda - 1$ būdų. □

Teorema 7.7. *Jeigu grafas* $T = (V, E)$ *yra medis, tai* $P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{|V|-1}$.

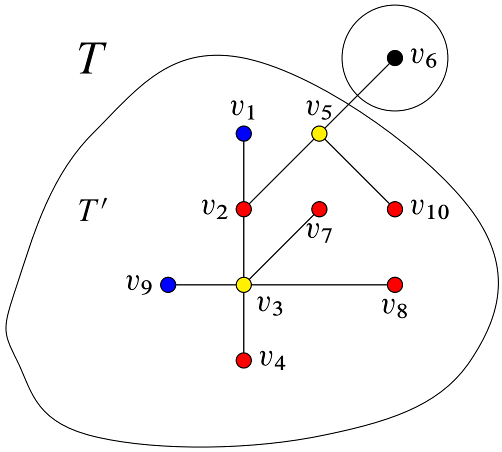
Proof. Įrodinėsime taikydami matematinę indukciją pagal medžio viršūnių skaičių. Jau įrodėme, kad kai $|V| = 1$ ir $|V| = 2$ tai $P(T, \lambda) = \lambda$ ir $P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ atitinkamai. Tarkime, kad visų medžių, turinčių lygiai n viršūnes chromatinis polinomas yra $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$. Tarkime, kad T yra medis turintis lygiai $n + 1$ viršūnę.



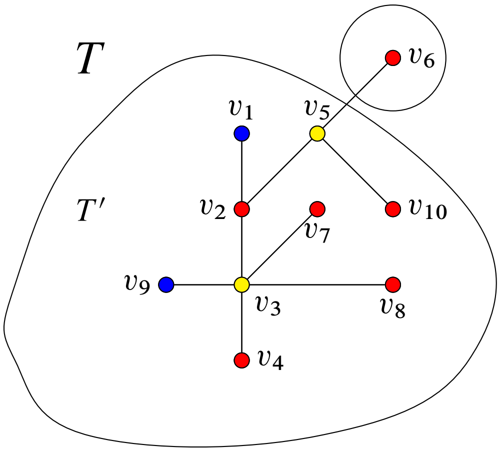
Pažymėkime kaip T' grafo pografį gautą iš pašalinus vieną lapą.



Medis T' bus sudarytas iš n viršūnių. Grafą T spalvinsime dviem etapais: iš pradžių vienu iš $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ būdų nuspalvinsime T'.



Po to, viena iš $\lambda - 1$ spalvų nuspalvinsime pašalintą lapą.



Iš viso bus $\lambda(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1)$ budų nuspalvinti T. Taigi, $P(T,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^n$. $\square$

Teiginys 7.8. *Pilno grafo K_n chromatinis polinomas yra lygus*

$$P(K_n,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1).$$

Įrodymas. Pilno grafo visos viršūnės yra sujungtos viena su kita, todėl visos viršūnė turės buti nudažytos skirtingomis spalvomis. Jiegu grafo K_n viršūnės yra $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tai

- v_1 mes galėsime nudažyti viena iš λ spalvų.
- v_2 mes galėsime nudažyti viena iš $\lambda - 1$ spalvų.
- v_n mes galėsime nudažyti viena iš $\lambda - n + 1$ spalvų.

Vadinasi mes turėsime

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$$

būdų nudažyti visas grafo K_n viršūnes. $\square$

Teorema 7.9. *Tarkime turime du grafus $G_1 = (V_1, E_1)$ ir $G_2 = (V_2, E_2)$ kurių viršūnių aibės nesikerta $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Tuomet šių grafų sąjungos $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ chromatinis polinomas yra lygus grafų G_1 ir G_2 chromatinių polinomų sandaugai*

$$P(G_1 \cup G_2, \lambda) = P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda).$$

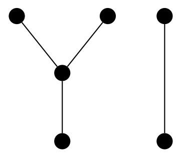
Proof. Iš tikrųjų, kadangi G_1 ir G_2 neturi bendrų viršūnių, tai šiuos grafus mes galime spalvinti nepriklausomai vienas nuo kito. Nudažę vienu iš $P(G_1,\lambda)$ įmanomų būdų grafą G_1 mes galėsime nuspalvinti grafą G_2 bet kuriuo iš $P(G_2,\lambda)$ būdų. Vadinasi porą grafų G_1 ir G_2 mes galėsime nuspalvinti

$$P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda)$$

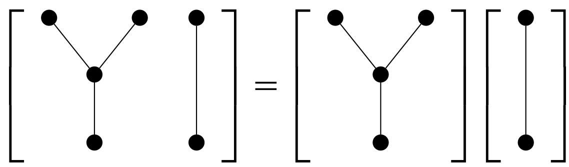
būdų. $\square$

Apibrėžimas 7.5. *Toliau susitarsime grafo G chromatinį polinomą $P(G,\lambda)$ žymėti kaip* $[G]$.

Pavyzdys 7.7. Grafas



yra nejungus ir sudarytas iš dviejų komponenčių, kurios yra medžiai. Todėl jo chromatinis polinomas yra

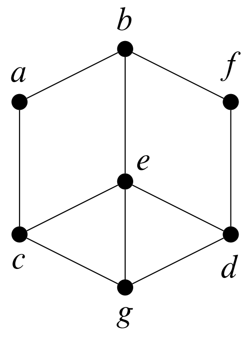


$$= \lambda(\lambda-1)^3 \cdot \lambda(\lambda-1)$$
$$= \lambda^2(\lambda-1)^4$$

Apibrėžimas 7.6. *Tarkime, kad grafe G viršūnės a ir b yra sujungtos briauna $e=(a,b)\in E$. Žymėsime kaip G/e grafą gautą iš G sutapatinus viršūnes a ir b ir pakeitus jas viena viršūne ab. Kitaip tariant grafe G/e visas briaunas kurių bent vienas galas sutampa su a arba b, t. y. (z,a) arba (z,b) pakeisime briaunomis (z,ab).*

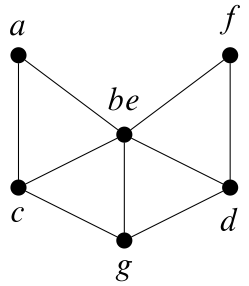
Pavyzdys 7.8. Jeigu mūsų grafas G yra

G

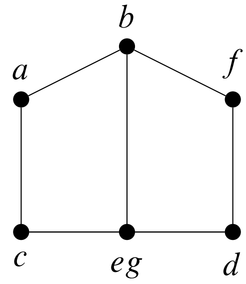


Tuomet iš šio grafo išbraukdami briaunas (b,e), (e,g) mes gausime atitinkamai grafus $G/(b,e)$ ir $G/(e,g)$ atitinkamai.

$G/(b,e)$



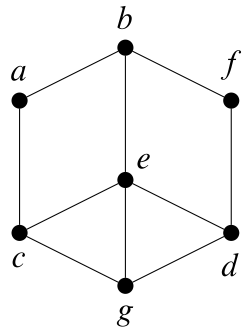
$G/(e,g)$



Apibrėžimas 7.7. *Tarkime, kad grafe G viršūnės a ir b yra sujungtos briauna $e = (a,b) \in E$. Žymėsime kaip G/e grafą gautą iš G sutapatinus viršūnes a ir b ir pakeitus jas viena viršūne ab. Kitaip tariant grafe G/e visas briaunas kurių bent vienas galas sutampa su a arba b, t. y. (z,a) arba (z,b) pakeisime briaunomis (z,ab).*

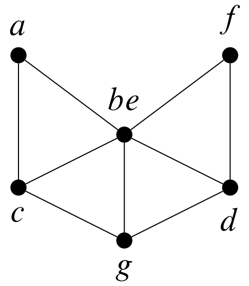
Pavyzdys 7.9. Jeigu mūsų grafas G yra

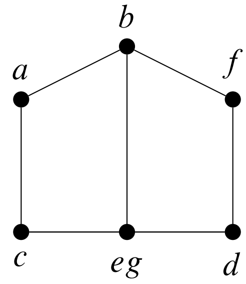
G



Tuomet sutapatindami briaunų (b,e), (e,g) galams priklausančias viršūnes mes gausime grafus $G/(b,e)$ ir $G/(e,g)$ atitinkamai

$G/(b,e)$ $\qquad$ $G/(e,g)$





Teorema 7.10. *Jeigu $G = (V, E)$ yra neorientuotas grafas turintis briauną $(a, b) \in E$ jungiančią viršūnes $a, b \in V$ tai*

$$P(G, \lambda) = P\big(G - (a, b), \lambda\big) - P\big(G/(a, b), \lambda\big)$$

Įrodymas. Visus $P(G-(a, b), \lambda)$ nuspalvinimus galėsime suskirstyti į dvi grupes:

1. Tie $G - (a, b)$ nuspalvinimai kur a ir b nuspalvintos ta pačia spalva. Tokių nuspalvinimų bus lygiai tiek pat kiek nuspalvinimų grafo gauto iš G sutapatinant viršūnes a ir b, tai yra $P(G/(a, b), \lambda)$.

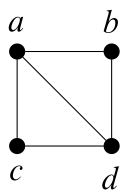
2. Tie $G-(a, b)$ nuspalvinimai kur a ir b nuspalvintos skirtingomis spalvomis. Tokių nuspalvinimų bus lygiai tiek pat kiek bus ir nuspalvinimų grafo gauto iš $G - (a, b)$ sujungiant viršūnes a ir b briauna, tai yra $P(G, \lambda)$.

Vadinasi

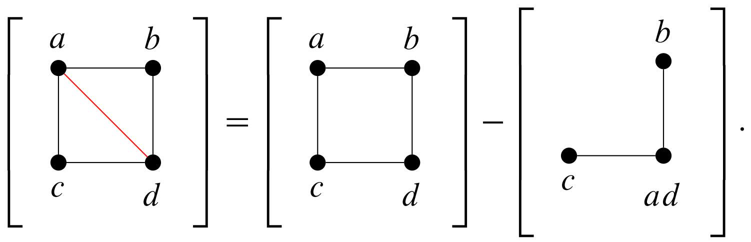
$$P(G - (a, b), \lambda) = P(G, \lambda) + P(G/(a, b), \lambda)$$

□

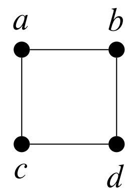
Pavyzdys 7.10. Apskaičiuosime grafo



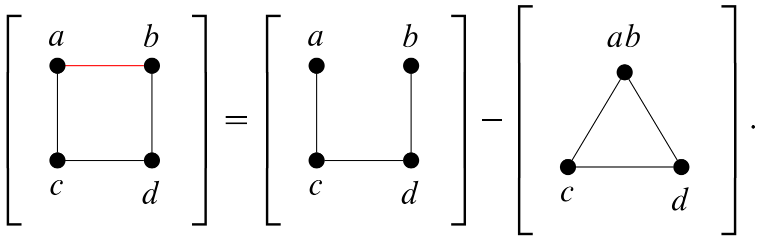
chromatinį polinomą. Visų pirma pasirenkame šio grafo briauną (a, d) ir pritaikydami ką tik įrodytą teoremą 7.10 gauname



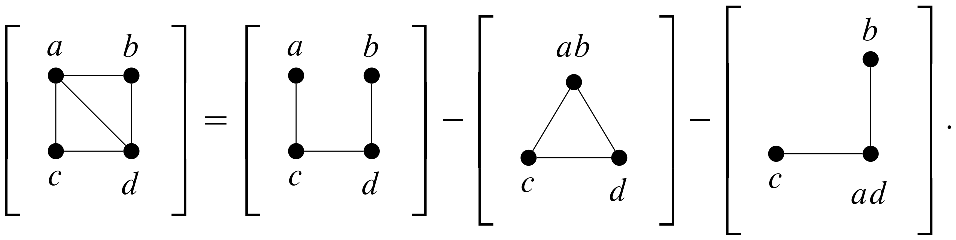
Pritaikę teoremą 7.10 grafo



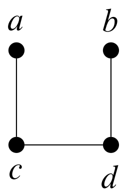
briaunai (a, b) toliau gausime



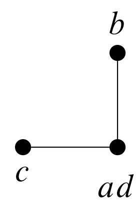
Vadinasi



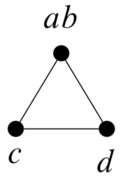
Grafai



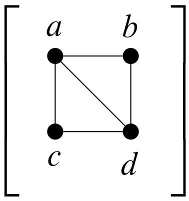
ir



yra medžiai, todėl jų chromatiniai polinomai yra $\lambda(\lambda-1)^3$ ir $\lambda(\lambda-1)^2$ atitinkamai. Taip pat pastebime, kad grafas

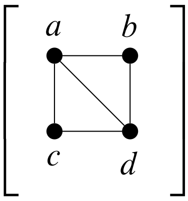


yra izomorfinis pilnam grafui K_3, todėl jo chromatinis polinomas yra lygus $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Galiausiai gauname



$$= \lambda(\lambda - 1)^3 - \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1)^2$$

išskleidę reiškinį esantį dešinėje pusėje gauname



$$= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda.$$

Išvada 7.11. *Grafo G chromatinis polinomas $P(G, \lambda)$ yra polinomas.*

Įrodymas. Įrodinėsime taikydami matematinę indukcija pagal grafo briaunų skaičių. Jeigu G yra grafas neturintis briaunų, yra medis arba pilnas grafas tai teorema yra įrodyta. Priešingu atveju taikome indukciją pagal grafo briaunų skaičių. Jeigu $|E| = 0$ tai grafas briaunų neturi. Vadinasi $P(G, \lambda) = \lambda^{|V|}$ yra polinomas

Tarkime, kad bet kurio grafo turinčio ne daugiau kaip n briaunų $P(G, \lambda) =$ yra polinomas. Jeigu G yra grafas turintis $n + 1$ briauną tai

$$P(G, \lambda) = P(G/(a, b), \lambda) - P(G - (a, b), \lambda)$$

kur grafai $G/(a, b)$ ir $P(G - (a, b)$ turi bent viena briauna mažiau nei G, t.y. jų briaunų skaičius neviršija n. Vadinasi $P(G/(a, b), \lambda)$ ir $P(G - (a, b), \lambda)$ yra polinomai. Kadangi dviejų polinomų skirtumas yra polinomas tai $P(G, \lambda)$ taip pat bus polinomas.

□

Teorema 7.12. *Jeigu du grafai $G_1 = (V_1, E_1)$ ir $G_2 = (V_2, E_2)$ turi tik vieną bendrą viršūnę $\{v\} = V_1 \cap V_2$ tai grafo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ chromatinis polinomas $P(G_1 \cup G_2, \lambda)$ yra*

$$P(G_1 \cup G_2, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda)}{\lambda}.$$

Įrodymas. Viršūnę v nudažius viena iš λ spalvų $\{s_1, s_2, \ldots, s_\lambda\}$, pvz s_j likusias grafo G_1 viršūnes mes galėsime nudažyti $c(s_j)$ būdais. Taigi

$$P(G_1, \lambda) = c(s_1) + c(s_2) + \cdots + c(s_\lambda).$$

Pastebėkime, kad skaičius būdų, kuriais mes galėsime nudažyti likusias grafo G_1 viršūnes $V_1 \setminus \{v\}$ nepriklausys nuo to, kurią spalvą parinkome viršūnei v, t.y. $c(s_1) = c(s_2) = \cdots = c(s_\lambda)$ taigi,

$$P(G_1, \lambda) = c(s_1)\lambda.$$

Taigi, parinkus vieną spalvą viršūnei v likusias grafo G_1 viršūnes mes galėsime nudažyti

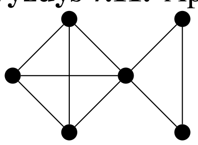
$$\frac{P(G_1, \lambda)}{\lambda}$$

būdų. Vadinasi grafą $G_1 \cup G_2$ mes galime nuspalvinti iš pradžių λ būdų parinkę spalvą viršūnei v, po to $\frac{P(G_1,\lambda)}{\lambda}$ būdų parinkę spalvą likusioms grafo G_1 viršūnėms ir galiausiai $\frac{P(G_2,\lambda)}{\lambda}$ būdų parinkę spalvas likusioms grafo G_2 viršūnėms. Vadinasi

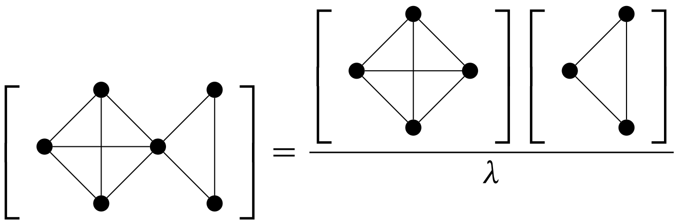
$$P(G_1 \cup G_2, \lambda) = \lambda \frac{P(G_1, \lambda)}{\lambda} \frac{P(G_2, \lambda)}{\lambda} = \frac{P(G_1, \lambda) P(G_2, \lambda)}{\lambda}.$$

□

Pavyzdys 7.11. Apskaičiuosime chromatinį polinomą grafo



Pritaikę ką tik įrodytą teoremą šiam grafui mes gauname

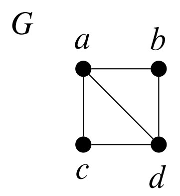


$$= \frac{P(K_4, \lambda) P(K_3, \lambda)}{\lambda}$$
$$= \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \cdot \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{\lambda}$$
$$= \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Teorema 7.13. *Jeigu grafo G chromatinis polinomas yra $P(G,\lambda)$ tai šio grafo chromatinis skaičius bus lygus mažiausiam sveikam skaičiui $\lambda \geqslant 1$ tokiam, kad $P(G,\lambda) > 0$ t. y.*

$$\chi(G) = \min\{\lambda | \lambda \in \mathbb{N}, \quad P(G,\lambda) > 0\}$$

Pavyzdys 7.12. Jau anksčiau apskaičiavome grafo



chromatinį polinomą $P(G,\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$. Turime

$$P(G,1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$$

vadinasi vienos spalvos neužtenka nudažyti grafą G. Taip pat turime, kad

$$P(G,2) = 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 0$$

tai taip pat reiškia kad grafo G mes negalime nudažyti dviem spalvom. Paėmę $\lambda = 3$ ir apskaičiavę chromatinio polinomo reikšmę

$$P(G,3) = 6 \neq 0$$

mes gauname, kad trijų spalvų užtenka norint nuspalvinti grafo viršūnes šešiais būdais. Vadinasi mažiausias kiekis spalvų kurių užtenka norint korektiškai nuspalvinti G yra 3. Taigi $\chi(G) = 3$.

Literatūra

[1] E. Manstavičius, *(Diskrečioji matematika) Kombinatorikos ir grafų teorijos pradmenys*. Paskaitų konspektas, 2000.

[2] E. Manstavičius, *Analizinė ir tikimybinė kombinatorika*. TEV, Vilnius, 2007, I dalis.

[3] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addisin-Wesley, 1999.

[4] N. Vilenkinas, *Kombinatorika* Šviesa, Kaunas, 1979

[5] R. Wilson, *Introduction to Graph Theory.* Longman, 1985

[6] A. Krylovas, *Diskrečioji matematika.* Vilnius, „Technika“, 2004.