Ortogonalizacijos algoritmas

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

2015 m. sausio 13 d.

Turinys

Ortogonalizacijos algoritmas

Izomorfinės Euklido erdvės

Vektoriaus ilgis

Tegul $(V, \langle , \rangle)$ – Euklido erdvė. Apibrėžkime funkciją $\| \, \| : V \to \mathbb{R}_+$,

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad u \in V.$$

Nesunku įsitikinti, kad ši funkcija tenkina tokias sąlygas:

1. Kiekvienam $u \in V$, $\|u\| \geqslant 0$ ir $\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow \ u = \mathcal{O}$.
2. Kiekvienam $u \in V$, kiekvienam $a \in \mathbb{R}$, $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$.
3. Su visais $u, v \in V$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (trikampio nelygybė).

Apibrėžimas 1

Skaičius $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ vadinamas Euklido erdvės vektoriaus u **ilgiu**. Vektorius, kurio ilgis lygus 1, vadinamas **normuotu vektoriumi**.

Nesunku įsitikinti, kad jei $u \neq \mathcal{O}$, tai $\frac{u}{\|u\|}$ – normuotas vektorius.

Lygiagretainio taisyklė

Teiginys 2 (Lygiagretainio taisyklė)

Tarkime, kad $(V, \langle , \rangle)$ *– Euklido erdvė. Tada bet kuriems vektoriams* $u, v \in V$ *teisinga lygybė*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Šią lygybę galima interpretuoti taip: lygiagretainio istrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo kraštinių ilgių kvadratų sumai.

Apibrėžimas 3

Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle)$ vektoriai u ir v vadinami **ortogonaliais** ir žymima $u \perp v$, jei jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, t. y., jei $\langle u, v\rangle = 0$.

Ortogonali vektorių šeima

Apibrėžimas 4

Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle)$ vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vadinama **ortogonalia**, jei $v_i \perp v_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vadinama **ortonormuota**, jei ji ortogonali ir kiekvienas šios šeimos vektorius yra normuotas, t. y. $\|v_j\| = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Teiginys 5

Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle)$ ortogonali nenulinių vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma.

Ortogonali vektorių šeima

Įrodymas.

Tegul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – ortogonali nenulinių vektorių šeima. Tarkime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ir

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathcal{O}.$$

Šios lygybės abidvi puses skaliariškai padauginę iš vektoriaus v_j, gauname

$$\begin{gathered}\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \langle \mathcal{O}, v_j \rangle = 0, \\ \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = 0, \\ \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = 0.\end{gathered}$$

Kadangi $v_j \neq \mathcal{O}$, tai $\langle v_j, v_j \rangle > 0$, todėl $\alpha_j = 0$. Ši lygybė galioja su visais $j = 1, 2, \ldots, n$, todėl vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma.

$\square$

Dabar suformuluosime teoremą iš kurios išplaukia, kad kiekvienoje baigtinės dimensijos Euklido erdvėje galima išrinkti ortonormuotą bazę.

Teorema 6 (Ortogonalizacijos algoritmas)

Tarkime, kad $(V, \langle , \rangle)$ *– Euklido erdvė, o* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *– tiesišai nepriklausoma erdvės* V *vektorių šeima. Tada egzistuoja tokia ortonormuota vektorių šeima* $u_1, u_2, \ldots, u_n$*, kad kiekvienam* $j = 1, 2, \ldots, n$*,*

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_j) = L(u_1, u_2, \ldots, u_j),$$

čia $L(v_1, v_2, \ldots, v_j)$ *– vektorių* $v_1, v_2, \ldots, v_j$ *tiesinis apvalkalas.*

Ortogonalizacijos algoritmas

Įrodymas

Įrodysime matematinės indukcijos būdu pagal n. Jei $n = 1$, tai teoremos tvirtinimas teisingas. Tegul v_1, v_2 – tiesiškai nepriklausomi vektoriai. Reikia sukonstruoti tokią ortonormuotą vektorių sistemą u_1, u_2, kad

$$L(v_1) = L(u_1)$$
$$L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2)$$

Tegul $u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Tada u_1 – normuotas vektorius ir $L(v_1) = L(u_1)$. Nagrinėkime vektorių $tu_1 + v_2$, $t \in \mathbb{R}$. Skaičių t parinksime taip, kad vektorius $tu_1 + v_2$ būtų statmenas vektoriui u_1. Taigi

$$tu_1 + v_2 \perp u_1 \Leftrightarrow \langle tu_1 + v_2, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t\langle u_1, u_1 \rangle + \langle v_2, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}.$$

Vadinasi, vektorius

$$u_2' := -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + v_2$$

yra statmenas vektoriui u_1. Įsitikinsime, kad

$$L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2').$$

Iš tikrųjų, kadangi $v_1 \in L(u_1)$ ir $u_2' \in L(v_1, v_2)$, tai

$$L(u_1, u_2') \subset L(v_1, v_2).$$

Kita vertus $v_1 = \|v_1\| u_1 \in L(u_1) \subset L(u_1, u_2')$ ir

$$v_2 = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + u_2' \in L(u_1, u_2'),$$

todėl $L(v_1, v_2) \subset L(u_1, u_2')$. Taigi $L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2')$.

Vektorius $u_2' \neq \mathcal{O}$. Iš tikrųjų, jei vektorius u_2' būtų nulinis, tai

$$v_2 = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \in L(v_1),$$

o tai reikštų, kad vektoriai v_1 ir v_2 – tiesiškai priklausomi. Pažymėję $u_2 := \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$, gauname ortonormuotą vektorių sistemą u_1, u_2, tenkinančią sąlygas

$$L(v_1) = L(u_1)$$
$$L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2') = L(u_1, u_2)$$

Dabar tarkime, kad teorema teisinga bet kuriai tiesiškai nepriklausomai vektorių šeimai $v_1, \ldots, v_k$, $k < n$, $n > 2$. Įrodysime, kad teorema teisinga tiesiškai nepriklausomai vektorių šeimai $v_1, \ldots, v_n$.

Vektorių šaimai $v_1, \ldots, v_{n-1}$ galioja indukcinė prielaida, todėl egzistuoja tokia ortonormuota vektorių šeima $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, kad kiekvienam $j = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_j) = L(u_1, u_2, \ldots, u_j).$$

Nagrinėkime vektorių

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_{n-1} u_{n-1} + v_n, \quad t_j \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Skaičius t_j parinksime taip, kad (1) vektorius būtų statmenas vektoriams $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Taigi

$$\begin{gathered}
(1) \text{ vektorius} \perp u_j \Leftrightarrow \\
\langle t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_{n-1} u_{n-1} + v_n, u_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \\
t_1 \langle u_1, u_j \rangle + t_2 \langle u_2, u_j \rangle + \cdots + t_{n-1} \langle u_{n-1}, u_j \rangle + \langle v_n, u_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \\
t_j \langle u_j, u_j \rangle + \langle v_n, u_j \rangle = 0 \Leftrightarrow t_j = -\frac{\langle v_n, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}.
\end{gathered}$$

Vadinasi, vektorius

$$u_n' := -\frac{\langle v_n, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1}\rangle} u_{n-1} + v_n \qquad (2)$$

yra statmenas vektoriams $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Įsitikinsime, kad

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_n) = L(u_1, u_2, \ldots, u_n').$$

Iš tikrųjų, remiantis indukcijos prielaida,

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = L(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \subset L(u_1, u_2, \ldots, u_n').$$

Be to, iš (2) matyti, kad $v_n \in L(u_1, u_2, \ldots, u_n')$. Taigi

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subset L(u_1, u_2, \ldots, u_n').$$

Kita vertus remiantis indukcijos prielaida,

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = L(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \subset L(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Iš (2) lygybės matyti, kad $u_n' \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Todėl

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_n') \subset L(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Vadinasi,

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_n') = L(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Vektorius $u_n' \neq \mathcal{O}$, nes priešingu atveju iš (2) gautume lygybę

$$v_n = \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \cdots + \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1} \in L(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}),$$

o tai reikštų, kad vektorių šeima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yra tiesiškai priklausoma.

Taigi $u_n' \neq \mathcal{O}$ ir parinkę $u_n := \frac{u_n}{\|u_n'\|}$, gauname ortonormuotą vektorių šeimą $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kuri su kiekvienu $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenkina sąlygą

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_j) = L(v_1, v_2, \ldots, v_j).$$

Taigi teorema įrodyta vektorių šeimai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Remiantis matematinės indukcijos principu, teorema teisinga visiems $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Išvada 7

Kiekvienoje baigtinės dimensijos Euklido erdvėje egzistuoja ortonormuota bazė.

Pavyzdys 8

Ortogonalizuosime vektorių sistemą $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-3, -4, -1)$, $v_3 = (-4, -7, 0)$.

Sprendimas.

Tegul $w_1 = v_1 = (1, 2, 1)$. Remiantis (2),

$$w_2 = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + v_2 = (-1, 0, 1),$$

$$w_3 = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 + v_3 = (1, -1, 1).$$

Taigi gavome ortogonalizuotą vektorių sistemą w_1, w_2, w_3. Kiekvieną vektorių normavę, gausime ortonormuotą vektorių sistemą u_1, u_2, u_3, kur $u_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$.

$\square$

Apibrėžimas 9

Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle_V)$ ir $(W, \langle , \rangle_W)$ vadinamos **izomorfinėmis** (arba izometrinėmis), jei egzistuoja bijekcija $f : V \to W$, tenkinanti sąlygas:

1. Atvaizdis $f : V \to W$ yra **tiesinis**, t. y. bet kuriems $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.
2. Bet kuriems $u, v \in V$, $\langle f(u), f(v) \rangle_W = \langle u, v \rangle_V$.

Teorema 10

Baigtinės dimensijos Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle_V)$ ir $(W, \langle , \rangle_W)$ yra izomorfinės tada ir tik tada, kai tiesinių erdvių V ir W dimensijos yra lygios.

Išvada 11

Kiekviena n-matė Euklido erdvė $(V, \langle , \rangle)$ yra izomorfinė standartinei n-matei Euklido erdvei $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$.