II dalis Matematinės logikos pradmenys (2)

1 Normaliosios formos

Kaip matėme I dalies 3 skyriuje, logines formules galime laikyti funkcijomis, ir ekvivalenčios loginės formulės atitinka tą pačią funkciją. Taigi, kiekvieną tokią funkciją atitinka begalinė loginių formulių šeima. Tai nėra patogu. Norėtųsi iš tos šeimos išskirti vienintelę formulę, kuri „atstovautų“ tą funkciją. Ta „atstovė“ bus vadinama tobuląja normaliąja forma. Šiame skyriuje ją apibrėšime ir įsitikinsime, kad kiekvienai funkcijai jinai vienintelė.

1) Normaliosios disjunkcinė ir konjunkcinė formos

Šiame poskyryje apibrėšime normaliąsias formas ir parodysime, kaip jas gauti. Apie tobuląsias normaliąsias formas šnekėsime kitame poskyryje.

Apibrėžimas

Elementariąja konjunkcija (EK) (*atitinkamai* – elementariąja disjunkcija (ED)) *vadiname loginę formulę, į kurią įeina tik loginiai kintamieji ir jų neiginiai, sujungti konjunkcijomis (atitinkamai – disjunkcijomis).*

Pavyzdys

Formulės $a \wedge \neg b \wedge c$, $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$, $\neg p_2$, p_3 yra elementariosios konjunkcijos. Formulės $p_1 \vee \neg p_2$, $\neg p \vee \neg q \vee r$, q, $\neg p_3$ yra elementariosios disjunkcijos.

Kiekviena elementarioji konjunkcija yra arba tapačiai klaidinga, arba teisinga tik su viena interpretacija. Iš tikrųjų, jei į elementariąją konjunkciją įeina kuris nors kintamasis ir jo neiginys, tai jinai yra tapačiai klaidinga. Priešingu atveju, jinai teisinga su vienintele interpretacija.

Pavyzdys

Elementarioji konjunkcija $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg q$ yra tapačiai klaidinga, nes

$$\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg q \sim \neg p \wedge r \wedge (q \wedge \neg q) \sim (\neg p \wedge r) \wedge k \sim k.$$

Elementarioji konjunkcija $\neg p \wedge q \wedge r$ yra teisinga, kai $\neg p$, q ir r yra teisingi, tai yra, kai $p=k$, $q=t$ ir $r=t$, o visais kitais atvejais klaidinga, nes bent vienas iš $\neg p$, q ar r bus klaidingas. □

Lygiai taip pat kiekviena elementarioji disjunkcija yra arba tapačiai teisinga, arba klaidinga tik su viena interpretacija. Iš tikrųjų, jei į elementariąją disjunkciją įeina kuris nors kintamasis ir jo neiginys, tai jinai yra tapačiai teisinga. Priešingu atveju, jinai klaidinga su vienintele interpretacija.

Pavyzdys

Formulė $\neg p \vee q \vee r \vee \neg q$ yra tapačiai teisinga, nes

$$\neg p \vee q \vee r \vee \neg q \sim \neg p \vee r \vee (q \vee \neg q) \sim (\neg p \vee r) \vee t \sim t.$$

Formulė $\neg p \vee q \vee r$ yra klaidinga, kai $\neg p$, q ir r yra klaidingi, tai yra, kai $p = t$, $q = k$ ir $r = k$, o visais kitais atvejais bus teisinga, nes bent vienas iš $\neg p$, q ir r bus teisingas. □

Apibrėžimas

Normaliąja disjunkcine forma (NDF) *vadiname formulę, kurios pavidalas yra* $\bigvee_{i=1}^{m} K_i$, *kur* K_i *– elementariosios konjunkcijos,* $m \geq 1$. *Duotos formulės* normaliąja disjunkcine forma *vadiname jai ekvivalenčią NDF.*

Normaliąja konjunkcine forma (NKF) *vadiname formulę, kurios pavidalas yra* $\bigwedge_{i=1}^{m} D_i$, *kur* D_i *– elementariosios disjunkcijos,* $m \geq 1$. *Duotos formulės* normaliąja konjunkcine forma *vadiname jai ekvivalenčią NKF.*

Pavyzdys

Formulė $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee \neg b$ yra NDF. Formulė $p \wedge \neg q$ irgi yra NDF, sudaryta iš vienintelės EK. Kadangi $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$, o $\neg p \vee q$ yra NDF (dvi EK, $\neg p$ ir q, sujungtos disjunkcija), tai formulė $\neg p \vee q$ yra formulės $p \rightarrow q$ NDF.

Formulės $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge p_3$ ir $\neg p \vee \neg q \vee r$ yra NKF. Kadangi $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$, o $\neg p \vee q$ yra NKF (sudaryta iš vienintelės ED $\neg p \vee q$), tai formulė $\neg p \vee q$ yra formulės $p \rightarrow q$ NKF. □

Teorema

Kiekvienai loginei formulei egzistuoja NDF.

Pateiksime du šios teoremos įrodymus. Abu jie konstruktyvūs, t.y. parodo, kaip gauti formulės NDF. Pirmasis įrodymas rodo, kaip gauti NDF, naudojantis formulės teisingumo reikšmių lentele, antrasis – naudojantis logikos dėsniais.

<u>*Pirmas įrodymas.*</u> Užrašome formulės teisingumo reikšmių lentelę ir iš jos gauname formulės NDF tokiu būdu.

NDF sudarymo procedūra. *Tarkime, formulė yra įvykdoma. Imame tik tas lentelės eilutes, kuriose formulės reikšmė yra t, ir iš kiekvienos tokios eilutės sudarome po vieną elementariąją konjunkciją, konstantas t keisdami atitinkamais loginiais kintamaisiais, o konstantas k – jų neiginiais. Gautas elementariąsias konjunkcijas jungiame disjunkcijomis.*

Jei formulė yra tapačiai klaidinga, jos NDF yra bet kuri tapačiai klaidinga NDF, pavyzdžiui, $p \wedge \neg p$.

p	*q*	*r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*k*	*k*
t	*k*	*t*	*k*
t	*k*	*k*	*k*
k	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*k*	*t*
k	*k*	*t*	*k*
k	*k*	*k*	*k*

Parodysime pavyzdžiu. Tarkime, formulės *Q(p,q,r)* teisingumo reikšmių lentelė yra parodyta dešinėje. Turime tris eilutes, kuriose formulės reikšmė yra *t*. Kiekvienai eilutei keičiame *t* į atitinkamą kintamąjį, *k* į jo neiginį. Iš pirmos eilutės gauname elementariąją konjunkciją $p \wedge q \wedge r$, iš penktos $\neg p \wedge q \wedge r$, iš šeštos $\neg p \wedge q \wedge \neg r$, ir imame jų disjunkciją: $P(p,q,r) := (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$. Tai ir bus formulės *Q(p,q,r)* NDF. Iš tikro pirma elementarioji konjunkcija teisinga tik su interpretacija $p=t$, $q=t$, $r=t$, antra su $p=k$, $q=t$, $r=t$, trečia su $p=k$, $q=t$, $r=k$, todėl jų disjunkcija teisinga tik su šiomis trimis interpretacijomis, o su kitomis – klaidinga. Taigi formulės *P(p,q,r)* teisingumo reikšmių lentelė sutampa su formulės *Q(p,q,r)* teisingumo reikšmių lentele, todėl jos ekvivalenčios. Ir formulė *P(p,q,r)* yra elementariųjų konjunkcijų disjunkcija, todėl *P(p,q,r)* yra formulės *Q(p,q,r)* NDF. □

<u>*Antras įrodymas*</u>. Suvedame formulę į NDF, naudodami logikos dėsnius.

1 žingsnis. Pašaliname visas operacijas, išskyrus $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Tam naudojamės loginių operacijų pašalinimo dėsniais:

$p \oplus q \sim \neg(p \leftrightarrow q)$,

$p \leftrightarrow q \sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,

$p \to q \sim \neg p \vee q,$

$p \mid q \sim \neg(p \wedge q).$

2 žingsnis. Įkeliame neiginius į skliaustus (neiginiai turi likti tik prie loginių kintamųjų). Naudojamės De Morgano dėsniais

$\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q,$

$\neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q,$

ir dvigubo neigimo dėsniu

$\neg\neg p \sim p.$

3 žingsnis. Taikome distributyvumo dėsnį

$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

tol, kol gausime NDF.

Atlikdami kiekvieną žingsnį ir po jo galime prastinti, naudodami idempotencijos dėsnius

$p \vee p \sim p,$

$p \wedge p \sim p,$

prieštaravimo dėsnį

$p \wedge \neg p \sim k,$

negalimo trečiojo dėsnį

$p \vee \neg p \sim t,$

absorbavimo dėsnius

$(p \vee q) \wedge p \sim p,$

$(p \wedge q) \vee p \sim p$

ir kitus dėsnius.

Po šių trijų žingsnių ir gausime duotos formulės NDF. □

Pavyzdys

Norime rasti formulės $\neg(p \to (q \wedge r))$ NDF.

1 žingsnis: pašaliname implikaciją:

$\neg(p \to (q \wedge r)) \sim \neg(\neg p \vee (q \wedge r)).$

2 žingsnis: įkeliame neiginius į skliaustus:

$\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \sim p \wedge \neg(q \wedge r) \sim p \wedge (\neg q \vee \neg r).$

3 žingsnis: taikome distributyvumo dėsnį:

$p \wedge (\neg q \vee \neg r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r).$

Suprastinti nėra ką. Gavome NDF. □

Teorema

Kiekvienai loginei formulei egzistuoja NKF.

<u>*Pirmas įrodymas*</u>. Sudarome formulės teisingumo lentelę ir iš jos gauname formulės NKF tokiu būdu.

NKF sudarymo procedūra. *Tarkime, formulė nėra tapačiai teisinga. Imame tik tas lentelės eilutes, kuriose formulės reikšmė yra k, ir iš kiekvienos tokios eilutės sudarome po vieną elementariąją disjunkciją, konstantas k keisdami atitinkamais loginiais kintamaisiais, o konstantas t – jų neiginiais. Gautas elementariąsias disjunkcijas jungiame konjunkcijomis.*

Jei formulė yra tapačiai teisinga, jos NKF yra bet kuri tapačiai teisinga NKF, pavyzdžiui, $p \vee \neg p$.

Parodysime pavyzdžiu. Tarkime, formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė yra parodyta dešinėje. Turime tris eilutes, kuriose formulės reikšmė yra *k*. Kiekvienai eilutei keičiame *k* į atitinkamą kintamąjį, *t* – į jo neiginį. Iš pirmos eilutės gauname elementariąją disjunkciją $\neg p \lor \neg q \lor \neg r$, iš antros $\neg p \lor \neg q \lor r$, iš šeštos $p \lor \neg q \lor r$, ir imame jų konjunkciją: $P(p,q,r) := (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor r)$. Tai ir bus formulės $Q(p,q,r)$ NKF. Iš tikro pirma elementarioji disjunkcija klaidinga tik su interpretacija $p=t$, $q=t$, $r=t$, antra su $p=t$, $q=t$, $r=k$, trečia su $p=k$, $q=t$, $r=k$, todėl jų konjunkcija klaidinga tik su šiomis trimis interpretacijomis, o su kitomis – teisinga. Taigi formulės $P(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė sutampa su formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentele, todėl jos ekvivalenčios. Ir formulė $P(p,q,r)$ yra elementariųjų disjunkcijų konjunkcija, todėl $P(p,q,r)$ yra formulės $Q(p,q,r)$ NKF. □

p	*q*	*r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*k*
t	*t*	*k*	*k*
t	*k*	*t*	*t*
t	*k*	*k*	*t*
k	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*k*	*k*
k	*k*	*t*	*t*
k	*k*	*k*	*t*

Antras įrodymas. Analogiškas įrodymui apie NDF, tik trečiajame žingsnyje naudojame kitą distributyvumo dėsnį:

$$p \lor (q \land r) \sim (p \lor q) \land (p \lor r). \quad \square$$

Pavyzdys

Norime rasti formulės $\neg(p \to q) \lor r$ NKF.

1 žingsnis: pašaliname implikaciją:

$$\neg(p \to q) \lor r \sim \neg(\neg p \lor q) \lor r.$$

2 žingsnis: įkeliame neiginius į skliaustus:

$$\neg(\neg p \lor q) \lor r \sim (p \land \neg q) \lor r.$$

3 žingsnis: taikome distributyvumo dėsnį:

$$(p \land \neg q) \lor r \sim (p \lor r) \land (\neg q \lor r).$$

Suprastinti nėra ką. Gavome NKF. □

Pastaba

Formulei gali egzistuoti kelios NDF ir NKF.

Pavyzdys

Formulė

$$(p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \lor (p \land \neg r)$$

taip pat yra formulės $\neg(p \to (q \land r))$ iš ankstesnio pavyzdžio NDF. Lengva tuo įsitikinti, patikrinus, kad tai iš tikro yra NDF ir kad šios formulės yra ekvivalenčios.

Išvada

Kiekvienai formulei egzistuoja jai ekvivalenti formulė, į kurią įeina tik neiginys, konjunkcija ir disjunkcija, ir neiginys yra tik prie kintamųjų.

2) *Tobulosios normaliosios formos*

Apibrėžimas

Elementarioji konjunkcija ir elementarioji disjunkcija vadinamos tobulosiomis *duotoje formulėje, jei į jas po vieną kartą įeina kiekvienas formulės kintamasis arba jo neiginys.*

Tobuląsias elementariąsias konjunkcijas sutrumpintai žymėsime TEK, tobuląsias elementariąsias disjunkcijas – TED.

Pavyzdys

Formulės $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg p \wedge r)$ antroji elementarioji konjunkcija yra tobuloji, o pirmoji ir trečioji – ne, nes į pirmą neįeina nei kintamasis r, nei jo neiginys, o į trečią kintamojo p neiginys įeina du kartus.

Apibrėžimas

NDF (atitinkamai – NKF) vadinama tobuląja*, jei jos visos elementariosios konjunkcijos (atitinkamai – disjunkcijos) yra skirtingos ir tobulosios.*

Tobuląsias NDF sutrumpintai žymėsime TNDF, tobuląsias NKF – TNKF.

Pavyzdys

Formulės

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q),$$
$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

yra TNDF, o

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r),$$
$$(p \wedge q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

nėra TNDF.

Formulė $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ yra TNKF.

Pastaba

Dvi TNDF (atitinkamai – TNKF) laikome lygiomis, jei sutampa jas sudarančios TEK (atitinkamai – TED). Jų išsidėstymo tvarka reikšmės neturi.

Pavyzdys

TNDF $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ir $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ laikome lygiomis, nes jos sudarytos iš tų pačių dviejų TEK – $\neg p \wedge \neg q$ ir $p \wedge q$.

Teorema

Kiekvienai įvykdomai loginei formulei egzistuoja vienintelė TNDF.

Įrodymas. Jei formulė nėra tapačiai klaidinga, tai konstruodami jos NDF iš teisingumo lentelės, gauname jos TNDF, nes į kiekvieną elementariąją konjunkciją įeina kiekvienas kintamasis arba jo neiginys po vieną kartą. Ir šita TNDF yra vienintelė, nes kiekvieną interpretaciją, su kuria formulė teisinga, atitinka viena tobuloji elementarioji konjunkcija. Iš tikro, jeigu būtų dvi skirtingos formulės TNDF, tai į jas įeitų skirtingos TEK, taigi šios TNDF būtų teisingos su skirtingomis interpretacijomis, o tai prieštarauja tam, kad jos yra ekvivalenčios (nes abi jos yra ekvivalenčios duotai formulei). □

Pastaba

Jei formulė nėra įvykdoma, jinai neturi TNDF.

Teorema

Kiekvienai loginei formulei, išskyrus tapačiai teisingą, egzistuoja vienintelė TNKF.

Įrodymas. Analogiškas teoremos apie TNDF įrodymui. □

Pastaba

Tapačiai teisinga formulė neturi TNKF.

Teorema

Dvi įvykdomos formulės yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų TNDF yra lygios.

Įrodymas.

„$\Rightarrow$" Ekvivalenčių formulių teisingumo lentelės sutampa, todėl iš jų sukonstruotos TNDF taip pat sutaps.

„$\Leftarrow$" Tarkime, kad dvi formulės turi tą pačią TNDF. Jos abi yra jai ekvivalenčios, todėl jos yra tarpusavyje ekvivalenčios. □

Teorema

Tarkime, turime dvi formules, kurios nėra tapačiai teisingos. Jos yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų TNKF yra lygios.

Įrodymas. Analogiškas teoremos apie TNDF įrodymui. □

Šios dvi teoremos parodo vienas iš svarbiausių tobulų normaliųjų formų savybių: jas galime naudoti formulių ekvivalentumui (ir neekvivalentumui) nustatyti.

Norėdami suvesti įvykdomos formulės NDF į TNDF, turime visas elementariąsias konjunkcijas paversti tobulosiomis. Jei elementariojoje konjunkcijoje K kintamieji kartojasi, tai juos pašaliname, naudodami logikos dėsnius

$$\neg p \wedge p \sim k \quad \text{bei} \quad p \wedge p \sim p.$$

Jei trūksta kintamųjų, prirašome juos fiktyviai, naudodami šį logikos dėsnį:

$$K \sim (K \wedge p) \vee (K \wedge \neg p),$$

kur p yra trūkstamas kintamasis.

Prirašę trūkstamus kintamuosius galime gauti, kad kai kurios EK kartojasi. Tokiu atveju galime pasinaudoti logikos dėsniu $p \vee p \sim p$, ir iš besikartojančių EK palikti tik vieną.

Pavyzdys

Formulė $p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q$ yra NDF, bet ne TNDF. Pirmoje elementariojoje konjunkcijoje trūksta q arba $\neg q$, trečioje – p arba $\neg p$. Prirašome juos fiktyviai:

$$p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \sim$$
$$\sim (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \sim$$
$$\sim (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Gavome TNDF. □

Lygiai taip pat galime formulės, kuri nėra tapačiai teisinga, NKF suvesti į TNKF, naudodami šį logikos dėsnį:

$$D \sim (D \vee p) \wedge (D \vee \neg p),$$

kur D yra elementarioji disjunkcija, o p yra trūkstamas kintamasis. Jei gauname kelias vienodas elementariąsias disjunkcijas, galime suprastinti pagal logikos dėsnį $p \wedge p \sim p$.

Apibrėžimas

Formulės ekvivalenčiu pertvarkymu *vadinsime jos suvedimą į jai ekvivalenčią formulę, naudojant logikos dėsnius.*

Pavyzdys

Atliekame formulės ekvivalenčius pertvarkymus:

$$(p \mid q) \to r \sim \neg(p \mid q) \vee r \sim \neg(\neg(p \wedge q)) \vee r \sim (p \wedge q) \vee r.$$

Teorema

Bet kurias dvi ekvivalenčias formules galima ekvivalenčiais pertvarkymais suvesti vieną į kitą.

Įrodymas. Žinome, kad abi ekvivalenčias formules galima ekvivalenčiais pertvarkymais suvesti į tą pačią TNDF (arba į TNKF). Todėl atvirkštiniais ekvivalenčiais pertvarkymais galime TNDF (arba TNKF) suvesti į jas. Todėl, kad suvestume vieną formulę į kitą, iš pradžių pirmąją suvedame į TNDF (arba TNKF), o paskui atvirkštiniais ekvivalenčiais pertvarkymais TNDF (arba TNKF) suvedame į antrąją formulę. □

2 Esminiai ir fiktyvūs kintamieji

Kartais, nors loginis kintamasis ir įeina į formulę, jos reikšmė nuo jo reikšmės pasikeitimo nepriklauso. Tokį kintamąjį vadinsime fiktyviu. Šiame skyriuje juos apibrėšime formaliai ir parodysime, kaip jų „atsikratyti", t.y. pašalinti juos iš formulės.

Apibrėžimas.

Sakysime, kad loginis kintamasis p_i *loginėje formulėje* $Q(p_1, p_2,\ldots,p_n)$ *yra* esminis, *jei galime rasti tokias reikšmes* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in\{t,k\}$, *kad* $Q(\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq Q(\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_{i-1}, k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. *Priešingu atveju kintamasis vadinamas* fiktyviu *formulėje* Q.

Komentaras

Taigi jei, esant kažkokioms fiksuotoms kitų kintamųjų reikšmėms, kintamojo p_i reikšmės pakeitimas iš t į k pakeičia formulės reikšmę, tai kintamasis p_i yra esminis. Jei kintamojo p_i reikšmės pakeitimas iš t į k nepakeičia formulės reikšmės, kad ir kokios būtų fiksuotos kitų kintamųjų reikšmės, tai kintamasis p_i vadinamas fiktyviu. Matysime, kad tokiu atveju jis į formulę įeina fiktyviai, t.y. egzistuoja ekvivalenti formulė, į kurią kintamasis p_i neįeina.

Pavyzdys

Nustatysime, kurie loginiai kintamieji yra fiktyvūs, o kurie esminiai formulėje $Q(p,q,r) = (\neg p\wedge \neg q\wedge \neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge \neg r)$.

Sprendimas būtų toks. Pagal apibrėžimą, reikia įsistatyti visus galimus kintamųjų reikšmių rinkinius ir pažiūrėti, ar formulės reikšmė priklauso nuo kintamojo reikšmės pakeitimo. Kad būtų paprasčiau, pirmiausia sudarysime formulės teisingumo reikšmių lentelę (žr. dešinėje; patikrinkite patys, kad iš tikro duotos formulės teisingumo reikšmių lentelė yra tokia).

p	q	r	$Q(p,q,r)$
t	t	t	k
t	t	k	k
t	k	t	k
t	k	k	k
k	t	t	k
k	t	k	t
k	k	t	k
k	k	k	t

Patikrinkime, ar kintamasis p yra esminis. Imkime pirmą ir penktą lentelės eilutes. Jose skiriasi tik kintamojo p reikšmės (t pirmoje eilutėje, k penktoje), o kitų kintamųjų reikšmės lieka tos pačios (t). O formulės reikšmė nesikeičia – išlieka k. Bet to dar neužtenka, kad galėtume tvirtinti, kad p yra fiktyvus, nes mes patikrinome tik vieną porą interpretacijų. Galbūt kokioje kitoje poroje, kurioje keisis vien tik kintamojo p reikšmė, formulės reikšmė irgi keisis. Taigi turime patikrinti visas galimas poras. Toliau tikriname antrą ir šeštą eilutes. Iš tikro, antroje ir šeštoje eilutėse kitų kintamųjų (q ir r) reikšmės nesikeičia (ir yra lygios atitinkamai t ir k), keičiasi tik kintamojo p reikšmė (t antroje eilutėje, k šeštoje). Ir formulės reikšmė taip pat keičiasi! Taigi formulė $Q(p,q,r)$ nuo kintamojo p priklauso iš esmės, jis yra esminis.

Kintamasis q yra fiktyvus. Iš tikro, imkime pirmą ir trečią lentelės eilutes. Jose skiriasi tik kintamojo q reikšmės (t pirmoje eilutėje, k trečioje), o kitų kintamųjų reikšmės lieka tos pačios (t). O formulės reikšmė nesikeičia – išlieka k. Tikriname toliau: antroje ir ketvirtoje eilutėse keičiasi vien tik kintamojo q reikšmė, o formulės reikšmė nesikeičia; tas pats ir penktoje – septintoje, ir šeštoje – aštuntoje eilutėse.

Patikrinom visas galimas interpretacijų poras, ir niekur formulės reikšmė nesikeičia, keičiantis vien tik kintamojo q reikšmei. Taigi kintamasis q iš tikro yra fiktyvus.

Belieka patikrinti kintamąjį r. Pirma – antra eilutės: keičiasi vien tik kintamojo r reikšmė, o formulės reikšmė nesikeičia; trečia – ketvirta: nesikeičia; penkta – šešta: keičiasi! Taigi kintamasis r yra esminis. □

Jeigu kintamasis yra fiktyvus duotoje formulėje, tai mes galime rasti ekvivalenčią formulę, į kurią tas kintamasis neįeina.

Pavyzdys

Imkime tą pačią formulę $Q(p, q, r) \sim (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. Pasinaudodami loginiais dėsniais, galime ją suprastinti: $Q(p, q, r) \sim [(\neg p \wedge r) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \wedge r) \wedge q] \sim (\neg p \wedge r) \wedge (\neg q \vee q) \sim (\neg p \wedge r) \wedge t \sim \neg p \wedge r \sim P(p,r)$. Gavome formulę $P(p,r)$, ekvivalenčią formulei $Q(p, q, r)$, į kurią neįeina kintamasis q. □

Naudojantis logikos dėsniais gali būti sudėtinga pašalinti fiktyvius kintamuosius iš formulės. Parodysime, kaip galima tai padaryti naudojantis teisingumo reikšmių lentele.

Pavyzdys

Vėlgi imkime tą patį pavyzdį. Nustatėme, kad kintamasis q yra fiktyvus. Kaip jį pašalinti iš formulės? Bandykime perdirbti teisingumo reikšmių lentelę taip, kad jinai nebepriklausytų nuo kintamojo q. Kadangi kintamasis q yra fiktyvus, tai iš teisingumo reikšmių lentelės galime išmesti stulpelį su q reikšmėmis. Palikime tik stulpelius su esminiais kintamaisiais p ir r bei stulpelį su formulės $Q(p,q,r)$ reikšmėmis. Gauname lentelę, pavaizduotą dešinėje pusėje. Kadangi liko tik du kintamieji, lentelėje turėtų būti tik 4 eilutės. Iš tikro, lengva pastebėti, kad visos lentelės eilutės kartojasi (taip yra dėl to, kad q yra fiktyvus – pakeitus vien tik jo reikšmę, formulės reikšmė išlieka ta pati, todėl ta eilučių pora skiriasi vien tik kintamojo q reikšme, o išmetus stulpelį su kintamojo q reikšmėmis ir iš viso nebesiskiria). Išmetame besikartojančias eilutes ir gauname lentelę iš keturių eilučių (žr. dešinėje). Ši lentelė vaizduoja funkciją $P(p,r)$, priklausančią tik nuo kintamųjų p ir r, ir jos reikšmės duotoms kintamųjų p, q ir r reikšmėms sutampa su formulės $Q(p,q,r)$ reikšmėmis, tai yra $Q(p,q,r) \sim P(p,r)$. Taigi belieka tik užrašyti formulę $P(p,r)$, kurios teisingumo reikšmių lentelę radome, ir turėsime formulę, ekvivalenčią duotai formulei, kurioje nebėra fiktyvių kintamųjų. O kaip užrašyti formulę iš duotos teisingumo reikšmių lentelės, mes jau mokame, – užrašome TNDF ar TNKF. Užrašę TNDF, gauname $\neg p \wedge \neg r$. Užrašę TNKF, gautume $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$. □

p	*r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*k*
t	*k*	*k*
t	*t*	*k*
t	*k*	*k*
k	*t*	*k*
k	*k*	*t*
k	*t*	*k*
k	*k*	*t*

p	*r*	*P(p,r)*
t	*t*	*k*
t	*k*	*k*
k	*t*	*k*
k	*k*	*t*

Pastabos

1. Lengva patikrinti, kad jei formulės $Q(p_1,\ldots p_k, p_{k+1},\ldots p_n)$ ir $P(p_1, p_2,\ldots p_k)$ yra ekvivalenčios, tai kintamieji $p_{k+1},\ldots p_n$ yra fiktyvūs formulėje Q.
2. Taigi jei formulė yra tapačiai teisinga arba tapačiai klaidinga, visi į ją įeinantys kintamieji yra fiktyvūs.

3 Kontaktinės schemos

Vienas akivaizdžiausių matematinės logikos pritaikymų yra elektros grandinėse.

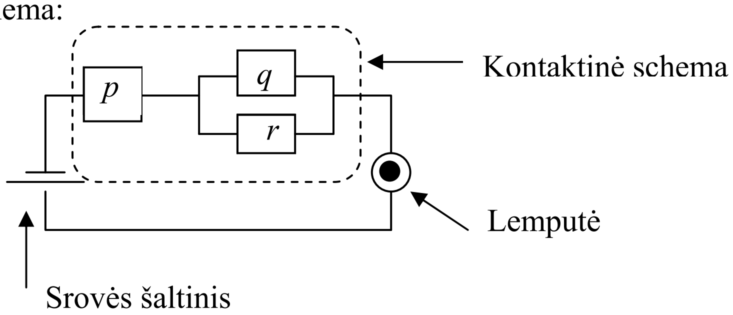
Kontaktinis elementas (pavyzdžiui, jungiklis arba relė), žymimas $\boxed{\quad}$, gali būti dviejų būsenų:

1) *įjungtas*: *praleidžia* elektros srovę, kontaktai sujungti,
2) *išjungtas*: elektros srovės *nepraleidžia*, kontaktai nesujungti.

Kontaktinė schema – tai sujungtų kontaktinių elementų rinkinys su dviem išėjimais į išorę.

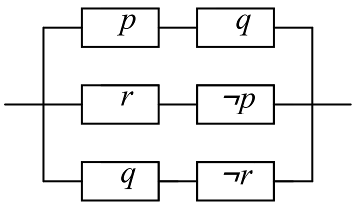
Pavyzdys

Čia jūs matote elektros grandinę, kurią sudaro šaltinis, lemputė ir kontaktinė schema:



Kiekvieną kontaktinį elementą žymime raide. Galima kelis elementus pažymėti ta pačia raide. Tai reiškia, kad jie išjungti ar įjungti vienu metu. Taip pat galima kontaktinius elementus žymėti ir raide su neiginiu (pavyzdžiui, $\neg p$). Tai reiškia, kad toks elementas bus išjungtas tada ir tik tada, kai elementas p bus įjungtas.

Pavyzdys



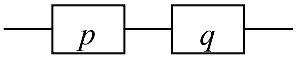
Ši schema praleis srovę, jei kontaktiniai elementai p ir q įjungti, arba jei r įjungtas, o p išjungtas, arba jei q įjungtas, o r išjungtas. □

Kaip matome, jei pažymėsime raide p teiginį „jungiklis p įjungtas“, raidėmis q ir r pažymėsime analogiškus teiginius, tai elektros srovės praleidimo sąlygą galėsime užrašyti kaip formulę.

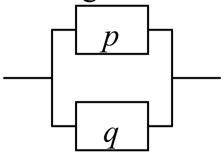
Pavyzdys

Paskutinio pavyzdžio schema praleis srovę tada ir tik tada, kai bus teisingas sudėtinis teiginys $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)$.

Nuoseklų kontaktinių elementų jungimą atitinka konjunkcija, o lygiagretų – disjunkcija. Iš tikro: kontaktinė schema



praleis srovę tada ir tik tada, kai abu kontaktiniai elementai p ir q bus įjungti, tai yra, kai teiginys „p įjungtas ir q įjungtas“ yra teisingas, tai yra, kai teiginys $p \wedge q$ yra teisingas. Analogiškai kontaktinė schema



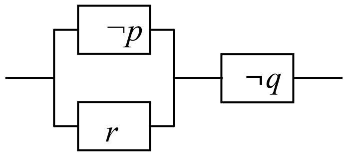
praleis srovę tada ir tik tada, kai bent vienas kontaktinis elementas p arba q bus įjungtas, tai yra, kai teiginys „p įjungtas arba q įjungtas“ yra teisingas, tai yra, kai teiginys $p \vee q$ yra teisingas.

Taigi kiekvienai kontaktinei schemai galima parašyti ją atitinkančią formulę.

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: jeigu turime formulę, kurioje yra tik loginės operacijos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ir $\neg$ yra tik prieš loginius kintamuosius, tai galima nubrėžti ją atitinkančią schemą.

Pavyzdys

Formulę $(\neg p \vee r) \wedge \neg q$ atitinka kontaktinė schema, pateikta dešinėje.

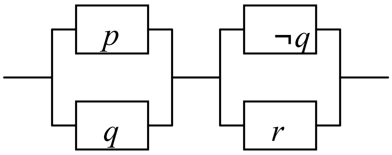


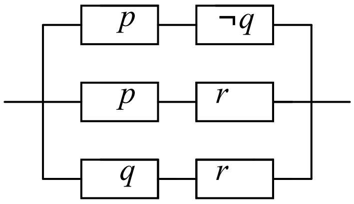
Nagrinėdami normaliąsias formas, matėme, kad bet kuri formulė gali būti išreikšta tokiu pavidalu, taigi bet kuriai formulei egzistuoja kontaktinė schema, kuri praleidžia srovę tada ir tik tada, kai ta formulė yra teisinga.

Kontaktinės schemos vadinamos *ekvivalenčiomis*, jei jos praleidžia srovę vienu metu, t.y. su tais pačiais įjungtų kontaktinių elementų rinkiniais. Žinome, kad schema praleidžia srovę tada ir tik tada, kai ją atitinkanti formulė yra teisinga. Jei kontaktinės schemos ekvivalenčios, tai kiekvienam kontaktinių elementų reikšmių rinkiniui jos abi kartu praleidžia srovę arba ne, todėl jas atitinkančios formulės yra kartu teisingos arba ne, tai yra formulės yra ekvivalenčios. Ir atvirkščiai, jei dvi formulės yra ekvivalenčios, tai jas atitinkančios kontaktinės schemos yra ekvivalenčios.

Pavyzdys

Tarkime, turime dvi schemas:

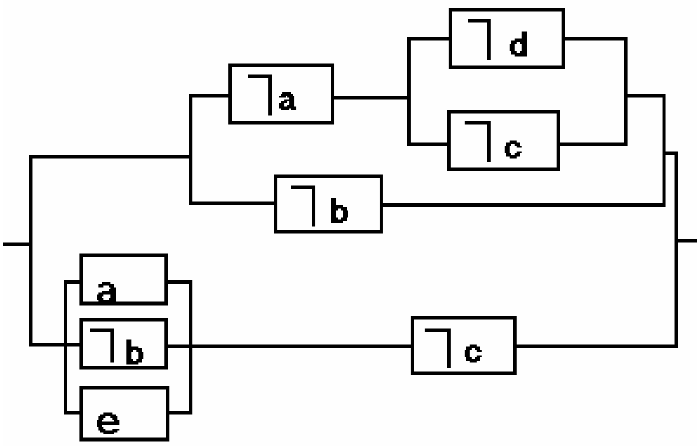


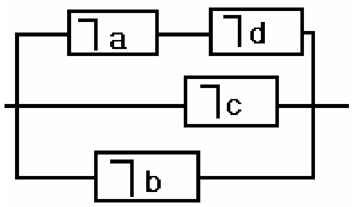


Jos yra ekvivalenčios, nes jas atitinkančios formulės yra ekvivalenčios. Iš tikro, $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (patikrinkite patys). □

Pavyzdys

Tarkime, turime dvi schemas:





Jos yra ekvivalenčios, nes jas atitinkančios formulės yra ekvivalenčios. Iš tikro:

$((\neg a \wedge (\neg d \vee \neg c)) \vee \neg b) \vee ((a \vee \neg b \vee e) \wedge \neg c) \sim$

$\sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee \neg b \vee (a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (e \wedge \neg c) \sim$

$\sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (\neg a \vee a \vee \neg b \vee e)) \vee \neg b \sim$

$\sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (t \vee \neg b \vee e)) \vee \neg b \sim$

$\sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge t) \vee \neg b \sim$

$\sim (\neg a \wedge \neg d) \vee \neg c \vee \neg b$. □

Tokiu būdu gavome metodą kontaktinių schemų ekvivalentumui patikrinti: imame jas atitinkančias logines formules ir nustatome, ar jos ekvivalenčios. Tai leidžia taip pat ir prastinti kontaktines schemas, prastinant jas atitinkančias logines formules.

Į matematinę logiką suvedama keletas praktinių, įprastų inžinieriams, uždavinių. Pavyzdžiui, duotai schemai rasti jai ekvivalenčią paprastesnę schemą. Kas ta paprastesnė schema, patikslinama konkrečiam uždaviniui, įvedus sudėtingumo sąvoką. Schemos sudėtingumu gali būti bendras elementų skaičius, skirtingomis raidėmis pažymėtų elementų skaičius, elementų, pažymėtų tam tikromis raidėmis skaičius ir t.t. Taip pat, žinant elementų kainas (skirtingų elementų jos gali būti nevienodos), apskaičiuojama schemos kaina ir stengiamasi rasti ekvivalenčią schemą, kurios kaina būtų mažiausia (schemos minimizacijos pagal kainą uždavinys).

4 Loginės išvados

Logika yra mokslas apie taisyklingus samprotavimo būdus, t.y. apie būdus, leidžiančius iš teisingų teiginių gauti teisingas išvadas. Tokius samprotavimo būdus mes, apie tai visai negalvodami, vartojame kiekvieną dieną. Šiame skyriuje mes sužinosime, kodėl jie taisyklingi.

Apibrėžimas
Teiginių seka vadinama samprotavimu*. Visi jo teiginiai, išskyrus paskutinį, vadinami* prielaidomis*, o paskutinis vadinamas* išvada.

Pavyzdys
Teiginių seka „Knyga yra ant stalo arba ant lentynos. Jos nėra ant lentynos. Todėl jinai yra ant stalo." yra žodinis samprotavimas, turintis dvi prielaidas („Knyga yra ant stalo arba ant lentynos." bei „Jos nėra ant lentynos."). Teiginys „Jinai yra ant stalo" yra samprotavimo išvada.

Paprastai samprotavimas užrašomas taip: $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$, kur $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra prielaidos, o B – išvada. Simbolis $\therefore$ skaitomas „todėl". Kartais rašoma stulpeliu:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \therefore B \end{array} \quad \text{arba} \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \underline{A_n} \\ \therefore B \end{array}$$

Kartais vietoj simbolio $\therefore$ naudojami simboliai $\vdash$ ar $\models$.

Pavyzdys
Pažymėkime raide p teiginį „Knyga yra ant stalo", o raide q – „Knyga yra ant lentynos". Tada paskutinio pavyzdžio samprotavimą bus galima užrašyti taip: $p \vee q, \neg q \therefore p$.

Apibrėžimas
Samprotavimas vadinamas pagrįstu*, jei išvada yra teisinga su kiekviena interpretacija, su kuria visos prielaidos yra teisingos.*

Pastaba
Jei nėra tokių interpretacijų, su kuriomis visos prielaidos būtų teisingos, samprotavimas laikomas pagrįstu.

Pavyzdys

Nustatysime, ar paskutinio pavyzdžio samprotavimas $p \vee q, \neg q \therefore p$ pagrįstas, ar ne. Pagal apibrėžimą, reikia imti visas interpretacijas, su kuriomis $p \vee q$ ir $\neg q$ yra teisingos, ir patikrinti, ar su jomis p yra teisinga (žr. dešinėje). Matome, kad tokia tėra tik viena interpretacija (p = t, q = k), ir su ja p yra teisinga. Todėl duotas samprotavimas yra pagrįstas. □

p	*q*	$p \vee q$	$\neg q$
t	*t*	*t*	*k*
t	*k*	*t*	*t*
k	*t*	*t*	*k*
k	*k*	*k*	*t*

Teiginys

Samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas tada ir tik tada, kai formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra tapačiai teisinga.

Įrodymas

„$\Rightarrow$“ Tarkime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas. Įrodysime, kad formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra tapačiai teisinga.

Imkime bet kurią formulės $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ interpretaciją. Reikia įrodyti, kad ši formulė yra teisinga su šia interpretacija.

Jei su šia interpretacija bent viena iš formulių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra klaidinga, tai $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ taip pat yra klaidinga, todėl formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra teisinga.

Jei su šia interpretacija visos formulės $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra teisingos, tai, pagal pagrįsto samprotavimo apibrėžimą, formulė B taip pat yra teisinga, todėl formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra teisinga.

Todėl su bet kuria interpretacija formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra teisinga.

„$\Leftarrow$“ Tarkime, kad formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra tapačiai teisinga. Įrodysime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas.

Tarkime, kad prielaidos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra teisingos. Reikia įrodyti, kad išvada B yra teisinga. Įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, B nėra teisinga. Tada gauname, kad $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra klaidinga, nes $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ yra teisinga, o B yra klaidinga. Taigi gauname prieštarą tam, kad $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ yra tapačiai teisinga. □

Matome, kad kiekvieną pagrįstą samprotavimą atitinka logikos dėsnis, todėl pagrįsti samprotavimai irgi kartais vadinami logikos dėsniais.

Paskutinis teiginys leidžia nustatyti, kada samprotavimas yra pagrįstas.

Pavyzdys

Pasinaudoję šiuo teiginiu, parodykime, kad paskutinio pavyzdžio samprotavimas tikrai pagrįstas. Turime parodyti, kad formulė $Q(p,q) \sim ((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$ yra tapačiai teisinga (žr. dešinėje).

p	*q*	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	$Q(p,q)$
t	*t*	*t*	*k*	*t*
t	*k*	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*t*	*k*	*t*
k	*k*	*k*	*k*	*t*

Savybės

Tarkime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas. Tada:

1) *Jei visos prielaidos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra tapačiai teisingos, tai ir išvada B yra tapačiai teisinga.*
2) *Jei $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ yra tapačiai klaidinga, tai B gali būti bet kokia formulė.*
3) *Jei B yra tapačiai teisinga, tai prielaidos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gali būti bet kokios formulės.*

Įrodymas

Tiesiogiai išplaukia iš pagrįsto samprotavimo apibrėžimo. □

Iš antros savybės matome, kad jei $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ yra tapačiai klaidinga, tai bet kokia formulė B yra formulių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ išvada.

Pavyzdys

„Aš mėgstu ledus. Aš nemėgstu ledų. Todėl drambliai moka skraidyti.“ Tai pagrįstas samprotavimas, bet iš jo samprotaujant jokios naudos, nes jo prielaidos prieštarauja viena kitai. Išskirsime tokius samprotavimus.

Apibrėžimas

Samprotavimas vadinamas netinkamu, *jei jo prielaidos prieštaringos (t.y., jei jo prielaidų konjunkcija yra tapačiai klaidinga), ir* tinkamu *priešingu atveju.*

Taigi ieškome pagrįstų tinkamų samprotavimų. Remdamiesi tokiais samprotavimais, galime gauti teisingas išvadas iš teisingų prielaidų.

Apibrėžimas

Išvedimo taisyklė *yra pagrįstas samprotavimas.*

Turime, kad kiekvieną logikos dėsnį, kurio pavidalas yra $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, atitinka išvedimo taisyklė $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$.

Pavyzdys

$p \rightarrow (p \vee q)$ yra logikos dėsnis, todėl galioja išvedimo taisyklė $p \therefore p \vee q$ (t.y. formulė $p \vee q$ yra išvada iš prielaidos p).

Štai dažniausiai naudojamų išvedimo taisyklių sąrašas:

1) $p \therefore p \vee q$ (prijungimas)
2) $p \wedge q \therefore p$ (atskyrimas)
3) $p, q \therefore p \wedge q$ (konjunktyvus sujungimas)
4) $p \vee q, \neg q \therefore p$ (disjunktyvus silogizmas)
5) $p \rightarrow q, p \therefore q$ (modus ponens, arba teisingos išvados taisyklė)
6) $p \rightarrow q, \neg q \therefore \neg p$ (modus tollens, arba neteisingos išvados taisyklė)
7) $p \rightarrow q \therefore \neg q \rightarrow \neg p$ (kontrapozicija)

Kiekvieną iš šių išvedimo taisyklių galima įrodyti, naudojant teisingumo reikšmių lenteles. Pavyzdžiui, šio skyriaus pradžioje įrodėme disjunktyvaus silogizmo taisyklę.

Štai pavyzdžiai, iliustruojantys duotas išvedimo taisykles.

1) Aš mėgstu ledus. Todėl aš mėgstu ledus arba cepelinus.
2) Aš mėgstu ledus ir cepelinus. Todėl aš mėgstu ledus.
3) Aš mėgstu ledus. Aš mėgstu cepelinus. Todėl aš mėgstu ledus ir cepelinus.
4) Knyga yra ant stalo arba ant lentynos. Jos nėra ant lentynos. Todėl jinai yra ant stalo.
5) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Šiandien sekmadienis. Todėl paskaitų nėra.
6) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Paskaitos yra. Todėl šiandien ne sekmadienis.
7) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Todėl jei paskaitos yra, tai šiandien ne sekmadienis.

Aišku, išvedimo taisyklių yra žymiai daugiau. Jei mes gauname kokį naują pagrįstą samprotavimą, tai jį irgi galime naudoti kaip išvedimo taisyklę.

Be apibrėžimo, yra dar keli būdai nustatyti, ar samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_r \therefore B$ yra pagrįstas.

1 būdas

Naudojamės tuo, kad šis samprotavimas yra pagrįstas tada ir tik tada, kai loginė formulė $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r) \to B$ yra tapačiai teisinga. Taigi, naudodami teisingumo lentelę arba logikos dėsnius, patikriname, ar ši formulė yra tapačiai teisinga. Beje, šiuo būdu galime patikrinti ir ar samprotavimas yra tinkamas. Bet jei kintamųjų daug, tai teisingumo lentelė bus labai didelė, pavyzdžiui, jei turime 5 kintamuosius, tai lentelėje bus 32 eilutės, jei 6 – 64, ir t.t. Todėl naudojami ir kiti būdai.

2 būdas (loginė lygtis)

Bandome išspręsti loginę lygtį $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r) \to B = k$. Jei randame bent vieną sprendinį, reiškia, kairėje lygybės pusėje esanti formulė nėra tapačiai teisinga, todėl ją atitinkantis samprotavimas nėra pagrįstas. Iš kitos pusės, jei parodome, kad lygtis sprendinių neturi, tai reiškia, kad kairėje lygybės pusėje esanti formulė yra tapačiai teisinga, todėl ją atitinkantis samprotavimas yra pagrįstas. Naudojantis konjunkcijos ir implikacijos savybėmis, ši lygtis lengvai suvedama į lygčių sistemą

$$\begin{cases} A_1 = t, \\ A_2 = t, \\ \quad\vdots \\ A_r = t, \\ B = k. \end{cases}$$

Šią lygčių sistemą bandome dar smulkinti, o paskui perrinkinėjame variantus arba bandome atspėti sprendinį.

Pavyzdys

Tarkime, turime samprotavimą $p \vee q, q \to r \therefore r$. Jį atitinka loginė lygtis

$$((p \vee q) \wedge (q \to r)) \to r = k.$$

Spręsdami šią lygtį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} p \vee q = t, \\ q \to r = t, \\ r = k. \end{cases}$$

Iš trečios lygties $r = k$ įstatome į antrą, gauname lygtį $q \to k = t$, kurią išsprendę gauname $q = k$. Įstatome tai į pirmą lygtį, gauname $p \vee k = t$, todėl $p = t$. Gavome sprendinį $p = t$, $q = k$, $r = k$. Sprendinys iš tikro tenkina šią lygtį, todėl egzistuoja interpretacija, su kuria lygties kairė pusė yra klaidinga, taigi samprotavimas nėra pagrįstas.

3 būdas (formaliosios dedukcijos metodas)

Išvedame teiginius nuosekliai, žingsnis po žingsnio, iš duotų prielaidų, naudodami išvedimo taisykles ir logikos dėsnius. Kiekvieno žingsnio rezultatas yra nauja prielaida tolesniems išvedimo žingsniams.

Pavyzdys

Įrodykime, kad samprotavimas

$$p \vee q,\ q \to r,\ (p \wedge s) \to v,\ \neg r,\ \neg q \to (u \wedge s) \therefore v$$

yra pagrįstas.

Patogumo dėlei prielaidas numeruokime ir rašykime stulpeliu. Gavę išvadą, šalia parašome, kokia išvedimo taisykle naudojantis ir iš kokių prielaidų ji gauta. Gautas išvadas naudojame kaip prielaidas tolesniuose išvedimo žingsniuose.

1.	$p \vee q$	
2.	$q \to r$	
3.	$(p \wedge s) \to v$	
4.	$\neg r$	
5.	$\neg q \to (u \wedge s)$	
6.	$\neg q$	(modus tollens iš 2, 4)
7.	p	(disjunktyvus silogizmas 1,6)
8.	$u \wedge s$	(modus ponens 5, 6)
9.	s	(atskyrimas 8)
10.	$p \wedge s$	(konjunktyvus sujungimas 7, 9)
11.	v	(modus ponens 3, 10)

Įrodėme, kad samprotavimas yra pagrįstas, nes iš duotų prielaidų gavome išvadą naudodamiesi išvedimo taisyklėmis.

Šis ir du toliau pateikti būdai naudojami samprotavimo pagrįstumui įrodyti. Nepagrįstumo jais neįrodysime, nes jei negauname reikiamos išvados, tai dar nereiškia, kad jos neįmanoma gauti, galbūt tik mes to nesugebame. Todėl nepagrįstumas įrodinėjamas dviem pirmais būdais.

4 būdas (sąlyginio įrodymo metodas)

Naudojamas tada, kai išvada yra implikacija, tai yra $A \to B$ pavidalo formulė, arba disjunkcija, kuri lengvai perdaroma į implikaciją pagal implikacijos pašalinimo dėsnį. Taip pat gali būti naudojamas kaip dalis ilgesnio išvedimo pagal formaliąją dedukciją.

Taisyklė tokia: jei, padarę laikiną prielaidą p, galime įrodyti, kad galioja teiginys q, tai galime padaryti išvadą, kad teiginys $p \to q$ yra teisingas (čia ir toliau „teiginys galioja“ reiškia „teiginys yra teisingas“).

Pavyzdys

Įrodykime, kad samprotavimas $(A \vee B) \to C \therefore A \to C$ yra pagrįstas.

1.	$(A \vee B) \to C$	
2.	A	(laikina prielaida)
3.	$A \vee B$	(prijungimas 2)
4.	C	(modus ponens 1, 3)
5.	$A \to C$	(sąlyginis įrodymas 2 – 4)

Čia linija mes pažymėjome laikinos prielaidos galiojimo sritį.

Pastabos

1. Neužmirškite „atsisveikinti“ su laikina prielaida, t.y. uždaryti jos galiojimo sritį.
2. Nė viena prielaida iš laikinosios prielaidos galiojimo srities negali būti naudojama už šios srities ribų.
3. Jei laikinųjų prielaidų padaroma daugiau nei viena, jų galiojimo sritys arba turi nesikirsti, arba turi būti viena kitoje, t.y. jų galiojimo sritis žyminčios linijos neturi kirstis. Pavyzdžiui, jei laikinų prielaidų yra dvi, jos viena kitos atžvilgiu turi būti išsidėsčiusios vienu iš šių dviejų būdų:

p_1 (laikinoji prielaida)

$\vdots$

q_1

$p_1 \to q_1$ (sąlyginis įrodymas)

$\vdots$

p_2 (laikinoji prielaida)

$\vdots$

q_2

$p_2 \to q_2$ (sąlyginis įrodymas)

arba

p_1 (laikinoji prielaida)

$\vdots$

p_2 (laikinoji prielaida)

$\vdots$

q_2

$p_2 \to q_2$ (sąlyginis įrodymas)

$\vdots$

q_1

$p_1 \to q_1$ (sąlyginis įrodymas)

5 būdas (prieštaros metodas, arba netiesioginis įrodymas)

Jam tinka viskas, kas pasakyta apie sąlyginio įrodymo metodą, įskaitant ir pastabas apie laikinos prielaidos galiojimo sritį, o taisyklė yra tokia: jei, padarę laikiną prielaidą p, galime išvesti prieštaravimą $q \,\&\, \neg q$, tai galime padaryti išvadą, kad $\neg p$.

Pavyzdys

Įrodykime, kad samprotavimas $A \to (B \wedge C), \neg B \therefore \neg A$ yra pagrįstas.

1. $A \to (B \wedge C)$
2. $\neg B$
3. A (laikinoji prielaida)
4. $B \wedge C$ (modus ponens 1, 3)
5. B (atskyrimas 4)
6. $\neg B \wedge B$ (konjunktyvus sujungimas 2, 5)
7. $\neg A$ (prieštaros metodas 3 – 6)

Pastaba

Jei tinkamas samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore \neg B$ yra pagrįstas, tai samprotavimas $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ yra nepagrįstas. Bet bendru atveju samprotavimo $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ nepagrįstumui įrodyti šio metodo (įrodyti, kad $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore \neg B$ yra pagrįstas) taikyti negalime, nes gali būti, kad abu šie samprotavimai yra nepagrįsti, pavyzdžiui, ir $p, p \vee q \therefore p \wedge q$, ir $p, p \vee q \therefore \neg(p \wedge q)$ yra nepagrįsti. Tokiu atveju, norėdami įrodyti samprotavimo $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore B$ nepagrįstumą, veltui bandytume įrodyti samprotavimo $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore \neg B$ pagrįstumą, nes šis irgi nepagrįstas.

5 Predikatai

1) Apibrėžimas ir savybės

Panagrinėkime kelis pavyzdžius:

1. n yra pirminis skaičius.

2. Du iksai plius vienetas yra daugiau už nulį (trumpiau: $2x+1>0$).
3. $a+b=b-a$.

Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad šie sakiniai kažką teigia, kad jie yra teiginiai. Tačiau ką jie teigia – tiesą ar netiesą – nustatyti negalime, nes šie sakiniai priklauso nuo kintamųjų. Paėmę vieną kintamojo reikšmę, galime gauti teisingą teiginį, paėmę kitą reikšmę – neteisingą. Pavyzdžiui, pirmas sakinys yra teisingas, kai $n = 3$, ir neteisingas, kai $n = 4$.

Apibrėžimas

Predikatu *vadinamas sakinys su baigtiniu skaičiumi kintamųjų, kuris tampa teiginiu, vietoj kintamųjų įrašius konkrečias jų reikšmes. Kintamojo* kitimo sritimi *vadinama aibė reikšmių, kurias galima įstatyti vietoj kintamojo.*

Pavyzdžiui, į trečią sakinį vietoj kintamųjų a ir b įstačius reikšmes atitinkamai 3 ir 5, gausime teiginį „3+5=5-3“, kuris yra klaidingas teiginys. Trečio sakinio kintamųjų a ir b kitimo sritis gali būti, pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė **Z**, racionaliųjų skaičių aibė **Q**, realiųjų skaičių aibė **R** ir kt.

Predikatus žymėsime didžiosiomis raidėmis, tarp skliaustų nurodydami į juos įeinančius kintamuosius. Pavyzdžiui, 1–3 sakinius galime pažymėti atitinkamai T(n), P(x) ir R(a,b).

Matome, kad predikatą galime laikyti funkcija, priklausančia nuo kelių kintamųjų, kuri, įstačius reikšmes vietoj tų kintamųjų, įgyja reikšmę t arba k, priklausomai nuo to, ar gauname teisingą teiginį, ar klaidingą. Pavyzdžiui, T(n) yra funkcija, kuri įgyja reikšmę t, kai n yra pirminis, ir k priešingu atveju.

Predikatus, kaip ir teiginius, galima jungti loginėmis operacijomis. Pavyzdžiui, jei P(x) ir Q(x) yra predikatai, $x \in D$, tai galime sudaryti predikatus $\neg P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \to Q(x)$ ir t.t.

Pavyzdys

Jei P(x) yra predikatas „x yra pirminis“, Q(x) – „x yra lyginis“, $x \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, tai predikatas $P(x) \wedge Q(x)$ yra „x yra pirminis ir lyginis“. Pažymėkime jį R(x). Tada R(2) yra teisingas teiginys, o R(3) – klaidingas. □

Turėdami kokį nors predikatą P(x), kintamojo x kitimo sritį galime padalyti į dvi dalis: į tuos x, su kuriais P(x) yra teisingas teiginys, ir į tuos x, su kuriais tai yra klaidingas teiginys. Todėl kiekvienas predikatas P(x) apibrėžia aibę, vadinamą *teisingumo reikšmių aibe* (arba tiesiog *teisingumo aibe*), žymimą $\{x \mid P(x)\}$ arba $\{x : P(x)\}$, kuri yra aibė tų x reikšmių, su kuriomis P(x) tampa teisingu teiginiu. Vadinasi,

- jei P(a) yra teisingas, tai $a \in \{x \mid P(x)\}$,
- jei P(a) yra klaidingas, tai $a \notin \{x \mid P(x)\}$.

Pavyzdžiui, jei P(x), $x \in \mathbf{R}$, yra antras predikatas iš skyriaus pradžios, tai jo teisingumo reikšmių aibė yra

$$\{x \mid P(x)\} = \{x \mid 2x + 1 > 0\} = (-1/2; \infty).$$

Šį intervalą gauname išsprendę nelygybę $2x + 1 > 0$, t.y. radę tas x reikšmes, su kuriomis predikatas $2x + 1 > 0$ tampa teisingu teiginiu.

Kadangi bet kuri lygtis, nelygybė ar jų sistema yra sakinys su kintamaisiais, tai jinai yra predikatas. Ją išspręsti – reiškia rasti to predikato teisingumo reikšmių aibę.

Beje, su žymėjimu $\{x \mid P(x)\}$ jau susidūrėme, mokydamiesi aibių teorijos. Tada sakėme, kad tai yra aibė elementų x, tenkinančių savybę P. Dabar matome, kad savybė matematiškai yra užrašoma predikatu.

2) Kvantoriai

Taigi, į predikatą vietoj kintamųjų įrašę konkrečias reikšmes, gauname teiginį. Yra ir kitas būdas iš predikato gauti teiginį: prirašant „egzistuoja“ arba „kiekvienam“. Pavyzdžiui, pirmą predikatą galime paversti teiginiu tokiu būdu:

„Egzistuoja $n \in \mathbf{N}$ toks, kad n yra pirminis skaičius“

(čia $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ yra natūraliųjų skaičių aibė). Iš tikro, šis sakinys yra teiginys, nes galima nustatyti jo teisingumo reikšmę (tai teisingas teiginys). Taip pat ir sakinys

„Kiekvienas $n \in \mathbf{N}$ yra pirminis skaičius“

yra teiginys (klaidingas). Sutrumpintai šiuos teiginius galima užrašyti atitinkamai

$\exists\, n \in \mathbf{N}\ \ T(n)$, ir

$\forall\, n \in \mathbf{N}\ \ T(n)$.

Ženklai $\exists$ ir $\forall$ vadinami atitinkamai *egzistavimo ir visuotinumo (bendrumo) kvantoriais*. Jie skaitomi atitinkamai „egzistuoja“ („yra“) ir „kiekvienam“ („su visais“). Kintamojo kitimo sritis gali būti nenurodoma, jei ji yra numanoma arba nesvarbi, tokiu atveju galime tiesiog rašyti, pavyzdžiui, $\forall n\ \ T(n)$.

Teiginio su kvantoriais reikšmę galima išreikšti per teiginius be kvantorių. Tarkime, kad Q(x) yra predikatas, o $x \in D$ (D – kintamojo x kitimo sritis). Tada:

1) Teiginys „$\forall x \in D\ \ Q(x)$“ yra teisingas tada ir tik tada, kai teiginys Q(a) yra teisingas kiekvienam $a \in D$, t.y., kai teiginys $\underset{a\in D}{\wedge} Q(a)$ yra teisingas.
2) Teiginys „$\exists x \in D\ Q(x)$“ yra teisingas tada ir tik tada, kai teiginys Q(a) yra teisingas bent vienam $a \in D$, t.y., kai teiginys $\underset{a\in D}{\vee} Q(a)$ yra teisingas.

Pavyzdys

Jei $D = \{a, b\}$, tai

$\forall x \in D\ \ Q(x)\ \sim\ Q(a) \wedge Q(b)$,

$\exists x \in D\ \ Q(x)\ \sim\ Q(a) \vee Q(b)$. □

Kaip ir visus teiginius, teiginius su kvantoriais galima paneigti. Lengva įsitikinti, kad:

$\neg(\forall x \in D\ Q(x)) \sim \exists x \in D\ \neg Q(x)$, ir

$\neg(\exists x \in D\ Q(x)) \sim \forall x \in D\ \neg Q(x)$.

3) Samprotavimai su kvantoriais

Kaip patikrinti, ar samprotavimas pagrįstas, ar ne, jei į jį įeina teiginiai su kvantoriais?

Pavyzdys

Turime tokį samprotavimą:

Bet kas, turintis laiko ir kantrybės, galėtų susiremontuoti savo mašiną. Deja, daugybė žmonių skundžiasi, kad negali patys susiremontuoti mašinos. Tai reiškia – daugybei žmonių tiesiog trūksta kantrybės.

Užrašykime jį matematiškai. Galime pažymėti tokius predikatus, kur kintamojo x kitimo sritis – visų žmonių aibė:

L(x) – „x turi laiko“,

K(x) – „x turi kantrybės“,

M(x) – „x gali susiremontuoti savo mašiną“.

Tada samprotavimas gali būti užrašytas taip[1]:

$\forall x\ ((L(x) \wedge K(x)) \rightarrow M(x)), \exists x\ \neg M(x) \therefore \exists x\ \neg K(x)$. □

Samprotavimų, į kuriuos įeina kvantoriai, pagrįstumui nustatyti naudojame tuos pačius būdus kaip ir samprotavimams be kvantorių, tik dar įvedame papildomas taisykles kvantoriams panaikinti ir įvesti.

1 būdas (nepagrįstumui įrodyti)

Suvedame į loginę lygtį ir sprendžiame, kaip ir samprotavimams be kvantorių. Vienintelis keblumas – iš teiginių reikia pašalinti kvantorius. Tai darome tokiu būdu. Tegu $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ yra kintamojo x kitimo sritis. Tada, kaip matėme,

$\forall x \in D\ P(x) \sim P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, ir

$\exists x \in D\ P(x) \sim P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$,

t.y. visuotinumo kvantorių galime išreikšti konjunkcija, o egzistavimo kvantorių – disjunkcija.

Jei aibė D yra didelė, tai ši konjunkcija ar disjunkcija bus sudėtinga. Laimei, užtenka parodyti, kad samprotavimas nepagrįstas kuriame nors kitimo srities poaibyje, kad jis būtų nepagrįstas visoje kitimo srityje. Kai kuriems samprotavimams užtenka imti poaibį iš vieno elemento, pavyzdžiui, kai į samprotavimą įeina teiginiai tik su vienos rūšies kvantoriumi, pavyzdžiui, tik su visuotinumo kvantoriumi. Kai įeina abu kvantoriai, dažniausiai reikia imti poaibį, sudarytą iš bent dviejų elementų, nes aibėje iš vieno elemento visuotinumo ir egzistavimo kvantoriai sutampa (iš tikro, jei $D=\{a\}$, tai $\forall x \in D\ P(x) \sim \exists x \in D\ P(x)$).

Tais atvejais, kai samprotavimo nepagrįstumas neįrodomas aibei iš dviejų elementų, jis galbūt gali būti įrodytas didesnei aibei. Galima parodyti, kad užtenka samprotavimo pagrįstumą patikrinti visose aibėse, kurių elementų skaičius neviršija 2^m, kur m – į samprotavimą įeinančių skirtingų predikatų skaičius. Jei jose neparodysime samprotavimo nepagrįstumo, tai samprotavimas pagrįstas.

Pavyzdys

Parodysime, kad pereito pavyzdžio samprotavimas nepagrįstas. Bandykime tai parodyti kintamojo x kitimo srities – visų žmonių aibės – poaibiui D iš vieno elemento, $D = \{a\}$. Kartu samprotavimas bus nepagrįstas ir visų žmonių aibėje.

Turime:

$\forall x\ ((L(x) \wedge K(x)) \rightarrow M(x)) \sim (L(a) \wedge K(a)) \rightarrow M(a)$,

$\exists x\ \neg M(x) \sim \neg M(a)$,

$\exists x\ \neg K(x) \sim \neg K(a)$.

Pažymėkime:

$L(a) = p$,

$K(a) = q$,

$M(a) = r$.

Turime parodyti, kad samprotavimas

$p \wedge q \rightarrow r, \neg r \therefore \neg q$

yra nepagrįstas. Tam bandysime rasti loginės lygties

$((p \wedge q \rightarrow r) \wedge \neg r) \rightarrow \neg q = k$

bent vieną sprendinį. Gauname sistemą

$p \wedge q \rightarrow r = t$,

[1] Laikoma, kad kvantoriaus prijungimas prie predikato atliekamas anksčiau nei dvinarės predikatų operacijos, pavyzdžiui, $\forall x\ P(x) \wedge Q(x)$ iš tikrųjų reiškia $(\forall x\ P(x)) \wedge Q(x)$, todėl norėdami parodyti, kad kvantorius taikomas visiems predikatams, būtinai turime skliausti: $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$.

$\neg r = t$,

$\neg q = k$.

Iš antros ir trečios lygčių iškart gauname, kad $q = t$ ir $r = k$. Įstatome į pirmą lygtį ir gauname

$p \wedge t \rightarrow k = t$,

iš kur gauname $p = k$. Taigi gavome lygties sprendinį

$p = k, q = t, r = k$,

todėl samprotavimas nepagrįstas aibei iš vieno elemento (žmogaus), vadinasi, nepagrįstas ir visų žmonių aibei.

Jei būtų nepavykę parodyti samprotavimo nepagrįstumo poaibiui iš vieno elemento, bandytume tai parodyti kintamojo x kitimo srities poaibiui D iš dviejų elementų, $D = \{a, b\}$. Kartu parodytume, kad samprotavimas nepagrįstas ir aibei iš visų žmonių. Tai darytume taip.

Turime:

$\forall x\ \ ((L(x) \wedge K(x)) \rightarrow M(x)) \sim ((L(a) \wedge K(a)) \rightarrow M(a)) \wedge ((L(b) \wedge K(b)) \rightarrow M(b))$,

$\exists x\ \ \neg M(x)\ \sim\ \neg M(a) \vee \neg M(b)$,

$\exists x\ \ \neg K(x)\ \sim\ \neg K(a) \vee \neg K(b)$.

Pažymėkime:

$L(a) = p_1$, $L(b) = p_2$,

$K(a) = q_1$, $K(b) = q_2$,

$M(a) = r_1$, $M(b) = r_2$.

Turime parodyti, kad samprotavimas

$(p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2), \neg r_1 \vee \neg r_2 \therefore \neg q_1 \vee \neg q_2$

yra nepagrįstas. Tam bandysime rasti loginės lygties

$(p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2) \wedge (\neg r_1 \vee \neg r_2) \rightarrow (\neg q_1 \vee \neg q_2) = k$

bent vieną sprendinį. Gauname sistemą

$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 = t$,

$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 = t$,

$\neg r_1 \vee \neg r_2 = t$,

$\neg q_1 \vee \neg q_2 = k$.

Iš ketvirtos lygties iškart gauname, kad $\neg q_1 = \neg q_2 = k$, tai yra $q_1 = q_2 = t$. Kitų kintamųjų reikšmes bandome kažkaip parinkti, pavyzdžiui, iš trečios lygties matome, kad arba abu $\neg r_1$ ir $\neg r_2$ įgyja reikšmes t, arba vienas iš jų. Pradžioje tarkime, kad $\neg r_1 = \neg r_2 = t$. Jei sprendinių nerasime, nagrinėsime likusius atvejus. Taigi $r_1 = r_2 = k$. Įstatome į pirmas dvi lygtis ir gauname

$p_1 \wedge t \rightarrow k = t$,

$p_2 \wedge t \rightarrow k = t$,

iš kur išvedame $p_1 = p_2 = k$. Taigi gavome lygties sprendinį

$p_1 = k, p_2 = k, q_1 = t, q_2 = t, r_1 = k, r_2 = k$,

todėl samprotavimas nepagrįstas aibei iš dviejų elementų (žmonių), vadinasi, nepagrįstas ir visų žmonių aibei. □

2 būdas (pagrįstumui įrodyti)

Naudojame tuos pačius metodus (formalios dedukcijos, sąlyginio įrodymo, prieštaros), kaip ir samprotavimams be kvantorių, tik dar pridedame kvantorių paneigimo taisykles ir šias keturias išvedimo taisykles, leidžiančias pašalinti ir įvesti kvantorius.

1. $\forall x\ \ P(x) \therefore P(a)$, kur a žymi bet kurį laisvai pasirinktą objektą iš kintamojo x kitimo srities (universali instanciacija, sutrumpintai UI, – visuotinumo kvantoriaus pašalinimas).
2. $P(a) \therefore \forall x\ \ P(x)$, su sąlyga, kad a – simbolis, įvestas taikant UI (universali generalizacija, UG, – visuotinumo kvantoriaus įvedimas).
3. $\exists x\ \ P(x) \therefore P(a)$, su sąlyga, kad a – dar nepanaudotas simbolis (egzistencinė instanciacija, EI, – egzistavimo kvantoriaus pašalinimas).
4. $P(a) \therefore \exists x\ \ P(x)$, kur a – bet kurio objekto simbolis (egzistencinė generalizacija, EG, – egzistavimo kvantoriaus įvedimas).

Pavyzdys

Turime tokį samprotavimą:

Yra ne vienas muzikantas, kuris savęs nelaiko krepšinio sirgaliumi. Lietuviai, kaip žinia, – visi yra didesni ar mažesni krepšinio gerbėjai. Taigi dalis muzikantų, išeitų, nėra lietuviai.

Užrašykime jį matematiškai. Įveskime tokius predikatus, kur kintamojo x kitimo sritis yra visų žmonių aibė:

$M(x)$ „x yra muzikantas“,

$K(x)$ „x yra krepšinio sirgalius (gerbėjas)“,

$L(x)$ „x yra lietuvis“.

Tada šį samprotavimą užrašysime taip:

$$\exists x\ (M(x) \wedge \neg K(x)),\ \forall x\ (L(x) \rightarrow K(x))\ \therefore\ \exists x\ (M(x) \wedge \neg L(x)).$$

Įrodykime, kad jis pagrįstas.

1. $\exists x\ (M(x) \wedge \neg K(x))$
2. $\forall x\ (L(x) \rightarrow K(x))$
3. $M(a) \wedge \neg K(a)$ (EI iš 1 prielaidos)
4. $L(a) \rightarrow K(a)$ (UI 2)
5. $\neg K(a)$ (atskyrimas 3)
6. $\neg L(a)$ (modus tollens 4,5)
7. $M(a)$ (atskyrimas 3)
8. $M(a) \wedge \neg L(a)$ (konjunktyvus sujungimas 6,7)
9. $\exists x\ (M(x) \wedge \neg L(x))$ (EG 8) □

Pastaba

Atkreipkite dėmesį, kad pavyzdyje visų pirma pašalinome egzistavimo kvantorių ir tik tada – visuotinumo kvantorių. Atvirkščiai padaryti nepavyks. Iš tikrųjų tarkime, kad pirmiausiai pašalinome visuotinumo kvantorių, įvesdami kažkokį laisvai pasirinktą objektą *a*. Tada šalindami egzistavimo kvantorių, objekto *a* naudoti negalėsime, nes šalindami egzistavimo kvantorių įvesti galime tik naują, dar nepanaudotą simbolį. Taip yra todėl, kad teiginys „$\exists x\ P(x)$“ reiškia tik tiek, kad egzistuoja bent vienas elementas, tenkinantis predikatą P, ir visai nereiškia, kad predikatą P tenkina kuris nors jau anksčiau gautas objektas, pavyzdžiui, objektas *a*.