9 PRATYBOS. MATRICOS

Paulius Drungilas

TURINYS

Sakykime, turime matricas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\,l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}.$$

Matricų sandauga $A \cdot B$ **apibrėžiama tik tada, kai** $m = k$. Tada sandauga $A \cdot B$ lygi matricai (c_{ij}), kuri turi n eilučių ir l stulpelių, o jos elementai c_{ij} skaičiuojami taip:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{im}\, b_{mj}.$$

1. **pavyzdys.** Sudauginsime matricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix},$$

kur sandaugos matricos elementai skaičiuojami taip:

$$c_{11} = 1\cdot2+2\cdot1+1\cdot3 = 7,\ c_{12} = 1\cdot4+2\cdot5+1\cdot9 = 23,\ c_{13} = 1\cdot3+2\cdot4+1\cdot1 = 12,$$

$$c_{14} = 1\cdot5+2\cdot7+1\cdot4 = 23,\ c_{21} = 2\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 = 10,\ c_{22} = 2\cdot4+3\cdot5+1\cdot9 = 32,$$

$$c_{23} = 2\cdot3+3\cdot4+1\cdot1 = 19,\ c_{24} = 2\cdot5+3\cdot7+1\cdot4 = 35.$$

Taigi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 23 & 12 & 23 \\ 10 & 32 & 19 & 35 \end{pmatrix}.$$

□

Matrica, gaunama iš matricos A i-ąją eilutę padarant i-uoju stulpeliu, vadinama matricos A **transponuota matrica** ir žymima A^T. Pavyzdžiui:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 9 \\ 11 & 15 & 13 & 18 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 15 \\ 3 & 8 & 13 \\ 4 & 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Matrica vadinama **kvadratine**, jei jos eilučių skaičius lygus stulpelių skaičiui.

Tarkime, matrica A yra kvadratinė matrica. Matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ant įstrižainės visi vienetai) vadinama **vienetine** ir žymima E. Tarkime, matrica A yra kvadratinė matrica. Jei egzistuoja matrica B, tokia, kad

$$A \cdot B = E,$$

tai matrica B vadinama **atvirkštine matricai A ir žymima A^{-1}**. Kvadratinė matrica vadinama **neišsigimusia**, jei egzistuoja jai atvirkštinė matrica. **Kvadratinė matrica yra neišsigimusi tada ir tik tada, kai jos determinantas nelygus nuliui.**

Tarkime, A ir B – tos pačios eilės kvadratinės matricos. Tada

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Kaip suskaičiuoti atvirkštinę matricą? Panagrinėsime du būdus. Pirmas būdas vadinasi "darbas puošia žmogų". Tarkime, turime neišsigimusią matricą A. Tada

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

2. **pavyzdys.** Rasime matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Rasime atvirkštinę matricą pirmu būdu.

$$|A| = -1,\ A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 5,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Taigi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 12 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Tarkime, reikia suskaičiuoti 4-os eilės matricos atvirkštinę. Skaičiuojant pirmu būdu, reiktų rasti 16 3-os eilės determinantų, todėl šis būdas ir vadinamas "darbas puošia žmogų".

Antras būdas panašus į Gauso metodą lygčių sistemoms.

3. **pavyzdys.** Rasime matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Užrašome dvigubą matricą:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kairėje pusėje parašyta matrica A, o dešinėje – vienetinė matrica E. Galima atlikti tokius veiksmus:

- vieną eilutę padauginti iš skaičiaus ir pridėti prie kitos;
- sukeisti eilutes vietomis;
- padauginti eilutę iš skaičiaus.

Atliekant šiuos veiksmus kairiąją dvigubos matricos pusę paverčiame vienetine. Tada dešinėje pusėje gauta matrica bus atvirkštinė matricai A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \big\downarrow^{(-2)} \big\downarrow^{(-3)} \big\downarrow^{(-1)} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \big\downarrow^{(-2)} \big\downarrow^{(-1)} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \big\downarrow^{(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \big\uparrow_{(-1)} \big\uparrow_{(-2)} \big\uparrow_{(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \big\uparrow_{(-1)} \big\uparrow_{(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \big\uparrow_{(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Kairėje pusėje gavome vienetinę matricą, todėl dešinėje pusėje esanti matrica bus atvirkštinė matricai A. Taigi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Tarkime, turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{cases}.$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Šią sistemą galima užrašyti matricomis A, X ir B:

$$A \cdot X = B.$$

Mažiausių kvadratų sprendiniai. Tarkime, reikia rasti aukščiau parašytos sistemos mažiausių kvadratų sprendinius. Šie sprendiniai gaunami sprendžiant tokią sistemą:

$$\left(A^T \cdot A\right) \cdot X = A^T \cdot B.$$

4. **pavyzdys.** Rasime sistemos

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 5 \end{cases}$$

mažiausių kvadratų sprendinius.

Sprendimas. Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Taigi reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\left(A^T \cdot A\right) \cdot X = A^T \cdot B, \quad \text{t.y.} \quad \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix},$$

arba

$$\begin{cases} 10x + 9y + 8z &= 22 \\ 9x + 10y + 8z &= 21 \\ 8x + 8y + 12z &= 21 \end{cases}.$$

Šios sistemos sprendiniai yra $x = 7/5$, $y = 2/5$ ir $z = 11/20$. Šie sprendiniai ir yra pradinės sistemos mažiausių kvadratų sprendiniai. $\square$

Uždaviniai.

1*. Duotos matricos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jei įmanoma, apskaičiuokite $A_i \pm A_j$, $A_i \cdot A_j$ ir A_i^{-1}, $1 \leqslant i, j \leqslant 4$.

Ats.: $A_i + A_i$ – kiekvieną matricos A_i elementą reikia padauginti iš 2.

$$A_1 + A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \ A_1 - A_3 = -(A_3 - A_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}, \ A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 19 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \ A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 17 & 11 \\ 10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 16 & 14 & 18 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \ A_4^2 = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \ A_4^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2*. Raskite A^{-1}, kai

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \ b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 6 \\ 7 & 23 & 14 \end{pmatrix};$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 13 & 2 \\ 7 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \ d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & -19 & 8 \\ 0 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 5 & -20 & 8 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\quad d)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3*. Su kuria λ reikšme matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

yra išsigimusi?

Ats.: $\lambda = 2$.

4*. Išspręskite lygtį:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\quad b)\ X \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$d)\ X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 6 & -16 \end{pmatrix};\ b)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ c)\ \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -18 & 37 \end{pmatrix};$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ e)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5*. Raskite sistemos mažiausių kvadratų sprendinius.

$$a)\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}\qquad b)\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 5 \\ 3x + 5y = 12 \end{cases}$$

Ats.: a) $x = 4/3$, $y = 7/3$; b) $x = 6$, $y = -7/6$.

6*. Raskite:

$$a)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n;\ b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n;\ c)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n;$$

$$d)\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n;\ e)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n;\ f)\ \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n;$$

$$g)\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n;\ h)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix};b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ c)\ \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix};$$

$$d)\ \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix};$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{kai } n = 2k \text{ ir } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \text{kai } n = 2k+1;$$

$$f)\ \begin{pmatrix} a^n & 2na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix};\ g)\ \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix};$$

$$h)\ \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7*. Raskite

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n}^{n-1}$$

Ats.:

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

8*. Pasinaudoję lygybe

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

apskaičiuokite

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5.$$

Ats.:

$$\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}.$$

9*. Pasinaudoję lygybe

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

apskaičiuokite

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6.$$

Ats.:

$$\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}.$$

10*. Tegul A ir B – dvi tos pačios eilės kvadratinės matricos, kurios nėra perstatomos, t. y. $AB \neq BA$. Įrodykite, jog

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;

b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

11*. Tegul A ir B – dvi tos pačios eilės perstatomos kvadratinės matricos, t. y. $AB = BA$. Įrodykite Niutono binomo formulę:

$$(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + \cdots + B^n.$$

12*. Sakoma, jog tos pačios eilės kvadratinės matricos A ir B yra *perstatomos*, jei $AB = BA$. Raskite visas matricas, perstatomas su matrica

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$a) \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}; \; b) \begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix};$$

čia a ir b – bet kokie skaičiai.

13*. Raskite nurodytai matricai atvirkštinę matricą:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};\quad b)\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n}.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

14*. Kvadratinė matrica A tenkina lygybę

$$3A^4 - 2A^3 + 12A^2 - 2A + 3E = \mathcal{O},$$

kur $\mathcal{O}$ – nulinė matrica, o E – vienetinė matrica. Įrodykite, jog matrica

$$-A^3 + \frac{2}{3}A^2 - 4A + \frac{2}{3}E$$

yra atvirkštinė matricai A.

15. Kaip pasikeis matricų A ir B sandauga AB, jei:
   a) matricos A i-tąją ir j-tąją eilutes sukeisime vietomis?
   b) prie matricos A i-tosios eilutės pridėsime j-tąją eilutę, padaugintą iš skaičiaus a?
   c) matricos B i-tąjį ir j-tąjį stulpelius sukeisime vietomis?
   d) prie matricos B i-tojo stulpelio pridėsime j-tąjį stulpelį, padaugintą iš skaičiaus a?

   Ats.: a) i-toji ir j-toji sandaugos AB eilutės susikeis vietomis; b) prie i-tosios sandaugos AB eilutės bus pridėta j-toji, padauginta iš skaičiaus a; c) i-tasis ir j-tasis sandaugos AB stulpeliai susikeis vietomis; d) prie i-tojo sandaugos AB stulpelio bus pridėtas j-tasis, padaugintas iš skaičiaus a.

16. Kaip pasikeis atvirkštinė matrica A^{-1}, jei:
   a) matricos A i-tąją ir j-tąją eilutes sukeisime vietomis?
   b) matricos A i-tąją eilutę padauginsime iš nenulinio skaičiaus a?

c) prie matricos A i-tosios eilutės pridėsime j-tąją eilutę, padaugintą iš skaičiaus a?

Ats.: a) matricos A^{-1} i-tasis ir j-tasis stulpeliai susikeis vietomis; b) matricos A^{-1} i-tasis stulpelis bus padaugintas iš $1/a$; c) iš j-tojo matricos A^{-1} stulpelio bus atimtas i-tasis, padaugintas iš skaičiaus a.

17. Tegul A – neišsigimusi kvadratinė matrica su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, jog atvirkštinės matricos A^{-1} visi koeficientai yra sveikieji skaičiai tada ir tik tada, kai matricos A determinantas lygus ± 1.
18. Kvadratinės matricos $A = (a_{ij})$ pagrindinės įstrižainės elementų suma $a_{11} + a_{22} + \cdots$ vadinama matricos A *pėdsaku* ir žymima $\mathrm{Tr}(A)$. Įrodykite, jog bet kurioms kvadratinėms matricoms A ir B teisinga lygybė $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
19. Įrodykite, jog bet kurioms kvadratinėms matricoms A ir B teisinga lygybė $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
20. Įrodykite, jog kvadratinė matrica A perstatoma ($AB = BA$) su kiekviena tos pačios eilės kvadratine matrica tada ir tik tada, kai matrica A turi pavidalą aE, kur a – skaičius, o E – vienetinė matrica.
21. Kvadratinė matrica $A = (a_{ij})$ vadinama *diagonaline*, jei visi jos elementai, išskyrus pagrindinės įstrižainės elementus a_{ii}, lygūs nuliui. Įrodykite, jog kvadratinė matrica A perstatoma ($AB = BA$) su kiekviena tos pačios eilės diagonaline matrica tada ir tik tada, kai matrica A yra diagonalinė.
22. Tegul A – diagonalinė matrica, kurios pagrindinės įstrižainės elementai yra tarpusavyje skirtingi skaičiai (t. y., jei $A = (a_{ij})$ ir $i \neq j$, tai $a_{ii} \neq a_{jj}$). Įrodykite, jog kiekviena kvadratinė matrica, perstatoma su matrica A, taip pat yra diagonalinė.
23. Raskite visas matricas, perstatomas su matrica

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix};$$

čia a, b, c – bet kokie skaičiai.

24. Tegul A – kvadratinė matrica, o $p(x)$ ir $q(x)$ – bet kokie polinomai. Įrodykite, jog matricos $p(A)$ ir $q(A)$ perstatomos, t. y. $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.
25. Tegul A – bet kokia matrica. Įrodykite, jog matrica AA^t yra simetrinė.
26. Įrodykite, jog dviejų tos pačios eilės simetrinių matricų A ir B sandauga yra simetrinė matrica tada ir tik tada, kai matricos A ir B perstatomos.
27. Įrodykite, jog bet kurioms tos pačios eilės kvadratinėms matricoms A ir B teisinga nelygybė $AB - BA \neq E$; čia E – vienetinė matrica.
28. Raskite visas antros eilės kvadratines matricas, kurių kvadratas yra nulinė matrica.

   Ats.: Kiekviena tokia matrica turi pavidalą

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

   kur a ir b – bet kokie skaičiai, tenkinantys sąlygą $a^2 + bc = 0$.
29. Raskite visas antros eilės kvadratines matricas, kurių kvadratas yra vienetinė matrica.

   Ats.: Kiekviena tokia matrica yra $\pm E$ arba turi pavidalą

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

   kur a ir b – bet kokie skaičiai, tenkinantys sąlygą $a^2 + bc = 1$.
30. Raskite nurodytai matricai atvirkštinę matricą:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};\quad b)\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}}_{n+1};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats.:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \cdots & -a & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$