398. Определить колебание функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

на интервалах: а) $(-1; 1)$; б) $(-0{,}1; 0{,}1)$; в) $(-0{,}01; 0{,}01)$; г) $(-0{,}001; 0{,}001)$.

399. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b).

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на (a, b), то

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

и

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства.

400. Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a, +\infty)$ и ограничена на каждом сегменте $[a, b] \subset [a, +\infty)$.

Положим:

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi) \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x$ и б) $f(x) = \cos x$.

401. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. На языке «E—δ» доказать, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	...
δ					

403. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$; в) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

405. а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$;

е) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$; ж) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$;

з) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty$; и) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.

406. а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; е) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

ж) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$; з) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

и) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

407. Пусть $y = f(x)$. Сформулировать с помощью неравенств, что значит:

а) $y \to b - 0$ при $x \to a$;
б) $y \to b - 0$ при $x \to a - 0$;
в) $y \to b - 0$ при $x \to a + 0$;
г) $y \to b + 0$ при $x \to a$;
д) $y \to b + 0$ при $x \to a - 0$;
е) $y \to b + 0$ при $x \to a + 0$;
ж) $y \to b - 0$ при $x \to \infty$;
з) $y \to b - 0$ при $x \to -\infty$;
и) $y \to b - 0$ при $x \to +\infty$;
к) $y \to b + 0$ при $x \to \infty$;
л) $y \to b + 0$ при $x \to -\infty$;
м) $y \to b + 0$ при $x \to +\infty$.

Привести соответствующие примеры.

408. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_i ($i=0, 1, \ldots, n$; $n \geqslant 1, a_0 \neq 0$) — вещественные числа.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

409. Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

410. Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

Какие возможные значения имеет выражение

$$\lim \frac{P(x)}{}?$$

Найти значения следующих выражений:

411. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m и n — натуральные числа).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$. **419.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **421.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$. **423.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — натуральные числа).

426. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n — натуральное число).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n — натуральное число).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ (m и n — натуральные числа).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right].$$

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2n}{n}\right)^2+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right].$$

Указание. См. пример 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$.

Указание. См. пример 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Определить площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 3), ограниченного параболой $y=$

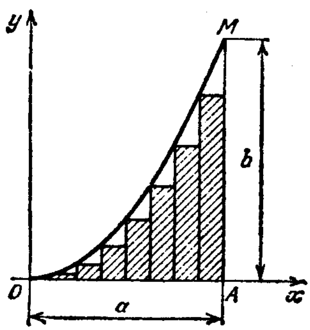

Рис. 3

$= b\,(x/a)^2$, осью Ox и прямой $x=a$, рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямоугольников с основаниями a/n, где $n\to\infty$.

Найти пределы:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

440. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. **443.** $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n—целое число).

445. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m и n—целые числа).

453. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m и n — целые числа).

454. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ и m— целое число.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Найти пределы:

455. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m и n—целые числа).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

458. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to +0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\ldots(x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n—натуральное число).

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n—натуральное число).

468. Изучить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, у которого коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b\neq 0$.

469. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

470. Найти постоянные a_i и b_i ($i=1, 2$) из условий:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

Найти пределы:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$. **472.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n—целые числа).

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **474.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. **476.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. **478.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. **480.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$

$$\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right).$$

Найти пределы:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. **483.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$. **485.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$. **487.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **496.** $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$. **503.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

506. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. **508.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\pi/4+0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. **512.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$. **514.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **518.** $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

519.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. **521.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$. **523.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$. **528.** $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **530.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$. **539.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln \dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$. **542.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$. **544.** $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

545.1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$. **545.3.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. **547.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$. **549.** $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad(a>1,\ n>0).$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\qquad(a>1,\ \varepsilon>0).$$

Найти пределы:

566. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{x/(x+1)}-1)^{(x^2+1)/x}$. **574.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec(\pi x/2)}$.

575. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

576. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}$ (см. пример 340).

576.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$ (см. пример 340).

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$.

577.1. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$.

577.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$. **578.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$. **584.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$. 592. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

593. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594.1 Найти $h=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

597. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Доказать, что

а) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$ при $x\to-\infty$;

б) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$ при $x\to+\infty$.

599. Доказать, что

а) $2^x \to 1-0$ при $x \to -0$;

б) $2^x \to 1+0$ при $x \to +0$.

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$), если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

602. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$. **603.** $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

605. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

606. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n \text{ раз}}$.

607. Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = 1/q$ при $x = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \to 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b), то

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $\quad (f(x) \geqslant C > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Указание. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

613. а) $y = 1 - x^{100}$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})\;(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

614. а) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}}\;(x \geqslant 0)$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\;(x \geqslant 0)$.

615. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}\quad (x \neq 0)$.

616. $x = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad (x \geqslant 0)$.

618. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad (x \geqslant 0)$.

619. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad (x \geqslant 0)$.

620. а) $y = \sin^{1000} x$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\geqslant 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg} x^n$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$ $(x>0)$.

625.1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}$ $(x\geqslant 0)$.

625.2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin^2(n!\pi x)|$.

625.3. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

626. *Асимптотой* (наклонной) для кривой $y=f(x)$ называется прямая $y=kx+b$, для которой

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Используя это уравнение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

627. Найти асимптоты и построить следующие кривые:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$; б) $y=\sqrt{x^2+x}$;

в) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; г) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$;

д) $y=\ln(1+e^x)$; е) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

Найти следующие пределы:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, если $|x|<1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, где $\psi(x)>0$ и пусть $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1, 2, \ldots)$ при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ при $m=1, 2, \ldots$ и $n>N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)$ $(a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. Последовательность x_n задана равенствами:

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots \quad (a>0).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.1. Последовательность x_n задается следующим образом:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,$$
$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

637.2. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0,\ y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

637.3. Последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = 1,\ x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Указание Рассмотреть разности между x_n и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$.

638. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2},\quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2},\quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639.1. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, \ldots, \ldots)$. Доказать, что если $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Указание. Изучить разность
$$\frac{1}{x}-y_n.$$

639.2. Для нахождения $y=\sqrt{x}$, где $x>0$, применяется следующий процесс: $y_0>0$ — произвольно,
$$y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$
Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} y_n=\sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу
$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2 \quad (n\geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*
$$x-\varepsilon\sin x=m \qquad (0<\varepsilon<1) \qquad (1)$$
полагают
$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \ldots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \ldots$$
(*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x-\xi|\leqslant h$ $(h>0)$, то число
$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$
называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x=0$, если $f(0)=0$ и при $x\neq 0$ имеем:

а) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$;

ж) $f(x)=(1+|x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

Доказать, что, каково бы ни было число α, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно выбрать последовательность $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \varliminf_{x\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 (1/x)}$.

644. Определить

$$l = \varliminf_{x\to\infty} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to\infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \geqslant 0)$.

§ 6. *O*-символика

1°. Запись

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant A |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \qquad (1)$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \to a, \qquad (2)$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a $(x \neq a)$. В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ $(x \neq a)$, то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно бесконечно малой x. Аналогично, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\psi(x)$ называется *бесконечно большой порядка* p относительно бесконечно большой x

2°. Запись

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a$$

обозначает, что

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \quad (x \in U_a,\ x \neq a), \tag{3}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то равенство (3) эквивалентно утверждению

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными* ($\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \to a$, если

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a. \tag{4}$$

Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то из (4) имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

При $x \to 0$ справедливы соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x;\ \operatorname{tg} x \sim x;\ a^x - 1 \sim x \ln a\ (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x;\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Вообще

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых (или бесконечно больших) функций при $x \to a$ данные функции можно заменять эквивалентными.

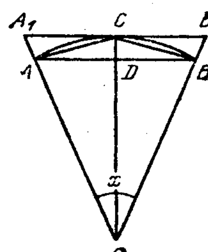

Рис. 4

645. Считая центральный угол $AOB = x$ (рис. 4) бесконечно малой 1-го порядка, определить порядки малости следующих величин: а) хорды AB; б) стрелки CD; в) площади сектора AOB; г) площади треугольника ABC; д) площади трапеции ABB_1A_1; е) площади сегмента ABC.

646. Пусть $o(f(x))$ — произвольная функция, имеющая при $x \to a$ более низкий порядок роста, чем функция $f(x)$, и $O(f(x))$ — любая функция, имеющая при

$x \to a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$,

д) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. Пусть $x \to 0$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ — постоянная);

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Пусть $x \to +\infty$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$;

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Показать, что символ $\sim$ обладает свойствами: 1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \to 0$. Доказать следующие равенства:

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

в) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;

е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$;

ж) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Пусть $x \to +\infty$. Доказать следующие равенства:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;

б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$; г) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\ln x=o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$; е) $x^pe^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

ж) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$; з) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

652. Доказать, что при достаточно большом $x>0$ имеют место неравенства:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$;

б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

652.1. Доказать асимптотическую формулу

$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x\to+\infty$.

653. Пусть $x\to0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

654. Пусть $x\to0$. Показать, что бесконечно малые

а) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; б) $f(x)=e^{-1/x^2}$

не сравнимы с бесконечно малой x^n $(n>0)$, каково бы ни было n, т. е. ни при каком n не может иметь место равенство $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=k$, где k — конечная величина, отличная от нуля.

655. Пусть $x\to1$. Выделить главный член вида $C(x-1)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $x-1$ следующих функций:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

в) $\ln x$; г) e^x-e; д) x^x-1.

656. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядки роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. Пусть $x \to 1$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ и определить порядки роста относительно бесконечно большой $\dfrac{1}{x-1}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

г) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$; д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

659. Пусть $x \to +\infty$ и $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет быстрее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция e^x растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

660. Пусть $x \to +\infty$ и

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет медленнее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция $f(x) = \ln x$ растет медленнее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

661. Доказать, что какова бы ни была последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots\ (x_0 < x < +\infty),$$

можно построить функцию $f(x)$, которая при $x \to +\infty$ растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 7. Непрерывность функции

1°. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$ (или в *точке* x_0), если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X = \{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X.

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем области определения $X = \{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают: 1) *точки x_0 разрыва первого рода*, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

и 2) *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком функции* в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой*. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен символу ∞, то x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{или } f(x_0 + 0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ *непрерывна слева* (*справа*) в точке x_0. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x = x_0$, то функции

а) $f(x) \pm g(x)$; б) $f(x)g(x)$; в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$

также непрерывны при $x = x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x; б) дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (*теорема Вейерштрасса*); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (*теорема Коши*). В частности, если $f(\alpha) f(\beta) < 0$, то найдется значение γ $(\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = 0$.

662. Дан график непрерывной функции $y = f(x)$. Для данной точки a и числа $\varepsilon > 0$ указать геометрически число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x-a| < \delta$.

663. Требуется изготовить металлическую квадратную пластинку, сторона которой $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо изменять сторону x этой пластинки, если площадь ее $y = x^2$ может отличаться от проектной $y_0 = 100$ см² не больше чем а) на ± 1 см²; б) на $\pm 0{,}1$ см²; в) на $\pm 0{,}01$ см²; г) на $\pm \varepsilon$ см²?

664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С какой абсолютной погрешностью Δ допустимо измерить ребро x этого куба, чтобы объем его y можно было вычислить с абсолютной погрешностью, не превышающей ε м³, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$ м³; б) $\varepsilon = 0{,}01$ м³; в) $\varepsilon = 0{,}001$ м³?

665. В какой максимальной окрестности точки $x_0 = 100$ ордината графика функции $y = \sqrt{x}$ отличается от ординаты $y_0 = 10$ меньше чем на $\varepsilon = 10^{-n}$

($n \geqslant 0$)? Определить размеры этой окрестности при $n = 0, 1, 2, 3$.

666. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Заполнить следующую таблицу:

ε	1	0,1	0,01	0,001	. . .
δ					

667. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Для значений $x_0 = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$ найти максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такие, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0{,}001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0,1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,1)$?

668. Сформулировать на языке «ε—δ» в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определенная в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

669. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

670. Пусть дана функция $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$.

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0{,}001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

671. Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если

$|x-x_0| < \delta$, то выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

672. Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$? Какое свойство функции описывается этими неравенствами?

673. Пусть для каждого числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$.

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

674. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax + b$; б) x^2; в) x^3; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\operatorname{arctg} x$.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, если $x \neq -1$ и $f(-1)$—произвольно.

678. а) $f_1(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f_1(0) = 1$;

б) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $f_2(0) = 1$.

679. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$—произвольно.

680. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

681. $f(x)=e^{-1/x^2}$, если $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x-1}}$, если $x\neq 1$ и $f(1)$ — произвольно.

683. $f(x)=x\ln x^2$, если $x\neq 0$ и $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$. 685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. 688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. 690. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$. 692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$. 694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{x}}{\cos\dfrac{\pi}{x}}$. 696. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. 698. $y=e^{x+1/x}$.

699. $y=\dfrac{l}{\ln x}$. 700. $y=\dfrac{1}{1-e^{x/1-x}}$.

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$. 702. $y=x-[x]$.

703. $y=x[x]$. 704. $y=[x]\sin\pi x$.

705. $y=x^2-[x^2]$. 706. $x=\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. 708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$. **710.** $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

711. $y=\sec^2\frac{1}{x}$. **712.** $y=(-1)^{[x^2]}$.

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

714. $y=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$. **715.** $y=\frac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$. **717.** $y=e^{-1/x}$.

718. $y=1-e^{-1/x^2}$. **719.** $y=\operatorname{th}\frac{2x}{1-x^2}$.

Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$. **721.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$. **723.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

729. Является ли непрерывной функция

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{если } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

730. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{если } x<0,\\ a+x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

731. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1<x\leqslant 2; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } |x|\leqslant 1, \\ 1 \text{ при } |x|>1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } |x|\leqslant 1, \\ |x-1| & \text{при } |x|>1; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{для нецелого } x, \\ 0 & \text{для целого } x; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального } x, \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

732. Функция $d = d(x)$ представляет собой кратчайшее расстояние точки x числовой оси Ox от множества точек ее, состоящего из отрезков $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x \leqslant 3$. Найти аналитическое выражение функции d, построить ее график и исследовать на непрерывность.

733. Фигура E состоит из равнобедренного треугольника с основанием 1 и высотой 1 и двух прямоугольников с основаниями 1 каждый и высотами, равными 2 и 3 (рис. 5). Функция $S = S(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ представляет собой площадь части фигуры E, заключенной между параллелями $Y = 0$ и $Y = y$; а функция $b = b(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ есть длина сечения фигуры E параллелью $Y = y$. Найти аналитические выражения функций S и b, построить их графики и исследовать на непрерывность.

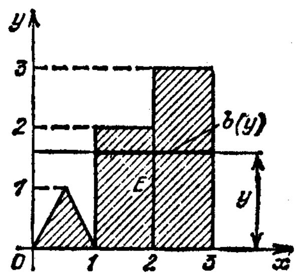

Рис. 5

734. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty} \cos^n (\pi m! x)\right\}$$

разрывна при каждом значении x.

735. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = x\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. предыдущую задачу). Построить эскиз графика этой функции.

736. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ взаимно} \\ & \text{простые числа;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x. Построить эскиз графика этой функции.

737. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

если x есть несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ $(n \geqslant 1)$, и

$$f(x) = |x|,$$

если x — иррациональное число. Построить эскиз графика этой функции.

738. Функция $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ определена для всех значений аргумента x, кроме $x = 0$. Какое значение следует приписать функции $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы эта функция была непрерывной при $x = 0$?

739. Показать, что при любом выборе числа $f(1)$ функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ будет разрывна при $x = 1$.

740. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x = 0$. Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

в) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$; г) $f(x) = (1+x)^{1/x}$;

д) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$; е) $f(x)=x^x$ $(x>0)$;

ж) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x)+g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x=x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

742. Обязательно ли произведение двух функций $f(x)\,g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

743. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

744. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если:

а) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=1+x^2$;

б) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=x(1-x^2)$;

в) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=1+x-[x]$.

745. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, если

$$f(u)=\begin{cases} u & \text{при } 0<u\leqslant 1;\\ 2-u & \text{при } 1<u<2\end{cases}$$

и

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном};\\ 2-x & \text{при } x \text{ иррациональном}\end{cases} \qquad (0<x<1).$$

746. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция, то $F(x)=|f(x)|$ есть также непрерывная функция.

747. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, & \text{если } f(x)<-c;\\ f(x), & \text{если } |f(x)|\leqslant c;\\ c, & \text{если } f(x)>c,\end{cases}$$

где c — любое положительное число, также непрерывна.

748. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

749. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функции

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \text{ и } \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

750. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{(f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

непрерывны слева на сегменте $[a, b]$.

751. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

752. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что, каково бы ни было число T, найдется последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty < x < +\infty$ и

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

755. Доказать, что если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и монотонна на сегменте $[a, b]$; 2) в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна на $[a, b]$.

756. Показать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x - a}$, если $x \neq a$ и $f(a) = 0$, принимает на любом сегменте $[a, b]$

все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, однако не является непрерывной на $[a, b]$.

757. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется число ξ такое, что

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)].$$

758. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и

$$l=\varliminf_{x\to a} f(x) \quad \text{и} \quad L=\varlimsup_{x\to a} f(x).$$

Доказать, что, каково бы ни было число λ, где $l \leqslant \lambda \leqslant L$, существует последовательность $x_n \to a$ ($n = 1, 2, \ldots$) такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda.$$

§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y = f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и непрерывна на интервале (a, b); 2) монотонна в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B), где $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Под *однозначной непрерывной ветвью* многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y = f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x = g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)] = y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

на интервале (a, b), где $a = \lim\limits_{t\to\alpha+0} \varphi(t)$ и $b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$.

759. Найти обратную функцию дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

В каком случае обратная функция совпадает с данной?

760. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если

$$y = x + [x].$$

761. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

762. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для каждого вещественного k $(-\infty < k < +\infty)$ имеет в интервале $0 < x < \pi$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

763. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

764. В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

765. Показать, что обратная функция разрывной функции $y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$ есть функция непрерывная.

766. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad (a \leqslant x_n \leqslant b),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Определить однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

767. $y = x^2$. **768.** $y = 2x - x^2$. **769.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$. **771.** $y = \cos x$. **772.** $y = \operatorname{tg} x$.

773. Показать, что множество значений непрерывной функции $y = 1 + \sin x$, соответствующих интервалу $(0 < x < 2\pi)$, есть сегмент.

774. Доказать равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

776. Доказать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, — 1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значение этой функции в полученных областях.

777. Доказать теорему сложения арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y =$$
$$= (-1)^{\varepsilon}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi$$
$$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \operatorname{sgn} x, \text{ если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. Доказать теорему сложения арккосинусов:

$$\arccos x + \arccos y =$$
$$= (-1)\ \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon$$
$$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ если } x + y \geqslant 0, \\ 1, \text{ если } x + y < 0. \end{cases}$$

779. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin x - \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

б) $y = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\arcsin x$.

780. Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями:

$$x = \operatorname{arctg} t, \; y = \operatorname{arcctg} t \; (-\infty < t < +\infty).$$

В какой области определена эта функция?

781. Пусть $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$. В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

782. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ определяла бы y как однозначную функцию от x?

Рассмотреть пример: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \qquad (a < t < b)$$

и

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \; y = \psi(\chi(\tau)) \; (\alpha < \tau < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

784. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b) и $A = \inf\limits_{a<x<b} \varphi(x)$, $B = \sup\limits_{a<x<b} \varphi(x)$. В каком случае существует однозначная функция $f(x)$, определенная в интервале (A, B) и такая, что

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \text{ при } a < x < b?$$

§ 9. Равномерная непрерывность функции

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых значений $x', x'' \in X$ из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.

785. Цех завода вырабатывает квадратные пластинки, стороны которых x могут принимать значения в пределах от 1 до 10 см. С каким допуском δ можно обрабатывать стороны этих пластинок, чтобы независимо от их длины (в указанных границах) площадь их y отличалась от проектной меньше, чем на ε? Произвести численный расчет, если:

а) $\varepsilon = 1$ см^2; б) $\varepsilon = 0{,}01$ см^2; в) $\varepsilon = 0{,}0001$ см^2.

786. Цилиндрическая муфта, ширина которой ε и длина δ, надета на кривую $y = \sqrt[3]{x}$ и скользит по ней так, что ось муфты остается параллельной оси Ox. Чему должно быть равно δ, чтобы эта муфта свободно прошла участок кривой, определяемый неравенством $-10 \leqslant x \leqslant 10$, если: а) $\varepsilon = 1$; б) $\varepsilon = 0{,}1$; в) $\varepsilon = 0{,}01$; г) ε произвольно мало?

787. В положительном смысле сформулировать на языке «ε—δ» утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве (интервале, сегменте и т. п.), но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

788. Показать, что функция $f(x) = 1/x$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

789. Показать, что функция $f(x) = \sin \pi/x$ непрерывна и ограничена в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

790. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

791. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

792. Показать, что неограниченная функция

$$f(x) = x + \sin x$$

равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

793. Является ли равномерно непрерывной функция $f(x) = x^2$ на интервале а) $(-l, l)$, где l — любое, сколько угодно большое положительное число; б) на интервале $(-\infty, +\infty)$?

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

794. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

795. $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1)$.

796. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi)$.

797. $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x} \quad (0 < x < 1)$.

798. $f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < +\infty)$.

799. $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leqslant x < +\infty)$.

800. $f(x) = x \sin x \quad (0 \leqslant x < +\infty)$.

801. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом интервале

$$J_1 = (-1 < x < 0) \text{ и } J_2 = (0 < x < 1)$$

по отдельности, но не является равномерно непрерывной на их сумме

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}.$$

801.1. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.

802. Для $\varepsilon > 0$ найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

а) $f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$;

б) $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leqslant x \leqslant 5)$.

в) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (0{,}1 \leqslant x \leqslant 1)$;

г) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leqslant x < +\infty)$;

д) $f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty)$;

е) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} \ (x \neq 0)$ и $f(0) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

803. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

804. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

805. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b).

806 (н). Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют пределы

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{и} \quad B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Верна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b)?

806.1. Доказать что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

807. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b), связанные условием $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ (см. предыдущую задачу) вида

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^{\alpha},$$

где C и α — константы, если:

а) $f(x) = x^3 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

б) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(a < x < +\infty)$,

в) $f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

§ 10. Функциональные уравнения

809. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

есть линейная однородная $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ — произвольная константа.

810. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

811. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

812. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) f(y), \tag{2}$$

есть показательная $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$ — положительная постоянная.

813. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \varepsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (2), есть показательная.

814. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

есть логарифмическая $f(x) = \log_a x$, где a — положительная константа $(a \neq 1)$.

815. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) f(y), \tag{3}$$

есть степенная $f(x) = x^a$, где a — постоянная.

816. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению (3).

817. Показать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ удовлетворяет уравнению (3).

818. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

819. Найти все непрерывные ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y системе уравнений:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$
$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

и, сверх того, условиям нормировки:

$$f(0) = 1 \text{ и } g(0) = 0.$$

Указание. Рассмотреть функцию

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

820. Пусть $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ и $\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$ суть конечные разности функции $f(x)$ соответственно первого и второго порядков.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ непрерывная и $\Delta^2 f(x) \equiv 0$, то эта функция линейная, т. е. $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

ОТДЕЛ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная явной функции

1°. **Определение производной.** Если x и $x_1 = x + \Delta x$ — значения независимой переменной, то разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением* функции $y = f(x)$ на сегменте $[x, x_1]$.

Выражение

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (1)$$

если оно имеет смысл, носит название *производной*, а сама функция $f(x)$ в этом случае называется *дифференцируемой*.

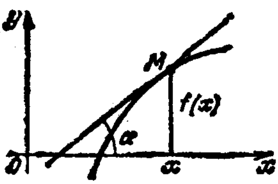

Рис. 6

Геометрически число $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке его x ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) (рис. 6).

2°. **Основные правила нахождения производной.** Если c — постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1) $c' = 0$;

2) $(cu)' = cu'$;

3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

4) $(uv)' = u'v + v'u$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n — постоянное число);

7) если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3°. Основные формулы. Если x — независимая переменная, то

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n — постоянное число).

II. $(\sin x)' = \cos x$. III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (a > 0,\ a \neq 1; \quad x > 0).$$

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Односторонние производные. Выражения

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x.

Для существования производной $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5°. Бесконечная производная. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox.

821. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

822. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = 1/x^2$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

823. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если:

а) $y = ax + b$; б) $y = ax^2 + bx + c$; в) $y = a^x$.

824. Доказать, что:

а) $\Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

б) $\Delta [f(x) g(x)] = g(x + \Delta x) \Delta f(x) + f(x) \Delta g(x)$.

825. Через точки $A(2, 4)$ и $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA'. Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$; г) Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A?

826. Отрезок $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ оси Ox с помощью функции $y = x^3$ отображается на ось Oy. Определить средний коэффициент растяжения и произвести численный расчет, если: а) $h = 0,1$; б) $h = 0,01$; в) $h = 0,001$.

Чему равен коэффициент растяжения при этом отображении в точке $x = 1$?

827. Закон движения точки по оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2,$$

где t — время в секундах и x — расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ и произвести численный расчет, если: а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0,1$; в) $\Delta t = 0,01$. Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

828. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций: а) x^2; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\operatorname{tg} x$; ж) $\operatorname{ctg} x$; з) $\arcsin x$; и) $\arccos x$; к) $\operatorname{arctg} x$.

829. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

831. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

833. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n — натуральное число, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле (см. отд. 1, задачу 734).

Пользуясь таблицей производных, найти производные следующих функций:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Чему равно $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

При каких значениях x: а) $y'(x) = 0$; б) $y'(x) = -2$; в) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$. **837.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

842.1. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. Доказать формулу $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Найти производные функций:

845. $y=\frac{2x}{1-x^2}$. 846. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$. 850. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. 854. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$. 866. $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$. 868. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\frac{1}{\cos^n x}$. 870. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.