ALGEBROS IR GEOMETIRJOS egzamino pavyzdys

2014-12-17

Teorinė dalis

1. Tegu $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$, bei

$$\overrightarrow{v_1} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j} + c_1\overrightarrow{k}$$

ir

$$\overrightarrow{v_2} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}.$$

Čia $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Vektorių $\overrightarrow{v_1}$ ir $\overrightarrow{v_2}$ skaliarinę daugybą apibrėžiame kaip

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = |\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}| \cos\varphi.$$

Įrodykite, kad

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

(3 taškai)

2. Tegu A ir B tokios kvadratinės matricos, kad $AB \neq BA$. Ar teisingos lygybės?

2.1 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (1,5 taško)

2.2 $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$. (1,5 taško)

Atsakymus pagrįskite.

3. Duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Takime, kad $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = d \neq 0$. Čia A_{ij} - adjunktai.

Raskite:
3.1 $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$. (1,5 taško)
3.2 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$. (1,5 taško)
Atsakymus pagrįskite.

4. Tegu z - nenulinis kompleksinis skaičius. Įrodykite, kad

$$\frac{|z|}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

(3 taškai)

Uždaviniai

1. Raskite vektorių statmeną vektoriams $\overrightarrow{v_1} = (3, 4, 5)$ ir $\overrightarrow{v_2} = (0, -2, 1)$.
(1 taškas)

2. Ar tiesė $4x - 3y + 7 = 0$ kerta atkarpą AB, čia $A(37, 51)$, $B(48, 68)$?
(3 taškai)

3. Sudarykite plokštumos, einančios per taškus $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ ir $C(1, 1, -1)$, lygtį. Raskite taško $(0, 0, 0)$ atstumą iki šios plokštumos.
(4 taškai)

4. Atvirkštinės matricos metodu išspręskite tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 3z = 20 \\ x + y - z = 12 \end{cases}$$

(4 taškai)

5. Duotas kompleksinis skaičius $z = -i$.
5.1 Užrašykite z trigonometrine ir rodikline formomis. (1 taškas)
5.2 Raskite z^{124}. (2 taškai)
5.3 Raskite $\sqrt[3]{z}$. (3 taškai)

ATSAKYMAI IR TRUMPI KOMENTARAI DĖL KAI KURIŲ UŽDAVINIŲ SPRENDIMO

Teorinė dalis

1. Turime, kad

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (a_1 \overrightarrow{i} + b_1 \overrightarrow{j} + c_1 \overrightarrow{k}) \cdot (a_1 \overrightarrow{i} + b_1 \overrightarrow{j} + c_1 \overrightarrow{k}).$$

Sudauginame panariui dešinės lygybės pusę ir iš formulės $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = |\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}| \cos\varphi$ pastebime, kad $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$, bei $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$. Taip pat žinome, kad skaliarinė sandauga yra komutatyvi.

2.1 Negalioja, nes $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$, o $AB \neq BA$.

2.2 Negalioja dėl analogiškos priežasties.

3.1 d. Pagal matricos determinanto apibrėžimą arba apskaičiavus.

3.2 0. Apskaičiavus arba prisiminus savybę, kad matricos eilutės (stulpelio) elementų ir kitos eilutės (stulpelio) atitinkamų adjunktų sandaugos suma visada lygi 0.

4. Jei $z = x + iy$, tai

$$\frac{|z|}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

Uždaviniai

1. $(14, -3, -6)$.

2. Kerta. Tiesės, einančios per taškus A ir B, ir tiesės $4x - 3y + 7 = 0$ susikirtimos taškas yra $(281/7, 391/7)$.

3. $y - 1 = 0$, $r = 1$.

4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (x, y, z) = (12, -1, -1).$$

5.1 $-i = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) = e^{i \cdot 3\pi/2}$.

5.2 1.

5.3 $z_0 = i$, $z_1 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_2 = \sqrt{3}/2 - i/2$.