KOMBINATORIKA IR GRAFŲ TEORIJA
(Paskaitos 2 semestre)

E. MANSTAVIČIUS

May 22, 2007

Contents

0.1 Įvadas

Žodis *kombinatórika* yra kilęs iš lotyniško *combino*, reiškiančio *jungiu, derinu.* Taip labai tiksliai pasakoma visos kombinatorikos mokslo esmė - tyrinėti aibių sudarymo dėsnius, jų elementų išdėstymo bei grupavimo būdus ir ypač - pačių aibės elementų suskaičiavimą. Turėdami vieną aibę, galime apibrėžti kitą, tarkime, - jos poaibių aibę ar jos elementų sekų aibę. Galime imti pasikartojančius elementus ar apsiriboti skirtingais. Sudarę poaibių aibę, sekų aibę ar kitokią šeimą (jas vadinsime *struktūromis* arba *konfigūracijomis*), turime suskaičiuoti ar bent įvertinti jų skaičių. Šiuolaikiniai kompiuteriai gali padėti, bet kad ir kokie galingi jie būtų, visada atsiras naujų kombinatorinių objektų, kurių nesutalpinsime baigtinėje atmintyje, be to, ir operacijų greitis pasirodys per lėtas. Apibrėždami struktūras, dažnai nesusimąstome, ar jos apskritai egzistuoja. Kombinatorika dažnai pasiūlo atsakymą ir į panašų klausimą. Susidūrę su sudėtingesne formule arba matematiniu teiginiu, kuriame nėra tolydžiosios matematikos aparato - integralų, išvestinių ar kitokių panašių sąvokų, iš karto sakome: ,,čia kombinatorika". Ir dažnai esame teisūs, klausdami kombinatorikos specialistų patarimo. Kombinatorika gali pasiūlyti specifinių matematikos uždavinių sprendimo būdus nesisavindama tiriamųjų objektų. Ji siūlo bendrus principus, metodus, be kurių neišsiverčia šiuolaikinė matematika ar informatika.

Iš kombinatorikos išsikristalizavo atskiros šakos ir tapo diskrečiosios matematikos disciplinomis. Taip atsitiko su grafų teorija, kodavimo teorija, kriptografija, diskretaus optimizavimo teorija ir kitomis. Šiandien turime kombinatorinę algebrą, logiką, geometriją ir topologiją - matematikos šakas, kuriose dominuoja kombinatorikos metodai.

Pirmosios kombinatorikos žinios siekia Senąsias Rytų šalis, kuriose mokėta suskaičiuoti kėlinius ir derinius bei sudarinėti magiškuosius kvadratus, ypač mėgtus viduramžiais. Nagrinėdami azartinius lošimus B. Paskalis[1] ir P. Ferma[2] ir tuo pačiu klodami taką tikimybių teorijai, mokėjo suskaičiuoti kai kuriuos junginius ir skaidinius. G. Leibnicas[3] 1669 m. laiške J. Bernuliui[4] pasiūlė ištirti natūraliojo skaičiaus išraiškų natūraliųjų dėmenų suma kiekį. Ši problema neprarado aktualumo ir šiandien. Savo disertaciją G.Leibnicas pavadino *Dissertatio de arte combinatoria* (išleista 1666). Šią datą pelnytai galė-

[1]Blese Pascal (1623–1662) – prancūzų matematikas ir filosofas.
[2]Pierre Fermat (1601-1665) – prancūzų matematikas ir filosofas.
[3]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) – vokiečių matematikas ir filosofas.
[4]Jacob Bernoulli (1655–1705) – šveicarų matematikas ir fizikas.

tume vadinti kombinatorikos gimimo metais. Iš kombinatorikos išsiritulia-vusios grafų teorijos pradžia vieningai siejama su 1736-ais, kai L.Euleris[5] išnagrinėjo senojo Karaliaučiaus septynių tiltų problemą ir nustatė maršrutų, einančų per visas grafo briaunas, egzistavimo sąlygas.

Prieš pradedant skaityti šį paskaitų konspektą, reikia suvokti, kad bus studijuojamas matematikos dalykas, todėl yra būtinas nusiteikimas suprasti, įsisąmoninti kiekvieną teiginį ir jo įrodymą. Uždaviniai gerai iliustruoja teoremas ir teorijos taikymo galimybes, bet jie niekada nepakeis teorijos. Teoremų įrodymuose atsiskleidžia objektų savybės, sąlygų ypatumai ir tarpusavio sąryšiai. Juos būtina išstudijuoti. Matematikoje ir juo labiau informatikoje stengiamsi išvengti dviprasmybių, teiginiai formalizuojami. Kiekviena teorija yra kuriama nuo pirminių sąvokų taikant logikos dėsnius, todėl matematinės logikos pagrindai ir aibių teorijos elementai labai padėtų pradedančiam Skaitytojui. Be to, yra reikalingos žinios apie funkcijas, atvaizdžius, sąryšius, polinomus, tiesines ir Euklido erdves bei kita, kas yra dėstoma algebros kurse. Kurso antroje pusėje šiek tiek yra minimos Tayloro eilutės, tikriausiai, jau girdėtos matematinės analizės paskaitose, tačiau jų teorija yra nesinaudojama.

Didžiulis autoriaus noras yra sutikti žingeidų Skaitytoją, kuris nepatingėtų išnagrinėti smulkmenas ir mums praneštų apie surastus netikslumus.

0.2 Pagrindiniai principai

0.2.1 Aibė, atvaizdis, sąryšis

Viena iš svarbiausių matematikos sąvokų yra *aibė*. Ją įsivaizduojame kaip kažkokių elementų, paimtų pagal kažkokį požymį, visumą. Šnekamojoje kalboje panašia prasme vartojama *rinkinys*, *šeima*, *klasė* ir kita. Išskirtinis aibės bruožas yra tas, kad jos elementai yra *skirtingi*. Kai kokiame nors rinkinyje yra pasikartojančių elementų, jį galima vadinti *multiaibe*. Aibes žymėsime didžiosiomis raidėmis, jos elementus - mažosiomis. Žymuo $a \in A$ yra posakio „*a priklauso A*" santrumpa. Labai patogu turėti ir tuščiąją aibę $\emptyset$, kurioje nėra jokio elemento. Aibė B yra A *poaibis*, jei kiekvienas $b \in B$ priklauso ir aibei A. Tokį faktą žymėsime $B \subset A$. Visada $\emptyset \subset A$.

Pačias aibes galime apibrėžti išrašant jų elementus, o kai tai nepavyksta, naudoti figūrinius skliaustus ir nurodyti juose taisyklę, pagal kurią elementai

[5]Leonhard Euler (1707–1783) – šveicarų matematikas.

priskiriami šiai aibei. Visi žinome natūraliųjų, sveikųjų ir realiųjų skaičių aibes, tradiciškai žymimas raidėmis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{R}$ atitinkamai arba pastarųjų poaibius $\mathbb{Z}_+$ ir $\mathbb{R}_+$, kuriuose yra tik neneigiami skaičiai. Natūralusis skaičius, nemažesnis už 2, vadinamas pirminiu, jei jis dalijasi tik iš 1 ir pačio savęs. Pirminių skaičių aibę galėtume užrašyti taip:

$$\{n \in \mathbb{N}\colon\ n\ -\ \text{pirminis skaičius}\}.$$

Skaitytojui, nepamiršusiam Pitagoro teoremos, pateiksime kitą pavyzdį. Plokštumos taškų, nutolusių per vienetą nuo koordinačių pradžios, taškų aibę, vadinamą vienetiniu apskritimu, užrašytume

$$\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1, x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Čia pora (x,y) žymi taško koordinates.

Įveskime veiksmus su aibėmis ir jų žymenis. Aibių A ir B *sąjunga* vadinama aibė

$$A \cup B\colon = \{x\colon\ x \in A\ arba\ x \in B\}.$$

Čia ir vėliau dvitaškis prie lygybės nurodo, kad apibrėžiami nauji objektai; šiuo atveju – nauja aibė. Aibių A ir B *sankirta* vadinama aibė

$$A \cap B\colon = \{x\colon\ x \in A\ ir\ x \in B\}.$$

Jei $A \cap B = \emptyset$, tai A ir B neturi bendrų elementų, o trumpai sakysime, kad jos nesikerta.

Jei $C = A \cup B$ ir $A \cap B = \emptyset$, tai sąjungą vadinsime *tiesiogine*. Išraišką tiesiogine sąjunga

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \quad A_i \neq \emptyset,\ 1 \le i < j \le k,$$

vadiname *aibės A skaidiniu*. Pridedant žodį *tiesioginė* galime ir nebepriminti, kad $A_i \cap A_j = \emptyset$, $1 \le i < j \le k$.

Aibė

$$A \setminus B\colon = \{x\colon\ x \in A\ , x \notin B\}$$

vadinama A ir B *skirtumu*, o

$$A \triangleleft B\colon = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

– *simetriniu skirtumu*. Žemiau esančiame paveiksle visos naujai įvestos aibės yra užtušuotos.

$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $A \triangleleft B$

Matematikoje ir ypač kombinatorikoje dažnai turint vienus objektus apibrėžiami sudėtingesni. Iš dviejų aibių A ir B elementų galime sudarinėti *sutvarkytąsias* poras (a, b), čia $a \in A$ ir $b \in B$, o visų tokių porų aibę vadinti *Dekarto*[6] *sandauga* ir žymėti $A \times B$. Taip iš realiųjų skaičių tiesės (ją irgi žymėsime $\mathbb{R}$) gaunamas Dekarto kvadratas $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ – plokštuma. Apibrėždami Dekarto sandaugą galėjome įsivaizduoti, kad poros (a, b) elementai nepriklausomai vienas nuo kito perbėga (kinta) savąsias aibes.

Realiame gyvenime dviejų objektų sąryšis nieko nestebina. Sakydami ,,atitiko kirvis kotą", mintyse turime omenyje kirvių ir kotų aibes, bet tik du elementus susiejame. Posakyje ,,studentai ir jų draugės" iš jaunuolių ir merginų porų aibės išskiriame studentiškas. Formalizuojant, dviejų aibių A ir B Dekarto sandaugos poaibis S vadinamas tų aibių *binariuoju sąryšiu*. Elementų susiejimą galima žymėti $(a, b) \in S$ ar net šitaip: $a\,S\,b$.

Plačiau apsistokime ties Dekarto sandauga $X^2 := X \times X$. Dabar jos poaibis S susieja tos pačios aibės X elementus, todėl yra natūralu sakyti, kad sąryšis S yra apibrėžtas aibėje, nors formaliai $S \subset X^2$. Iš pirmo žvilgsnio tai truputį stebina: aibės viduje nustatytas sąryšis yra X^2 poaibis! Reikia apsiprasti ir tiek. Viršuje apibrėžtas vienetinis apskritimas yra vaizdus sąryšio realioje tiesėje pavyzdys.

Paminėkime keletą svarbesnių sąryšių savybių. Sakysime, kad

(i) S yra *refleksyvusis*, jeigu visiems $x \in X$ turime $(x, x) \in S$;

(ii) S yra *simetrinis*, jeigu visiems $x, y \in X$ iš $(x, y) \in S$ išplaukia $(y, x) \in S$;

(iii) S yra *tranzityvusis*, jeigu visiems $x, y, z \in X$ iš $(x, y) \in S$ ir $(y, z) \in S$ išplaukia $(x, z) \in S$.

Pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ lygybe $=$ apibrėžtas sąryšis turi visas išvardintas savybes, tačiau panaudoję $\leq$ gauname refleksyvų ir tranzityvų, bet nesimetrinį sąryšį.

Refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus sąryšis vadinamas *ekvivalentumo sąryšiu*. Tada žymenį $(x, y) \in S$ patogu pakeisti ir tokiu: $x \sim y$. Skaitysime ,,x yra ekvivalentus y". Aibę elementų, ekvivalenčių x-ui, t.y.

$$\bar{x} := \{y \in X : \ y \sim x\}$$

[6] René Descartes (1596–1650) – prancūzų matematikas ir filosofas.

vadiname *ekvivalentumo klase*, kurioje yra x-as. Ateityje ne kartą remsimės tokiu teiginiu.

1 teorema. *Tegul S yra ekvivalentumo sąryšis aibėje X. Tada egzistuoja aibės X skaidinys*

$$X = \cup_\alpha X_\alpha,$$

čia α perbėga kažkokią indeksų aibę, o X_α yra skirtingos ekvivalentumo klasės.

Įrodymas. Pastebėkime, kad ekvivalentumo klasės arba sutampa arba nesikerta. Iš tiesų, jei $x \in X_\alpha \cap X_\beta$, tai pagal tranzityvumo savybę bet kuris elementas iš vienos ar kitos aibės būtų ekvivalentus x-ui. Todėl $X_\alpha \subset \bar{x}$ ir atvirkščiai $\bar{x} \subset X_\alpha$. Taigi, $\bar{x} = X_\alpha$. Panašiai, $\bar{x} = X_\beta$. Vadinasi, $X_\alpha = X_\beta$.

Elementai, nepatekę į klasę $\bar{x}$, priklauso kitoms klasėms. Paėmę jų sąjungą gauname norimą skaidinį.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Kita svarbi matematikos sąvoka yra *atvaizdis*. Tarkime, kad X ir Y yra netuščios aibės. Taisyklė, pagal kurią kiekvienam X elementui priskiriamas vienintelis aibės Y elementas, vadinamas aibės X atvaizdžiu aibėje Y. Jei atvaizdį pažymėtume raide f, tai toliau galėtume užrašyti vaizdžiau vienu iš būdų:

$$f\colon X \to Y, \qquad y = y(x), \qquad x \mapsto y;$$

nurodant, kad čia x kinta aibėje X, o $y \in Y$. Juose atsispindi ir atvaizdžio *apibrėžimo sritis* X, ir atvaizdžio *reikšmių sritis* Y, ir jo kryptis. Baigtinių aibių atveju patogu naudoti lenteles. Pavyzdžiui,

$$f\colon = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 2,1,3,6,5,4,9,7,8 \end{pmatrix}, \qquad g\colon = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \\ 2,1,1,2,2,4,9,9,7 \end{pmatrix}.$$

Dar išraiškingesnės yra tokie brėžiniai, vadinami *funkciniais digrafais*:

1 paveikslas

Aibė

$$f(X) = \{y \in Y: \; y = f(x)\,, x \in X\} \subset Y$$

vadinama X *vaizdu.* Jį sudaro visi elementai y, kuriuos galime gauti iš lygybės $y = f(x)$, kai x perbėga visą aibę X. Jei $y = f(x)$, tai y yra x*-o vaizdas*, o x – y*-o pirmavaizdis.* Vienas elementas y gali turėti ir daugiau pirmavaizdžių. Visą jų aibę pažymėkime $f^{-1}(y)$. Tada

$$f^{-1}(y) = \{x \in X: \; f(x) = y\} \subset X.$$

Skirtingiems y aibės $f^{-1}(y)$ nesikerta. Pastebėkime dar vieną svarbią savybę.

2 teorema. *Jei $f: X \to Y$ yra atvaizdis, tai egzistuoja skaidinys*

$$X = \cup_y f^{-1}(y),$$

čia y perbėga kažkokius aibės Y elementus.

Įrodymas. Sakykime, kad $x_1 \sim x_2$, jei $f(x_1) = f(x_2) = y$. Tai yra ekvivalentumo sąryšis. Toliau pakanka pritaikyti 1 teoremą.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Pastebėkime, be to, kad teoremoje pateikta lygybė išlieka teisinga tariant, kad y perbėga visus aibės Y elementus. Šiuo atveju sąjungoje gali būti tuščių aibių.

Išskirkime keletą atvaizdžių tipų. Jeigu f skirtingus elementus atvaizduoja į skirtingus, tai jis vadinamas *injekciniu* atvaizdžiu arba trumpai – *injekcija.* Tada kiekvienas $y \in Y$ turi ne daugiau kaip vieną pirmavaizdį. Jeigu visi $y \in Y$ turi bent vieną pirmavaizdį, tai f vadinamas *siurjekciniu* aibės X atvaizdžiu į aibę Y arba *siurjekcija.* Panaudoję mūsų žymenis, tada turėtume $f(X) = Y$.

Dažniausiai sutiksime atvaizdžius, kurie kartu bus ir injekciniai, ir siurjekciniai. Juos vadinsime *bijekciniais* atvaizdžiais arba *bijekcijomis.* Įsidėmėkime, kad bijekcinis atvaizdis kiekvienam x iš aibės X priskiria vieną ir tik vieną elementą iš Y, be to, kiekvienas $y \in Y$ turi vienintelį pirmavaizdį. Vadinasi, galime apibrėžti atvaizdį kita kryptimi:

$$y \mapsto x$$

čia $y \in Y$, o $x \in X$. Jį žymėsime f^{-1} ir vadinsime *atvirkštiniu* atvaizdžiu. Taigi, $f^{-1}: Y \to X$ ir $f^{-1}(y) = x$ tada ir tik tada, jei $f(x) = y$ su visais

$x \in X$ ir $y \in Y$. Jeigu mums nesvarbi atvaizdžio kryptis, tai bijekcinį atvaizdį galime vaizduoti tokiu būdu:

$$x \leftrightarrow y, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Tada galima išvengti tarptautinių žodžių ir sakyti, kad tarp aibių X ir Y yra apibrėžta *abipus vienareikšmė* atitiktis arba aibėje X yra apibrėžtas *abipus vienareikšmis atvaizdis* į aibę Y.

Dažnai vietoje atvaizdžio naudojamas žodis *funkcija*. Mes tai darysime, kai X ir Y bus skaičių aibės.

UŽDUOTIS. Šešiaženklis troleibuso bilietas vadinamas *laiminguoju*, jeigu pirmųjų trijų skaitmenų suma lygi antrojo trejeto skaitmenų sumai. Pavyzdžiui, bilietas su numeriu 111003, o turintis numerį 111002 – ne. Apibrėžkite abipus vienareikšmę atitiktį tarp laimingųjų bilietų aibės ir bilietų, kurių visų skaitmenų suma yra 27, aibės.

0.2.2 Matematinė indukcija

Žmonės abipus vienareikšmius atvaizdžius vartoja nuo tada, kai išmoko skaičiuoti. Moksliškai kalbant, tada jie išmoko nustatyti *aibės galią* t.y. jos elementų skaičių. Aibės A galią patogu žymėti $|A|$. Bet, šiukštu, nemaišykite su skaičiaus absoliutiniu didumu arba moduliu! Kitoje mokslinėję literatūroje sutiksite ir žymenis $card\ A$ arba $\#A$. Aišku, kad nulinę galią turės tik tuščioji aibė ir $|\emptyset| = 0$. Dažnai n galios aibę vadiname trumpai – n *aibe*.

Skaičiuodami aibės elementus bandome priskirti jiems numerius: 1-ą vienam elementui, 2-ą – kitam ir taip paeiliui – kitus natūraliuosius skaičius. Didžiausias numeris, jei jis egzistuoja (yra baigtinis), yra aibės galia. Pati aibė tada vadinama baigtine. Skaičiavimo procese apibrėžiame injekcinę funkciją $num\colon A \to \mathbb{N}$, kurios reikšmių sritis yra aibė

$$num(A) = \{1, 2, \ldots, |A|\}.$$

Aišku, kad $|A| = |num(A)|$, o atvaizdis $num\colon A \to num(A)$ yra bijekcinis.

Jei A yra begalinė, bet vis tiek pavyksta apibrėžti abipus vienareikšmę atitiktį $A \leftrightarrow \mathbb{N}$, tai ją vadiname *skaičiąja* aibe. Įžvelkime dar, kad skaičiuojant elementus aibėje įvedamas jų eiliškumas. Atvaizdis num surikiuoja aibės A elementus tam tikra tvarka.

Suskaičiuoti išmokome, bet apie patį instrumentą, natūraliuosius skaičus, nieko taip ir nepasakėme. Kombinatorikoje dažnai aibių elementus užkoduoja, t.y. abipus vienareikšmiai priskiria kažkokius kitus simbolius. Tada kodai atlieka „skaičiuotojo" vaidmenį. Kodėl ne, jei taip patogiau, bet prieš tai reikia gerai žinoti šių kodų savybes.

Skaičiavimo proceso, kai aibės galia n yra didelė, pabaigti nepavyks. Tada pasitelksime intuiciją ir bandysime atspėti: „su visais natūraliaisiais skaičiais n teisinga formulė...". Čia slypi nemaža galimybė suklysti. Klaidos nepadarysime, jei sugebėsime tą formulę įrodyti. Dažnai gelbsti formalus patikrinimas, besiremiantis *matematinės indukcijos principu*. Jis kyla iš paties natūraliųjų skaičių aibės aksiominio apibrėžimo. L. Kronekeriui[7] priskiriamas toks pasakymas: „Dievas sukūrė natūraliuosius skaičius, visa kita yra žmogaus darbas". Bet ir juos apibrėždamas žmogus įvedė savo tvarką. Natūraliųjų skaičių aksiomatika priklauso matematinei logikai, bet vis tiek ją verta čia prisiminti. Pateiksime bene populiariausią Dž. Peano[8] 1889 m. įvestą aksiomų sistemą. Beje, literatūroje aksiomos formuluojamos gana įvairiai, nors ekvivalenčiai. Pavyzdžiui, ir pats Dž. Peano antrame sistemos variante nulį priskyrė natūraliųjų skaičių aibei, nors anksčiau pradėdavo nuo vieneto.

Tegul, kaip įprasta matematinėje logikoje, simboliai $\Rightarrow$, $\forall$, $\wedge$ ir $\vee$ reiškia *išplaukia*, *kiekvienam*, *ir* bei *arba* atitinkamai.

Apibrėžimas. *Natūraliaisiais skaičiais vadiname aibės* $\mathbb{N}$ *elementus, jeigu*

(i) $1 \in \mathbb{N}$;

ir joje yra apibrėžta tokia funkcija $a \mapsto a'$, $a, a' \in \mathbb{N}$, *kad*

(ii) $\{a \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \{a' \neq 1\}$;

(iii) $\{a \in \mathbb{N}\} \wedge \{b \in \mathbb{N}\} \wedge \{a' = b'\} \Rightarrow \{a = b\}$;

(iv) $\{M \subset \mathbb{N}\} \wedge \{1 \in M\} \wedge \big\{\{a \in M\} \Rightarrow \{a' \in M\}\big\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$.

Galime įsivaizduoti, kad apibrėžime minima funkcija pasako, kad a' *eina po* a. Aksioma (ii) reikalauja, kad 1 *neitų po jokio kito elemento*, o (iii) – *elementas gali eiti tik po vieno.* Mums svarbiausias yra paskutinis reikalavimas. Perfrazuokime jį dar kartą.

Indukcijos aksioma. *Jei natūraliųjų skaičių aibės poaibyje* M *yra vienetas ir kartu su kiekvienu* $n \in \mathbb{N}$ *poaibyje* M *yra ir po jo einantis* n', *tai* $M = \mathbb{N}$.

Indukcijos aksiomą pirmąkart 1888 m. suformulavo J. Dedekindas[9], nors panašiu tvirtinimu naudojosi ir B. Paskalis.

Aibės $\mathbb{N}$ elementus $1, 1', (1')'$... naujai pažymėkime 1, 2, 3,... Sąryšį, „kas po ko eina" galime žymėti $1 < 2 < 3 < \cdots$.

---

[7] Leopold Kronecker (1823–1891) – vokiečių matematikas.

[8] Giuseppe Peano (1858–1932) – italų matematikas.

[9] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) – vokiečių matematikas.

Žvilgtelėkime, kaip aibėje $\mathbb{N}$ galėtume įvesti sudėties operaciją. Turėdami $a, a' \in \mathbb{N}$, apibrėžkime
$$a + 1 : = a';$$
toliau, tarę, kad $a + n$ su $n \in \mathbb{N}$ yra jau apibrėžtas skaičius, įvedame
$$a + n + 1 : = a + n' := (a + n)'.$$
Aibė M, sudaryta iš skaičių n, kuriuos jau mokame pridėti prie a, tenkina abu indukcijos aksiomos reikalavimus. Vadinasi, M sutampa su visa natūraliųjų skaičių aibe. Kitaip tariant, suma $a + n$ yra apibrėžta visiems $n \in \mathbb{N}$.

Tęsiant gaunama algebrinė struktūra $\mathbb{N}$, t.y. aibė su joje apibrėžtomis algebrinėmis sudėties ir daugybos operacijomis. Aksiomos, žinoma, užsimiršta ir natūraliuosius skaičius naudojame, kaip *Dievo duotus*.

Indukcijos principas dažniausiai bus taikomas tokia forma:

Tegu $P(n)$ yra kažkoks teiginys apie natūralųjį skaičių n. Tarkime, kad $P(1)$ yra teisingas, ir kiekvienam n iš prielaidos, kad $P(n)$ yra teisingas, sugebame išvesti, kad $P(n + 1)$ irgi yra teisingas. Darome išvadą, kad teiginys $P(n)$ yra teisingas visiems $n \in \mathbb{N}$.

Kitas galimas variantas:

Tarkime, kad $P(n_0)$ yra teisinga su $n_0 \in \mathbb{N}$ ir kiekvienam $n \geq n_0$ iš prielaidos, kad $P(n)$ yra teisingas sugebame išvesti, kad $P(n + 1)$ irgi yra teisingas. Darome išvadą, kad teiginys $P(n)$ yra teisingas visiems $n \geq n_0$.

Klaidos nebus, nes skaičius $n \geq n_0$ galime pernumeruoti pradėdami vienetu ir pritaikyti ankstesnį principą.

Indukcijos aksiomoje teiginys $P(n)$ išvedamas iš $P(n-1)$. Tai nėra būtina, galima jį išvesti iš didesnio skaičiaus prielaidų $P(1), P(2), \ldots, P(n - 1)$. Suformuluosime dar vieną indukcijos aksiomos variantą.

Indukcijos aksioma*. *Tegul $1 \in M \subset \mathbb{N}$ ir bet kokiam $n \in \mathbb{N}$ iš prielaidos $\{\forall m < n\ , m \in M\}$ išplaukia $\{n \in M\}$. Tada $M = \mathbb{N}$.*

Atrodytų, kad čia naudojama sąlyga yra platesnė, nes vietoje pirmojo varianto sąlygos $n-1 \in M$ dabar turime daugiau informacijos, net apie visus $m < n$. Iš tiesų, antroji aksiomos formuluotė nėra bendresnė. Pakakanka apibrėžti teiginį
$$P(n - 1) = \{\forall m < n,\ m \in M\}.$$
Dabar turime tik prielaidą $P(n - 1)$ ir tik iš jos išvedame $P(n)$.

Matematinė indukcija yra *rekursyviųjų apibrėžimų* pagrindas. Visi yra girdėję apie aritmetinę progresiją $\{a_n\}$, $n \geq 1$, apibrėžiamą pirmuoju nariu $a_1 \in \mathbb{R}$, skirtumu $d \in \mathbb{R}$ ir formule $a_{n+1} = a_n + d$, kai $n \geq 1$. Iš tiesų, čia jau panaudota indukcija, nes apibrėžiant a_{n+1} jau tariama, kad prieš tai buvęs sekos narys a_n yra apibrėžtas.

Panašiai, įvesdami sumas

$$s_n\colon = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

naudojame daugtaškį. Jis sutrumpina indukcinį apibrėžimą, kuris susidėtų iš dviejų etapų:

$$s_1\colon = a_1, \qquad s_n\colon = s_{n-1} + a_n.$$

Panaudojant indukcijos principą apibrėžiama n aibių Dekarto sandauga

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\colon = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n,$$

kai $n \in \mathbb{N}$ yra bet koks. Toliau panašius apibrėžimus įvesime be atskiro komentaro.

Kaip matematinę indukciją panaudojame spręsdami uždavinius? Pradžioje išveskime formulę aritmetinės progresijos n-ojo nario formulę $a_n = a_1 + (n-1)d$. Kai $n = 1$, tai akivaizdu. Tarę, kad $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$ yra teisinga, tikriname:

$$a_n = a_{n-1} + d = \big(a_1 + (n-2)d\big) + d = a_1 + (n-1)d.$$

Remdamiesi indukcijos aksioma darome išvadą: formulė yra teisinga su visais $n \in \mathbb{N}$.

Imkime kitą pavyzdį. Įrodinėjant teiginį, kad $n^2 - 5n \geq -4$ kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geq 4$, vargu ar tikslinga taikyti indukciją. Tačiau tikrinant, kad

$$n^3 - 6n^2 + 9n \geq 4$$

kiekvienam $n \geq 4$, pritaikyti indukcijos principą, manyčiau, yra tikslinga. Iš tiesų, kai $n = 4$, nelygybė virsta lygybe. Tarę, kad nelygybė jau įrodyta dėl n, skaičiuojame

$$(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 9(n+1) = (n^3 - 6n^2 + 9n) + 3n(n-3) + 1 \geq 4,$$

nes kvadratinis trinaris yra teigiamas, jei $n \geq 4$. Tuo baigiame įrodymą.

Išnagrinėkime porą sudėtingesnių uždavinių.

1 uždavinys. *Įrodykime, kad n plokštumos tiesių, tarp kurių nėra dviejų lygiagrečių ir bet kurios trys iš jų nesikerta viename taške, dalija plokštumą į*

$$p_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

sričių.

Sprendimas. Brėždami tieses, randame $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$,.. ir greitai įsitikiname, kad ši seka nėra nei aritmetinė, nei geometrinė progresija. Jei pavyktų susieti du gretimus sekos narius, tai galėtume taikyti indukcijos principą. Pabandykime.

Tarkime, kad jau išvedėme $(n-1)$-ą tiesę ir nustatėme plokštumos sričių skaičių p_{n-1}. Vedame, n tiesę. Keliaukime ja nuo taško, esančio dar iki pirmojo susikirtimo su viena iš išvestųjų tiesių. Pastebėkime, kad vieną sritį naujoji tiesė padalijo į dvi. Keliaudami toliau matome, kad už kiekvieno susikirtimo su tiesėmis esančios sritys irgi dalijamos į dvi. Kadangi n-oji tiesė dalys n-ą sričių, gauname norimą sąryšį

$$p_n = p_{n-1} + n.$$

Kadangi $p_0 = 1$, vadovaudamiesi indukcijos principu matome, kad seka $\{p(n)\}$, $n \geq 0$ yra apibrėžta. Dar kartą pritaikę indukcijos prielaidą, t.y. formulę (1) dėl $n-1$ ir ką tik įrodytą sąryšį, gauname

$$p_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + n = 1 + \frac{n(n+2)}{2}.$$

Vadinasi, p_n formulė yra teisinga su visais $n \geq 0$.

2 uždavinys. *Triušių pora per antrą mėnesį atsivedė naują porelę jauniklių ir vėliau kas mėnesį dar po porelę. Kitos porelės elgėsi taip pat. Pažymėkime F_n - triušių porų skaičių n-ojo mėnesio gale. Įrodykime, kad*

$$F_n = \frac{(\sqrt{5}+1)^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

Sprendimas. Tegul $n \geq 2$. Kadangi per n-ąjį mėnesį prie $(n-1)$-ojo mėnesio gale buvusių triušių porų prisidėjo $(n-2)$-ajame mėnesyje buvusių triušių jaunikliai, tai

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Be to, turime $F_0 = F_1 = 1$. Tarę, kad (2) yra teisinga dėl F_{n-2} ir F_{n-1}, naudodamiesi pastarąja formule skaičiuojame F_n. Trumpumo dėlei įvedę ,,auksinį skaičių" $\alpha \colon = (\sqrt{5}+1)/2$, gauname $\alpha^{-1} = (\sqrt{5}-1)/2$ ir

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\alpha^n(1+\alpha^{-1}) - (-\alpha)^{-n}(1-\alpha)\Big] = \frac{\alpha^{n+1} - (-\alpha)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Vadinasi, (2) yra teisinga visiems $n \geq 0$.

Seka $\{F_n\}$, $n \geq 0$ yra vadinama L. *Fibonačio*[10] vardu.

Grįžkime prie teorinių samprotavimų. Pastebėkime, kad $\mathbb{N}$ apibrėžimas kartu įveda ir *tvarkos sąryšį* šioje aibėje. Sakome, kad $a < b$ (skaitysime *a mažiau už b*), jei *egzistuoja toks* $d \in \mathbb{N}$, *kad* $a + d = b$.

Be Peano galimos ir kitos aksiomų sistemos, apibrėžiančios $\mathbb{N}$. Kai kuriose iš jų randame tokį teiginį.

Archimedo aksioma. *Bet kuriai natūraliųjų skaičių porai a, b galima rasti tokį natūralųjį skaičių n, kad $an > b$.*

Šis teiginys išplaukia iš Peano aksiomų, todėl jį reiktų vadinti teorema, tačiau taip ir liko istoriškai susiklostęs pavadinimas. Panašiai prigijo ir kiti beveik akivaizdūs teiginiai. Mes jų neišvedinėsime.

Mažiausiojo elemento principas. *Kiekvienas netuščias natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi mažiausią elementą.*

Didžiausiojo elemento principas. *Kiekvienas netuščias baigtinis natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi didžiausią elementą.*

Analogiškus teiginius galima suformuluoti ir sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$. Jais remdamiesi, galime apibrėžti realaus skaičiaus x *sveikąją dalį*:

$$[x] \colon = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon \ k \leq x\}$$

ir *lubas*:

$$\lceil x \rceil \colon = \min\{k \in \mathbb{Z} \colon \ k \geq x\}.$$

UŽDUOTYS:

1. Aibėje $\mathbb{N}$ aksiominiu būdu įveskite daugybą. Tada išveskite sudėties ir daugybos asociatyvumo, komutatyvumo ir jų distributyvumo savybes.

[10] Leonardo Pisano Fibonacci (1170–1250) – italų matematikas.

2. Išveskite mažiausiojo ir didžiausiojo elementų principus iš Peano aksiomų.
3. Visiems $n \in \mathbb{N}$ įrodykite formules :
   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
   c) $(\alpha - \beta)\big(\alpha^{n-1}\beta^0 + \alpha^{n-2}\beta^1 + \cdots + \beta^{n-1}\big) = \alpha^n - \beta^n, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$
5. Išveskite šias Fibonačio skaičių savybes:
   a) $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$;
   b) $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n}$;
   c) $F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n+1}$;
   d) $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

0.2.3 Dirichlė dėžučių principas

Paradoksas, bet tiriant sudėtingas situacijas, kai kada pakanka paprastų ir beveik akivaizdžių teiginių. Vieną iš tokių yra suformulavęs L. Dirichlė[11].

Dirichlė principas. *Jei n rutulių yra sudėti į $m < n$ dėžučių, tai bent vienoje dėžutėje yra 2 ar daugiau rutulių.*

Nevisada šio principo pritaikymas yra toks akivaizdus. Išnagrinėkime elementariosios skaičių teorijos teiginį. Posakį *a dalija b* trumpumo dėlei žymėkime $a|b$.

1 pavyzdys. *Bet kokiame $(m+1)$-o elemento poaibyje, išrinktame iš $\{1, 2, \ldots, 2m\}$ yra bent du vienas kitą dalijantys skaičiai.*

Įrodymas. Tegul A yra išrinktasis poaibis ir $|A| = m + 1$. Kiekvieną $a \in A$ galime išreikšti $a = 2^k d$, čia $k \geq 0$ ir d yra nelyginis. Todėl $d \in \{1, 3, \ldots, 2m-1\}$. Yra tik m galimybių šiai nelyginei skaičiaus a daliai. Vadinasi, pagal Dirichlė principą bent du aibės A skaičiai turės tą pačią nelyginę dalį. Tegu $b = 2^l d \in A$, $l \geq 0$, yra antrasis skaičius. Jei $k \leq l$, tai $a|b$, o atveju $k \geq l$, – skaičius $b|a$. Įrodyta. $\diamond$

Matome, kad ,,dėžutės" turi alegorinę prasmę. Nelyginės dalies priskyrimas yra įsivaizduojamas ,,dėjimu į dėžutę". Savarankiškai įsitikinkite, kad pavyzdyje minimas poaibis turi bent du tarpusavyje pirminius skaičius. Kokios ,,dėžutės" bus dabar?

Dar labiau netikėtas yra toks pavyzdys.

[11] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – vokiečių matematikas.

2 pavyzdys. *Tegu $a_1, \ldots, a_m$ seka, gal būt, pasikartojančių natūraliųjų skaičių. Joje egzistuoja gretimų narių posekis $a_k, \ldots, a_l$, $1 \leq k < l \leq m$, toks, kad suma*

$$a_k + \cdots + a_l$$

yra m kartotinis.

Įrodymas. Imkime aibes

$$N := \{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_m\}, \qquad R = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

ir apibrėžkime funkciją $f \colon N \to \mathbb{R}$, skaičiui $a \in N$ priskirdami jo dalybos iš m liekaną. Kadangi $|N| = m + 1 > m = |R|$, tai pagal Dirichlė principą aibėje N egzistuoja dvi sumos $a_1 + \cdots + a_{k-1}$ ir $a_1 + \cdots + a_l$ su ta pačia dalybos iš m liekana. Jei čia $1 \leq k < l \leq m$, tai šių sumų skirtumas $a_k + \cdots + a_l$ dalysis iš m. $\diamond$

Kaip matėme, yra labai patogu panaudoti atvaizdžius. Performuluodami Dirichlė principą jiems, patį teiginį šiek tiek sustiprinsime.

3 teorema. *Tegu M, N yra aibės, $|M| = m < n = |N|$, o $f \colon N \to M$ – atvaizdis. Tada egzistuoja $b \in M$ toks, kad*

$$|f^{-1}(b)| \geq \lceil n/m \rceil.$$

Čia $\lceil x \rceil$ – anksčiau apibrėžtos skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ lubos.

Įrodymas. Pastebėkime, kad iš ankstesnio dėžučių principo išplauktų tik nelygybė $|f^{-1}(b)| \geq 2$.

Jei $|f^{-1}(b)| < n/m$ kiekvienam $b \in N$, tai pasinaudoję 2 teorema, gautume prieštarą:

$$n = \sum_b |f^{-1}(b)| < \frac{n}{m} \sum_b 1 = \frac{n}{m} m = n.$$

Taigi bent vienam b turi būti $|f^{-1}(b)| \geq \frac{n}{m}$. Kadangi $|f^{-1}(b)|$ yra natūralusis skaičius, tai teoremos teiginys išplaukia iš skaičiaus lubų apibrėžimo. $\diamond$

Pastarosios teoremos pritaikymą iliustruosime pavyzdžiu. Pradedančiajam programuotojui dažnai pasiūloma iš baigtinės skirtingų realiųjų skaičių sekos išrinkti monotonišką posekį. Kaip galėtume įvertinti tokio posekio ilgį?

4 teorema. *Tegu* $m, n \in \mathbb{N}$ *ir* $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ *bet kokia skirtingų realiųjų skaičių seka iš* $(mn+1)$*-o nario. Joje egzistuoja monotoniškai didėjantis* $(m+1)$*-o nario posekis arba monotoniškai mažėjantis* $(n+1)$*-o nario posekis. Galimi ir abu variantai.*

Įrodymas. Dabar Dirichlė principo taikymo galimybė vargu ar įžiūrima. Reikia įrodyti posekių

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1} \leq mn+1$$

arba

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1} \leq mn+1$$

egzistavimą.

Imkime bet kurį sekos narį a_i, $1 \leq i \leq mn+1$. Tegu t_i – *ilgiausio* didėjančio posekio, prasidedančio a_i, ilgis. Jei kažkokiam $t_i \geq m+1$, teoremos teiginys yra teisingas.

Tegu dabar $t_i \leq m$ visiems $1 \leq i \leq mn+1$. Atvaizdžiui $f\colon a_i \mapsto t_i$, vaizduojančiam aibę $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}\}$ aibėje $M := \{1, 2, \ldots, m\}$, galime pritaikyti šio skyrelio 3 teoremą. Vadinasi, egsistuoja toks $s \in M$, kad $f(a_i) = s$ dėl

$$\left\lceil \frac{mn+1}{m} \right\rceil = n+1$$

skaičių $a_i \in A$. Nekeisdami jų išsidėstymo tvarkos sekoje, sužymėkime

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}, \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1} \leq mn+1.$$

Imkime du gretimus šio posekio narius a_{j_k} ir $a_{j_{k+1}}$. Jei $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, tai pradėdami a_{j_k}-uoju ir prijungdami didėjantį posekį, prasidedantį nuo $a_{j_{k+1}}$ ir turintį s narių, gautume didėjantį posekį, prasidedantį a_{j_k}, jau iš $(s+1)$-o nario. Bet tai prieštara. Vadinasi, $a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$ su bet kokais $1 \leq k \leq n+1$. Taigi, išrinkome $(n+1)$-o elemento mažėjantį posekį.

Teorema įrodyta. ◇

0.2.4 Dauginimo ir ,,skaičiuok dukart" taisyklės

Kaip suskaičiuoti žinomos baigtinės aibės elementus? Pirma ateinanti į galvą mintis: ,,skaldyk ir valdyk". Tai išreiškiama tokiu akivaizdžiu teiginiu, jau pritaikytu 3 teoremos įrodyme.

5 teorema. *Jei* $|A| < \infty$ *ir*

$$A = \cup_{i=1}^{k} A_i$$

yra jos skaidinys, tai

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Įrodymas. Akivaizdu. $\diamond$

Nesunku suvokti ir vadinamą *dauginimo taisyklę*.

6 teorema. *Jei* $A_1, A_2, \ldots A_k$ *yra baigtinės aibės, čia* k *– bet koks natūralusis skaičius, tai*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_k|.$$

Įrodymas. Atvejis $k = 1$ yra akivaizdus. Jei $k = 2$, pakanka visas sutvarkytąsias poras $(a, b) \in A_1 \times A_2$ surašyti į lentelę – matricą. Ji turės $|A_1|$ eilučių ir $|A_2|$ stulpelių ir todėl – $|A_1||A_2|$ elementų.

Jei lygybė įrodyta dėl mažesnio nei $k \geq 2$ skaičiaus aibių, pažymėję $B = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}$, iš indukcijos prielaidos gauname

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |B \times A_k| = |B||A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_{k-1}||A_k|.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Daug kalbėjome apie atvaizdžius. Suskaičiuokime juos.

7 teorema. *Jei* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *ir* $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$*, tai atvaizdžių aibės*

$$\mathcal{F}(n, m) \colon = \{f \colon X \to Y\}$$

galia $|\mathcal{F}(n, m)| = m^n$.

Įrodymas. Kiekvieną funkciją $f \in \mathcal{F} \colon = \mathcal{F}(n, m)$ galime apibrėžti vektoriumi

$$f \mapsto (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in Y \times Y \times \cdots \times Y = Y^n.$$

Ši atitiktis $\mathcal{F} \leftrightarrow Y^n$ yra abipus vienareikšmė, tad pagal 6 teoremą

$$|\mathcal{F}| = |Y^n| = m^n.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Įrodyme panaudotas funkcijos *kodavimas* vektoriumi. Tai labai vaisinga idėja. Pateiksime dar vieną pavyzdį.

8 teorema. *Jei A yra n aibė, tai visų jos poaibių, įskaitant ir tuščiąjį, aibės galia lygi 2^n.*

Įrodymas. Tegu

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \supset B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n.$$

Poaibiui B sudarykime kodą – n ilgio vektorių $(0, \dots 1, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, kuriame vienetai įrašyti i_1-oje, i_2-oje, ..., i_k-oje pozicijose, o kitos vietos yra užpildytos nuliais. Kadangi kodas priskirtas abipus vienareikšmiai, tai poaibių aibės galia lygi kodų aibės galiai. Pastaroji, iš tiesų, buvo skaičiuota 7 teoremoje, kai $m = 2$. Taigi gauname, $|\mathcal{F}| = 2^n$.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Sunkiau ieškoti sąryšio $S \subset A \times B$ galios. Formaliai ją galima išreikšti dvilype suma, sudedant tiek vienetų, kiek elementų yra poaibyje S, t.y.

$$|S| = \sum_{(a,b) \in S} 1.$$

Čia sumuojama pagal tokius $a \in A$ ir $b \in B$, kuriems $(a, b) \in S$. Tarkime, kad fiksavę pirmąjį poros narį $a \in A$, mes mokame suskaičiuoti porų iš S skaičių r_a su tokiu a. Tada

$$r_a = \sum_{\substack{b \in B \\ (a,b) \in S}} 1.$$

Vadinasi,

$$|S| = \sum_{a \in A} r_a = \sum_{a \in A} \sum_{\substack{b \in B \\ (a,b) \in S}} 1.$$

Tokiu būdu dvilypę sumą išreiškėme kartotine. Panašiai, jei

$$q_b : = \sum_{\substack{a \in A \\ (a,b) \in S}} 1$$

yra porų, turinčių fiksuotą antrąjų narį b ir priklausančių S, skaičius, tai

$$|S| = \sum_{b \in B} q_b = \sum_{b \in B} \sum_{\substack{a \in A \\ (a,b) \in S}} 1.$$

Sulyginę abi $|S|$ išraiškas, gauname labai svarbų *skaičiuok dukart* principą:

$$\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in B\\(a,b)\in S}} 1 = \sum_{b\in B}\sum_{\substack{a\in A\\(a,b)\in S}} 1.$$

Iš tiesų, tai tik sumavimo tvarkos pakeitimas kartotinėje sumoje, bet jis nepakeičiamas kombinatorikoje. Ir Jūs, perskaičiuodami pinigus, antrą kartą skaičiuokite juos pagal kitokią sistemą. Tada neapsiriksite!

1 pavyzdys. *Kiek yra taškų, turinčių natūralias koordinates ir esančių uždarame daugiakampyje D, apribotame tiesių*

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = 2x + 3, \qquad y = -x + 6\,?$$

Sprendimas. Reikia apskaičiuoti sumą

$$s\colon = \sum_{\substack{(x,y)\in D\\ x,y\in\mathbb{N}}} 1.$$

Nubraižome paveikslą:

Jame aiškiai matosi, kad tokie taškai yra horizontaliose atkarpose. Kai $y = 1$, turime pirmąją iš jų. Ten yra 5 taškai. Panašiai, 4 taškai – antroje, 3 – trečioje, 2 – ketvirtoje ir 1 – penktoje. Iš viso yra 15 taškų. Nenurodydami, kad $x, y \in \mathbb{N}$, formaliai tą patį galėjome gauti tokiu būdu:

$$s = \sum_{1\le y\le 5}\ \sum_{1\le x\le 6-y} 1 = \sum_{1\le y\le 5}(6-y) = 6\cdot 5 - \frac{1+5}{2}\,5 = 30 - 15 = 15.$$

Pakeliui, skaičiuodami y-ų sumą, pasinaudojome aritmetinės progresijos sumos formule.

Sukeiskite sumavimo tvarką šiuose skaičiavimuose ir patikrinkite rezultatą. Įsitikinkite, kad taip skaičiuodami, Jūs pirmiau surandate taškų, esančių vertikaliose atkarpose, skaičius.

Išmokime sukeisti sumavimo tvarką ir bendresnėse formulėse.

2 pavyzdys. Tegul a_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$, yra bet kokie skaičiai, tada

$$\sum_{j>i\geq 1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Sprendimas. Pakanka suvokti, kad dvilypė sumoje indeksai (i, j) perbėga plokštumos taškus su natūraliosiomis koordinatėmis, esančius pirmajame ketvirtyje virš pusiaukampinės ir nepriklausančius jai. $\diamond$

3 pavyzdys. Tegu $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N^2 = N \times N$, o

$$S = \{(d, m) \colon \ d|m, \ d, m \in N\}$$

yra dalumo sąryšis. Perskaičiuoti dukart šios aibės elementus.

Sprendimas. Dabar

$$\sum_{\substack{d\leq n\\ d|m}} 1 =: d(m)$$

yra skaičiaus m skirtingų natūraliųjų daliklių kiekis. O

$$\sum_{\substack{m\leq n\\ d|m}} 1 = \left[\frac{n}{d}\right]$$

– skaičiaus d kartotinių, neviršijančių n, kiekis. Vadinasi,

$$\sum_{m\leq n} d(m) = \sum_{d\leq n} \left[\frac{n}{d}\right].$$

Toliau iš šios įdomios formulės gautume reikšmių $d(m)$, $1 \leq m \leq n$ aritmetinio vidurkio didėjimo eilę, kai $n \to \infty$. $\diamond$

Šis ir aukščiau minėti principai yra taikomi ne tik skaičių teorijoje. Ir mes praplėskime savo objektų lauką grafais.

UŽDUOTYS:

1. Keliais būdais galima padalyti 10 obuolių ir 20 kriaušių dviems studentams?

2. Dvilypę sumą

$$\sum_{i+j\leq n} a_{ij}$$

užrašykite kartotine ir sukeiskite sumavimo tvarką.

0.3 Pirmosios žinios apie grafus

0.3.1 Pagrindinės sąvokos

Neabejojame, kad kiekvienas skaitytojas yra jau girdėjęs grafo sąvoką ir intuityviai jaučia, kas tai yra. Gyvenime su jais susiduriama važinėjant miesto gatvėmis, kurios susikerta ir suformuoja sankryžas. Kiekviena elektros grandinė turi laidininkų raizgalyną ir jų jungimo mazgus. Per chemijos pamokas matytose medžiagų molekulių formulėse atomai jungiami su kitais linijomis, atsižvelgiant į atomų valentingumą. Mieste gatvė suteikia galimybę nuvažiuoti nuo vienos sankryžos iki kitos, elektros grandinėje laidinininkas skirtas srovei tekėti, atomų jungtis išreiškia jų tarpusavio sąryšį. Visada jungiančios linijos išreiškia tam tikrą elementų tarpusavio sąryšį. Nevisada jie matomi, juos reikia įsivaizduoti ar nustatyti.

Pastaraisiais metais ypač pradėta domėtis pokalbiais, vykstančiais tarp telefono kompanijos abonentų. Pavaizduokime juos plokštumos taškais. Jei du klientai kalbėjosi tarpusavyje paros bėgyje, tai atitinkamų taškų porą sujunkime linija. Gausime milžinišką raizginį, vadinamą pokalbių grafu, kurio supratimas leidžia tobulinti ryšių paslaugas. Mūsų pamėgtame Internete kiekvieną bylą taip pat galime įsivaizduoti tašku. Jei iš jos vienu kompiuterio pelytės klaptelėjimu pasiekiama kita, tai tokius taškus sujungę linija, gauname Interneto grafą. Šio chaotiškai besiformuojančio objekto tyrimai dar tik pradedami. Nuo pirmųjų L.Eulerio grafų savybių pastebėjimų praėjo beveik trys šimtai metų, tačiau ir šiandien grafų teorija yra viena iš sparčiausiai besiplėtojančių matematikos šakų. Mes panagrinėsime tik kai kuriuos klasikinius uždavinius. Keliuose skyreliuose demonstruosime matematinės indukcijos ir kitų jau išnagrinėtų principų taikymo galimybes įrodant paprasčiausius grafų teorijos teiginius. Sunkesnės temos bus gvildenamos skyriaus pabaigoje.

Pradėkime nuo formalesnių apibrėžimų. Tarkime, kad V yra netuščia aibė. Galime sudaryti įvairias poras (u,v) su $u,v\in V$. Jei nekreipiame dėmesio į elementų tvarką poroje t.y. susitariame, kad $(u,v)=(v,u)$, porą vadiname *nesutvarkytąja*. Čia u ir v yra skirtingi elementai. Tais atvejais, kai į poras, rinkinius ar kitur imsime pasikartojančius elementus, būtinai pasakysime papildomai. Galime apibrėžti įvairias nesutvarkytųjų porų aibes. Pavyzdžiui, skaičių aibės $\{1, 2, 3\}$ nesutvarkytųjų porų aibė galėtų būtų tokia: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Apibrėžimas. *Grafas yra aibių pora $G = (V, E)$, čia V – netuščia aibė, o E – kažkokia jos nesutvarkytųjų porų aibė.*

Taip pat patogumo dėlei susitarkime, kad poros (v, v) aibėje E nebus.

Toliau V vadinama *viršūnių aibe*, o E – *briaunų aibe*. Trumpindami briaunas žymime $e := (u, v) =: uv = vu \in E$, čia $u, v \in V$, ir sakome, kad u (arba v) yra *briaunos e galas*. Vartojant mokslinę terminiją sakoma, kad viršūnė u yra *incidenti* briaunai e ir atvirkščiai, – briauna e yra *incidenti viršūnei* u.

Viršūnes, turinčias bendrą briauną, vadinkime *gretimosiomis*, panašiai, briaunas, turinčias bendrą viršūnę, – *gretimosiomis briaunomis*. Viršūnės $v \in V$ *laipsniu* vadinamas jai incidenčių briaunų skaičius ir žymimas $\delta(v)$. Nulinio laipsnio viršūnes vadiname *izoliuotomis*, o pirmojo laipsnio – *grafo lapais*. Chemijos pamokose braižydavome molekulių grafus su atomais jų viršūnėse. Tada vietoje laipsnio vartodavome *valentingumo* sąvoką.

Dydžiai

$$\Delta(G) :\ = \max\{\delta(v) :\ v \in V\}, \qquad \delta(G) :\ = \min\{\delta(v) :\ v \in V\}$$

vadinami *maksimaliuoju* ir *minimaliuoju* grafo G laipsniais.

Grafo $G = (V, E)$ *eile* vadinsime viršūnių aibės galią $|V|$. Ateityje apsiribosime tik baigtiniais grafais, todėl reikalavimo $n :\ = |V| < \infty$ nebeminėsime. Skaičius $m :\ = |E|$ vadinamas grafo *didumu*. Kai $E = \emptyset$, tai grafas yra *tuščiasis*, o jei jame yra visos įmanomos briaunos – *pilnuoju*. Paprastai pilnasis n eilės grafas žymimas K_n.

Viršūnės ir briaunos incidentumas natūraliai apibrėžia sąryšį Dekarto sandaugoje $V \times E$. Pažymėkime jį

$$S = \{(v, e) :\ v\, incidenti\, e,\ v \in V, e \in E\}$$

ir pritaikykime skaičiuok dukart principą.

9 teorema. *Kiekvienam grafui yra teisinga lygybė*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Įrodymas. Kadangi fiksuota briauna turi tik dvi viršūnes, tai

$$|S| = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{v \in V \\ v\, inc.\, e}} 1 = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

Fiksuota viršūnė v turi $\delta(v)$ incidenčių jai briaunų, todėl

$$|S| = \sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ v\, inc.\, e}} 1 = \sum_{v \in V} \delta(v).$$

Sulyginę gauname teiginį, kurį jau žinojo L. Euleris. ◇

Išvada. *Grafe yra lyginis nelyginio laipsnio viršūnių skaičius.*

Viršūnes $u, v, \dots \in V$ pavaizduokime plokštumoje skirtingais taškais, o briaunas $e = uv, \dots \in E$ – atitinkamus taškus jungiančiomis linijomis. Gauname grafo $G = (V, E)$ *realizaciją plokštumoje* arba *įdėtį į plokštumą*. Neabejoju, kad tą patį grafą skirtingi studentai įdės į plokštumą nevienodai. Nepasitikėkime vaizdu, o formaliai susitarkime, kad du grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ yra *izomorfiški*, jeigu $|V| = |V'| = n$ ir yra tokios viršūnių numeracijos $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ bei $V' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$, kad $u_i u_j \in E$ tada ir tik tada, jei $u'_i u'_j \in E'$ visiems $i, j \le n$. Taigi, izomorfiškų grafų atveju mes apibrėžiame abipus vienareikšmį atvaizdį $\pi\colon V \to V'$, $\pi(u_i) = u'_i$, $1 \le i \le n$, išlaikantį viršūnių gretimumą. Susitarkime izomorfiškus grafus laikyti lygiais.

Paveiksle pavaizduoti du lygūs grafai, nors tą įžiūrėti ir nėra lengva. Įrodykite savarankiškai sunumeruodami atitinkamai abiejų grafų viršūnes!

Jei $V \subset V'$ ir $E \subset E'$, tai grafas $G = (V, E)$ yra $G' = (V', E')$ *pografiu*. Patys paprasčiausi pografiai yra keliai, trąsos, takai. *Keliu* grafe vadiname viršūnių ir briaunų seką

$$u_1 e_1 u_2 e_2 u_3 \dots e_{k-1} u_k e_k u_{k+1},$$

čia $e_j = u_j u_{j+1}$, $1 \leq j \leq k$. Jei kelyje briaunos nepasikartoja, jį vadiname *trąsa*, o jei nepasikartoja viršūnės – *taku*. Nurodant kelią, trąsą arba taką, jei nekyla dviprasmybių, galima nurodyti tik seką briaunų arba viršūnių, kurias reikia pereiti įsivaizduojamame brėžinyje. Jei pirmoji ir paskutinė kelio viršūnės sutampa, tai jį vadiname *uždaru* keliu. Uždara trąsa primena *grandinę*, todėl taip ją ir vadinkime, o uždarą taką vadinkime *ciklu*. Kelio, trąsos arba tako *ilgiu* vadiname jo briaunų skaičių.

Grafas vadinamas *jungiuoju*, jeigu bet kurią porą viršūnių jungia kelias. Žinoma, jei yra kelias, tai galime rasti ir šias viršūnes jungiantį taką.

Apibrėžkime keletą operacijų su grafais. Grafo $G = (V, E)$ *papildiniu* vadinamas grafas $\overline{G} = (V, \overline{E})$, čia $\overline{E}$ yra E papildinys, t.y. $e = uv \in \overline{E}$ tada ir tik tada, jei $e \notin E$, čia, kaip susitarėme, $u \neq v$.

Grafų $G = (V, E)$ ir $G = (V', E')$ *sąjunga* apibrėžiama, jei $V \cap V' = \emptyset$. Jų sąjunga yra grafas

$$G \cup G' :\ = (V \cup V', E \cup E').$$

Taigi, čia viršūnių ir briaunų aibių sąjungos yra tiesioginės. Jei grafų sąjungoje $G \cup G'$ papildomai kiekvieną viršūnę iš V sujungsime su kiekviena viršūne iš V', gausime *grafų sumą*, žymimą $G + G'$. Formaliai kalbant, $G + G' = (V \cup V', E \cup E' \cup F)$, čia $F = \{uu' \colon\ u \in V, u' \in V'\}$.

Paveiksle pavaizduota antros eilės grafo ir trečios eilės grafo sąjunga bei jų suma.

Kadangi viena viršūnė, tegul x, taip pat sudaro grafą, tai žymuo $x + G$, jei $x \notin V$, reikštų, kad iš viršūnės x yra papildomai išvestos briaunos į visas aibės V viršūnes.

10 teorema. *Kiekvienas grafas yra jungių pografių sąjunga.*

Įrodymas. Dvi viršūnes u ir v susitarkime vadinti ekvivalenčiomis, jeigu jas jungia kelias. Iš tiesų, tai yra ekvivalentumo sąryšis. Vadinasi, pagal 1 teoremą, yra baigtinis viršūnių aibės skaidinys

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k,$$

čia $1 \leq k \leq n$. Tegul $E_j \subset E$ yra visų briaunų, jungiančių viršūnes tik iš V_j, aibė, tai $G_j := (V_j, E_j)$ yra jungus pografis, o

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$$

– jų sąjunga.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Teoremoje gauti jungūs pografiai vadinami grafo *komponentėmis.*

O kaip atimti briauną arba viršūnę iš grafo? Kadangi briaunos be viršūnės grafe nebūna, tai

$$G - e := \{V, E \setminus \{e\}), \qquad G - u = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{e : \ e \textit{ incidenti } u\}).$$

Atimdami briauną iš grafo pašalinome visas briaunas, kurių galas buvo u. Papildomos briaunos e, jei jos nebuvo, įvedimas į grafą G žymimas $G + e$. Griežtai kalbant, tai yra tik patogus veiksmų su grafais žymėjimas, bet ne algebrinės operacijos įprasta to žodžio prasme. Būkime atsargūs, nes $(G + x) - x = G$, bet ne visada $(G - x) + x = G$! Grafo *sutraukimu* atimant briauną $e = uv$ vadinamas veiksmas, kai iš grafo ji atimama ir papildomai sutapatinamos viršūnės u ir v. Jei dėl to atsiranda kartotinės briaunos, jos irgi sutapatinamos. Grafo santrauka žymima $G\backslash e$. Tai pavaizduota paveiksle:

Įvesti veiksmai su grafais yra patogus instrumentas taikant matematinę indukciją. Tiriant grafą $G = (V, E)$ indukcijos parametru galima laikyti jo eilę, didumą ir kitus dydžius. Tada indukcijos prielaida pritaikoma grafuose $G - v$, $G - e$, $G \setminus e$ arba tiesiog jo komponentėse, čia $v \in V$ ir $e \in E$. Tuo įsitikinsime jau kitame skyrelyje.

0.3.2 Eulerio ir Hamiltono grafai

Kaip minėjome įvade, 1736-aisiais metais L.Euleris išnagrinėjo senojo Karaliaučiaus tiltų problemą. Jos formulavimas labai paprastas:

Ar galima pereiti visus septynis tiltus per senojo ir naujojo Priegliaus upes tik po vieną kartą? Tiltų išsidėstymas pavaizduotas paveiksle:

Ieškant tokio maršruto pritrūkstama kantrybės, todėl manyta, kad šis uždavinys yra sunkus. Pavaizdavęs tiltų problemą grafiškai, Euleris iškėlė žymiai bendresnę problemą – nagrinėti trąsas *multigrafuose*.

Apibrėžimas. *Multigrafas yra aibių pora* $G = (V, E)$, *čia* V *– netuščia aibė, o* E *– kažkokia jos nesutvarkytųjų porų multiaibė.*

Visos sąvokos, įvestos grafams, pritaikomos ir multigrafams. Pabrėšime porą specifinių savybių. Kaip minėjome, briaunos vv, $v \in V$, grafe nėra, tačiau multigrafe jos nedraudžiamos. Šios išskirtinės briaunos multigrafe vadinamos *kilpomis*. Jei iš viršūnės yra išvestos kelios kilpos, tai skaičiuojant viršūnės laipsnį kiekvienos kilpos įnašas yra dvigubinamas.

Paveiksle pavaizduotas multigrafas iliustruoja Karaliaučiaus tiltų situaciją.

Didžiosios raidės žymi upių atskirtas sritis, o septynios briaunos – visus tiltus. Ar šiame multigrafe yra toks maršrutas, kad savo pasivaikščiojimą pradėję bet kurioje srityje, mes pereitume visas briaunas lygiai po vieną kartą? Bendriau kalbant, reikia nagrinėti bet kokį $n \geq 2$ eilės jungų multigrafą ir jame ieškoti trąsos, t. y. tokio kelio, kuris apimtų visas briaunas po vieną kartą be pakartojimų. Tokią trąsą vadiname *Eulerio trąsa.* Truputį sunkesnis uždavinys - rasti uždarą Eulerio trąsą, kurią jau esame susitarę vadinti grandine. Dabar, pradėję savo kelionę kažkokioje multigrafo viršūnėje, turime grįžti į tą pačią viršūnę. Grafus (multigrafus), turinčius Eulerio grandinę, vadina *Eulerio grafais (multigrafais).* Viršūnių pasikartojimas trąsoje yra leistinas.

Pradžioje pastebėkime vieną paprastrą multigrafo savybę.

11 teorema. *Jei kiekvienos multigrafo viršūnės v laipsnis $\delta(v) \geq 2$, tai jame yra grandinė.*

Įrodymas. Jei multigrafe yra kilpa arba kartotinė briauna, teiginys yra akivaizdus. Tegul toliau $G = (V, E)$ yra grafas. Nagrinėkime kelius jame. Kelio *ilgiu* vadinkime pereinamų briaunų skaičių. Grafe egzistuoja kažkoks baigtinis, bet didžiausio ilgio kelias.

$$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \dots e_{k-1} v_k e_k v_{k+1},$$

Kadangi $\delta(v_1) \geq 2$, tai $v_1 v_2$ yra kartotinė briauna arba v_1 turi dar vieną gretimąją viršūnę, kuri negali būti šalia kelio, nes tada šį kelią galėtume prailginti dar viena briauna. Vadinasi, yra grandinė $v_1 \dots v_j \dots v_1$ su kažkokiu $2 \leq j \leq k+1$.

Įrodyta. $\diamond$

Šioje teoremoje minima grandinė gali būti trumpa, todėl nebūti Eulerio grandine.

12 teorema. *Jungus multigrafas yra Eulerio tada ir tik tada, jei kiekvienos jo viršūnės laipsnis yra lyginis.*

Įrodymas. Tegul $G = (V, E)$ yra eilės $n \geq 2$ ir didumo $m \geq 2$ Eulerio multigrafas, o $e_1 e_2 \dots e_m$, $e_j \in E$, $1 \leq j \leq m$, – Eulerio grandinė, prasidedanti ir besibaigianti viršūnėje v_1. Todėl $e_1 = v_1 v_2$ ir $e_m = v_m v_1$, o $v_1, \dots, v_m$ – gal būt pasikartojančios viršūnės. Pritaikykime matematinės indukcijos principą ir patikrinkime teiginį: kiekviena viršūnė v_i, $1 \leq i \leq m$ turi įėjimo ir išėjimo briaunas. Iš tiesų, iš viršūnės v_1 išėjome briauna e_1 ir grįžome briauna e_m. Tarę, kad tai įrodyta dėl viršūnės v_{i-1}, iš kurios toliau ėjome briauna e_{i-1} ir patekome į v_i. Kadangi iš pastarosios ėjome briauna e_i, tai teiginys yra teisingas ir dėl i. Kadangi trąsa yra Eulerio, šios briaunų poros viršūnei kartojantis yra skirtingos. Vadinasi, viršūnių laipsniai yra lyginiai.

Atvirkščiai, tegul jungaus multigrafo $G = (V, E)$ viršūnių laipsniai yra lyginiai. Vėl pasiremkime indukcija pagal parametrą $m = |E|$. Jei $m = 1$, tai multigrafo eilė yra 1 ir jis yra sudarytas iš vienos kilpos. Akivaizdu, kad jame yra Eulerio grandinė.

Tegul $m \geq 2$. Kadangi visi viršūnių laipsniai $\delta(v) \geq 2$, tai pagal 11 teoremą multigrafe yra grandinė, kurią pažymėkime C. Įsivaizduokime C kaip briaunų aibę. Tada galime atlikti atimties veiksmą. Jei $G - C$ yra tuščiasis grafas, tai C yra Eulerio grandinė. Priešingu atveju, multigrafo $G - C$ didumas yra mažesnis už m. Visos jo viršūnės turi lyginius laipsnius, bet jis gali būti nejungus. Kiekvienai jo komponentei G_j, $1 \leq j \leq k$, yra pritaikoma indukcinė prielaida, t.y. ji turi Eulerio trąsą, tegul C_j. Komponenčių numeraciją suderinkime su mūsų kelione grandine C. Į $C_1, C_2, \ldots, C_k$ galime patekti iš eilės pradiniame grafe einant grandine C. Dabar Eulerio maršrutą multigrafe G galime įsisvaizduoti: reikia eiti grandine C, kol pasiekiame komponentės G_1 viršūnę, tada pereiti visas komponentės viršūnes naudojantis trąsa C_1, vėl tęsti kelionę gandine C iki kitos komponentės viršūnės, sukti į C_2 ir t.t.

Įrodyta. $\diamond$

Karaliaučiaus tiltų uždavinyje nebuvo reikalavimo perėjus tiltus grįžti į pradinį tašką. Todėl panagrinėkime trąsų egzistavimą multigrafe, nereikalaudami jos uždarumo. Tokios trąsos vadinamos *pusiau Eulerio* trąsomis. Atsakymas yra 12 teoremos išvada.

Išvada. *Jungus multigrafas turi pusiau Eulerio trąsą tada ir tik tada, jei yra dvi nelyginio laipsnio viršūnės arba jų iš viso nėra.*

Įrodymas. Reikia pritaikyti 12 teoremą ir pastebėti, kad esant nelyginio laipsnio viršūnėms, trąsa prasideda vienoje iš jų, o baigiasi kitoje.

Airių matematikas V. Hamiltonas[12] plačiai nagrinėjo takų, apimančių visas grafo viršūnes, egzistavimą. Juos vadiname *Hamiltono* takais. Jei grafe yra toks takas, tai pats grafas yra vadinamas *pusiau Hamiltono* grafu, o jei toks takas yra uždaras, t.y. jis yra ciklas, tai grafas vadinamas *Hamiltono*

[12]Seras William Rowan Hamilton (1805–1865) – airių matematikas.

vardu. Jis sugalvojo įdomią užduotį surasti Hamiltono ciklą šiame paveiksle pavaizduotame dodekaedro grafe:

Briaunų gausa grafe tik palengvina tokių takų ieškojimą, todėl nagrinėti multigrafus nėra didelės prasmės. Išvedant papildomą kiekį briaunų visada grafą galima paversti Hamiltono.

Nežiūrint pusantro šimto metų matematikų pastangų iki šiol mes nežinome būtinų ir pakankamų sąlygų, prie kurių grafas yra Hamiltono. Čia pateiksime bene žinomiausią O. Ore[13] teoremą.

Ore teorema. *Eilės $n \geq 3$ grafas $G = (V, E)$ yra Hamiltono, jei kiekvienai porai negretimų viršūnių $u, v \in V$ jų laipsnių suma*

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n.$$

Įrodymas. Tegul teoremos sąlyga yra patenkinta, bet grafas nėra Hamiltono. Veskime grafe papildomai briaunų, bet pastebėję, kad dar vienos briaunos išvedimas padarytų jį Hamiltono grafu, sustokime. Taigi, papildytasis grafas yra pusiau Hamiltono, o teoremos sąlyga jam juo labiau galioja. Turime atvirą taką

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n,$$

kuriame v_1 ir v_n nėra gretimos. Kadangi

$$\delta(v_1) + \delta(v_n) \geq n \geq 3,$$

bendras viršūnių v_1 ir v_n gretimų viršūnių skaičius yra didelis. Taip būti negalėtų, jei v_1 kaimyninės viršūnės turėtų tik mažus indeksus, o v_n – didelius. Iš tiesų, jei v_j yra gretima v_1 ir turi didžiausią numerį, tai galime įsivaizduoti,

[13] Oystein Ore (1899–1968) – norvegų matematikas

kad briaunos $v_1v_i \in E$ ir $v_lv_n \in E$, kai $2 \le i \le j$ ir $j < l \le n$. Jei jų nebuvo pradiniame grafe, tai jos buvo išvestos papildant grafą. Bet ir dabar bendras viršūnių v_1 ir v_n kaimynių skaičius tik $j - 1 + n - j = n - 1$.

Vadinasi, yra tokia viršūnė v_j, $1 < j < n$, kad $v_1v_j \in E$ ir $v_{j-1}v_n \in E$. Žr. paveikslą:

Bet tada

$$v_1 \to v_2 \to \dots v_{j-1} \to v_n \to v_{n-1} \to v_{j+1} \to v_j \to v_1$$

yra Hamiltono ciklas. Prieštara įrodo Ore teoremą. $\diamond$

Išvada. *Jei $n \ge 3$ eilės grafo kiekvienos viršūnės laipsnis $\delta(v) \ge n/2$, tai grafas yra Hamiltono.*

UŽDUOTYS.

1. Pasinaudoję 11 teoremos sąlyga ir įrodymo idėja, įrodykite, kad grafe egzistuoja grandinė, kurios ilgis yra nemažesnis už $\delta(G) + 1$.
2. Įrodykite, kad jungus multigrafas yra Eulerio tada ir tik tada, jei jo briaunų aibė yra išreiškiama poromis nesikertančių grandinių sąjunga.
3. Šachmatų lentoje žirgo ėjimu apeikite visus langelius be pakartojimų. Šią užduotį suformuluokite naudodami grafų sąvokas.

0.3.3 Medis ir miškas

Grafas, neturintis ciklų (beciklis), vadinamas *mišku*, o jungus miškas – *medžiu.*

13 teorema. *Grafas yra miškas tada ir tik tada, jei bet kokią viršūnių porą jungia ne daugiau kaip vienas takas.*

Įrodymas. Jei grafas nėra miškas, jame egzistuoja ciklas $v_0v_1...v_kv_0$, čia $v_0, v_1, \dots, v_k$ yra skirtingos viršūnės, o $k \ge 2$. Todėl randame du takus $v_0v_1...v_k$ ir v_0v_k.

Atvirkščiai, tarkime, kad $P = v_0 v_1 ... v_k$ ir

$$P' = v_0(= u_0)\, v_1(= u_1)\, ... v_i(= u_i)\, u_{i+1} \ldots u_s = v_k$$

yra du takai, jungiantys v_0 su v_k, o $i+1$ – mažiausias indeksas, su kuriuo $v_{i+1} \neq u_{i+1}$. Galime tarti, kad takų susijungimas kaip tik ir įvyko viršūnėje $u_s = v_k$. Tada

$$v_i ... v_k (= u_s) u_{s-1} ... u_{i+1} u_i$$

yra ciklas. Todėl grafas nėra miškas.

Įrodyta. $\diamond$

14 teorema. *Tegul $G = (V, E)$ yra $n \geq 2$ eilės grafas. Šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

(*i*) *G yra medis;*

(*ii*) *G yra minimalus jungus grafas, t.y. bet kokiai $e \in E$ grafas $G - e$ turi dvi komponentes;*

(*iii*) *G yra maksimalus beciklis grafas, t.y. kiekvienas iš grafų $G+uv$, čia $uv \notin E$, $u, v \in V$, turi ciklą.*

Įrodymas. (i)$\Rightarrow$ (ii). Jei egzistuotų tokia briauna $e = uv$, kad grafas $G - uv$ būtų jungus, tai grafe G būtų du takai, jungiantys u ir v. Prieštara įrodo (ii).

(i)$\Rightarrow$ (iii). Jei jungiame becikliniame grafe G papildomai išvesta briauna uv nesukuria ciklo, tai jame ir nebuvo tako, einančio iš u į v. Bet tada grafas yra nejungus. Vėl prieštara, įrodanti (iii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Tarkime, G - minimalus jungus grafas. Jei G nebūtų medis, o turėtų ciklą, tai atėmus vieną ciklo briauną, jo jungumas nepakistų. Prieštara įrodo teiginį (i).

Kitas implikacijas išveskite savarankiškai. $\diamond$

Briauna grafe, kurios atėmimas didina grafo komponenčių skaičių vadinama *tiltu*.

Išvada. *Jungiame grafe egzistuoja medis, kurio viršūnių aibė sutampa su visa grafo viršūnių aibe.*

Įrodymas. Pakanka pasinaudoti (ii) savybe ir atėminėti briaunas nesugadinant grafo jungumo. Po baigtinio veiksmų skaičiaus gausime norimą rezultatą. $\diamond$

Išvadoje gautasis medis vadinamas *jungiančiuoju medžiu.*

Sužinoti, ar jungus grafas yra medis galime ir pasinaudoję tokiu teiginiu.

15 teorema. *Jungus grafas $G = (V, E)$ yra medis tada ir tik tada, jei*

$$|E| = |V| - 1.$$

Įrodymas. Tarkime, kad $G = (V, E)$ yra medis. Pritaikome matematinę indukciją jo didumo $m = |E|$ atžvilgiu. Tegu $n = |V|$. Kai $m = 0$, trivialu, nes dėl jungumo turi būti $n = 1$. Tegu visiems mažesniems, t.y. didumo $m' < m$ ir eilės n' medžiams $m' = n' - 1$. Grafe $G - e$ yra du medžiai, tarkime, didumų m_1 ir m_2, čia $m_1 + m_2 + 1 = m$. Jiems galioja indukcinė prielaida. Todėl $m_1 = n_1 - 1$ ir $m_2 = n_2 - 1$, čia n_1, n_2 yra jų eilės ir $n_1 + n_2 = n$. Vadinasi, $m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$.

Atvirkščiai, vėl pasinaudoję indukcija pastebime, kad jungaus grafo didumas $m \geq n - 1$. Todėl, jei jungiam grafui turėtume lygybę $m = n - 1$, ciklo jame būti negalėtų. Jis būtų medis.

Įrodyta. $\diamond$

Išvada. *Eilės $n \geq 2$ medis $G = (V, E)$ turi ne mažiau nei du lapus.*

Įrodymas. Pritaikome 9 ir ką tik įrodytą teoremas. Gauname

$$2|E| = 2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \delta(v).$$

Pastarojoje sumoje yra $|V|$ dėmenų, todėl $\delta(v) \leq 1$ bent dėl dviejų viršūnių.

Įrodyta. $\diamond$

0.3.4 Grafo planarumas

Dabar paliesime grafo įdėties į plokštumą problemą. Vaizduojant grafus plokštumoje ir brėžiant briaunas apsiribojama *Žordano kreivėmis*, t.y. tolydžiomis plokščiomis kreivėmis, kurios neliečia savęs pačios. Grafus, kurios galima taip pavaizduoti plokštumoje, kad skirtingos briaunos neliestų ar nekirstų viena kitos ne viršūnių taškuose, vadiname *planariaisiais*. Formaliai kalbant, tai grafai, turintys izomorfišką vaizdą plokštumoje su ką tik minėtu apribojimu briaunoms. Patį plokštumoje išvestą grafą vadiname *plokščiuoju grafu*. Plokštumos sritys, apribotos plokščio grafo briaunomis ir viršūnėmis, vadinamos grafo *veidais*. Visi plokštieji grafai turi vieną begalinį veidą.

Teorema (Eulerio daugiakampių formulė, 1752). *Jei G yra jungus grafas, n – jo eilė, m – didumas ir l – jo veidų skaičius, tai*

$$n - m + l = 2.$$

Įrodymas. Indukcija m atžvilgiu. Jei $m = 0$, tai grafas yra tuščiasis. Kadangi jis yra jungus, tai $n = 1$. Jis turi tik vieną begalinį veidą, todėl $l = 1$. Formulė yra teisinga.

Tariame, kad teorema yra įrodyta grafams, kurių didumas $m - 1$. Nagrinėjame m didumo grafą G. Jei jis yra medis, tai pagal 15 teoremą $n = m + 1$, o $l = 1$. Ir dabar Eulerio formulė yra teisinga. Jei G nėra medis, tai jis turi ciklą. Atėmus vieną ciklo briauną e, grafas $G - e$ išlieka jungus ir jam galioja indukcinė prielaida. Kadangi $G - e$ turi vienu veidu mažiau negu G, tai

$$n - (m - 1) + (l - 1) = 2.$$

Atskliaudę iš čia gauname norimą sąryšį.

Įrodyta. ◇

Išvada. *Jei G yra grafas, n – jo eilė, m – didumas, l – veidų skaičius ir k – jo komponenčių skaičius, tai*

$$n - m + l = k + 1.$$

Įrodymas. Pritaikyti Eulerio stačiakampių formulę kiekvienai grafo komponentei ir, žinoma, begalinį veidą skaičiuoti tik vieną kartą. ◇

Ar egzistuoja neplanarieji grafai? Teigiamas atsakymas išplaukia iš plokščiųjų grafų parametrų įverčių. Trumpiausio ilgio ciklą grafe vadiname grafo *talija*. Jos *apimtis* yra briaunų skaičius. Susitarkime, miško taliją laikyti begaline, nes jame ciklo iš viso nėra.

16 teorema. *Planarusis $n \geq 3$ eilės jungus grafas turi*

$$m \leq 3n - 6 \tag{3}$$

briaunų. Jei planariojo grafo talijos apimtis $3 \leq g < \infty$, tai

$$m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}. \tag{4}$$

Įrodymas. Pradėkime nuo antrojo teiginio. Aišku, kad $n \geq g$. Kadangi kiekviena briauna riboja ne daugiau kaip du veidus (jei ji yra tiltas, tai ji yra tame veide), tai $gf \leq 2m$. Įstatome į Eulerio daugiakampio formulę ir gauname

$$n - m\left(1 - \frac{2}{g}\right) \geq 2.$$

Iš čia išplaukia (4).

Jei $g < \infty$, pasinaudojame ką tik išvesta nelygybe. Parametro g atžvilgiu dešinėje (4) nelygybės pusėje yra mažėjanti funkcija. Tai įstatę mažiausią galimą talijos apimtį $g = 3$, gauname pirmąjį tvirtinimą. Jei jokio ciklo nėra, grafas yra medis. Tada $m = n - 1$ ir juo labiau yra teisinga (3) nelygybė. $\diamond$

Grafas $G = (V, E)$ vadinamas *dvidaliu*, jei $V = V_1 \cup V_2$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$ ir kiekvienai briaunai $e = uv \in E$ galai $u \in V_1$ ir $v \in V_2$. Jei

$$E = \{uv\colon\ u \in V_1, v \in V_2\},$$

tai grafas vadinamas *pilnuoju dvidaliu* grafu. Tokius grafus paprastai žymime K_{n_1,n_2}, pabrėždami, kad $|V_1| = n_1$ ir $|V_2| = n_2$.

Išvada. *Pilnasis grafas K_5 ir dvidalis grafas $K_{3,3}$ yra neplanarieji.*

Įrodymas. Pirmuoju atveju $g = 3$, bet $m = 10$. Vadinasi, K_5 planarumas prieštarautų (3) nelygybei. Dvidalio grafo $K_{3,3}$ atveju $g = 4$. Dabar pakanka pasinaudoti (4) įverčiu. $\diamond$

Vadinasi, kad ir kaip besistengtume, išvadoje nurodytus grafus braižydami plokštumoje briaunų susikirtimų neišvengtume. Aišku, kad visada brėžinys aiškesnis ir malonesnis akiai, kai briaunų susikirtimų yra nedaug. Nesunku įsitikinti, kad visada galime išvengti daugiau nei dviejų briaunų susikirtimų viename plokštumos taške arba briaunos lietimosi su ja pačia taškuose, urie nėra jos galai.

Įvertinkime mažiausią galimą briaunų susikirtimų skaičių įdedant grafą į plokštumą. Šį grafo parametrą žymėkime $cr(G)$. Pabrėžiame, kad skaičiuojame tik dviejų briaunų susikirtimus. Aišku, kad $cr(G) = 0$ tada ir tik tada, jei grafas yra planarusis.

17 teorema. *Eilės $n \geq 3$ ir m didumo jungiam grafui*

$$cr(G) \geq m - 3n + 6. \tag{5}$$

Įrodymas. Imkime grafo realizaciją plokštumoje su mažiausiu briaunų susikirtimų skaičiumi $cr(G)$ ir visus briaunų susikirtimus pavadinkime papildomomis viršūnėmis. Naujasis grafas turi $n + cr(G)$ viršūnių, $m + 2cr(G)$ briaunų, o svarbiausia, jis yra plokščias. Vadinasi, jam galioja (3) įvertis:

$$m + 2cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6.$$

Iš čia išplaukia ieškomas dydžio $cr(G)$ įvertis. $\diamond$

Taigi, $cr(K_6) \geq 15 - 18 + 6 = 3$. Suraskite tokią pilnojo grafo K_6 įdėtį į plokštumą. Pabaigai pastebėkime dar vieną savybę.

18 teorema. *Planariojo grafo minimalusis laipsnis $\delta(G) \leq 5$.*

Įrodymas. Pasinaudokime 9 teorema. Tegul n ir m yra grafo G eilė ir didumas. Jei $\delta(G) \geq 6$ tai

$$2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq 6 \sum_{v \in V} 1 = 6n.$$

Tai prieštarauja (3) nelygybei. $\diamond$

UŽDUOTIS. Įrodykite, kad planariajam grafui iš sąlygos talijos apimčiai g išplaukia tokie įverčiai:
(i) $\{g \geq 4\} \Rightarrow \{\delta(G) \leq 3\}$;
(ii) $\{g \geq 6\} \Rightarrow \{\delta(G) \leq 2\}$.

0.3.5 Grafo viršūnių spalvinimo problema

Pradėkime studentišku uždaviniu:

Reikia sudaryti tokį paskaitų tvarkaraštį, kurio trukmė būtų mažiausia ir kad kiekvienas studentas galėtų išklausyti kiekvieną jį dominantį dalyką. Auditorijų skaičius yra pakankamas

Tegu studentus dominančios disciplinos žymi grafo viršūnes. Dvi viršūnes junkime briauna, jei atsiras bent vienas studentas, norintis išklausyti abu viršūnes žyminčius dalykus. Aišku, kad tokios paskaitos turi būti skaitomos skirtingu laiku. Vaizdumo dėlei šias viršūnes nuspalvinkime skirtingomis spalvomis. Tuo būdu grafo viršūnių aibė išsiskaido į $V_1, ..., V_k$ poaibius iš viršūnių, turinčių vienodą spalvą. Vienspalvės viršūnės nėra gretimos. Paskaitos iš disciplinų, kurios atitinka vienos spalvos viršūnes, gali būti skaitomos vienu metu skirtingose auditorijose. Skaičius k parodys bendrą visų paskaitų trukmę. Viršuje suformuluota užduotis – minimizuoti skaičių k.

Bendra grafo viršūnių spalvinimo problema formuluojama panašiai. Kiek reikia skirtingų spalvų nudažyti $G = (V, E)$ grafo viršūnėms, kad gretimosios viršūnės būtų skirtingų spalvų? Minimalus spalvų kiekis $\chi(G)$ vadinamas *chromatiniu grafo skaičiumi*. Jei $\chi(G) \leq k$, tai grafas G vadinamas *k spalviu*. Spalvinimo problemą galime išreikšti per atvaizdžius. Sužymėkime spalvas skaičiais $1, \ldots, k$ ir ieškokime tokio atvaizdio $c : V \to \{1, ..., k\}$, kad pirmavaizdžių aibė $c^{-1}(i)$ būtų nepriklausoma, t.y. bet kokių dviejų jo viršūnių nejungtų briauna.

Chromatinis skaičius $\chi(G)$ priklauso nuo grafo struktūros. Iš apibrėžimų išplaukia, kad $\chi(K_n) = n$. Bet kokios eilės tuščiojo grafo chromatinis skaičius lygus vienam, tačiau dvidaliams grafams – dviem. Ne taip akivaizdus yra medžių atvejis.

19 teorema. *Bet kokios eilės $n \geq 2$ medžiui T turime $\chi(T) = 2$.*

Įrodymas. Taikome matematinę indukciją n atžvilgiu. Kai $n = 2$, tai akivaizdu. Tarkime, kad mokame dviem spalvom nuspalvinti bet kokį $n - 1$ eilės medį. Nagrinėjame n eilės medį T. Pagal 15 teoremos išvadą T turi lapą, kurį pažymėkime v. Tada pagal indukcinę prielaidą $\chi(T - v) = 2$ ir galime nuspalvinti $T - v$ dviem spalvom. Žinodami, lapo v gretimosios viršūnės spalvą, antrąja spalva galime nuspalvinti ir pačią v. $\diamond$

Panašiai įrodomas ir kitas teiginys.

20 teorema. *Jei $\Delta(G)$ yra maksimalusis grafo G laipsnis, tai*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Įrodymas. Vėl pritaikoma matematinė indukcija. Paliekame savarankiškam darbui. $\diamond$

Kaip rodo pilnojo grafo pavyzdys, net tokio paprasto įverčio pagerinti negalima. Taip pat ir grafo, sudaryto iš vieno nelyginio ilgio ciklo, atveju nelygybė šioje teoremoje virsta lygybe. Tačiau atsirobojus nuo šių dviejų atvejų, vienetą teoremoje pateiktame įvertyje galime praleisti. Tai 1941 metais įrodė R.Bruksas[14], žr. R.Wilsono vadovėlį [..].

Mokslinėje literatūroje galima rasti įvairių algoritmų, skirtų grafo $G = (V, E)$, $|V| = n$, viršūnių spalvinimo problemai spręsti. Nepritytęs programuotojas dažnai pradeda tokiu būdu. Pradžioje sudaro sąrašą viršūnių $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $v_i \in V$, ir sąrašą spalvų $c_1, c_2, \ldots,$. Nuspalvinęs v_1 pirmąja spalva c_1, antrąją spalvina ta pačia spalva, jei ir $v_1 v_2 \notin E$, priešingu atveju v_2 priskiria c_2. Toliau tęsia, kaip rekomenduoja indukcijos principas. Nuspalvinęs $v_1, \ldots, v_i$, viršūnę v_{i+1} spalvina jau panaudota spalva, jei tai yra leistina, t.y. neatsiranda vienos spalvos gretimų viršūnių. Priešingu atveju pasirenka

[14]R.L. Brooks,??

sekančią dar nepanaudotą sąrašo spalvą. Galiausiai nustemba, kad panaudotų spalvų skaičius yra didelis. Kad taip gali atsitikti, rodo sekantis pavyzdys. Aprašytu metodu spalvinkime ,,blogo" ?? paveiksle

pavaizduoto medžio viršūnes, jų sąraše pradžioje išrikiavę pirmojo laipsnio viršūnes, vėliau antrojo ir t.t. Teks panaudoti 3 spalvas, o ne 2, kaip rodo 19 teorema.

Įsitikinkime, kad ne tik pilnųjų grafų chromatinis skaičius gali būti didelis. Įvedame keletą naujų sąvokų.

Grafo viršūnių poaibis, kuriame bet kuri pora yra sudaryta iš negretimų viršūnių, vadinamas *nepriklausomu.* Maksimali nepriklausomo poaibio galia yra vadinama grafo G *nepriklausomumo skaičiumi* ir žymima $\alpha(G)$. Kitais žodžiais tariant, $\alpha(G) = k$, jeigu grafe yra toks k poaibis viršūnių, bet kurios dvi iš jų yra negretimos, tačiau bet kuris $(k+1)$-os viršūnės poaibis turi bent vieną porą gretimų.

Pilnasis pografis vadinamas grafo G *klika*, o maksimali klikos eilė – jo klikų skaičiumi, kurį žymime $\omega(G)$. Pastebėkime, kad $V_0 \subset V$ yra nepriklausomas tada ir tik tada, jei papildinyje $\overline{G}$ yra klika su viršūnių aibe V_0. Vadinasi, $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

21 teorema. *Tegul $G = (V, E)$ yra n eilės grafas, $\overline{G}$ – jo papildinys, $\chi(G)$, $\alpha(G)$ ir $\omega(G)$ – grafo G chromatinis, nepriklausomumo bei klikų skaičiai. Tada*

$$\chi(G) \geq \omega(G),$$

$$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$$

ir

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n}.$$

Įrodymas. Pirmoji nelygybė išplaukia iš apibrėžimų. Tarkime, kad grafo viršūnės jau nuspalvintos panaudojant mažiausią galimą spalvų skaičių, tai viršūnių, turinčių vienodą spalvą, skaičius yra nemažesnis nei $n/\chi(G)$. Kadangi tokiame nuspalvinime nepriklausomos viršūnės yra vienos spalvos, tai

$$\alpha(G) \geq n/\chi(G).$$

Tai ir yra antroji įrodinėjama nelygybė. Sudėję įrodytas nelygybes panariui, gauname

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq \frac{n}{\alpha(G)} + \omega(\overline{G}) = \frac{n}{\alpha(G)} + \alpha(G). \tag{6}$$

Funkcija $n/x + x,\ x \geq 1$ įgyja minimalią reikšmę $2\sqrt{n}$, kai $x = \sqrt{n}$, todėl iš (6) išplaukia trečia teoremoje nurodyta nelygybė. $\diamond$

Pastaroji teorema parodo, kad $\chi(G)$ gali neaprėžtai didėti kartu su grafo eile, tačiau planarių grafų chromatinis skaičius yra baigtinis ir gali būti įvertintas gana tiksliai.

22 teorema. *Kiekvienas planarus grafas yra penkiaspalvis.*

Įrodymas. Kaip ir anksčiau įrodyme remsimės indukcijos principu. Kai $n \leq 5$, teiginys trivialus. Tarkime, kad jį jau įrodėme kievienam planariam grafui, kurio eilė yra mažesnė už n.

Pagal 18 teoremą grafe yra viršūnė v su $\delta(v) \leq 5$. Jei $\delta(v) < 5$, grafui $G - v$ pritaikome indukcijos prielaidą ir nudažome jo viršūnes, panaudodami 5 spalvas. Keturios viršūnei v gretimos viršūnės yra nuspalvintos mažiau nei 5 spalvomis. Sutaupytąja spalva nudažome v ir taip baigiame užduotį.

Tegul $\delta(v) = 5$. Nagrinėkime v gretimąsias viršūnes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Bent dvi iš jų yra negretimos tarpusavyje. Priešingu atveju šios penkios viršūnės, v ir jas jungiančios briaunos sudarytų pilnąjį K_6 pografį. Pagal 16 teoremos išvadą planariajame grafe to būti negali.

Tegu v_1 ir v_2 šios negretimos viršūnės. Nagrinėkime sutrauktąjį grafą $G' = G \setminus \{vv_1, vv_2\}$. Pagal indukcijos prielaidą jam nuspalvinti pakako 5 spalvų. Taip ir nudažykime G'. Sutapatintos $v = v_1 = v_2$ bus vienos spalvos. Dabar išplėtę G' iki G, matome, kad gretimosios v viršūnės sutaupo vieną iš penkių spalvų, kuria galime perspalvinti pačią v.

Įrodyta. $\diamond$

1976 metais K.Apelis[15] ir V.Hakenas[16], naudodami galingą kompiuterį, įrodė dar devynioliktojo amžiaus viduryje iškeltą hipotezę.

[15] K.Appel...

[16] W.Haken...

Keturių spalvų teorema (1976). *Kiekvienas planarusis grafas yra keturspalvis.*

Įrodymas. Iki šiol nėra šios teoremos įrodymo, kuriame nebūtų naudojamas kompiuteris. Tai atleidžia mus nuo pareigos tokį įrodymą pateikti čia. $\diamond$

Istoriškai pastarasis teiginys buvo formuluojamas ekvivalenčia forma. Jungų plokščią grafą be tiltų vadiname *žemėlapiu*, o jo veidus *valstybėmis*. Dvi valstybės, turinčios bendrą netrivialią (ne iš vienos viršūnės) sieną, vadinamos *kaimyninėmis*. Kiek mažiausiai reikia spalvų nuspalvinti žemėlapio valstybes, kad kaimyninės valstybės būtų skirtingų spalvų? Šis klausimas yra ekvivalentus grafo chromatinio skaičiaus suradimui. Aišku, kad valstybių sienose esančias antrojo laipsnio viršūnės žemėlapio spalvinimui neturi įtakos, todėl tarkime, kad jų nėra iš viso. Jei mes pasitikime kompiuteriu ir pripažįstame 0.3.5 teoremos įrodymą, tai turime tokį rezultatą.

23 teorema. *Bet kokio žemėlapio valstybių nuspalvinimui pakanka keturių spalvų.*

Įrodymas. Žemėlapyje atidėkime valstybių sostines, t. y. kiekvienoje iš jų parinkime po tašką, nesantį briaunoje. Kaimyninių valstybių sostines sujunkime briaunomis, kertančiomis jų bendrą sieną vieną kartą. Sostinės ir šitaip išvestos briaunos apibrėžia grafą, kurį vadiname *dualiuoju* žemėlapiui. Jis taip pat yra jungus ir plokščias. Pagal 0.3.5 teoremą jo viršūnėms nuspalvinti pakanka keturių spalvų. Priskyrę sostinių spalvas visai valstybei, gauname žemėlapio nuspalvinimą. $\diamond$

Atskirų žemėlapių nuspalvinimui pakanka ir mažesnio spalvų skaičiaus.

Panašiai galėtume išnagrinėti grafo briaunų spalvinimo problemą. Joje ieškomas mažiausias skaičius spalvų, reikalingų nuspalvinti grafo briaunas, kad gretimos briaunos būtų skirtingų spalvų. Ir šitaip formuluojamas uždavinys turi sąsajų su viršuje paminėta keturių spalvų teorema.

UŽDUOTYS.

1. Įrodykite nelygybę $\chi(G) \leq k+1$, jei grafas G ir visi jo pografiai turi viršūnę, kurios laipsnis neviršija $k \in \mathbb{N}$.
2. Pateikite pavyzdį žemėlapio, kuris nebūtų trispalvis.
3. Įrodykite, kad žemėlapis, kurį apibrėžia Eulerio grafas, yra dvispalvis.
4. Paveiksle

yra pavaizduoti GSM telefono tinklo stiprintuvai ir jų aptarnavimo zonos. Koks yra minimalus reikalingų radijo dažnių skaičius, jei yra žinoma, kad stirintuvai, turintys bendrą aptarnavimo zoną, turi veikti skirtingais dažniais?

0.3.6 Medžių skaičius

Tvarkingas žmogus žino, kiek ir kokių daiktų jis turi. Ir mes, apibrėžę įvairias grafų klases, turime mokėti bent įvertinti šių klasių galias. Neizomorfiškų n-os eilės grafų, priklausančių įvairioms klasėms, numeracija yra nelengva problema, bet kai ką jau galime padaryti panaudojant tik įsisavintas žinias.

Lengviau yra skaičiuoti *numeruotuosius* (žymėtuosius) grafus. Juose viršūnių aibėje yra įvesta išankstinė numeracija, į kurią reikia atsižvelgti. Du tokie grafai $G = (V, E)$ ir $G = (V', E')$ čia $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $V' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ vadinami *izomorfiškais* (lygiais), jeigu visos briaunos $u_i u_j \in E$ tada ir tik tada, jei $u'_i u'_j \in E'$. Dabar mes nebeturime galimybės pasirinkti abipus vienareikšmės viršūnių aibių atitikties, kaip nenumeruotųjų grafų lygybės apibrėžime. Lygindami du numeruotuosius grafus mes tiesiog sutapatiname viršūnies su vienodais numeriais.

Paveikslas

Paveiksle pavaizduoti numeruotieji grafai yra nelygūs, nors laikant juos nenumeruotaisiais, jie sutaptų. Mes suskaičiuosime n eilės numeruotuosius medžius, įrodydami Keilio[17] teoremą. Įrodyme naudosime E. Priūferio[18] pasiūlytą medžio kodą.

Keilio teorema (1889). *Tegu $n \geq 2$. Iš viso yra n^{n-2} eilės n numeruotųjų medžių.*

[17] Arthur Cayley (1821–1895), anglų matematikas.

[18] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896–1934) – vokiečių matematikas.

Įrodymas. Tarkime, $\mathcal{G}$ yra n eilės medžių aibė, o $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Kiekvienam $G \in \mathcal{G}$ abipus vienareikšmiai apibrėšime jo kodą

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in N^{n-2}.$$

Kitais žodžiais tariant, apibrėšime bijekcinį atvaizdį $f\colon \mathcal{G} \to N^{n-2}$. Kadangi $|N^{n-2}| = n^{n-2}$, iš čia išplauks Keilio teoremos tvirtinimas.

Kai $n = 2$, teiginys akivaizdus. Tegu toliau G yra $n > 2$ eilės medis. Sudarykime jo Priūferio kodą, panaudodami indukcijos principą.

1-as žingsnis. Anksčiau buvome pastebėję, kad medis turi bent du lapus. Imkime lapą su mažiausiu numeriu. Jei $a_1 \in N$ yra šio lapo gretimosios viršūnės u numeris, tai kodą pradėkime a_1, t.y. užrašykime

$$\alpha = (a_1,$$

ir G pakeiskime medžiu $G_1 \colon = G - u$.

$(i-1)$*-as žingsnis.* Tarkime, kad jį jau padarėme, t.y. radome skaičius $a_2, \ldots, a_{i-1} \in N$, apibrėžėme

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1},$$

ir radome medį G_{i-1}.

i*-as žingsnis.* Medyje G_{i-1} randame mažiausio numerio lapą ir jam gretimos viršūnės v numerį $a_i \in N$, kuriuo pratęsiame kodą

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i,$$

bei apibrėžiame medį $G_i = G_{i-1} - v$.

Algoritmo pabaiga. Kai $i = n - 2$, uždarome kodo skliaustus:

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_{n-2}).$$

Nors G_{n-2} dar netuščias, jo eilė yra 2, bet mes jau pradiniam medžiui priskyrėme vienintelį kodą.

Atvirkščiai, tegu turime kodą $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in N^{n-2}$. Pagal jį vienareikšmiškai ,,išauginkime" medį. Pasinaudokime geometriniu įvaizdžiu. Plokštumoje pažymėkime n numeruotų viršūnių ir braižykime medį, vadovaudamiesi žemiau nurodytu algoritmu.

1 žingsnis. Lyginame N su kode esančių skaičių aibe $X \colon = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$. Pastarosios galia yra mažesnė ir joje gali būti pasikartojančių skaičių. Vadinasi, aibėje N egzistuoja mažiausias skaičius, tarkime b_1, nepatenkantis į

X. Plokštumoje briauna sujunkime taškus su numeriais a_1 ir b_1, aibę N pakeiskime aibe $N_1 \colon = N \setminus \{b_1\}$, o X – aibe

$$X_1 \colon = X \setminus \{a_1\} = \{a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}\}.$$

$(i-1)$-*as žingsnis.* Tarkime, kad jį jau padarėme, t.y. plokštumoje jau yra nubrėžtos briaunos $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$ ir $a_{i-1}b_{i-1}$, rastos aibės N_{i-1} bei

$$X_{i-1} \colon = \{a_i, a_{i+1} \ldots, a_{n-2}\}.$$

Pastarosios galia yra mažesnė negu aibės N_{i-1} galia ir galimi pasikartojimai.

i-*as žingsnis.* Aibėje N_{i-1} randame mažiausią skaičių, nepatekusį į X_{i-1}, sakykime b_i; plokštumoje vedame briauną a_ib_i; pažymime $N_i \colon = N_{i-1} \setminus \{b_i\}$ ir

$$X_i \colon = \{a_{i+1}, a_{i+2} \ldots, a_{n-2}\}.$$

Algoritmo pabaiga. Kai $i = n-2$, plokštumoje jau yra išvesta $n-2$ briaunos, aibė $X_{n-2} = \emptyset$, o aibėje N_{n-2} yra likę du skaičiai, sakykime b_{n-1} ir b_n. Plokštumoje viršūnės su šiais numeriais dar nesujungtos. Dabar jas sujungiame briauna.

Pastebėję, kad išvesta $n-1$ briauna ir gautas grafas yra jungus, pagal 15 teoremą žinome, kad nubraižėme medį. Galima įžvelgti, kad kodo sudarymo ir medžio brėžimo pagal kodą algoritmai yra vienas kitam atvirkštiniai, t. y. ką tik nubrėžtojo medžio kodas yra α.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Jei vienai grafo viršūnių yra suteikta kažkokia ypatinga prasmė, tai ji vadinama *šaknimi*, o pats grafas – *šakniniu.* Izomorfiškų grafų apibrėžime naudojama bijekcija turi šaknį atvaizduoti į šaknį. Lyginant du numeruotus šakninius medžius, šaknų numeriai turi sutapti.

Numeruotasis šakninis medis yra vadinamas *Keilio medžiu.* Kadangi bet kuri n eilės medžio viršūnė gali būti pavadinta šaknimi, tai iš Keilio teoremos išplaukia tokia išvada.

Išvada. *Eilės $n \geq 1$ Keilio medžių yra n^{n-1}.*

0.3.7 Minimalus jungiantysis medis

Grafų teorijos nauda ir grožis atsiskleidžia sprendžiant praktinius uždavinius, todėl panagrinėkime vieną iš jų. Projektuokime miestelio vandentiekio sistemą, aprūpinančią kiekvieną sodybą vandeniu. Vandentiekio tinklo šakų tarp sodybų kainos yra žinomos. Galime įsivaizduoti numeruotą pilnąjį grafą $K_n = (V, E)$, kurio viršūnės žymi $n \geq 2$ miestelio sodybų, o kainos apibrėžia funkciją $f\colon E \to \mathbb{R}^+$. Turime didžiulį tinklų pasirinkimą, bet kuris iš jų turi būti *jungiantysis medis*. Iš tiesų, vanduo turi patekti į bet kurią sodybą, o ciklo egzistavimas tinkle reikštų papildomas išlaidas. Pagal Keilio teoremą iš viso yra n^{n-2} galimi jungiantieji medžiai. Tegul $T = (V, E(T))$ yra bet kuris iš jų. Tada

$$f(T) \colon = \sum_{e \in E(T)} f(e)$$

– jo kaina. Mus, aišku, domina pigiausias iš tinklas, t.y. toks jungiantysis medis T_0, kad

$$f(T_0) = \min_T f(T).$$

Ieškant jo, miestelyje su šimtu sodybų tektų išnagrinėti 100^{98} variantų. Šis pavyzdys rodo, kad reikia kurti efektyvesnius algoritmus, nei visų galimų variantų perranka.

Uždavinį formuluokime abstraktesnėje formoje. Tarkime, kad $G = (V, E)$ yra jungus grafas su *svorio funkcija* $f\colon E \to \mathbb{R}^+$, $n = |V|, m = |E|$. Jį vadinkime *svoriniu*. Ankstesnius žymenis T ir $f(T)$ perkelkime jungiančiajam medžiui ir jo svoriui. Ieškokime minimalaus svorio medžio T_0. Jo egzistavimas baigtinėje medžių aibėje abejonių nekelia. Neskubėkime ,,auginti" tokio medžio, be tvarkos imdami lengviausias galimas briaunas, žinoma, kontroliuodami, kad jos nesudarytų ciklo. Taip elgiantis, po keleto žingsnių mes galėtume patekti į bėdą: vengiant ciklo į formuojamą medį tektų įjungti labai sunkią briauną ir jo svoris labai padidėtų.

Egzistuoja keletas paprastų ir greitų algoritmų minimaliam jungiančiam medžiui rasti. Vieną iš paprasčiausių yra pasiūlęs R.Primas[19].

Primo algoritmas randa medžių seką $T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n$, kurioje T_n yra minimalus.

1-*as žingsnis*: $T_1 \colon = v$, čia $v_1 \in V$ yra bet kuri viršūnė ir v nudažoma kokia nors spalva;

2-*as žingsnis*: $T_2 \colon = T_1 + e_1$, čia $e_1 = v_1 v_2$ yra lengviausia briauna (bet kuri iš jų, kai yra to paties svorio), jungianti v_1 su kažkokia nenudažyta viršūne v_2, kurią taip pat nudažome;

[19]R.C. Prim,...

i-*as žingsnis*: apibrėžiame T_i ir naujai į jį įjungtos briaunos e_{i-1} galą v_i nudažome;

(i+1)-*as žingsnis*: $T_{i+1}: = T_i + e_i$, čia $e_i = v_r v_{i+1}$, $1 \leq r \leq i$ yra lengviausia briauna (bet kuri iš jų, kai yra to paties svorio), jungianti kažkokią nudažytą viršūnę v_r su kažkokia nenudažyta v_{i+1}, kurią taip pat nudažome;

n-*as žingsnis* (*algoritmo pabaiga*): užrašome $T = T_n$.

Aišku, kad viršūnių dažymas yra tik mūsų patogumui, jos nurodo formuojamą medį, į kurį įjungiamos naujos nedažytos viršūnės. Toks techninis triukas yra dažnas grafų algoritmuose. Lieka įsitikinti, kad Primo algoritmas iš tiesų randa vieną iš galimų minimalių jungiančiųjų medžių ir nėra labai ilgas. Kiekviename algoritmo žingsnyje tenka peržiūrėti visas briaunas, kurios jungia nudažytas ir dar nenudažytas viršūnes ir rasti lengviausią. Vadinasi, teks mokėti rūšiuoti briaunas pagal jų svorių didėjimą. Kiekvienai viršūnei yra patogu įsivesti kintamąjį, žymintį lengviausios briaunos, jungiančios ją su jau suformuotu medžiu T_i, svorį. Pradinėmis šių kintamųjų reikšmėmis galime laikyti ∞. Bet tai jau techninės detalės, priklausančios nuo kompiuterio aplinkos. Patyrusio programuotojo parašyta programa ras ieškomą medį per $\mathrm{O}(m + n \ln n)$ žingsnių.

24 teorema. *Primo algoritmas randa minimalų jungiantįjį medį.*

Įrodymas. Pritaikykime indukcjos principą ir įsitikinkime, kad kiekviename žingsnyje suformuotas medis T_i yra kažkokio, nebūtinai to paties, minimalaus jungiančiojo medžio pomedis. Kai $i = 1$, yra tik vienos viršūnės medis, todėl teiginys trivialus.

Tarkime, kad medis $T_i \subset T$, čia $T = (V, E(T))$ minimalus jungiantysis medis. Atliekame $i+1$ žingsnį, pridėdami prie T_i briauną $e_i = uv$ su nudažytu galu u ir dar nedažytu v. Jei $e_i \in T$, teiginys yra įrodytas. Tegul toliau $e_i \notin T$. Bet viršūnė v yra pasiekama iš bet kurios nudažytos viršūnės einant kažkokiu minimalaus jungiančiojo medžio T briaunų taku. Šiame take yra bent viena briauna, kuria pereinama iš dažytos į nedažytą viršūnę. Tegu tai briauna $e = xy \in E(T)$. Tada $T + e_i$ turi ciklą, o G pografis

$$T': = (T + e_i) - e$$

vėl yra medis. Jo svoris lygus

$$f(T') = f(T) + f(e_i) - f(e) \leq f(T),$$

nes algoritme rinkome e_i kaip lengviausią iš galimų briaunų, kurių tik vienas galas buvo dažytas. Vadinasi, T' taip pat yra minimalus jungiantysis medis. Po n žingsnių apibrėžtas T_n bus minimalus jungiantysis medis.

Įrodyta. $\diamond$

Spręsdami šį ar kitus grafų uždavinius, neišvengiamai susiduriame su būtinybe užrašyti informaciją apie grafą formaliomis priemonėmis. Paprasčiausias būdas yra sudaryti grafo *gretimumo sąrašą*. Jame viršūnės yra sunumeruojamos ir surašomos stulpeliu į lentelę, o šalia jų eilutėse surašomi joms gretimų viršūnių numeriai. Paprasta ir aišku, tačiau lentelės eilutės gali būti nelygaus ilgio, tai sukelia tam tikrus nepatogumus apdorojant didelius masyvus.

Matematiškiau numeruotą grafą galime vienareikšmiškai apibrėžti matricomis. *Grafo gretimumo matrica* $A = (a_{ij})$ yra kvadratinė $n \times n$ matrica, kurioje $a_{ij} = 1$, jei yra briauna, jungianti i-ąją ir j-ąją viršūnes, priešingu atveju, – $a_{ij} = 0$. Taigi, A yra simetrinė matrica. Prisiminę mūsų susitarimą, kad grafe nėra kilpų, matome, kad gretimumo matricos įstrižainėje yra nuliai.

Multigrafo atveju, matrica sudaroma taip pat, tačiau a_{ij} lygus briaunų, jungiančių i-ąją ir j-ąją viršūnes, skaičiui, o kilpų skaičius yra dvigubinamas.

Tarkime $G = (V, E)$ yra grafas, kurio $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, o $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Jo *incidentumo matrica* $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ turi elementus $b_{ij} = 1$, jei e_j yra viršūnės v_i galas ir $b_{ij} = 0$, jei e_j nėra incidenti v_i. Multigrafui G, jei e_j yra kilpa, incidenti e_i, tai $b_{ij} = 2$.

Apibrėžtos matricos naudingos ne tik informacijai užrašyti, jos slepia nemaža struktūrinių grafo savybių.

UŽDUOTIS. Savarankiškai įgykite įgūdžių užrašyti gretimumo ir incidentumo matricas ir pagal jas nubrėžti grafus.

0.3.8 Trumpiausių takų problema

Panagrinėkime dar vieną svorinių grafų problemą. Tarkime, kad jungaus grafo $G = (V, E)$ grafo briaunų aibėje yra apibrėžta ilgio funkcija

$$\rho \colon E \to \mathbb{R}_+.$$

Tako ilgiu vadinkime jame esančių briaunų ilgių sumą, o *atstumu tarp dviejų viršūnių* – trumpiausio jas jungiančio tako ilgį. Kadangi grafas yra jungus, toks takas egzistuoja. Sunkumų sukelia jo radimas, nes visų galimų takų perrinkimas dideliame grafe gali užtrukti nemotyvuotai ilgai.

Atstumą tarp viršūnių u ir v žymėkime $d(u,v)$, o taką tarp jų vadinkime $(u-v)$ taku. Atstumas tenkina trikampio nelygybę

$$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v).$$

Atstumu nuo viršūnės u iki poaibio $A \subset V$ vadinkime dydį

$$d(u,A) \colon = \min_{v \in A} d(u,v).$$

Aišku, kad $d(u,A) = 0$, jei $u \in A$. Viršūnė $v_0 \in A$, esanti arčiausiai nuo u baigtinėje aibėje visada yra. Jai turime $d(u,A) = d(u,v_0)$. Beveik visi trumpiausių takų radimo algoritmai remiasi keletu teorinių teiginių.

Lema. *Jei $u = v_1 v_2 \dots v_k = v$ yra trumpiausias $(u-v)$ takas, tai bet kuris dalinis takas $v_i v_{i+1} \dots v_l$, $1 \leq i < l \leq k$, yra trumpiausias $(v_i - v_l)$ takas.*

Įrodymas. Jei teiginys būtų neteisingas, eidami iš u į v, priėję u_i, būtume sukę kitu trumpesniu taku iki v_l ir taip būtume radę dar trumpesnį $(u-v)$ taką. $\diamond$

25 teorema. *Tegul $s \in A \subset V$, $A \neq V$ ir $\overline{A} = V \setminus A$. Tada*

$$d(s,\overline{A}) = \min_{\substack{x \in A \\ y \in \overline{A}}} \Big(d(s,x) + \rho(xy) \Big). \tag{7}$$

Be to, jei (7) *lygybėje esantis minimumas yra pasiekiamas, kai $x = u$ ir $y = v$, tai*

$$d(s,v) = d(s,u) + \rho(uv) = d(s,\overline{A}).$$

Įrodymas. Tegul $P = s \dots u\, e\, v$ yra trumpiausias takas iš s į $\overline{A}$, kuriame $u \in A$, $e = uv$ ir $v \in \overline{A}$. Iš visų aibės $\overline{A}$ viršūnių v yra arčiausiai nuo s. Pagal lemą $P - v$ yra trumpiausias $(s-u)$ takas. Tada

$$d(s,\overline{A}) = d(s,v) = d(s,u) + \rho(uv)$$

ir minimumas (7) lygybėje buvo pasiektas, kai $x = u$, o $y = v$.

Atvirkščiai, tegu šis minimumas buvo pasiektas, kai $x = u$ ir $y = v$, ir (7) lygybė galioja. Pagal apibrėžimą $d(s,\overline{A}) \leq d(s,v)$, bet pagal trikampio nelygybę

$$d(s,v) \leq d(s,u) + \rho(uv) = d(s,\overline{A}).$$

Iš pastarųjų nelygybių išplaukia antrasis teoremos tvirtinimas. $\diamond$

Iš antros teoremoje pateiktos lygybės išplaukia idėja, kad trumpiausią atstumą tarp dviejų viršūnių galima rasti radus vienos viršūnės atstumą iki tam tikros jų aibės. Užrašykime šia idėja paremtą algoritmą, kuris randa trumpiausius takus iš $s \in V$ į kitas viršūnes.

Algoritmas:

1 *žingsnis*: Apibrėžiame aibę $A_0 = \{s\}$, jos papildinį $\overline{A}_0$ ir randame $u_1 := s \in A_0$ bei $v_1 \in \overline{A}_0$, tenkinančius

$$d(s, u_1) + \rho(u_1 v_1) = \min_{\substack{x \in A_0 \\ y \in \overline{A}_0}} \Big(d(s, x) + \rho(xy) \Big).$$

Apibrėžiame medį $T_1 = (V_1, E_1)$ su $V_1 = \{u_1, v_1\}$ ir $E_1 = \{u_1 v_1\}$.

2 *žingsnis*: Apibrėžiame aibę $A_1 = A \cup \{v_1\}$, jos papildinį $\overline{A}_1$ ir randame $u_2 \in A_1$ bei $v_2 \in \overline{A}_1$, tenkinančius

$$d(s, u_2) + \rho(u_2 v_2) = \min_{\substack{x \in A_1 \\ y \in \overline{A}_1}} \Big(d(s, x) + \rho(xy) \Big).$$

Apibrėžiame medį $T_2 = (V_2, E_2)$ su $V_2 = V_1 \cup \{v_2\}$ ir $E_2 = E_1 \cup \{u_2 v_2\}$.

Tarkime, kad jau atliktas i *žingsnis* ir jame rasta aibė A_{i-1}, jos papildinys $\overline{A}_{i-1}$, $u_i \in A_{i-1}$, $v_i \in \overline{A}_{i-1}$, tenkinantys minimą lygybę su minimumu, ir suformuotas medis T_i.

$(i+1)$-*as žingsnis*: Apibrėžiame aibę $A_i = A_{i-1} \cup \{u_i\}$, jos papildinį $\overline{A}_i$ ir randame $u_{i+1} \in A_i$ bei $v_{i+1} \in \overline{A}_i$, tenkinančius

$$d(s, u_{i+1}) + \rho(u_{i+1} v_{i+1}) = \min_{\substack{x \in A_i \\ y \in \overline{A}_i}} \Big(d(s, x) + \rho(xy) \Big).$$

Apibrėžiame medį $T_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$ su $V_{i+1} = V_i \cup \{v_{i+1}\}$ ir $E_{i+1} = E_i \cup \{u_{i+1} v_{i+1}\}$.

Algoritmo pabaiga: atlikę $(n-1)$-ą žingsnį užrašome medį $T_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ su

$$V_{n-1} = \{s, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-1}\}.$$

Šiame medyje viršūnes s ir v_i, $1 \leq i \leq n-1$, jungia tik vienas takas. Pagal teoremą jis yra trumpiausias iš visų galimų, esančių grafe G. Tokius medžius vadiname *trumpiausių takų* medžiais.

Aprašytas algoritmas turi esminį trūkumą – kiekviename žingsnyje reikia ieškoti viršūnes, realizuojančias minimumą. Tam sugaištama daug laiko, nes tarpinė informacija neišsaugoma. E. Dijkstra[20] 1959 metais pasiūlė gerokai efektyvesnį algoritmą, kuris Jums padeda pasiklydus ir užsisakius telefoninę paslaugą surasti trumpiausią kelią namo. Neabejojame, kad šį algoritmą Jūs įsisavinsite grafų algoritmų kurse. Dabar siūlytume surasti savąjį metodą.

0.4 Junginiai

0.4.1 Gretiniai, kėliniai ir deriniai

Iš aibės elementų galime sudaryti įvairius rinkinius, kurie skiriasi elementų išdėstymo tvarka arba nors vienu elementu, elementai juose gali kartotis arba būti skirtingi. Tokius rinkinius vadiname *junginiais*. Išmokime suskaičiuoti juos. Aišku, kad skaičiuojant elementų prigimtis yra nesvarbi. Tarkime, kad pradinės aibės galia yra n, o junginio elementų skaičius yra k. Jį vadinsime k junginiu išrinktu iš n aibės. Pradžioje aptarkime atvejį, kai junginyje elementai yra skirtingi.

Aibės $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skirtingų elementų sutvarkytąjį junginį $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ vadiname *gretiniu*, o pabrėžiant jo ilgį – k gretiniu iš n aibės. Jų skaičių pažymėkime A_n^k. Nenustebkite, pamatę ir žymenį $(n)_k$.

26 teorema. *Kai* $1 \leq k \leq n$ *, turime*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Įrodymas. Pirmąjį gretinio elementą imame iš visos aibės, todėl turime n galimybių. Jei gretinio pradžioje jau yra parašyta $(i-1)$-as skirtingas elementas, tai i-jam parinkti turime $n-(i-1)$ galimybių. Čia $1 \leq i \leq k$. Elementai imami nepriklausomai vienas nuo kito. Įrodinėjama lygybė išplaukia iš 6 teoremos.

Įrodyta. ◇

Jau žinome funkcijų, atvaizduojančių aibę $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ aibėje $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ skaičių. Jis lygus n^k (žr. 7 teoremą). Apsiribokime funkcijomis, kurios skirtingus elementus atvaizduoja į skirtingus ir vadinkime jas *injekcinėmis*. Raskime jų skaičių.

27 teorema. *Pažymėkime*

$$\mathcal{F}_{inj}\colon = \mathcal{F}_{inj}(k,n)\colon = \{f\colon X \to Y\colon\ f\ -\ injekc.\}.$$

[20] E.W.Dijkstra,???

Tada $|\mathcal{F}_{inj}| = A_n^k$.

Įrodymas. Injekcinę funkciją vienareikšmiškai apibrėžia sutvarkytasis jos reikšmių vektorius $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))$, kurio koordinatės yra skirtingos ir imamos iš aibės Y. Vadinasi, šie vektoriai yra gretiniai. Jų skaičius yra A_n^k.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Aišku, kad dviejose pastarosiose teoremose nagrinėjamos ekvivalenčių aibių galios. Formalus injekcinių funkcijų panaudojimas labai patogus, nes gerai išryškina skaičiuojamus atvejus. Išspręskime tokį uždavinį.

Uždavinys. *Keliais būdais dešimt studentų galima susodinti teatro eilėje, kurioje yra 20 sunumeruotų vietų?*

Sprendimas. Pakanka sunumeruoti studentus ir pastebėti, kad susodinimo būdų yra tiek, kiek injekcinių funkcijų $f\colon \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 20\}$, t.y. $A_{20}^{10} = 11 \cdot 12 \cdots 20$. $\diamond$

Gretinius iš n elementų po n vadiname *kėliniais*.

28 teorema. *Iš viso yra* $n! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ *kėlinių, sudarytų iš* n *aibės.*

Išvada. *Iš viso yra* $n!$ *bijekcinių* n *aibės funkcijų į* n *aibę.*

Raidžių tvarka k žodyje arba gretinyje yra svarbi. Panagrinėkime junginius, kai elementų tvarka juose yra nesvarbi ir skaičiuojant į ją yra neatsižvelgiama.

Nesutvarkytasis skirtingų elementų rinkinys (poaibis) yra vadinamas *deriniu.* Nurodydami aibės ir poaibio galias, sakysime, kad skaičiuojame k derinius iš n aibės. Tokių derinių skaičius mokslinėje literatūroje žymimas dvejopai:

$$C_n^k \qquad \text{arba} \qquad \binom{n}{k}.$$

Jis vadinamas *binominiu koeficientu* iš n po k. Mes naudosime antrąjį žymenį. Taip pat susitarkime, kad visada sandaugas, kuriose nėra daugiklių, t.y. tuščiąsias sandaugas prilyginti vienetui. Taigi, turime ir reikšmes $A_n^0 = 1$ bei $0! = 1$.

29 teorema. *Derinių iš* n *aibės po* k *elementų skaičius lygus*

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \le k \le n.$$

Įrodymas. Teiginys išplaukia iš 26 ir 28 teoremų, nes, sutapatinę tik tvarka besiskiriančius gretinius, iš $k!$ gretinių gauname tik vieną derinį. Paskutinė lygybė patikrinama betarpiškai. $\diamond$

Susitarkime, kad $\binom{n}{k} = 0$, jei $k > n$. Tai yra natūralu, nes didesnės galios negu n poaibio nėra nei vieno. Binominių koeficientų savybes plačiau išnagrinėsime ateityje. Dabar įrodysime tik porą paprasčiausių.

Paskalio teorema. *Tegul* $1 \leq k \leq n$. *Tada*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Įrodymas. Galima būtų pritaikyti indukcijos principą, bet gerokai įdomesnis yra ,,skaičiuok dukart" principo panaudojimas. Suma įrodinėjamos lygybės dešinėje pusėje nuteikia nagrinėti visos k derinių iš n aibės skaidinį į du poaibius.

Tarkime, kad deriniai buvo sudaromi iš skaičių $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vienuose deriniuose skaičius n buvo, kituose – ne. Galime įsivaizduoti, kad pirmosios klasės deriniai buvo gauti sudarius $k-1$ derinius iš aibės $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ir vėliau į juos įrašant n. Vadinasi, iš viso tokių derinių yra $\binom{n-1}{k-1}$. Antrosios klasės k deriniai sudaromi tik iš skaičių $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Iš viso jų yra $\binom{n-1}{k}$. Sudėję rastąsias abiejų klasių galias, gauname visą derinių skaičių.

Įrodyta. $\diamond$

Pora paprastų teiginių iliustruosime, kad skaičiuojant junginius galima atskleisti grafų savybių. Štai pritaikę 29 teoremą, randame pilnojo grafo K_n didumą, t.y. jo briaunų skaičių. Jis lygus $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, nes tiek jame yra briaunų porų. Suskaičiuokime visus n eilės numeruotuosius grafus.

30 teorema. *Iš viso galima sudaryti* 2^s, *čia*

$$s = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

numeruotų n eilės grafų.

Įrodymas. Įsivaizduojame pilnąjį numeruotą grafą K_n. Visus n eilės grafus galima gauti iš jo atimant tam tikrą kiekį briaunų. Neatimtųjų briaunų poaibiai vienareikšmiškai apibrėžia skaičiuojamus numeruotuosius grafus. Pilnajame K_n grafe yra $s = n(n-1)/2$ briaunų, tai pagal 8 teoremą – 2^s jų poaibių. Tai ir yra ieškomasis grafų skaičius. $\diamond$

Kita teorema parodo, kad grafo parametrai tarpusavyje yra susiję. Pradžioje išspręskime nesunkų ekstremalųjį uždavinį.

Lema. *Tegul $n \geq 2$ yra fiksuotas ir $n = n_1 + n_2$, $1 \leq n_1 \leq n_2$. Suma*

$$g(n_1, n_2) \colon = \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} = \frac{n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1)}{2}$$

yra didžiausia, kai $n_1 = 1$ ir $n_2 = n - 1$.

Įrodymas. Jei didesnysis dėmuo $n_2 < n - 1$, padidinkime jį vienetu, tuo pačiu mažesnįjį n_1 pakeisdami $n_1 - 1$. Nagrinėjama binominių koeficientų suma tampa

$$\begin{aligned} g(n_1 - 1, n_2 + 1) &= \frac{(n_1 - 1)(n_1 - 2) + (n_2 + 1)n_2}{2} \\ &= g(n_1, n_2) + n_2 - n_1 + 1 > g(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Po baigtinio skaičiaus žingsnių pasieksime funkcijos maksimumą:

$$\max_{n_1 + n_2 = n} g(n_1, n_2) = g(1, n - 1) = (n - 1)(n - 2)/2.$$

Lema įrodyta. $\diamond$

31 teorema. *Jei $n \geq 1$ yra grafo eilė, m – didumas, o k – jo komponenčių skaičius, tai*

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodysime, taikydami matematinę indukciją $m \geq 0$ atžvilgiu. Kai $m = 0$, turime nulinį grafą su n komponenčių. Tad, nelygybė yra triviali.

Tegu $m_1 < m_2 < \cdots$ yra n eilės grafų didumai, tenkinantys sąlygą: atėmus vieną briauną iš G, padidėtų jo komponenčių skaičius. Kai $m_{j-1} < m < m_j$, visi m didumo grafai turi ,,perteklinių" briaunų, kurių atėmimas nekeistų komponenčių kiekio. Jie turi tą patį komponenčių skaičių, kaip ir grafas, kurio didumas yra m_{j-1}. Todėl kairiąją iš įrodinėjamų nelygybių pakanka įrodyti grafams, kurių didumai sudaro seką $\{m_j\}$, $j \geq 1$.

Tarkime, jog nelygybė jau įrodyta grafui su m_{j-1} briauna, ir nagrinėkime atvejį $|E| = m_j$. Dabar atėmę bet kurią iš briaunų gauname grafą, kuriam galioja indukcijos prielaida. Tegu tai yra grafas

$$G' = (V', E'), \quad |V'| = n, \quad |E'| = m_j - 1.$$

Jis turi $k+1$ komponentę, todėl

$$n-(k+1) \leq m_j - 1.$$

Iš čia išplaukia nelygybė dėl m_j.

Vertindami briaunų skaičių m iš viršaus, nagrinėkime patį ,,blogiausią" atvejį, kai kiekviena iš komponenčių sudaro pilnuosius pografius K_{n_i}, $1 \leq i \leq k$. Tada viso grafo didumas yra

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \cdots + \binom{n_k}{2}.$$

Pritaikę lemą kiekvienai binominių koeficientų porai, gauname maksimalų galimą grafo didumą:

$$0+0+\cdots+\binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Teorema įrodyta. ◇

Išvada. *Jei n eilės grafas turi daugiau nei $(n-1)(n-2)/2$ briaunų, tai jis yra jungus.*

Derinių skaičius $\binom{n}{k}$ nurodo, kiek k poaibių galime išrinkti iš n aibės. Skirtingiems $k = 0, 1, \ldots, n$ poaibių aibės nesikerta, tai iš 5 ir 8 teoremų išplaukia tokia tapatybė:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{8}$$

Čia n bet koks natūralusis skaičius.

Išvedant šią lygybę buvo panaudotas anksčiau minėtas ,,skaičiuok dukart" principas: 8 teoremoje poaibių aibės galią suskaičiavome naudodami kodus, dabar – derinių apibrėžimą. Buvo išvestas naujas sąryšis. Panašiai elgsimės ir ateityje.

UŽDUOTYS:

1. Sudoku žaidimo lentelės eilutėje jau parašyti penki skaitmenys. Kiek galimybių dar reikia peržiūrėti užbaigiant pildyti šią eilutę?

2. Kiek skirtingų trispalvių vėliavų galima sudaryti turint šešių skirtingų spalvų audinius, jei visų spalvų juostos vėliavoje yra vienodo pločio?

0.4.2 Junginiai su pasikartojimais

Nagrinėkime junginius, kuriuose gali būti pasikartojančių elementų. Sutvarkytuose junginiuose, kuriuos vadiname ir *gretiniais su pasikartojimais*, elementų tvarka yra svarbi, todėl skaičiuojant į ją turi būti atsižvelgiama. Situacija labai primena žodžių sudarymą iš abėcėlės raidžių, todėl dažnai toks įvaizdis ir naudojamas. Žinoma, tada *raidė* įsivaizduojama kaip bet koks pradinės aibės, kurią vadiname *abėcėle*, elementas, o sutvarkytasis junginys tampa *žodžiu.* Atsakymą į klausimą, kiek iš viso yra k ilgio žodžių, jau žinome iš 6 teoremos. Štai jis:

Jei abėcėlėje yra n raidžių, tai galima sudaryti n^k ilgio k žodžių.

Vadinasi, perfrazavę 6 teoremą, turime tokį teiginį.

32 teorema. *Iš viso yra n^k ilgio k gretinių su pasikartojimais iš n aibės.*

Anksčiau, turėdami n aibę ir keisdami jos elementus vietomis, gaudavome visus $n!$ kėlinių. Galėjome juos vadinti netgi *aibės* kėliniais.

Imkime dabar *multiaibę* (aibę su pasikartojančiais elementais), kurioje yra $p_1 \geq 1$ vienos rūšies vienodų, $p_2 \geq 1$ – kitos rūšies vienodų ir t.t. $p_k \geq 1$ – k-os rūšies vienodų elementų. Visų multiaibės elementų dėstinį tam tikra tvarka (seką) vadiname *kėliniu su pasikartojimais.* Juos skaičiuojant reikalaujame, kad kėlinys nuo kėlinio skirtųsi bent dviejų elementų išdėstymo tvarka. Kadangi kėlinyje su pasikartojimais vienodų elementų sukeitimas vietomis kėlinio nepakeičia, skaičiuojant reikia būti atidiems.

33 teorema. *Jei multiaibėje yra $k \geq 1$ rūšių elementai, kurie pasikartoja $p_1, p_2, \ldots p_k \geq 1$ kartų atitinkamai, ir*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n,$$

tai iš viso galima sudaryti

$$\frac{n!}{p_1!p_2! \cdots p_k!}$$

n kėlinių su pasikartojimais.

Įrodymas. Atlikime visas galimas $n!$ multiaibės elementų tvarkos perstatas ir išrašykime gautas sekas. Pastebėkime, kad perstatant vietomis vienodus elementus seka nepasikeičia, jos apibrėžia tą patį kėlinį. Vadinasi, dėl visų i-os rūšies vienodų elementų perstatų, (o jų yra $p_i!$) kėliniai pakartojami $p_i!$ kartų. Ir taip atsitinka dėl kiekvieno $1 \leq i \leq k$. Padalíję $n!$ iš faktorialų sandaugos $p_1! \cdots p_k!$, gauname ieškomą skirtingų kėlinių su pasikartojimais skaičių. $\diamond$

Prisiminę susitarimą $0! = 1$, pastebėkime, kad ką tik įrodytą formulę galime taikyti ir atvejais, kai $p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Nesutvarkytųjų junginių su galimais pasikartojimais nagrinėjimą pradėkime nuo praktiško uždavinio.

Uždavinys. *Kiek skirtingų pirkinių iš k prekių sudarytume, jei galėtume rinktis iš n prekių rūšių be apribojimų?*

Sprendimas. Aišku, kad prekių tvarka krepšyje yra nesvarbi, bet deriniu pirkinio nepavadinsi, nes sąlygoje yra neuždrausta pirkti kelias vienos rūšies prekes. Spręsdami vėl panaudokime kodus.

Sunumeruokime visas n prekių rūšis ir sudarykime pirkinio kodą: rašykime tiek pliusų, kiek imame pirmos rūšies prekių, dėkime skirtuką – vertikalų brūkšnį ir tęskime šį procesą. Baigsime parašę tiek pliusų, kiek yra imama n-os rūšies prekių. Taigi, kodas atrodys maždaug taip:

$$(+++||++|\ldots|+).$$

Nuėję į parduotuvę ir turėdami tokį mamos duotą kodą, matome, kad reikia nupirkti tris pirmos rūšies prekes, nei vienos antros rūšies prekės ir t.t. Namo parnešime viską, ko buvome prašyti.

Vadinasi, tarp galimų pirkinių ir jų kodų nustatyta abipus vienareikšmė atitiktis. Lieka tik suskaičiuoti tokių kodų skaičių.

Kodą sudarys k pliusų ir $(n-1)$-as vertikalus brūšnys. Kodai yra $n-1+k$ žodžiai, kai abėcėlė yra aibė $\{+, |\}$, tačiau ne visi. Jie tenkina vieną sąlygą: pliusų skaičius yra lygus k. Kadangi pliusų padėtis kode vienareikšmiškai jį nusako, o tokių padėčių galime išrinkti $\binom{n+k-1}{k}$ būdais, tai šis binominis koeficientas ir yra uždavinio atsakymas. $\diamond$

Paimtas iš n aibės k elementų rinkinys su galimais pasikartojimais vadinamas *deriniu su pasikartojimais*. Jų skaičius dažnai žymimas H_n^k. Kadangi elementų prigimtis nesvarbi, spręsdami uždavinį, mes įrodėme tokią teoremą.

34 teorema. *Jei $k \geq 0$, tai derinių su galimais pasikartojimais, kurie yra imami iš n aibės, skaičius*

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Pastebėkime, kad spręsdami pirkinio uždavinį, mes ieškojome lygties

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

sprendinių skaičiaus. Čia $x_i \geq 0$ žymi i-os rūšies prekių, imamų į pirkinį, skaičių. Jei sveikųjų neneigiamų skaičių aibę pažymėtume $\mathbb{Z}_+$, o $\mathbb{Z}_+^n$ Dekarto sandaugą, tai nežinomasis vektorius $\bar{x}\colon = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Akcentuodami šį svarbų pastebėjimą suformuoliuosime teoremą.

35 teorema. *Lygtis $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ turi $H_n^k = \binom{n+k-1}{k}$ sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais.*

Palyginkime su tokiu teiginiu.

36 teorema. *Jei $k \geq n$, tai lygtis $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$ turi $\binom{k-1}{n-1}$ sprendinių natūraliaisiais skaičiais.*

Įrodymas. Pakeiskime nežinomuosius

$$x_1 = y_1 + 1,\ x_2 = y_2 + 1,\ \ldots,\ x_n = y_n + 1.$$

Nagrinėjamas sprendinių skaičius lygus lygties

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k - n$$

sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičiui. Vadinasi, pagal 35 teoremą jis lygus

$$H_n^{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \binom{k-1}{n-1}.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

UŽDUOTYS:

1. Kiek galima sudaryti septyniaženklių skaičių iš skaitmenų 2,2,2,1,1, 3, 5?
2. Kiek yra dviženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 10?
3. Kiek yra triženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 12?
5. Raskite lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ sveikųjų sprendinių, tenkinančių sąlygas $0 \leq x_1 \geq 4$, $1 \leq x_2 < 5$ ir $2 < x_3 < 7$, skaičių.
6. Išveskite formulę lygties $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$ natūraliųjų sprendinių, tenkinančių sąlygą $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2, \ldots, x_n \geq 2$, skaičiui.

0.4.3 Polinominiai koeficientai

Prisimename, kad derinių skaičius yra išreiškiamas binominiu koeficientu. Toks pavadinimas kilo iš Niutono binomo formulės

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}, \quad n \geq 1,$$

kurią siūlome įsirodyti savarankiškai. Rekomenduojame pritaikyti matematinę indukciją ir Paskalio teoremą.

Apibendrinkime šią formulę, keldami k nežinomųjų sumą bet kokiu $n \geq 1$ laipsniu. Dauginant sumas panariui patariame pradžioje dauginti bendruosius narius, o po to sudėti gautąsias sandaugas:

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_i + \cdots + x_k)^n &= (x_1 + \cdots + x_{i_1} + \cdots x_k) \ldots \\ &\times (x_1 + \cdots + x_{i_j} + \cdots + x_k) \ldots \\ &\times (x_1 + \cdots + x_{i_n} + \cdots + x_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_n \leq k} x_{i_1} \ldots x_{i_j} \ldots x_{i_n}.\end{aligned}$$

Dabar sudėkime panašius narius, t.y. narius su vienodais x_i, $1 \leq i \leq k$, laipsniais. Šie laipsniai sudaro vektorių $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ su sveikomis neneigiamomis koordinatėmis, tenkinančiomis sąlygą $p_1 + \cdots + p_k = n$. Vadinasi, anksčiau gautą sumą galime perrašyti:

$$(x_1 + \cdots + x_i + \cdots + x_k)^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \ldots, p_k} x_1^{p_1} \ldots x_k^{p_k}. \tag{9}$$

Čia sumuojama pagal visus minėtus vektoius $\bar{p}$, o

$$\binom{n}{p_1, \ldots, p_k}, \quad p_1, \ldots p_k \geq 0, \; p_1 + \cdots + p_k = n,$$

yra tam tikri koeficientai. Juos vadiname *polinominiais*. Kai $n = 2$, jie turi sutapti su jau įvestais binominiais koeficientais. Todėl susitarkime dėl dvigubo žymėjimo:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p, n-p}.$$

37 teorema. *Tegu* $n \geq 1$, $(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ *ir* $p_1 + \cdots + p_k = n$. *Tada*

$$\binom{n}{p_1, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Įrodymas. Jei sandauga $x_{i_1} \dots x_{i_j} \dots x_{i_n}$ yra panaši nariui $x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}$, tai raidė x_i užima $p_i \geq 0$ pozicijų, $1 \leq i \leq k$. Vadinasi, nežinomieji $x_1, \dots, x_k$ sudaro n kėlinį su pasikartojimais. Tokių kėlinių skaičius jau buvo rastas 33 teoremoje. Prittaikę šį rezultatą, gauname

$$\binom{n}{p_1, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \dots p_k!}.$$

Teorema įrodyta. ◇

Atkreipkime dėmesį į šią (9) lygybės išvadą:

$$k^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \dots, p_k},$$

gaunamą įstatant $x_j \equiv 1$. Čia, kaip ir anksčiau, sumuojama pagal visus vektorius $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$ su neneigiamomis koordinatėmis, tenkinančius sąlygą $p_1 + \cdots + p_k = n$.

UŽDUOTIS: Keliais būdais galime suskirstyti n aibę į k nesikertančių poaibių, jei reikalaujame, kad visiems $1 \leq i \leq k$ į i-ąjį pakliūtų p_i elementų? Čia $p_1 + \cdots + p_k = n$.

0.4.4 Binominio koeficiento savybės

Knygose yra apstu įvairių binominių koeficientų sąryšių. Vieni iš jų (pavyzdžiui, (8)) išplaukia iš pačios binominio koeficiento prasmės, kiti yra įrodomi panaudojant matematinę indukciją. Kai kada pakanka pritaikyti koeficientų skaičiavimo formulę. Galima derinti keletą metodų arba panaudoti anksčiau gautas lygybes. Visų jų neįmanoma pateikti viename vadovėlyje. Mes truputį pasimokysime įrodymų technikos ir išvesime keletą naudingų savybių.

Tegul $i, j, k, m, n \in \mathbb{Z}_+$, be to, $0! = 1$ ir $\binom{n}{0} := 1$.

38 teorema. *Jei* $0 \leq m \leq k \leq n$, *tai*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m},$$

Įrodymas. Panaudojame binominių koeficientų skaičiavimo formulę. Dydis, esantis kairioje pusėje lygus

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{m!(k-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-m)!} \\ = &\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!((n-m)-(k-m))!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. ◇

39 teorema.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}, \qquad \sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Įrodymas. Pakanka pritaikyti matematinę indukciją n atžvilgiu ir Paskalio lygybę. ◇

Palyginkite ką tik įrodytas formules su 8 sąryšiu, kuriame binominiai koeficientai buvo sumuojami pagal apatinį indeksą. Antroji lygybė padeda skaičiuoti natūraliųjų skaičių laipsnių sumas. Tam pakanka pastebėti, kad

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}, \qquad m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}, \ \ldots$$

Todėl laipsnių m^j sumos pagal $0 \le m \le n$ pakeičiamos binominių koeficientų sumomis pagal viršutinį indeksą. Tada pasinaudojame ką tik įrodyta teorema.

Ypač svarbūs yra žemiau įrodomi vadinamieji *ortogonalumo* ir *apgręžimo sąryšiai.* Įveskime labai patogią santrumpą – Kronekerio simbolį δ_{mn}. Jis lygus vienam, jei $m = n$, ir nuliui – kitais atvejais.

Ortogonalumo sąryšis. *Jei $m \le n$, tai*

$$S_{mn} := \sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m} = (-1)^m\delta_{mn}.$$

Įrodymas. Remdamiesi 38 teorema turime

$$S_{nm} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n-m}{k-m}.$$

Pažymėkime $j = k - m$. Jei $m \neq n$, tai

$$S_{nm} = \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j+m} \binom{n-m}{j} = (-1)^m \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} = 0.$$

Jei $m = n$, įrodinėjama lygybė triviali.

Teorema įrodyta. ◇

Apgręžimo sąryšis. *Tegu* $\{a_k\}, \{b_k\}$, $k \geq 0$, *yra dvi skaičių sekos. Jei kiekvienam* $n \geq 0$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k,$$

tai kiekvienam $n \geq 0$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k.$$

Atvirkščiai, iš antrosios lygybės išplaukia ir pirmoji.

Įrodymas. Jei teisinga pirmoji lygybė, tai įstatydami patikriname antrąją. Skaičiuojame keisdami sumavimo tvarką. To mokėmės 0.2.4 skyrelyje. Gauname

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} a_m \right)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = a_n \delta_{nn} = a_n\,.$$

Paskutiniame žingsnyje pritaikėme 0.4.4 teoremą.

Apgręžimo sąryšį pritaikykime harmoninių skaičių sekai:

$$h_n :\, = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

40 teorema. *Kiekvienam* $n \geq 1$ *turime*

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}$$

ir

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} h_k.$$

Įrodymas. Nagrinėkime pirmąją iš šių lygybių. Dešinėje pusėje esančiam binominiam koeficientui pritaikome Paskalio lygybę. Gauname

$$\begin{aligned} a_n: &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)\frac{1}{k} \\ &= a_{n-1} + (-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{1}{n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k}. \qquad (10) \end{aligned}$$

Antrasis dėmuo lygus nuliui. Skaičiuojame trečiąjį. Jis lygus

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} = -\frac{1}{n}[(1-1)^n - 1] = \frac{1}{n}.$$

Įstatę į (10) lygybę gauname rekurentųjį sąryšį

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Kadangi $a_1 = 1$, pagal matematinės indukcijos principą iš jo išplaukia

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = h_n.$$

Vadinasi, pirmoji iš teoremos lygybių yra teisinga.

Pažymėkime $b_n = -1/n$, kai $n \geq 1$, ir $b_0 = 0$. Panašiai, tegul $a_0 = 0$. Pastebėkime, kad galime pritaikyti apgręžimo formulę su $a_n = h_n$, $n \geq 1$. Iš jos išplaukia antrasis mūsų teoremos sąryšis.

Teorema įrodyta. ◇

Ateityje mes dar kartą sugrįšime prie binominio koeficiento savybių, jų išvedimui panaudodami Niutono binomo formulę.

0.5 Rėčio principas

0.5.1 Aibių sąjungos galia

Nustebote išgirdę žodį ,,rėtis". Iš tiesų, jį verta panaudoti skaičiuojant kai kurių aibių galias. Dažnai yra patogiau suskaičiuoti poaibių galias nevengiant dubliavimo ir keleriopo tų pačių elementų skaičiavimo, o paskui ,,išsijoti" perteklių.

Kalbama, kad terminas kilęs iš skylėtų molinių plokštelių, rastų kasinėjant Babilono teritoriją. Savo forma jos priminė buitinius rėčius, tačiau tolesni tyrimai parodė, kad tai – pirminių skaičių lentelės! Iš tiesų, iš eilės surašę natūraliuosius skaičius iki 100 matavimų 10×10 lentelėje ir išdurdami skylutes vietoje 1, vietoje 4, 6 ir kitų dvejeto kartotinių ir t.t. – vietoje visų pirminių skaičių $p \leq 7$ kartotinių kp su $k = 2, 3, \ldots$, gautume kažką panašaus į rėtį. Likę neišdurti skaičiai yra pirminiai. Pastebėkime, kad kartotinių $kp \leq x$, $k = 1, 2, \ldots$, skaičius yra sveikoji dalis $[x/p]$; tai įžiūrėti buvo nesunku. Tuo tarpu, suskaičiuoti pirminių skaičių, neviršijančių x, kiekį nelengva, jei x yra didelis. Kadangi atliktus kartotinių skaičių išsijojimo žingsnius galima suskaičiuoti, atsiranda galimybė spręsti ir sunkesnę pirminių skaičių problemą.

Šiame skyrelyje išmoksime suskaičiuoti susikertančių aibių sąjungos galią. Apibendrinsime nesunkiai suvokiamas formules

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ir

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (11)$$

Joms išvesti pakanka grafinės iliustracijos:

Paveikslai rodo, kad sudėjus aibių A, B, C galias, aibių sankirtose esantys elementai buvo skaičiuojami kelisyk. Tad teko atimti, kas per daug buvo pridėta.

Pavyzdys. *Kiek natūraliųjų skaičių, neviršijančių* 100*, dalijasi iš* 3*,* 5 *arba* 7?

Sprendimas. Pažymėkime skaičiaus $m \in \mathbb{N}$ kartotinių aibę

$$E_m = \{n = km \leq 100 \colon\ k \geq 1\}.$$

Ieškomasis skaičius yra $|E_3 \cup E_5 \cup E_7|$. Kadangi

$$|E_m| = |\{k \geq 1\colon\ km \leq 100\}| = \left[\frac{100}{m}\right],$$

tai galime pasinaudoti (11) formule. Reikia pastebėti, kad $E_3 \cap E_5 = E_{15}$, $E_3 \cap E_7 = E_{21}$, $E_5 \cap E_7 = E_{35}$ ir $E_3 \cap E_5 \cap E_7 = E_{105} = \emptyset$. Vadinasi,

$$\begin{aligned} |E_3 \cup E_5 \cup E_7| &= |E_3| + |E_5| + |E_7| - |E_{15}| + |E_{21}| - |E_{35}| + |E_{105}| \\ &= 33 + 20 + 14 - 6 - 4 - 2 + 0 = 55. \end{aligned}$$

Išnagrinėkime bendrąjį atvejį ir raskime elementų, esančių sąjungoje

$$U\colon = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

skaičių. Pažymėkime

$$a(i) = |A_i|, \quad a(i,j) = |A_i \cap A_j|, \quad \ldots \quad , \quad a(i_1, \ldots, i_k) = |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Čia $1 \leq i < j$, $i_1 < \cdots < i_k$, $1 \leq k \leq n$. Apibrėžkime sumas

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} a(i), \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a(i,j), \ \ldots\ , \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} a(i_1, \ldots, i_k),$$

kai $1 \leq k \leq n$.

Įsidėmėkime, kad sumoje S_k yra sumuojama pagal visus sutvarkytuosius k skirtingų indeksų rinkinius $(i_1, \ldots, i_k)$, sudarytus iš visos indeksų aibės $\{1, 2 \ldots, n\}$. Kadangi kiekvieną k indeksų poaibį galima užrašyti didėjančia tvarka, tai sumoje S_k yra $\binom{n}{k}$ dėmenų.

41 teorema. *Bet kokių baigtinių aibių $A_1, \ldots, A_n$ sąjungos U galia yra lygi*

$$|U| = |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n.$$

Įrodymas. Nors Skaitytojas galėtų įrodyme pritaikyti matematinę indukciją n atžvilgiu, mes nepraleisime progos išmokyti kito gana formalaus metodo.

Funkciją $I_A : U \to \{0, 1\}$ vadinsime poaibio $A \subset U$ *indikatoriumi*, jeigu $I_A(x) = 1$ tada ir tik tada, kai $x \in A$. Vadinasi,

$$|A| = \sum_{x \in U} I_A(x).$$

Anksčiau įvestas aibių galias perrašome:

$$\begin{aligned} a(i) &= \sum_{x\in U} I_{A_i}(x), \\ a(i,j) &= \sum_{x\in U} I_{A_i\cap A_j}(x), \dots, \\ a(i_1,\dots,i_k) &= \sum_{x\in U} I_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}(x), \end{aligned}$$

čia $1 \le i < j \le n$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. Vadinasi,

$$S_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \sum_{x\in U} I_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}(x), \quad 1 \le k \le n.$$

Pažymėkime

$$Z_k(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} I_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}(x).$$

Sukeitę sumavimo tvarką, gauname

$$S_1 - S_2 + S_3 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n = \sum_{x\in U} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x).$$

Lieka įsitikinti, kad ši suma lygi

$$|U| = \sum_{x\in U} I_U(x).$$

Kadangi $I_U(x) \equiv 1$, tam pakaks įrodyti dėmenų lygybes

$$1 = I_U(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} Z_k(x), \tag{12}$$

kiekvienam $x \in U$.

Tarkime,

$$x \in A_1, \dots, A_m,$$

bet

$$x \notin A_{m+1}, \dots, A_n$$

su kažkokiu $1 \leq m \leq n$. Šiam x gauname $Z_{m+i}(x) = 0$, jei $1 \leq i \leq n - m$. Vadinasi,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}Z_k(x) = Z_1(x) - Z_2(x) + \cdots + (-1)^{m+1}Z_m(x).$$

Sumoje $Z_k(x)$ yra sudedami 1 ir 0. Vienetų skaičius lygus kiekiui tų sankirtų

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k},$$

kurias sudaro aibės iš rinkinio $\{A_1, \ldots, A_m\}$. Tokių sankirtų yra $\binom{n}{k}$. Todėl

$$Z_k(x) = \binom{m}{k},$$

o

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}Z_k(x) &= \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m+1}\binom{m}{m} \\ &= \binom{m}{0} - (1-1)^m = 1\end{aligned}$$

su kiekvienu $1 \leq m \leq n$. Išvedę (12) lygybę, baigiame 41 teoremos įrodymą. $\diamond$

Rėčio principą dažniausiai tenka taikyti norint suskaičiuoti elementus, kurie *nepriklauso* jokiai iš aibių $A_1, \ldots, A_n$, t.y. aibės

$$\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n = U \setminus \Big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\Big)$$

galią. Čia $\overline{A}$ žymi poaibio $A \subset U$ papildinį.

Naudojantis išvesta formule, tenka skaičiuoti sumas S_k, kuriose dėmenų indeksai $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ perbėga visus galimus k poaibius. Mokant išrinkti juos iš aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ galima performuluoti 41 teoremą. Tą padarykime nagrinėjamos sąjungos papildiniui.

42 teorema. *Tarkime, kad $A_1, \ldots, A_n$ yra kažkokios baigtinės aibės X poaibiai. Pažymėkime $X_\emptyset := X$ ir bet kokiam netuščiam poaibiui $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$*

$$X_J := \cap_{i \in J} A_i.$$

Aibės X elementų, nepriklausančių jokiai iš aibių A_i, skaičius lygus

$$\sum_{J\subset\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|J|}|X_J|.$$

Čia sumuojama pagal visus aibės $\{1,2,\dots,n\}$ poaibius J įskaitant ir tuščiąjį.

Įrodymas. Jei $\overline{A}_i := X \setminus A_i$, tai nagrinėjamas skaičius lygus

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Toliau pakanka pritaikyti 41 teoremą. Žinoma, tą darant reikia suvokti, kad visi k poaibiai J suformuoja sumą S_k, čia $1 \le k \le n$. $\diamond$

UŽDUOTYS.

1. Pritaikykite rėčio principą ir suraskite lygties $x_1+x_2+x_3 = 10$ sveikųjų sprendinių, tenkinančių sąlygas

$$-4 \le x_1 \le 3; \quad 0 < x_2 \le 8; \quad 4 \le x_3 \le 5,$$

skaičių.

2. Raskite šešiaženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 27, skaičių. Atsakymą sugretinkite su 0.2.1 skyrelio užduotimi.

0.5.2 Keitiniai ir netvarkų uždavinys

Bijekcinį atvaizdį $\sigma\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ vadiname n eilės *keitiniu*. Jį galime užrašyti lentelės pavidalu:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,\dots\,n \\ i_1 i_2 \dots i_n \end{pmatrix}.$$

Taip rašant suprantama, kad stulpelio viršuje esantis skaičius k yra atvaizduojamas į apačioje esantį i_k, $1 \le k \le n$. Užrašant keitinį lentele, joje stulpelių išdėstymo tvarka yra nesvarbi. Antroji eilutė sudaro skaičių aibės $\{1,2,\dots,n\}$ kėlinį. Vadinasi, iš viso yra $n!$ eilės n keitinių.

Kiek yra n eilės keitinių, kuriuose bet koks $1 \le i \le n$ pakeičiamas $j \ne i$, $1 \le j \le n$? Tokius keitinius vadinkime *netvarkingaisiais*. Kai kada ši problema sutinkama *kinų restorano uždavinio* pavadinimu. Tada ji formuluojama buitiškiau. Štai vienas iš galimų variantų.

m džentelmenų būrelis atvyksta pietauti į kinų restoraną. Rūbinėje visi atiduoda savo skrybėles, kurios po pietų grąžinamos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad $1 \leq r \leq m$ iš šių klientų atgavo savo skrybėles?

Mes grįšime prie šio uždavinio, bet prieš tai suskaičiuokime reikalingus keitinius.

43 teorema. *Eilės n netvarkingųjų keitinių skaičius*

$$t_n := n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{13}$$

Įrodymas. Tegul A_k yra aibė keitinių su savybe $i_k = k$, X – visa keitinių aibė, o $\overline{A}_k = X \setminus A_k$, $1 \leq k \leq n$. Pagal 41 teoremą

$$\begin{aligned} t_n &= |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\ &= |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= |X| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n. \end{aligned} \tag{14}$$

Čia, kaip ir anksčiau

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_1 \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Aibių sankirta šioje sumoje yra sudaryta iš keitinių, kurie palieka vietoje $i_1, \ldots, i_k$. Kitų $n-k$ elementų keitimui jokių apribojimų nėra. Todėl iš viso šių keitinių yra tiek kiek ir yra $n-k$ eilės kėlinių, t.y. $(n-k)!$. Taigi,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_1 \cdots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

nes sumoje buvo $\binom{n}{k}$ vienodų dėmenų. Kadangi $|X| = n!$, tai įstatę gautas reikšmes į (14), baigiame teoremos įrodymą.

Kinų restorano uždavinio sprendimas. Pakanka klasikinio tikimybės apibrėžimo: suradę, kiek yra galimų įvykių, kada r klientų atgauna savo skrybėles, šį skaičių padalysime visų galimų skrybėlių atidavimo variantų skaičiaus.

Sunumeruokime džentelmenus bei jų skrybėles nuo 1 iki m. Jei j-asis klientas gavo i_j-ą skrybėlę, tai keitiniai

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots\ m \\ i_1 i_2 \ldots i_m \end{pmatrix}$$

žymi visus $m!$ įmanomų įvykių. Mums palankius įvykius žyminčiuose keitiniuose sutapimas $i_j = j$ turi pasikartoti lygiai r kartų, o visų likusių $m - r$ klientų aibės indeksai turi sudaryti netvarkingąjį keitinį. Pagal ką tik įrodytą teoremą šis skaičius lygus

$$t_{m-r} = (m-r)! \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Kadangi r poaibių, kurių elementus keitinys palieka vietoje, yra $\binom{m}{r}$, tai gauname

$$\frac{m!}{r!(m-r)!}\,(m-r)! \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

palankių įvykių. Vadinasi, uždavinio atsakymas yra tikimybė

$$\frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Spręsdami uždavinį, klasifikavome visus keitinius į klases pagal tai, kiek elementų keitinys palieka vietoje. Tie samprotavimai įrodo tokią lygybę:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_{n-k}, \quad n \geq 1. \tag{15}$$

UŽDUOTIS. Panaudoję binominių koeficientų apgręžimo sąryšį, iš (15) išveskite (13).

0.5.3 Keitinio skaidinys ciklų sandauga

Keitiniai yra svarbūs visoms matematikos ir informatikos šakoms, todėl jiems pašvęskime dar vieną skyrelį. Pradžioje trumpam įsibrausime į algebros sritį ir pastebėsime, kad visi aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ keitiniai sudaro algebrinę struktūrą, t.y. tarp jų galime apibrėžti algebrinę operaciją – daugybą.

Tegul $\mathbb{S}_n$ yra keitinių aibė. Pasinaudokime praeitame skyrelyje įvestomis lentelėmis. Jei $\sigma \in \mathbb{S}_n$, tai šįkart skaičiaus i vaizdą yra patogiau žymėti $i\sigma$, o ne $\sigma(i)$, kaip esame įpratę atvaizdžių teorijoje. Jei $\sigma_1 \in \mathbb{S}_n$, tai vaizdo vaizdą žymėkime $(i\sigma)\sigma_1$ ir t.t. Dabar keitinio σ lentelė atrodytų šitaip:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \ldots & n\sigma \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Jei $\sigma, \sigma_1 \in \mathbb{S}_n$ yra du keitiniai, tai jų *sandauga* $\sigma\sigma_1$ yra vadinamas keitinys su tokia lentele:

$$\sigma\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ (1\sigma)\sigma_1 & (2\sigma)\sigma_1 & \dots & (n\sigma)\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Taigi, du iš eilės pritaikyti atvaizdžiai vaizduoja taip, kaip ir jų sandauga. Bet nesumaišykime jų panaudojimo tvarkos! Patikrinkite, ar teisinga:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,1\,6\,4\,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,2\,4\,1\,3\,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,2\,4\,1\,3\,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,1\,6\,4\,5 \end{pmatrix}.$$

Panašūs pavyzdžiai rodo, kad keitinių sandaugoje daugiklių tvarkos keisti negalima. Moksliškai kalbant, ši sandauga yra *nekomutatyvi.* Tačiau jai galioja *asociatyvumo dėsnis*:

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

su bet kokiais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{S}_n$. Keitinys su lentele

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

turi savybę: $I\sigma = \sigma I = \sigma$ su bet kokiu $\sigma \in \mathbb{S}_n$, todėl jis vadinamas *vienetiniu* (tapačiuoju). Iš (16) sukeičiant eilutes vietomis gautas keitinys

$$\sigma^{-1} \colon = \begin{pmatrix} 1\sigma & 2\sigma & \dots & n\sigma \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

turi savybę $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I$, todėl jis vadinamas *atvirkštiniu* keitiniui σ.

Apibrėžimas. *Keitinių aibė su viršuje apibrėžta daugybos operacija yra vadinama simetrine grupe.*

Išskirkime tokius keitinius $\varkappa \in \mathbb{S}_n$, kurie vienus skaičius, sakykime, $i_1, i_2, \dots, i_k$, $1 \le k \le n$, vaizduoja cikliškai, t.y.

$$i_1 \xrightarrow{\varkappa} i_2 \xrightarrow{\varkappa} \cdots \xrightarrow{\varkappa} i_k \xrightarrow{\varkappa} i_1,$$

o likusius aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ elementus palieka vietoje. Kitaip tariant, $i\varkappa = i$, jei $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Juos vadinkime k ilgio *ciklais* ir žymėkime

$$\varkappa = (i_1, i_2, \dots, i_k).$$

Ciklui $\varkappa$ atvirkštinis keitinys bus ciklas

$$\varkappa^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1).$$

Susitarkime skaičius $i_1, i_2, \ldots, i_k$ vadinti *slankiaisiais* ciklo $\varkappa$ simboliais. Du ciklus su nesikertančiomis slankiųjų simbolių aibėmis vadinkime *nepriklausomais.*

Kadangi tą patį $\varkappa$ galime užrašyti ir dar $k-1$ būdų:

$$\varkappa = (i_2, i_3, \ldots, i_k, i_1) = \ldots (i_k, i_1, \ldots, i_{k-1}),$$

tai iš viso turime $k!/k = (k-1)!$ ilgio k ciklų su fiksuotu slankiųjų simbolių $i_1, i_2, \ldots, i_k$ poaibiu. Pastebėkime, kad vienetinio ilgio ciklas $\varkappa = (i)$ tik pažymi, kad $i\varkappa = i$. Toks ciklas nekeičia i kaip ir visų likusių skaičių. Iš tiesų, jis yra vienetinis keitinys.

44 teorema. *Kiekvienas keitinys $\sigma \in \mathbb{S}_n$ yra išreiškiamas poromis nepriklausomų ciklų sandauga*

$$\sigma = \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_w, \quad 1 \leq w = w(\sigma) \leq n. \tag{17}$$

Be to, ši išraiška yra vienintelė, jei neatsižvelgiama į ciklų išdėstymo tvarką.

Įrodymas. Pažymėkime $\sigma^0 = I$, $\sigma^1 = \sigma, \ldots \sigma^m = (\sigma^{m-1})\sigma$, čia $m \geq 1$, ir pastebėkime, kad kiekvienam $1 \leq i \leq n$ yra toks $m \geq 1$, kad

$$i, i\sigma, \ldots i\sigma^m = i. \tag{18}$$

Iš tiesų, sekos $i\sigma^m$, $m \geq 1$ nariai priklauso aibei $\{1, 2, \ldots, n\}$, todėl būtinai atsiras pasikartojančių narių. Tegul

$$i\sigma^r = i\sigma^s, \quad 1 \geq r < s.$$

Atvaizdavę šiuos skaičius keitiniu σ^{-r}, gauname $i = i\sigma^{s-r}$. Vadinasi, $m = s - r \in \mathbb{N}$, priklausantis nuo pačio i ir turintis (18) savybę, egzistuoja. Toliau imame mažiausią iš tokių m. Įžvelgiame, kad tada

$$\varkappa(i) \colon = (i, i\sigma, \ldots i\sigma^{m-1})$$

yra skaičiaus i generuotas ciklas.

Dabar norimą keitinio skaidinį galima gauti algoritmniškai. Pradėję ciklu $\varkappa(1) = (1, 1\sigma, \ldots 1\sigma^{m-1})$ ir dar neišsėmę visų skaičių iki n, imame vieną iš dar nepatekusių į ciklą ir suformuojame jo generuotą ciklą. Per baigtinį žingsnių skaičių, išsėmę visus skaičius, sudarysime ciklų rinkinį

$$\varkappa(1), \ldots, \varkappa(i), \ldots, \varkappa(j), \ldots, \varkappa(w). \tag{19}$$

Jie yra poromis nepriklausomi, nes iš dviejų skirtingų ciklų narių sutapimo $i\sigma^r = j\sigma^l$ išplaukia lygybė $i\sigma^{r-l} = j$, rodanti, kad j turėjo būti cikle $\varkappa(i)$.

Sudauginę (19) ciklus gauname keitinį σ. Pastebėkime, kad dauginant nepriklausomus ciklus juos galime keisti vietomis.

Tikrindami skaidinio vienatį, tariame priešingai. Tegul

$$\sigma = \varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_w = \varkappa_1'\varkappa_2'\cdots\varkappa_{w'}$$

yra du skaidiniai ciklais. Palyginame ciklus, kuriuose slankiuoju simboliu yra 1. Tarkime, kad tai $\varkappa_1$ ir $\varkappa_1'$. Cikliškai keisdami slankiuosius simbolius, abu ciklus galime pradėti vienetu. Bet tada, kaip buvome pastebėję

$$\varkappa_1 = \varkappa_1' = (1, 1\sigma, \ldots 1\sigma^{m-1}).$$

Panašiai, pasielgę su kitais skaičiais, nepatekusiais į išnagrinėtą ciklą, įrodome ir kitų ciklų sutapimą.

Teorema įrodyta. ◇

Pavyzdys. Išskaidome keitinį

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 2\,3\,1\,4\,6\,5\,7 \end{pmatrix} = (1,2,3)(4)(5,6)(7).$$

Funkcinis digrafas vaizdžiai parodo skaidinio ciklais prasmę:

Ciklų skaičiaus $w(\sigma)$ skaidinyje (17) savybės bus nagrinėjamos kituose vadovėlio skyriuose. Kiek yra keitinių, turinčių k, $0 \le k \le n$, ciklų? Ieškomą skaičių pažymėkime $c(n,k)$ ir pastebėkime, kad $c(n,0) = 0$, jei $n \ge 1$.

45 teorema. *Eilės n keitinių, turinčių k, $1 \le k \le n$, ciklų, skaičius tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$c(n+1,k) = c(n,k-1) + nc(n,k).$$

Įrodymas. Nagrinėjame visus aibės $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ keitinius, išskaidytus k ciklų sandauga. Juos suskirstome į dvi klases.

Tegul pirmosios klasės keitiniuose simbolis $n+1$ generuoja vienetinio ilgio ciklą. Kadangi skaičiai, neviršijantys n, yra $k-1$ cikle, tai tokių keitinių yra $c(n, k-1)$.

Antrosios klasės keitinius galime gauti iš visų aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ keitinių, turinčių k ciklų, paeiliui įrašant į ciklus $n+1$. Kiek yra tokių pozicijų, kad taip įrašydami gautume vis skirtingus ciklus? Jei $\varkappa = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$ yra bet kuris iš l ilgio ciklų, tai turime l tokių pozicijų. Visų ciklų ilgių l suma yra lygi n. Vadinasi, antros klasės keitinių yra $nc(n, k)$. Sudėję rastas abiejų klasių galias, gauname teoremoje nurodytą sąryšį.

Įrodyta. ◇

Pastebėkime įdomių sąsajų su polinomų algebra. Pažymėkime $(x)_0 = 1$ ir

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Šį polinomą išreiškime kanonine forma

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{20}$$

Čia apibrėžti koeficientai $s(n, k)$, $0 \le k \le n$, $n \ge 0$, yra vadinami *pirmos rūšies Stirlingo*[21] *skaičiais.* Matome, kad $s(0, 0) = 1$, $s(n, 0) = 0$, jei $n \ge 1$, $s(n, n) = 1$, o $s(n, k) = 0$, jei $k > n$.

46 teorema. *Pirmos rūšies Stirlingo skaičiai $s(n, k)$ tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k).$$

Įrodymas. Iš (20) išplaukia

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)x^k &= (x)_{n+1} = (x-n)(x)_n = (x-n)\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \big(s(n,k-1) - ns(n,k)\big)x^k.\end{aligned}$$

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame teoremos įrodymą. ◇

[21] James Stirling (1692-1770) - škotų matematikas.

Pakeitę lygybėje (20) nežinomąjį x į $-x$ ir abiejų pusių ženklus, gauname

$$x(x+1)\cdots(x+n-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)x^k.$$

Samprotaudami kaip ir 46 teoremos įrodyme, gauname jau 45 teoremoje regėtą rekurenčiąją formulę

$$(-1)^{n+1-k}s(n+1,k)=(-1)^{n+1-k}s(n,k-1)+n(-1)^{n-k}s(n,k).$$

Įsitikinkite savarankiškai! Iš čia išplaukia tokia išvada.

Išvada. *Eilės n keitinių, turinčių $0\le k\le n$ ciklų, skaičius*

$$c(n,k)=(-1)^{n-k}s(n,k)=|s(n,k)|.$$

Čia $s(n,k)$ yra pirmos rūšies Stirlingo skaičius.

UŽDUOTIS. Įrodykite lygybę

$$n!=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k),\quad n\ge 1.$$

0.5.4 Siurjekcijų skaičius

Užpraeitame skyrelyje įsitikinome, kad tam tikri atvaizdžiai gerai modeliuoja net skrybėlių grąžinimo problemą. Dabar išnagrinėsime uždavinį:

Keliais būdais n skirtingų rutulių galime taip sudėti į m, $m\le n$ skirtingų dėžių, kad nei viena neliktų tuščia?

Tarkime, kad $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ yra rutulių aibė, o $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ – dėžės. Įdėdami rutulį x_i mes priskiriame jam dėžės numerį, todėl visų rutulių sudėjimas į dėžes yra ekvivalentus atvaizdžio $f\colon X\to Y$ apibrėžimui. Be to, uždavinio sąlyga reikalauja, kad atvaizdis f būtų surjekcinis.

Tegul, kaip ir anksčiau, $\mathcal{F}_s=\mathcal{F}_s(n,m)$ žymi n aibės į m aibę siurjekcijų visumą. Jei $m>n$, tai $|\mathcal{F}_s(n,m)|=0$.

47 teorema. *Jei $m\le n$, tai*

$$|\mathcal{F}_s(n,m)|=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n.$$

Įrodymas. Tegul $\mathcal{F} = \mathcal{F}(n,m)$ yra visų atvaizdžių aibė. Pagal 7 teoremą $|\mathcal{F}| = m^n$.

Tegu $Y = \{y_1, y_2 \dots, y_m\}$, o aibę A_j sudaro atvaizdžiai, negyjantys reikšmės y_j, $1 \le j \le m$. Pagal tą pačią atvaizdžių skaičiaus teoremą gauname

$$|A_j| = (m-1)^n, \quad |A_i \cap A_j| = (m-2)^n, \quad \dots \quad , |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n.$$

Čia $1 \le i < j \le m$, $1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le m$. Pastebėkime, kad pastarųjų k poaibių sankirtų iš viso yra $\binom{m}{k}$.

Kiekviena iš siurjekcijų įgyja visas reikšmes y_j, todėl

$$\mathcal{F}_s = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \overline{A}_m.$$

Pagal praeito skyrelio teoremos išvadą

$$|\mathcal{F}_s| = |\mathcal{F}| - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^m S_m.$$

Čia

$$\begin{aligned} S_1 &= \binom{m}{1}(m-1)^n, \quad S_2 = \binom{m}{2}(m-2)^n, \dots, \\ S_{m-1} &= \binom{m}{m-1}(m-m+1)^n, \quad S_m = 0. \end{aligned}$$

Įstatę į prieš tai užrašytą formulę, baigiame įrodymą.

Išvada. *Visiems $n \ge 1$ yra teisinga lygybė*

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n.$$

Įrodymas. Kiekviena n aibės siurjekcija į ją pačią yra ir bijekcija, o bijekcijų skaičius sutampa su n keitinių kiekiu. Toliau pritaikome teoremą, kai $n = m$.

0.5.5 Aibės skaidiniai

Aibės A *skaidiniu* (k skaidiniu) vadiname išraišką

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_k, \quad A_j \subset A, A_j \ne \emptyset, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \le i < j \le n. \tag{21}$$

Čia į apjungiamų poaibių tvarką yra neatsižvelgiama. Tegul $\mathcal{S}(n,k)$ yra visų (21) skaidinių aibė. Jos galia $S(n,k) := |\mathcal{S}(n,k)|$ vadinama *antros rūšies Stirlingo skaičiumi.* Juos skaičiuodami pasinaudosime aibės A siurjekcijomis į k aibę $B := \{1,\ldots,k\}$. Tegul

$$\mathcal{F}_s(n,k) := \{f\colon A \to B,\ f - siurjekcija\}.$$

Iš 47 teoremos išplaukia lygybė

$$|\mathcal{F}_s(n,k)| = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n. \qquad (22)$$

Iš (22) išvesime antros rūšies Stirlingo skaičių $S(n,k)$, $1 \le k \le n$, formulę. Susitarkime, žymėti $S(0,0) = 1$.

48 teorema.

$$S(n,k) = \frac{|\mathcal{F}_s(n,k)|}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Įrodymas. Jei $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ir $f \in \mathcal{F}_s(n,k)$, tai ši funkcija nurodo, kurie aibės elementai pateko į kurį poaibį. Pažymėję

$$A_j = \{a_i \in A:\ f(i) = j\}, \quad 1 \le j \le k,$$

gauname vieninteli skaidinį $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Atvirkščiai, turėdami tokį skaidinį, įvairiais galimais būdais galime pernumeruoti aibes A_j ir apibrėžti $k!$ siurjekcijų. Taip iš vieno skaidinio gauname $k!$ siurjekcijų. Taigi, $|\mathcal{F}_s(n,k)| = k!S(n,k)$. Toliau pakanka pritaikyti (22) formulę. ◇

Visų galimų n aibės A skaidinių skaičius, vadinamas *Belo skaičiumi.* Tradiciškai jis žymimas raide B_n. Taigi,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Dabar išvesime vieną rekurentųjį sąryšį.

49 teorema. *Susitarkime žymėti $S(0,0) = 1$ ir $S(n,0) = 1$, jei $n \ge 1$. Tada*

$$S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1), \quad 1 \le k < n+1.$$

Įrodymas. Panašiai kaip ir Paskalio teoremos įrodyme, visus aibės $A = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ skaidinius perskirkime į dvi dalis. Vieną dalį sudarykime iš tokių skaidinių, kuriuose vienas iš jungiamų poaibių yra $\{n+1\}$. Tai bus skaidiniai pavidalo:

$$A = A_1 \cup \ldots A_{k-1} \cup \{n+1\}.$$

Čia poaibiuose $A_j,\ 1 \leq k-1$, nėra $n+1$. Tokių skaidinių yra $S(n, k-1)$.

Kitą dalį sudarantys likusieji skaidiniai gali būti gauti tokiu būdu. Imkime aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ skaidinius k poaibių sąjunga

$$\{1, 2, \ldots, n\} = A'_1 \cup \cdots \cup A'_k.$$

Jų yra $S(n, k)$. Prijunkime paeiliui $n+1$ prie $A'_j,\ 1 \leq j \leq k$. Taip iš kiekvieno tokio skaidinio padarytume k pradinės aibės A skaidinį. Todėl antroje skaidinių klasėje yra $kS(n, k)$ aibės A skaidinių. Sudėję abiejų klasių galias, gauname $S(n+1, k)$. $\diamond$

Kaip ir pirmos rūšies, taip ir antros rūšies Stirlingo skaičiai yra sutinkami polinomų algebroje. Prisiminkime žymenį

$$(x)_k = x(x-1)\ldots(x-k+1), \quad (x)_0 = 1.$$

50 teorema. *Jei $S(n, 0) := 0$, kai $n \in \mathbb{N}$, ir $S(0, 0) = 1$, tai*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)(x)_k \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0, \quad 0^0 := 1. \tag{23}$$

Įrodymas. Atvejis $n = 0$ yra trivialus. Tegu toliau $n \in \mathbb{N}$. Abiejose įrodinėjamos lygybės pusėse yra n laipsnio polinomai, todėl pakanka ją patikrinti dėl daugiau negu n taškų. Įrodysime, kad ji teisinga su visais natūraliaisiais $x = m \geq n$. Tuo tikslu, nagrinėjame atvaizdžius

$$g \colon A \to Y := \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Jų yra m^n. Šį skaičių apskaičiuojame kitu būdu klasifikuodami atvaizdžius pagal aibės A vaizdus $X: = g(A) \subset Y$. Taip susiaurinę reikšmių aibę pastebime, kad $g \colon A \to X$ yra siurjekcija. Tarp šių siurjekcijų ir atvaizdžių yra abipus vienareikšmė atitiktis, todėl galime skaičiuoti tik siurjekcijas. Jas klasifikuojame į klases pagal tai, kiek elementų yra poaibiuose X ir kokie jie. Poaibyje X gali būti $1, 2, \ldots, n$ elementų. Jei $|X| = k$ ir šio poaibio elementai yra fiksuoti, tai gauname $|\mathcal{F}_s(n,k)|$ skirtingų siurjekcijų. Pakeitę $X \subset Y$ kitu tos pačios galios poaibiu, vėl gautume tiek pat skirtingų siurjekcijų. Vadinasi, visų siurjekcijų (taip pat ir atvaizdžių g) skaičius gali būti užrašomas šitaip:

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{X \subset Y,\, |X|=k} |\mathcal{F}_s(n,k)|.$$

Čia vidinėje sumoje yra sumuojama pagal visus k galios poaibius X, kurių aibėje Y yra $\binom{m}{k}$. Pasinaudoję 47 teorema, gauname

$$\begin{aligned} m^n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{X \subset Y,\, |X|=k} S(n,k)k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)k! \sum_{X \subset Y,\, |X|=k} 1 = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)k! \binom{m}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(m)_k. \end{aligned}$$

Jei $n \in \mathbb{N}$, pagal susitarimą $S(n,0) = 0$, todėl pastarojoje sumoje galėtume prijungti nulinį dėmenį, atitinkantį $k = 0$. Taip gautume teoremoje pateiktą formulę. $\diamond$

Skyrelyje 0.5.3, panaudodami polinomų lygybes (20), apibrėžėme pirmos rūšies Stirlingo skaičius $s(n,k)$ ir susiejome juos su tam tikrų keitinių skaičiumi. Dabar, jau susipažinusiems su tiesine algebra, paminėsime algebrinę Stirlingo skaičių prasmę. Kiti skaitytojai gali peršokti prie sekančio skyrelio.

Žinoma, kad polinomai, kurių laipsnis neviršija n, sudaro vektorinę erdvę $\mathbb{R}_n[x]$ virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$. Polinomai

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

yra jos bazė. Pastebėkime, kad polinomai

$$(x)_0 = 1, (x)_1 = x, (x)_2 = x(x-1), \ldots, (x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

taip pat sudaro bazę. Per juos vienareikšmiškai galime išreikšti bet kurį polinomą iš $\mathbb{R}_n[x]$. Vadinasi, (20) ir (23) lygybės yra ne kas kita, o tik vienos bazės pakeitimo kita formulės. Iš esmės šia idėja bus pasinaudojama sekančios teoremos įrodyme, nors mes ir nevartosime vektorinių erdvių terminijos.

51 teorema. *Stirlingo skaičiai tenkina tokį ortogonalumo sąryšį:*

$$\sum_{k=m}^{n} S(n,k)s(k,m) = \delta_{mn}, \quad m,n \geq 0.$$

Įrodymas. Pasinaudokime tik polinomų savybėmis. Gauname

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\Big(\sum_{m=0}^{k} s(k,m)x^m\Big) \\ &= \sum_{m=0}^{n}\Big(\sum_{k=m}^{n} S(n,k)s(k,m)\Big)x^m. \end{aligned}$$

Palyginę polinomų koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame 51 teoremos įrodymą. $\diamond$

UŽDUOTYS:

1. Išveskite rekurenčiąją Belo skaičių formulę

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Keliais būdais 6 skirtingus rutulius galime taip sudėti į 3 vienodas dėžes, kad nei viena neliktų tuščia?

0.6 Rekurentieji sąryšiai

0.6.1 Generuojančiųjų eilučių algebra

Ankstesniuose skyreliuose dažnai pasinaudodavome polinomais. Nagrinėjant begalines sekas $\{a_n\}$, $n \geq 0$, yra patogu įvesti formalias begalines eilutes

$$A(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

vadinamas *generuojančiojomis eilutėmis*. Čia a_n gali būti realieji skaičiai arba priklausyti kokiam nors kitam kūnui. Kol kas mes apsiribosime realiaisiais skaičiais. Jei $a_m = 0$, visiems $m > n$, tai generuojanti eilutė virsta polinomu. Nežinomajam x kaip ir polinomų algebroje nesuteikiame jokios prasmės. Nekalbame ir apie eilutės konvergavimą vienokia ar kitokia prasme, kaip yra įprasta matematinėje analizėje. Šios eilutės neapibrėžia funkcijos; bet kuri jos reikšmė $A(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, išskyrus $A(0) = 0$, yra neapibrėžta. Nežiūrint to, labiau iš įpročio, generuojančios eilutės vadinamos *funkcijomis*. Kalbos įvairumo vardan ir mes šitaip retsykiais pasielgsime.

Generuojančios eilutės yra puiki priemonė apibrėžti algebrines operacijas begalinių sekų aibėje. Operacijos su eilutėmis apibrėžiamos formaliai kaip ir su polinomais.

Tarkime, kad

$$B(x) \colon = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Sakome, kad $A(x) = B(x)$ tada ir tik tada, jei $a_n = b_n$ kiekvienam $n \geq 0$. Šių eilučių suma vadinama eilutė

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) \colon &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + b_n\big) x^n, \end{aligned}$$

o sandauga – eilutė

$$\begin{aligned} A(x)B(x) \colon &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)2x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Bigg) x^n. \end{aligned}$$

Atkreipkime dėmesį, kad čia sudedame ar dauginame panariui, o su koeficientais atliekame aritmetinius veiksmus, bet visada tik su baigtiniu jų skaičiumi. Iš skaičių veiksmų savybių išplaukia generuojančių eilučių veiksmų ypatybės. Kaip ir polinomams galioja šie dėsniai:

(i) komutatyvumo:

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x), \qquad A(x)B(x) = B(x)A(x);$$

(ii) asociatyvumo:

$$\begin{aligned} \big(A(x) + B(x)\big) + C(x) &= A(x) + \big(B(x) + C(x)\big), \\ \big(A(x)B(x)\big)C(x) &= A(x)\big(B(x)C(x)\big), \end{aligned}$$

čia $C(x)$ yra trečia eilutė;

(iii) distributyvumo:

$$\big(A(x)+B(x)\big)C(x) = A(x)C(x) + B(x)C(x).$$

Eilutė su $a_n \equiv 0$ vaidina nulio, o eilutė su $a_0 = 1$ ir $a_n = 0$, kai $n \geq 1$, – vieneto vaidmenį. Jas žymėkime 0 ir 1. Eilutei $A(x)$ priešingoji eilutė turi koeficientus $-a_n$, $n \geq 0$. Taigi, galime sakyti, kad generuojančių eilučių aibė su šiomis sudėties ir daugybos operacijomis sudaro *komutatyvų žiedą* su vienetu.

Apibrėžę realaus skaičiaus c ir eilutės $A(x)$ sandaugą

$$cA(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots = \sum_{n\geq 0} ca_n x^n,$$

nesunkiai patikrintume, kad eilutes sudaro tiesinę erdvę virš realiųjų skaičių kūno.

Galime įvesti ir daugiau formalių operacijų su eilutėmis. Pavyzdžiui, eilutės $A(x)$ *išvestine* vadinti

$$A'(x) \colon = a_1 + 2a_2x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

o *integralu* – eilutę

$$\int_0^x A(u)\mathrm{d}u \colon = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Kaip paprasta, jokių konvergavimo reikalavimų! Tačiau sunkumai iškyla norint apibrėžti dviejų eilučių *superpoziciją* $A(B(x))$. Bandykime skaičiuoti

$$\begin{aligned} A(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) &= a_0 + a_1(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &+ a_2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{24}$$

Pakelti laipsniais mokame, bet vėliau reiktų sutraukti panašiuosius narius, t.y. narius su vienodais x-o laipsniais. Ką daryti su laisvaisiais nariais

$$a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \cdots \quad ?$$

Deja, ši begalinė suma yra neapibrėžta. Todėl tenka reikalauti, kad $b_0 = 0$. Kiti koeficientai prie x^n, kai $n \geq 1$, reiškinyje (24) nesunkiai sutraukiami, nes jie išsireiškia per baigtinį skaičių pirmųjų koeficientų.

Įsidėmėkime: superpozicija $A(B(x))$ apibrėžiama formaliai atliekant veiksmus tik esant sąlygai $b_0 = 0$.

Neprieštaraudami matematinės analizės gerbėjams palikime standartinius žymenis atskiroms eilutėms:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x = \exp\{x\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x).$$

Čia logaritmo pagrindas yra e. Pirmoji lygybė neprieštarauja sandaugai $(1-ax)(a + ax + ax^2 + \cdots) = 1$.

Tarkime, kad α yra bet koks realus skaičius, o $k \in \mathbb{Z}$. Įveskime *apibendrintąjį* Niutono binomo koeficientą

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha)_k}{k!},$$

jei $k \geq 0$, ir $\binom{\alpha}{k} = 0$, jei $k < 0$. Apibendrintoji Niutono binomo formulė

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

irgi suprantama kaip formalioji eilutė. Dydis, esantis kairioje pusėje, yra tik eilutės žymuo neprieštaraujantis analizės tradicijoms.

Taip žymėdami analizėje sutinkamas eilutes, išsaugome ir jų sąryšius:

$$\left(\int_0^x A(u)\mathrm{d}u \right)' = A(x), \qquad \int_0^x A'(u)\mathrm{d}u = A(x);$$

$$\exp\big(-\log(1-x)\big) = \frac{1}{1-x}, \qquad \log\big(1 + (\mathrm{e}^x - 1)\big) = x.$$

Pastarajame sąryšyje pridėdami ir atimdami vienetą mes pabrėžėme, kad rašant superpoziciją vidinė eilutė turi turėti nulinį laisvąjį narį. Eilutė $\mathrm{e}^x - 1$ šią sąlygą tenkina. Diferencijavimo taisyklės

$$\begin{aligned} \big(c_1 A(x) + c_2 B(x)\big)' &= c_1 A'(x) + c_2 B'(x), \\ \big(A(x)B(x)\big)' &= A'(x)B(x) + A(x)B'(x) \end{aligned}$$

yra lengvai patikrinamos panaudojant apibrėžimus. Panašiai, mūsų apibrėžti formalūs integralai turi įprastas integralų savybes.

Visi užrašytieji sąryšiai reiškia tik vieną faktą: eilutės, esančios kairėje lygybės pusėje, n-asis koeficientas sutampa su eilutės, esančios dešinėje lygybės pusėje, n-uoju koeficientu. Kai kurių savybių įrodymai vien tik kombinatorikos priemonėmis yra sudėtingi. Kaip tai yra daroma, demonstruojame tik paprastu pavyzdžiu.

Patikriname, ar

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Sudauginame panariui kairėje pusėje esančias eilutes. Jei $n \geq 1$, tai gautos eilutės koeficientas prie x^n yra lygus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!0!} - \frac{1}{(n-1)!1!} + \frac{1}{(n-2)!2!} \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{0!n!} \\ = \;& n!\left(1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\right) = n!(1-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Dažniau viršuje išvardintos lygybės tikrinamos matematinės analizės priemonėmis. Turint netrivialią eilutės $A(x)$ konvergavimo sritį $|x| < x_0$ su $x_0 > 0$ ir tuo pačiu funkciją $x \mapsto A(x)$ šioje srityje pasinaudojama Teiloro koeficientų formulėmis. Įrodyti sąryšiai tarnauja įvairių lygybių išvedimui.

Štai įsitikinus, kad

$$(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

lengvai gaunama lygybė, vadinama *Vandermondo*[22] *sąsūka.*

52 teorema. *Tegul $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ yra bet kokie skaičiai, tada*

$$\binom{\alpha+\beta}{k} = \sum_{j=1}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j}$$

Įrodymas. Išplaukia iš ankstesnės lygybės sudauginus kairioje pusėje esančias eilutes. ◇

Ypač svarbi begalinio skaičiaus eilučių su vienetiniais laisvaisiais nariais dauginimo galimybė. Tegul $a_j(k) \in \mathbb{R}$, $j \geq 1$, $k \geq 1$, ir $a_j(0) = 1$ kiekvienam $j \geq 1$. Dauginame panariui ir sutraukiame narius su vienodais x laipsniais.

[22] Aleksandre Teophile Vandermonde (1735–1796) – ??

Gauname

$$
\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} a_j(k)x^k\right) \\
= \quad & \left(1+\sum_{k_1=1}^{\infty} a_1(k_1)x^{k_1}\right)\cdots\left(1+\sum_{k_n=1}^{\infty} a_n(k_n)x^{k_n}\right)\cdots \\
= \quad & 1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=n\\ k_1,\dots,k_n\geq 0}} a_1(k_1)\cdots a_n(k_n). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Kaip matome, koeficientas prie x^n apskaičiuojamas tik iš pirmųjų n eilučių koeficientų.

Pavyzdys. Kaip ir (25), sudauginę

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^j)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

matome, kad a_n lygus adityviųjų skaidinių $n = k_1 + \cdots + k_s$, $s \geq 1$, su skirtingais natūriniais dėmenimis k_j skaičiui.

Sutraukdami narius su vienodais x laipsniais, skaičiuojame pačius kombinatorinius objektus. Ši idėja bus plačiai plėtojama III vadovėlio skyriuje. Dabar apsiribojame tik paprasčiausių formulių išvedimu.

Koši lygybė. *Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ yra teisnga lygybė*

$$\sum_{\substack{1k_1+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\dots,k_n\geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j}k_j!}=1.$$

Įrodymas. Nagrinėjame vienetų sekos generuojančią eilutę. Pritaikydami žinomus sąryšius, gauname

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} x^n \quad &= \quad \frac{1}{1-x}=\exp\{-\log(1-x)\}=\exp\left\{\sum_{j\geq 1}\frac{x^j}{j}\right\} \\
&= \quad \prod_{j\geq 1}\exp\left\{\frac{x^j}{j}\right\}=\prod_{j\geq 1}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^j}{j}\right)^k\frac{1}{k!}\right) \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\substack{1k_1+\cdots+nk_n=n\\ k_1,\dots,k_n\geq 0}} \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}.
\end{aligned}
$$

Tos pačios generuojančios eilutės dvi koeficientų išraiškos turi sutapti.

Įrodyta. ◇

Tiriant laipsnines eilutes matematinės analizės priemonėmis, tenka pagrįsti eilučių konvergavimą netrivialioje taško $x = 0$ aplinkoje. Kai koeficientų seka didėja palyginti greitai, galima normuoti juos žinoma seka. Panagrinėsime labiausiai naudojamą atvejį, kai sekos koeficientas yra dalijamas iš jo indekso faktorialo.

Sekos $\{a_n\}$, $n \geq 0$ *eksponentine generuojančia eilute* (toliau vartojama santrumpa *e.g.e.*) vadinama formali eilutė

$$\widetilde{A}(x) := a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n!} + \ldots .$$

Taigi, vienetų sekos e.g.e. yra e^x, o sekos $\{n!\}$, $n \geq 0$, – eilutė $1/(1-x)$.

Pastebėkime porą savybių, labai palengvinančių skaičiavimus.

Lema. *Jei $\widetilde{A}(x)$ yra sekos $\{a_n\}$, $n \geq 0$, e.g.e., tai $\widetilde{A}'(x)$ – sekos $\{a_{n+1}\}$, $n \geq 0$, e.g.e.*

Jei $\widetilde{B}(x)$ yra sekos $\{b_n\}$, $n \geq 0$, e.g.e., tai

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

e.g.e. yra sandauga $\widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x)$.

Įrodymas. Pirmasis teiginys išplaukia iš apibrėžimų. Pagrįsdami antrąjį tvirtinimą, eilutes sudauginame panariui

$$\widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{k!} x^n.$$

Įrodyta. ◇

Pavyzdys. Naudodami e.g.e., kitu būdu raskime netvarkingųjų n eilės keitinių skaičių. Kaip ir anksčiau jį žymėkime t_n, $n \geq 1$. Susitarkime, kad $t_0 = 1$. Prisimename atsakymą (13) ir lygybę

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_{n-k},$$

jau įrodytą 0.5.2 skyrelyje. Iš jos ir lemos išplaukia eksponentinių generuojančių eilučių sąryšis

$$\frac{1}{1-x} = \mathrm{e}^x \widetilde{T}(x), \quad \widetilde{T}(x) \colon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{n!} x^n.$$

Dabar randame funkcijos koeficientus:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(x) &= \mathrm{e}^{-x}/(1-x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!}x^m + \cdots\right)\left(1 + x + \cdots + x^k + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Sulyginę dvi koeficientų išraiškas, gauname formulę:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ar šis sekos t_n ieškojimo būdas yra lengvesnis negu rėčio principo pritaikymas? Gal atlikote ir 0.5.2 skyrelio užduotį ir išmokote trečią šios formulės išvedimo būdą? Patirtis tikrai praverstų.

UŽDUOTYS.

1. Integruodami generuojantį polinomą $(1+x)^n$ išveskite jau žinomą lygybę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = -\frac{1}{n+1}.$$

2. Įrodykite, kad Fibonačio sekos F_n, $n \geq 0$, apibrėžtos **??** skyrelyje, generuojanti eilutė gali būti užrašyta polinomine trupmena

$$(1-x-x^2)^{-1}.$$

0.6.2 Binarieji medžiai ir Katalano skaičiai

Atliekant binariąsias algebrines operacijas, pavyzdžiui, sudėtį, tenka suskliausti ir sudėti po du dėmenis paeiliui. Mus domina suskliautimų skaičius.

Įsitikiname, kad yra 5 keturių dėmenų suskliautimo būdai, nemaišant dėmenų tvarkos:

$$\begin{aligned}\big((a+b)+(c+d)\big) &= \big(a+((b+c)+d)\big) = \big(((a+b)+c)+d\big) \\ &= \big(a+\big((b+(c+d)\big)\big) = \big((a+(b+c))+d\big).\end{aligned}$$

Pradžioje pastebėsime vieną rekurentųjų sąryšį.

Lema. *Jei C_n yra $n \geq 2$ dėmenų suskliautimo būdų skaičius, tai*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}, \quad n \geq 2. \tag{26}$$

Įrodymas. Bet kaip skliausdami paskutiniame žingsnyje suskliaudžiame du dėmenis $E_1 + E_2$. Jei naryje E_1 buvo k dėmenų, tai $1 \leq k \leq n-1$, o E_2 liko $n-k$. Pagal skaičiaus C_k apibrėžimą juos galėjome suskliausti nepriklausomai C_k ir C_{n-k} būdų. Skirtingiems k skaičiuojamos suskliautimų aibės nesikerta, todėl sudėję jų sandaugas pagal k gauname norimą rezultatą. $\diamond$

Skaičių seka C_n, tenkinanti (26) sąryšį su pradiniais nariais $C_0 = 0$ ir $C_1 = 1$ vadinama E. *Katalano*[23] seka. Ji sutinkama ir grafų, ir algoritmų teorijose.

Skirtingus realius duomenis ar duomenų raktus į kompiuterį įveskime ne kaip tiesinį, t.y. iš eilės einančių skaičių masyvą, bet juos talpinkime įsivaizduojamo medžio viršūnėse. Pavyzdžiui, sekos 4,6, 5, 3, 1, 2, 7 narius talpinkime tokiu būdu, kaip pavaizduota šiame paveiksle:

[23] Eugéne Charles Catalan (1814–1894) – belgų matematikas.

Pirmąjį skaičių 4 patalpinome medžio viršūnėje; sekantį didesnį skaičių 6 nukėlėm dešinėn į kitą briaunos viršūnę; po to, didesnį už 4 skaičių 5 vėl nešėm žemyn dešinėn, bet pastebėję, kad jis yra mažesnis už 6, patalpinome kairėje kitoje briaunos viršūnėje ir t.t. Taip gaunama *binariųjų paieškos medžių* seka. Pagrindinis šio duomenų užrašymo privalumas pasireiškia ieškant tokiame medyje mažiausio, i-ojo pagal eilę mažiausio ar didžiausio skaičiaus. Vidutiniškai yra sugaištama žymiai mažiau laiko negu tą patį darant tiesiniame duomenų masyve. Atlikdami tokį duomenų įvedimą, po kiekvieno žingsnio galėjome pasiruošti sekančiam ir prie ką tik užpildytos viršūnės prijugti du tuščius medžio lapus, t.y. pirmojo laipsnio viršūnes. Būtume gavę tokį paveikslą:

Čia nubraižytus medžius vadiname *binariaisiais*. Apibrėžkime juos formaliau.

Apibrėžimas. Šakninis medis vadinamas binariuoju, jeigu jis yra sudarytas iš vienos šaknies arba iš *kairiojo* ir *dešiniojo* binariųjų medžių, prijungtų prie šaknies briaunomis, išvestomis iš šių medžių šaknų.

Šis rekursyvus apibrėžimas yra korektiškas, nes yra panaudotas matematinės indukcijos principas: apibrėžus mažesnių eilių medžius apibūdinimas didesnės eilės medis. Atkreipiame dėmesį, kad lyginant du binariuosius medžius atskirai turi sutapti kairieji ir dešinieji pomedžiai. Be to, pastebėkime, kad lapų skaičius binariajame eilės $n \geq 2$ medyje visada vienetu yra didesnis negu kitų viršūnių kiekis, todėl skaičiuojant juos, galime klausti, kiek yra

n-lapių binariųjų medžių?

Kaip ir skaičių suskliautimo uždavinyje, pastebime, kad kairiajame medyje gali būti $1 \leq k \leq n-1$ lapų, o kiti lapai yra dešiniajame. Vėl gauname lemoje nurodytą rekurentųjį sąryšį. Vadinasi, n-lapių binariųjų medžių skaičių išreiškia seka C_n, kurios pirmasis narys $C_1 = 1$. Šiuo atveju reikia susitarti pirmos eilės binariojo medžio šaknį vadinti ir *lapu*. Raskime C_n išraišką bet kokiam $n \geq 1$.

53 teorema. *Katalano skaičius*

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Įrodymas. Pirmiau randame sekos $\{C_n\}$, $n \geq 1$, generuojančią eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n =: C(x).$$

Pasinaudodami lema apskaičiuojame

$$C(x)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}\right)x^n = C(x) - x.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį, gauname

$$C(x) = \frac{1}{2}\Big(1 \pm (1-4x)^{1/2}\Big).$$

Kadangi $C(0) = 0$, reikia imti minuso enklą. Pasinaudodami apibendrintąja Niutono binomo formule, keliame laipsniu $1/2$, ir sulyginame koeficientus prie x^n. Gauname

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2}\,\frac{(-4)^n}{n!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}. \end{aligned}$$

Čia $(2k)!! = 2\cdot 4\cdots 2k$.

Teorema įrodyta. ◇

0.6.3 Tiesiniai rekurentieji sąryšiai

Skyrelyje **??** paminėjome Fibonačio skaičių seką $\{F_n\}$, $n \geq 0$, apibrėžtą sąryšiu

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

ir dviem pirmaisiais nariais $F_0 = F_1 = 1$. Žinodami atsakymą, nesunkiai patikrinome jį matematinės indukcijos būdu. Klausimo, kaip atspėti atsakymą, net nekėlėme.

Dabar išsamiai išnagrinėkime šiek tiek bendresnį uždavinį:

Tegul $a_0, a_1, b, c \in \mathbb{R}$. Rasti u_n, $n \geq 2$, jei

$$u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{27}$$

ir $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$.

Žinomo geometrinės progresijos atvejo, kai $c = 0$, nenagrinėkime. Jei turėtume tokius α ir β, kad

$$-b = \alpha + \beta, \qquad c = \alpha\beta, \tag{28}$$

tai $\alpha\beta \neq 0$ ir (27) galėtume perrašyti

$$\Delta_{n+1} : = u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) = \beta\Delta_n.$$

Be to, $\Delta_0 = u_1 - u_0 = a_1 - a_0 =: a$ yra žinomas. Seka $\{\Delta_n\}, n \geq 0$, sudaro geometrinę progresiją, todėl

$$\Delta_n = a\beta^n, \quad n \geq 0.$$

Vadinasi, visiems $n \geq 1$ turime

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \Delta_{n-1} = \alpha u_{n-1} + a\beta^{n-1}. \tag{29}$$

Dabar sekos narys išsireiškia per prieš tai buvusį narį. Nors ši rekurenčioji formulė neapibrėžia aritmetinės progresijos, bet ją išnagrinėti palyginti nesunku. Pakeitę keletą kartų u_n per narius su mažesniais indeksais, galime įžiūrėti atsakymą, ir vėliau įrodyti pasinaudojus matematine indukcija. Taigi, atlikę i žingsnių, gauname

$$\begin{aligned}
u_n &= \alpha\big(\alpha u_{n-2} + a\beta^{n-2}\big) + a\beta^{n-1} \\
&= \alpha^2 u_{n-2} + a\big(\alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}\big) \\
&= \alpha^3 u_{n-3} + a\big(\alpha^2\beta^{n-3} + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}\big) \ldots \\
&= \alpha^i u_{n-i} + a\big(\alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \alpha^{i-2}\beta^{n-i+1} + \cdots + \beta^{n-1}\big).
\end{aligned}$$

Išraiška po padėto daugtaškio yra atspėta intutyviai. Įrodydami, kad ji yra teisinga, laikykime ją indukcijos hipoteze. Remdamiesi (29), toliau tęsiame:

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha^i\big(\alpha u_{n-i-1} + a\beta^{n-i-1}\big) + a\big(\alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \alpha^{i-2}\beta^{n-i+1} + \cdots + \beta^{n-1}\big) \\ &= \alpha^{i+1}u_{n-i-1} + a\big(\alpha^i\beta^{n-i-1} + \alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \cdots + \beta^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Vadinasi, ir $(i+1)$-ame žingsnyje atsiranda tokia pati išraiška. Pagal matematinės indukcijos principą formulė yra teisinga su visais $i \geq 1$. Kai $i = n$, gauname

$$u_n = \alpha^n u_0 + a\big(\alpha^{n-1}\beta^1 + \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + \beta^{n-1}\big).$$

Pastaroji formulė yra teisinga visiems $n \geq 0$. Suprastinkime ją.

Jei $\alpha \neq \beta$, tai pasinaudoję lygybe

$$(\alpha - \beta)\big(\alpha^{n-1}\beta^0 + \alpha^{n-2}\beta^1 + \cdots + \beta^{n-1}\big) = \alpha^n - \beta^n,$$

gauname ieškomos sekos bendrojo nario formulę

$$u_n = \alpha^n u_0 + a\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \tag{30}$$

čia c_1, c_2 yra tam tikros konstantos, apskaičiuojamos iš pradinių sekos narių u_0, u_1 ir koeficientų b, c arba α bei β.

Jei $\alpha = \beta$, tai

$$u_n = \alpha^n u_0 + an\alpha^{n-1} = c_1'\alpha^n + c_2'n\alpha^n. \tag{31}$$

Čia c_1, c_2 irgi yra tam tikros nesunkai apskaičiuojamos konstantos.

Dar kartą peržvelgę sprendimą, matome, kad pagal Vieto[24] formules α ir β, apibrėžti (28), yra polinomo

$$x^2 + bx + c = 0$$

šaknys. Jos lemia atsakymo pavidalą. Kai jos skirtingos, turime (30), kai sutampa – išraišką (31). Vadinasi, bendrąjį narį u_n galime rasti neapibrėžtųjų koeficientų metodu, sudarę lygčių sistemą

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2, \\ u_1 &= c_1\alpha + c_2\beta \end{aligned}$$

[24]??

pirmuoju atveju ir sistemą:

$$\begin{aligned} u_0 &= c'_1, \\ u_1 &= c'_1\alpha + c'_2\alpha \end{aligned}$$

– antruoju atveju. Radę c_1, c_2 ar c'_1, c'_2, pasinaudotume formulėmis (30) arba (31).

Įgiję patyrimo, išplėtokime bendresnę rekurenčiųjų sąryšių teoriją. Tarkime, kad seka $r \geq 1$ ir $\{u_n\}$, $n \geq 0$ yra apibrėžta formule

$$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n = 0, \quad n \geq 0, \tag{32}$$

čia $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, ir pradiniais nariais $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1} \in \mathbb{R}$. Išraiškas (32) vadiname r *eilės tiesiniais homogeniniais rekurenčiaisiais sąryšiais.* Čia žodis *homogenininis* pabrėžia, kad visų narių laipsniai u_j atžvilgiu yra vienodi ir lygūs vienam.

Polinomas

$$A(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r = \sum_{j=0}^{r} a_jx^j, \quad a_0 := 1$$

vadinamas (32) sąryšio *charakteristiniu polinomu.*

Ištirkime laipsninę generuojančią eilutę

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n.$$

Lema. *Sandauga $A(x)U(x)$ yra ne aukštesnio kaip $(r-1)$-o laipsnio polinomas*

$$D(x) := \sum_{k=0}^{r-1} d_kx^k$$

su koeficientais

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_ju_{k-j}, \quad 0 \leq k \leq r-1.$$

Įrodymas. Papildykime $A(x)$ iki begalinės eilutės pridėdami nulinius narius. Sudauginę $A(x)$ ir $U(x)$ panariui, gauname laipsninę eilutę $D(x)$ su koeficientais

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_ju_{k-j}.$$

Čia laikome, kad $a_j = 0$, kai $j \geq r+1$. Jei $k \leq r-1$, tai yra teoremoje užrašytos formulės.

Jei $k = r$, tai d_r išraiška sutampa su formule (32). Vadinasi, $d_r = 0$. Toliau didinant r koeficientų d_k išraiška nebesikeičia, nes yra pridedami nuliniai dėmennys.

Įrodyta. $\diamond$

Išvada. *Generuojanti funkcija $U(x) = D(x)/A(x)$ yra taisyklinga polinominė trupmena.*

Toliau funkcijai $U(x)$ taikysime polinominių trupmenų teoriją, paprastai išdėstomą pradiniuose algebros kursuose. Šią medžiagą Skaitytojas gali rasti A.Matuliausko vadovėlio [Mat] 41 skyrelyje.

Net ir nagrinėdami realias sekas u_n, galime panaudoti kompleksines charakteristinio polinomo šaknis. Tegul $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathbb{C}$ yra $A(x)$ šaknys, kurių kartotinumai yra $k_1, \ldots k_m$ atitinkamai. Čia $k_1 + \cdots + k_m = r$. Iš pagrindinės algebros teoremos išplaukia

$$A(x) = a_r (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}.$$

Pagal Vieto teoremą $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_m^{k_m} = (-1)^r \neq 0$, todėl pastarąją lygybę galime perrašyti

$$A(x) = a_r (-1)^r (1-\lambda_1 x)^{k_1} (1-\lambda_2 x)^{k_2} \cdots (1-\lambda_m)^{k_m}. \tag{33}$$

Čia $\lambda_j = \alpha_j^{-1}$, jei $1 \leq j \leq m$. Iš pagrindinės polinominių trupmenų teoremos išplaukia mums reikalingas teiginys.

54 teorema. *Tarkime, kad jau radome* (33) *skaidinį. Generuojančią eilutę $U(x) = D(x)/A(x)$ galime užrašyti paprasčiausiųjų polinominių trupmenų suma, t.y. egzistuoja tokie kompleksiniai skaičiai c_{jl}, $1 \leq l \leq k_j$, $1 \leq l \leq m$, kad*

$$U(x) = \frac{D(x)}{A(x)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_j} \frac{c_{jl}}{(1-\lambda_j x)^l}. \tag{34}$$

Be to, ši išraiška yra vienintelė.

Galutinis tikslas – rasti sekos $\{u_n\}$ bendrąjį narį – jau ranka pasiekiamas.

55 teorema. *Tarkime, kad jau radome* (34) *išraišką. Tada*

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_j} c_{jl} \binom{n+l-1}{n} \lambda_j^n, \quad n \geq 0. \tag{35}$$

Įrodymas. Pagal apibendrintąją Niutono binomo formulę bet kokiems $1 \leq l \leq k_j$ ir $1 \leq j \leq m$ turime

$$(1-\lambda_j x)^{-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-l}{n} (-1)^n \lambda_j^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n} \lambda_j^n x^n.$$

Įstatę į (34) lygybę ir sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame teoremos įrodymą. ◇

Pastebėkime, kad nagrinėjant realias sekas, charakteristinio polinomo kompleksinės šaknys yra poromis jungtinės, todėl taikant paskutinę teoremą atsiradę menamieji skaičiai susiprastina.

Pastarojoje teoremoje nurodytą u_n formulę (35) su nežinomomis r konstantomis c_{jl}, $1 \leq l \leq k_j$, $1 \leq j \leq m$, galima parašyti vadovaujantis tik generuojančios eilutės išraiška (34), net jos neužrašant paprasčiausių trupmenų suma, net nežinant pradinių sekos narių. Šias konstantas galima rasti ir vėliau jau panaudojant pradinius sekos narius. Dažnai (35) vadinamos *bendruoju rekurenčiosios lygties (32) sprendiniu.*

Pavyzdys. *Rasti sekos* $\{u_n\}$, $n \geq 0$, *tenkinančios ketvirtos eilės rekurentųjį sąryšį*

$$u_{n+4} - 2u_{n+2} + u_n = 0,$$

bendrąjį narį, jei $u_0 = u_1 = 1$, *o* $u_2 = u_3 = 2$.

Sprendimas. Nesistenkime įsidėmėti formules, o geriau pakartokime visus teoremų įrodymų žingsnius. Charakteristinis polinomas yra toks:

$$A(x) = 1 - 2x^2 + x^4,$$

todėl generuojanti eilutė

$$U(x) = \frac{D(x)}{(1-x^2)^2}.$$

Čia kubinio polinomo $D(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3$ koeficientai skaičiuojami dauginant $U(x)A(x) = D(x)$. Gauname

$$d_0 = a_0 u_0 = 1,$$

$$d_1 = a_0u_1 + a_1u_0 = 1,$$
$$d_2 = a_0u_2 + a_1u_1 + a_2u_0 = 0,$$
$$d_3 = a_0u_3 + a_1u_2 + a_2u_1 + a_3u_0 = 0.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1+x}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{(1-x)^2} + \frac{c_3}{1+x}. \end{aligned} \tag{36}$$

Subendravardiklinę ir sulyginę skaitikliuose esančius polinomus, randame neapibrėžtuosius koeficientus c_1, c_2, c_3. Gauname polinomų lygybę

$$1 = c_1(1-x^2) + c_2(1+x) + c_3(1-2x+x^2),$$

ekvivalenčią lygčių sistemai

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \ c_3 &= 1, \\ c_2 - 2c_3 &= 0, \\ -c_1 \qquad + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vadinasi, $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1/2$ ir $c_3 = 1/4$, o

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{4(1+x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} \frac{x^n}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4}. \end{aligned}$$

Surinkę visu koeficientus prie x^n, gauname

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2}.$$

Aišku, labiau patyręs Skaitytojas, tik išvydęs (37) formulę, būtų iš karto taikęs neapibrėžtųjų koeficientų metodą ir tęsęs:

$$u_n = C_1 + C_2 n + C_3(-1)^n.$$

Pasinaudojęs pradiniais sekos nariais, toliau būtų radęs C_1, C_2 ir C_3. Apgalvokite šį būdą ir patikrinkite mūsų skaičiavimus!

Kaip nagrinėti nehomogeninius rekurenčiuosius sąryšius

$$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n = f(n), \quad n \geq 0, \tag{37}$$

čia $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ ir $f(n)$ yra žinoma realių skaičių seka?

Apsiribosime bendru nurodymu. Reikia pasinaudoti homogeninio sąryšio (32) bendruoju sprendiniu (35) ir rasti kažkokį (vadinamą *atskiruoju*) sąryšio (37) sprendinį. Tegul jis yra seka $u_n^{(0)}$, $n \geq 0$. Tada rekurenčiojo sąryšio (37) bendrasis sprendinys turi pavidalą

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_j} c_{jl} \binom{n+l-1}{n} \lambda_j^n + u_n^{(0)}, \quad n \geq 0.$$

Atskirųjų sprendinių ieškojimo būdai labai priklauso nuo nario $f(n)$. Kai kurie atvejai yra aptarti netgi lietuviškame vadovėlyje [Plukas]. Be to, egzistuoja gana plati specializuota literatūra.

0.6.4 Sudėtinių funkcijų koeficientų rekurentieji sąryšiai

Tiesiniai rekurentieji sąryšiai neišsemia viso jų lobyno. Praeituose skyreliuose mes jau susidūrėme su netiesiniais sąryšiais, be to, jų koeficientai buvo ne konstantos, o kito kartu su nežinomos sekos indeksu. Taip, pavyzdžiui, buvo ir su Stirlingo, ir su Belo skaičių formulėmis. Bendra teorija yra gana sudėtinga.

Dabar trumpai paliesime atvirkščią klausimą. Ieškosime ne rekurenčiojo sąryšio sprendinio, o sudėtingas sekų išraiškas stengsimės paversti paprastomis rekurenčiosiomis formulėmis. Jos yra gerokai naudingesnės programuojant, ypač skaičiuojant sudėtinių funkcijų Tayloro koeficientus. Pradėkime nuo pavyzdžio.

Pavyzdys. *Rasti funkcijos*

$$F(x) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} x^j \right\}.$$

n-ąjį Tayloro koeficientą, jei a_j yra realiųjų skaičių seka.

Sprendimas. Pradėsime pastaba, kad koeficientų a_j padalijimas iš j yra tik patogus normavimas, suprastinantis kitas formules.

Formaliai daugindami eilutes (žr. taip pat (25)) gauname

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_j x^j}{j}\right)^k \frac{1}{k!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0\\ 1k_1+\cdots nk_n=n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k_j}}{j^{k_j}k_j!}\Bigg)x^n.
\end{aligned}
$$

Taigi, ieškomi koeficientai lygūs

$$
b_n := \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0\\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k_j}}{j^{k_j}k_j!}, \quad n\geq 0.
$$

Akivaizdu, kad programuotojui ši išraiška yra nepatogi. Palyginkime ją su tokiu rezultatu.

56 teorema. *Funkcijos $F(x)$ Tayloro koeficientai b_n tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$
b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_{n-j+1}b_j, \quad b_0 := 1,\ n\geq 0.
$$

Įrodymas. Diferencijuojame

$$
F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} = F(x)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}x^l = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j+1}\Bigg)x^n.
$$

Kadangi eilutės, esančios kairėje šios lygybės pusėje, koeficientas prie x^n lygus $(n+1)b_{n+1}$, tai apskliaustoji suma dešinėje yra tik kita jo išraiška. $\diamond$

Panašiai gauname tokį rezultatą.

57 teorema. *Tegul $a_j\in\mathbb{R}$, $a_0\neq 0$, $j\geq 0$. Funkcijos*

$$
G_m(x) := (A(x))^m := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^m, \quad m\in\mathbb{N},\ a_0\neq 0
$$

Tayloro koeficientai $g_n := g_n(m)$ tenkina rekurentųjį sąryšį

$$
g_{n+1} = a_0^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(m - \frac{(m+1)j}{n+1}\right)a_{n-j+1}g_j, \quad g_0 = a_0^m,\ n\geq 0.
$$

Įrodymas. Vėl diferencijuodami gauname

$$G'(x) = mA^{m-1}(x)A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)g_{n+1}x^n.$$

Padauginame abi puses iš $A(x)$ ir panariui sudauginame eilutes. Kairėje pusėje turime

$$mA^m(x)A'(x) = mG_m(x)A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(m\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)g_l a_{n-l+1}\right)x^n.$$

Panašiai dešinėje pusėje gauname eilutę

$$A(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)g_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}(l+1)g_{l+1}a_{n-l}\right)x^n.$$

Sulyginame koeficientus prie x^n:

$$\sum_{l=0}^{n}(l+1)g_{l+1}a_{n-l} = m\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)g_l a_{n-l+1}.$$

Iš čia išplaukia

$$\begin{aligned}(n+1)g_{n+1}a_0 &= m\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)a_{n-l+1}g_l - \sum_{l=0}^{n} l a_{n-l+1}g_l \\ &= \sum_{l=0}^{n}\big(m(n-l+1)-l\big)a_{n-l+1}g_l.\end{aligned}$$

Tai ir yra ieškoma lygybė. ◇

Užduotis. Raskite funkcijos

$$\log\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j\right), \quad a_0 = 1,$$

su realiais a_j Tayloro koeficientų rekurenčiąją formulę.

0.7 Orentuotieji grafai

0.7.1 Ciklomatinis digrafo skaičius

Sprendžiant srovės tekėjimo elektros grandinėse, transporto srautų ir kitus taikomuosius uždavinius svarbu modeliuoti ir procesų vyksmo kyptis. Dabar nepakanka nagrinėtų grafų, todėl apibrėžiami *orentuotieji grafai* arba trumpiau – *digrafai.*

Digrafą $G = (V, E)$ sudaro netuščia viršūnių aibė V ir *sutvarkytųjų* viršūnių porų (u, v), $u, v \in V$, aibė E. Ir dabar porą žymime trumpiau – uv, ją vadiname briauna, viršūnę u – briaunos pradžia, o v – pabaiga. Jei iškyla būtinybė skirti nesutvarkytąją ir sutvarkytąją poras, tai pastarąją vadiname *lanku.* Mes šito termino vengsime. Įdedant digrafą į plokštumą, briauna vaizduojama Žordano linija kurios pabaigoje nubrėžiama rodyklė, nukreipta į v. Briaunų aibę papildžius kartotinėmis briaunomis yra gaunamas *multidigrafas.* Vaizduojant jį plokštumoje vedama tiek pat linijų su nurodytomis kryptimis, koks yra briaunos kartotinumas. Dvi briaunos uv ir vu digrafe yra skirtingos ir nelaikomos kartotinėmis. Susitarkime, kad digarfo briaunų aibėje kilpų vv nėra. Dauguma anksčiau įvestų apibrėžimų natūraliai perkeliami digrafams. Paryškindami skirtumus, dabar įvesime matricas, apibrėžiančias digrafus.

Tegul $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ir $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Multidigrafo *gretimumo matricos* $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$ elementai a_{ij} lygūs skaičiui briaunų, išvestų iš i-tos į j-ą viršūnę. Kilpos atveju skaičius nebedvigubinamas. Digrafo gretimumo matrica nebūtinai simetrinė.

Apibrėžiant *digrafo incidentumo matricą*, atsižvelgiama į briaunos kryptį. Digrafui incidentumo matricos elementai

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ yra } j \text{ briaunos pradžia,} \\ -1, & \text{jei } i \text{ yra } j \text{ briaunos galas,} \\ 0, & i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

Tas pats apibrėžimas išlieka ir multidigrafui, tačiau jei i viršūnė yra incidenti kilpai, pažymėtai j numeriu, susiduriama su kliūtimi: ką rašyti $+1$ ar -1? Tokiu atveju įvedamas koks nors specialus žymuo, pavyzdžiui, galėtume žymėti $b_{ij} = -0$.

Ne bet kokios matricos, kurių elementai yra $0, \pm 1$, gali būti grafo ir digrafo gretimumo ir incidentumo matricomis. Pateiksime vieną jų sąryšį.

58 teorema. *Tarkime, $G = (V, E)$ yra n eilės ir m didumo grafas, $A = (a_{ij})$ – jo gretimumo matrica ir tegul $D = (d_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, yra diagonali matrica, kurios įstrižainėje yra iš eilės surašyti viršūnių $v_i \in V$ laipsniai. Suteikdami bet kokias kryptis briaunoms, apibrėžkime digrafą, kurio incidentumo matrica yra $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, ir pažymėkime B^t jos transponuotąją matricą. Tada*

$$BB^t = D - A. \tag{38}$$

Įrodymas. Jei c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, yra matricos BB^t bendrasis elementas, tai

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} b_{il} b_{jl}.$$

Todėl, kai $i \neq j$, sandauga $b_{il} b_{jl}$ lygi 0 arba -1. Pastaroji lygybė yra teisinga tik atvejais:

(i) kai $v_i v_j = e_l$, nes tada $b_{il} b_{jl} = 1(-1) = -a_{ij}$;

(ii) kai $v_j v_i = e_l$, nes tada $b_{il} b_{jl} = (-1)1 = -a_{ij}$.

Taigi, matricų, esančių abiejose (38) lygybės pusėse, neįstrižaininiai elementai sutampa.

Kai $i = j$, suma c_{ii} lygi briaunų, išvestų iš v_i skaičiui. Kadangi matrica A turi nulinę įstrižainę, ir šiuo atveju teoremos teiginys pasitvirtina.

Įrodyta. $\diamond$

Pritaikykime įgytas žinias elektrotechnikoje. Elektros schemą (vengiame užimto žodžio *grandinė*) sudaro tarpusavyje sujungti laidininkai, kuriais teka srovė. Jie turi varžas, kurias inžinierius dažniausiai žino, tačiau srovių, tekančių kažkuriuo iš laidininkų, stiprumus jam tenka apskaičiuoti. Omo dėsnis teigia, kad įtampa arba potencialų laidininko galuose skirtumas lygus srovės stiprumo ir varžos sandaugai. Kai schema yra sudėtinga, nors ir žinant įtekančios srovės stiprumą arba įėjimo bei išėjimo taškų potencialus, išsamiai analizei Omo dėsnio nepakanka. Tada naudojamės kitais dėsniais, kuriuos nustatė Karaliaučiuje dirbęs G. Kirchhofas[25]

Elektros schemą galima pavaizduoti jungiu digrafu $G = (V, E)$, kurio briaunos $e_1, \ldots, e_m$ atitinka laidininkus, o viršūnės $v_1, \ldots, v_n$ – jų jungimo mazgus. Briaunai suteikime srovės tekėjimo kryptį. Tarkime, kad srovė yra paduodama iš šaltinio s į viršūnę v_1, o išeina iš v_n, tarkime, į z; gal būt, tai yra įžeminimas. Tada

[25]Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) – vokiečių fizikas.

Kirchhofo srovės dėsnis. *Srovė vidinėje grandinės viršūnėje yra nesukuriama.*

Kitaip tariant, srovės, įtekėjusios į viršūnę, stiprumas lygus ištekėjusios iš jos srovės stiprumui. Jei į viršūnę įeinančių ir iš išeinančių briaunų buvo po kelias, tai atitinkami srovių stiprumai sumuojasi. Susitarus, kad prieš briaunos kryptį ja teka neigiamamo stiprumo srovė, Kirchhofo srovės dėsnį galime užrašyti naudojant incidentumo matricą B.

Tarkime, kad $\bar{w} = (w_s, w_1, \ldots, w_m, w_z)^t$ yra srovės vektorius stulpelis, sudarytas iš srovių, tekančių briaunomis $sv_1, e_1, e_2, \ldots, e_m, v_n z$, $m = |E|$, atitinkamai. Paduotos į elektros schemą srovės stiprumas w_s lygus išėjusios srovės stiprumui w_z paprastai yra žinomas. Tada matricinė lygybė

$$B\bar{w} = \bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)^t,$$

išreiškia srovės dėsnius visose viršūnėse iš karto. Taigi, ieškant srovių stiprumų, reikia spręsti šią homogeninę tiesinių lygčių sistemą. Suradę sistemos rangą, toliau galėtume imti sistemą, kurios matrica sudaryta tik iš tiesiškai nepriklausomų incidentumo matricos eilučių. Jų skaičius yra mažesnis negu nežinomųjų, todėl atsiranda laisvieji nežinomieji ir to vienintelio sprendinio iš čia dar nerasime. Papildomai galime panaudoti potencialus. Jei P_i ir P_j yra potencialai viršūnėse v_i ir v_j, tai jų skirtumas $p_{ij} = P_i - P_j$ yra *įtampa* briaunoje $v_i v_j \in E$. Pabrėžiame – kryptis svarbu!

Kirchhofo potencialų dėsnis. *Jei $v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k} = v_{i_1}$ yra bet koks ciklas elektros schemoje $G = (V, E)$, tai įtampų suma*

$$p_{i_1 i_2} + p_{i_2 i_3} + \cdots + p_{i_{k-2} i_{k-1}} + p_{i_{k-1} i_k} = 0.$$

Taikyti šį dėsnį kiekvienam ciklui nebūtina. Dažnai neprarandant informacijos galima apsiriboti tik dalimi iš jų. Kaip parinkti reikalingus, sužinosime išnagrinėję ciklų digrafuose savybes.

Kaip minėjome, realių procesų modeliuose isivaizduojama, kad digrafo briaunomis jų kryptimis teka srovės, važiuoja automobiliai, jos turi varžas, pralaidumą ar kitokius parametrus. Todėl yra natūralu nagrinėti funkcijų, apibrėžtų digrafo briaunų aibėje, erdvę:

$$\mathcal{F}(G) := \{g \colon E \to \mathbb{R}\}.$$

Jei $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, funkcijas apibrėžia m reikšmių $g(e_j)$, todėl ši erdvė yra izomorfiška vektorinei erdvei $\mathbb{R}^m$, kuria ir apsiribokime.

Skaitytojui, primiršusiam pagrindines vektorinių erdvių sąvokas, patartume žvilgtelėti į vadovėlį [A.M.]. Pakaktų susipažinti su VII ir IX skyrių medžiaga.

Tarkime, kad $L = e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ yra ciklas, čia e_{i_1} vienas galas sutampa su e_{i_k} galu. Fiksuokime ciklo kryptį (pavyzdžiui, prieš laikrodžio rodyklę, jei grafas yra plokščias). Tada L priskiriame *ciklo* vektorių $\bar{z}_L = (z_1, \ldots, z_m)$, čia

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui ir yra išvesta ciklo kryptimi;} \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui, bet kryptis priešinga;} \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nepriklauso ciklui } L. \end{cases}$$

Kai L perbėga visus grafo ciklus, gauname vektorių aibę $\{z_L\}$, jų tiesinis apvalkas $\mathcal{Z}(G)$ erdvėje $\mathbb{R}^m$ vadinamas *ciklų poerdviu.* Jo dimensija $\dim \mathcal{Z}(G)$ vadinama grafo G *ciklomatiniu skaičiumi.* Kitaip tariant, jis lygus maksimaliam skaičiui tiesiškai nepriklausomų ciklo vektorių.

Sudarykime dar vieną erdvės $\mathbb{R}^m$ poerdvį. Imkime viršūnių aibės skaidinį netuščių poaibių sąjunga

$$V = S \cup T, \quad T = V \setminus S.$$

Jį vadiname *digrafo pjūviu* ir žymime $P = (S, T)$. Nagrinėkime tik tas briaunas, kurios eina iš S į T arba atvirkščiai. Jos vadinamos *pjūvio briaunomis.* Sudarykime vektorių $\bar{u}_P = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, čia

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ yra išvesta iš } S \text{ į } T; \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ yra išvesta iš } T \text{ į } S; \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nepriklauso pjūviui } P. \end{cases}$$

Imant visus įmanomus skaidinius P, yra gaunama vektorių $\bar{u}_P$ sistema, jos tiesinis apvalkas $\mathcal{U}(G)$ erdvėje $\mathbb{R}^m$ vadinamas *pjūvių poerdviu* (kociklų poerdviu). Sekanti teorema atskleidžia įdomų vektorinės erdvės $\mathbb{R}^m$ dėstinį.

59 teorema. *Erdvė $\mathbb{R}^m$ yra tiesioginė tarpysavyje ortogonalių poerdvių $\mathcal{Z}(G)$ ir $\mathcal{U}(G)$ suma. Jei grafas G yra jungus, jo eilė yra n, o didumas lygus m, tai*

$$\dim \mathcal{Z}(G) = m - n + 1, \qquad \dim \mathcal{U}(G) = n - 1.$$

Įrodymas. Tikriname poerdvių $\mathcal{Z}(G)$ ir $\mathcal{U}(G)$ ortogonalumą. Imame bet kokį ciklą L ir bet kokį pjūvį P bei jų vektorius $\bar{z}_L$ ir $\bar{u}_P$ ir skaičiuojame skaliarinę sandaugą

$$< \bar{z}_L, \bar{u}_P >: = z_1u_1 + z_2u_2 + \cdots + z_mu_m.$$

Nenuliniai dėmenys atitinka tik L ciklo briaunoms, priklausančioms ir P pjūviui. Jų skaičius yra lyginis. Jei e_j kryptis yra priešinga ciklo krypčiai, susitarkime sakyti, kad $-e_j$ kryptis jau sutampa su ciklo kryptimi. Dabar ciklą sudaro jo kryptimi išvestos briaunos. Po tokio susitarimo ciklo briaunos, priklausančios ir pjūvio briaunų aibei, gali būti suporuotos: viena briauna yra išvesta pjūvio kryptimi, kita – priešingai. Tada nagrinėjama skaliarinė sandauga lygi kiekiui L ciklo briaunų, einančių iš S į T minus kiekiui ciklo briaunų, einančių iš T į T. Vadinasi, ji yra lygi nuliui. Tuo pačiu poerdvių $\mathcal{Z}(G)$ ir $\mathcal{U}(G)$ ortogonalumas yra įrodytas.

Ortogonalių poerdvių suma yra tiesioginė. Primename, kad tokių poerdvių sankirtoje yra tik nulinis vektorius, o tiesioginės poerdvių sumos dimensija yra lygi dimensijų sumai. Panaudoję tradicinį poerdvių tiesioginės sumos žymenį, turime

$$\mathcal{Z}(G) \oplus \mathcal{U}(G) \subset \mathbb{R}^m$$

ir

$$\dim \mathcal{Z}(G) + \dim \mathcal{U}(G) \leq m.$$

Teoremoje nurodytos dimensijų formulės išplauks iš nelygybių

$$\dim \mathcal{Z}(G) \geq m - n + 1, \qquad \dim \mathcal{U}(G) \geq n - 1. \tag{39}$$

Jungiame grafe G fiksuokime kažkokį jungiantįjį medį M. Tarkime, kad medžiui M priklauso briaunos $e_1, \ldots, e_{n-1}$, o likusios $e_n, \ldots, e_m$ ne. Bet kurios iš pastarųjų briaunų pridėjimas prie M sukuria vieną ciklą. Jį vadinkime *fundamentaliuoju* ciklu. Tegu L_j, $n \leq j \leq m$, yra fundamentalusis ciklas, atsiradęs po e_j pridėjimo, o $\bar{z}_j$ – jo vektorius. Atkreipkime dėmesį į paskutines $m - (n - 1)$ šio vektoriaus koordinačių. Kai $j = n$, pirmoji iš jų (skaičiuojant nuo pat vektoriaus pradžios tai n-oji koordinatė) lygi 1 arba -1, o kitos lygios nuliui. Kai $j = n+1$, antroji iš šių paskutiniųjų koordinačių lygi 1 arba -1, o kitos lygios nuliui. Taip patikriname visų vektorių $\bar{z}_j$, $n \leq j \leq m$, paskutiniąsias koordinates ir įsitikiname, kad fundamentaliųjų ciklų vektorių koordinačių matricos paskutinieji stulpeliai sudaro diagonalią matricą su ± 1 įstrižainėje. Vadinasi, fundamentaliųjų ciklų vektorių sistemos rangas lygus

$m - n + 1$, o ciklų poerdvio dimensija yra nemažesnė už šį skaičių. Pirmoji iš (39) nelygybių yra įrodyta.

Nagrinėdami pjūvius irgi panaudokime jungiantįjį medį M. Pastebėkime, kad bet kokios M briaunos e_j, $1 \le j \le n - 1$, atėmimas apibrėžia pjūvį

$$P_j = (S_j, T_j),$$

nes pats medis suskyla į du pomedžius su viršūnių aibėmis V_j ir $\overline{V}_j$ atitinkamai. Pati e_j yra tokio pjūvio briauna, nes jungia vieną viršūnių aibę su kita. Tarkime, kad e_j pradžios viršūnė yra aibėje V_j. Tokio pjūvio vektoriui

$$\bar{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_{n-1,j}, u_{nj}, \ldots, u_{mj})$$

turime $u_{jj} = 1$, o $u_{ij} = 0$, kai $i \ne j$ ir $i \le n - 1$, nes e_i nejungia S_j su T_j.

Užrašę visų taip apibrėžtų pjūvių vektorių koordinačių matricą, matome, kad pirmieji $n - 1$ stulpeliai sudaro diagonalią matricą, kurios įstrižainėje yra ± 1. Taigi, tiesiškai nepriklausomų pjūvių vektorių yra ne mažiau, negu $n - 1$. Antroji iš (39) nelygybių yra įrodyta.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Grįžkime prie elektros schemos, kuri pavaizduota jungiu digrafu $G = (V, E)$. Tegul $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ turi fiksuotą numeraciją. Jei $\bar{z}_L$ yra L ciklo šiame digrafe vektorius, o $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ – įtampų briaunose vektorius, tai Kirchhofo potencialų dėsnį dabar galime užrašyti formule

$$< \bar{z}_L, \bar{p} >= 0.$$

Nagrinėdami visus ciklus, gauname didelio skaičiaus lygčių sistemą. Pagal teoremą jos rangas lygus ciklomatiniam digrafo skaičiui $m - n + 1$. Vadinasi, pakanka išrinkti tiek pat tiesiškai nepriklausomų lygčių. Teoremos įrodyme matėme, kad jas galime sudaryti panaudodami tik fundamentaliuosius ciklus. Potencialų dėsnį galime išreikšti tokia matricine forma.

Kirchhofo potencialų dėsnis. *Jei M yra fundamentaliųjų ciklo vektorių sudaryta matrica, o $\bar{p}^t$ – įtampų elektros schemos briaunose vektorius stulpelis, tai*

$$M\bar{p}^t = 0.$$

Pavyzdys. Raskime stiprumus srovių, tekančių paveiksle pavaizduotos elektros schemos, briaunose, jei į viršūnę v_1 įtekėjo 1 ampero srovė, o briaunų varžos, išreikštos omais, yra nurodytos paveiksle.

Sprendimas. Spėdami, kuriomis kryptimis tekės srovės, nubrėžėme digrafą (žr. paveiksle). Jei srovės stiprumas kurioje nors briaunoje gausis neigiamas, žinosime, kad tekėjimo kryptis, iš tiesų, yra priešinga.

Tegul

$$e_1 = v_1v_2,\ e_2 = v_1v_3,\ e_3 = v_2v_3,\ e_4 = v_2v_4,\ e_5 = v_3v_4,$$

o $\bar{w} = (1, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, 1)$ yra srovių, tekančių briaunomis sv_1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ir v_4z atitinkamai, stiprumai. Tada panaudojus incidentumo matricą, Kirchhofo srovių dėsniai keturioms vidinėms digrafo viršūnėms užrašomi matricine lygtimi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \big(1, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, 1\big)^t = \bar{0}.$$

Vadinasi, jei $w_3 \colon = x$, o $w_5 \colon = y$, čia $x, y \in \mathbb{R}$, tai

$$w_4 = 1 - y, \quad w_2 = y - x, \quad w_1 = 1 - y + x. \tag{40}$$

Kaip ir buvome pastebėję anksčiau vien tik srovės dėsnio nepakanka, turime du laisvus parametrus. Panadokime potencialų dėsnį.

Digrafe yra 3 ciklai, tačiau jo ciklomatinis skaičius yra 2. Jei jungiantysis medis yra sudarytas iš briaunų e_1, e_2, e_4, tai fundamentalieji ciklai (surašant briaunas pagal ciklų kryptis) yra

$$L_1 = \{e_1, e_3, e_2\}, \qquad L_2 = \{e_1, e_4, e_5, e_2\}.$$

Panaudojame ciklų vektorių matrica ir užrašome Kirchhofo potencialų dėsnį matricine forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \big(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\big)^t = \bar{0}.$$

Čia $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ yra įtampos briaunose e_1, e_2, e_3, e_4 ir e_5. Pagal Omo dėsnį jos lygios:

$$p_1 = 4w_1,\ p_2 = 5w_2,\ p_3 = 3w_3,\ p_4 = 2w_4,\ p_5 = w_5$$

ir yra išreikštos voltais. Iš pastarųjų dviejų sistemų išplaukia

$$\begin{aligned} 4w_1 - 5w_2 + 3w_3 &= 0, \\ 4w_1 - 5w_2 + 2w_4 - w_5 &= 0. \end{aligned}$$

Įstatę (40) išraiškas į šią sistemą, gauname

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 2 \\ 12x - 9y &= -4. \end{aligned}$$

Vadinasi, $x = w_3 = 2/21$, $y = w_5 = 4/7$, $w_1 = 11/21$, $w_2 = 10/21$ ir $w_4 = 3/7$.

Pratęskite šio uždavinio sprendimą rasdami potencialus visose viršūnėse. Galima tarti, kad viršūnės v_4 potencialas lygus nuliui.

Kirchhofo elektros grandinių dėsniai padarė didžiulę įtaką grafų teorijai. Buvo sukurta ir plačiai taikoma srautų digrafuose teorija.

0.7.2 Maksimalaus srauto problema

Šiame skyrelyje susipažinsime su problema, kurią 1956 metais pradėjo spręsti L. Fordas[26] ir D. Fulkersonas[27]. Tarkime, kad $G = (V, E)$ yra jungus digrafas su išskirtomis *šaltinio* $s \in V$ ir *tikslo* $t \in V$ viršūnėmis. Be to, jame yra apibrėžta *talpos* funkcija $c : E \to \mathbb{R}^+$. Tokį digrafą vadinsime *tinklu.*

Apibrėžimas. *Srautu tinkle $G = (V, E)$ vadiname funkciją $f\colon E \to \mathbb{R}^+$, jei yra patenkinamos sąlygos:*

(i) $f(uv) \le c(uv)$*;*

(ii) *kiekvienai* $v \in V \setminus \{s, t\}$,

$$\sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(uv) = \sum_{u \in \Gamma^+(v)} f(vu).$$

Čia $\Gamma^-(v)$ ir $\Gamma^+(v)$ yra viršūnių, iš kurių patenkama į v ir į kurias patenkama iš v, aibės atitinkamai.

Pirmoji sąlyga reikalauja, kad srauto reikšmė briaunoje neviršytų jos talpos. Kita sąlyga vadinama *Kirchhofo* aksioma. Kaip ir elektros uždaviniuose, ji reiškia, kad srautas ne šaltinio ir ne tikslo viršūnėse yra nesukuriamas.

[26] L.R.Ford,...

[27] D.R.Fulkerson,...

Nesiaurindami bendrumo galime tarti, kad $\Gamma^-(s) = \emptyset = \Gamma^+(t)$. Priešingu atveju galėtume įvesti papildomą šaltinį s' ir tikslo viršūnę t' bei begalinės talpos briaunas $s's$ bei tt'. Dydį

$$|f| := \sum_{v \in \Gamma^+(s)} f(sv) = \sum_{v \in V} f(sv)$$

vadiname *srauto didumu*. Čia $f(sv) = 0$, jei $sv \notin E$. Žargonu kalbant, tai *ištekėjusio* iš s srauto didumas. Dėl (iii) aksiomos jis lygus *įtekėjusio* į t srauto didumui, t.y.

$$|f| = \sum_{v \in \Gamma^-(t)} f(vt) = \sum_{v \in V} f(vt).$$

Kaip randamas maksimalaus didumo srautas tinkle? Įveskime porą patogių žymenų. Tegu

$$f(X,Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} f(xy), \quad X, Y \subset V$$

ir

$$c(X,Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} c(xy), \quad X, Y \subset V.$$

Abi išraiškos turi adityvumo savybę, pavyzdžiui,

$$f(X, Y \cup Z) = f(X,Y) + f(X,Z),$$

jei $Y \cap Z = \emptyset$.

Praeitame skyrelyje įvesti digrafo pjūviai $P = (S,T)$, kuriems $s \in S$ ir $t \in T$, yra ypatingai svarbūs. Juos vadinkime *atskiriančiais* viršūnes s ir t. Pastebėkime, kad tokiam pjūviui dydį $f(S,T)$ galima vadinti srauto, patekusio iš S į T didumu. Šis srautas *tekėjo* pjūvio kryptimi išvestomis pjūvio briaunomis. Dydį $c(S,T)$ vadiname *pjūvio talpa*. Pagal (i) aksiomą

$$f(S,T) \leq c(S,T). \tag{41}$$

Lema. *Bet kokiam srautui f ir bet kokiam atskiriančiam pjūviui $P = (S,T)$ turime*

$$|f| = f(S,T) - f(T,S).$$

Įrodymas. Pagal apibrėžimą ir adityvumo savybę

$$\sum_{v\in S} f(\{v\}, V\setminus\{v\}) = f(S,T) + f(S,S)$$

ir

$$\sum_{v\in A} f(V\setminus\{v\}, \{v\}) = f(T,S) + f(S,S).$$

Atėmę vieną iš kitos šias lygybes, gauname

$$\sum_{v\in S} \big(f(\{v\}, V\setminus\{v\}) - f(V\setminus\{v\}, \{v\})\big) = f(S,T) - f(T,S).$$

Suma, esanti kairioje pusėje lygi dydžiui

$$\begin{aligned} & \sum_{v\in S} \big(f(\{v\}, \Gamma^+(v)) - f(\Gamma^-(v), \{v\})\big) \\ = \ & f(\{s\}, \Gamma^+(s)) + \sum_{\substack{v\in S\\ v\neq s}} \big(f(\{v\}, \Gamma^+(v)) - f(\Gamma^-(v), \{v\})\big) \\ = \ & |f| + 0 = |f|. \end{aligned}$$

Pakeliui pasinaudojome Kirchhofo aksioma ir srauto didumo apibrėžimu.
Įrodyta. $\diamond$

Išvada. *Maksimalus srauto didumas neviršija minimalios pjūvio talpos.*

Įrodymas. Pakanka pritaikyti lemos rezultatą ir (41) nelygybę.

Kaip ieškomas maksimalaus didumo srautas (*maksimalusis* srautas)? Paprasčiausia idėja, ateinanti į galvą yra jį palaipsniui didinti. Pradėti galima nuo nulinio srauto $f_0(e) \equiv 0$ ir toliau nagrinėti $(s-t)$ takus, kuriais galima praleisti teigiamą srautą. Kaip matysime, yra tikslinga peržiūrėti ir takus, kuriuose yra netgi priešinga kryptimi einančių briaunų.

Tegul po $(i-1)$-o žingsnio gavome srautą f su $|f|>0$ ir yra takas p:

$$s\colon = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_{k+1} \leftarrow v_{k+2} \to \cdots \to t\colon = v_N,$$

kuriame briaunos tenkina nelygybes

$$f(v_r v_{r+1}) < c(v_r v_{r+1}), \quad \text{jei } v_r v_{r+1} \in E, \tag{42}$$

arba

$$f(v_{r+1}v_r) > 0, \quad \text{jei } v_{r+1}v_r \in E. \tag{43}$$

Čia $0 \leq r \leq N-1$. Nelygybės parodo, kad tako krypties briaunoje apibrėžtas srautas dar nepasiekė jos talpos, o priešingos krypties briaunoje apibrėžtas srautas, kurį galime vadinti *grįžtančiuoju*, yra teigiamas. Tokius takus p vadiname *srautą auginančiais*. Panaudojus jį, galima toliau didinti srautą.

Tegul $c > 0$ yra mažiausias iš skaičių

$$c(v_r v_{r+1}) - f(v_r v_{r+1}), \quad \text{jei } v_r v_{r+1} \in E,$$

ir

$$f(v_{r+1}v_r), \quad \text{jei } v_{r+1}v_r \in E,$$

o r perbėga visus sveikuosius nenenigiamus skaičius iki $N-1$. Apibrėžkime funkciją $f^*\colon E \to \mathbb{R}_+$

$$f^*(e) = \begin{cases} f(e), & \text{jei } e \notin p, \\ f(e) + c, & \text{jei } e \in p \text{ ir } e \text{ yra tako krypties,} \\ f(e) - c, & \text{jei } e \in p, \text{ bet } e \text{ kryptis priešinga } P. \end{cases}$$

Kadangi f^* tenkina srauto apibrėžime esančius reikalavimus, tai f^* yra srautas ir

$$|f^*| = |f| + c.$$

Atrodo, kad jau turime srauto dididnimo algoritmą. Deja, ši puiki Fordo-Fulkersono idėja dar turi trūkumų. Briaunų talpos gali būti nebendramatės (prisiminkimte irracionaliųjų skaičių pavyzdžius!), todėl gali būti taip, kad srautą auginančių takų tektų ieškoti be galo daug kartų.

Aprašytas metodas padeda gauti teorinių teiginių. Skyrių baigsime bene svarbiausiu srautų teorijos rezultatu.

Maksimalaus srauto – minimalaus pjūvio teorema. *Maksimalaus srauto tinkle, kurio šaltinio viršūnė yra s ir tikslo viršūnė – t, didumas yra lygus minimaliai pjūvio, atskiriančio viršūnes s ir t, talpai.*

Įrodymas. Tarkime, f yra maksimalus srautas. Panaudodami matematinę indukciją ir nelygybes (42) bei (43) apibrėžkime viršūnių aibę S.

Tegul $s \in S$ ir toliau, jei jau $v_r \in S$, tai viršūnę v_{r+1} priskirkime S, jei yra patenkinta viena iš sąlygų (42) arba (43). Pažymėkime $T = V \setminus S$ jos papildinį ir pastebėkime, kad $t \in T$. Iš tiesų, priešingu atveju turėtume

$(s-t)$ auginantį srautą taką ir galėtume f didumą dar padidinti. Vadinasi, $P\colon = (S,T)$ yra pjūvis, atskiriantis s ir t.

Dabar pasinaudosime lema. Nagrinėkime pjūvio P briaunas. Tegul $uv \in E$ eina pjūvio kryptimi, $u \in S$, o $v \in T$. Tada

$$f(uv) = c(uv),$$

nes priešingu atveju, kai $f(uv) < c(uv)$, viršūnė v būtų buvusi priskirta aibei S. Vadinasi, šių $f(uv)$ suma $f(S,T) = c(S,T)$.

Tegul $vu \in E$ eina prieš pjūvio kryptį, t.y. $u \in S$, o $v \in T$. Tada

$$f(vu) = 0,$$

nes priešingu atveju, kai $f(vu) > 0$, viršūnė v būtų buvusi priskirta aibei S. Vadinasi, šių $f(vu)$ suma $f(T,S) = 0$.

Pagal lemą

$$|f| = f(S,T) - f(T,S) = c(S,T).$$

Pagal turėtą išvadą pjūvis $P = (S,T)$ turi būti minimalus.

Įrodyta. $\diamond$

Jei tinklo briaunų talpos yra natūralieji skaičiai, aprašytas metodas nesunkiai realizuojamas efektyviu algoritmu. Tačiau ir šiuo atveju auginančių srautą $(s-t)$ takų perrinkimas turi būti ne chaotiškas. Kaip Jūs tą atliktumėte?

Literatūra

1. E.Manstavičius, *Kombinatorikos ir grafų teorijos pradmenys*, Interneto svetainė: vu/maf/ttsk/manstavicius/.

2. M.Bloznelis, *Kombinatorikos paskaitų ciklas*, Vilniaus universiteto leidykla, 1996.

3. A.Matuliauskas, *Algebra*, Mokslas, Vilnius, 1985.

4. N.L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd edn, 2002.

5. P.J.Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1996.

6. R.Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1985 (yra vertimas į rusų k.).

7. B.Bollobás, *Graph Theory*, Springer, 1979.

8. L.Volkmann, *Fundamente der Graphentheorie*. Springer, 1996.

9. V.N.Sačkov, *Įvadas į kombinatorinius diskrečiosios matematikos metodus*, Nauka, Maskva, 1982 (rusų k.).

10. G.P. Gavrilov, A.A.Sapoženko, *Diskrečiosios matematikos uždavinynas*, M., Nauka, 1977 (rusų k.).