6 pratybos. Tiesė erdvėje

Paulius Drungilas

Turinys

Uždaviniai 4

Kanoninė tiesės erdvėje lygtis yra

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\,, \tag{1}$$

kur $l\neq 0$ arba $m\neq 0$ arba $n\neq 0$. Vektorius $\vec{s}\,(l,m,n)$ visada lygiagretus šiai tiesei ir vadinamas tos tiesės **krypties vektoriumi**. (1) lygybėje esančius santykius prilyginę laisvam parametrui t ir per jį išreiškę kintamuosius x, y ir z, gauname tiesės (1) **parametrines lygtis**:

$$\begin{cases} x &= x_0+l\cdot t\\ y &= y_0+m\cdot t\\ z &= z_0+n\cdot t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0,y_0,z_0)$ ir lygiagrečios nenuliniam vektoriui $\vec{s}\,(l,m,n)$, lygtis yra

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\,.$$

Tiesės, einančios per du taškus $A(x_0,y_0,z_0)$ ir $B(x_1,y_1,z_1)$, lygtis yra

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\,.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0,y_0,z_0)$ ir statmenos nekolineariems (nelygiagretiems) vektoriams $\vec{u}\,(a_1,b_1,c_1)$ ir $\vec{v}\,(a_2,b_2,c_2)$, lygtis yra

$$\begin{cases} a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0) &= 0\\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0) &= 0\end{cases}.$$

Tarkime, turime dvi tieses

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

ir

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}\,.$$

Kampas φ tarp šių tiesių skaičiuojamas pagal formulę

$$\cos\varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}\,.$$

Šios tiesės lygiagrečios, kai

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}\,,$$

statmenos, kai

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0\,,$$

prasilenkiančios (nesikerta ir nėra lygiagrečios), kai

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

kertasi, kai

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Atstumas tarp šių tiesių lygus atstumui nuo taško (x_1, y_1, z_1) iki plokštumos, einančios per tašką (x_2, y_2, z_2) ir lygiagrečios šiom tiesėm t. y. iki plokštumos

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Tarkime, duota plokštuma

$$P: \quad ax + by + cz + d = 0$$

ir tiesė

$$T: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,.$$

Kampas φ tarp tiesės T ir plokštumos P skaičiuojamas pagal formulę

$$\sin\varphi = \frac{a\cdot l + b\cdot m + c\cdot n}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,.$$

Tiesė T statmena plokštumai P, kai

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}\,.$$

Tiesė T lygiagreti plokštumai P, kai

$$a\cdot l + b\cdot m + c\cdot n = 0\,.$$

1. **pavyzdys.** Rasime taško $A(1,2,5)$ atstumą iki tiesės $(x-3)/1 = (y-3)/1 = (z-4)/3$.

Sprendimas. Atstumas nuo taško A iki duotos tiesės lygus atstumui nuo šio taško iki tokio tiesės taško B, kuriam atkarpos AB ilgis – pats mažiausias. Akivaizdu, jog vektorius $\vec{AB}$ turi būti statmenas duotai tiesei. Taigi taškas B yra duotosios tiesės ir plokštumos, einančios per tašką A ir statmenos šiai tiesei, sankirtos taškas. Rasime šios plokštumos lygtį. Vektorius $\vec{a}\,(1,1,3)$ yra lygiagretus duotai tiesei, todėl šis vektorius statmenas ieškomai plokštumai:

$$1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2) + 3\cdot(z-5) = 0\,.$$

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+3z-18 & = 0 \\ (x-3)/1 = (y-3)/1 & = (z-4)/3\,, \end{cases}$$

gauname taško B koordinates $B(3,3,4)$. Taigi atstumas nuo taško A iki duotosios tiesės lygus $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{6}$. □

2. **pavyzdys.** Duota trikampė piramidė, kurios viršūnės yra taškai $A(6,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ ir $D(2,1,5)$. Rasime:

a) plokštumos, einančios per viršūnes A, B ir C, lygtį;
b) piramidės aukštinės (tiesės, einančios per šią aukštinę), išvestos iš viršūnės D, lygtį;
c) plokštumos, einančios per viršūnę A ir statmenos briaunai BD, lygtį;
d) piramidės $ABCD$ tūrį.

Sprendimas. a) Vektoriai $\vec{AB}\,(-6,4,0)$ ir $\vec{AC}\,(-6,0,3)$ yra lygiagretūs ieškomai plokštumai, todėl jų vektorinė sandauga $\vec{AB}\times\vec{AC}$ bus vektorius, statmenas abiem vektoriam $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$, todėl statmenas ir ieškomai plokštumai.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\left(\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}-6 & 0\\ -6 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-6 & 4\\ -6 & 0\end{vmatrix}\right)=(12,18,24)\,.$$

Taigi ieškomos plokštumos lygtis (einančios per tašką A) yra :

$$12(x-6)+18(y-0)+24(z-0)=0\,,$$

arba $2x+3y+4z-12=0\,.$

b) Aukštinė yra statmena piramidės pagrindo plokštumai, einančiai per taškus A, B ir C, t. y. plokštumai $2x+3y+4z-12=0\,.$ Vektorius $\vec{a}\,(2,3,4)$ yra statmenas šiai plokštumai, todėl jis bus lygiagretus ieškomai aukštinei. Taigi aukštinės lygtis yra :

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{4}\,.$$

c) Vektorius $\vec{BD}\ (2,-3,5)$ statmenas ieškomai plokštumai, todėl jos lygtis yra:

$$2(x-6)-3(y-0)+5(z-0)=0\,,$$

arba $2x-3y+5z-12=0\,.$

d) Turime vektorius $\vec{AB}\ (-6,4,0)\,,\ \vec{AC}\ (-6,0,3)$ ir $\vec{AD}\ (-4,1,5)\,.$ Piramidės $A\,B\,C\,D$ tūris V yra (mišriosios sandaugos 2 savybę) :

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\left(\vec{AC}\times\vec{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-6 & 4 & 0\\ -6 & 0 & 3\\ -4 & 1 & 5\end{vmatrix}\right|=15\,.$$

□

Uždaviniai.

1*. Raskite tiesės, einančios per taškus $A(1,2,5)$ ir $B(2,4,7)$, ir plokštumos $2x+3y+z-33=0$ susikirtimo tašką.
Ats.: $(3,6,9)\,.$

2*. Raskite plokštumos, einančios per dvi lygiagrečias tieses $(x-1)/2=(y-3)/2=(z+1)/3$ ir $(x+1)/2=(y-3)/2=(z+2)/3$, lygtį.
Ats.: $x+2y-2z-9=0\,.$

3*. Raskite tiesės, einančios per tašką $A(2,4,3)$ ir lygiagrečios tiesei

$$\begin{cases} x+2y-3z+5 &= 0 \\ 2x-y+5z+2 &= 0 \end{cases},$$

lygtį.

Ats.: $(x-2)/7 = (y-4)/(-11) = (z-3)/(-5)$.

4*. Parašykite tiesės

$$\begin{cases} x+2y-3z+5 &= 0 \\ 2x-y+5z+2 &= 0 \end{cases}$$

kanoninę lygtį.

Ats.: $(x+6)/7 = (y-5)/(-11) = (z-3)/(-5)$.

5*. Parašykite kanoninę ir parametrines tiesės

$$\begin{cases} x+2y-3z-2 &= 0 \\ 2x+y-z-3 &= 0 \end{cases}$$

lygtis.

Ats.: kanoninė lygtis : $(x-1)/1 = (y-2)/(-5) = (z-1)/(-3)$,
parametrinės lygtys : $x = 1+t$, $y = 2-5t$, $z = 1-3t$, $t \in \mathbb{R}$.

6*. Raskite tiesių $x/1 = y/(-2) = (z-3)/(-2)$ ir $(x-3)/3 = (y+2)/(-2) = z/(-3)$ susikirtimo tašką ir plokštumą, kuriai jos priklauso.

Ats.: $(0,0,3)$ ir $2x-3y+4z-12=0$.

7*. Raskite kampą φ ir atstumą d tarp tiesių

$$\begin{cases} x &= -4+3t \\ y &= 1-t \\ z &= t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ir

$$\begin{cases} 3x-4y+z+5 &= 0 \\ x+2y-z-6 &= 0 \end{cases}.$$

Ats.: $\varphi = \arccos\sqrt{6/55} \approx 71^\circ$ ir $d = 4\sqrt{2/3}$.

8*. Kokia turi būti parametro λ reikšmė, kad tiesės $(x-1)/1 = (y+1)/2 = (z-1)/\lambda$ ir $(x+1)/1 = (y-1)/1 = z/1$ susikirstų?

Ats.: $\lambda = 5/4$.

9. Sudarykite tiesės

$$\begin{cases} 2x-y+z+1 &= 0 \\ x+y-z+1 &= 0 \end{cases}$$

projekcijos plokštumoje $x + 2y - z = 0$ lygtį.

Ats.:
$$\frac{x + 2/3}{1} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z - 4/3}{-7}.$$

10. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką $A(-4, 0, 2)$ ir statmenos tiesėms
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4} \quad \text{ir} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}\,.$$
Ats.: $(x+4)/2 = y/(-8) = (z-2)/5\,.$

11. Raskite lygtį plokštumos, einančios per tiesę
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$$
ir statmenos plokštumai $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Ats.: $17x - 2y - 7z + 15 = 0$.

12. Raskite lygtį tiesės, einančios per tašką $A(3, -2, -4)$, lygiagrečios plokštumai $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ ir kertančios tiesę
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$
Ats.:
$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}.$$

13. Raskite lygtį plokštumos, einančios per tiesę
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$$
ir vienodai nutolusios nuo taškų $A(1, 2, -3)$ ir $B(3, -4, 7)$.

Ats.: $21x - 8y - 9z - 28 = 0$ ir $x - z = 0$.