7 pratybos. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso metodu

Paulius Drungilas

Turinys

Uždaviniai 3

1. **pavyzdys.** Išspręsime lygčių sistemą Gauso metodu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 29 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 23 \end{cases}$$

Sprendimas. Pirmame etape 2-oje, 3-oje ir 4-oje lygtyse eliminuosime kintamąjį x_1 : pirmąją lygtį padauginsime iš -3 ir pridėsime prie 2-osios; pirmąją lygtį padauginsime iš -1 ir pridėsime prie 3-osios; pirmąją lygtį padauginsime iš -2 ir pridėsime prie 4-osios :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \qquad (-3)\ (-1)\ (-2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 29 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \qquad (-2) \\ 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 23 \\ x_3 + 4x_4 &= 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_3 + 3x_4 &= 7 \qquad (-1) \\ x_3 + 4x_4 &= 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_4 &= 2\,. \end{cases}$$

Šis "trikampis“ sistemos pavidalas ir yra Gauso metodo tikslas. Šioje sistemoje nuo apačios "kildami aukštyn“, suskaičiuojame visus kintamuosius: iš 4-tos lygties $x_4 = 2$ statome į 3-ąją, gauname $x_3 = 1$, šias reikšmes statome į 2-ąją lygtį ir gauname $x_2 = 2$. Galiausiai iš 1-osios lygties gauname $x_1 = 1$.

Ats.: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

□

2. **pavyzdys.** Išspręsime lygčių sistemą Gauso metodu:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & =1 & \quad (-2)\;\; (-1)\;\; (-3) \\ 2x_1+5x_2+4x_3+5x_4 & =4 & \\ x_1+4x_2+6x_3+10x_4 & =6 & \\ 3x_1+7x_2+6x_3+9x_4 & =7 & \end{array}\right.$$

Sprendimas.

$$\left\{\begin{array}{rll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & =1 & \\ x_2+2x_3+3x_4 & =2 & \quad (-2)\;\; (-1) \\ 2x_2+5x_3+9x_4 & =5 & \\ x_2+3x_3+6x_4 & =4 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & =1 & \\ x_2+2x_3+3x_4 & =2 & \\ x_3+3x_4 & =1 & \quad (-1) \\ x_3+3x_4 & =2 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2+x_3+x_4 & =1 \\ x_2+2x_3+3x_4 & =2 \\ x_3+3x_4 & =1 \\ 0 & =1. \end{array}\right.$$

Taigi iš 4-osios lygties matome, kad sistema sprendinių neturi.

Ats.: Sprendinių nėra.

□

3. **pavyzdys.** Išspręsime lygčių sistemą Gauso metodu:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1+3x_2+x_3+2x_4 & =7 & \quad (-2)\;\; (-4)\;\; (-3) \\ 2x_1+7x_2+4x_3+5x_4 & =18 & \\ 4x_1+14x_2+9x_3+11x_4 & =38 & \\ 3x_1+12x_2+10x_3+10x_4 & =35 & \end{array}\right.$$

Sprendimas.

$$\left\{\begin{array}{rll} x_1+3x_2+x_3+2x_4 & =7 & \\ x_2+2x_3+x_4 & =4 & \quad (-2)\;\; (-3) \\ 2x_2+5x_3+3x_4 & =10 & \\ 3x_2+7x_3+4x_4 & =14 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rll} x_1+3x_2+x_3+2x_4 & =7 & \\ x_2+2x_3+x_4 & =4 & \\ x_3+x_4 & =2 & \quad (-1) \\ x_3+x_4 & =2 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+3x_2+x_3+2x_4 & =7 \\ x_2+2x_3+x_4 & =4 \\ x_3+x_4 & =2\,. \end{array}\right.$$

Taigi sistema turės be galo daug sprendinių. Užrašysime visus sistemos sprendinius. Į kintamąjį x_4 žiūrime kaip į parametrą:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+3x_2+x_3 & =7-2x_4 \\ x_2+2x_3 & =4-x_4 \\ x_3 & =2-x_4 \end{array}\right.$$

Dabar x_1, x_2 ir x_3 išreiškiame per x_4: $x_3 = 2 - x_4$, $x_2 = x_4$ ir $x_1 = 5 - 4x_4$. Taigi pažymėję $t := x_4$, visus sistemos sprendinius galime užrašyti kaip aibę

$$\{(5-4t,\ t,\ 2-t,\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}.$$

Ats.: $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (5-4t,\ t,\ 2-t,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Uždaviniai.

1*. Išspręskite lygčių sistemas Gauso metodu:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_4 & = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 + 13x_4 & = 36 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 & = 9 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 & = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 & = 38 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 & = 25 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 7x_4 & = 23 \\ 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4 & = 32 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 7x_4 & = 23 \\ 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4 & = 31 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 6 \end{cases}$$

Ats.: a) $(1,-1,2,1)$; b) $(1,0,2,1)$; c) nėra sprendinių; d) be galo daug sprendinių $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3-2t,t,t,2-t)$, $t \in \mathbb{R}$; e) be galo daug sprendinių $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2+t-l,2-t,t,l)$, $t \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.

2*. Raskite n-ojo laipsnio daugianarį $p(x)$, jeigu

a) $n = 3$,

x	1	2	3	4
$p(x)$	1	3	13	37

b) $n = 4$,

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	21	4	1	0	13

c) $n = 4$, $p(1) = 2$, $p'(1) = -1$, $p''(1) = 0$, $p^{(3)}(1) = 12$, $p^{(4)}(1) = 24$.

d) $n \leqslant 5$, $p(-1) = -1$, $p'(-1) = 7$, $p''(-1) = -22$, $p^{(3)}(-1) = 60$, $p^{(4)}(-1) = -120$, $p(2) = 29$.

Ats.: a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$; b) $p(x) = x^4 - 2x + 1$; c) $p(x) = x^4 - 2x^3 + x + 2$; d) $p(x) = x^5 - x^2 + 1$.

3*. Išspręskite lygčių sistemas. Kiek sprendinių, priklausomai nuo parametro λ, turi lygčių sistema?

$$a)\ \begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y &= 1 \\ 3x + 4y + 2z &= 3 \\ 2x + 4y + (\lambda^2 + 3)z &= 3\lambda - 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \lambda x + y + z + w &= 1 \\ x + \lambda y + z + w &= 1 \\ x + y + \lambda z + w &= 1 \\ x + y + z + \lambda w &= 1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_4 &= 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 + 13x_4 &= 36 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 &= 9 \end{cases}$$

Ats.: a) Jei $\lambda = -2$ – nėra sprendinių, jei $\lambda = 1$ – be galo daug sprendinių $(x, y, z) = (1 - t - l, t, l),\ t,\ l \in \mathbb{R},$, jei $\lambda \neq 1$ ir $\lambda \neq -2$ – yra vienintelis sprendinys $x = y = z = 1/(2 + \lambda)$;

b) Jei $\lambda = -1$ – sprendinių nėra, jei $\lambda = 1$ – be galo daug sprendinių $(x, y, z) = (1 + 2t, -2t, t),\ t \in \mathbb{R}$, jei $\lambda \neq \pm 1$ – yra vienintelis sprendinys $(x, y, z) = ((\lambda + 7)/(\lambda + 1), -6/(\lambda + 1), 3/(\lambda + 1))$;

c) Jei $\lambda = -3$ – sprendinių nėra, jei $\lambda = 1$ – be galo daug sprendinių $(x, y, z, w) = (1 - t - l - k, t, l, k),\ t,\ l,\ k \in \mathbb{R}$, jei $\lambda \neq 1$ ir $\lambda \neq -3$ – yra vienintelis sprendinys $x = y = z = w = 1/(3 + \lambda)$.

d) Jei $\lambda = 0$ – sprendinių nėra, jei $\lambda \neq 0$ – yra vienintelis sprendinys $(16 - \frac{15}{\lambda}, \frac{5}{\lambda} - 6, 6 - \frac{4}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$.

4. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą, priklausančią nuo parametrų a, b, c ir d:

$$\begin{cases} -x + y + z + w &= a \\ x - y + z + w &= b \\ x + y - z + w &= c \\ x + y + z - w &= d \end{cases}$$

Ats.:

$$\begin{cases} x &= (-a + b + c + d)/4 \\ y &= (a - b + c + d)/4 \\ z &= (a + b - c + d)/4 \\ w &= (a + b + c - d)/4 \end{cases}$$

5. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą, priklausančią nuo parametrų a, b, c, d, p, q, r ir s (bent vienas iš skaičių a, b, c, d yra nenulinis):

$$\begin{cases} ax + by + cz + dw &= p \\ -bx + ay + dz - cw &= q \\ -cx - dy + az + bw &= r \\ -dx + cy - bz + aw &= s \end{cases}$$

Ats.:

$$\begin{cases} x &= (ap - bq - cr - ds)/A \\ y &= (bp + aq - dr + cs)/A \\ z &= (cp + dq + ar - bs)/A \\ w &= (dp - cq + br + as)/A \end{cases},$$

kur $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

6. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &= b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n &= b^2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n &= b^{n-1} \end{cases},$$

kur a_1, a_2, …, a_n – skirtingi realieji skaičiai.

Ats.:

$$x_k = \frac{\prod_{i\neq k}(b - a_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k - a_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

7. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n &= b_1 \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 + \cdots + a_2^{n-1}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n &= b_n \end{cases},$$

kur a_1, a_2, …, a_n – skirtingi realieji skaičiai.

Ats.: Galima pasinaudoti Niutono interpoliacine formule polinomui

$$p(t) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + \cdots + x_nt^{n-1}.$$

$$x_k = (-1)^{n+k}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_if_{ik}}{(a_i - a_1)\cdots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\cdots(a_i - a_n)},$$

kur $k = 1, 2, \ldots, n$, o f_{ik} – suma visų įmanomų sandaugų po $n - k$ iš $n - 1$ skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$.

8. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \cdots + \quad x_n &= b_1 \\ a_1x_1 + \quad a_2x_2 + \cdots + \quad a_nx_n &= b_2 \\ a_1^2x_1 + \quad a_2^2x_2 + \cdots + \quad a_n^2x_n &= b_3 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n &= b_n \end{cases},$$

kur a_1, a_2, ..., a_n – skirtingi realieji skaičiai.

Ats.:

$$x_k = \frac{1}{(a_k - a_1)\cdots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\cdots(a_k - a_n)} \sum_{i=1}^{n} b_i f_{ki},$$

kur $k = 1, 2, \ldots, n$, o f_{ki} – suma visų įmanomų sandaugų po $n - i$ iš $n - 1$ skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$.

9. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \cdots + \quad x_n + 1 &= 0 \\ 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^nx_n + 1 &= 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ nx_1 + n^2x_2 + \cdots + n^nx_n + 1 &= 0 \end{cases},$$

Ats.:

$$x_k = \frac{(-1)^k P_{n-k}}{n!},$$

kur $k = 1, 2, \ldots, n$, $P_0 := 1$, o P_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ – suma visų įmanomų sandaugų po i iš n skaičių $1, 2, \ldots, n$.