8 pratybos. Determinantai

Paulius Drungilas

Turinys

Kaip skaičiuoti determinantą? Sakykime, turime $n \times n$ matricą (skaičių lentelę $n \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elemento a_{ij} **minoras** M_{ij} yra $n-1$-os eilės determinantas, gaunamas iš matricos A determinanto išbraukus i-ąją eilutę ir j-ąjį stulpelį. Elemento a_{ij} **adjunktas** yra skaičius $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$.
Matricos A determinantas $|A|$ lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų, padaugintų iš jų adjunktų, sumai.

1. **pavyzdys.** Apskaičiuosime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determinantą $|A|$.

Sprendimas. Skaičiuosime pagal ketvirtą stulpelį (nes ten daugiausia nulių!):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + 2 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+4} M_{14} + 2 \cdot (-1)^{3+4} M_{34} =$$

$$(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-2 + 2 + 6 + 2 - 3 - 4) - 2(1 + 0 + 4 - 2 - 0 - 2) = -4.$$

□

Greitas būdas suskaičiuoti determinantą. Šis būdas remiasi tokiomis determinanto savybėmis:

1. Jei bet kurią determinanto eilutę (stulpelį) padauginsime iš skaičiaus ir pridėsime prie kitos eilutės (stulpelio), tai determinantas nepasikeis.
2. Jei sukeisime dvi determinanto eilutes (stulpelius) vietom, tai pasikeis tik determinanto ženklas.

2. **pavyzdys.** Determinantas

$$D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vadinamas lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

determinantu.

Kramerio formulės. Lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $\Longleftrightarrow$ sistemos determinantas D nelygus nuliui. Šiuo atveju sistemos sprendinys randamas iš formulių

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

čia D_i yra determinantas, gaunamas iš sistemos determinanto D, i-tąjį stulpelį pakeičiant sistemos laisvaisiais nariais $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Vandermondo determinantas. Determinantas

$$W_n := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vadinamas Vandermondo determinantu. Matematinės indukcijos būdu nesunku įrodyti lygybę

$$W_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i), \quad n \geqslant 2.$$

n-tos eilės determinantą

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

skleidžiant pagal pirmą eilutę, galima įsitikinti, jog jis tenkina rekurentinį sąryšį

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Be to

$$D_1 = a, \;\; D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc.$$

Rekurentinė seka. Rekurentinės sekos $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ bendrojo nario formulė. Tarkim, jog lygties $x^2 - px - q = 0$ šaknys yra α ir β.

- Jei $\alpha \neq \beta$, tai bendrasis narys turi pavidalą

  $$a_n = C_1\,\alpha^n + C_2\,\beta^n,$$

  o koeficientai C_1 ir C_2 randami iš lygybių

  $$\begin{cases} C_1\,\alpha + C_2\,\beta & = a_1 \\ C_1\,\alpha^2 + C_2\,\beta^2 & = a_2 \end{cases}.$$

- Jei $\alpha = \beta$, tai bendrasis narys turi pavidalą

$$a_n = C_1\,\alpha^n + C_2\,n\alpha^n,$$

o koeficientai C_1 ir C_2 randami iš lygybių

$$\begin{cases} C_1\,\alpha + C_2\,\alpha & = a_1 \\ C_1\,\alpha^2 + 2C_2\,\alpha^2 & = a_2 \end{cases}.$$

Uždaviniai.

1*. Apskaičiuokite determinantus

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 30 & 45 \\ 32 & 56 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}.$$

Ats.: a) 1; b) 2; c) $15 \cdot 8 \cdot 2$; d) 1.

2*. Apskaičiuokite determinantus

$$a)\ \begin{vmatrix} 4 & 21 & 10 \\ 20 & 7 & 35 \\ 12 & 49 & 35 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ats.: a) -2800; b) 0; c) 900.

3*. Suprastinkite ir apskaičiuokite trečios eilės determinantus:

$$a)\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix};\ b)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 5 & -24 & 4 \end{vmatrix};\ c)\ \begin{vmatrix} 81 & 33 & 9 \\ 225 & 75 & 150 \\ 27 & 18 & -27 \end{vmatrix}.$$

Ats.: a) 19; b) 0; c) -30375.

4*. Išspręskite sistemas, naudodami Kramerio formules

$$a)\ \begin{cases} 4x + 5y + 3z & = 0 \\ 2x - 9y - 2z & = 15 \\ 3x + 7y - z & = 0 \end{cases},\quad b)\ \begin{cases} 3x - 5y + 4z & = 6 \\ 15x + 10y - 3z & = 0 \\ 6x - 5y + z & = 4 \end{cases},$$

$$c)\ \begin{cases} 5x + 2y + z & = 3 \\ x - 3y - 4z & = -1 \\ 7x - 2y + 3z & = 17 \end{cases},\quad d)\ \begin{cases} x - 4y + 6z & = 8 \\ 3x + 8y & = 4 \\ 4x - 4y - 12z & = -1 \end{cases}$$

Ats.: a) $(2, -1, -1)$; b) $(1/3, -1/5, 1)$; c) $(1, -2, 2)$; d) $(2, -1/4, 5/6)$.

5*. Kiek sprendinių priklausomai nuo parametro λ turi lygčių sistema

$$a)\ \begin{cases} \lambda x - 2y & = 1 \\ 6x - 3y & = 2 \end{cases},\quad b)\ \begin{cases} 4x + \lambda y & = 2 \\ \lambda x + 9y & = 3 \end{cases}.$$

Ats.: a) kai $\lambda \neq 4$, sistema turi vienintelį sprendinį; kai $\lambda = 4$, sistema neturi sprendinių; b) kai $\lambda \neq \pm 6$, sistema turi vienintelį sprendinį; kai $\lambda = -6$, sistema neturi sprendinių; kai $\lambda = 6$, sistema turi be galo daug sprendinių.

6*. Išspręskite lygtis

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 2t+6 \\ 2 & 2 & 6-t & t \end{vmatrix} = 0, \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: a) $t = 2$ ir $t = 1/2$; b) $x = 1$.

7*. Kokios turi būti m ir n reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} x + my - 3z &= 2 \\ 4x + y - z &= -n \\ 2x - 3y + 5z &= -3 \end{cases}$$

a) turėtų vienintelį sprendinį; b) neturėtų sprendinių; c) turėtų be galo daug sprendinių?

Ats.: a) $m \neq 2$; b) $m = 2$ ir $n \neq -1$; c) $m = 2$ ir $n = -1$.

8*. Pasinaudoję determinantų savybėmis, įrodykite lygybes:

a)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

b)

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

c)

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

d)

$$\begin{vmatrix} a + x & b + y & c + z \\ x + u & y + v & z + w \\ u + a & v + b & w + c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix};$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b);$$

f)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

g)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$$

h)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b);$$

i)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b).$$

9*. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ats.: 0.

10*. Išspręskite lygtį

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

Ats.: $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

11*. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-2} & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ats.: $(-1)^{n(n-1)/2}\, a_{1n} a_{2\,n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n1}$.

12*. Apskaičiuokite determinantą, pertvarkydami jį į trikampį pavidalą

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}; \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ & & & \cdots & \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ & & & \cdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}; \qquad d)\ \underbrace{\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}}_{n};$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Ats.: a) $(n-1)!$; b) $(-1)^{n-1}\,n!$; c) $-2(n-2)!$; d) $(2n-1)(n-1)^{n-1}$; e) $n(-1)^{n(n-1)/2}$.

13*. Apskaičiuokite determinantą

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Ats.: $D_1 = a_1+b_1$, $D_2 = (a_1-a_2)(b_1-b_2)$, $D_n = 0$, kai $n > 2$.

14*. Apskaičiuokite determinantą

$$a)\ \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix};$$

$$c)\ \underbrace{\begin{vmatrix} 11 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 11 \end{vmatrix}}_{n};\quad d)\ \underbrace{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 16 & 8 \end{vmatrix}}_{n}.$$

Ats.: a) $4^7 - 3^7 = 14197$; b) 1024; c) $6^{n+1} - 5^{n+1}$; d) $(n+1)4^n$.

15. Įrodykite, jog su bet kuriais skaičiais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ teisinga lygybė

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

16. Įrodykite, jog su bet kuriais skaičiais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ teisinga lygybė

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-i}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_{n-i}} \right)\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

17. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ & & & \cdots & \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

Ats.: $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n!$.

18. Išspręskite lygtį

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

kur $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – skirtingi realieji skaičiai.

Ats.: $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

19. Kaip pasikeis determinantas, jei kiekvieną jo elementą a_{ij} padauginsime iš c^{i-j}, kur c – nenulinis realusis skaičius.

20. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix};$$

čia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – realieji skaičiai.

Ats.: $x^n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x^{n-1}$.