Skaliarinė sandauga

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

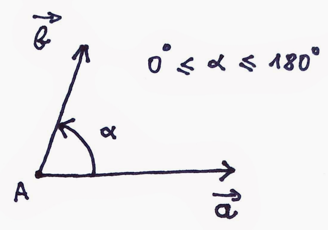
2014 m. rugsėjo 3 d.

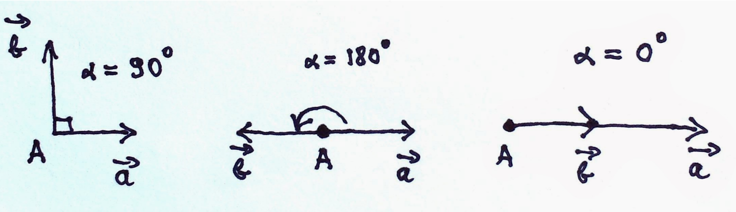
Kampas tarp vektorių

$\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – nenuliniai vektoriai.

Atidedame vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nuo vieno taško A.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaromas kampas ($\in [0°, 180°]$) vadinamas **kampu tarp šių vektorių**.



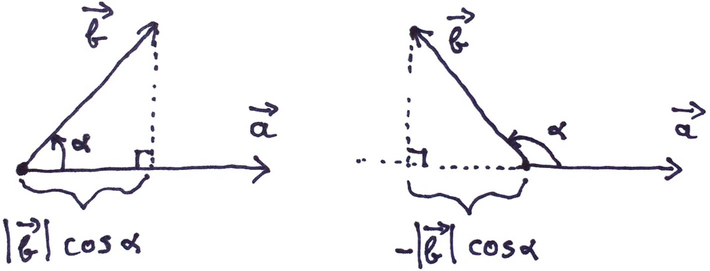


Skaliarinė sandauga

Nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **skaliarine sandauga** vadinamas skaičus

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

kur α – kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Jei bent vienas iš vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nulinis, tai apibrėžiame $\vec{a} \cdot \vec{b} := 0$.



Skaliarinės sandaugos savybės

Teiginys 1

Bet kuriems vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir bet kuriam realiajam skaičiui α teisingos tokios lygybės:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(komutatyvumas)*

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *(distributyvumas)*

$(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ *(asociatyvumas)*

Išvada 2

Vektorių $\vec{a}(x_1, y_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2)$ skaliarinė sandauga

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Taigi kampas α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}(x_1, y_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2)$ randamas iš lygybės

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Vektoriai $\vec{a}(x_1, y_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2)$ yra statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, t.y.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

Išvada 3

Vektorių $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ *skaliarinė sandauga*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Taigi kampas α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ randamas iš lygybės

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Be to,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$