KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Regina ATSTUPĖNIENĖ,
Minvydas RAGULSKIS,
Irena TIKNEVIČIENĖ,
Genovaitė ZAKSIENĖ

INTEGRALAI IR DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Mokomoji knyga

Kaunas * Technologija * 2003

Recenzavo: doc. dr. Narimantas Listopadskis,
doc. dr. Aldona Vitkutė

Penktasis pataisytas leidimas

ISBN 9986-13-680-6

TURINYS

PRATARMĖ

Ši mokomoji knyga skirta KTU pirmojo kurso antrojo semestro dieninio ir neakivaizdinio skyrių studentams ir parengta atsižvelgiant į studijų modulį P130B002. Naujai pertvarkant KTU studentų ruošimo planus, daugiau laiko skiriama studentų savarankiškoms studijoms. Todėl autoriai stengiasi nuosekliai ir išsamiai išdėstyti pagrindines sąvokas, teiginius, metodus ir gausiai pailiustruoti juos išspręstais pavyzdžiais.

Knygą sudaro 12 skyrių, kurių pirmasis skirtas kompleksiniams skaičiams, 2 – 6 – vieno kintamojo funkcijų integraliniam skaičiavimui, 7 – 9 – diferencialinėms lygtims, 10, 11 kartotiniams bei kreiviniams integralams. Kiekvieno skyriaus paskutinieji du skyreliai skirti studentų savarankiško darbo įgūdžių įtvirtinimui.

Leidinio pabaigoje pateiktas literatūros, kuria naudojosi autoriai, sąrašas. Tai labai pravers skaitytojams, studijuojantiems savarankiškai bei norintiems išsamiau susipažinti su nagrinėjamais klausimais ir jų taikymu.

1 skyrių paruošė dėst. dr.M. Ragulskis, 2– 6 skyrius – doc. dr. R. Atstupėnienė, 7 – 9 – doc. dr. G. Zaksienė, 10, 11 – doc. dr. I. Tiknevičienė.

Autoriai nuoširdžiai dėkoja prof. habil. dr. V. Pekarskui, doc. dr. E. Valakevičiui, recenzentams doc. dr. N. Listopadskiui, doc. dr. A. Vitkutei ir doc. dr. L. Papreckienei už pastabas ir patarimus bei katedros raštvedei D. Nenortienei už kruopštų knygos paruošimą spaudai.

Autoriai

1. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR VEIKSMAI SU JAIS

1.1. Pagrindinės sąvokos

1 apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi vadinamas reiškinys $z = x + i\,y$; čia x ir y – realieji skaičiai, o i – menamas vienetas, turįs savybę:

$$i^2 = -1. \qquad (1)$$

· Skaičius x vadinamas kompleksinio skaičiaus realiąja dalimi ir žymimas $x = \operatorname{Re} z$, skaičius y – menamąja dalimi ir žymimas $y = \operatorname{Im} z$. Kompleksiniai skaičiai z, kurių $\operatorname{Re} z = 0$, vadinami **menamaisiais** skaičiais.

2 apibrėžimas. Kompleksiniai skaičiai yra **lygūs** tada ir tik tada, kai atitinkamai lygios jų realiosios ir menamosios dalys.

Iš 2-jo apibrėžimo išplaukia, kad skaičius $z = 0$ tada ir tik tada, kai $x = y = 0$.

·**3 apibrėžimas.** Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + i\,y_1$ ir $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\,y_2$ **suma** yra kompleksinis skaičius

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right), \qquad (2)$$

o jų **sandauga** – kompleksinis skaičius

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right). \qquad (3)$$

Sudėties ir daugybos veiksmai su kompleksiniais skaičiais turi šias savybes:

a) jungimo (asociatyvumo): $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$;

$$\left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot z_3 = z_1 \cdot \left(z_2 \cdot z_3\right),$$

b) perstatymo (komutatyvumo): $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

c) skirstymo (distributyvumo): $\left(z_1 + z_2\right) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

4 apibrėžimas. Kompleksinis skaičius $\bar{z} = x - i\,y$ vadinamas **jungtiniu** kompleksiniam skaičiui $z = x + i\,y$.

Jungtiniams kompleksiniams skaičiams galioja taisyklės:

$$z \cdot \bar{z} = \left(x + iy\right) \cdot \left(x - iy\right) = x^2 + y^2; \ \overline{\left(z_1 \pm z_2\right)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \ \overline{\left(z_1 \cdot z_2\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \qquad (4)$$

Iš 3-čio apibrėžimo išplaukia, kad kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 atimties, ir z_1 iš $z_2 \neq 0$ dalybos rezultatai yra:

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i\left(y_2 - y_1\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \quad (5)$$

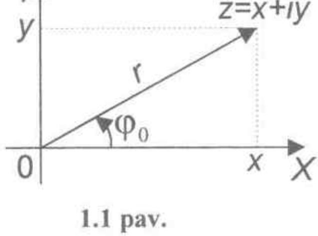
1 pavyzdys.

Apskaičiuosime kompleksinių skaičių $z_1=3-2i$, $z_2=1+3i$ sumą, skirtumą, sandaugą ir dalmenį:

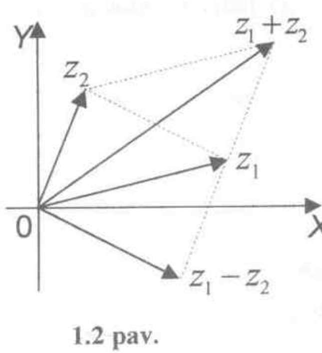
$$z_1+z_2=(3-2i)+(1+3i)=(3+1)+(-2+3)i=4+i,$$
$$z_1-z_2=(3-2i)-(1+3i)=(3-1)+(-2-3)i=2-5i,$$
$$z_1\cdot z_2=(3-2i)\cdot(1+3i)=3+9i-2i-6i^2=9+7i,$$
$$\frac{3-2i}{1+3i}=\frac{3-9i-2i-6}{1+9}=-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i.$$

1.2. Kompleksinių skaičių geometrinis vaizdavimas ir trigonometrinė bei rodiklinė formos

Nagrinėkime plokštumą ir stačiakampę koordinačių sistemą joje. Kompleksinis skaičius $z=x+i\,y$ vaizduojamas plokštumos tašku (x,y), kurio abscisė lygi z realiajai daliai x, o ordinatė – menamajai daliai y. Abscisių ašis Ox vadinama realiąja ašimi, ordinačių ašis Oy – menamąja ašimi, o pati koordinačių sistema – **kompleksine plokštuma**. Kiekvieną kompleksinį skaičių $z=x+i\,y$ atitinka vienintelis plokštumos taškas (x,y), o kiekvieną plokštumos tašką (x,y) – vienintelis kompleksinis skaičius $z=x+i\,y$.



1.1 pav.



1.2 pav.

Kompleksinį skaičių z taip pat patogu geometriškai vaizduoti ir plokštumos vektoriumi (1.1 pav.), kurio pradžia yra koordinačių sistemos pradžioje $z=0$, o galas – taške (x, y).

Taigi, kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sudėties ir atimties veiksmus galima geometriškai iliustruoti vektorių z_1 ir z_2 suma bei skirtumu (1.2 pav.).

1 apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus $z = x + i\,y$ **moduliu** $|z|$ vadinamas realusis neneigiamas skaičius

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{6}$$

lygus vektoriaus (x, y) ilgiui (taško (x, y) atstumui iki koordinačių sistemos pradžios).

Akivaizdu, kad skaičiaus $z = 0$ modulis $|0| = 0$. Jei $z \neq 0$, tai $|z| > 0$. Be to, iš (4) ir (6) lygybių išplaukia, kad $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2 apibrėžimas. Nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus $z = x + i\,y$ **argumentu** vadinamas radianais išmatuotas orientuotas kampas $\varphi = \operatorname{Arg} z$, kurį sudaro vektorius (x, y) su kompleksinės plokštumos teigiama realiąja pusaše (1.1 pav.).

Iš 2 – ojo apibrėžimo išplaukia, kad yra be galo daug $\operatorname{Arg} z$ reikšmių, kurios viena nuo kitos skiriasi dydžiu $2\pi k$, (k – sveikasis skaičius). Nulio argumentas neapibrėžiamas: Arg 0 neturi prasmės.

Pagrindine argumento reikšme vadinamas kampas $\varphi_0 = \arg z$, priklausantis ilgio 2π intervalui; dažnai $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$, kartais $\varphi_0 \in (0, 2\pi]$.

$$\varphi_0 = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{kai } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{kai } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{kai } x < 0, y \leq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Taigi, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$. Be to, menamojo skaičiaus $z = i\,y$ pagrindinė argumento reikšmė

$$\varphi_0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{kai } y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{kai } y < 0. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad taško $z = x + i\,y$ polinės koordinatės kompleksinėje plokštumoje yra $r = |z|$ ir $\varphi = Arg\,z$ (1.1 pav.). Kadangi $x = r\cos\varphi$ ir $y = r\sin\varphi$, tai kompleksinį $z = x + iy$ galima išreikšti **trigonometrine forma**:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\,. \tag{8}$$

Naudojantis kompleksinių skaičių trigonometrine išraiška, paprasta paaiškinti algebrinius veiksmus su kompleksiniais skaičiais. Dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sumą iliustruoja atitinkamų vektorių suma (1.2 pav.). Be to, bet kurios trikampio kraštinės ilgis yra mažesnis už kitų dviejų kraštinių ilgių sumą, t.y. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$. Lygybės ženklas galioja tada ir tik tada, kai vektoriai z_1 ir z_2 yra lygiagretūs ir nukreipti viena kryptimi, t.y. Arg z_1 = Arg z_2. Ši, ir dar viena nelygybė $|z_1+z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$ abi kartu yra vadinamos trikampio nelygybėmis.

Analogiškai, dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 skirtumą atitinka vektorius, kurio pradžia yra taške z_1, galas – taške z_2, o modulis

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{9}$$

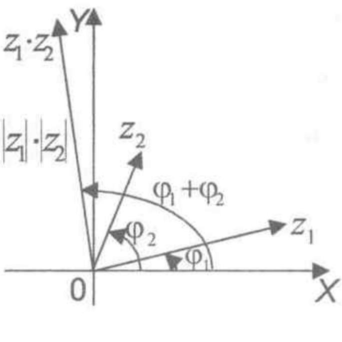
Iš kompleksinio skaičiaus trigonometrinės formos apibrėžimo gaunamos šios dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sandaugos savybės:

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2).$$

Iš tikrųjų,

$$z_1\cdot z_2=[r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]\cdot[r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{10}$$

Sandaugos vektorius $z_1\cdot z_2$, gaunamas pasukant vektorių z_1 kampu φ_2 ir padidinant (sumažinant) jo ilgį r_2 kartų (1.3 pav.).



1.3 pav.

Analogiškai,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{11}$$

nes

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=$$
$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}{r_2^2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Iš (10) lygybės išplaukia $z^2=z\cdot z=r^2(\cos2\varphi+\ i\ \sin2\varphi)$, $z^3=z^2\cdot z=$ $=r^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$. Tęsiant procedūrą toliau, gaunama **Muavro** formulė:

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{12}$$

Kai n – neigiamas sveikasis skaičius $n = -m$, $(m \in N)$

$$z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi)} = r^{-m}(\cos(0 - m\varphi) + i \sin(0 - m\varphi)) =$$

$$= r^{-m}(\cos(-m\varphi) + i \sin(-m\varphi)).$$

Taigi, keliant skaičių z n – tuoju laipsniu $(n \in Z)$,

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z.$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $(\sqrt{3} - i)^{60}$.

▸ Kadangi $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, o

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}, \text{ tai}$$

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Iš Muavro formulės, gauname:

$$z^{60} = 2^{60} \cdot \left(\cos\left(-\frac{60\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{60\pi}{6}\right)\right) = 2^{60} \cdot (\cos 10\pi - i \sin 10\pi) = 2^{60}. ◂$$

3 apibrėžimas. Kiekvienas kompleksinis skaičius ω vadinamas ***n* – jo laipsnio šaknimi** iš kompleksinio skaičiaus z ir žymimas $\omega = \sqrt[n]{z}$, jei $\omega^n = z$ (čia $n = 2, 3, ...$).

Jei $z = r(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$, o $\omega = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, tai iš Muavro formulės ir lygybės $\omega^n = z$ išplaukia, kad

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi_0 + 2\pi k,$$

čia k – sveikasis skaičius. Išreiškus $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \dfrac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}$, ir įvertinus sinuso bei kosinuso periodiškumo savybę, gaunama n skirtingų šaknies reikšmių:

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{13}$$

Visi taškai ω_k, $k = 0, 1, ..., n-1$, yra išsidėstę taisyklingo n – kampio, įbrėžto į apskritimą, kurio spindulys $R = \sqrt[n]{r}$, o centras – koordinačių sistemos pradžioje, viršūnėse.

Analogiškai apibrėžiamas laipsnis su racionaliuoju rodikliu: $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$, čia m – sveikasis skaičius, n – natūrinis skaičius:

$$\omega_k = \sqrt[n]{z^m} = \sqrt[n]{r^m} \cdot \left(\cos\frac{m\varphi_0 + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\ \sin\frac{m\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

2 pavyzdys. Rasime visas šaknies $\sqrt[4]{-1}$ reikšmes.

▶ Kadangi $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, t.y. $r = 1$, $\varphi_0 = \pi$, tai

$$\omega_k = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k = 0,1,2,3.$$

Tada,

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_3 = \cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ ◀}$$

Reiškinį $\cos\varphi + i\sin\varphi$ L.Oileris žymėjo $e^{i\varphi}$. Taigi lygybė

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

vadinama **Oilerio** formule.

Tada kiekvieną kompleksinį skaičių, kurio trigonometrinė forma yra $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ galima išreikšti rodikline forma $z = r\cdot e^{i\varphi}$, kuri labai tinkama daugybos bei dalybos veiksmuose:

Jei $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ ir $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, tai $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, kai $z_2 \neq 0$, be to $z_1^n = r_1^n \cdot e^{in\varphi_1}$, čia n – sveikasis skaičius, ir $\left(\sqrt[m]{z_2}\right)_k = \sqrt[m]{r_2} \cdot e^{\frac{i(\varphi_2 + 2\pi k)}{m}}$, čia m ir k natūralieji skaičiai, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

3 pavyzdys. Pasinaudoję skaičiaus $z = 1 + i$ rodikline forma, apskaičiuosime z^4.

▸ $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\varphi_0 = arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Taigi

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ ir}$$

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 4} = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4. \blacktriangleleft$$

1.3. Kreivės kompleksinėje plokštumoje. Rymano sfera. Išplėstinė kompleksinė plokštuma

Realaus kintamojo t kompleksinę funkciją galime užrašyti taip:

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \tag{14}$$

čia $x(t)$ ir $y(t)$ – realiosios realaus kintamojo t funkcijos.

Šią funkciją kaip ir realiąją funkciją, išreikštą parametrine forma

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{15}$$

patogu geometriškai interpretuoti kaip xOy plokštumos kreivę.

Taigi (14) funkcija nusako kreivę kompleksinėje plokštumoje. Pavyzdžiui, funkciją $z = a\cos t + i\,b\sin t$, $0 \le t \le \pi$ patogu geometriškai interpretuoti plokštumos kreivės – elipsės lanku viršutinėje pusplokštumėje. Tuo tarpu lygtis $z = 2 + it$, $-\infty < t < \infty$ nusako vertikalią tiesę $x = 2$; $-\infty < y < \infty$.

Atstumą tarp dviejų taškų $z_1 = x_1 + i\,y_1$ ir $z_2 = x_2 + i\,y_2$ kompleksinėje plokštumoje galime apibrėžti taip:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{16}$$

Akivaizdu, kad apskritimo lygtis $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ kompleksinėje plokštumoje įgauna tokią formą:

$$|z - z_0| = R, \tag{17}$$

čia $z = x + i\,y$ – kintamas apskritimo taškas, apskritimo centras yra $z_0 = x_0 + i\,y_0$, o spindulys R. Visiems z, esantiems skritulyje, teisinga nelygybė $|z - z_0| < R$, o jo išorėje $|z - z_0| > R$.

Jei z – fiksuotas apskritimo taškas, tai kompleksinį skaičių $z-z_0$ išreiškus rodikline forma $z-z_0=\mathrm{Re}^{i\varphi_0}$, gaunama parametrinė apskritimo lygtis

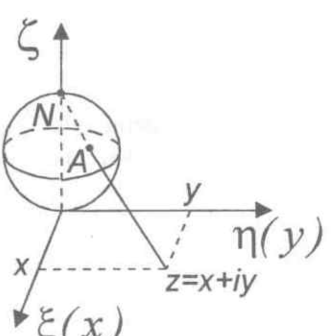
$$z=z_0+\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\,\varphi_0},\ 0\le\varphi_0\le 2\pi. \tag{18}$$

1 apibrėžimas. Taško z_0 **ε – aplinka** vadinama aibė kompleksinių skaičių z, kuriems teisinga nelygybė $|z-z_0|<\varepsilon$.

2 apibrėžimas. Jei realiųjų skaičių $|z_n|$ sekos riba $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$, tai sakoma, kad kompleksinių skaičių seka $\{z_n\}$turi **begalinę** ribą $z=\infty$. Pagal šį apibrėžimą naujasis begalinis kompleksinis skaičius turi tokią savybę: jo modulis yra didesnis už bet kokį realųjį skaičių.

3 apibrėžimas. Be galo nutolusio taško $z=\infty$ **R – aplinka** vadinama aibė $|z|>R$, t.y. taškų, esančių apskritimo $|z|=R$ išorėje, aibė.

4 apibrėžimas. Baigtinė kompleksinė plokštuma su prijungtu prie jos tašku $z=\infty$ vadinama **išplėstine kompleksine plokštuma**.



1.4 pav.

Realiųjų skaičių aibė, papildyta dviem elementais $+\infty$ ir $-\infty$, vadinama išplėstine realiųjų skaičių aibe. Kompleksinė plokštuma papildoma vienu elementu $z=\infty$. Tam, kad būtų lengviau suvokti $z=\infty$ geometrinę prasmę, galima panaudoti **Rymano** sferą.

Koordinačių sistemoje (ξ,η,ζ) nubrėžiama sfera, kurios centras yra taške (0, 0, ½), o spindulys yra ½ (1.4 pav.). Taigi sferos lygtis yra $\xi^2+\eta^2+(\varsigma^2-0{,}5)^2=0{,}25$,

arba

$$\xi^2+\eta^2+\varsigma^2-\varsigma=0.$$

Plokštuma $\xi O\eta$ sutapatinama su kompleksine plokštuma tokiu būdu, kad ašis $O\xi$ sutaptų su realiąja ašimi Ox, o ašis $O\eta$ – su menamąja ašimi Oy. Rymano sferos "šiaurės" polius – taškas N su koordinatėmis (0,0,1). Jungiant bet kurį kompleksinės plokštumos tašką z su tašku N tiesės atkarpa, ji kirs sferos paviršių vieninteliame taške A. Tokiu būdu apibrėžiamas kiekvieno kompleksinės plokštumos taško z vaizdavimas į Rymano sferos tašką A. Galima nesunkiai pastebėti, kad taško $z=\infty$ vaizdas Rymano sferoje yra taškas N.

Pagal trečiąjį apibrėžimą, kuo didesnis kompleksinio skaičiaus modulis R, tuo bus mažesnis atstumas tarp jo atvaizdo Rymano sferoje ir taško N.

Galima nesunkiai pastebėti, kad kompleksinio skaičiaus $z = x + i\,y$ vaizdas Rymano sferoje A turi tokias koordinates:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \eta = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \varsigma = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}. \end{cases} \tag{19}$$

Atvirkščiai, turint Rymano sferos taško koordinates $A(\xi, \eta, \varsigma)$ galima rasti jį vienareikšmiškai atitinkantį kompleksinės plokštumos tašką (x,y):

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{1-\varsigma}, \\ y = \dfrac{\eta}{1-\varsigma}. \end{cases} \tag{20}$$

Pavyzdys. Rasime kompleksinio skaičiaus $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ vaizdą Rymano sferoje.

► $\xi = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0{,}5 + 0{,}5 + 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \eta = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{0{,}5 + 0{,}5 + 1} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \varsigma = \dfrac{0{,}5 + 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5 + 1} = \dfrac{1}{2}.$

Taigi vaizdo koordinatės yra $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$. ◄

1.4. Kompleksinio kintamojo funkcijos sąvoka. Kai kurios elementariosios kompleksinio kintamojo funkcijos

Sakykime, kad yra dvi kompleksinės išplėstinės plokštumos, ir pirmosios plokštumos bet kurį tašką z vadinsime kompleksinio kintamojo z reikšme. Antrosios plokštumos taškus žymėsime w.

1 apibrėžimas. Jei yra žinomas dėsnis f, priskiriantis kiekvienam elementui z vienintelį (daugiau kaip vieną) kompleksinį skaičių $w = u + iv$, tai sakoma, kad apibrėžta vienareikšmė (daugiareikšmė) **kompleksinio kintamojo funkcija** f:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Funkcijos $u(x, y)$ ir $v(x, y)$ vadinamos funkcijos $f(z)$ realiąja ir menamąja dalimis.

Tuomet taškas $w = f(z)$ vadinamas taško z vaizdu. Pateiksime keletą algebrinių kompleksinių elementariųjų funkcijų pavyzdžių.

Pastovioji funkcija $f(z) \equiv a$ kiekvieną kompleksinės plokštumos tašką z vaizduoja į kompleksinį tašką a.

Jungtinis atvaizdis $w = \bar{z}$ kiekvieną tašką $z = x + iy$ vaizduoja į tašką $z = x - iy$.

Laipsninė funkcija apibrėžiama kaip kompleksinio kintamojo z funkcija $w = z^n$, $n \in N$. Ši funkcija yra vienareikšmė, tačiau jos atvirkštinė funkcija $w = \sqrt[n]{z}$ kiekviename baigtinės plokštumos taške $z \neq 0$ įgyja lygiai n kompleksinių reikšmių, kurių argumentai skiriasi dydžiu $2\pi n$.

Polinomu arba **daugianariu** vadiname funkciją

$$w = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0; \; P_n(\infty) = \infty; \; n \geq 1,$$

čia koeficientai $a_k, k = 0, 1, \ldots, n$ – kompleksiniai skaičiai, z – kompleksinis kintamasis, n – polinomo laipsnis. Ši funkcija yra vienareikšmė visoje išplėstinėje plokštumoje. Nulinės eilės polinomas yra pastovioji funkcija; pirmos eilės polinomas vadinamas **tiesine** funkcija $w = az + b$.

Dviejų polinomų santykis $w = P_n(z) / Q_m(z)$ vadinamas **racionaliąja** funkcija. Ji apibrėžta visoje baigtinėje plokštumoje, išskyrus taškus, kuriuose vardiklis $Q_m(z)$ lygus nuliui.

Pateiksime keletą transcendentinių (ne algebrinių) funkcijų pavyzdžių.

Kompleksinio kintamojo $z = x + iy$ funkcija $e^x(\cos y + i \sin y)$ vadinama **rodikline** arba eksponentine funkcija ir žymima:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ši funkcija yra apibrėžta ir vienareikšmė visoje baigtinėje kompleksinėje plokštumoje. Be to, iš trigonometrinių funkcijų periodiškumo gauname, kad rodiklinė fukcija yra periodinė, o jos pagrindinis periodas lygus $2\pi n$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x\left(\cos(y + 2\pi n) + i \sin(y + 2\pi n)\right) =$$
$$= e^{x+i(y+2\pi n)} = e^{z+i2\pi n}.$$

Rodiklinės funkcijos atvirkštinė funkcija vadinama **logaritmu** ir žymima $z = \mathrm{Ln}\ w$. Iš lygybės $w = e^{x+iy}$ gauname, kad $|w| = e^x$. Iš rodiklinės funkcijos periodiškumo išplaukia, kad menamoji dalis y yra daugiareikšmė. Tuomet,

$$z = \mathrm{Ln} w = \ln|w| + i \arg w + 2\pi k i, \quad k \in Z.$$

Iš Oilerio formulių $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ir $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ išplaukia:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \text{ bei } \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i};$$

φ – bet kuris realusis skaičius.

Analogiškai apibrėžiamos kompleksinio kintamojo z funkcijos **kosinusas** ir **sinusas**:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ bei } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

Funkcijos $\sin z$ ir $\cos z$ yra vienareikšmės funkcijos baigtinėje kompleksinėje plokštumoje. Taške $z = \infty$ jos, kaip ir funkcija e^z, neapibrėžtos.

Pavyzdys. Rasime fukcijos $w = z^3 - 2z$ realiąją ir menamąją dalis.

▶ Pažymėsime $z = x + iy$, $w = u + iv$. Tada,

$$u + iv = \left(x^3 + 3x^2 \cdot iy - 3xy^2 - iy^3\right) - 2(x + iy),$$

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - 2x; \\ v = 3x^2 y - y^3 - 2y. \end{cases}$$

◀

1.5. Uždavinių sprendimas

1. Apskaičiuosime sumą:

$$\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$$

$$= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2} + \frac{80-60i}{16-9i^2} = \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} =$$

$$= \frac{(-5+80)+i(35-60)}{25} = \frac{75-25i}{25} = 3 - i.$$ ◀

2. Rasime realiuosius lygties $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ sprendinius.

▶ Kairėje lygties pusėje atskyrę realiąją ir menamąją dalis, gauname:

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i.$$

Iš čia išplaukia

$$\begin{cases} 3x+5y=7, \\ 2y-x=5. \end{cases}$$

Išsprendę lygčių sistemą, gauname $x=-1,\ y=2.$ ◀

3. Duotas kompleksinis skaičius $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Rasime $|z|$.

▶ $$\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1.$$ ◀

4. Išreikšime trigonometrine forma kompleksinį skaičių $z=-5+5i$.

▶ $$r=|-5+5i|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2},$$

$$\arg(-5+5i)=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{-5}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},$$

todėl:

$$-5+5i=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$ ◀

5. Apskaičiuosime $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

▶ Trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje esančius kompleksinius skaičius išreiškiame trigonometrine forma:

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Tada

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right)^{10}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{10}=$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 10} = e^{6\pi i + \frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangleleft$$

6. Apskaičiuosime $z = \sqrt[4]{-2\sqrt{3} - 2i}$.

$$\blacktriangleright\ -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$$

$$z_k = \sqrt[4]{-2\sqrt{3} - 2i} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right),\ k = 0,1,2,3.$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}\right), \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{24} + i\sin\frac{19\pi}{24}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}\right), \qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{43\pi}{24} + i\sin\frac{43\pi}{24}\right). \blacktriangleleft$$

7. Rasime lygties $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ šaknis.

$$\blacktriangleright\ z = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{4i^2 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} =$$

$$= \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(4i)^2 - 2\cdot 4i + 1}}{2} = \frac{-2i-3 \pm (4i-1)}{2}.$$

Tada gauname:

$$z_1 = \frac{-2i + 3 - 1 + 4i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i,$$

$$z_2 = \frac{-2i + 3 + 1 - 4i}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i. \blacktriangleleft$$

8. Rasime geometrinę vietą taškų, tenkinančių nelygybę $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.

$$\blacktriangleright\ -\frac{\pi}{4} < \pi - \arg z < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{5\pi}{4} < -\arg z < -\frac{3\pi}{4},$$

$$\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}.$$

Tai yra kampas, kurį riboja spinduliai

$$l_1 = \big((x, y) \mid y = x, x < 0\big) \text{ ir } l_2 = \big((x, y) \mid y = -x, x < 0\big). \blacktriangleleft$$

9. Rasime geometrinę vietą taškų, tenkinančių lygtį $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2.$

$$\blacktriangleright \; |z-3| = 2|z+3|, \quad z = x+iy;$$

$$|x+iy-3| = 2|x+iy+3|, \; z \neq -3.$$

Todėl:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2};$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0, \text{arba} \, (x+5)^2 + y^2 = 16, \quad \text{arba} \quad |z+5| = 4.$$

Geometriškai ši lygtis reiškia apskritimą, kurio centras (–5,0) ir spindulys lygus 4.

1.6. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Atlikite veiksmus su kompleksiniais skaičiais:

1.1. $(4+i)(3+2i)(1-i)$.

1.2. $\frac{1}{1+4i} + \frac{1}{4-i}$.

1.3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1.4. $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right)$.

1.5. $\left(\frac{i^5+2}{i^{10}+1}\right)^2$.

2. Raskite realiuosius lygčių sprendinius:

2.1. $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i) = 5+6i$.

2.2. $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$.

2.3. $12\left((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)\right)=17+6i$.

3. Duoti kompleksiniai skaičiai: $z_1=1-i,\ z_2=-2+4i,\ z_3=\sqrt{3}-2i$. Raskite:

3.1. $z_1^{\,2}+2z_1-3$

3.2. $\left(z_3-\overline{z_3}\right)^5$.

3.3. $\left|z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right|$.

3.4. $\left|z_1^{\,2}+\overline{z_2}^{\,2}\right|^2+\left|\overline{z_3}^{\,2}-z_2^{\,2}\right|^2$.

3.5. $\operatorname{Re}\left(2z_1^{\,3}+3z_2^{\,2}-5z_3^{\,2}\right)$.

4. Išreikškite trigonometrine forma kompleksinius skaičius:

4.1. $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$.

4.2. $\sqrt{2}i$.

4.3. $\dfrac{1-i}{1+i}$.

4.4. $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

5. Išreikškite kompleksinius skaičius algebrine forma:

5.1. $4\left(\cos 315^0+i\sin 315^0\right)$.

5.2. $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

5.3. $3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

6. Apskaičiuokite:

6.1. $\left(2\left(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ\right)\right)^6$.

6.2. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$.

6.3. $(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

6.4. $\dfrac{(1+i)^{124}}{(1-i)^{98}-i(1+i)^{98}}$.

7. Apskaičiuokite:

7.1. $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$.

7.2. $\sqrt[4]{-16i}$

7.3. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

7.4. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.

8. Išspręskite lygtis:

8.1. $5z^2+2z+10=0$.

8.2. $z^2+2z+5=0$.

8.3. $z^2+(2i-3)z+5-i=0$.

9. Raskite aibę taškų:

9.1. $|\operatorname{Im} z|\le 2$.

9.2. $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\le 1$.

9.3. $1\le|z+2+i|\le 2$.

9.4. $1<\operatorname{Re} z<2$.

ATSAKYMAI

1.1. $21+i$. **1.2.** $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$. **1.3.** i. **1.4.** $-\frac{11}{2}-\frac{23}{2}i$. **1.5.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. **2.1.** $x=\frac{20}{17},\ y=-\frac{36}{17}$. **2.2.** $x=2,\ y=3$. **2.3.** $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{4}$. **3.1.** $-1-4i$. **3.2.** $-1024\,i$. **3.3.** 12. **3.4.** $765+128\sqrt{3}$. **3.5.** -35. **4.1.** $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **4.2.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **4.3.** $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. **4.4.** $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$. **5.1.** $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$. **5.2.** $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$. **5.3.** $\frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$. **6.1.** $32-32\sqrt{3}\,i$. **6.2.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. **6.3.** $-\frac{1}{4}$. **6.4.** $-2^{12}(1+i)$. **7.1.** $z_1=2(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)$; $z_2=2(\cos 345^\circ+i\sin 345^\circ)$. **7.2.** $2(\cos 67{,}5^\circ+i\sin 67{,}5^\circ)$; $2(\cos 157{,}5^\circ+i\sin 157{,}5^\circ)$; $2(\cos 247{,}5^\circ+i\sin 247{,}5^\circ)$; $2(\cos 337{,}5^\circ+i\sin 337{,}5^\circ)$. **7.3.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. 7.4. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$.

8.1. $\frac{(-1\pm 7i)}{5}$. **8.2.** $-1\pm 2i$. **8.3.** $1+i,\ 2-3i$. **9.1.** Juosta $|y|<2$. **9.2.** Dešinioji pusplokštumė, kuriai priklauso ir Oy ašis. **9.3.** Žiedas, esantis tarp apskritimų, kurių spinduliai atitinkamai lygūs $R_1=1$ ir $R_2=2$, o jų centrai yra taške $z_0=-(2-i)$; abu apskritimai priklauso aibei. **9.4.** Juosta $1<x<2$.

2. NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

2.1. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas

Diferencialinio skaičiavimo pagrindinis uždavinys buvo rasti duotosios funkcijos $F(x)$ išvestinę $F'(x) = f(x)$ arba diferencialą $dF(x) = f(x)dx$. Šiame skyriuje spręsime atvirkštinį uždavinį – ieškosime funkcijos $F(x)$, kai žinoma šios funkcijos išvestinė $f(x)$ arba diferencialas $f(x)\,dx$. Prisiminę išvestinės mechaninę prasmę, šį atvirkštinį uždavinį galime formuluoti taip: rasti materialiojo taško judėjimo dėsnį, kai žinomas to taško greitis.

1 apibrėžimas. Funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$ pirmykšte funkcija atkarpoje $[a; b]$, jeigu visuose šios atkarpos taškuose x teisinga lygybė

$$F'(x) = f(x) \quad \text{arba} \quad dF(x) = f(x)dx.$$

Analogiškai apibrėžiama funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija begaliniame bei atvirame intervale $(a; b)$.

1 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = x^3$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ intervale $(-\infty; +\infty)$ yra tokios :

$$F(x) = \frac{x^4}{4}, \text{ nes } F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x);$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2, \text{ nes } F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\right)' = x^3 = f(x);$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \sqrt{5}, \text{ nes } F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} - \sqrt{5}\right)' = x^3 = f(x);$$

$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$ (čia C – bet kuris realusis skaičius), nes

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 = f(x). \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = \cos x$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ intervale $(-\infty; +\infty)$ yra tokios:

$$F(x) = \sin x, \text{ nes } F'(x) = (\sin x)' = \cos x;$$

$F(x) = \sin x - 1{,}5$, nes $F'(x) = (\sin x - 1{,}5)' = \cos x$;

$F(x) = \sin x + C$ (čia C – bet kuris realusis skaičius), nes $F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x$. ◀

Taigi, jei funkcija $f(x)$ atkarpoje $[a; b]$ turi vieną pirmykštę funkciją $F(x)$, tai ji turi be galo daug pirmykščių funkcijų, kurių tarpusavio ryšį nusako ši teorema.

Teorema. Jei $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ yra dvi funkcijos $f(x)$ pirmykštės funkcijos atkarpoje $[a; b]$, tai jos viena nuo kitos skiriasi konstanta C, t.y.

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

▶ Remiantis pirmykštės funkcijos apibrėžimu, visuose atkarpos $[a; b]$ taškuose x teisingos lygybės:

$$F_1'(x) = f(x),$$
$$F_2'(x) = f(x).$$

Iš šių lygybių gauname, kad

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in [a; b],$$
$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0.$$

Toliau pasiremsime anksčiau įrodytu teiginiu: jeigu funkcijos išvestinė kuriame nors intervale lygi nuliui, tai funkcija šiame intervale yra pastovi. Vadinasi,

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad \forall x \in [a; b]. \text{ ◀}$$

Išvada. Kai $F(x)$ yra viena funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų atkarpoje $[a; b]$, tai kiekviena kita tos funkcijos pirmykštė funkcija šioje atkarpoje išreiškiama suma $F(x) + C$, čia $C = \text{const}$.

2 apibrėžimas. Aibė visų duotosios funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų $F(x) + C$, čia $C = \text{const.}$, vadinama funkcijos $f(x)$ neapibrėžtiniu integralu ir žymima simboliu $\int f(x)\,dx$.

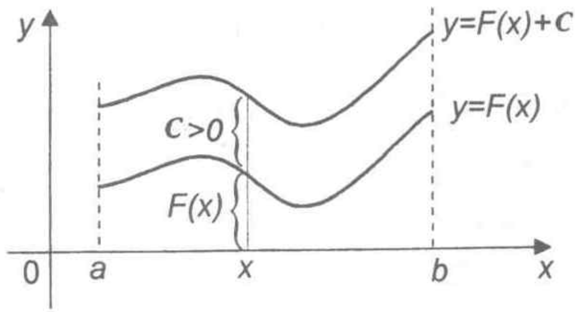
Funkcija $f(x)$ vadinama pointegraline funkcija, sandauga $f(x)\,dx$ – pointegraliniu reiškiniu, ženklas $\int$ – integralo ženklu, x – integravimo kintamuoju.

Vadinasi,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \; C = \text{const, kai } F'(x) = f(x).$$

Veiksmas, kuriuo surandama duotosios funkcijos pirmykštė funkcija, vadinamas integravimu. Jo rezultatas – pirmykščių funkcijų begalinė aibė. Tuo šis veiksmas skiriasi nuo jam atvirkštinio diferencijavimo veiksmo, nes funkcijos išvestinė apskaičiuojama vienareikšmiai.

Geometriškai neapibrėžtinis integralas nusako šeimą (aibę) kreivių $y = F(x) + C$, kurių kiekviena gaunama lygiagrečiai pastumiant funkcijos $y = F(x)$ grafiką Oy ašies kryptimi į viršų, kai $C > 0$, ar į apačią, kai $C < 0$ (2.1 pav.).



2.1 pav.

Į klausimą, ar kiekviena funkcija $f(x)$, apibrėžta atkarpoje $[a; b]$, turi pirmykštę, bendruoju atveju tenka atsakyti neigiamai. Tačiau tolydžiųjų atkarpoje $[a; b]$ funkcijų pirmykštė funkcija (kartu ir neapibrėžtinis integralas) egzistuoja visada. Šį teiginį kol kas laikysime teisingu be įrodymo ir toliau kalbėsime tik apie tolydžiųjų funkcijų integravimą.

Iš neapibrėžtinio integralo apibrėžimo išplaukia šie teiginiai:

1. Neapibrėžtinio integralo išvestinė lygi pointegralinei funkcijai, t.y.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \text{ nes}$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2. Neapibrėžtinio integralo diferencialas yra lygus pointegraliniam reiškiniui, t.y.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Bet kurios funkcijos $F(x)$ diferencialo neapibrėžtinis integralas lygus tai funkcijai, sudėtai su konstanta, t.y.

$$\int dF(x) = F(x) + C, \text{ nes}$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

2.2. Neapibrėžtinių integralų lentelė

Jeigu $F'(x)=f(x)$, tai $\int f(x)dx=F(x)+C$,

todėl, prisiminus pagrindinių elementariųjų funkcijų išvestines, galima sudaryti neapibrėžtinių integralų lentelę.

1.	$\int dx = x + C.$	2.	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
3.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C \quad (x \neq 0).$	4.	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$
5.	$\int e^x dx = e^x + C.$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$	8.	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C, \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right).$
9.	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C,$ $(x \neq \pi k, \quad k \in Z).$	10.	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C = -\mathrm{arcctg}x + \widetilde{C}.$
11.	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$	12.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \widetilde{C}.$
13.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$	14.	$\int \mathrm{tg}x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C.$
15.	$\int \mathrm{ctg}x \, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C.$	16.	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \right\rvert + C.$
17.	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \right\rvert + C.$	18.	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C.$
19.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C.$		
20.	$\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$		
21.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C.$		

Pastaba. 11, 13 – 21 formulių pirmykščių funkcijų nėra išvestinių lentelėje. Šių formulių teisingumu galėtume įsitikinti, išdiferencijavę dešinėse formulių pusėse esančius reiškinius. Visais atvejais gautume atitinkamas pointegralines funkcijas.

Paaiškinsime 3 formulę. Žinome, kad $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{kai } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{kai } x < 0, \end{cases}$

todėl

$$\left(\ln|x| + C\right)' = \left(\ln|x|\right)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kai } x > 0, \\ \dfrac{1}{-x}(-1), & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Taigi abiem atvejais, nepriklausomai nuo x ženklo, $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$, todėl

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Analogiškai $\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right| + C\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)} \cdot \dfrac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x},$$

todėl

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

2.3. Pagrindinės neapibrėžtinio integralo savybės

1 teorema. Pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą:

$$\int a\, f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \text{ kai } a = \text{const } (a \neq 0). \tag{1}$$

▶ Diferencijuojant abi (1) lygybės puses, remiantis teiginiu, kad neapibrėžtinio integralo išvestinė lygi pointegralinei funkcijai, gausime:

$$\left(\int a\, f(x)\,dx\right)' = a\, f(x),$$

$$\left(\int a\, f(x)\,dx\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' = a\, f(x).$$

Žinome, kad turinčios vienodas išvestines funkcijos $\int a\,f(x)dx$ ir $a\int f(x)dx$ skiriasi tik konstanta, todėl priklauso tai pačiai funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų aibei. Tokia prasme reikia suprasti (1) lygybę. ◄

2 teorema. Dviejų ar didesnio baigtinio skaičiaus funkcijų algebrinės sumos integralas yra lygus šių funkcijų integralų algebrinei sumai:

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx;$$

$$\int (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_n(x)dx.$$

Įrodymas analogiškas 1 teoremos įrodymui.

Iš šių dviejų teoremų išplaukia, kad

$$\int (\alpha\,f(x)+\beta\,g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx.$$

3 teorema (apie integravimo formulių invariantiškumą). Jeigu $\int f(x)dx=$ $=F(x)+C$ ir $u=\varphi(x)$ – funkcija, turinti tolydžią išvestinę, tai

$$\int f(u)du=F(u)+C.$$

► Kadangi $\int f(x)dx=F(x)+C$, tai $F'(x)=f(x)$ arba $dF(x)=f(x)dx$. Imkime sudėtinę funkciją $F(u)=F(\varphi(x))$. Žinome, jog pirmosios eilės diferencialui būdinga formos invariantiškumo savybė, todėl

$$dF(u)=F'(u)du=f(u)du.$$

Tuomet $\int f(u)du=\int dF(u)=F(u)+C$. ◄

Vadinasi, pagrindinių integralų formulės visada yra teisingos, ar integravimo kintamasis yra nepriklausomas, ar bet kuri diferencijuojama to kintamojo funkcija. Ši savybė vadinama integravimo formulių invariantiškumo savybe.

Remdamiesi 3 teorema, neapibrėžtinių integralų lentelę galėsime užrašyti funkcijai $u=\varphi(x)$:

$$\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1). \tag{1}$$

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C\quad(u\neq0)\text{ ir t.t., čia }u=\varphi(x).$$

Integravimas, naudojantis pagrindinėmis neapibrėžtinio integralo savybėmis ir pagrindinėmis formulėmis, vadinamas tiesioginiu integravimu. Kad galėtume taikyti integravimo formulių invariantiškumo savybę, pointegralinį reiškinį reikia pertvarkyti taip, kad integruojant galėtume taikyti kurią nors integravimo formulę.

Pavyzdžiui, jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai

$$\int f(x+a)\,dx = \int f(x+a)\,d(x+a) = F(x+a) + C \text{, nes}$$

$$d(x+a) = (x+a)'\,dx = dx, \quad a = const.$$

Vadinasi, visada galima dx pakeisti $d(x+a)$, taip pat dx pakeisti $\frac{1}{a}d(ax+b)$, nes $d(ax+b) = (ax+b)'\,dx = a\,dx, \quad dx = \frac{1}{a}d(ax+b),\ a \neq 0,\ a = const,\ b = const.$

1 pavyzdys. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{3/5}\,dx = \dfrac{x^{3/5+1}}{3/5+1} + C = \dfrac{x^{8/5}}{8/5} + C = \dfrac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3} + C$

(pritaikėme 2.2 skyrelio 2 formulę). ◂

2 pavyzdys. $\int\left(4x^3 - 3\cos x + 5\sqrt{x}\right)dx = \int 4x^3\,dx - \int 3\cos x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$

$$= 4\int x^3\,dx - 3\int \cos x\,dx + 5\int x^{1/2}\,dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\sin x + 5\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= x^4 - 3\sin x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C. \ ◂$$

3 pavyzdys. $\int \mathrm{ctg}^2 x = \int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$

$= C - \mathrm{ctg}x - x$. ◂

4 pavyzdys. $\int (2x-1)^7\,dx$. Kadangi $d(2x-1) = 2dx$, , tai $dx = \frac{1}{2}d(2x-1)$ ir

$$\int(2x-1)^7\,dx = \frac{1}{2}\int(2x-1)^7\,d(2x-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^8}{8} + C = \frac{(2x-1)^8}{16} + C$$

(pritaikėme (1) formulę, kai $u = 2x - 1$). ◂

5 pavyzdys. $\int \sin(3x-2)\,dx = \dfrac{1}{3}\int \sin(3x-2)\,d(3x-2) = C - \dfrac{1}{3}\cos(3x-2)$. ◂

6 pavyzdys. $\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,d\left(x^2\right) = e^{x^2} + C$. ◂

7 pavyzdys. $\int 3^{2x-5}\,dx = \dfrac{1}{2}\int 3^{2x-5}\,d(2x-5) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3^{2x-5}}{\ln 3} + C = \dfrac{3^{2x-5}}{2\ln 3} + C$. ◂

8 pavyzdys. $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x) + C$. ◂

9 pavyzdys. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}\,x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\,x)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}\,x)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{6}\,x}{3} + C$. ◂

10 pavyzdys. $\int \frac{1+x+(\operatorname{arctg}2x)^3}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} + \int \frac{xdx}{1+4x^2} + \int \frac{(\operatorname{arctg}2x)^3}{1+4x^2}dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} + \frac{1}{2}\int (\operatorname{arctg}2x)^3 d(\operatorname{arctg}2x) =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}2x)^4 + C$. ◂

11 pavyzdys. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x)\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$. ◂

12 pavyzdys. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx = \int \cos\ln x\, d(\ln x) = \sin\ln x + C$. ◂

2.4. Kintamųjų keitimo metodas

Tarkime, kad reikia apskaičiuoti $\int f(x)dx$, tačiau jo apskaičiuoti negalime taikydami neapibrėžtinio integralo savybes ir integravimo formules. Tuomet kintamąjį x pakeičiame pagal formulę $x = \varphi(t)$; čia $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t) \neq 0$ yra tolydžiosios funkcijos, o funkcija $x = \varphi(t)$ turi atvirkštinę funkciją $t = \psi(x)$.

Tada $dx = \varphi'(t)dt$ ir teisinga lygybė

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

▸ Išdiferencijavę kairiąją šios lygybės pusę, gausime:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Dešiniąją įrodomos lygybės pusę diferencijuosime kaip sudėtinę funkciją, kintamąjį t laikydami tarpiniu argumentu. Todėl

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t t'_x =$$

$$= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x), \quad \text{nes} \quad t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Vadinasi, lygias išvestines turinčios funkcijos skiriasi tik konstanta ir todėl priklauso vienai ir tai pačiai funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų aibei. Todėl (1) lygybės kairėje ir dešinėje pusėje esančios pirmykščių funkcijų aibės sutampa. ◀

Suintegravus reikia grįžti prie senojo kintamojo x.

1 pavyzdys. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Parenkame keitinį $x = at$, $dx = adt$.

Tada

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Gavome 2.2 skyrelio 11 formulę. ◀

2 pavyzdys. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. $\{x = at, dx = adt\}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Gavome 2.2 skyrelio 13 formulę. ◀

Jei pointegraliniame reiškinyje yra:

1) dauginamasis $\sqrt{a^2 - x^2}$, tai tikslinga įvesti trigonometrinius keitinius $x = a\sin t$ arba $x = a\cos t$;
2) dauginamasis $\sqrt{a^2 + x^2}$, tai keitinius $x = a\operatorname{tg} t$ arba $x = a\operatorname{ctg} t$;
3) dauginamasis $\sqrt{x^2 - a^2}$, tai keitinius $x = \frac{a}{\cos t}$ arba $x = \frac{a}{\sin t}$.

3 pavyzdys. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. $\left\{\begin{matrix} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t dt \end{matrix}\right\}$. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a\cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\, dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, d(2t)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Iš keitinio $\frac{x}{a} = \sin t$, tardami, kad t kinta atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, gausime:

$$t = \arcsin\frac{x}{a},\ \sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{2x}{a}\sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{2x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{2x}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}} = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$$

Tuomet $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$ (2.2 skyrelio 20 formulė). ◀

4 pavyzdys. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

$$\left\{\begin{array}{l} t = x + \sqrt{x^2+a^2},\ dt = \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx, \\ dt = \dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx,\ dt = \dfrac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx, \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{dt}{t} \end{array}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

Analogiškai gautume, kad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

Įrodėme 2.2. skyrelio 19 formulę. ◀

5 pavyzdys. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. $\left\{\begin{matrix} \sqrt{e^x+1}=t, e^x+1=t^2, \\ e^x dx = 2tdt, dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix}\right\}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

6 pavyzdys. $\int \frac{3x+5}{(x-3)^7}dx$. $\left\{\begin{matrix} x-3=t, \\ x=t+3, \\ dx=dt \end{matrix}\right\}$.

$$\int \frac{3x+5}{(x-3)^7}dx = \int \frac{3(t+3)+5}{t^7}dt = \int \frac{3t+14}{t^7}dt = \int \frac{3}{t^6}dt + 14\int \frac{dt}{t^7} =$$

$$= 3\int t^{-6}dt + 14\int t^{-7}dt = C - \frac{3}{5t^5} - \frac{14}{6t^6} = C - \frac{3}{5(x-3)^5} - \frac{14}{6(x-3)^6}. \blacktriangleleft$$

2.5. Integravimo dalimis metodas

Tarkime, kad $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ – kintamojo x funkcijos, turinčios tolydžias išvestines. Tuomet šių funkcijų sandaugos diferencialą galėsime užrašyti taip:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

iš čia

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Integruodami šios lygybės abi puses, gauname:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

Tai ir yra integravimo dalimis formulė. Kad galėtume tinkamai pasinaudoti šia formule, reikia integralo pointegralinį reiškinį suskirstyti į du dauginamuosius u ir dv taip, kad pavyktų suintegruoti diferencialinius reiškinius – iš pradžių dv, o po to vdu; todėl metodas ir vadinamas integravimo dalimis metodu.

Daugumą integralų, apskaičiuojamų šiuo metodu, galima suskirstyti į tris grupes:

1) Integralai $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}x\,dx, \ldots$;
   čia $P(x)$ – daugianaris; žymime $u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \mathrm{arctg}x, \ldots$.
2) Integralai $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$; čia a – realusis skaičius, $P(x)$ – daugianaris; žymime $u = P(x)$.

3) Integralai $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx, \dots$;

žymime $u = e^{ax}$ (arba $u = \cos bx$), $u = \sin(\ln x)$. Pažymėję bet kurį šios grupės integralą raide I ir du kartus pritaikę integravimo dalimis formulę, gausime pirmojo laipsnio lygtį integralo I atžvilgiu. Iš šios lygties rasime I.

Savaime aišku, kad minėtos trys grupės neaprėpia visų integralų, kuriuos galima suintegruoti integravimo dalimis metodu.

1 pavyzdys. $\int x \sin 2x dx$. Pažymėsime $u = x$, $dv = \sin 2x dx$. Tuomet $du = dx$, $v = \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Taigi

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) =$$

$$= C - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x . ◀$$

2 pavyzdys. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$. $\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + a^2}, \ du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx, \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right\}$.

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right).$$

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right).$$

Dešinėje pusėje gavome pradinį integralą, kurį perkėlę į kairiąją pusę, turėsime:

$$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right).$$

Todėl $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$.

Analogiškai gautume, kad

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

(2.2 skyrelio 21 formulė). ◀

3 pavyzdys. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$ $\left\{\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}x, \; du=\dfrac{1}{1+x^2}dx, \\ dv=dx, \quad v=x \end{matrix}\right\}.$

$$\int \operatorname{arctg}x\,dx = x\operatorname{arctg}x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$ ◀

4 pavyzdys. $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx.$ $\left\{\begin{matrix} u=e^{ax}, \; du=ae^{ax}dx, \\ dv=\cos bx\,dx, \; v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{matrix}\right\}.$

$$I_1=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx. \quad \left\{\begin{matrix} u=e^{ax}, \; du=ae^{ax}\,dx, \\ dv=\sin bx\,dx, v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{matrix}\right\}.$$

$$I_1=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Perkėlę pradinį integralą į kairiąją pusę, gausime:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I_1=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right).$$

Tada

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C.$$

Analogiškai gautume:

$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C.$$ ◀

2.6. Funkcijų, kurių išraiškoje yra kvadratinis trinaris, integravimas

I. Nagrinėsime integralą $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; čia $a \neq 0$, b, c – bet kurie realieji skaičiai. Pertvarkysime vardiklyje esantį kvadratinį trinarį, išskirdami dvinario kvadratą:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right);$$

čia $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Pliuso ženklą rašome, kai reiškinys $\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$ arba, kai trinaris $ax^2 + bx + c$ neturi realiųjų šaknų; minuso – kai $\frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0$ arba, kai trinario šaknys realiosios.

Tada

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}.$$

Parinkę keitinį $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, turėsime

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Gavome integralus, kuriems tinka 2.2 skyrelio 11 ir 18 formulės.

II. Nagrinėsime integralą $I_2 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx$; čia M, N, a, b, c – bet kurie realieji skaičiai. Pertvarkysime pointegralinę funkciją:

$$I_2 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c}dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)I_1=\frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(N-\frac{M}{2a}\right)I_1.$$

III. Nagrinėsime integralą $I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Pertvarkę analogiškai kaip ir I atveju, turėsime integralus:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}},\ \text{kai}\quad a>0,\qquad \text{arba}\qquad \int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},\ \text{kai}\quad a<0.$$

Gavome integralus, kuriems tinka 2.2 skyrelio 19 ir 13 formulės.

IV. Nagrinėsime integralą $I_4=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Pertvarkę analogiškai kaip II atveju, gausime:

$$I_4=\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(N-\frac{M}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{M}{2a}\int\left(ax^2+bx+c\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(ax^2+bx+c\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)I_3=$$

$$=\frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)I_3.$$

V. Nagrinėsime integralą $I_5=\int\frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, čia $M\neq 0$. Parinkę keitinį $Mx+N=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{Mt^2}dt$, gauname I_3 tipo integralą.

1 pavyzdys. $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{x^2+2x+1+2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=$

$$=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.\ ◀$$

2 pavyzdys. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

▸ Šis integralas yra I_4 tipo. Jį apskaičiuosime, sudarydami skaitiklyje pošaknio $1-x-x^2$ išvestinę bei išskirdami šiame trinaryje dvinario kvadratą:

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} =$$

$$= -\int \left(1-x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x-x^2\right) - 9\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+x-1\right)}} =$$

$$= -\frac{\left(1-x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1\right)}} =$$

$$= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= C - 2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = C - 2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$$ ◂

Šį integralą galima apskaičiuoti ir kitu būdu. Išskyrę dvinario kvadratą ir įvedę keitinį, gausime:

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = \int \frac{2x-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx. \quad \left\{\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t,\, x=t-\frac{1}{2}, \\ dx=dt \end{array}\right\}.$$

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = \int \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)-8}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}\,dt = \int \frac{2t-9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}\,dt =$$

$$=-\int\left(\frac{5}{4}-t^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{5}{4}-t^2\right)-9\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-t^2}}=$$

$$=C-2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}-9\arcsin\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=C-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}.\ ◂$$

3 pavyzdys. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.\left\{\begin{matrix} x+1=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt, \\ x=\frac{1}{t}-1 \end{matrix}\right\}.\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=$

$$=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|=C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{2(x+1)}\right|.\ ◂$$

2.7. Racionaliosios trupmenos. Paprasčiausiųjų racionaliųjų trupmenų integravimas

1 apibrėžimas. Racionaliąja trupmena vadinamas dviejų daugianarių santykis, t.y.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

čia $P(x)$, $Q(x)$ – daugianariai, neturintys bendrų šaknų, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Racionalioji trupmena vadinama taisyklingąja, kai skaitiklyje esančio daugianario laipsnis n yra mažesnis už vardiklyje esančio daugianario laipsnį m ($n<m$). Priešingu atveju, kai $n\geq m$, racionalioji trupmena vadinama netaisyklingąja. Jeigu racionalioji trupmena netaisyklingoji, tai, padaliję skaitiklio daugianarį iš vardiklio daugianario, šią trupmeną išreikšime naujo daugianario $S(x)$ ir taisyklingosios racionaliosios trupmenos suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

čia $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – taisyklingoji racionalioji trupmena.

Pavyzdys. $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

Šį rezultatą gavome padaliję trupmenos skaitiklio daugianarį iš vardiklio daugianario:

$$\begin{array}{r|l} 2x^5+6x^3+1 & x^4+3x^2 \\ \cline{2-2} -\underline{2x^5+6x^3} & \quad 2x \\ 1 & \end{array}. \blacktriangleleft$$

2 apibrėžimas. Paprasčiausiomis racionaliosiomis trupmenomis vadinamos šios keturių tipų trupmenos:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k};$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k};$$

čia A, M, N, a, p, q – realieji skaičiai, k – natūralusis skaičius; be to, $k\geq 2$, diskriminantas $D=p^2-4q<0$.

Kadangi $D<0$, tai lygtis $x^2+px+q=0$ realiųjų šaknų neturi.

Suintegruosime šias trupmenas:

I. $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

III. $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Parinkę keitinį $x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt$ ir pažymėję $q-\frac{p^2}{4}=b^2$, gausime, kad

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+1}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+b^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

IV. $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx.$

Pertvarkę analogiškai kaip III atveju, gausime:

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\left(x^2+px+q\right)^{-k}d\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)\left(x^2+p+q\right)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}.$$

Antrąjį integralą pažymėsime I_k ir pertvarkysime:

$$I_k=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}=\frac{1}{b^2}\int\frac{\left(t^2+b^2\right)-t^2}{\left(t^2+b^2\right)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{b^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}.$$

Antrąjį integralą integruosime dalimis:

$$\left\{\begin{matrix} u=t, \qquad du=dt, \qquad dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+b^2\right)^k}, \\ v=\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2+b^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+b^2\right)^{-k}d\left(t^2+b^2\right)=-\frac{1}{2(k-1)\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}\end{matrix}\right\}.$$

Taigi

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^k}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{b^2}\left(-\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}\right).$$

Kadangi $\displaystyle\int\frac{dt}{\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}=I_{k-1}$, tai

$$I_k=\frac{1}{b^2}\left(I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}\right),$$

$$I_k=\frac{1}{b^2}\left(\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+b^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)}I_{k-1}\right). \qquad (1)$$

Vadinasi, integralo $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ apskaičiavimas pakeičiamas integralo I_k apskaičiavimu, o tai galima padaryti, panaudojant (1) rekurentinę formulę. Kai $k=1$, gauname integralą

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C .$$

Žinodami I_1, rasime I_2,

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2 + b^2\right)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{t}{2\left(t^2 + b^2\right)} + \frac{1}{2} I_1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{t}{t^2 + b^2} + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} \right) + C .$$

Žinodami I_2, galime rasti I_3 ir t.t.

2.8. Taisyklingosios racionaliosios trupmenos išreiškimas paprasčiausiųjų trupmenų suma

Sakykime, kad $\frac{R(x)}{Q(x)}$ yra taisyklingoji racionalioji trupmena, kurios skaitiklyje ir vardiklyje esantys daugianariai $P(x)$ ir $Q(x)$ neturi bendrų šaknų. Trupmenos vardiklio daugianario šaknys gali būti 4 rūšių: realiosios ir skirtingos, kai kurios realiosios ir kartotinės, jungtinės kompleksinės skirtingos ir jungtinės kompleksinės kartotinės. Realiąją nekartotinę šaknį α vardiklio $Q(x)$ skaidinyje atitinka dauginamasis $x - \alpha$, m – tojo kartotinumo realiąją šaknį β – dauginamasis $(x - \beta)^m$, nekartotinę porą jungtinių kompleksinių šaknų – dauginamasis $x^2 + px + q$, k – tojo kartotinumo jungtinių kompleksinių šaknų porą – dauginamasis $\left(x^2 + rx + s\right)^k$.

Priklausomai nuo vardiklyje gauto skaidinio, nagrinėjamą taisyklingąją racionaliąją trupmeną galima išreikšti paprasčiausiųjų trupmenų suma tokiu būdu:

a) kiekvieną daugiklį $x - \alpha$ atitinka paprasčiausioji trupmena $\frac{A}{x - \alpha}$;

b) kiekvieną daugiklį $(x - \beta)^m$ atitinka paprasčiausiųjų trupmenų suma:

$$\frac{B_m}{(x - \beta)^m} + \frac{B_{m-1}}{(x - \beta)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_2}{(x - \beta)^2} + \frac{B_1}{x - \beta};$$

c) kiekvieną daugiklį $x^2 + px + q$ atitinka paprasčiausioji trupmena

$$\frac{Cx + D}{x^2 + px + q};$$

d) kiekvieną daugiklį $\left(x^2+rx+s\right)^k$ atitinka paprasčiausiųjų trupmenų suma:

$$\frac{M_k x+N_k}{\left(x^2+rx+s\right)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{\left(x^2+rx+s\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1 x+N_1}{x^2+rx+s}.$$

Be įrodymo suformuluosime algebros teoremą apie taisyklingosios racionaliosios trupmenos išreiškimą paprasčiausiomis.

Teorema. Jei $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – taisyklingoji racionalioji trupmena, kurios vardiklis išskaidytas šitaip:

$$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^m\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+rx+s\right)^k,$$

tai ją galima išreikšti paprasčiausiųjų trupmenų suma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_m}{(x-\beta)^m}+\frac{B_{m-1}}{(x-\beta)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_k x+N_k}{\left(x^2+rx+s\right)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{\left(x^2+rx+s\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1 x+N_1}{x^2+rx+s}, \tag{1}$$

čia $A,\ B_1,\ldots,B_m,C,D,M_1,N_1,\ldots,M_k,N_k$ – realieji neapibrėžti koeficientai (kai kurie jų gali būti lygūs nuliui).

Norėdami apskaičiuoti šiuos koeficientus, sudedame trupmenas, parašytas dešinėje (1) lygybės pusėje ir sulyginame skaitikliuose esančius daugianarius. Kadangi du daugianariai tapačiai lygūs tik tada, kai lygūs jų koeficientai, esantys prie vienodų x laipsnių, tai galime sulyginti šiuos koeficientus. Gausime tiesinių lygčių sistemą, kurią išsprendę rasime minėtus koeficientus. Šis metodas vadinamas neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Kartais koeficientus galima apskaičiuoti paprasčiau. Kadangi sulyginę skaitiklius, dešinėje ir kairėje lygybės pusėje gauname tapačiai lygius daugianarius, tai ir jų reikšmės su bet kuriomis x reikšmėmis turi būti lygios. Įrašę tam tikras x reikšmes, gauname lygtis, iš kurių galime rasti minėtus koeficientus. Geriausia parinkti x reikšmes, lygias realiosioms vardiklio šaknims.

Pavyzdys. Taisyklingąją trupmeną $\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$ išreikšime paprasčiausiųjų trupmenų suma.

▸ Kadangi trinario x^2+x+1 šaknys kompleksinės, tai, remdamiesi suformuluota teorema, gauname lygybę:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Sudėję dešinėje lygybės pusėje parašytas trupmenas, gauname:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Sulyginę skaitiklius, turime:

$$2x^3+4x^2+x+2=A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Cx+D)(x^2-2x+1). \qquad (2)$$

Taikome neapibrėžtųjų koeficientų metodą. Sulyginę koeficientus prie x^3, x^2, x^1, x^0, sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & B+C=2, \\ x^2 & A-2C+D=4, \\ x^1 & A+C-2D=1, \\ x^0 & A-B+D=2. \end{array}\Bigg\}$$

Ją išsprendę, randame $A=3$, $B=2$, $C=0$, $D=1$. Todėl

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}. \blacktriangleleft$$

Minėtus koeficientus galima surasti ir kitaip, panaudojant abu koeficientų suradimo metodus. Kadangi vardiklio viena šaknis $x=1$ realioji, tai įrašę į (2) lygybę $x=1$, gautume:

$$9=3A, \quad A=3.$$

Kitus tris koeficientus rastume išsprendę trijų lygčių sistemą, kurią gautume sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių.

2.9. Racionaliųjų trupmenų integravimas

Nagrinėsime integralą $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$; čia $P(x)$ ir $Q(x)$ – daugianariai, neturintys bendrų šaknų. Šį integralą apskaičiuosime keliais etapais.

1. Sveikosios dalies išskyrimas. Jei racionalioji trupmena netaisyklingoji, tai padaliję skaitiklio daugianarį iš vardiklio daugianario, šią trupmeną išreiškiame tam tikro daugianario $S(x)$ ir taisyklingosios racionaliosios trupmenos $\frac{R(x)}{Q(x)}$ suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{(žr. 2.7 skyrelį).}$$

Integruodami šią lygybę, gauname:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$

Jeigu $S(x)$ yra k – tojo laipsnio daugianaris, t.y.

$$S(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k, \text{ tai}$$

$$\int S(x)dx = \int \left(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k\right)dx = a_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + a_1 \frac{x^k}{k} + \ldots + a_k x + C.$$

Belieka rasti integralą $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

2. Vardiklio skaidymas daugikliais. Taisyklingosios racionaliosios trupmenos $\frac{R(x)}{Q(x)}$ vardiklyje esantį daugianarį išskaidome daugikliais (žr. 2.8 skyrelį).

3. Taisyklingosios racionaliosios trupmenos išreiškimas paprasčiausiųjų racionaliųjų trupmenų suma (žr. 2.8 skyrelį).

4. Paprasčiausiųjų racionaliųjų trupmenų integravimas (žr. 2.7 skyrelį).

Racionaliosios trupmenos integravimą pakeisime paprasčiausiųjų trupmenų integravimu. Kaip tai daroma parodysime spręsdami konkrečius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Rasime integralą $\int \frac{\left(x^2+2\right)dx}{(x+1)^3(x-2)}$.

▶ Kadangi trupmenos vardiklio šaknys realiosios, tai, remdamiesi 2.8 skyrelio (1) lygybe, trupmeną išreiškiame paprasčiausiųjų trupmenų suma:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}.$$

Sudėję dešinėje lygybės pusėje parašytas trupmenas, gauname:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}.$$

Sulyginame skaitiklius:

$$x^2 + 2 = A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^3. \qquad (1)$$

Įrašę į šią lygybę $x = -1$, gausime: $3 = -3A$, $A = -1$.

Įrašę $x = 2$, gausime: $6 = 27D$, $D = \frac{2}{9}$. Kitiems dviems koeficientams rasti užtenka dviejų lygčių. Pertvarkę (1) lygybę turėsime:

$$x^2+2=(C+D)x^3+(B+3D)x^2+(A-B-3C+3D)x+(-2A-2B-2C+D).$$

Sulyginę koeficientus, esančius prie x^3, x^2 gausime sistemą:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & C+D=0, \\ x^2 & B+3D=1, \end{array}\right\}$$

iš kurios rasime $C=-\frac{2}{9}$, $B=\frac{1}{3}$.

Tada

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\int(x+1)^{-3}d(x+1)+\frac{1}{3}\int(x+1)^{-2}d(x+1)-\frac{2}{9}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2(x+1)^2}-$$

$$-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C=C-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$. Išskyrę sveikąją dalį (žr. 2.7 skyrelio pavyzdį), turėsime:

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int 2x\,dx+\int\frac{dx}{x^4+3x^2}=x^2+\int\frac{dx}{x^2(x^2+3)}.$$

Remdamiesi 2.8 skyrelio (1) lygybe, trupmeną $\frac{1}{x^2(x^2+3)}$ išreiškiame paprasčiausiųjų trupmenų suma:

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Sudėję dešinėje lygybės pusėje parašytas trupmenas gauname:

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}.$$

Sulyginame skaitiklius:

$$1 = A\left(x^2+3\right) + Bx\left(x^2+3\right) + (Cx+D)x^2 .$$

Įrašę į šią lygybę $x = 0$, gausime: $1 = 3A$, $A = \frac{1}{3}$.

Sulyginę koeficientus, esančius prie x^3, x^2, x, gausime sistemą:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^3 & B + C = 0, \\ x^2 & A + D = 0, \\ x & 3B = 0, \end{array}\right\}$$

iš kurios rasime $B = 0, C = 0,\ D = -\frac{1}{3}$.

Tada
$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx = x^2 + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3} = x^2 + \frac{1}{3}\int x^{-2}dx - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Rasime integralą $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}\,dx$.

$\blacktriangleright$ Trupmeną $\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$ paprasčiausiųjų trupmenų suma išreiškėme 2.9 skyrelyje išspręstame pavyzdyje. Pasinaudosime gautu rezultatu:

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}\,dx = 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 3\int (x-1)^{-2}d(x-1) + 2\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= C - \frac{3}{x-1} + 2\ln|\,x-1\,| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \ \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Rasime integralą $\int \frac{x^4+2x^2+x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

▶ Kadangi trupmena $\frac{x^4+2x^2+x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+2x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ – netaisyklingoji , tai pirmiausia jos skaitiklį padalijame iš vardiklio:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4+2x^2+x & x^4+2x^2+1 \\ \underline{x^4+2x^2+1} & \overline{\quad 1 \quad} \\ x-1 & \end{array}.$$

Todėl $\frac{x^4+2x^2+x}{x^4+2x^2+1}=1+\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$. Tuomet

$$\int \frac{x^4+2x^2+x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\left(1+\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=\int dx+\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx-\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=x+\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-2}d\left(x^2+1\right)-\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Paskutinį integralą integruosime dalimis: $\left\{\begin{array}{l} u=x,\ du=dx,\ dv=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx, \\ v=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)} \end{array}\right\}$.

$$\int \frac{x^4+2x^2+x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}-\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=x-\frac{x+1}{2\left(x^2+1\right)}-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=x-\frac{x+1}{2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$ ◀

2.10. Iracionaliųjų funkcijų integravimas

Šiame skyrelyje nagrinėsime tas iracionaliąsias funkcijas, kurių integralai, parinkus keitinį, pakeičiami racionaliųjų funkcijų integralais, kitaip sakant pointegraliniai reiškiniai racionalinami.

I. Nagrinėsime integralą $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$. Simboliu R žymime kintamųjų $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$ atžvilgiu racionaliąją funkciją. Pointegralinis reiškinys racionalinamas naudojant keitinį $\sqrt[k]{x} = t, x = t^k, dx = kt^{k-1}dt$, čia k lygus trupmenų $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ bendrajam vardikliui. Tikrai,

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx = \int R\left(t^k, t^{\frac{mk}{n}}, \ldots, t^{\frac{rk}{s}}\right) kt^{k-1}dt =$$

$$= \int R\left(t^k, t^{n_1}, \ldots, t^{s_1}\right) kt^{k-1}dt = \int R_1(t)\,dt .$$

Kadangi $n_1 = \frac{mk}{n}, \ldots, s_1 = \frac{rk}{s}$ yra sveikieji skaičiai, tai pointegralinė funkcija yra racionalioji funkcija.

II. Nagrinėsime integralą

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx ;$$

čia a, b, c, d – realieji skaičiai, $ad - bc \neq 0$. Šio integralo pointegralinis reiškinys racionalinamas naudojant keitinį

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}, \quad dx = \frac{ad - bc}{\left(a - ct^k\right)^2} kt^{k-1}dt ;$$

čia k – trupmenų $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ bendrasis vardiklis.

Tada $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^k - b}{a - ct^k}, t^{\frac{m}{n}k}, \ldots, t^{\frac{r}{s}k}\right) \frac{ad - bc}{\left(a - ct^k\right)^2} kt^{k-1} dt =$$

$$= R\left(\frac{dt^k - b}{a - ct^k}, t^{n_1}, \ldots, t^{s_1}\right) \cdot \frac{ad - bc}{\left(a - ct^k\right)^2} kt^{k-1} dt = \int R_2(t)\, dt;$$

čia $n_1 = \frac{mk}{n}, \ldots, s_1 = \frac{rk}{s}$ – sveikieji skaičiai, $R_2(t)$ – racionalioji funkcija.

1 pavyzdys. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx$.

▶ Kadangi trupmenų $\frac{1}{2}$ ir $\frac{3}{4}$ bendrasis vardiklis yra 4, tai parinkę keitinį $\sqrt[4]{x} = t$, $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$, gausime, kad

$$\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1} = 4\int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3 + 1} = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1}\right) dt = 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt =$$

$$= \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{d\left(t^3 + 1\right)}{t^3 + 1} = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3 + 1\right| + C = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3} + 1\right|\right) + C. ◀$$

2 pavyzdys. $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

▶ Parinkę keitinį $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$, $\frac{1+x}{1-x} = t^3$, $x = \frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}$, $dx = \frac{6t^2}{\left(t^3 + 1\right)^2} dt$,

$1 - x = \frac{2}{1 + t^3}$, gausime:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{\left(t^3 + 1\right)^2 \cdot t \cdot 6t^2 dt}{4 \cdot \left(t^3 + 1\right)^2} = \frac{3}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + C. ◀$$

2.11. Diferencialinių binomų integravimas

Apibrėžimas. Reiškinys $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ vadinamas diferencialiniu binomu; a, b – bet kokios konstantos, m, n, p – racionalieji skaičiai.

Teorema. Diferencialinio binomo integralas $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, kai m, n, p – racionalieji skaičiai, išreiškiamas elementariosiomis funkcijomis tik tada, jeigu kuris nors vienas iš skaičių:

1) p,

2) $\dfrac{m+1}{n}$,

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$

yra sveikasis (teigiamas, neigiamas arba nulis).

▶ 1) Jeigu p yra sveikasis teigiamas skaičius, tai, panaudoję Niutono binomo formulę, pointegralinę funkciją suintegruojame žinomais metodais. Jeigu $p<0$, o m, n trupmenos, tai, parinkę keitinį $\sqrt[k]{x}=t$, $x=t^k$ (k – trupmenų m ir n bendrasis vardiklis), pointegralinę funkciją išreiškiame racionaliąja funkcija.

2) Tarkime, kad p – trupmena, $p=\dfrac{r}{s}$, o $\dfrac{m+1}{n}$ – sveikasis skaičius. Reiškinį $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ pertvarkome, pažymėdami $z=x^n$. Tada

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p\, z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz.$$

Kadangi $\dfrac{m+1}{n}$ – sveikasis skaičius, tai $q=\dfrac{m+1}{n}-1$ irgi sveikasis skaičius, todėl

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q\,dz=\frac{1}{n}\int R\left(z,(a+bz)^p\right)dz.$$

Iš 2.10 skyrelio žinome, kad tokio tipo pointegralinė funkcija racionalinama panaudojant keitinį $a+bz=t^s$ t.y. $a+bx^n=t^s$.

3) Tarkime, kad $p=\dfrac{r}{s}$ ir $\dfrac{m+1}{n}$ – trupmenos, bet $\dfrac{m+1}{n}+p$ – sveikasis skaičius. Prieš tai gautąjį integralą pertvarkome:

$$\int (a+bz)^p z^q\,dz = \int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz .$$

Kadangi $p+q = \dfrac{m+1}{n} - 1 + p$ – sveikasis skaičius, tai

$$\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz = R\left(z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p\right)dz ,$$

o tokio tipo pointegralinė funkcija racionalinama panaudojant keitinį $\dfrac{a+bz}{z} = t^s$, t.y. $a+bx^n = x^n t^s$. ◀

1 pavyzdys. $\int x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-2} dx$.

▶ Čia $m = -\dfrac{1}{3}, n = \dfrac{2}{3}, p = -2$ (1 atvejis). Parinkę keitinį $t = \sqrt[3]{x}, x = t^2$, $dx = 3t^2\,dt$, gausime:

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-2} dx = \int t^{-1}\left(1+t^2\right)^{-2} 3t^2\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} + C = C - \frac{3}{2\left(1+t^2\right)} = C - \frac{3}{2\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} . ◀$$

2 pavyzdys. $\int \dfrac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$.

▶ Čia $m = 3$, $n = 2$, $p = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{m+1}{n} = 2$ – sveikasis skaičius (2 atvejis). Parinkę keitinį $1-x^2 = t^2$, $x = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $dx = -\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} t\,dt$, gausime:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot t^{-1} \cdot \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} t\,dt = -\int \left(1-t^2\right)dt =$$

$$=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C=C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\cdot\left(2+x^2\right).\ ◂$$

3 pavyzdys. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx.$

▸ Čia $m=-2, n=2, p=-\frac{3}{2}, \frac{m+1}{n}+p=-2$ – sveikasis skaičius (3 atvejis).

Parinkę keitinį $1+x^2=t^2x^2, x^2=\frac{1}{t^2-1}, x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx=-\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt,$

gausime:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=-\int\left(t^2-1\right)t^{-3}\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=C-\frac{1}{t}-t=C-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.\ ◂$$

2.12. Trigonometrinių funkcijų integravimas

Nagrinėsime integralą

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx\,;$$

čia R – kintamųjų $\sin x$ ir $\cos x$ racionalioji funkcija.

1) Sakykime, pointegralinė funkcija $R(\sin x, \cos x)$ yra nelyginė funkcijos $\sin x$ atžvilgiu (pakeitus funkcijos $\sin x$ ženklą, pointegralinė funkcija pakeičia ženklą), t.y.

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x).$$

Tokia yra, pavyzdžiui, funkcija $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}$, nes

$$R(-\sin x,\cos x)=\frac{(-\sin x)^3}{\cos x-3}=-\frac{\sin^3 x}{\cos x-3}=-R(\sin x,\cos x).$$

Tada tinka keitinys $\cos x=t,\ x=\arccos t,\quad dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \sin x=\sqrt{1-t^2}$.

2) Sakykime, pointegralinė funkcija $R(\sin x, \cos x)$ yra nelyginė funkcijos $\cos x$ atžvilgiu, t.y.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Šiuo atveju tinka keitinys $\sin x = t$, $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

3) Sakykime, pointegralinė funkcija $R(\sin x, \cos x)$ yra lyginė funkcijų $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, t.y.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Pavyzdžiui, $R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x + 3\sin x \cos x + 5$ yra lyginė $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, nes

$$R(-\sin x, -\cos x) = (-\sin x)^2 + 3(-\sin x)(-\cos x) + 5 =$$

$$= \sin^2 x + 3\sin x \cos x + 5 = R(\sin x, \cos x).$$

Tokiu atveju tinka keitinys $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} =$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

4) Jeigu pointegralinė funkcija $R(\sin x, \cos x)$ netenkina nė vienos minėtų sąlygų, tai funkcija $R(\sin x, \cos x)$ racionalinama parinkus universalųjį keitinį $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Iš tikrųjų,

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Todėl

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$$

1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}\,dx$.

▶ Pointegralinė funkcija yra nelyginė funkcijos sin$x$ atžvilgiu (1 atvejis), todėl tinka keitinys $\cos x = t$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Tuomet

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}\,dx = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\,dt}{(t-3)\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\int \frac{1-t^2}{t-3}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t-3}\,dt = \int \frac{\left(t^2-9\right)+8}{t-3}\,dt = \int (t+3)\,dt + 8\int \frac{dt}{t-3} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|\,t-3\,| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3\,| + C. \quad ◀$$

2 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2}$.

▶ Pointegralinė funkcija yra lyginė sin$x$ ir cos$x$ atžvilgiu, nes

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{2(-\sin x)^2 + 5(-\sin x)(-\cos x) - 2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2} = R(\sin x, \cos x).$$

Parinkę keitinį $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, gausime:

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2}{1+t^2} + \frac{5t}{1+t^2} - 2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2+5t-2-2t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{5t-2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5t-2)}{5t-2} = \frac{1}{5}\ln|\,5t-2\,| + C = \frac{1}{5}\ln|5\operatorname{tg}x - 2\,| + C. \quad ◀$$

3 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

▸ Parinksime universalųjį keitinį $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Tuomet $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ir

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{5+5t^2+4-4t^2}=2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+3^2}=2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}+C.\ ◂$$

Kai kurie integralai $\int R(\sin x,\cos x)dx$ nesunkiai apskaičiuojami panaudojant trigonometrijos formules $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

4 pavyzdys. $\int\sin^4 x dx$.

▸ $\int\sin^4 xdx=\int\left(\sin^2 x\right)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\int dx-2\int\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 4xdx\right)=\frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C.\ ◂$$

5 pavyzdys. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

▸ $R(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)}=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}=R(\sin x,\cos x)$.

Tinka keitinys $\operatorname{tg}x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,

gausime:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^3}{\left(1+t^2\right)^{3/2}} \cdot \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^{1/2}}} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^3}{\left(1+t^2\right)^2}} =$$

$$= \int \left(\frac{1+t^2}{t^3} \right) dt = \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = C - \frac{1}{2t^2} + \ln|t| = C - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|. \blacktriangleleft$$

2.13. Integralų $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ apskaičiavimas

Šio tipo integralai apskaičiuojami pritaikius trigonometrijos formules, kai $m \neq n$:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).$$

Integruodami gausime:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) + C.$$

Likusieji integralai apskaičiuojami analogiškai.

Pavyzdys. $\int \sin 7x \cdot \cos 5x\, dx = \dfrac{1}{2}\int \left(\sin 12x + \sin 2x\right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x \right) + C = C - \frac{1}{24}\cos 12x - \frac{1}{4}\cos 2x. \blacktriangleleft$$

2.14. Integralai, neišreiškiami elementariosiomis funkcijomis

2.1. skyrelyje minėjome, kad kiekviena funkcija $f(x)$, tolydi kuriame nors intervale, tame intervale turi pirmykštę funkciją. Kitaip sakant, tolydžiųjų funkcijų integralai egzistuoja. Tačiau tai nereiškia, kad tolydžiosios funkcijos integralą visada galima išreikšti elementariąja funkcija. Yra net labai paprastų elementariųjų funkcijų, kurių integralai nėra elementariosios funkcijos. Tokius integralus vadiname „nesuintegruojamais", turėdami galvoje, kad jų negalima išreikšti elementariosiomis funkcijomis.

Jau minėjome, kad integralas $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ neišreiškiamas elementariosiomis funkcijomis, kai nei p, nei $\frac{m+1}{n}$, nei $\frac{m+1}{n}+p$ nėra sveikieji skaičiai. Tokie pat yra integralai $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \sqrt{\sin x}\,dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ ir kt., kurių irgi negalima išreikšti baigtiniu elementariųjų funkcijų darinių skaičiumi. Vadinasi, tokie integralai minėta prasme yra „nesuintegruojami". Yra integralų, kurių nors ir negalima išreikšti elementariosiomis funkcijomis, tačiau jie daug kur naudojami. Integralas $\int e^{-x^2}dx$ plačiai taikomas tikimybių teorijoje.

Integralas $\int \sin x^2 dx$ naudojamas šviesos difrakcijos klausimams spręsti. Prie neapibrėžtinių integralų, kurių nepavyksta išreikšti baigtiniu elementariųjų funkcijų darinių skaičiumi, priskiriami elipsiniai integralai. Taip jie buvo pavadinti todėl, kad pradžioje su šiais integralais teko susidurti apskaičiuojant elipsės ilgį. Yra trys pagrindiniai elipsinių integralų tipai:

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}},\quad I_2=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}},$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(1+hx^2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}};\quad \text{čia } 0<k<1,$$

h gali įgyti ir menamąsias reikšmes. Jie vadinami pirmojo, antrojo ir trečiojo tipo elipsiniais integralais. Prancūzų matematikas Ž. Liuvilis (1809 – 1882) įrodė, kad šie integralai yra neelementariosios funkcijos. Prancūzų matematikas A.M. Ležandras (1752 – 1833) dar labiau suprastino minėtus integralus, panaudojęs keitinį $x=\sin\varphi$ $\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$:

$$I_1=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad I_2=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi,$$

$$I_3=\int\frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Šie integralai taip pat vadinami pirmojo, antrojo ir trečiojo tipo Ležandro integralais.

Ypač svarbūs ir dažniausiai taikomi yra integralai

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi.$$

2.15. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralus:

1.1. $\int(5x+2)^{17}dx$. Kadangi $d(5x+2)=5dx$, tai

$$\int(5x+2)^{17}dx=\frac{1}{5}\int(5x+2)^{17}d(5x+2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+2)^{18}}{18}+C=\frac{(5x+2)^{18}}{90}+C.\ ◄$$

1.2. $\int x^4\sqrt{4-x^5}\;dx$. Kadangi $d\left(4-x^5\right)=-5x^4dx$, tai

$$\int x^4\sqrt{4-x^5}\;dx=-\frac{1}{5}\int\left(4-x^5\right)^{1/2}d\left(4-x^5\right)=$$

$$=C-\frac{1}{5}\cdot\frac{\left(4-x^5\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}=C-\frac{2}{15}\left(4-x^5\right)\sqrt{4-x^5}.\ ◄$$

1.3. $$\int\frac{dx}{3x^2+5}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{3}\,x\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{3}\,x\right)}{\left(\sqrt{3}\,x\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{5}}+C.\ ◄$$

1.4. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$. ◂

1.5. $\int \frac{dx}{7x^2-8} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{7}\,x\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{d\left(\sqrt{7}\,x\right)}{\left(\sqrt{7}\,x\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}\,x-\sqrt{8}}{\sqrt{7}\,x+\sqrt{8}}\right|+C = \frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}\,x-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}\,x+2\sqrt{2}}\right|+C. \blacktriangleleft$$

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(3x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(3x+1)^2}} =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Suintegruosime keisdami kintamąjį:

2.1. $\int \frac{2x+1}{(x+2)^5}\,dx$. Pasirinkę keitinį $\left\{\begin{matrix} x+2=t, \\ x=t-2, \\ dx=dt \end{matrix}\right\}$ turėsime, kad

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)^5}\,dx = \int \frac{(2t-4)+1}{t^5}\,dt = \int \frac{2t-3}{t^5}\,dt = 2\int t^{-4}dt - 3\int t^{-5}dt =$$

$$= C - \frac{2}{3t^3} + \frac{3}{4t^4} = C - \frac{2}{3(x+2)^3} + \frac{3}{4(x+2)^4}. \blacktriangleleft$$

2.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+5}}$. $\left\{\begin{matrix} \sqrt{3x+5}=t,\ 3x+5=t^2, \\ x=\frac{t^2-5}{3},\ dx=\frac{2}{3}tdt \end{matrix}\right\}$.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+5}} = \int \frac{\frac{t^2-5}{3}\cdot\frac{2}{3}t\,dt}{t} = \frac{2}{9}\int\left(t^2-5\right)dt = = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-5t\right)+C =$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{(3x+5)\sqrt{3x+5}}{3}-5\sqrt{3x+5}\right)+C==\frac{2}{27}(3x-10)\sqrt{3x+5}+C.\ ◄$$

2.3. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. $\left\{\begin{aligned} &x=3\operatorname{tg}t,\\ &dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}\end{aligned}\right\}$.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{\frac{3dt}{\cos^2 t}}{9\operatorname{tg}^2 t\sqrt{9\operatorname{tg}^2 t+9}}=\frac{1}{9}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{9}\int\sin^{-2}t\,d(\sin t)=-\frac{1}{9\sin t}+C=C-\frac{1}{9\sin t}=C-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}.\ ◄$$

2.4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. $\left\{\begin{aligned} &x=\frac{3}{\cos t},\\ &dx=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt\end{aligned}\right\}$. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{3}{\cos t}\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}=$

$$=\int\frac{\sin t}{3\sin t}dt=\frac{1}{3}\int dt=\frac{1}{3}t+C=\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x}+C.\ ◄$$

3 pavyzdys. Suitegruosime dalimis:

3.1. $\int(3x+2)e^{-2x}dx$. $\left\{\begin{aligned} &u=3x+2,\ du=3dx,\ dv=e^{-2x}dx,\\ &v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{aligned}\right\}$.

$$\int(3x+2)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}(3x+2)e^{-2x}+\frac{3}{2}\int e^{-2x}dx=$$

$$=C-\frac{1}{2}(3x+2)e^{-2x}-\frac{3}{4}e^{-2x}.\ ◄$$

3.2. $\int\sqrt{x}\ln x dx$. $\left\{\begin{aligned} &u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx,\ dv=\sqrt{x}\,dx,\\ &v=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\end{aligned}\right\}$.

$$\int\sqrt{x}\ln x dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{2}{3}\int x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,dx=$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9} x\sqrt{x} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C. \blacktriangleleft$$

3.3. $\int \frac{\ln(\sin 2x)}{\cos^2 2x} dx.$

$$\left\{\begin{aligned} & u = \ln(\sin 2x),\ du = \frac{2}{\sin 2x}\cos 2x dx = 2\mathrm{ctg}2x dx, \\ & dv = \frac{dx}{\cos^2 2x},\ v = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}2x \end{aligned}\right\}.$$

$$\int \frac{\ln(\sin 2x)}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}2x\ln(\sin 2x) - \int \mathrm{tg}2x\,\mathrm{ctg}2x dx =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}2x\ln(\sin 2x) - \int dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}2x\ln(\sin 2x) - x + C. \blacktriangleleft$$

3.4. $I = \int \sin\ln x dx.$ $\quad \left\{\begin{aligned} & u = \sin\ln x,\ du = \cos\ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ & dv = dx,\quad v = \int dx = x \end{aligned}\right\}.$

$$I = x\sin\ln x - \int x\cos\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x\sin\ln x - \int \cos\ln x dx.$$

Gautąjį integralą vėl integruojame dalimis:

$$\left\{\begin{aligned} & u = \cos\ln x,\ du = -\sin\ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ & dv = dx,\quad v = x \end{aligned}\right\}.$$

Tada

$$I = \int \sin\ln x dx = x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int x\sin\ln x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$$

$$= x\sin\ln x - x\cos\ln x - \int x\sin\ln x dx = x\sin\ln x - x\cos\ln x - I,$$

$$2I = x\sin\ln x - x\cos\ln x,$$

$$I = \frac{x\sin\ln x - x\cos\ln x}{2},$$

$$\int \sin\ln x dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C. \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Rasime integralus funkcijų, kurių išraiškoje yra kvadratinis trinaris:

4.1. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

▶ Skaitiklyje sudarysime vardiklio išvestinę, o vardiklyje – dvinario kvadaratą:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5} + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5} + 4\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right) + 4\operatorname{arctg}(x-2) + C\,. \blacktriangleleft$$

4.2. $$\int \frac{x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x-3)+\frac{19}{4}}{\sqrt{2x^2-3x+5}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(4x-3)\,dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}} +$$

$$+\frac{19}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]}} = \frac{1}{4}\int \left(2x^2-3x+5\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(2x^2-3x+5\right) +$$

$$+\frac{19}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3x+5} + \frac{19}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3x+5} + \frac{19}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-3x+5}\right| + C\,. \blacktriangleleft$$

4.3. $\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{7-(x-2)^2}\,dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-(x-2)^2}\,d(x-2)$.

Pritaikę 2.2 skyrelio 20 formulę, gausime:

$$\int \sqrt{3+4x-x^2} = \frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}} + \frac{x-2}{2}\sqrt{3+4x-x^2} + C\,. \blacktriangleleft$$

4.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x+7x^2}}$. $\left\{x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}\right\}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x+7x^2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{7}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+7}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+6}} = C - \ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+7}\right| = C - \ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+7}\right| =$$

$$= C - \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x+7x^2}}{x}\right|. \blacktriangleleft$$

5 pavyzdys. Rasime racionaliųjų funkcijų integralus:

5.1. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

▸ Vardiklio šaknis $x = 1$ yra realioji, o $x = -1$ – realioji kartotinė, todėl

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Sulyginsime skaitiklius:

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C\left(x^2-1\right).$$

Įrašę į šią lygtį $x = 1$, gausime: $1 = 4A$, $\quad A = \frac{1}{4}$.

Įrašę į šią lygtį $x = -1$, gausime: $-1 = -2B$, $\quad B = \frac{1}{2}$.

Koeficientą C rasime sulyginę koeficientus, esančius prie x^2:

$$x^2 \mid A + C = 0, \quad C = -A = -\frac{1}{4}.$$

Tada

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1}.$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2} d(x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C. \blacktriangleleft$$

5.2. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Kadangi trupmena $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$ netaisyklingoji, tai pirmiausia jos skaitiklį padalysime iš vardiklio:

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3-x^2+x-1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4-x^3+x^2-x} & x+1 \\ x^3-x^2+x+1 & \\ -\underline{x^3-x^2+x-1} & \\ 2 & \end{array}$$

Todėl $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$.

Kadangi $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$, tai

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = \int\left(x+1+\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\right)dx =$$

$$= \int (x+1)dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(x+1)^2}{2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

$$1 = A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x-1).$$

Įrašę į šią lygtį $x = 1$, gausime:

$$1 = 2A, \qquad A = \frac{1}{2}.$$

Koeficientus B ir C rasime sulyginę koeficientus, esančius prie x^2 ir x; gausime sistemą:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x & -B+C=0. \end{array}\Bigg\} \quad A=-B, \quad B=-\frac{1}{2}. \quad C=B=-\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Tada

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \frac{(x+1)^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleleft$$

6 pavyzdys. Rasime iracionaliųjų funkcijų integralus:

6.1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx.$ $\left\{\begin{array}{ll}\sqrt[12]{x}=t, & x=t^{12}, \\ dx=12t^{11}dt & \end{array}\right\}.$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx = \int\frac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8+t^3} = 12\int\frac{t^{14}}{t^5+1}dt = 12\int\left(t^9-t^4+\frac{t^4}{t^5+1}\right)dt =$$

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} t^{14} \\ \underline{t^{14}+t^{9}} \end{array} & \begin{array}{|l} t^5+1 \\ \hline t^9-t^4 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -t^{9} \\ \underline{-t^{9}-t^{4}} \end{array} & \\
t^4 &
\end{array}
$$

$$
=12\left(\int t^9\,dt-\int t^4\,dt+\int\frac{t^4\,dt}{t^5+1}\right)=12\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\int\frac{d\left(t^5+1\right)}{t^5+1}\right)=
$$

$$
=12\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5+1\right|\right)+C=\frac{12}{5}\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{2}-\sqrt[12]{x^5}+\ln\left|\sqrt[12]{x^5}+1\right|\right)+C. \blacktriangleleft
$$

6.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-x}\left(9+\sqrt[3]{2-x}\right)}$. $\left\{\begin{array}{l}\sqrt[6]{2-x}=t,\quad 2-x=t^6, \\ x=2-t^6,\ dx=-6t^5\,dt\end{array}\right\}$.

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{2-x}\left(9+\sqrt[3]{2-x}\right)}=-6\int\frac{t^5\,dt}{t^3\left(9+t^2\right)}=-6\int\frac{t^2\,dt}{t^2+9}=-6\int\frac{\left(t^2+9\right)-9}{t^2+9}\,dt=
$$

$$
=-6\int\left(1-\frac{9}{t^2+9}\right)dt=-6\left(\int dt-9\int\frac{dt}{t^2+3^2}\right)=-6t+18\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=
$$

$$
=6\left(3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{2-x}}{3}-\sqrt[6]{2-x}\right)+C. \blacktriangleleft
$$

6.3. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$. $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t,\quad \dfrac{1-x}{1+x}=t^2, \\ x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=-\dfrac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt\end{array}\right\}$.

$$
\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\int\frac{t\cdot(-4t)\,dt}{\dfrac{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2}}=
$$

$$= -4\int\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)} = 4\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2-1\right)\left(1+t^2\right)} = 4\int\frac{t^2\,dt}{(t-1)(t+1)\left(1+t^2\right)}.$$

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

$$t^2 = A(t+1)\left(1+t^2\right)+B(t-1)\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\left(t^2-1\right).$$

Kai $t=1$, tai $1=4A$, $A=\frac{1}{4}$.

Kai $t=-1$, tai $1=-4B$, $B=-\frac{1}{4}$.

C ir D rasime sulyginę koeficientus, esančius prie t^3 ir t^2:

$$\begin{array}{c|l} t^3 & A+B+C=0, \\ t^2 & A-B+D=1. \end{array}\Bigg\}$$

Iš čia $\qquad C=0,\ D=\frac{1}{2}.$

Tada $\qquad \frac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(1+t^2\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}.$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = 4\int\frac{t^2\,dt}{(t-1)(t+1)\left(1+t^2\right)} = \int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\int\frac{d(t-1)}{t-1}-\int\frac{d(t+1)}{t+1}+2\operatorname{arctg}t = \ln|t-1|-\ln|t+1|+2\operatorname{arctg}t+C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\operatorname{arctg}t+C;\ \text{čia}\ t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\ ◀$$

6.4. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}} = \int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, čia

$$m=3,\quad n=2,\quad p=-\frac{1}{2},\quad \frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2\ \text{(sveikasis skaičius).}$$

Parenkame keitinį: $\left\{\begin{aligned} &1+2x^2=t^2, \quad x^2=\frac{t^2-1}{2}, \\ &x=\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, dx=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}tdt \end{aligned}\right\}.$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot t^{-1}\cdot\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}tdt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{4}\left(\int t^2dt-\int dt\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1+2x^2}}{4}\left(\frac{1+2x^2}{3}-1\right)+C=\frac{x^2-1}{6}\sqrt{1+2x^2}+C. \blacktriangleleft$$

7 pavyzdys. Rasime trigonometrinių funkcijų integralus:

7.1. $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$. Čia $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$.

Ši funkcija nelyginė $\sin x$ atžvilgiu, nes

$$\frac{(-\sin x)^3}{1+\cos^2 x}=-\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}=-R(\sin x,\cos x),$$

todėl tinka keitinys $\left\{\cos x=t, \sin x=\sqrt{1-t^2}, dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}.$

$$\int\frac{\sin^3 x\,dx}{1+\cos^2 x}=-\int\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\int\frac{t^2-1}{1+t^2}dt=\int\frac{\left(t^2+1\right)-2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int dt-2\int\frac{dt}{1+t^2}=t-2\operatorname{arctg}t+C=\cos x-2\operatorname{arctg}(\cos x)+C. \blacktriangleleft$$

7.2. $\int\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$.

Čia $R(\sin x,\cos x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x$. Ji nelyginė $\cos x$ atžvilgiu, nes $\sqrt[3]{\sin^2 x}(-\cos x)^3=-\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x=-R(\sin x,\cos x)$.

Todėl $\left\{\sin x = t, \cos x = \sqrt{1-t^2}, dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}$.

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx = \int t^{\frac{2}{3}}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int t^{\frac{2}{3}}\left(1-t^2\right)dt =$$

$$= \int t^{\frac{2}{3}} dt - \int t^{\frac{8}{3}} dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C. \blacktriangleleft$$

7.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x - 3}$.

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}.$$

Kadangi

$$\frac{1}{19(-\sin x)^2 - 8(-\sin x)\ (-\cos x) - 3} = \frac{1}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3} = R(\sin x, \cos x),$$

tai pointegralinė funkcija yra lyginė $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, todėl

$$\left\{\mathrm{tg} x = t, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{19t^2}{1+t^2} - \frac{8t}{1+t^2} - 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{19t^2 - 8t - 3 - 3t^2} = \int \frac{dt}{16t^2 - 8t - 3} = \int \frac{dt}{(4t-1)^2 - 4} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(4t-1)}{(4t-1)^2 - 2^2} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4t-1-2}{4t-1+2}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\mathrm{tg}\, x - 3}{4\mathrm{tg}\, x + 1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

7.4. $\int \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x}$. $\left\{ \begin{array}{l} tg\,\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\}$.

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+\frac{6t}{1+t^2}}=2\int \frac{dt}{5+5t^2+4-4t^2+6t}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int \frac{dt}{(t+3)^2}=2\int (t+3)^{-2}\,d(t+3)=C-\frac{2}{t+3}=C-\frac{2}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+3}.$$ ◄

7.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$. $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(-\sin x)^3(-\cos x)^5}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}=R(\sin x,\cos x).$$

$$\left\{ \mathrm{tg}\,x=t,\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \right\}.$$

Tada

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\sqrt[4]{\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{5}{2}}}}}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\sqrt[4]{\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^4}}}=$$

$$=\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\int t^{-\frac{3}{4}}\,dt=4t^{\frac{1}{4}}+C=4\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}+C.$$ ◄

2.16. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite integralus:

1.1. $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

1.2. $\int (x-1)^2 x\sqrt[4]{x}\,dx$.

1.3. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1.4. $\int \frac{x\sin 2x+\sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x}\,dx$.

1.5. $\int (3-2x)^7\,dx$.

1.6. $\int x^3\sqrt{2x^4-3}\,dx$.

1.7. $\int \frac{dx}{5x+4}$.

1.8. $\int 2^{1-3x}\,dx$.

1.9. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

1.10. $\int x\sin\left(x^2+2\right)dx$.

1.11. $\int \frac{x^3\,dx}{\sin^2 x^4}$.

1.12. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

1.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$.

1.14. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx$.

1.15. $\int \frac{\ln x}{x\left(3-\ln^2 x\right)}\,dx$.

1.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$.

1.17. $\int \frac{dx}{x\left(3-\ln^2 x\right)}$.

1.18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}$.

1.19. $\int \frac{dx}{x\left(3+\ln^2 x\right)}$.

1.20. $\int \frac{\arcsin 2x+x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

2. Suintegruokite keisdami kintamąjį:

2.1. $\int x^2(1-3x)^{15}\,dx$.

2.2. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\,dx$.

2.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

2.4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

2.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

2.6. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4}\,dx$.

2.7. $\int \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

2.8. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^4}\,dx$.

3. Suintegruokite dalimis:

3.1. $\int x\cos 3x dx$.

3.2. $\int x^2 \ln x dx$.

3.3. $\int \arcsin 2x dx$.

3.4. $\int \frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x^2} dx$.

3.5. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\, dx$.

3.6. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

3.7. $\int \left(x^2+1\right)e^{-2x} dx$.

3.8. $\int \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx$.

3.9. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

3.10. $\int \cos \ln x dx$.

4. Raskite integralus funkcijų, kurių išraiškoje yra kvadratinis trinaris:

4.1. $\int \frac{x dx}{x^2-7x+13}$.

4.2. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1} dx$.

4.3. $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$.

4.4. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}} dx$.

4.5. $\int \sqrt{2-x-x^2}\, dx$.

4.6. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

5. Raskite racionaliųjų funkcijų integralus:

5.1. $\int \frac{x^4}{\left(x^2-1\right)(x+2)} dx$.

5.2. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$.

5.3. $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} dx$.

5.4. $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} dx$.

5.5. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx$.

5.6. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx$.

6. Raskite iracionaliųjų funkcijų integralus:

6.1. $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}} dx$.

6.2. $\int \frac{dx}{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[6]{x}}$.

6.3. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\, dx$.

6.4. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.

6.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

6.6. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+2x^3\right)^2}}{x^6} dx$.

6.7. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

6.8. $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$.

7. Raskite trigonometrinių funkcijų integralus:

7.1. $\int\cos^4 x\sin^3 x\,dx$.

7.2. $\int\dfrac{\cos^3 x}{4\sin^2 x-1}\,dx$.

7.3. $\int\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$.

7.4. $\int\dfrac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

7.5. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

7.6. $\int\dfrac{dx}{1+2\operatorname{tg} x}$.

7.7. $\int\dfrac{dx}{3+5\cos x}$.

7.8. $\int\dfrac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

7.9. $\int\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$.

7.10. $\int\dfrac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$.

7.11. $\int\cos^4 x\,dx$.

7.12. $\int\dfrac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

7.13. $\int\sin 3x\cos 10x dx$.

7.14. $\int\sin\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{2}\,dx$.

Atsakymai

1.1. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+5\ln|x|+\frac{4}{\sqrt{x}}+C$. **1.2.** $\frac{4}{17}x^4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{13}x^3\sqrt[4]{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$.

1.3. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **1.4.** $C-2\cos x+3\sqrt[3]{x}$. **1.5.** $C-\frac{(3-2x)^8}{16}$.

1.6. $\frac{1}{12}\sqrt{(2x^4-3)^3}+C$. **1.7.** $\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$. **1.8.** $C-\frac{2^{1-3x}}{3\ln 2}$. **1.9.** $C-e^{\frac{1}{x}}$.

1.10. $C-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+2\right)$. **1.11.** $C-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x^4$. **1.12.** $\frac{\sin^4 6x}{24}+C$.

1.13. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x+C$. **1.14.** $C-\sqrt{3-\ln^2 x}$. **1.15.** $C-\frac{1}{2}\ln\left|3-\ln^2 x\right|$.

1.16. $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. **1.17.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\ln x}{\sqrt{3}-\ln x}\right|+C$. **1.18.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{3+\ln^2 x}\right|+C$.

1.19. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. **1.20.** $\frac{1}{4}(\arcsin 2x)^2-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$.

2.1. $C-\frac{1}{27}\left[\frac{(1-3x)^{16}}{16}-\frac{2(1-3x)^{17}}{17}+\frac{(1-3x)^{18}}{18}\right]$. **2.2.** $\ln|x-2|-\frac{3x-5}{(x-2)^2}+C$.

2.3. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$. **2.4.** $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right]+C$. **2.5.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$.

2.6. $C-\frac{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}{75x^3}$. **2.7.** $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C$. **2.8.** $\frac{\sqrt{\left(x^2-5\right)^3}}{15x^3}+C$.

3.1. $\frac{1}{3}\left(x\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$. **3.2.** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^2}{9}+C$. **3.3.** $x\arcsin 2x+$ $+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$. **3.4.** $C-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **3.5.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}-$ $-\sqrt{x-1}+C$. **3.6.** $C-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$. **3.7.** $C-\frac{2x^2+2x+3}{4e^{2x}}$.

3.8. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x+C$. **3.9.** $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+C$.

3.10. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$. **4.1.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-7x+13\right)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C$.

4.2. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. **4.3.** $C-4\sqrt{3-2x-x^2}+$ $+3\arcsin\frac{x+1}{2}$. **4.4.** $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

4.5. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$. **4.6.** $C-\arcsin\frac{1}{x+1}$. **5.1.** $\frac{x^2}{2}-2x+$ $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)^{32}}{(x+1)^3}\right|+C$. **5.2.** $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. **5.3.** $x^2-\frac{1}{3x}-$

$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **5.4.** $\ln\frac{\left|x\left(x^2-x+1\right)\right|}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

5.5. $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **5.6.** $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left(x^2+2x+2\right)-$

$-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **6.1.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}+3\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-12\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

6.2. $C-2\sqrt{x}-12\sqrt[6]{x}-\frac{12}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt{2}}\right|$. **6.3.** $C-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\ln\left[|x|\left(1-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)^2\right]$.

6.4. $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{5x^2-6x+9}{80}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}\right)+C$. 6.5. $\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{2}+\sqrt[3]{3x+1}+$

$+\ln\left|\sqrt[3]{3x+1}-1\right|+C$. **6.6.** $C-\frac{1}{5x^5}\sqrt[3]{\left(2x^3+1\right)^5}$. **6.7.** $\frac{1}{15}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\left(3x^2-2\right)+C$.

6.8. $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$. **7.1.** $C-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x$. **7.2.** $C-\frac{1}{4}\sin x+$

$+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|$. **7.3.** $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x+3\cos^{-\frac{1}{3}} x+C$. **7.4.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\,tgx\right)+C$.

7.5. $C+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+2)$. **7.6.** $\frac{1}{5}\left(x+2\ln\left|\cos x+2\sin x\right|\right)+C$. **7.7.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+2}{tg\,\frac{x}{2}-2}\right|+C$.

7.8. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **7.9.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|\right)+C$. **7.10.** $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

7.11. $C+\frac{1}{16}\left(\frac{\sin 4x}{2}+4\sin 2x+6x\right)$. **7.12.** $2\ln|\operatorname{tg}x|^2-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$.

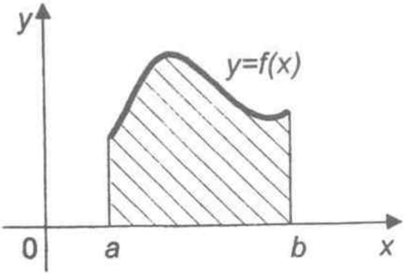
7.13. $\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{26}\cos 13x+C$. **7.14.** $3\sin\frac{x}{6}-\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+C$.

3. APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

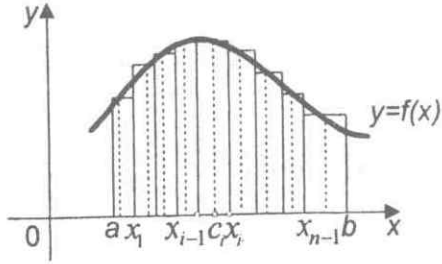
3.1. Kreivinės trapecijos plotas ir apibrėžtinio integralo sąvoka

Sakykime, kad atkarpoje $[a; b]$ apibrėžta teigiama ir tolydi funkcija $y = f(x)$.

1 apibrėžimas. Figūra, apribota iš apačios abscisių ašies, iš šonų tiesių $x = a$ ir $x = b$, iš viršaus funkcijos $y = f(x)$ grafiko, vadinama **kreivine trapecija** (3.1 pav.).



3.1 pav.



3.2 pav.

Apskaičiuosime šios trapecijos plotą. Atkarpą $[a; b]$ taškais $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ bet kaip padalykime į n dalių. Kiekvienoje dalyje bet kur pasirinkime po tašką c_i ir suraskime funkcijos reikšmes šiuose taškuose $f(c_i)$. Kiekvieną atkarpą $[x_{i-1}; x_i]$ laikydami kraštine, nubraižykime stačiakampius, kurių pagrindai lygūs $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o aukštinės lygios $f(c_i)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Gausime laiptuotą figūrą (3.2 pav.). Apskaičiuokime jos plotą.

Kiekvieno stačiakampio plotas lygus $f(c_i)\Delta x_i$, todėl visos laiptuotos figūros plotas σ lygus tokių dėmenų sumai. Taigi

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Aišku, kad laiptuotos figūros plotas bus tuo artimesnis kreivinės trapecijos plotui, juo bus mažesnės atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$. Pažymėkime $\max \Delta x_i$ raide λ, $1 \le 1 \le n$. Tikslią kreivinės trapecijos ploto reikšmę S gausime apskaičiavę sumos σ ribą, kai $\lambda \to 0$ (tuomet n neaprėžtai didėja). Vadinasi,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i . \qquad (1)$$

Aprašytą procedūrą pritaikykime bet kokiai tolydžiajai funkcijai $y=f(x)$, apibrėžtai atkarpoje $[a; b]$:

1) sudarykime sumą $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, kuri vadinama integraline suma;

2) apskaičiuokime šios sumos ribą, kai $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

2 apibrėžimas. Baigtinė integralinės sumos riba, kai $\lambda \to 0$, nepriklausanti nuo atkarpos $[a; b]$ skaidymo būdo bei nuo taškų c_i parinkimo, vadinama **funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu atkarpoje $[a; b]$.**

Apibrėžtinis integralas žymimas simboliu $\int_a^b f(x)dx$.

Taigi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i . \qquad (2)$$

Skaičiai a ir b vadinami apatiniu ir viršutiniu integravimo rėžiais.

(2) formulė rodo, kaip galima formaliai integralinės sumos ribą pakeisti apibrėžtiniu integralu:

1) ribos ir sumos ženklas keičiami simboliu $\int_a^b$,

2) funkcijos reikšmė tarpiniame taške $f(c_i)$ keičiama $f(x)$, o dydis Δx_i – diferencialu dx.

Šią pastabą vertėtų įsidėmėti, nes tokiu būdu toliau ne kartą nuo integralinės sumos pereisime prie apibrėžtinio integralo.

Jeigu funkcijos $f(x)$ integralinė suma turi baigtinę ribą, tai funkciją vadiname integruojama atkarpoje $[a; b]$.

Be įrodymo paminėsime svarbų faktą: tolydi atkarpoje $[a; b]$ funkcija yra integruojama.

Iš (1) formulės išplaukia, kad kreivinės trapecijos (3.1 pav.) plotas

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Tai ir yra apibrėžtinio integralo geometrinė prasmė.

3.2. Apibrėžtinio integralo savybės

Sakykime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ – integruojamos atkarpoje $[a;\, b]$ funkcijos. Tuomet teisingi šie teiginiai:

1. $$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,;$$

čia α, β – bet kokie realieji skaičiai.

▸ Pritaikę apibrėžimą, gauname: $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha f(c_i)+\beta g(c_i))\Delta x_i=$$

$$=\alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i+\beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$ ◂

2. $$\int_a^a f(x)\,dx=0\,.$$

▸ Ši savybė išplaukia iš apibrėžtinio integralo apibrėžimo, nes integravimo atkarpos ilgis $a-a=0$ ir integralinė suma taip pat lygi nuliui. ◂

3. Kai $a<b$, tai $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx\,.$

▸ Ši formulė apibendrina integralo sąvoką tuo atveju, kai atkarpoje $[a;\, b]$ $(a<b)$ integruojame nuo b iki a. Tada visi integralinės sumos skirtumai $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ yra neigiami. Sakome taip: integravimo rėžius sukeitus vietomis, apibrėžtinis integralas keičia ženklą. ◂

4. Kad ir kokie būtų skaičiai a, b, c, teisinga lygybė

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

jei tik visi trys integralai egzistuoja.

▸ Tarkime, kad $a<c<b$. Minėjome, kad integralinės sumos ribos reikšmė nepriklauso nuo $[a;\, b]$ skaidymo į dalis, jei tik funkcija $f(x)$ integruojama. Todėl atkarpą $[a;\, b]$ galima suskaidyti į dalis taip, kad taškas c būtų dalijimo taškas. Tuomet

$$\sum_a^b f(c_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(c_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(c_i)\Delta x_i .$$

Perėję prie ribos, kai $\lambda \to 0$, gauname reikiamą lygybę.

Dabar tarkime, kad taškas c yra atkarpos $[a; b]$ išorėje, pavyzdžiui, kad $a < b < c$. Tuomet, remiantis tik ką įrodyta savybe, galėsime simboliškai (kad būtų trumpiau) rašyti:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \quad \text{t.y.} \quad \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b . \blacktriangleleft$$

5. Jei $f(x) \geq 0$ atkarpoje $[a; b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

▸ Kadangi bet kuriame atkarpos $[a; b]$ taške c_i $f(c_i) \geq 0$ ir $\Delta x_i > 0$, tai $f(c_i)\Delta x_i \geq 0$. Tuomet ir $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \geq 0$. Perėję prie ribos, kai $\lambda \to 0$, gauname reikiamą nelygybę. ◂

6. Jei $f(x) \geq g(x)$ atkarpoje $[a; b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

▸ Iš nelygybės $f(x) \geq g(x)$ išplaukia $f(x) - g(x) \geq 0$. Tuomet, remiantis 5 ir 1 savybėmis,

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \geq 0, \quad \text{t.y.} \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx . \blacktriangleleft$$

7. **Apibrėžtinio integralo įvertinimas.** Tarkime, kad $m = \min_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a;b]} f(x)$. Tada $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. (2)

▸ Kadangi $m \leq f(c_i) \leq M$ ir $\Delta x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, tai

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\,\Delta x_i . \tag{3}$$

Apskaičiuosime sumą $\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m\,(b-a)$. Dabar aišku, kad, perėję prie ribos (3) nelygybėse, gauname (2) nelygybes. ◂

8. **Vidutinės reikšmės teorema.** Kadangi ši savybė dažnai naudojama, tai ją suformuluosime kaip teoremą.

Teorema. Jeigu funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai egzistuoja tos atkarpos taškas c, kuriame

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

▸ Kadangi funkcija tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai ji šioje atkarpoje įgyja savo mažiausiąją ir didžiausiąją reikšmes m ir M, todėl $m \le f(x) \le M$. Tuomet teisingos (2) nelygybės. Padalinę jas iš $b - a > 0$, gausime:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Kadangi dydis $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ yra tarp funkcijos $f(x)$ mažiausios ir didžiausios reikšmių m ir M, tai šis dydis, remiantis teorema apie tolydžios atkarpoje funkcijos tarpinę reikšmę, yra funkcijos $f(x)$ tarpinė reikšmė, įgyjama, pavyzdžiui, kuriame nors taške c $(a < c < b)$. Todėl

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c);$$

iš čia

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \blacktriangleleft$$

Reikšmė $f(c)$ vadinama vidutine funkcijos $f(x)$ reikšme atkarpoje $[a; b]$.

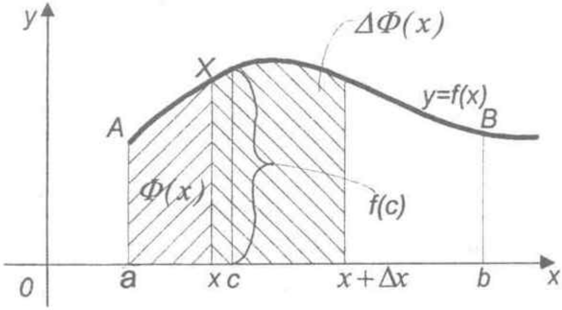
3.3. Integralas su kintamu viršutiniu rėžiu

Jei funkcija $f(x)$ integruojama atkarpoje $[a; b]$, tai ji bus integruojama atkarpoje $[a; x]$, $x \in [a; b]$. Nagrinėsime integralą

$$\int_a^x f(t)dt,$$

kuris , kai $f(x) > 0$ geometriškai reikštų kreivinės trapecijos $aAXx$ (3.3 pav.), turinčios kintamą kraštinę xX, plotą. Aišku, kad tokios trapecijos plotas irgi bus kintamas ir priklausys nuo x. Todėl

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$$



3.3 pav.

Teorema. Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a;\ b]$, $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, tai $(\Phi(x))'=f(x)$ šios atkarpos taškuose.

▶ Kintamajam x suteikiame pokytį Δx ir apskaičiuojame pokytį $\Delta\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x}-\int\limits_a^{x}=\int\limits_a^{x}+\int\limits_x^{x+\Delta x}-\int\limits_a^{x}=\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt.$$

Integralui $\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt$ taikome vidutinės reikšmės teoremą:

$$\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt=f(c)(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x;$$

čia $x<c<x+\Delta x$. Tuomet

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c).$$

Pasinaudosime išvestinės apibrėžimu:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c).$$

Kadangi $c\to x$, kai $\Delta x\to 0$, tai dėl $f(x)$ tolydumo

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=\lim_{c\to x}f(c)=f(x).$$

Taigi

$$\Phi'(x)=f(x).\ ◀$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad funkcija $\Phi(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija atkarpoje $[a; b]$.

Iš to išplaukia svarbi išvada: kiekviena tolydi atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ turi pirmykštę funkciją $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

3.4. Niutono ir Leibnico formulė

Išvesime formulę, kuri apibrėžtinį integralą susieja su pointegralinės funkcijos pirmykšte funkcija.

Teorema. Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$ ir $F(x)$ – kuri nors jos pirmykštė šioje atkarpoje, tai

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

▶ Remiantis ankstesne teorema (žr. 3.3 skyrelį), galime teigti, kad tolydi atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ turi pirmykštę, lygią $\int_a^x f(t)\,dt$. Kadangi pagal sąlygą $F(x)$ irgi yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, tai jos turi skirtis tik konstanta, todėl

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Įrašę į šią lygybę $x = a$, gauname:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C,$$

$$0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a).$$

Taigi $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$. Įrašę į šią formulę $x = b$, turime

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ši formulė vadinama **Niutono ir Leibnico formule**. Skirtumą $F(b) - F(a)$ įprasta žymėti $F(x)\,\Big|_a^b$. Tuomet Niutono ir Leibnico formulė užrašoma taip:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a). \blacktriangleleft$$

Pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx$.

▸ Kadangi $\frac{1}{\cos^2 x}$ pirmykštė lygi tg x, o cos x pirmykštė lygi sin x, tai

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = (\operatorname{tg} x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) - (\operatorname{tg} 0 + \sin 0) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangleleft$$

3.5. Apibrėžtinio integralo kintamųjų keitimo metodas

Šis metodas pagrįstas teorema.

1 teorema. Tarkime, kad integrale $\int_a^b f(x) dx$ kintamasis x pakeistas pagal formulę $x = \varphi(t)$. Jeigu:

1) $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$,
2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$,
3) $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t)$ tolydžios atkarpoje $[\alpha; \beta]$,
4) $f(\varphi(t))$ apibrėžta ir tolydi atkarpoje $[\alpha; \beta]$, tai

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

▸ Sakykime, kad $F(x)$ – funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija atkarpoje $[a; b]$. Tuomet, panaudoję Niutono ir Leibnico formulę, turime

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \int_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) = \int_\alpha^\beta (F(\varphi(t)))' \, dt.$$

Išvestinę $(F(\varphi(t)))'$ apskaičiuosime taikydami sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę:

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Vadinasi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \blacktriangleleft$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

▶ Kintamąjį pakeisime taip, kad išsitrauktų abiejų laipsnių šaknys: $\sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6$. Tuomet $dx=6t^5dt$. Į keitinį $\sqrt[6]{x}=t$ vietoj x įrašome skaičius 1 ir 64: $\sqrt[6]{1}=t,\ \sqrt[6]{64}=t$; iš čia $t=1$ ir $t=2$. Todėl

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int_1^2\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int_1^2\frac{t^3dt}{t+1}=6\int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Bigg|_1^2.$$

Baigti siūlome skaitytojams. ◀

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

▶ $x=a\sin t,\ dx=a\cos t dt$. Į keitinį vietoj x įrašome 0 ir a: $a\sin t=0$, $a\sin t=a$; iš čia $\sin t=0$, $\sin t=1$ ir $t=0,\ t=\frac{\pi}{2}$. Tuomet

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}. \blacktriangleleft$$

2 teorema. Tarkime, kad $f(x)$ – tolydi atkarpoje $[-a;a]$ $(a>0)$ funkcija. Tuomet

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \text{kai } f(x) - \text{lyginė funkcija;}\\ 0, & \text{kai } f(x) - \text{nelyginė funkcija.}\end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx .$$

Pirmajame integrale pakeisime kintamąjį: $x = -t$, $dx = -dt$. Kai $x = -a$, tai iš $x = -t$ gauname $t = a$, kai $x = 0$, tai iš tos pačios lygybės turime $t = 0$. Todėl

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx .$$

Tuomet

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))dx .$$

Jei $f(x)$ – lyginė funkcija, tai $f(-x) = f(x)$ ir $f(-x) + f(x) = 2f(x)$. Jei $f(x)$ – nelyginė funkcija, tai $f(-x) = -f(x)$ ir $f(-x) + f(x) = 0$. Iš čia išplaukia reikiama lygybė. ◀

3.6. Integravimas dalimis

Šis metodas pagrįstas tokia teorema.

Teorema. Sakykime, kad $u(x)$ ir $v(x)$ – diferencijuojamos atkarpoje $[a; b]$ funkcijos. Tuomet

$$\int_{a}^{b} u\,dv = uv \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v du .$$

▶ Panaudoję lygybę $d(uv) = udv + vdu$ bei Niutono ir Leibnico formulę, gauname:

$$\int_{a}^{b} d(uv) = uv \Big|_{a}^{b} = \int_{a}^{b} (udv + vdu).$$

Taigi

$$\int_{a}^{b} udv + \int_{a}^{b} vdu = uv \Big|_{a}^{b} ;$$

iš čia

$$\int_{a}^{b} udv = uv \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu . \blacktriangleleft$$

Pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_{1}^{e} x \ln x dx$.

▶ Pažymėsime $u = \ln x$, $dv = x\,dx$. Tuomet $du = \frac{1}{x}dx$ ir $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}. \blacktriangleleft$$

3.7. Integralai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \ (n \in N)$

Pirmiausia įrodysime, kad šie integralai yra lygūs. Pakeisime kintamąjį $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. Tuomet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt == \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Dabar apskaičiuosime integralą $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Integruosime dalimis: $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$. Tuomet $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$. Vadinasi,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right).$$

Kadangi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = I_n$, tai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx = I_{n-2}$. Taigi gavome rekurentinį sąryšį

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$
$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$
$$I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2},$$
$$I_n(1+n-1) = (n-1)I_{n-2},$$
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Panaudoję šią formulę, gauname
$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$
todėl
$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Pratęsę šį procesą, gautume I_1, kai n – nelyginis, arba I_0, kai n – lyginis.

Kai n – lyginis ($n = 2m$), tai turime
$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} I_0;$$

čia $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

Kai n – nelyginis ($n = 2m + 1$), tai
$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3} I_1;$$

čia $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Simboliu $n!!$ (skaitysime „dvigubas faktorialas") pažymėsime vien tik lyginių skaičių iki n sandaugą, jei n – lyginis, ir vien tik nelyginių skaičių iki n sandaugą, jei n – nelyginis. Pavyzdžiui,
$$5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15, \quad 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

Tuomet
$$I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \cdot 1.$$

Trumpiau šias dvi lygybes galima parašyti taip:

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{kai} \quad n-\text{lyginis;}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{kai} \quad n-\text{nelyginis.}\end{cases}$$

Pavyzdys. Apskaičiuosime $\int\limits_0^{\pi}\sin^8\frac{x}{2}dx$.

▶ Pakeisime kintamąjį: $\frac{x}{2}=t,\ dx=2dt$.

Tuomet $\int\limits_0^{\pi}\sin^8\frac{x}{2}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 t\,dt=2\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2}=2\cdot\frac{7\cdot5\cdot3}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{128}$. ◀

3.8. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralus, taikydami Niutono ir Leibnico formulę:

1.1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{\text{arctg}^2 x}{1+x^2}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\text{arctg}^2 x\,d(\text{arctg }x)=\frac{\text{arctg}^3 x}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}=$

$=\frac{1}{3}\left(\text{arctg}^3\sqrt{3}-\text{arctg}^3 0\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{\pi^3}{81}$. ◀

1.2. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_{-2}^{0}=$

$=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\frac{1}{2}=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. ◀

1.3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^{-\frac{1}{3}}x\,d(\sin x)=$

$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{-\frac{1}{3}}x\,d(\sin x)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\sin^{-\frac{1}{3}}x\,d(\sin x)-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\sin^{\frac{5}{3}}x\,d(\sin x)=$

$$= \frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} x \;\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} - \frac{3}{8}\sin^{\frac{8}{3}} x \;\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sin^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) -$$

$$-\frac{3}{8}\left(\sin^{\frac{8}{3}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin^{\frac{8}{3}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) -$$

$$-\frac{3}{8}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{8}{3}} - (-1)^{\frac{8}{3}}\right) = \frac{3}{32}\left(7\sqrt[3]{4} - 12\right). \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Įvertinsime integralą $\int_1^3 \sqrt{3 + x^3}\,dx$.

▸ Apskaičiuosime tolydžios atkarpoje [1; 3] funkcijos $f(x) = \sqrt{3 + x^3}$ reikšmes m ir M. Rasime $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{3 + x^3}}$. $f'(x) = 0$, kai $x = 0$. Bet $x = 0$ nepriklauso atkarpai [1; 3], todėl taško $x = 0$ nenagrinėsime. Kadangi $f'(x) > 0$ atkarpoje [1; 3], tai funkcija šioje atkarpoje didėja, todėl mažiausią reikšmę m įgyja taške $x = 1$, o didžiausią M – taške $x = 3$. Taigi

$$m = f(1) = \sqrt{4} = 2, \quad M = f(3) = \sqrt{30}, \quad b - a = 2.$$

Panaudoję formulę: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$, gausime:

$$4 \le \int_1^3 \sqrt{3 + x^3}\,dx \le 2\sqrt{30}. \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime funkcijos $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ vidutinę reikšmę atkarpoje [1; 4].

$$\blacktriangleright\; f(c) = \frac{\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}{4 - 1} = \frac{1}{3}\int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}+2\sqrt{4}-2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{2}{3}+4-2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{14}{3}+2\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{3}=\frac{20}{9}.$$ ◀

4 pavyzdys. Keisdami kintamąjį apskaičiuosime integralus:

4.1. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

▶ Pakeičiame kintamąjį $\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+3x}=t,\ x=\dfrac{t^2-1}{3}, \\ dx=\dfrac{2}{3}tdt,\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline t & 1 & 4 \end{array}\end{array}\right\}$.

Tada $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\int\limits_1^4 \frac{\left(\frac{t^2-1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t}=\frac{2}{9}\int\limits_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}-4+1\right)=4.$$ ◀

4.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. Keitinys: $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\quad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}\end{array}\right\}$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\limits_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\limits_0^1 \frac{d\left(t+1\right)}{t+1}=\ln\left|t+1\right|\ \Big|_0^1=\ln 2.$$ ◀

4.3. $\int\limits_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\left\{\begin{array}{l}x=\sin t,\quad dx=\cos tdt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}\end{array}\right\}$.

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\left(1-\sin^2 t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t dt.$$

Pasinaudosime formule:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } & n-\text{lyginis};\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ kai } & n-\text{nelyginis}.\end{cases}$$

Taigi $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t dt=\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t dt=\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{32}\pi$, todėl

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{3}{16}\pi-\frac{5}{32}\pi=\frac{\pi}{32}. \blacktriangleleft$$

5 pavyzdys. Integravimo dalimis metodu apskaičiuosime integralus:

5.1. $\int_0^3 x\,\mathrm{arctg}x dx.$ $\left\{u=\mathrm{arctg}x,\ du=\frac{1}{1+x^2}dx,\ dv=xdx,\quad v=\frac{x^2}{2}\right\}.$

$$\int_0^3 x\,\mathrm{arctg}x dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x\ \Bigg|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}3-\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}3-\frac{1}{2}\left(x-\mathrm{arctg}\,x\right)\Big|_0^3=$$

$$=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}3=5\mathrm{arctg}3-\frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$

5.2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$. Kadangi funkcija $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos^2 x}$ – lyginė, tai

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx. \quad \left\{\begin{matrix} u = x,\ du = dx,\ dv = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx, \\ v = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \end{matrix}\right\}.$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\left(\frac{x}{\cos x}\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} \right) = 2\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\pi}{3} - 2\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}. \ \blacktriangleleft$$

3.9. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite integralus taikydami Niutono ir Leibnico formulę:

1.1. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

1.2. $\int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x\,dx$.

1.3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$.

1.4. $\int\limits_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,dx$.

1.5. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

1.6. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

1.7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

1.8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\cdot\sin 2x\,dx$.

1.9. $\displaystyle\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

1.10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

2. Įvertinkite integralus:

2.1. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

2.2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{xdx}{x^2+1}$.

2.3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

2.4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

3. Apskaičiuokite funkcijų vidutines reikšmes nurodytose atkarpose:

3.1. $f(x)=x^2,\quad x\in[0;1]$.

3.2. $f(x)=\sin^2 x\ ,\quad x\in[0;\pi]$.

3.3. $f(x)=10+2\sin x+3\cos x, x\in[0;2\pi]$.

3.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x},\quad x\in[1;1{,}5]$.

4. Keisdami kintamąjį, apskaičiuokite integralus:

4.1. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x+1)^4}\,dx.$

4.2. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

4.3. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,dx$.

4.4. $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

4.6. $\displaystyle\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

4.7. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\,dx$.

4.8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx$.

4.9. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

4.10. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

5. Integravimo dalimis metodu apskaičiuokite integralus:

5.1. $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

5.2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

5.3. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

5.4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

5.5. $\int\limits_1^{2} (3x+2)\ln x\,dx$.

5.6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$.

Atsakymai

1.1. $\frac{7}{72}$. **1.2.** $\frac{1}{5}(e-1)^5$. **1.3.** $\frac{2}{9}$. **1.4.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$. **1.5.** 0. **1.6.** $\frac{\pi}{6}$.

1.7. $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **1.8.** $\frac{2}{7}$. **1.9.** $\frac{\pi}{6}$. **1.10.** $e-\sqrt{e}$.

2.1. $\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}} \le \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **2.2.** $\frac{2}{5} \le \int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$. **2.3.** $\frac{\pi}{16} \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{10}$.

2.4. $\frac{2}{3} \le \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.1.** $\frac{1}{3}$. **3.2.** $\frac{1}{5}$. **3.3.** 10. **3.4.** $2\ln\frac{6}{5}\approx 0{,}365$. **4.1.** $\frac{1}{24}$.

4.2. $\frac{4-\pi}{2}$. **4.3.** $0{,}8\left(2\sqrt[4]{2}-1\right)$. **4.4.** $\frac{81\pi}{8}$. **4.5.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **4.6.** $\frac{1}{2}$. **4.7.** $\frac{5}{16}\pi$. **4.8.** $\frac{8}{35}$.

4.9. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **4.10.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. **5.1.** 1. **5.2.** $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **5.3.** $1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

5.4. $\frac{\pi}{2}-1$. **5.5.** $10\ln 2-\frac{17}{4}$. **5.6.** $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.

4. NETIESIOGINIAI INTEGRALAI

4.1. Netiesioginiai integralai su begaliniais integravimo rėžiais

Apibrėždami integralą $\int_a^b f(x)dx$, funkciją $f(x)$ laikėme tolydžia atkarpoje $[a; b]$, o integravimo rėžius – baigtiniais. Apibrėžtinio integralo sąvoką apibendrinsime dviem kryptimis, tardami, kad integravimo rėžiai yra begaliniai arba, kad pointegralinė funkcija turi begalinį trūkį. Šiame skyrelyje nagrinėsime integralus su begaliniais rėžiais.

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ apibrėžta ir tolydi visuose intervalo $[a; +\infty)$ taškuose. Tuomet ji integruojama bet kurioje atkarpoje $[a; b]$, $b > a$. Vadinasi, integralas

$$\int_a^b f(x)dx$$

turi prasmę. Nagrinėsime šio integralo ribą, kai $b \to +\infty$.

1 apibrėžimas. Integralo $\int_a^b f(x)dx$ riba, kai $b \to +\infty$ vadinama funkcijos $f(x)$ netiesioginiu integralu intervale $[a; +\infty)$ ir žymima taip:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

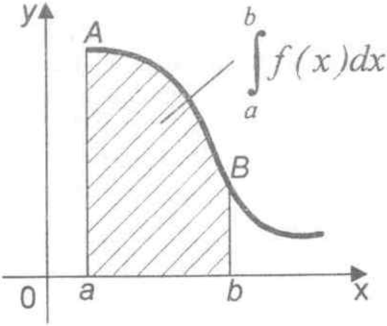
Jei ši riba baigtinė, tai sakome, kad netiesioginis integralas $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguoja. Priešingu atveju, kai minėtoji riba yra begalinė arba neegzistuoja, sakome, kad netiesioginis integralas diverguoja.

Išsiaiškinsime netiesioginio integralo geometrinę prasmę, kai $f(x) \geq 0$. Jeigu integralas $\int_a^b f(x)dx$ reiškia figūros $aABb$, apribotos kreivės $y = f(x)$, ašies Ox ir tiesių $x = a$, $x = b$ (4.1 pav.) plotą, tai netiesioginis integralas $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ reiškia begalinės figūros, apribotos kreivės $y = f(x)$, ašies Ox ir tiesės $x = a$ (4.2 pav.), plotą.

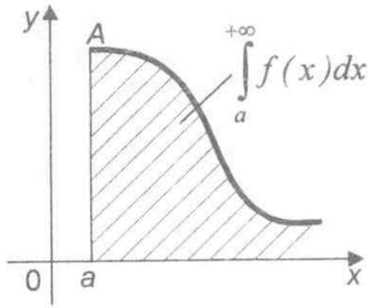
Analogiškai apibrėžiame:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx\,.$$



4.1 pav.



4.2 pav.

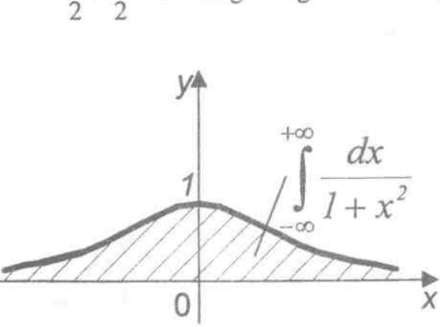
1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (4.3 pav.).

▶ Remdamiesi apibrėžimu, galime užrašyti, kad

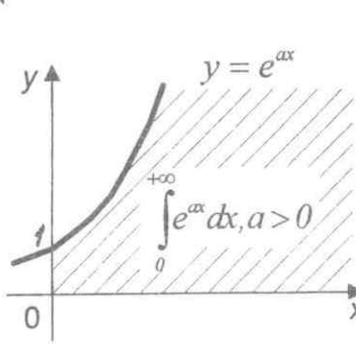
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} x\,\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\,\Big|_{0}^{b} = -\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b =$$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. Taigi integralas konverguoja. ◀



4.3 pav.



4.4 pav.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_0^{+\infty} e^{ax}dx, \quad a>0$ (4.4 pav.).

▶ $\int\limits_0^{+\infty} e^{ax}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{ax}dx = \frac{1}{a}\lim\limits_{b\to+\infty} e^{ax}\Big|_0^b =$

$= \frac{1}{a}\lim\limits_{b\to+\infty} e^{ax}\Big|_0^b = \frac{1}{a}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{ab}-1\right) = +\infty$. Integralas diverguoja. ◀

Šiuose pavyzdžiuose integralas buvo apskaičiuojamas, suradus pirmykštę funkciją, o po to – jos ribą. Abu šiuos momentus galima išreikšti viena formule.

Kadangi funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a;\, b]$, tai šioje atkarpoje egzistuoja jos pirmykštė funkcija $F(x)$. Todėl, remiantis Niutono ir Leibnico formule,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Iš šios lygybės aišku, kad netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguoja tada ir tik tada, kai egzistuoja baigtinė riba

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty),$$

tuomet

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a).$$

Dažnai pakanka tik ištirti, ar netiesioginis integralas konverguoja, ar diverguoja, neapskaičiuojant jo reikšmės. Tam tikslui be įrodymo suformuluosime teoremas, kurios vadinamos palyginimo požymiais.

1 teorema. Jeigu su visomis $x \ge a$ reikšmėmis teisingos nelygybės

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)$$

ir jeigu integralas $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ konverguoja, tai konverguoja ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, be to,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

2 teorema. Jeigu su visomis $x \ge a$ reikšmėmis teisingos nelygybės

$$0 \le \varphi(x) \le f(x)$$

ir jeigu integralas $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ diverguoja, tai diverguoja ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Šiose teoremose kalbama apie neneigiamų funkcijų netiesioginius integralus. Jeigu funkcija $f(x)$ nagrinėjamame intervale keičia ženklą, tai jai tinka tokia teorema.

3 teorema. Jeigu integralas $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ konverguoja, tai konverguoja ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Tačiau, konverguojant integralui $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, integralas $\int\limits_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\,dx$ nebūtinai turi konverguoti.

2 apibrėžimas. Jeigu, konverguojant integralui $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, konverguoja ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, tai integralas $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ vadinamas absoliučiai konverguojančiu.

Tiriant integralo $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergavimą, iš anksto nėra žinoma, su kokia funkcija reikia palyginti pointegralinę funkciją. Labai dažnai palyginimui naudojama laipsninė funkcija $y=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Išnagrinėsime integralą

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (a>0).$$

Tarkime, kad $\alpha \neq 1$; tada

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_a^{+\infty}.$$

Jeigu $\alpha>1$, tai $\alpha-1>0$ ir $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \to 0$, kai $x \to +\infty$, todėl $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$.

Taigi integralas konverguoja.

Jeigu $\alpha<1$, tai $\alpha-1<0$, $1-\alpha>0$ ir $x^{1-\alpha} \to +\infty$, kai $x \to +\infty$, todėl integralas diverguoja.

Kai $\alpha = 1$, tai

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty .$$

Vadinasi, integralas $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguoja, kai $\alpha > 1$, ir diverguoja, kai $\alpha \le 1$.

3 pavyzdys. Ištirsime integralo $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ konvergavimą.

▸ Kai $x \ge e$, tai $\ln x \ge 1$, todėl $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \ge \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Kadangi $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, tai integralas $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ diverguoja, tuomet, remiantis 2 teorema, diverguoja ir integralas

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx . \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Ištirsime integralo $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ konvergavimą.

▸ Pointegralinė funkcija intervale $[1,+\infty)$ keičia ženklą. Kadangi $|\cos x| \le 1$, tai

$$\left| \frac{\cos x}{x^3} \right| \le \frac{1}{x^3} .$$

Šiame pavyzdyje $\alpha = 3 > 1$, tai integralas $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ konverguoja, tuomet, remiantis 1 teorema, integralas $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^3} \right| dx$ irgi konverguoja.

Remiantis 3 teorema ir 2 apibrėžimu integralas $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ konverguoja absoliučiai. ◂

4.2. Neaprėžtųjų funkcijų netiesioginiai integralai

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $(a; b]$, o šio intervalo taške $x = a$ turi begalinį trūkį, t.y. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$. Atkarpoje $[a; b]$ ši funkcija neintegruojama, tačiau atkarpoje $[a+\varepsilon; b]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$ ji jau yra integruojama.

Apibrėžimas. Integralo $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ riba $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ vadinama funkcijos $f(x)$ netiesioginiu integralu $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Remdamiesi šiuo apibrėžimu, galime užrašyti

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Jeigu riba $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ yra baigtinė, tai sakome, kad integralas $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ konverguoja, priešingu atveju – diverguoja.

Jeigu funkcija $f(x)$ turi begalinį trūkį, kai $x = b$, t.y. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, tai

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Jeigu funkcija $f(x)$ turi begalinį trūkį vidiniame atkarpos $[a; b]$ taške $x = c$ $(a < c < b)$, tai

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0. \qquad (1)$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ (4.5 pav.).

▸ Funkcija $y = \frac{1}{x^2}$ turi begalinį trūkį taške $x = 0$, nes $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Remdamiesi (1) lygybe, galime užrašyti, kad

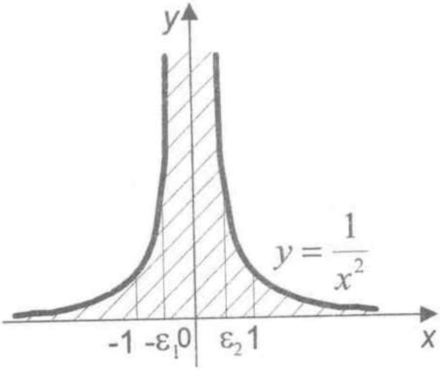
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1}-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon_2}^{1}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{0-\varepsilon_1}+1\right)-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(1-\frac{1}{0+\varepsilon_2}\right)=+\infty.$$ Integralas diverguoja. ◄

Jeigu, apskaičiuodami integralą, neatsižvelgtume į funkcijos trūkio tašką $x=0$, tai gautume

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2.$$

Šis rezultatas, aišku, yra klaidingas, nes teigiamos funkcijos integralas negali būti neigiamas.



4.5 pav.

Sakykime, kad b – funkcijos $f(x)$ begalinio trūkio taškas ir funkcija $f(x)$ intervale $[a; b)$ turi pirmykštę funkciją $F(x)$. Tuomet

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)-F(a).$$

Taigi netiesioginio integralo egzistavimas ekvivalentus baigtinės ribos $\lim_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)$ egzistavimui.

Jeigu ši riba egzistuoja, tad ją galima laikyti pirmykštės funkcijos $F(x)$ reikšme taške b, tuomet $F(x)$ bus tolydi visoje atkarpoje $[a; b]$. Vadinasi, kai $F(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai netiesioginį integralą apskaičiuojame taikydami Niutono ir Leibnico formulę

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Ta pati formulė tinka ir tada, kai trūkio taškas yra atkarpos viduje arba kai jų yra keli, svarbu tik, kad pirmykštė funkcija būtų tolydi visuose atkarpos [a; b] taškuose.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

▸ Pointegralinė funkcija $y=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ taške $x=1$ turi begalinį trūkį:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\int_1^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\, d(\ln x)=2\sqrt{\ln x}\ \Big|_1^e .$$

Kadangi pirmykštė funkcija $2\sqrt{\ln x}$ tolydi atkarpoje $[1;\,e]$, tai galima taikyti Niutono ir Leibnico formulę. Todėl

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln x}\ \Big|_1^e=2\left(\sqrt{\ln e}-\sqrt{\ln 1}\right)=2 .$$ ◂

Tiriant neaprėžtųjų funkcijų netiesioginių integralų konvergavimą, galima suformuluoti teoremas, analogiškas toms, kurios buvo suformuluotos integralams su begaliniais rėžiais.

1 teorema. Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $\varphi(x)$ intervalo $[a;\,b)$ taške $x=b$ turi begalinį trūkį ir su visais $x\neq b$ iš šio intervalo teisingos nelygybės

$$0\le f(x)\le \varphi(x),$$

tai, konverguojant integralui $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, konverguos ir integralas $\int_a^b f(x)\,dx$.

2 teorema. Jeigu, funkcijos $f(x)$ ir $\varphi(x)$ intervalo $[a;\,b)$ taške $x=b$ turi begalinį trūkį ir su visais $x\neq b$ iš šio intervalo teisingaos nelygybės

$$0\le \varphi(x)\le f(x),$$

tai diverguojant integralui $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, diverguos ir integralas $\int_a^b f(x)\,dx$.

3 teorema. Jeigu funkcija $f(x)$ intervale $[a;\,b)$ keičia ženklą ir šio intervalo taške $x=b$ turi begalinį trūkį, o netiesioginis integralas $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konverguoja, tai konverguoja ir integralas $\int_a^b f(x)\,dx$.

Tirdami integralo $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergavimą, labai dažnai palyginimui naudojame funkciją $y=\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}$.

Išnagrinėsime integralą $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(b>a)$. Tarkime, kad $\alpha \neq 1$; tuomet

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(1-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} \Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}}.$$

Jeigu $\alpha>1$, tai $\alpha-1>0$ ir $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \to +\infty$, kai $\varepsilon\to 0$, todėl integralas diverguoja. Jeigu $\alpha<1$, tai $\alpha-1<0$ ir $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} = \varepsilon^{1-\alpha} \to 0$, kai $\varepsilon \to 0$, todėl $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Taigi integralas konverguoja.

Kai $\alpha=1$, tai

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(b-a) - \ln\varepsilon\right) = +\infty.$$

Vadinasi, integralas $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konverguoja, kai $\alpha<1$ ir diverguoja, kai $\alpha \geq 1$.

3 pavyzdys. Ištirsime integralo $\int_0^{1,5} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergavimą.

▸ Funkcija $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ yra trūki taške $x=0$. Bet, kai $x \in (0;1,5]$, tai

$$\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Kadangi $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, tai integralas $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konverguoja. Tuomet, remiantis 1 teorema, integralas $\int_0^{1,5} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguoja. ◂

4 pavyzdys. Ištirsime integralo $\int_0^1 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx$ konvergavimą.

▸ Funkcija $y=\frac{2+\sin x}{(x-1)^2}$ yra trūki taške $x=1$. Kadangi su visomis x reikšmėmis $2+\sin x \ge 1$, tai $\frac{2+\sin x}{(x-1)^2} \ge \frac{1}{(x-1)^2}$.

Kadangi šiame pavyzdyje $\alpha = 2 > 1$, tai integralas $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ diverguoja. Tuomet, remiantis 2 teorema, integralas $\int_0^1 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx$ diverguoja. ◂

4.3. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Apskaičiuosime netiesioginius integralus su begaliniais rėžiais:

1.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Big|_0^b =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 0}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}^2 b = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Taigi integralas konverguoja. ◂

1.2. $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b$. Kadangi $\lim_{b\to+\infty} \sin b$ neegzistuoja, tai integralas diverguoja. ◂

1.3. $$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.\ \left\{\begin{array}{c} x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & \sqrt{2} & +\infty \\ \hline t & 1/\sqrt{2} & 0 \end{array} \end{array}\right\}.\ \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$ Integralas konverguoja. ◂

2 pavyzdys. Ištirsime integralų konvergavimą:

2.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$.

▶ Kadangi $\frac{x^3+1}{x^4} > \frac{1}{x}$ ir integralas $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ (čia $\alpha = 1$) diverguoja, tai duotasis integralas diverguoja. ◀

2.2. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$.

▶ Kai $x \geq 2$, tai $0 < \arcsin\frac{1}{x} \leq \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1$, $1+x\sqrt{x} > x\sqrt{x}$,

$$\frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} < \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ (čia $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) konverguoja, tai ir duotasis integralas konverguoja. ◀

3 pavyzdys. Apskaičiuosime neaprėžtųjų funkcijų netiesioginius integralus:

3.1. $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

▶ Pointegralinė funkcija $y = \frac{1}{x\ln^2 x}$ taške $x = 0$ turi begalinį trūkį, todėl

$$\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{e}} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{e}} \ln^{-2} x\,d(\ln x) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\ln x}\Bigg|_{\varepsilon}^{\frac{1}{e}} =$$

$$= -\frac{1}{\ln\frac{1}{e}} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln\varepsilon} = 1.$$

Taigi integralas konverguoja. ◀

3.2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

▶ Pointegralinė funkcija $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ taške $x=1$ turi begalinį trūkį, todėl

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2}d(x-1)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\varepsilon-1}-1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}-1=+\infty.$$ Integralas diverguoja. ◀

3.3. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

▶ Funkcija $y=\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}$ turi begalinį trūkį atkarpos $[-1;\ 1]$ taške $x=0$. Iš pradžių rasime integralą:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int\left(x^{\frac{2}{5}}+x^{-\frac{3}{5}}\right)dx=\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7}+\frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2}+C=\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}+\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+C.$$

Kadangi pirmykštė funkcija taške $x=0$ jau tolydi, tai galime taikyti Niutono ir Leibnico formulę:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\left(\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}+\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{10}{7}.$$ Integralas konverguoja. ◀

3.4. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

▶ Pointegralinė funkcija $y=\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$ taške $x=2$ turi begalinį trūkį. Įvedame keitinį: $\left\{x=2\sin t,\ dx=2\cos t dt,\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array}\right\}$.

Tada

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t \cos t}{\cos t}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 8\cdot\frac{2!!}{3!!} = \frac{16}{3}.$$ Konverguoja. ◀

4 pavyzdys. Ištirsime integralo $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ konvergavimą.

▶ Pointegralinė funkcija $y = \frac{1}{x^2-4x+3}$ taške $x=3$ turi begalinį trūkį, bet, kai $2 \le x \le 3$, tai $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} > \frac{1}{2(x-3)}$.

Kadangi $\alpha = 1$, tai $\int_2^3 \frac{dx}{2(x-3)}$ diverguoja, tai remiantis 4.2 skyrelio 2 teorema, diverguoja ir $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. ◀

4.4. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite netiesioginius integralus su begaliniais rėžiais:

1.1. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a>0)$.

1.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1.3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

1.4. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$.

1.5. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

1.6. $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

1.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$.

1.8. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$.

1.9. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$.

1.10. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Ištirkite integralų konvergavimą:

2.1. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$.

2.2. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx$.

2.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.

2.4. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$. **2.5.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$. **2.6.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$.

3. Apskaičiuokite neaprėžtųjų funkcijų integralus:

3.1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}x dx$. **3.2.** $\int\limits_{0}^{1} x\ln x dx$. **3.3.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

3.4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$. **3.5.** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. **3.6.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-1}}$.

3.7. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. **3.8.** $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

4. Ištirkite integralų konvergavimą:

4.1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$. **4.2.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{\cos x}{x-2}dx$. **4.3.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

4.4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$. **4.5.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x-\sin x}$. **4.6.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^8}}$.

Atsakymai

1.1. $\frac{1}{a}$. **1.2.** $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$. **1.3.** $1-\ln 2$. **1.4.** $\frac{1}{2}$. **1.5.** -1. **1.6.** $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$. **1.7.** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. **1.8.** Diverguoja. **1.9.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **1.10.** $\frac{1}{2}$. **2.1.** Konverguoja. **2.2.** Konverguoja. **2.3.** Diverguoja. **2.4.** Konverguoja. **2.5.** Konverguoja. **2.6.** Konverguoja. **3.1**. Diverguoja. **3.2.** $-\frac{1}{4}$. **3.3.** $14\frac{4}{7}$. **3.4.** Diverguoja. **3.5.** $-\frac{2}{e}$. **3.6.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **3.7.** $6\sqrt[3]{2}$. **3.8.** Diverguoja. **4.1.** Konverguoja. **4.2.** Diverguoja. **4.3.** Konverguoja. **4.4.** Diverguoja. **4.5.** Diverguoja. **4.6.** Konverguoja.

5. APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAI

5.1. Figūros ploto apskaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje

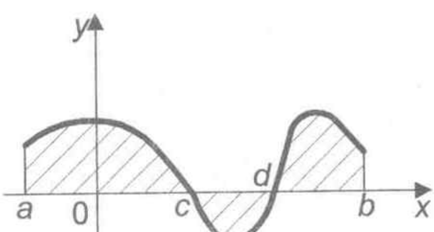
1) Jau žinome, kad kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos $f(x) \geq 0$ grafiko, abscisių ašies ir tiesių $x = a$, bei $x = b$ (žr. 3.1 skyrelį), plotas lygus

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

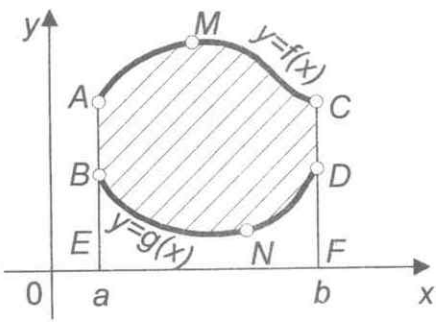
2) Jeigu $f(x) \leq 0$ atkarpoje $[a; b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, tačiau jo modulis lygus figūros plotui. Todėl

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

3) Kai $f(x)$ atkarpoje $[a; b]$ keletą kartų keičia ženklą (5.1 pav.), tai atkarpą



5.1 pav.



5.2 pav.

$[a; b]$ išskaidome į atkarpas $[a; c]$, $[c; d]$, $[d; b]$ ir apskaičiuojame kiekvienos dalies plotą. Tuomet, įvertinę integralų ženklus, gauname:

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

arba trumpiau,

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4) Jeigu figūrą riboja dviejų funkcijų $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ $(f(x)\geq g(x))$ grafikai (5.2 pav.), tai

$$S=S_{EAMCF}-S_{EBNDF}=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

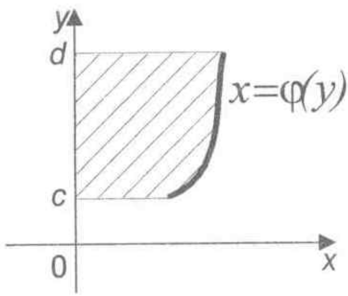
5) Jei kreivė duota parametrinėmis lygtimis $x=x(t)$, $y=y(t)$, čia $t\in[t_1;t_2]$, tai kreivinės trapecijos, apribotos šios kreivės, abscisių ašies ir tiesių $x=a$, $x=b$, plotas lygus

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt;$$

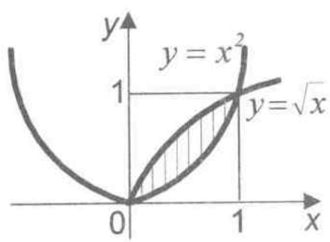
rėžiai t_1 ir t_2 randami iš lygčių $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ $(y(t)\geq 0$, kai $t\in[t_1;t_2])$.

6) Kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos $x=\varphi(y)\geq 0$ grafiko, ordinačių ašies ir tiesių $y=c$, bei $y=d$ (5.3 pav.), plotas randamas:

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$



5.3 pav.



5.4 pav.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime figūros, apribotos kreivių $y=x^2$ ir $y=\sqrt{x}$ (5.4 pav.), plotą.

▸ Pirmiausia rasime tų kreivių susikirtimo taškų abscises. Tuo tikslu sprendžiame lygtį $x^2=\sqrt{x}$; iš čia $x_1=0$, $x_2=1$. Tuomet

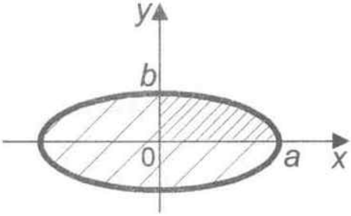
$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\ ◂$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime figūros, apribotos elipsės

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (5.5 \text{ pav.}), \text{ plotą.}$$

▸ Apskaičiuosime plotą tos figūros dalies, kuri yra pirmajame ketvirtyje. Po to gautą rezultatą padauginsime iš 4. Elipsės kanoninę lygtį pakeičiame parametrinėmis lygtimis $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Pirmajame ketvirtyje x kinta nuo 0 iki a, todėl t kinta nuo $\frac{\pi}{2}$ iki 0 (tokias t reikšmes gavome, įrašę į lygtį $x = a\cos t$ vietoj x jo reikšmes 0 ir a). Į formulę

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$ vietoje $y(t)$ įrašysime $y = b\sin t$, o vietoje $x'(t) = -a\sin t$. Tuomet



5.5 pav.

$$S=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\; a\sin t\,dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = ab\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}.$$

Visos figūros, apribotos elipsės, plotas lygus $\frac{\pi ab}{4}\cdot 4=\pi ab$. ◂

5.2. Figūros ploto apskaičiavimas polinėje koordinačių sistemoje

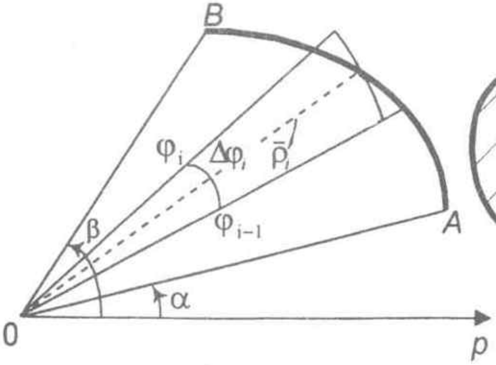
Tarkime, kad polinėmis koordinatėmis duotos kreivės lygtis yra $\rho = f(\varphi)$; čia $f(\varphi)$ – tolydi funkcija, kai $\alpha \le \varphi \le \beta$. Apskaičiuosime plotą išpjovos OAB, kurią riboja kreivė $\rho = f(\varphi)$ ir spinduliai vektoriai $\varphi = \alpha$ ir $\varphi = \beta$ (5.6 pav.).

Šią išpjovą spinduliais vektoriais bet kaip padalykime į n dalių. Rasime išpjovos dalies, apribotos spinduliais φ_{i-1} ir φ_i plotą. Kampą tarp šių spindulių pažymėsime $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Šioje dalyje bet kur nubrėžkime spindulį $\bar{\rho}_i$ ir tą dalį pakeiskime skritulio, kurio centras taške O ir spindulys $\bar{\rho}_i$, išpjova. Jos plotas lygus $\frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2\Delta\varphi_i$.

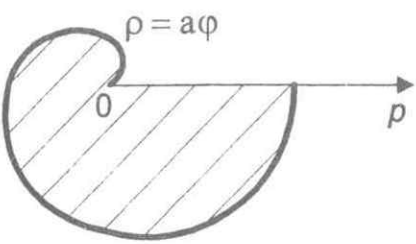
Tokių skritulio išpjovų plotų suma $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i^2\Delta\varphi_i$

bus apytiksliai lygi duotosios figūros plotui. Tikslią ploto reikšmę gausime apskaičiavę ribą, kai $\lambda = \max \Delta\varphi_i \to 0$, $1 \le i \le n$. Kadangi ši suma yra funkcijos $\rho^2 = (f(\varphi))^2$ integralinė suma, tai jos riba, kai $\lambda \to 0$, lygi apibrėžtiniam integralui $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$. Taigi figūros plotas

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi .$$



5.6 pav.



5.7 pav.

Pavyzdys. Apskaičiuosime figūros, apribotos vienos Archimedo spiralės $\rho = a\varphi$ vijos ir polinės ašies (5.7 pav.), plotą.

▶ Pirmoji vija gaunama, kampui φ pasikeitus nuo 0 iki 2π. Todėl

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3} . \blacktriangleleft$$

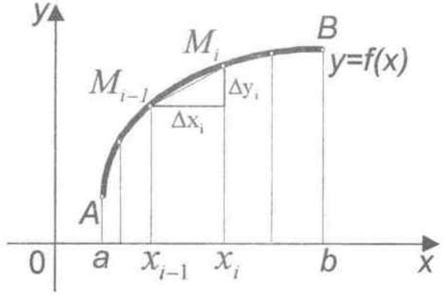
5.3. Kreivės lanko ilgis

1. Kreivės lanko ilgis stačiakampėje koordinačių sistemoje. Tarkime, kad stačiakampėse koordinatėse duota kreivė, kurios lygtis $y = f(x)$. Rasime šios kreivės lanko AB ilgį (5.8 pav.). Pirmiausia apibrėšime, ką vadiname kreivės lanko ilgiu.

Tuo tikslu lanką AB bet kaip taškais $A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$ padalykime į n dalių. Sakykime, kad šių taškų abscisės yra $a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$. Per gautus taškus išveskime stygas

$AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{i-1}M_i, \ldots, M_{n-1}B$. Stygos $M_{i-1}M_i$ ilgį pažymėkime Δs_i. Tuomet laužtės, įbrėžtos į lanką AB, ilgis bus lygus $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$. Pažymėkime $\max \Delta x_i = \lambda$.

Apibrėžimas. Kreivės lanko AB ilgiu L vadinama riba, prie kurios artėja įbrėžtos į tą kreivę laužtės ilgis, kai $\lambda \to 0$.



5.8 pav.

Taigi

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$

Dar tarkime, kad funkcija $f(x)$ ir jos išvestinė $f'(x)$ atkarpoje $[a; b]$ tolydžios. Pažymėkime:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Pagal Pitagoro teoremą

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \, \Delta x_i .$$

Skirtumui $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ pritaikome Lagranžo teoremą. Tuomet

$$\Delta y_i = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i; \quad c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Todėl

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)\Delta x_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

ir

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \quad \Delta x_i .$$

Vadinasi,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \, \Delta x_i .$$

Kadangi $f'(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ irgi tolydi, todėl egzistuoja parašytos integralinės sumos riba, kuri lygi apibrėžtiniam integralui:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b ds\,;$$

čia $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Dydis ds vadinamas kreivės lanko ilgio diferencialu.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivės $y=x^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 4$ lanko ilgį.

▸ Randame $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$. Tuomet

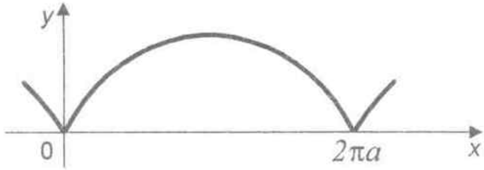
$$L=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).\ ◂$$

2. Kreivės lanko ilgis, kai kreivė duota parametrinėmis lygtimis. Tarkime, kad kreivės lygtys yra tokios: $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1;t_2]$; čia $x\ (t)$ ir $y\ (t)$ – tolydžios atkarpoje $[t_1;t_2]$ funkcijos, turinčios tolydžias išvestines. Tuomet $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$, $dx=x'_t dt$ ir $\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$. Vadinasi, jeigu $x\ (t_1)=a$, $x\ (t_2)=b$, tai

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime cikloidės $x=a\,(t\ -\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ pirmosios arkos ilgį (5.9 pav.).



5.9 pav.

▸ Pirmoji cikloidės arka gaunama, kai parametras t kinta nuo 0 iki 2π. Rasime:

$$x_t' = a(1-\cos t), \quad y_t' = a\sin t,$$

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2(1-2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t} = \sqrt{2a^2(1-\cos t)} =$$

$$= \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2},$$

nes $\sin\frac{t}{2} \ge 0$, kai $t \in [0;2\pi]$.

Tuomet

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \blacktriangleleft$$

3. Kreivės lanko ilgis polinėje koordinačių sistemoje. Tarkime, kad kreivės lygtis polinių koordinačių sistemoje yra $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$. Šią lygtį galima pakeisti parametrinėmis lygtimis, naudojant ryšio tarp stačiakampių ir polinių koordinačių formules $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Tuomet, įrašę į šias lygtis vietoje ρ dydį $f(\varphi)$, gauname

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \quad y = f(\varphi)\sin\varphi;$$

čia parametras φ vaidina parametro t vaidmenį. Tuomet

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Randame:

$$x_\varphi' = \rho_\varphi'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad y_\varphi' = \rho_\varphi'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

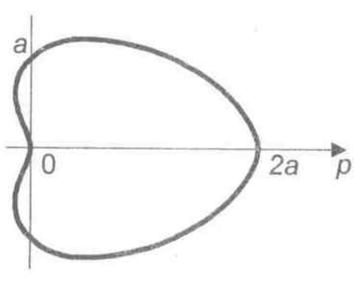
todėl

$$\sqrt{x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}$$

ir

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta ds;$$

čia $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi$.



5.10 pav.

3 pavyzdys. Apskaičiuosime kardioidės $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (5.10 pav.) ilgį.

▸ Pirmiausia apskaičiuosime viršutinio lanko, kuris gaunamas, kai polinis kampas φ kinta nuo 0 iki π, ilgį. Turime:

$$\rho'_{\varphi} = -a\sin\varphi, \quad \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}} =$$

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\varphi} = \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)} =$$

$$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

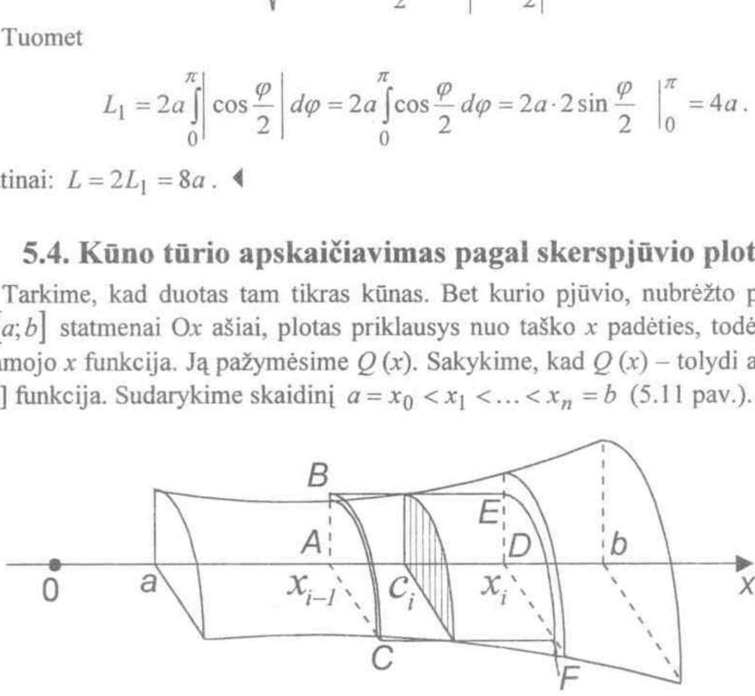
Tuomet

$$L_1 = 2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Galutinai: $L = 2L_1 = 8a$. ◄

5.4. Kūno tūrio apskaičiavimas pagal skerspjūvio plotą

Tarkime, kad duotas tam tikras kūnas. Bet kurio pjūvio, nubrėžto per tašką $x \in [a;b]$ statmenai Ox ašiai, plotas priklausys nuo taško x padėties, todėl jis bus kintamojo x funkcija. Ją pažymėsime $Q(x)$. Sakykime, kad $Q(x)$ – tolydi atkarpoje $[a;b]$ funkcija. Sudarykime skaidinį $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ (5.11 pav.).



5.11 pav.

Bet kur atkarpoje $[x_{i-1};x_i]$ parinkime tašką c_i ir per šį tašką nubrėžkime pjūvį, statmeną Ox ašiai. Šio pjūvio plotas bus lygus $Q(c_i)$. Laikydami šį pjūvį pagrindu, nubrėžiame cilindrinį kūną $ABCDEF$, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Ox. To kūno tūris bus lygus

$$Q(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = Q(c_i)\Delta x_i.$$

Tuomet duotojo kūno tūris apytiksliai lygus tokių cilindrinių kūnų tūrių sumai:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} Q(c_i)\Delta x_i .$$

Tikslią tūrio reikšmę gausime apskaičiavę ribą, kai $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(c_i)\Delta x_i .$$

Prisiminę, kaip integralinės sumos riba formaliai keičiama integralu, gauname, kad

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx . \tag{1}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime kūno, apriboto paraboloido $z = x^2 + \frac{3}{2}y^2$ ir plokštumos $z = 4$, tūrį (5.12 pav.).

▸ Jeigu paraboloidą kirstume plokštuma $z = \text{const}$, tai pjūvyje gautume elipsę

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = z ,$$

kurios kanoninė lygtis

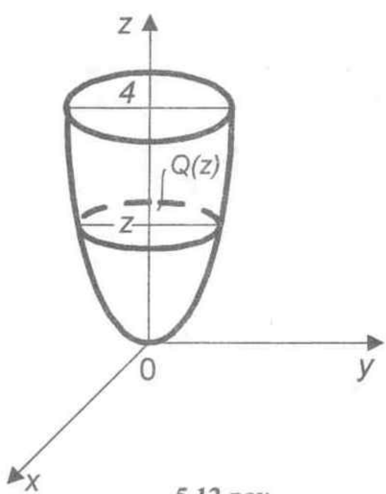
$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}z} = 1 .$$

Tos elipsės pusašės lygios $a = \sqrt{z},\ b = \sqrt{\frac{2}{3}z}$.

Kadangi $Q(z) = \pi ab$ (žr.4.1 skyrelio 2 pavyzdį), tai

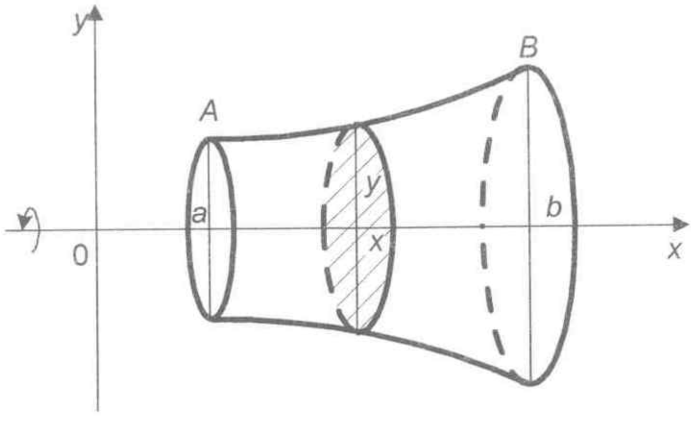
$$Q(z) = \pi\sqrt{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}z} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,z .$$

Tuomet



5.12 pav.

$$V = \int_0^4 \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,z\,dz = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3} . \blacktriangleleft$$

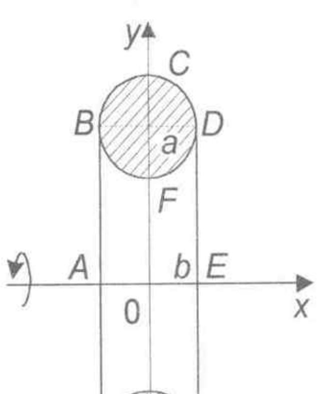


5.13 pav.

(1) formulę panaudosime, išvesdami sukinio tūrio formulę. Sakykime, kad sukinys gautas, sukant kreivinę trapeciją *aABb* apie *Ox* ašį (5.13 pav.). Pjūvis, nubrėžtas per tašką *x*, statmenai ašiai *Ox*, yra skritulys, kurio spindulys lygus $y = f(x)$. Todėl

$$Q(x) = \pi y^2 = \pi\left(f(x)\right)^2 \text{ ir}$$

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx .$$



5.14 pav.

2 pavyzdys. Skritulys, apribotas apskritimo $x^2 + (y-a)^2 = b^2 \quad (a > b)$, sukamas apie *Ox* ašį (5.14 pav.). Apskaičiuosime gauto sukinio, vadinamo toru, tūrį.

▸ Toro tūris lygus dviejų sukinių tūrių skirtumui: pirmasis gaunamas sukant kreivinę trapeciją *ABCDE*, o antrasis – sukant trapeciją *ABFDE*. Išsprendžiame lygtį $x^2 + (y-a)^2 = b^2$ kintamojo *y* atžvilgiu:

$$(y-a)^2 = b^2 - x^2, \quad y - a = \pm\sqrt{b^2 - x^2} ,$$

$$y = a \pm \sqrt{b^2 - x^2} .$$

Lanko BCD lygtis $y_1 = a + \sqrt{b^2 - x^2}$, o lanko BFD – $y_2 = a - \sqrt{b^2 - x^2}$. Tuomet toro tūris bus lygus

$$V = 2\pi\left(\int_0^b y_1^2 dx - \int_0^b y_2^2 dx\right) = 2\pi\int_0^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\int_0^b\left(\left(a + \sqrt{b^2 - x^2}\right)^2 - \left(a - \sqrt{b^2 - x^2}\right)^2\right)dx = 8\pi\, a\int_0^b \sqrt{b^2 - x^2}\; dx.$$

Įvedę keitinį $x = b\sin t$, $dx = b\cos t dt$, gauname:

$$V = 8\pi\, ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 8\pi\, ab^2 \cdot \frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi^2 ab^2. \blacktriangleleft$$

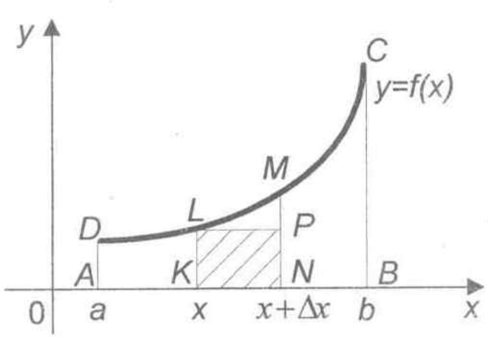
5.5. Apibrėžtinio integralo taikymo schema

Šiame skyrelyje paaiškinsime, kaip dažniausiai praktikoje taikomas apibrėžtinis integralas.

Sakykime, kad tam tikras dydis Q susijęs su atkarpa $[a; b]$ ir turi tokią savybę: kiekvieną atkarpos $[a; b]$ dalį $[\alpha; \beta]$ atitinka tam tikra dydžio Q dalis, be to, jei atkarpa $[\alpha; \beta]$ yra sudaryta iš dalių $[\alpha; \gamma]$ ir $[\gamma; \beta]$, tai

$$Q[\alpha; \beta] = Q[\alpha; \gamma] + Q[\gamma; \beta].$$

Ši lygybė rodo, kad dydis Q turi adityvumo savybę.



5.15 pav.

Kaip dydžio Q pavyzdį galime paminėti kreivinės trapecijos $ABCD$ plotą (5.15 pav.), lanko CD ilgį, sukinio, gauto sukant šią trapeciją apie Ox ašį, tūrį, nes visi šie trys dydžiai yra „atkarpos $[a; b]$ funkcijos", be to, turi minėtą savybę.

Uždavinio tikslas – apskaičiuoti dydžio Q reikšmę, atitinkančią visą atkarpą $[a; b]$.

Tarkime, kad „elementariąją atkarpą" $[x; x+\Delta x]$ atitinka dydžio Q „elementas" ΔQ. Šį elementą stengiamės pakeisti apytiksliu reiškiniu $q(x)\Delta x$, kuris būtų tiesinis Δx atžvilgiu, o nuo ΔQ skirtųsi ne daugiau kaip nykstamu dydžiu, be to, aukštesnės eilės, negu Δx. Tuomet bus teisinga lygybė

$$\Delta Q \approx q(x)\Delta x,$$

kuri bus tuo tikslesnė, juo mažesnis Δx.

Štai, pavyzdžiui, apskaičiuodami kreivinės trapecijos plotą, elemetariąją juostelę $KLMN$ pakeičiame įbrėžtiniu stačiakampiu $KLPN$, kurio plotas lygus $f(x)\Delta x$, todėl šiame pavyzdyje

$$\Delta Q \approx f(x)\Delta x.$$

Atkarpą $[a; b]$ taškais $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ suskaidome į elementarias atkarpas $[a; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; b]$. Tuomet kiekvieną atkarpą $[x_{i-1}; x_i]$ atitiks dydžio Q dalis, apytiksliai lygi $q(x_i)\Delta x_i$, o visas dydis Q bus apytiksliai išreiškiamas suma

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i.$$

Ši lygybė bus tuo tikslesnė, kuo smulkesnės elementariosios atkarpos, todėl aišku, kad Q bus minėtos sumos riba. Vadinasi, Q bus išreiškiamas apibrėžtiniu integralu

$$Q = \int_a^b q(x)\,dx.$$

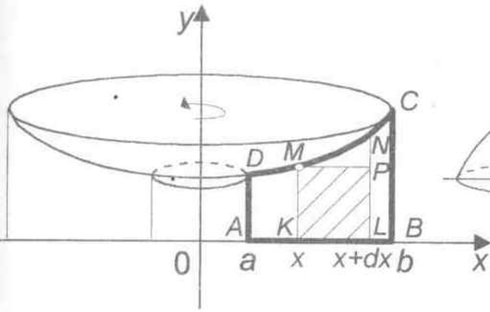
Paprastai lygybė $\Delta Q \approx q(x)\Delta x$ rašoma šitaip:

$$dQ = q(x)dx,$$

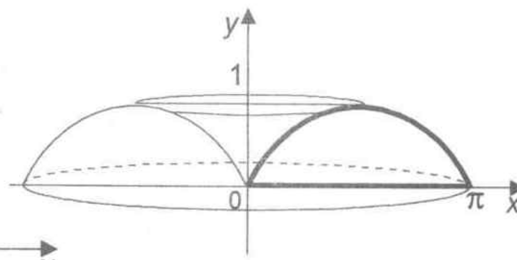
ir po to, norint gauti Q išraišką, belieka tuos „elementus" dQ „susumuoti".

5.6. Sukinio tūris

Kreivinė trapecija $ABCD$, apribota funkcijos $y = f(x) \geq 0$ grafiko, abscisių ašies ir tiesių $x = a$, $x = b$ (5.16 pav.) sukama apie ašį Oy. Apskaičiuosime gauto sukinio tūrį.



5.16 pav.



5.17 pav.

Išskiriame elementą $KMPL$ ir apskaičiuojame sukinio, gauto sukant šį elementą apie ašį Oy tūrį. Šio sukinio tūris bus lygus dviejų ritinių tūrių skirtumui: pirmojo ritinio spindulys $OK = x$, antrojo – $OL = x + dx$, jų abiejų aukštinė lygi $KM = y$. Todėl elementarusis tūris

$$\Delta V = \pi(x+dx)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi xy dx + \pi y (dx)^2 .$$

Čia $\pi y (dx)^2$ yra aukštesnės eilės nykstamasis dydis negu dx. Atmetę šį dydį, gauname, kad

$$dV = 2\pi xy dx .$$

„Sumuodami" iš čia gauname, kad sukinio tūris

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx . \tag{1}$$

Pavyzdys. Kreivinė trapecija, apribota sinusoidės $y = \sin x$ ir ašies Ox atkarpos $[0;\pi]$, sukama apie ašį Oy (5.17 pav.). Apskaičiuosime gauto sukinio tūrį.

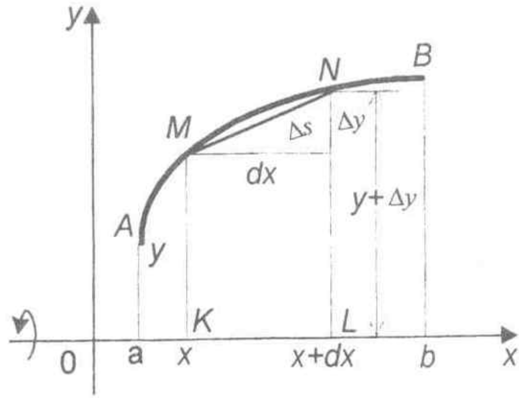
▶ Panaudoję (1) formulę, kai $y = \sin x$, gausime:

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^\pi =$$

$$= 2\pi(-\pi\cos\pi + \sin\pi - \sin 0) = 2\pi^2 . ◀$$

5.7. Sukimosi paviršiaus plotas

1) Tarkime, kad kreivės $y = f(x) \geq 0$ lankas AB, $x \in [a;b]$ (5.18 pav.) sukamas apie ašį Ox, čia $f(x)$ – tolydi, vienareikšmė atkarpoje $[a; b]$ funkcija, turinti tolydžią išvestinę šioje atkarpoje.



5.18 pav.

Apskaičiuosime gauto sukimosi paviršiaus plotą.

Išskiriame kreivės $y = f(x)$ lanko elementą. Jį apytiksliai laikysime lygiu stygai, kurios ilgis Δs. Apskaičiuosime paviršiaus, kuris gaunamas sukant trapecijos $KMNL$ lanką MN apie ašį Ox, plotą. Kadangi gautas paviršius bus apytiksliai nupjautinio kūgio, kurio pagrindų spinduliai $KM = y$ ir $LN = y + \Delta y$, o sudaromoji Δs, šoninis paviršius, tai jo plotas lygus

$$\Delta Q = 2\pi \frac{y + (y + \Delta y)}{2} \Delta s = 2\pi y \Delta s + \pi \Delta y \Delta s .$$

Atmetę nykstamųjų dydžių sandaugą $\pi \Delta y \Delta s$, turime:

$$dQ = 2\pi y ds ,$$

todėl

$$Q = 2\pi \int_a^b y ds .$$

Kadangi

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx ,$$

tai

$$Q = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

2) Jei kreivė duota parametrinėmis lygtimis $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [t_1; t_2], x(t), y(t) \end{cases}$ – tolydžios atkarpoje $[t_1; t_2]$, turinčios tolydžias išvestines, tai

$$Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

3) Jei kreivės lygtis duota polinių koordinačių sistemoje $\rho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, tai

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi;$$

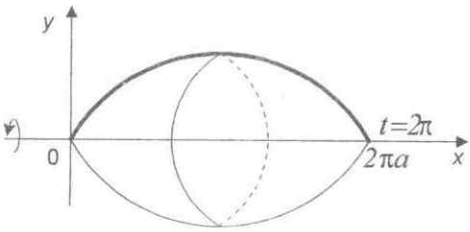
čia $\rho = f(\varphi)$ yra tolydi atkarpoje $[\alpha; \beta]$ ir turi tolydžią išvestinę.

Pavyzdys. Cikloidės $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (5.19 pav.) pirmoji arka sukama apie ašį Ox. Apskaičiuosime gauto sukimosi paviršiaus plotą.

▶ Randame: $x_t' = a(1 - \cos t)$,

$y_t' = a \sin t$, $\sqrt{x_t'^2 + y'^2} = 2a \sin \dfrac{t}{2}$

(žr. 5.3 skyrelio 2 pavyzdį).



5.19 pav.

Iš čia $\quad Q = 2\pi \displaystyle\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\,dt =$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin\frac{t}{2}\,dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16\pi a^2 \left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2. \blacktriangleleft$$

5.8. Apibrėžtinio integralo taikymas mechanikoje

1. Kintamos jėgos darbas. Tarkime, kad materialus taškas, veikiamas kintamos jėgos $F(x)$, juda ašies Ox atkarpa $[a; b]$, be to, jėgos kryptis sutampa su judėjimo kryptimi. Apskaičiuosime darbą, kurį atlieka jėga, perkeldama tašką iš padėties a į padėtį b. Išskiriame elementarųjį kelią nuo taško x iki taško $x + dx$. Jėgos reikšmė taške x bus lygi $F(x)$. Tarkime, kad tokia jos reikšmė išlieka nuo taško x iki $x + dx$. Tuomet elementarusis darbas bus lygus jėgos ir nueito kelio sandaugai: $dA = F(x)dx$; iš čia

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

2. Nevienalyčio strypo masė. Tarkime, kad ašies Ox atkarpoje $[a; b]$ yra nevienalytis strypas, kurio ilginis tankis $\gamma(x)$. Apskaičiuosime to strypo masę.

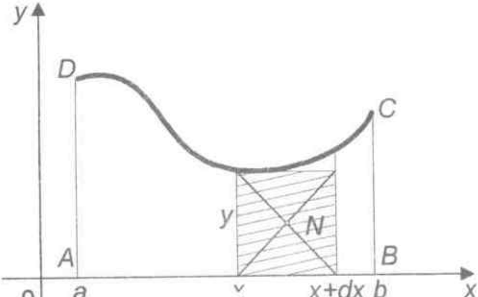
Išskiriame elementariąją strypo dalį dx ir tariame, kad visos tos dalies tankis lygus $\gamma(x)$. Tuomet elementarioji tos dalies masė $dm = \gamma(x)dx$, o viso strypo masė

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx.$$

3. Plokščiosios figūros statiniai momentai ir masės centro koordinatės. Apskaičiuosime plokščios figūros $ABCD$ (5.20 pav.) statinius momentus ir masės centro koordinates.

Žinome, kad materialiojo taško M statinis momentas K kurios nors ašies atžvilgiu lygus md; čia m – taško M masė, d – jo atstumas nuo tos ašies. Jeigu turime sistemą materialiųjų taškų M_i, kurių kiekvieno masė m_i, o atstumas nuo ašies – d_i, tai tokios sistemos statinis momentas išreiškiamas suma:

$$K = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i.$$



5.20 pav.

Tarkime, kad kreivinės trapecijos $ABCD$ masė pasiskirsčiusi tolygiai, todėl jos paviršinis tankis $\gamma = \text{const}$. Išskiriame elementarųjį stačiakampį (jis subrūkšniuotas) ir apskaičiuojame jo elementariąją masę, kuri lygi jo ploto ir tankio γ sandaugai, t.y. $dm = \gamma y dx$.

Toliau dar tarkime, kad visa to elementaraus stačiakampio masė sukoncentruota jo centre N, kurio koordinatės $x+\frac{1}{2}dx$ ir $\frac{1}{2}y$. Kadangi šio taško atstumas iki ašies Ox lygus $\frac{1}{2}y$, o iki ašies Oy – $x+\frac{1}{2}dx$, tai statinių momentų K_x ir K_y elementai lygūs

$$dK_x = \frac{1}{2}y\cdot\gamma\, y\, dx = \frac{1}{2}y^2\gamma\, dx,$$

$$dK_y = \left(x+\frac{1}{2}dx\right)\gamma\, y\, dx = \gamma\, x\, y\, dx + \frac{1}{2}\gamma\, y(dx)^2.$$

Atmetę paskutiniosios lygybės antrąjį dėmenį, gauname:

$$dK_y = \gamma\, x\, y\, dx.$$

Vadinasi,

$$K_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b y^2 dx, \qquad K_y = \gamma\int_a^b xydx.$$

Figūros masę pažymėsime m, o jos masės centro koordinates – x_c ir y_c, tuomet

$$K_y = mx_c \quad \text{ir} \quad K_x = my_c.$$

Iš čia

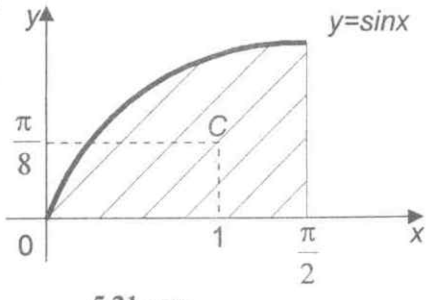
$$x_c = \frac{K_y}{m} = \frac{\gamma\int_a^b xydx}{m} = \frac{\gamma\int_a^b xydx}{\gamma\int_a^b ydx} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, \quad y_c = \frac{K_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b ydx}. \tag{1}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime vienalytės figūros (γ = const), apribotos sinusoidės $y=\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}$ ir ašies Ox atkarpos $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (5.21 pav.), masės centro koordinates.

▸ Panaudoję formules (1), kai

$$y=\sin x,$$

turėsime:



5.21 pav.

$$x_c = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx} = \frac{\left(-x\cos x + \sin x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{-\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}{-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0} = \frac{1}{1} = 1,$$

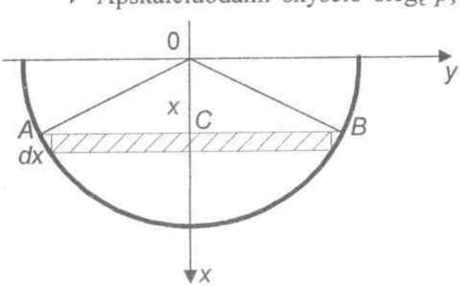
$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx}{1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{8}.$$

Masės centras taške $C\left(1;\frac{\pi}{8}\right)$. ◀

2 pavyzdys. Vertikali plokštelė, turinti pusskritulio formą, panardinta į vandenį taip, kad jos skersmuo yra vandens paviršiuje (5.22 pav.). Apskaičiuosime vandens slėgį į šią plokštelę, jeigu jos skersmuo lygus 6m.

▶ Apskaičiuodami skysčio slėgį p, remsimės Paskalio dėsniu, kuris teigia, kad skysčio slėgis į plokštelę lygus jos plotui S, padaugintam iš panardinimo gylio h ir skysčio tankio γ, t.y. $p = \gamma S h$.

Išskiriame elementariąją plokštelės juostelę, kurios plotas apytiksliai lygus $dS = AB\, dx$. Kadangi apskritimo lygtis $x^2 + y^2 = 9$, tai $CB = y = \sqrt{9-x^2}$.



5.22 pav.

Elementarioji juostelė panardinta gylyje x, todėl slėgio elementas

$$dp = \gamma x dS = \gamma x AB dx = \gamma x \cdot 2CB dx = 2\gamma x\sqrt{9-x^2}\, dx.$$

Tuomet

$$p = 2\gamma\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\, dx = -\frac{2}{3}\gamma\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = 18\gamma. \blacktriangleleft$$

5.9. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Apskaičiuosime figūrų, kurias riboja duotosios kreivės, plotus:

1.1. $xy = 4,\quad y = x,\quad x = 4$ (5.23 pav.).

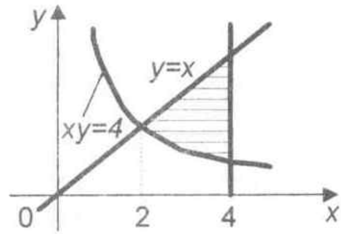
▶ Panaudoję formulę $S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$,

kai $f(x) = x,\quad g(x) = \frac{4}{x},\quad a = 2,\quad b = 4$,

gausime:

$$S = \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| \right) \Bigg|_2^4 =$$

$$= 8 - 4\ln 4 - 2 + 4\ln 2 = 6 - 4\ln 2. \blacktriangleleft$$



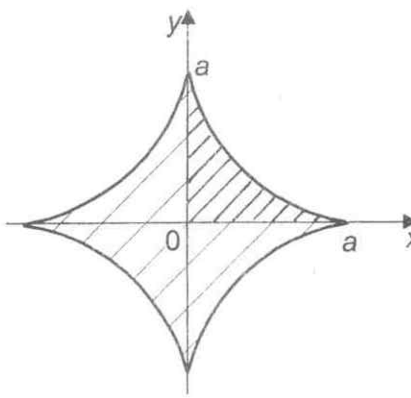
5.23 pav.

1.2. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (astroidė) (5.24 pav.).

▶ Apskaičiuosime plotą tos figūros dalies, kuri yra pirmajame ketvirtyje, o po to gautą rezultatą padauginsime iš 4. Kai x kinta nuo 0 iki a, tai t kinta nuo $\frac{\pi}{2}$ iki 0 (tokias t reikšmes gavome, įrašę į lygtį $x = a\cos^3 t$ vietoje x jo reikšmes 0 ir a). Panaudoję formulę

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt \text{, turėsime:}$$

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,dt =$$



5.24 pav.

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\left(1 - \sin^2 t\right)dt = 3a^2\left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

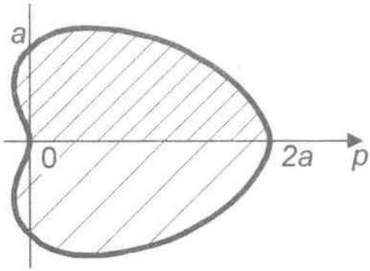
Visos figūros plotas $\quad S = 4S_1 = 4\cdot\frac{3\pi a^2}{32} = \frac{3\pi a^2}{8}$. ◀

1.3. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (5.25 pav.).

▶ Apskaičiuosime plotą pusės figūros. Panaudoję formulę

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\varphi \text{, turėsime:}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 \, d\varphi = = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$



$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\varphi}{2} = t, \quad d\varphi = 2dt, \\ \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & \pi \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array}\right\}.$$

5.25 pav.

$$S_1 = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\, dt = 4a^2\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 4a^2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{4}.$$

$$S = 2S_1 = \frac{3\pi a^2}{2}. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivių lankų ilgius:

2.1. $x = \sqrt{(y+1)^3}, \quad -1 \le y \le 4$.

▶ Panaudoję formulę $L = \int_c^d \sqrt{1+x'^2}\, dy$, kadangi $x' = \frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}$, turėsime:

$$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(y+1)}\, dy = \int_{-1}^{4}\frac{\sqrt{9y+13}}{2}\, dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_{-1}^{4}(9y+13)^{\frac{1}{2}}\, d(9y+13) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{(9y+13)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-1}^{4} = \frac{1}{27}(343-8) = \frac{335}{27}. \blacktriangleleft$$

2.2. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (5.24 pav.).

▶ Kadangi kreivė simetriška abiejų koordinačių ašių atžvilgiu, tai apskaičiuosime jos ilgį pirmajame ketvirtyje ir rezultatą padauginsime iš 4.

$$x_t' = 3a\cos^2 t(-\sin t), \qquad y_t' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Parametras t kinta nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$, todėl $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$,

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \ ◀$$

2.3. $\rho = 3\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 4\pi$.

▶ $\rho' = 3, \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi, \ L = \int_0^{4\pi} \sqrt{9\varphi^2 + 9}\,d\varphi = 3\int_0^{4\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,d\varphi =$

$$= 3\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right)\right)\Bigg|_0^{4\pi} =$$

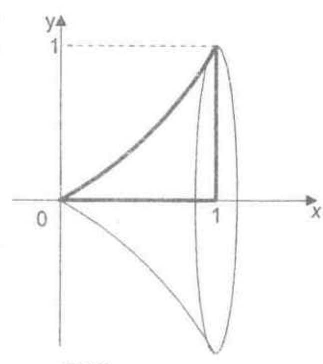
$$= 3\left[2\pi\sqrt{16\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1}\right)\right]. ◀$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime tūrius sukinių, kurie gaunami duotų kreivių apribotas figūras sukant apie nurodytas ašis:

3.1. $y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y = 0, \quad x = 1$; apie ašį Ox (5.26 pav.).

▶ Panaudoję formulę $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$, gausime,

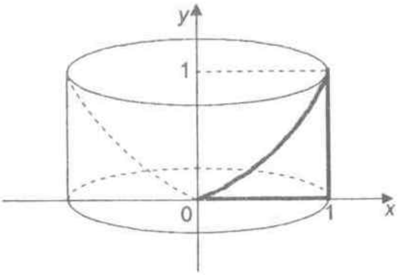
kad $\quad V_x = \pi\int_0^1 x^3 dx = \pi \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. ◀



5.26 pav.

3.2. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = 0$, $x = 1$; apie ašį Oy (5.27 pav.).

▶ Panaudoję formulę



5.27 pav.

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\, dx,$$

turėsime

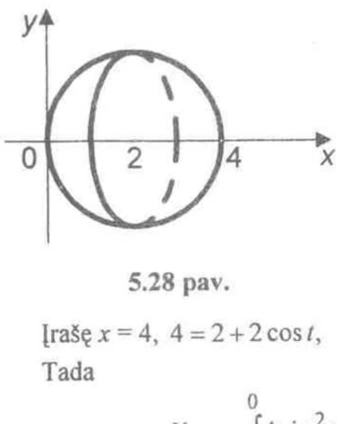
$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} \Bigg|_0^1 = \frac{4}{7}\pi. \blacktriangleleft$$

3.3. $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$; apie ašį Ox (5.28 pav.).

▶ Eliminavę parametrą t, gauname kanoninę lygtį apskritimo

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$



5.28 pav.

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Mūsų atveju

$$y^2 = 4\sin^2 t, \quad dx = -2\sin t dt.$$

Įrašę $x = 0$ į lygybę $x = 2 + 2\cos t$, gausime

$$0 = 2 + 2\cos t, \quad \cos t = -1,\ t = \pi.$$

Įrašę $x = 4$, $4 = 2 + 2\cos t$, $\cos t = 1$, $t = 0$.

Tada

$$V_x = \pi \int_\pi^0 4\sin^2 t\,(-2\sin t)\,dt = 8\pi \int_\pi^0 \left(1 - \cos^2 t\right) d(\cos t) =$$

$$= 8\pi \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_\pi^0 = 8\pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{32\pi}{3}. \blacktriangleleft$$

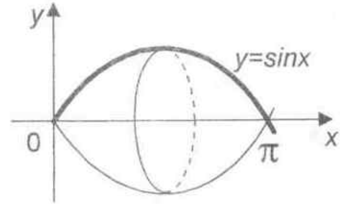
4 pavyzdys. Apskaičiuosime sukimosi paviršiaus plotus, kai duotosios kreivės sukamos apie nurodytas ašis:

4.1. $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$; apie ašį Ox (5.29 pav.).

▶ Panaudoję formulę $Q = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, kai $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $a = 0$, $b = \pi$, turėsime:

$$Q = 2\pi \int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx =$$

$$= -2\pi \int\limits_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos x) =$$



5.29 pav.

$$= -2\pi\left(\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -2\pi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$ ◀

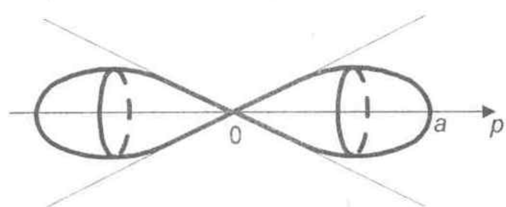
4.2. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; apie polinę ašį (5.30 pav.).

▶ Kadangi paviršius susideda iš dviejų vienodų dalių, tai panaudoję formulę

$$Q = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi,$$

kai $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$\rho' = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},$$



5.30 pav.

apskaičiuosime vienos dalies paviršiaus plotą.

$$Q_1 = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 2\pi a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -2\pi a^2\cos\varphi\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\pi a^2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = 2\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Tada

$$Q = 2Q_1 = 2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$ ◀

5.10. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite figūrų, kurias riboja duotosios kreivės, plotus:

1.1. $y-x^2+1=0,\ x-y+5=0$.

1.2. $y=x^2-1,\ x-y+5=0,\ y=0,\ x\le -1$.

1.3. $y=x^2-3x,\ y=x$.

1.4. $y=4-x^2,\ y=x^2+2x$.

1.5. $y=x^3,\ y=8,\ x=0$.

1.6. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0$.

1.7. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ (cikloidės viena arka) ir abscisių ašis.

1.8. $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ (kilpos plotą).

1.9. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$ (kilpos plotą).

1.10. $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$.

1.11. $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

1.12. $\rho=a\sin 3\varphi$.

1.13. $\rho=2\cos\varphi,\ \rho=2\sin\varphi$ (pirmajame ketvirtyje).

1.14. $\rho=\cos\varphi,\ \rho=2\cos\varphi$.

1.15. $\rho=4\cos\varphi,\ \varphi=0,\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

1.16. $\rho=3+2\cos\varphi$.

1.17. $\rho=2\cos\varphi,\ \rho=1$ (skritulio $\rho=1$ išorėje)

1.18. $\rho=\sin\varphi,\ \rho=2\sin\varphi$.

2. Apskaičiuokite šių kreivių lanko ilgius:

2.1. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

2.2. $y=\ln\left(1-x^2\right),\ 0\le x\le\dfrac{1}{2}$.

2.3. $y=\dfrac{x^2}{2},\ 0\le x\le 1$.

2.4. $y=\ln\sin x,\ \dfrac{\pi}{3}\le x\dfrac{\pi}{2}$.

2.5. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2$.

2.6. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3}{3}-t, \\ y=t^2+2,\ 0\le t\le\sqrt{3}. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t-\dfrac{t^3}{3} \end{cases}$ (kilpos ilgį).

2.8. $\rho=\sqrt{2}\,e^{\varphi},\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

2.9. $\rho=8\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

2.10. $\rho=2(1-\cos\varphi)$ (kardioidės lanko, esančio apskritimo $\rho=1$ viduje).

3. Apskaičiuokite tūrius sukinių, kurie gaunami duotų kreivių apribotas figūras sukant apie nurodytas ašis:

3.1. $y=2-x^2,\ y=x,\ x=0\ (x\ge0)$; apie ašį Ox, apie ašį Oy.

3.2. $y=3-x^2,\ y=x^2+1$; apie ašį Ox, apie ašį Oy.

3.3. $y^2=9x,\ y=3x$; apie ašį Ox, apie ašį Oy.

3.4. $y=\sqrt{x},\ x+2y=8,\ x=0$; apie ašį Ox, apie ašį Oy.

3.5. $y=\sqrt{x},\ x+2y=8,\ y=0$; apie ašį Ox, apie ašį Oy.

3.6. $y=\sqrt{4-x^2},\ x-y+2=0,\ y=0$; apie ašį Ox.

3.7. $y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$; apie ašį Ox.

3.8. $y=\sqrt{2-x^2},\ y=\sqrt{x},\ y=0$; apie ašį Ox.

3.9. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ apie ašį Ox.

3.10. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ (cikloidės vienos arkos) ir abscisių ašies; apie ašį Ox.

4. Apskaičiuokite sukimosi paviršių plotus, kai duotosios kreivės sukamos apie nurodytas ašis:

4.1. $y=x^3,\ -\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}$; apie ašį Ox.

4.2. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ apie ašį Ox.

4.3. $y=\sqrt{4-x^2},\ -1\le x\le1$; apie ašį Ox.

4.4. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le2\pi; \end{cases}$ apie ašį Oy.

4.5. $\rho = a(1-\cos\varphi)$; apie polinę ašį.

4.6. $\rho = 2a\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$; apie polinę ašį.

4.7. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ apie ašį Ox.

Atsakymai

1.1. $\frac{125}{6}$. **1.2.** $\frac{35}{6}$. **1.3.** $\frac{32}{3}$. **1.4.** 9. **1.5.** 12. **1.6.** $\sqrt{2}-1$. **1.7.** $3\pi a^2$. **1.8.** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$. **1.9.** $\frac{8}{15}$. **1.10.** $2a^2$. **1.11.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **1.12.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **1.13.** $\frac{\pi}{2}-1$. **1.14.** $\frac{3\pi}{4}$. **1.15.** $\pi+2$. **1.16.** 11π. **1.17.** $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.18.** $\frac{3}{4}\pi$. **2.1.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **2.2.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **2.3.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **2.4.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **2.5.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **2.6.** 12. **2.7.** $4\sqrt{3}$. **2.8.** $2\left(e^{\frac{\pi}{3}}-1\right)$. **2.9.** 2π. **2.10.** $8\left(2-\sqrt{3}\right)$. **3.1.** $\frac{13}{4}\pi; \frac{5}{6}\pi$. **3.2.** $\frac{32}{3}\pi; \pi$. **3.3.** $\frac{3}{2}\pi; \frac{2}{5}\pi$. **3.4.** $\frac{88}{3}\pi; \frac{256}{15}\pi$. **3.5.** $\frac{40}{3}\pi; \frac{1024}{15}\pi$. **3.6.** 8π. **3.7.** $\frac{44}{15}\pi$. **3.8.** $\frac{\left(8\sqrt{2}-7\right)\pi}{6}$. **3.9.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **3.10.** $5\pi^2 a^3$. **4.1.** $\frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)$. **4.2.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **4.3.** 8π. **4.4.** $16\pi^2 a^2$. **4.5.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **4.6.** $4\pi^2 a^2$. **4.7.** $\frac{128}{5}\pi a^2$.

6. INTEGRALAI, PRIKLAUSANTYS NUO PARAMETRO

6.1. Nuo parametro priklausančių integralų tolydumas

Nagrinėkime funkciją $f(x, y)$, apibrėžtą stačiakampyje $D = \{(x; y) \mid a \le x \le b;$ $c \le y \le d\}$.

Fiksavę vieną argumentą, pavyzdžiui y, turėsime vieno kintamojo funkciją $f(x, y)$. Jei ji tolydi stačiakampyje D, tai egzistuoja integralas

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx .$$

Šis integralas yra kintamojo y funkcija ir vadinamas tiesioginiu integralu, priklausančiu nuo parametro.

Teorema. Jei funkcija $f(x, y)$ tolydi stačiakampyje D, tai integralas $I(y)$ irgi yra tolydi kintamojo y funkcija atkarpoje $[c; d]$.

▸ Imkime tašką $y_0 \in [c; d]$ ir suteikime tokį pokytį Δy, kad $y_0 + \Delta y \in D$. Sudarykime funkcijos $I(y)$ pokytį.

$$\Delta I(y_0) = I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) = \int_a^b (f(x; y_0 + \Delta y) - f(x, y_0))\,dx .$$

Tada

$$|\Delta I| = |\, I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)| = \left|\int_a^b (f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |\, f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)|\,dx .$$

Kadangi $f(x, y)$ yra tolydi srityje D, tai ji joje ir tolygiai tolydi, todėl

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |y_0 + \Delta y - y_0| = |\,\Delta y\,| < \delta \Rightarrow |\, f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Tuomet

$$|I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)| \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\,x\,\Big|_a^b = \varepsilon .$$

O tai reiškia, kad funkcija $I(y)$ yra tolydi atkarpoje $[\,c; d]$. ◂

Iš funkcijos $I(y)$ tolydumo atkarpoje $[\,c; d]$ išplaukia,kad

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0).$$

Tačiau

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,dx,$$

nes funkcija $f(x, y)$ atžvilgiu kintamojo y irgi tolydi taške y_0. Tuomet

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,dx.$$

Ši lygybė rodo, kad ribos ir integralo ženklus galima sukeisti vietomis, kai $f(x, y)$ – tolydi stačiakampyje D funkcija.

6.2. Nuo parametro priklausančių integralų diferencijavimas

Teorema. Jei funkcija $f(x, y)$ ir jos dalinė išvestinė $f'_y(x, y)$ yra tolydžios stačiakampyje D, tai teisinga lygybė

$$I'_y = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

Ši formulė vadinama Leibnico formule.

▸ Taškui $y \in [c; d]$ suteikime pokytį Δy, kad $y + \Delta y \in [c; d]$ ir sudarykime funkcijos $I(y)$ pokytį:

$$\Delta I(y) = I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b \big(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big)\,dx.$$

Tada

$$\frac{\Delta I}{\Delta y} = \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\,dx.$$

Skirtumui $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ taikome Lagranžo formulę:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, \bar{y})\Delta y;$$

čia $\bar{y}$ yra tarp y ir $y + \Delta y$. Tuomet

$$\frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, \bar{y})\,dx \quad \text{ir}$$

$$I'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f'_y(x, \bar{y})\,dx = \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, \bar{y})\,dx.$$

Kai $\Delta y \to 0$, tai $\bar{y} \to y$, dėl išvestinės $f'_y(x, y)$ tolydumo turėsime:

$$\lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y).$$

Tada

$$I'_y = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx. \blacktriangleleft$$

Tarkime, kad integravimo rėžiai a ir b irgi priklauso nuo parametro y, t.y.

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx;$$

čia $a(y)$ ir $b(y)$ turi tolydžias išvestines $\frac{da}{dy}$ ir $\frac{db}{dy}$ atkarpoje $[c; d]$. Pažymėkime $I(y) = \Phi(y, a(y), b(y))$ ir diferencijuokime kaip sudėtinę funkciją:

$$I'_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \cdot \frac{db}{dy}.$$

Apskaičiuodami $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, rėžius a ir b laikome konstantomis, todėl galime taikyti Leibnico formulę:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx.$$

Apskaičiuodami $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$, naudojamės integralo su kintamu viršutiniu rėžiu diferencijavimo taisykle:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \right)'_b = f(b(y), y).$$

Analogiškai

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \right)'_a = -\left(\int_{b(y)}^{a(y)} f(x, y)\,dx \right)'_a = -f(a(y), y).$$

Tada

$$I'_y = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx - f\left(a(y),y\right)\frac{da}{dy} + f\left(b(y),y\right)\frac{db}{dy}.$$

Pavyzdys. Žinodami, kad $\int\limits_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$, apskaičiuosime $\int\limits_0^b \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$.

▸ $f(x,a) = \frac{1}{a^2+x^2}$. Ši funkcija ir jos išvestinė $f'_a(x,a)$ yra tolydžios su visomis x ir $a \neq 0$ reikšmėmis, tai taikysime Leibnico formulę. Abi duotosios lygybės puses diferencijuokime parametro a atžvilgiu:

$$\left(\int\limits_0^b \frac{dx}{a^2+x^2}\right)'_a = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)'_a;$$

$$-\int\limits_0^b \frac{2a}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx = -\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \frac{b}{a^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}};$$

$$\int\limits_0^b \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{b}{2a^2\left(a^2+b^2\right)} = \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right).$$ ◂

6.3. Nuo parametro priklausančių integralų integravimas

Nagrinėkime funkcijos $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ integralą atkarpoje $[c;\,d]$:

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Teorema. Jei funkcija $f(x, y)$ tolydi stačiakampyje D, tai

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

▸ Įrodysime bendresnę lygybę, rėžį d pakeitę kintamu rėžiu α, būtent

$$\int_c^{\alpha} dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^{\alpha} f(x,y)\,dy,$$

čia $\alpha \in [c; d]$. Suintegravę kairiąją ir dešiniąją puses, gausime kintamojo α funkcijas. Pažymėkime jas atitinkamai A (α) ir B (α) ir diferencijuokime.

Kadangi $A(\alpha) = \int_c^{\alpha}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$, tai A (α) diferencijuojame kaip integralą su kintamu viršutiniu rėžiu:

$$A'_{\alpha} = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx.$$

Kadangi $B(\alpha) = \int_a^b\left(\int_c^{\alpha} f(x,y)\,dy\right)dx$, o $\int_c^{\alpha} f(x,y)\,dy = \varphi(x,\alpha)$, tai

$$B(\alpha) = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx.$$

$B(\alpha)$ diferencijuokime taikydami Leibnico formulę:

$$B'_{\alpha} = \int_a^b \varphi'_{\alpha}(x,\alpha)\,dx.$$

Bet

$$\varphi'_{\alpha}(x,\alpha) = \left(\int_c^{\alpha} f(x,y)\,dy\right)'_{\alpha} = f(x,\alpha).$$

Tuomet

$$B'_{\alpha} = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx.$$

Matome, kad

$$A'_{\alpha} = B'_{\alpha}.$$

Jei dviejų reiškinių išvestinės lygios, tai šie reiškiniai skiriasi konstanta, todėl

$$A = B + \gamma,$$

čia γ = const. Kai $\alpha = c$, tai $A = 0$ ir $B = 0$, todėl ir $\gamma = 0$.

Vadinasi A ir B sutampa su visomis α reikšmėmis.

Kai $\alpha = d$, tai iš lygybės

$$\int_c^{\alpha} dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^{\alpha} f(x,y)\,dy,$$

gausime įrodomą lygybę. ◀

6.4. Nuo parametro priklausantys netiesioginiai integralai

Jei funkcija $f(x,y)$ yra apibrėžta srityje $D=\{(x,y)\mid a \le x < +\infty, c \le y \le d\}$ ir su kiekviena y reikšme iš atkarpos $[c;\, d]$ egzistuoja netiesioginis integralas

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

tai šis integralas vadinamas netiesioginiu integralu, priklausančiu nuo parametro. Tokiems integralams galima taikyti ką tik išdėstytą tiesioginių integralų, priklausančių nuo parametro, teoriją, kai šie netiesioginiai integralai konverguoja tolygiai.

Apibrėžimas. Integralas $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ vadinamas konverguojančiu taške $y \in [c;d]$, jei egzistuoja baigtinė riba

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I(y),$$

t.y. jei

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 : A > A_0 \Rightarrow \left| I(y) - \int_a^{A} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon;$$

čia $A_0 = A_0(\varepsilon, y)$.

Nuo parametro priklausančių netiesioginių integralų teorijoje yra svarbi tolygiojo konvergavimo sąvoka. Suformuluosime tolygiojo konvergavimo pakankamą požymį.

Teorema (Vejerštraso požymis). Tarkime, kad intervale $[a;+\infty)$ egzistuoja neneigiama funkcija $g(x)$, su kuria

$$|f(x,y)| \le g(x), \quad \forall x \in [a;+\infty), \quad \forall y \in [c;d].$$

Tuomet, kai konverguoja netiesioginis integralas $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, tai netiesioginis integralas $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverguoja tolygiai ir absoliučiai (be įrodymo).

Suformuluosime nuo parametro priklausančių tolygiai konverguojančių netiesioginių integralų savybes.

Tarkime, kad funkcija $f(x,y)$ yra tolydi srityje $D=\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,$ $c\le y\le d\}$, o integralas $I(y)$ atkarpoje $[c;\ d]$ konverguoja tolygiai y atžvilgiu. Tuomet:

1. Funkcija $I(y)$ yra tolydi kintamojo y funkcija atkarpoje $[c;\ d]$.
2. Funkcija $I(y)$ integruojama atkarpoje $[c;\ d]$, be to,

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

3. Jei funkcija $f(x,y)$ tenkina minėtas sąlygas ir srityje D turi tolydžią išvestinę $f'_y(x,y)$, o integralas $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ atkarpoje $[c;\ d]$ konverguoja tolygiai y atžvilgiu, tai $I(y)$ diferencijuojama atkarpoje $[c;\ d]$:

$$I'_y=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

6.5. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Rasime funkcijos $I(\alpha)$ išvestinę:

1.1. $I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x}dx,\quad \alpha>0.$

▶ $I'_\alpha=\int_0^1 \frac{x}{(1+x)(1+\alpha x)}dx;$

$$\frac{x}{(1+x)(1+\alpha x)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1+\alpha x};$$

$$x=A(1+\alpha x)+B(1+x).$$

Įrašę $x = -1$, gausime $A = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, įrašę $x = -\dfrac{1}{\alpha}$, gausime $B = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

$$I'_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{1+\alpha x} = \frac{1}{\alpha-1}\ln|1+x|\,\Big|_0^1 + \frac{1}{(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{\alpha}\ln|1+\alpha x|\,\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\ln 2 + \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\ln\frac{2}{\sqrt[\alpha]{1+\alpha}}. \blacktriangleleft$$

1.2. $I(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad -\infty < \alpha < +\infty$.

$$\blacktriangleright\ I'_\alpha = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx - e^{\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\cos\alpha - e^{\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\sin\alpha =$$

$$= \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha - e^{\alpha|\sin\alpha|}\cdot\sin\alpha. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralus:

2.1. $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \alpha > 0.$

$$\blacktriangleright\ I'_\alpha = \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\right)'_\alpha dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = tx, \ x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ dx = -\left(1+t^2\right)^{-3/2} t\,dt, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & +\infty & 0 \end{array} \end{array}\right\}.$$

$$I'_\alpha=-\int\limits_{+\infty}^{0}\frac{\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}t\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt}{\left(1+\alpha^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)t}=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+\alpha^2+t^2}=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{1+\alpha^2}\right)^2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\pi}{2}.$$

$$I'_\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\pi}{2}.$$

Integruodami abi lygybės puses parametru α, gausime:

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}+C=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+C.$$

Kai $\alpha=0$, $I(0)=0$, $0=\frac{\pi}{2}\ln 1+C,\quad C=0$.

Galutinai

$$I(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right).$$ ◀

2.2. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\quad a>0,\quad b>0.$

▶ Pasinaudosime tuo, kad $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-xy}dy$.

Tuomet

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_a^b e^{-xy}dy\right)dx=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_a^b e^{-xy}dy.$$

Sukeisime integravimo x ir y atžvilgiu tvarką:

$$\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_a^b e^{-xy}dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx.$$

Kadangi

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{e^{-xy}}{y}\right)\Bigg|_0^n=\frac{1}{y}\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-ny}-1\right)=\frac{1}{y},$$

$$\int_a^b \frac{1}{y}dy = \ln|y| \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}.$$

Tuomet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}. \blacktriangleleft$$

6.6. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite funkcijos $I(\alpha)$ išvestinę:

1.1. $I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2 x\right)dx, \quad \alpha > 1.$

1.2. $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$

2. Išdiferencijavę parametro atžvilgiu apskaičiuokite integralus:

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx.$

2.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\,\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx.$

2.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha| < 1.$

Atsakymai

1.1. $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$. **1.2.** $\frac{2}{\alpha}\ln\left(1+\alpha^2\right)$. **2.1.** $\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos\alpha)^2}{2}$. **2.2.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\ln\left(1+|\alpha|\right)$

2.3. $\pi\arcsin\alpha$.

7. PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

7.1. Pagrindinės sąvokos

1 apibrėžimas. Lygtis $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, susiejanti nepriklausomą kintamąjį x, nežinomąją funkciją $y(x)$ ir jos išvestines $y', y'', \ldots y^{(n)}$, vadinama **diferencialine lygtimi**, o natūralusis skaičius n – **diferencialinės lygties eile**.

2 apibrėžimas. Funkcija, kurią įrašę į diferencialinę lygtį, gauname tapatybę, vadinama tos lygties **sprendiniu**.

Diferencialinės lygties sprendinio grafikas vadinamas **integraline kreive**.

Pirmos eilės diferencialinės lygties pavidalas gali būti $F(x, y, y') = 0$, $y' = f(x, y)$ arba $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$; funkcijos $f(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ yra apibrėžtos ir tolydžios kurioje nors plokštumos xOy srityje D.

Paprasčiausią diferencialinę lygtį sprendėme integralinio skaičiavimo 2 skyriuje: atkarpoje $[a, b]$ ieškojome funkcijos $y = y(x)$, kurios išvestinė – žinoma tolydžioji funkcija $f(x)$, t.y.

$$y' = f(x).$$

Bendroji ieškomosios funkcijos išraiška yra

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C,$$

čia $a \leq x \leq b$, $(x, y) \in D, x_0 \in [a, b]$, C – bet kuris realusis skaičius. Tai funkcijų šeima, priklausanti nuo laisvos konstantos C. Su kiekviena C reikšme gaunamas lygties $y' = f(x)$ sprendinys. Kai $C = y_0$, sprendinys

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0$$

taške $x = x_0$ įgyja reikšmę $y(x_0) = y_0$.

Dabar nagrinėsime lygtį

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

3 apibrėžimas. Funkcija $y = \varphi(x, C)$ vadinama lygties $y' = f(x, y)$ bendruoju sprendiniu , kai $a \leq x \leq b$, jei

1. lygybė $y = \varphi(x, C)$ srityje D $((x, y) \in D)$, $a \leq x \leq b$, yra išsprendžiama konstantos C atžvilgiu: $C = \psi(x, y)$;

2. su bet kuria konstantos C reikšme funkcija $y=\varphi(x,C)$ yra lygties $y'=f(x,y)$ sprendinys.

4 apibrėžimas. Sprendinys $y=y(x)$, gaunamas iš bendrojo sprendinio $y=\varphi(x,C)$ vietoje konstantos C įrašius konkretų skaičių, vadinamas lygties **atskiruoju sprendiniu.**

5 apibrėžimas. Lygybė $\Phi(x,y,C)=0$, su $\forall C\in R$ apibrėžianti diferencialinės lygties $y'=f(x,y)$ sprendinį $y=y(x)$, vadinama lygties **bendruoju integralu**. Įrašę į lygybę $\Phi(x,y,C)=0$ konkretų skaičių $C=C_0$, gauname atskirąjį integralą.

Jeigu iš $\Phi(x,y,C)=0$ galima išreikšti $y=y(x,C)$, tai gaunamas lygties bendrasis sprendinys.

Diferencialinių lygčių teorijoje bei jos taikymuose svarbus toks uždavinys: reikia rasti diferencialinės lygties $y'=f(x,y)$ sprendinį $y=y(x)$, tenkinantį sąlygą $y(x_0)=y_0$, kai x_0, y_0 duoti realieji skaičiai. Ši sąlyga vadinama pradine sąlyga, o uždavinys – **pradiniu** arba **Koši uždaviniu**.

Suformuluosime Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą.

Teorema. Tarkime, kad funkcija $f(x,y)$ stačiakampėje srityje

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b, a>0, b>0\right\}$$

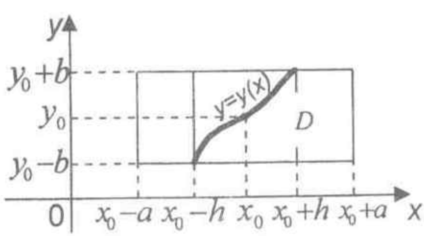
tenkina šias sąlygas:

1. yra tolydi, o todėl ir aprėžta:

$$|f(x,y)|\le M\ ;$$

2. turi aprėžtą dalinę išvestinę:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le N\,.$$



7.1 pav.

Tada atkarpoje $[x_0-h, x_0+h]$, kai $h=\min\left\{a;\dfrac{b}{M};\dfrac{1}{N}\right\}$ egzistuoja vienintelis lygties $y'=f(x,y)$ sprendinys $y=y(x)$, tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0)=y_0$.

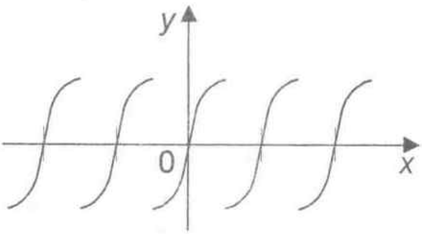
Ši teorema yra lokalaus pobūdžio. Ji nurodo pakankamas diferencialinės lygties sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas atkarpoje $[x_0-h, x_0+h]$ (žr. 7.1 pav.). Šios sąlygos nėra būtinos, gali egzistuoti vienintelis lygties

$y' = f(x, y)$ sprendinys, tenkinantis sąlygą $y(x_0) = y_0$, kai viena arba abi teoremos sąlygos nėra išpildytos taške (x_0, y_0).

1 pavyzdys. Nagrinėsime diferencialinę lygtį $y' = \dfrac{1}{y^2}$.

▶ Funkcijos $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$ ir $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$ turi trūkio taškus $y = 0$ ašies Ox taškuose ir aišku nėra aprėžtos, kai $y \to 0$, bet per kiekvieną $(x_0, 0)$ tašką eina vienintelė integralinė kreivė

$y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ (7.2 pav.). ◀



7.2 pav.

2 pavyzdys. $y' = xy + e^{-y}$.

▶ Lygties dešinėje pusėje esanti funkcija $f(x, y) = xy + e^{-y}$ ir jos dalinė išvestinė $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ yra tolydžios visuose plokštumos xOy taškuose. Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremos sąlygos išpildytos, todėl per kiekvieną plokštumos tašką (x_0, y_0) eina vienintelė integralinė kreivė.

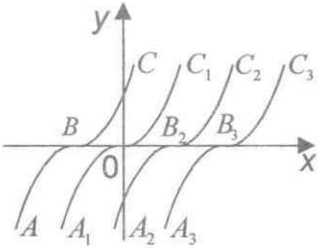
Panagrinėsime dar vieną pavyzdį, kai neišpildyta tik antroji sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremos sąlyga t.y. kai f'_y neaprėžta, tada Koši uždavinio sprendinys nėra vienintelis. ◀

3 pavyzdys. $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$.

▶ Funkcija $f(x, y) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ yra tolydi $\forall (x, y) \in R$. Šios funkcijos dalinė išvestinė $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ tolydi, kai $y \neq 0$. Taigi kiekvienas diferencialinės lygties sprendinys, tenkinantis nurodytą pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$ yra vienintelis plokštumoje xOy, išskyrus Ox ašį, t.y. kai $y_0 \neq 0$.

Lengva matyti, kad lygčiai tinka funkcija

$$y = \frac{(x+C)^3}{8}.$$



7.3 pav.

Be šio sprendinio lygtis dar turi sprendinį $y \equiv 0$. Tokiu būdu, per kiekvieną ašies Ox tašką eina mažiausiai dvi integralinės kreivės (7.3 pav.).

Diferencialinės lygtys yra gamtos moksluose, technikoje nagrinėjamų uždavinių matematiniai modeliai. Pateiksime keletą diferencialinių lygčių sudarymo pavyzdžių. ◀

4 pavyzdys. Materialus taškas, kurio masė m, veikiamas jėgos juda tiese. Rasime taško judėjimo dėsnį.

▶ Tegul Ox ašis – tiesė, kuria juda taškas, x – jo koordinatė, t – laikas, $f(t,x)$ –tašką veikianti jėga. Taško greitis yra $\frac{dx}{dt}$, o jo pagreitis – $\frac{d^2x}{dt^2}$. Diferencialinę judesio lygtį gauname iš antrojo Niutono dėsnio, prilyginę masės ir greičio sandaugą veikiančiai jėgai:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t). \quad ◀$$

5 pavyzdys. Mažo auštančio ar šylančio kūno temperatūrą u galima laikyti vienoda visame kūne. Jei m – kūno masė, c – jo specifinė šiluma, t – laikas ir $v(t)$ – duota aplinkos (oro) temperatūra, tai kūno šilumos kiekis yra mcu.

Šilumos kiekio pasikeitimas per laiko vienetą lygus $mc\frac{du}{dt}$. Iš kitos pusės, išspinduliuotas šilumos kiekis yra proporcingas kūno temperatūros ir aplinkos temperatūros skirtumui (k – proporcingumo koeficientas):

$$mC\frac{du}{dt} = -k\left(u - v(t)\right).$$

Prieš skliaustus visada rašome minuso ženklą, nes $\frac{du}{dt} < 0$, kai $u > v(t)$ ir $\frac{du}{dt} > 0$, kai $u < v(t)$. (Kūnas aušta, kada jo temperatūra yra didesnė už aplinkos ir šyla, kai ji yra mažesnė už aplinkos temperatūrą). ◀

6 pavyzdys. Radioaktyvios medžiagos irimo greitis yra proporcingas šios medžiagos kiekiui; proporcingumo koeficientą pažymėsime k, laiką – t. Radioaktyvios medžiagos kiekio R kitimo greitis yra $\frac{dR}{dt}$. Jis yra neigiamas (nes nesuirusios radioaktyvios medžiagos kiekis mažėja) ir proporcingas R:

$$\frac{dR}{dt} = -kR. \blacktriangleleft$$

7.2. Pirmos eilės diferencialinės lygties geometrinė prasmė. Izoklinų metodas

Nagrinėkime pirmos eilės diferencialinę lygtį $y' = f(x, y)$, kai $f(x, y)$ plokštumos xOy srityje D apibrėžta ir tolydi funkcija. Kiekviename srities D taške (x, y) y' įgyja tam tikrą reikšmę, kuri lygi integralinės kreivės liestinės, išvestos per tašką (x_0, y_0), krypties koeficientui $y'(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Kitame taške gausime kitą krypties koeficientą. Taigi diferencialinė lygtis $y' = f(x, y)$ kiekviename srities D taške apibrėžia einančios per tą tašką integralinės kreivės liestinės kryptį. Visos šios kryptys srityje D sudaro **krypčių lauką**.

1 apibrėžimas. Krypčių lauku vadinamos visos kryptys, kurių kampų α su ašimi Ox tangentai lygūs $f(x, y)$, t.y. $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$.

Suintegruoti diferencialinę lygtį $y' = f(x, y)$ reiškia: rasti visas integralines kreives, kurių kryptis kiekviename taške sutampa su krypčių lauko kryptimi. Kad būtų patogiau brėžti taip pavaizduotą krypčių lauką, pirma surasime linijas, kurių taškuose kryptys yra vienodos .

2 apibrėžimas. Aibę taškų, kuriuose lauko kryptys yra vienodos, t.y. $f(x, y) = k$, vadiname **izoklina**.

Panaudodami krypčių lauką, galime apytiksliai brėžti integralinę kreivę, einančią per duotą srities D tašką (x_0, y_0), tai yra spręsti Koši uždavinį su pradine sąlyga $y(x_0) = y_0$. Tam tikslui išvedame iš taško (x_0, y_0) atkarpėlę, kurios kampo su x ašimi tangentas lygus $f(x_0, y_0)$. Iš pirmos atkarpėlės galo (x_1, y_1) vedame antrąją – kryptimi, kurios tangentas lygus $f(x_1, y_1)$, ir t.t. Išvestos atkarpėlės sudaro laužtę, apytiksliai vaizduojančią ieškomąją integralinę kreivę. Brėžti paprasčiau, kai laužtės viršūnes (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... imame izoklinose, tai yra vedame kiekvieną iš minėtų atkarpėlių iki jos susikirtimo su artimiausia izoklina.

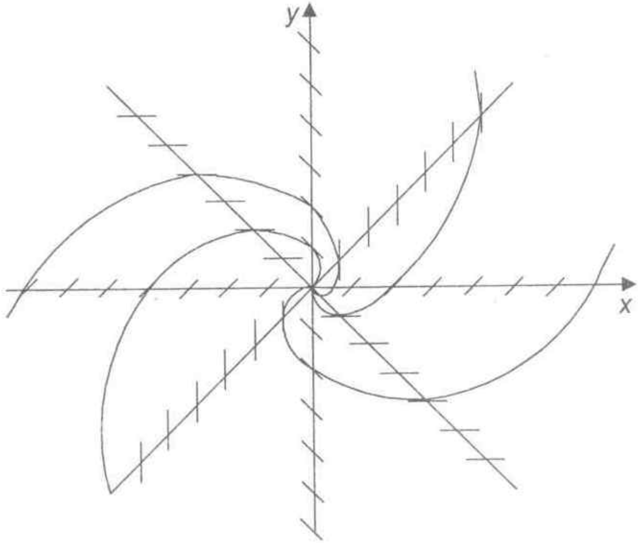
1 pavyzdys. Izoklinų metodu nubraižykime diferencialinės lygties $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ integralines kreives.

▸ Prilyginę $\dfrac{x+y}{x-y} = k$, gauname izoklinas, kurios yra tiesės $y = \dfrac{k-1}{k+1}x$, einančios per koordinačių pradžią.

Parinkę $k = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots$, gauname tieses $y = -x,\ y = 0,\ x = 0, \ldots$. Kai $k = \infty$, tai $y = x$. Brėžiame izoklinas. Pasirinkę izoklinos $y = -x$ tašką, $(-1,\ 1)$, apskaičiuojame

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x+y}{x-y}\Big|_{\substack{x=-1\\ y=1}} = 0$$

ir gauname $\alpha = 0^0$.



7.4 pav.

Tiesėje $y = -x$ kryptis žymime taip, kad su teigiama ašies Ox kryptimi sudarytų kampą $\alpha = 0^0$. Analogiškai, paėmę izokliną $y = 0$, gauname $\alpha = 45^0$, izokliną $x = 0$ atitinka $\alpha = 135^0$, o izokliną $y = x$ – $\alpha = 90^0$. Integralines kreives brėžiame taip, kad kiekviename taške pažymėta kryptis būtų integralinės kreivės liestinė (7.4 pav.).

2 pavyzdys. Izoklinų metodu nubraižykime diferencialinės lygties $y' = x$ integralinę kreivę, einančią per tašką (0, 2).

▶ Prilyginę $x = k$, gauname izoklinas, kurios yra tiesės lygiagretės Oy ašiai. Kai $k = 0$, gauname tiesę $x = 0$. Pasirinkę izoklinos tašką (0, 2), apskaičiuojame

$$\operatorname{tg}\alpha = x \Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = 0$$

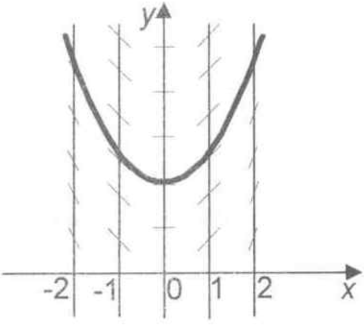
ir gauname $\alpha = 0^\circ$. Analogiškai

$k = 1, \quad x = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$

$k = -1, \quad x = -1, \quad \operatorname{tg}\alpha = -1, \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi.$

$k = 2, \quad x = 2, \quad \operatorname{tg}\alpha = 2, \quad \alpha = \operatorname{arctg}2.$

$k = -2, \quad x = -2, \quad \operatorname{tg}\alpha = -2, \quad \alpha = \pi - \operatorname{arctg}2.$



7.5 pav.

Per tašką $(0, 2)$ brėžiame integralinę kreivę, kurios liestinės kryptis kiekviename taške sutaptų su krypčių lauko kryptimi (7.5 pav.).

7.3. Kintamųjų atskyrimo metodas

Diferencialinė lygtis $f_1(y)dy = f_2(x)dx$ vadinama lygtimi su atskirtais kintamaisiais; $f_1(y)$ ir $f_2(x)$ – tolydžiosios funkcijos. Šios lygties bendrasis integralas yra

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C.$$

Diferencialinė lygtis

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

vadinama diferencialine lygtimi su atskiriamaisiais kintamaisiais. Padaliję abi lygties puses iš $M_2(y)\cdot N_1(x)$, gauname lygtį su atskirtaisiais kintamaisiais

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

Padalije iš $M_2(y)\cdot N_1(x)$, laikome, kad $M_2(y)N_1(x) \neq 0$. Jei $y = b$ ir $x = a$ yra lygčių $M_2(y) = 0, N_1(x) = 0$ realios šaknys, tai $x = a$ ir $y = b$ bus diferencialinės lygties sprendiniai (jei tik lygtis, juos įrašius turi prasmę), nes jie tenkina lygtį (1). Jei šie sprendiniai negaunami iš bendro sprendinio, esant konkrečioms C reikšmėms, tai rašydami atsakymą, juos parašome atskirai.

Kintamųjų atskyrimo metodo pavyzdžiai.

1 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $\left(1+y^2\right)xdx=\left(1+x^2\right)ydy$.

▶ Padaliję abi lygties puses iš $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\neq 0$, gauname lygtį, kurioje atsiskiria kintamieji:

$$\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{ydy}{1+y^2}.$$

Suintegravę ją, gausime bendrąjį sprendinį

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\int\frac{ydy}{1+y^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|=\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|+\frac{1}{2}\ln C.$$

Antilogaritmavę gauname bendrąjį integralą

$$1+x^2=C\left(1+y^2\right),$$

o išreiškę y iš šios lygybės, gauname bendrąjį sprendinį $y=\pm\sqrt{\frac{1+x^2}{C}-1}$. ◀

2 pavyzdys. Išspręsime Koši uždavinį: duota lygtis $\left(1+e^x\right)y\cdot y'=e^x$ ir pradiniai duomenys $x=0$ ir $y=1$. Rasime lygties sprendinį $y=y\,(x)$, tenkinantį pradinę sąlygą $y\,(0)=1$.

▶ $\left(1+e^x\right)y\frac{dy}{dx}=e^x$. Atskyrę kintamuosius, gauname $ydy=\frac{e^x dx}{1+e^x}$.

Integruojant abi lygties puses, gaunamas bendrasis sprendinys

$$\frac{y^2}{2}=\ln\left(1+e^x\right)+C_1.$$

Įrašę pradinius duomenis $x=0$ ir $y=1$, gauname

$$\frac{1}{2}=\ln\left(1+e^0\right)+C,\quad C=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Įrašę gautąją C reikšmę, gauname atskiruosius sprendinius:

$$y^2=1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2,\quad y=\pm\sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Iš pradinės sąlygos išplaukia, kad $y>0$ ($y\,(0)=1>0$), todėl prieš šaknį imamas + ženklas. Taigi atskiras sprendinys bus

$$y=\sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$ ◀

3 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygtį $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

▸ Atskiriame kintamuosius: padalijame abi lygties puses iš $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}\neq 0$. Gauname

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0.$$

Integruojame:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0,\quad -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-y^2\right)}{\sqrt{1-y^2}}=0,$$

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$ – yra lygties bendrasis sprendinys.

Lygtį dalijome iš $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$, todėl galėjome prarasti sprendinius. Juos gausime, spręsdami lygtis $\sqrt{1-y^2}=0$ ir $\sqrt{1-x^2}=0$.

Šių lygčių realiosios šaknys $y=\pm 1$ ir $x=\pm 1$ taip pat yra diferencialinės lygties sprendiniai, nes jai tinka. Jų negalima gauti iš bendrojo sprendinio su jokia konkrečia C reikšme. Taigi lygties sprendiniai

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C,\ x=\pm 1,\quad y=\pm 1.$$ ◂

4 pavyzdys. Parašysime kreivės, einančios per tašką (0; –2), lygtį, kai jos liestinės krypties koeficientas lygus to taško ordinatei, padidintai 3 vienetais.

▸ Kaip žinome, liestinės krypties koeficientas $k=\operatorname{tg}\alpha=y'(x)$. Taigi iš sąlygos turime

$$\frac{dy}{dx}=y+3.$$

Atskyrus kintamuosius $\frac{dy}{y+3}=dx$, kai $y+3\neq 0$ ir suintegravus, gauname bendrąjį sprendinį

$$\ln|\,y+3\,|=x+\ln C,\quad y+3=Ce^x.$$

Kadangi ieškomoji kreivė turi eiti per tašką (0; –2), tai įrašome į bendrąjį sprendinį taško koordinates $-2+3=Ce^0$, $C=1$. Ieškomoji kreivė bus

$$y=e^x-3.$$ ◂

5 pavyzdys. Motorinė valtis, kurios masė m, juda ramiame vandenyje greičiu v_0. Vandens pasipriešinimo jėga proporcinga valties judėjimo greičiui. Rasime valties greičio kitimo priklausomybę nuo laiko t.

▶ Valtį veikia jėga $F=-kv$, čia k – proporcingumo koeficientas. Pagal antrąjį Niutono dėsnį $F=m\dfrac{dv}{dt}$. Kadangi jėga proporcinga judėjimo greičiui, galima parašyti lygtį

$$m\frac{dv}{dt}=-kv \text{ (ženklas „–" nes greitis mažėja).}$$

Atskiriame kintamuosius ir suintegruojame:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \qquad \int\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\int dt,$$

$$\ln|v|=\ln e^{-\frac{k}{m}t}+\ln C.$$

$$v=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Įrašę sąlygą, kai $t=0$, $v=v_0$, gauname $v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$. ◀

7.4. Homogeninės lygtys

1 apibrėžimas. Funkcija $F(x,y)$ vadinama $m-$tojo laipsnio homogenine funkcija, jei

$$F(tx,ty)=t^mF(x,y)$$

su visomis galimomis t, x, y reikšmėmis.

Pavyzdžiui, $F(x,y)=x^2-2xy$ yra antrojo laipsnio homogeninė funkcija, nes

$$F(tx,ty)=(tx)^2-2txty=t^2\left(x^2-2xy\right), \quad \text{o} \quad F(x,y)=\frac{3x^2y+x^3}{y^3}$$

yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija, nes

$$\frac{3(tx)^2(yt)+(tx)^3}{(tx)^3}=\frac{3\left(x^2y+x^3\right)}{y^3}.$$

2 apibrėžimas. Diferencialinę lygtį $y'=f(x,y)$ vadiname homogenine, kai $f(x,y)$ yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija, t.y.

$$f(tx,ty)=t^{\circ}f(x,y) \quad \forall t\in R.$$

Sakykime, kad lygtis $y' = f(x, y)$, yra homogeninė, t.y. $f(tx, ty) = f(x, y)$. Kai $t = \frac{1}{x}$, tai $f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Taigi, homogeninės lygties dešinėje pusėje funkcija priklauso tik nuo $\frac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pažymėję $\frac{y}{x} = u$, kai $x \neq 0$ ir išreiškę $y = ux$, $y' = u'x + u$, gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$x\frac{du}{dx} + u = \varphi(u), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}[\varphi(u) - u], \qquad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Kai $\varphi(u) \equiv u$, lygtis virsta $\frac{du}{dx} = 0$. Tada $u = C$, ir $y = Cx$ taip pat yra diferencialinės lygties sprendinys.

Tegul $\varphi(u) \neq u$. Integruodami gauname lygties bendrąjį sprendinį

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Pažymėję kairiąją lygybės pusę $F(u)$, gauname $F(u) = \ln|x| + C$ ir įrašę u reikšmę, turime duotosios lygties bendrąjį sprendinį

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Nagrinėkime homogeninę diferencialinę lygtį

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

arba

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

čia $M(x, y)$ ir $N(x, y)$ yra to paties m – tojo laipsnio homogeninės funkcijos. Šią lygtį galima užrašyti

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad N(x, y) \neq 0.$$

Funkcija $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija, nes

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=\frac{t^m M(x,y)}{t^m N(x,y)}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

1 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}, x\neq 0, y\neq 0$.

▶ Lygties dešinėje pusėje yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija $f(x,y)=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$, nes $\dfrac{(ty)^2+(tx)^2}{txty}=\dfrac{t^2\left(y^2+x^2\right)}{t^2xy}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$. Įrašę keitinį $y=ux$ ir $y'=u'x+u$ gauname:

$$u'x+u=\frac{u^2x^2+x^2}{ux^2}, \qquad \frac{du}{dx}\cdot x+u=\frac{x^2\left(u^2+1\right)}{x^2\cdot u}.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^2+1}{u}-u,$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1}{u}.$$

Integruojame abi lygybės puses:

$$\int udu=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln C, \qquad u^2=\ln Cx^2,$$

$$y^2=x^2\ln Cx^2. \ ◀$$

2 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$.

▶ Lygtis yra homogeninė, nes funkcijos $M(x,y)=y+\sqrt{x^2+y^2}$ ir $N(x,y)=-x$ abi yra pirmojo laipsnio homogeninės funkcijos. Įrašę į lygtį

$$y=ux,\ y'=u'x+u,$$

gauname

$$u'x+u=\frac{ux+\sqrt{x^2+u^2x^2}}{x}, \quad x\neq 0.$$

$$u'x+u=u+\sqrt{1+u^2}, \quad \frac{dx}{x}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$$\ln|x|+\ln|C|=\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|,$$

$$Cx=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Gavome bendrąjį integralą $Cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$, ir dar vieną lygties sprendinį $x=0$, nes jis tinka lygčiai ir negaunamas iš bendrojo integralo nė su viena C reikšme. ◀

3 pavyzdys. Rasime diferencialinės lygties $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $y(1)=0$.

▶ Pertvarkome lygtį $y'=\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

Ši lygtis yra homogeninė, nes funkcija dešinėje pusėje priklauso nuo trupmenos $\frac{y}{x}$. Žymime $u=\frac{y}{x}$, pakeičiame $y=ux$, $y'=xu'+u$ ir įrašome į lygtį:

$$xu'+u=\frac{1}{\operatorname{arctg}u}+u.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$\operatorname{arctg}u\,du=\frac{dx}{x}.$$

Integruojame:

$$\int\operatorname{arctg}u\,du=\int\frac{dx}{x},$$

$$u\cdot\operatorname{arctg}u-\int\frac{u\,du}{1+u^2}=\ln|x|,$$

$$u\cdot\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+\ln C.$$

Į gautąją išraišką įrašome $u=\frac{y}{x}$;

$$2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 2\ln|x| + 2\ln C + \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$\ln\left(C^2x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\right) = 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$C^2\left(x^2+y^2\right) = e^{\frac{2y}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ – yra bendrasis lygties integralas.

Norėdami rasti atskirąjį sprendinį, panaudojame pradinę sąlygą $y(1) = 0$, kurią įrašome į bendrąjį integralą ir randame $C^2 = 1$.

Tada gauname atskirąjį integralą:

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{2y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

7.5. Tiesinės pirmos eilės diferencialinės lygtys

Apibrėžimas. Pirmos eilės tiesine diferencialine lygtimi vadinama tiesinė nežinomosios funkcijos ir jos išvestinės atžvilgiu lygtis:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0;$$

čia $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – tolydžios intervale (a, b) funkcijos.

Padaliję iš $A(x) \neq 0$, gauname lygtį

$$y' + P(x)y = Q(x);$$

jei $Q(x) \equiv 0$, tai lygtis

$$y' + P(x)y = 0$$

vadinama **tiesine homogenine diferencialine lygtimi**.

Kai $Q(x) \neq 0$, lygtis vadinama **tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi**.

Nagrinėsime pirmos eilės tiesinės diferencialinės lygties sprendimo metodus.

1. Lagranžo konstantų varijavimo metodas.

Iš pradžių sprendžiame homogeninę diferencialinę lygtį

$$y' + P(x)y = 0.$$

Atskiriame kintamuosius. Kai $y \neq 0$, turime

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|, \quad (C \neq 0),$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{1}$$

Gavome bendrąjį tiesinės homogeninės lygties sprendinį.

Tiesinės nehomogeninės lygties

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

bendrojo sprendinio taip pat ieškosime pagal (1) formulę, tarę, kad C yra kintamojo x funkcija:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Įrašę į lygtį, gauname

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Iš čia

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

ir

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C^*.$$

Įrašę $C(x)$ į ieškomąjį sprendinį, gausime tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį

$$y = C^* e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

2. Bernulio metodas. Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties $y' + P(x)y = Q(x)$ sprendinio ieškosime

$$y = u(x)v(x),$$

čia $u(x)$ ir $v(x)$ – tolydžios diferencijuojamos intervale (a, b) funkcijos.

Įrašę į lygtį $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, gauname

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

arba

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Funkciją $v(x)$ parenkame taip, kad ji būtų lygties $v'(x) + P(x)v(x) = 0$ sprendinys. Atskyrę šioje lygtyje kintamuosius, gauname

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C|,$$

$$v = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

(Kadangi pakanka turėti atskirą sprendinį, tai parenkame $C = 1$). Įrašę v į lygtį $u'v = Q(x)$, gauname

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Iš čia

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C^*.$$

Kadangi sprendinys nusakomas formule $y = uv$, tai

$$y = C^* e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx .$$

Pastaba. Kartais pirmos eilės tiesinė diferencialinė lygtis yra tiesinė atžvilgiu $x\,(y)$:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y).$$

Sprendžiame analogiškai $x(y) = u(y)v(y)$.

Į tiesinę lygtį pertvarkoma vadinamoji **Bernulio lygtis**:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n .$$

$P\,(x)$, $Q\,(x)$ – tolydžios funkcijos, n pastovus skaičius. Kai $n = 0$, gaunama tiesinė nehomogeninė lygtis, kai $n = 1$ – homogeninė lygtis:

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)y = 0 .$$

Kai $n \neq 0$ ir $n \neq 1$, dalijame abi lygties puses iš y^n, tarę, kad $y \neq 0$ (kai $n > 0$ $y = 0$ yra sprendinys)

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x).$$

Įvedus naują kintamąjį $z = y^{-n+1}$:

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx}$$

lygtį pertvarkome į tiesinę

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x),$$

kurią lengva išspręsti z atžvilgiu.

Pastaba. Bernulio lygtį galima spręsti ir Bernulio metodu pažymėjus $y = uv$.

1 pavyzdys. Rasime diferencialinės lygties $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $y\,(0) = 0$.

▸ Lygtis yra tiesinė y atžvilgiu. Keičiame $y = uv$, tada $y' = u'v + uv'$ ir, įrašę į duotą lygtį, gauname

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$u\left(v' - v\,tg\,x\right) + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

Funkciją v parenkame tokią, kad būtų:

$$v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0,$$

$$dv = v \cdot \mathrm{tg}\,x \cdot dx,$$

$$\frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,x\,dx,$$

$$\ln|v| = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,$$

$$\ln|v| = -\int \frac{d(\cos x)}{\sin x}, \quad \ln|\,v\,| = -\ln|\cos x\,|, \quad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Įrašę į lygtį, gauname

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, \quad du = dx, \quad u = x + C.$$

Bendrasis duotos lygties sprendinys bus toks:

$$y = \frac{x + C}{\cos x}.$$

Įrašę pradinę sąlygą $x = 0$, $y = 0$ į bendrąjį sprendinį, randame, kad $C = 0$, todėl atskiras sprendinys yra

$$y = \frac{x}{\cos x}. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Rasime lygties $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$ atskirą sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $y(-2) = 1$.

▶ Šią lygtį galima parašyti: $y\dfrac{dx}{dy} = 2y\ln y + y - x$. Tai tiesinė diferencialinė lygtis kintamojo $x = x(y)$ atžvilgiu. Pažymėsime $x = uv$, tada $x' = u'v + uv'$ ir įrašome į duotą lygtį. Gauname

$$yvu' + uyv' = 2y\ln y + y - uv,$$

arba

$$u\left(y\frac{dv}{dy} + v\right) + yv\frac{du}{dy} = 2y \cdot \ln y + y.$$

Pareikalaujame, kad būtų

$$y\frac{dv}{dy}+v=0, \quad \text{t.y.} \quad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y},$$

$$\ln|v|=-\ln|y|, \quad v=\frac{1}{y}.$$

Įrašę v į lygtį, gauname $\frac{du}{dy}=2y\ln y+y$ arba $du=(2y\ln y+y)dy$.

$$u=\int 2y\ln y dy+\int y dy=\int \ln y\, d\left(y^2\right)+\frac{y^2}{2}=$$

$$=y^2\cdot\ln y-\int y^2 d(\ln y)+\frac{y^2}{2}=y^2\ln y-\int y dy+\frac{y^2}{2}=$$

$$=y^2\ln y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C=y^2\ln y+C.$$

Bendrasis duotos lygties sprendinys

$$x=u\cdot v=y\ln y+\frac{C}{y}.$$

Į bendrąjį sprendinį įrašę pradinę sąlygą $x=-2, y=1$, randame $C=-2$, todėl atskirasis sprendinys yra

$$x=y\ln y-\frac{2}{y}. \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį

$$y'-y\cdot \text{tg}x=-y^2\cdot\cos x.$$

Tai yra Bernulio lygtis y atžvilgiu. Sprendinio ieškosime $y=uv$, tada $y'=u'v+uv'$. Įrašę keitinius į lygtį, gauname

$$v\cdot u'+uv'-uv\cdot \text{tg}x=-u^2\cdot v^2\cos x.$$

Sugrupuojame: $u\left(v'-v\,\text{tg}x\right)+v\cdot u'=-u^2v^2\cos x$.

Priėmus, kad $v'-v\,\text{tg}x=0$ arba $\frac{dv}{v}=\text{tg}x\,dx$, $\frac{dv}{v}=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$,

$\ln|v|=-\ln|\cos x|, \quad v=\frac{1}{\cos x}$.

Įrašę v išraišką į lygtį, gauname

$\frac{u'}{\cos x}=-\frac{u^2\cos x}{\cos^2 x}$ arba $\frac{du}{u^2}=-dx \quad (u\neq 0); -\frac{1}{u}=-x-C, \quad u=\frac{1}{C+x}$.

Bendrasis duotos lygties sprendinys yra

$$y = u \cdot v = \frac{1}{(x+C)\cos x}. \blacktriangleleft$$

$y = 0$ – taip pat yra lygties sprendinys.

4 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. (2)

Taikysime konstantų varijavimo metodą. Iš pradžių spręsime tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį

$$y' + 2xy = 0.$$

Atskiriame kintamuosius

$$\frac{dy}{y} = -2xdx, \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx.$$

Homogeninės lygties bendras sprendinys $y = Ce^{-x^2}$.

Nehomogeninės lygties bendro sprendinio ieškosime

$$y = C(x)e^{-x^2} \qquad (3)$$

kur $C(x)$ – nuo x priklausanti funkcija.

Įrašę (3) į (2) lygtį gauname

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

$$C'(x) = 2x \text{ arba } C(x) = \int 2xdx + C, \quad C(x) = x^2 + C.$$

Bendras sprendinys $y = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}$. ◀

5 pavyzdys. Į elektros grandinę su pastoviu induktyvumu L ir aktyviąja varža R paduodama įtampa U, priklausanti nuo laiko t, t.y. $U = f(t)$. Rasime srovės stiprumo i priklausomybę nuo laiko t, jeigu pradiniu laiko momentu $t_0 = 0$ srovės stiprumas i_0.

▶ Panaudoję Kirchhofo dėsnį, sudarome lygtį

$$L\frac{di}{dt} + R_i = f(t), \quad i(0) = i_0.$$

Lygtis yra tiesinė i atžvilgiu. Spręsime Bernulio metodu, tarę, kad

$$i = u(t)v(t), \quad i' = u'v + uv'.$$

Tada

$$Lu'v + Luv' + Ruv = f(t),$$

$$Lu'v + u(Lv' + Rv) = f(t),$$

$$Lv' + Rv = 0, \quad Ldv = -Rvdt, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L}dt, \quad \ln|v| = -\frac{R}{L}t, \quad v = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Įrašę $v = e^{-\frac{R}{L}t}$ į lygtį $Lu'v = f(t)$, gauname

$$Lu'e^{-\frac{R}{L}t} = f(t), \qquad du = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}f(t),$$

$$u = \frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} f(\tau)d\tau + C,$$

$$i = C^* e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} f(\tau)d\tau.$$

Rasime atskirąjį lygties sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $i(0) = i_0$. Įrašę į bendrąjį sprendinį, gauname $i_0 = C^*$.

Tada atskirasis lygties sprendinys yra:

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} f(\tau)d\tau\right). \blacktriangleleft$$

7.6. Pilnojo diferencialo lygtis

Apibrėžimas. Diferencialinė lygtis $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ vadinama **pilnojo diferencialo lygtimi**, jei jos kairioji pusė yra tam tikros funkcijos $u(x,y)$ pilnasis diferencialas

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \ \text{ t.y., } du = 0,\ u(x,y) = C \qquad (1)$$

čia $M(x,y)$, $N(x,y)$ ir jų išvestinės tolydžios srityje D.

Teorema. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ yra pilnojo diferencialo lygtis tada ir tik tada, kai

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \qquad (2)$$

Įrodymas. Būtinumas. Tegul lygtis yra funkcijos $u(x,y)$ pilnasis diferencialas, tai $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

Pirmąją lygybę diferencijuojame pagal y, antrąją pagal x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Kadangi tolydžiosios mišriosios išvestinės lygios, tai

$$\frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y} \text{ būtinumas įrodytas.}$$

Pakankamumas. Įrodysime, kad (2) sąlygos pakanka, kad lygtis būtų pilnojo diferencialo t.y., egzistuoja tokia funkcija $u(x, y)$, tenkinanti (1) sąlygą, t.y.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Sukonstruosime funkciją $u(x, y)$. Integruodami pirmąją lygybę, gauname

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ – diferencijuojama y atžvilgiu funkcija.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Kadangi $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$, tai

$$N(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx + \varphi'(y),$$

$$N(x, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y),$$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y), \quad \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1.$$

Įrašę gautą $\varphi(y)$ išraišką, turime

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1. \qquad (3)$$

Šios funkcijos pilnasis diferencialas lygus

$$du = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx + \frac{\partial N}{\partial y}\,dy.$$

Pakankamumas įrodytas.

Pastaba. Kartais patogiau integruoti antrąją lygybę $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$. Šiuo atveju diferencialinės lygties bendrasis integralas yra toks:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy. \tag{4}$$

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C.$$

1 pavyzdys. Patikrinti, ar $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$ yra pilnojo diferencialo lygtis ir suintegruoti.

▶ Šiuo atveju $M(x,y)=e^{-y}$, $N(x,y)=-\left(2y+xe^{-y}\right)$, $\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-e^{-y}$, $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$, todėl duotoji lygtis yra pilnojo diferencialo lygtis. $M(x,y)$ ir $N(x,y)$ yra tolydžios taške (0, 0), tai galime imti $x_0=0, y_0=0$. Tada $M(x,y_0)=M(x,0)=1$ ir įrašę į (4) formulę gauname

$$u(x,y)=\int_0^x dx+\int_0^y\left(-2y-xe^{-y}\right)dy=x+y^2+xe^{-y}-x=C$$

arba

$$-y^2+xe^{-y}=C. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\left(3xy^2-x^2\right)y'+y^3-2xy=0$.

▶ Patikrinsime, ar teisinga (2) sąlyga $M'_y=N'_x$.

$$M(x,y)=y^3-2xy,\quad N(x,y)=3xy^2-x^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2-2x,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2-2x,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

todėl turime pilnojo diferencialo lygtį. Išspręsime taikydami (3) formulę. Kadangi funkcijos $M(x,y)$, $N(x,y)$ yra tolydžios taške (0, 0), tai galime parinkti $x_0=0$ ir $y_0=0$. Tada $N(x_0,y)=N(0,y)=0$ ir įrašę į formulę, gauname

$$u(x,y)=\int_0^x\left(y^3-2xy\right)dx=y^3x-xy^2=C,$$

$$y^3x - xy^2 = C \text{ bendrasis sprendinys.}$$

Pilnojo diferencialo lygtis galime spręsti ir taip:

1. Integruojame vieną iš lygybių $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ar $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ ir randame $u(x, y)$ išraišką, į kurią įeina laisva funkcija $\varphi(y)$.
2. Sudarome diferencialinę lygtį laisvos funkcijos $\varphi(y)$ atžvilgiu.
3. Surandame laisvą funkciją ir lygties bendrąjį sprendinį. ◀

3 pavyzdys. Išspręsti diferencialinę lygtį

$$(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xydy = 0.$$

▶ Patikrinsime, ar duotoji lygtis yra pilnojo diferencialo lygtis.

$$M(x, y) = \sin xy + xy\cos xy, \quad N(x, y) = x^2 \cos xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y \cdot \sin xy = 2x \cdot \cos xy - x^2 y \sin xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y \cdot \sin xy, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy\cos xy, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos xy.$$

$$u(x, y) = \int x^2 \cos xydy + \varphi(x) = x\sin xy + \varphi(x).$$

Dalinė išvestinė $\frac{\partial u}{\partial x}$ turi būti lygi $\sin xy + xy\cos xy$, iš kur gauname

$$\sin xy + xy\cos xy + \varphi'(x) = \sin xy + xy\cos xy, \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = C.$$

Tokiu būdu $u(x, y) = x \cdot \sin xy + C$. Bendrasis integralas $x\sin xy = C$. ◀

7.7. Uždavinių sprendimas

Norint sudaryti diferencialines lygtis pagal uždavinio sąlygas (mechanines, fizikines, chemines arba technines), reikia rasti priklausomybę tarp kintamųjų dydžių ir jų pokyčių. Kai kurios diferencialinės lygtys gaunamos, nagrinėjant dydžio kitimo greitį arba pagreitį, kurie išreiškiami taip:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

1 pavyzdys. Kūno atvėsimo spartumas proporcingas šio kūno ir aplinkos temperatūrų skirtumui. Kūnas po 20 min. atvėso nuo 100°C iki 60°C. Aplinkos temperatūra 20°C. Rasti kūno temperatūrą po 1 val.

▸ Pažymėjus kūno temperatūrą T, o aplinkos τ, atvėsimo dėsnį galime užrašyti

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - \tau\right),$$

kur $\frac{dT}{dt}$ atvėsimo greitis, $T - \tau$ – kūno ir aplinkos temperatūrų skirtumas, t – laikas, k – proporcingumo koeficientas.

Įrašę $\tau = 20$°C, ir atskyrę kintamuosius, gauname

$$\int \frac{d\left(T-20\right)}{T-20} = -\int k dt,$$

$$\ln\left|T - 20\right| = -kt + \ln C,$$

$$T - 20 = Ce^{-kt}.$$

Panaudoję pradinę sąlygą $T(0) = 100$, rasime konstantą C.

$$100 - 20 = Ce^{0}, \quad C = 80.$$

Proporcingumo koeficientą k rasime iš sąlygos $T = 60$°C, kai $t = 20$ min.

$$60 - 20 = 80e^{-20k}, \; e^{-20k} = \frac{1}{2}, \quad e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}.$$

Suradę konstantas, kūno vėsimo dėsnis yra toks

$$T - 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Po 60 min. kūno temperatūra bus lygi

$$T - 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{20}},$$

$$T\left(60^\circ\right) = 30^\circ C. \;◂$$

2 pavyzdys. Taškas juda tiese pastoviu pagreičiu, lygiu a. Rasti taško judėjimo dėsnį.

▸ Pagal uždavinio sąlygą $\frac{dv}{dt} = a$, todėl $v = at + C_1$.

Tarkime, kad $v = v_0$, kai $t = 0$, todėl $v_0 = 0 + C_1$ ir $C_1 = v_0$.

Tada $v = at + v_0$, bet $V = \frac{ds}{dt}$, todėl $\frac{ds}{dt} = at + v_0$, $ds = \left(at + v_0\right)dt$,

$$\int ds = \int \left(at + v_0\right)dt,$$

$$S=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_2.$$

Tegu $S=S_0$, kai $t=0$, todėl $C_2=S_0$ ir $S=\frac{1}{2}at^2+v_0t+S_0$. ◀

3 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

▶ Spresdami diferencialinę lygtį pirmiausia turime nustatyti lygties tipą (rūšį) ir tik tada taikyti jai tinkamą sprendimo metodą.

Surandame y', $\qquad y'=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}+\dfrac{y}{x}$.

Pažymėkime

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}+\frac{y}{x}.$$

Norėdami patikrinti, ar lygtis homogeninė, vietoje x įrašome tx, o vietoje y įrašome ty; sutvarkius, $f(x,y)$ turi nepasikeisti

$$\frac{\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}}{tx}+\frac{ty}{tx}=\frac{t\sqrt{x^2-y^2}}{tx}+\frac{y}{x}.$$

Lygties dešinė pusė $f(x,y)$ yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija. Taikome keitinį $y=ux$, $y'=u'x+u$. Sutvarkę, gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

$$u'x+u=\sqrt{1-u^2}+u, \qquad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x},$$

$$\arcsin u=\ln|x|+\ln C, \qquad \arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx,$$

$$y=x\sin\ln Cx.$$

Atskirdami kintamuosius dalijome abi lygties puses iš $x\cdot\sqrt{1-u^2}$, todėl galėjome prarasti sprendinius, x negali būti lygus nuliui, o antrasis daugiklis $\sqrt{1-u^2}=0$ duoda du sprendinius $1-\dfrac{y^2}{x^2}=0$. Iš kur $y=x$ ir $y=-x$ lygties sprendiniai. ◀

4 pavyzdys. Išspręsime lygtį $xdy-ydx=x^2\sin xdx$.

▶ Kad būtų lengva nustatyti lygties tipą, padaliję abi lygties puses iš dx, surasime y'. Tada lygtį galima parašyti taip:

$$xy' = y + x^2 \sin x .$$

Matome, kad lygtis tiesinė atžvilgiu y. Spręsime Bernulio metodu. Tegu

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv' .$$

Įrašome šias išraiškas į duotąją lygtį ir gauname

$$xu'v + xv'u = uv + x^2 \sin x \qquad \text{arba} \qquad u(xv' - v) + xu'v = x^2 \sin x .$$

Funkciją v parinksime taip, kad būtų

$$xv' - v = 0 \quad \text{arba} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln v = \ln x, \quad v = x.$$

Įrašę v išraišką į lygtį, gauname

$$x^2 u' = x^2 \sin x \quad \text{arba} \quad du = \sin x dx, \quad u = C - \cos x.$$

Bendrasis lygties sprendinys

$$y = uv = Cx - x\cos x .$$

Dalijome iš x, todėl praradome sprendinį $x = 0$ (jis tinka duotai lygčiai ir jo negalima gauti iš lygties bendrojo sprendinio su jokia konkrečia konstantos C reikšme).

Taigi lygties sprendiniai

$$y = Cx - x\cos x \quad \text{ir} \quad x = 0. \blacktriangleleft$$

5 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y(4-y)dx + 4xdy = 0$.

▸ Atskiriame kintamuosius: abi lygybės puses dalijame iš $y(4-y)x \neq 0$

$$\frac{4dy}{y(y-4)} = \frac{dx}{x} .$$

Integruodami šios lygties abi puses, gauname, kad

$$\int \frac{y-(y-4)}{y(y-4)} dy = \int \frac{dx}{x}, \qquad \text{t.y.} \qquad \int \frac{dy}{y-4} - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\, y-4\,| - \ln|\, y\,| = \ln|\, x\,| + \ln C \qquad \text{arba} \qquad \frac{y-4}{y} = Cx .$$

Iš čia randame bendrąjį sprendinį:

$$y = \frac{4}{1 - Cx} .$$

Ištirsime lygties $y(y-4) = 0$ šaknis. Įrašę šios lygties šaknis $y = 0$ ir $y = 4$ į duotąją diferencialinę lygtį, matome, kad jos tinka. Vadinasi, $y = 0$ ir $y = 4$ yra taip pat duotosios diferencialinės lygties sprendiniai, kurių antrasis gaunamas iš bendrojo sprendinio, imant $C = 0$. ◂

6 pavyzdys. Rasime lygties $\frac{ds}{dt}\sin t + 2s\cos t = \sin 2t$ atskirą sprendinį, esant pradinėms sąlygoms: $s = \frac{1}{3}$, kai $t = \frac{\pi}{6}$.

▶ Šioje lygtyje s, s' yra tik pirmųjų laipsnių, todėl tai pirmos eilės tiesinė diferencialinė lygtis kintamojo s atžvilgiu. Lygtį spręsime Lagranžo metodu. Pradžioje rasime atitinkamos homogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$\frac{ds}{dt}\sin t + 2s\cos t = 0 .$$

Atskyrę kintamuosius: $\frac{ds}{s} = -2\frac{\cos t}{\sin t}dt$ ir suintegravę, gauname, kad $\ln s = -2\ln\sin t + \ln C$, iš čia

$$s = \frac{C}{\sin^2 t}. \tag{1}$$

C laikysime kintamojo t funkcija. Tuomet

$$s = \frac{C(t)}{\sin^2 t} \quad \text{ir} \quad s' = \frac{C'(t)\sin t - 2C(t)\cos t}{\sin^3 t}.$$

Įrašę šias reikšmes į duotąją lygtį, gauname, kad

$$\frac{C'(t)}{\sin t} - \frac{2C(t)\cos t}{\sin^2 t} + \frac{2C(t)\cos t}{\sin^2 t} = 2\sin t\cos t, \quad C'(t) = 2\sin^2 t\cos t;$$

ir suintegravę šią lygtį, randame:

$$C(t) = \frac{2}{3}\sin^3 t + C.$$

Tuomet, įrašę surastą $C(t)$ reikšmę į (1) lygybę, gauname duotosios lygties bendrąjį sprendinį:

$$s = \frac{2}{3}\sin t + \frac{C}{\sin^2 t}.$$

Atskiram sprendiniui rasti panaudojame pradines sąlygas. Įrašę jas į bendrąjį sprendinį, gauname:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 4C;$$

iš čia $C = 0$.

Tuomet ieškomas atskiras sprendinys bus

$$s(t) = \frac{2}{3}\sin t. \blacktriangleleft$$

7 pavyzdys. Išspręsime lygtį $\left(x^2y^3+xy\right)y'=1$.

▸ Duotąją lygtį parašę šitaip $\frac{dx}{dy}-xy-x^2y^3=0$, matome, kad ji, laikant y nepriklausomu kintamuoju, o x – jo funkcija, yra Bernulio lygtis. Padaliję šią lygtį iš x^2, gauname:

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}-\frac{y}{x}-y^3=0.$$

Pažymėję naują kintamąjį $\frac{1}{x}=z,\quad -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}=\frac{dz}{dy}$, turėsime, kad $\frac{dz}{dy}+zy+y^3=0$ arba $\frac{dz}{dy}+zy=-y^3$. Gautą tiesinę diferencialinę lygtį sprendžiame konstantų varijavimo metodu: $\frac{dz}{dy}+zy=0$; atskyrę kintamuosius, turėsime, kad $\frac{dz}{z}+ydy=0$; suintegravę gauname: $\ln z=-\frac{1}{2}y^2+\ln C$; iš čia randame, kad $z=Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. (2)

Toliau šiame sprendinyje C laikome y funkcija,t.y. $z=C(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$ ir randame, kad $z'(y)=C'(y)e^{-\frac{y^2}{2}}-C(y)\cdot ye^{-\frac{y^2}{2}}$. Įrašę gautas z ir z' reikšmes į lygtį, gauname, kad $C'(y)e^{-\frac{y^2}{2}}-C(y)ye^{-\frac{y^2}{2}}+C(y)ye^{-\frac{y^2}{2}}+y^3=0$, iš kur $C'(y)=-y^3e^{\frac{y^2}{2}}$, suintegravę randame:

$$C(y)=-\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy=-y^2e^{\frac{y^2}{2}}+2\int ye^{\frac{y^2}{2}}dy=-y^2e^{\frac{y^2}{2}}+2e^{\frac{y^2}{2}}+C,$$

t.y. $C(y)=-y^2e^{\frac{y^2}{2}}+2e^{\frac{y^2}{2}}+C$.

Įrašę šią $C(y)$ reikšmę į (2) lygybę ir padarę keitinį $z=\frac{1}{x}$, gauname duotosios lygties bendrąjį sprendinį: $\frac{1}{x}=2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. ◂

8 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $x^2(x-1)y'-x(x-2)y=y^2$.

▶ Šioje lygtyje, kaip ir tiesinėje yra nariai su funkcijos y ir jos išvestinės y' pirmaisiais laipsniais, bet dar yra narys su antruoju funkcijos laipsniu y^2. Taigi lygtis yra Bernulio lygtis y atžvilgiu. Bernulio lygtį spręsime, panašiai kaip ir tiesinę lygtį, Bernulio metodu, išreiškiant jos bendrąjį sprendinį dviejų funkcijų sandauga, t.y.

$$y=u(x)\cdot v(x) \qquad y'=u'v+uv'.$$

Įrašę šias y, y' reikšmes į duotąją lygtį, turėsime

$$x^2(x-1)(u'v+uv')-x(x-2)uv-u^2v^2=0,$$

arba

$$x^2(x-1)u'v+u\left(x^2(x-1)v'-x(x-2)v\right)-u^2v^2=0.$$

Parenkame tokią v reikšmę, kad $v'-\dfrac{x-2}{x(x-1)}v=0$.

Atskyrę čia kintamuosius ir suintegravę gausime

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{x-2}{x(x-1)}dx, \quad v=\frac{x^2}{x-1}.$$

Įrašę šią v reikšmę į lygtį, turėsime $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u^2}{(x-1)^2}$, ją suintegravę, gauname

$$u=\frac{x-1}{C(x-1)+1}.$$

Tuomet duotosios lygties bendrasis sprendinys bus toks

$$y=\frac{x^2}{C(x-1)+1}. \blacktriangleleft$$

9 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $\dfrac{3y^2-x^2}{x^4y}dx-\dfrac{x^2+y^2}{x^3y^2}dy=0$.

▶ Lygtis yra pilnojo diferencialo lygtis, nes

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x^2+3y^2}{x^4y^2};$$

čia

$$M(x,y)=\frac{3y^2-x^2}{x^4y}, \quad N(x,y)=-\frac{x^2+y^2}{x^3y^2}.$$

Lygties bendruoju integralu yra tokia funkcija $u(x, y) = C$, kuri tenkina sąlygas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3y^2 - x^2}{x^4 y} \ (*), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2}{x^3 y^2} \ (**).$$

Suintegruojame (*) lygybę kintamojo x atžvilgiu, kintamąjį y laikydami pastoviu. Vietoj integravimo konstantos C rašome kintamojo y laisvą funkciją $\varphi(y)$.

$$u(x, y) = \int\left(3yx^{-4} - \frac{x^{-2}}{y}\right)dx = -\frac{y}{x^3} + \frac{1}{xy} + \varphi(y). \qquad (3)$$

Gauname $u(x, y)$ išraišką, į kurią įeina laisvoji funkcija.

Randame $u(x, y)$ dalinę išvestinę y atžvilgiu

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y)$$

ir prilyginę $N(x, y)$ (iš lygybės **), gauname $\varphi'(y) = 0$. Iš čia $\varphi(y) = C$. Įrašę šią reikšmę į (3) išraišką, gauname bendrąjį sprendinį

$$u(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{y}{x^3} = C. \blacktriangleleft$$

7.8. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Izoklinų metodu nubraižykite integralines kreives:

1.1. $y' = 2x - y$; **1.2.** $y' = x + 1$; **1.3.** $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$;

1.4. $y' = 1 - x$; **1.5.** $y' = -\dfrac{y}{x}$.

2. Išspręskite diferencialines lygtis:

2.1. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + \dfrac{(2 - e^x)}{\cos^2 y} dy = 0$; **2.2.** $x\sqrt{1+y^2} + y \cdot y'\sqrt{1+x^2} = 0$

2.3. $y^2 \cdot \sin x dx + \cos^2 x \cdot \ln y dy = 0$; **2.4.** $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$;

2.5. $e^{-y}(1 + y') = 1$; **2.6.** $xy' = y + x\cos^2 \dfrac{y}{x}$;

2.7. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; **2.8.** $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$;

2.9. $(2x - y^2)y' = 2y$; **2.10.** $xy' + y = y^2 \ln x$;

2.11. $3xy^2 \cdot y' - 2y^3 = x^3$; **2.12.** $y' - 2y \cdot e^x = 2\sqrt{y}\, e^x$;

2.13. $\left(x^3 + e^y\right)y' = 3x^2$; **2.14** $x\left(2x^2 + y^2\right) + y\left(x^2 + 2y^2\right)y' = 0$;

2.15. $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx + \left(2y - x + 3y^2\right)dy = 0$.

3. Raskite atskiruosius sprendinius:

3.1. $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$; **3.2.** $y \ln y\, dx + x dy = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1$;

3.3. $x^2 + xy' = y, \quad y\big|_{x=1} = 0$; **3.4.** $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}, \quad y\big|_{x=0} = 0$;

3.5. $y' + y\cos x = \cos x, \quad y\big|_{x=0} = 1$.

4.1. Duona per 10 min. ataušo nuo 100° iki 60°. Aplinkos temperatūra lygi 20°. Per kiek laiko duona atauš iki 25°?

4.2. Bakterijų dauginimosi spartumas proporcingas jų kiekiui. Koks bakterijų skaičius bus po 9 valandų, jei stebėjimo pradžioje jų buvo 100, o po 3 valandų – 200.

4.3. Miesto gyventojų didėjimo greitis proporcingas jų skaičiui. Apskaičiuokite, kiek gyventojų bus Kaune 2000 m. sausio 15 d., jei žinome, kad 1990 m. sausio 15 dieną Kaune gyveno 420 tūkstančių gyventojų, o per metus jų padaugėjo 1,5%.

Atsakymai

2.1. $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\left(2 - e^x\right)^3} = C$. **2.2.** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. **2.3.** $y = \left(1 + Cy + \ln y\right)\cos x$.

2.4. $y = \sin\left[C + \ln\left(1 + x^2\right)\right]$. **2.5.** $e^x = C\left(1 - e^{-y}\right)$. **2.6.** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln Cx$.

2.7. $y = xe^{1+Cx}$. **2.8.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2, y = x$. **2.9.** $x = Cy - \dfrac{y^2}{2}$.

2.10. $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}$. **2.11.** $y^3 = x^3 + Cx^2$. **2.12.** $\sqrt{y} + 1 = Ce^{e^x}$.

2.13. $x^3 e^{-y} = C + y$. **2.14.** $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$. **2.15.** $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$.

3.1. $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **3.2.** $y = 1$. **3.3.** $y = x - x^2$. **3.4.** $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. **3.5.** $y = 1$. **4.1.** 40 min.

4.2. ≈ 900. **4.3.** $\approx 490 \cdot 10^3$.

8. AUKŠTESNIŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS

8.1. Bendrosios sąvokos

n – tosios eilės diferencialine lygtimi vadiname lygtį

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Nagrinėsime išreikštinę lygties formą:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \quad n \geq 2. \tag{1'}$$

Bendrasis (1) bei (1') lygčių sprendinys priklauso nuo n konstantų $y = y\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$. Dažnai tenka ieškoti ne visų sprendinių aibės, bet vieno konkretaus sprendinio, tenkinančio iš anksto nurodytas sąlygas.

Koši uždavinys. Duota (1') lygtis ir pradiniai duomenys – skaičiai $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}$. Reikia rasti lygties sprendinį $y = y(x)$, tenkinantį pradines sąlygas

$$y\left(x_0\right) = y_0;\ y'\left(x_0\right) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Kai $n = 2$, Koši uždavinys antros eilės diferencialinei lygčiai formuluojamas taip:

Duota lygtis

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{3}$$

ir pradiniai duomenys x_0, y_0, y_0'. Rasti sprendinį $y = y(x)$, tenkinantį pradines sąlygas

$$y\left(x_0\right) = y_0;\ y'\left(x_0\right) = y_0', \tag{4}$$

arba (geometriškai) rasti integralinę kreivę $y = y(x)$, einančią per tašką $\left(x_0, y_0\right)$, kurios liestinės krypties koeficientas yra y_0'. Toliau nagrinėsime tik (1') tipo diferencialines lygtis, išspręstas aukščiausios eilės išvestinės atžvilgiu. Tokioms lygtims sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema formuluojama analogiškai kaip pirmos eilės diferencialinėms lygtims.

Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema.

Jei (1') lygties dešinėje pusėje esanti $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ srityje D tenkina šias sąlygas:

1. $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ yra tolydi visų argumentų atžvilgiu, o todėl ir aprėžta;

2. tolydžiosios išvestinės $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ yra aprėžtos srityje D,

tai yra tokia taško x_0 aplinka $(x_0 - h; x_0 + h)$, kurioje egzistuoja vienintelis sprendinys $y(x)$, tenkinantis, nurodytas pradines sąlygas

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Šią teoremą, kai $n = 2$ iliustruoja

1 pavyzdys. Įsitikinsime, kad lygtis $y'' = e^{-x^2} y + \sin y'$, kai x_0, y_0, y_0' – bet kurių realiųjų skaičių trejetas, turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

▶ Iš tikrųjų $f(x, y, y') = e^{-x^2} y + \sin y'$, yra tolydžioji funkcija visų kintamųjų x, y, y' atžvilgiu bet kurioje trimatės erdvės R^3 srityje D ir jos dalinės išvestinės $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2}, \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$ yra aprėžtos:

$$0 \le e^{-x^2} \le 1 \text{ ir } |\cos y'| \le 1 \quad \forall (x, y, y') \in D \subset R^3. \blacktriangleleft$$

Apibrėžimas. n – tos eilės diferencialinės lygties (1) (arba (1')) bendruoju sprendiniu vadinama funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kuri:

1. tenkina lygtį (1) (arba (1')) su bet kuriomis $C_1, C_2, \ldots, C_n$ reikšmėmis;
2. esant duotoms pradinėms sąlygoms (2), priklausančioms sričiai D, visada galima vieninteliu būdu nustatyti konstantas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kad funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ tenkintų šias pradines sąlygas.

Kai bendrasis sprendinys užrašytas neišreikštąja forma

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{5}$$

tai ši lygybė vadinama bendruoju integralu. Sprendinys $y = \varphi(x)$, gaunamas iš bendrojo sprendinio $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, įrašius konkrečias konstantų $C_1, C_2, \ldots, C_n$ reikšmes, vadinamas atskiruoju sprendiniu. Tokiu pat būdu iš (5) lygybės gauname atskirąjį integralą

$$\Phi(x, y) = 0.$$

8.2. Antros eilės diferencialinių lygčių atskiri atvejai

Antros eilės diferencialinių lygčių sprendinių egzistavimo pakankamos sąlygos nurodytos sprendinių egzistavimo ir vienaties teoremoje, tačiau išreikšti šiuos sprendinius baigtine forma galima tik atskirais atvejais. Antros eilės diferencialinė lygtis gali turėti pavidalą $F(x, y, y', y'') = 0$ arba $y'' = f(x, y, y')$. Nagrinėsime paprasčiausias II – os eilės diferencialines lygtis, kurias galima išspręsti arba pertvarkyti į pirmos eilės diferencialines lygtis.

a) $y'' = f(x)$. Lygties išraiškoje nėra nei y, nei y'. Nuosekliai integruodami tokią lygtį 2 kartus, gauname jos bendrąjį sprendinį:

$y' = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1$; dar kartą integruojame ir gauname

$$y = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2 .$$

1 pavyzdys. Rasime lygties $y'' = 2x$ bendrąjį sprendinį.

$$\blacktriangleright\ y' = \int 2x\,dx = x^2 + C_1, \quad y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 .$$

b) $F(x, y', y'') = 0$. Lygtyje nėra ieškomosios funkcijos y. Pakeitę kintamuosius $y' = z,\ y'' = z'$, gausime pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, z, z') = 0 . \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0,\ x \neq 0$.

▶ Pakeitę $y' = z,\ y'' = z'$, gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$z' - \frac{z}{x} = 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad z = C_1 x .$$

Įrašę $z = y'$, gauname bendrąjį sprendinį:

$$y' = C_1 x \quad dy = C_1 x\,dx, \quad y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 . \blacktriangleleft$$

c) $F(y, y', y'') = 0$. Lygtyje nėra nepriklausomo kintamojo x. Lygties eilę galima sumažinti, laikant kintamuoju y. Žymime $y' = p$. Tada

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p .$$

Šiuo atveju kintamasis p bus funkcija nuo y $p = p(y)$, o ne nuo x kaip anksčiau. Įrašę y' ir y'' išraiškas gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį atžvilgiu p:

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0.$$

3 pavyzdys. Išspręsti Koši uždavinį $y'' = 2y^3$, $y\,\big|_{x=0} = 1$, $y'\,\big|_{x=0} = 1$.

▸ Lygtyje nėra kintamojo x, tačiau yra kintamasis y. Naudojame keitinį $y' = p(y)$. Tuomet $y'' = \dfrac{dp}{dy} p$. Su nauju kintamuoju lygtis atrodys taip:

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^3.$$

Atskyrus kintamuosius ir suintegravus bus

$$p^2 = y^4 + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^4 + C_1}.$$

Panaudoję pradines sąlygas, gauname

$$1 = +\sqrt{1 + C_1},$$
$$C_1 = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = +y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = dx, \quad -\frac{1}{y} = x + C_2, \quad -1 = 0 + C_2, \quad C_2 = -1.$$

Atskiras sprendinys $y = \dfrac{1}{1-x}$. ◂

d) Nagrinėkime diferencialinę lygtį $F(x, y, y', y'') = 0$, kurios kairioji pusė yra tam tikros diferencialinės išraiškos pirmos eilės išvestinė

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y').$$

Integruodami šią lygtį, gauname pirmos eilės lygtį $\Phi(x, y, y') = C_1$.

4 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

▸ Kadangi $\dfrac{d}{dx}(y \cdot y') = y \cdot y'' + (y')^2$, tai

$$\frac{d}{dx}(y \cdot y') = 0, \quad yy' = C_1, \quad ydy = C_1 dx, \quad \frac{y^2}{2} = C_1 x + \frac{C_2}{2}, \quad y^2 = 2C_1 x + C_2. \ ◂$$

8.3. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Ištirti masės m taško judesį x ašyje, veikiant jėgai $f(x)$, jei laiko momentu $t=t_0$, taško koordinatė buvo x_0, o jo greitis – v_0.

▸ Antrojo Niutono dėsnio matematinė išraiška yra diferencialinė lygtis $m\ddot{x}=f(x)$. Išspręsime ją ir rasime tą sprendinį, kuris tenkina sąlygas

$$x(t_0)=x_0,\quad \dot{x}(t_0)=v_0,$$

kur taškais pažymėtos išvestinės pagal laiką t. Padauginę abi lygties puses iš $\dot{x}dt$, gauname abiejose pusėse pilnus diferencialus ir, integruodami bei įstatydami pradines reikšmes, išvedame vadinamąjį energijos integralą:

$$m\ddot{x}\dot{x}dt=f(x)\dot{x}dt,\qquad m\dot{x}d\dot{x}=f(x)dx,$$

$$\int_{x_0}^{x} m\dot{x}d\dot{x}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx,\quad \frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{x_0}^{x} f(y)dy.$$

Integralas rodo, kad kinetinės energijos pokytis yra lygus jėgos atliktam darbui. Išreikšdami išvestinę

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(y)dy},$$

imame kvadratinės šaknies ženklą, lygų v_0 ženklui, kad būtų išpildyta antroji pradinė sąlyga. Atskyrę kintamuosius ir suintegravę vieną lygties pusę nuo x_0 iki x, antrąją – nuo t_0 iki t, gauname Koši uždavinio sprendinį:

$$\pm\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{z} f(y)dy}}=t-t_0.\ ◂$$

2 pavyzdys. Išspręsime lygtį $2y\cdot y''=y'^2+1$.

▸ Lygtyje nėra nepriklausomo kintamojo x. Lygties eilę galima sumažinti pažymėjus $y'=p(y)$, $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$. Tada $2ypp'=p^2+1$. Gauname pirmos eilės diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{2pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y},\quad y\neq 0,\quad \ln\left(p^2+1\right)=\ln|y|+\ln C,$$

$$p^2+1=Cy\,,\quad p=\pm\sqrt{Cy-1}\,,\quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{Cy-1},\quad \pm\frac{dy}{\sqrt{Cy-1}}=dx\,,$$

$$\pm\int(Cy-1)^{-\frac{1}{2}}dy=\int dx\,,\quad \pm\frac{2}{C}(Cy-1)^{\frac{1}{2}}=x+C_2\,.$$

Bendrasis sprendinys $4(Cy-1)=C^2(x+C_2)^2$. ◂

3 pavyzdys. Rasime lygties $y''(1-x^2)=(1-x^2)+x(y'-x)$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=10$, $y'(0)=1$.

▸ Lygtyje nėra ieškomosios funkcijos y. Žymėkime $y'=z$; tuomet $y''=z'$, ir duotąją lygtį galėsime šitaip parašyti:

$$z'=1+\frac{x(z-x)}{1-x^2}\quad \text{arba}\quad z'-\frac{x}{1-x^2}z-\frac{1-2x^2}{1-x^2}=0\,.$$

Atžvilgiu z gauname pirmos eilės tiesinę diferencialinę lygtį. Ją spręsime Lagranžo metodu. Pradžioje nagrinėsime homogeninę lygtį: $\frac{dz}{dx}-\frac{xz}{1-x^2}=0$;

atskyrę kintamuosius $\frac{dz}{z}=\frac{xdx}{1-x^2}$ ir suintegravę, turėsime

$$\ln z=-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\ln C\,,\quad z=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dabar C laikysime kintamojo x funkcija $C=C(x)$.

$$z'=\frac{C'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}+C(x)\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{(1-x^2)C'(x)+C(x)\cdot x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Įrašę z, z' reikšmes į pradinę lygtį, gauname

$$\frac{(1-x^2)C'(x)+C(x)\cdot x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{C(x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-2x^2}{1-x^2}=0\,.$$

$$C'(x)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Iš čia $C(x)=\int\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Panaudoję keitinį $x=\sin t$, integruojame:

$$\int\frac{1-2\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t dt=\int 1-(1-\cos 2t)dt=\int\cos 2t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2t+C_1=\frac{1}{2}2\sin t\cos t+C_1=x\cdot\sqrt{1-x^2}+C_1=C(x).$$

Įrašę $C(x)$ reikšmę, gauname kad

$$z=x+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{arba} \quad \frac{dy}{dx}=x+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}},\quad dy=\left(x+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

Suintegravę šią lygtį, gauname jau duotosios lygties bendrąjį sprendinį:

$$y=\frac{x^2}{2}+C_1\arcsin x+C_2.$$

Panaudojame pradines sąlygas:

$$10=C_2,\quad y'=x+C_1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad 1=0+C_1\frac{1}{\sqrt{1-0^2}},\quad C_1=1.$$

Tuomet atskirasis sprendinys:

$$y=\frac{x^2}{2}+\arcsin x+10. \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y''+y'^2=2e^{-y}$.

▶ Lygtyje nėra nepriklausomo kintamojo x. Lygties eilę galima sumažinti įvedus naują kintamąjį $y'=p(y), y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$. Tada $\frac{dp}{dy}\cdot p+p^2=2e^{-y}$ – Bernulio diferencialinė lygtis. Keitiniu $p^2=z$ lygtis suvedama į tiesinę diferencialinę lygtį:

$$\frac{dz}{dy}+2z=4e^{-y}, \text{ kurią spręsime Bernulio metodu.}$$

Įrašome keitinį $z=uv,\quad z'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+2uv=4e^{-y},\quad u'v+u(v'+2v)=4e^{-y},\quad v'+2v=0,$$

$$\frac{dv}{dy}=-2v,\quad \frac{dv}{v}=-2dy,\quad \ln|v|=-2y.$$

$$v=e^{-2y},\quad u'e^{-2y}=4e^{-y},\quad \frac{du}{dy}e^{-y}=4,\quad du=4e^{y}dy.$$

$$u=4e^{y}+C_1,\quad z=\left(4e^{y}+C_1\right)\cdot e^{-2y}=4e^{-y}+C_1e^{-2y}.$$

Prisiminus , jog $p^2=z$, $p=y'$, tenka spręsti dar vieną pirmos eilės lygtį:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4e^{-y}+C_1e^{-2y},\quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}}.$$

Atskyrę kintamuosius, gauname

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}}}=dx,\quad \pm\frac{dy}{e^{-y}\sqrt{C_1+4e^{y}}}=dx,$$

$$\pm\frac{1}{4}\int\frac{d\left(4e^{y}+C_1\right)}{\sqrt{4e^{y}+C_1}}=x+C_2,\quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y}+C_1}=x+C_2.$$

Tada $\pm\sqrt{e^{y}+\widetilde{C}_1}=x+C_2$, $\widetilde{C}_1=\dfrac{C_1}{4}$, $e^{y}+\widetilde{C}_1=(x+C_2)^2$ – bendrasis integralas, o $y=\ln\left|(x+C_2)^2-\widetilde{C}_1\right|$ – bendrasis lygties sprendinys.

8.4. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Išspręskite diferencialines lygtis:

1.1. $y''=2x\ln x$. **1.2.** $xy''=\left(1+2x^2\right)y'$.

1.3. $xy''=y'+x^2$. **1.4.** $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

1.5. $y''=1+y'^2$. **1.6.** $y''=y'(1+y')$.

1.7. $xy''=y'$. **1.8.** $xy''+y'=0$.

2. Raskite atskiruosius sprendinius:

2.1. $y''(x+2)^5=1;\ y(-1)=\dfrac{1}{12},\quad y'(-1)=-\dfrac{1}{4}$.

2.2. $y''=xe^{x};\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$.

2.3. $2y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y};\quad y(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{5},\quad y'(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.4. $y''=y'\ln y;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$. **2.5.** $y''=2yy';\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$.

2.6. $3y'y''=2y;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$. **2.7.** $2y''=3y^2;\quad y(-2)=1,\quad y'(-2)=-1$.
2.8. $y^3y''=-1;\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0$.

3.1. Materialusis taškas, kurio masė m juda tiese, nuo pradinio taško O, veikiamas stūmos (atstūmimo) jėgos atvirkščiai proporcingos taško atstumui $OM=x$, pakeltam trečiuoju laipsniu. Parašyti taško judėjimo dėsnį.

3.2. Meteoritas, kurio masė m, krenta iš tam tikro aukščio greičiu v. (Krintantį kūną veikia pasipriešinimo jėga proporcinga greičio kvadratui). Parašyti meteorito judėjimo dėsnį.

3.3. Apskaičiuokite laiką, kuris reikalingas nukristi meteoritui iš 400000 km aukščio ant Žemės, jei Žemės spindulys lygus 6400 km. (Pasipriešinimo jėgos nepaisyti).

Atsakymai

1.1. $y=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{5}{18}x^3+C_1x+C_2$. **1.2.** $y=C_1e^{x^2}+C_2$. **1.3.** $y=\dfrac{x^3}{3}+$ $+C_1x^2+C_2$. **1.4.** $y=\left(C_1x-C_1^2\right)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. **1.5.** $y=C_2-\ln|\cos(C_1+x)|$.
1.6. $y=C_2-\ln\left|1-e^{x+C_1}\right|$. **1.7.** $y=C_1x^2+C_2$. **1.8.** $y=C_1\ln|x|+C_2$.

2.1. $y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$. **2.2.** $y=(x-2)e^x+x+2$. **2.3.** $y=\dfrac{\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}$. **2.4.** $y=x$.

2.5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. **2.6.** $y=\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3$. **2.7.** $y=\dfrac{4}{(x+4)^2}$. **2.8.** $y=\sqrt{2x-x^2}$.

3.1. $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{k}{x^3},\quad x^2=\dfrac{a^2}{C_1}(C_2+t)^2+C_1,\quad a^2=\dfrac{k}{m}$.

3.2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=mg-k\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2,\quad x=\dfrac{m}{k}\ln\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2},\quad a=\sqrt{\dfrac{kg}{m}}$.

3.3. $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{k}{x^2}$, x – atstumas nuo Žemės centro $t\approx 122$ h.

8.5. Antros eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygtys

1 apibrėžimas. Diferencialinė antros eilės lygtis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

čia $p_i(x)$ tolydžios atkarpoje $[a, b]$ funkcijos, vadinama **tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi.**

Jei $f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b]$, tai lygtį

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

vadiname **homogenine tiesine** diferencialine lygtimi, **atitinkančia (1) tiesinę nehomogeninę diferencialinę lygtį.**

1 teorema. Jei y_1 ir y_2 yra du homogeninės lygties (2) sprendiniai, tai jų suma $y_1 + y_2$ taip pat yra sprendinys.

▶ Kadangi y_1 ir y_2 sprendiniai, tai

$$\begin{aligned} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0, \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Įrašę sumą $y_1 + y_2$ į (1) lygtį ir turėdami galvoje (3) tapatybes turime

$$(y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + (y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) = 0 + 0 = 0,$$

t.y. $y_1 + y_2$ yra sprendinys.

2 teorema. Jei $y_1(x)$ yra homogeninės (2) lygties sprendinys, tai $Cy_1(x)$ taip pat yra (2) lygties sprendinys.

▶ Kadangi y_1 yra (2) lygties sprendinys, tai

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 .$$

Įrašę $y = Cy_1$ į (2) lygtį turime

$$(Cy_1)'' + p_1(x)(Cy_1)' + p_2(x)(Cy_1) = C(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) = C \cdot 0 = 0 .$$

1 išvada. Jei y_1 ir y_2 yra du homogeninės (2) lygties sprendiniai, tai jų tiesinis darinys $C_1y_1 + C_2y_2$ taip pat yra sprendinys.

3 teorema. Jei kompleksinė funkcija $y = u(x) + iv(x)$ yra homogeninės lygties sprendinys, tai šios funkcijos realioji ir menamoji dalys taip pat yra šios lygties sprendiniai.

▸ Kadangi $u(x)+iv(x)$ yra lygties $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ sprendinys, tai

$$\left(u(x)+iv(x)\right)''+p_1(x)\left(u(x)+iv(x)\right)'+p_2(x)\left(u(x)+iv(x)\right)=0.$$

Atskyrę realiąją ir menamąją dalis turime:

$$u''(x)+p_1(x)u'(x)+p_2(x)u(x)+i\left(v''(x)+p_1(x)v'(x)+p_2(x)v(x)\right)=0.$$

Kompleksinė funkcija lygi nuliui tada ir tik tada, kai realioji ir menamoji dalys lygios nuliui, t.y.

$$u''(x)+p_1(x)u'(x)+p_2(x)u(x)=0,$$
$$v''(x)+p_1(x)v'(x)+p_2(x)v(x)=0.$$

Taigi $u(x)$ ir $v(x)$ yra homogeninės lygties sprendiniai.

2 apibrėžimas. Funkijos $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ vadinamos **tiesiškai priklausomomis** atkarpoje $[a, b]$, jei egzistuoja tokie skaičiai α_1 ir α_2, abu kartu nelygūs nuliui, kad lygybė

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\equiv 0$$

yra teisinga su visais $x\in[a,b]$.

Jei ši lygybė teisinga, tik tada, kai $\alpha_1=\alpha_2=0$, tai $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ vadinamos **tiesiškai nepriklausomomis** funkcijomis.

Iš apibrėžimo gauname: jei santykis $\dfrac{y_1}{y_2}=\text{const}\ \forall x\in[a,b]$, tai $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ tiesiškai priklausomos, ir tiesiškai nepriklausomos, jei $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\text{const},\ \forall x\in[a,b]$.

1 pavyzdys. Nagrinėkime lygtį $y''-y=0$. Lengva patikrinti, kad funkcijos $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^x$ yra lygties sprendiniai. Funkcijos e^x ir e^{-x} tiesiškai nepriklausomos $\dfrac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}\neq\text{const}$., o funkcijos e^x ir $3e^x$ tiesiškai priklausomos, nes $\dfrac{3e^x}{e^x}=3=\text{const}$.

3 apibrėžimas. Tegul funkcijos $y_1(x), y_2(x)$ diferencijuojamos $\forall x\in[a,b]$. Determinantas

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

vadinamas Vronskio determinantu.

4 teorema. Jei funkcijos $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ tiesiškai priklausomos $[a, b]$, tai $W(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b]$.

▶ Jei $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ tiesiškai priklausomos, tai egzistuoja tokia konstanta λ, kad $y_2 = \lambda y_1$. Aišku, kad tada, $y_2' = \lambda y_1'$, ir Vronskio determinantas lygus nuliui:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Tai būtina sąlyga, kad funkcijos $y_1(x), y_2(x)$ būtų tiesiškai priklausomos. Atvirkščias teiginys nėra teisingas t.y. Vronskio determinantas gali būti $W(x) \equiv 0$ ir tuo atveju, kai $y_1(x), y_2(x)$ tiesiškai nepriklausomos kuriame nors intervale.

4 apibrėžimas. Bet kurie du tiesiškai nepriklausomi tiesinės homogeninės diferencialinės lygties sprendiniai sudaro **pagrindinę** arba **fundamentaliąją sprendinių sistemą.**

5 teorema. Jei Vronskio determinantas, sudarytas iš homogeninės diferencialinės lygties sprendinių $y_1(x)$ ir $y_2(x)$, nelygus nuliui taške $x_0 \in (a, b)$, tai jis nelygus nuliui nė viename šio intervalo taške.

▶ Tegu $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ du homogeninės lygties sprendiniai:

$$y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0,$$

$$y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 = 0.$$

Pirmąją lygtį padauginę iš y_1, o antrą iš y_2 ir atėmę gausime:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + p_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \qquad (4)$$

Skirtumas antruose skliaustuose yra Vronskio determinantas

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Skirtumas esantis pirmuose skliaustuose yra Vronskio determinanto išvestinė:

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' =$$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Todėl (4) lygybę galima užrašyti

$$W' + p_1 W = 0.$$

Sprendžiame šią lygtį:

$$\frac{dW}{dx}=-p_1W, \qquad \frac{dW}{W}=-p_1\,dx,$$

$$\ln|W|=-\int_{x_0}^{x}p_1(x)\,dx+\ln C,$$

$$W=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx}. \tag{5}$$

Gautoji (5) formulė vadinama Ostrogradskio ir Liuvilio formule. Kai $x=x_0$, $W(x_0)=C$. Pažymėję $W(x_0)=W_0$ gauname, kad sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $W(x_0)=W_0$,

$$W=W_0e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx}. \tag{6}$$

Pagal sąlygą $W(x_0)=W_0\neq 0$, bet tada iš (6) turime, kad $W(x)\neq 0$ su jokia x reikšme, nes rodiklinė funkcija nevirsta nuliumi.

2 išvada. Jei Vronskio determinantas lygus nuliui, kai $x=x_0$, tai jis tapatingai lygus nuliui:

$$W(x)\equiv 0, \quad \forall x\in(a,b).$$

▶ Iš (6) formulės turime: jei $W(x_0)=0$, tai $W(x)\equiv 0, \quad \forall x\in(a,b)$.

3 išvada. Jei funkcijos $y_1(x)$ ir $y_2(x)$, kai $x\in(a,b)$ yra tiesiškai nepriklausomi (2) lygties sprendiniai, tai Vronskio determinantas

$$W(y_1,y_2)\neq 0, \quad \forall x\in(a,b).$$

Suformuluosime dar vieną svarbią teoremą.

6 teorema (funkcijų tiesiško nepriklausomumo pakankama sąlyga). Jeigu Vronskio determinantas bent viename taške $x_0\in(a,b)$ nelygus nuliui, tai funkcijos $y_1(x), y_2(x)$ yra tiesiškai nepriklausomos intervale (a, b).

7 teorema (apie bendrojo sprendinio struktūrą). Jei y_1, y_2 yra homogeninės lygties (2) tiesiškai nepriklausomi sprendiniai, tai tos lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

▶ Įrodysime, kad $y=C_1y_1+C_2y_2$ yra sprendinys.

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p_1(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+p_2(x)(C_1y_1+C_2y_2)=0.$$

$$C_1\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Parodysime, kad tai yra bendrasis sprendinys. Remiantis apibrėžimu, sprendinys, turintis 2 konstantas, vadinamas bendruoju, jei iš jo su konkrečiomis konstantų reikšmėmis gaunamas kiekvienas atskirasis sprendinys. Kaip žinome, kiekvieną atskirąjį sprendinį vienareikšmiškai nusako pradinės sąlygos. Tegul pradinės sąlygos

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{8}$$

Įrašius pradines sąlygas į sprendinį, gaunama tiesinių nehomogeninių lygčių sistema, iš kurios galima surasti C_1, C_2.

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0', \end{cases} \tag{9}$$

čia $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_1'(x_0) = y_{10}'$, $y_2(x_0) = y_{20}$, $y_2'(x_0) = y_{20}'$, bet kokiems y_0, y_0'.

(9) sistemos determinantas

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10} \cdot y_{20}' - y_{10}' y_{20}$$

yra Vronskio determinantas, nelygus nuliui nė viename intervalo (a, b) taške (3 išvada), todėl (9) sistema turi vienintelį sprendinį C_1, C_2.

Įrašę šias C_1, C_2 reikšmes, gauname atskirąjį sprendinį, tenkinantį duotąsias pradines sąlygas. Taigi sprendinys

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

yra bendrasis.

Išspręsti antros eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį su kintamais koeficientais bendruoju atveju negalima, bet jei žinomas vienas atskirasis sprendinys, bendrasis sprendinys gali būti surastas.

1 uždavinys. Žinomas vienas atskirasis tiesinės homogeninės lygties sprendinys. Rasime bendrąjį sprendinį.

▸ Tegul y_1 yra atskirasis (2) lygties sprendinys. Rasime tokį kitą atskirą sprendinį, kad y_1 ir y_2 būtų tiesiškai nepriklausomi. Iš Ostrogradskio ir Liuvilio formulės

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x)dx},$$

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = Ce^{-\int p_1(x)dx}.$$

Turime pirmos eilės tiesinę diferencialinę lygtį y_2 atžvilgiu. Kadangi ieškome atskirojo sprendinio, priimsime $C = 1$. Dalijame abi lygybės puses iš $y_1^2 \neq 0$:

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Integruojame abi puses:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx,$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

y_2 ir y_1 tiesiškai nepriklausomi, nes

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \neq \text{const}.$$

Taigi bendrasis lygties sprendinys turės pavidalą

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

2 uždavinys. Sudarysime antros eilės diferencialinę lygtį, kai žinomi du intervale (a, b) tiesiškai nepriklausomi jos sprendiniai $y_1(x), y_2(x)$.

▸ Ieškomosios lygties bendrasis sprendinys lygus

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Funkcijos $y_1(x), y_2(x)$, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ yra tiesiškai priklausomos, todėl galima surasti konstantas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, kurių bent viena nelygi nuliui, kad būtų teisinga lygybė

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Diferencijavę šią tapatybę du kartus, turėsime

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \alpha_3 y' \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + \alpha_3 y'' \equiv 0. \end{cases}$$

Kad gautoji sistema turėtų nenulinį sprendinį $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, determinantas turi būti lygus nuliui:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0 . \qquad (10)$$

Išskleidę determinantą paskutinio stulpelio elementais, gauname ieškomąją lygtį

$$y''\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Tai ir yra antrosios eilės diferencialinė lygtis, turinti duotąją fundamentaliąją sprendinių sistemą y_1, y_2. ◀

2 pavyzdys. Parašysime diferencialinę lygtį, kai jos fundamentalioji sprendinių sistema yra $y_1 = 1, y_2 = e^{-2x}$.

▶ Remdamiesi (10), sudarome $\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} & y \\ 0 & -2e^{-2x} & y' \\ 0 & 4e^{-2x} & y'' \end{vmatrix} = 0.$

Išskleidę šį determinantą, gauname

$$-2y''e^{-2x} - 4e^{-2x}y' = 0 \quad \text{arba} \quad y'' + 2y' = 0 .$$ ◀

3 pavyzdys. Nustatysime, ar funkcijos $\operatorname{tg} x$ ir $\operatorname{ctg} x$ tiesiškai priklausomos, kai $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

▶ Funkcijos tiesiškai nepriklausomos, nes $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg}^2 x \neq \text{const.}$, kai $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ◀

4 pavyzdys. Nustatykite, ar funkcijos $1,\ x,\ x^2, x^3$ tiesiškai priklausomos intervale $(-\infty, \infty)$.

▶ Tapatybė $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_3 x^3 \equiv 0$ teisinga visiems $x \in (-\infty, \infty)$ tik tuo atveju, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Jei nors vienas $\alpha_i \neq 0$, gaunamas ne aukštesnio kaip trečio laipsnio daugianaris, kuris gali būti lygus nuliui ne daugiau kaip trijuose taškuose. ◀

5 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$, kai žinomas vienas sprendinys $y_1=x$.

▶ Kitas sprendinys gaunamas pritaikius Ostrogradskio ir Liuvilio formulę.

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx,\quad y_2=x\int\frac{e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx,$$

$$y_2=x\int\frac{e^{-\ln\left|1-x^2\right|}}{x^2}dx,\quad y_2=x\int\frac{dx}{x^2\left(1-x^2\right)},$$

$$y_2=x\int\frac{x^2+\left(1-x^2\right)}{x^2\left(1-x^2\right)}dx=x\left(\int\frac{x^2}{x^2\left(1-x^2\right)}dx+\int\frac{1-x^2}{x^2\left(1-x^2\right)}dx\right),$$

$$y_2(x)=x\left(\int\frac{dx}{1-x^2}+\int\frac{dx}{x^2}\right),$$

$$y_2=x\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1.$$

Todėl bendrasis lygties sprendinys yra

$$y=C_1x+C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right).$$ ◀

8.6. Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys

Nagrinėsime lygtį

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x),\tag{1}$$

čia $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ tolydžios intervale (a, b) funkcijos.

1 teorema apie bendrojo sprendinio struktūrą. Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys yra lygus atitinkamos homogeninės lygties bendrojo sprendinio y^* ir atskirojo nehomogeninės lygties sprendinio $\overline{y}$ sumai

$$y=y^*+\overline{y}.\tag{2}$$

▸ Įrodysime, kad $y^* + \bar{y}$ yra (1) sprendinys:

$$\left(y^* + \bar{y}\right)'' + p_1(x)\left(y^* + \bar{y}\right)' + p_2(x)\left(y^* + \bar{y}\right) = f(x),$$

$$\left(y^{*''} + p_1(x)y^{*'} + p_2(x)y^*\right) + \left(\bar{y}'' + p_1(x)\cdot\bar{y}' + p_2(x)\cdot\bar{y}\right) = f(x)$$

Reiškinys pirmuose skliaustuose lygus nuliui, nes y^* yra homogeninės lygties sprendinys, o antruose lygus $f(x)$, nes $\bar{y}$ yra nehomogeninės lygties sprendinys.

Įrodysime, kad $y^* + \bar{y}$ yra bendrasis sprendinys, t.y. kokios bebūtų pradinės sąlygos, iš jo gausime atskirąjį sprendinį, tenkinantį tas sąlygas. Tegul

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

Homogeninės lygties sprendinį pažymėsime $y^* = C_1y_1 + C_2y_2$. Tada

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \bar{y}$$

kur y_1 ir y_2 yra tiesiškai nepriklausomi sprendiniai.

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0,$$

$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y_0'.$$

Konstantoms C_1 ir C_2 nustatyti, gauname tiesinių nehomogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y_0' - \bar{y}'(x_0). \end{cases}$$

Sistemos determinantas yra Vronskio determinantas $W(x_0) \neq 0$, nes y_1 ir y_2 sudaro homogeninės lygties fundamentalią sprendinių sistemą. Vadinasi sistema turi vienintelį sprendinį C_1, C_2. Taigi sprendinys

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \bar{y}$$

yra nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys. ◂

2 teorema. Lygties $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ bendrasis sprendinys yra lygus sprendinių sumai $y = y_1 + y_2$; y_1 yra lygties

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x)$$

sprendinys, o y_2 – kitos lygties

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_2(x) \text{ sprendinys.}$$

▸ Kadangi y_1 ir y_2 yra skirtingų lygčių sprendiniai, tai įrašę juos į tas lygtis gauname tapatybes

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 \equiv f_1(x),$$

$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 \equiv f_2(x).$$

Sudėję panariui abi lygybes, gauname

$$(y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

t.y. $y_1 + y_2$ yra (5) lygties sprendinys. ◂

3 teorema. Jei tiesinė nehomogeninė diferencialinė lygtis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x) + if_2(x)$$

(kur $p_1(x), p_2(x)$ ir $f_1(x), f_2(x)$ realios funkcijos) turi sprendinį $y = u(x) + iv(x)$, tai funkcijos $u(x)$ ir $v(x)$ yra atitinkamai lygčių

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_1(x) \quad \text{ir} \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_2(x)$$

sprendiniai.

▸ Kadangi $u + iv$ sprendinys, tai jis tinka lygčiai.

$$(u(x) + iv(x))'' + p_1(x)(u(x) + v(x))' + p_2(x)(u(x) + iv(x)) = f_1(x) + if_2(x),$$

$$u(x)'' + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u + i(v''(x) + p_1(x) \cdot v' + p_2(x)v) = f_1(x) + if_2(x).$$

Sulyginę realiąsias ir menamąsias dalis, gauname tai, ką ir reikėjo įrodyti.

$$u(x)'' + p_1(x)u' + up_2(x) = f_1(x),$$

$$v(x)'' + p_1(x)v' + vp_2(x) = f_2(x). \text{ ◂}$$

8.7. Konstantų varijavimo (Lagranžo) metodas

Jei žinoma homogeninės diferencialinės lygties

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

fundamentalioji sprendinių sistema y_1, y_2, tai nehomogeninės lygties

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

bendrasis sprendinys randamas Lagranžo metodu.

Tarkime, kad homogeninės lygties fundamentalioji sprendinių sistema $y_1(x)$, $y_2(x)$. Tada jos bendrasis sprendinys yra

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{1}$$

čia C_1 ir C_2 – konstantos.

Ieškosimė turinčio tą pačią (1) išraišką nehomogeninės lygties bendrojo sprendinio tarę, kad $C_1(x)$, $C_2(x)$ yra nežinomos funkcijos.

Norint rasti funkcijas $C_1(x)$ ir $C_2(x)$, reikia turėti dviejų lygčių sistemą. Vieną lygtį gausime iš prielaidos, kad

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

yra nehomogeninės lygties sprendinys. Kitą lygtį (sekdami Lagranžu) gausime, pareikalavę, kad funkcijos $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ išvestinė turėtų tokią išraišką, kokią ji turėtų, jeigu C_1, C_2 būtų konstantos.

Diferencijavę (1), gauname

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2.$$

Tarę, kad

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0,$$

turime

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'. \tag{2}$$

Diferencijavę dar kartą (2), gauname

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'. \tag{3}$$

Įrašę y', y'' ir funkciją $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ į nehomogeninę diferencialinę lygtį, gauname

$$C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + p_1(x)(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') +$$
$$+ p_2(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x),$$

arba

$$C_1(x)(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + C_2(x)(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) +$$
$$+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Kadangi y_1 ir y_2 yra homogeninės lygties sprendiniai, tai

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0,$$
$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0,$$

ir

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Taigi gavome tiesinių nehomogeninių lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Šios sistemos determinantas yra Vronskio determinantas: $W(x) \neq 0$ (nes y_1, y_2 – fundamentalioji sprendinių sistema), todėl ji turi vienintelį sprendinį

$$C_k'(x) = \varphi_k(x), \quad k = 1,2.$$

Iš čia

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)\,dx + C_k^*, \quad k = 1,2.$$

Įrašę į $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, $C_k(x)$ reikšmes, gauname nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y = C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx. ◀$$

1 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' - 2y'\operatorname{tg} x = 1$.

▶ Rasime homogeninės lygties $y'' - 2y'\operatorname{tg} x = 0$ bendrąjį sprendinį.

Pakeitę $y' = z$, $y'' = z'$, gauname

$$z' - 2z\operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 2z\operatorname{tg} x, \quad ,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2\int \frac{d\cos x}{\cos x}, \quad \ln|z| = -2\ln|\cos x| + \ln C_1,$$

$$z = \frac{C_1}{\cos^2 x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos^2 x}, \quad \int dy = C_1 \int \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2, \text{ todėl } y_1 = \operatorname{tg} x \quad \text{ir} \quad y_2 = 1.$$

Ieškosime nehomogeninės lygties sprendinio $y = C_1(x)\operatorname{tg} x + C_2(x)$.

Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)\,tgx + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1. \end{cases}$$

Iš čia

$$C_1'(x)=\cos^2 x, \quad C_1(x)=\int\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx,$$

$$C_1(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C_1^*,$$

$$C_2'(x)=-C_1'(x)\mathrm{tg}x, \quad C_2'(x)=-\cos^2 x\cdot\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$C_2(x)=-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=+\frac{1}{4}\cos 2x+C_2^*.$$

Įrašę C_1, C_2 reikšmes į sprendinio $y=C_1(x)\mathrm{tg}x+C_2(x)$ išraišką, gausime nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\cdot\mathrm{tg}x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1^*\mathrm{tg}x+C_2^*.$$

Pertvarkę gausime paprastesnę išraišką

$$y=\frac{1}{2}x\cdot\mathrm{tg}x+\frac{1}{4}+C_1^*\mathrm{tg}x+C_2^*. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y''-y'=e^{2x}\cdot\cos e^x$.

▶ Rasime homogeninės lygties $y''-y'=0$ bendrąjį sprendinį.

Pakeitę $y'=z,\, y''=z'$, gauname

$$z'-z=0, \quad \frac{dz}{dx}=z, \quad \frac{dz}{z}=dx, \quad \ln|z|=x+\ln C_1, \quad z=C_1e^x.$$

Įrašę $z=y'$, gauname

$$\frac{dy}{dx}=C_1e^x, \quad \int dy=\int C_1e^x dx, \quad y=C_1e^x+C_2.$$

Ieškosime nehomogeninės lygties sprendinio $y=C_1(x)e^x+C_2(x)$. Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)=0, \\ C_1'(x)e^x=e^{2x}\cdot\cos e^x. \end{cases}$$

Iš čia

$$C_1'(x)=e^x\cos e^x, \quad C_1(x)=\int\cos e^x de^x=\sin e^x+C_1^*,$$

$$C_2'(x)=-e^x\cos e^x, \quad C_2(x)=-\int e^x\cos e^x de^x.$$

Pažymėjus

$$e^x = y, \quad \int y\cos y dy = \int y d\sin y = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y + C_2^*,$$

$$C_2(x) = -\left(e^x \sin e^x + \cos e^x\right) + C_2^*.$$

Įrašę $C_1(x)$ *ir* $C_2(x)$ reikšmes į sprendinį $y = C_1(x)e^x + C_2(x)$, gausime nehomogeninės lygties sprendinį

$$y = \left(\sin e^x + C_1^*\right)e^x + C_2^* - \left(e^x \sin e^x + \cos e^x\right),$$

$$y(x) = C_1^* e^x + C_2^* - \cos e^x. \blacktriangleleft$$

8.8. Tiesinės homogeninės diferencialinės lygtys su pastoviaisiais koeficientais

Nagrinėsime antros eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

kai a_1, a_2 – pastovūs realieji skaičiai. Norint rasti lygties bendrąjį sprendinį, pakanka rasti du tiesiškai nepriklausomus atskiruosius sprendinius. Atskirojo sprendinio ieškosime tokio pavidalo:

$$y = e^{kx},$$

čia k – pastovus skaičius.

Tada $y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$.

Įrašę į lygtį, gauname

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}\left(k^2 + a_1 k + a_2\right) = 0.$$

Kadangi $e^{kx} \neq 0$, tai lieka, kad

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Ši lygtis vadinama **charakteringąja lygtimi.** Funkcija e^{kx} bus lygties sprendinys tada ir tik tada, kai k yra charakteringosios lygties $F(k) = k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ šaknis.

Galimi trys atvejai.

1. Charakteringosios lygties šaknys k_1, k_2 yra realios ir skirtingos.

Tokiu atveju kiekvieną šaknį k_j atitinka atskirasis sprendinys y_j, $j = 1,2$:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

$$y' = C_1 \cos x, \quad \int dy = \int C_1 \cos x dx,$$
$$y = C_1 \sin x + C_2. \qquad (1)$$

Nehomogeninės lygties sprendinio ieškosime

$$y = C_1(x)\sin x + C_2(x).$$

Funkcijoms $C_1(x), C_2(x)$ nustatyti sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)\cos x = \cos x \cdot \mathrm{ctg}x. \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \mathrm{ctg}x, \quad \frac{dC_1}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\int dC_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad C_1(x) = \ln|\sin x| + \widetilde{C}_1.$$

$$C_2'(x) = -C_1'(x)\sin x,$$

$$C_2'(x) = -\cos x, \quad C_2(x) = -\sin x + \widetilde{C}_2.$$

Bendrasis lygties sprendinys

$$y = \widetilde{C}_1 \sin x + \widetilde{C}_2 + \sin x \ln|\sin x| - \sin x. \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Rasime tiesinės lygties $xy'' + 2y' - xy = 0$ bendrąjį sprendinį, kai žinomas vienas atskiras sprendinys $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$.

▶ Ieškome antro atskirojo sprendinio

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y = 0, \quad x \neq 0.$$

Tuo tikslu sprendžiame lygtį

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{2}{x} dx}.$$

$$y'y_1 - y_1'y = e^{-2\ln|x|}.$$

Padalijame abi lygybės puses iš y_1^2

$$\frac{y'y_1 - y\,y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{\ln x^{-2}},$$

tai konstantas C_1 ir C_2 rasime iš pradinių salygų:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0, \\ -3C_1 + 3C_2 = 3, \end{cases}$$

$C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Atskirasis sprendinys $y = \sin 3x$. ◂

3. Charakteringosios lygties šaknys yra lygios, t.y. $k_1 = k_2 = k$.

Šiuo atveju funkcijos $y_1 = e^{kx}$ ir $y_2 = e^{kx}$ tiesiškai priklausomos

$$\frac{e^{kx}}{e^{kx}} = 1.$$

Taigi turime tik vieną atskirąjį sprendinį $y_1 = e^{kx}$. Antrąjį šios lygties sprendinį rasime, panaudoję Ostrogradskio ir Liuvilio formulę

$$y_2 = e^{kx} \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int e^{-(a+2k_1)x} dx.$$

Charakteringosios lygties $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ šaknys lygios, kai diskriminantas lygus nuliui

$$k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad \text{t.y.} \quad a_1 + 2k = 0.$$

Todėl

$$y_2 = e^{kx} \int e^0 dx = xe^{kx}.$$

Sprendiniai y_1 ir y_2 tiesiškai nepriklausomi, nes

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{kx}}{e^{kx}} = x \neq \text{const.},$$

ir todėl sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}.$$

3 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' - 4y' + 4y = 0$.

▸ Charakteringoji lygtis $k^2 - 4k + 4 = 0$ turi dvi lygias šaknis $k_1 = k_2 = 2$, todėl bendrasis sprendinys yra

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x). ◂$$

Jie tiesiškai nepriklausomi, nes

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq \text{const}.$$

Bendrasis sprendinys $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $y''+y'-2y=0$.

▸ Charakteringoji lygtis $k^2+k-2=0$ turi dvi realiasias skirtingas šaknis $k_1=1$, $k_2=-2$. Todėl bendrasis sprendinys

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}. \blacktriangleleft$$

2. Charakteringosios lygties šaknys kompleksinės.

Kadangi a_1, a_2 realieji skaičiai, tai k_1, k_2 bus jungtinės:

$$k_1=\alpha+i\beta,\quad k_2=\alpha-i\beta.$$

Šaknį k_1 atitiks atskirasis sprendinys

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Analogiškai

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Pritaikus paragrafo (8.3) teoremą, gauname, kad

$$\widetilde{y}_1=e^{\alpha x}\cos\beta x \quad ir \quad \widetilde{y}_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

yra homogeninės lygties sprendiniai.

Funkcijos $\widetilde{y}_1$ ir $\widetilde{y}_2$ tiesiškai nepriklausomos, nes

$$\frac{\widetilde{y}_1}{\widetilde{y}_1}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\operatorname{ctg}\beta x\neq \text{const.},$$

todėl $\widetilde{y}_1$ ir $\widetilde{y}_2$ sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą. Tada lygties bendrasis sprendinys turės pavidalą:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

2 pavyzdys. Rasime lygties $y''+9y=0$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=0,\ y'(0)=3$.

▸ Charakteringoji lygtis $k^2+9=0$ turi menamas šaknis $k_1=+3i, k_2=-3i$. Todėl bendrasis sprendinys

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Kadangi

$$y'=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x,$$

c) Tarkime, kad α sutampa su dviem charakteringosios lygties $F(k)=0$ šaknimis, t.y. $\alpha=k_1=k_2$. Šiuo atveju gauname lygybę

$$Q_n''(x)=P_n(x),$$

nes $F(\alpha)=\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ ir $F'(\alpha)=2\alpha+a_1=0$.

Kadangi kairėje pusėje yra $(n-2)$ – ojo laipsnio daugianaris, o dešinėje n – tojo , tai atskirasis sprendinys turi būti toks:

$$\bar{y}=x^2e^{\alpha x}Q_n(x).$$

Vadinasi, visais atvejais galima rasti ieškomojo sprendinio

$$\bar{y}=e^{\alpha x}\left(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n\right)$$

nežinomus koeficientus $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

2. Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais, kai

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

Panaudoję Oilerio formules

$$\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right),\quad \sin\beta x=\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)$$

gauname

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)+Q_m(x)\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)\right)=$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}\frac{1}{2}\left(P_n(x)-iQ_m(x)\right)+e^{(\alpha-i\beta)x}\frac{1}{2}\left(P_n(x)+iQ_m(x)\right)=$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}P_s(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{P}_s(x),$$

čia $P_s(x)=\frac{1}{2}\left(P_n(x)-iQ_m(x)\right)$, $\overline{P}_s(x)=\frac{1}{2}\left(P_n(x)+iQ_m(x)\right)$ daugianariai, kurių s, $s=\max(n, m)$, be to, $\overline{P}_s(x)$ – daugianaris, jungtinis $P_s(x)$.

a) Tarkime, kad $\alpha\pm i\beta$ nėra charakteringosios lygties $F(k)=0$ šaknis, tada lygties atskirasis sprendinys

$$\bar{y}=e^{(\alpha+i\beta)x}\widetilde{Q}_s(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}\widetilde{\widetilde{Q}}_s(x),$$

čia $\widetilde{Q}_s(x)$ ir $\widetilde{\widetilde{Q}}_s(x)$ – s – tojo laipsnio daugianariai su neapibrėžtais koeficientais.

Panaudoję Oilerio formules, gausime

$$\bar{y}=e^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos\beta x+R_s(x)\sin\beta x\right),\quad s=\max(n,m).$$

8.9. Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys su pastoviaisiais koeficientais

Nagrinėsime antros eilės nehomogeninę diferencialinę lygtį

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (1)$$

Tokias lygtis galima spręsti konstantų varijavimo metodu, bet atskirais atvejais, kai dešinioji pusė yra pavidalo

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right);$$

čia $P_n(x)$ – n-tojo laipsnio daugianaris, $Q_m(x)$ – m-tojo laipsnio daugianaris, atskirąjį sprendinį galima gauti **neapibrėžtųjų koeficientų** metodu.

Panagrinėsime atskirus atvejus.

1. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}\left(p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x \ + p_n\right), p_0 \neq 0$.

a) Tarkime, kad α nelygi nė vienai charakteringosios lygties $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ šakniai, t.y. $\alpha \neq k_1, \alpha_2 \neq k_2$.

Įrodysime, kad lygties atskiras sprendinys yra

$$\bar{y} = e^{\alpha x}Q_n(x) = e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x \ + A_n\right).$$

Diferencijavę du kartus, gauname

$$\bar{y}' = \alpha e^{\alpha x}Q_n(x) + e^{\alpha x}Q_n'(x) = e^{\alpha x}\left(\alpha Q_n(x) + Q_n'(x)\right),$$

$$\bar{y}'' = \alpha e^{\alpha x}\left(\alpha Q_n(x) + Q_n'(x)\right) + e^{\alpha x}\left(\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x)\right) =$$

$$= e^{\alpha x}\left(\alpha^2 Q_n(x) + 2\alpha Q_n'(x) + Q_n''(x)\right),$$

čia $Q_n(x) - n-$tojo laipsnio, $Q_n'(x) - (n-1)$ laipsnio ir $Q_n''(x) - (n-2)-$tojo laipsnio daugianariai. Įrašome $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ ir $f(x)$ išraiškas į (1) lygtį.

Sulyginę koeficientus, esančius prie vienodų x laipsnių, gauname $(n+1)$ lygtį su $n+1$ nežinomuoju $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

b) Tarkime, kad α sutampa su viena charakteringosios lygties $F(k) = 0$ šaknimi t.y. $\alpha = k_1$. Tada $F(\alpha) = \alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$.

Šiuo atveju iš (1) lygybę

$$Q_n''(x) + 2(2\alpha + a_1)Q_n'(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n.$$

Kairėje pusėje yra tik $(n-1)$ – ojo laipsnio daugianaris, todėl sulygindami koeficientus prie vienodų x laipsnių, gautume neteisingą lygybę $p_0 = 0$. Taigi, šiuo atveju atskirojo sprendinio išraiška turi būti tokia:

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}Q_n(x).$$

Atskirasis nehomogeninės lygties sprendinys

$$\bar{y} = \left(2x^2 - 6x + 7\right)e^x .$$

Bendrasis duotos lygties sprendinys

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \left(2x^2 - 6x + 7\right)e^x . \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$.

▸ Charakteringoji lygtis $k^2 + 10k + 25 = 0$ turi šaknis $k_1 = k_2 = -5$.

Homogeninės lygties bendrasis sprendinys bus

$$y^* = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} .$$

Duotosios lygties dešinėje esančios rodiklinės funkcijos $f(x) = 4e^{-5x}$ $\alpha = -5$ sutampa su abiem charakteringosios lygties šaknimis $k_1 = k_2 = \alpha = -5$. Daugianaris prie rodiklinės funkcijos yra nulinio laipsnio $P_0(x) = 4$. Taigi galime užrašyti duotos lygties atskirą sprendinį pažymėję $Q_0(x) = A$:

$$\bar{y} = Ax^2 e^{-5x} .$$

Diferencijavę du kartus $\bar{y}$, įrašome $\bar{y}', \bar{y}''$ į duotos lygties kairiąją pusę

$$\bar{y}' = 2Axe^{-5x} + Ax^2 e^{-5x}(-5) = e^{-5x}\left(2Ax - 5Ax^2\right),$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^{-5x} - 10Axe^{-5x} - 10Axe^{-5x} + 25Ax^2 e^{-5x} = e^{-5x}\left(2A - 20Ax + 25Ax^2\right),$$

$$2A - 20Ax + 25Ax^2 + 10\left(2Ax - 5Ax^2\right) + 25Ax^2 = 4,$$

$$2A = 4, \quad A = 2.$$

Atskiras sprendinys $\bar{y} = 2x^2 e^{-5x}$.

Bendras sprendinys

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x} . \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$.

▸ Charakteringoji lygtis $k^2 + 2k + 5 = 0$ turi šaknis $k_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Homogeninės lygties bendrasis sprendinys bus

$$y = \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)e^{-x} .$$

Duotosios lygties dešiniąją pusę $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ galime užrašyti

$$e^{-x}\cos 2x = e^{-1x}\left(1\cos 2x + 0\sin 2x\right).$$

b) Tarkime, kad $\alpha + i\beta$ yra kartotinė charakteringosios lygties šaknis. Tada lygties atskirasis sprendinys

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right), \quad s = \max(n, m).$$

Daugianarių $\widetilde{Q}_s(x)$ ir $R_s(x)$ koeficientus randame analogiškai kaip ir pirmuoju atveju, įrašę į lygtį $\bar{y}$ ir išvestinių išraiškas bei sulyginę koeficientus prie $x^j \cos\beta x$ ir $x^j \sin\beta x$.

1·pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

▶ Charakteringoji lygtis $k^2 + k = 0$ turi šaknis $k_1 = 0, k_2 = -1$.

Homogeninės lygties bendrasis sprendinys bus

$$y^* = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x}.$$

Duotosios lygties dešinė pusė $f(x) = 4x^2 e^x$ trigonometrinės dalies neturi, rodiklinės funkcijos koeficientas $\alpha = 1$ nesutampa nė su viena charakteringosios lygties šaknimi. Daugianaris $4x^2$ prie rodiklinės funkcijos yra antrojo laipsnio.

Taigi galime užrašyti duotos lygties atskirąjį sprendinį

$$\bar{y} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x.$$

Diferencijavę du kartus $\bar{y}$, įrašome $\bar{y}', \bar{y}''$ į duotos lygties kairiąją pusę.

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x,$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x,$$

$$2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + BC + C\right)e^x +$$

$$+ (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x = 4x^2 e^x.$$

Padalijame abi lygties puses iš $e^x \neq 0$,

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = 4x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 6A + 2B = 0, \\ 2A + 3B + 2C = 0. \end{cases}$$

Išsprendę gauname $A = 2$, $B = -6$, $C = 7$.

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Skleidžiame determinantą trečiojo stulpelio elementais:

$$y''e^{3x} - 3y'e^{3x} + y\,2e^{2x} = 0$$

arba

$$y'' - 3y' + 2y = 0 . \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Duotos funkcijos $y_1 = x, y_2 = e^x$. Patikrinti, ar duotoji funkcijų sistema yra lygties

$$y''(x-1) - y' \cdot x + y(x-1) = 0$$

fundamentalioji sprendinių sistema.

▶ Patikriname, ar funkcijos $y_1 = x, y_2 = e^x$ yra duotosios lygties sprendiniai:

$$y_1 = x, \quad y_1' = 1, \quad y_1'' = 0 ,$$

$$0(x-1) - 1 \cdot x + x \equiv 0 .$$

$$y_2 = e^x, \quad y_2' = e^x, \quad y_2'' = e^x ,$$

$$e^x(x-1) - e^x \cdot x + e^x \equiv 0 .$$

Matome, kad abi funkcijos tinka lygčiai. Patikrinsime, ar funkcijos $y_1 = x, y_2 = e^x$ sudaro fundamentalią sprendinių sistemą

$$W\left(x, e^x\right) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x \neq 0, \quad \text{kai} \quad x \neq 1 .$$

Funkcijos tiesiškai nepriklausomos kiekviename iš intervalų $(-\infty; 1)$ ir $(1; +\infty)$ ir sudaro fundamentalią sprendinių sistemą. ◀

3 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' + y'\mathrm{tg}x = \cos x \cdot \mathrm{ctg}x$ konstantų varijavimo metodu.

▶ Pirmiausia išsprendžiame atitinkamą homogeninę lygtį

$$y'' + y'\mathrm{tg}\,x = 0 .$$

Pažymėjus $y' = z$, lygtyje atsiskiria kintamieji

$$z' + z\mathrm{tg}x = 0, \quad \frac{dz}{dx} = -z\mathrm{tg}x, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad z = C_1 \cos x,$$

Matome, kad abi charakteringosios lygties šaknys $k_{1,2}$ sutampa su skaičiumi $-1\pm 2i$.

Taigi duotos lygties atskirą sprendinį galima užrašyti

$$\bar{y}=e^{-x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)\cdot x.$$

Diferencijavę du kartus $\bar{y}$, įrašome $\bar{y}', \bar{y}''$ į duotos lygties kairiąją pusę

$$\bar{y}'=e^{-x}\left(\left(A-Ax+2Bx\right)\cos 2x+\left(B-Bx-2Ax\right)\sin 2x\right),$$

$$\bar{y}''=e^{-x}\left(\left(-2A-3Ax+4B-4Bx\right)\cos 2x+\left(-2B-3Bx-4A+4Ax\right)\sin 2x\right).$$

Sutraukę panašius narius turime

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x.$$

Lyginame koeficientus prie $\sin 2x$ ir $\cos 2x$:

$$\begin{cases}-4A=0, & A=0,\\ 4B=1, & B=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}xe^{-x}\cdot\sin 2x.$$

Bendrasis sprendinys

$$y(x)=\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x.$$ ◀

8.10. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Sudarykime tiesinę diferencialinę lygtį, kurios atskirieji sprendiniai yra funkcijos $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$.

▶ Pirmiausia patikriname, ar funkcijos tiešiškai nepriklausomos. Sudarome Vronskio determinantą

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}=e^{3x}.$$

Determinantas $W\left(y_1,y_2\right)\neq 0$ su visomis x reikšmėmis. Tai reiškia, kad duotos funkcijos yra tiesiškai nepriklausomos, kai $x\in R$. Sudarome lygtį

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{x^2}{e^{2x}} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Integruojame abi lygybės puses

$$\frac{y}{y_1} = \int e^{-2x}\,dx, \qquad y = -\frac{e^{-x}}{2x}.$$

Bendrasis duotos lygties sprendinys

$$y = C_1 \frac{e^x}{x} - C_2 \frac{1}{2xe^x}. \blacktriangleleft$$

5 pavyzdys. Rasime lygties $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}(x \neq 0)$ bendrą sprendinį, kai vienas atitinkamos homogeninės lygties sprendinys $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ žinomas.

▸ Surasime kitą homogeninės lygties sprendinį. Taikome Ostrogradskio ir Liuvilio formulę

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{2}{x} dx},$$

$$\left(\frac{y}{\frac{\sin x}{x}}\right)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Integruojame abi lygybės puses

$$y = \frac{\sin x}{x}(-\mathrm{ctg} x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

Homogeninės lygties bendrasis sprendinys

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2\left(-\frac{\cos x}{x}\right).$$

Nehomogeninės lygties sprendinio ieškosime

$$y = C_1(x)\frac{\sin x}{x} + C_2(x)\left(-\frac{\cos x}{x}\right).$$

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x}+C_2'(x)\left(-\dfrac{\cos x}{x}\right)=0, \\ C_1'(x)\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C_2'(x)\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x+C_2'(x)(-\cos x)=0, \\ C_1'(x)(x\cos x-\sin x)+C_2'(x)(x\sin x+\cos x)=x. \end{cases}$$

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\cos x \\ x & x\sin x+\cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ x\cos x-\sin x & x\sin x+\cos x \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{x\cdot\cos x}{x\sin^2 x+\sin x\cos x+x\cos^2 x-\sin x\cos x}=\cos x.$$

$$C_2'=\frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ x\cos x-\sin x & \sin x \end{vmatrix}}{x}=\sin x.$$

$$C_1(x)=\sin x+\widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x)=-\cos x+\widetilde{C}_2.$$

Bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys

$$y=\left(\sin x+\widetilde{C}_1\right)\frac{\sin x}{x}+\left(-\cos x+\widetilde{C}_2\right)\left(-\frac{\cos x}{x}\right),$$

$$y=\widetilde{C}_1\frac{\sin x}{x}-\widetilde{C}_2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x}. \blacktriangleleft$$

6 pavyzdys. Rasime lygties $y''+4y'+29y=0$ atskirąjį sprendinį, kai $y(0)=0,\ y'(0)=15$.

▶ Lygtis yra tiesinė homogeninė su pastoviaisiais koeficientais. Sudarome ir sprendžiame charakteringąją lygtį

$$k^2+4k+29=0,\quad k_1=-2+5i,\quad k_2=-2-5i.$$

Sudarome fundamentalią sprendinių sistemą

$$y_1 = e^{-2x}\cos 5x, \quad y_2 = e^{-2x}\sin 5x.$$

Užrašome bendrąjį sprendinį

$$y = C_1 e^{-2x}\cos 5x + C_2 e^{-2x}\sin 5x.$$

Surandame y':

$$y' = -2C_1 e^{-2x}\cos 5x - 5C_1 e^{-2x}\sin 5x - 2C_2 e^{-2x}\sin 5x + 5e^{-2x}\cos 5x.$$

Apskaičiuojame y ir y' reikšmes taške $x = 0$ ir sulyginame su pradinėse sąlygose duotomis atitinkamomis reikšmėmis.

$$y = C_1 e^{-2\cdot 0}\cos(5\cdot 0) + C_2 e^{-2\cdot 0}\sin(5\cdot 0) = C_1 = 0,$$

$$y' = -2C_1 e^{-2\cdot 0}\cos(5\cdot 0) - 5C_1 e^{-2\cdot 0}\sin(5\cdot 0) - 2C_2 e^{-2\cdot 0}\sin(5\cdot 0) +$$

$$+ 5C_2 e^{-2\cdot 0}\cos(5\cdot 0) = 5C_2 = 15;$$

$$C_2 = 3.$$

Gauname atskirą sprendinį, tenkinantį duotas pradines sąlygas

$$y = 3e^{-2x}\sin 5x. \blacktriangleleft$$

7 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' - y = 4xe^x$. (2)

▸ Lygtis yra tiesinė nehomogeninė su pastoviais koeficientais. Spręsime neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Sprendžiame atitinkamą homogeninę diferencialinę lygtį

$$y'' - y = 0, \quad k^2 - 1 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

Užrašome homogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Lygties (2) dešinėje pusėje $f(x) = 4xe^x$ nėra trigonometrinės dalies, rodiklinės funkcijos koeficientas $\alpha = 1$ sutampa su viena charakteringąja šaknimi $k = 1$. Daugianaris prie rodiklinės funkcijos yra pirmojo laipsnio. Taigi galime užrašyti duotos lygties atskirą sprendinį

$$\bar{y} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Diferencijuojame $\bar{y}$ du kartus ir įstatome $\bar{y}', \bar{y}''$ į duotos lygties kairiąją pusę

$$\bar{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$\bar{y}'' = 2Ae^x + 2\cdot(2Ax+B)e^x + \left(Ax^2+Bx\right)e^x,$$

$$2Ae^x + 2(2Ax+B)e^x + \left(Ax^2+Bx\right)e^x - \left(Ax^2+Bx\right)e^x = 4xe^x.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių.

$$x:\ 4A = A,\quad A = 1,$$

$$x^{\circ}:\ 2A + 2B = 0,\quad B = 1.$$

Bendrasis (2) lygties sprendinys bus toks:

$$y = \left(x^2 - x\right)e^x + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$ ◀

8 pavyzdys. Išspręsime lygtį $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$. (3)

▶ Lygties dešinioji pusė yra dviejų dėmenų suma. (3) lygties atskirasis sprendinys lygus $y = y_1 + y_2$, čia

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 3e^{2x} \tag{4}$$

ir

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 2x^2. \tag{5}$$

Atitinkamos homogeninės lygties charakteringoji lygtis tokia:

$$k^2 - 3k + 2 = 0,\quad k_1 = 2,\quad k_2 = 1.$$

(4) lygties $\alpha = k_1 = 2$, todėl atskirojo sprendinio ieškosime

$$\bar{y}_1 = Axe^{2x},$$

$$\bar{y}_1' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}.$$

$$2A + 2A + 4Ax - 3A - 6Ax + 2Ax = 3e^{2x}.$$

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname $A = 3$.

(4) lygties atskirasis sprendinys bus toks: $\bar{y}_1 = 3xe^{2x}$.

(5) lygties dešinė pusė yra antrojo laipsnio daugianaris $f(x) = 2x^2e^{0x}, \alpha = 0$ ir nesutampa nė su viena charakteringąja šaknimi. Atskirojo sprendinio ieškosime

$$\bar{y}_2 = Ax^2 + Bx + C,$$

$$\bar{y}_2' = 2Ax + B, \tag{6}$$

$$\bar{y}_2'' = 2A.$$

Įrašę gautas išraiškas (6) į (5) lygtį, turime

$$2A - 3(2Ax+B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2.$$

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių

$$\begin{array}{c|ll} x^2 & 2A=2, & A=1, \\ x & -6A+2B=0, & B=3, \\ x^0 & 2A-3B+2C=0, & C=3{,}5, \end{array}$$

atskirąjį (5) lygties sprendinį galime parašyti

$$\bar{y}_2 = x^2 + 3x + 3{,}5.$$

Bendrasis (3) lygties sprendinys bus:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + x^2 + 3x + 3{,}5 + 3xe^{2x}.$$

8.11. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite lygties $y'' - y'\mathrm{tg}x + 2y = 0$ bendrąjį sprendinį, kai yra žinomas vienas atskiras sprendinys $y_1 = \sin x$.

2. Sudarykite tiesinę diferencialinę lygtį, kurios atskirieji sprendiniai yra funkcijos $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

3. Duotos funkcijos $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$. Patikrinkite ar duotoji funkcijų sistema yra lygties $y'' - y = 0$ fundamentalioji sprendinių sistema.

4. Raskite lygčių bendrąjį sprendinį, kai yra žinomas vienas atskiras sprendinys.

4.1. $y'' - 2\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right)y = 0$, $y_1(x) = \mathrm{tg}x$. **4.2.** $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

5. Išspręskite lygtis konstantų varijavimo metodu:

5.1. $x\ln xy'' - y' = \ln^2 x$. **5.2.** $xy'' - \left(1 + 2x^2\right)y' = 4x^3e^{x^2}$. **5.3.** $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$.

5.4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cos x}}$.

6. Raskite lygties bendrąjį sprendinį, jei žinomas atskiras homogeninės lygties sprendinys.

6.1. $\left(1 + x^2\right)y'' + xy' - y = 1$, $y_1 = x$. **6.2.** $xy'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \dfrac{1}{x}$.

7. Raskite lygčių atskiruosius sprendinius.

7.1. $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6$, $y'(0) = 10$. **7.2.** $y'' - 4y = 0, y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

7.3. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$. **7.4.** $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$.

8. Raskite lygčių bendruosius sprendinius:

8.1. $y''+3y'=3xe^{-3x}$. **8.2.** $y''+4y'+5y=10e^{-2x}\cos x$.

8.3. $y''-3y'+2y=\left(x^2+x\right)e^{3x}$. **8.4.** $y''-2y'+y=x^3$.

8.5. $y''-2y'+y=2+e^x\sin x$. **8.6.** $y''+4y=x\cdot\sin^2 x$.

9. Raskite lygčių atskiruosius sprendinius:

9.1. $y''+y=4x\cos x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$.

9.2. $y''-4y'+5y=2x^2e^x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3$.

9.3. $y''-2y'+2y=4e^x\cos x,\quad y(\pi)=\pi e^{\pi},\quad y'(\pi)=e^{\pi}$.

9.4. $y''-6y'+9y=16e^{-x}+9x-6,\quad y(0)=y'(0)=1$.

Atsakymai

1. $y=C_1\left(\frac{1}{2}\sin x\cdot\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|-1\right)+C_2\sin x$. **2.** $x^2y''-2xy'+2y=0$.

4.1. $y=C_1\mathrm{tg}x+C_2(1+x\mathrm{tg}x)$. **4.2.** $y=C_1x+C_2\ln x$. **5.1.** $y=C_1x(\ln x-1)+C_2+$ $+x\left(\ln^2 x-2\ln x-2\right)$. **5.2.** $y=C_1e^{x^2}+C_2+\left(x^2-1\right)e^{x^2}$. **5.3.** $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x+\frac{\cos 2x}{\sin x}$. **5.4.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{4}{3}\cos x\sqrt{\mathrm{ctg}x}$. **6.1.** $y=C_1x+$ $+C_2\sqrt{1+x^2}+1$. **6.2.** $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+x^4$. **7.1.** $y=4e^x+2e^{3x}$. **7.2.** $y=\sin 2x$.

7.3. $y=e^{-x}$. **7.4.** $y=e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$. **8.1.** $y=C_1+C_2e^{-3x}-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)e^{-3x}$.

8.2. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-2x}+5xe^{-2x}\sin x$. **8.3.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+$ $+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)e^{3x}$. **8.4.** $y=(C_1+C_2x)e^x+x^3+6x^2+18x+24$.

8.5. $y=2+e^x(C_1+C_2x-\sin x)$. **8.6.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+$ $+\frac{x}{8}\left(1-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{x}{2}\sin 2x\right)$. **9.1.** $y=x\cos x+x^2\sin x$. **9.2.** $y=(\cos x-2\sin x)e^{2x}+$ $+(x-1)^2e^x$. **9.3.** $y=-(\pi\cos x+(\pi+1-2x)\sin x)e^x$. **9.4.** $y=xe^{3x}+x+e^{-x}$.

9. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

9.1. Pagrindinės sąvokos

Praktiniuose uždaviniuose dažnai tenka ieškoti vieno kintamojo funkcijų $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, kai jas ir jų išvestines sieja n diferencialinių lygčių

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0, \\ F_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0. \end{cases}$$

Vienas paprasčiausių pavyzdžių yra taško dinamikos uždavinys: duotos jėgos, veikiančios materialųjį tašką, reikia rasti judėjimo dėsnį, t.y. funkcijas $x = x(t)$, $y = y(t), z = z(t)$. Bendruoju atveju sistema, aprašanti judėjimo dėsnį atrodys taip:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = g\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = h\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Čia x, y, z – taško koordinatės, t – laikas, f, g, h – žinomos funkcijos. Sistemas, kuriose aukščiausios eilės išvestinės išreikštos žemesnių eilių išvestinėmis, vadiname **kanoninėmis**.

1 apibrėžimas. Normaliaja vadinama pirmos eilės diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{2}$$

kai jos lygčių dešinėse pusėse nėra ieškomųjų funkcijų išvestinių. Jei (1) sistemoje įvesime naujus kintamuosius $x_t' = y_1, y_t' = y_2, z_t' = y_3$, tai kanoninę sistemą, pakeisime ekvivalenčia normaliąja sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = y_2, \\ \dfrac{dz}{dt} = y_3, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = f(t, x, y, z, y_1, y_2, y_3), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = g(t, x, y, z, y_1, y_2, y_3), \\ \dfrac{dy_3}{dt} = h(t, x, y, z, y_1, y_2, y_3). \end{cases}$$

Todėl toliau nagrinėsime normaliąsias sistemas.

2 apibrėžimas. Normaliosios sistemos **sprendiniu** intervale (a, b) vadinama aibė n funkcijų $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, diferencijuojamų intervale (a, b)ir tenkinančių sistemą su visais $x \in (a, b)$.

Koši uždavinys normaliosios sistemos atveju formuluojamas šitaip: raskite (2) sistemos sprendinį $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, tenkinantį pradines sąlygas $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$. Be įrodymo suformuluosime (2) sistemos sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą.

Teorema. Sakykime, kad funkcijos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir jų dalinės išvestinės kintamųjų $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atžvilgiu yra tolydžios srityje D, tuomet yra toks intervalas I $(x_0 \in I)$, kuriame egzistuoja vienintelis (2) sistemos sprendinys $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in I$, tenkinantis pradines sąlygas $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$

2 apibrėžimas. Aibė n diferencijuojamų funkcijų $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, priklausančių nuo x ir n laisvų konstantų $C_1, C_2, \ldots, C_n$ vadinama **bendruoju sprendiniu**, jei

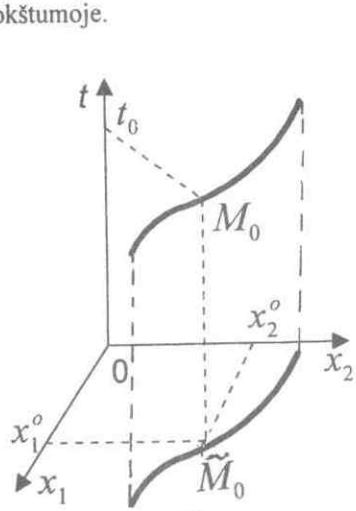
1. su bet kuriomis $C_1, C_2, \ldots, C_n$ reikšmėmis paverčia sistemą (2) tapatybe;
2. esant duotoms pradinėms sąlygoms, visada galima vieninteliu būdu nustatyti $C_1, C_2, \ldots, C_n$, su kuriomis funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ tenkina šias pradines sąlygas. Įrašę į bendrą sprendinį konkrečias skaitines reikšmes $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$, gauname atskirą sprendinį.

Detaliau panagrinėkime normaliąją sistemą:

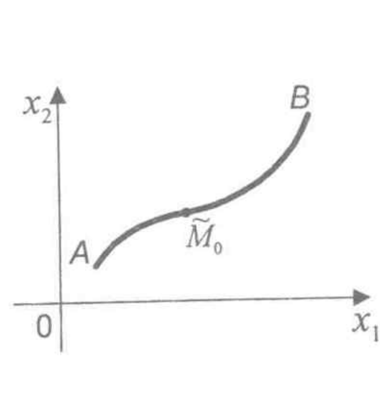
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Kintamieji t, x_1, x_2 yra stačiakampės koordinačių sistemos Otx_1x_2 taškai. Sprendinys $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, kai $t = t_0$ įgyjantis reikšmes x_1^0, x_2^0, trimatėje erdvėje nusako kreivę, einančią per tašką $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$ (9.1 pav.). Ši kreivė vadinama integraline kreive. Koši uždavinio geometrinė interpretacija yra tokia: kintamųjų t, x_1, x_2 erdvėje reikia rasti integralinę kreivę, einančią per tašką $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$.

Normaliąją sistemą ir jos sprendinį galima ir kitaip interpretuoti: į kintamąjį t galima žiūrėti kaip į parametrą, o į sprendinį $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ kaip į plokštumos x_1Ox_2 kreivės parametrines lygtis. Tada plokštuma x_1Ox_2 vadinama **fazine plokštuma.** Sprendinys fazinėje plokštumoje $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, įgyjantis reikšmes $x_1^0 = x_1(t_0)$, $x_2^0 = x_2(t_0)$ vaizduojamas kreive AB, einančia per tašką $\widetilde{M}_0(x_1^0, x_2^0)$ (9.2 pav.). Ši kreivė vadinama sistemos trajektorija arba **fazine trajektorija.** Sistemos trajektorija yra integralinės kreivės projekcija fazinėje plokštumoje.



9.1 pav.



9.2 pav.

9.2. Normaliųjų sistemų sprendimo būdai

Normaliąją lygčių sistemą spręsime eliminavimo metodu bei integruojamųjų darinių metodu.

Sistemą galima pakeisti n – tos eilės diferencialine lygtimi su viena nežinomąja funkcija: kuri nors sistemos lygtis diferencijuojama $(n-1)$ kartą; be to visos nežinomosios funkcijos išreiškiamos viena funkcija.

Iliustruosime šį eliminavimo metodą paprastais pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Išspręsime lygčių sistemą $\frac{dx}{dt}=y, \frac{dy}{dt}=-x$.

▶ Diferencijuojame pirmąją sistemos lygtį $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$. Iš antros lygties įrašę $\frac{dy}{dt}$ išraišką į pirmą lygtį, gausime $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$. Tai antros eilės diferencialinė lygtis su pastoviaisiais koeficientais. Jos bendrasis sprendinys $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$. Diferencijavę gautąjį sprendinį, iš pirmos lygties galime surasti $y(t)$.

$$y(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t.$$

Funkcijas $x(t)$, $y(t)$ išreiškiame pavidalu

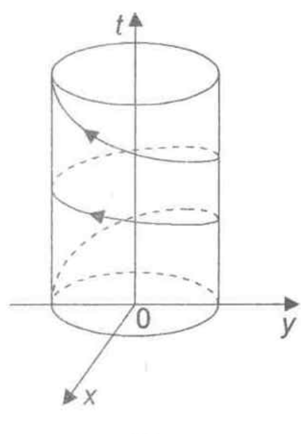
$$x=A\sin(t+\alpha),\quad y=A\cos(t+\alpha).$$

Integralinės kreivės yra sraigtinės linijos su žingsniu $h=2\pi$ (9.3 pav). Eliminavę parametrą t, gauname fazinių trajektorijų lygtis

$$x^2+y^2=A^2.$$

Tai bus apskritimai su centru $C(0;0)$. Kai $A=0$ fazinė traektorija pavirsta į tašką

$$x=0, y=0.$$



9.3 pav.

2 pavyzdys. Išspręsime sistemą $\begin{cases} y'=8z-y, \\ z'=y+z. \end{cases}$

▶ Diferencijuojame antrąją sistemos lygtį: $z''=y'+z'$, ir abi lygtis sudedame: $y'+z'=9z$. Įrašę $9z$ vietoje $y'+z'$, gauname antrosios eilės diferencialinę lygtį z atžvilgiu: $z''=9z$. Tokią lygtį su pastoviais koeficientais jau mokame spręsti. Kadangi charakteringosios lygties $k^2-9=0$ šaknys yra $k_1=3, k_2=-3$, tai lygties $z''-9z=0$ bendrasis sprendinys yra

$$z=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}.$$

Po to surandame z išvestinę ir įrašome į antrąją sistemos lygtį. Gauname

$$y=\left(3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x}\right)-\left(C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}\right)=2C_1e^{3x}-4C_2e^{-3x}.$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$y=2C_1e^{3x}-4C_2e^{-3x},\ z=C_1\ e^{3x}+C_2e^{-3x}$$

yra duotosios sistemos bendrasis sprendinys. ◀

3 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}=-x+yt, \\ t^2\dfrac{dy}{dt}=-2x+yt. \end{cases}$$

▶ Iš pirmosios lygties išreiškiame $y=\dfrac{x}{t}+\dfrac{dx}{dt}$, diferencijuojame $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{x}{t^2}+\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ir įrašome y ir $\dfrac{dy}{dt}$ išraiškas į antrąją lygtį:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-x=-2x+x+t\frac{dx}{dt} \quad \text{arba} \quad t^2\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Imdami $t\neq 0$, gauname $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$. Integruodami pastarąją lygtį du kartus, gauname $x=C_1+C_2t$. Dabar y lengva rasti

$$y=\frac{x}{t}+\frac{dx}{dt}=\frac{C_1+C_2t}{t}+C_2=2C_2+\frac{C_1}{t}.$$

Bendrasis sistemos sprendinys

$$x=C_1+C_2t,$$

$$y=\frac{C_1}{t}+2C_2,\quad t\neq 0. \ ◀$$

Kartais sistema pertvarkoma į ekvivalenčią lygčių sistemą, naudojant integruojamuosius darinius. 4 ir 5 pavyzdžiuose aiškinamas sistemų sprendimo integruojamų darinių metodas.

1 apibrėžimas. Sąryšiai $\Phi_1(x, y, z) = C_1$ ir $\Phi_2(x, y, z) = C_2$ tarp ieškomųjų funkcijų y, z bei kintamojo x vadinami (2) **sistemos pirmaisiais integralais**. Dviejų nepriklausomų pirmųjų integralų visuma vadinama normaliosios sistemos **bendruoju integralu.**

4 pavyzdys. Išspręsime sistemą $y' = \dfrac{1}{z}$, $z' = \dfrac{1}{y}$.

▶ Padalykime pirmąją sistemos lygtį $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{z}$ iš antrosios $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y}$. Gausime lygtį $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$, kurioje atsiskiria kintamieji. Suintegravę, turėsime $\ln|y| = \ln|z| + \ln C_1$, arba $y = C_1 z$. Įrašykime $y = C_1 z$ į antrąją lygtį: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{C_1 z}$. Atskyrę kintamuosius $zdz = \dfrac{dx}{C_1}$ ir suintegravę gausime $\dfrac{z^2}{2} = \dfrac{x}{C_1} + C_2$. Kadangi $\dfrac{y}{z} = C_1$ ir $\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{x}{C_1} = C_2$ yra sistemos tiesiškai nepriklausomi pirmieji integralai, tai $\dfrac{y}{z} = C_1$; $\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{xz}{y} = C_2$ yra sistemos bendrasis integralas. ◀

5 pavyzdys. Suintegruosime sistemą $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = x$.

▶ Sudėję lygtis panariui, gauname vieną integruojamą darinį $\dfrac{d(x+y)}{dt} = x + y$, iš kur $\dfrac{d(x+y)}{x+y} = dt$, $\ln|x+y| = \ln C_1 + t$, $x + y = C_1 e^t$.

Atėmę panariui iš pirmos lygties antrąją, gauname antrąjį integruojamąjį darinį $\dfrac{d(x-y)}{dt} = -(x-y)$, iš kur $x - y = C_2 e^{-t}$. Iš dviejų nepriklausomų sistemos pirmųjų integralų (t.y. bendrojo integralo) $\begin{cases} e^{-t} \cdot (x+y) = C_1, \\ e^{-t} \cdot (x-y) = C_2 \end{cases}$ gauname bendrąjį sprendinį

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(C_1 e^t + C_2 e^{-t}\right), \quad y(t) = \frac{1}{2}\left(C_1 e^t + C_2 e^{-t}\right). \ ◀$$

9.3. Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos

1 apibrėžimas. Normalioji sistema, kurios lygčių dešinėse pusėse yra $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atžvilgiu tiesinės funkcijos, **vadinama tiesinių nehomogeninių diferencialinių lygčių sistema:**

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1' = a_{n1}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{1}$$

Jei funkcijos $f_i(x) \equiv 0 \quad i = \overline{1,n}$, tai ši sistema vadinama **homogenine.**

Be įrodymo pateikiame tiesinės sistemos sprendinių egzistavimo teoremą.

1 teorema. Jeigu sistemos (1) visi koeficientai $a_{ij}(x)$ ir $f_i(x)\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ yra tolydžios atkarpoje $[a, b]$ realiosios funkcijos, tai visoje atkarpoje $[a, b]$ egzistuoja tos sistemos sprendinys $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, tenkinantis pradines sąlygas $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$.

2 apibrėžimas. Vektorinių funkcijų aibė $Y_k(x) = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ y_{2k}(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n}$ vadinama tiesiškai priklausoma atkarpoje $[a, b]$, jeigu yra tokios konstantos $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Su kuriomis

$$C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n \equiv 0, \quad \forall x \in [a, b], \tag{2}$$

kai bent viena tų konstantų nėra lygi nuliui. Jei ši lygybė teisinga tik tada, kai visi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lygūs nuliui, tai funkcijos $Y_1, \ldots, Y_n$ – vadinamos tiesiškai nepriklausomomis.

Šiame apibrėžime svarbu tai, kad funkcijos yra tiesiškai nepriklausomos atkarpoje. Atskiruose intervalo taškuose jos gali būti tiesiškai priklausomos.

3 apibrėžimas. Determinantas, kurį sudaro vektorinių funkcijų komponentės

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

vadinamas Vronskio determinantu.

2 teorema. Jei n vektorinių funkcijų yra tiesiškai priklausomos atkarpoje $[a, b]$, tai šioje atkarpoje $W(x) \equiv 0$.

3 teorema. Tiesinių homogeninių n lygčių sistemos n sprendinių yra tiesiškai priklausomi atkarpoje $[a, b]$ tada ir tik tada, kai $W(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Abi šios teoremos, suformuluotos kartu, sudaro sprendinių tiesinės priklausomybės kriterijų.

4 apibrėžimas. Tiesinės homogeninės sistemos sprendiniai sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą, kai jie yra tiesiškai nepriklausomi, ir jų skaičius lygus sistemos lygčių skaičiui.

Suformuluosime teoremą apie tiesinės homogeninės lygčių sistemos bendrojo sprendinio struktūrą.

4 teorema. Tiesinių homogeninių diferencialinių lygčių sistemos bendrasis sprendinys yra n tiesiškai nepriklausomų intervale (a, b) sprendinių tiesinis darinys.

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x), \quad C_i \in R$$

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} Y_{11}(x) \\ Y_{21}(x) \\ \ldots \\ Y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} Y_{12}(x) \\ Y_{22}(x) \\ \ldots \\ Y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ldots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} Y_{1n}(x) \\ Y_{2n}(x) \\ \ldots \\ Y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

$Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ yra sistemos atskirieji sprendiniai.

Išskleidus bendrąjį sprendinį galima parašyti

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 Y_{11}(x) + C_2 Y_{12}(x) + \ldots + C_n Y_{1n}(x), \\ y_2(x) &= C_1 Y_{21}(x) + C_2 Y_{22}(x) + \ldots + C_n Y_{2n}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) &= C_1 Y_{n1}(x) + C_2 Y_{n2}(x) + \ldots + C_n Y_{nn}(x). \end{aligned}$$

1 pavyzdys. Sistema $\dfrac{dy_1}{dx} = y_2$, $\dfrac{dy_2}{dx} = -y_1$ turi sprendinį $Y_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$, $Y_2(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$. Šie sprendiniai tiesiškai nepriklausomi, nes Vronskio determinantas nelygus 0:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Bendrasis sprendinys

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$$

arba

$$y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$
$$y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$ ◀

5 teorema pateikiama be įrodymo.

5 teorema. Nehomogeninės sistemos bendrasis sprendinys yra atitinkamos homogeninės sistemos bendrojo sprendinio ir atskirojo nehomogeninės sistemos sprendinio suma.

Jeigu pavyksta surasti homogeninės sistemos bendrąjį sprendinį

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x),$$

tai nehomogeninės sistemos bendrasis sprendinys gali būti surastas Lagranžo (konstantų varijavimo) metodu, kai koeficientai yra kintamojo x funkcijos:

$$\begin{cases} C_1'(x)_1 y_{11}(x) + C_2'(x) y_{12}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{1n}(x) = f_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)_1 y_{n1}(x) + C_2'(x) y_{n2}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{nn}(x) = f_2(x). \end{cases}$$

2 pavyzdys. Išspręsime sistemą $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$

▶ Pirmiausia parašysime atitinkamos homogeninės sistemos $y_1' = y_2, y_2' = -y_1$ bendrąjį sprendinį:

$$y_1(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$
$$y_2(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x.$$

Toliau tarsime, kad koeficientai C_1 ir C_2 yra kintamojo x funkcijos. Jų išvestines rasime iš sistemos

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0, \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Padauginę pirmąją lygtį iš $\sin x$, o antrąją – iš $\cos x$ ir lygtis sudėję, gauname $C_1'(x) = 1$. Tada $C_1(x) = x + C_1$. Įrašę $C_1'(x) = 1$ į pirmąją lygtį, randame $C_2'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Tada

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_2.$$

Todėl bendrasis duotosios sistemos sprendinys yra

$$\begin{cases} y_1(x) = (x + C_1)\sin x + (\ln|\cos x| + C_2)\cdot \cos x, \\ y_2(x) = (x + C_1)\cos x - (\ln|\cos x| + C_2)\cdot \sin x. \end{cases}$$ ◀

3 pavyzdys. Konstantų varijavimo metodu išspręsime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$$

▶ Pirmiausia išspręsime atitinkamą homogeninę lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases}$$

Iš antrosios sistemos lygties $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2}$. Įrašę x ir $\dfrac{dx}{dt}$ išraiškas į pirmąją sistemos lygtį, turime

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}.$$

Kadangi $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, tai gausime $x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}$.

Bendrasis homogeninės sistemos sprendinys

$$x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}, \quad y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}. \tag{2}$$

Nehomogeninės sistemos sprendinio ieškosime pavidalu

$$x = -C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t}, \quad y = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}.$$

Įrašę į sistemą turėsime

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'(t)e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)e^{2t} + C_2'(t)e^{-3t} = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$$

$$C_1'(t)=\frac{\left(6t^2-4t-1\right)e^{-2t}}{5}, \quad C_2'(t)=\frac{\left(3t^2+8t+2\right)e^{3t}}{10}.$$

Suintegravę gauname

$$C_1(t)=-\frac{1}{5}\left(t+3t^2\right)e^{-2t}+\widetilde{C}_1,$$

$$C_2(t)=\frac{1}{10}\left(2t+t^2\right)e^{3t}+\widetilde{C}_2,$$

kur $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ – skaičiai.

Įstatę šias išraiškas į (2) sprendinį, gausime

$$x=-C_1e^{2t}+4C_2\,e^{-3t}+t+t^2,$$

$$y=C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-3t}-\frac{1}{2}t^2. \blacktriangleleft$$

9.4. Tiesinių diferencialinių lygčių su pastoviaisiais koeficientais sistemos

Nagrinėsime tiesinių homogeninių diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{22}y_2 \end{cases}. \tag{1}$$

Sistemos sprendinio ieškosime rodiklinių funkcijų aibėje:

$$y_1=\alpha_1e^{kx}, \quad y_2=\alpha_2e^{kx}. \tag{2}$$

Įrašę sprendinius į sistemą, gauname lygtis k, α_1, α_2 reikšmėms surasti.

$$\alpha_1ke^{kx}=\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2\right)e^{kx},$$

$$\alpha_2ke^{kx}=\left(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2\right)e^{kx}.$$

Padaliję kiekvieną lygtį iš e^{kx} ir sutvarkę, gauname tokią algebrinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \left(a_{11}-k\right)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0, \\ a_{21}\alpha_1+\left(a_{22}-k\right)\alpha_2=0. \end{cases} \tag{3}$$

Žinome, kad nenulinis sprendinys (α_1, α_2) egzistuoja, jei sistemos determinantas yra lygus nuliui:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Lygtis (4) vadinama **charakteringąja** lygtimi, kairioji jos pusė yra antrojo laipsnio daugianaris atžvilgiu k. Sistemos (1) bendrojo sprendinio išraiška priklauso nuo to, kokios bus charakteringosios lygties šaknys.

1. Tegul k_1, k_2 yra realios skirtingos.

Įrašę $k = k_1$ į (3) sistemą, surandame pirmąsias α_1 ir α_2 reikšmes α_{11} ir α_{21}. Taigi šaknį $k = k_1$ atitinka atskiras (1) sistemos sprendinys

$$y_{11} = \alpha_{11} e^{k_1 x}, \quad y_{21} = \alpha_{21} e^{k_1 x}.$$

Įrašę $k = k_2$ į (3) sistemą, surandame nežinomuosius α_{12}, α_{22} ir gauname kitą atskirą (2) sistemos sprendinį

$$y_{12} = \alpha_{12} e^{k_2 x}, \quad y_{22} = \alpha_{22} e^{k_2 x}.$$

Tokiu būdu gauname du atskiruosius sprendinius

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Bendrasis sprendinys turės pavidalą:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$$

arba

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x), \\ y_2(x) = C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) \end{cases}$$

čia C_1, C_2 konstantos.

2. Charakteringoji lygtis turi dvi kompleksines šaknis.

Tegu lygties šaknys – kompleksiniai skaičiai: $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$. Tada juos atitinkančios $\alpha_{11,}\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ reikšmės taip pat jungtinės kompleksinės. Gauname fundamentaliųjų sprendinių sistemą:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \alpha_{11} e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_{21} = \alpha_{21} e^{(\alpha + i\beta x)}, \\ y_{12} &= \alpha_{12} e^{(\alpha - i\beta x)}, \quad y_{22} = \alpha_{22} e^{(\alpha - i\beta)x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Pritaikę gerai žinomą Oilerio formulę $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (5) sprendinių sistemai, atskiriame trigonometrinę ir rodiklinę dalis ir gauname naują fundamentaliųjų sprendinių sistemą:

$$\widetilde{y}_{11} = \frac{y_{11} + y_{12}}{2}, \quad \widetilde{y}_{12} = \frac{y_{11} - y_{12}}{2i},$$

$$\widetilde{y}_{21} = \frac{y_{21} + y_{22}}{2}, \quad \widetilde{y}_{22} = \frac{y_{21} - y_{22}}{2i}. \tag{6}$$

Bendrasis sprendinys bus toks:

$$\widetilde{y}_1(x) = C_1\widetilde{y}_{11}(x) + C_2\widetilde{y}_{12}(x),$$
$$\widetilde{y}_2(x) = C_1\widetilde{y}_{21}(x) + C_2\widetilde{y}_{22}(x).$$

Pastaba. Turint (5) sprendinių sistemą galima buvo iš karto rašyti bendrą sprendinį:

$$y_1(x) = C_1 \operatorname{Re} y_{11} + C_2 \operatorname{Im} y_{11},$$
$$y_2(x) = C_1 \operatorname{Re} y_{21} + C_2 \operatorname{Im} y_{21}.$$

1 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \tag{7}$$

▶ Sprendinio ieškosime rodiklinių funkcijų aibėje

$$x = \alpha_1 e^{kx}, y = \alpha_2 e^{kx}. \tag{8}$$

Įrašę (8) sprendinį į (7) sistemą ir suprastinę iš $e^{kx} \neq 0$ turime,

$$\begin{cases} k\alpha_1 = \alpha_1 - 5\alpha_2, \\ k\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-k)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 - (1+k)\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Charakteringoji lygtis

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -(1+k) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{arba} \qquad k^2 + 9 = 0.$$

Charakteringosios lygties šaknys $k_1 = 3i, \quad k_2 = -3i$. Įrašę $k_1 = 3i$ į (9) sistemą, gauname dvi lygtis iš kurių nustatysime α_1, α_2

$$\begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 - (1+3i)\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Kadangi sistemos determinantas $10 - \left(1^2 - (3i)^2\right) = 0$, tai yra nenuliniai sprendiniai (α_1, α_2). Iš dviejų (10) sistemos lygčių pasirenkame bet kurią vieną, pavyzdžiui, pirmąją.

Tegu $\alpha_1 = 5$, tada $\alpha_2 = 1 - 3i$. Tuomet atskirasis sprendinys

$$x_1 = 5e^{3it}, \quad y_1 = (1-3i)e^{3it}.$$

Analogiškai, kai $k_2 = -3i$, gauname antrą atskirąjį sprendinį

$$\begin{aligned}(1+3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 &= 0,\\ 2\alpha_1 - (1-3i)\alpha_2 &= 0.\end{aligned}$$

Tegul $\alpha_1 = 5$, tada $\alpha_2 = 1 + 3i$. Antrasis atskirasis sprendinys

$$x_2 = 5e^{-3it}, \quad y_2 = (1+3i)e^{-3it}.$$

Pereiname prie naujos fundamentalios sprendinių sistemos

$$\widetilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \widetilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i},$$

$$\widetilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \widetilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Pasinaudojame Oilerio formule $e^{\pm ait} = \cos at \pm \sin at$ ir gauname:

$$\widetilde{x}_1 = 5\cos 3t, \qquad \widetilde{x}_2 = 5\sin 3t,$$

$$\widetilde{y}_1 = \cos 3t + 3\sin 3t, \quad \widetilde{y}_2 = \sin 3t - 3\cos 3t.$$

Bendrasis sprendinys bus

$$x = C_1\widetilde{x}_1 + C_2\widetilde{x}_2 = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t,$$

$$y = C_1\widetilde{y}_1 + C_2\widetilde{y}_2 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \blacktriangleleft$$

9.5. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Medžiaga A skyla į dvi komponentes X ir Y. Skilimo greitis proporcingas nesuskilusios medžiagos kiekiui. Parašyti skilimo dėsnį, jei pradiniu laiko momentu $t = 0$, $x = y = 0$, o po valandos $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, kur a – medžiagos A kiekis, x – medžiagos X kiekis, y – medžiagos Y kiekis.

▶ Laiko momentu t nesuskilusios medžiagos kiekis bus lygus $a - x - y$. Skilimo greičiai $\frac{dx}{dt}$ ir $\frac{dy}{dt}$. Pagal uždavinio sąlygą

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y),\end{cases} \tag{1}$$

k_1, k_2 – proporcingumo koeficientai.

Padaliję panariui antrąją lygtį iš pirmosios, turėsime

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k_2}{k_1},\ dy=\frac{k_2}{k_1}dx \quad \text{arba} \qquad y=\frac{k_2}{k_1}x+C_1.$$

Prisiminę pradinę sąlygą, kai $t=0$, $x=0$ ir $y=0$, surandame C_1:

$$0=\frac{k_2}{k_1}0+C_1, \qquad C_1=0.$$

$$y=\frac{k_2}{k_1}x. \tag{2}$$

Įrašę (2) į (1) sistemos pirmąją lygtį, gauname tiesinę lygtį

$$\frac{dx}{dt}+\left(k_1+k_2\right)x=k_1a. \tag{3}$$

(3) lygties bendrasis sprendinys bus: $x(t)=\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}+C_2e^{-(k_1+k_2)t}$.

Prisiminę $x(0)=0$, gauname $C_2=-\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}$. Lygties (3) atskirasis sprendinys lygus

$$x=\frac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right). \tag{4}$$

Įrašę (4) sprendinį į (2) lygtį, turime

$$y=\frac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

Prisiminę antrąją sąlygą, kai $t=1$, tai $x=\dfrac{a}{8}, y=\dfrac{3a}{8}$ surandame proporcingumo koeficientus k_1, k_2:

$$\begin{cases}\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right)=\dfrac{1}{8},\\[2mm] \dfrac{k_2}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right)=\dfrac{3}{8},\end{cases}$$

$$\begin{cases}k_2=3k_1,\\ k_1+k_2=\ln 2,\end{cases} \qquad k_1=\frac{\ln 2}{4}, \quad k_2=\frac{3}{4}\ln 2. \tag{5}$$

Įrašius gautas k_1, k_2 reikšmes į sprendinį, (1) sistemos sprendinys bus toks:

$$x=\frac{a}{4}\left(1-2^{-t}\right), \quad y=\frac{3a}{4}\left(1-2^{-t}\right). \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Išspręsime Koši uždavinį $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$ (6),

kai $x(0) = 6$, $y(0) = -2$. (6')

▶ Iš (6) sistemos antrosios lygties surandame

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{8}$$

Įrašę (7) ir (8) x ir $\dfrac{dx}{dt}$ išraiškas į (6) sistemos pirmąją lygtį, gausime

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0. \tag{9}$$

(9) lygties bendrasis sprendinys bus

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}. \tag{10}$$

Įrašę (10) į (7) lygtį gauname bendrąjį sprendinį

$$\begin{aligned} x &= -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}, \\ y &= C_1e^t + C_2e^{-t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Prisiminę pradines sąlygas (6'), sudarome lygčių sistemą C_1, C_2 surasti:

$$\begin{cases} -4C_1 - 2C_2 = 6, \\ C_1 + C_2 = -2. \end{cases}$$

Išsprendę, randame $C_1 = -1, C_2 = -1$. Įrašius surastas C_1, C_2 reikšmes į (11) sistemą, gaunamas Koši uždavinio sprendinys:

$$\begin{aligned} x &= 4e^t + 2e^{-t}, \\ y &= -e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$ ◀

3 pavyzdys. Išspręsime Koši uždavinį

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \\ &\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x - t}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

▶ Duotąją sistemą perrašome

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{dx}{dt}-1\right)=-1, \\ (x-t)\dfrac{dy}{dt}=1, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} y\dfrac{d(x-t)}{dt}=-1, \\ (x-t)\dfrac{dy}{dt}=1. \end{cases} \tag{15}$$

Sudedame panariui (15) sistemos lygtis

$$y\frac{d(x-t)}{dt}+(x-t)\frac{dy}{dt}=0 \quad \text{arba} \quad \frac{d}{dt}((x-t)\cdot y)=0.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname $(x-t)y=C_1$. Įrašę į antrąją (15) sistemos lygtį $x-t=\dfrac{C_1}{y}$, turime

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{C_1} \quad \text{arba} \quad \frac{dy}{y}=\frac{dt}{C_1}, \quad y=C_2e^{\frac{t}{C_1}}.$$

Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} y=C_2e^{\frac{t}{C_1}}, \\ (x-t)y=C_1, \end{cases}$$

x, y atžvilgiu gauname bendrąjį sprendinį

$$x=\frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{t}{C_1}}+t, \quad y=C_2e^{\frac{t}{C_1}}. \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1-x_2. \end{cases} \tag{12}$$

▶ Sprendinio ieškosime rodiklinių funkcijų aibėje $x_1=\alpha_1e^{kt}, x_2=\alpha_2e^{kt}$. Įrašę sprendinius į (12) sistemą, gauname lygtis k, α_1, α_2 reikšmėms surasti

$$\begin{cases} (-1-k)\alpha_1+2\alpha_2=0, \\ 2\alpha_1+(-1-k)\alpha_2=0. \end{cases} \tag{13}$$

Charakteringoji lygtis yra tokia:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 2 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix}=0 \quad \text{arba} \quad k^2+2k-3=0.$$

Charakteringosios lygties šaknys $k_1 = 1, k_2 = -3$. Įrašę $k = 1$ į (13) sistemą, gauname dvi lygtis α_1, α_2 nustatyti

$$\begin{cases} -2\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0, \end{cases}$$

ir surandame $\alpha_{21} = \alpha_{11}$.

Tegu $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 1$. Tuomet atskirasis sprendinys

$$x_{11} = \alpha_{11} e^t = e^t, \quad x_{21} = \alpha_{21} e^t = e^t.$$

Analogiškai, kai $k = -3$,

$$\begin{cases} 2\alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0, \\ 2\alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0, \end{cases}$$

$a_{12} = -a_{22}$.

Tegul $\alpha_{12} = 1$. Tuomet antrasis atskirasis sprendinys

$$x_{12} = \alpha_{12} e^{-3t} = e^{-3t}, \quad x_{22} = \alpha_{22} e^{-3t} = -e^{-3t}.$$

Bendrasis sistemos sprendinys bus

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t},$$
$$x_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-3t}. \blacktriangleleft$$

9.6. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Išspręskite sistemas eliminavimo metodu:

1.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$ **1.3.** $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

3. Sudarykite integruojamą darinį ir išspręskite sistemas:

2.1. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 x_2 t. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

3. Išspręskite sistemas Lagranžo metodu:

3.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$

Atsakymai

1.1. $\begin{cases} x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t, \\ y = C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t + 1. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} x = -5e^{2t} \sin t, \\ y = e^{2t}(\cos t - 2\sin t). \end{cases}$

2.1. $x_1 = \dfrac{C_1 + C_2 - 2t^2}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}, \quad x_2 = \dfrac{C_2 - C_1}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}.$

2.2. $\begin{cases} x = C_2 e^{-\frac{t}{C_1}}, \\ y = \dfrac{C_1}{C_2} e^{\frac{t}{C_1}}. \end{cases}$ **3.1.** $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \mathrm{tg} t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t \cos t. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} e^{2t} + 2C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = \dfrac{29}{3} e^{2t} + 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

10. DVILYPIAI IR TRILYPIAI INTEGRALAI

10.1. Dvilypio integralo sąvoka

Apibendrinsime apibrėžtinio integralo sąvoką ir apibrėšime dviejų kintamųjų funkcijos $f(x, y)$ integralą erdvės R^2 baigtinėje srityje D.

Priminsime, jog kreivė L, kurios parametrinės lygtys yra $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, vadinama glodžiąja, kai išvestinės $x'(t)$ ir $y'(t)$ yra tolydžios ir abi kartu nėra lygios nuliui, t.y.:

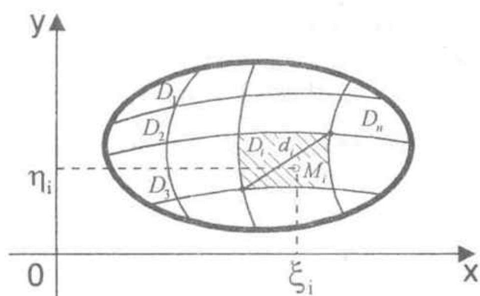
$$x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

Jeigu glodžioji kreivė L yra nusakyta lygtimi $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, tai $f'(x)$ tolydi $\forall x \in [a; b]$. Kreivė L vadinama dalimis glodžiąja, kai ją galima suskaidyti į baigtinį skaičių glodžiųjų dalių.

Nagrinėsime uždarą aprėžtą sritį* [1] D, kurios kontūrą sudaro baigtinis skaičius glodžiųjų kreivių. Sakykime, kad tokios srities D taškuose apibrėžta tolydi funkcija $f(x, y)$. Sritį D dalimis glodžiais lankais bet kaip padalykime į n dalių $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (10.1 pav.).

Pažymėkime ΔS_i $(i = \overline{1, n})$ i–tosios srities D_i plotą, o d_i – jos diametrą (skersmenį) t.y. didžiausią atstumą tarp srities D_i taškų.

Kiekvienoje srityje D_i bet kaip pasirinkime po tašką $M_i(\xi_i, \eta_i)$, apskaičiuokime funkcijos reikšmę $f(M_i)$ ir sudarykime sumą



10.1 pav.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i, \tag{1}$$

kuri vadinama dviejų kintamųjų funkcijos $f(x, y)$ Rymano* dvimate integraline suma srityje D.

---

* žiūr. [1] 296psl. arba [6] 199psl.

* G.F.B. Rymanas (1826 – 1866) – vokiečių matematikas.

Pažymėkime $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d_i\}$ ir apskaičiuokime (1) integralinės sumos ribą, kai λ artėja prie nulio, o tada dalinių sričių D_i skaičius n neaprėžtai didėja.

Apibrėžimas. Rymano integralinės sumos σ_n baigtinė riba, kai $\lambda \to 0 (n \to \infty)$, nepriklausanti nuo srities D suskaidymo į dalines sritis D_i būdo bei taškų $M_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ parinkimo, vadinama funkcijos $f(x, y)$ dvilypiu integralu srityje D ir žymima $\iint\limits_D f(x, y)dS$ arba $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ ir sakoma, kad funkcija $f(x, y)$ yra integruojama Rymano prasme srityje D.

Taigi,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \tag{2}$$

Dabar nurodysime sąlygas,kurioms egzistuoja baigtinė (1) integralinės sumos riba (2), o tuo pačiu ir funkcijos $f(x, y)$ dvilypis integralas. Aišku, kad funkcija $f(x, y)$ turi būti aprėžta, nes priešingu atveju integralinė suma baigtinės ribos neturi. Taigi, funkcijos $f(x, y)$ aprėžtumas yra būtina jos integruojamumo Rymano prasme sąlyga.

Apibrėžimas. Funkcija $f(x, y)$ vadinama dalimis tolydžiąja uždaroje srityje D, jei ji šioje srityje aprėžta, o visi jos trūkio taškai srityje D sudaro glodžias kreives $y = \varphi(x)$ ir $x = \psi(y)$, kurių skaičius yra baigtinis.

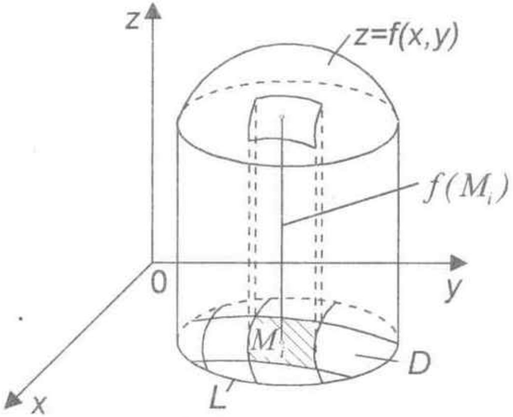
Teorema. (Pakankama integruojamumo sąlyga). Tolydžioji (dalimis tolydi) uždaroje aprėžtoje srityje D funkcija $f(x, y)$ yra integruojama Rymano prasme šioje srityje.

Integralo reikšmė nepasikeis, laisvai keičiant funkcijos $f(x, y)$ reikšmes jos trūkių taškuose, jei tik funkcija išlieka aprėžta.

10.2. Dvilypio integralo geometrinė prasmė

Sakykime, kad $f(x, y)$ – tolydžioji, neneigiama funkcija, apibrėžta uždarosios srities D taškuose. Kaip žinome, funkcija $z = f(x, y)$ geometriškai vaizduojama trimatės erdvės R^3 paviršiumi S, kurio projekcija xOy plokštumoje yra sritis D.

Nagrinėkime erdvės R^3 dalį T, kurią iš apačios riboja xOy plokštumos sritis D, iš viršaus – paviršius S, o iš šonų – cilindrinis paviršius, kurio sudaromosios lygiagrečios Oz ašiai, o vedamoji yra srities D kontūras L. Kūnas T vadinamas cilindroidu (10.2 pav.)



10.2 pav.

Funkcijos $z = f(x, y)$ dvimatė integralinė suma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$ išreiškia elementariųjų cilindrų, kurių pagrindų plotai yra ΔS_i ir aukštinės lygios $f(\xi_i, \eta_i)$, tūrių sumą. Cilindroido T tūrio v apytiksle reikšme galime laikyti dydį σ_n:

$$v \approx \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Ši apytikslė lygybė tuo tikslesnė, kuo smulkesnis srities D suskaidymas. Perėję prie ribos, kai $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d_i\} \to 0$, gauname tikslią lygybę:

$$v = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i . \tag{1}$$

Kadangi funkcija $f(x, y)$ integruojama srityje D, tai (1) integralinės sumos riba egzistuoja ir lygi funkcijos $f(x, y)$ dvilypiam integralui srityje D, todėl

$$v = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy . \tag{2}$$

Tai ir yra geometrinė dvilypio integralo prasmė: tolydžios neneigiamos funkcijos dvilypis integralas lygus cilindroido T tūriui.

Pastaba. Jeigu $f(x, y) \equiv 1 \ \forall(x, y) \in D$, tai

$$\iint_D 1dxdy = \iint_D dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta S_i = \lim_{\lambda \to 0} S = S,$$

čia S – srities D plotas.

10.3. Dvilypio integralo savybės

Tarkime, kad $f(x, y)$ ir $g(x, y)$ – integruojamos srityje D funkcijos. Išvardinsime svarbesnes dvilypių integralų savybes.

1. (Tiesiškumas). Kokie bebūtų realieji skaičiai α ir β, teisinga lygybė

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))dxdy = \alpha \iint_D f(x, y)dxdy + \beta \iint_D g(x, y)dxdy.$$

▶ Pagal apibrėžimą:

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i))\cdot \Delta S_i =$$

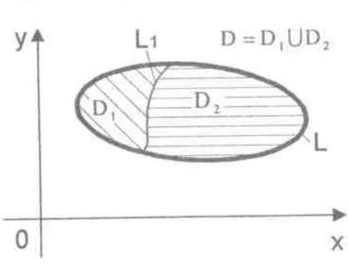
$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\beta g(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_i =$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y)dx\, dy + \beta \iint_D g(x, y)dx\, dy. \ ◀$$

2. (Adityvumas). Kai sritis D yra dviejų sričių D_1 ir D_2, neturinčių bendrų vidinių taškų, sąjunga (10.3 pav.), tai

$$\iint_D f(x, y)dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)dx\, dy.$$

▶ Sritį D skaidome į n dalių, taip, kad viena iš suskaidymo linijų sutaptų su L_1. Dalis, priklausančias sričiai D_1, pažymėkime D_{i1} $(1 \le i \le n_1)$, o sričiai D_2 – D_{i2} $(1 \le i \le n_2)$. Aiškų, kad $n = n_1 + n_2$. Tada



10.3 pav.

$$\iint_D f(x, y)dx\, dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_{i1} + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta S_{i2} =$$

$$= \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy. \ ◀$$

3. Jeigu $f(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in D$, tai
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0.$$
4. Jeigu $f(x,y) \geq g(x,y),\ \forall (x,y) \in D$, tai
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$
5. (Integralo modulio įvertinimas).
$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

▸ Kadangi $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$, tai, remdamiesi 4 savybe, galime užrašyti
$$-\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$
Iš čia išplaukia reikiama nelygybė. ◂

6. (Dvilypio integralo įvertinimas). Pažymėkime $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, S – srities D plotas. Tada
$$m \cdot S \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot S.$$

▸ Iš nelygybės $m \leq f(x,y) \leq M$ išplaukia
$$\iint_D m\,dx\,dy \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D M\,dx\,dy.$$
Belieka panaudoti tai, kad $\iint_D m\,dx\,dy = m\iint_D 1\,dx\,dy = m \cdot S$,
$$\iint_D M\,dx\,dy = M\iint_D 1\,dx\,dy = M \cdot S. \text{ ◂}$$

7. (Vidutinės reikšmės teorema). Sakykime, kad funkcija $f(x,y)$ tolydi uždaroje aprėžtoje srityje D. Tada egzistuoja toks taškas $P(\xi,\eta) \in D$, kad
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(P) \cdot S,$$
čia S – srities D plotas.

▸ Pasinaudoję 6 savybe, turime

$$m \le \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \le M. \qquad (1)$$

Kadangi funkcija $f(x, y)$ tolydi uždaroje srityje D, tai ji šioje srityje įgyja visas tarpines reikšmes, esančias tarp m ir M. Iš (1) išplaukia, kad skaičius $\frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ ir yra tarpinė $f(x, y)$ reikšmė, įgyjama, tarkime, taške P. Todėl

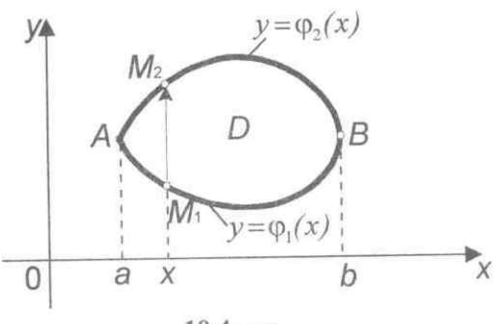
$$f(P) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \blacktriangleleft$$

Skaičius $f(\xi, \eta) = f(P) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ vadinamas funkcijos $f(x, y)$ vidutine reikšme srityje D.

10.4. Dvilypių integralų apskaičiavimas

Dvilypių integralų apskaičiavimas pakeičiamas pakartotiniu apibrėžtinių (vienalypių) integralų apskaičiavimu. Pagal srities D nusakymo būdus išskirsime tris atvejus.

1. Sakykime, kad integravimo sritis $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, čia $\varphi_1(x)$ ir $\varphi_2(x)$ yra tolydžiosios funkcijos, be to, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (10.4 pav.).



10.4 pav.

Dar sakykime, kad bet kokia tiesė lygiagreti ašiai Oy ir einanti per srities D vidinį tašką, kerta srities sieną tiktai dviejuose taškuose M_1 ir M_2. Tokią sritį vadinsime taisyklingąja ašies Oy atžvilgiu.

Tarkime, kad $f(x, y)$ integruojama srityje D, t.y. egzistuoja dvilypis integralas $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$. Jeigu su bet kuria fiksuota kintamojo x reikšme iš intervalo $[a, b]$ funkcija $f(x, y)$ yra integruojama atkarpoje $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ kintamojo y atžvilgiu, t.y. jeigu egzistuoja apibrėžtinis integralas

$$S(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \quad \forall x\in[a,b], \tag{1}$$

tai teisinga formulė

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{2}$$

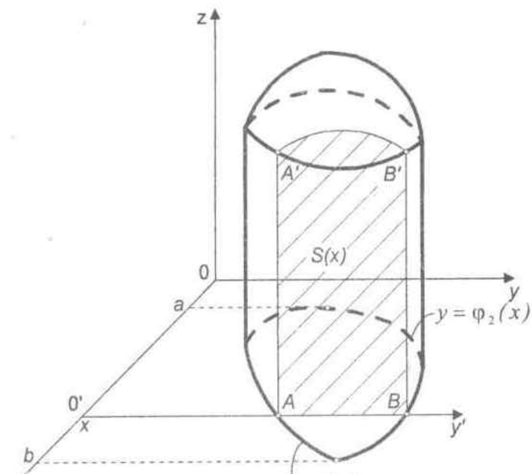
Dešinėje (2) lygybės pusėje esantis integralas vadinamas kartotiniu integralu. Ji reikia suprasti taip: tarus, kad kintamasis x yra fiksuotas (pastovus), iš pradžių apskaičiuojamas vidinis integralas $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, po to gauta kintamojo x funkcija $S(x)$ integruojama atkarpoje $[a, b]$.

Norėdami įrodyti (2) formulę, pasinaudosime geometriniais samprotavimais. Tarkime, kad $f(x,y)\geq 0, \quad \forall(x,y)\in D$.

Tada dvilypis integralas, esantis kairėje (2) lygybės pusėje, išreiškia cilindroido (10.5 pav.), apriboto iš apačios sritimi D, iš viršaus – paviršiumi $z=f(x,y)$ ir iš šonų – cilindriniu paviršiumi, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz, tūrį v:

$$v=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \tag{3}$$

Antra vertus, (1) integralas išreiškia cilindroido skersinio pjūvio $ABB'A'$, gauto perkirtus cilindroidą plokštuma, statmena ašiai Ox, plotą, kadangi šis pjūvis yra ne kas kita, kaip kreivinė trapecija, apribota iš apačios ašies $O'y'$ atkarpa $[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$, lygiagrečia ašiai Oy, iš viršaus – kreive $z=f(x,y)$, kai $x=\text{const}$. Žinodami skersinio pjūvio plotą $S(x)$, cilindroido tūrį v galime apskaičiuoti, pasiremdami formule



10.5 pav.

$$v = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{4}$$

Įrašę (1) išraišką į (4), gauname

$$v = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\,. \tag{5}$$

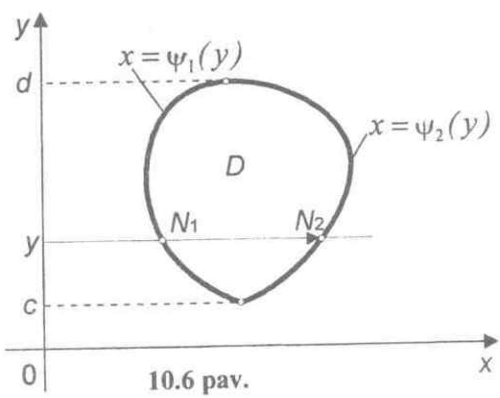
Kairiosios (3) ir (5) lygybių pusės sutampa, taigi, sutampa šių lygybių ir dešiniosios pusės, todėl (2) formulė teisinga.

2. Jeigu sritis D taisyklinga ašies Ox atžvilgiu, t.y.

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

(10.6 pav.), tai analogiškai galima užrašyti

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\,. \tag{6}$$



10.6 pav.

Čia pirmiausia apskaičiuojamas apibrėžtinis integralas $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$, tarus, kad kintamojo y reikšmė yra fiksuota (pastovi), po to gautas rezultatas integruojamas atkarpoje $[c, d]$.

3. Atskiru atveju, kai integravimo sritis D yra stačiakampis $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$, turime

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx\,.$$

Taigi, kai integravimo rėžiai kartotiniame integrale yra pastovūs, tai pakeisti integravimo tvarką labai lengva.

1 pastaba. Kai integravimo sritis D nėra taisyklinga, ją tiesėmis, lygiagrečiomis koordinačių ašims, skaidome į dalines sritis $D_1,\ldots,D_n$, taisyklingas ašių Ox arba Oy atžvilgiu, ir užrašome

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy+\ldots+\iint\limits_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy,$$

po to taikome (2) arba (6) formules.

2 pastaba. Kuriuo kintamuoju pirmiausia integruoti, kiekvienu atveju priklauso nuo konkretaus uždavinio. Po pirmojo integravimo gautas reiškinys antrajam integravimui turi būti kiek galima paprastesnis.

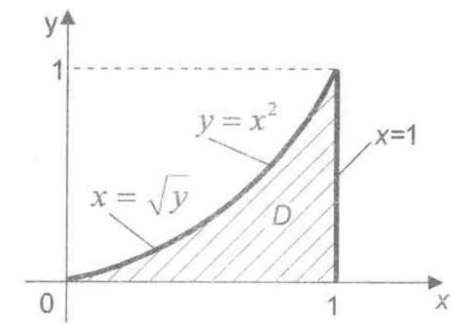
1 pavyzdys. Apskaičiuosime dvilypį integralą $I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, kai integravimo sritį D riboja linijos $y=0$, $y=x^2$, $x=1$ (10.7 pav.).

▶ Matome, kad sritis D yra taisyklinga ašių Ox ir Oy atžvilgiu. Todėl, apskaičiuodami dvilypį integralą I, galime naudotis tiek (2), tiek (6) formule. Pasinaudokime (2) formule. Kadangi

$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\right\}$, tai

$$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy.$$

Apskaičiuosime vidinį integralą, tardami, kad kintamojo x reikšmė fiksuota (pastovi):



10.7 pav.

$$\int\limits_0^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy=\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2}=x^2\cdot x^2+\frac{\left(x^2\right)^3}{3}=x^4+\frac{x^6}{3}.$$

Apskaičiuosime išorinį integralą:

$$\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7\cdot 3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Arba:

$$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2\cdot x^2+\frac{\left(x^2\right)^3}{3}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{y^7}{3\cdot 7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Dabar pakeisime integravimo tvarką – dvilypį integralą apskaičiuosime panaudodami (6) formulę. Kadangi $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 1\right\}$, tai dvilypis integralas išreiškiamas tokiu kartotiniu integralu:

$$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^1\left(x^2+y^2\right)dx.$$

Apskaičiuosime vidinį integralą, tardami, kad kintamojo y reikšmė fiksuota:

$$\int\limits_{\sqrt{y}}^1\left(x^2+y^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=1}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}+y^2\cdot 1\right)-\left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3}+y^2\cdot\sqrt{y}\right)=\frac{1}{3}+y^2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}-y^{\frac{5}{2}}.$$

Apskaičiuosime išorinį integralą:

$$\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}-y^{\frac{5}{2}}\right)dy=\left(\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{2\cdot y^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 3}-\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{26}{105}.$$

Arba

$$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^1\left(x^2+y^2\right)dx=\int\limits_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^1=$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 \cdot 1 - \frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3} - y^2 \cdot \sqrt{y} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - y^{\frac{5}{2}} \right) dy =$$

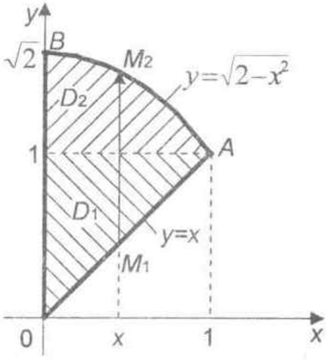
$$= \left(\frac{1}{3} y + \frac{y^3}{3} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot 3} - \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{26}{105}. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Pakeiskime integravimo tvarką integrale $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy$.

▸ Sritis D yra (telpa) tarp tiesių $x = 0$ ir $x = 1$ (10.8 pav.). Jos projekcija Ox ašyje yra atkarpa $[0; 1]$. Esant kiekvienai fiksuotai x reikšmei iš šio intervalo, y reikšmė keisis nuo taško M_1, esančio tiesėje $y = x$, ordinatės iki taško M_2, esančio apskritimo viršutiniame lanke $y = \sqrt{2 - x^2}$, ordinatės. Taigi, duotoji integravimo sritis

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{2 - x^2} \right\}.$$

Nubraižome sritį D ir randame koordinates taškų, kuriuose susikerta skirtingos srities D kontūro linijos: $O\,(0; 0)$; $A\,(1; 1)$; $B\left(0; \sqrt{2}\right)$. Per šiuos taškus brėžiame tieses, statmenas Oy ašiai.



10.8 pav.

Tiesė, einanti per tašką A (1; 1) padalino sritį D į dvi dalines sritis D_1 ir D_2. Tai reiškia, kad pakeitę integravimo tvarką, duotąjį dvilypį integralą srityje D išreikšime dviejų dvilypių integralų suma. Sritis D_1 išsidėsčiusi juostoje tarp tiesių $y = 0$, $y = 1$, iš kairės ją riboja tiesė $x = 0$, iš dešinės tiesė $x = y$: $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$.

Sritis D_2 išsidėsčiusi juostoje tarp tiesių $y = 1, y = \sqrt{2}$, iš kairės ją riboja tiesė $x = 0$, iš dešinės apskritimo lankas $x = \sqrt{2 - y^2}$:

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 1 \le y \le \sqrt{2},\ 0 \le x \le \sqrt{2 - y^2} \right\}.$$

Taigi, pakeitę integravimo tvarką, gauname:

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx .$$

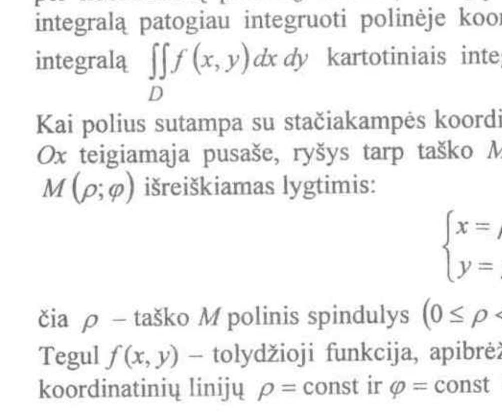
10.5. Dvilypiai integralai polinėje koordinačių sistemoje

Tais atvejais, kai integravimo sritį D riboja apskritimų lankai, tiesės, einančios per koordinačių pradžią, kreivės, kurių polinės lygtys yra nesudėtingos, dvilypį integralą patogiau integruoti polinėje koordinačių sistemoje. Išreikškime dvilypį integralą $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ kartotiniais integralais polinėje koordinačių sistemoje.

Kai polius sutampa su stačiakampės koordinačių sistemos pradžia, o polinė ašis su Ox teigiamąja pusaše, ryšys tarp taško $M(x,\ y)$ Dekarto ir polinių koordinačių $M(\rho;\varphi)$ išreiškiamas lygtimis:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

čia ρ – taško M polinis spindulys $(0 \le \rho < \infty)$, φ – polinis kampas $(0 \le \varphi < 2\pi)$. Tegul $f(x,y)$ – tolydžioji funkcija, apibrėžta uždaroje aprėžtoje srityje D. Sritį D koordinatinių linijų $\rho = \text{const}$ ir $\varphi = \text{const}$ tinklu, t.y. koncentriniais apskritimais ir iš poliaus išeinančiais spinduliais padalykime į n elementarių dalių. Spinduliai φ_i ir $(\varphi_i + \Delta\varphi_i)$ ir dviejų apskritimų ρ_i ir $(\rho_i + \Delta\rho_i)$ lankai apriboja kreivinį keturkampį *abcd* (10.9 pav.). Jo kraštinės *ab* ilgis lygus $\Delta\rho_i$ ir lanko *ad* ilgis lygus $\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$. Šio keturkampio plotas ΔS_i polinėje koordinačių sistemoje aukštesnės eilės nykstamųjų dydžių tikslumu išreiškiamas formule:



10.9 pav.

$$\Delta S_i \approx \rho_i \Delta\varphi_i \Delta\rho_i .$$

Parinkę i – toje srityje $(i=\overline{1,n})$ tašką $M_i(x_i, y_i)$ – kreivinio keturkampio viršūnę, iš dvilypio integralo apibrėžimo, gauname:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_i\cos\varphi_i, \rho_i\sin\varphi_i)\cdot$$

$$\cdot\rho_i\Delta\varphi_i\cdot\Delta\rho_i = \iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\varphi\,d\rho, \tag{2}$$

čia $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, d_i – i – tos srities skersmuo. Reiškinys $dS = \rho d\varphi d\rho$ vadinamas ploto diferencialu (elementu) polinėje koordinačių sistemoje.

Toliau (2) integralą išreikšime kartotiniais integralais. Sakykime, kad sritis D yra taisyklinga ρ atžvilgiu. Tai reiškia, kad bet kuris spindulys, išeinantis iš poliaus ir sudarantis kampą φ_i $(\alpha < \varphi_i < \beta)$ su poline ašimi, eina per vidinį srities D tašką ir kerta kontūrą ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Tarkime, kad sritį D apriboja dvi kreivės ACB ir AEB ir spinduliai OA ir OB, kurie su poline ašimi sudaro kampus α ir β. Tegu kreivių ACB ir AEB lygtys yra $\rho = \rho_1(\varphi)$ ir $\rho = \rho_2(\varphi)$. Tuomet:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{3}$$

Tuo atveju, kai polius yra integravimo srities D viduje, polinis kampas φ kinta nuo 0 iki 2π, o polinis spindulys ρ kiekvienai fiksuotai φ reikšmei kinta nuo 0 iki kreivės, apribojančios sritį D:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho, \tag{4}$$

čia $\rho = \rho(\varphi)$ yra srities D kontūro polinė lygtis.

Atskiru atveju, kai integravimo sritį sudaro skritulys su centru poliuje ir spinduliu R, duotąjį dvilypį integralą išreiškiame kartotiniais integralais su pastoviais integravimo rėžiais:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho. \tag{5}$$

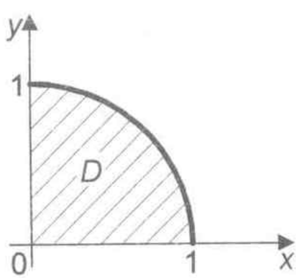
Pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, kai D – skritulio $x^2 + y^2 = 1$ dalis, esanti pirmame ketvirtyje (10.10 pav.).

▶ Dvilypį integralą užrašysime polinėse koordinatėse, panaudoję formules:

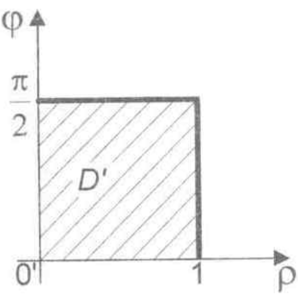
$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi .$$

Tada $x^2 + y^2 = \rho^2$. Aišku, kad srityje D' ρ kinta nuo 0 iki 1, o φ – nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$. Kitaip tariant, sritis D atvaizduojama į stačiakampį (10.11 pav.):

$$D' = \left\{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$



10.10 pav.



10.11 pav.

Gauname:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} e^{\rho^2}\rho\,d\varphi\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^2}\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1). \blacktriangleleft$$

Sprendžiant uždavinius, nebūtina brėžti integravimo sritį D', kurioje polinės koordinatės ρ ir φ atvaizduotas stačiakampėje koordinačių sistemoje. Paprastai naujų kintamųjų kitimo rėžiai nustatomi tiesiogiai iš srities D.

Pastaba. Be įrodymo pateiksime kintamųjų keitimo dvilypiuose integraluose formules bendruoju atveju.

Sakykime, kad $(x, y) \in D$ ir

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \tag{6}$$

čia $x(u,v)$ ir $y(u,v)$ – vienareikšmės, tolydžiosios, turinčios tolydžiąsias pirmos eilės dalines išvestines tam tikroje srityje D' funkcijos. Tegu kiekvieną kintamųjų u ir v reikšmių porą $(u,v) \in D'$ atitinka vienintelė kintamųjų x ir y reikšmių pora $(x,y) \in D$ ir atvirkščiai:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{7}$$

Skaičiai u ir v vadinami srities D taškų x ir y kreivinėmis koordinatėmis. Yra įrodyta, kad jei (6) funkcijos srityje D' turi tolydžias pirmos eilės dalines išvestines ir reiškinys

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

nelygus nuliui srityje D', tai teisinga kintamųjų keitimo formulė:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv,$$

jei srityje D egzistuoja funkcijos $f(x, y)$ dvilypis integralas. (8) reiškinys vadinamas funkcijų $x = x(u, v)$ ir $y = y(u, v)$ funkciniu determinantu arba jakobianu. Polinėje koordinačių sistemoje jakobianas $J(\rho,\varphi) = \rho$.

10.6. Trilypio integralo apibrėžimas, savybės ir apskaičiavimas

Sakykime, kad funkcija $f(x,y,z)$ tolydi uždaros, aprėžtos srities $V \subset R^3$ taškuose. Sritį V riboja baigtinis skaičius glodžiųjų paviršių. Prisiminsime, kad glodusis paviršius kiekviename savo taške turi liečiamąją plokštumą ir normalę.

Glodžiaisiais paviršiais sritį V skaidome į n dalių $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Dalies V_i tūrį pažymėkime Δv_i ir laisvai pasirinkime joje tašką $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sudarykime trimatę integralinę sumą

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta v_i.$$

Pažymėkime $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{d_i\}$; čia d_i dalies V_i skersmuo.

Apibrėžimas. Baigtinė integralinės sumos σ_n riba, kai $\lambda \to 0 \; (n \to \infty)$, nepriklausanti nuo srities V suskaidymo į dalis V_i būdo, nei nuo taškų $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$ parinkimo, vadinama funkcijos $f(x,y,z)$ trilypiu integralu srityje V ir žymima

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{arba} \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv.$$

Sakome, kad funkcija $f(x,y,z)$ integruojama srityje V. Taigi, pagal apibrėžimą

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot \Delta v_i. \tag{1}$$

Jeigu funkcija $f(x,y,z)$ tolydi uždaroje aprėžtoje srityje V, tai ji integruojama šioje srityje, t.y. egzistuoja (1) integralas.

Išvardinsime svarbesnes trilypių integralų savybes.

Sakykime, kad $f(x,y,z)$ ir $g(x,y,z)$ integruojamos srityje V funkcijos.

1. (Tiesiškumas). Su bet kokiais realiaisiais skaičiais α ir β teisinga lygybė

$$\iiint\limits_V (\alpha\, f(x,y,z)+\beta\, g(x,y,z))\,dv =$$
$$= \alpha \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dv.$$

2. (Adityvumas). Jeigu sritis V yra dviejų sričių V_1 ir V_2, neturinčių bendrų vidinių taškų, sąjunga, tai

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dv + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dv.$$

3. Jeigu $f(x,y,z)\geq 0, \quad \forall (x,y,z)\in V$, tai

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv \geq 0.$$

4. Jeigu $f(x,y,z)\geq g(x,y,z), \quad \forall (x,y,z)\in V$, tai

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv \geq \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dv.$$

5. (Integralo modulio įvertinimas).

$$\left|\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv\right| \leq \iiint\limits_V |f(x,y,z)|\,dv.$$

6. (Integralo įvertinimas). Pažymėkime $m = \min\limits_{(x,y,z)\in V} f(x,y,z)$ ir $M = \max\limits_{(x,y,z)\in V} f(x,y,z)$, v – srities V tūris:

$$m \cdot v \le \iiint_V f(x,y,z)\,dv \le M \cdot v .$$

7. (Vidutinės reikšmės teorema). Jeigu funkcija $f(x,y,z)$ tolydi uždaros, aprėžtos srities V taškuose, tai egzistuoja taškas $(\xi,\eta,\zeta) \in V$ toks, kad
$$\frac{1}{v}\iiint_V f(x,y,z)\,dv = f(\xi,\eta,\zeta).$$

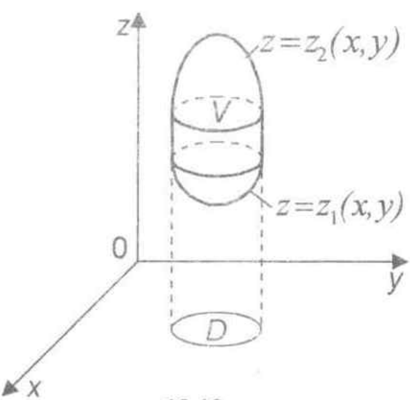
Skaičius $f(\xi,\eta,\zeta)$ vadinamas funkcijos $f(x,y,z)$ vidutine reikšme srityje V.

Išvardintųjų savybių įrodymai analogiški dvilypio integralo savybių įrodymams.

Pereisime prie trilypių integralų apskaičiavimo.

Sakykime, kad integravimo sritis $V \subset R^3$ apribota iš apačios ir iš viršaus atitinkamai glodžiaisiais paviršiais $z = z_1(x,y)$ ir $z = z_2(x,y)$, o iš šonų – cilindriniu paviršiumi.

Srities V projekcija xOy plokštumoje yra sritis D, kurioje apibrėžtos tolydžiosios funkcijos $z_1(x,y)$ ir $z_2(x,y)$ (10.12 pav.).



10.12 pav.

Tarkime, kad kiekviena tiesė, lygiagreti ašiai Oz ir einanti per vidinį srities V tašką, kerta srities sieną ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Tada bet kokiai tolydžiai srityje V funkcijai $f(x,y,z)$ teisinga formulė

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy . \qquad (1)$$

Ši formulė trilypio integralo apskaičiavimą pakeičia pakartotiniu vidinio apibrėžtinio integralo (integravimo kintamasis z) apskaičiavimu, tarus, kad kintamųjų x ir y reikšmės yra fiksuotos, ir išorinio dvilypio integralo srityje D apskaičiavimu. Pakeitę dvilypį integralą srityje D kartotiniu, kai $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, gauname

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz . \qquad (2)$$

Taigi trilypio integralo apskaičiavimas pakeičiamas trijų apibrėžtinių (vienalypių) integralų apskaičiavimu.

Paminėsime, kad integravimo tvarką (2) formulėje galima pasirinkti ir kitokią, t.y. kintamuosius x, y ir z galima keisti vietomis.

Jeigu sritis V yra stačiakampis gretasienis

$$V = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l\},$$

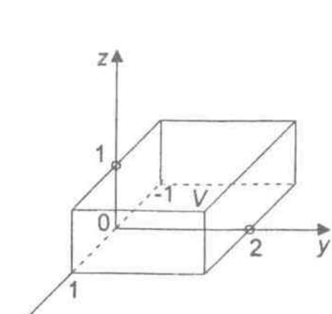
tai (2) formulė tampa tokia

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z)\,dz.$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, kai integravimo sritis

$$V = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}$$

(10.13 pav.).



10.13 pav.

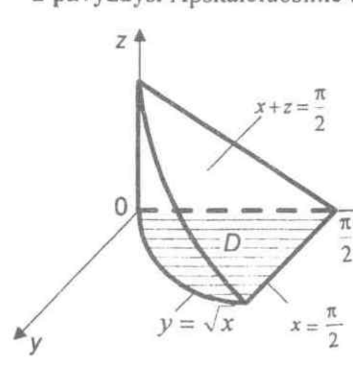
▶ Kadangi integravimo sritis V yra stačiakampis gretasienis, tai

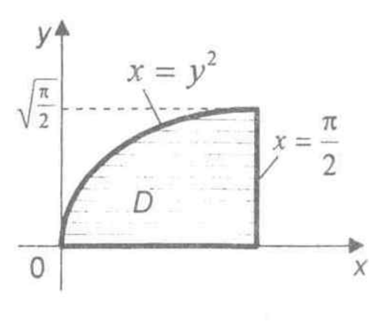
$$\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 dy \int_0^1 xyz\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 \left(xy \cdot \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 xy\,dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2} \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $I = \iiint_V y \cos(x + z)\,dx\,dy\,dz$, kai inte-





10.14 pav.

gravimo sritis V apribota cilindriniu paviršiumi $y=\sqrt{x}$, plokštumomis $y=0$, $z=0$ ir $x+z=\frac{\pi}{2}$ (10.14 pav.).

▸ Kadangi integravimo sritis V apribota iš apačios plokštuma $z=0$ (plokštuma xOy), iš viršaus – plokštuma $z=\frac{\pi}{2}-x$, tai galime užrašyti

$$I=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\,dz\right)dx\,dy=\iint\limits_D y\sin(x+z)\Bigg|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D y(1-\sin x)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}dy\int\limits_{y^2}^{\frac{\pi}{2}}y(1-\sin x)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y(x+\cos x)\Bigg|_{x=y^2}^{x=\frac{\pi}{2}}dy=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y\left(\frac{\pi}{2}-y^2-\cos y^2\right)dy=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}-\frac{1}{2}\sin y^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$ ◂

10.7. Kintamųjų keitimas trilypiuose integraluose. Cilindrinės koordinatės

Sakykime, kad V uždara, aprėžta sritis erdvėje (x, y, z), o V' – sritis erdvėje (u, v, w). Tarkim, kad funkcijos $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\kappa(u,v,w)$ sritį V abipus vienareikšmiai atvaizduoja į sritį V'. Jeigu funkcijų φ,ψ,κ jakobianas

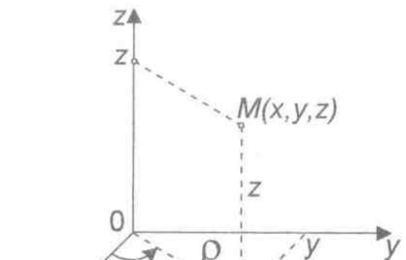
$$J=\frac{D(\varphi,\psi,\kappa)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w\\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w\\ \kappa'_u & \kappa'_v & \kappa'_w\end{vmatrix}\neq 0$$

srityje V', tai teisinga tokia kintamųjų keitimo trilypiuose integraluose formulė

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$= \iiint\limits_{V} f\left(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \kappa(u,v,w)\right) |J| \, du \, dv \, dw .$$

Panagrinėsime dažniausiai praktikoje naudojamą koordinačių sistemą – cilindrinę.



10.15 pav.

Cilindrinėje koordinačių sistemoje taško $M(x,y,z) \in R^3$ padėtį vienareikšmiškai nusako skaičių trejetas (ρ, φ, z); čia z – taško M aplikatė, o (ρ, φ) – taško $M'(x,y)$ (M' – taško M projekcija plokštumoje xOy) polinės koordinatės (10.15 pav.). Kai polinė ašis sutampa su teigiama ašies Ox kryptimi, tai ryšys tarp Dekarto ir cilindrinių taško M koordinačių nusakomas lygybėmis

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \; 0 \le \varphi < 2\pi, \\ y = \rho\sin\varphi; \; 0 \le \rho < +\infty, \\ z = z; \quad -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Rasime atvaizdžio jakobianą:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

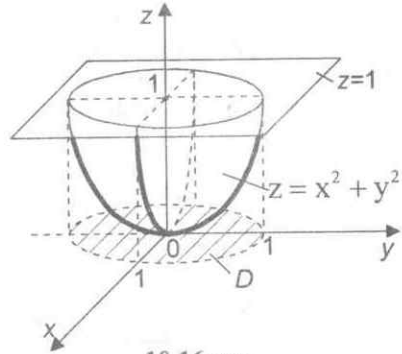
Kintamųjų keitimo formulė bus tokia:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz . \quad (1)$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$, išreikšdami jį cilindrinėje koordinačių sistemoje, kai integravimo sritis V – erdvės dalis, apribota paviršiais $z = x^2 + y^2$ ir $z = 1$ (10.16 pav.).

▶ Kadangi srities V projekcija plokštumoje xOy yra skritulys $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$, tai koordinatė φ kinta nuo 0 iki 2π, koordinatė ρ – nuo 0 iki 1. Pastovią $\rho\,(0 \le \rho \le 1)$ reikšmę erdvėje (x, y, z) atitinka cilindras $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Nagrinėdami šio cilindro susikirtimą su sritimi V, gauname, kad koordinatė z kinta nuo taškų, priklausančių paraboloidui $z = x^2 + y^2$, aplikačių reikšmių iki taškų, esančių plokštumoje $z = 1$, aplikačių reikšmių, t.y. nuo $z = \rho^2$ iki $z = 1$. Pritaikę (1) formulę, gauname



10.16 pav.

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 \rho^2 \cdot \rho \cdot dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3 \cdot z\right) \Bigg|_{z=\rho^2}^{z=1} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3 - \rho^5\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12} \varphi \; \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}. \blacktriangleleft$$

10.8. Dvilypių ir trilypių integralų geometriniai taikymai

1. Tūrių apskaičiavimas. Kaip jau išsiaiškinome, cilindroido, apriboto iš viršaus paviršiumi $z = f(x, y, z) \geq 0$, iš apačios – plokštuma $z = 0$ ir iš šonų – cilindriniu paviršiumi, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz, o vedamoji – srities D (D – cilindroido projekcija plokštumoje xOy) siena, tūris v išreiškiamas formule

$$v = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Kartais, skaičiuojant erdvinių kūnų tūrius, patogiau naudoti trilypius integralus, ypač tada, kai erdvinis kūnas V nėra cilindroidas. Tokiais atvejais kūno V tūris v išreiškiamas formule

$$v = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz.$$

2. Plotų apskaičiavimas. Srities D plotą S patogu apskaičiuoti, taikant formulę

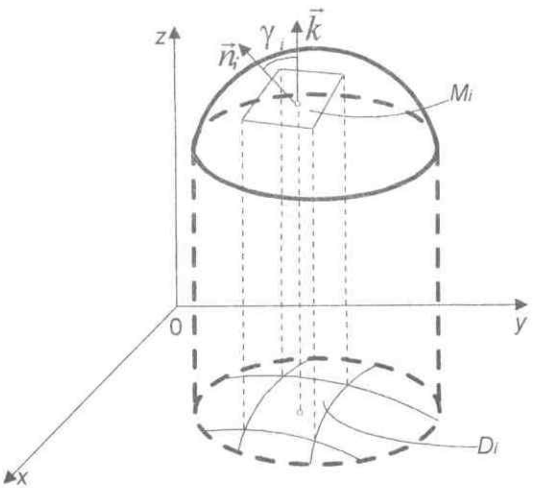
$$S = \iint\limits_D dx\, dy.$$

Pastaroji formulė yra universalesnė, lyginant ją su kreivinės trapecijos ploto formule, kurioje panaudojama apibrėžtinio integralo sąvoka, kadangi sritis D gali būti bet kaip pasislinkusi koordinačių ašių atžvilgiu.

3. Paviršiaus plotų apskaičiavimas. Sakykime, kad paviršius S nusakomas lygtimi $z = f(x, y)$ ir jo projekcija plokšumoje xOy yra sritis D. Srityje D funkcija $f(x, y)$ yra tolydi ir turi tolydžias išvestines

$$f'_x(x, y) \text{ ir } f'_y(x, y).$$

Suskaidykime sritį D į n dalių D_i, neturinčių bendrų vidinių taškų. Dalių D_i plotus pažymėkime ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tarkime, kad S_i – ta paviršiaus S dalis, kurios projekcija plokštumoje xOy yra D_i. Taigi paviršius S taip pat suskaidytas į n dalių S_i, $i = \overline{1, n}$ (10.17 pav.).



10.17 pav.

Kiekvienoje dalyje D_i laisvai pasirenkame po tašką (ξ_i, η_i), jį atitinka paviršiaus taškas – $M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$. Per tašką M_i brėžiame paviršiaus S liečiamąją plokštumą. Tos plokštumos lygtis

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i);$$

čia x, y, z – plokštumos kintamojo taško koordinatės, $(\xi_i, \eta_i, z_i = f(\xi_i, \eta_i))$ – lietimosi taško koordinatės (žiūr. [6] 224 psl.). Priminsime, kad vektoriaus $\vec{n}$ (normalės), statmeno liečiamajai plokštumai, koordinatės yra šios:

$$\vec{n} = \left(-f'_x(\xi_i, \eta_i), -f'_y(\xi_i, \eta_i), +1\right).$$

Pasirinkime tą liečiamosios plokštumos dalį, kurios projekcija plokštumoje xOy yra sritis D_i. Pažymėkime šią dalį σ_i, o jos plotą $\Delta\sigma_i$. Aišku, kad $\Delta\sigma_i \approx \Delta P_i$ (čia ΔP_i – paviršiaus dalies S_i plotas), o paviršiaus S plotas P lygus

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \,. \tag{1}$$

Paviršiaus S ploto P tiksli reikšmė gaunama perėjus prie ribos, kai $\max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i) = \lambda \to 0$, t.y.

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i . \qquad (2)$$

Įrodysime, kad ši riba egzistuoja ir lygi dvilypiam integralui

$$P = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dx\, dy . \qquad (3)$$

Kampą, kurį sudaro vektorius $\vec{n}_i$ su teigiama Oz ašies kryptimi, pažymėkime γ_i. Jis lygus kampui, kurį sudaro liečiamoji plokštuma taške M_i su plokštuma xOy. Kadangi sritis D_i yra liečiamosios plokštumos dalies σ_i projekcija plokštumoje xOy, tai šių sričių plotai susieti lygybe $\Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$.

Antra vertus, remdamiesi analizine geometrija, turime

$$\cos\gamma_i = \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{k}}{|\vec{n}_i| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}} .$$

Taigi

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta S_i .$$

Įrašę $\Delta\sigma_i$ išraišką į (2) formulę, gauname

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta S_i .$$

Reiškinys, esantis po ribos ženklu, yra funkcijos $\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$ integralinė suma srityje D. Kadangi ši funkcija yra tolydi srityje D, tai šios sumos riba, kai $\lambda \to 0$, egzistuoja ir lygi (3) dvilypiam integralui.

10.9. Dvilypių ir trilypių integralų mechaniniai taikymai

1. Sakykime, kad D – plokštelė, esanti xOy plokštumoje, kurios paviršinis masės pasiskirstymo tankis $\gamma = \gamma(x, y)$ – tolydžioji funkcija srityje D. Tuomet:

a) plokštelės masė

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy ;$$

b) statiniai momentai M_x ir M_y koordinačių ašių Ox ir Oy atžvilgiu:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\,dx\,dy; \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)\,dx\,dy;$$

c) masės centro koordinatės:

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m};$$

d) inercijos momentai I_x, I_y ir I_0 ašių Ox ir Oy bei koordinačių pradžios atžvilgiu:

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy; \quad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy;$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

2. Kūno masės centro koordinačių apskaičiavimas.

Sakykime, kad $\gamma(x, y, z)$ – kūno $V \in R^3$ masės pasiskirstymo tankis tolydžioji funkcija srityje V. Kūno V masės centro koordinatės apskaičiuojamos pagal formules:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_V x\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \quad y_c = \frac{1}{m}\iiint_V y\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_V z\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

čia $m = \iiint_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ – kūno V masė.

3. Kūno inercijos momentų apskaičiavimas.

Kūno $V \in R^3$, kurio masės tankis $\gamma(x, y, z)$ yra tolydi srities V taškų funkcija, inercijos momentai koordinačių ašių atžvilgiu apskaičiuojami pagal formules:

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \quad I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Kūno V inercijos momentas koordinačių pradžios taško atžvilgiu išreiškiamas formule

$$I_0 = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Kūno V inercijos momentai plokštumų xOy, yOz ir xOz atžvilgiu apskaičiuojami, naudojant formules

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,, \quad I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

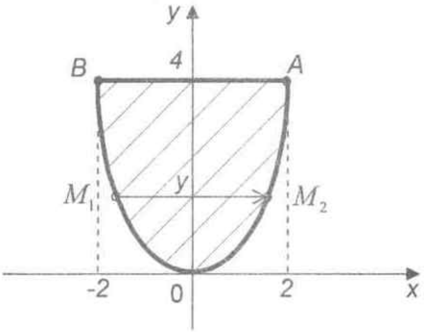
$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

10.10. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Pakeiskime integravimo tvarką dvilypiame integrale $I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy$.

▶ Pirmiausia pagal duotus integravimo rėžius nustatome integravimo sritį $D: -2 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 4$, kurią riboja šios kreivės: $x=-2$; $x=2$; $y=x^2$; $y=4$ (10.18 pav.).

Per kreivių, apribojančių sritį, susikirtimo taškus A ir B išvedę mintyse tieses, statmenas Oy ašiai, matome, kad jos neina per vidinius srities D taškus, todėl pakeitę integravimo tvarką, duotąjį integralą išreikšime taip pat vienu integralu. Vidinio integralo rėžius nustatysime, išsprendę x-o atžvilgiu parabolės



10.18 pav.

$y = x^2$ lygtį: $x=-\sqrt{y}$ ir $x=\sqrt{y}$.

Išorinio integralo rėžiai $y=0$ ir $y=4$ yra pastovūs ir sutampa su mažiausia ir didžiausia y reikšmėmis srityje D. Simboliais tai galime užrašyti: $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4; -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$. Tuomet turime:

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{0}^{y} \frac{y^3}{x^2+y^2}\, dx$.

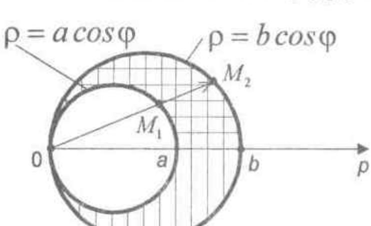
▶ Pirmiausia suintegruosime vidinį integralą kintamojo x atžvilgiu, laikydami, kad y fiksuotas (pastovus) dydis, o po to gautąjį integralą – kintamojo y atžvilgiu:

$$\int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{0}^{y} \frac{y^3}{x^2+y^2}\, dx = \int\limits_{-2}^{4} dy\, y^3 \cdot \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^y = \int\limits_{-2}^{4} y^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{y} - \operatorname{arctg} \frac{0}{y} \right) dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{4} y^2 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) dy = \frac{\pi}{4} \int\limits_{-2}^{4} y^2 dy = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^{4} = 6\pi .$$ ◀

3 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą figūros, apribotos kreivėmis $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $(0 < a < b)$.

▶ Duotosios kreivių lygtys yra polinės apskritimų, einančių per polių, lygtys. Nubraižome tas kreives (10.19). Figūra yra simetriška polinės ašies atžvilgiu, todėl skaičiuosime jos viršutinės dalies plotą, kurį dauginsime iš 2. Tuomet sritį D nusakysime tokiomis nelygybėmis:



10.19 pav.

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \middle| 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, a\cos\varphi \le \rho \le b\cos\varphi \right\}.$$

$$S = \iint\limits_{D} dx\, dy = \iint\limits_{D'} \rho\, d\varphi\, d\rho = 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} \rho\, d\rho =$$

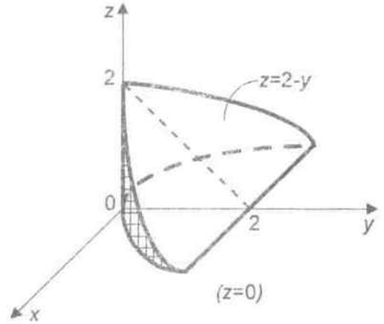
$$= 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(b^2\cos^2\varphi - a^2\cos^2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \left(b^2 - a^2 \right) \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \left(b^2 - a^2 \right) \frac{(2-1)!!}{2!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \left(b^2 - a^2 \right).$$ ◀

4 pavyzdys. Apskaičiuosime tūrį kūno, apriboto paviršiais $y = x^2$, $y + z = 2$, $z = 0$.

▸ Duotąjį kūną iš viršaus apriboja plokštuma $z = 2 - y$, iš apačios xOy plokštuma $z = 0$, iš šonų cilindras $y = x^2$ (10.20 pav.), todėl

$$V = \iint_D (2 - y)\,dx\,dy\,.$$

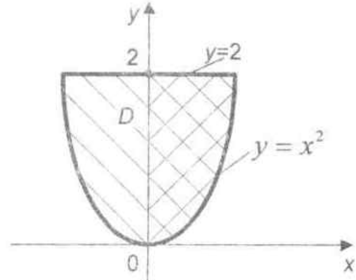


10.20 pav.

Sritį D riboja parabolė $y = x^2$ ir tiesė $y = 2$, gauta susikirtus plokštumoms $z = 2 - y$ ir $z = 0$. Suprojektuojame sritį D į ašį Oy. Matome, kad kūnas yra simetriškas yOz plokštumos atžvilgiu. Atsižvelgsime į tai nustatydami . kartotinių integralų rėžius. Kartais patogu kartu su erdviniu brėžiniu (gal net vietoje jo) braižyti sritį D plokšumoje xOy (10.21 pav.).

Atsižvelgę į pointegralinės funkcijos išraišką, darome išvadą, kad tikslinga pradėti integravimą kintamuoju x.

Tuomet sritį D apibrėš tokios nelygybės: $0 \le y \le 2,\quad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\,.$



10.21 pav.

$$V = \iint_D (2 - y)\,dx\,dy = 2\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} (2 - y)\,dx =$$

$$= 2\int_0^2 (2 - y)\,dy \int_0^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= 2\int_0^2 (2 - y)x \;\Big|_0^{\sqrt{y}} = 2\int_0^2 \left(2\sqrt{y} - y\sqrt{y}\right)dy = 2\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{5}\right)\Big|_0^2 = 8\sqrt{2}\,\frac{4}{15} = \frac{32\sqrt{2}}{15}\,. \;◂$$

5 pavyzdys. Apskaičiuosime trilypį integralą $\iiint_V (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$ srityje V, apribotoje plokštumomis $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1\,.$

▶ Tokiam integralui galima parinkti bet kokią integravimo tvarką, nes integravimo sritis yra stačiakampis gretasienis, o pointegralinė funkcija $f(x, y, z)$ yra simetriška kintamųjų atžvilgiu. Sakykime, vidinį integralą integruosime kintamuoju z, laikydami x ir y pastoviais (fiksuotais) dydžiais, po to gautą reiškinį integruosime kintamuoju y su fiksuotu x ir pagaliau integruosime x atžvilgiu:

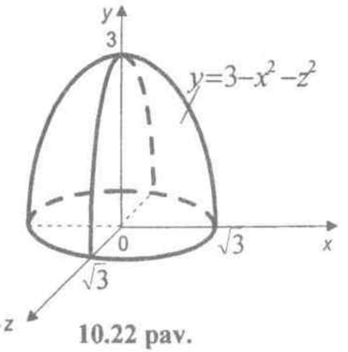
$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1} = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy =$$

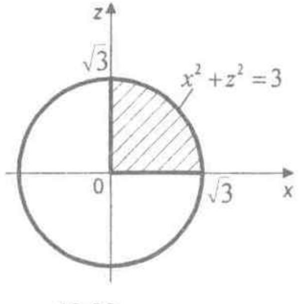
$$= \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$

6 pavyzdys. Rasime masės centro koordinates homogeninio kūno, apriboto paraboloidu $y = 3 - x^2 - z^2$ ir plokštuma $y = 0$ $(y \geq 0)$.



10.22 pav.



10.23 pav.

▶ Homogeninis kūnas simetriškas koordinačių plokštumų yOz ir xOy atžvilgiu, todėl $x_c = z_c = 0$ (10.22 pav.). Rasime koordinatę y_c. Pirmiausia apskaičiuosime kūno masę m. Įsivesime cilindrines koordinates: $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi, y = y$; $y = 3 - \left(x^2 + z^2\right)$, tai $y = 3 - \rho^2$. Kūnas homogeninis, todėl galime imti $\gamma(x, y, z) \equiv 1$. Tuomet (10.23 pav.)

$$m=\iiint_V dx\,dy\,dz=\iiint_V \rho\,d\varphi\,d\rho\,dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_0^{3-\rho^2}dy=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\cdot y\,\Big|_0^{3-\rho^2}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(3-\rho^2\right)d\rho=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)d\varphi=9\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{2};$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iiint_V ydxdydz=\frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_0^{3-\rho^2}ydy=\frac{2}{9\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{3-\rho^2}=$$

$$=\frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(3-\rho^2\right)^2d\rho=-\frac{1}{18\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-\rho^2\right)^2d\left(3-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{18\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\left(3-\rho^2\right)^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\varphi\,\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1.\ ◄$$

10.11. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite dvilypius integralus, kai integravimo sritis D yra stačiakampis:

1.1. $\iint_D xy\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le 2\},$

1.2. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\},$

1.3. $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\},$

1.4. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2},\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\},$

1.5. $\iint_D x\sin(x+y)\,dx\,dy,\quad D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\,0\le y\le \frac{\pi}{2}\right\},$

1.6. $\iint\limits_D x^2 y\cos\left(xy^2\right)dx\,dy$, $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\frac{\pi}{2},\, 0\le y\le 2\right\}$.

2. Nubrėžkite integravimo sritį D. Apskaičiuokite dvilypius integralus:

2.1. $\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{x}} dy$.

2.2. $\int_2^4 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}\,dy$.

2.3. $\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^x\,dx$.

2.4. $\int_{-1}^2 dy\int_0^{\sqrt{y+1}} dx$.

3. Pakeiskite integravimo tvarką:

3.1. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

3.2. $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3.3. $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.4. $\int_1^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

3.5. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3.6. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$.

3.7. $\int_2^4 dx\int_{-\frac{x^2}{4}}^{\frac{4}{x}} f(x,y)\,dy$.

4. Dvilypį integralą $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ išreikškite kartotiniais integralais ir pakeiskite integravimo tvarką, kai integravimo sritis D nusakyta nelygybėmis:

4.1. $x+y\le 1,\quad x-y\le 1,\quad x\ge 0;$

4.2. $y\le 2-x^2,\quad y\ge x,\quad x\ge 0;$

4.3. $x\le y^2,\ y\ge 1,\ y\le 2,\ x\ge 0;$

4.4. $x^2+y^2\le 4,\ 2x+y\ge 2,\ y\ge 0;$

4.5. $\frac{y^2}{4}-1\le x\le y^2-1,\quad x\le 3,\quad y\ge -2$.

5. Užrašykite dvilypį integralą $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ polinėje koordinačių sistemoje, kai integravimo sritis D yra:

5.1. skritulys: a) $x^2+y^2=R^2$; b) $x^2+y^2=ax$; c) $x^2+y^2=by$;

5.2. apribota kreivėmis $x^2+y^2=4x, x^2+y^2=8x, y=x, y=2x$;

5.3. Bernulio lemniskatės $\left(x^2+y^2\right)=2a^2xy \quad (a>0)$ dalies, esančios virš polinės ašies, vidus.

6. Apskaičiuokite dvilypius integralus polinėje koordinačių sistemoje:

6.1. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy$; **6.2.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$;

6.3. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$, kai D – skritulys $x^2+y^2 \le R^2$;

6.4. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, kai D – skritulys $x^2+y^2 \le Rx$;

6.5. $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$, kai sritį D riboja keivė $y=\sqrt{1-x^2}$ ir Ox ašis.

7. Apskaičiuokite figūrų, kurias riboja duotosios kreivės, plotą:

7.1. $x+y=1, x=0, y=0$. **7.2.** $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, x=4$.

7.3. $x=4y-y^2,\ x+y=6$. **7.4.** $y=-\sqrt{x}, x+y=2, x=0$.

7.5. $y=\sqrt{4-x^2}, x-y+2=0, y=0$. **7.6.** $x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=y$.

7.7. $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=0$.

7.8. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy\,(a>0)$. **7.9.** $\rho=2(1+\cos\varphi),\ \rho=2\cos\varphi$.

7.10. $\rho=2(1-\cos\varphi), \rho=2$ (kardioidės išorinė dalis).

8. Apskaičiuokite kūnų, kuriuos riboja duotieji paviršiai, tūrį:

8.1. $z=x^2+y^2+1, x=4, y=4$, koordinatinės plokštumos $x=0, y=0, z=0$;

8.2. $z=x^2+y^2, x+y=1, x=0, y=0, z=0$;

8.3. $z=x^2+y^2, z=0, y=1, y=2x, y=6-x$;

8.4. cilindrai $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ ir plokštumos $z=0, x+z=6$;

8.5. cilindras $z=4-x^2$, plokštumos $x=0, y=0, z=0, 2x+y=4\ (x\ge 0)$.

8.6. cilindrai $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$;

8.7. cilindras $x^2+y^2=4$, plokštumos $z=0, z=x+y+10$;

8.8. cilindras $x^2+y^2=8$, plokštumos $x=0,\ y=0, z=0, x+y+z=4$;

8.9. $x^2+y^2+z^2=4, \ x^2+y^2=3z$;

8.10. $x^2+y^2=z^2, \quad x^2+y^2=2y, \quad z=0$.

9. Apskaičiuokite nurodytų paviršių dalies plotą:

9.1. kūginio paviršiaus $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kurią išpjauna cilindras $x^2+y^2=2x$;

9.2. sferos $x^2+y^2+z^2=a^2$, kurią išpjauna cilindras $x^2+y^2=2x$;

9.3. sukimosi paraboloido $2z=x^2+y^2$, kurią išpjauna cilindras $x^2+y^2=1$;

9.4. cilindro $x^2+z^2=4$, kurią išpjauna cilindras $x^2+y^2=4$.

10. Apskaičiuokite trilypius integralus:

10.1. $\iiint\limits_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$, kai $V=\{(x,y,z)\ |0\le x\le 1, 0\le y\le x, 0\le z\le xy\}$;

10.2. $\iiint\limits_V yz\,dx\,dy\,dz$, kai sritį V riboja plokštumos $x=0, y=0, z=0,$ $x+y+z=2$;

10.3. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, kai sritį V riboja plokštumos $x+y+z=1,$ $x=0, y=0, z=0$;

10.4. $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)\,dz$;

10.5. $\int\limits_{0}^{c}dz\int\limits_{0}^{b}dy\int\limits_{0}^{a}\left(x^2+y^2+z^2\right)dx$;

10.6. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{x}}y\,dy\int\limits_{1-x}^{2-2x}dz$.

10.7. $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^{2}x\,dx\int\limits_{0}^{3}z^2\,dz$.

11. Apskaičiuokite trilypius integralus cilindrinėje koordinačių sistemoje:

11.1. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{0}^{a}dz$.

11.2. $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}dy\int\limits_{0}^{a}z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$;

11.3. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kai sritį V riboja paviršiai $x^2+y^2=2x$, $y=0, z=0, z=a$.

12. Trilypių integralų pagalba apskaičiuokite kūnų, kuriuos riboja duotieji paviršiai, tūrius:

12.1. $x+y+z=4, \quad x=0, y=0, y=1, z=3$;

12.2. $x^2+y^2+z^2=2z, \quad x^2+y^2=z^2$;

12.3. $z=x^2+y^2, \quad z=2\left(x^2+y^2\right), \quad y=x, \quad y^2=x$;

12.4. $z=4-x^2, \quad y=x, \quad x+y=4, \quad x=0, \quad z=0 \quad (x\geq 0)$;

12.5. $x^2+y^2=2, \quad x=\sqrt{y}, \quad x=0, \quad z=0, \quad z=15y$;

12.6. $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, \quad z=0$.

13. Apskaičiuokite plokščių figūrų, apribotų duotomis kreivėmis, masės centro koordinates:

13.1. $y=x^2, \quad y=1, \quad \gamma=x^2y$; **13.2.** $y^2=4x+4, y^2=-2x+4, \gamma=1$;

13.3. $\rho=a(1+\cos\varphi), \quad \gamma=1$; **13.4.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (I ketvirtis), $\gamma=xy$.

14. Apskaičiuokite plokščios figūros, apribotos duotomis kreivėmis, nurodytus inercijos momentus:

14.1. $y=2\sqrt{x}, x+y=3, y=0, \gamma=1, \quad I_x$; **14.2.** $y=4-x^2, y=0, \gamma=1, \quad I_x$;

14.3. $x+y=2, x=0, y=0, \gamma=1, I_0$; **14.4.** $y=x^2, y=1, \gamma=x^2y, \quad I_x, I_y, I_0$.

15. Apskaičiuokite homogeninio kūno, apriboto duotais paviršiais, masės centro koordinates:

15.1. $x^2+y^2+z^2=1, \quad z=0 \quad (z\geq 0)$;

15.2. $x+y+z=1, \quad x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=1, \quad z=0$;

15.3. $z=x^2+y^2, \quad y+z=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$;

15.4. $y^2+2z^2=4x, \quad x=2$; **15.5.** $z^2=xy, \quad x=5, \quad y=5, \quad z=0$;

15.6. $z=\dfrac{y^2}{2}, \quad 2x+3y-12=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

16. Apskaičiuokite kūno, apriboto duotaisiais paviršiais, nurodytus inercijos momentus:

16.1. $x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad \gamma=1, \quad I_{xy}$;

16.2. $x^2=y^2+z^2, \quad x=h\,(x\geq 0, \quad h>0), \quad \gamma=1, \quad I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$;

16.3. $z=x^2+y^2, z=4, \quad \gamma=1, \quad I_0$.

Atsakymai

1.1. 1. **1.2.** $\frac{\pi}{12}$. **1.3.** $(e-1)^2$. **1.4.** $\ln\frac{4}{3}$. **1.5.** $\pi-2$. **1.6.** $-\frac{\pi}{16}$. **2.1.** $\frac{16}{3}$. **2.2.** 9.

2.3. $\frac{1}{2}$. **2.4.** $2\sqrt{3}$. **3.1.** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$. **3.2.** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$.

3.3. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3.4.** $\int_1^2 dy\int_1^y f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$.

3.5. $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)\,dx$. **3.6.** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$. **3.7.** $\int_{-4}^{-1} dy\int_{2\sqrt{-y}}^{4} f(x,y)\,dx+$

$+\int_{-1}^{1} dy\int_2^4 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_2^{\frac{4}{y}} f(x,y)\,dx$. **4.1.** $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{0} dy\int_0^{1+y} f(x,y)\,dx+$

$+\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx$. **4.2.** $\int_0^1 dx\int_2^{2-x^2} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$.

4.3. $\int_1^2 dy\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_1^2 f(x,y)\,dy+\int_1^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy$.

4.4. $\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_{2-2x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$.

4.5. $\int_{-2}^{2} dy\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{y^2-1} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{3} f(x,y)\,dx=\int_{-1}^{0} dx\int_{-2\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy+$

$+\int_0^3 dx\int_{-2}^{-\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy+\int_{-1}^{3} dx\int_{\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy$. **5.1.** a) $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$;

b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; c) $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

5.2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$. **5.3.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

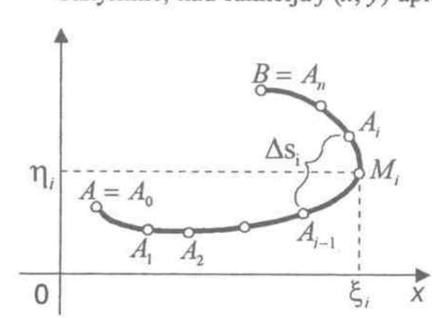
6.1. $\frac{\pi a^3}{6}$. **6.2.** $\frac{\pi}{4}(5\ln 5 - 5)$. **6.3.** $\pi R^2 h$. **6.4.** $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$. **6.5.** $\frac{1}{2}\pi\ln 2$. **7.1.** $\frac{1}{2}$.
7.2. $\frac{16}{3}$. **7.3.** $\frac{1}{6}$. **7.4.** $\frac{16}{3}$. **7.5.** $2+\pi$. **7.6.** $\frac{1}{8}(\pi-2)$. **7.7.** $\frac{3}{4}(\pi+2)$. **7.8.** a^2.
7.9. 5π. **7.10.** $8-\pi$. **8.1.** $186\frac{2}{3}$. **8.2.** $\frac{1}{6}$. **8.3.** $78\frac{15}{32}$. **8.4.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. **8.5.** $13\frac{1}{3}$.
8.6. $\frac{16}{3}R^3$. **8.7.** 40π. **8.8.** $8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$. **8.9.** $\frac{19}{6}\pi$. **8.10.** $\frac{32}{9}$. **8.11.** 3π.

9.1. $\pi\sqrt{2}$. **9.2.** $4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **9.3.** $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$. **9.4.** 32. **10.1.** $\frac{1}{110}$. **10.2.** $\frac{4}{15}$.
10.3. $\frac{1}{2}$. **10.4.** $\frac{40}{3}$. **10.5.** $\frac{abc}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. **10.6.** $\frac{1}{12}$. **10.7.** 30. **11.1.** $\frac{\pi a}{2}$.
11.2. $\frac{8}{9}a^2$. **11.3.** $\frac{8}{9}a^2$. **12.1.** 6. **12.2.** π. **12.3.** $\frac{3}{35}$. **12.4.** $\frac{40}{3}$. **12.5.** 11.
12.6. $\frac{15}{2}\pi$. **13.1.** $\left(0;\frac{7}{9}\right)$. **13.2.** $\left(\frac{2}{5};0\right)$. **13.3.** $\left(\frac{5}{6}a;0\right)$. **13.4.** $\left(\frac{8a}{15};\frac{8b}{15}\right)$. **14.1.** 2,4.
14.2. $\frac{4096}{105}$. **14.3.** $\frac{8}{3}$. **14.4.** $\frac{4}{33};\frac{4}{45};\frac{105}{495}$. **15.1.** $\left(0;0;\frac{3}{8}\right)$. **15.2.** $\left(\frac{17}{36};\frac{17}{36};\frac{55}{36}\right)$.
15.3. $\left(\frac{2a}{5};\frac{2a}{5};\frac{7a^2}{30}\right)$. **15.4.** $\left(\frac{4}{3};0;0\right)$. **15.5.** $\left(3;3;\frac{45}{32}\right)$. **15.6.** $\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5};\frac{8}{5}\right)$.
16.1. $\frac{1}{60}$. **16.2.** $I_{xy} = I_{xz} = \frac{\pi h^5}{20}$; $I_{yz} = \frac{\pi h^5}{5}$. **16.3.** $\frac{224\pi}{3}$.

11. KREIVINIAI INTEGRALAI

11.1. Pirmojo tipo kreivinio integralo sąvoka, savybės ir apskaičiavimas

Sakykime, kad funkcija $f(x, y)$ apibrėžta ir tolydi glodžios kreivės L lanko AB taškuose. Lanką AB taškais $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ (11.1 pav.) padalijame į n dalinių lankų $A_{i-1}A_i$, kurių ilgiai Δs_i, $i = \overline{1, n}$. Kiekviename daliniame lanke $A_{i-1}A_i$ laisvai pasirenkame po tašką $M_i(\xi_i, \eta_i)$, apskaičiuojame funkcijos reikšmes $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ tuose taškuose ir sudarome funkcijos $f(x, y)$ integralinę sumą



11.1 pav.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i. \tag{1}$$

Pažymėkime $\max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta s_i\} = \lambda$.

Apibrėžimas. Baigtinė integralinės sumos σ_n riba, kai $\lambda \to 0$, nepriklausanti nuo lanko AB padalijimo į dalinius lankus būdo bei taškų M_i parinkimo, vadinama funkcijos $f(x, y)$ pirmojo tipo kreiviniu integralu kreive L (arba integralu kreivės lanku L) ir žymima simboliu

$$\int\limits_L f(x, y)\,ds \quad \text{arba} \quad \int\limits_{AB} f(x, y)\,ds.$$

Taigi

$$\int\limits_L f(x, y)\,ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i. \tag{2}$$

Be įrodymo suformuluosime kreivinio integralo egzistavimo teoremą.

Teorema. Jei kreivė L yra glodi, o funkcija $f(x, y)$ tolydi šios kreivės taškuose, tai egzistuoja funkcijos $f(x, y)$ pirmojo tipo kreivinis integralas.

Analogiškai, kai L – glodi kreivė erdvėje R^3, o $f(x, y, z)$ – tolydi funkcija, apibrėžta kreivės L taškuose, tai funkcijos $f(x, y, z)$ pirmojo tipo kreivinis integralas nusakomas lygybe:

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta s_i . \qquad (3)$$

Išvardysime pagrindines pirmojo tipo kreivinių integralų savybes, kurios analogiškos apibrėžtinio arba kartotinių integralų savybėms. Jas įrodyti (pasinaudojant nurodytąja analogija) paliekame skaitytojui.

1. Jei $f_1(x,y)$ ir $f_2(x,y)$ – tolydžios funkcijos, apibrėžtos kreivės L taškuose, o c_1 ir c_2 – bet kokie realieji skaičiai, tai
$$\int_L \big(c_1 f_1(x,y)+c_2 f_2(x,y)\big)\,ds = c_1\int_L f_1(x,y)\,ds + c_2\int_L f_2(x,y)\,ds .$$
2. Jei integravimo kreivė L susideda iš baigtinio skaičiaus glodžiųjų lankų L_i, $i=\overline{1,k}$, tai
$$\int_L f(x,y)\,ds = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} f(x,y)\,ds .$$
3. Pirmojo tipo kreivinio integralo skaitinė reikšmė nepriklauso nuo krypties, kuri gali būti suteikta keliui AB:
$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{BA} f(x,y)\,ds .$$
4. Jei $f(x,y)\equiv 1, \forall (x,y)\in L$, tai $\int_L ds = l$;

   čia l – kreivės lanko L ilgis. Šią formulę galime naudoti kreivės lanko L ilgiui l apskaičiuoti.
5. Integralo modulio įvertis:
$$\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \le \int_L |f(x,y)|\,ds .$$
6. Jei $f_1(x,y)\le f_2(x,y) \quad \forall (x,y)\in L$, tai
$$\int_L f_1(x,y)\,ds \le \int_L f_2(x,y)\,ds .$$
7. Vidutinės reikšmės teorema. Jei funkcija $f(x,y)$ tolydi kreivės lanko L taškuose, tai egzistuoja toks taškas $M(\xi,\eta)\in L$, kad $\int_L f(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)\cdot l$; čia l – kreivės lanko L ilgis.

Pereisime prie pirmojo tipo kreivinio integralo apskaičiavimo.

1. Tarkime, kad plokštumoje xOy duota glodi kreivė L, kurios lygtis $y=g(x), x\in[a;b]$, o $f(x,y)$ – tolydi tos kreivės taškuose funkcija. Tuomet taškų

$M(x,y)\in L$ koordinatės bus $M(x,g(x))$, o funkcija $f(x,y)$ bus išreiškiama lygybe $f(x,y)=f(x,g(x))$, kai $x\in[a,b]$. Pasinaudosime formule, kuri buvo išvesta, apskaičiuojant kreivės lanko ilgį [žr. 5.3 skyrelį]:

$$\Delta s_i \approx \sqrt{1+(g'(\xi_i))^2}\cdot\Delta x_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

Tuomet (1) integralinę sumą užrašome taip:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,g(\xi_i))\sqrt{1+(g'(\xi_i))^2}\cdot\Delta x_i.$$

Šioje lygybėje perėję prie ribos, kai $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$ (tuo pačiu ir $\lambda_1=\max\{\Delta x_i\}\to 0$), pirmojo tipo kreivinį integralą išreikšime apibrėžtiniu integralu:

$$\int_L f(x,y)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=$$

$$=\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,g(\xi_i))\sqrt{1+(g'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i=$$

$$=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx.$$

Taigi

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx, \tag{4}$$

kai $L: y=g(x),\quad x\in[a;b]$.

2. Jei glodi kreivė L išreikšta parametrinėmis lygtimis $x=x(t), y=y(t)$, $t\in[t_1;t_2]$, tai analogiškai

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(x))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \tag{5}$$

3. Jei glodi kreivė L išreikšta lygtimi $\rho=\rho(\varphi), \varphi\in[\alpha;\beta]$, tai

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi. \tag{6}$$

4. Analogiški rezultatai gaunami ir erdvėje R^3, kai L – kreivė, išreikšta lygtimis $x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[t_1;t_2]$:

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt\,. \quad (7)$$

Išspręsime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int\limits_L x\,ds$, kai L – parabolės $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ lankas, jungiantis taškus A (0, 0) ir $B\left(2;2\sqrt{2}\right)$.

▶. Kadangi $x\in[0;2]$ ir $y'=\sqrt{2}\,x$, tai, pasinaudoję (4) formule, gauname

$$\int\limits_{AB} x\,ds = \int\limits_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 \left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+2x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\left(1+2x^2\right)^3}\,\Bigg|_0^2 = \frac{13}{3}\,. \blacktriangleleft$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_L y\,ds$, kai L – cikloidės $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ lankas.

▶ Pagal (5) formulę

$$\int\limits_L y\,ds = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{32}{3}a^2\,. \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\int\limits_L (xy+z)\,ds$, kai L – sraigtinė kreivė $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$ $(R>0)$.

▶ Pritaikę (7) formulę, gauname

$$\int\limits_L (xy+z)\,ds = \int\limits_0^{2\pi}\left(R^2\cos t\cdot\sin t+t\right)\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+1}\,dt =$$

$$= \sqrt{1+R^2}\left(R^2\frac{\sin^2 t}{2}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{1+R^2}\,. \blacktriangleleft$$

11.2. Pirmojo tipo kreivinio integralo taikymai

1. Materialios kreivės lanko masė (fizikinė pirmojo tipo kreivinio integralo prasmė).

Tarkime, kad erdvinės kreivės L taškuose apibrėžta tolydžioji funkcija $\gamma(x,y,z)>0$, kuri išreiškia materialios kreivės L masės pasiskirstymo tankį. Apskaičiuosime tos materialios kreivės L masę m. Kreivę L suskaidome į n dalinių lankų, kurių ilgius pažymėsime Δs_i. Kiekviename daliniame lanke laisvai pasirenkame po tašką $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Tarkime, kad masės tankis daliniame lanke Δs_i yra pastovus ir lygus $\gamma_i(M_i)=\gamma(x_i,y_i,z_i)$. Tuomet i – tojo lanko masė $m_i \approx \gamma(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta s_i$, o visos kreivės masė

$$m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta s_i .$$

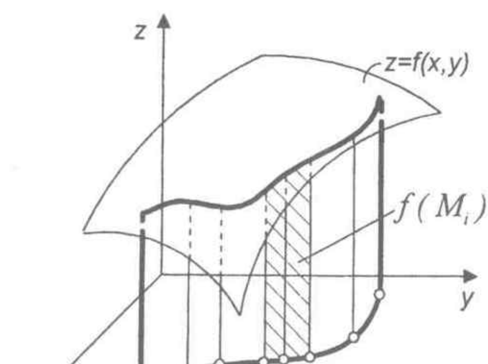
Tikslią masės reikšmę gausime, perėję prie ribos, kai $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta s_i = \int_L \gamma(x,y,z)\,ds .$$

Taigi

$$m=\int_L \gamma(x,y,z)\,ds . \qquad (1)$$

2. Cilindrinių paviršių plotų apskaičiavimas (geometrinė pirmojo tipo kreivinio integralo prasmė).



11.2 pav.

Tarkime, kad plokštumoje xOy duota glodi kreivė L, kurios taškuose apibrėžta tolydi neneigiama funkcija $z=f(x,y),\,(f(x,y)\geq 0)$. Nubrėžkime cilindrinį paviršių, kurio sudaromoji lygiagreti ašiai Oz, o vedamoji – kreivė L, esanti plokštumoje xOy (11.2 pav.). Apskaičiuosime šio cilindrinio paviršiaus tarp $z=0$ ir $z=f(x,y)$ plotą. Padaliję kreivę L į n dalinių lankų, kurių ilgiai $\Delta s_i\ (i=\overline{1,n})$ ir per jų galus išvedę tieses, lygiagrečias ašiai Oz, cilindrinį paviršių supjaustysime į n juostelių. Vienos juostelės plotas apytiksliai lygus

$f(M_i)\cdot\Delta s_i$, kai $M_i \in \overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Visas ieškomas plotas P apytiksliai lygus juostelių plotų sumai:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta s_i .$$

Tikslią cilindrinio paviršiaus ploto reikšmę gausime perėję prie ribos, kai $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \to 0$:

$$P = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta s_i = \int_L f(x,y)\,ds . \qquad (2)$$

3. Materialios kreivės masės centro koordinatės. Jei materialios erdvinės kreivės L masės pasiskirstymo tankis $\gamma = \gamma(x,y,z)$ yra tolydžioji funkcija, tai šios kreivės masės centro koordinatės apskaičiuojamos pagal formules:

$$x_c = \frac{1}{m}\int_L x\,\gamma(x,y,z)\,ds; \qquad y_c = \frac{1}{m}\int_L y\,\gamma(x,y,z)\,ds;$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_L z\,\gamma(x,y,z)\,ds; \qquad \text{kai} \quad m = \int_L \gamma(x,y,z)\,ds. \qquad (3)$$

4. Plokščios kreivės lanko inercijos momentai koordinačių ašių ir koordinačių pradžios taško atžvilgiu:

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x,y)\,ds; \quad I_y = \int_L x^2\gamma(x,y)\,ds; \quad I_0 = \int_L \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,ds. \qquad (4)$$

Erdvinei kreivei formulės užrašomos analogiškai.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime tiesės $x+2y=2$ atkarpos, esančios pirmajame ketvirtyje, masę, kai masės tankis lygus taško ordinatei, t.y. $\gamma(x,y)=y$.

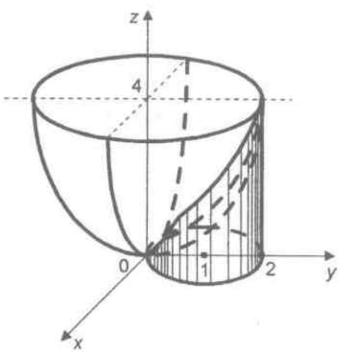
▶ Iš (1) formulės

$$m = \int_L y\,ds .$$

Kadangi $x = 2-2y$, tai $ds = \sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy = \sqrt{5}\,dy$, kai $y\in[0;1]$.

Taigi $m = \int_L y\,ds = \int_0^1 y\sqrt{5}\,dy = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (masės vienetų). ◀

2 pavyzdys. Apskaičiuosime cilindrinio paviršiaus $x^2+y^2=2y$ dalies, esančios tarp paviršių $z=0$ ir $z=x^2+y^2$, plotą (11.3 pav.).



11.3 pav.

▸ Pasinaudosime (2) formule. Čia

$$z=f(x,y)=x^2+y^2,$$

L – kreivė $x^2+y^2=2y$.

$$P=\int_L\left(x^2+y^2\right)ds.$$

Pastarąjį integralą patogiau apskaičiuoti polinėje koordinačių sistemoje. Kadangi

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

tai kreivės L lygtis $\rho=2\sin\varphi$.

Tuomet

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=2d\varphi,\quad z=\rho^2,\quad \text{kai}\quad \varphi\in[0;\pi].$$

Cilindrinis paviršius, kurio plotą turime apskaičiuoti, yra sudarytas iš dviejų simetriškų dalių, todėl pakanka apskaičiuoti vienos jų plotą ir gautą skaičių padauginti iš 2. Taigi

$$P=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\cdot 2d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2\varphi\cdot d\varphi=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi \text{ (ploto vienetų).} \blacktriangleleft$$

11.3. Antrojo tipo kreivinio integralo apibrėžimas ir savybės

Įvesime orientuotos kreivės $L=AB$ sąvoką. Kreivė $L=AB$ vadinama orientuota, kai nurodyta, kuris iš dviejų taškų A ir B yra kreivės L pradžios taškas. Taigi kreivė yra orientuota, kai pasirinkta viena apėjimo kryptis iš dviejų galimų.

11.4 pav.

Kai kreivė L yra uždara, t.y., kai taškas B sutampa su tašku A, susitarta teigiamąja uždaro kontūro L apėjimo kryptimi vadinti tą, kuria taškui judant kontūru, jo viduje esanti sritis lieka kairėje pusėje. Ši kryptis atitinka judėjimą prieš laikrodžio rodyklę. Priešinga kryptis vadinama neigiamąja. Kreivės orientacija brėžiniuose nurodoma rodyklėmis arba atitinkamos krypties kreivės liestinėmis (11.4 pav.).

Apibrėšime antrojo tipo kreivinį integralą orientuota kreive.

Tarkime, kad turime glodžią orientuotą kreivę $AB=\{x(t), y(t), t\in[t_1;t_2]\}$, kurios taškuose apibrėžtos dvi tolydžios funkcijos $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$. Taškais $A_i(x_i, y_i)$ kreivę AB bet kaip padalijame į n dalių ir kiekviename daliniame lanke laisvai pasirenkame po tašką $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Apskaičiuojame funkcijų reikšmes: $P(M_i)=P(\xi_i,\eta_i)$, $Q(M_i)=Q(\xi_i,\eta_i)$. Šias reikšmes dauginame ne iš lanko $A_{i-1}A_i=\Delta s_i$ ilgio, kaip tai darėme įvesdami pirmojo tipo kreivinio integralo sąvoką, o iš to lanko projekcijų koordinačių ašyse, t.y. iš $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ir $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Sudarome dvi integralines sumas:

$$\sigma_x=\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i, \qquad \sigma_y=\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i. \tag{1}$$

Apibrėžimas. Baigtinė (1) integralinės sumos riba, kai $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$, nepriklausanti nuo kreivės AB padalijimo į dalinius lankus būdo ir taškų M_i parinkimo, vadinama funkcijos $P(x,y)$ (arba $Q(x,y)$) antrojo tipo kreiviniu integralu kreive AB ir žymima simboliu:

$$\begin{aligned}\int_{AB} P(x,y)\,dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i,\\ \int_{AB} Q(x,y)\,dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i.\end{aligned} \tag{2}$$

Suma

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + \int_{AB} Q(x,y)\,dy$$

vadinama bendruoju antrojo tipo kreiviniu integralu (arba kreiviniu integralu koordinačių atžvilgiu) ir žymima simboliu (praleidžiant antrąjį integralo ženklą):

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Kreivės, kuria integruojame, kryptis neturi įtakos pirmojo tipo kreiviniam integralui, nes lanko $A_{i-1}A_i$ ilgis Δs_i nepriklauso nuo pasirinktos krypties. Kitaip yra su antrojo tipo kreiviniu integralu, nes lanko $A_{i-1}A_i$ projekcija į ašį priklauso nuo lanko krypties ir keičia ženklą, kai apėjimo kryptis pakeičiama priešinga. Todėl

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Kitos savybės yra analogiškos pirmojo tipo kreivinių integralų savybėms.

Turėdami kreivę L erdvėje R^3 ir jos taškuose duotas tolydžiąsias funkcijas $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ir $R(x, y, z)$, visiškai analogiškai apibrėžiame tris antrojo tipo kreivinius integralus

$$\int_L P(x,y,z)dx; \quad \int_L Q(x,y,z)dy; \quad \int_L R(x,y,z)dz.$$

Trijų pastarųjų integralų suma vadinama bendruoju antrojo tipo kreiviniu integralu (arba kreiviniu integralu koordinačių atžvilgiu) ir žymima simboliu

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{4}$$

11.4. Antrojo tipo kreivinio integralo apskaičiavimas

Tarkime, kad AB – glodi kreivė, duota parametrinėmis lygtimis $x = x(t)$, $y = y(t), z = z(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, be to, parametro kitimą nuo t_1 iki t_2 atitinka judėjimas kreive AB nuo taško A iki taško B. Sudarome integralinę sumą

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i,$$

kurios riba, kai $\lambda \to 0$, yra kreivinis integralas

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx.$$

Kadangi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$, tai, pritaikę Lagranžo teoremą [žiūr.[6] 156 psl.), gauname

$$\Delta x_i = x'(\Theta_i) \cdot \Delta t_i,$$

čia $t_{i-1} < \Theta_i < t_i; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Kiekviename lanke $A_{i-1}A_i$ parinkime tarpinį tašką $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, kuris atitiktų parametro t reikšmę Θ_i. Tuomet

$$\xi_i = x(\Theta_i), \quad \eta_i = y(\Theta_i), \quad \zeta_i = z(\Theta_i)$$

ir integralinę sumą σ_x galima parašyti taip:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{n} P(x(\Theta_i), y(\Theta_i), z(\Theta_i))x'(\Theta_i)\Delta t_i.$$

Pastaroji suma yra vieno kintamojo funkcijos $P(x(t), y(t), z(t))x'(t)$ integralinė suma, kurios riba lygi apibrėžtiniam integralui

$$\int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt.$$

Taigi gavome, kad

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,x'(t)\,dt. \tag{5}$$

Analogiškai išreiškiame ir kreivinius integralus koordinačių y ir z atžvilgiu. Užrašysime bendrojo (4) integralo apskaičiavimo formulę:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) +$$

$$+ Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\,\big]dt.$$

Jei glodi kreivė AB duota plokštumoje lygtimis $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, tai

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[\,P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\,\big]dt.$$

Jei glodi plokščia kreivė AB duota lygtimi $y = g(x), x \in [a,b]$, tai

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \big[P\big(x; g(x)\big) + Q\big(x; g(x)\big)g'(x)\,\big]dx;$$

kai a ir b yra lanko AB galų A ir B abscisės.

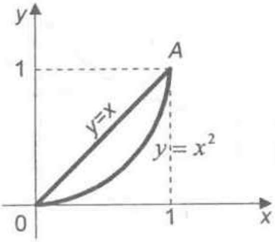
1 pavyzdys. Apskaičiuokime

$$I = \int\limits_{OA} x^2\,dx + xy\,dy,$$

kai integravimo kelias OA, jungiąs taškus O (0; 0) ir A (1; 1), yra

a) tiesė $y = x$;

b) parabolė $y = x^2$ (11.5 pav.).



11.5 pav.

▶ a) atveju $y = x$, $dy = dx$.

Todėl

$$I_1 = \int\limits_{L} x^2\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x^2\right)dx = 2\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

b) atveju $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$.

Todėl

$$I_2 = \int\limits_0^1 \left(x^2\,dx + x^3 \cdot 2x\,dx\right) = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x^4\right)dx = \frac{11}{15}.$$

Matome, kad $I_1 \neq I_2$. Vadinasi, šis antrojo tipo kreivinis integralas priklauso nuo integravimo kelio formos.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $I = \int\limits_L x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy$ tomis pačiomis kreivėmis, kaip ir 1 pvz.

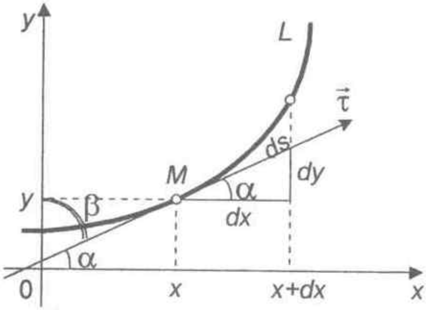
$$I_1 = \int\limits_0^1 \left(x^3 dx + \frac{x^3}{3} dx \right) = \frac{4}{3} \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}.$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 \left(x^2 \cdot x^2 dx + \frac{x^3}{3} \cdot 2x dx \right) = \frac{5}{3} \int\limits_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}.$$

Šio integralo skaitinė reikšmė, pakeitus integravimo kelią, nepasikeitė. Iš šių pavyzdžių paaiškėja, kad yra kreivinių integralų, kurie priklauso nuo integravimo kelio formos, bet yra ir tokių, kurie nepriklauso. Šį klausimą detaliau panagrinėsime toliau.

11.5. Abiejų tipų kreivinių integralų sąryšis

Išnagrinėsime, koks ryšis sieja pirmojo ir antrojo tipo kreivinius integralus. Kad būtų vaizdžiau, imsime plokščią kreivę. Kampus, kuriuos sudaro su koordinačių ašių teigiamomis kryptimis orientuotos kreivės L liestinė $\vec{\tau}$ taške $M(x, y)$ (11.6 pav.) pažymėkime $\alpha(x, y)$ ir $\beta(x, y)$.



11.6 pav.

Tuomet gausime tokias sąryšio formules:

$dx = ds \cdot \cos\alpha; \qquad dy = ds \cdot \cos\beta$ (6)

Antrojo tipo kreiviniuose integraluose diferencialus dx ir dy pakeitę (6) išraiškomis, išreikšime juos pirmojo tipo kreiviniais integralais:

$$\int\limits_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_L (P \cos\alpha + Q \cos\beta) ds. \qquad (1)$$

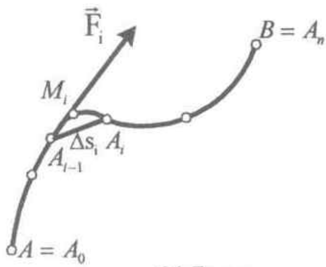
Pakeitus integravimo kryptį priešinga, $\cos\alpha, \cos\beta$, dx ir dy keičia ženklą, todėl (1) formulė lieka teisinga. Šios sąryšio formulės analogiškai užrašomos, kai kreivė L yra erdvinė:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_L (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) ds;$$

čia $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – kreivės L liestinės krypties kosinusai.

11.6. Antrojo tipo kreivinio integralo mechaninė prasmė

Tarkime, kad materialus taškas juda kreive L iš taško A į tašką B, veikiamas kintamos jėgos, kurios komponentės yra funkcijos P, Q ir R:
$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$.



11.7 pav.

Norėdami apskaičiuoti jėgos $\vec{F}$ atliktą darbą A, kreivę L suskirstome į n dalių, pasirenkame kiekvienoje dalyje po tašką M_i (11.7 pav.). Tarkime, kad kiekvienoje dalyje jėga $\vec{F}$ yra pastovi ir lygi $\vec{F}_i=\vec{F}(\vec{M}_i)$, o taškas juda ne lanku $A_{i-1}A_i$, o styga $A_{i-1}A_i$. Tuomet poslinkis $\Delta\vec{s}_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}+\Delta z_i\vec{k}$. Iš fizikos kurso žinome, kad darbas yra jėgos ir poslinkio vektorių skaliarinė sandauga, todėl darbą apytiksliai galime išreikšti taip:

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{s}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\cdot\Delta y_i+R(M_i)\cdot\Delta z_i\right).$$

Tikslią darbo reikšmę gausime, perėję prie ribos, kai $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$ $1\le i\le n$:

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i+R(M_i)\Delta z_i\right)=$$
$$=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Vadinasi, bendrasis antrojo tipo kreivinis integralas išreiškia darbą, atliekamą perkeliant materialų tašką kreive L iš taško A į tašką B, kai jį veikia kintama jėga

$$\vec{F}\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right).$$

Pavyzdys. Apskaičiuokime darbą, kurį atlieka jėga $\vec{F}=-x\vec{i}+y\vec{j}$, perkeldama materialų tašką kreivės $x^2+\frac{y^2}{9}=1\,(x\ge 0,\,y\ge 0)$ lanku, jungiančiu taškus A (1; 0) ir B (0; 3).

▶ Kreivė L yra elipsės $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ lankas, esąs pirmajame ketvirtyje. Užrašome parametrines elipsės lygtis: $x=\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Judėjimas kreive vyksta prieš laikrodžio rodyklę parametro t didėjimo kryptimi. Kadangi $dx = -\sin t dt$, $dy = 3\cos t dt$, tai

$$A = \int_L P dx + Q dy = \int_L -x dx + y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot \sin t + 9 \sin t \cos t) dt =$$

$$= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = 5 \text{ (darbo vienetų).} \blacktriangleleft$$

11.7. Gryno* formulė

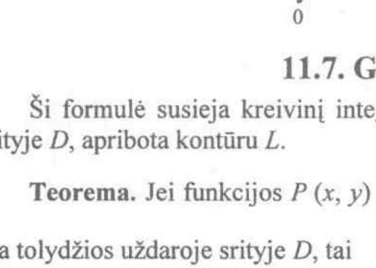
Ši formulė susieja kreivinį integralą uždaru kontūru L su dvilypiu integralu srityje D, apribota kontūru L.

Teorema. Jei funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ bei jų dalinės išvestinės $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir $\frac{\partial Q}{\partial x}$ yra tolydžios uždaroje srityje D, tai

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_L P\, dx + Q dy, \tag{1}$$

kai L – srities D kontūras, apeinamas teigiamąja kryptimi.

(1) formulė vadinama **Gryno formule**.



11.8 pav.

Sakykime, kad sritis D yra taisyklinga, todėl tiesės, einančios per vidinius srities D taškus ir lygiagrečios koordinačių ašims, srities D kontūrą L kerta ne daugiau kaip dviejuose taškuose (11.8 pav.). Sritį D iš apačios riboja kreivė

$y = y_1(x)$(lankas AMB),

iš viršaus – $y = y_2(x)$(lankas ANB), kai $x \in [a; b]$.

Dvilypį integralą $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$ išreikšime kreiviniu integralu kreive L:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx =$$

* Dž. Grynas (1793 – 1841) – anglų matematikas

$$= \int_a^b P\left(x, y_2(x)\right) dx - \int_a^b P\left(x, y_1(x)\right) dx .$$

Tačiau
$$\int_a^b P\left(x, y_2(x)\right) dx = \int_{ANB} P\left(x, y\right) dx = - \int_{BNA} P\left(x, y\right) dx ;$$
$$\int_a^b P\left(x, y_1(x)\right) dx = \int_{AMB} P\left(x, y\right) dx ,$$

todėl

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = - \int_{BNA} P\left(x, y\right) dx - \int_{AMB} P\left(x, y\right) dx = -\oint_L P\, dx . \qquad (2)$$

Analogiškai gauname, kad

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_L Q\left(x, y\right) dy . \qquad (3)$$

Tuomet iš (2) ir (3) formulių gauname Gryno formulę:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_L P\, dx + Q\, dy . \ ◂$$

1 pavyzdys. Pritaikę Gryno formulę, apskaičiuosime $I = \oint_L - x^2 y\, dx + xy^2 dy$, kai L – apskritimas $x^2 + y^2 = R^2$, apeinamas teigiama kryptimi.

▸ Turime $P = -x^2 y, Q = xy^2$. Sritis D yra skritulys $x^2 + y^2 \le R^2$. Kadangi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$, tai pagal Gryno formulę

$$I = \oint_L - x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy .$$

Išreiškę šį dvilypį integralą kartotiniu polinėje koordinačių sistemoje, gauname

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\, d\rho = \frac{\pi R^4}{2} . \ ◂$$

Panaudojant Gryno formulę, galima apskaičiuoti plokščių figūrų plotus.

Jei Gryno formulėje funkcijas P ir Q parinktume taip, kad reiškinys $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ būtų tapačiai lygus vienetui visuose srities D taškuose, tai dvilypis integralas srityje D reikštų figūros D plotą S. Pavyzdžiui, parinkę $Q = x$, $P = 0$, gautume:

$$S = \oint_L x\,dy. \tag{1}$$

Jei $Q=0$, $P=-y$, tai

$$S = -\oint_L y\,dx. \tag{2}$$

Tačiau dažniausiai naudojama formulė, kai $Q=\frac{1}{2}x, P=-\frac{1}{2}y$. Tuomet

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - ydx. \tag{3}$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime plokščios figūros, apribotos elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ plotą.

▶ Elipsės parametrinės lygtys $x = a\cos t, y = b\sin t, \quad t\in[0;2\pi]$. Tuomet pagal (3) formulę

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t\,dt - b\sin t\left(-a\sin t\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt = \pi ab. \text{ ◀}$$

11.8. Sąlygos, kad kreivinis integralas nepriklausytų nuo integravimo kelio formos

Spręsdami 11.4 skyrelio 2 pavyzdį įsitikinome, kad kai kuriais atvejais kreivinio integralo $\int_{AB} Pdx + Qdy$ skaitinė reikšmė nepriklauso nuo integravimo kelio formos, o priklauso tik nuo integravimo kreivės pradžios ir galo taškų padėties. Panagrinėsime, kokios turi būti sąlygos, norint, kad kreivinis integralas turėtų šią savybę. Pirmiausia patiksliname, kokia turi būti plokščia sritis D. Pareikalausime, kad bet kuriuo uždaru kontūru $L\in D$ apribotos plokštumos dalies visi taškai, priklausytų sričiai D, kitaip sakant, srityje D negali būti „skylių", net ir taškinių. Sritis, turinti tokią savybę, vadinama vienajunge. Bet kurią uždarą dalimis glodžią kreivę esančią srityje D, galima sutraukti į tašką, kuris taip pat priklauso sričiai D.

Pavyzdžiui, vienajungė sritis yra skritulio ar elipsės vidus; nevienajungė yra žiedas tarp apskritimų $x^2+y^2=1$ ir $x^2+y^2=3$, nes apskritimo $x^2+y^2=2$, esančio toje srityje, viduje yra taškų, nepriklausančių duotajai sričiai (pvz., koordinačių pradžia (0; 0)).

Pereisime toliau prie pagrindinės teoremos.

Teorema. Jei funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ apibrėžtos ir tolydžios kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial P}{\partial y}$ ir $\frac{\partial Q}{\partial x}$ vienajungėje srityje D, tai ekvivalenčios tokios keturios sąlygos.

1. Bet kuria uždara glodžiąja kreive $L \in D$
$$\oint_L Pdx + Qdy = 0 .$$
2. Kokie bebūtų srities D du taškai A ir B, integralo
$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$
reikšmė nepriklauso nuo integravimo kelio formos, jei $AB \in D$.
3. Reiškinys $Pdx + Qdy$ yra tam tikros funkcijos $u(x, y)$, apibrėžtos srityje D, pilnasis diferencialas: $du = Pdx + Qdy$.
4. Visoje srityje D
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} . \tag{1}$$

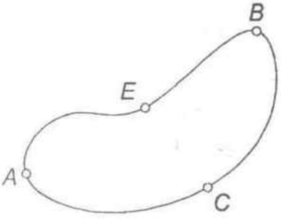
Įrodinėsime teoremą pagal loginę schemą $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$. Tuo pačiu bus įrodytas sąlygų 1, 2, 3, 4 ekvivalentumas.

$1 \Rightarrow 2$. Srityje D parenkame bet kurias glodžias kreives ACB ir AEB, jungiančias taškus A ir B. Abi tos kreivės sudarys uždarą kreivę L, priklausančią sričiai D (11.9 pav.).

$L = ACB \bigcup BEA$.

Tuomet iš sąlygos $\oint_L Pdx + Qdy = 0$

gauname, kad
$$\oint_L = \int_{ACB} + \int_{BEA} = \int_{ACB} - \int_{AEB} = 0 .$$



11.9 pav.

Taigi $\int_{ACB} = \int_{AEB}$,

o tai ir reiškia, kad integralo reikšmė nepriklauso nuo integravimo kelio formos. Vadinasi, gavome, kad $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 3$. Tarkime, kad $\int_{AB} Pdx + Qdy$ nepriklauso nuo integravimo kelio. Jei fiksuotume tašką $A = A(x_0, y_0)$, tai tas integralas būtų taško $B = B(x, y)$ koordinačių x ir y funkcija:

$$\int_{AB} Pdx+Qdy = u(x,y).$$

Įrodysime, kad funkcija $u(x,y)$ diferencijuojama ir

$$du = P\,dx + Q\,dy. \quad (2)$$

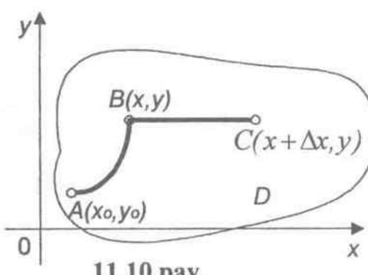
Norint tuo įsitikinti, užtenka įrodyti, kad $\forall B \in D$ egzistuoja dalinės išvestinės $\frac{\partial u}{\partial x}$ ir $\frac{\partial u}{\partial y}$, be to,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \quad (3)$$

Tikrai, kadangi $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$ yra tolydžios srityje D, tai iš (3) lygybės išplaukia funkcijos $u(x,y)$ diferencijuojamumas ir (2) lygybė.

Įrodysime, kad egzistuoja dalinės funkcijos $u(x,y)$ išvestinės ir teisinga (3) sąlyga. Argumentui x suteikime pokytį Δx taip, kad taškas $C(x+\Delta x, y)$ (11.10 pav.) priklausytų sričiai D. Apskaičiuokime atitinkamą funkcijos $u(x,y)$ dalinį pokytį

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int_{AC} Pdx+Qdy - \int_{AB} Pdx+Qdy = \int_{BC} Pdx+Qdy.$$



11.10 pav.

Pagal sąlygą integralas nepriklauso nuo integravimo kreivės formos, tai integravimo kreivę nuo A iki B imame bet kokią, o nuo $B(x,y)$ iki $C(x+\Delta x, y)$ integruojame tiesės atkarpa, lygiagrečiąja ašiai Ox. Tuomet

$$\Delta_x u = \int_{BC} Pdx+Qdy = \int_{BC} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} Pdx.$$

Pastarajam integralui pritaikome vidutinės reikšmės teoremą:

$$\Delta_x u = P(x+\Theta\Delta x, y)\cdot\Delta x, \qquad 0<\Theta<1.$$

Tuomet $$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(x+\Theta\Delta x, y)$$

ir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\Theta\Delta x, y) = P(x,y),$$

kadangi $P(x,y)$ yra tolydi. Analogiškai įrodytume, kad $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Taigi 3 sąlyga teisinga.

$3 \Rightarrow 4$. Tarkime, srityje D apibrėžta funkcija $u(x, y)$ tokia, kad $du = P\,dx + Q\,dy$. Tuomet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

ir, pritaikę dviejų kintamųjų funkcijos mišriųjų išvestinių lygybės teoremą

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

gauname reikiamą lygybę.

$4 \Rightarrow 1$. Tarkime, kad teisinga 4 sąlyga ir L – glodi uždara kreivė, priklausanti sričiai D ir apribojanti sritį D_1. Parašome šiai sričiai D_1 Gryno formulę:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Kai $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, tai dešinėje pusėje esąs integralas lygus nuliui. Taigi ir

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

Vadinasi, iš $4 \Rightarrow 1$. ◂

Pastaba. Kreivinį antrojo tipo integralą, kuris nepriklauso nuo integravimo kelio, žymėsime simboliu

$$\int_A^B P dx + Q dy \qquad \text{arba} \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

kuriame nurodyti tik integravimo kelio pradžia ir pabaiga; pats kelias nenurodytas, nes juo gali būti bet kuri kreivė.

11.9. Pilnųjų diferencialų integravimas

Jau žinome, kad jei funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ir $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ yra tolydžios srityje D, reiškinys

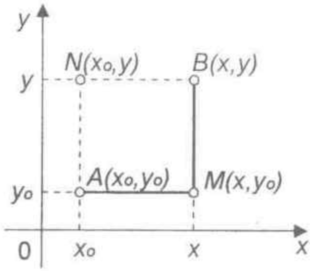
$$P\,dx + Q\,dy \tag{1}$$

yra tam tikros funkcijos $u(x, y)$ pilnasis diferencialas tada ir tiktai tada, kai

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Tuomet $du = P\,dx + Q\,dy$ ir funkcija $u(x, y)$ tenkina lygybę:

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\,. \tag{3}$$



11.11 pav.

Išnagrinėsime, kaip galima surasti funkciją $u(x, y)$, kai žinomas jos pilnasis diferencialas $du = P\,dx + Q\,dy$. Kadangi (3) integralas nepriklauso nuo integravimo kelio, tai integravimo kreive patogu imti laužtę AMB arba ANB, kurios grandys lygiagrečios koordinačių ašims (11.11 pav.). Tuomet atkarpoje AM $y=y_0$ (pastovus) ir $dy=0$, MB $x=x$ (pastovus) ir $dx=0$. Vadinasi,

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial x}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=u(x,y_0)\,\Big|_{x_0}^{x}+u(x,y)\,\Big|_{y_0}^{y}=$$

$$=u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+u(x,y)-u(x,y_0)=u(x,y)-u(x_0-y_0)=$$

$$=u(x,y)\,\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}=u(x,y)\,\Big|_{A}^{B}=u(B)-u(A). \tag{4}$$

Funkcija $u(x, y)$ vadinama pirmykšte funkcija, o (4) formulė – kreivinio integralo Niutono ir Leibnico formulė. Pabrėžiame, kad ši formulė teisinga tik tada, kai kreivinis integralas nepriklauso nuo integravimo kelio formos.

Iš (4) formulės, pažymėję $u(x_0,y_0)=c$, gautume

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt+C\,. \tag{5}$$

Analogiškai, integravimo kreive pasirinkę laužtę ANB, gautume:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt+C\,; \tag{6}$$

čia t – integravimo kintamasis.

Funkciją $u(x, y)$, kai žinomas jos pilnasis diferencialas, galima rasti ir taip. Iš lygybės $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$ gauname, kad

$$u=\int P(x,y)\,dx+g(y);$$

čia $g(y)$ – tam tikra, kol kas nežinoma diferencijuojama kintamojo y funkcija. Išdiferencijavę pastarąją lygybę kintamojo y atžvilgiu ir atsižvelgę į sąlygą $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, gauname:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx + g'(y) = Q(x, y).$$

Tuomet

$$g(y) = \int \left(Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) dy + C.$$

Todėl

$$u = \int P(x, y) dx + \int \left(Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) dy + C. \tag{7}$$

Pastaba. Jei funkcijos P, Q, R yra tolydžios kartu su savo dalinėmis išvestinėmis vienajungėje srityje V, tai

$$du = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

tada ir tiktai tada, kai

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Taip pat, jei $L \in V$, tai $\oint\limits_L = 0$ ir nepriklauso nuo integravimo kelio. Tuomet

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz + C.$$

Integravimo kreive pasirinkę laužtę, kurios atkarpos lygiagrečios koordinačių ašims, gautume:

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, x_0, y_0) dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0) dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t) dt + C. \tag{8}$$

1 pavyzdys. Rasime funkciją $u(x, y)$, kai $du = e^{-y} dx + \left(1 - xe^{-y}\right) dy$.

▶ Šiame pavyzdyje $P = e^{-y}; Q = 1 - xe^{-y}$ $\frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$. Taigi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, todėl yra tokia funkcija $u(x, y)$, kad $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - xe^{-y}$.

Integruojame pirmąją lygybę kintamojo x atžvilgiu:

$$u = \int e^{-y} dx + g(y) = xe^{-y} + g(y).$$

Iš čia $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + g'(y) = 1 - xe^{-y}$, todėl $g'(y) = 1$ ir $g(y) = y + C$.

Tuomet ieškomoji funkcija $u(x, y) = xe^{-y} + g(y) = xe^{-y} + y + C$. ◀

2 pavyzdys. Patikrinkime, ar reiškinys $\left(e^{xy} + 5\right)(xdy + ydx)$ yra funkcijos $u\,(x, y)$ pilnasis diferencialas ir, jeigu taip, tai suraskime tą funkciją.

▶ Duotąjį reiškinį parašome taip:

$$\left(e^{xy} + 5\right)(xdy + ydx) = y\left(e^{xy} + 5\right)dx + x\left(e^{xy} + 5\right)dy$$

ir randame dalines išvestines $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 5 + e^{xy}(1 + y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 5 + e^{xy}(1 + xy)$.

Dalinės išvestinės lygios, todėl duotasis reiškinys yra tam tikros funkcijos $u\,(x, y)$ pilnasis diferencialas. Surasime $u\,(x, y)$ pagal (6) formulę, parinkę pradiniu tašku (x_0, y_0) koordinačių pradžią O (0; 0):

$$u = \int_0^x y\left(e^{ty} + 5\right)dt + \int_0^y 0\left(e^{0t} + 5\right)dt + C = \left(e^{ty} + 5ty\right)\Big|_0^x + C = e^{xy} + 5xy + C. \;◀$$

11.10. Uždavinių sprendimas

1 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivinį integralą $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$ kreivės L lanku nuo taško $A(-1;0)$ iki taško $B(0;1)$:

a) tiese AB;

b) astroidės $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ lanku.

▶ a) Užrašysime integravimo linijos L – tiesės AB, einančios per du duotus taškus lygtį: $\dfrac{x+1}{0+1} = \dfrac{y-0}{1-0}$ arba $y - x = 1$. Kadangi $y = x + 1\ (-1 \le x \le 0)$, tai $y' = 1$ ir $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{2}\, dx$. Tuomet

$$\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds = \int\limits_{-1}^{0} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x+1}\right)\sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\left(4\int\limits_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}} dx - 3\int\limits_{-1}^{0} (x+1)^{\frac{1}{2}}\, d(x+1)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{3(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{2}\left(3x^{\frac{4}{3}} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^0 = -5\sqrt{2}.$$

b) Šiuo atveju kreivinį integralą pertvarkysime į apibrėžtinį kintamojo t atžvilgiu. Tašką A atitinka parametro t reikšmė π, tašką B – reikšmė $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} -1 = \cos^3 t, \\ 0 = \sin^3 t, \end{cases} \Rightarrow t = \pi; \qquad \begin{cases} 0 = \cos^3 t, \\ 1 = \sin^3 t, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Kadangi $x = \cos^3 t,\ dx = 3\cos^2 t(-\sin t)dt,\ y = \sin^3 t,\ dy = 3\sin^2 t\cos t dt$,

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = 3\sin t\cos t dt, \text{ tai}$$

$$\int_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t}\right)\cdot 3\sin t\cos t dt =$$

$$= -12\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d\cos t - 9\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} t d\sin t = \left(-4\cos^3 t - \frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}} t\right)\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{46}{7}. ◀$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kai L – apskritimas $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$.

▶ Įvesime polines koordinates: $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi$. Polinėje koordinačių sistemoje apskritimo lygtis yra tokia:

$$\rho^2 = a\rho\cos\varphi \quad \text{arba} \quad \rho = a\cos\varphi\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Tuomet

$$\rho' = -a\sin\varphi \quad ir \quad ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = ad\varphi.$$

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\,ad\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho a d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a^2 \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2. \blacktriangleleft$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivės L, apibrėžtos parametrinėmis lygtimis $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$, lanko masę m, kai masės pasiskirstymo tankis $\gamma = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

▸ Žinome, kad $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$. Randame $x_t' = \cos t - t\sin t$, $y_t' = \sin t + t\cos t$, $z_t' = 1$; $x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1 =$ $= 2 + t^2$ ir $ds = \sqrt{2 + t^2}\, dt$.

$$m = \int_L \gamma(x,y,z) ds = \int_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) ds = \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t} \right) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{2 + t^2}\, dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(2 + t^2\right) = \frac{1}{2} \frac{\left(2 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(2 + 4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(1 + 2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \blacktriangleleft$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime homogeninio apskritimo $x^2 + y^2 = R^2$ $(0 \le x \le R,\ \ 0 \le y \le R)$ lanko masės centro koordinates.

▸ Sąlygoje duotojo apskritimo lanko ketvirtadalio ilgis $l = \frac{\pi R}{2}$. Kadangi lanko masės pasiskirstymo tankis yra pastovus $(\gamma = 1)$, tai pirmojo koordinačių kampo pusiaukampinė yra lanko simetrijos ašis, todėl $x_c = y_c$.

$$m = \int_L \gamma\, ds = \int_L ds = \frac{\pi R}{2}.$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int_L x\gamma\, ds = \frac{2}{\pi R} \int_0^R x\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{2}{\pi R} \int_0^R x \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi R} \int_0^R \frac{x}{y} R dx = \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R = \frac{2R}{\pi}.$$

Taigi, $x_c = y_c = \dfrac{2R}{\pi}$. ◀

Pastaba. Šį uždavinį galėjome spręsti užrašę parametrines apskritimo lygtis $x = R\cos t$, $y = R\sin t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right)$ ir suintegravę kintamuoju t.

5 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int\limits_L x^2 y dy - y^2 x dx$, kai L: $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

▶ Surasime $dx = -\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} dt$, $dy = \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} dt$. Tuomet

$$\int\limits_L x^2 y dy - y^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t \sqrt{\cos t} \, \frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \ ◀$$

6 pavyzdys. Taikydami Gryno formulę, apskaičiuosime integralą $I = \oint\limits_L 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2 dy$, kai L – trikampio su viršūnėmis taškuose A (1; 1), B (2; 2), C (1, 3) kontūras, apeinamas teigiamąja kryptimi.

▶ Turime

$$P(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right), \; Q(x, y) = (x+y)^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) - 4y = 2(x-y).$$

Taigi,

$$I = \oint\limits_L 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2 dy = \iint\limits_D 2(x-y) dx\, dy,$$

čia sritis D – trikampis ABC. Kraštinės AB lygtis: $y = x$, BC lygtis: $y = -x + 4$, kraštinės CA lygtis: $x = 1$. Apskaičiuosime gautąjį dvilypį integralą:

$$I=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=2\int_1^2 dx\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x}=$$

$$=2\int_1^2\left(x(4-x)-\frac{1}{2}(4-x)^2-x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=4\int_1^2\left(4x-x^2-4\right)dx=4\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3-4x\right)\Bigg|_1^2=-\frac{4}{3}.$$

Gautąjį rezultatą patikrinsime, betarpiškai apskaičiuodami duotąjį integralą kontūru L, kurį sudaro atkarpos AB, BC, CA:

$$I=\int_{AB}2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy+\int_{BC}2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy+$$

$$+\int_{CA}2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy.$$

AB lygtis: $y=x$, tai $dy=x'dx=dx,\quad 1\le x\le 2$.

BC lygtis: $y=-x+4$, tai $dy=(-x+4)'dx=-dx,\quad 2\ge x\ge 1$.

CA lygtis: $x=1$, tai $dx=0,\quad 3\ge y\ge 1$.

Tokiu būdu:

$$I=\int_1^2\left[2\left(x^2+x^2\right)dx+(x+x)^2dx\right]+\int_2^1\left\{2\left[x^2+(4-x)^2\right]dx+(x-x+4)^2(-dx)\right\}+$$

$$+\int_3^1(1+y)^2dy=8\int_1^2 x^2dx+\int_2^1\left(4x^2-16x+16\right)+\int_3^1(1+y)^2dy=$$

$$=\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+8x^2-16x\right)\Bigg|_1^2+\frac{(1+y)^3}{3}\Bigg|_3^1=-\frac{4}{3}.\ ◀$$

7 pavyzdys. Apskaičiuosime $I=\int_{(1;1)}^{(2;3)}(x+3y)dx+(y+3x)dy$.

▶ Šis integralas nepriklauso nuo integravimo kelio formos, nes $P(x,y)=x+3y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=3,\ Q(x,y)=y+3x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=3$ t.y. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (visoje xOy plokštumoje).

Integravimo linija L pasirenkame laužtę, kurios grandys lygiagrečios koordinačių ašims. Atkarpoje AM $y_0 = 1$, $dy = 0$, $1 \le x \le 2$; atkarpoje MB $x = 2$, $dx = 0$, $1 \le y \le 3$ (žr.11.11 pav.).

$$\text{Taigi, } I = \int_1^2 (x + 3 \cdot 1)dx + \int_1^3 (y + 3 \cdot 2)dy = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6x\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{1}{2} - 6 = 20{,}5 . \blacktriangleleft$$

8 pavyzdys. Surasime pirmykštę funkciją u, jei $du = [y + \ln(x+1)]dx + (x + 1 - e^y)dy$ (žr.11.11 pav.).

▶ Turime $P = y + \ln(x+1)$, $Q = x + 1 - e^y$, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Tegu $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ir kontūras L yra laužtė OMN, kurią riboja taškai $O\,(0;\ 0)$, $M\,(x;\ 0)$, $N\,(x;\ y)$. Tuomet

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = \int_0^x \ln(x+1)dx + \int_0^y (x + 1 - e^y)dy =$$

$$= [x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)]\,\Big|_0^x + (xy + y - e^y)\,\Big|_0^y =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + 1 + C .$$

Taigi, $u(x, y) = (x+1)\ln(x+1) - x + xy + y - e^y + C$.

Patikrinsime gautąjį rezultatą diferencijuodami funkciją $u(x, y)$, kurios dalinės išvestinės kintamųjų x ir y atžvilgiu turi sutapti su duotomis funkcijomis $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$. Iš tikrųjų:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 1 + y = \ln(x+1) + y = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 1 - e^y = Q(x, y). \blacktriangleleft$$

11.11. Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite kreivinius pirmojo tipo integralus:

1.1. $\int_L \frac{ds}{x - y}$, L: tiesės $y = \frac{1}{2}x - 2$ atkarpa tarp taškų $A(0;-2)$ ir $B(4;0)$.

1.2. $\int_L y\,ds$, L: $y^2 = 2x$ nuo taško $A\ (0;\ 0)$ iki taško $B\ (2;\ 2)$.

1.3. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n ds$, L – apskritimas $x^2+y^2=a^2$.

1.4. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, L: $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$.

1.5. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, L: $x=a\cos y,\ y=a\sin t,\ z=bt\ (0\le t\le 2\pi)$.

2. Apskaičiuokite srities, apribotos duotomis kreivėmis, plotą:

2.1. $x=y^2, x=1$. **2.2.** $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ (0\le t\le 2\pi)$.

2.3. $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\quad (0\le t\le 2\pi)$.

3. Apskaičiuokite homogeninės kreivės L lanko masės centro koordinates:

3.1. $L: x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$.

3.2. $L: y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\quad (0\le x\le \ln 2)$.

3.3. $L: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=mt\ (0\le t\le 2\pi)$.

4. Apskaičiuokite kreivės $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t}\ (0\le t\le\infty)$ lanko ilgį.

5. Apskaičiuokite kreivės $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$ lanko, jungiančio taškus O (0; 0; 0) ir A (3; 3; 2), ilgį.

6. Apskaičiuokite homogeninio apskritimo $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ dalies, esančios pirmajame ketvirtyje, inercijos momentus koordinačių ašių ir koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

7. Apskaičiuokite homogeninės tiesės $y=1-2x$ atkarpos, esančios tarp koordinačių ašių, inercijos momentus koordinačių ašių ir koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

8. Apskaičiuokite antrojo tipo kreivinius integralus duotosios kreivės L lanku nurodytąja kryptimi arba teigiamąja kryptimi, kai sąlygoje nepaminėta integravimo kreivės apėjimo kryptis:

8.1. $\int\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, L: tiesės atkarpa, jungianti taškus A (1; 1) ir B (3; 4).

8.2. $\int\limits_L (x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, L: laužtė OAB, kai O (0; 0), A (2; 0), B (4; 2).

8.3. $\int\limits_L 2xdy-3ydx$; L – trikampio ABC kontūras su viršūnėmis A (1; 2), B (3; 1), C (2; 5).

8.4. $\int\limits_L x^2ydx+x^3dy,\ L: y^2=x,\ x^2=y$.

8.5. $\int\limits_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, L: apskritimas $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

8.6. $\int\limits_L ydx-xdy$, L: elipsė $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

8.7. $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz,\ L: x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ (0\le t\le 1)$.

8.8. $\int\limits_L ydx+zdy+xdz,\ L: x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ (0\le t\le 2\pi)$.

9. Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$, perkeldama materialųjį tašką kreive L iš taško A į tašką B:

9.1. $\vec{F}=-x\vec{i}+y\vec{j},\ L: x^2+\frac{y^2}{9}=1,\ x\ge 0,\quad y\ge 0,\ A(1;0),\ B(0;3)$.

9.2. $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j},\ L:\quad y=4-x^2$, A (2; 0), B (1; 3).

9.3. $\vec{F}=(x^2-2xy)\vec{i}+(y^2-2xy)\vec{j},\ L: y=x^2,\ A(1;1),\ B(-1;1)$.

9.4. $\vec{F}=(x+2y)\vec{i}+(x-y)\vec{j},\ L: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ A(-2;0),\ B(2;0)$.

9.5. $\vec{F}=(2a-y)\vec{i}+x\vec{j},\ L: x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ A(2\pi a;0),\ B(0;0)$.

9.6. $\vec{F}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\vec{i}+x\vec{j},\ L: y=\arcsin x,\ A(0;0),\ B\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

10. Taikydami Gryno formulę, apskaičiuokite kreivinius integralus, kai kreivė L yra srities D, nusakytos nelygybių sistema, kontūras:

10.1. $\oint\limits_L (1+xy)dx+(1+x^2)dy,\ D=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

10.2. $\oint\limits_L (x+3y)^2dx+(3x^2+y)dy,\ D=\{(x,y)\ |\ x\le y\le 1,\ 0\le x\le 1\}$.

10.3. $\oint\limits_L (1+x)ydx+(1+x+2x^2)dy,\ D=\left\{(x,y)\ |0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$.

10.4. $\oint\limits_L 2xydx+(x+y)^2dy,\ D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$.

10.5. $\oint\limits_L (1+e^y)dx+(1+2xe^y)dy,\ D=\{(x,y)\mid -y\le x\le y,\ y\le 1\}$.

10.6. $\oint\limits_L 2x(y-1)dx+x^2dy,\ D=\{(x,y)\mid x^2\le y\le 9\}$.

11. Apskaičiuokite kreivinius integralus, įsitikinę, kad jie nepriklauso nuo integravimo kreivės formos:

11.1. $\int\limits_{\left(1;\frac{\pi}{4}\right)}^{(2;0)} \mathrm{tg}y dx+\dfrac{x}{\cos^2 y}dy$. **11.2.** $\int\limits_{\left(\frac{\pi}{4};2\right)}^{\left(\frac{\pi}{6};1\right)} 2y\sin 2xdx-\cos 2xdy$.

11.3. $\int\limits_{(0;2)}^{(1;2)} xye^x dx+(x-1)e^x dy$. **11.4.** $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

11.5. $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \dfrac{ydx-xdy}{y^2}$ (kreive, kuri nekerta Ox ašies).

12. Suraskite pirmykštę funkciją $u\ (x;y)$, kai:

12.1. $du=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$.

12.2. $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$.

12.3. $du=\left[e^{x+y}+\cos(x-y)\right]dx+\left[e^{x+y}-\cos(x-y)+2\right]dy$.

12.4. $du=e^{-y}dx+(2y-xe^{-y})dy$. **12.5.** $du=\dfrac{1+y^2}{\cos^2 x}dx+2y\,\mathrm{tg}x\,dy$.

Atsakymai

1.1. $\sqrt{5}\ln 2$. **1.2.** $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **1.3.** $2\pi a^{2n+1}$. **1.4.** $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

1.5. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$. **2.1.** $\frac{4}{3}$. **2.2.** $\frac{3a^2\pi}{8}$. **2.3.** $6\pi a^2$. **3.1.** $\left(\pi;\frac{4a}{3}\right)$.

3.2. $\left(\frac{1}{3}(3\ln 2-1);\frac{1}{24}(16\ln 2+15)\right)$. **3.3.** $(0;0;m\pi)$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** 5. **6.** $I_x=I_y=2\pi$;

$I_0 = 4\pi$. **7.** $I_x = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$; $I_y = \dfrac{\sqrt{5}}{24}$; $I_0 = \dfrac{5\sqrt{5}}{24}$. **8.1.** $\dfrac{67}{6}$. **8.2.** $\dfrac{136}{3}$. **8.3.** 17,5. **8.4.** $\dfrac{6}{35}$.
8.5. -2π . **8.6.** $-2\pi\, ab$. **8.7.** $\dfrac{1}{35}$. **8.8.** $-\pi a^2$. **9.1.** 5. **9.2.** $\dfrac{29}{6}$. **9.3.** $\dfrac{14}{15}$. **9.4.** 2π .
9.5. $2\pi a^2$. **9.6.** $\dfrac{\pi^2}{8}+1$. **10.1.** $\dfrac{8}{3}$. **10.2.** –6. **10.3.** 0. **10.4.** π. **10.5.** 2. **10.6.** 0.
11.1. -1 . **11.2.** $-\dfrac{1}{2}$. **11.3.** 2. **11.4.** 62. **11.5.** $\dfrac{3}{2}$. **12.1.** $x^2+3xy-2y^2+C$.
12.2. $x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 + C$. **12.3.** $e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$.
12.4. $y^2 + xe^{-y} + C$. **12.5.** $(1+y^2)\operatorname{tg} x + C$.

LITERATŪRA

1. Pekarskas V. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas. I dalis.-Kaunas: Technologija, 1997.- 386p.
2. Rumšas P. Trumpas aukštosios matematikos kursas.- Vilnius: Mokslas, 1976.-559p.
3. Atstupėnienė R., Pekarskas V. Vieno kintamojo funkcijų integralinis skaičiavimas.- Kaunas: 1991.-87p.
4. Tiknevičienė I., Valantinas J. Kartotiniai, kreiviniai ir paviršiniai integralai.- Kaunas: Technologija, 1993.-75p.
5. Bačinskas A. ir kt. Matematikos uždavinių rinkinys. 2 dalis. Kaunas: Technologija, 1996.-138p.
6. Janušauskaitė N. ir kt. Tiesinė algebra ir diferencialinis skaičiavimas .- Kaunas: Technologija, 1998.-252p.
7. Krasnov M.L. Obyknovennyje diferencialnyje uravnenija.- Moskva: Vysšaja škola, 1983.-126p.
8. Šipačiov V.S. Vysšaja matematika.- Moskva: Vysšaja škola, 1990.-479p.
9. Berman G.N. Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analiza. – Moskva:, Nauka, 1985.-384p.

Leidyklos „Technologija“ knygas galima įsigyti
internetu www.knygininkas.lt

SL 344. 2003 01 09. 19 apsk. leid. l. Užsakymas 11. Kaina sutartinė.
Leidykla „Technologija“, K. Donelaičio g. 73, LT-3006 Kaunas
Spausdino KTU spaustuvė, Studentų g. 54, LT-3031 Kaunas