Ortogonalusis papildinys. Ortogonaliosios matricos

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

2013 m. rugsėjo 27 d.

Apibrėžimas 1

Tegul $(V, \langle , \rangle)$ – Euklido erdvė, o $L \subset V$ – tiesinis poerdvis. Aibė

$$L^{\perp} := \{v \in V : v \perp u, \ \forall u \in L\}.$$

vadinama poerdvio L **ortogonaliuoju papildiniu**.

Teiginys 2

Euklido erdvės $(V, \langle , \rangle)$ tiesinio poerdvio L ortogonalusis papildinys $L^{\perp}$ taip pat yra erdvės V tiesinis poerdvis.

Įrodymas.

Tegul $v_1, v_2 \in L^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tada bet kuriam $u \in L$,

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u \rangle = \alpha_1 \langle v_1, u \rangle + \alpha_2 \langle v_2, u \rangle = 0,$$

todėl $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in L^{\perp}$. Vadinasi, $L^{\perp}$ – erdvės V tiesinis poerdvis. □

Teiginys 3

Tegul $(V, \langle,\rangle)$ *– Euklido erdvė, o* $L \subset V$ *– tiesinis poerdvis. Tada* $L \cap L^{\perp} = \{\mathcal{O}\}$.

Įrodymas.

Tegul $v \in L \cap L^{\perp}$. Kadangi $v \in L^{\perp}$, tai kiekvienam $u \in L$, $v \perp u$. Tačiau $v \in L$, todėl $v \perp v$, t. y. $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = \mathcal{O}$. □

Teiginys 4

Tegul $(V, \langle,\rangle)$ *– baigtinės dimensijos Euklido erdvė, o* $L \subset V$ *– tiesinis poerdvis. Tada erdvė* V *yra poerdvių* L *ir* $L^{\perp}$ *tiesioginė suma, t. y.* $V = L \oplus L^{\perp}$.

Įrodymas

Priminsime, kad tiesinė erdvė V yra jos tiesinių poerdvių U_1 ir U_2 tiesioginė suma (žymima $V = U_1 \oplus U_2$) tada ir tik tada, kai $V = U_1 + U_2$ ir $U_1 \cap U_2 = \{\mathcal{O}\}$.

Lygybę $L \cap L^{\perp} = \{\mathcal{O}\}$ jau esame įrodę. Įrodysime lygybę $V = L + L^{\perp}$. Iš tikrųjų, tegul $v_1, v_2, \ldots, v_r$ – poerdvio L bazė. Šią bazę papildome iki visos erdvės V bazės

$$v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n.$$

Šiai vektorių šeimai pritaikę ortogonalizacijos algoritmą, gauname erdvės V ortonormuotą bazę

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n.$$

Be to,

$$L = L(v_1, v_2, \ldots, v_r) = L(u_1, u_2, \ldots, u_r).$$

Tegul $v \in V$. Egzistuoja tokie $\alpha_j \in \mathbb{R}$, kad

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Tada

$$v = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r}_{\in L} + \underbrace{\alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n}_{\in L^\perp},$$

t. y. $v \in L + L^\perp$, todėl $V = L + L^\perp$. □

Išvada 5

Tegul $(V, \langle , \rangle)$ *– baigtinės dimensijos Euklido erdvė, o* $L \subset V$ *– tiesinis poerdvis. Tada* $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$.

Išvada 6

Tegul $(V, \langle , \rangle)$ *– baigtinės dimensijos Euklido erdvė, o* $L \subset V$ *– tiesinis poerdvis. Tada kiekvienam erdvės* V *vektoriui* v *egzistuoja tokie vektoriai* $u \in L$ *ir* $w \in L^\perp$*, kad*

$$v = u + w. \tag{1}$$

Vektoriai u *ir* w *randami vienareikšmiškai.*

Apibrėžimas 7

(1) lygybėje vektorius u vadinamas vektoriaus v **projekcija** poerdvyje L, o vektorius w vadinamas vektoriaus v **statmeniu** į poerdvį L.

Teiginys 8

Tegul $(V, \langle , \rangle)$ *– Euklido erdvė, o* $L \subset V$ *– tiesinis poerdvis. Tada* $(L^\perp)^\perp = L$.

Pavyzdys 9

Tegul $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ – standartinė Euklido erdvė, $L = L(v_1, v_2)$, kur $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, 3, 7)$. Rasime ortogonalaus papildinio $L^\perp$ bazę.

Sprendimas.

Tarkime, kad $v = (x, y, z) \in L^{\perp}$. Tada $v \perp v_1$ ir $v \perp v_2$, t. y.

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \qquad y + 3z = 0 \end{cases}$$

Iš čia randame $w := (-1, 3, -1) \in L^{\perp}$. Kadangi

$$\dim L^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim L = 3 - 2 = 1,$$

tai vektorius w sudaro ortogonalaus papildinio $L^{\perp}$ bazę.

$\square$