Kombinatorika

Vytas Zacharovas

2014 m. birželio 18 d.

1 Matematinės indukcijos principas

Apibrėžimas 1.1 (Matematinės indukcijos principas)**.** *Tarkime, kad su visais natūraliais skaičiais n yra apibrėžtas teiginys $T(n)$, priklausantis nuo n. Jeigu yra išpildytos dvi sąlygos*

1. *Teiginys $T(1)$ yra teisingas*
2. *Jeigu kažkuriam $n \geqslant 1$ teiginys $T(n)$ yra teisingas, tuomet yra teisingas ir po jo sekantis teiginys $T(n+1)$*

tuomet teiginys $T(n)$ yra teisingas su visais $n \geqslant 1$.

Matematikos aksiomos yra formuluojamos taip, kad atspindėtų jomis aprašomų objektų ar reiškinių savybes. Pavyzdžiui, elementarios geometrijos aksioma teigianti, jog dviejų nelygiagrečių plokštumų sankirta yra tiesė, yra suformuluota taip, kad nusakytų tam tikrą intuityviai suvokiamą kaip teisingą objektų "plokštuma" ir "tiesė" savybę. Kokiais samprotavimais remiasi indukcijos aksioma? Turime dvi sąlygas

1. Teiginys $T(1)$ –teisingas
2. Iš to kad teiginys $T(n)$ yra teisingas išplaukia jog $T(n+1)$ taip pat yra teisingas.

Šios dvi sąlygos leidžia mums paleisti begalinį "įrodymo ciklą"

1. $T(1)$ – teisingas, be to $T(1) \Rightarrow T(2)$ vadinasi $T(2)$ – tesingas.
2. $T(2)$ – teisingas, be to $T(2) \Rightarrow T(3)$ vadinasi $T(3)$ – tesingas.
3. $T(3)$ – teisingas, be to $T(3) \Rightarrow T(4)$ vadinasi $T(4)$ – tesingas.

4. $T(4)$ – teisingas, be to $T(4) \Rightarrow T(5)$ vadinasi $T(5)$ – tesingas.

5. ir t.t.

Dažnai matematinės indukcijos principas vaizdžiai iliustruojamas pasinaudojant "domino principu". Tarkime, kad turime begalinę eilę vienas po kito sustatytų domino kauliukų sunumeruotų skaičiais $1, 2, 3, \ldots$.

Tarkime, kad visi kauliukai pasižymi savybėmis

1. Pirmas kauliukas krenta į dešinę.
2. Jeigu i dešinę krenta n-asis kauliukas, tai į dešinę krenta ir po jo sekantis $n+1$ -asis kauliukas.

Iš šių dviejų sąlygų išplaukia, kad visi mūsų eilės domino kauliukai turi kristi į dešinę, kadangi pirmas kauliukas krisdamas nuverčia antrąjį, antrasis trečiąjį ir t.t.

Panagrinėkime vieną indukcijos principo taikymo pavyzdį.

Teorema 1.1. *Su visais $n \geqslant 1$ yra teisinga tapatybė*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Įrodymas. Kiekvienam natūriniam skaičiui $n = 1, 2, 3, \ldots$ priskirkime teiginį $T(n)$ teigianti, jog galioja tapatybė

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mūsų tikslas bus įrodyti, jog teiginys $T(n)$ yra teisingas su visais natūriniais skaičiais $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mūsų begalinės teiginių sekos

$$T(1), T(2), T(3), \ldots$$

pirmiems nariams šis teiginys yra teisingas, nes kaip nesunku įsitikinti atlikus elementarius skaičiavimus

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6},$$

O tai reiškia, kad teiginys $T(1)$ yra teisingas. Analogiškai paėmę $n = 2$ galime įsitikinti, kad ir antru mūsų sekos nariu $T(2)$ nusakomas teiginys yra teisingas

$$1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6}.$$

Jeigu mes norime pasinaudodami indukcijos aksioma įrodyti, jog yra teisingi visi mūsų teiginių sekos $T(1), T(2), \ldots$ nariai, mes turime parodyti, jog jeigu kokiam nors fiksuotam n teiginys $T(n)$ yra teisingas tai bus teisingas ir po jo einantis teiginys $T(n+1)$. Kitais žodžiais mes turime parodyti, kad jeigu kuriam nors konkrečiam n pirmų n natūrinių skaičių kvadratų suma yra lygi

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tai ir pirmu $n+1$ natūriniu skaičių kvadratų suma bus lygi

$$\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$$

Tarkime kad n yra toks, kad $T(n)$ –teisingas, t.y

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pridėję prie abiejų pusių $(n+1)^2$ gausime

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Sutraukę dešinėje esančius du narius gausime tapatybę kurią tenkina pirmų $n+1$ natūrinių skaičių kvadratų suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(2n^2+7n+6\big)}{6}$$

Pastebėkime, kad reiškinys figūruojantis aukščiau pateiktos tapatybės dešinėje pusėje tenkina tapatybę

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3), \tag{1}$$

Pasinaudoję šiuo faktu mes galime perrašyti mūsų tapatybę kaip

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$$

Tuo pačiu mes įrodėme, kad $T(n+1)$ yra teisingas.

Taigi, mes parodėme, kad

1. $$T(n) \Rightarrow T(n+1)$$

2. $$T(1) \quad \text{– teisingas}$$

Remiantis matematinės indukcijos aksioma, $T(n)$ yra teisingas su visais $n \geqslant 1$.

$$T(1) \Rightarrow T(2) \Rightarrow T(3) \Rightarrow T(4) \Rightarrow T(5) \Rightarrow T(6) \Rightarrow \cdots$$

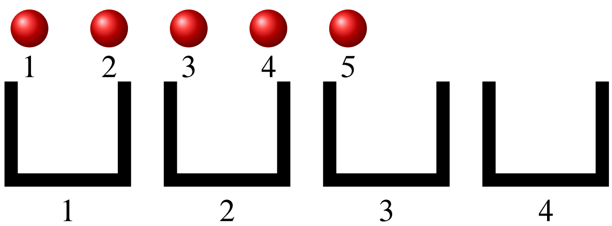
$\square$

2 Dirichlet principas

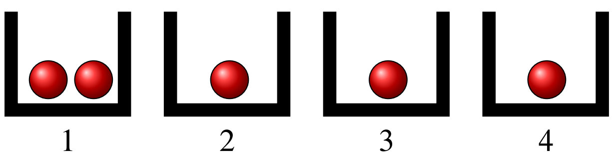
Apibrėžimas 2.1 (Dirichlet principas)**.** *Tarkime, kad turime m dėžių ir n rutulių. Jeigu rutulių yra daugiau nei dėžių $n > m$, tai kad ir kaip išdėliotume rutulius į dėžes visuomet atsiras bent viena dėžė kurioje bus daugiau nei vienas rutulys.*

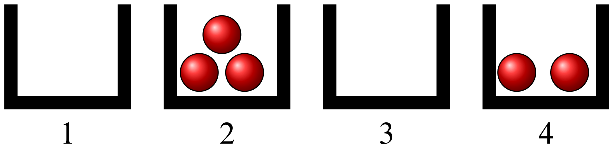
Anglakalbėje literatūroje šis principas dažnai yra vadinamas "Karvelių lizdų" principu (The Pidgeonhole Principle).

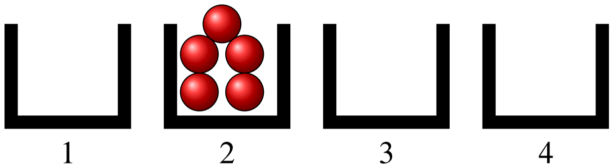
Pavyzdys 2.1. Tarkime, kad turime penkis rutulius ir šešias dėžes



Tuomet galimi keli šių rutulių išdėstymo i dėžes variantai galėtų būti

1. 

2. 

3. 

Iš viso yra žymiai daugiau rutuliu išdėstymo variantu negu trys aukščiau pavaizduoti, vėlesnėje kurso dalyje išmoksime suskaičiuoti visus galimus variantus. Šiuo metu mus tedomina tik tas faktas, kad kad ir kaip išdėstysime rutulius po dėžes, vienoje dėžėje būtinai atsidurs daugiau nei vienas rutulys.

Panagrinėkime kelis Dirichlet principo taikymo pavyzdžius.

Pavyzdys 2.2 ([2])**.** Tarkime, kad viename ofise dirba 13 klerkų. Tuomet bent du iš šio ofiso klerku gimtadienį švęs tą patį mėnesį.

Pavyzdys 2.3 ([2])**.** Bet kuris aibės $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ poaibis A turintis šešis elementus $|A| = 6$ turi bent du elementus kurių suma yra lygi 10.

Šiuo atveju dėžių vaidmenį vaidina penkios aibės

$$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$$

kurių sąjunga yra aibė S.

Teorema 2.1. *Tarkime A yra aibės $\{1, 2, \dots, 2n\}$ poaibis, turintis daugiau nei n elementų. Tuomet poaibyje A yra bent du skaičiai kurių vienas dalijasi iš kito.*

Įrodymas. Bet kurį skaičių $m \in A$ mes galime užrašyti pavidalu

$$m = 2^k d,$$

kur d yra nelyginis skaičius, o $k \geqslant 0$. Pvz.:

$$20 = 2^2 5, \quad 7 = 2^0 7, \quad 24 = 2^3 3$$

Nelyginių skaičių kiekis intervale $[1, 2n]$ yra n, tuo tarpu $|A| \geqslant n + 1$ vadinasi $\exists m_1, m_2 \in A$, kad

$$m_1 = 2^{k_1} d, \quad m_2 = 2^{k_2} d$$

Jei $k_2 > k_1$, tai m_1 dalija m_2. □

Teoremos įrodymą galime iliustruoti sekančiu pavyzdžiu.

Pavyzdys 2.4. Tarkime $n = 5$.

$$\{3, 5, 6, 7, 8, 10\} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{2^0 3, 2^0 5, 2^1 3, 2^0 7, 2^3 1, 2^1 5\}$$

$2^3 1$	$2^0 3$ $2^1 3$	$2^0 5$ $2^1 5$	$2^0 7$	
1	3	5	7	9

2.0.1 *Erdős–Szekeres teorema

Teorema 2.2 (Erdős–Szekeres)**.** *Su bet kokiu natūraliuoju skaičiumi n, skirtingų $n^2 + 1$ realių skaičių seka turi didėjantį arba mažėjanti posekį, kurio ilgis yra lygus $n + 1$.*

Pavyzdys 2.5 ([2])**.**

1. Seka $6, 5, 8, 3, 7$ turinti $5 = 2^2 + 1$ elementų turi mažėjantį posekį $6, 5, 3$, kurio ilgis yra $3 = 2 + 1$.

2. Seka
$$11, 8, 7, 1, 9, 6, 5, 10, 3, 12$$
turintį $10 = 3^2 + 1$ elementų turi didėjantį posekį
$$8, 9, 10, 12$$
kurio ilgis yra $4 = 3 + 1$.

Erdős–Szekeres teoremos įrodymas. Tarkime turime seką

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1} \tag{2}$$

Visiems $1 \leqslant k \leqslant n^2 + 1$ tegu x_k būna ilgis didžiausio *didėjančio* sekos (2) posekio, pasibaigiančio a_k. Analogiškai, tegu y_k būna ilgis didžiausio *mažėjančio* sekos (2) posekio, pasibaigiančio a_k.

Jeigu bent vienai reikšmei $1 \leqslant k \leqslant n^2 + 1$ turėtume $x_k \geqslant n + 1$ arba $y_k \geqslant n + 1$, tai reikštų, kad seka turi monotoniškai didėjantį arba mažėjantį posekį kurio ilgis yra didesnis nei $n + 1$. Todėl mums belieka išnagrinėti atvejį, kai
$$1 \leqslant x_k, y_k \leqslant n$$
su visais $1 \leqslant k \leqslant n^2 + 1$. Tai reiškia, kad kai k kinta intervale $1 \leqslant k \leqslant n^2 + 1$ skaičių pora (x_k, y_k) įgija reikšmes iš lentelės

(1,1)	(1,2)	...	(1,n)
(2,1)	(2,2)	...	(2,n)
...	...	...	...
(n,1)	(n,2)	...	(n,n)

turinčios, kaip nesunku matyti n^2 vietų. Taigi, $n^2 + 1$ porų (x_k, y_k) mes išdėliojame į lentelę turinčią n^2 vietų. Pritaikę Dirichlet principą gauname, kad bent vienoje lentelės celėje gulės dvi arba daugiau porų (x_k, y_k). Kitaip tariant, mes įrodėme, kad intervale $[1, n^2 + 1]$ egzistuoja tokie du natūralieji skaičiai $1 \leqslant i < j \leqslant n^2 + 1$, kad

$$(x_i, y_i) = (x_j, y_j).$$

Seka

$$a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$$

yra sudaryta iš *skirtingų* realiųjų skaičių. O tai reiškia, kad yra galimi du variantai $a_i < a_j$ arba $a_i > a_j$. Pirmuoju atveju prisiminę, kad x_i yra ilgis didžiausio didėjančio posekio pasibaigiančio elementu a_i pridėję šio posekio pabaigoje elementą a_j gausime didėjantį posekį pasibaigiantį elementu a_j kurio ilgis bus $x_i + 1$. Kadangi pagal apibrėžimą x_j yra ilgis *didžiausio* didėjančio posekio, pasibaigiančio a_j, tai $x_j \geqslant x_i + 1$. Vadinasi $x_i \neq x_j$. Analogiškai is prielaidos, kad $a_i > a_j$ išplaukia, kad $y_i \neq y_j$. Gavome prieštarą, kuri reiškia, kad prielaida, jog nelygybė

$$1 \leqslant x_k, y_k \leqslant n$$

galioja su visais k, yra neteisinga. □

3 Dauginimo taisyklė

Apibrėžimas 3.1. *Jeigu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ yra baigtinė aibė, tai jos elementų skaičių n mes vadinsime aibės A* galia *ir žymėsime*

$$|A| = n.$$

Apibrėžimas 3.2 (Dekarto sandauga)**.** *Tarkime turime dvi baigtines aibes*

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

ir

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

jų Dekarto sandauga vadiname aibę visu galimų porų

$$(x, y)$$

kur $x \in A$ ir $y \in B$ ir žymėsime ją $A \times B$

Pavyzdys 3.1. Jeigu $A = \{1, 2\}$ ir $B = \{1, 2, 3\}$, tai

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), \\ (2, 1), (2, 2), \\ (3, 1), (3, 2)\}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), \\ (2, 1), (2, 2)\}$$

Iš ką tik pateikto pavyzdžio matome, kad bendru atveju $A \times B$ nebūtinai yra lygu $B \times A$.

Teorema 3.1. *Jeigu A ir B yra dvi baigtines aibes, tuomet jų Dekarto sandaugos elementu skaičius yra lygus*

$$|A \times B| = |A||B|$$

Įrodymas. Tegu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ir $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ Pastebėkime, kad visi aibės $A \times B$ elementai gali būti surašyti į lentelę

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\dots$	(a_1, b_n)
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\dots$	(a_2, b_n)
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\dots$	(a_m, b_n)

turinčią m eilučių ir n stulpelių. Vadinasi iš viso turinčią mn elementų. $\square$

Apibrėžimas 3.3 (Kelių aibių Dekarto sandauga)**.** *Tarkime, kad turime kelias baigtines aibes*

$$A_1, A_2, \dots, A_k.$$

Jų Dekarto sandauga vadiname aibę visu galimų sekų

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

kur $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_k \in A_k$ ir žymėsime ją

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$$

Pavyzdys 3.2. Tegu $A = \{0,1\}$

$$A \times A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$(A \times A) \times A = \{\big((0,0),0\big),\big((0,1),0\big),\big((1,0),0\big),\big((1,1),0\big),$$
$$\big((0,0),1\big),\big((0,1),1\big),\big((1,0),1\big),\big((1,1),1\big)\}$$

$$A \times A \times A = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),$$
$$(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

Ką tik įrodytą teoremą taikydami matematinę indukciją mes galime apibendrinti bet kokio skaičiaus aibių Dekarto sandaugai.

Teorema 3.2.

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

Išvada 3.3. *Kiekis visų įmanomų sekų, kurių ilgis yra k, sudarytų iš aibes turinčios n elementu yra lygus n^k.*

Proof. Iš tikrųjų aibė visų įmanomų sekų sudarytų iš abėcėlės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ yra

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k}$$

taigi

$$|\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k}| = |A|^k = n^k$$

□

Atskiru atveju gauname, kad iš viso yra 2^k sekų sudarytų iš 0 arba 1 kurių ilgis yra lygus k. Nes tokių sekų aibė yra Dekarto sandauga

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{k}$$

kurios dydis

$$|\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{k}| = 2^k.$$

Teorema 3.4. *Kiekis aibės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ poaibių yra lygus 2^n.*

Įrodymas. Tereikia pastebėti, kad kiekvienas aibės A poaibis gali būti užkoduotas kaip n nulių arba vienetų seka kurios j-asis elementas bus lygus 1 jeigu a_j elementas poaibiui priklauso ir 0 priešingu atveju. Pvz jei

$$A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

tai išrikiavę aibės A elementus abėcėles tvarka galėsime šios aibės poaibį $\{b,c,e,f,h\} \subset A$ pavaizduoti kaip seką 01101101 nes

a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	1	0	1	1	0	1

Skirtingus poaibius atitiks skirtingos sekos ir atvirkščiai, skirtingas sekas atitiks skirtingi poaibiai. O tai reiškia kad skirtingų aibės A poaibių yra tiek pat kiek ir skirtingų sekų sudarytų iš nulių ir vienetų, kuriu skaičius, kaip mes ką tik išsiaiškinome yra lygus 2^n $\square$

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \\
B &= \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \\
A \times B &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m), \\
&\quad (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_m) \\
&\quad \cdots \\
&\quad (a_n, b_1), (a_n, b_2), \ldots, (a_n, b_m)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) \\
&\quad = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_m \\
&\quad + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_m \\
&\quad \cdots \\
&\quad + a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + a_n b_m
\end{aligned}
$$

4 Gretiniai, kėliniai ir deriniai

4.1 Gretiniai be pasikartojimų

Apibrėžimas 4.1. *Tegu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ yra baigtinė aibė. Tuomet seką $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ sudarytą iš aibės A elementų vadinsime k- gretiniu, jeigu visi sekos elementai yra skirtingi.*

Apibrėžimas 4.2. *Aibę visų galimų k-gretinių mes žymėsime $\mathcal{A}_n^k$. Raide A_n^k mes žymėsime aibės $\mathcal{A}_n^k$ elementų skaičių, t.y. $A_n^k = |\mathcal{A}_n^k|$.*

Apibrėžimas 4.3. *Aibės $\mathcal{A}_n^n$ elementus mes vadinsime kėliniais ir žymėsime $\mathcal{P}_n$, skaičių visų kėlinių žymėsime raide $P_n = |\mathcal{P}_n|$. Kitaip tariant $\mathcal{P}_n$ yra aibė visų sekų gautų iš sekos*

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

perstatinėjant jos elementus vietomis visais įmanomais būdais.

Pavyzdys 4.1. Tegu $n = 4$ ir $A = \{a, b, c, d\}$ tuomet

$$\mathcal{A}_4^1 = \{a, b, c, d\},$$

taigi $A_4^1 = 4$.

$$\mathcal{A}_4^2 = \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$$

taigi $A_4^2 = |\mathcal{A}_4^2| = 12$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^3 = \{&abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,\\ &cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb\}\end{aligned}$$

taigi $A_4^3 = |\mathcal{A}_4^3| = 24$. Nesunku matyti, kad

$$A_4^4 = P_4 = 24$$

Sekanti teorema leidžia paskaičiuoti skaičių visų gretinių neišrašinėjant visų galimų variantų.

Teorema 4.1.

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Įrodymas. Tarkime $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tuomet kiekis žodžių, sudarytų iš vieno elemento bus lygus aibei A, arba kitaip tariant $\mathcal{A}_n^1 = A$. Bendru atveju

$$\mathcal{A}_n^k = \bigcup_{j=1}^{n} \{x \in \mathcal{A}_n^k | \text{ žodžio } x \text{ pirmoji raidė yra lygi } a_j\}$$

Nesunku matyti, kad

$$\left|\{x \in \mathcal{A}_n^k | \text{ žodžio } x \text{ pirmoji raidė yra lygi } a_j\}\right| = A_{n-1}^{k-1}$$

Taigi turime rekurentinę formulę

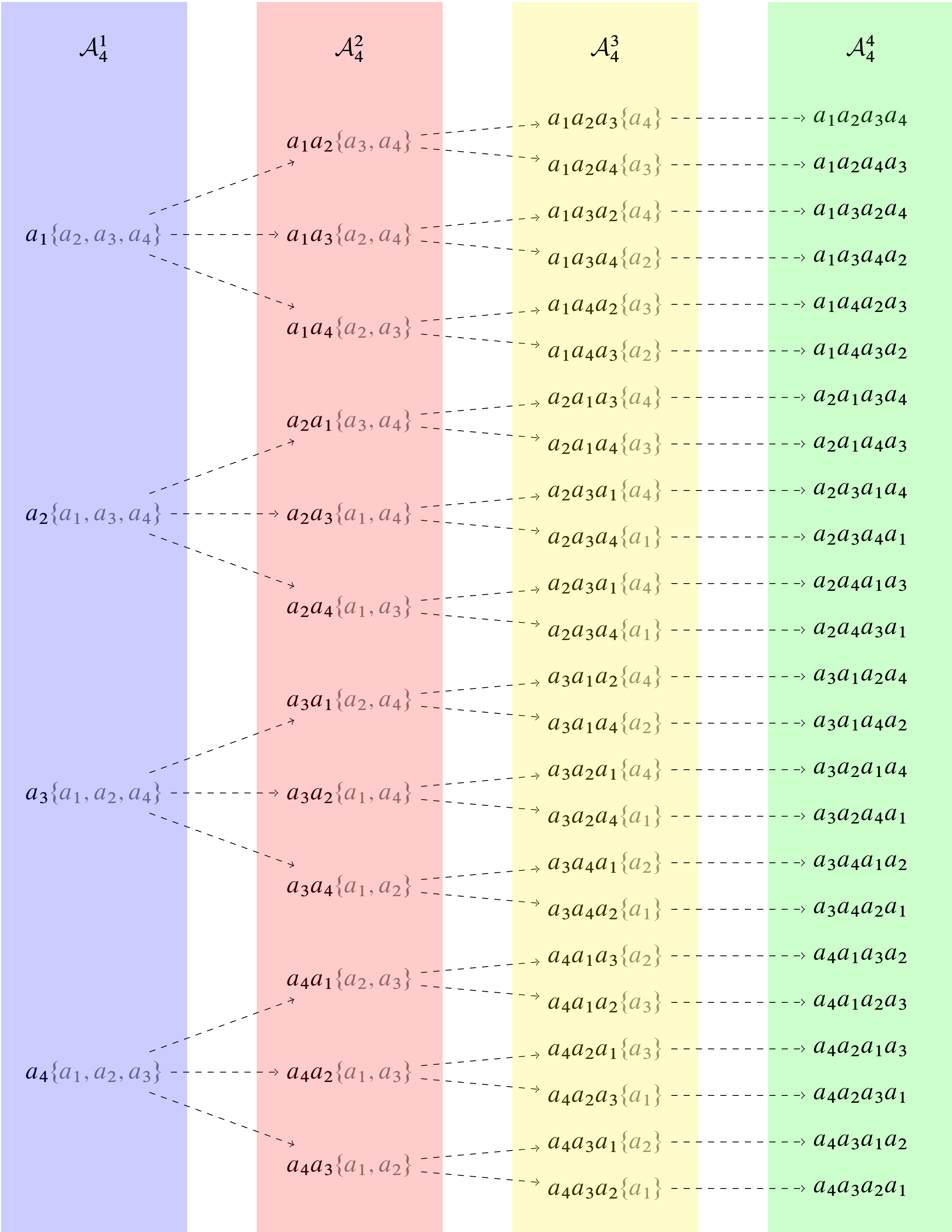
$$A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$$

su pradine sąlyga $A_n^1 = n$. Todėl

$$A_n^k = nA_{n-1}^{k-1} = n(n-1)A_{n-2}^{k-2} = \cdots = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

□

Pavyzdys 4.2. Tarkime $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Tuomet $\mathcal{A}_n^1 = A$, o aibė $\mathcal{A}_n^2$ yra konstruojama iš aibės $\mathcal{A}_n^1$ elementų prie kiekvieno elemento $x \in \mathcal{A}_n^1$ galo prirašant raidę $y \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tokia, kad $y \neq x$. Aibe $\mathcal{A}_n^3$ yra gaunama prie kiekvieno aibes $\mathcal{A}_n^2$ žodžio xy galo prirašant raidę $z \in \{a, b, c\}$, tokia, kad $z \neq x$ ir $z \neq y$. Schematiškai ši procesą galime pavaizduoti sekančiu būdu.


$\mathcal{A}_4^1$
$\mathcal{A}_4^2$
$\mathcal{A}_4^3$
$\mathcal{A}_4^4$
$a_1\{a_2,a_3,a_4\}$
$a_2\{a_1,a_3,a_4\}$
$a_3\{a_1,a_2,a_4\}$
$a_4\{a_1,a_2,a_3\}$
$a_1a_2\{a_3,a_4\}$
$a_1a_3\{a_2,a_4\}$
$a_1a_4\{a_2,a_3\}$
$a_2a_1\{a_3,a_4\}$
$a_2a_3\{a_1,a_4\}$
$a_2a_4\{a_1,a_3\}$
$a_3a_1\{a_2,a_4\}$
$a_3a_2\{a_1,a_4\}$
$a_3a_4\{a_1,a_2\}$
$a_4a_1\{a_2,a_3\}$
$a_4a_2\{a_1,a_3\}$
$a_4a_3\{a_1,a_2\}$
$a_1a_2a_3\{a_4\}$
$a_1a_2a_4\{a_3\}$
$a_1a_3a_2\{a_4\}$
$a_1a_3a_4\{a_2\}$
$a_1a_4a_2\{a_3\}$
$a_1a_4a_3\{a_2\}$
$a_2a_1a_3\{a_4\}$
$a_2a_1a_4\{a_3\}$
$a_2a_3a_1\{a_4\}$
$a_2a_3a_4\{a_1\}$
$a_2a_3a_1\{a_4\}$
$a_2a_3a_4\{a_1\}$
$a_3a_1a_2\{a_4\}$
$a_3a_1a_4\{a_2\}$
$a_3a_2a_1\{a_4\}$
$a_3a_2a_4\{a_1\}$
$a_3a_4a_1\{a_2\}$
$a_3a_4a_2\{a_1\}$
$a_4a_1a_3\{a_2\}$
$a_4a_1a_2\{a_3\}$
$a_4a_2a_1\{a_3\}$
$a_4a_2a_3\{a_1\}$
$a_4a_3a_1\{a_2\}$
$a_4a_3a_2\{a_1\}$
$a_1a_2a_3a_4$
$a_1a_2a_4a_3$
$a_1a_3a_2a_4$
$a_1a_3a_4a_2$
$a_1a_4a_2a_3$
$a_1a_4a_3a_2$
$a_2a_1a_3a_4$
$a_2a_1a_4a_3$
$a_2a_3a_1a_4$
$a_2a_3a_4a_1$
$a_2a_4a_1a_3$
$a_2a_4a_3a_1$
$a_3a_1a_2a_4$
$a_3a_1a_4a_2$
$a_3a_2a_1a_4$
$a_3a_2a_4a_1$
$a_3a_4a_1a_2$
$a_3a_4a_2a_1$
$a_4a_1a_3a_2$
$a_4a_1a_2a_3$
$a_4a_2a_1a_3$
$a_4a_2a_3a_1$
$a_4a_3a_1a_2$
$a_4a_3a_2a_1$

4.2 Deriniai

Apibrėžimas 4.4. *Baigtinės aibės* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *poaibį* $B \subset A$ *turintį* k *elementų vadinsime* k*-deriniu. Aibę visų* k*-deriniu sudarytų iš aibės* A *elementų žymėsime* $\mathcal{C}_n^k$. *Skaičių visų* k*-derinių žymėsime kaip* $|\mathcal{C}_n^k| = C_n^k$. *Taip pat laikysime, kad* $C_n^0 = 1$.

Pavyzdys 4.3. Tegu

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Tuomet

$$\mathcal{C}_4^1 = \big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\big\}$$

Vadinasi $C_4^1 = |\mathcal{C}_4^1| = 4$. Analogiškai

$$\mathcal{C}_4^2 = \big\{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}\big\}$$

Vadinasi $C_4^2 = 6$.

Teorema 4.2.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Įrodymas. Tegu $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} \subset A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tuomet perstatinėdami poaibio B elementus visais įmanomais būdais mes galime gauti $k!$ *skirtingu* žodžių sudarytų iš k elementų. Nesunku matyti, kad iš skirtingų aibės A poaibių $B, C \subset A$ perstatinėjimo būdu gauti žodžiai bus skirtingi. Iš kitos puses bet kuris žodis $x \in \mathcal{A}_n^k$ gali būti gautas perstatant kažkokio tai poaibio priklausančio A elementus. Taigi, įrodėme, kad aibė $\mathcal{A}_n^k$ yra sąjunga *nesikertančių* aibių

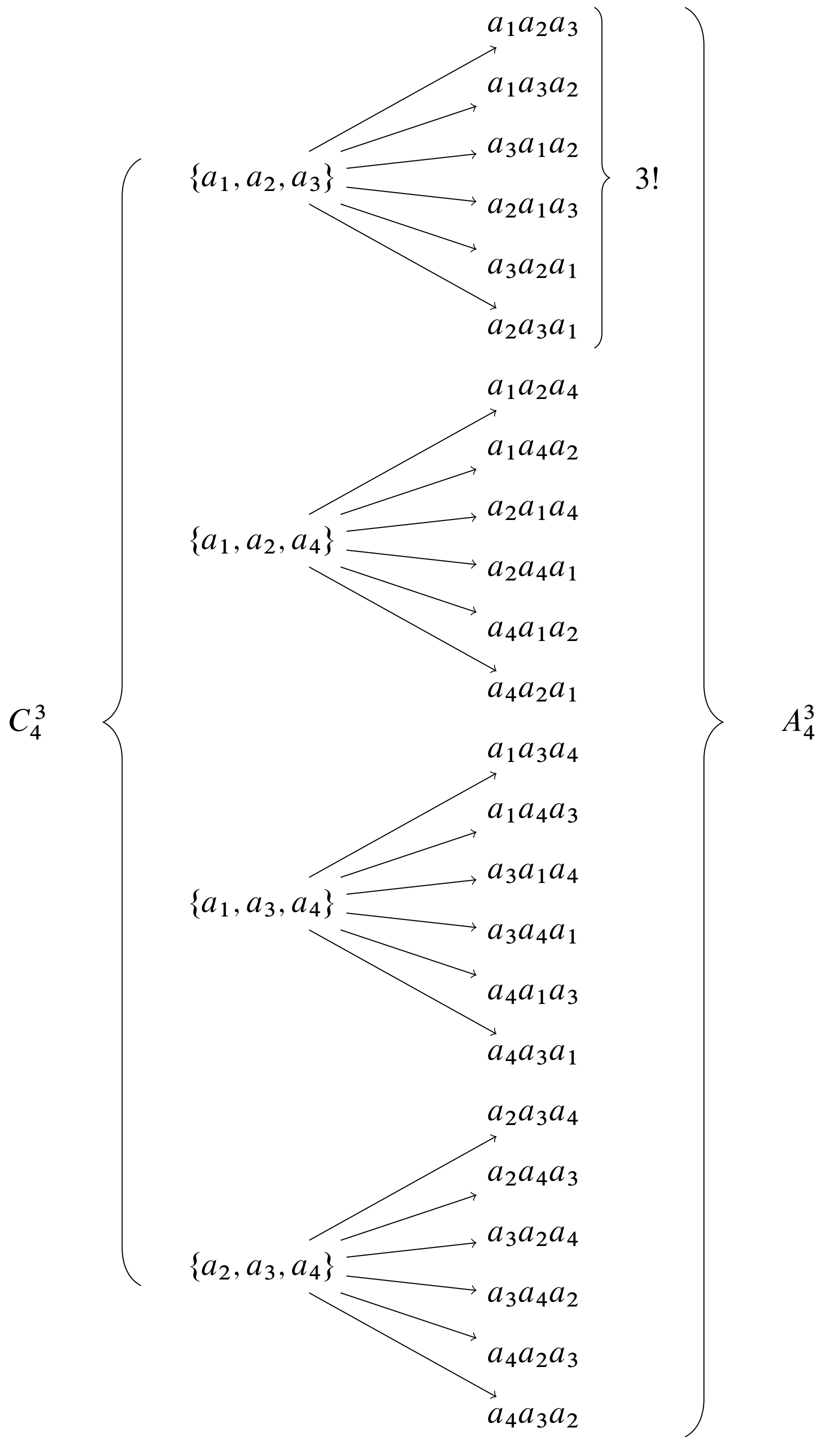
$$A_n^k = \mathcal{A}_n^k = \bigcup_{B \in A, |B| = k} \{\text{žodžiai gauti perstatinėjant } B \text{ elementus}\},$$

todėl

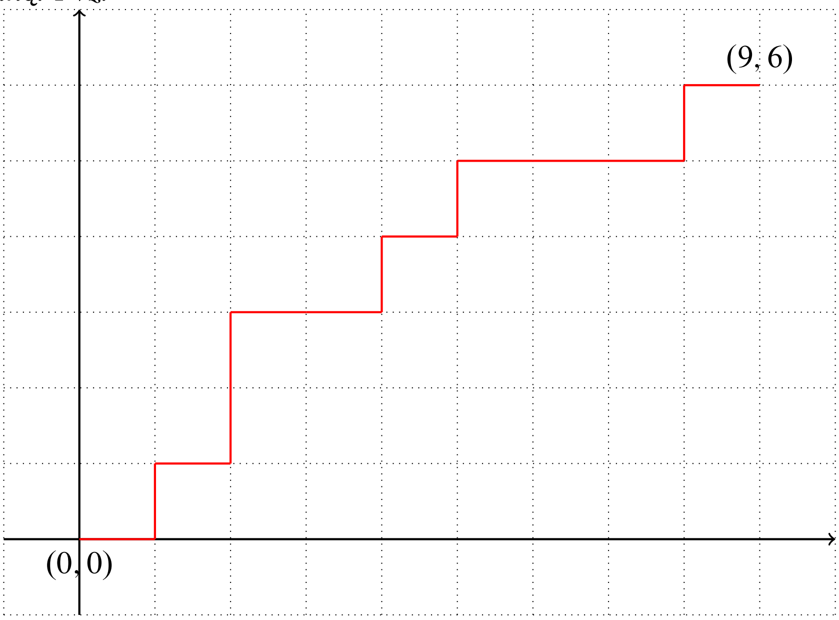
$$|\mathcal{A}_n^k| = \sum_{B \in A, |B| = k} k! = k! C_n^k.$$

□

Pavyzdys 4.4. Formulės $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}$ įrodymą galime pailiustruoti sekančia diagrama



Uždavinys 4.1. *Keliais būdais mes galime iš Dekarto plokštumos pradžios taško* $(0,0)$ *nukeliauti iki taško* $(8,6)$ *per baigtinį skaičių žingsnių, taip kad kiekvieno žingsnio metu mes arba paeiname per vienetą i viršų arba paeiname per vienetą i dešinę. Pvz.*



Nurodymas. Pastebėkime, kad kiekvieną tokią kelionės iš taško $(0,0)$ iki taško $(8,6)$ trajektoriją mes vienareikšmiškai galime užkoduoti kaip seką simbolių V- "žingsnis į viršų" ir D - "žingsnis į dešinę". Pavyzdžiui brėžinyje nurodytą trajektoriją atitiks seka simbolių

$$DVDVVDDVDVDDDVD.$$

□

4.2.1 Derinių savybės

Teorema 4.3 (Paskalio tapatybė)**.**

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Analizinis įrodymas.

$$
\begin{aligned}
C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\frac{n}{(n-k)k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.
\end{aligned}
$$

□

Kombinatorinis įrodymas. Tegu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pasirinkime kokį nors elementą priklausantį A, pavyzdžiui $a_1 \in A$. Tuomet visus aibės A poaibius turinčius po k elementų $\{B|B \subset A, |B| = k\}$ galime sugrupuoti į dvi dalis: poaibius kuriems elementas a_1 priklauso $\{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \in B\}$ ir tuos poaibius kuriems jis nepriklauso $\{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \notin B\}$. Tuo pačiu aibę $\mathcal{C}_n^k$ galime pavaizduoti kaip dviejų aibių sąjungą

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_n^k &= \{B|B \subset A, |B| = k\} \\
&= \{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \in B\} \bigcup \{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \notin B\}
\end{aligned}
$$

Pastebėkime, kad kiekis aibės A poaibių turinčių k elementų, kuriems elementas a_1 priklauso yra lygus skaičiui A poaibių sudarytų iš $k-1$ elementų

$$
\begin{aligned}
\big|\{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \in B\}\big| &= \big|\{B|B \subset A \setminus \{a_1\}, |B| = k-1, \in B\}\big| \\
&= C_{n-1}^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Panašiai gauname, kad kiekis aibės A poaibių iš k elementų, kuriems a_1 nepriklauso yra lygus skaičiui skirtingų aibės $A \setminus a_1$ poaibių turinčių k elementų

$$
\begin{aligned}
\big|\{B|B \subset A, |B| = k, a_1 \notin B\}\big| &= \big|\{B|B \subset A \setminus \{a_1\}, |B| = k, \in B\}\big| \\
&= C_{n-1}^{k}
\end{aligned}
$$

Vadinasi

$$
C_n^k = |\mathcal{C}_n^k| = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}
$$

□

Pavyzdys 4.5. Ką tik išnagrinėtą įrodymą $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$ galime pailiustruoti sekančiu būdu

$$
C_5^3 = \left\{\begin{pmatrix} \{1,2,5\} \\ \{1,3,5\} \\ \{1,4,5\} \\ \{2,3,5\} \\ \{2,4,5\} \\ \{3,4,5\} \\ \{1,2,3\} \\ \{1,2,4\} \\ \{1,3,4\} \\ \{2,3,4\} \end{pmatrix}\right\}
\qquad
\begin{array}{l}
\left\{\begin{pmatrix} \{1,2\} \\ \{1,3\} \\ \{1,4\} \\ \{2,3\} \\ \{2,4\} \\ \{3,4\} \end{pmatrix}\right\} = C_4^2 \\
\left\{\begin{pmatrix} \{1,2,3\} \\ \{1,2,4\} \\ \{1,3,4\} \\ \{2,3,4\} \end{pmatrix}\right\} = C_4^3
\end{array}
$$

Paskalio tapatybė

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

leidžia rekurentiškai apskaičiuoti visus binominius koeficientus.

$$C_0^0$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & C_0^0 & + & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & + & C_2^1 & + & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & + & C_3^1 & + & C_3^2 & + & C_3^3 & \\
C_4^0 & + & C_4^1 & + & C_4^2 & + & C_4^3 & + & C_4^4 \\
\end{array}
$$

$$C_5^0 \qquad C_5^1 \qquad C_5^2 \qquad C_5^3 \qquad C_5^4 \qquad C_5^5$$

Teorema 4.4.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

Įrodymas. Remiasi matematine indukcija bei tuo faktu, jog binominiai koeficientai tenkina Paskalio tapatybę $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. Iš tikrųjų, kai $n = 1$ teoremos teiginys yra teisingas, nes $C_1^0 = C_1^1 = 1$, taigi

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

Tarkime, kad

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

yra teisinga su $n \geqslant 1$.

Padauginę abi puses iš $(a+b)$ gausime

$$\begin{aligned}(a+b)^n(a+b) = {} & C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^{n+1} b^n \\ & + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-2} b^3 + \cdots + C_n^n a b^{n+1}\end{aligned}$$

Iš čia sugrupavę atitinkamus narius gausime tapatybę

$$\begin{aligned}&(a+b)^{n+1} \\ &= \underbrace{C_n^0}_{C_{n+1}^0} a^{n+1} + \underbrace{(C_n^1 + C_n^0)}_{C_{n+1}^1} a^n b + \cdots + \underbrace{(C_n^k + C_n^{k-1})}_{C_{n+1}^k} a^{n+1-k} b^k + \cdots + \underbrace{C_n^n}_{C_{n+1}^{n+1}} b^{n+1}\end{aligned}$$

Todėl

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$$

Remiantis indukcijos aksioma musu teiginys bus teisingas su visais natūriniais skaičiais $n \geqslant 1$.

$\square$

Kombinatorinis įrodymas. Kombinatorinis įrodymas remiasi pastebėjimu, kad reiškinys $(a+b)^n$ yra lygus sumai sandaugų sudarytų iš n dauginamųjų įgyjančių reikšmę a arba b visais įmanomais būdais. Kad tuo įsitikintume panagrinėkime atvejus kai $n = 2, 3, 4$. Trumpam pamirškime, kad daugyba yra komutatyvi $ab = ba$ ir palyginkime narius įeinančius į dviejų aibių Dekarto sandaugą $\{a, b\} \times \{a, b\}$ ir narius įeinančius į sumą gautą sudauginus $(a+b)(a+b)$

$$\{a,b\} \times \{a,b\} = \begin{Bmatrix} (a,a) \\ (a,b) \\ (b,a) \\ (b,b) \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned}(a+b)(a+b) = {} & aa \\ & + ab \\ & + ba \\ & + bb\end{aligned}$$

Kitais žodžiais

$$(a+b)^2 = \sum_{(x_1,x_2)\in\{a,b\}\times\{a,b\}} x_1x_2$$

$$\{a,b\}\times\{a,b\}\times\{a,b\} = \left\{\begin{matrix}(a,a,a)\\(a,a,b)\\(a,b,a)\\(a,b,b)\\(b,a,a)\\(b,a,b)\\(b,b,a)\\(b,b,b)\end{matrix}\right\} \quad (a+b)^3 = \begin{matrix}aa(a+b)\\+\,ab(a+b)\\+\,ba(a+b)\\+\,bb(a+b)\end{matrix} = \begin{matrix}aaa\\+\,aab\\+\,aba\\+\,abb\\+\,baa\\+\,bab\\+\,bba\\+\,bbb\end{matrix}$$

$$(a+b)^3 = \sum_{(x_1,x_2,x_3)\in\{a,b\}\times\{a,b\}\times\{a,b\}} x_1x_2x_3$$

Schematiškai visą procesą galime pavaizduoti sekančiu būdu

$$
\begin{array}{cccc}
(a+b)^1 & (a+b)^2 & (a+b)^3 & (a+b)^4 \\
 & & & \parallel \\
 & & \parallel & \\
 & & & aaaa \\
 & \parallel & & \\
 & & aaa & + \\
\parallel & & & aaab \\
 & aa & + & + \\
 & & & aaba \\
 & & aab & + \\
 & & & aabb \\
a & + & + & + \\
 & & & abaa \\
 & & aba & + \\
 & & & abab \\
 & ab & + & + \\
 & & & abba \\
 & & abb & + \\
 & & & abbb \\
+ & + & + & + \\
 & & & baaa \\
 & & baa & + \\
 & & & baab \\
 & ba & + & + \\
 & & & baba \\
 & & bab & + \\
 & & & babb \\
b & + & + & + \\
 & & & bbaa \\
 & & bba & + \\
 & & & bbab \\
 & bb & + & + \\
 & & & bbba \\
 & & bbb & + \\
 & & & bbbb
\end{array}
$$

Taigi, nesunkiai įsitikiname, kad

$$(a+b)^n = \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\underbrace{\{a,b\}\times\{a,b\}\times\cdots\times\{a,b\}}_{n}} x_1x_2\cdots x_n$$

Vektoriui $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{a,b\}\times\{a,b\}\times\cdots\times\{a,b\}$ turime

$$x_1x_2\cdots x_n = a^k b^{n-k}$$

jeigu lygiai k iš x_j yra lygūs a ir lygiai $n-k$ iš x_j yra lygūs b. Tokių vektorių skaičius yra lygus

$$C_n^k$$

Sugrupave panasius narius gausime

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\underbrace{\{a,b\}\times\{a,b\}\times\cdots\times\{a,b\}}_{n}} x_1x_2\cdots x_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Įrodymas. Pakanka paimti $a = b = 1$ Niutono binomo formulėje.

Kombinatorinis šios tapatybės įrodymas remiasi pastebėjimu, kad tapatybės dešinėje pusėje yra skaičius visų galimų poaibių priklausančių aibei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Kairėje pusėje šis skaičius yra išskaidytas į sumą skaičiaus aibės A poaibių, turinčių j elementų. □

Pavyzdys 4.6. Pailiustruosime ką tik įrodytos teoremos kombinatorinį įrodymą tam atvejui, kai $n = 4$.

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{C}_4^0\left\{\;\{\emptyset\} \longleftrightarrow 0000\right. \\
\mathcal{C}_4^1\left\{\begin{array}{l} \{d\} \longleftrightarrow 0001 \\ \{c\} \longleftrightarrow 0010 \\ \{b\} \longleftrightarrow 0100 \\ \{d\} \longleftrightarrow 1000 \end{array}\right. \\
\mathcal{C}_4^2\left\{\begin{array}{l} \{c,d\} \longleftrightarrow 0011 \\ \{b,d\} \longleftrightarrow 0101 \\ \{b,c\} \longleftrightarrow 0110 \\ \{a,d\} \longleftrightarrow 1001 \\ \{a,c\} \longleftrightarrow 1010 \\ \{a,b\} \longleftrightarrow 1100 \end{array}\right. \\
\mathcal{C}_4^3\left\{\begin{array}{l} \{b,c,d\} \longleftrightarrow 0111 \\ \{a,c,d\} \longleftrightarrow 1011 \\ \{a,b,d\} \longleftrightarrow 1101 \\ \{a,b,c\} \longleftrightarrow 1110 \end{array}\right. \\
\mathcal{C}_4^4\left\{\;\{a,b,c,d\} \longleftrightarrow 1111\right.
\end{array}\right\} 2^4$$

Vadinasi

$$|\mathcal{C}_4^0 \cup \mathcal{C}_4^1 \cup \mathcal{C}_4^2 \cup \mathcal{C}_4^3 \cup \mathcal{C}_4^4| = 2^4$$

Teorema 4.6.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Analizinis įrodymas.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

□

Kombinatorinis įrodymas. Tarkime $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ yra mūsų abėcėlė. Tereikia pastebėti, kad tarp aibių $\mathcal{C}_n^k$ ir $\mathcal{C}_n^{n-k}$ elementų galime nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį. Iš tikrųjų, kiekvienai aibei $B \in \mathcal{C}_n^k$ tai mes galime priskirti jos papildinį

$$A \setminus B \in \mathcal{C}_n^k$$

Be to, atvaizdis

$$B \to A \setminus B$$

yra abipus vienareikšmiškas atvaizdis iš $\mathcal{C}_n^k$ i $\mathcal{C}_n^{n-k}$. O tai reiškia, kad aibės $\mathcal{C}_n^k$ ir $\mathcal{C}_n^{n-k}$ turi vienodą skaičių elementų. □

Pavyzdys 4.7. Jeigu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tai abipus vienareikšmė atitiktis tarp aibių $\mathcal{C}_5^3$ ir $\mathcal{C}_5^2$ bus

$$\mathcal{C}_5^3 = \left\{\begin{matrix} \{1,2,5\} \\ \{1,3,5\} \\ \{1,4,5\} \\ \{2,3,5\} \\ \{2,4,5\} \\ \{3,4,5\} \\ \{1,2,3\} \\ \{1,2,4\} \\ \{1,3,4\} \\ \{2,3,4\} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \{3,4\} \\ \{2,4\} \\ \{2,3\} \\ \{1,4\} \\ \{1,3\} \\ \{1,2\} \\ \{4,5\} \\ \{3,5\} \\ \{2,5\} \\ \{1,5\} \end{matrix}\right\} = \mathcal{C}_5^2$$

Pvz. $\{1, 3, 5\} \longleftrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}$.

4.3 Kartotiniai gretiniai

Klausimas 4.1. *Tarkime, kad mūsų abėcėlė yra $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Kiek skirtingų žodžių, turinčių n raidžių mes galime sudaryti iš abėcėlės A raidžių tokių, kuriuose raidė a_1 kartotųsi p_1 kartą, raidė a_2 kartotųsi p_2 kartus ir t.t. jei $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$?*

Pavyzdys 4.8. Tarkime $A = \{a, b, c\}$ kiek ilgio 5 žodžių (arba *kartotinių gretinių*) mes galime sudaryti iš A raidžių taip, kad a kartotųsi 2 kartus, b kartotųsi 3 kartus, o c kartotųsi 0 kartų? Visi galimi variantai yra

$$aabbb, ababb, abbab, abbba, babba,$$
$$babab, baabb, bbaab, bbbaa, abbba.$$

Taigi iš viso yra 10 galimų variantų.

Sekančios teoremos pagrindinę idėją iliustruosime spręsdami uždavinį pateiktą pavyzdyje.

Pavyzdys 4.9. Kiek yra ilgio 5 kartotinių gretinių, kuriuose

a kartojasi 2 kartus,

b kartojasi 2 kartus,

c kartojasi 1 kartą?

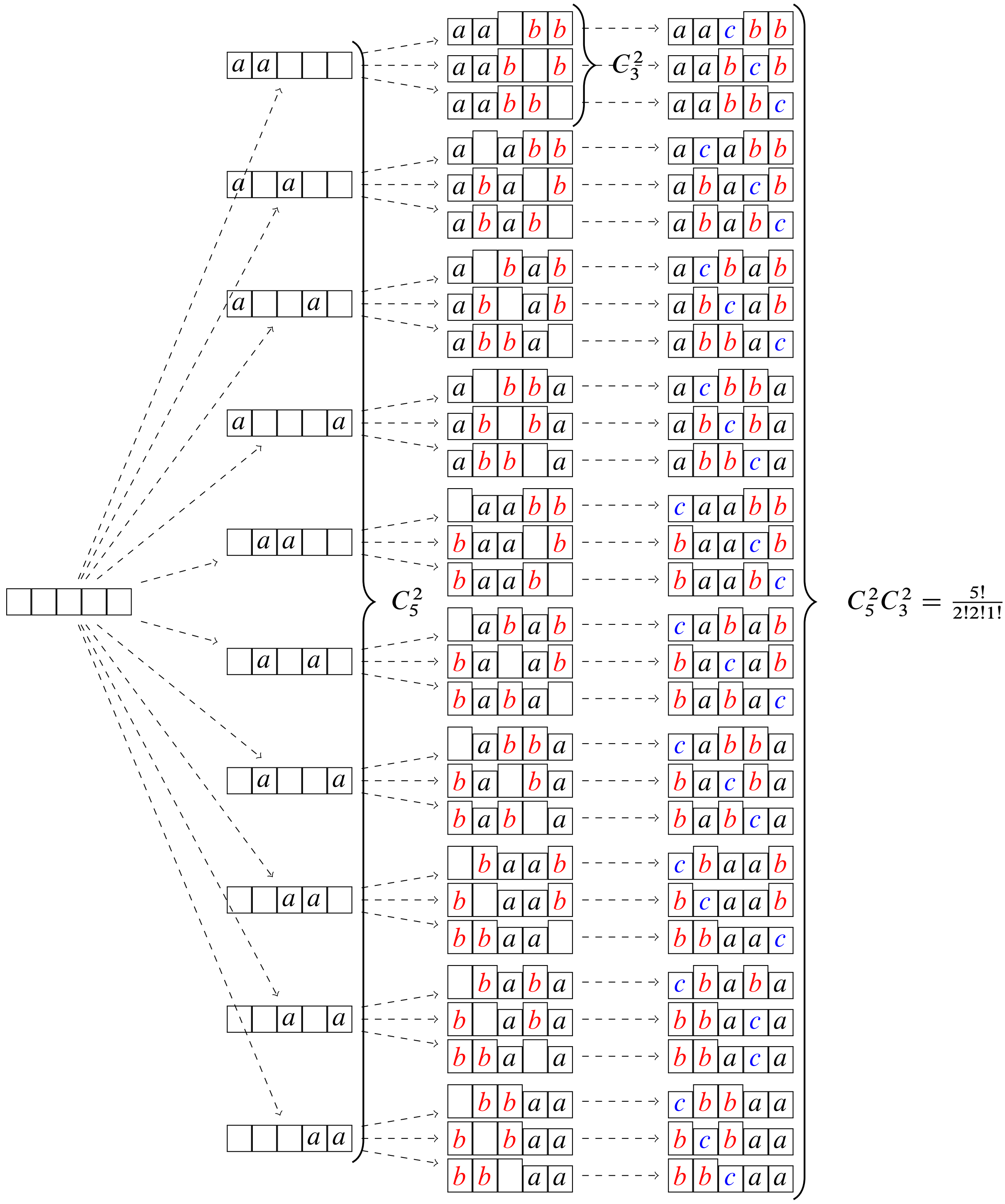
Pabandykime išrašyti visus įmanomus variantus. Mūsų kartotiniai gretinai bus sekos sudarytos iš penkių simbolių. Vadinasi pradžioje galime pradėti nuo eilute išsidėsčiusių 5 tuščių pozicijų

$$\square\square\square\square\square$$

Mūsų kartotiniai gretiniai turi turėti lygiai 2 raides a. Dvi pozicijas iš penkių galimų mes galime parinkti C_5^2 būdų. Į dvejas iš likusių trijų tuščių pozicijų mes galime įrašyti raidę b lygiai C_3^2 būdų. Į likusią laisvą vietą mes įrašome raidę c. Taigi, iš viso bus lygiai

$$C_5^2 C_3^2 = \frac{5!}{2!3!}\frac{3!}{2!1!} = \frac{5!}{2!2!1!}$$

įmanomi gretiniai iš penkių simbolių, kuriuose a kartojasi 2 kartus, b kartojasi 2 kartus, o c įeina tik vieną kartą. Schematiškai visą procesą galime pavaizduoti sekančiu būdu.


C_3^2
C_5^2
$C_5^2 C_3^2 = \frac{5!}{2!2!1!}$

Teorema 4.7. *Iš viso yra*

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$$

skirtingų žodžių turinčių n raidžių iš abėcėlės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kuriuose

> a_1 *kartojasi* p_1 *kartą,*
>
> a_2 *kartojasi* p_2 *kartus,*
>
> ...
>
> a_k *kartojasi* p_k *kartų,*

o dydžiai p_j *tenkina sąlygą*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n.$$

Įrodymas. Konstruodami žodį iš abėcėlės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ raidžių pasižymintį teoremoje išvardintomis savybėmis mes pradedame nuo eilute išrikiuotų n tuščių pozicijų

$$\underbrace{\square\square\cdots\square}_{n}.$$

Raidė a_1 turi kartotis p_1 kartą mūsų žodyje. Tai reiškia, kad iš n galimų pozicijų, p_j pozicijos bus užimtos raide a_1. Is viso bus $C_n^{p_1}$ būdas parinkti pozicijas kurios bus užimtos raide a_1. Iš likusių $n - p_1$ laisvų pozicijų, p_2-jose pozicijose įrašome raidę a_2, ta galime padaryti $C_{n-p_1}^{p_2}$ būdais ir t. t. Taigi iš viso bus

$$\begin{aligned}
&C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} C_{n-p_1-p_2}^{p_3} \cdots C_{n-p_1-p_2-\cdots-p_{k-1}}^{p_k} \\
&= \frac{n!}{p_1!(n-p_1)!} \frac{(n-p_1)!}{p_2!(n-p_1-p_2)!} \frac{(n-p_1-p_2)!}{p_3!(n-p_1-p_2-p_3)!} \cdots \\
&= \frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}
\end{aligned}$$

galimi variantai.

$\square$

Pavyzdys 4.10. Anglų fizikas Robertas Hukas 1660m. suformulavo savo pastebėtą garsųjį dėsnį kaip lotynišką frazę *ut tensio, sic vis* ("koks ištempimas tokia ir jiega") ir užkodavęs ją anagrama

$$ceiiinosssttuv \tag{3}$$

paskelbė mokslinei bendruomenei. Tokiu būdu R. Hukas užsitikrino galimybę įrodyti, paskelbiant anagramos sprendimą, kad jis pirmas pastebėjo šį dėsnį. Iš kitos pusės, jis galėjo ramiai atlikinėti eksperimentus tikrindamas ar jo pastebėtas dėsningumas yra teisingas, jeigu tai nepasitvirtintų, apie anagramą be didelio triukšmo galima būtų pamiršti. Įsitikinęs šio dėsnio teisingumu R. Hukas 1678m. paskelbė anagramos sprendimą

$$ceiiinosssttuv \mapsto uttensiosicvis$$

Tarkime gavę anagramą *ceiiinosssttuv* mes norėtume ją atkoduoti perrinkinėdami visus įmanomus žodžius gautus perstatinėjant šios anagramos raides vietomis. Kiek variantų mums tektų perrinkti? Kitaip tariant kiek žodžių mes galime sudaryti, kuriuose

c kartojasi 1 kartą,

e kartojasi 1 kartą,

i kartojasi 3 kartus,

n kartojasi 1 kartą,

o kartojasi 1 kartą,

s kartojasi 3 kartus,

t kartojasi 2 kartus,

u kartojasi 1 kartą,

u kartojasi 1 kartą,

Atsakymas į šį klausimą seka is Teoremos 4.7, remiantis kuria nesunkiai gauname, kad skirtingų žodžių tenkinančių aukščiau išvardintas sąlygas skaičius yra lygus

$$\frac{14!}{1!1!3!1!1!3!2!1!1!} = 1210809600.$$

Teorema 4.8.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_k=n} \frac{n!}{j_1!j_2!\cdots j_k!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_k^{j_k}$$

Irodymas. Pažymėkime $A = \{a_1, \dots a_k\}$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}} x_1 x_2 \cdots x_n$$

Jeigu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ yra toks, kad tarp $x_1, \ldots x_n$ yra lygiai j_1 tokie, kad $x_j = a_1$, j_2 tokie, kad $x_2 = a_2$ ir t.t. tai

$$x_1 x_2 \cdots x_n = a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_k^{j_k}$$

□

4.4 Deriniai su pasikartojimais

Apibrėžimas 4.5. *Tegu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ yra baigtinė aibė. Tuomet aibės A elementų deriniais su pasikartojimais vadinsime rinkinius sudarytus iš aibės A elementų su galimais pasikartojimais. Kiekvieną derinį su pasikartojimais galime simboliškai pavaizduoti kaip seką*

$$\{\overbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}^{p_1} \overbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}^{p_2}, \ldots \overbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}^{p_k}\}$$

kurioje elementu tarpusavio išsidėstymo tvarka nesvarbi. Mes taip pat susitarsime žymėti derinį su pasikartojimais kaip seką aibės A elementų laužtiniuose skliaustuose

$$[a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, \ldots, a_k^{p_k}],$$

kur $p_j \geqslant 0$ yra sveikas neneigiamas skaičius, nurodantis kiek kartų elementas a_j pasikartoja derinyje.

Kitais žodžiais, aibės A derinį galime įsivaizduoti kaip "aibę" kurios visi elementai priklauso A, tačiau skirtingai nuo įprasto aibes apibrėžimo gali kartotis. Literatūroje anglų kalba tokios "aibės" yra vadinamos *multiset*, skirtingai nuo *set* – įprastos aibės (be pasikartojimu). Toliau tokias "aibes" mes vadinsime *multiaibėmis*.

Pavyzdys 4.11. Aibes $A = \{a, b, c\}$ derinių su pasikartojimais pavyzdžiai gali būti

$$\{a, a, a, a, b, b, b, c\} \quad \text{(arba} \quad [a^4, b^3, c^1]),$$
$$\{a, c, c, c, c\} \quad \text{(arba} \quad [a, b^0, c^4]).$$

Pavyzdys 4.12. Kiek yra aibės $A = \{a, b\}$ derinių su pasikartojimais, kurių elementų skaičius yra lygus 5? Visos įmanomos kombinacijos yra

$$\{a, a, a, a, a\}, \{a, a, a, a, b\}, \{a, a, a, b, b\}, \{a, a, b, b, b\}, \{a, b, b, b, b\}, \{b, b, b, b, b\}$$

Bendru atveju aibės $A = \{a, b\}$ derinių su pasikartojimais $[a^k, b^l]$, turinčių n elementu, bus tiek pat kiek ir lygties

$$k + l = n$$

sveikų neneigiamų sprendinių. T.y. $n + 1$.

Kaip nesunku matyti visus k elementų turinčios aibės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ derinius su pasikartojimais

$$[a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, \ldots, a_k^{p_k}]$$

vienareikšmiškai nusako sveikų neneigiamų skaičių rinkinys $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$. Vadinasi skirtingų aibės A elementų derinių turinčių n elementų bus tiek pat kiek ir lygties

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$$

sprendinių. Pastebėkime, kad bet kurį lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

sprendinį $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mes galime pavaizduoti kaip n vienetų ir $k-1$ nulių seką

$$\overbrace{11\ldots1}^{x_1}0\overbrace{11\ldots1}^{x_2}0\ldots0\overbrace{11\ldots1}^{x_k}$$

kurioje kiekvieną skaičių x_j atitiks iš x_j vienetų sudarytas posekis, o nuliai vaidina atskiriančių ženklų vaidmenį, kurie atskiria skirtingus dydžius x_j atitinkančias vienetų serijas.

Pavyzdys 4.13. Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ sprendinį

$$(7, 3, 0, 5)$$

atitiks 15-kos vienetų ir 3-jų nulių seka

$$111111101110011111.$$

Ir atvirkščiai, seką iš 15-kos vienetų ir 3-jų nulių

$$111110111101110111$$

atitiks sprendinys $(5, 4, 3, 3)$.

Atitiktis

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \longleftrightarrow \overbrace{11\ldots1}^{x_1}0\overbrace{11\ldots1}^{x_2}0\ldots0\overbrace{11\ldots1}^{x_k}$$

tarp sveikų neneigiamų lygties

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \tag{4}$$

sprendinių ir sekų sudarytų iš n vienetų ir $k-1$ nulių yra abipus vienareikšmė. T.y. skirtingas sekas iš n vienetų ir $k-1$ nulių atitiks skirtingi lygties (4) sprendiniai ir atvirkščiai. Vadinasi ši lygtis turės tiek sprendinių kiek yra skirtingų sekų iš n vienetų ir $k-1$ nulių. Tokio tipo sekų skaičius bus lygus

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}.$$

Iš tikrųjų, nulių ir vienetų sekoje iš viso yra $n+k-1$ pozicijų. Pasirenkame iš $n+k-1$ laisvų pozicijų bet kurias $k-1$ pozicijas ir užpildome jas nuliais (tą galima padaryti C_{n+k-1}^{k-1} būdų), o likusiais užpildome vienetais.

Taigi įrodėme teoremą.

Teorema 4.9. *Lygtis*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

turi

$$C_{n+k-1}^{n}$$

sveikus neneigiamus sprendinius.

Išvada 4.10. *Skaičius skirtingų n elementų turinčių derinių su pasikartojimais, sudarytų iš k elementų turinčios aibės yra lygus*

$$C_{n+k-1}^{n}.$$

Pavyzdys 4.14 ([5]). Konditerijos parduotuvėje yra 4 rūšių pyragaičių: napoleonų, eklerų, smėlinių ir sluoksninių. Keliais būdais galima nusipirkti 7 pyragaičius?

Sprendimas. Turime suskaičiuoti kiek sprendinių turi lygtis

$$x_{napoleonai} + x_{eklerai} + x_{smeliniai} + x_{sluoksniniai} = 7$$

Pagal musų teoremą ši lygtis turi

$$C_{7+4-1}^{7} = C_{10}^{7} = 120$$

sprendinių. Vadinasi tiek pat yra būdų nusipirkti 7 pyragaičius. □

Pavyzdys 4.15. Kiek sveikų sprendinių turi lygtis

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

kurie tenkina sąlygas $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 5$ ir $x_3 \geqslant 0$?

Proof. Padarykime kintamųjų pakeitimą

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 3 \\ x_2 = y_2 + 5 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Įstatę šias reikšmes i mūsų lygtį mes gausime

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + 3 + y_2 + 5 + y_3 = 15$$

vadinasi dydžiai y_j tenkins lygtį

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7$$

ir $y_j \geqslant 0$. O ši lygtis turės lygiai

$$C_{3+7-1}^{7} = C_9^7 = C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

sprendinius. □

5 Rėčio principas

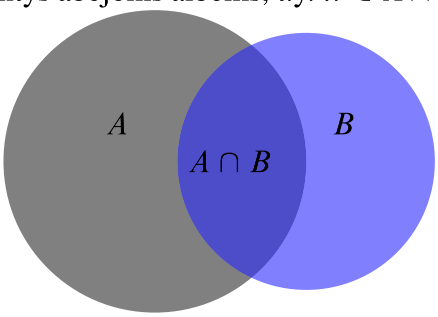
5.1 Rėčio tapatybė

5.1.1 Dviejų aibių sąjungos atvejis

Jeigu A – baigtinė aibė, tuomet šios aibės elementų skaičių žymėsime kaip $|A|$. Nesunkiai matome, kad dviejų baigtinių aibių sąjungos elementų skaičių mes galime paskaičiuoti pasinaudodami formule

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \tag{5}$$

kurios dešinėje pusėje mes atėmėme narį $|A \cap B|$ iš sumos $|A| + |B|$ kadangi elementai x priklausantys abejoms aibėms, t.y. $x \in A \cap B$ bus du kartus suskaičiuoti



sumoje $|A| + |B|$.

5.1.2 Trijų aibių sąjungos atvejis

Apskaičiuoti trijų aibių sąjungai priklausančių elementų skaičių mes galime pasinaudodami dviejų aibių sąjungos skaičiaus formule (5), jeigu į trijų aibių A, B ir C sąjungą žiūrėsime kaip į dviejų aibių A ir $B \cup C$ sąjungą

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= \big|A \cup (B \cup C)\big| \\ &= |A| + |B \cup C| - \big|A \cap (B \cup C)\big| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \big|A \cap (B \cup C)\big|,\end{aligned}$$

kadangi

$$\begin{aligned}\big|A \cap (B \cup C)\big| &= \big|(A \cap B) \cup (A \cap C)\big| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| - \big|(A \cap B) \cap (A \cap C)\big| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|,\end{aligned}$$

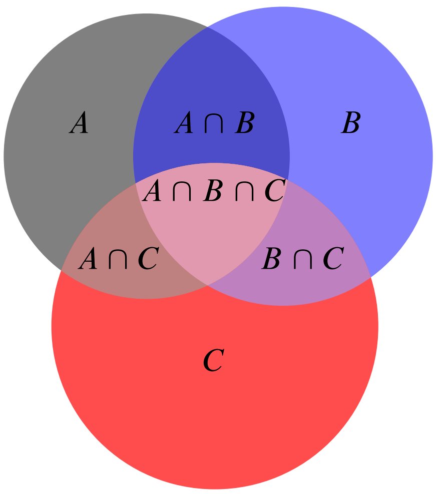
tai galutinai gauname

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Taigi, įrodėme teoremą.

Teorema 5.1. *Bet kurioms trims baigtinėms aibėms A, B ir C yra teisinga tapatybė*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



5.1.3 Rėčio principo bendrasis atvejis

Taikydami matematines indukcijos metodą galime apibendrinti ką tik gautą rezultatą bet kokio skaičiaus aibių sąjungai.

Teorema 5.2.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}| \quad (6)$$

Kombinatorinis įrodymas. Norėdami įsitikinti teoremos tapatybės (6) teisingumu patikrinkime, kad kiekvienas $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ bus suskaičiuotas lygiai vieną kartą šios lygybės (6) dešinėje pusėje.

Tarkime, kad x priklauso lygiai r aibių iš mūsų n aibių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rinkinio. Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad $x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r$ ir $x \notin A_{r+1} \cup A_{r+2} \cup \cdots \cup A_n$. Tuomet, kaip nesunku matyti, sumoje

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}|$$

elementas x priklausys tik toms aibių sankirtoms

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}$$

kur $j_1, j_2, \ldots, j_m \leqslant r$. Vadinasi elementas x bus sumoje

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}|$$

suskaičiuotas lygiai

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant r} 1 = C_r^m$$

kartų. Vadinasi sumoje

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}|$$

elementas $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ bus suskaičiuotas lygiai

$$\sum_{m=1}^{r} (-1)^{m-1} C_r^m = 1 - \sum_{m=0}^{r} (-1)^{m-1} C_r^m = 1 + (1-1)^n = 1$$

kartų. Teorema įrodyta. □

Panagrinėsime dar vieną rėčio nelygybės įrodymą taip vadinamu *indikatorių metodu*. Tarkime aibė A yra kažkokios didesnės aibės Ω poaibis $A \subset \Omega$. Tuomet poaibį A galime užkoduoti kaip funkciją apibrėžtą aibėje Ω ir su kiekvienų šios aibės elementui įgyjančią dvi reikšmes 1 arba 0 priklausomai nuo to ar elementas priklauso aibei A ar ne

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x \in A \\ 0, & \text{jei} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Tokia funkcija χ_A yra vadinama poaibio A *indikatoriumi* aibėje Ω. Jeigu $A \subset \Omega$ tuomet tokios aibės indikatoriaus reikšmių $\chi_A(x)$ suma pagal visus $x \in \Omega$ bus lygi aibės A elementų skaičiui

$$\sum_{x \in \Omega} \chi_A(x) = |A|.$$

Tarkime turime tris aibes A_1, A_2, A_3 priklausančias aibei Ω. Panagrinėkime funkciją $\phi(x)$ apibrėžtą kaip sandauga

$$\phi(x) = \big(1 - \chi_{A_1}(x)\big)\big(1 - \chi_{A_2}(x)\big)\big(1 - \chi_{A_3}(x)\big).$$

Jeigu x priklausys bent vienai iš aibių A_1, A_2, A_3 tuomet bent vienas dauginamasis $1 - \chi_{A_j}(x)$ funkcijos $\phi(x)$ apibrėžime bus lygus nuliui, ir tuo pačiu nuliui bus lygi visa funkcija. Jeigu x nepriklausys nei vienai iš aibių A_1, A_2, A_3 tai šių aibių indikatoriai bus lygūs nuliui $\chi_{A_1}(x) = \chi_{A_2}(x) = \chi_{A_3}(x) = 0$ ir tuo pačiu $\phi(x) = 1$. Taigi $\phi(x)$ įgys dvi reikšmes

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ 1, & \text{jei} \quad x \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3. \end{cases}$$

Pagal indikatoriaus apibrėžimą funkcija $\phi(x)$ sutaps su aibių A_1, A_2, A_3 sąjungos papildinio $\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ aibėje Ω indikatoriumi

$$\phi(x) = \chi_{\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)}(x).$$

Vadinasi

$$\sum_{x \in \Omega} \phi(x) = |\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Iš kitos pusės šią sumą mes galime apskaičiuoti išskleidę sandaugą funkcijos $\phi(x)$ apibrėžime

$$\sum_{x \in \Omega} \phi(x) = \sum_{x \in \Omega} \big(1 - \chi_{A_1}(x) - \chi_{A_2}(x) - \chi_{A_3}(x) \\ + \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x) + \chi_{A_1}(x)\chi_{A_3}(x) + \chi_{A_2}(x)\chi_{A_3}(x) - \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\chi_{A_3}(x)\big)$$

Kadangi dviejų aibių A ir B indikatorių sandauga $\chi_A(x)\chi_B(x)$ yra lygi vienetui tada ir tik tada, kai x priklauso abiems aibėms $x \in A \cap B$ tai $\chi_A(x)\chi_B = \chi_{A\cap B}(x)$ ir

$$\sum_{x\in\Omega} \chi_{A_i}(x)\chi_{A_j}(x) = \sum_{x\in\Omega} \chi_{A_i\cap A_j}(x) = |A_i \cap A_j|$$

su visais $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. Analogiškai gauname

$$\sum_{x\in\Omega} \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\chi_{A_3}(x) = \sum_{x\in\Omega} \chi_{A_1\cap A_2\cap A_3}(x) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Vadinasi

$$\sum_{x\in\Omega} \phi(x) = |X| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3| - |A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

Iš kitos pusės

$$\sum_{x\in\Omega} \phi(x) = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

Sulyginę abi sumos $\sum_{x\in\Omega} \phi(x)$ išraiškas gausime

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

O tai yra ne kas kita kaip rėčio tapatybė trijų aibių atvejui. Visiškai analogiškai yra įrodoma rėčio tapatybė indikatorių metodu ir bendru atveju.

Įrodymas indikatorių metodu. Tegu $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ tuomet aibėje Ω apibrėžkime funkciją

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^{n} \bigl(1 - \chi_{A_j}(x)\bigr).$$

Ši funkcija bus lygi vienetui jeigu x nepriklausys nei vienai iš aibių $A_1, A_2, \dots, A_n$ ir nuliui priešingu atveju. Vadinasi ši funkcija bus aibės $\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ indikatorius

$$\phi(x) = \chi_{\Omega\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)}(x).$$

Taigi

$$\sum_{x\in\Omega} \phi(x) = \sum_{x\in\Omega} |\chi_{\Omega\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)}(x)| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \qquad (7)$$

Iš kitos pusės išskleidę sandaugą funkcijos $\phi(x)$ apibrėžime gausime

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^{n} \bigl(1 - \chi_{A_j}(x)\bigr) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n} \chi_{A_{j_1}}(x)\chi_{A_{j_2}}(x)\cdots\chi_{A_{j_k}}(x)$$

Susumavę pagal $x \in \Omega$ abi šios tapatybės puses gausime

$$\sum_{x\in\Omega} \phi(x) = |\Omega| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} \sum_{x\in\Omega} \chi_{A_{j_1}}(x)\chi_{A_{j_2}}(x)\cdots\chi_{A_{j_k}}(x)$$

Kadangi aibių indikatorių sandauga $\chi_{A_{j_1}}(x)\chi_{A_{j_2}}(x)\cdots\chi_{A_{j_k}}(x)$ yra lygi atitinkamų aibių sankirtos indikatoriui $\chi_{A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}}$, tai

$$\sum_{x\in\Omega} \chi_{A_{j_1}}(x)\chi_{A_{j_2}}(x)\cdots\chi_{A_{j_k}}(x) = \sum_{x\in\Omega} \chi_{A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}} = |A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}|.$$

Vadinasi

$$\sum_{x\in\Omega} \phi(x) = |\Omega| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} |A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}|.$$

Sulyginę šios sumos $\sum_{x\in\Omega}\phi(x)$ išraiškos dešiniąją pusę su anksčiau gautos šios sumos išraiškos (7) dešiniąja puse gausime

$$|\Omega|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = |\Omega|+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} |A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k}|$$

Atėmę iš abiejų šios lygybės pusių dydį $|\Omega|$ ir padauginę abi puses iš -1 gausime rėčio tapatybę n aibių sąjungos atvejui.

Teorema įrodyta.

□

Sprendžiant uždavinius dažnai naudojama rėčio tapatybė suformuluota aibių papildinių sankirtoms.

Teorema 5.3. *Tegu $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ tuomet jeigu žymėsime $\overline{A} = X \setminus A$ tai*

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| = |X| + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n} |A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_m}|$$

Įrodymas. Kadangi

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n = \overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n} = X\setminus|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

tai

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| = |X| - |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

□

5.2 Rėčio principo taikymai

5.2.1 Netvarkų uždavinys

Uždavinys 5.1 (Skrybėlių problema)**.** *n vyrų atėję į restoraną rūbinėje palieka savo skrybėles. Išeidami iš restorano vyrai iš išsiblaškiusio rūbininko atgauna skrybėles atsitiktine tvarka. Kokia tikimybė, kad nei vienas vyras išeidamas neatgaus skrybėlės su kuria buvo atėjęs į restoraną?*

Visu pirma pastebėkime, kad skrybėlių atgavimo tvarką mes galime pavaizduoti kaip keitinį. Sunumeruokime vyrus ir jų skrybėles nuo 1 iki n. Viršutinėje keitinio eilutėje surašome visų vyrų numerius, o apatinėje atitinkamai surašome numerius skrybėlių, kurias vyrai gavo išeidami iš restorano.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

Pavyzdys 5.1. Tarkime į restoraną atėjo 5 vyrai. Atėję vyrai kiekvienas turėjo savo skrybėlę. Taigi pradinis vyru-skrybėlių išsidėstymas buvo toks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Išeinant iš restorano pirmas vyras gavo 5-jo vyro skrybėlę, antras vyras gavo 3-jo vyro skrybėlę, trečias vyras gavo 1-jo vyro skrybėlę, ketvirtas gavo savo skrybėlę, o penktas gavo 2-jo vyro skrybėlę. Taigi, skrybėlių-vyrų išsidėstymą nusakantis keitinys, vyrams paliekant restoraną bus toks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uždavinys 5.2 (Netvarkų uždavinys keitinių kalba)**.** *Kiek iš viso yra n-ojo laipsnio keitinių*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

tokių, kad $s_j \neq j$ su visais $1 \leqslant j \leqslant n$? Tokius keitinius toliau vadinsime netvarkingais.

Pažymėkime kaip S_n aibę visų n-ojo laipsnio keitinių. Visi n-ojo laipsnio keitiniai yra gaunami perstatinėjant apatinėje eilutėje esančius n skaitmenis visais įmanomais būdas, taigi $|S_n| = n!$.

Panagrinėkime n aibės S_n poaibių $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S_n$, kur $A_j \subset S_n$ yra aibė visų n-ojo laipsnio keitinių, kuriuose $s_j = j$ (j-asis vyras atgauna savo skrybėlę). Mus domins tie aibės S_n keitiniai, kurie nepriklauso nei vienai iš aibių A_j kur $1 \leqslant j \leqslant n$ t.y. tie keitiniai, kurie priklausys aibių A_j sąjungos papildiniui

$$S_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n).$$

Prisiminę rėčio formulę mes gausime, jog šios aibės elementų skaičius bus lygus

$$\begin{aligned} &\big|S_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\big| \\ &\quad = |S_n| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &\quad = n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}|. \end{aligned}$$

Aibė A_k yra aibė keitinių, tenkinančių sąlygą $s_k = k$, kitaip tariant k -oje pozicijoje apatinėje eilutėje tokiame keitinyje būtinai turi stovėti k, o likę $n-1$ apatines eilutes skaitmenys $\{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ gali būti išsidėstę bet kaip

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{k-1} & k & s_{k+1} & \cdots & s_n \end{pmatrix}.$$

Skaičius tokio tipo keitinių bus lygus skaičiui būdų kuriais galime išdėstyti $n-1$ skaitmenis į likusias $n-1$ apatinės eilutės pozicijas. Taigi

$$|A_k| = (n-1)!$$

su visais $1 \leqslant k \leqslant n$.

Analogiškai, aibei $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}$ priklausys visi keitiniai, kurių apatinės eilutės j_1-oje pozicijoje stovės j_1, j_2-oje pozicijoje stovės j_2 ir t.t j_m-oje pozicijoje stovės j_m, o visi likę $n-m$ skaičiai $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ galės būti išsidėstę bet kaip. Vadinasi aibės $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}$ elementų skaičius bus lygus kiekiui skirtingų būdų kuriais galime išdėstyti $n-m$ objektus į $n-m$ tuščias pozicijas, t.y.

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}| = (n-m)!$$

Taigi

$$\begin{aligned} &\big|S_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\big| \\ &\quad = n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}| \\ &\quad = n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} (n-m)! \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad suma

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} 1$$

yra lygi skaičiui skirtingu būdų kuriais galima pasirinkti m skaičių turinčią aibę $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$ iš n elementų turinčios aibės $\{1, 2, \cdots n\}$. Vadinasi

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} 1 = C_n^m$$

Todėl

$$\begin{aligned} &\big|S_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\big| \\ &= n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} (n-m)! \\ &= n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (n-m)! C_n^m \end{aligned}$$

Prisiminę formulę

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

galime dar supaprastinti prieš tai buvusį reiškinį

$$\begin{aligned} &\big|S_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)\big| \\ &= n! + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (n-m)! C_n^m \\ &= n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Taigi, įrodėme teoremą

Teorema 5.4. *Netvarkingųjų keitinių, priklausančių S_n kiekis yra lygus*

$$D_n := n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Dabar galime atsakyti į klausimą kokia yra tikimybė, kad nei vienas vyras išeidamas iš restorano negaus savo skrybėlės.

Išvada 5.5. *Tikimybė, kad visi iš restorano išvykstantys vyrai grįš namo su svetimomis skrybėlėmis yra lygi*

$$\frac{D_n}{|S_n|} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = e^{-1} + o(1/n!).$$

Kitaip tariant tikimybe labai greitai artėja prie $e^{-1} = 0.3678794412$, o tai reiškia, kad maždaug $36.78\ldots$ procentų atvejų nei vienas vyras negrįš namo su savo skrybėle.

5.2.2 Siurjekcijų skaičius

Klausimas 5.1. *Tarkime $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ ir $B = \{1, 2, \ldots, m\}$ yra baigtinės aibės turinčios po n ir m elementų atitinkamai. Kiek yra skirtingų siurjekcijų $f : A \to B$?*

Prisiminkime, kad kiekvieną atvaizdį $f : A \to B$ mes galime pavaizduoti kaip lentelę

1	2	…	n
f(1)	f(2)	…	f(n)

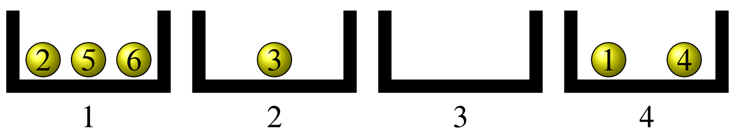
kur $f(j) \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Taigi iš viso bus m^n skirtingų atvaizdžių $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Klausimas į kuri turime rasti atsakymą yra kiek iš tų m^n atvaizdžių bus siurjekcijos arba kitaip tariant bus tokie, kad jų atitinkamose lentelėse apatinėje eilutėje bus visi skaičiai $\{1, 2, \ldots, m\}$ bent po vieną kartą?

Kiekvieną atvaizdį $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ galime interpretuoti kaip n sunumeruotų nuo 1 iki n rutulių išdėstymą į m sunumeruotų nuo 1 iki m dėžių, jeigu laikysime, kad $f(j)$ yra lygi numeriui dėžės į kurią pateko j-asis rutulys.

Pavyzdys 5.2. Funkciją $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ apibrėžtą lentelės pagalba

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	1	2	4	1	1

atitiks 6 rutulių išdėstymas į 4-ias dėžes



Klausimas 5.2 (Kita siurjekcijų uždavinio formuluotė). *Keliais būdais galima išdėstyti n sunumeruotų rutulių į m sunumeruotų dėžių, taip kad neliktų tuščių dėžių?*

Teorema 5.6. *Siurjekcijų $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ skaičius yra lygus*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n$$

Įrodymas. Tegu X bus aibė visų atvaizdžių $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Kaip jau žinome jos elementu skaičius yra lygus $|X| = m^n$.

Pažymėkime kaip A_j aibę visų atvaizdžių $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ kurie neįgyja reikšmės j, t.y. tokių, kad $f(k) \neq j$ su visais $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Aibė

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

bus sudaryta iš tokių funkcijų f, kurios neįgis bent vienos reikšmės iš $1, 2, \ldots, m$. Vadinasi šios aibės papildinys

$$X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)$$

bus aibė funkcijų f tokių, kad bet kuriam $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ egzistuos bent vienas $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kad $k = f(j)$. Kitaip tariant tai bus aibė visų siurjekcijų. Jos elementų skaičiaus ieškome pasinaudodami rėčio principu

$$\begin{aligned} &\big|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)\big| \\ &\quad = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| \\ &\quad = m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant m} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| \end{aligned}$$

Apskaičiuosime kam bus lygus dydis $|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}|$ po sumos ženklu. Pastebėkime, kad aibė

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}$$

yra aibė visų atvaizdžių iš n elementų turinčios aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ į $m - k$ elementu turinčia aibę $\{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. Vadinasi

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| = (m-k)^n$$

Vadinasi siurjekcijų $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ skaičius bus lygus

$$\begin{aligned}
&\big|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)\big| \\
&= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant m} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| \\
&= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant m} (m-k)^n \\
&= m^n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n
\end{aligned}$$

Teorema įrodyta. □

Apibrėžimas 5.1 (Stirlingo antrosios rūšies skaičiai)**.** *Skaičius visų galimų būdų kuriais galime suskaidyti aibę* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *į* k *netuščių ir nesikertančių aibių sąjungą yra vadinamas antros rūšies Stirlingo skaičiumi ir žymimas* $S(n, k)$.

Pavyzdys 5.3. Aibe $\{1, 2, 3, 4\}$ galima išskaidyti į 3-jų netuščių ir nesikertančių aibių sąjungą šešiais būdais

$$\begin{gathered}
\{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} \\
\{1\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\} \\
\{1, 4\} \cup \{2\} \cup \{3\} \\
\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \\
\{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\} \\
\{1, 3\} \cup \{2\} \cup \{4\}
\end{gathered}$$

Taigi $S(4, 3) = 6$

Nesunku suvokti, kad $S(n, k)$ yra lygus skaičiui skirtingų būdų kuriais galime išdėstyti n sunumeruotų rutulių į k *nesunumeruotų* dėžių kurių tarpusavio išsidėstymo tvarka yra nesvarbi.

Pastaba 5.7. *Pastebėkime, kad yra tik vienas būdas išskaidyti aibę* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *į* n *netuščių aibių sąjungą*

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$$

Taigi, $S(n, n) = 1$ *su visais* $n = 1, 2, \ldots$. *Analogiškai yra tik vienas būdas išdėstyti* n *sunumeruotų rutulių į vieną dėžę, vadinasi* $S(n, 1) = 1$.

Iš kiekvieno tokio rutulių išdėstymo, perstatinėdami k dėžių visais įmanomais būdais mes galime gauti $k!$ skirtingų rutulių išdėstymų į k *sunumeruotų* dėžių. Iš čia gauname teoremą.

Teorema 5.8.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

5.2.3 Eulerio funkcija

Apibrėžimas 5.2. *Eulerio funkcija $\phi(n)$ yra lygi kiekiui natūraliųjų skaičių m intervale $1 \leqslant m \leqslant n$, kurie yra tarpusavyje pirminiai su n.*

Teorema 5.9. *Jeigu natūraliojo skaičiaus n išskaidymas į pirminių skaičių sandauga turi pavidalą*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$$

tai

$$\phi(n) = n\prod_{j=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

Įrodymas. Skaičius m bus tarpusavyje pirminis su skaičiumi $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$ tada ir tik tada kai m nesidalins iš $p_1, p_2, \ldots, p_l$.

Pažymėkime kaip A_j aibę natūraliųjų skaičių intervale $[1,n]$, kurie dalijasi iš p_j. Tuomet

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l$$

bus aibė natūraliųjų skaičių intervale $[1,n]$ kurie dalinsis iš bent vieno iš pirminiu $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Vadinasi aibė

$$\{1,2,\ldots n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l)$$

bus aibė visų natūraliųjų skaičių intervale $[1,n]$ kurie bus tarpusavyje pirminiai su n. Vadinasi

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \left|\{1,2,\ldots n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l)\right| \\ &= n + \sum_{m=1}^{l}(-1)^m \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant l} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}|\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}| = \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_m}},$$

todėl

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n + \sum_{m=1}^{l} (-1)^m \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant l} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_m}} \\ &= n \prod_{j=1}^{l} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)\end{aligned}$$

Teorema įrodyta. □

Uždavinys 5.3. *Kiek yra natūrinių skaičių tarp* 1 *ir* 4851 *kurie neturi bendrų daliklių su* 4851*?*

Sprendimas. Ieškomas dydis yra lygus $\phi(4851)$. Išskaidę skaičių 4851 pirminiais dauginamaisiais gauname

$$4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

vadinasi

$$\phi(4851) = 4851 \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 2520.$$

□

5.3 Tiesinių lygčių sveikaskaičiai sprendiniai

Uždavinys 5.4. *Kiek sveikų neneigiamų sprendinių turi lygtis*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \tag{8}$$

kurie tenkintų papildomas sąlygas

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 < 3 \\ 0 \leqslant x_2 < 10 \\ 0 \leqslant x_3 < 12 \end{cases} \tag{9}$$

Sprendimas. Pažymėkime kaip Ω aibę sveikų neneigiamų lygties (8) sprendinių

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x_1 + x_2 + x_3 = 20, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$$

Taip pat pažymėkime kaip A_1 aibe lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ sprendinių kurių 1-oji koordinatė x_1 tenkina sąlygą $x_1 \geqslant 3$, kitaip tariant

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | x_1 \geqslant 3\}$$

Analogiškai apibrėžiame ir A_2 ir A_3 kaip aibes sprendinių, kuriu 2-oji ir 3-ioji koordinates tenkina apribojimus $x_2 \geqslant 10$ ir $x_3 \geqslant 12$ atitinkamai, t.y

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | x_2 \geqslant 10\}$$
$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | x_3 \geqslant 12\}$$

Iš visų lygties $x_1+x_2+x_3 = 20$ sprendinių aibės Ω atmetę tuos sprendinius kurių bent viena is koordinačių x_1, x_2 ir x_3 yra ne mažesnė už 3, 10 ir 12 atitinkamai, gausime aibę visų sprendinių tenkinančių (9) apribojimus

$$\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

Vadinasi mus dominantis skaičius sprendinių bus lygus

$$\begin{aligned}\big|\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big| &= |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

Kaip jau žinome

$$|\Omega| = C^{20}_{20+3-1} = C^{20}_{22}$$

Analogiškai $|A_1|$ skaičius lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ sprendinių tokių kad $x_1 \geqslant 3$ yra lygus skaičiui sveikų neneigiamų lygties $y_1+y_2+y_3 = 20-3$ sprendinių, taigi $|A_1| = C^{20-3}_{(20-3)+3-1} = C^{17}_{19}$. Analogiškai turime, kad $|A_2| = C^{20-10}_{(20-10)+3-1} = C^{10}_{12}$ ir $|A_2| = C^{20-12}_{(20-12)+3-1} = C^{8}_{10}$.

Skaičius $|A_1 \cap A_2|$ sveikų neneigiamų lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ sprendinių, tokių, kad $x_1 \geqslant 3$ ir $x_3 \geqslant 10$ yra lygus skaičiui sveikų neneigiamų lygties $y_1 + y_2 + y_3 = 20 - 3 - 10$ sprendiniu, taigi $|A_1 \cap A_2| = C^{20-3-10}_{(20-3-10)+3-1} = C^7_9$. Analogiškai turime, kad $|A_1 \cap A_3| = C^{20-3-12}_{(20-3-12)+3-1} = C^5_7$.

Jeigu vektorius su sveikom neneigiamom komponentėm (x_1, x_2, x_3) yra toks, kad $x_2 \geqslant 10$ ir $x_3 \geqslant 12$ tuomet $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 22$, o tai reiškia, kad vektoriai tenkinantys tokius apribojimus nebus lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ sprendiniais. Vadinasi

$$|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

Surinkę gautus įverčius ir sustatę juos į rėčio formulę gauname uždavinio atsakymą

$$\big|\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big| = C^{20}_{22} - C^{17}_{19} - C^{10}_{12} - C^{8}_{10} + C^7_9 + C^5_7.$$

□

6 Rekurentinis sąryšis Stirlingo skaičiams

Ankstesniame skyriuje mes jau įrodėme formulę

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^n$$

Tarkime, mes turime išrašę visus galimus aibės $\{1,2,\ldots,n\}$ išskaidymus. Anksčiau mes jau buvome išvedę formulę $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ iš kombinatorinių samprotavimų parodę, kad derinių aibę $\mathcal{C}_n^k$ mes galime sukonstruoti panaudojant aibių $\mathcal{C}_{n-1}^k$ ir $\mathcal{C}_{n-1}^{k-1}$ elementus. Pabandysime pasinaudodami panašia idėja sukonstruoti aibę $\mathcal{S}_n^k$ panaudojant aibes $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ ir $\mathcal{S}_{n-1}^k$. Paimkime bet kokį aibės $\{1,2,\ldots,n\}$ skaidinį į k nesikertančių aibių ir išbraukime iš jo skaičių n. Atlikę šią operaciją gausime aibės $\{1,2,\ldots,n-1\}$ skaidinį. Toliau bus galimi du variantai.

1. Jeigu skaičius n buvo skaidinio aibėje sudarytoje is vieno elemento, tai ji ismetus gausime $\{1,2,\ldots,n-1\}$ aibes skaidinį į $k-1$ ne tuščių aibių. Pvz. iš penkių skaičių aibės $\{1,2,3,4,5\}$ skaidinio

   $$\{1,4\}\cup\{2,3\}\cup\{5\}$$

   į tris netuščias aibes (t.y. skaidinio priklausančio S_5^3) išmetę skaičių 5 gausime keturių elementų aibės skaidinį į dvi netuščias aibes

   $$\{1,4\}\cup\{2,3\}$$

   t.y S_4^2 elementą.

2. Jeigu skaičius n buvo skaidinio aibėje sudarytoje iš daugiau nei vieno elemento, tai jį išmetus skaidinio aibių skaičius nepakis ir gausime $\{1,2,\ldots,n-1\}$ aibės skaidinį į k ne tuščių aibių. Pvz. iš penkių skaičių aibės skaidinio

   $$\{1\}\cup\{2,5\}\cup\{3,4\}$$

   i tris netuščias aibes(t.y. skaidinio priklausančio S_5^3) išmetę skaičių 5 gausime keturių elementų aibės skaidinį į tris netuščias aibes

   $$\{1\}\cup\{2\}\cup\{3,4\}$$

   t.y S_4^3 elementą.

Taigi išbraukę iš $\mathcal{S}_n^k$ skaidinio skaičių n gausime $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ skaidinį arba skaidinį priklausantį $\mathcal{S}_{n-1}^k$.

Galimas ir atvirkščias procesas. Paėmę bet kokį $n-1$ elementų turinčios aibės $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ skaidinį į $k-1$ netuščias aibes t.y. $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ ir prijungę prie jo aibę sudarytą iš vieno elemento $\{n\}$ mes gausime aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ skaidinį į k netuščių aibių, t.y. $\mathcal{S}_n^k$ elementą. Pvz. prie skaidinio

$$\{1, 2, 4\} \cup \{3\}$$

priklausančio $\mathcal{S}_4^2$ prijungę aibę turinčią vieną elementą $\{5\}$ mes gausime skaidinį

$$\{1, 2, 4\} \cup \{3\} \cup \{5\}$$

priklausantį $\mathcal{S}_4^3$.

Lygiai taip pat mes galime iš S_{n-1}^k skaidinio sukonstruoti k skaidinių priklausančių S_n^k priklausomai nuo to prie kurios iš k skaidinio aibių mes prijungsime skaičių n. Pvz. iš keturių elementų skaidinio i tris netuščias aibes

$$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\}$$

t.y S_4^3 elemento, mes galime gauti tris skaidinius priklausančius S_5^3 prijungdami skaitmenį 5 prie vienos iš trijų skaidinio aibių

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & \{1, 5\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} \\
\{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & \{1\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 4\} \\
 & \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4, 5\}
\end{tikzcd}$$

Taigi, reziumuodami mes galime įrodyti sekančią teoremą.

Teorema 6.1. *Teisinga tapatybė* $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k$.

Įrodymas. Prie vieno kiekvieno iš $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ skaidinio prijungę aibę turinčią vieną elementą $\{n\}$ mes gausime lygiai $|\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}|$ skirtingų aibės $\mathcal{S}_n^k$ skaidiniu. Taip pat prie vienos iš k skaidinio $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ aibių prijungę skaičių n mes gausime k skirtingų aibės $\mathcal{S}_n^k$ skaidinių. Taigi, iš kiekvieno $\mathcal{S}_{n-1}^{k-1}$ skaidinio mes galime sukonstruoti S_{n-1}^{k-1} skaidinių priklausančių $\mathcal{S}_n^k$, o iš aibės $\mathcal{S}_{n-1}^k$ skaidinių galime gauti lygiai kS_n^k skaidiniu priklausančių $\mathcal{S}_n^k$. Apjunge visus variantus mes gausime, kad busime sukonstravę lygiai

$$S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k$$

skirtingu aibės $\mathcal{S}_n^k$ skaidinių. Nesunkiai matome, kad tuo pačiu būsime sukonstravę visus įmanomus $\mathcal{S}_n^k$ skaidinius. Taigi

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k.$$

□

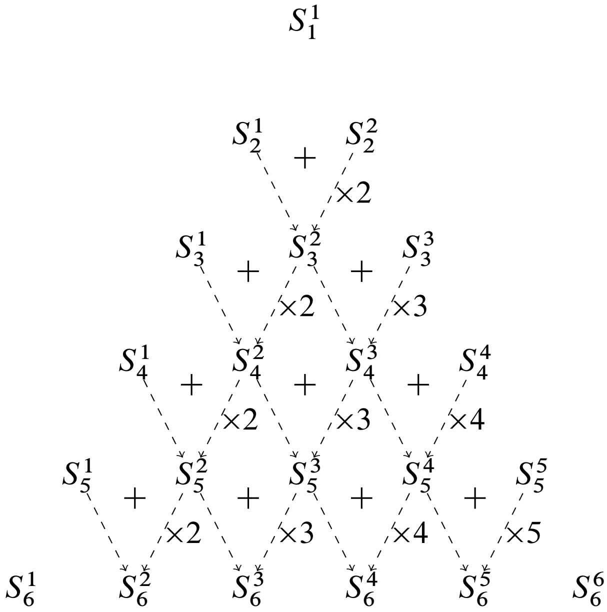
Pavyzdys 6.1. Tapatybės $S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3$ įrodymą galime pailiustruoti sekančia diagrama.

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lcl}
\{1\}\cup\{2,4\}\cup\{3\} & \dashrightarrow & \{1,5\}\cup\{2,4\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,4,5\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,4\}\cup\{3,5\} \\
\{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4\} & \dashrightarrow & \{1,5\}\cup\{2,3\}\cup\{4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,3,5\}\cup\{4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4,5\} \\
\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4\} & \dashrightarrow & \{1,2,5\}\cup\{3\}\cup\{4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1,2\}\cup\{3,5\}\cup\{4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4,5\} \\
\{1,4\}\cup\{2\}\cup\{3\} & \dashrightarrow & \{1,4,5\}\cup\{2\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1,4\}\cup\{2,5\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1,4\}\cup\{2\}\cup\{3,5\} \\
\{1\}\cup\{2,4\}\cup\{3\} & \dashrightarrow & \{1,5\}\cup\{2,4\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,4,5\}\cup\{3\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,4\}\cup\{3,5\} \\
\{1\}\cup\{2\}\cup\{3,4\} & \dashrightarrow & \{1,5\}\cup\{2\}\cup\{3,4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2,5\}\cup\{3,4\} \\
 & \dashrightarrow & \{1\}\cup\{2\}\cup\{3,4,5\}
\end{array}\right\} S_4^3 \\
\\
\left.\begin{array}{lcl}
\{1,2,3\}\cup\{4\} & \dashrightarrow & \{1,2,3\}\cup\{4\}\cup\{5\} \\
\{1,2,4\}\cup\{3\} & \dashrightarrow & \{1,2,4\}\cup\{3\}\cup\{5\} \\
\{1,3,4\}\cup\{2\} & \dashrightarrow & \{1,3,4\}\cup\{2\}\cup\{5\} \\
\{2,3,4\}\cup\{1\} & \dashrightarrow & \{2,3,4\}\cup\{1\}\cup\{5\} \\
\{1,2\}\cup\{3,4\} & \dashrightarrow & \{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5\} \\
\{1,3\}\cup\{2,4\} & \dashrightarrow & \{1,3\}\cup\{2,4\}\cup\{5\} \\
\{2,3\}\cup\{1,4\} & \dashrightarrow & \{1,3,4\}\cup\{2\}\cup\{5\}
\end{array}\right\} S_4^2
\end{array}
\right\} S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3
$$

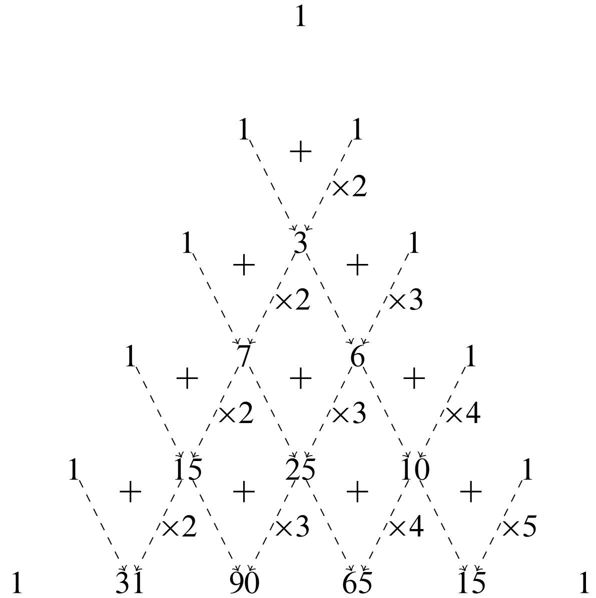
Tapatybė

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k$$

leidžia rekurentiškai apskaičiuoti visus antros rūšies Stirlingo skaičius.



Nesunku suvokti, kad $S_n^n = 1$ ir $S_n^1 = 1$. Taigi



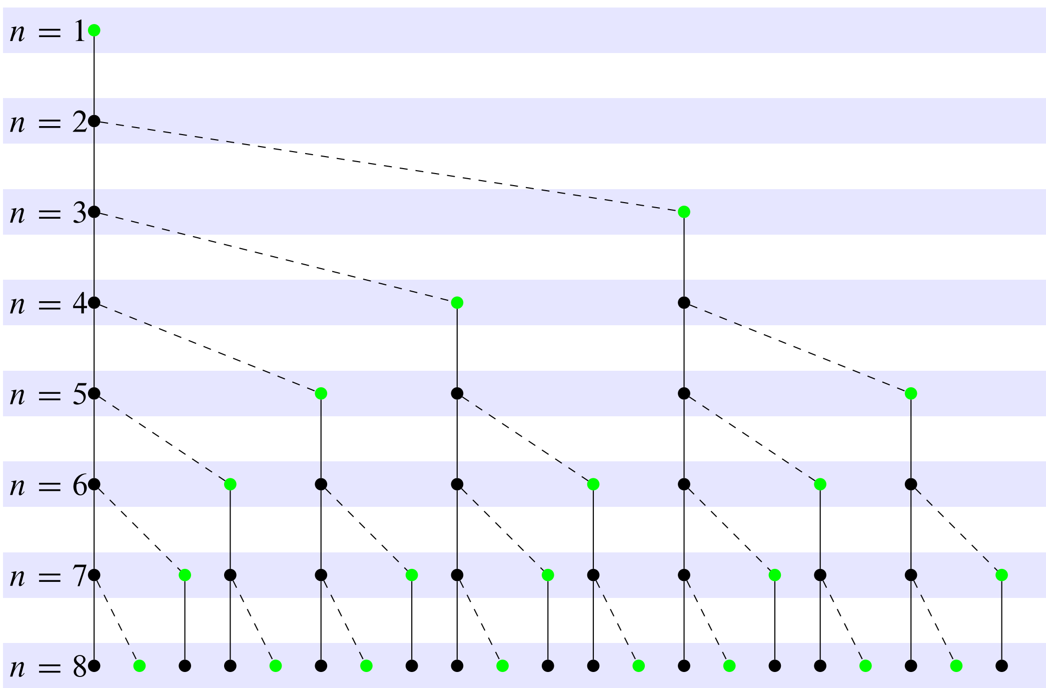
7 Rekurentinės sekos

7.1 Fibonacci seka

Italų matematikas Fibonacci 1202 metais išleistoje knygoje "Liber Abaci" pateikė tokį uždavinį.

Uždavinys 7.1 (Triušių uždavinys)**.** *Ką tik gimusių triušių pora užauga per du mėnesius. Suaugusiu triušių pora kas mėnesį pagimdo naujų triušių porą, kuri savo ruožtu subrendusi po dviejų mėnesių pradeda kas mėnesi gimdyti po viena triušių porą. Kiek triušiu porų turėsime po n mėnesių, jeigu pirmo mėnesio pradžioje turėjome vieną ką tik gimusių triušių porą?*

Tarkime, kad pirmo mėnesio pradžioje turėsime vieną ką tik gimusių triušių porą. Pažymėkime kaip F_n skaičių triušių porų n-tojo mėnesio pradžioje. Visą triušių atsiradimo procesą galime pažymėti sekančia diagrama. Kur žaliais taškais yra vaizduojamos ką tik gimusių triušių poros, o juodais – poros kuriu amžius yra bent vienas mėnesis. Punktyrine linija pažymime giminystės ryšį tarp triušių porų, o ištisine linija sujungiame tas pačias poras skirtingais laiko momentais.



Pirmo mėnesio pradžioje turėjome tik vieną ką tik gimusių triušių porą, taigi $F_1 = 1$. Antro mėnesio pradžioje mūsų triušių pora naujų triušių neatsives, nes jos amžius dar nesiekia dviejų mėnesių, todėl $F_2 = 1$. Trečio mėnesio pradžioje turėsime jau dvi triušių poras. Taigi

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \ldots.$$

Pastebėkime, kad n-tojo mėnesio pradžioje esančių triušių skaičius F_n bus suma triušių kurie jau egzistavo $n-1$ - ojo mėnesio pradžioje F_{n-1} ir ką tik gimusiu triušių, kuriuos pagimdė vyresnės nei 2 mėnesiai triušių poros, kurių kiekis yra F_{n-2}. Taigi n-asis Fibonacci skaičius bus lygus sumai dviejų prieš jį einančių Fibonacci skaičių

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{10}$$

Ši formulė leidžia apskaičiuoti vieną po kito visus Fibonacci sekos narius, kadangi jau žinomi pirmi du sekos nariai $F_1 = 1$ ir $F_2 = 1$. Pvz.

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Patogu laikyti, kad $F_0 = 0$. Taigi pirmi Fibonacci sekos nariai bus

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Mūsų tikslas yra gauti bendrąją Fibonacci sekos nario išraišką. Tuo tikslu panagrinėkime savybes bet kurios sekos, tenkinančios Fibonacci sekos rekurentinę lygtį (10), kurios pirmieji du nariai yra bet kokie skaičiai, nebūtinai 0 ir 1 kaip Fibonacci sekos atveju. Tarkime seka

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

tenkina rekurentinį sąryšį

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}. \tag{11}$$

Priklausomai nuo to, kokias pasirinksime pirmųjų dviejų sekos narių x_0 ir x_1 reikšmes gausime įvairias sekas tenkinančias mūsų rekurentinį sąryšį (11).

Pavyzdys 7.1. Jeigu $x_0 = 1$ ir $x_1 = 3$ tai

$$x_2 = x_1 + x_0 = 3 + 1 = 4$$

$$x_3 = x_2 + x_1 = 4 + 3 = 7$$

$$x_4 = x_3 + x_2 = 7 + 4 = 11$$

Sekanti teorema teigia, kad turėdami du rekurentinės sekos sprendinius mes galime sukonstruoti jų pagalba trečią sprendinį.

Teorema 7.1. *Tarkime dvi sekos*

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \textit{ir} \quad b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$$

tenkina rekurentinį sąryšį $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \textit{ir} \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

visiems $n = 2, 3, 4, \ldots$. *Suformuokime naują seką* $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ *kurios nariai yra*

$$c_n = Aa_n + Bb_n$$

čia A, B *–bet kokie skaičiai. Tuomet sekos* c_n *nariai tenkins lygtį*

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

su pradinėmis sąlygomis $c_0 = Aa_0 + Bb_0$ *ir* $c_1 = Aa_1 + Bb_1$.

Įrodymas. Bet kuriam $n = 2, 3, \ldots$ padauginame lygtį

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

iš A ir panariui sudedame su lygtimi

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

padauginta iš B. Gausime

$$Aa_n + Bb_n = (Aa_{n-1} + Bb_{n-1}) + (Aa_{n-2} + Bb_{n-2}).$$

Kadangi $c_n = Aa_n + Bb_n$, $c_{n-1} = Aa_{n-1} + Bb_{n-1}$ ir $c_{n-2} = Aa_{n-2} + Bb_{n-2}$ tai

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Teorema įrodyta.

$\square$

Pagrindinė Fibonacci sekos nario išraiškos radimo idėja yra rasti dvi sekas a_n ir b_n tenkinančias Fibonacci rekurentinį sąryšį (11) ir pasinaudojant ką tik įrodyta teorema parinkti A ir B taip, kad naujai gautos sekos $c_n = Aa_n + Bb_n$ pirmieji du nariai būtų tokie patys kaip ir Fibonacci sekos pirmieji nariai, t. y. 0 ir 1. O tai reikš, kad naujai gauta seka sutaps su Fibonacci seka.

Pabandykime surasti kokį nors sekos

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

atskirą sprendinį. Sprendinio ieškosime pavidalu $x_n = \alpha^n$. Įstatę šią išraišką į rekurentinę lygtį gausime

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}.$$

Padalijê abi šios formulės puses iš α^{n-2} gausime, kad α turės būti sprendinys lygties

$$\alpha^2 = \alpha + 1.$$

Kadangi lygtis $x^2 - x - 1 = 0$ turi du sprendinius

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ir

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

tai tuo pačiu mes gauname du skirtingus rekurentinės lygties sprendinius, sekas

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ir

$$b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

tenkinančias rekurentinę lygtį $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ t.y.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{ir} \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

vadinasi seka

$$c_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

taip pat tenkins lygtį

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

su visais $n = 2, 3, \ldots$. Be to,

$$c_0 = A + B$$
$$c_1 = A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Parinkime A ir B taip, kad pirmi du sekos (c_n) nariai c_0 ir c_1 būtų lygūs pirmiems dviems Fibonacci sekos nariams, t.y $c_0 = 0$ ir $c_1 = 1$. Tokias A ir B reikšmes rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Iš pirmos lygties turime

$$B = -A$$

Įstatę antroje lygtyje vietoje B išraišką $-A$ gausime, kad dydis A tenkina lygtį

$$1 = A\frac{1+\sqrt{5}}{2} - A\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

arba

$$1 = A\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = A\sqrt{5}.$$

Vadinasi

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ir

$$B = -A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Taigi, įrodėme, kad

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

tenkina tokią pačią rekurentinę lygtį kaip ir Fibonacci skaičiai

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

be to jos pirmi du nariai yra tokie patys kaip ir pirmieji du Fibonacci sekos nariai

$$c_0 = 0 = F_0$$
$$c_1 = 1 = F_1$$

Iš čia išplaukia, kad dvi sekos c_j ir F_j sutampa visiems $j \geqslant 0$. Iš tikrųjų, kadangi sutampa pirmi du sekų nariai

$$c_0 = F_0, \quad c_1 = F_1$$

tai iš rekurentinio sąryšio išplaukia, kad turėtų sutapti ir tretieji sekos nariai

$$c_2 = c_1 + c_0 = F_1 + F_0 = F_2$$

Taigi

$$c_0 = F_0, \quad c_1 = F_1, \quad c_2 = F_2$$

Iš čia turime

$$c_3 = c_2 + c_1 = F_2 + F_1 = F_3$$

Taigi

$$c_0 = F_0, \quad c_1 = F_1, \quad c_2 = F_2, \quad c_3 = F_3$$

ir t.t.

Taigi įrodėme sekančią teoremą.

Teorema 7.2 (Binet formulė)**.**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Pastebėkime, kad

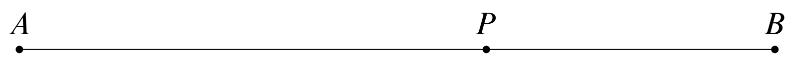
$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\ldots$$

yra lygus auksinio pjūvio santykiui.

7.1.1 Auksinis pjūvis

Apibrėžimas 7.1. *Auksinis pjūvis yra taškas dalijantis atkarpą tarp dviejų skirtingų taškų A ir B taip, kad*

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AB|}{|AP|} = \phi$$



Kadangi $|AB| = |AP| + |PB|$, tai

$$\phi = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AP| + |PB|}{|AP|} = 1 + \frac{|PB|}{|AP|} = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

O tai reiškia, kad auksinis santykis ϕ tenkina lygtį

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

kurios vienintelis teigiamas sprendinys yra

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Iš Binet formulės

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

išplaukia įdomi išvada.

Teiginys 7.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Įrodymas. Iš tikrųjų

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right)}\end{aligned}$$

Kadangi $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ tai

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0$$

□

Konvergavimo greitis ką tik įrodytame teiginyje yra eksponentinis.

Pavyzdys 7.2.

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = \frac{6765}{4181} = 1.6180339631667065295\ldots$$

Tuo tarpu

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482$$

tai yra

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{F_{20}}{F_{19}} = 0.00000002558318832\ldots$$

7.2 Bendra tiesinių rekurentinių lygčių teorija

Ką tik išnagrinėtą Fibonacci sekos bendrojo nario radimo teoriją mes galime apibendrinti tam atvejui, kai nagrinėjama begalinė seka

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

kurios pirmieji m nariai $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ yra žinomi, o kiti sekos nariai x_n su indeksais n didesniais uz $m-1$ tenkina rekurentinę lygtį

$$x_n = u_1 x_{n-1} + u_2 x_{n-2} + \ldots + u_m x_{n-m}, \tag{12}$$

čia $u_1, u_2, \ldots u_m$ yra fiksuoti skaičiai ir $u_m \neq 0$. Ši lygtis leidžia paskaičiuoti n -tojo sekos nario x_n reikšmę panaudojant m prieš tai einančių sekos narių $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-m}$ reikšmes. Šią lygtį tenkinančios sekos bendrojo nario pavidalo galime ieškoti taip pat kaip ir Fibonacci sekos atveju. Visų pirma pastebime, kad dviejų šią lygtį tenkinančių sekų suma yra taip pat seka tenkinanti tą pačią lygtį.

Teorema 7.4. *Jeigu sekos $a_0, a_1, \ldots$ ir $b_0, b_1, \ldots$ tenkina rekurentinę lygtį (12) tai seka $c_0, c_1, \ldots$ gauta sudėjus abi sekas panariui $c_n = a_n + b_n$ taip pat tenkins tą pačią lygtį.*

Proof. Iš tikrųjų, sudėję panariui lygtis

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + \ldots + u_m a_{n-m}$$

ir

$$b_n = u_1 b_{n-1} + u_2 b_{n-2} + \ldots + u_m b_{n-m}$$

gausime

$$a_n + b_n = u_1(a_{n-1} + b_{n-1}) + u_2(a_{n-2} + b_{n-2}) + \ldots + u_m(a_{n-m} + b_{n-m})$$

Taigi, seka kurios nariai yra $c_n = a_n + b_n$ tenkins lygtį

$$c_n = u_1 c_{n-1} + u_2 c_{n-2} + \ldots + u_m c_{n-m}.$$

□

Ieškome atskirų lygties

$$x_n = u_1 x_{n-1} + u_2 x_{n-2} + \ldots + u_m x_{n-m}$$

sprendinių pavidalu $x_n = \rho^n$. Įstatę tokią x_n išraišką į rekurentinę lygtį

$$\rho^n = u_1 \rho^{n-1} + u_2 \rho^{n-2} + \ldots + u_m \rho^{n-m}$$

ir padalinę gautą reiškinį iš ρ^{n-m} gausime, kad ρ yra sprendinys *charakteristinės* lygties

$$\rho^m = u_1 \rho^{m-1} + u_2 \rho^{m-2} + \ldots + u_{m-1}\rho + u_m$$

7.2.1 Atvejis, kai visos šaknys yra skirtingos

Jeigu visi *charakteristinės* lygties sprendiniai $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ yra skirtingi, tai rekurentinės lygties sprendinio x_n ieškome pavidalu

$$x_n = A_1\rho_1^n + A_2\rho_2^n + \cdots + A_m\rho_m^n,$$

parinkdami $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taip, kad dešinėje esanti išraiška pirmoms m reikšmėms $m = 0, 1, \ldots, m-1$ sutaptų su $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$. Kitaip tariant skaičiai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ turi tenkinti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_0 = A_1\rho_1^0 + A_2\rho_2^0 + \cdots + A_m\rho_m^0 \\ x_1 = A_1\rho_1^1 + A_2\rho_2^1 + \cdots + A_m\rho_m^1 \\ \quad\ldots \\ x_{m-1} = A_1\rho_1^{m-1} + A_2\rho_2^{m-1} + \cdots + A_m\rho_m^{m-1} \end{cases}$$

Šios sistemos determinantas yra Vandemondo determinantas

$$\begin{vmatrix} \rho_1^0 & \rho_2^0 & \cdots & \rho_m^0 \\ \rho_1^1 & \rho_2^1 & \cdots & \rho_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1^{m-1} & \rho_2^{m-1} & \cdots & \rho_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(\rho_j - \rho_i).$$

Jeigu visi ρ_j yra skirtingi tai dešinėje esančioje sandaugoje visi skirtumai $\rho_j - \rho_i$ yra nelygūs nuliui. Vadinasi pats determinantas bus nelygus nuliui. O tai reiškia, kad ši sistema visada turės vieną ir tik vieną sprendinį.

7.2.2 Kartotinių šaknų atvejis

Panagrinėkime dabar tą atvejį, kai charakteristinė lygtis

$$\rho^m - u_1\rho^{m-1} - u_2\rho^{m-2} - \ldots - u_{m-1}\rho - u_m = 0$$

turi kartotinę šaknį. Pradžiai panagrinėsime atvejį kai polinomas polinomas

$$P(x) = x^m - u_1x^{m-1} - u_2x^{m-2} - \ldots - u_{m-1}x - u_m$$

turi kartotinumo vienas šaknį $x = \rho$, t.y. apart $P(\rho) = 0$ turime dar ir kad šio polinomo išvestinė taške yra lygi nuliui $P'(\rho) = 0$.

Teorema 7.5. *Jeigu $P(\rho) = P'(\rho) = 0$ tai seka $x_n = n\rho^n$ tenkina lygti*

$$x_n = u_1x_{n-1} + u_2x_{n-2} + \ldots + u_mx_{n-m},$$

kitaip tariant yra teisinga tapatybė

$$n\rho^n = u_1(n-1)\rho^{n-1} + \ldots + (n-m)u_m\rho^{n-m}$$

Proof. Paėmę reiškinio $x^{n-m}P(x)$ išvestinę ir padauginę gautą išraišką iš x gausime

$$x\frac{d}{dx}\big(x^{n-m}P(x)\big) = nx^n - u_1(n-1)x^{n-1} - \cdots - (n-m)u_m x^{n-m}$$

taigi

$$(n-m)x^{n-m}P(x)+x^{n-m+1}P'(x) = nx^n - u_1(n-1)x^{n-1} - \cdots - (n-m)u_m x^{n-m}$$

Kadangi $P(\rho) = P'(\rho) = 0$ tai įstatę ρ vietoje x gausime

$$0 = n\rho^n - u_1(n-1)\rho^{n-1} - \ldots - (n-m)u_m\rho^{n-m}$$

Perkėlę reiškinį $n\rho^n$ į kitą pusę gausime

$$n\rho^n = u_1(n-1)\rho^{n-1} + \ldots + (n-m)u_m\rho^{n-m}$$

□

Bendru atveju yra teisinga teorema

Teorema 7.6. *Jeigu charakteristinė lygtis*

$$\rho^m - u_1\rho^{m-1} - u_2\rho^{m-2} - \ldots - u_{m-1}\rho - u_m = 0$$

turi šaknį ρ, kurios kartotinumas yra lygus k, t.y.

$$P(\rho) = P'(\rho) = \cdots = P^{(j-1)}(\rho) = 0$$

Tuomet sekos

$$y_n = n^j\rho^n$$

su $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ taip pat bus tenkins rekurentinę lygtį

$$y_n = u_1 y_{n-1} + u_2 y_{n-2} + \ldots + u_m y_{n-m}$$

su visais $n \geqslant m$.

Taigi, jeigu

$$z^m - u_1 z^{m-1} - u_2 z^{m-2} - \ldots - u_{m-1}z - u_m = (z-\rho_1)^{r_1}(z-\rho_2)^{r_2}\cdots(z-\rho_k)^{r_k}$$

tai turėsime $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = m$ skirtingas sekas

$$\rho_s^n, n\rho_s^n, \ldots, n^{r_s-1}\rho_s^n \quad s = 1, 2, \ldots k$$

tenkinančias rekurentinę lygtį su visais $n \geqslant m$. Taigi šiuo atveju sprendinio ieškosime pavidalu

$$x_n = (A_{1,1}\rho_1^n + \ldots + A_{1,r_1}n^{r_1-1}\rho_1^n) + \cdots + (A_{k,1}\rho_k^n + \ldots + A_{k,r_1}n^{r_k-1}\rho_k^n),$$

kur koeficientus $A_{i,j}$ gausime išsprendę tiesinių lygčių sistemą gautą prilyginus dešinėje pusėje esančią išraišką su $n = 0, 1, \ldots, m-1$ atitinkamiems pirmiems mūsų sekos nariams $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$.

8 Generuojančios funkcijos

8.1 Generuojančių funkcijų pavyzdžiai

Įstate $a = 1$ ir $b = x$ Niutono binomo formulėje

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

gausime

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n$$

Polinomo $(1+x)^n$ koeficientai yra C_n^k.

Daugelį koeficientų C_n^k tapatybių galime išvesti iš algebrinių $(1+x)^n$ savybių remdamiesi teorema.

Teorema 8.1. *Jeigu dviejų polinomų $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ir $B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ reikšmės sutampa $A(x) = B(x)$ visiems $x \in \mathbb{R}$ tai sutampa ir polinomų laipsniai $m = n$ ir koeficientai $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$*

Irodymas. Jeigu polinomai sutampa $A(x) = B(x)$ tai tuo pačiu sutampa ir jų bet kurios eilės išvestinės $A^{(k)}(x) = B^{(k)}(x)$, o kadangi polinomo koeficientai išsireiškia pagal Teiloro formulę per jo išvestines nulio taške tai turi sutapti ir polinomų koeficientai

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!} = \frac{B^{(k)}(0)}{k!} = b_k.$$

su visais $k = 0, 1, \ldots, n$. □

Polinomas $P_n(x) = (1+x)^n$ turi savybę

$$x^n P_n(1/x) = x^n (1 + 1/x)^n = (1+x)^n = P_n(x)$$

įstate abiejose pusėse vietoje $P_n(x)$ išraišką $C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n$ gausime

$$\begin{aligned} & x^n \big(C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{x} + \cdots + C_n^k \frac{1}{x^k} + \cdots + C_n^n \frac{1}{x^n} \big) \\ = & C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^k x^{n-k} + \cdots + C_n^n \\ = & C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_n^n + C_n^{n-1} x + \cdots + C_n^{n-k} x^k + \cdots + C_n^0 x^n \\ = & C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n \end{aligned}$$

Kadangi

$$\begin{aligned}&C_n^n + C_n^{n-1}x + \cdots + C_n^{n-k}x^k + \cdots + C_n^0 x^n\\=&C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n\end{aligned}$$

tai

$$C_n^n = C_n^0, \quad C_n^{n-1} = C_n^1, \quad \ldots, \quad C_n^{n-k} = C_n^k, \quad \ldots \quad C_n^0 = C_n^n$$

T.y. dar kartą įrodėme, kad

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

Polinomas $P_n(x) = (1+x)^n$ taip pat turi savybę

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

vadinasi

$$P_m(x)P_n(x) = P_{m+n}(x)$$

Įstatę čia vietoje $P_n(x)$ išraišką $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ gauname

$$\sum_{k=0}^m C_m^k x^k \sum_{j=0}^n C_n^j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{n+m} x^k \left(\sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

vadinasi

$$C_{n+m}^k = \sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j}$$

Atskiru atveju, kai $m = n$ ir $k = n$ formulėje

$$C_{n+m}^k = \sum_{j=0}^k C_m^j C_n^{k-j}$$

gauname

$$C_{2n}^n = \sum_{j=0}^n C_n^j C_n^{n-j}.$$

Kadangi $C_n^j = C_n^{n-j}$, tai

$$\boxed{C_{2n}^n = \sum_{j=0}^n \left(C_n^j\right)^2}$$

Uždavinys 8.1. *Kokios binominių koeficientų savybes išplaukia iš sąryšių*

$$n(1+x)^{n-1} = \frac{d}{dx}(1+x)^n$$

ir

$$1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}?$$

Apibrėžimas 8.1. *Tarkime turime begalinę skaičių seką*

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Šios sekos generuojančia funkcija *vadinsime funkciją $A(x)$ kuri yra lygi begalinei laipsninei eilutei*

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Pavyzdys 8.1. Begalinės vienetų sekos

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

generuojanti funkcija yra yra lygi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

ir konverguoja vienetinėje nulinio taško aplinkoje $|x| < 1$

Pavyzdys 8.2. Sekos

$$1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{6!}, \ldots$$

generuojanti funkcija yra lygi

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = e^x$$

ir konverguoja su visais x.

Pavyzdys 8.3. Begalinės sekos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$$

generuojanti funkcija yra lygi

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}x^k + \cdots = \log\frac{1}{1-x}$$

ir yra konverguojanti vienetinėje nulinio taško aplinkoje $|x| < 1$.

Pavyzdys 8.4. Sveikų neneigiamų skaičių faktorialų sekos

$$0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots, k!, \ldots$$

generuojanti funkcija yra lygi

$$0! + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$$

ir konverguoja tik viename taške $x = 0$.

Kaip rodo paskutinis pavyzdys jeigu skaičių sekos $a_0, a_1, \ldots$ nariai didėja labai greitai, gali atsitikti taip, kad atitinkama laipsninė eilutė $a_0 + a_1x + \cdots$ konverguos tik nuliniame taške $x = 0$ ir atitinkama generuojanti funkcija $A(x)$ tebus apibrėžta tik aibėje sudarytoje iš vieno taško $x \in \{0\}$, o tai neleis mums taikyti analiziniu metodu (diferencijavimas, integravimas ir t.t.) tiriant atitinkamos sekos savybes. Todėl nagrinėsime sekas, iš kurių narių sudaryta laipsninė eilutė

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \tag{13}$$

konverguoja ne tik nuliniame taške $x = 0$, bet ir kurioje nors nulinio taško aplinkoje $x \in (-\delta, \delta)$ kur δ yra koks nors teigiamas skaičius. Kaip jau žinome iš matematinės analizės kurso taip bus, jeigu sekos nariai a_k yra didėja lėčiau nei kokio nors teigiamo skaičiaus $D > 0$ laipsnis, t.y. teisinga nelygybė

$$|a_k| \leqslant MD^k$$

kur $D > 0$ ir M yra kokie nors skaičiai. Į tokių sekų generuojančias funkcijas mes galime žiūrėti kaip į savotiškus "begalinio laipsnio polinomus" ir atlikinėti įvairias analizines operacijas panariui. Visų pirma, jeigu sekos generuojančia funkciją $A(x)$ apibrėžianti begalinė eilutė konverguoja kokiame nors atvirame intervale $x \in (-\delta, \delta)$, tai ją galime diferencijuoti panariui, t.y. funkcija $A(x)$ bus diferencijuojama ir jos išvestinė bus lygi sumai išvestinių atitinkamų laipsninių narių

$$\begin{aligned} A'(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots)' \\ &= (a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2)' + \cdots + (a_kx^k)' + \cdots)' \\ &= a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots \end{aligned}$$

Įstate čia $x = 0$ gausime formulę leidžiančią paskaičiuoti koeficientą prie x^1 laipsnio $A'(0) = a_1$. Diferencijuodami šią eilutę k kartų ir įstate $x = 0$ gausime bendrą formulę leidžiančią paskaičiuoti sekos k-ajį narį a_k jeigu mums yra duota sekos generuojanti funkcija

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}$$

Iš šios formulės galime padaryti išvadą, kad sekos generuojanti funkcija vienareikšmiškai nusako visus sekos narius. Arba kitais žodžiais jeigu mums yra duota funkcija $A(x)$ apie kuria žinome, kad ji yra kažkokios sekos $a_0, a_1, \ldots$ generuojanti funkcija, tai visus atitinkamos sekos narius mes galime vienareikšmiškai apskaičiuoti pasinaudodami ką tik pateikta formule.

Daugelis generuojančių funkcijų metodo taikymų remiasi pastebėjimu, kad kai kuras sekų operacijas vienareikšmiškai atitinka įvairios algebrinės ir analizinės operacijos su atitinkamomis generuojančiomis funkcijomis. Pavyzdžiui, tarkime sekos

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

generuojanti funkcija yra $A(x)$. Panagrinėkime sekos poslinkio į dešinę operaciją, kuri paslenka sekos narius i dešine, pirmoje sekos pozicijoje įrašydama 0, tuomet naujai sukonstruotos sekos

$$0, a_0, a_1, a_2, \ldots$$

generuojanti funkcija bus lygi

$$0 + a_0x + a_1x^2 + \cdots = x(a_0 + a_1x + \cdots) = xA(x)$$

O tai reikš, kad poslinkio i dešinę per vieną simbolį operaciją atitiks algebrine sekos generuojančios funkcijos $A(x)$ daugybos iš x operacija.

$$\begin{tikzcd}
a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots \arrow[r, "\text{Poslinikis į dešinę}"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & 0, a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
A(x) \arrow[r, "\text{Daugyba iš } x"] & xA(x)
\end{tikzcd}$$

Arba kitas pavyzdys. Panagrinėkime operaciją, kuri kiekvienai sekai

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

priskiria seką

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

kurios k-asis elementas yra pradinės sekos pirmų k elementų suma. Nesunku matyti, kad tokios naujai gautos sekos generuojanti funkcija yra lygi $A(x)/(1 - x)$. O tai reiškia, kad tokia sekų operaciją generuojančių funkcijų kalboje atitiks generuojančios funkcijos daugybos iš $1/(1 - x)$ operacija.

$$
\begin{tikzcd}
a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \arrow[r, "\text{Dalinių sumų sekos sudarymas}"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
A(x) \arrow[r, "\text{Daugyba iš } \frac{1}{1-x}"] & \frac{A(x)}{1-x}
\end{tikzcd}
$$

Taip pat tai, kad galime diferencijuoti generuojančią funkciją panariui reiškia, kad naujos sekos

$$a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4$$

gautos elementus a_k padauginus iš k ir iš sekos išmetus pirmąjį elementą generuojanti funkcija yra $A'(x)$ t.y.

$$
\begin{tikzcd}
a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \arrow[r, "a_n \text{ daugyba is } n"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
A(x) \arrow[r, "\text{Diferencijavimo operacija}"] & A'(x)
\end{tikzcd}
$$

Tai dažnai leidžia išvertus uždavinį formuluojamą sekų kalba į algebrinį arba analizinį uždavinį atitinkamai generuojančiai funkcijai taikyti galingą algebrinį ir analizinį aparatą.

Seka	Jos generuojanti funkcija
$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$	$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$
$a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4 \ldots$	$A'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$
$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots$	$x^k A(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + a_3 x^{k+3} + \cdots$
$0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \frac{a_4}{5}, \ldots$	$\int_0^x A(y)\,dy = \frac{a_0}{1} x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_4}{5} x^5 + \cdots$
$a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots$	$(1-x)A(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \cdots$

Toliau generuojančios funkcijos $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ koeficientą a_k prie laipsnio x^k žymėsime kaip

$$[x^k]A(x) = a_k$$

Pavyzdys 8.5.

$$[x^k](1+x)^n = C_n^k$$

Pavyzdys 8.6. Žinome, kad

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Įstatę čia vietoje x dydį xk gausime

$$e^{kx} = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{k^nx^n}{n!} + \cdots$$

Susumavę abi šios tapatybės puses pagal $k = 1, 2, \dots, m$ mes gausime

$$\sum_{k=1}^{m} e^{kx} = \left(\sum_{k=1}^{m} 1\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\frac{x}{1!} + \left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} k^n\right)\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Kairėje šios tapatybes pusėje stovi geometrines progresijos suma

$$e^x\frac{e^{xm}-1}{e^x-1} = \left(\sum_{k=1}^{m} 1\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\frac{x}{1!} + \left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\sum_{k=1}^{m} k^3\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{m} k^n\right)\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Is čia turime

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = \left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=0} e^x\frac{e^{xn}-1}{e^x-1}$$

Pavyzdžiui kai $n = 1$ gauname aritmetinės progresijos sumos formulę,

$$1 + 2 + \cdots + m = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0} e^x\frac{e^{xm}-1}{e^x-1} = \frac{m(m+1)}{2}$$

Kai $n = 2$ turime

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \left.\frac{d^2}{dx^2}\right|_{x=0} e^x\frac{e^{xm}-1}{e^x-1} = \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$$

Pavyzdys 8.7. Mes jau įsitikinome, kad antros rūšies Stirlingo skaičiai tenkina rekurentinį sąryšį

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k.$$

Panagrinėkime savybes generuojančios funkcijos

$$S_k(z) = \sum_{j=k}^{\infty} S_j^k z^j$$

Turime, kad

$$
\begin{aligned}
S_k(z) &= \sum_{j=k}^{\infty}(S_{j-1}^{k-1} + kS_{j-1}^{k})z^j \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} S_{j-1}^{k-1}z^j + \sum_{j=k}^{\infty} kS_{j-1}^{k}z^j \\
&= z\sum_{j=k}^{\infty} S_{j-1}^{k-1}z^{j-1} + zk\sum_{j=k}^{\infty} S_{j-1}^{k}z^{j-1} \\
&= zS_{k-1}(z) + zkS_k(z)
\end{aligned}
$$

Taigi,

$$S_k(z) = zS_{k-1}(z) + zkS_k(z)$$

perkėlę į kairę pusę narį $zkS_k(z)$, sutraukę panašius narius ir padalinę visą reiškinį iš $1 - kz$ mes gausime

$$S_k(z) = \frac{z}{1-kz}S_{k-1}(z)$$

Iteruodami šią tapatybę gauname

$$
\begin{aligned}
S_k(z) &= \frac{z}{1-kz}S_{k-1}(z) \\
&= \frac{z^2}{(1-kz)\big(1-(k-1)z\big)}S_{k-2}(z) = \cdots = \frac{z^k}{(1-kz)\big(1-(k-1)z\big)\cdots(1-z)}
\end{aligned}
$$

Tuo pačiu mes įrodėme tapatybę

$$S_k(z) = \sum_{j=k}^{\infty} S_j^k z^j = \frac{z^k}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)}.$$

8.2 Fibonacci uždavinio sprendimas generuojančių funkcijų pagalba

Panagrinėkime kai kurias paprastas Fibonacci sekos savybes.

Lema 8.2. *Fibonacci seka yra monotoniškai didėjanti*

$$F_0 \leqslant F_1 \leqslant \cdots < F_n < \cdots$$

bei tenkina nelygybę

$$F_n \leqslant 2^n.$$

Įrodymas. Iš tikrųjų, kadangi $F_j \geqslant 0$ tai

$$F_{n-1} \leqslant F_{n-1} + F_{n-2} = F_n.$$

Tuo pačiu mes įrodėme, kad fibonacci sekos narys yra mažesnis už po jo einantį narį, vadinasi fibonacci seka yra monotoniškai didėjanti. Pakeitę ką tik gautoje nelygybėje n į $n-1$ mes gausime $F_{n-2} \leqslant F_{n-1}$ ir pasinaudodami šia nelygybe vertinant Fibonacci lygties dešinės puses sumą gauname

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \leqslant F_{n-1} + F_{n-1} = 2F_{n-1}$$

Iteruodami šią nelygybę gauname

$$F_n \leqslant 2F_{n-1} \leqslant 2^2 F_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant 2^n F_1 = 2^n$$

□

Kadangi $F_n \leqslant 2^n$ tai laipsninė eilutė, kurios koeficientai yra fibonacci skaičiai

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

konverguoja $|x| < 1/2$, nes šioje srityje konverguoja ir eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}.$$

Tegu funkcija $f(x)$ bus lygi šios eilutės sumai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Klausimas 8.1. *Kokios funkcijos $f(x)$ savybės išplaukia iš to, kad jos Teiloro koeficientai F_n tenkina rekurentinį sąryšį*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}?$$

Eilutėje

$$f(x) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots + F_n x^n + \cdots$$

vietoje koeficientų F_n įstatę reiškinį $F_{n-1} + F_{n-2}$ gausime

$$\begin{aligned} f(x) &= F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots + F_n x^n + \cdots \\ &= x + (F_1 + F_0)x^2 + (F_2 + F_1)x^3 + \cdots + (F_{n-1} + F_{n-2})x^n + \cdots \\ &= x + x(F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots) \\ &\quad + x^2(F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots) \end{aligned}$$

O tai reiškia, kad

$$f(x) = x + xf(x) + x^2 f(x).$$

Iš šios lygties mes galime gauti $f(x)$ išraišką

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Tuo pačiu įrodėme teiginį.

Teiginys 8.3. *Fibonacci sekos generuojanti funkcija yra lygi*

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

Išvada 8.4.

$$F_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\bigg|_{x=0} \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Antros eilės polinomas

$$x^2 + x - 1 = 0$$

turi dvi šaknis

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ir} \quad a_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

vadinasi

$$x^2 + x - 1 = (x - a_1)(x - a_2)$$

O tai leidžia mums išskaidyti Fibonacci sekos generuojančią funkciją į dviejų paprastesnių funkcijų sumą

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{-x}{(x - a_1)(x - a_2)} \\
&= \frac{-x(a_2 - a_1)}{(a_2 - a_1)(x - a_1)(x - a_2)} \\
&= \frac{-x}{a_2 - a_1} \frac{(x - a_1) - (x - a_2)}{(x - a_1)(x - a_2)} \\
&= \frac{-x}{a_2 - a_1} \left(\frac{1}{x - a_2} - \frac{1}{x - a_1} \right)
\end{aligned}$$

Kadangi

$$\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a(1 - x/a)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}$$

kai $|x| < |a|$, tai

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{-x}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{x-a_2}-\frac{1}{x-a_1}\right)\\
&= \frac{-x}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a_1^n}-\frac{1}{a_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a_2^n}\right)\\
&= \frac{1}{a_1-a_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{a_1^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{a_2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{1}{a_1-a_2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left(\frac{1}{a_1^n}-\frac{1}{a_2^n}\right)
\end{aligned}$$

Taigi

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{a_1-a_2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left(\frac{1}{a_1^n}-\frac{1}{a_2^n}\right).$$

Iš kitos pusės

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n$$

Kadangi dvi Teiloro eilutės sutampa tada ir tik tada, kai jų koeficientai sutampa, tai iš tapatybės

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1-a_2}\left(\frac{1}{a_1^n}-\frac{1}{a_2^n}\right)x^n$$

padarome išvadą, kad

$$F_n = \frac{1}{a_1-a_2}\left(\frac{1}{a_1^n}-\frac{1}{a_2^n}\right).$$

Prisiminę, kad

$$a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ir} \quad a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

turėsime

$$a_1 - a_2 = \sqrt{5}$$

ir

$$\frac{1}{a_1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{ir} \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Taigi

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{a_2 - a_1}\left(\frac{1}{a_1^n} - \frac{1}{a_2^n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}
$$

8.2.1 Generuojančių funkcijų metodo taikymo sprendžiant rekurentines lygtis bendri bruožai

Tarkime turime begalinę seką $y_0, y_1, y_2, \ldots$ kuri tenkina kažkokią rekurentinę lygtį (pvz. Fibonacci skaičių atveju $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$). Tuomet

1. Užrašome sekos generuojančią funkciją

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

2. Žiūrime kokios $f(x)$ savybes išplaukia iš sekos $y_0, y_1, y_2, \ldots$ narius siejančio rekurentinio sąryšio (pvz. Fibonacci uždavinio atveju iš to, kad $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ gavome, kad funkcija $f(x)$ tenkina lygtį $f(x) = x + xf(x) + x^2 f(x)$), bei bandome gauti $f(x)$ išraišką.

3. Turėdami konkrečią $f(x)$ išraišką bandome apskaičiuoti jos Teiloro koeficientus

$$y_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

8.3 Bendra tiesinių rekurentinių lygčių teorija. Generuojančių funkcijų metodas

Klausimas 8.2 (Tiesinė homogeninė rekurentinė lygtis)**.** *Tarkime, kad begalinė seka*

$$y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$$

su visais kai $n \geqslant r$ tenkina rekurentinę lygtį

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_r y_{n-r} = 0 \tag{14}$$

su $a_0 \neq 0$, o pirmosios r šios sekos reikšmės yra

$$y_0 = d_0, \quad y_1 = d_1, \quad y_{r-1} = d_{r-1}. \tag{15}$$

Koks yra šios lygties sprendinys?

Pastebėkime, kad pradinės sąlygos (15) kartu su rekurentine lygtimi (14) leidžia mums apskaičiuoti bet kurios sekos nario y_j reikšmę. Iš tikrųjų, kadangi $a_0 \neq 0$ tai rekurentinę lygti mes galime užrašyti kaip

$$y_n = -\frac{1}{a_0}\big(a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_r y_{n-r}\big)$$

Įstate čia $n = r$ mes galime apskaičiuoti y_r kadangi visos dešinėje pusėje esančios sumos išraiškoje dalyvaujančios reikšmės $y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$ jau yra žinomos iš pradinių sąlygų (15). Toliau įstatę $n = r + 1$ ir pasinaudoję jau žinomomis $y_1, y_1, \ldots, y_r$ reikšmėmis mes galėsime apskaičiuoti y_{r+1}. Tęsdami šį procesą mes galime apskaičiuoti bet kurį elementą y_n.

Pavyzdys 8.8. Tegu seka y_n, tenkina rekurentinę lygtį

$$2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2} = 0$$

kai $n \geqslant 2$ su pradinėmis sąlygomis $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Kokios yra y_2 ir y_3 reikšmės?

Sprendimas. Paėmę rekurentinėje lygtyje $n = 2$ mes gausime

$$2y_2 - 3y_1 + y_0 = 0$$

įstatę į šią lygtį jau žinomas reikšmes $y_0 = 1$ ir $y_1 = 2$ mes gausime

$$2y_2 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$$

Taigi

$$y_2 = \frac{5}{2}$$

Analogiškai paėmę rekurentinėje lygtyje $n = 3$ mes turėsime

$$2y_3 - 3y_2 + y_1 = 0$$

Įstatę čia ką tik apskaičiuotą $y_2 = 5/2$ bei iš pradinių sąlygų žinomą reikšmę $y_1 = 2$ mes gausime

$$2y_3 - 3 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 0$$

Iš kur gausime

$$y_3 = \frac{11}{4}.$$

□

Fibonacci uždavinio sprendimą generuojančių funkcijų metodu mes galime apibendrinti bendram tiesinių homogeninių lygčių atvejui. Iš tikrųjų, tarkime

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

Jeigu padauginsime $Y(x)$ iš polinomo $a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r$, tai gausime

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r) Y(x) \\
&= \sum_{n=0}^{r-1} (a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_n y_0) x^n \\
&\quad + \sum_{n=r}^{\infty} (a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_r y_{n-r}) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{r-1} (a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_n y_0) x^n + \sum_{n=r}^{\infty} 0 \cdot x^n
\end{aligned}$$

Prisiminę, kad reikšmės $y_0, \ldots, y_{r-1}$ yra jau žinomos

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1}) Y(x) \\
&= \sum_{n=0}^{r-1} (a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + a_2 d_{n-2} + \cdots + a_n d_0) x^n
\end{aligned}$$

Iš šios lygties išreiškę $Y(x)$ galutinai gauname, kad generuojanti funkcija yra lygi dviejų polinomų santykiui

$$Y(x) = \frac{Q_{r-1}(x)}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1}},$$

kur Q_{r-1} yra $r - 1$-ojo laipsnio polinomas

$$Q_{r-1}(x) = \sum_{n=0}^{r-1} (a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + a_2 d_{n-2} + \cdots + a_n d_0) x^n.$$

Apibrėžimas 8.2. *Polinomas*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1}$$

yra vadinamas rekurentinio sąryšio

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_r y_{n-r} = 0$$

charakteristiniu polinomu.

Uždavinys 8.2. *Pabandykime rasti bendrą išraišką sekos y_n, tenkinančios rekurentinę lygtį*

$$2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2} = 0$$

kai $n \geqslant 2$ ir tokios, kad $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.

Sprendimas. Tegu $Y(x)$ bus sekos y_n generuojanti funkcija

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

Padauginę šią funkciją iš rekurentinio sąryšio charakteristinio polinomo

$$2 - 3x + x^2$$

turėsime

$$\begin{aligned}
(2 - 3x + x^2)Y(x) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+2} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2})x^n + 2\sum_{n=0}^{1} y_n x^n - 3\sum_{n=1}^{1} y_{n-1} x^n
\end{aligned}$$

Kadangi kai $n \geqslant 2$ mes turime $2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2} = 0$ tai visi koeficientai prie x^n bus begalinėje sumoje $\sum_{n=2}^{\infty}(2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2})x^n$ bus lygus nuliui, tuo pačiu bus tapačiai lygi nuliui ir visa suma. Todėl

$$(2 - 3x + x^2)Y(x) = 2(y_0 + y_1 x) - 3y_0 x = 2y_0 + (2y_1 - 3y_0)x$$

Prisiminę, kad $y_0 = 1$ $y_1 = 2$ ir padalinę abi gautos tapatybės puses iš charakteristinio polinomo $2 - 3x + x^2$, mes gausime dydžių y_n generuojančios funkcijos išraišką

$$Y(x) = \frac{2 + x}{2 - 3x + x^2}$$

Kadangi $2 - 3x + x^2 = (1 - x)(2 - x)$ tai generuojančios funkcijos išraišką mes galime perrašyti kaip

$$Y(x) = \frac{2 + x}{(1 - x)(2 - x)}$$

Pastebėkime, kad

$$1 = (2 - x) - (1 - x)$$

todėl

$$\begin{aligned}\frac{2+x}{(1-x)(2-x)} &= \frac{(1+x)\big((2-x)-(1-x)\big)}{(1-x)(2-x)}\\ &= \frac{2+x}{1-x}-\frac{2+x}{2-x}\\ &= \frac{3-(1-x)}{2-x}-\frac{4-(2-x)}{1-x}\\ &= \frac{3}{1-x}-\frac{4}{2-x}\end{aligned}$$

Vadinasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \frac{3}{1-x}-\frac{4}{2-x}$$

Šios tapatybės dešiniąją pusę mes dar galime pertvarkyti pastebėję, kad

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{ir} \quad \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n$$

vadinasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(3-\frac{2}{2^n}\right)z^n$$

O iš šios tapatybės išplaukia, kad

$$y_n = 3-\frac{2}{2^n}$$

□

8.4 Katalano skaičiai

Tarkime, kad turime aibę H kurioje yra apibrėžta kažkokia "sandaugos" operacija $\circ$, t. y. bet kokiems dviems aibės H elementams $a, b \in H$ yra priskiriamas trečias elementas žymimas $a \circ b \in H$. Tuomet užrašas

$$a \circ b \circ c$$

gali būti suprastas nevienareikšmiškai, jeigu skliausteliu pagalba nėra nurodyta "sandaugos" operacijos taikymo tvarka. O būtent

$$a \circ (b \circ c)$$

bendru atveju nebūtinai sutaps su

$$(a \circ b) \circ c.$$

Apibrėžimas 8.3. *Katalano skaičius C_n yra lygus skaičiui skirtingu būdų kuriais mes galime skliaustelių išdėstymu nusakyti daugybos tvarką n dėmenų "sandaugoje"*

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n.$$

Pavyzdys 8.9. Jeigu turime vieną arba du dėmenis x_1 ir x_2 tai jų daugybos tvarka yra vienareikšmiškai nusakyta. Vadinasi $C_1 = C_2 = 1$.

Jeigu yra trys dėmenys tai yra galimi du variantai

$$x_1 \circ (x_2 \circ x_3), \quad (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

vadinasi $C_3 = 2$.

Jeigu $n = 4$, tai yra galimi tokie variantai

$$\begin{aligned}
&x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ x_4)),\\
&x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4),\\
&(x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4),\\
&(x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) \circ x_4,\\
&((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4.
\end{aligned}$$

Vadinasi $C_4 = 5$.

Teiginys 8.5 (Katalano skaičių rekurentinis sąryšis)**.** *Katalano skaičiai C_n tenkina rekurentinį sąryšį*

$$C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1$$

Įrodymas. Iš tikrųjų, nusakydami daugybos tvarką reiškinyje

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$$

mes galime skliaustelių pagalba sugrupuoti pirmus k dėmenų ir po jų einančius $n - k$ dėmenų. Tą padarę mes gauname reiškinį

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n) \qquad (16)$$

Pvz.

$$\begin{array}{ll}
 & (a_1) \circ (a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ a_5 \circ a_6)\\
 & (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ a_4 \circ a_5 \circ a_6)\\
a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ a_5 \circ a_6 \dashrightarrow & (a_1 \circ a_2 \circ a_3) \circ (a_4 \circ a_5 \circ a_6)\\
 & (a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4) \circ (a_5 \circ a_6)\\
 & (a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ a_5) \circ (a_6)
\end{array}$$

Reiškiniuose $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k$ ir $a_{k+1} \circ a_{k+2} \circ \cdots \circ a_n$ išdėliojame skliaustelius, ta mes galime padaryti C_k ir C_{n-k} būdų atitinkamai.

$$\overbrace{(\underbrace{a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k}_{\substack{c_k \text{ būdai išdėstyti} \\ \text{skliaustelius}}}) \circ (\underbrace{a_{k+1} \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n}_{\substack{c_{n-k} \text{ būdai išdėstyti} \\ \text{skliaustelius}}})}^{c_k c_{n-k} \text{ būdai išdėstyti skliaustelius}}$$

Vadinasi iš viso bus $C_k C_{n-k}$ būdų skliaustelių pagalba nurodyti "daugybos" tvarką reiškinyje (16). Susumavę pagal $k = 1, 2, \ldots n-1$ gausime, kad bus

$$C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1$$

būdų skliaustų pagalba nurodyti daugybos tvarką pradiniame reiškinyje

$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n.$$

$\square$

Rekurentinio sąryšio

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1$$

pagalba mes galime apskaičiuoti Katalano skaičių C_n su bet kokiu $n \geqslant 1$.

Pavyzdys 8.10. Kadangi $C_1 = C_2 = 1$, tai

$$C_3 = C_1 C_2 + C_2 C_1 = 1 + 1 = 2.$$

Turėdami C_1, C_2, C_3 galime apskaičiuoti C_4. Iš tikrųjų

$$C_4 = C_1 C_3 + C_2 C_2 + C_3 C_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

Analogiškai

$$C_5 = C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_3 C_2 + C_4 C_1 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$

Klausimas 8.3. *Kokios Katalano skaičių C_n generuojančios funkcijos*

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

savybės išplaukia iš sąryšio

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1?$$

Pakėlę $C(x)$ kvadratu gauname

$$\begin{aligned} C(x)^2 &= \sum_{n=2}^{\infty}(C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1)x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n \\ &= C(x) - C_1 x \end{aligned}$$

Taigi gauname, kad Katalano skaičių generuojanti funkcija tenkina kvadratinę lygtį

$$C(x)^2 - C(x) + x = 0.$$

Kadangi ši lygtis turi du sprendinius, vadinasi yra galimi du variantai

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

arba

$$C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Iš sąlygos $C(0) = 0$ padarome išvadą, kad

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

Tuo pačiu mes įrodėme sekančią teoremą.

Teorema 8.6. *Katalano skaičių C_n generuojanti funkcija yra lygi*

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Teorema 8.7. *Visiems $n \geqslant 1$ turime*

$$C_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

Įrodymas. Turėdami Katalano skaičių generuojančios funkcijos išraišką mes galime išreikšti n -tąjį Katalano skaičių C_n kaip n -tos eilės išvestinę

$$C_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\bigg|_{x=0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n!}\frac{d}{dx}\bigg|_{x=0} \sqrt{1-4x},$$

kur mes pasinaudojome tuo, kad konstantos 1 išvestine yra lygi nuliui, bei iškėlėme pastovų daugiklį $1/2$ prieš skliaustus. Taigi belieka paskaičiuoti funkcijos $\sqrt{1-4x}$ n-tos išvestinės reikšmę taške 0. Kadangi

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{1-4x}\right)^{(n)} \\
&\quad = (-4)\frac{1}{2}(-4)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots(-4)\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1-4x)^{1/2-n}
\end{aligned}$$

tai įstatę čia $x = 0$ ir prisiminę C_n išraišką, gauname

$$\begin{aligned}
C_n &= -\frac{(-4)^n}{n!2}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-j\right) \\
&= -\frac{(-4)^n(-1)^{n-1}}{n!2 2^n}\prod_{j=1}^{n-1}\big(2j-1\big) \\
&= \frac{4^n}{2 2^n 2^{n-1} n!}\frac{\big(2(n-1)\big)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n}\frac{\big(2(n-1)\big)!}{(n-1)!^2} \\
&= \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Literatūra

[1] M. Bloznelis, *Kombinatorikos paskaitų ciklas*. VU leidykla, 1996

[2] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addisin-Wesley, 1999.

[3] E. Manstavičius, *(Diskrecioji matematika) Kombinatorikos ir grafų teorijos pradmenys*. Paskaitų konspektas, 2000.

[4] E. Manstavičius, *Analizinė ir tikimybinė kombinatorika*. TEV, Vilnius, 2007, I dalis.

[5] N. Vilenkinas, *Kombinatorika* Šviesa, Kaunas, 1979

[6] A. Krylovas, *Diskrečioji matematika.* Vilnius, „Technika“, 2004.