II dalis
Aibės, funkcijos ir sąryšiai

Šita kurso dalis, išskyrus skyrių apie skaičiąsias aibes, yra paruošta pagal dr. Valdo Dičiūno diskrečiosios matematikos paskaitų konspektus. Skyrius apie skaičiąsias aibes paruoštas pagal dr. doc. Stanislovo Norgėlos vadovėlį "Matematinė logika". Autorius norėtų jiems padėkoti už suteiktą galimybę pasinaudoti išeities tekstais ruošiant šiuos konspektus.

1 Aibių algebra

Paprasčiausias diskretus objektas yra *baigtinė aibė*, todėl šiame skyriuje priminsime kai kurias aibių teorijos sąvokas.

1.1 Pagrindiniai apibrėžimai

Aibė ir jos *elementas* yra pirminės matematikos sąvokos (kaip *skaičius, taškas* ir pan.), jos nėra formaliai apibrėžiamos. Intuityviai aibę laikome *skirtingų* objektų *nesutvarkytu* rinkiniu, o pačius objektus vadiname tos aibės elementais. Atkreipkite dėmesį į tai, kad aibė yra *nesutvarkytas* rinkinys, t. y. neturi jokios reikšmės, kuria tvarka išvardijami aibės elementai (kitaip tariant, jei vardindami aibės elementus juos sukeistume vietomis, aibė nuo to nepasikeistų). Taip pat atkreipkite dėmesį ir į tai, kad aibė yra *skirtingų* elementų rinkinys, t. y. joje negali būti vienodų elementų. Tuo pačiu tai reiškia, kad jei jūs konstruojate aibę, dėdami elementus į ją kokia nors eilės tvarka, jūs turite tikrinti, ar dedamo elemento dar nėra aibėje, kad neįdėtumėte jo dar kartą.

Baigtinė aibė paprastai apibrėžiama, išvardijant jos elementus, atskirtus kableliais, apskliaudžiant viską riestiniais skliaustais, pavyzdžiui, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pavyzdžiui, aibę C, sudarytą iš dviejų sveikųjų skaičių — -12 ir 6, — galėtume apibrėžti taip: $C = \{-12, 6\}$. Tada skaičiai -12 ir 6 yra aibės C elementai.

Tai, kad elementas a priklauso aibei A, žymime $a \in A$. Jei b nepriklauso A, rašome $b \notin A$. Pavyzdžiui, $6 \in C$, bet $3 \notin C$.

Aibė B yra aibės A *poaibis* (žymime $B \subseteq A$), jei kiekvienas aibės B elementas priklauso ir aibei A. Pavyzdžiui, jei $D = \{-12, 3, 6\}$, tai $C \subseteq D$, nes abu aibės C elementai — ir -12, ir 6 — priklauso ir aibei D. O D nėra aibės C poaibis, nes aibės D elementas 3 nepriklauso aibei C.

Aibės A ir B vadinamos *lygiomis* (žymime $A = B$), jei jos yra sudarytos iš vienodų elementų. Aišku, kad $A = B$ tada ir tik tada, kai $A \subseteq B$ ir $B \subseteq A$ (aibės A ir B lygios tada ir tik tada, kai visi elementai, priklausantys aibei A, priklauso ir aibei B, ir atvirkščiai). Pavyzdžiui, jei $E = \{6, -12\}$, tai $C = E$. O aibės C ir D nėra lygios, nes aibės D elementas 3 nepriklauso aibei C.

Jei $B \subseteq A$ ir $B \neq A$, poaibį B vadiname *tikruoju* (arba *tikriniu*) aibės A poaibiu ir žymime $B \subset A$.[1] Pavyzdžiui, $C \subset D$, nes, kaip jau matėme, $C \subseteq D$ ir $C \neq D$. Tačiau aibė C, nors ir yra aibės E poaibis, bet nėra aibės E tikrasis poaibis, nes $C = E$.

Aibės A ir B vadinamos *nesikertančiomis*, jei jos neturi bendrų elementų. Pavyzdžiui, jei $F = \{3, 4\}$, tai C ir F nesikerta, o D ir F kertasi, nes turi bendrą elementą 3.

[1] Dažnai mokslinėje literatūroje žymėjimas $\subset$ naudojamas kalbant apie bet kurį poaibį, nebūtinai tikrąjį. Tokiu atveju, norint pabrėžti, kad poaibis tikrasis, naudojamas žymėjimas $\subsetneq$.

Baigtinę aibę, turinčią $n \geqslant 0$ elementų, vadiname *n-aibe*, o bet kurį jos poaibį, turintį m elementų, vadiname *m-poaibiu* ($0 \leqslant m \leqslant n$). Baigtinės aibės elementų skaičius dar vadinamas jos *galia*. Aibės A galia žymima $|A|$. Pavyzdžiui, aibės C galia yra 2, aibės D — 3, t. y. $|C| = 2$, $|D| = 3$.

Tuščią rinkinį, neturintį nė vieno objekto, vadiname *tuščiąja aibe* ir žymime $\varnothing$. Tuščią aibę laikome bet kurios aibės poaibiu.

Aibės A poaibių aibę žymime $\mathcal{P}(A)$. Pavyzdžiui, aibės C poaibiai yra tokie: tuščia aibė $\varnothing$, du poaibiai, turintys po vieną elementą — $\{-12\}$ ir $\{6\}$, — bei poaibis, sudarytas iš abiejų aibės C elementų, t. y. pati aibė C. Taigi, galime užrašyti, kad $\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{-12\}, \{6\}, C\}$.

Kitas baigtinės ar begalinės aibės apibrėžimo būdas — nurodoma savybė S, kuria pasižymi tos aibės elementai ir nepasižymi visi kiti objektai. Tokiu atveju naudojamas užrašas $A = \{x\colon S(x)\}$ arba $A = \{x \mid S(x)\}$. Pavyzdžiui, sveikųjų lyginių skaičių aibę $G = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ galime užrašyti taip:

$$G = \{x\colon x \text{ — sveikasis lyginis skaičius}\}.$$

Galima nurodyti ir kuriai aibei priklauso x: $A = \{x \in B\colon S(x)\}$ arba $A = \{x \in B \mid S(x)\}$. Pavyzdžiui, sveikųjų lyginių skaičių aibę G galime apibrėžti ir taip:

$$G = \{x \in \mathbb{Z}\colon x \text{ — lyginis skaičius}\},$$

kur raide $\mathbb{Z}$, kaip įprasta, žymime sveikųjų skaičių aibę.

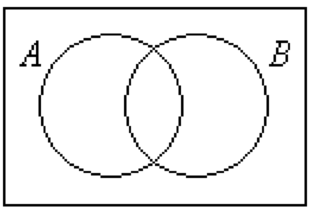
Be to, naudojami ir žymėjimai $A = \{P(x)\colon S(x)\}$ bei $A = \{P(x) \mid S(x)\}$, reiškiantys aibę visų reikšmių, gaunamų įstačius elementus x, tenkinančius savybę S, į reiškinį P. Pavyzdžiui, sveikųjų lyginių skaičių aibę G galime apibrėžti ir taip:

$$\begin{aligned} G &= \{2x\colon x \text{ — sveikasis skaičius}\} \\ &= \{2x\colon x \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Dažnai visos nagrinėjamos aibės yra poaibiai kokios nors didesnės aibės U, vadinamos *universaliąja aibe*. Mūsų pavyzdžiuose iki šiol mes nagrinėjome tik aibes, sudarytas iš sveikųjų skaičių, todėl universalioji aibė šiuo atveju galėtų būti, pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$. Arba realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$. Arba bet kuri kita aibė, kurios poaibiai yra visos nagrinėjamos aibės.

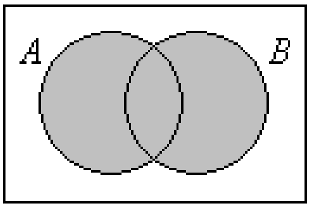
1.2 Aibių operacijų apibrėžimai

Aibes patogu vaizduoti grafiškai *Veno diagramomis* (dar vadinamomis *Oilerio skrituliais*). Universaliąją aibę vaizduojame stačiakampiu, o jos poaibius — susikertančiais skrituliais. Pavyzdžiui, dviejų aibių A ir B Veno diagrama būtų tokia:



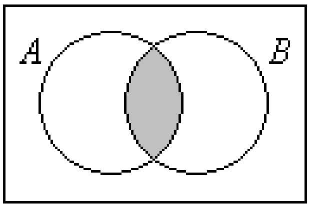
Apibrėšime pagrindines aibių operacijas:

- Aibių A ir B *sąjunga* $A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ arba } x \in B\}$. Ją galima būtų pavaizduoti tokia Veno diagrama:

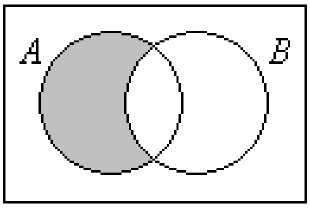


čia aibių A ir B sąjunga $A \cup B$ yra nuspalvinta pilkai.

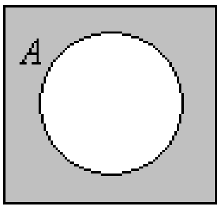
- Aibių A ir B *sankirta* $A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ ir } x \in B\}$.



- Aibių A ir B *skirtumas* $A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.



- Aibės $A \subseteq U$ *papildinys* (iki aibės U) $\overline{A} = U \setminus A = \{x\colon x \notin A\}$. Aišku, kad aibė U turi būti nurodyta arba nuspėjama iš konteksto.



1.1 pavyzdys. Nagrinėsime natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ poaibius, t.y. $U = \mathbb{N}$. Apibrėžę

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_2 &= \{x\colon x \text{ dalijasi iš } 2\} = \{0, 2, 4, \ldots\} \quad \text{ir} \\ \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalijasi iš } 3\} = \{0, 3, 6, \ldots\}, \end{aligned}$$

gauname

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalijasi iš 2 arba 3}\} &&= \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, \ldots\}; \\ \mathbb{N}_2 \cap \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalijasi iš 6}\} &&= \{0, 6, 12, \ldots\}; \\ \mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 3}\} &&= \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}; \\ \overline{\mathbb{N}_2} &= \{x\colon x \text{ nesidalija iš 2}\} &&= \{1, 3, 5, \ldots\}. \end{aligned}$$

□

1.3 Aibių operacijų savybės

Egzistuoja ryšys tarp aibių operacijų ir loginių operacijų. Aibių operacijos $\cup, \cap$ ir $^{-}$ (papildinys) atitinka logines operacijas $\vee, \wedge$ ir $\neg$, aibės U (universali aibė) ir $\varnothing$ (tuščia aibė) atitinka logines konstantas t ir k. Tada aibių operacijos irgi tenkina dėsnius, kuriuos jūs jau žinote iš matematinės logikos: visiems universalios aibės U poaibiams A, B ir C galioja

(1) (a) $A \cup B = B \cup A$,
(b) $A \cap B = B \cap A$ (*komutatyvumas*),

(2) (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociatyvumas*),

(3) (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributyvumas*),

(4) (a) $A \cup \varnothing = A$,
(b) $A \cap \varnothing = \varnothing$,

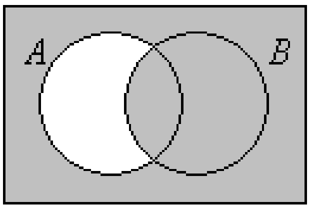
(5) $\overline{\overline{A}} = A$,

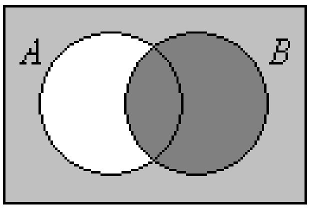
(6) (a) $A \cup A = A$,
(b) $A \cap A = A$ (*idempotentumas*),

(7) (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*De Morgano dėsniai*).

Aibių visumą, kurioje galioja dėsniai (1)–(7), vadina *aibių algebra*.

Kaip galima įrodyti šiuos dėsnius? Yra keli įrodymo būdai. Nesudėtingas aibių algebros formules patogu patikrinti, naudojant Veno diagramas. Pavyzdžiui, aibių lygybę $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ demonstruoja tokios diagramos:





Kairiojoje diagramoje pilkai nuspalvinta aibė $\overline{A \setminus B}$, o dešiniojoje diagramoje aibę $\overline{A} \cup B$ atitinka ta sritis, kuri nuspalvinta bent vienu pilkos spalvos atspalviu. Matome, kad tai ta pati aibė.

Kitas aibių lygybių įrodymo būdas — įrodyti, naudojantis aibių operacijų apibrėžimais. Įrodykime, pavyzdžiui, De Morgano dėsnį (7)(a).

Įrodymas. Kad įrodytume, kad dvi aibės C ir D yra lygios, užtenka parodyti, kad $C \subseteq D$ ir $D \subseteq C$. Pradėkime nuo įrodymo, kad $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Pagal poaibio apibrėžimą, reikia parodyti, kad kiekvienas aibės $\overline{A \cup B}$ elementas priklauso ir aibei $\overline{A} \cap \overline{B}$. Tarkime, $x \in \overline{A \cup B}$. Parodysime, kad $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Tai, kad $x \in \overline{A \cup B}$, reiškia, kad $x \notin A \cup B$, t.y. x nepriklauso nei aibei A, nei aibei B ($x \notin A$ ir $x \notin B$). Kitaip tariant, $x \in \overline{A}$ ir $x \in \overline{B}$, t.y. $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Taigi bet kuris aibės $\overline{A \cup B}$ elementas priklauso ir aibei $\overline{A} \cap \overline{B}$, todėl $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Iš kitos pusės, tegu $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Reikia parodyti, kad $x \in \overline{A \cup B}$. Panaudosime tuos pačius samprotavimus, tik iš kitos pusės. Kadangi $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, tai $x \in \overline{A}$ ir $x \in \overline{B}$, o tai reiškia, kad x nepriklauso nei aibei A, nei aibei B. Todėl $x \notin A \cup B$, iš kur ir gauname, kad $x \in \overline{A \cup B}$. Taigi $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Parodėme, kad $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ ir $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, o tai reiškia, kad $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Įrodymas baigtas. □

Kaip ir logikos dėsnių atveju, kai kuriuos iš šių dėsnių galima apibendrinti didesniam narių skaičiui. Pavyzdžiui, De Morgano dėsnius galime apibendrinti taip:

(7) (a′) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$,

(b′) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.

Pastebėkime, kad dėsnius (3)(b), (6)(b) ir (7)(b) galima gauti atitinkamai iš dėsnių (3)(a), (6)(a) ir (7)(a), pakeitus juose ženklus $\cup$ į $\cap$ ir atvirkščiai. Pasirodo, aibių algebroje galioja taisyklė, vadinama *dualumo principu*:

> Jei turime teisingą aibių lygybę, sudarytą iš universalios aibės U poaibių ir operacijų $\cup$, $\cap$ bei $^-$ (papildinio), tai pakeitę abiejose lygybės pusėse ženklus $\cup$ į $\cap$, $\cap$ į $\cup$, $\varnothing$ į U ir U į $\varnothing$, vėl gausime teisingą aibių lygybę, vadinamą *dualia lygybe*.

Pavyzdžiui, iš (4) galime gauti teisingas lygybes

(8) (a) $A \cap U = A$;

(b) $A \cup U = U$.

Dualumo principo įrodymas. Dualumo principas išplaukia iš (7)(a′) ir (7)(b′) lygybių. Parodysime pavyzdžiu. Iš (3)(a) gaukime jai dualią lygybę (3)(b). Lygybė (3)(a) — tai dviejų aibių lygybė. Kadangi aibės lygios, tai jų papildiniai irgi lygūs:

$$\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}.$$

Na, o dabar abiejose lygybės pusėse, naudodamiesi (7)(a′) ir (7)(b′) lygybėmis, įkėlinėjame papildinio ženklus į skliaustus tol, kol nebeliks ką įkelti:

$$\overline{A} \cup \overline{B \cup C} = \overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap C},$$
$$\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}). \qquad (*)$$

Pažymėkime $X = \overline{A}$, $Y = \overline{B}$ ir $Z = \overline{C}$. Gauname lygybę

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \qquad (**)$$

Be to, lygybė (3)(a) yra teisinga visoms aibėms A, B ir C, todėl lygybė $(*)$ taip pat yra teisinga visoms aibėms A, B ir C. Kai A, B ir C perbėga visas aibes, jų papildiniai X, Y ir Z irgi perbėga visas aibes, todėl lygybė $(**)$ yra teisinga visoms aibėms X, Y ir Z. Gavome (3)(b) lygybę.

Visiškai taip pat galėtume gauti dualią lygybę, jei į pradinę lygybę įeitų kurios nors aibės papildinys, tuščia aibė ar universali aibė.

1.4 Dekarto sandauga

Norėdami apibrėžti paskutinę aibių operaciją, pateikiame dar keletą sąvokų.

Bet kokių objektų (nebūtinai skirtingų) rinkinį vadiname *šeima*. Pavyzdžiui, $\mathcal{A} = \{0, 1, 1, 1\}$ yra šeima. Baigtinę šeimą, turinčią m elementų, vadiname *m-šeima*. Pavyzdžiui, $\mathcal{A}$ yra 4-šeima. Sutvarkytą šeimą vadiname *seka*. Pavyzdžiui, $\alpha = (0, 1, 1, 1)$ yra seka. Sekoje turi reikšmę ne tik pats objektas, bet ir jo vieta. Sukeitę du skirtingus objektus vietomis, gauname kitą seką. Pavyzdžiui, α ir $\beta = (1, 0, 1, 1)$ yra dvi skirtingos sekos. Baigtines sekas iš m objektų dar vadina *m-vektoriais* arba tiesiog *vektoriais*, o begalines sekas — tiesiog sekomis. Pavyzdžiui, α ir β yra du skirtingi 4-vektoriai, o $\gamma^\infty = 00110011\ldots$ yra begalinė periodinė seka. m-vektoriaus $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ i-tąjį elementą α_i vadina vektoriaus α *i-tąja koordinate*. Pavyzdžiui, vektoriaus β trečioji koordinatė yra 1.

Atkreipkite dėmesį, kad, kai elementų rinkinys nėra sutvarkytas (šeima, aibė), vartojami riestiniai skliaustai (pavyzdžiui, $\mathcal{A} = \{0, 1, 1, 1\}$). Kai elementų rinkinys yra sutvarkytas (vektorius, seka), vartojami paprasti skliaustai (pavyzdžiui, $\alpha = (0, 1, 1, 1)$).

Dažnai praleisime kablelius ir skliaustus sekų bei vektorių žymėjime, pavyzdžiui, rašysime $\alpha = 0111$ ir pan.

Netuščių aibių $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *Dekarto sandauga* vadiname aibę

$$A_1 \times \cdots \times A_m = \big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\colon\ \alpha_i \in A_i, i = 1, \ldots, m\big\}.$$

Tai yra aibė visų galimų m-vektorių, kurių i-toji koordinatė priklauso aibei A_i.

1.2 pavyzdys. Jei $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, tai $A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$. □

1.3 pavyzdys. Tegu $V = \{a, b, \ldots, h\}$ (vertikalės), $H = \{1, 2, \ldots, 8\}$ (horizontalės). Tada $L = V \times H = \{a1, a2, \ldots, h8\}$ — šachmatų lentos laukelių aibė (vietoje vektoriaus $(a, 1)$ čia mes naudojame šachmatininkams įprastą žymėjimą $a1$). □

1.4 teorema. *Jei $A_1, \ldots A_m$ yra baigtinės netuščios aibės, tai $|A_1 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \times \cdots \times |A_m|$.*

Įrodymas. Lygybė akivaizdi, nes m-vektoriaus $\alpha \in A_1 \times \cdots \times A_m$ i-oji koordinatė α_i gali būti bet kuris iš $|A_i|$ aibės A_i elementų ($i = 1, \ldots, m$). Todėl skirtingų m-vektorių bus $|A_1| \times \cdots \times |A_m|$. □

Jei $A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A$, tai aibių $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Dekarto sandaugą žymėsime A^m ir vadinsime aibės A *m-uoju Dekarto laipsniu*, o jos elementus — *m-vektoriais aibėje A* (arba *virš aibės A*). Vektorius aibėje $\{0, 1\}$ vadiname *dvinariais* (arba *binariniais*). Taigi $\alpha = (0, 1, 1, 1)$ yra dvinaris vektorius, $\alpha \in \{0, 1\}^4$. Praplėtę aibės Dekarto laipsnio apibrėžimą, simboliu A^∞ žymėsime aibę begalinių sekų, sudarytų iš aibės A elementų. Pavyzdžiui, $\gamma^\infty = 00110011\ldots \in \{0, 1\}^\infty$.

2 Funkcijos

Atitiktimi tarp netuščių aibių A ir B vadiname bet kokį netuščią poaibį $F \subseteq A \times B$.

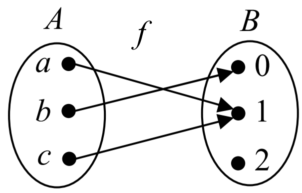
2.1 pavyzdys. Tegu $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2\}$. Tada $F = \{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}$ ir $F' = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (c, 0)\}$ yra atitiktys. □

Atitiktis F — *funkcinė*, jei kiekvienam $a \in A$ egzistuoja vienintelis vektorius $(a, b) \in F$.

2.2 pavyzdys. Paskutinio pavyzdžio atitiktis F yra funkcinė, nes aibėje F yra vienintelis vektorius, kurio pirmoji koordinatė yra a, taip pat vienintelis vektorius su b, ir taip pat su c. Atitiktis F' nėra funkcinė, nes yra trys vektoriai su a, ir jokio su b. □

Jei $F \subseteq A \times B$ — funkcinė atitiktis, tai sakome, kad F apibrėžia *funkciją* (*atvaizdį*) $f : A \to B$, o vektoriaus $(a, b) \in F$ koordinatę b žymime $f(a)$ ir vadiname elemento a *vaizdu.*

2.3 pavyzdys. Kadangi 2.1 pavyzdžio atitiktis yra funkcinė, tai ji apibrėžia funkciją $f : A \to B$ tokią, kad $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ ir $f(c) = 1$. Elemento a vaizdas yra 1, elemento b — 0, ir elemento c — 1. Grafiškai galėtume pavaizduoti taip:



□

Taigi funkcija $f : A \to B$ yra atitiktis tarp A ir B, priskirianti kiekvienam aibės A elementui kokį nors aibės B elementą. Aibė A vadinama funkcijos f *apibrėžimo sritimi*, o aibės B poaibis $R_f = f(A) = \{b \in B\colon \exists a \in A \text{ toks, kad } b = f(a)\}$ vadinamas funkcijos f *reikšmių sritimi* (ženklas '$\exists$' reiškia "egzistuoja", taip pat vartosime ženklą '$\forall$', kuris reiškia "kiekvienam"). Beje, aibę $f(A)$ galima apibrėžti, vartojant trumpesnį užrašą: $f(A) = \{f(a)\colon a \in A\}$ — tai yra aibė reikšmių $f(a)$, kai a perbėga aibę A. Matome, kad $f(A)$ yra tiesiog aibės A elementų vaizdų aibė.

2.4 pavyzdys. 2.3 pavyzdžio funkcijos apibrėžimo sritis yra $A = \{a, b, c\}$, o reikšmių sritis yra $R_f = f(A) = \{0, 1\} \subset B$. □

Jei $A' \subseteq A$, tai aibės B poaibį $f(A') = \{f(a)\colon a \in A'\}$ vadiname aibės A' *vaizdu.*

2.5 pavyzdys. Jei $A' = \{a, c\} \subset A$, tai aibės A' vaizdas $f(A') = \{1\} \subset B$, kur f yra 2.3 pavyzdžio funkcija. □

Aibės A poaibį $f^{-1}(b) = \{a \in A\colon f(a) = b\}$ vadiname elemento $b \in B$ *pirmavaizdžiu.* Tai aibė elementų iš A, kuriuos funkcija f atvaizduoja į b.

2.6 pavyzdys. Tęsiame ankstesnį pavyzdį. Elemento $0 \in B$ pirmavaizdis yra $f^{-1}(0) = \{b\} \subset A$, elemento 1 — $f^{-1}(1) = \{a, c\}$, ir elemento 2 — $f^{-1}(2) = \varnothing$. □

Lygiai taip pat apibrėžiamas ir aibės $B' \subseteq B$ *pirmavaizdis* $f^{-1}(B') = \{a \in A\colon f(a) \in B'\}$ — aibė elementų iš A, kuriuos funkcija f atvaizduoja į kurį nors poaibio B' elementą. Nesunku įsitikinti, kad aibės B' pirmavaizdis yra lygus jos elementų pirmavaizdžių sąjungai, t.y.

$$f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b).$$

2.7 pavyzdys. Tęsiame ankstesnį pavyzdį. Aibės $\{0, 2\}$ pirmavaizdis yra $f^{-1}(\{0, 2\}) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(2) = \{b\} \cup \varnothing = \{b\}$, o aibės $\{0, 1\}$ — $f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = \{b\} \cup \{a, c\} = A$. □

Kai aibės A ir B yra baigtinės, funkciją $f: A \to B$ taip pat vadiname *baigtine*. Baigtinę funkciją galime vaizduoti jos reikšmių lentele. Jei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, tai baigtinės funkcijos $f: A \to B$ reikšmių lentelė bus tokia:

x	$f(x)$
a_1	$f(a_1)$
a_2	$f(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$f(a_n)$

2.8 pavyzdys. 2.3 pavyzdžio funkcija gali būti pavaizduota tokia reikšmių lentele:

x	$f(x)$
a	1
b	0
c	1

□

Funkcijos $f: A \to B$, pasižyminčios svarbiomis savybėmis, turi dar kitus pavadinimus.

2.9 apibrėžimas. *Tarkime, turime funkciją $f: A \to B$.*

- *Funkcija f vadinama* injekcija *(arba* injektyviu atvaizdžiu*), jei bet kurių dviejų skirtingų aibės A elementų a_1 ir a_2 vaizdai $f(a_1)$ ir $f(a_2)$ irgi yra skirtingi. Formaliai tai galime užrašyti taip*[1]*:*
$$\forall a_1, a_2 \in A \ (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)).$$

- *Funkcija f vadinama* siurjekcija *(arba* siurjektyviu atvaizdžiu*), jei $R_f = B$, t.y. jei į kiekvieną aibės B elementą funkcija f atvaizduoja bent vieną aibės A elementą, arba, kitaip tariant, jei jokio aibės B elemento pirmavaizdis nėra tuščias.*

- *Funkcija f vadinama* bijekcija *(arba* bijektyviu atvaizdžiu*), jei f — injekcija ir siurjekcija kartu.*

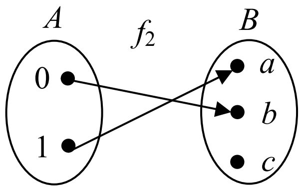
2.10 pastaba. Naudodami kontrapozicijos dėsnį, gauname kitą injekcijos apibrėžimą: f — injekcija, jei $\forall a_1, a_2 \in A \ (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$, t.y. jei visiems aibės A elementams galioja tokia savybė: iš to, kad kažkokių dviejų elementų vaizdai lygūs, gauname, kad tai vienas ir tas pats elementas.

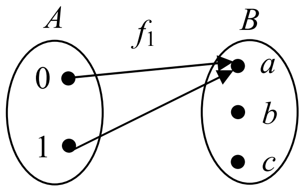
2.11 pavyzdys. Tegu

$$A = \{0, 1\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad F_1 = \big\{(0, a), (1, a)\big\}, \quad F_2 = \big\{(0, b), (1, a)\big\}.$$

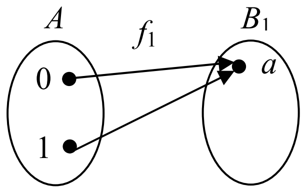
1. Tarkime, atitiktis F_i, $i = 1, 2$, apibrėžia funkciją $f_i: A \to B$. Tada f_2 — injekcija, bet ne siurjekcija, o f_1 — nei injekcija, nei siurjekcija.

[1]Implikacijos ženklas $\Rightarrow$ dažnai vartojamas vietoj "iš to, kad..., išplaukia, kad...", arba "jei..., tai...". Šiuo atveju apibrėžimas turėtų būti skaitomas taip: f — injekcija, jei visiems $a_1, a_2 \in A$ iš to, kad $a_1 \neq a_2$, išplaukia, kad $f(a_1) \neq f(a_2)$.

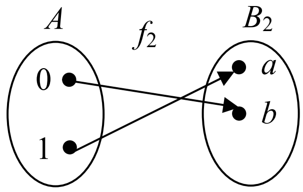




2. Tarkime, F_1 apibrėžia $f_1 : A \to B_1 = \{a\}$. Tada f_1 — siurjekcija, bet ne injekcija.



3. Tarkime, F_2 apibrėžia $f_2 : A \to B_2 = \{a, b\}$. Tada f_2 — bijekcija.



$\square$

Šis pavyzdys taip pat parodė, kad funkcijos $f : A \to B$ savybės priklauso ne tik nuo jos įgyjamų reikšmių, bet ir nuo aibių A ir B. Kaip matėme, pakeitus vien aibę B, funkcija tapo siurjekcija.

Bijekciją dar vadina *abipusiškai vienareikšmiu atvaizdavimu* (arba *abipusiškai vienareikšme atitiktimi*, *abipusiškai vienareikšmiu atvaizdžiu*), kadangi šiuo atveju ne tik kiekvienam $a \in A$ priskiriamas vienintelis aibės B elementas b, žymimas $f(a)$, bet ir kiekvienam $b \in B$ egzistuoja vienintelis $a \in A$ toks, kad $f(a) = b$. Pažymėję tokį elementą $a = g(b)$, gauname funkciją $g : B \to A$, kuri vadinama *atvirkštine* funkcijai f ir žymima f^{-1}.

2.12 pavyzdys. Imkime tą pačią bijekciją $f_2 : \{0, 1\} \to \{a, b\}$ iš paskutinio pavyzdžio, apibrėžtą atitikties $F_2 = \big\{(0, b), (1, a)\big\}$. Tada $f_2(0) = b$, $f_2(1) = a$, ir atvirkštinė funkcija $f_2^{-1} : \{a, b\} \to \{0, 1\}$ įgyja tokias reikšmes: $f_2^{-1}(a) = 1$, $f_2^{-1}(b) = 0$. $\square$

Nesunku pastebėti, kad kiekvienam $a \in A$ turime $f^{-1}(f(a)) = a$. Taip pat aišku, kad jei A ir B yra baigtinės aibės, o $f : A \to B$ — bijekcija, tai A ir B turi po tiek pat elementų.

Tuo pasinaudodami, rasime duotos aibės A poaibių aibės $\mathcal{P}(A)$ galią. Priminsime, kad baigtinės aibės A galia $|A|$ vadiname jos elementų skaičių.

2.13 teorema. *Jei aibė A yra baigtinė, tai $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

Įrodymas. Lygybę įrodysime, remdamiesi 1.4 teorema, iš kurios išplaukia, kad $|\{0, 1\}^n| = 2^n$. Jei A tuščia, tai $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ ir turime teisingą lygybę $1 = 2^0$.

Tarkime, A — netuščia, t.y. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Apibrėžkime funkciją $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^n$, kuri kiekvienam $B \subseteq A$ priskiria n-vektorių $\alpha = \chi(B)$ su koordinatėmis

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B; \\ 0, & a_i \notin B. \end{cases}$$

Vektorius $\chi(B)$ dar vadinamas poaibio B *charakteringuoju vektoriumi.* Jis nusako, kurie aibės A elementai priklauso poaibiui B, o kurie ne. Pavyzdžiui, jei $A = \{a, b, c, d\}$, tai $\chi(\{a\}) = 1000$, $\chi(\{b, d\}) = 0101$, $\chi(A) = 1111$, o $\chi(\varnothing) = 00$.

Nesunku įsitikinti, kad kiekvieną binarinį vektorių $\alpha \in \{0,1\}^n$ atitinka lygiai vienas poaibis $B \in \mathcal{P}(A)$ toks, kad $\alpha = \chi(B)$. Taigi χ yra bijekcija ir $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. □

3 Sąryšiai

3.1 Pagrindiniai apibrėžimai

3.1 apibrėžimas. n-viečiu *(*n-nariniu*)* sąryšiu *aibėje A vadiname bet kokį poaibį $R \subseteq A^n$.*

Pavyzdžiui, Pitagoro skaičių trejetai sudaro trivietį sąryšį $P = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = z^2,\ x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ sveikųjų skaičių aibėje. Toliau nagrinėsime tik dviviečius (binarinius) sąryšius, kuriuos vadinsime tiesiog sąryšiais. Pavyzdžiui, kiekvieną funkciją $f\colon A \to A$ atitinka sąryšis $\{(a, f(a))\colon a \in A\}$ (mes jį vadinome atitiktimi).

3.2 pavyzdys. Funkciją $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, atitinka sąryšis $R = \{(0,1), (1,1)\}$.□

Jei $(a, b) \in R$, tai sakome, kad a ir b yra *susieti sąryšiu* R ir žymime $a\,R\,b$. Priešingu atveju žymime $\neg(a\,R\,b)$.

3.3 pavyzdys. Tegu $A = \{2, 4, 7\}$, $R = \{(2,4), (2,7), (4,7)\}$. Tada rašome $2\,R\,4$, $2\,R\,7$, $4\,R\,7$, $\neg(4\,R\,2)$. □

Kodėl toks žymėjimas? Daugeliu atvejų tai natūralus žymėjimas. Pavyzdžiui, atkreipkite dėmesį, kad šio pavyzdžio sąryšį galėtume pavadinti “mažiau” (nes sąryšiui priklauso tik tos poros $(a, b) \in A^2$, kurioms $a < b$), todėl natūraliau šį sąryšį būtų žymėti ženklu '$<$', ir tada $2\,R\,4$, $2\,R\,7$ bei $4\,R\,7$ būtų užrašomi $2 < 4$, $2 < 7$ ir $4 < 7$. Dažnai, šnekant apie sąryšius, ir turimi omenyje tokie “natūralūs” sąryšiai, kaip “daugiau”, “mažiau”, “daugiau arba lygu”, “mažiau arba lygu”, “lygu” skaičių aibėje, “ekvivalentu” loginių formulių aibėje, “yra poaibis”, “yra tikrinis poaibis”, “lygu” universalios aibės poaibių aibėje ir t.t. Kaip matome, kiekvienu atveju kai kurios objektų poros yra susietos sąryšiu, o kai kurios ne. Pavyzdžiui, kai sąryšis yra “mažiau” skaičių aibėje, tai skaičiai 2 ir 3 yra susieti tuo sąryšiu (nes $2 < 3$), o 4 ir 3 ne (nes netiesa, kad $4 < 3$). Pačiu bendriausiu atveju sąryšis apibrėžiamas tiesiog išvardijant elementų poras, susietas tuo sąryšiu.

Baigtinėje aibėje $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ apibrėžtą sąryšį R galima nusakyti sąryšio matrica.

3.4 apibrėžimas. Sąryšio R matrica — *tai $n \times n$ matrica M, kurios elementas M_{ij}, esantis i-tosios eilutės ir j-tojo stulpelio susikirtime, yra lygus* 1*, jei a_i ir a_j yra susieti sąryšiu R, ir* 0*, jei nėra:*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{jei } a_i\,R\,a_j, \\ 0, & \textit{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Pavyzdžiui, 3.3 pavyzdžio sąryšio matrica yra

$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Čia mes aiškumo dėlei sunumeravome eilutes ir stulpelius aibės A elementais.

3.2 Refleksyvus sąryšis

3.5 apibrėžimas. *Sąryšį R aibėje A vadiname* refleksyviu*, jei $\forall a \in A\ (a\,R\,a)$, t.y. jei kiekvienas aibės A elementas sąryšiu R yra susietas su savimi pačiu.*

Pavyzdžiui, 3.3 pavyzdžio sąryšis nėra refleksyvus, nes netiesa, kad $2 < 2$ (t.y. pora $(2, 2) \notin R$). Sąryšis yra refleksyvus tada ir tik tada, kai jo matricos pagrindinėje įstrižainėje[1] nėra nei vieno nulio (yra tik vienetai). Tai aiškiai matosi iš to, kad ant sąryšio matricos pagrindinės įstrižainės esantys elementai atitinka poras (a, a).

3.6 pavyzdys. Sąryšis $\{(2, 2), (4, 4), (7, 7), (4, 2), (2, 7)\}$ aibėje $A = \{2, 4, 7\}$ yra refleksyvus. Jo matrica yra

$$M = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Pagrindinėje įstrižainėje yra tik vienetai. □

3.3 Antirefleksyvus sąryšis

3.7 apibrėžimas. *Sąryšį R aibėje A vadiname* antirefleksyviu*, jei neegzistuoja tokio $a \in A$, kad $a\,R\,a$.*

Kitaip tariant, sąryšis R yra antirefleksyvus, jei $\forall a \in A\ \neg(a\,R\,a)$. Sąryšis yra antirefleksyvus tada ir tik tada, kai jo matricos pagrindinėje įstrižainėje nėra nei vieno vieneto (yra tik nuliai). 3.3 pavyzdžio sąryšis yra antirefleksyvus, nes $\forall a \in A\ (a, a) \notin R$.

Taigi sąryšis gali būti refleksyvus (tada jis nebus antirefleksyvus, jo matricos pagrindinėje įstrižainėje bus tik vienetai), antirefleksyvus (tada jis nebus refleksyvus, jo matricos pagrindinėje įstrižainėje bus tik nuliai), ir nei toks, nei toks (tada jo matricos pagrindinėje įstrižainėje bus ir vienetų, ir nulių). Jis negali būti ir refleksyvus, ir antirefleksyvus.

3.4 Simetrinis sąryšis

3.8 apibrėžimas. *Sąryšį R aibėje A vadiname* simetriniu*, jei $\forall a, b \in A\ (a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a)$, t.y. jei kažkokie elementai a ir b yra susieti sąryšiu, tai b ir a taip pat būtinai turi būti susieti.*

[1] $n \times n$ matricos M pagrindinę įstrižainę sudaro elementai M_{11}, M_{22},...,M_{nn}.

Taigi sąryšis bus simetrinis, jei bet kuriems dviem elementams a ir b arba $a\,R\,b$ ir $b\,R\,a$, arba nei $a\,R\,b$, nei $b\,R\,a$. Todėl simetrinio sąryšio matricoje vienetai eina poromis: jei yra $M_{ij} = 1$, tai M_{ji} irgi lygu 1, o jei $M_{ij} = 0$, tai ir $M_{ji} = 0$. Taigi simetrinio sąryšio matrica yra simetrinė pagrindinės įstrižainės atžvilgiu. Ant pagrindinės įstrižainės gali būti bet kas, tai neturi reikšmės sąryšio simetriškumui. Iš tikrųjų, jei $a\,R\,a$, tai ir $a\,R\,a$, todėl poroms (a, a) simetriškumo sąlyga visada patenkinta.

3.9 pavyzdys. 3.3 pavyzdžio sąryšis nėra simetrinis, nes $2\,R\,4$, bet netiesa, kad $4\,R\,2$. Simetrinio sąryšio toje pačioje aibėje $A = \{2, 4, 7\}$ pavyzdys būtų $R' = \{(2, 4), (2, 7), (4, 2), (4, 4), (7, 2), (7, 7)\}$. Jo matrica yra

$$M' = \begin{array}{r|ccc} & 2 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$ □

3.5 Antisimetrinis sąryšis

3.10 apibrėžimas. *Sąryšį R aibėje A vadiname* antisimetriniu, *jei*

$$\forall a, b \in A\ (a\,R\,b\ \wedge\ b\,R\,a \Rightarrow a = b). \tag{1}$$

Pasinaudojus kontrapozicijos dėsniu ($p \to q \sim \neg q \to \neg p$), antisimetriškumo apibrėžimą galima suformuluoti ir taip:

$$\forall a, b \in A\ (a \neq b \Rightarrow \neg(a\,R\,b\ \wedge\ b\,R\,a)). \tag{2}$$

Jei dar pritaikytume De Morgano dėsnį, gautume

$$\forall a, b \in A\ (a \neq b \Rightarrow \neg(a\,R\,b)\ \vee\ \neg(b\,R\,a)). \tag{3}$$

O pasinaudoję implikacijos pašalinimo dėsniu ($p \to q \sim \neg p \vee q$), antisimetrinio sąryšio apibrėžimą galėtume užrašyti ir taip:

$$\forall a, b \in A,\ a \neq b,\ (a\,R\,b\ \Rightarrow\ \neg(b\,R\,a)). \tag{4}$$

Formulės (1)-(4) pateikia ekvivalenčius antisimetrinio sąryšio apibrėžimus, ir mes galime naudoti tą apibrėžimą, kuris lengviau taikomas. Dažnai (4) formule pateiktas apibrėžimas yra aiškiausias iš visų.

Savais žodžiais tariant, sąryšis R aibėje A yra antisimetrinis, jei jokiems skirtingiems aibės A elementams a ir b nėra vienu metu ir $a\,R\,b$, ir $b\,R\,a$. Jei kažkuris elementas M_{ij}, $i \neq j$, antisimetrinio sąryšio matricoje M yra lygus 1, tai M_{ji} būtinai bus 0. Ant pagrindinės įstrižainės esantys elementai vėlgi reikšmės neturi.

3.11 pavyzdys. 3.3 pavyzdžio sąryšis yra antisimetrinis. Antisimetrinis yra ir sąryšis $R'' = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (7, 2)\}$ toje pačioje aibėje $A = \{2, 4, 7\}$. Jo matrica bus

$$M'' = \begin{array}{r|ccc} & 2 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$ □

3.12 pastaba. Koks ryšys tarp simetriškumo ir antisimetriškumo?

Tarkime, bent viena pora (a, b) su skirtingais elementais a ir b priklauso sąryšiui R (sąryšio matricoje yra vienetų ne tik pagrindinėje įstrižainėje). Tada, jei sąryšis yra simetrinis, pora (b, a) irgi priklausys R, todėl sąryšis nebus antisimetrinis. Jei sąryšis yra antisimetrinis, tai pora (b, a) nepriklausys R, ir sąryšis nebus simetrinis. Be abejo, gali būti, kad sąryšis nebus nei simetrinis, nei antisimetrinis. Taigi šiuo atveju sąryšis bus arba simetrinis (bet ne antisimetrinis), arba antisimetrinis (bet ne simetrinis), arba nei toks, nei toks.

Dabar tarkime priešingai — jokia pora (a, b) su skirtingais elementais a ir b nepriklauso sąryšiui R (vienetai sąryšio matricoje gali būti tik pagrindinėje įstrižainėje). Tokiu atveju sąryšis tenkins ir simetriškumo, ir antisimetriškumo apibrėžimus, todėl bus vienu metu ir simetrinis, ir antisimetrinis.

3.6 Tranzityvus sąryšis

3.13 apibrėžimas. *Sąryšį R aibėje A vadiname* tranzityviu*, jei $\forall a, b, c \in A$ $(a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c)$.*

Ši savybė labai natūrali, pavyzdžiui, sąryšis "daugiau" sveikųjų skaičių aibėje yra tranzityvus. Iš tikrųjų, jei $a > b$ bei $b > c$, tai, aišku, ir $a > c$. 3.3 pavyzdžio sąryšis R irgi tranzityvus. 3.11 pavyzdžio sąryšis R'' nėra tranzityvus, nes $7\,R\,2$ ir $2\,R\,4$, bet $\neg(7\,R\,4)$.

3.7 Ekvivalentumo sąryšis

3.14 apibrėžimas. *Refleksyvų, simetrinį ir tranzityvų sąryšį vadiname* ekvivalentumo *sąryšiu.*

Pavyzdžiui, žmonių aibėje sąryšis "gyventi tame pačiame mieste" yra ekvivalentumo sąryšis. Patikrinkite.

Ekvivalentumo sąryšis pasižymi tokia svarbia savybe. Jei aibėje A apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis R, tai aibę A galima suskaidyti į netuščius nesikertančius poaibius tokiu būdu, kad tame pačiame poaibyje esantys elementai yra susieti sąryšiu R, o esantys skirtinguose — nėra susieti. Tie poaibiai vadinami *ekvivalentumo klasėmis*. Pavyzdžiui, ekvivalentumo sąryšio "gyventi tame pačiame mieste" ekvivalentumo klasės yra tame pačiame mieste gyvenančių žmonių aibės, pavyzdžiui, viena klasė būtų vilniečiai, kita kauniečiai, trečia mosėdiškiai ir t.t. Iš kitos pusės, bet koks aibės A suskaidymas į netuščius nesikertančius poaibius apibrėžia ekvivalentumo sąryšį "priklausyti tam pačiam poaibiui" (patikrinkite!).

Lygybės sveikųjų skaičių aibėje, aibių aibėje, ekvivalentumo loginių formulių aibėje sąryšiai yra ekvivalentumo sąryšių pavyzdžiai. Patikrinkite.

3.8 Tvarkos sąryšis

3.15 apibrėžimas. *Refleksyvų, antisimetrinį ir tranzityvų sąryšį vadiname* negriežtos tvarkos *sąryšiu, o antirefleksyvų, antisimetrinį ir tranzityvų sąryšį vadiname* griežtos tvarkos *sąryšiu. Abu šie sąryšiai vadinami* tvarkos *sąryšiais.*

Pavyzdžiui, sąryšis "būti ne didesniu" ($\leqslant$) natūraliųjų skaičių aibėje yra negriežtos tvarkos sąryšis, o sąryšiai "būti viršininku" žmonių aibėje ir "būti didesniu" ($>$) natūraliųjų skaičių aibėje yra griežtos tvarkos sąryšiai. 3.3 pavyzdžio sąryšis taip pat yra griežtos tvarkos sąryšis. Patikrinkite visa tai.

3.16 apibrėžimas. *Elementai $a, b \in A$ vadinami* palyginamais *(tvarkos sąryšio R atžvilgiu), jei $a\,R\,b$ arba $b\,R\,a$.*

3.17 pavyzdys. Prisiminkime 3.3 pavyzdžio sąryšį R. Elementai 2 ir 4 yra palyginami sąryšio R atžvilgiu, nes $2\,R\,4$. Elementai 7 ir 2 taip pat yra, nes $2\,R\,7$. Nepalyginamų elementų pavyzdys pateiktas 3.20 pavyzdyje. □

3.18 apibrėžimas. *Aibė A, kurioje apibrėžtas tvarkos sąryšis R, vadinama* sutvarkyta*. Sutvarkyta aibė vadinama* visiškai sutvarkyta*, jei bet kurie du skirtingi aibės A elementai yra palyginami. Tokiu atveju sąryšis R vadinamas* tiesinės tvarkos *sąryšiu. Priešingu atveju aibė vadinama* iš dalies sutvarkyta*, o sąryšis R vadinamas* dalinės tvarkos *sąryšiu.*

Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė su sąryšiu "būti ne didesniu" yra visiškai sutvarkyta aibė, o kurios nors įmonės darbuotojų aibė su sąryšiu "būti viršininku" yra iš dalies sutvarkyta, nes, pavyzdžiui, du darbuotojai iš skirtingų skyrių nėra palyginami.

3.9 Pavyzdžiai

3.19 pavyzdys. Tegu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ir

$$\begin{aligned}
R_1 &= \big\{(a,a)\colon a \in A\big\} \\
&= \{(1,1), (2,2), \dots, (10,10)\} \quad (A^2 \text{ „įstrižainė"}), \\
R_2 &= \big\{(a,b)\colon a, b \in A, a \leqslant b \text{ (nelygybė tarp natūrinių skaičių)}\big\} \\
&= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,10), (2,2), (2,3), \dots, (2,10), \dots, (9,9), (9,10), (10,10)\}, \\
R_3 &= \big\{(a,b)\colon a, b \in A, b - a \text{ dalijasi iš 3 be liekanos}\big\} \\
&= \{(1,1), (1,4), (1,7), (1,10), (2,2), (2,5), (2,8), (3,3), (3,6), (3,9), (4,1), (4,4), \dots\}, \\
R_4 &= R_2 \cap R_3.
\end{aligned}$$

Nesunku patikrinti, kad R_1 ir R_3 — ekvivalentumo sąryšiai, sąryšis R_1 suskaido aibę A į ekvivalentumo klases $\{1\}, \{2\}, \dots, \{10\}$, o sąryšis R_3 — į $\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}$. Be to, R_1, R_2 ir R_4 yra negriežtos tvarkos sąryšiai. Iš šių trijų tvarkos sąryšių tik su sąryšiu R_2 aibė A bus visiškai sutvarkyta.

Beje, sąlyga $a\,R_3\,b$ dažniau rašoma taip: $a \equiv b \bmod 3$. Galima apibendrinti šį sąryšį: jei n — bet koks natūralusis skaičius, tai $a \equiv b \bmod n$ reiškia, kad $b - a$ dalijasi iš n be liekanos (arba, kitaip sakant, a ir b padalįję iš n gauname tą pačią liekaną). □

3.20 pavyzdys. Dvinarių vektorių aibėje $\{0,1\}^n$ apibrėžkime sąryšį $\preceq$. Tegu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ir $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \{0,1\}^n$. Sakysime, kad α yra mažesnis arba lygus β ir žymėsime $\alpha \preceq \beta$, jei

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

Nesunku patikrinti, kad $\preceq$ yra negriežtos tvarkos sąryšis, taigi aibė $\{0,1\}^n$ su šiuo sąryšiu yra sutvarkyta. Tačiau, kai $n \geqslant 2$, ši aibė nėra visiškai sutvarkyta, nes, pavyzdžiui, vektoriai $(0, 1, \dots)$ ir $(1, 0, \dots)$ nėra palyginami. □

4 Skaičiosios aibės

4.1 Ekvivalenčios aibės

Tarkime, yra dvi baigtinės aibės A, B ir norime sužinoti, kurioje jų yra daugiau elementų. Galime tai atlikti skaičiuodami elementus abiejose aibėse. Tarkime, pirmojoje aibėje jų yra m, o antrojoje

— n. Jei $m > n$, tai aibėje A elementų yra daugiau negu aibėje B. Jei $m < n$, tai daugiau elementų yra aibėje B. Na, o jei $m = n$, tai abiejose aibėse yra po vienodą skaičių elementų.

Galima tai atlikti ir kitu būdu. Paaiškinsime pavyzdžiu. Norime žinoti, ar pakanka studentams vadovėlių. Išdalijame juos (suprantama, kiekvienam po vieną) ir žiūrime, ar liko vadovėlių. Jei taip, tai vadovėlių yra daugiau negu studentų. Jei ne, ir liko studentų, neturinčių vadovėlių, tai studentų yra daugiau. Jei vadovėlių neliko ir visi studentai turi po vadovėlį, tai studentų ir vadovėlių yra vienodas skaičius. Tokiu atveju tarp studentų ir vadovėlių aibių egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis (bijekcija). Antrasis dviejų aibių lyginimo būdas geresnis tuo, kad jį galima taikyti ir begalinėms aibėms.

4.1 apibrėžimas. *Dvi aibės A, B vadinamos* ekvivalenčiomis*, jei tarp jų elementų egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Tokiu atveju žymėsime $A \sim B$.*

Nesunku įsitikinti, kad aibių ekvivalentumas yra ekvivalentumo sąryšis (patikrinkite patys, naudodamiesi ekvivalentumo sąryšio apibrėžimu).

Baigtinės aibės ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų elementų skaičius vienodas. Toliau panagrinėsime begalines aibes.

Kaip įprasta, raide $\mathbb{R}$ žymėsime realiųjų skaičių aibę, $\mathbb{Q}$ — racionaliųjų, $\mathbb{Z}$ — sveikųjų, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ — natūraliųjų bei $\mathbb{N}_{-} = \{1, 2, 3, ...\}$ — natūraliųjų skaičių aibę be 0.

4.2 Skaičiosios aibės

4.2 apibrėžimas. *Aibė vadinama* skaičiąja*, jei ji ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei.*

Iš apibrėžimo išplaukia, kad skaičioji aibė yra begalinė.

4.3 pavyzdys. Parodysime, kad sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra skaiti.

Nurodysime abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp aibių $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$ elementų. Ją žymėsime $\updownarrow$.

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \end{array}$$

Atitiktis gali būti užrašyta kuria nors funkcija ar taisykle. Norint įrodyti, kad kuri nors aibė A yra skaiti, pakanka nurodyti taisyklę, pagal kurią būtų gaunama seka visų aibės A elementų (kiekvienas elementas joje aptinkamas tik po vieną kartą). Todėl norint įrodyti, kad aibė $\mathbb{Z}$ skaičioji, pakanka parodyti, kad ją galima parašyti sekos pavidalu: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Iš tokio užrašymo matyti, kad sekoje yra visi $\mathbb{Z}$ elementai po vieną kartą. Pasirinkus kurį nors elementą, galima apskaičiuoti, kelintas jis yra sekoje.

O funkciniu pavidalu ši atitiktis gali būti užrašyta taip: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{jei } x > 0, \\ -2x, & \text{jei } x \leqslant 0. \end{cases} \qquad \square$$

Iš šio pavyzdžio matome, kad begalinė aibė gali būti ekvivalenti savo tikrajam poaibiui, ko niekada nebus baigtinių aibių atveju.

4.4 apibrėžimas. *Aibė vadinama* numeruojamąja*, jei ji yra baigtinė arba skaičioji.*

4.5 teorema. *Kiekvienas skaičiosios aibės poaibis yra numeruojamoji aibė.*

Įrodymas. Tarkime, kad $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ yra kuri nors skaičioji aibė ir $B \subseteq A$. Išbraukiame sekos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ visus tuos narius, kurie nepriklauso aibei B. Gauname seką, kuri yra begalinė ir kartu skaičioji, arba baigtinė. Teorema įrodyta. $\square$

4.6 išvada. *Jei $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ yra skaičioji aibė, tai $B = \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\}$ $(i > 0)$ — taip pat skaičioji.*

Taigi $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_-$. Jei A skaičioji, tai $A \sim \mathbb{N}$. Iš ekvivalenčių aibių tranzityvumo savybės išplaukia, kad A skaičioji tada ir tik tada, kai $A \sim \mathbb{N}_-$. Sekos narius dažniausiai pradedama numeruoti nuo vieneto. Tai siejama su nario sekoje eiliškumu: pirmasis narys, antrasis narys ir t.t. Mes taip pat kai kada skaičiosios aibės narius rašysime pradėdami indeksu 1: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Tarkime, $A = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ yra skaičioji aibė, kurios elementai yra skaičiosios aibės $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\}$. Tuomet aibė $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ vadinama *skaičiosios sistemos skaičiųjų aibių sąjunga.*

4.7 teorema. *Skaičiosios sistemos skaičiųjų aibių sąjunga yra skaičioji aibė.*

Įrodymas. Tarkime, $A = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ bei A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ yra skaičiosios aibės, $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\}$. Nurodysime taisyklę, kaip galima visus aibės $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ elementus parašyti sekos pavidalu.

$$\begin{array}{llllll l}
a_0^0 \to & a_1^0 & a_2^0 \to & a_3^0 & a_4^0 \to & a_5^0 & \cdots \\
a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \cdots & \\
a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \\
a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \cdots & \\
a_0^4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \cdots & \\
\cdots & & & & & &
\end{array}$$

Rodyklėmis nurodome tvarką, kuria rašomi elementai: $a_0^0, a_1^0, a_0^1, a_0^2, \ldots$ Tik prieš rašydami kurį nors elementą a_j^i, tikriname, ar nėra jam lygaus jau gautoje sekoje. Jei taip, tai a_j^i praleidžiame. Teorema įrodyta. $\square$

4.8 teorema. *Dviejų skaičiųjų aibių Dekarto sandauga yra skaičioji aibė.*

Įrodymas. Tarkime, yra dvi skaičios aibės $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ ir $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. Raide C_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ pažymėkime aibę $\{(a_i, b_0), (a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots\}$. Tuomet $A \times B$ lygi sąjungai skaičiųjų aibių $C_0, C_1, C_2, \ldots$ Pagal 4.7 teoremą, $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ yra skaičioji, kartu ir $A \times B$ yra skaičioji aibė. Teorema įrodyta. $\square$

4.9 išvada. *Baigtinio skaičiaus skaičiųjų aibių Dekarto sandauga yra skaičioji aibė.*

4.10 teorema. *Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaičioji.*

Įrodymas. Racionaliuosius skaičius galime parašyti trupmenomis $\frac{m}{n}$ (čia $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_-$), o pastarąsias — poromis (m, n). Kadangi $\mathbb{Z}$ bei $\mathbb{N}_-$ yra skaičios aibės, tai ir visų porų (m, n) aibė bus skaiti, nes, pagal 4.8 teoremą, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_-$ yra skaiti aibė. Kai kuriomis poromis nusakome vieną ir tą patį racionalųjį skaičių, pavyzdžiui, $(2, 4)$ ir $(1, 2)$. Todėl $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_-$. Begalinė racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaičiosios aibės poaibis, todėl, pagal 4.5 teoremą, ji pati taip pat yra skaiti aibė. Teorema įrodyta. □

4.11 apibrėžimas. *Tarkime, A yra bet kokia netuščia aibė. Aibės A* žodžiu *vadinsime baigtinę aibės A elementų seką. Elementų skaičių žodyje vadinsime žodžio* ilgiu.

4.12 pavyzdys. $A = \{a, b, c\}$. Tuomet a, bba, $cabbaccac$ yra aibės A žodžiai. Jų ilgiai atitinkamai lygūs $1, 3, 9$. □

Kai kalbama apie kurios nors aibės žodžius, tai A dar vadinama *abėcėle*, o jos elementai — *raidėmis*. Žodyje ta pati raidė gali pasitaikyti ne vieną kartą. Pavyzdžiui, žodyje *cabbaccac* tris kartus kartojasi raidė a, du kartus — b ir keturis kartus — c.

Tarkime, kad abėcėlė A yra baigtinė aibė. Visų galimų abėcėlės A žodžių aibę žymėsime A^*. Pavyzdžiui, jei $A = \{a\}$, tai $A^* = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

4.13 teorema. *Baigtinės abėcėlės A visų žodžių aibė A^* yra skaičioji.*

Įrodymas. Nurodysime taisyklę, pagal kurią rašysime seka visus aibės A^* elementus. Visų pirma kuria nors tvarka surašome visus vienetinio ilgio žodžius, po to visus ilgio 2 žodžius, ilgio 3 žodžius ir t.t. Kadangi abėcėlė baigtinė, tai duoto ilgio žodžių irgi bus baigtinis skaičius, ir juos visus galėsime išrašyti. Tokiu būdu bet kuris bet kokio ilgio žodis bus šioje sekoje. Teorema įrodyta. □

4.3 Neskaičiosios aibės

4.14 teorema. *Atvirojo intervalo $(0, 1)$ visų realiųjų skaičių aibė nėra skaičioji.*

Įrodymas. Tarkime, kad ta aibė yra skaičioji. Tuomet jos elementus galima užrašyti sekos pavidalu:

$$\begin{array}{c} 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots \\ 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots \\ 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots \\ \ldots \end{array}$$

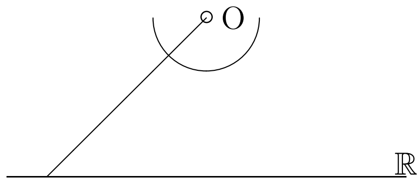
čia $0 \leqslant a_j^i \leqslant 9$ $(i, j \geqslant 1)$ — skaitmenys, i-tajam sekos skaičiui (iš viršaus į apačią) priskiriame natūralųjį i.

Imkime bet kurį skaičių $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, pasižymintį tokia savybe: $b_i \neq a_i^i \; \forall i$. Pavyzdžiui, tai galėtų būti skaičius, apibrėžtas tokiu būdu:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } a_i^i \neq 1, \\ 2, & \text{jei } a_i^i = 1. \end{cases}$$

Skaičius $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ priklauso intervalui $(0, 1)$, bet jo aprašytoje sekoje nėra, nes jis skiriasi nuo kiekvieno sekos nario bent viena pozicija. Taigi neegzistuoja abipusiškai vienareikšmės atitikties tarp natūraliųjų skaičių aibės ir atvirojo intervalo $(0, 1)$ visų realiųjų skaičių aibės. Teorema įrodyta. □

Atvirojo intervalo $(0,1)$ visų realiųjų skaičių aibė ekvivalenti realiųjų skaičių aibei. Abipusiškai vienareikšmę atitiktį gauname transformavę atkarpą į pusapskritimį:



4.15 apibrėžimas. *Aibė, ekvivalenti realiųjų skaičių aibei, vadinama* kontinuumo galios aibe.

Jei baigtinėje aibėje A yra n elementų, tai aibėje $P(A)$ bus 2^n elementų, t.y. daugiau negu aibėje A. Įdomu, kad analogiškas tvirtinimas teisingas ir begalinėms aibėms: aibė $P(A)$ yra gausesnė už aibę A.

4.16 teorema. *Bet kurios aibės A poaibių aibė $P(A)$ nėra ekvivalenti jokiai $A_0 \subseteq A$.*

Įrodymas. Tai akivaizdu baigtinėms aibėms. Begalinėms aibėms įrodysime prieštaros būdu. Tarkime, A yra kuri nors begalinė aibė, ir atsiras toks A poaibis A_0, kad $P(A) \sim A_0$. Taigi tarp aibės A_0 elementų ir $P(A)$ elementų (A poaibių) egzistuoja abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Aibę B formuojame tokiu būdu: elementas a iš A_0 priklauso aibei B tada ir tik tada, kai jis nėra jį atitinkančios (pagal nurodytą abipusiškai vienareikšmę atitiktį) aibės iš $P(A)$ elementas.

B tenkina sąlygą $B \subseteq A_0 \subseteq A$ ir todėl $B \in P(A)$. Remiantis prielaida, aibėje A_0 atsiras jį atitinkantis elementas (pažymėkime jį raide b). Klausiama, ar $b \in B$. Pagal aibės B konstravimą, $b \in B$ tada ir tiktai tada, kai $b \notin B$. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta. $\square$

Galima įrodyti, kad skaičiosios aibės poaibių aibė yra kontinuumo galios aibė. Be to, kaip matome, kontinuumo galios aibės poaibių aibė yra ne kontinuumo, o aukštesnės galios aibė. Ir t.t. Taigi kaip baigtinių aibių galios rikiuojasi nuo mažiausios (tuščios aibės galios) iki begalybės, taip ir begalinių aibių galios rikiuojasi nuo mažiausios (natūraliųjų skaičių aibės galios) iki begalybės.