G E O M E T R I J A

Gediminas STEPANAUSKAS

1 TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

1.1 Plokštumos ir tiesės plokštumoje normalinės lygtys

1.1.1 Vektorinė forma

Plokštumos α padėtis koordinačių sistemos $Oxyz$ atžvilgiu yra visiškai apibrėžta, jei žinomas

- ortas (vienetinio ilgio vektorius) $\overrightarrow{n}_0$, einantis iš koordinačių centro link ploštumos α ir statmenas jai;
- atstumas p nuo plokštumos α iki koordinačių pradžios taško O.

Tarkime, M yra bet kuris plokštumos α taškas, N – plokštumos α ir tiesės, lygiagrečios vektoriui $\overrightarrow{n}_0$ ir einančios per koordinačių pradžios tašką O, susikirtimo taškas. Aišku, kad vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ projekcija į vektorių $\overrightarrow{n}_0$ yra lygi ON, o $ON = p$. Pažymėkime $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Tuomet

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{n}_0}\overrightarrow{r} = p. \tag{1.1}$$

Pasinaudoję vektorių skaliarinės sandaugos savybėmis, (1.1) sąlygą galime užrašyti taip:

$$\boxed{(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}_0) - p = 0.} \tag{1.2}$$

(1.2) **lygtis vadinama normaline plokštumos lygtimi** (vektorine forma). **Ortas $\overrightarrow{n}_0$ vadinamas plokštumos α normale** arba **normaliniu vektoriumi**.

Visą aprašytą procedūrą galime pažodžiui pakartoti tiesei plokštumoje. Tiesės α padėtis koordinačių sistemos Oxy atžvilgiu yra visiškai apibrėžta, jei žinomas

- ortas (vienetinio ilgio vektorius) $\overrightarrow{n}_0$, statmenas tiesei α;
- atstumas p nuo tiesės α iki koordinačių pradžios taško O.

Tarkime, M yra bet kuris tiesės α taškas, N – tiesės α ir tiesės, lygiagrečios vektoriui $\overrightarrow{n}_0$ ir einančios per koordinačių pradžios tašką O, susikirtimo taškas. Aišku, kad vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ projekcija į vektorių $\overrightarrow{n}_0$ yra lygi ON, o $ON = p$. Pažymėkime $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Tuomet

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{n}_0}\overrightarrow{r} = p. \tag{1.3}$$

Pasinaudoję vektorių skaliarinės sandaugos savybėmis, (1.3) sąlygą galime užrašyti taip:

$$\boxed{(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}_0) - p = 0.} \tag{1.4}$$

(1.4) **lygtis vadinama normaline tiesės plokštumoje lygtimi** (vektorine forma).

1.1.2 Koordinatinė forma

Tarkime, kad vektorius $\overrightarrow{n}_0$ su koordinačių ašimis sudaro kampus α, β, γ. Tuomet jo projekcijos į koordinatines ašis yra lygios šių kampų kosinusams ir, užrašę vektorių $\overrightarrow{n}_0$ koordinatine forma, turėsime: $\overrightarrow{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Tegul taško M koordinatės yra x, y, z, t.y. $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$. Tuomet (1.2) lygtį galime užrašyti taip:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \tag{1.5}$$

(1.5) **lygtis vadinama plokštumos normaline lygtimi** (koordinatine forma).

Visiškai analogiškai gautume **tiesės plokštumoje normalinę lygtį** (koordinatine forma):

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.} \tag{1.6}$$

Šiuo atveju $\cos\beta = \sin\alpha$.

Gavome svarbų dalyką.

Teorema 1. *Kiekviena plokštuma aprašoma pirmojo laipsnio lygtimi. Taip pat kiekviena tiesė plokštumoje aprašoma pirmojo laipsnio lygtimi.*

Kitame skyrelyje parodysime, kad kiekviena pirmojo laipsnio lygtis apibrėžia plokštumą (tiesę plokštumoje).

1.2 Bendroji plokštumos ir bendroji tiesės plokštumoje lygtys

Teorema 2. *Kiekviena pirmojo laipsnio lygtis*

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{1.7}$$

aprašo plokštumą.

Įrodymas. Pažymėkime $\overrightarrow{n} = (A, B, C), \overrightarrow{r} = (x, y, z)$. Tuomet (1.7) lygybę galime užrašyti taip:

$$(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) + D = 0. \tag{1.8}$$

(1.8) lygybę padalinkime iš vektoriaus $\overrightarrow{n}$ ilgio $|\overrightarrow{n}|$. Gausime

$$\left(\overrightarrow{r}, \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right) + \frac{D}{|\overrightarrow{n}|} = 0. \tag{1.9}$$

1. Tegul $D \leq 0$. Pažymėkime $\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} = \overrightarrow{n}_0$ ir $\frac{D}{|\overrightarrow{n}|} = -p$. Dabar (1.9) galime užrašyti taip:

$$(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}_0) - p = 0. \tag{1.10}$$

Gautoji lygtis aprašo plokštumą, kuri yra statmena ortui $\overrightarrow{n}_0$, o jos atstumas nuo koordinačių pradžios taško yra lygus p.

2. Tegul $D > 0$. Padauginkime (1.9) iš -1. Turėsime

$$\left(\overrightarrow{r}, -\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right) - \frac{D}{|\overrightarrow{n}|} = 0. \tag{1.11}$$

Kad p būtų teigiamas, šiuo atveju pažymėkime $\frac{D}{|\overrightarrow{n}|} = +p$. Dabar (1.11) galime užrašyti taip:

$$(\overrightarrow{r}, -\overrightarrow{n}_0) - p = 0. \tag{1.12}$$

Ir šiuo atveju gautoji lygtis aprašo plokštumą, kuri yra statmena ortui $-\overrightarrow{n}_0$ (taip pat ir ortui $\overrightarrow{n}_0$) , o jos atstumas nuo koordinačių pradžios taško yra lygus p. $\square$

Iš 2 teremos įrodymo išplaukia, kad (1.7) plokštumos normalės $\overrightarrow{n}_0$ koordinatiniai kosinusai ir atstumas nuo koordinačių pradžios taško p yra lygūs:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ p &= \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Čia viršutinis ženklas "+" imamas, kai $D \leq 0$ ir "$-$", kai $D > 0$.

Visiškai analogiškai galima parodyti, kad lygtis

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{1.14}$$

apibrėžia tiesę plokštumoje.

(1.7) lygtis vadinama **bendrąja plokštumos lygtimi**, o (1.14) lygtis – **bendrąja tiesės plokštumoje lygtimi**.

Užduotis. *Kokia plokštumos, aprašomos lygtimi $Ax+By+Cz+D=0$, padėtis, kai*

1. *$D = 0$;*
2. *vienas iš koeficientų A, B arba C lygus nuliui;*
3. *du iš koeficientų A, B, C lygūs nuliui;*
4. *trys koeficientai A, B ir D lygūs nuliui.*

Užduotis. *Kokia tiesės, aprašomos lygtimi $Ax + By + C = 0$, padėtis, kai*

1. $C = 0$;
2. *vienas iš koeficientų A arba B lygus nuliui;*
3. *du koeficientai A ir C lygūs nuliui.*

1.3 Plokštumos ir tiesės plokštumoje ašinės lygtys

Kai bendrojoje plokštumos lygtyje $Ax + By + Cz + D = 0$ nė vienas koeficientas nelygus nuliui, perkėlę D į dešinę pusę ir padaliję lygtį iš $-D$, gausime **plokštumos ašinę lygtį**:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \tag{1.15}$$

Ašinę lygtį tenkina taškai $M(a, 0, 0), N(0, b, 0), P(0, 0, c)$. Taigi ji parodo kuriuose taškuose plokštuma kerta koordinatines ašis.

Tiesės plokštumoje ašinė lygtis:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.} \tag{1.16}$$

1.4 Plokštumos ir tiesės plokštumoje, einančių per duotą tašką lygtys

Plokštumos, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$, lygtis:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{1.17}$$

() aprašo plokštumą, ne tik einančią per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$, bet ir statmeną vektoriui $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Keisdami koeficientus tokių lygčių gausime daug.

Plokštumos tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0, y_0)$, lygtis:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{1.18}$$

1.5 Plokštumos, einančios per tris duotus taškus lygtis

Plokštumos, einančios per tris duotus taškus $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$ **ir** $M_2(x_2, y_2, z_2)$**lygtis**:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.} \tag{1.19}$$

Užduotis. *Aprašykite plokštumų aibę, einančią per du duotus taškus $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir $M_1(x_1, y_1, z_1)$.*

1.6 Plokštumos tiesės, einančios per du duotus taškus lygtis

Plokštomos tiesės, einančios per du duotus taškus $M_0(x_0, y_0)$ **ir** $M_1(x_1, y_1)$ **lygtis**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.} \tag{1.20}$$

1.7 Kryptinės plokštumos tiesių lygtys

Jei plokštumos tiesės $Ax + By + C = 0$ koeficientas $B \neq 0$, tai šią tiesę galima užrašyti **kryptine tiesės lygtimi**:

$$\boxed{y = kx + b.} \tag{1.21}$$

Čia koeficientas $k = \operatorname{tg} \alpha$, o α – kampas, kurį tiesė sudaro su x ašimi. O jei koeficientas $A \neq 0$, tai tiesę galima užrašyti **kryptine tiesės lygtimi**:

$$\boxed{x = lx + c.} \tag{1.22}$$

Čia koeficientas $l = \operatorname{tg} \beta$, o β – kampas, kurį tiesė sudaro su y ašimi.

1.8 Kampai tarp plokštumų ir plokštumos tiesių

Tarkime, turime dvi plokštumas $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ir $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Tegul φ yra kampas tarp šių plokštumų. Vektoriai $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ir $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ yra statmeni šioms plokštumoms ir kampas tarp šių vektorių yra lygus kampui tarp ploštumų. Iš vektorių skaliarinės sandaugos savybių išplaukia, kad **kampo tarp plokštumų kosinusas**

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \tag{1.23}$$

Sakykime, turime dvi tieses $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ir $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Tegul α yra kampas tarp šių tiesių. Visiškai analogiškai gautume, kad **kampo tarp plokštumos tiesių kosinusas**

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.} \tag{1.24}$$

1.8.1 Plokštumų ir plokštumos tiesių statmenumas

Iš kampo tarp plokštumų (1.23) formulės gausime, kad **plokštumų** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ **ir** $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **statmenumo sąlyga** yra tokia:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \tag{1.25}$$

Iš (1.24) formulės gausime **plokštumos tiesių** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ **ir** $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **statmenumo sąlygą**:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0.} \tag{1.26}$$

1.8.2 Plokštumų ir plokštumos tiesių lygiagretumas

Kad plokštumos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ir $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ būtų lygiagrečios reikia, kad ir vektoriai $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ir $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ būtų lygiagretūs, t.y., kad jų koordinatės būtų proporcingos. Taigi, **plokštumų** $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ **ir** $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ **lygiagretumo sąlyga**:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.} \tag{1.27}$$

Plokštumos tiesių $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ **ir** $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ **lygiagretumo sąlyga**:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.} \tag{1.28}$$

1.9 Tiesės parametrinė lygtis

1.9.1 Vektorinė forma

Pradėkime nuo tiesės erdvėje. Erdvinės tiesės padėtis koordinačių sistemos $Oxyz$ atžvilgiu yra visiškai apibrėžta, jei žinomas

- vienas jos taškas, tarkime, $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- lygiagretus tiesei vektorius, tarkime, $\overrightarrow{s} = (m, n, p)$.

Tegul $M(x, y.z)$ yra bet kuris tiesės taškas. Tuomet vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra lygiagretus (ir proporcingas) vektoriui $\overrightarrow{s}$. Taigi

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{s}.$$

Tegul O yra koordinačių pradžios taškas. Iš vektorių sumos savybių išplaukia, kad

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}. \tag{1.29}$$

Pažymėkime $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$. Tuomet (1.47) lygybę galėsime perrašyti taip:

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{s}.} \tag{1.30}$$

Tai ir yra **tiesės parametrinė lygtis vektorine forma**.

(1.48) lygtis teisinga ir plokštumos tiesei. Užtenka pakartoti tuos pačius samprotavimus, tik vektoriai $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}$ ir $\overrightarrow{s}$ turės po dvi koordinates.

1.9.2 Koordinatinė forma

Sulyginę vektorinės (1.48) lygties abiejų pusių koordinates gausime

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \tag{1.31}$$

Tai yra **tiesės erdvėje parametrinė lygtis koordinatine forma**.

Tiesės plokštumoje parametrinė lygtis koordinatine forma tokia:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}} \tag{1.32}$$

1.10 Tiesės kanoninės lygtys

Iš (1.31) lygčių išreiškę parametrą t ir sulyginę gautas išraiškas, turėsime

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \tag{1.33}$$

Tai **tiesės erdvėje kanoninės lygtys**.

Plokštumos tiesės kanoninė lygtis:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.} \tag{1.34}$$

1.11 Bendroji tiesės lygtis erdvėje

Tiesė erdvėje gali būti gaunama susikertant dviem plokštumoms. Todėl **bendroji tiesės lygtis erdvėje**:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \tag{1.35}$$

1.12 Kampai tarp tiesių, kai tiesės duotos kanoninėmis lygtimis

Pradėkime nuo erdvinių tiesių:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{1.36}$$

ir

$$\frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p}. \tag{1.37}$$

Kampu tarp dviejų tiesių erdvėje vadinamas kampas tarp susikertančių joms lygiagrečių vektorių. Taigi, **kampas α tarp erdvinių tiesių**, kai tiesės duotos kanoninėmis lygtimis gali būti surastas naudojantis formule:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.} \tag{1.38}$$

Jei turime tieses plokštumoje:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \tag{1.39}$$

ir

$$\frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}, \tag{1.40}$$

tai, **kampas α tarp plokštumos tiesių**, kai tiesės duotos kanoninėmis lygtimis gali būti surastas naudojantis formule:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.} \tag{1.41}$$

1.12.1 Tiesių lygiagretumas

Erdvės tiesių, apibrėžtų (1.36) ir (1.37) lygtimis, **lygiagretumo sąlyga**:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.} \tag{1.42}$$

Plokštumos tiesių, apibrėžtų (1.39) ir (1.40) lygtimis, **lygiagretumo sąlyga**:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.} \tag{1.43}$$

1.12.2 Tiesių statmenumas

Erdvės tiesių, apibrėžtų (1.36) ir (1.37) lygtimis, **statmenumo sąlyga**:

$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.} \tag{1.44}$$

Plokštumos tiesių, apibrėžtų (1.39) ir (1.40) lygtimis, **statmenumo sąlyga**:

$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2=0.} \tag{1.45}$$

1.13 Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Pirma suraskime kampą $\theta\,(\theta\in[0,\pi))$, tarp tiesei

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

lygiagretaus vektoriaus $\overrightarrow{s}=(m,n,p)$ ir plokštumai

$$Ax+By+Cz+D=0$$

statmeno vaktoriaus $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$. To kampo kosinusas

$$\cos\theta=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Tarkime, α yra kampas tarp tiesės ir plokštumos. Aišku, kad $\alpha\in[0,\pi/2]$. Beto

$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\theta, & \text{jei } \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ \theta-\dfrac{\pi}{2}, & \text{jei } \theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right).\end{cases}$$

Jeigu $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tai $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\theta$. Jeigu $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tai $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$. Taigi **kampo tarp tiesės ir plokštumos sinusas**

$$\boxed{\sin\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.} \tag{1.46}$$

1.13.1 Tiesės ir plokštumos lygiagretumas

Iš (1.46) formulės gauname **Tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlygą**:

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0.} \tag{1.47}$$

1.13.2 Tiesės ir plokštumos statmenumas

Tiesė statmena plokštumai, kai vektoriai $\overrightarrow{n}$ ir $\overrightarrow{s}$ lygiagretūs, t.y. jų koordinatės proporcingos. **Tiesės ir plokštumos statmenumo sąlygą**:

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.} \tag{1.48}$$

1.14 Taško atstumas nuo plokštumos ir nuo tiesės plokštumoje

Taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **atstumas nuo plokštumos** $Ax + By + Cz + D = 0$ yra lygus

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{1.49}$$

Taško $M_0(x_0, y_0)$ **atstumą nuo plokštumos tiesės** $Ax + By + C = 0$ galima surasti naudojantis formule:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{1.50}$$

2 ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS

2.1 Elipsė

Apibrėžimas. ***Elipse*** *vadinama geometrinė vieta plokštumos taškų, tokių, kad atstumų nuo kiekvieno iš jų iki dviejų pastovių plokštumos taškų suma yra pastovi.*

Du pastovūs taškai, minimi elipsės apibrėžime, vadinami **elipsės židiniais**.

Išvesime elipsės koordinatinę lygtį, kai elipsės židiniai guli x ašyje ir yra vienodai nutolę nuo koordinačių centro $O(0, 0)$ per atstumą c. Židinius pažymėkime $F_1(-c, 0)$ ir $F_2(c, 0)$. Atstumas tarp židinių bus lygus $2c$. Elipsės taškus žymėkime

$M(x, y)$. Tarkime, kad atstumų nuo elipsės taško iki židinių suma (ji pastovi) lygi $2a$. Aišku ši suma turi būti nemažesnė už atstumą tarp židinių, t.y. $2c \leq 2a$.

Iš elipsės apibrėžimo turime

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Atkarpų ilgius užrašę per koordinates gausime

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu turėsime

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2.$$

Arba suprastinus

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = -\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dar kartą pakeliame kvadratu:

$$\begin{aligned} x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2x^2c^2 + 2x^2y^2 - 4x^2a^2 + 2c^2y^2 - 4c^2a^2 - 4y^2a^2 \\ = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ = x^4 - 2cx^3 + x^2c^2 + x^2y^2 + 2cx^3 - 4c^2x^2 + 2c^3x + 2cxy^2 \\ + c^2x^2 - 2c^3x + c^4 + c^2y^2 + x^2y^2 - 2cxy^2 + c^2y^2 + y^4. \end{aligned}$$

Suprastiname:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Kai $a > c$ galime abi lygties puses dalinti iš $a^2(a^2 - c^2)$. Įvedę pažymėjimą $b^2 = a^2 - c^2$ galutinai gausime **elipsės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{2.1}$$

Kai $a = c$, turime ne elipsę, o tik atkarpą: $-c \leq x \leq c, y = 0$.

Taškas $O(0, 0)$ yra elipsės (2.1) centras. Pastūmę elipsę taip, kad jos centras atsidurtų taške $C(x_0, y_0)$, gausime tokią **elipsės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{2.2}$$

Taigi taškas $C(x_0, y_0)$ vadinamas **elipsės centru**. Taškai $V_{x1}(x_0+a, y_0), V_{x2}(x_0-a, y_0), V_{y1}(x_0, y_0 + b), V_{y2}(x_0, y_0 - b)$ **elipsės viršūnėmis**. Atkarpa $V_{x1}V_{x2}$ **didžiąja ašimi**, o atkarpa $V_{y1}V_{y2}$ **mažąja ašimi**. a ir b yra didžiojo ir mažojo **pusašių ilgiai**. Taškai $F_1(x_0 - c, y_0)$ ir $F_2(x_0 + c, y_0)$ vadinami **elipsės židiniais**. Kai $a = b$ elipsė virsta **apskritimu**. Jeigu $b > a$ elipsė yra ištęsta y ašies kryptimi ir židiniai bus išsidėstę vertikaliai. Tiesės $x = x_0$ ir $y = y_0$ vadinamos **elipsės simetrijos ašimis**. Skaičius $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ vadinamas **elipsės ekscentricitetu**. Elipsės ekscentricitetas visuomet yra mažesnis už 1 ir parodo kiek elipsė skiriasi nuo apskritimo. Kai $\varepsilon = 0$ elipsės židiniai sutampa, pati elipsė tampa apskritimu.

2.1.1 Elipsės parametrinė lygtis

Įvedę parametrą t elipsės (2.1) kanoninę lygtį galime užrašyti taip:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad (t \in [0, 2\pi)),} \tag{2.3}$$

o (2.2) kanoninę lygtį taip:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cos t, \\ y = y_0 + b\sin t, \end{cases} \qquad (t \in [0, 2\pi)),} \tag{2.4}$$

(2.3) ir (2.4) lygtys vadinamos **elipsės parametrinėmis lygtimis**.

2.2 Hiperbolė

Apibrėžimas. ***Hiperbole*** *vadinama geometrinė vieta plokštumos taškų, tokių, kad atstumų nuo kiekvieno iš jų iki dviejų pastovių plokštumos taškų skirtumo modulis yra pastovus.*

Du pastovūs taškai, minimi hiperbolės apibrėžime, vadinami **hiperbolės židiniais**.

Išvesime hiperbolės koordinatinę lygtį, kai hiperbolės židiniai guli x ašyje ir yra vienodai nutolę nuo koordinačių centro $O(0,0)$ per atstumą c. Židinius pažymėkime $F_1(-c,0)$ ir $F_2(c,0)$. Atstumas tarp židinių bus lygus $2c$. Hiperbolės taškus žymėkime $M(x,y)$. Tarkime, kad atstumų nuo hiperbolės taško iki židinių skirtumas (jo modulis pastovus) lygus $\pm 2a$. Šio skirtumo modulis turi būti nedidesnis už atstumą tarp židinių, t.y. $2c \geq 2a$.

Iš hiperbolės apibrėžimo turime

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

Atkarpų ilgius užrašę per koordinates gausime

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu turėsime

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2.$$

Arba suprastinus

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dar kartą pakeliame kvadratu:

$$\begin{aligned} x^4 + c^4 + y^4 + 4a^4 + 2x^2c^2 + 2x^2y^2 - 4x^2a^2 + 2c^2y^2 - 4c^2a^2 - 4y^2a^2 \\ = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ = x^4 - 2cx^3 + x^2c^2 + x^2y^2 + 2cx^3 - 4c^2x^2 + 2c^3x + 2cxy^2 \\ + c^2x^2 - 2c^3x + c^4 + c^2y^2 + x^2y^2 - 2cxy^2 + c^2y^2 + y^4. \end{aligned}$$

Suprastiname:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Kai $a < c$ galime abi lygties puses dalinti iš $a^2(c^2 - a^2)$. Įvedę pažymėjimą $b^2 = c^2 - a^2$ galutinai gausime **hiperbolės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{2.5}$$

Kai $a = c$, turime ne hiperbolę, o tik dvi pustieses: $x \le -c, y = 0$ ir $x \ge c, y = 0$.

Taškas $O(0,0)$ yra hiperbolės (2.1) simetrijos centras. Pastūmę hiperbolę taip, kad jos simetrijos centras atsidurtų taške $C(x_0, y_0)$, gausime tokią **hiperbolės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{2.6}$$

Taigi taškas $C(x_0, y_0)$ vadinamas **hiperbolės simetrijos centru**. Taškai $V_{x1}(x_0 + a, y_0), V_{x2}(x_0 - a, y_0)$ **hiperbolės viršūnėmis**. Taškai $F_1(x_0 - c, y_0)$ ir $F_2(x_0 + c, y_0)$ vadinami **hiperbolės židiniais**. Tiesės $x = x_0$ ir $y = y_0$ vadinamos **hiperbolės simetrijos ašimis**. Skaičius $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ vadinamas **hiperbolės ekscentricitetu**. Hiperbolės ekscentricitetas visuomet yra didesnis už 1. Tiesės

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

vadinamos **hiperbolės asimptotėmis**. Hiperbolės grafikas, kai $x \to \pm\infty$ artėja prie šių tiesių.

Lygtis

$$\boxed{-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{2.7}$$

taip pat yra **hiperbolės kanoninė lygtis**. Tik šios hiperbolės židiniai ir viršūnės išsidėsčiusios vertikaliai, o šakos nukreiptos y ašies teigiama ir neigiama kryptimis.

2.3 Parabolė

Apibrėžimas. ***Prabole*** *vadinama geometrinė vieta plokštumos taškų, kurių atstumai nuo pastovaus taško ir pastovios tiesės yra lygūs.*

Pastovus taškas, minimas parabolės apibrėžime, vadinamas **parabolės židiniu**, o pastovi tiesė – **parabolės direktrise**.

Išvesime parabolės koordinatinę lygtį, kai parabolės židinys guli x ašyje (teigiamoje dalyje), direktrisė statmena x ašiai ir abu vienodai nutolę nuo koordinačių centro $O(0,0)$ per atstumą $p/2$. Židinį pažymėkime $F(p/2, 0)$. Atstumas tarp židinio ir direktrisės bus lygus p. Parabolės taškus žymėkime $M(x, y)$. Direktrisės taškai gali būti žymimi $D(-p/2, y)$.

Iš parabolės apibrėžimo turime

$$FM = MD.$$

Atkarpų ilgius užrašę per koordinates gausime

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu turėsime

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Suprastinę gauname **parabolės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{2.8}$$

Kai $a = c$, turime ne hiperbolę, o tik dvi pustieses: $x \leq -c, y = 0$ ir $x \geq c, y = 0$.

Taške $O(0,0)$ yra **parabolės (2.8) viršūnė**. Pastūmę parabolę taip, kad jos viršūnė atsidurtų taške $V(x_0, y_0)$, gausime tokią **parabolės kanoninę lygtį**:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).} \tag{2.9}$$

Taigi taškas $V(x_0, y_0)$ vadinamas **parabolės viršūne**. Taškas $F(x_0{+}p/2, y_0)$ vadinamas **parabolės židiniu**. Tiesė $x = x_0 - p/2$ vadinama **parabolės direktrise**. Tiesė $y = y_0$ yra **parabolės simetrijos ašis**. Skaičius $\varepsilon = 1$ vadinamas **parabolės ekscentricitetu**.

Lygtys

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0),} \tag{2.10}$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),} \tag{2.11}$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)} \tag{2.12}$$

taip pat yra **parabolių kanoninės lygtys**. Tik šių parabolių šakos nukreiptos neigiama x ašies kryptimi, teigiama y ašies kryptimi, neigiama y ašies kryptimi, o simetrijos ašys yra tiesės $y = y_0$, $x = x_0$, $x = x_0$, atitinkamai.

2.4 Antrosios eilės kreivių lygties tyrimas

Algebrinės kreivės klasifikuojamos pagal jų lygčių laipsnius. Bendriausia antrojo laipsnio lygties forma:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{2.13}$$

Bent vienas iš koeficientų a_{11}, a_{12}, a_{22} neturi būti lygus nuliui, nes priešingu atveju turėsime pirmos eilės lygtį (apibrėžiančią plokštumą). Bet kuri antros eilės lygtis apibrėžia elipsę, hiperbolę, parabolę. Išimtiniais atvejais tai gali būti tiesė, dvi lygiagrečios tiesės, dvi susikertančios tiesės, taškas ir net tuščia aibė. Panagrinėsime visus atvejus.

Pasukant koordinačių sistemą (dėl laiko ir žinių trūkumo mes to nedarysime) galima panaikinti antrąjį lygties narį $a_{12}xy$. Po to, išskiriant pilną kvadratą ir atitinkamai pastumiant koordinačių sistemą, galima panaikinti pirmojo laipsnio narį $a_{10}x$, jei $a_{11} \neq 0$, ir pirmojo laipsnio narį $a_{20}y$, jei $a_{22} \neq 0$. Tokia procedūra visiškai nesunki. Po tokių operacijų turėsime paprastesnę lygtį, kurią ir patyrinėsime. Tai būtų viena iš lygčių:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \quad A \neq 0 \text{ arba } B \neq 0, \tag{2.14}$$

$$Ax^2 + Dy + C = 0, \quad A \neq 0, \tag{2.15}$$

$$By^2 + Ex + C = 0, \quad B \neq 0. \tag{2.16}$$

Tarkime, kad (2.14) lygtyje $A > 0$. Tuomet (2.14) lygtis apibrėžia:

- elipsę, jei $B > 0, C < 0$;
- $\varnothing$, jei $B > 0, C > 0$;
- tašką, jei $B > 0, C = 0$;
- hiperbolę, jei $B < 0, C \neq 0$;
- dvi susikertančias tieses, jei $B < 0, C = 0$;
- dvi lygiagrečias tieses, jei $B = 0, C < 0$;
- tiesę, jei $B = 0, C = 0$;
- $\varnothing$, jei $B = 0, C > 0$.

Kai koecientas $B > 0$, galime nagrinėti analogiškai.

Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad (2.15) lygties koeficientas $A > 0$. Priešingu atveju lygtį galima padauginti iš -1. (2.15) lygtis apibrėžia:

- parabolę, jei $D \neq 0$;
- dvi lygiagrečias tieses, jei $D = 0, C < 0$;
- tiesę, jei $D = 0, C = 0$;
- $\varnothing$, jei $D = 0, C > 0$.

(2.16) lygtį galime nagrinėti analogiškai kaip ir (2.15).

3 ANTROSIOS EILĖS PAVIRŠIAI

Šiame skyrelyje pateiksime tik kai kurių paprastesnių antros eilės paviršių analizines išraiškas.

Apibrėžimas. *Paviršius, kurį sudaro plokščiąja kreive judėdama tiesė, kai jos vienas taškas lieka pastovus, vadinamas kūginiu paviršiumi.*

Apibrėžimas. *Paviršius, kurį sudaro plokščiąja kreive lygiagrečiai judėdama tiesė, vadinamas cilindriniu paviršiumi.*

Apibrėžimas. *Paviršius, gaunamas sukant kreivę apie tiesę (taip, kad kreivės taškai brėžtų apskritimus, statmenus tai tiesei, ir apskritimų centrai gulėtų toje tiesėje), vadinamas sukimosi paviršiumi. Minima tiesė vadinama sukimosi ašimi.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{3.1}$$

– tai antrosios eilės kūgio lygtis. Koordinačių pradžios taškas O yra šio kūgio simetrijos centras, o koordinačių plokštumos xy, xz, yz – paviršiaus simetrijos plokštumos.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.2}$$

– tai sukimosi elipsoidas. Sukimosi ašis yra z ašis.

Triašis elipsoidas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.3}$$

Vienašakis sukimosi hiperboloidas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.4}$$

Sukimosi ašis yra z ašis.

Vienašakis hiperboloidas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.5}$$

Dvišakis sukimosi hiperboloidas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.6}$$

Sukimosi ašis yra x ašis.

Dvišakis hiperboloidas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.7}$$

Sukimosi paraboloidas:

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{3.8}$$

Sukimosi ašis yra z ašis.

Elipsinis paraboloidas:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0. \tag{3.9}$$

Hiperbolinis paraboloidas:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0. \tag{3.10}$$