2 pratybos. Euklido erdvė

Paulius Drungilas ir Jonas Jankauskas

Turinys

Euklido erdvė. Tarkim $(V, +)$ – tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$. Atvaizdis $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$, tenkinantis savybes

1) $< v_1 + v_2, u >=< v_1, u > + < v_2, u >$ visiems $v_1, v_2, u \in V$;
2) $< v, u >=< u, v >$ visiems $v, u \in V$;
3) $< a \cdot v, u >= a \cdot < v, u >$ visiems $v, u \in V$, $a \in \mathbb{R}$;
4) $< v, v > \geqslant 0$ visiems $v \in V$;
5) $< v, v >= 0$ tada ir tik tada kai $v = \vec{0}$,

vadinamas **skaliarine sandauga**. Tiesinė erdvė su skaliarine sandauga vadinama **Euklido erdve**.

1. **pavyzdys.** Tarkim, $v, u \in \mathbb{R}^n$, $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $u = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Tada atvaizdis

$$< v, u >= \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \beta_n$$

yra skaliarinė sandauga erdvėje $\mathbb{R}^n$.

2. **pavyzdys.** Visų tolydžių intervale $[0, 1]$ funkcijų $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ aibė $C([0, 1])$ yra tiesinė erdvė virš $\mathbb{R}$. Tarkim, $f(x), g(x) \in C([0, 1])$. Atvaizdis

$$< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

yra skaliarinė sandauga šioje erdvėje.

Tarkim V – Euklido erdvė su skaliarine sandauga $< \cdot, \cdot >$ ir $v, u \in V$. Skaičius $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$ vadinamas vektoriaus v **ilgiu**. Vektoriai vadinami **statmenais** jei $< v, u >= 0$. Vektorių sistema $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vadinama

ortogonalia jei bet kurie du šios sistemos vektoriai yra statmeni, t. y. $< v_i, v_j >= 0$ kai $i \neq j$. Vektorių sistema $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vadinama **ortonormuota**, jei ji yra ortogonali ir kiekvieno vektoriaus ilgis yra 1.

Ortogonalizacijos procesas. Tarkim, Euklido erdvės vektorių sistema $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yra tiesiškai nepriklausoma. Tada galima sukonstruoti ortogonalią vektorių sistemą $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kurios kiekvienas vektorius būtų išreikštas vektoriais $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (šis ortogonalių vektorių $u_1, u_2, \ldots, u_n$ radimo procesas vadinamas vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ortogonalizacijos procesu):

$$u_1 := v_1,$$

$$u_2 := v_2 + \lambda_1 \cdot u_1, \quad \text{kur } \lambda_1 = -\frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >},$$

$$u_3 =: v_3 + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2, \quad \text{kur } \lambda_1 = -\frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >}, \ \lambda_2 = -\frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$u_n := v_n + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot u_{n-1}, \quad \text{kur } \lambda_1 = -\frac{< v_n, u_1 >}{< u_1, u_1 >},$$

$$\lambda_2 = -\frac{< v_n, u_2 >}{< u_2, u_2 >}, \ \ldots, \ \lambda_{n-1} = -\frac{< v_n, u_{n-1} >}{< u_{n-1}, u_{n-1} >}.$$

3. **pavyzdys.** Ortogonalizuosime vektorių sistemą $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-3, -4, -1), v_3 = (-4, -7, 0)$.

Sprendimas. Parenkame $u_1 = v_1 = (1, 2, 1)$.
Tada $u_2 = v_2 + \lambda_1 \cdot u_1$, kur $\lambda_1 = - < v_2, u_1 > / < u_1, u_1 >= 2$. Suskaičiavę, gauname $u_2 = (-1, 0, 1)$.
Dabar skaičiuojame $u_3 = v_3 + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$, kur $\lambda_1 = - < v_3, u_1 > / < u_1, u_1 >= 3$ ir $\lambda_2 = - < v_3, u_2 > / < u_2, u_2 >= -2$. Suskaičiavę, gauname $u_3 = (1, -1, 1)$. Taigi, gavome ortogonalizuotą vektorių sistemą $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$. □

4. **pastaba.** Norint gauti ortonormuotą vektorių sistemą, reikia atlikti ortogonalizacijos procesą ir kiekvieną gautą vektorių (u_1, u_2, u_3) padalinti iš jo ilgio, t. y., jei ortogonalizacijos rezultatas yra vektoriai u_1, u_2, u_3, tai ortonormuota vektorių sistema bus

$$\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ \frac{u_2}{\|u_2\|}, \ \frac{u_3}{\|u_3\|},$$

kur $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ – vektoriaus u ilgis. Pavyzdžiui, jei $u = (2, 2, 1)$, tai $\|u\| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = 3$ ir

$$\frac{u}{\|u\|} = \frac{u}{3} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

5. **pavyzdys.** Papildysime vektorių sistemą

$$v_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2), \;\; v_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$$

iki erdvės $\mathbb{R}^3$ ortonormuotosios bazės.

Sprendimas. Pastebime, kad vektoriai v_1 ir v_2 yra statmeni (skaliarinė sandauga lygi 0) ir vienetinio ilgio. Erdvės $\mathbb{R}^3$ bazė turi tris tiesiškai nepriklausomus vektorius, todėl lieka rasti trečią vektorių $v_3 = (x, y, z)$, kuris būtų statmenas vektoriams v_1 ir v_2 t. y. išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ -2x + y + 2z & = 0 \end{cases}.$$

Kintamuosius x ir y išreiškiame kintamuoju z:

$$\begin{cases} x & = 2z \\ y & = 2z \end{cases}.$$

Parinkę $z = 1$, gauname vektorių $v_3 = (2, 2, 1)$. Dabar, vektorių sistema v_1, v_2, v_3 yra ortogonali, bet nėra ortonormuota, nes vektoriaus v_3 nėra vienetinio ilgio. Taigi, vietoj vektoriaus v_3 parenkame vektorių

$$\frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{3} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

□

Ortogonalusis papildinys. Tarkim V – Euklido erdvė su skaliarine sandauga $< \cdot, \cdot >$ ir $W \subset V$ – poerdvis. Tada aibė

$$W^{\perp} := \{u \in V \,|\, u \perp v \text{ kiekvienam } v \in W\}$$

vadinama poerdvio W **ortogonaliuoju papildiniu**. Nesunku patikrinti, kad

$$V = W \oplus W^{\perp},$$

todėl galima skaičiuoti vektoriaus $v \in V$ projekciją į poerdvį W, poerdvio $W^{\perp}$ atžvilgiu (tiesiog vadinama projekcija į poerdvį W), ir projekciją į poerdvį $W^{\perp}$, poerdvio W atžvilgiu (vadinama statmeniu į poerdvį W).

Kaip rasti ortogonalųjį papildinį? Tarkim V – n-matė Euklido erdvė su skaliarine sandauga $< \cdot, \cdot >$ ir $W =< v_1, v_2, \ldots, v_r >$ – poerdvis, kur vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_r$ yra tiesiškai nepriklausomi. Tada vektorių sistemą $v_1, v_2, \ldots, v_r$ papildome iki erdvės V bazės $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ ir šią bazę ortogonalizuojame. Gauname ortogonalią bazę

$$u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n.$$

Tada

$$W^\perp =< u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n > .$$

Tokiu būdu sukonstruoto ortogonaliojo papildinio $W^\perp$ bazė $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n$ yra ortogonali.

Kaip rasti vektoriaus projekciją ir statmenį? Tarkim, $v \in V$, $W \subset V$ – poerdvis, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ – poerdvio W ortogonali bazė, $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n$ – poerdvio $W^\perp$ ortogonali bazė. Tada vektoriaus v projekcija į poerdvį W yra $w = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_r \cdot u_r$, kur $\alpha_j =< v, u_j > / < u_j, u_j >$, $j = 1, 2, \ldots, r$, o vektoriaus v statmuo į poerdvį W yra $u = \alpha_{r+1} \cdot u_{r+1} + \alpha_{r+2} \cdot u_{r+2} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$, kur $\alpha_k =< v, u_k > / < u_k, u_k >$, $k = r+1, r+2, \ldots, n$.

6. **pavyzdys.** Rasime poerdvio $W =< (1, 4, 5, -2), (2, 7, 1, 3) >$ ortogonaliojo papildinio $W^\perp$ bazę.

Sprendimas. Šį uždavinį galima būtų išspręsti aukščiau aprašytu būdu, tačiau pakanka rasti bet kokią $W^\perp$ bazę (nebūtinai ortogonalią), todėl spręsime kitu, paprastesniu būdu. Ieškome vektorių (x, y, z, w) kurie būtų statmeni visiems poerdvio W vektoriams (žr. $W^\perp$ apibrėžimą aukščiau). Pakanka reikalauti, kad šis vektorius būtų statmenas poerdvio W bazės vektoriams $(1, 4, 5, -2)$ ir $(2, 7, 1, 3)$. Iš čia gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 4y + 5z - 2w &= 0 \\ 2x + 7y + z + 3w &= 0 \end{cases}.$$

Išsprendžiame šią lygčių sistemą, kintamuosius x ir y išreikšdami kintamaisiais z ir w:

$$\begin{cases} x &= 31z - 26w \\ y &= -9z + 7w \end{cases}.$$

Parinkę $z = 1$, $w = 0$, gauname vektorių $(31, -9, 1, 0)$. Parinkę $z = 0$, $w = 1$, gauname vektorių $(-26, 7, 0, 1)$. Taigi, vektoriai $(31, -9, 1, 0)$, $(-26, 7, 0, 1)$ sudaro ortogonaliojo papildinio $W^\perp$ bazę. □

7. **pavyzdys.** Rasime vektoriaus $v = (2, -3, 3, -3)$ projekciją ir statmenį į poerdvį $W =< (1, -1, 2, 3), (-1, 3, 1, 5) >$.

Sprendimas. Vektoriaus v projekciją į poerdvį W pažymėkime w. Tada egzistuoja $x, y \in \mathbb{R}$ tokie, kad $w = x \cdot (1, -1, 2, 3) + y \cdot (-1, 3, 1, 5)$. Vektoriaus v statmuo į poerdvį W yra $v - w = (2, -3, 3, -3) - x \cdot (1, -1, 2, 3) - y \cdot (-1, 3, 1, 5) = (2 - x + y, -3 + x - 3y, 3 - 2x - y, -3 - 3x - 5y)$. Šis vektorius turi būti statmenas poerdviui W todėl jis statmenas šio poerdvio vektoriams $(1, -1, 2, 3)$ ir $(-1, 3, 1, 5)$. Iš čia, gauname lygtis

$$1 \cdot (2 - x + y) + (-1) \cdot (-3 + x - 3y) + 2 \cdot (3 - 2x - y) +$$

$$3 \cdot (-3 - 3x - 5y) = 0$$

ir

$$(-1) \cdot (2 - x + y) + 3 \cdot (-3 + x - 3y) + 1 \cdot (3 - 2x - y) +$$

$$5 \cdot (-3 - 3x - 5y) = 0.$$

Atlikę veiksmus, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 15x + 13y &= 2 \\ 13x + 36y &= -23 \end{cases}.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname $x = 1$, $y = -1$. Taigi, vektoriaus v projekcija yra $w = 1 \cdot (1, -1, 2, 3) + (-1) \cdot (-1, 3, 1, 5) = (2, -4, 1, -2)$, o vektoriaus v statmuo į poerdvį W yra $v - w = (0, 1, 2, -1)$. $\square$

8. **pavyzdys.** Rasime erdvės $\mathbb{R}^4$ poerdvio

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ \begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3} - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \end{array} \right\}$$

ortogonalaus poerdvio $W^{\perp}$ bazę.

Sprendimas. Iš poerdvio W apibrėžimo matome, kad šį poerdvį sudaro visi vektoriai, kurie yra statmeni vektoriams $v_1 = (2, 1, 3, -1)$, $v_2 = (3, 2, 0, -2)$ ir $v_3 = (3, 1, 4, -1)$. Kitaip sakant, $W = < v_1, v_2, v_3 >^{\perp}$. Dabar pasinaudosime savybe: jei U – poerdvis, tai $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Poerdviui W gauname $W^{\perp} = (< v_1, v_2, v_3 >^{\perp})^{\perp} = < v_1, v_2, v_3 >$. Vektorių sistemos v_1, v_2, v_3 rangas yra 3, todėl šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi ir sudaro poerdvio $W^{\perp}$ bazę. $\square$

Uždaviniai.

1. **uždavinys.** Ortogonalizuokite vektorių sistemą:

a) $v_1 = (2, 1, -3),\ v_2 = (5, 3, -5),\ v_3 = (4, -4, 6)\,;$
b) $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (0, 6, -1, 1), v_3 = (7, 10, 5, 0)\,;$
c) $v_1 = (2, 2, 1, -4), v_2 = (-4, -5, -1, 14), v_3 = (-5, 8, 5, 9);$
d) $v_1 = (1, -3, 4, 2), v_2 = (5, -1, 5, 1), v_3 = (-5, -13, 5, 3),$
$v_4 = (6, 8, -8, 10)\,.$

Ats.:

a) $u_1 = (2, 1, -3), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (4, -5, 1)\,;$
b) $u_1 = (1, -1, 2, 1), u_2 = (1, 5, 1, 2), u_3 = (4, 1, 1, -5);$
c) $u_1 = (2, 2, 1, -4), u_2 = (2, 1, 2, 2), u_3 = (-7, 8, 2, 1);$
d) $u_1 = (1, -3, 4, 2), u_2 = (4, 2, 1, -1), u_3 = (1, -3, -1, -3),$
$u_4 = (5, -3, -7, 7),.$

2. **uždavinys.** Papildykite vektorių sistemą iki erdvės $\mathbb{R}^n$ ortonormuotosios bazės:

a) $v_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -1, 5),\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 3, 1)\,;$
b) $v_1 = \frac{1}{3}(0, -1, 2, 2),\ v_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, 4, 1, 1)\,;$
c) $v_1 = \frac{1}{6}(5, 3, 1, -1),\ v_2 = \frac{1}{6}(1, 1, -5, 3)\,.$

Ats.:

a) $u_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -1, 5),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 3, 1),\ u_3 = \frac{1}{3\sqrt{42}}(-16, -11, 1)\,;$
b) $u_1 = \frac{1}{3}(0, -1, 2, 2),\ u_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, 4, 1, 1),\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1),$
$u_4 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(-6, 4, 1, 1)\,;$
c) $u_1 = \frac{1}{6}(5, 3, 1, -1),\ u_2 = \frac{1}{6}(1, 1, -5, 3),\ u_3 = \frac{1}{6}(-3, 5, 1, 1),$
$u_4 = \frac{1}{6}(1, -1, 3, 5)\,.$

3. **uždavinys.** Raskite erdvės $\mathbb{R}^4$ poerdvio W ortogonaliojo papildinio bazę:

a) $W =< (1, 4, 5, 2), (2, 7, 1, 3) >;$
b) $W =< (1, 3, -5, 7), (2, 5, 3, 4), (3, 7, 2, 0) >$
c) $W =< (2, 2, -5, 3), (3, 4, 1, -2), (5, 8, 13, -12) >.$

Ats.:

a) $W^\perp =< (31, -9, 1, 0), (2, -1, 0, 1) >;$
b) $W^\perp =< (-241, 103, 1, -9) >;$
c) $W^\perp =< (22, -17, 2, 0), (-16, 13, 0, 2) >.$

4. **uždavinys.** Raskite vektoriaus $v \in \mathbb{R}^4$ projekciją ir statmenį į poerdvį W:

a) $v = (8, 2, 7, 9),\ W =< (4, 5, -1, 3), (-1, 2, 7, 4) >$;
b) $v = (3, 2, 3, 3),\ W =< (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 1) >$;
c) $v = (2, 0, 1, 1),\ W =< (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 4), (0, 0, 0, 1) >$.

Ats.:

a) Projekcija $(3, 7, 6, 7)$, statmuo $(5, -5, 1, 2)$;
b) Projekcija $(3, 0, 3, 3)$, statmuo $(0, 2, 0, 0)$;
c) Projekcija $(2, 0, 1, 1)$, statmuo $(0, 0, 0, 0)$.

5. **uždavinys.** Raskite erdvės $\mathbb{R}^4$ poerdvio

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ \begin{array}{ll} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 & = 0 \\ 3x_1 - \ x_2 + 11x_3 - 13x_4 & = 0 \\ 4x_1 + \ x_2 + 18x_3 - 23x_4 & = 0 \end{array} \right\}$$

ortogonalaus poerdvio $W^{\perp}$ bazę.
Ats.: $(2, -3, 4, -4), (3, -1, 11, -13), (4, 1, 18, -23)$.