EUKLIDO IR UNITARIOSIOS ERDVĖS

P. Drungilas ir H. Markšaitis

2012 m. spalio 23 d.

Turinys

1 skyrius

EUKLIDO IR UNITARIOSIOS ERDVĖS

1.1 Euklido erdvės

Sakykime, kad V – tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$.

1.1.1 apibrėžimas. Atvaizdis $F : V \times V \to \mathbb{R}$ yra vadinamas *simetrine dvitiesine forma*, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, jei bet kuriems $x, x_1, x_2, y \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

1. $F(x, y) = F(y, x)$;
2. $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 F(x_1, y) + \alpha_2 F(x_2, y)$.

Kaip matome, simetrinė dvitiesinė forma F, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, esant fiksuotam antrajam argumentui, yra tiesinė pagal pirmąjį argumentą. Įrodysime, kad F, esant fiksuotam pirmajam argumentui, yra tiesinė ir pagal antrąjį argumentą. Tai pateisins simetrinės formos F apibūdinimą kaip dvitiesinės.

1.1.2 teiginys. *Jei $F : V \times V \to \mathbb{R}$ yra simetrinė dvitiesinė forma, tai F, esant fiksuotam pirmajam argumentui, yra tiesinė pagal antrąjį argumentą, t. y. bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x, y_1, y_2 \in V$,*

$$F(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 F(x, y_1) + \alpha_2 F(x, y_2).$$

Įrodymas.

$$\begin{aligned} F(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= F(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, x) = \alpha_1 F(y_1, x) + \alpha_2 F(y_2, x) \\ &= \alpha_1 F(x, y_1) + \alpha_2 F(x, y_2). \end{aligned}$$

□

1.1.3 apibrėžimas. Simetrinė dvitiesinė forma F, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, yra vadinama *teigiamai apibrėžta*, jei kiekvienam $x \in V$, $F(x,x) \geq 0$ ir $F(x,x) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = O$.

1.1.4 apibrėžimas. Simetrinė dvitiesinė teigiamai apibrėžta forma F, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, yra vadinama *skaliarine daugyba.*

1.1.5 pastaba. Skaliarinę daugybą F, apibrėžtą tiesinėje erdvėje V, paprastumo dėlei vadinsime skaliarine daugyba tiesinėje erdvėje V, o reikšmę $F(x,y)$, $x, y \in V$, – vektorių x ir y skaliarine sandauga.

1.1.6 apibrėžimas. Jei tiesinėje erdvėje V yra apibrėžta skaliarinė daugyba F, tai tiesinė erdvė V skaliarinės daugybos F atžvilgiu yra vadinama *Euklido erdve* ir yra žymima (V,F).

1.1.7 pastaba. Dažniausiai skaliarinė daugyba Euklido (ar tiesinėje) erdvėje V yra žymima $\langle\ ,\ \rangle$. Mes skaliarinę daugybą Euklido erdvėje V žymėsime tiek raide F ar dar kuria nors kita raide, tiek ir simboliu $\langle\ ,\ \rangle$.

1.1.8 teiginys. *Jei (V,F) yra Euklido erdvė, tai kiekvienas tiesinės ervės V tiesinis poerdvis L yra Euklido erdvė indukuotos skaliarinės daugybos $F\big|_L$ atžvilgiu.*

Įrodymas. Įrodymą paliekame skaitytojui. □

1.1.9 pavyzdys. Sakykime, tiesinė erdvė $V = \mathbb{R}^n$. Apibrėžkime atvaizdį $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taip:

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nesunkiai galima įsitikinti, kad $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ yra Euklido erdvė. Šią Euklido erdvę vadinsime *standartine n-mate Euklido erdve.*

1.1.10 pavyzdys. Sakykime, kad $V = \mathbb{R}[t]$ visų polinomų su realiaisiais koeficientais tiesinė erdvė. Skaliarinę daugybą tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[t]$ apibrėžkime taip:

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Įsitikinkite, kad taip apibrėžtas atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[t]$.

Euklido erdvė $(\mathbb{R}[t], \langle\ ,\ \rangle)$ yra begaliniamatė.

Kiekvienam sveikajam skaičiui $n > 0$ Euklido erdvės $\mathbb{R}[t]$ tiesinis poerdvis

$$\mathbb{R}[t]_n = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \mathrm{deg} f(t) \leq n\} = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_j \in \mathbb{R},\ 0 \leq j \leq n\}$$

yra baigtinės dimensijos Euklido erdvė.

1.1.11 pavyzdys. Tegu $V = \mathbb{R}[t]$. Skaliarinę daugybą tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[t]$ apibrėžkime taip:

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\, dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Įsitikinkite, kad taip apibrėžtas atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[t]$.

Euklido erdvė $(\mathbb{R}[t], \langle\ ,\ \rangle)$ yra begalinmatė. Panašiai, kaip ir antrajame pavyzdyje, kiekvienam sveikajam skaičiui $n > 0$ šios Euklido erdvės $\mathbb{R}[t]$ tiesiniai poerdviai

$$\mathbb{R}[t]_n = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg f(t) \leq n\} = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_j \in \mathbb{R},\ 0 \leq j \leq n\}$$

yra baigtinės dimensijos Euklido erdvės.

1.1.12 pavyzdys. Sakykime, kad $V = \mathbb{R}[0,\ 1]$ – visų tolydžių intervale $[0,\ 1]$ funkcijų su reikšmėmis realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ tiesinė erdvė. Apibrėžkime skaliarinę daugybą tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[0,\ 1]$ taip:

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \int\limits_{0}^{1} f(t)g(t)\, dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[, 0\ 1].$$

Įsitikinkite, kad taip apibrėžtas atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[0,\ 1] \times \mathbb{R}[0,\ 1] \to \mathbb{R}$ yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}[0,\ 1]$.

Euklido erdvė $(\mathbb{R}[0,\ 1], \langle\ ,\ \rangle)$ yra begaliniamatė.

1.1.13 pavyzdys. Sakykime, kad $V = M_n(\mathbb{R})$ – visų n-tos eilės kvadratinių matricų su koeficientais realiųjų skaičių kūne $\mathbb{R}$ tiesinė erdvė. Skaliarinę daugybą tiesinėje erdvėje $M_n(\mathbb{R})$ apibrėžkime taip:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^t),\ \ A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

B^t – tai transponuota matrica B, $\mathrm{Tr}(A)$ – matricos A pėdsakas, t. y. matricos A pagrindinės istrižainės elementų suma.

Įsitikinkite, kad taip apibrėžtas atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje $M_n(\mathbb{R})$.

1.1.14 teiginys. *Kiekvienoje baigtinės dimensijos tiesinėje erdvėje V virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$ galima apibrėžti skaliarinę daugybą.*

Įrodymas. Sakykime, kad V – baigtinės dimensijos tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – šios erdvės bazė. Tiesinės erdvės V vektorius v_1 ir v_2, užrašę bazės $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektoriais atitinkamai $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ ir $v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$, vektorių v_1 ir v_2 skaliarinę sandaugą apibrėžkime taip:

$$\langle v_1, v_2 \rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j.$$

Įsitikinsime, kad taip apibrėžtas atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje V.

Visiškai akivaizdu, kad bet kuriems vektoriams $v_1, v_2 \in V$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$. Lieka įsitikinti, kad atvaizdis $\langle\ ,\ \rangle$ yra tiesinis pagal pirmąjį argumentą ir teigiamai apibrėžtas.

Sakykime, $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$, $v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$, $v_3 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n u_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tuomet

$$\langle \lambda v_1 + \mu v_2, v_3 \rangle = \langle \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j + \mu \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j,\ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_j \rangle$$

$$\langle \sum_{j=1}^{n} (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) u_j,\ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) \gamma_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda \alpha_j \gamma_j + \sum_{j=1}^{n} \mu \beta_j \gamma_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j + \mu \sum_{j=1}^{n} \beta_j \gamma_j = \lambda \langle v_1, v_3 \rangle + \mu \langle v_2, v_3 \rangle.$$

Akivaizdu, kad $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \geq 0$ ir $\langle v_1, v_1 \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 0$ tada ir tik tada, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, t. y. $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$ tada ir tik tada, kai $v = O$. □

Įrodysime paprastą išvadą, gaunamą remiantis skaliarinės daugybos tiesinėje erdvėje apibrėžimu.

1.1.15 teiginys. *Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė, O – tiesinės erdvės V nulinis vektorius. Tuomet kiekvienam $u \in V$, $F(O, u) = 0$.*

Įrodymas. Iš lygybės $F(O, u) = F(O+O, u) = F(O, u) + F(O, u) = 2F(O, u)$ gauname $F(O, u) = 0$. □

1.1.16 teiginys (Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybė)**.** *Sakykime,* (V, F) *– Euklido erdvė. Tuomet bet kuriems* $u, v \in V$*,* $F(u,v)^2 \leq F(u,u)F(v,v)$ *ir* $F(u,v)^2 = F(u,u)F(v,v)$ *tada ir tik tada, kai vektoriai* u *ir* v *yra tiesiškai priklausomi.*

Įrodymas. Nagrinėkime vektoriaus $tu+v$ (t – kintamasis, vietoje kurio galima įrašynėti reikšmes $\alpha \in \mathbb{R}$) skaliarinį kvadratą $F(tu+v, tu+v)$. Kadangi skaliarinė daugyba $F : V \times V \to \mathbb{R}$ yra dvitiesinė ir simetrinė funkcija, tai

$$F(tu + v, tu + v) = t^2 F(u,u) + 2tF(u,v) + F(v,v) \geq 0.$$

$F(u,u) = 0$, tada ir tik tada, kai $u = O$. Šiuo atveju vektoriai $u = O$ ir v yra tiesiškai priklausomi ir teisinga lygybė $F(O,v)^2 = F(O,O)F(v,v)$, nes $F(O,v) = 0$.

Dabar nagrinėkime atvejį, kai $F(u,u) \neq 0$. Šiuo atveju $F(u,u) > 0$ ir kiekvienam $t \in \mathbb{R}$, $t^2F(u,u) + 2tF(u,v) + F(v,v) \geq 0$, t. y. kvadratinis trinaris $t^2F(u,u) + 2tF(u,v) + F(v,v)$ yra neneigiamai apibrėžtas. Vadinasi, šio kvadratinio trinario diskriminantas tenkina nelygybę: $F(u,v)^2 - F(u,u)F(v,v) \leq 0$, t. y. $F(u,v)^2 \leq F(u,u)F(v,v)$.

Neneigiamai apibrėžtas kvadratinis trinaris $t^2F(u,u)+2tF(u,v)+F(v,v)$ turi realią šaknį tada ir tik tada, kai jo diskriminantas yra lygus nuliui, t. y. $F(u,v)^2 = F(u,u)F(v,v)$. Taigi $F(u,v)^2 = F(u,u)F(v,v)$ tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $t_0 \in \mathbb{R}$, kad $t_0^2F(u,u) + 2t_0F(u,v) + F(v,v) = F(t_0u + v, t_0u + v) = 0$, t. y., kai $t_0u + v = O$ arba, kitaip tariant, vektoriai u ir v yra tiesiškai priklausomi. □

1.1.17 pastaba. Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybė teisinga tiek baigtinės dimensijos, tiek begalinės dimensijos Euklido erdvės atvejais. Įrodydami šią nelygybę, nesirėmėme Euklido erdvės dimensija.

1.1.18 pavyzdys. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ standartinė n-matė Euklido erdvė. Priminsime, kad skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Tuomet, remdamiesi Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybe, galime parašyti:

$$(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2.$$

1.1.19 pavyzdys. Tegu $V = \mathbb{R}[t]$ visų polinomų su realiaisiais koeficientais tiesinė erdvė, o skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Tuomet, remdamiesi Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybe, galime parašyti:

$$(\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt)^2 \leq \int_{-1}^{1} f(t)^2\,dt \int_{-1}^{1} g(t)^2\,dt.$$

1.1.20 pavyzdys. Tegu $V = \mathbb{R}[t]$, o skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Tuomet, remdamiesi Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybe, galime parašyti:

$$(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2e^{-t^2}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2e^{-t^2}\,dt.$$

1.2 Euklido erdvės metrinės savybės

1.2.1. Prieš pradėdami aptarti Euklido erdvės metrines savybes, pirmiausia apibrėšime normuotos ir metrinės erdvių sąvokas.

1.2.2 apibrėžimas. Sakykime, V tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ – neneigiamų realiųjų skaičių aibė. Funkcija $||\ || : V \to \mathbb{R}_+$ yra vadinama *norma*, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, jei bet kuriems $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $||u|| \geq 0$, $||u|| = 0$ tada ir tik tada, kai $u = O$;
2. $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||$;
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (trikampio nelygybė).

1.2.3 apibrėžimas. Tiesinė erdvė V virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, kurioje apibrėžta norma $||\ ||$, yra vadinama normos $||\ ||$ atžvilgiu *normuota tiesine erdve* ir yra žymima $(V, ||\ ||)$. Funkcijos $||\ ||$ reikšmė $||v||$ vektoriuje v yra vadinama vektoriaus v norma arba *vektoriaus v ilgiu*.

1.2.4 apibrėžimas. Sakykime, X – netuščia aibė. Funkcija $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ yra vadinama *atstumo funkcija*, apibrėžta aibėje X, jei bet kuriems $a, b, c \in X$,

1. $\rho(a, b) \geq 0$, $\rho(a, b) = 0$ tada ir tik tada, kai $a = b$;
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
3. $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$ (*trikampio nelygybė*).

1.2.5 apibrėžimas. Netuščia aibė X, kurioje apibrėžta atstumo funkcija ρ, yra vadinama *metrine erdve* ρ atvilgiu ir yra žymima (X, ρ).

1.2.6. Normuotoje tiesinėje erdvėje $(V, || \; ||)$ galima apibrėžti atstumo funkciją $\rho : V \times V \to \mathbb{R}_+$ taip: bet kuriems $u, v \in V$, $\rho(u, v) := ||u - v||$. Galite įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija $\rho : V \times V \to \mathbb{R}_+$ iš tikrųjų yra atstumo funkcija. Be to, ši atstumo funkcija yra suderinta su tiesinės erdvės V struktūra: bet kuriems $u, v, w \in V$, $\rho(u + w, v + w) = \rho(u, v)$.

Jei tiesinė erdvė $(V, || \; ||)$ yra normuota, tai galima kalbėti apie šios erdvės vektorių ilgius, atstumus tarp vektorių, vektorių sekų ribas ir t. t.. Normuotos tiesinės erdvės atveju kampai tarp vektorių nėra apibrėžti, negalime kalbėti apie įvairių figūrų plotus, tūrius. Metrinėse erdvėse galima nagrinėti atstumus tarp erdvės elementų, metrinės erdvės elementų sekų ribas, bet negalime nagrinėti šios erdvės elementų ilgius. Normuotų tiesinių erdvių klasė yra siauresnė nei metrinių tiesinių erdvių klasė. Žymiai siauresnę erdvių klasę nei normuotos tiesinės erdvės sudaro Euklido erdvės. Euklido erdvių atveju, kaip įsitikinsime, galima nagrinėti vektorių ilgius, kampus tarp vektorių, įvairių dimensijų gretasienių "tūrius" ir t. t..

Dabar apibrėšime normos funkciją Euklido erdvėje.

1.2.7 apibrėžimas. Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė. Apibrėžkime funkciją $|| \; || : V \to \mathbb{R}_+$, $||u|| := \sqrt{F(u, u)}$, $u \in V$. Įsitikinsime, kad taip apibrėžta funkcija $|| \; ||$ turi sekančias savybes:

1. Kiekvienam $u \in V$, $||u|| \geq 0$ ir $||u|| = 0$ tada ir tik tada, kai $u = O$;

2. Kiekvienam $u \in V$, kiekvienam $\alpha \in \mathbb{R}$, $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||$;

3. Bet kuriems $u, v \in V$, $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (trikampio nelygybė).

Akivaizdu, kad funkcija $|| \; ||$ tenkina pirmąją normos apibrėžimo sąlygą. Jei $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, tai $||\alpha u|| = \sqrt{F(\alpha u, \alpha u)} = \sqrt{\alpha^2 F(u, u)} = |\alpha| \sqrt{F(u, u)} = |\alpha| \cdot ||u||$. Lieka įrodyti, kad funkcija $|| \; ||$ tenkina trečiąją normos apibrėžimo sąlygą.

Sakykime, $u, v \in V$. Tuomet

$$||u + v||^2 = F(u + v, u + v) =$$

$$F(u, u) + 2F(u, v) + F(v, v) \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2$$

(remiantis Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybe, $F(u, v)^2 \leq F(u, u)F(v, v)$ arba $|F(u, v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$, nes $||u||^2 = F(u, u)$, $||v||^2 = F(v, v)$). Nelygybė $||u + v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2$ ekvivalenti nelygybei $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$, nes dydžiai $||u + v||$, $||u|| + ||v||$ yra neneigiami.

1.2.8. Kaip matome, Euklido erdvė (V, F) priklauso normuotų erdvių ir tuo labiau metrinių erdvių klasei. Kyla klausimas, kokias sąlygas turi tenkinti normuotos erdvės $(V, || \ ||)$ normos funkcija $|| \ ||$, kad normuotoje erdvėje $(V, || \ ||)$ būtų galima apibrėžti skaliarinę daugybą F, suderintą su normos funkcija $|| \ ||$ tokia prasme: kiekvienam $u \in V$, $F(u, u) = ||u||^2$? Prieš atsakydami į šį klausimą, įrodysime svarbią skaliarinės daugybos savybę.

1.2.9 teiginys. *Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė. Tuomet bet kuriems vektoriams $u, v \in V$, teisinga lygybė:*

$$F(u+v, u+v) + F(u-v, u-v) = 2(F(u, u) + F(v, v)).$$

1.2.10 pastaba. Šią lygybę galima interpretuoti taip: lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma yra lygi lygiagretainio kraštinių ilgių kvadratų sumai. Be to, šią lygybę galime užrašyti ir taip: bet kuriems $u, v \in V$, $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

Įrodymas. $F(u+v, u+v) + F(u-v, u-v) = F(u, u) + F(u, v) + F(v, u) + F(v, v) + F(u, u) - F(u, v) - F(v, u) + F(v, v) = 2F(u, u) + 2F(v, v)$. □

1.2.11 teorema. *Normuotoje tiesinėje erdvėje $(V, || \ ||)$ galima apibrėžti skaliarinę daugybą F, suderintą su normos funkcija $|| \ ||$ (t. y. $F(u, u) = ||u||^2$) tada ir tik tada, kai normos funkcija $|| \ ||$ tenkina sąlygą: bet kuriems $u, v \in V$, $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.*

Įrodymas. Šios teoremos įrodymas pateikiamas skaitytojui kaip pratimas. Apibrėžkime atvaizdį $F : V \times V \to \mathbb{R}$ taip: bet kuriems $u, v \in V$,

$$F(u, v) := \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2).$$

Akivaizdu, kad kiekvienam $u \in V$, $F(u, u) = ||u||^2$. Taip pat akivaizdu, kad bet kuriems $u, v \in V$, $F(u, v) = F(v, u)$. Įrodykite, kad bet kuriems u, u_1, u_2, $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, teisingos lygybės:

1. $F(u_1 + u_2, v) = F(u_1, v) + F(u_2, v)$;
2. $F(\alpha u, v) = \alpha F(u, v)$.

Antrąją lygybę pirmiausia įrodykite tuo atveju, kai α yra sveikasis skaičius, o po to įrodykite, kai α yra racionalusis skaičius. Kadangi normos funkcija $|| \ ||$ yra tolydi, tai tolydi yra ir funkcija F. Vadinasi, jei funkcija F tenkina antrąją sąlygą, kai α yra racionalusis skaičius, tai ji tenkina antrąją sąlygą ir tuo atveju, kai α yra realusis skaičius. □

1.2.12 apibrėžimas. Euklido erdvės (V, F) vektorius u, kurio ilgis lygus 1, yra vadinamas *normuotu vektoriumi.* Jei $V \ni u \neq O$, tai vektorių u galime normuoti, padauginę jį iš $||u||^{-1}$: $||u||^{-1}u$ – normuotas vektorius.

1.2.13. Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė. Kadangi bet kuriems $u, v \in V$, $|F(u, v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$, tai bet kuriems nenuliniams vektoriams $u, v \in V$,

$$-1 \leq \frac{F(u,v)}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$$

Apibrėžkime *kampą* $\psi(u, v)$ *tarp vektorių* u ir v, kurio kosinusas yra lygus $\frac{F(u,v)}{||u|| \cdot ||v||}$. Taigi bet kuriems nenuliniams vektoriams $u, v \in V$,

$$\cos(\psi(u,v)) := \frac{F(u,v)}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Kampas $\psi(u, v)$ tarp vektorių u ir v, remiantis pastarąja lygybe, nėra vienareikšmiškai apibrėžtas. Susitarkime, kad $\psi(u, v)$ yra lygus mažiausiai teigiamai reikšmei, tenkinančiai anksčiau užrašytą lygtį.

1.2.14 apibrėžimas. Euklido erdvės (V, F) nenuliniai vektoriai u ir v yra vadinami *ortogonaliais*, jei $F(u, v) = 0$. Jei vektoriai u ir v yra ortogonalūs, tai yra rašoma $u \perp v$.

1.2.15 (Lygiagretainio plotas)**.** Taigi Euklido erdvėje apibrėžtos vektoriaus ilgio, atstumo tarp vektorių ir kampo tarp vektorių sąvokos. Jei (V, F) yra n-matė Euklido erdvė, tai galima apibrėžti m-mačius gretasienius ir tokių figūrų tūrius. Pavyzdžiui, jei Euklido erdvės (V, F) vektoriai u ir v yra tiesiškai nepriklausomi, tai figūrą $\{\alpha u + \beta v \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$ galime pavadinti dvimačiu lygiagretainiu, užtemptu ant vektorių u ir v. Apskaičiuokime tokio lygiagretainio plotą. Kaip žinome, lygiagretainio plotas yra lygus kurios nors lygiagretainio kraštinės ir lygiagretainio aukštinės į šią kraštinę ilgių sandaugai. Imkime lygiagretainio kraštinę u. Tuomet lygiagretainio aukštinės į kraštinę u ilgis yra lygus $||v|| \sin \psi(u, v)$. Taigi lygiagretainio plotas yra lygus $||u|| \cdot ||v|| \sin \psi(u, v)$. Patogu apskaičiuoti šio lygiagretainio ploto kvadratą:

$$(||u|| \cdot ||v|| \sin \psi(u,v))^2 = F(u,u)F(v,v)(1 - \cos^2 \psi(u,v)) =$$

$$F(u,u)F(v,v)(1 - \frac{F(u,v)^2}{F(u,u)F(v,v)}) = F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2.$$

Štai kokia įdomi Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybės geometrinė prasmė! Dabar akivaizdu, kad

$$F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2 > 0,$$

kai vektoriai u ir v yra tiesiškai nepriklausomi ir

$$F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2 = 0$$

tada ir tik tada, kai u ir v yra tiesiškai priklausomi. Lygiagretainis, užtemptas ant vektorių yra "supliuškęs" tada ir tik tada, kai vektoriai u ir v yra tiesiškai priklausomi. "Supliuškusio" lygiagretainio plotas yra lygus 0.

1.2.16 (Trimačio gretasienio tūris)**.** Įdomu apskaičiuoti trimačio gretasienio, užtempto ant trijų Euklido erdvės (V, F) tiesiškai nepriklausomų vektorių u_1, u_2, u_3, tūrį. Išspręskime šį uždavinį. Tokio gretasienio tūris yra lygus gretasienio pagrindo ploto ir gretasienio aukštinės į šį pagrindą ilgio sandaugai. Gretasienio pagrindo, užtempto, pavyzdžiui, ant vektorių u_1 ir u_2, ploto kvadratas yra lygus $F(u_1,u_1)F(u_2,u_2) - F(u_1,u_2)^2$. Lieka apskaičiuoti gretasienio aukštinės į šį pagrindą ilgį. Gretasienio aukštinė h į šį pagrindą turi pavidalą: $h = u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Koeficientai α_1 ir α_2 – nežinomi. Kadangi h yra statmena (ortogonali) pagrindui, tai $F(h, u_1) = 0$, $F(h, u_2) = 0$. Į šias lygtis įrašę h išraišką, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} F(u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2, u_1) & = 0 \\ F(u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2, u_2) & = 0 \end{cases}. \tag{1.1}$$

Pertvarkę šią lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \alpha_1 F(u_1,u_1) + \alpha_2 F(u_2,u_1) & = F(u_3,u_1) \\ \alpha_1 F(u_1,u_2) + \alpha_2 F(u_2,u_2) & = F(u_3,u_2) \end{cases}.$$

Šios lygčių sistemos determinantas

$$\det \begin{pmatrix} F(u_1,u_1) & F(u_2,u_1) \\ F(u_1,u_2) & F(u_2,u_2) \end{pmatrix} = F(u_1,u_1)F(u_2,u_2) - F(u_1,u_2)^2 > 0,$$

kaip matome, yra nelygus nuliui. Vadinasi, šią lygčių sistemą galime išspręsti remdamiesi Kramerio taisykle:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} F(u_3,u_1) & F(u_2,u_1) \\ F(u_3,u_2) & F(u_2,u_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(u_1,u_1) & F(u_2,u_1) \\ F(u_1,u_2) & F(u_2,u_2) \end{vmatrix}}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} F(u_1,u_1) & F(u_3,u_1) \\ F(u_1,u_2) & F(u_3,u_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(u_1,u_1) & F(u_2,u_1) \\ F(u_1,u_2) & F(u_2,u_2) \end{vmatrix}},$$

arba

$$\alpha_1 = \frac{F(u_3,u_1)F(u_2,u_2) - F(u_3,u_2)F(u_2,u_1)}{F(u_1,u_1)F(u_2,u_2) - F(u_1,u_2)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{F(u_1,u_1)F(u_3,u_2) - F(u_1,u_2)F(u_3,u_1)}{F(u_1,u_1)F(u_2,u_2) - F(u_1,u_2)^2}.$$

Dabar galime apskaičiuoti aukštinės h ilgio kvadratą:

$$||h||^2 = F(u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2, u_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2) =$$

$$= F(u_3, u_3) - \alpha_1 F(u_1, u_3) - \alpha_2 F(u_2, u_3).$$

Taip užrašydami aukštinės h ilgio kvadratą pasinaudojome tuo, kad (α_1, α_2) yra (1.1) lygčių sistemos sprendinys. Įrašę α_1, α_2 reikšmes į aukštinės h ilgio kvadrato išraišką, gauname:

$$F(u_3, u_3) - \frac{\begin{vmatrix} F(u_3, u_1) & F(u_2, u_1) \\ F(u_3, u_2) & F(u_2, u_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_2, u_1) \\ F(u_1, u_2) & F(u_2, u_2) \end{vmatrix}} F(u_1, u_3) - \frac{\begin{vmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_3, u_1) \\ F(u_1, u_2) & F(u_3, u_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_2, u_1) \\ F(u_1, u_2) & F(u_2, u_2) \end{vmatrix}} F(u_2, u_3).$$

Subendravardiklinę šį reiškinį ir padauginę iš pagrindo ploto kvadrato, gauname gretasienio, užtempto ant vektorių u_1, u_2, u_3, tūrio kvadrato išraišką:

$$\det \begin{pmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_1, u_2) & F(u_1, u_3) \\ F(u_2, u_1) & F(u_2, u_2) & F(u_2, u_3) \\ F(u_3, u_1) & F(u_3, u_2) & F(u_3, u_3) \end{pmatrix}.$$

1.2.17. Panašiai būtų galima pabandyti apskaičiuoti r-mačių gretasienių, užtemptų ant Euklido erdvės (V, F) tiesiškai nepriklausomų vektorių u_1, u_2, $\ldots$, $u_r \in V$, r-mačių tūrių kvadratus. Tiesiogiai tai padaryti gana sudėtinga. Bet galima tai ir visiškai kitaip padaryti. Pavyzdžiui, jei Euklido erdvės (V, F) vektoriai u_1, u_2, u_3 yra tarpusavy ortogonalūs, tai stačiakampio gretasienio, užtempto ant vektorių u_1, u_2, u_3, tūrio kvadratas yra lygus

$$||u_1||^2 ||u_2||^2 ||u_3||^3 = F(u_1, u_1) F(u_2, u_2) F(u_3, u_3).$$

Savaime suprantama, kad r-mačio stačiakampio gretasienio, užtempto ant tarpusavy ortogonalių vektorių $u_1, u_2, \ldots, u_r \in V$, r-mačio tūrio kvadratas turėtų būti apibrėžiamas taip:

$$||u_1||^2 ||u_2||^2 \ldots ||u_r||^2 = F(u_1, u_1) F(u_2, u_2) \ldots F(u_r, u_r).$$

Jei Euklido erdvės (V, F) vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ nėra tarpusavyje ortogonalūs, tai egzistuoja ortogonalizacijos algoritmas, kuriuo remiantis vektorių šeimą $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ galima pertvarkyti į tokią tarpusavyje ortogonalių vektorių šeimą $u_1, u_2, \ldots, u_r \in V$, kad r-mačių gretasienių, užtemptų tiek ant vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$, tiek ant vektorių $u_1, u_2, \ldots, u_r \in V$, tūriai yra lygūs.

1.3 Ortogonalizacijos algoritmas, ortonormuotos vektorių šeimos

1.3.1 apibrėžimas. Euklido erdvės (V, F) vektorių šeima u_1, u_2, ..., u_r yra vadinama *ortonormuota*, jei $F(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq r$ (δ_{ij} – Kronekerio simbolis).

1.3.2 teiginys. *Euklido erdvės (V, F) ortonormuota vektorių šeima u_1, u_2, ..., u_r yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Sakykime, kad $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r = O$. Skaliariškai padauginę šios lygybės abi puses iš vektoriaus u_j, $1 \leq j \leq r$, gauname:

$$F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_r u_r, u_j) = \alpha_j = 0,\ 1 \leq j \leq r.$$

Taigi vektoriai u_1, u_2, ..., u_r yra tiesiškai nepriklausomi. □

1.3.3 teorema (Ortogonalizacijos algoritmas (procesas))**.** *Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė. Egzistuoja algoritmas, vadinamas ortogonalizacijos algoritmu (procesu), kuriuo remiantis Euklido erdvės V kiekvieną tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimą v_1, v_2, ..., v_s galima pertvarkyti į tokią ortonormuotą vektorių šeimą u_1, u_2, ..., u_s, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,*

$$\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_j = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \cdots + \mathbb{R}\, u_j.$$

1.3.4 pastaba. $\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_j$ – vektorių v_1, v_2, ..., v_j tiesinis apvalkalas. Kadangi vektoriai v_1, v_2, ..., v_s yra tiesiškai nepriklausomi, tai kiekvienam r, $1 \leq r \leq s$, poerdvių $\mathbb{R}\, v_j$, $1 \leq j \leq s$, suma $\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_r$ yra tiesioginė suma $\mathbb{R}\, v_1 \oplus \mathbb{R}\, v_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\, v_r$.

Įrodymas. Šią teoremą įrodysime matematinės indukcijos metodu.

Pirmiausia įrodysime, kad tiesiškai nepriklausomus vektorius v_1, v_2, ..., v_s galima pertvarkyti į tokią tarpusavy ortogonalių vektorių šeimą w_1, w_2, ..., w_s, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq s$,

$$\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_j = \mathbb{R}\, w_1 + \mathbb{R}\, w_2 + \cdots + \mathbb{R}\, w_j.$$

Po to vektorius w_1, w_2, ..., w_s normuosime ir gausime ortonormuotą vektorių šeimą $u_j = ||w_j||^{-1} w_j$, tenkinančią sąlygas, suformuluotas teoremoje.

Tegu $w_1 = v_1$. Sakykime, $w_2 = \alpha_{11} w_1 + v_2$. Koeficientas α_{11} yra kol kas nežinomas. Kiekvienam $\alpha_{11} \in \mathbb{R}$, $w_2 \neq O$. Koeficientą α_{11} parinkime taip, kad w_2 būtų ortogonalus vektoriui w_1. Tuo tikslu sudarome lygtį:

$$F(\alpha_{11} w_1 + v_2, w_1) = 0.$$

Kaip matome, lygtis $\alpha_{11}F(w_1, w_1)+F(v_2, w_1) = 0$ yra išsprendžiama, nes, kadangi $w_1 \neq O$, tai ir $F(w_1, w_1) \neq 0$. Be to, akivaizdu, kad $\mathbb{R}\, v_1 = \mathbb{R}\, w_1$, $\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 = \mathbb{R}\, w_1 + \mathbb{R}\, w_2$.

Sakykime, kad jau radome tokius tarpusavy ortogonalius vektorius w_1, w_2, ..., w_r, kad kiekvienam j, $1 \leq j \leq r$,

$$\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_j = \mathbb{R}\, w_1 + \mathbb{R}\, w_2 + \cdots + \mathbb{R}\, w_j.$$

Jei $r = s$, tai teoremos įrodymas baigtas. Jei $r < s$, tai, sakykime, $w_{r+1} = \alpha_{r1}w_1 + \alpha_{r2}w_2 + \cdots + \alpha_{rr}w_r + v_{r+1}$. Pastebėsime, kad bet kuriems $\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rr} \in \mathbb{R}$, $w_{r+1} \neq O$. Koeficientus $\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rr}$ parinksime taip, kad būtų $w_{r+1} \perp w_1$, $w_{r+1} \perp w_2$, $\ldots$, $w_{r+1} \perp w_r$. Tuo tikslu sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} F(\alpha_{r1}w_1 + \alpha_{r2}w_2 + \cdots + \alpha_{rr}w_r + v_{r+1}, w_1) & = 0 \\ F(\alpha_{r1}w_1 + \alpha_{r2}w_2 + \cdots + \alpha_{rr}w_r + v_{r+1}, w_2) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ F(\alpha_{r1}w_1 + \alpha_{r2}w_2 + \cdots + \alpha_{rr}w_r + v_{r+1}, w_r) & = 0 \end{cases}.$$

Kadangi vektoriai w_1, w_2, ..., w_r yra tarp savęs ortogonalūs, tai kairėje lygčių sistemos pusėje skaliariškai sudauginę vektorius, gaunme:

$$\begin{cases} \alpha_{r1}F(w_1, w_1) + F(v_{r+1}, w_1) & = 0 \\ \alpha_{r2}F(w_2, w_2) + F(v_{r+1}, w_2) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ \alpha_{rr}F(w_r, w_r) + F(v_{r+1}, w_r) & = 0 \end{cases}.$$

Kai matome, ši lygčių sistema yra išsprendžiama. Taigi vektorius $w_{r+1} = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_{rj}w_j + v_{r+1}$, ortogonalus vektoriams w_j, $1 \leq j \leq r$, egzistuoja. Kadangi $\bigoplus\limits_{j=1}^{r} \mathbb{R} v_j = \bigoplus\limits_{j=1}^{r} \mathbb{R}\, w_j$, tai akivaizdu, kad $w_{r+1} \in \bigoplus\limits_{j=1}^{r+1} \mathbb{R}\, v_j$ ir $v_{r+1} \in \bigoplus\limits_{j=1}^{r+1} \mathbb{R}\, w_j$. Vadinasi, $\bigoplus\limits_{j=1}^{r+1} \mathbb{R}\, v_j = \bigoplus\limits_{j=1}^{r+1} \mathbb{R}\, w_j$.

Taigi nurodėme, kaip duotus tiesiškai nepriklausomus vektorius v_j, $1 \leq j \leq s$, galima pertvarkyti į tarpusavy ortogonalių vektorių šeimą w_j, $1 \leq j \leq s$, tenkinančią sąlygas: kiekvienam r, $1 \leq r \leq s$,

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{R}\, v_j = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{R}\, w_j.$$

Normavę vektorius w_j, $1 \leq j \leq s$, gausime ieškomą ortonormuotą vektorių šeimą $u_j = ||w_j||^{-1} w_j$, $1 \leq j \leq s$. $\square$

1.3.5 išvada. *Kiekvienoje Euklido erdvėje egzistuoja ortonormuota bazė.*

Įrodymas. Kurią nors Euklido erdvės bazę ortogonalizacijos algoritmu galime pertvarkyti į šios erdvės ortonormuotą bazę. □

Pratimas. Sakykime, v_1, v_2, ..., v_s – tieisiškai nepriklausomi, o v_1, v_2, ..., v_s, v_{s+1} – tiesiškai priklausomi Euklido erdvės (V, F) vektoriai. Įrodykite, kad ortogonalizavę vektorių sistemą v_1, v_2, ..., v_s, v_{s+1}, gausite tokią ortogonalią vektorių šeimą w_1, w_2, ..., w_s, w_{s+1}, kurios vektoriai $w_j \neq O$, $1 \leq j \leq s$, o $w_{s+1} = O$.

1.3.6 (Ortogonalių vektorių šeimų pavyzdžiai)**.**

1.3.7 pavyzdys. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ standartinė n-matė Euklido erdvė. Priminsime, kad skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j,$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Akivaizdu, kad šios erdvės standartinė bazė e_1, e_2, $\ldots$, e_n yra ortonormuota. Priminsime, kad $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn})$, $1 \leq j \leq n$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis.

1.3.8 pavyzdys. Sakykime, kad $V = \mathbb{R}[t]$ visų polinomų su realiaisiais koeficientais tiesinė erdvė, o skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,\ f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Ležandro polinomai $P_j(t)$, $j \geq 0$ yra apibrėžiami taip:

$$P_j(t) := \frac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^j,\ j > 0,\ P_0(t) := 1.$$

1.3.9 teiginys. *Ležandro polinomai sudaro Euklido erdvės* $\mathbb{R}[t]$ *ortogonalią bazę.*

Įrodymas. Ležandro polinomo $P_j(t)$ laipsnis yra lygus j, $j \geq 0$. Vadinasi, šie polinomai sudaro tiesinės erdvės $\mathbb{R}[t]$ bazę. Įrodysime, kad bet kurie du skirtingi Ležandro polinomai yra ortogonalūs. Imkime $P_r(t)$ ir $P_s(t)$, $r \neq s$. Sakykime, kad $r < s$. Tuomet

$$\langle P_r(t), P_s(t)\rangle := \int_{-1}^{1} P_r(t)P_s(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}\,(t^2-1)^r\,\frac{d^s}{dt^s}\,(t^2-1)^s\,dt.$$

Integruokime dalimis:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^s}{dt^s}(t^2-1)^s\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r\, d\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}(t^2-1)^s =$$

$$\frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}(t^2-1)^s\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}(t^2-1)^r \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}(t^2-1)^s\, dt.$$

Įsitikinkite, kad

$$\frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}(t^2-1)^s\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Vadinasi,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^s}{dt^s}(t^2-1)^s\, dt = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}(t^2-1)^r \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}(t^2-1)^s\, dt.$$

Pakartoję integravimą dalimis m kartų, gausime:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^s}{dt^s}(t^2-1)^s\, dt = (-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{d^{r+m}}{dt^{r+m}}(t^2-1)^r \frac{d^{s-m}}{dt^{s-m}}(t^2-1)^s\, dt.$$

Jei $m = s$, tai

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^s}{dt^s}(t^2-1)^s\, dt = (-1)^s \int_{-1}^{1} (t^2-1)^s \frac{d^{r+s}}{dt^{r+s}}(t^2-1)^r\, dt = 0,$$

nes $\frac{d^{r+s}}{dt^{r+s}}(t^2-1)^r = 0$ ($2r$ laipsnio polinomą išdiferencijavę $r+s > 2r$ kartų, gauname 0). □

Pratimas. Apskaičiuokite vektoriaus $P_r(t)$ normos kvadrato

$$\langle P_r(t), P_r(t)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r \frac{d^r}{dt^r}(t^2-1)^r\, dt$$

reikšmę.

1.3.10 pastaba. 1.3.9 teiginyje kalbama apie erdvės $\mathbb{R}[t]$ bazę, nors ši erdvė yra begaliniamatė. Bendruoju atveju tiesinės erdvės V virš kūno k *bazę* galima būtų apibrėžti kaip vektorų šeimą $\{v_i \,|\, i \in I\} \subset V$ (I – nebūtinai baigtinė indeksų aibė), tenkinančią sąlygas:

1. Bet kuris šeimos $\{v_i \,|\, i \in I\}$ baigtinis pošeimis yra tiesiškai nepriklausomas;

2. Bet kuris vektorius $v \in V$ užrašomas baigtinio vektorių rinkinio $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \{v_i \,|\, i \in I\}$ tiesine išraiška, t. y.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m,$$

   $\alpha_j \in k$, $1 \leq j \leq m$.

Be to, bet kurios dvi tiesinės erdvės bazės yra ekvivalenčios (kaip aibės). Pavyzdžiui, realiųjų skaičių $\mathbb{R}$, kaip tiesinės erdvės virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, bazė yra kontinuumo galios aibė.

Pratimas. Sakykime, jog $\{A_j(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, j \geq 0\}$ yra tokia daugianarių seka, jog kiekvienam $j \geq 0$, $\deg A_j(t) = j$ ($A_0(t) \neq 0$, nes esame sutarę, jog $\deg 0 = -\infty$). Įrodykite, kad polinomų aibė (vektorių sistema) $\{A_j(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, j \geq 0\}$ yra tiesinės erdvės $\mathbb{R}[t]$ bazė (žr. 1.3.10 pastabą).

1.3.11 pavyzdys. Sakykime, kad $V = \mathbb{R}[t]$, o skaliarinė daugyba šioje erdvėje apibrėžta taip:

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}dt, \;\; f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Ermito polinomai $H_j(t)$, $j \geq 0$, yra apibrėžiami taip:

$$H_j(t) := (-1)^j e^{t^2}\frac{d^j e^{-t^2}}{dt^j}, \;\; j > 0, \;\; H_0(t) := 1.$$

Ermito polinomo $H_j(t)$ laipsnis yra lygus j, $j \geq 0$. Vadinasi, Ermito polinomai sudaro tiesinės erdvės $\mathbb{R}[t]$ bazę. Kaip ir antrajame pavyzdyje galima įrodyti, kad bet kurie du skirtingi Ermito polinomai yra ortogonalūs.

Pratimas. Įrodykite, kad Ermito polinomams H_r ir F_s, $r < s$, teisinga lygybė:

$$\langle H_r(t), H_s(t)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{r+s} e^{t^2}\frac{d^r e^{-t^2}}{dt^r}\, e^{t^2}\,\frac{d^s e^{-t^2}}{dt^s}\, e^{-t^2}\,dt = 0.$$

1.3.12. Skaliarinė daugyba F tiesinėje erdvėje V virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, – tai dar viena, – metrinė, – struktūra, apibrėžta aibėje V ir suderinta su tiesinės erdvės struktūra, apibrėžta toje pačioje aibėje V. Todėl svarbu apibrėžti dviejų Euklido erdvių tapatumo sąvoką, t. y. kaip suprasti skirtingai apibrėžtas Euklido erdves tų erdvių struktūrų požiūriu esančias vienodas.

1.3.13 apibrėžimas. Euklido erdvės (V, F) ir (W, G) yra vadinamos *izomorfinėmis* (arba *izometrinėmis*), jei egzistuoja bijekcija $f : V \to W$, tenkinanti sąlygas:

1. Atvaizdis $f : V \to W$ yra tiesinis, t. y. bet kuriems $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$;
2. Bet kuriems $u, v \in V$, $G(f(u), f(v)) = F(u, v)$.

1.3.14 teorema. *Euklido erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės tada ir tik tada, kai tiesinių erdvių V ir W dimensijos $\dim_{\mathbb{R}} V$ ir $\dim_{\mathbb{R}} W$ yra lygios.*

Įrodymas. Jei Euklido erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės, tai egzistuoja tiesinė bijekcija $f : V \to W$. Vadinasi, $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$.

Tarkime, kad (V, F) ir (W, G) yra Euklido erdvės ir $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W = n$. Įrodysime, kad Euklido erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės.

Išsirinkime Euklido erdvių (V, F) ir (W, G) ortonormuotas bazes atitinkamai $v_1, v_2, \dots, v_n$ ir $w_1, w_2, \dots, w_n$. Tuomet tiesinis atvaizdis $f : V \to W$, $f(v_j) = w_j$, $1 \le j \le n$, yra tiesinė bijekcija. Įsitikinsime, kad bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, teisinga lygybė: $G(f(u_1), f(u_2)) = F(u_1, u_2)$.

Sakykime, $u_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $u_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Tuomet

$$F(u_1, u_2) = F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j F(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j.$$

Kita vertus,

$$G(f(u_1), f(u_2)) = G(f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i), f(\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j)) = G(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j G(w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j.$$

Kaip matome, bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, teisinga lygybė: $G(f(u_1), f(u_2)) = F(u_1, u_2)$. Taigi Euklido erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės. □

1.3.15. Sakykime, (V, F) yra Euklido erdvė, L – tiesinės erdvės V poerdvis. Apibrėžkime poaibį $L^{\perp}$, sudarytą iš tiesinės erdvės V visų tokių vektorių, kurių kiekvienas yra ortogonalus kiekvienam poerdvio L vektoriui. Matematiniais žymėjimais:

$$L^{\perp} := \{u \in V \mid F(u, l) = 0, \ \text{su visais } l \in L\}.$$

1.3.16 teiginys. *Jei L yra Euklido erdvės (V, F) tiesinis poerdvis, tai $L^{\perp}$ taip pat yra tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis.*

Įrodymas. Sakykime, $u_1, u_2 \in L^{\perp}$, t. y. $u_1 \perp L$, $u_2 \perp L$ ir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tuomet kiekvienam $l \in L$,

$$F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, l) = \alpha_1 F(u_1, l) + \alpha_2 F(u_2, l) = 0.$$

Vadinasi, jei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in L^{\perp}$, tai ir $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in L^{\perp}$, t. y. $L^{\perp}$ yra tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis. □

1.3.17 teiginys. *Jei L yra Euklido erdvės (V, F) tiesinis poerdvis, tai $V = L \oplus L^{\perp}$.*

Įrodymas. Sakykime, kad u_1, u_2, $\ldots$, u_r – ortonormuota tiesinio poerdvio L bazė, o u_1, u_2, $\ldots$, u_r, v_1', v_2', $\ldots$, v_s' – tiesinės erdvės V bazė. Remiantis ortogonalizacijos algoritmu, tiesinės erdvės V bazę u_1, u_2, $\ldots$, u_r, v_1', v_2', $\ldots$, v_s' galima pertvarkyti į ortonormuotą bazę u_1, u_2, $\ldots$, u_r, v_1, v_2, $\ldots$, v_s. Akivaizdu, kad v_1, v_2, $\ldots$, $v_s \in L^{\perp}$. Taigi $V = L + L^{\perp}$. Bet $L \cap L^{\perp} = \{O\}$. Iš tikrųjų: jei $w \in L \cap L^{\perp}$, tai $w \perp w$ arba $F(w, w) = 0$, t. y. $w = O$. Taigi $V = L \oplus L^{\perp}$. □

Euklido erdvės (V, F) poerdvių L ir $L^{\perp}$ tiesioginę sumą $L \oplus L^{\perp}$ būtų galima pavadinti poerdvių L ir $L^{\perp}$ ortogonaliąja suma todėl, kad kiekvienas poerdvio L vektorius yra ortogonalus kiekvienam poerdvio $L^{\perp}$ vektoriui.

1.4 Daugiamačių gretasienių tūriai

1.4.1. Dabar aptarsime r-mačių gretasienių tūrių formules.

1.4.2 apibrėžimas. Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė, v_1, v_2, ..., v_r, – šios erdvės vektorių šeima. Matrica

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_r) := \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) & \ldots & F(v_1, v_r) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) & \ldots & F(v_2, v_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(v_r, v_1) & F(v_r, v_2) & \ldots & F(v_r, v_r) \end{pmatrix}$$

yra vadinama vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r *Gramo matrica*, o šios matricos determinantas $\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \det(F(v_i, v_j))_{i,j=1}^{r}$ – vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r *Gramo determinantu.* Vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r Gramo matrica gali būti užrašoma ir taip: $(F(v_i, v_j))_{i,j=1}^{r}$.

1.4.3 teiginys. *Jei Euklido erdvės (V, F) vektoriai u_j, $1 \le j \le r$, yra tiesiškai išreiškiami vektoriais v_j, $1 \le j \le r$, t. y. $u_j = \sum\limits_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m$, $1 \le j \le r$, tai* $\det G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{r})^2 \det G(v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

Įrodymas. Jei $u_j = \sum\limits_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m$, $1 \le j \le r$, tai išsiaiškinkime, kaip yra susiejusios vektorių šeimų u_j, $1 \le j \le r$, ir v_j, $1 \le j \le r$, Gramo matricos. Taigi

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (F(u_i, u_j))_{i,j=1}^{r} =$$

$$= \Big(F\big(\sum_{l=1}^{r} \alpha_{il} v_l, \sum_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m \big) \Big)_{i,j=1}^{r} = \Big(\sum_{l=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \alpha_{il} \alpha_{jm} F(v_l, v_m) \Big)_{i,j=1}^{r}.$$

Remdamiesi pastarąja lygybe, matome: jei pažymėtume matricas $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{r}$, $(F(u_i, u_j))_{i,j=1}^{r}$ ir $(F(v_i, v_j))_{i,j=1}^{r}$ raidėmis T, G' ir G, tai galėtume parašyti: $G' = TGT^t$. Kadangi $\det G' = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $\det G = \det G(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, tai

$$\det G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \det T G(v_1, v_2, \ldots, v_r) \det T^t$$

$$= (\det T)^2 \det G(v_1, v_2, \ldots, v_r).$$

□

1.4.4 teiginys. *Sakykime, u_1, u_2, …, u_r, – Euklido erdvės (V, F) vektorių šeima, gauta ortogonalizavus tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimą v_1, v_2, …, v_r. Tuomet*

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \prod_{j=1}^{r} F(u_j, u_j).$$

Įrodymas. Ortogonalizuojant vektorių šeimą v_1, v_2, …, v_r, ortogonalizuotos vektorių šeimos vektoriai u_j, $1 \le j \le r$, kaip matėme, yra išreiškiami taip: kiekvienam j, $1 \le j \le r$,

$$u_j = \alpha_{j-1\,1} u_1 + \alpha_{j-1\,2} u_2 + \cdots + \alpha_{j-1\,j-1} u_{j-1} + v_j,\ \alpha_{lm} \in \mathbb{R},\ 1 \le l, m \le r-1.$$

Koeficientas $\alpha_{00} = 0$. Kadangi kiekvinam j, $1 \le j \le r$,

$$\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_j = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \cdots + \mathbb{R}\, u_j,$$

tai vektoriai u_j, $1 \le j \le r$, yra išreiškiami vektoriais v_j, $1 \le j \le r$, taip: kiekvienam j, $1 \le j \le r$,

$$u_j = \beta_{j-1\,1} v_1 + \beta_{j-1\,2} v_2 + \cdots + \beta_{j-1\,j-1} v_{j-1} + v_j,\ \beta_{lm} \in \mathbb{R},\ 1 \le l, m \le r-1.$$

Koeficientas $\beta_{00} = 0$.

Kaip matome, perėjimo matrica iš vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r, į ortogonalią vektorių šeimą u_1, u_2, $\ldots$, u_r, yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{r-11} & \beta_{r-12} & \beta_{r-13} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi šios matricos determinantas yra lygus 1, tai

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \prod_{j=1}^{r} F(u_j, u_j).$$

$\square$

1.4.5 išvada. *Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė, v_1, v_2, $\ldots$, $v_r \in V$ – tiesiškai nepriklausomi vektoriai, $1 \le r \le \dim_{\mathbb{R}} V$. Tuomet* $\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) > 0$. $\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = 0$ *tada ir tik tada, kai vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, $v_r \in V$ yra tiesiškai priklausomi.*

Įrodymas. Jei Euklido erdvės (V, F) vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$, yra tiesiškai nepriklausomi, tai šiuos vektorius ortogonalizavę, gauname ortogonalią tiesiškai nepriklausomą vektorių šeimą u_1, u_2, $\ldots$, u_r. Taigi

$$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \prod_{j=1}^{r} F(u_j, u_j) > 0.$$

$\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = 0$ tada ir tik tada, kai $\prod_{j=1}^{r} F(u_j, u_j) = 0$. Ši sandauga yra lygi nuliui tada ir tik tada, kai egzistuoja toks j_0, $1 \le j_0 \le r$, kad $F(u_{j_0}, u_{j_0}) = 0$, t. y. tada ir tik tada, kai $u_{j_0} = O$. Jei $u_{j_0} = O$, tai vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, v_{j_0} yra tiesiškai priklausomi, nes, kaip žinome,

$$\mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_{j_0} = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \cdots + \mathbb{R}\, u_{j_0}$$

$$= \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \cdots + \mathbb{R}\, u_{j_0-1} = \mathbb{R}\, v_1 + \mathbb{R}\, v_2 + \cdots + \mathbb{R}\, v_{j_0-1}.$$

Vadinasi, ir vektoriai v_1, v_2, $\ldots$, $v_r \in V$ yra tiesiškai priklausmi. $\square$

1.4.6. Dabar galime pateikti dar vieną Koši-Buniakovskio-Švarco nelygybės įrodymą, kaip ką tik įrodytos išvados atskirą atvejį.

1.4.7 teiginys. *Tarkime, (V, F) – Euklido erdvė. Tuomet bet kuriems $u, v \in V$, $F(u, v)^2 \le F(u, u)F(v, v)$ ir $F(u, v)^2 = F(u, u)F(v, v)$ tada ir tik tada, kai vektoriai u ir v yra tiesiškai priklausomi.*

Įrodymas. Jei $u = O$, tai abi nelygybės pusės yra lygios nuliui, o vektoriai u ir v tiesiškai priklausomi. Sakykime, $u \neq O$. Ortogonalizavę vektorius u, v, tarkime, gauname vektorius $u = u'$ ir v'. Tuomet

$$F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2 = \det \begin{pmatrix} F(u,u) & F(u,v) \\ F(v,u) & F(v,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} F(u',u') & F(u',v') \\ F(v',u') & F(v',v') \end{pmatrix} = F(u',u')F(v',v') \geq 0,$$

nes $F(u',v') = 0$ (vektoriai u' ir v' – ortogonalūs). Taigi $F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2 \geq 0$. $F(u,u)F(v,v) - F(u,v)^2 = 0$ tada ir tik tada, kai $F(u',u')F(v',v') = 0$. Kadangi $u = u' \neq O$, tai $F(v',v') = 0$, t. y. $v' = O$. Bet $v' = O$ tada ir tik tada, kai vektoriai u ir v yra tiesiškai priklausomi. □

1.4.8 (r-matis gretasienis. r-mačio gretasienio r-mačio tūrio kvadratas)**.**

Sakykime, (V, F) – Euklido erdvė, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ – tiesiškai nepriklausomi vektoriai.

1.4.9 apibrėžimas. Aibė $\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ 1 \leq i \leq r\}$ yra vadinama *r-mačiu gretasieniu*, užtemptu ant vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ ir žymima $[v_1, v_2, \ldots, v_r]$. Šio gretasienio *r-mačio tūrio* kvadratu yra vadinama vektorių šeimos $v_1, v_2, \ldots, v_r$ Gramo determinanto $\det G(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ reikšmė. Gretasienio $[v_1, v_2, \ldots, v_r]$ tūrį sutarkime žymėti $\mathrm{vol}[v_1, v_2, \ldots, v_r]$.

1.4.10 pastaba. Tarkime, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – Euklido erdvės (V, F) ortonormuota bazė. Sakykime, kad

$$\begin{array}{ll} v_1 & = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\ v_2 & = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{2n}e_n \\ \cdots & \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n & = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{array}.$$

Įrodysime, kad

$$\mathrm{vol}[v_1, v_2, \ldots, v_n] = |\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n|.$$

Tūrį $\mathrm{vol}[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ galime apskaičiuoti remdamiesi n-lypiais integralais. Kadangi

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \{\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \mid 0 \leq \beta_j \leq 1,\ 1 \leq j \leq n\}$$

$$= \{\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{j1} e_1 + \cdots + \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_{jn} e_n \mid 0 \leq \beta_j \leq 1,\ 1 \leq j \leq n\},$$

tai

$$\mathrm{vol}[v_1, v_2, \dots, v_n] = \int\limits_{\substack{t_1=\beta_1\alpha_{11}+\dots+\beta_n\alpha_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_n=\beta_1\alpha_{1n}+\dots+\beta_n\alpha_{nn} \\ 0\le\beta_1\le 1,\dots,0\le\beta_n\le 1}} \int \dots \int dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \frac{D(t_1, \dots, t_n)}{D(\beta_1, \dots, \beta_n)} \right| d\beta_1 \dots d\beta_n$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 |\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n| d\beta_1 \dots d\beta_n = |\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n|.$$

Gretasienio $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ tūrį $\mathrm{vol}[v_1, v_2, \dots, v_n]$ dabar apskaičiuosome kitu būdu. Galime parašyti lygybę:

$$(\mathrm{vol}[v_1, v_2, \dots, v_n])^2 = \det G(v_1, v_2, \dots, v_n) =$$

$$= (\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n)^2 G(e_1, \dots, e_n) = (\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n)^2.$$

Vadinasi,

$$\mathrm{vol}[v_1, v_2, \dots, v_n] = |\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n|.$$

1.5 Unitariosios erdvės

Sakykime, kad V – tiesinė erdvė virš kompleksinių skaičių kūno $\mathbb{C}$.

1.5.1 apibrėžimas. Atvaizdis $F : V \times V \to \mathbb{C}$ yra vadinamas *Ermito forma*, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, jei bet kuriems $x, x_1, x_2, y \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

1. $F(x, y) = \overline{F(y, x)}$;
2. $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 F(x_1, y) + \alpha_2 F(x_2, y)$.

Kaip matome, Ermito forma F, apibrėžta tiesinėje erdvėje V, esant fiksuotam antrajam argumentui, yra tiesinė pagal pirmąjį argumentą. Įrodysime, kad F, esant fiksuotam pirmajam argumentui, yra taip vadinama pusiautiesinė pagal antrąjį argumentą. Ermito forma dažnai yra vadinama pusantrakart tiesine.

1.5.2 teiginys. *Jei $F : V \times V \to \mathbb{C}$ yra Ermito forma, tai F, esant fiksuotam pirmajam argumentui, yra pusiautiesinė pagal antrąjį argumentą, t. y. bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $x, y_1, y_2 \in V$,*

$$F(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} F(x, y_1) + \overline{\alpha_2} F(x, y_2).$$

Įrodymas.

$$F(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{F(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, x)} = \overline{\alpha_1 F(y_1, x) + \alpha_2 F(y_2, x)}$$

$$= \overline{\alpha_1 F(y_1, x)} + \overline{\alpha_2 F(y_2, x)} = \overline{\alpha_1}\,\overline{F(y_1, x)} + \overline{\alpha_2}\,\overline{F(y_2, x)}$$

$$= \overline{\alpha_1} F(x, y_1) + \overline{\alpha_2} F(x, y_2).$$

□

1.5.3 apibrėžimas. Ermito forma F tiesinėje erdvėje V yra vadinama *teigiamai apibrėžta*, jei kiekvienam $x \in V$, $F(x, x) \geq 0$ ir $F(x, x) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = O$.

1.5.4 apibrėžimas. Teigiamai apibrėžta Ermito forma F tiesinėje erdvėje V yra vadinama *skaliarine daugyba*, apibrėžta tiesinėje erdvėje V.

1.5.5 apibrėžimas (Unitarios erdvės apibrėžimas)**.** Jei tiesinėje erdvėje V yra apibrėžta skaliarinė daugyba F, tai tiesinė erdvė V skaliarinės daugybos F atžvilgiu yra vadinama *unitariąja erdve* ir yra žymima (V, F).

1.5.6 pastaba. Dažniausiai skaliarinė daugyba unitariojoje (ar tiesinėje) erdvėje V yra žymima $\langle\ ,\ \rangle$. Mes skaliarinę daugybą unitariojoje erdvėje V žymėsime tiek raide F ar dar kuria nors kita raide, tiek ir simboliu $\langle\ ,\ \rangle$.

1.5.7 (Standartinės unitariosios erdvės pavyzdys)**.**

Nagrinėkime tiesinę erdvę

$$\mathbb{C}^n = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \mid \alpha_j \in \mathbb{C},\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Apibrėžkime šioje erdvėje skaliarinę daugybą

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

taip: bet kuriems $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)\rangle := \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n.$$

Įsitikinkite, kad šis atvaizdis iš tikrųjų yra skaliarinė daugyba tiesinėje erdvėje $\mathbb{C}^n$. Unitariąją erdvę $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ vadinsime *n-mate standartine unitariąja erdve.*

1.5.8 teiginys. *Tegu $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ unitarioji erdvė. Kaip ir Euklido erdvės atveju yra teisinga Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybė: bet kuriems $u, v \in V$,*

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$$

Įrodymas. Kadangi Ermito forma $\langle\ ,\ \rangle$ teigiamai apibrėžta, tai bet kuriems $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ teisinga nelygybė:

$$\langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \geq 0.$$

Šią nelygybę galime perrašyti taip:

$$\langle u, u\rangle - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle \geq 0.$$

Koši-Švarco-Buniakovskio nelygybė tuo atveju, kai $v = O_V$, akivaizdi. Galime tarti, kad $v \neq O_V$. Į pirmąją lygybę vietoje λ įrašę $\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$, gauname:

$$\langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} - \frac{\langle v, u\rangle\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} + \frac{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle^2} \geq 0.$$

Pertvarkę šią nelygybę, gauname:

$$\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - |\langle u, v\rangle|^2 \geq 0.$$

□

1.5.9. Kaip ir Euklido erdvės atveju unitariojoje erdvėje galime apibrėžti normos funkciją:

$$||\ \ || : V \to \mathbb{R}_+,\ ||u|| := \sqrt{\langle u, u\rangle},\ \ u \in V.$$

Kaip ir Euklido erdvės atveju normos funkcija turi savybes: bet kuriems $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||$;
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$;
3. $||u|| \geq 0$, $||u|| = 0$ tada ir tik tada, kai $u = O_V$.

Kampo tarp unitariosios erdvės vektorių apibrėžti negalime, nes skaliarinė daugyba unitariojoje erdvėje įgyja reikšmes kompleksinių skaičių aibėje. Bet galima apibrėžti ortogonalumo sąvoką.

1.5.10 apibrėžimas. Unitariosios erdvės V vektoriai u ir v yra vadinami *ortogonaliais*, jei $\langle u, v\rangle = 0$.

1.5.11 apibrėžimas. Unitariosios erdvės V vektorių šeima u_1, u_2, $\ldots$, u_r yra vadinama *ortonormuota*, jei $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq r$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis.

1.5.12 teiginys. *Unitariosios erdvės V ortonormuota vektorių šeima u_1, u_2, $\ldots$, u_r yra tiesiškai nepriklausoma.*

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas toks pat, kaip ir Euklido erdvės atveju. $\square$

1.5.13 teorema (Ortogonalizacijos algoritmas)**.** *Sakykime,* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *– unitarioji erdvė. Egzistuoja algoritmas, vadinamas ortogonalizacijos algoritmu (procesu), kuriuo kiekvieną unitariosios erdvės* V *tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimą* v_1, v_2, ..., v_s *galima pertvarkyti į tokią ortonormuotą vektorių šeimą* $u_1, u_2, \ldots, u_s$, *kad kiekvienam* j, $1 \leq j \leq s$,

$$\mathbb{C}\, v_1 + \mathbb{C}\, v_2 + \cdots + \mathbb{C}\, v_j = \mathbb{C}\, u_1 + \mathbb{C}\, u_2 + \cdots + \mathbb{C}\, u_j.$$

Įrodymas. Šios teoremos įrodymas visiškai toks pat, kaip ir Euklido erdvės atveju. $\square$

1.5.14 išvada. *Kiekvienoje unitarioje erdvėje egzistuoja ortonormuota bazė.*

1.5.15 apibrėžimas. Unitariosios erdvės (V, F) ir (W, G) yra vadinamos *izomorfinėmis* (arba *izometrinėmis*), jei egzistuoja bijekcija $f : V \to W$, tenkinanti sąlygas:

1. Atvaizdis $f : V \to W$ yra tiesinis, t. y. bet kuriems $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $u, v \in V$, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$;
2. Bet kuriems $u, v \in V$, $G(f(u), f(v)) = F(u, v)$.

1.5.16 teorema. *Unitariosios erdvės* (V, F) *ir* (W, G) *yra izomorfinės tada ir tik tada, kai tiesinių erdvių* V *ir* W *dimensijos* $\dim_{\mathbb{C}} V$ *ir* $\dim_{\mathbb{C}} W$ *yra lygios.*

Įrodymas. Jei unitariosios erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės, tai egzistuoja tiesinė bijekcija $f : V \to W$. Vadinasi, $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$.

Tarkime, kad (V, F) ir (W, G) yra unitariosios erdvės ir $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W = n$. Įrodysime, kad unitariosios erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės.

Išsirinkime unitariųjų erdvių (V, F) ir (W, G) ortonormuotas bazes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ir $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Tuomet tiesinis atvaizdis $f : V \to W$, $f(v_j) = w_j$, $1 \leq j \leq n$, yra tiesinė bijekcija. Įsitikinsime, kad bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, teisinga lygybė: $G(f(u_1), f(u_2)) = F(u_1, u_2)$.

Sakykime, $u_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $u_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Tuomet

$$F(u_1, u_2) = F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j F(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{\beta}_j.$$

Kita vertus,

$$G(f(u_1),f(u_2)) = G(f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i), f(\sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j)) = G(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n}\beta_j f(v_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_j G(w_i,w_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_j\delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\bar{\beta}_j.$$

Kaip matome, bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, teisinga lygybė: $G(f(u_1), f(u_2)) = F(u_1, u_2)$. Taigi unitariosios erdvės (V, F) ir (W, G) yra izomorfinės. □

1.5.17 išvada. *Kiekviena n-matė unitarioji erdvė V yra izomorfinė (izometrinė) standartinei unitariajai erdvei $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$.*

Įrodymas. Tarkime, $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ – unitariosios erdvės V ortonormuota bazė, $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ – standartinės unitariosios erdvės $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ standartinė ortonormuotoji bazė. Tuomet apibrėžkime tiesinį atvaizdį

$$V \ni u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Akivaizdu, kad šis atvaizdis yra nagrinėjamų unitariųjų erdvių izomorfizmas. □

1.5.18. Sakykime, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ yra unitarioji erdvė, L – tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis. Apibrėžkime poaibį $L^{\perp}$, sudarytą iš tiesinės erdvės V visų tokių vektorių, kurių kiekvienas yra ortogonalus kiekvienam poerdvio L vektoriui. Matematiniais žymėjimais:

$$L^{\perp} := \{u \in V \mid F(u,l) = 0, \ \text{ su visais } \ l \in L\}.$$

1.5.19 teiginys. *Jei L yra unitariosios erdvės $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ tiesinis poerdvis, tai $L^{\perp}$ taip pat yra tiesinės erdvės V tiesinis poerdvis.*

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas toks pat, kaip ir Euklido erdvės atveju (žr. 1.3.16 teiginio įrodymą). □

1.5.20 teiginys. *Jei L yra unitariosios erdvės $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ tiesinis poerdvis, tai $V = L \oplus L^{\perp}$.*

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas toks pat, kaip ir Euklido erdvės atveju (žr. 1.3.17 teiginio įrodymą). □

1.5.21 apibrėžimas. Sakykime, (V, F) – unitarioji erdvė, $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r,$ – šios erdvės vektorių šeima. Matrica

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_r) := \begin{pmatrix} F(v_1,v_1) & F(v_1,v_2) & \ldots & F(v_1,v_r) \\ F(v_2,v_1) & F(v_2,v_2) & \ldots & F(v_2,v_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(v_r,v_1) & F(v_r,v_2) & \ldots & F(v_r,v_r) \end{pmatrix}$$

yra vadinama vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r *Gramo matrica*, o šios matricos determinantas $\det G(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det(F(v_i, v_j))_{i,j=1}^r$ – vektorių šeimos v_1, v_2, ..., v_r *Gramo determinantu.*

1.5.22 teiginys. *Sakykime, unitariosios erdvės (V, F) vektoriai u_j, $1 \le j \le r$, yra tiesiškai išreiškiami vektoriais v_j, $1 \le j \le r$, t. y. $u_j = \sum\limits_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m$, $1 \le j \le r$. Tuomet*

$$\det G(u_1, u_2, \dots, u_r) = |\det(\alpha_{ij})_{i,j=1}^r|^2 \det G(v_1, v_2, \dots, v_r).$$

Įrodymas. Jei $u_j = \sum\limits_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m$, $1 \le j \le r$, tai išsiaiškinkime, kaip yra susijusios vektorių šeimų u_j, $1 \le j \le r$, ir v_j, $1 \le j \le r$, Gramo matricos. Taigi

$$G(u_1, u_2, \dots, u_r) = (F(u_i, u_j))_{i,j=1}^r$$

$$= \Big(F\big(\sum_{l=1}^{r} \alpha_{il} v_l, \sum_{m=1}^{r} \alpha_{jm} v_m\big)\Big)_{i,j=1}^r = \Big(\sum_{l=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \alpha_{il} \bar{\alpha}_{jm} F(v_l, v_m)\Big)_{i,j=1}^r.$$

Remdamiesi pastarąja lygybe, matome: jei pažymėtume matricas $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^r$, $(F(u_i, u_j))_{i,j=1}^r$ ir $(F(v_i, v_j))_{i,j=1}^r$ raidėmis T, G' ir G, tai galėtume parašyti: $G' = TG\bar{T}^t$, čia $\bar{T}$ – matrica, sudaryta iš matricos T elementams kompleksiškai sujungtinių elementų. Kadangi $\det G' = \det G(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $\det G = \det G(v_1, v_2, \dots, v_r)$, tai

$$\det G(u_1, u_2, \dots, u_r) = \det T \det G(v_1, v_2, \dots, v_r) \overline{\det T^t}$$

$$= |\det T|^2 \det G(v_1, v_2, \dots, v_r).$$

□

1.5.23 teiginys. *Sakykime, u_1, u_2, $\dots$, u_r – unitariosios erdvės (V, F) vektorių šeima, gauta ortogonalizavus tiesiškai nepriklausomų vektorių šeimą v_1, v_2, ..., v_r. Tuomet*

$$\det G(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det G(u_1, u_2, \dots, u_r) = \prod_{j=1}^{r} F(u_j, u_j).$$

Įrodymas. Įrodymas toks pat, kaip ir Euklido erdvių atveju. □

1.5.24 apibrėžimas. Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ yra vadinama *Ermito*, jei $A = \bar{A}^t$, čia $\bar{A}$ – matrica, sudaryta iš matricos A elementams kompleksiškai sujungtinių elementų.

1.5.25 apibrėžimas. Ermito matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ yra vadinama *teigiamai apibrėžta*, jei kiekvienam $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\alpha} \ne O$, $\underline{\alpha} A \bar{\underline{\alpha}}^t > 0$.

Pratimas. Įrodykite, kad unitariosios erdvės V kiekvienai tiesiškai nepriklausomai vektorių šeimai v_1, v_2, ..., v_r, Gramo matrica

$$G(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) & \ldots & F(v_1, v_r) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) & \ldots & F(v_2, v_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(v_r, v_1) & F(v_r, v_2) & \ldots & F(v_r, v_r) \end{pmatrix}$$

yra teigiamai apibrėžta Ermito matrica.

1.6 Unitarieji atvaizdžiai

1.6.1. Sakykime, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ – unitarioji erdvė, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis.

1.6.2 apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas *unitariuoju*, jei bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, $\langle f(u_1), f(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.

Pirmiausia įrodysime keletą paprastų unitariojo atvaizdžio savybių.

1.6.3 teiginys. *Unitarusis atvaizdis $f : V \to V$ yra bijektyvus.*

Įrodymas. Tarkime, kad $u \in \ker f$. Tuomet $\langle u, u\rangle = \langle f(u), f(u)\rangle = \langle O_V, O_V\rangle = 0$. Vadinasi, u – nulinis vektorius, kitaip tariant $\ker f = \{O_V\}$. Todėl atvaizdis f yra injektyvus (žr. **??** teiginį). Remdamiesi lygybe (žr. **??** teoremą)

$$dim_{\mathbb{C}}\ker f + dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(f) = dim_{\mathbb{C}}V,$$

gauname $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{C}} V$. Taigi unitarusis atvaizdis f yra bijektyvus. □

1.6.4 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$, čia V – unitari erdvė, yra unitarus tada ir tik tada, kai unitarios erdvės V ortonormuotos bazės vaizdas yra ortonornuota bazė.*

Įrodymas. Tegu $f : V \to V$ yra unitarus atvaizdis, o $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – unitarios erdvės V ortonormuota bazė. Tuomet bet kuriems i, j, $1 \leq i, j \leq n$,

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{1.2}$$

Čia δ_{ij} yra Kronekerio simbolis. Priminsime, kad

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i = j, \\ 0, & \text{jei } i \neq j \end{cases}.$$

Remdamiesi (1.2) lygybe, matome, kad unitarios erdvės ortonormuotos bazės e_1, e_2, $\ldots$, e_n vaizdas $f(e_1)$, $f(e_2)$, $\ldots$, $f(e_n)$ yra ortonormuota bazė.

Tegu $f : V \to V$ yra toks tiesinis atvaizdis, kad unitarios erdvės V ortonormuotos bazės e_1, e_2, ..., e_n vaizdas $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ yra ortonormuota bazė, t. y. bet kuriems i, j, $1 \leq i, j \leq n$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{ij}.$$

Įrodysime, kad bet kuriems vektoriams u_1, $u_2 \in V$ teisinga lygybė:

$$\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Vektorius $u_1, u_2 \in V$ išreiškę unitarios erdvės V bazės vektoriais e_1, e_2, ..., e_n

$$u_1 = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r, \quad u_2 = \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s,$$

gauname

$$\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle \sum_{r=1}^{n} \alpha_r f(e_r), \sum_{s=1}^{n} \beta_s f(e_s) \rangle = \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_r \bar{\beta}_s \langle f(e_r), f(e_s) \rangle$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_r \bar{\beta}_s \delta_{rs} = \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_r \bar{\beta}_s \langle e_r, e_s \rangle = \langle \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r, \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Kaip matome, f yra unitarus atvaizdis. □

1.6.5 teiginys. *Visi unitarieji atvaizdžiai $f : V \to V$ atvaizdžių kompozicijos $\circ$ atžvilgiu sudaro grupę, kuri yra vadinama unitariąja ir yra žymima $U(V)$.*

Įrodymas. Pirmiausia įsitikinsime, kad unitarių atvaizdžių kompozicija yra unitarus atvaizdis. Sakykime f, g – unitarūs atvaizdžiai. Tuomet bet kuriems $u_1, u_2 \in V$,

$$\begin{aligned}\langle (f \circ g)(u_1), (f \circ g)(u_2) \rangle &= \langle (f(g(u_1)), (f(g(u_2)) \rangle \\ &= \langle g(u_1), g(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.\end{aligned}$$

Kaip matome, $f \circ g$ yra unitarus atvaizdis. Taigi visų unitarių atvaizdžių aibė $U(V)$ yra stabili unitarių atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu. Dabar įsitikinsime, kad unitarių atvaizdžių kompozicijos dėsnis tenkina grupės apibrėžimo aksiomas.

1. Atvaizdžių kompozicija yra asociatyvus kompozicijos dėsnis;
2. Tapatusis atvaizdis $\mathrm{id} : V \to V$ akivaizdžiai yra unitarus atvaizdis;
3. Kiekvienam unitariajam atvaizdžiui $f \in U(V)$ egzistuoja atvirkštinis atvaizdis f^{-1}, nes, kaip anksčiau įsitikinome (žr. 1.6.3 teiginį), kiekvienas unitarusis atvaizdis yra bijektyvus. Lieka įsitikinti, kad f^{-1} yra unitarus atvaizdis.

Sakykime, $u_1, u_2 \in V$. Tuomet

$$\langle u_1, u_2\rangle = \langle (f \circ f^{-1})(u_1), (f \circ f^{-1})(u_2)\rangle$$

$$= \langle f(f^{-1}(u_1)), f(f^{-1}(u_2))\rangle = \langle f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2)\rangle.$$

Remdamiesi šia lygybe, matome, kad f^{-1} yra unitarus atvaizdis. Taigi įrodėme, kad $U(V)$ yra grupė. □

1.6.6 apibrėžimas. Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ yra vadinama *unitariąja*, jei $A\bar{A}^t = \mathbf{1_n}$. Brūkšnelis virš matricos A žymi, kad matricos A kiekvienas koeficientas yra pakeičiamas kompleksiniu sujungtiniu skaičiumi.

1.6.7 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$, čia V – unitari erdvė, yra unitarus tada tik tada, kai jo matrica unitarios erdvės V ortonormuotoje bazėje yra unitari.*

Įrodymas. Sakykime, $f : V \to V$ – unitarus atvaizdis, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra unitarios erdvės V ortonormuota bazė. Sakykime, unitaraus atvaizdžio matrica tiesinės erdvės V bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, t. y. $f(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$, $1 \le i \le n$. Kadangi f unitarus atvaizdis, tai bet kuriems r, s, $1 \le r, s \le n$,

$$\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \langle e_r, e_s\rangle = \delta_{rs}.$$

Čia δ_{rs} yra Kronekerio simbolis. Į lygybę $\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \delta_{rs}$, $1 \le r, s \le n$, įrašę vektorių $f(e_i)$, $1 \le i \le n$, išraiškas bazės e_1, e_2, $\ldots$, e_n vektoriais

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad 1 \le i \le n,$$

gauname:

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj} e_j, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{sm} e_m\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj} \sum_{m=1}^{n} \bar{\alpha}_{sm}\langle e_j, e_m\rangle$$

$$= \sum_{j,m=1}^{n} \alpha_{rj}\bar{\alpha}_{sm}\delta_{j,m} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}\bar{\alpha}_{sj} = \delta_{rs}, \ 1 \le r, s \le n.$$

Pažymėję $A = (\alpha_{rj})_{r,s=1}^n$, remdamiesi lygybėmis

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}\bar{\alpha}_{sj} = \delta_{rs}, \quad 1 \le r, s \le n,$$

matome, kad $A\bar{A}^t = \mathbf{1_n}$. Taigi įrodėme, kad unitaraus atvaizdžio f matrica A unitarios erdvės V ortonormuotoje bazėje yra unitari.

Dabar sakykime, kad tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ unitarios erdvės V ortonormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra unitari. Įrodysime, kad tiesinis atvaizdis f yra unitarus. Galime parašyti lygybes:

$$\mathbf{1_n} = A\bar{A}^t \Longrightarrow \delta_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}\bar{\alpha}_{sj} = \sum_{j,m=1}^{n} \alpha_{rj}\bar{\alpha}_{sm}\delta_{j,m}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj} \sum_{m=1}^{n} \bar{\alpha}_{sm}\langle e_j, e_m\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}e_j, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{sm}e_m\rangle = \langle f(e_r), f(e_s)\rangle,$$

$1 \leq r, s \leq n$. Kaip matome,

$$\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \langle e_r, e_s\rangle = \delta_{rs}, \quad 1 \leq r, s \leq n,$$

t. y. ortonormuotos bazės e_1, e_2, ..., e_n vaizdas $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ yra ortonormuota bazė. Remdamiesi 1.6.4 teginiu, gauname, kad f yra unitarus atvaizdis. □

1.6.8. Nagrinėkime standartinę n-matę unitariąją erdvę $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$. Priminsime, kad

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\bar{\beta}_j.$$

Šios erdvės standartinė bazė $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn})$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis, yra ortonormuota. Kiekvienam unitariam atvaizdžiui $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tiesinės erdvės standartinėje ortonormuotoje bazėje vienareikšmiškai yra priskiriama unitari matrica $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j, 1 \leq i \leq n.$$

Pažymėję visų n-tos eilės unitariųjų matricų aibę $U(n)$, galime nagrinėti atvaizdį $F : U(\mathbb{C}^n) \to U(n)$, $F(f) = A$, A – unitariojo atvaizdžio f matrica tiesinės erdvės $\mathbb{C}^n$ standartinėje bazėje. Atvaizdis F yra bijektyvus.

1.6.9 teiginys. *Visų n-tos eilės unitariųjų matricų aibė $U(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė.*

Įrodymas. Pirmiausia įsitikinsime, kad aibė $U(n)$ yra stabili matricų daugybos atžvilgiu. Jei $A, B \in U(n)$, tai $A\bar{A}^t = \mathbf{1_n}$, $B\bar{B}^t = \mathbf{1_n}$. Tuomet

$$(AB)\overline{(AB)}^t = (AB)\bar{B}^t\bar{A}^t = A(B\bar{B}^t)\bar{A}^t = A\mathbf{1_n}\bar{A}^t = A\bar{A}^t = \mathbf{1_n},$$

t. y. AB yra unitari matrica.

Įsitikinsime, kad $U(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė. Akivaizdu, kad

1. Matricų daugyba yra asociatyvi;
2. $\mathbf{1_n} \in U(n)$ – tai akivaizdu;
3. Jei $A \in U(n)$, tai $A\bar{A}^t = \mathbf{1_n}$, t. y. $A^{-1} = \bar{A}^t$. Galime parašyti: $\bar{A}^t\overline{\bar{A}^t}^t = \bar{A}^t A = \mathbf{1_n}$. Kaip matome, $A^{-1} = \bar{A}^t \in U(n)$.

Taigi $U(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė. $\square$

1.6.10 teiginys. *Atvaizdis $F : U(\mathbb{C}^n) \to U(n)$ yra antihomomorfizmas, t. y., bet kuriems $f, g \in U(\mathbb{C}^n)$, $F(f \circ g) = F(g)F(f)$.*

Įrodymas. Sakykime, $f, g \in U(\mathbb{C}^n)$,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j, 1 \le i \le n.$$

Tuomet

$$(f \circ g)(e_i) = f(g(e_i)) = f(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \sum_{r=1}^{n} \alpha_{jr} e_r =$$

$$\sum_{r=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jr}) e_r = \sum_{r=1}^{n} \gamma_{ir} e_r, 1 \le i \le n,$$

čia $\gamma_{ir} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jr}$, $1 \le i, r \le n$. Pažymėję $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, $C = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$, gauname: $C = BA$. Taigi matome, kad, jei $F(f) = A$, $F(g) = B$, tai $F(f \circ g) = C = BA = F(g)F(f)$. $\square$

1.6.11. Kadangi unitarioji matrica A tenkina sąlygą $A\bar{A}^t = \mathbf{1_n}$, tai

$$\det(A\bar{A}^t) = \det A \cdot \overline{\det A^t} = |\det A|^2 = 1,$$

t. y. $|\det A| = 1$.

1.6.12 (Unitaraus atvaizdžio (unitarios matricos) spektras)**.** Sakykime, $f : V \to V$ yra unitarus atvaizdis, $\phi_f(t)$ – šio atvaizdžio charakteringasis polinomas. Kadangi V yra tiesinė erdvė virš kūno $\mathbb{C}$, tai, remiantis pagrindine algebros teorema, egzistuoja polinomo $\phi_f(t)$ šaknis $\lambda \in \mathbb{C}$. Tuomet egzistuoja tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius $u \in V$, atitinkantis tikrinę reikšmę λ. Vadinasi, galime parašyti lygybę:

$$f(u) = \lambda u, u \in V, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Kadangi f yra unitarus atvaizdis, tai

$$\langle u, u\rangle = \langle f(u), f(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle u, u\rangle.$$

Remdamiesi šia lygybe, gauname $\lambda\bar{\lambda} = 1$, t. y. $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ (S^1 – vienetinio spindulio apskritimas kompleksinėje plokštumoje).

1.6.13 išvada. *Unitaraus atvaizdžio f spektras (atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\phi_f(t)$ visų šaknų visuma) priklauso kompleksinės plokštumos vienetinio spindulio apskritimui S^1.*

1.6.14 teorema (unitaraus atvaizdžio spektrinis išskaidymas)**.** *Sakykime, $f : V \to V$ yra unitarus atvaizdis. Egzistuoja unitarios erdvės V ortonormuota bazė, sudaryta iš unitaraus atvaizdžio f tikrinių vektorių.*

Įrodymas*.* Sakykime, $\lambda_1 \in S^1$ yra tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo $\phi_f(t)$ šaknis, $u_1 \in V$ – tiesinio atvaizdžio f normuotas tikrinis vektorius (t. y. toks, kurio ilgis yra lygus 1), atitinkantis tikrinę reikšmę λ_1. Sudarykime poerdvį $L = \mathbb{C}\, u_1$, – vektoriaus u_1 tiesinį apvalkalą. Tuomet unitarią erdvę V galime išskaidyti į tarpusavy ortogonalių poerdvių L ir $L^\perp$ tiesioginę sumą (žr. 1.5.20 teiginį):

$$V = L \oplus L^\perp.$$

Įsitikinsime, kad $L^\perp$ yra f - invariantinis poerdvis (priminsime, kad reikia įrodyti : $v \in L^\perp \Longrightarrow f(v) \in L^\perp$). Sakykime, kad $v \in L^\perp$, t. y. $\langle u_1, v\rangle = 0$ (kitaip tariant $u_1 \perp v$). Tuomet

$$\langle f(u_1), f(v)\rangle = \langle u_1, v\rangle = 0.$$

Kita vertus

$$\langle f(u_1), f(v)\rangle = \langle \lambda u_1, f(v)\rangle = \lambda\langle u_1, f(v)\rangle = 0.$$

Kadangi $\lambda \in S^1$, t. y. $\lambda \neq 0$, tai $\langle u_1, f(v)\rangle = 0$. Kaip matome, $u_1 \perp f(v)$, t. y. $f(v) \in L^\perp$. Įrodėme, kad $L^\perp$ yra f - invariantinis poerdvis. Tarę, kad teoremos teiginys yra įrodytas kiekvienam unitariam atvaizdžiui $g : N \to N$, kai $\dim_{\mathbb{C}} N < \dim_{\mathbb{C}} V$, teoremos įrodymą galime užbaigti matematinės indukcijos metodu. Mūsų atveju $\dim_{\mathbb{C}} L^\perp < \dim_{\mathbb{C}} V$, $f\big|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$ yra unitarus atvaizdis. □

1.6.15 išvada. *Kiekvienai unitariai matricai $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ egzistuoja tokia unitari matrica B, kad matrica $BAB^{-1} = D$ – įstrižaininė matrica, kurios įstrižainė yra sudaryta iš matricos A tikrinių reikšmių.*

Įrodymas*.* Nagrinėkime standartinę n-matę unitarią erdvę $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$. Šios erdvės standartinė ortonormuota bazė yra $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jn})$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis. Atvaizdis $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $1 \le i \le n$, yra unitarus, nes šio atvaizdžio matrica A tiesinės erdvės $\mathbb{C}^n$ ortonormuotoje bazėje e_j, $1 \le j \le n$, yra unitari. Remdamiesi teorema apie unitaraus atvaizdžio spektrinį išskaidymą, imkime tiesinės erdvės ortonormuotą bazę $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, sudarytą iš unitaraus atvaizdžio f tikrinių vektorių. Sakykime, kad perėjimo matrica iš bazės e_j, $1 \le j \le n$, į bazę $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, yra B. Kadangi bazės e_j, $1 \le j \le n$, ir $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, yra ortonormuotos, tai matrica B yra unitari (žr. 1.6.4 ir 1.6.7 teiginius). Tiesinio atvaizdžio f matrica bazėje $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, yra BAB^{-1}. Tiesinio atvaizdžio f matricą bazėje $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, užrašykime remdamiesi apibrėžimu: $f(\tilde{e}_j) = \lambda_j \tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, nes $\tilde{e}_j$, $1 \le j \le n$, yra f - tikriniai vektoriai, o λ_j, $1 \le j \le n$, – tiesinio atvaizdžio f tikrinės reikšmės. Vadinasi,

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in S^1, 1 \le j \le n.$$

$\square$

1.6.16 (Specialioji n-tos eilės unitariųjų matricų grupė $SU(n)$)**.**

Nagrinėkime n-tos eilės unitariųjų matricų, kurių determinantas lygus 1, aibę $SU(n)$, t. y. $SU(n) := \{A \in U(n) | \det A = 1\}$. Kadangi $\det(AB) = \det A \det B$, tai $SU(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė. Ši grupė yra grupės $U(n)$ normalusis pogrupis. Atvaizdis $\det : U(n) \to S^1$, čia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\}$, yra siurjektyvus. Iš tikrųjų: jei $z \in S^1$, tai matricos

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

determinantas yra lygus z. Atvaizdžio $\det : U(n) \to S^1$ branduolys $\ker \det = SU(n)$. Vadinasi, faktorgrupė $U(n)/SU(n)$ yra izomorfinė grupei $S^1 = U(1)$.

1.6.17 (Grupė SU(2))**.**

Išsamiau ištirsime grupę $SU(2)$. Sakykime, kad

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \ A \in SU(2).$$

Tuomet $\bar{A}^t = A^{-1}$, t. y.

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Vadinasi, $\gamma = -\bar{\beta}$, $\delta = \bar{\alpha}$. Taigi matrica A, priklausanti grupei $SU(2)$, atrodo taip:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Pažymėkime $\alpha = x_1 + x_2 i$, $\beta = x_3 + x_4 i$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Lygybė $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ naujais žymėjimais atrodo taip: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Visų keturmatės erdvės $\mathbb{R}^4$ vektorių, kurių koordinatės tenkina lygtį $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$, galai užpildo spindulio $r = 1$ trimatę sferą S^3. Taigi matricą

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

sutapatinę su keturmatės erdvės $\mathbb{R}^4$ vektoriumi (x_1, x_2, x_3, x_4), $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$, gauname, kad visos matricos

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

sudaro keturmarėje erdvėje $\mathbb{R}^4$ trimatę sferą S^3. Nepaprastai įdomus tas faktas, kad trimatėje sferoje S^3 tokiu būdu galima apibrėžti grupės struktūrą. Kaip matėme, $S^1 = U(1)$ yra komutatyvi grupė, tuo tarpu, grupė S^3 nėra komutatyvi.

1.6.18. Nurodysime įdomų ryšį tarp matricų aibės

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

ir kvaternionų nekomutatyvaus kūno $\mathbb{H}$. Priskyrę matricai

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},$$

kvaternioną $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H}$, gauname atvaizdį

$$f : \mathbf{H} \to \mathbb{H}.$$

Akivaizdu, kad atvaizdis f adityvus: $f(A + B) = f(A) + f(B)$, A, $B \in \mathbf{H}$. Įsitikinsime, kad atvaizdis f turi ir tokias savybes:

1. $f(AB) = f(A)f(B)$, $A, B \in \mathbf{H}$;

2. $\det = \mathrm{nm} \circ f$.

Priminsime:

$$\mathrm{nm}\,(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,\ x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H}.$$

Dabar įsitikinsime, kad f turi savybę: $f(AB) = f(A)f(B)$, $A, B \in \mathbf{H}$. Tuo tikslu nagrinėkime matricas

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} y_1 + y_2 i & y_3 + y_4 i \\ -y_3 + y_4 i & y_1 - y_2 i \end{pmatrix},\ x_j, y_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le 4.$$

Tiesiogiai patikrinti, sudauginus šias matricas, kad f turi įrodinėjamą savybę, pakankamai sudėtinga. Šias matricas užrašykime taip:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & i \\ ri & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 + y_2 i & y_3 + y_4 i \\ -y_3 + y_4 i & y_1 - y_2 i \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$x_j, y_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le 4$. Remiantis tuo, kad matricų sudėtis ir daugyba yra susieti distributyvumo dėsniais: $(A+B)C = AC+BC$, $C(A+B) = CA+CB$, pakanka įsitikinti, kad matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

tarpysavyje yra dauginamos taip, kaip ir kvaternionai $1, i, j, k$. Tai padaryti paliekame skaitytojui. Atvaizdžio f savybė $\det = \mathrm{nm} \circ f$ akivaizdi, nes matricos

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix},\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

determinantas $\det A$, kaip ir kvaterniono $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ norma $\mathrm{nm}\,(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)$, yra lygus $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Taigi atvaizdis $f : \mathbf{H} \to \mathbb{H}$ yra bijektyvus žiedų homomorfizmas. Bet kadangi $\mathbb{H}$ yra nekomutatyvus kūnas, tai matricų aibė $\mathbf{H}$ matricų sudėties ir daugybos atžvilgiu yra taip pat nekomutatyvus kūnas, izomorfinis $\mathbb{H}$. Visos matricos $A \in \mathbf{H}$, kurių determinantas yra lygus 1, sudaro grupę $SU(2)$, izomorfinę kvaternionų, kurių norma yra lygi 1, grupei

$$\{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H} \mid \mathrm{nm}\,(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

1.6.19. Pasinaudoję anksčiau nurodytu ryšiu tarp kvaternionų nekomutatyvaus kūno $\mathbb{H}$ ir matricų aibės

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix}, \ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

išsiaiškinkime grupės

$$S^3 = SU(2) = \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H} \mid \ \mathrm{nm}\,(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) = 1\}$$

kai kurias savybes.

1.6.20 apibrėžimas. Kvaternioną $\alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbb{H}$ vadinsime *grynai menamu.*

1.6.21 teiginys. *Visų grynai menamų kvaternionų, kurių norma yra lygi vienam, aibė*

$$\{\alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbb{H} \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$$

yra dvimatė sfera $S^2 \subset S^3$. Kiekvienas grynai menamas kvaternionas, kurio norma yra lygi vienam, pakeltas kvadratu yra lygus -1.

Įrodymas. Visiškai akivaizdu, kad aibę

$$\{\alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbb{H} \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$$

galima sutapatinti su aibe

$$\{(0, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\} = S^2 \subset S^3.$$

Pakėlę grynai menamą kvaternioną $\alpha i + \beta j + \gamma k \in \mathbb{H}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, kvadratu, gauname:

$$(\alpha i + \beta j + \gamma k)^2 = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -1.$$

$\square$

1.6.22. Kaip matome, kvaternionų nekomutatyviame kūne $\mathbb{H}$ lygties $x^2 + 1 = 0$ sprendiniai sudaro dvimatę sferą S^2, tuo tarpu, n-ojo laipsnio lygtis $f(x) = 0$, $f(x) \in k[x]$, komutatyviajame kūne k negali turėti daugiau nei n sprendinių (šaknų).

1.6.23. Dabar nagrinėsime grupę $SU(2) = S^3$ ir išsiaiškinsime elemento $i \in S^3$ sujungtinių elementų klasę

$$\{(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)\; i\; (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)^{-1} \mid x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in S^3\}.$$

Elementas

$$(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)\; i\; (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)^{-1},$$

$x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in S^3$, yra lygus elementui

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)i + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)j + (-2x_1x_3 + 2x_2x_4)k.$$

Kaip matome, elementui $i \in S^3$ sujungtinių elementų klasė yra grupės S^3 grynai menamų elementų poaibis. Ar šis poaibis sutampa su grupės S^3 grynai menamų elementų poaibiu? Jei taip yra, tai kiekvienam rinkiniui $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tenkinančiam sąlygą $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 & = \alpha \\ 2x_1x_4 + 2x_2x_3 & = \beta \\ -2x_1x_3 + 2x_2x_4 & = \gamma \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 & = 1 \end{cases}$$

turi bent vieną sprendinį realiaisiais skaičiais. Ištirti šią lygčių sistemą ne taip paprasta. Į anksčiau suformuluotą klausimą ieškosime atsakymo visiškai kitaip.

1.6.24. Grynai menamamą kvaternioną $\alpha i + \beta j + \gamma k \in S^3$ atitinka matrica

$$A = \begin{pmatrix} \alpha i & \beta + \gamma i \\ -\beta + \gamma i & -\alpha i \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Nagrinėsime grynai menamus kvaternionus $\alpha i + \beta j + \gamma k \in S^3$, nelygius i, t. y., kai $\alpha \neq 1$, nes norime išsiaiškinti, kurie iš jų priklauso elemento i sujungtinių elementų klasei. Kaip matome, matrica A yra grupės $SU(2)$ elementas. Šios matricos charakteringasis polinomas $\phi_A(t) = t^2 + 1$, Vadinasi, šios matricos tikrinės reikšmės yra $\pm i \in \mathbb{C}$. Remdamiesi 1.6.15 išvada, gauname, kad egzistuoja tokia unitarioji matrica T, jog

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Rasime matricą T. Tuo tikslu rasime matricos A tikrinius vektorius, atitinkančius tikrines reikšmes i ir $-i$.

Galite įsitikinti, kad $(\beta - \gamma i, i(\alpha - 1))$ yra matricos A tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę i, o $(i(\alpha - 1), \beta + \gamma i)$ – tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę $-i$. Tuomet matrica T yra tokia:

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta - \gamma i}{\sqrt{2(1-\alpha)}} & \frac{i(\alpha - 1)}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \\ \frac{i(\alpha - 1)}{\sqrt{2(1-\alpha)}} & \frac{\beta + \gamma i}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 1.$$

Dabar galime nurodyti ir lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 & = \alpha \\ 2x_1x_4 + 2x_2x_3 & = \beta \\ -2x_1x_3 + 2x_2x_4 & = \gamma \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 & = 1 \end{cases}$$

sprendinį: bet kuriems α, β, γ, tenkinantiems sąlygas $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \alpha \neq 1$,

$$x_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2(1-\alpha)}}, x_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2(1-\alpha)}}, x_3 = 0, x_4 = \frac{\sqrt{2(1-\alpha)}}{2}.$$

Pratimas. Raskite kvaternionui $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ sujungtinių elementų klasę.

1.7 Ermito atvaizdžiai

1.7.1. Sakykime, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ – unitarioji erdvė, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis.

1.7.2 apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas *Ermito*, jei bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, $\langle f(u_1), u_2\rangle = \langle u_1, f(u_2)\rangle$.

1.7.3 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra Ermito tada ir tik tada, jei unitariosios erdvės V kurios nors bazės vektoriams $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $\langle f(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, f(v_j)\rangle$, $1 \leq i, j \leq n$.*

Įrodymas. Jei f yra Ermito atvaizdis, tai, remdamiesi Ermito atvaizdžio apibrėžimu, gauname, kad $\langle f(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, f(v_j)\rangle$, $1 \leq i, j \leq n$.

Sakykime, kad untariosios erdvės V kurios nors bazės vektoriams $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

$$\langle f(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, f(v_j)\rangle,\ \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Tegu vektoriai $u_1, u_2 \in V$. Užrašykime vektorių u_1 ir u_2 išraiškas unitariosios erdvės V bazės vektoriais $v_1, v_2, \ldots, v_n$: $u_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $u_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Tuomet

$$\langle f(u_1), u_2\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \langle f(v_i), v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \langle v_i, f(v_j)\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, f(\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j)\rangle = \langle u_1, f(u_2)\rangle.$$

□

Priminsime, kad matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ yra vadinama Ermito, jei $A = \bar{A}^t$.

1.7.4 teiginys. *Sakykime, V yra unitarioji erdvė. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra Ermito tada ir tik tada, jei tiesinio atvaizdžio f matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ unitariosios erdvės V ortonormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra Ermito.*

Įrodymas. Sakykime, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra unitarios erdvės V ortonormuota bazė, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ – tiesinio atvaizdžio f matrica bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (t. y. $f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$, $1 \le i \le n$).

Tarkime, kad f yra Ermito atvaizdis. Tuomet, remdamiesi Ermito atvaizdžio apibrėžimu, galime parašyti lygybes:

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle, \ \ 1 \le i, j \le n.$$

Į šias lygybes įrašę bazinių vektorių vaizdus $f(e_i)$, $1 \le i \le n$, išreikštus bazės vektoriais $e_1, e_2, \ldots, e_n$, gauname:

$$\begin{gathered}\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle, \ 1 \le i, j \le n \\ \Longleftrightarrow \langle \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} e_r, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^n \alpha_{js} e_s \rangle, \ 1 \le i, j \le n \\ \Longleftrightarrow \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \langle e_r, e_j \rangle = \sum_{s=1}^n \bar{\alpha}_{js} \langle e_i, e_s \rangle, \ 1 \le i, j \le n \\ \Longleftrightarrow \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \delta_{rj} = \sum_{s=1}^n \bar{\alpha}_{js} \delta_{is}, 1 \le i, j \le n, \Longleftrightarrow \alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}, 1 \le i, j \le n.\end{gathered}$$

Lygybės $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$, $1 \le i, j \le n$, yra ekvivalenčios matricų lygybei $A = \bar{A}^t$. Kaip matome, Ermito atvaizdžio f matrica unitariosios erdvės V ortnormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra Ermito matrica.

Sakykime, kad tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ unitariosios erdvės V ortonormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra Ermito. Tuomet matricų lygybė $A = \bar{A}^t$ užrašyta jų koeficientams atrodo taip: $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. Remdamiesi šiomis lygybėmis, gauname $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$, $1 \le i, j \le n$. Vadinasi, f yra Ermito atvaizdis (žr. 1.7.3 teiginį). □

1.7.5 (Ermito atvaizdžio (Ermito matricos) spektras)**.**

1.7.6 teiginys. *Sakykime, V yra unitarioji erdvė. Ermito atvaizdžio $f : V \to V$ spektras (t. y. tiesinio atvaizdžio f charakteringojo polinomo$\phi_f(t)$ visų šaknų visuma) yra sudarytas iš realiųjų skaičių.*

Įrodymas. Tarkime, kad $f : V \to V$ yra Ermito atvaizdis. Unitarioji erdvė V yra apibrėžta virš kūno $\mathbb{C}$. Kadangi kūnas $\mathbb{C}$ yra algebraiškai uždaras, tai tiesinio atvaizdžio f charakteringasis polinomas $\phi_f(t)$ turi šaknį $\lambda \in \mathbb{C}$. Sakykime, kad $u \in V$ yra tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę λ. Tuomet galime parašyti:

$$\langle f(u), u \rangle = \langle u, f(u) \rangle \Longrightarrow \langle \lambda u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle \Longrightarrow \lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle.$$

Kadangi u nenulinis vektorius, tai $\langle u, u \rangle \ne 0$. Vadinasi, $\lambda = \bar{\lambda}$, t. y. $\lambda \in \mathbb{R}$. □

1.7.7 išvada. *Kiekvienos Ermito matricos tikrinės reikšmės yra realios.*

1.7.8 teorema (Ermito atvaizdžio spektrinis išskaidymas)**.** *Sakykime, V yra unitarioji erdvė, $f : V \to V$ – Ermito atvaizdis. Tuomet egzistuoja unitariosios erdvės V ortonormuota bazė, sudaryta iš Ermito atvaizdžio f tikrinių vektorių.*

Įrodymas. Sakykime, λ_1 yra Ermito atvaizdžio f tikrinė reikšmė, u_1 – tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę λ_1. Tegu vektoriaus u_1 ilgis yra lygus 1, nes priešingu atveju jį galime normuoti. Unitariosios erdvės V tiesinis poerdvis $L = \mathbb{C}\, u_1$ yra f-invariantinis, $f(u_1) = \lambda_1 u_1$. Unitariąją erdvę V galime išskaidyti į tarpusavy ortogonalių tiesinių poerdvių L ir $L^\perp$ tiesioginę sumą $V = L \oplus L^\perp$ (žr. 1.5.20 teiginį). Įsitikinsime, kad tiesinis poerdvis $L^\perp$ yra f-invariantinis, t. y. įrodysime, kad

$$v \in L^\perp \Longrightarrow f(v) \in L^\perp.$$

Sakykime, kad $v \in L^\perp$, t. y. $\langle u_1, v\rangle = 0$. Tuomet

$$\langle u_1, f(v)\rangle = \langle f(u_1), v\rangle = \langle \lambda_1 u_1, v\rangle = \lambda_1 \langle u_1, v\rangle = 0.$$

Kaip matome, jei $v \in L^\perp$, tai ir $f(v) \in L^\perp$. Tarę, kad teoremos teiginys yra įrodytas kiekvienam Ermito atvaizdžiui $g : N \to N$, kai $\dim_{\mathbb{C}} N < \dim_{\mathbb{C}} V$, teoremos įrodymą galime užbaigti matematinės indukcijos metodu. Mūsų atveju $\dim_{\mathbb{C}} L^\perp < \dim_{\mathbb{C}} V$, $f\big|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$ yra Ermito atvaizdis. □

1.7.9 teiginys. *Kiekvienai Ermito matricai A egzistuoja tokia unitari matrica T, kad*

$$TAT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le n.$$

Čia $\lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le n$, yra matricos A tikrinės reikšmės.

Įrodymas. Tarkime, kad $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ yra Ermito matrica. Nagrinėkime standartinę unitariąją erdvę $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, kurioje yra apibrėžta standartine skaliarine daugyba

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \langle(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Šio erdvės bazė $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jn})$, $1 \le j \le n$, yra ortonormuota. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$, $1 \le i \le n$. Kadangi tiesinio atvaizdžio f matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ unitariosios erdvės $\mathbb{C}^n$ ortonormuotoje bazėje e_j, $1 \le j \le n$, yra Ermito, tai f yra Ermito atvaizdis (žr. 1.7.4 teiginį). Remiantis teorema apie Ermito atvaizdžio spektrinį išskaidymą (žr. 1.7.8 teoremą), egzistuoja unitariosios erdvės $\mathbb{C}^n$ ortonormuota bazė v_j, $1 \le j \le n$, sudaryta iš Ermito atvaizdžio f tikrinių vektorių. Perėjimo matrica T iš ortonormuotos bazės e_j, $1 \le j \le n$, į ortonormuotą bazę v_j, $1 \le j \le n$, yra unitari (žr. 1.6.4 ir 1.6.7 teiginius). Ermito atvaizdžio f matrica bazėje v_j, $1 \le j \le n$, yra

$$TAT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le n.$$

Akivaizdu, kad $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$, yra matricos A tikrinės reikšmės. □

1.7.10 pavyzdys. Nagrinėkime visų antros eilės Ermito matricų aibę erm $(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) | A = \bar{A}^t\}$. Antros eilės bendrosios Ermito matricos išraišką yra tokia:

$$A = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1.$$

Remdamiesi antros eilės bendrosios Ermito matricos išraiška, matome, kad dviejų Ermito matricų suma yra Ermito matrica. Vadinasi, aibė erm (2) yra stabili matricų sudėties + atžvilgiu. Akivaizdu, kad (erm $(2), +)$ yra Abelio grupė.

Ermito matricą padauginę, pavyzdžiui, iš kompleksinio skaičiaus i, gausime matricą, kuri nėra Ermito. Taigi aibė erm (2) nėra stabili matricų daugybos iš kompleksinių skaičių atžvilgiu. Vadinasi, grupė (erm $(2), +)$ nėra tiesinė erdvė virš kompleksinių skaičkų kūno $\mathbb{C}$.

Ermito matricą padauginę iš realiojo skaičiaus, gausime Ermito matricą. Atvaizdis

$$\mathbb{R} \times \mathrm{erm}\ (2) \to \mathrm{erm}\ (2)$$

yra apibrėžtas. Abelio grupė (erm $(2), +)$ yra tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$. Akivaizdu, kad $\dim_{\mathbb{R}}$ erm $(2) = 4$. Matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sudaro tiesinės erdvės erm (2) virš $\mathbb{R}$ bazę. Šios matricos labai svarbios teorinėje fizikoje. Fizikoje paskutiniosios trys matricos yra vadinamos *Paulio matricomis*, įžymaus fiziko Paulio vardu.

Matricų

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tiesinį apvalkalą su realiaisiais koeficientais sutarkime žymėti $\mathrm{erm}_0(2)$. Kitaip tariant,

$$\mathrm{erm}_0(2) = \{A \in \mathrm{erm}\ (2) \mid \mathrm{Tr}A = 0\}.$$

Akivaizdu, kad $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{erm}_0(2) = 3$.

1.7.11 pavyzdys. Kiekvieną Ermito matricą $A \in \mathrm{erm}\ (2)$, padauginus iš kompleksinio skaičiaus i, yra gaunama įstrižai Ermito matrica $B = iA$ (matrica B yra vadinama *įstrižai Ermito*, jei $B + \bar{B}^t = 0$). Tiesinės erdvės $i \cdot \mathrm{erm}\ (2) := \{iA | A \in \mathrm{erm}\ (2)\}$ ir $\mathrm{erm}\ (2)$ virš kūno $\mathbb{R}$ yra izomorfinės.

Yra glaudus ryšys tarp grupės $SU(2)$ ir įstrižai Ermito matricų tiesinės erdvės $i \cdot \mathrm{erm}\ (2)$ tiesinio poerdvio $i\mathrm{erm}_0(2)$. Nagrinėkime atvaizdį

$$\exp : i \cdot \mathrm{erm}_0(2) \to SU(2),$$

$$\exp(iA) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j!} A^j, A \in \mathrm{erm}_0(2).$$

Dabar įsitikinsime, kad matricos iA, priklausančios tiesinei erdvei $i \cdot \mathrm{erm}_0(2)$, vaizdas $\exp(iA)$ priklauso grupei $SU(2)$. Nagrinėkime matricos iA, $A \in \mathrm{erm}_0(2)$, eksponentę, kai

$$A = \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix}.$$

$$\exp(iA) = \exp\left(i\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j!} \begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix}^j.$$

Matricos A kvadratas yra lygus

$$\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Kaip matome, matricos A $2j$-asis laipsnis yra lygus $(a^2+b^2+c^2)^j \mathbf{1_2}$, o $2j+1$ -asis laipsnis yra lygus $(a^2+b^2+c^2)^j A$. Vadinasi,

$$\exp(iA) = exp\left(i\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j!} A^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} A^{2j} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} A^{2j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} (a^2+b^2+c^2)^j \mathbf{1_2} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} (a^2+b^2+c^2)^j A.$$

Pasinaudoję formulėmis:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!},$$

ir atlikę veiksmus, gauname matricą:

$$\exp(iA) = \begin{pmatrix} \cos\omega + \frac{ai}{\omega}\sin\omega & \frac{-c+bi}{\omega}\sin\omega \\ \frac{c+bi}{\omega}\sin\omega & \cos\omega - \frac{ai}{\omega}\sin\omega \end{pmatrix},$$

čia $\omega = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Dabar akivaizdu, kad matrica $\exp(iA) \in SU(2)$, kai $A \in \mathrm{erm}_0(2)$.

$SU(2)$ yra taip vadinama *Li grupe* virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, o $i \cdot \mathrm{erm}_0(2)$ – Li grupės $SU(2)$ *Li algebra.*

1.8 Ortogonalieji atvaizdžiai

Sakykime, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ – Euklido erdvė, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis.

1.8.1 apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas *ortogonaliuoju*, jei bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, $\langle f(u_1), f(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.

Pirmiausia įrodysime keletą paprastų ortogonaliojo atvaizdžio savybių.

1.8.2 teiginys. *Ortogonalusis atvaizdis $f : V \to V$ yra bijektyvus.*

Įrodymas. Tarkime, kad $u \in \ker f$. Tuomet $\langle u, u\rangle = \langle f(u), f(u)\rangle = \langle O_V, O_V\rangle = 0$. Vadinasi, u – nulinis vektorius, kitaip tariant, $\ker f = \{O_V\}$. Todėl atvaizdis f yra injektyvus (žr. **??** teiginį). Remdamiesi lygybe (žr. **??** teoremą) $\dim_{\mathbb{R}} \ker f + \dim_{\mathbb{R}} f(V) = \dim_{\mathbb{R}} V$, gauname $\dim_{\mathbb{R}} f(V) = \dim_{\mathbb{R}} V$. Taigi ortogonalusis atvaizdis f yra bijektyvus. □

1.8.3 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$, čia V – Euklido erdvė, yra ortogonalus tada ir tik tada, kai Euklido erdvės ortonormuotos bazės vaizdas yra ortonornuota bazė.*

Įrodymas. Tegu $f : V \to V$ yra ortogonalus atvaizdis, o $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – Euklido erdvės V ortonormuota bazė. Tuomet bet kuriems i, j, $1 \le i, j \le n$,

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{1.3}$$

čia δ_{ij} yra Kronekerio simbolis. Remdamiesi (1.3) lygybe, matome, kad Euklido erdvės ortonormuotos bazės $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ vaizdas $f(e_1),\ f(e_2),\ \ldots,\ f(e_n)$ yra ortonormuota bazė.

Tegu $f : V \to V$ yra toks tiesinis atvaizdis, kad Euklido erdvės V ortonormuotos bazės $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ vaizdas $f(e_1),\ f(e_2),\ \ldots,\ f(e_n)$ yra ortonormuota bazė, t. y. bet kuriems i, j, $1 \le i, j \le n$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{ij}.$$

Įrodysime, kad bet kuriems vektoriams $u_1,\ u_2 \in V$ teisinga lygybė:

$$\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Vektorius $u_1, u_2 \in V$ išreiškę Euklido erdvės V bazės vektoriais $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$

$$u_1 = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r, \quad u_2 = \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s,$$

gauname

$$\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle \sum_{r=1}^{n} \alpha_r f(e_r), \sum_{s=1}^{n} \beta_s f(e_s) \rangle = \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_r \beta_s \langle f(e_r), f(e_s) \rangle$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_r \beta_s \langle e_r, e_s \rangle = \langle \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r, \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Kaip matome, f yra ortogonalus atvaizdis. □

1.8.4 teiginys. *Visi ortogonalieji atvaizdžiai $f : V \to V$ atvaizdžių ortogonaliąja ir yra žymima $O(V)$.*

Įrodymas. Pirmiausia įsitikinsime, kad ortogonaliųjų atvaizdžių kompozicija yra ortogonalusis atvaizdis. Sakykime, f, g – ortogonalieji atvaizdžiai. Tuomet bet kuriems $u_1, u_2 \in V$,

$$\langle (f \circ g)(u_1), (f \circ g)(u_2) \rangle = \langle (f(g(u_1)), (f(g(u_2)) \rangle =$$

$$\langle g(u_1), g(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Kaip matome, $f \circ g$ yra ortogonalusis atvaizdis. Taigi visų ortogonaliųjų atvaizdžių aibė $O(V)$ yra stabili ortogonaliųjų atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu. Dabar įsitikinsime, kad ortogonaliųjų atvaizdžių kompozicijos dėsnis tenkina grupės apibrėžimo aksiomas.

1. Atvaizdžių kompozicija yra asociatyvus kompozicijos dėsnis;

2. Tapatusis atvaizdis $\mathrm{id} : V \to V$ akivaizdžiai yra ortogonalusis atvaizdis;
3. Kiekvienam ortogonaliajam atvaizdžiui $f \in U(V)$ egzistuoja atvirkštinis atvaizdis f^{-1}, nes, kaip anksčiau įsitikinome, kiekvienas ortogonalusis atvaizdis yra bijektyvus. Lieka įsitikinti, kad f^{-1} yra ortogonalusis atvaizdis.

Sakykime, $u_1, u_2 \in V$. Tuomet

$$\langle u_1, u_2\rangle = \langle (f \circ f^{-1})(u_1), (f \circ f^{-1})(u_2)\rangle$$
$$= \langle f(f^{-1}(u_1)), f(f^{-1}(u_2))\rangle = \langle f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2)\rangle.$$

Remdamiesi šia lygybe, matome, kad f^{-1} yra ortogonalus atvaizdis. Taigi įrodėme, kad $O(V)$ yra grupė. □

1.8.5 apibrėžimas. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ yra vadinama *ortogonaliąja*, jei $AA^t = \mathbf{1_n}$.

1.8.6 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$, čia V – Euklido erdvė, yra ortogonalusis tada ir tik tada, kai jo matrica Euklido erdvės V ortonormuotoje bazėje yra ortogonali.*

Įrodymas. Tegu $f : V \to V$ – ortogonalusis atvaizdis, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra Euklido erdvės V ortonormuota bazė. Sakykime, ortogonalaus atvaizdžio f matrica tiesinės erdvės V bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, t. y.

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j, \quad 1 \le i \le n.$$

Kadangi f ortogonalus atvaizdis, tai bet kuriems r, s, $1 \le r, s \le n$,

$$\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \langle e_r, e_s\rangle = \delta_{rs}.$$

Į lygybę $\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \delta_{rs}$, $1 \le r, s \le n$, įrašę vektorių $f(e_i)$, $1 \le i \le n$, išraiškas bazės $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektoriais, gauname:

$$\langle \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} e_j, \sum_{m=1}^n \alpha_{sm} e_m\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \sum_{m=1}^n \alpha_{sm} \langle e_j, e_m\rangle$$

$$= \sum_{j,m=1}^n \alpha_{rj}\alpha_{sm}\delta_{jm} = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj}\alpha_{sj} = \delta_{rs}, \ 1 \le r, s \le n.$$

Pažymėję $A = (\alpha_{rj})_{r,j=1}^n$, remdamiesi lygybėmis

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{rj}\alpha_{sj} = \delta_{rs}, \quad 1 \le r, s \le n,$$

matome, kad $AA^t = \mathbf{1_n}$. Taigi įrodėme, kad ortogonalaus atvaizdžio f matrica A Euklido erdvės V ortonormuotoje bazėje yra ortogonali.

Dabar sakykime, kad tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ Euklido erdvės V ortonormuotoje bazėje $e_1, e_2, \dots, e_n$ yra ortogonali. Įrodysime, kad tiesinis atvaizdis f yra ortogonalus.

Galime parašyti lygybes:

$$\mathbf{1_n} = AA^t \Longrightarrow \delta_{rs} = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj}\alpha_{sj} = \sum_{j,m=1}^n \alpha_{rj}\alpha_{sm}\delta_{jm}$$

$$= \sum_{j=1}^n \alpha_{rj} \sum_{m=1}^n \alpha_{sm}\langle e_j, e_m\rangle = \langle \sum_{j=1}^n \alpha_{rj}e_j, \sum_{m=1}^n \alpha_{sm}e_m\rangle = \langle f(e_r), f(e_s)\rangle,$$

$1 \le r, s \le n$. Vadinasi,

$$\langle f(e_r), f(e_s)\rangle = \langle e_r, e_s\rangle, \;\; 1 \le r, s \le n,$$

t. y. Euklido erdvės V ortonormuotos bazės $e_1, e_2, \dots, e_n$ vaizdas $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ yra ortonormuota bazė. Remdamiesi 1.8.3 teiginiu, gauname, kad f yra ortogonalus atvaizdis. □

1.8.7 išvada. *Perėjimo matrica iš ortonormuotos bazės į ortonormuotą yra ortogonali.*

Įrodymas. Perėjimo matrica T iš Euklido erdvės V ortonormuotos bazės $e_1, e_2, \dots, e_n$ į ortonormuotą bazę $v_1, v_2, \dots, v_n$ yra tiesinio atvaizdžio

$$f : V \to V, \quad f(e_j) = v_j, \;\; 1 \le j \le n,$$

matrica bazėje $e_1, e_2, \dots, e_n$. Kadangi ši bazė ir jos vaizdas yra ortonormuotos, tai tiesinis atvaizdis f yra ortogonalus (žr. 1.8.3 teiginį). Vadinasi, šio atvaizdžio matrica A ortonormuotoje bazėje yra ortogonali. □

1.8.8. Nagrinėkime standartinę n-matę Euklido erdvę $(\mathbb{R}^n, \langle \;,\; \rangle)$. Priminsime, kad

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j\beta_j.$$

Šios erdvės standartinė bazė $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jn})$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis, yra ortonormuota. Kiekvienam ortogonaliam atvaizdžiui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiesinės erdvės $\mathbb{R}^n$ standartinėje ortonormuotoje bazėje vienareikšmiškai yra priskiriama ortogonali matrica $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^n$,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}e_j, 1 \le i \le n.$$

Pažymėkime visų n-tos eilės ortogonaliųjų matricų aibę $O(n)$. Yra apibrėžtas atvaizdis $F : O(\mathbb{R}^n) \to O(n)$, $F(f) = A$, A – ortogonaliojo atvaizdžio f matrica tiesinės erdvės $\mathbb{R}^n$ standartinėje bazėje. Atvaizdis F yra bijektyvus.

1.8.9 teiginys. *Visų n-tos eilės ortogonaliųjų matricų aibė $O(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė.*

Įrodymas. Pirmiausia įsitikinsime, kad aibė $O(n)$ yra stabili matricų daugybos atžvilgiu. Jei $A, B \in O(n)$, tai $AA^t = \mathbf{1_n}$, $BB^t = \mathbf{1_n}$. Tuomet

$$(AB)(AB)^t = (AB)B^tA^t = A(BB^t)A^t = A\mathbf{1_n}A^t = AA^t = \mathbf{1_n},$$

t. y. AB yra ortogonali matrica. Įsitikinsime, kad $O(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė. Akivaizdu, kad

1. Matricų daugyba yra asociatyvi;

2. $\mathbf{1_n} \in O(n)$ – tai akivaizdu;

3. Jei $A \in (n)$, tai $AA^t = \mathbf{1_n}$, t. y. $A^{-1} = A^t$. Galime parašyti: $A^tA^{tt} = A^tA = \mathbf{1_n}$. Kaip matome, $A^{-1} = A^t \in O(n)$.

Taigi $O(n)$ matricų daugybos atžvilgiu yra grupė. □

1.8.10 teiginys. *Atvaizdis $F : O(\mathbb{R}^n) \to O(n)$ yra antihomomorfizmas, t. y. bet kuriems $f, g \in O(\mathbb{R}^n)$, $F(f \circ g) = F(g)F(f)$.*

Įrodymas. Sakykime, $f, g \in O(\mathbb{R}^n)$,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}e_j, \quad g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}e_j, 1 \le i \le n.$$

Tuomet

$$(f \circ g)(e_i) = f(g(e_i)) = f(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}e_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}f(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \sum_{r=1}^{n} \alpha_{jr}e_r = \sum_{r=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jr})e_r = \sum_{r=1}^{n} \gamma_{ir}e_r, 1 \le i \le n,$$

čia $\gamma_{ir} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jr}$, $1 \le i, r \le n$. Pažymėję $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, $C = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$, gauname: $C = BA$. Taigi matome, kad, jei $F(f) = A$, $F(g) = B$, tai $F(f \circ g) = C = BA = F(g)F(f)$. □

1.8.11. Kadangi ortogonali matrica A tenkina sąlygą $AA^t = \mathbf{1_n}$, tai

$$\det(AA^t) = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2 = 1,$$

t. y. $\det A = \pm 1$.

1.8.12 (Ortogonalaus atvaizdžio (ortogonalios matricos) spektras)**.**

Sakykime, $f : V \to V$ yra ortogonalus atvaizdis. Kaip žinome, ortogonalaus atvaizdžio f matrica A Euklido erdvės V ortonormuotoje bazėje $e_1, e_2, \dots, e_n$ yra ortogonali, t. y. $AA^t = \mathbf{1}_n$. Kiekviena ortogonali matrica A yra ir unitari, nes $A = \bar{A}$ ir $AA^t = \mathbf{1}_n$. Taigi ortogonalios matricos, o taipogi ir šią matricą atitinkančio ortogonalaus atvaizdžio, tikrinės reikšmės priklauso kompleksinės plokštumos vienetiniam apskritimui $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Įrodysime, kad ortogonalios matricos (o taipogi ortogonalaus atvaizdžio) tikrinės reikšmės vienetiniame apskritime S^1 yra išsidėsčiusios simetriškai realiosios tiesės atžvilgiu.

Sakykime, $f : V \to V$ yra ortogonalus atvaizdis, A – šio atvaizdžio ortogonali matrica Euklido erdvės V ortonormuotoje bazėje, $\phi_A(t)$ – šios matricos (o taip pat ir ortogonalaus atvaizdžio f) charakteringasis polinomas. Tegu $\alpha \in S^1$ yra polinomo $\phi_A(t)$ šaknis, t. y. $\phi_A(\alpha) = 0$. Sakykime,

$$\phi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R},\ 0 \le j \le n-1.$$

Tuomet

$$0 = \overline{\phi_A(\alpha)} = (-1)^n \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$= (-1)^n \bar{\alpha}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$= (-1)^n \bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = \phi_A(\bar{\alpha}).$$

Kaip matome, jei $\alpha \in S^1$ yra polinomo $\phi_A(t)$ šaknis, tai ir $\bar{\alpha} \in S^1$ yra polinomo $\phi_A(t)$ šaknis, t. y. ortogonalios matricos tikrinės reikšmės yra simetriškai išsidėsčiusios realiosios tiesės atžvilgiu.

1.8.13 teorema. *Tegu $f : V \to V$ – ortogonalus atvaizdis. Egzistuoja Euklido erdvės V tokia ortonornuota bazė $u_1, u_2, \dots, u_n$, kurioje ortogonalaus atvaizdžio*

f matrica turi pavidalą:

$$\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos\psi_p & \sin\psi_p \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin\psi_p & \cos\psi_p
\end{pmatrix}.$$

Šios matricos įstrižainėje yra r vienetų, s – minus vienetų ir p – specialaus pavidalo antros eilės kvadratinių matricų.

Įrodymas. Išrinkime Euklido erdvės V ortonormuotą bazę $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n$. Sakykime, ortogonalaus atvaizdžio f matrica šioje bazėje yra $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $\phi_A(t)$ – šios matricos charakteringasis polinomas.

Euklido erdvę V galime sutapatinti su standartine Euklido erdve $\mathbb{R}^n$:

$$V \ni v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \overset{h}{\mapsto} (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

o vietoje ortogonalaus atvaizdžio $f : V \to V$ galime nagrinėti ortogonalų atvaizdį:

$$\mathbb{R}^n \overset{\mathcal{A}}{\to} \mathbb{R}^n,\ \ \mathcal{A}((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)A.$$

Kitaip tariant, diagrama

$$\begin{array}{ccc}
V & \overset{f}{\to} & V \\
h\downarrow & & \downarrow h \\
\mathbb{R}^n & \overset{\mathcal{A}}{\to} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

yra komutatyvi, t. y. $\mathcal{A} \circ h = h \circ f$.

Išskaidykime $\phi_A(t)$ pirmojo laipsnio polinomais:

$$\phi_A(t) = (1-t)^r(-1-t)^s(\lambda_1 - t)(\bar{\lambda}_1 - t)\dots(\lambda_p - t)(\bar{\lambda}_p - t),$$

čia $\lambda_j \in S^1 \setminus \mathbb{R}$, $1 \le j \le p$, – polinomo $\phi_A(t)$ kompleksinės šaknys.

Kadangi $1 \in \mathbb{R}$, tai egzistuoja $\mathcal{A}$-tikrinis vektorius $u_1 \in \mathbb{R}^n$, $||u_1|| = 1$, atitinkantis tikrinę reikšmę 1. Tegu $L_1 = \mathbb{R}\, u_1$. L_1 yra $\mathcal{A}$ - invariantinis poerdvis. Užrašykime lygybę: $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus L_1^\perp$ (žr. 1.3.17 teiginį). Įsitikinsime, kad $L_1^\perp$ yra taip pat $\mathcal{A}$ - invariantinis.

Imkime $v \in L_1^\perp$, t. y. $\langle v, u_1 \rangle = 0$. Tuomet

$$\langle \mathcal{A}(v), u_1 \rangle = \langle \mathcal{A}(v), \mathcal{A}(u_1) \rangle = \langle v, u_1 \rangle = 0.$$

Kaip matome, jei $v \in L_1^\perp$, tai ir $f(v) \in L_1^\perp$, kitaip tariant, $L_1^\perp$ yra $\mathcal{A}$ - invariantinis. Vadinasi, galime nagrinėti ortogonalų atvaizdį

$$\mathcal{A}|_{L_1^\perp} : L_1^\perp \to L_1^\perp.$$

Ortogonalus atvaizdis $\mathcal{A}|_{L_1^\perp}$ palyginus su $\mathcal{A}$ nebeturi vienos tikrinės reikšmės, lygios 1.

Šią procedūrą galima kartoti tol, kol gaunami siauresni ortogonalūs atvaizdžiai turi realių tikrinių reikšmių (± 1). Taigi egzistuoja tokia ortonormuota vektorių šeima $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_{r+s}$, kad $\mathcal{A}(u_i) = u_i$, kai $1 \le i \le r$, ir $\mathcal{A}(u_{r+j}) = -u_{r+j}$, kai $1 \le j \le s$. Pažymėkime

$$L = \mathbb{R}\, u_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\, u_r \oplus \mathbb{R}\, u_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\, u_{r+s}.$$

Vėl galime užrašyti $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$. Poerdvis L yra $\mathcal{A}$ - invariantinis. Galite įsitikinti, kad ir $L^\perp$ yra $\mathcal{A}$ - invariantinis. Atvaizdžio $\mathcal{A}|_{L^\perp}$ charakteringasis polinomas yra lygus sandaugai:

$$(\lambda_1 - t)(\bar{\lambda}_1 - t) \ldots (\lambda_p - t)(\bar{\lambda}_p - t).$$

Paprastumo dėlei ortogonalų atvaizdį $\mathcal{A}|_{L^\perp}$ pažymėkime g, o $L^\perp$ – N. Taigi nagrinėkime ortogonalų atvaizdį $g : N \to N$, kurio charakteringasis polinomas $\phi_g(t)$ yra lygus

$$(\lambda_1 - t)(\bar{\lambda}_1 - t) \ldots (\lambda_p - t)(\bar{\lambda}_p - t).$$

Kaip ir anksčiau, išrinkime Euklido erdvės N ortonormuotą bazę $v_1, v_2, \ldots, v_{2p-1}, v_{2p}$. Tegu ortogonalaus atvaizdžio g matrica šioje bazėje yra B. Tuomet, kaip ir anksčiau, N galime sutapatinti su $\mathbb{R}^{2p}$, o vietoje atvaizdžio g nagrinėti atvaizdį $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N \\ h' \downarrow & & \downarrow h', \\ \mathbb{R}^{2p} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \mathbb{R}^{2p} \end{array}$$

čia

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathbb{R}^n, \ \ \mathcal{B}((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})B.$$

Standartinę Euklido erdvę $\mathbb{R}^{2p}$ įdėkime į standartinę unitariąją erdvę $\mathbb{C}^{2p}$:

$$\mathbb{R}^{2p} \ni (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p}) \mapsto (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p}) \in \mathbb{C}^{2p}.$$

Atvaizdį $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})B,$$

galime pratęsti į unitariąją erdvę $\mathbb{C}^{2p}$:

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\overline{\mathcal{B}}} \mathbb{C}^n, \quad \overline{\mathcal{B}}((\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2p})B.$$

Tiesinis atvaizdis $\overline{\mathcal{B}} : \mathbb{C}^{2p} \to \mathbb{C}^{2p}$ yra unitarus. Nagrinėjamą situaciją galime pavaizduoti diagrama

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N \\ h' \downarrow & & \downarrow h' \\ \mathbb{R}^{2p} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \mathbb{R}^{2p} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}^{2p} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{B}}} & \mathbb{C}^{2p} \end{array}.$$

Kadangi $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, tai egzistuoja atvaizdžio $\overline{\mathcal{B}}$ tikrinis vektorius

$$w_1 = (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{2p}) \in \mathbb{C}^{2p}, \quad ||w_1|| = 1,$$

atitinkantis tikrinę reikšmę λ_1, t. y.

$$(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{2p})B = \lambda_1(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{2p}).$$

Akivaizdu, kad

$$\bar{w}_1 = (\bar{\gamma}_1,\ \bar{\gamma}_2,\ \ldots,\ \bar{\gamma}_{2p}) \in \mathbb{C}^{2p}, \quad ||\bar{w}_1|| = 1,$$

yra atvaizdžio $\overline{\mathcal{B}}$ tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę $\bar{\lambda}_1$. Kadangi $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, tai vektoriai w_1 ir $\bar{w}_1$ yra tiesiškai nepriklausomi virš kūno $\mathbb{C}$. Sudarykime vektorius

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + \bar{w}_1) \quad \text{ir} \quad l_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(w_1 - \bar{w}_1).$$

Šie vektoriai priklauso Euklido erdvei $\mathbb{R}^{2p}$ ir yra tiesiškai nepriklausomi virš kūno $\mathbb{R}$. Nagrinėkime Euklido erdvės $\mathbb{R}^{2p}$ tiesinį poerdvį $U_1 := \mathbb{R}l_1 + \mathbb{R}l_2$. Įsitikinsime, kad U_1 yra $\mathcal{B}$ - invariantinis. Tuo tikslu nagrinėkime $\mathcal{B}(l_1)$ ir $\mathcal{B}(l_2)$. Taigi

$$\mathcal{B}(l_1) = \overline{\mathcal{B}}(l_1) = \overline{\mathcal{B}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + \bar{w}_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1B + \bar{w}_1B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 w_1 + \bar{\lambda}_1\bar{w}_1)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_1(l_1 - il_2) + \bar{\lambda}_1((l_1 + il_2)) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)l_1 + \frac{i}{2}(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)l_2.$$

Kadangi $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)$ ir $\frac{i}{2}(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)$ yra realūs skaičiai, tai $\mathcal{B}(l_1) \in U_1$. Panašiai galima įsitikinti, kad ir $\mathcal{B}(l_2) \in U_1$.

Kagangi $\lambda_1 \in S_1$, tai $\lambda_1 = \cos\psi_1 + i\sin\psi_1$. Vadinasi, $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) = \cos\psi_1$, o $\frac{i}{2}(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1) = \sin\psi_1$. Taigi $\mathcal{B}(l_1) = \cos\psi_1 l_1 + \sin\psi_1 l_2$. Panašiai galite įsitikiniti, kad $\mathcal{B}(l_2) = -\sin\psi_1 l_1 + \cos\psi_1 l_2$.

Galime užrašyti lygybę:

$$\mathbb{R}^{2p} = U_1 \oplus U_1^{\perp}.$$

Tiesinis poerdvis $U_1^{\perp}$ yra B - invariantinis. Taigi teoremos įrodymą galima užbaigti matematinės indukcijos metodu. $\square$

1.9 Simetriniai atvaizdžiai

Sakykime, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ – Euklido erdvė, $f : V \to V$ – tiesinis atvaizdis.

1.9.1 apibrėžimas. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas *simetriniu*, jei bet kuriems $u_1, u_2 \in V$, $\langle f(u_1), u_2\rangle = \langle u_1, f(u_2)\rangle$.

1.9.2 teiginys. *Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra simetrinis tada ir tik tada, jei Euklido erdvės V kurios nors bazės vektoriams $v_1, v_2, \ldots, v_n$,*

$$\langle f(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, f(u_j)\rangle, \ \ 1 \le i, j \le n.$$

Įrodymas. Jei f yra simetrinis atvaizdis, tai, remdamiesi simetrinio atvaizdžio apibrėžimu, gauname, kad $\langle f(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, f(u_j)\rangle$, $1 \le i, j \le n$.

Sakykime, kad Euklido erdvės V kurios nors bazės vektoriams $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

$$\langle f(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, f(u_j)\rangle, \ \ 1 \le i, j \le n.$$

Imkime kuriuos nors vektorius $u_1, u_2 \in V$. Užrašykime vektorių u_1 ir u_2 išraiškas Euklido erdvės V bazės vektoriais $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad u_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j.$$

Tuomet

$$\langle f(u_1), u_2\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle f(u_i), u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle u_i, f(u_j)\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, f(\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j)\rangle = \langle u_1, f(u_2)\rangle.$$

$\square$

1.9.3 apibrėžimas. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ yra vadinama *simetrine*, jei $A = A^t$.

1.9.4 teiginys. *Sakykime, V yra Euklido erdvė. Tiesinis atvaizdis $f : V \to V$ yra simetrinis tada ir tik tada, jei tiesinio atvaizdžio f matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ Euklido erdvės V ortnormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra simetrinė.*

Įrodymas. Sakykime, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra Euklido erdvės V ortonormuota bazė, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ – tiesinio atvaizdžio f matrica bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (t. y. $f(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$, $1 \le i \le n$).

Tarkime, kad f yra simetrinis atvaizdis. Tuomet, remdamiesi simetrinio atvaizdžio apibrėžimu, galime parašyti lygybes: $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$, $1 \le i, j \le n$. Į šias lygybes įrašę bazinių vektorių vaizdus $f(e_i)$, $1 \le i \le n$, išreikštus bazės vektoriais $e_1, e_2, \ldots, e_n$, gauname:

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle, 1 \le i, j \le n$$

$$\iff \langle \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} e_r, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^n \alpha_{js} e_s \rangle, 1 \le i, j \le n$$

$$\iff \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \langle e_r, e_j \rangle = \sum_{s=1}^n \alpha_{js} \langle e_i, e_s \rangle, 1 \le i, j \le n$$

$$\iff \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \delta_{rj} = \sum_{s=1}^n \alpha_{js} \delta_{is}, 1 \le i, j \le n \iff \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, 1 \le i, j \le n.$$

Lygybės $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \le i, j \le n$, yra ekvivalenčios matricų lygybei $A = A^t$. Kaip matome, simetrinio atvaizdžio f matrica Euklido erdvės V ortnormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra simetrinė matrica.

Sakykime, kad tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ Euklido erdvės V ortnormuotoje bazėje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra simetrinė. Tuomet matricų lygybė $A = A^t$ užrašyta jų koeficientams atrodo taip: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. Remdamiesi šiomis lygybėmis, gauname $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$, $1 \le i, j \le n$. Vadinasi, f yra simetrinis atvaizdis (žr. 1.9.2 teiginį). □

1.9.5 (Simetrinio atvaizdžio (simetrinės matricos) spektras)**.**

1.9.6 teiginys. *Sakykime, V yra Euklido erdvė. Simetrinio atvaizdžio $f : V \to V$ (o taip ir simetrinės matricos) tikrinės reikšmės (t. y. spektras) priklauso realiųjų skaičių aibei.*

Įrodymas. Tarkime, kad $f : V \to V$ yra simetrinis atvaizdis. Išsirinkime Euklido erdvės V ortonormuotą bazę $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Simetrinio atvaizdžio f matrica

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$$

ortonormuotoje bazėje $v_1, v_2, \ldots, v_n$ yra simetrinė. Simetrinė matrica su realiaisiais koeficientais yra Ermito matrica. Kaip žinome (žr. 1.7.6 teiginį), Ermito matricos tikrinės reikšmės priklauso realiųjų skaičių aibei. □

1.9.7 teorema (simetrinio atvaizdžio spektrinis išskaidymas)**.** *Sakykime, V yra Euklido erdvė, $f : V \to V$ – simetrinis atvaizdis. Tuomet egzistuoja Euklido erdvės V ortonormuota bazė, sudaryta iš simetrinio atvaizdžio f tikrinių vektorių.*

Įrodymas. Sakykime, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ yra simetrinio atvaizdžio f tikrinė reikšmė, u_1 – tiesinio atvaizdžio f tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę λ_1. Tegu vektoriaus u_1 ilgis yra lygus 1, nes priešingu atveju jį galime normuoti. Euklido erdvės V tiesinis poerdvis $L = \mathbb{R}\, u_1$ yra f-invariantinis, nes $f(u_1) = \lambda_1 u_1$. Euklido erdvę V galime išskaidyti į tarpusavyje ortogonalių tiesinių poerdvių L ir $L^\perp$ tiesioginę sumą $V = L \oplus L^\perp$ (žr. 1.3.17 teiginį). Įsitikinsime, kad tiesinis poerdvis $L^\perp$ yra f-invariantinis, t. y. įrodysime, kad

$$v \in L^\perp \Longrightarrow f(v) \in L^\perp.$$

Sakykime, kad $v \in L^\perp$, t. y. $\langle u_1, v\rangle = 0$. Tuomet

$$\langle u_1, f(v)\rangle = \langle f(u_1), v\rangle = \langle \lambda_1 u_1, v\rangle = \lambda_1 \langle u_1, v\rangle = 0.$$

Kaip matome, jei $v \in L^\perp$, tai ir $f(v) \in L^\perp$. Tarę, kad teoremos teiginys yra įrodytas kiekvienam simetriniam atvaizdžiui $g : N \to N$, kai $\dim_{\mathbb{R}} N < \dim_{\mathbb{R}} V$, teoremos įrodymą galime užbaigti matematinės indukcijos metodu. Mūsų atveju

$$\dim_{\mathbb{R}} L^\perp < \dim_{\mathbb{R}} V,$$

o $f\big|_{L^\perp} : L^\perp \to L^\perp$ yra simetrinis atvaizdis. □

1.9.8 teiginys. *Kiekvienai simetrinei matricai A egzistuoja tokia ortogonali matrica T, kad*

$$TAT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le n.$$

Čia $\lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le n$, yra matricos A tikrinės reikšmės.

Įrodymas. Tarkime, kad $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ yra simetrinė matrica. Nagrinėkime standartinę Euklido erdvę $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, kurioje yra apibrėžta standartinė skaliarinė daugyba

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \langle(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Šio erdvės bazė $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jn})$, $1 \leq j \leq n$ yra ortonormuota. Apibrėžkime tiesinį atvaizdį $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $1 \leq i \leq n$. Kadangi tiesinio atvaizdžio f matrica $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ Euklido erdvės $\mathbb{R}^n$ ortonormuotoje bazėje e_j, $1 \leq j \leq n$, yra simetrinė, tai f yra simetrinis atvaizdis (žr. 1.9.4 teiginį). Remiantis teorema apie simetrinio atvaizdžio spektrinį išskaidymą (žr. 1.9.7 teoremą), egzistuoja Euklido erdvės $\mathbb{R}^n$ ortonormuota bazė v_j, $1 \leq j \leq n$, sudaryta iš atvaizdžio f tikrinių vektorių. Perėjimo matrica T iš ortonormuotos bazės e_j, $1 \leq j \leq n$, į ortonormuotą bazę v_j, $1 \leq j \leq n$, yra ortogonali (žr. 1.8.7 išvadą). Simetrinio atvaizdžio f matrica bazėje v_j, $1 \leq j \leq n$, yra

$$TAT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n,$$

čia $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, yra matricos A tikrinės reikšmės. $\square$

Rodyklė