

4 PRATYBOS. TIESĖ PLOKŠTUMOJE

Paulius Drungilas

TURINYS

Uždaviniai

4

Bendroji tiesės plokštumoje lygtis yra

$$ax + by + c = 0,$$

kur $a \neq 0$ arba $b \neq 0$. Vektorius $\vec{n}(a, b)$ visada statmenas šiai tiesei ir vadinamas tos tiesės **normalės vektoriumi**.

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmenos nenuliniam vektoriui $\vec{n}(a, b)$, lygtis yra

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Tiesės, einančios per taškus $A(x_0, y_0)$ ir $B(x_1, y_1)$, lygtis yra

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

arba

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir lygiagrečios vektoriui $\vec{l}(a, b)$, lygtis yra

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir lygiagrečios tiesei $ax + by + c = 0$, lygtis yra

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmenos tiesei $ax + by + c = 0$, lygtis yra

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir sudarančios kampą α su x -o ašimi, lygtis yra

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha.$$

Atstumas d nuo taško $A(x_0, y_0)$ iki tiesės $ax + by + c = 0$ yra

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Trikampio, kurio viršūnės yra taškai $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ir $C(x_3, y_3)$, plotas S randamas iš lygybės

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

1. **pavyzdys.** Taškai $A(-3, -2)$, $B(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$ ir $C(0, 4)$ yra trikampio viršūnės. Rasime į trikampio vidų įbrėžto apskritimo centrą ir spindulį.

Sprendimas. Į trikampio vidų įbrėžto apskritimo centras yra jo pusiaukampinių susikirtimo taškas. Taigi pakanka dviejų trikampio pusiaukampinių. Rasime kampo A pusiaukampinės lygtį. Imkime vektorius $\vec{AB}(\frac{24}{5}, \frac{12}{5})$ ir $\vec{AC}(3, 6)$. Kiekvieną iš šių vektorių dalindami iš jo ilgio, gausime vienetinio ilgio (tos pačios krypties!) vektorius

$$\vec{AB}' = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

ir

$$\vec{AC}' = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

(Čia $|\vec{AB}| = \frac{12}{5}\sqrt{5}$ ir $|\vec{AC}| = 3\sqrt{5}$.) Vektorius

$$\vec{AB}' + \vec{AC}' = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

yra lygiagretus kampo A pusiaukampinei, todėl ir vektorius

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}(\vec{AB}' + \vec{AC}') = (1, 1)$$

yra lygiagretus kampo A pusiaukampinei. Taigi turime tašką A , per kurį eina pusiaukampinė, ir jai lygiagretų vektorių \vec{a} , todėl kampo A pusiaukampinės lygtis yra (žiūrėti aukščiau pateiktas formules)

$$\frac{x - (-3)}{1} = \frac{y - (-2)}{1}$$

arba $x - y + 1 = 0$ – kampo A pusiaukampinė.

Analogiškai rasime kampo B pusiaukampinės lygtį. Iš vektorių

$$\vec{BC}\left(-\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right) \quad \text{ir} \quad \vec{BA}\left(-\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

padarome vienetinio ilgio vektorius

$$\vec{BC}' = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

ir

$$\vec{BA}' = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Tada vektorius

$$\vec{BC}' + \vec{BA}' = \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

yra lygiagretus kampo B pusiaukampinei, todėl ir vektorius

$$\vec{b} = \sqrt{5}(\vec{BC}' + \vec{BA}') = (-3, 1)$$

yra lygiagretus šiai pusiaukampinei. Taigi turime tašką B , per kurį eina pusiaukampinė, ir jai lygiagretų vektorių \vec{b} , todėl kampo B pusiaukampinės lygtis yra (žiūrėti aukščiau pateiktas formules)

$$\frac{x - \frac{9}{5}}{-3} = \frac{y - \frac{2}{5}}{1}$$

arba $x + 3y - 3 = 0$ – kampo B pusiaukampinė.

Iš kampų A ir B pusiaukampinių sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0, \end{cases}$$

kurios sprendinys $(0, 1)$ yra į trikampio ABC vidų įbrėžto apskritimo centras Q . Šio apskritimo spindulys r lygus taško Q atstumui iki bet kurios trikampio kraštinės. Rasime kraštinės AC lygtį. Kraštinė AC eina per taškus $A(-3, -2)$ ir $C(0, 4)$, todėl jos lygtis yra (žiūrėti aukščiau pateiktas formules)

$$(4 - (-2))(x - (-3)) - (0 - (-3))(y - (-2)) = 0$$

arba $2x - y + 4 = 0$ – kraštinės AC lygtis. Tada taško Q atstumas r iki kraštinės AC lygus (žiūrėti aukščiau pateiktas formules)

$$r = \frac{|2 \cdot 0 - 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Taigi į trikampio ABC vidų įbrėžto apskritimo centras yra $Q(0, 1)$, o spindulys

$$r = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

□

Uždaviniai.

1*. Raskite trikampio ABC vidaus kampus:

$$AB : 3x - 4y + 11 = 0, BC : 5x - y - 10 = 0 \text{ ir } AC : 2x + 3y - 4 = 0.$$

$$\text{Ats.: } \angle A = \arccos\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right), \angle B = \arccos\left(\frac{19}{5\sqrt{26}}\right), \angle C = \arccos\left(\frac{7}{13\sqrt{2}}\right).$$

2*. Kokia turi būti a reikšmė, kad tiesės $x + 2y - 7 = 0$ ir $2x + ay - 9 = 0$ būtų a) lygiagrečios; b) statmenos; c) sudarytų 45° kampą?

$$\text{Ats.: a) } a = 4; \text{ b) } a = -1; \text{ c) } a = 2/3 \text{ ir } a = -6.$$

3*. Duota tiesė $x + 2y + 5 = 0$ ir taškas $A(1, 2)$. Raskite taško A projekciją duotoje tiesėje ir jam simetrišką tašką šios tiesės atžvilgiu.

$$\text{Ats.: Projekcija } (-1, -2), \text{ simetriškas taškas } (-3, -6).$$

4*. Tiesės $2x + 3y + 1 = 0$ ir $3x - 2y + 2 = 0$ yra stačiakampio kraštinės. Taškas $A(1, -4)$ yra jo viršūnė. Sudarykite kitų dviejų kraštinių lygtis ir raskite šio stačiakampio plotą.

$$\text{Ats.: } 2x + 3y + 10 = 0, 3x - 2y - 11 = 0, \text{ plotas } 9.$$

5*. Parašykite tiesės $4x + 3y - 15 = 0$ a) ašinę lygtį; b) kanoninę lygtį; c) parametrines lygtis; d) normaliąją lygtį.

$$\text{Ats.: a) } \frac{x}{15/4} + \frac{y}{5} = 1; \text{ b) } \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-4}; \text{ c) } x = 3 + 3t, y = 1 - 4t, t \in \mathbb{R},$$

$$\text{d) } \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

6*. Taškai $A(-3, 0)$, $B(-4, 2)$ ir $C(3, 5)$ yra trikampio viršūnės. Sudarykite lygtis: a) kraštinės AB ; b) pusiauakraštinės AD ; c) aukštinės AG ; d) vidurio linijos, lygiagrečios kraštinei AB ; e) tiesės, einančios per viršūnę A ir lygiagrečios kraštinei BC .

$$\text{Ats.: a) } 2x + y + 6 = 0; \text{ b) } 7x - 5y + 21 = 0; \text{ c) } 7x + 3y + 21 = 0;$$

$$\text{d) } 4x + 2y - 5 = 0; \text{ e) } 3x - 7y + 9 = 0.$$

7*. Taškai $A(-3, -1)$ ir $B(2, 2)$ yra gretimos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės. Įstrižainės susikerta taške $Q(3, 0)$. Sudarykite lygiagretainio kraštinių lygtis ir apskaičiuokite jo plotą.

$$\text{Ats.: } 3x - 5y + 4 = 0, x + 7y - 16 = 0, 3x - 5y - 22 = 0, x + 7y + 10 = 0$$

$$\text{ir } S = 26.$$

8*. Taškas $B(-4, -5)$ yra trikampio viršūnė. Tiesės $5x + 3y - 4 = 0$ ir $3x + 8y + 13 = 0$ – jo aukštinės. Sudarykite šio trikampio kraštinių lygtis.

$$\text{Ats.: } 3x - 5y - 13 = 0, 8x - 3y + 17 = 0, 5x + 2y - 1 = 0.$$

9*. Taškai $A(3, -1)$ ir $B(5, 7)$ yra trikampio viršūnės. Taškas $D(4, -1)$ – aukštinių susikirtimo taškas. Sudarykite trikampio kraštinių lygtis

ir raskite jo plotą.

Ats.: $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$ ir $S = 8, 25$.

- 10*. Užrašykite lygtį tiesės, einančios per tiesių $x + 2y - 11 = 0$ ir $2x - y - 2 = 0$ susikirtimo tašką, ir kurios atstumas iki koordinačių pradžios būtų lygus 5.

Ats.: $3x + 4y - 25$.

11. Taškai $A(0, -4)$, $B(3, 0)$ ir $C(0, 6)$ yra trikampio viršūnės. Raskite viršūnės C atstumą iki kampo A pusiaukampinės.

Ats.: $\sqrt{10}$.

12. Parašykite apskritimo $x^2 + y^2 = 9$ liestinių, einančių per tašką $A(5, 0)$, lygtis.

Ats.: $3x + 4y - 15 = 0$ ir $3x - 4y - 15 = 0$.

13. Oy ašyje raskite tašką, vienodai nutolusį nuo koordinačių sistemos pradžios ir nuo tiesės $3x - 4y + 12 = 0$.

Ats.: $(0, 4/3)$ ir $(0, -12)$.

14. Tiesės $3x + y = 0$ ir $x - 3y = 0$ yra lygiašonio trikampio šoninės kraštinės. $C(5, 0)$ – pagrindo taškas. Raskite trikampio perimetrą ir plotą. (Du atvejai!)

Ats.: $P_1 = 4(\sqrt{10} + \sqrt{5})$, $S_1 = 20$; $P_2 = 2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$, $S_2 = 5$.

15. Raskite lygtį tiesės, einančios per tašką $A(8, 6)$ ir nuo koordinatinių ašių sudaromo kampo atkertančios trikampį, kurio plotas būtų 12.

Ats.: $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$.

16. Raskite trikampio ABC kraštinių lygtis, jei viena jo viršūnė $A(1, 3)$, o dviejų šio trikampio pusiaukraštinių lygtys yra $x - 2y + 1 = 0$ ir $y - 1 = 0$.

Ats.: $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

17. Įrodykite, jog tiesė $2x + y + 3 = 0$ kerta atkarpą AB , kur $A(-5, 1)$, $B(3, 7)$.

18. Raskite lygtį tiesės, einančios per tašką $A(-2, 3)$ ir vienodai nutolusios nuo taškų $B(5, -1)$ ir $C(3, 7)$.

Ats.: $4x + y + 5 = 0$, $y - 3 = 0$.

19. Nagrinėkime kampą, kurį sudaro tiesės $3x - 5y - 4 = 0$ ir $x + 2y + 3 = 0$ ir kuriam priklauso taškas $A(2, -5)$. Ar šis kampas yra bukas?

Ats.: Taip.

20. Duotos trikampio ABC viršūnės $A(-1, 2)$ ir $C(2, 6)$. Aukštinė, išvesta iš viršūnės A taip pat yra ir šio trikampio pusiaukampinė, o jos lygtis yra $x - 7y + 15 = 0$. Raskite šio trikampio kraštinių lygtis.
Ats.: $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$.
21. Trikampio ABC viršūnė $A(2, -7)$. Raskite šio trikampio kraštinių lygtis, jei aukštinės ir pusiaukraštinės, išvestų iš skirtingų trikampio viršūnių, lygtys atitinkamai yra $3x + y + 11 = 0$ ir $x + 2y + 7 = 0$.
Ats.: $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.
22. Trikampio ABC viršūnė $A(3, -1)$. Raskite šio trikampio kraštinių lygtis, jei pusiaukampinės ir pusiaukraštinės, išvestų iš skirtingų trikampio viršūnių, lygtys atitinkamai yra $x - 4y + 10 = 0$ ir $6x + 10y - 59 = 0$.
Ats.: $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$.