

# Matematinės analizės egzaminas

MIF Informatikos I kursas, 2 semestras, 2010-06-11

Pažymėjimo nr.: .....

Vardas ir pavardė: .....

Kursas: ..... Grupė: .....

Užduočių sąlygos surašytos ant **abiejų** lapo pusių. Iš viso yra 10 užduočių. Visų jų, išskyrus 6-osios, vertė yra **1 balas**. 6-osios užduoties vertė yra **2 balai**. Maksimali galima balų suma yra **10 balų**. Tai reiškia, kad **vieno uždavinio galite nespręsti**. 1 uždavinyje **įrašykite** tai, kas praleista. Įrašykite **šiam** lape (lapą atiduosite kartu su kitais savo sprendimais).

Keletas geometrijos formulių: trikampio plotas yra lygus  $1/2ah$ , kur  $a$  yra trikampio pagrindo ilgis, o  $h$  - jo aukštinė; sferis tūris yra lygus  $4/3\pi r^3$ , kur  $r$  yra sferos spindulys; Skritulio plotas yra lygus  $\pi r^2$ , kur  $r$  yra skritulio spindulys; elipsės plotas yra lygus  $\pi ab$ , čia  $a$  ir  $b$  yra elipsės pusašių ilgiai.

**Sėkmės!**

1. *Skaičių ..... vadiname funkcijos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  .....  
intervale  $[a, b]$ , jei  $\forall \delta > 0 \exists$  ..... , kad  $|S(f, P, \xi) - J| < \dots$  , kai  $|P| < \varepsilon$ .  
Čia  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , kur .....  $< x_1$  .....  $< b$ , yra in-  
tervalo  $[a, b]$  ..... , o  $|P| = \dots$  yra skaidinio di-  
ametros. Skaičių rinkinį  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  vadiname tarpiniu skaidiniu, jei  
..... .  $S(f, P, \xi)$  yra funkcijos  $f$  ..... ,  
atitinkanti ..... ir jo tarpinį .....  $\xi$ :*

$$S(f, P, \xi) = \dots$$

2. *Teigiamųjų eilučių konvergavimo palyginimo požymiai (be įrodymo).*

3. *Įrodykite, kad laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai  $\forall x : |x - a| < R$  ir diverguoja  $\forall x : |x - a| > R$ , kur  $a$  yra laipsninės eilutės centras, o  $R$  - jos konvergavimo spindulys. Ką galima pasakyti apie laipsninės eilutės konvergavimą kai  $x : |x - a| = R$ ?*

4. *Įrodykite Niutono-Leibnico formulę.*

5. Raskite funkcijos  $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (1 + \sin^2 x)^{\ln y}$$

pirmosios eilės dalines išvestines.

6. Raskite aibės, kurią apriboja paviršių  $S_1$ ,  $S_2$  bei  $S_3$  dalys, turį, jei

$$S_1 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \right\},$$

$$S_2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\},$$

$$S_3 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = a \right\}, \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

7. Funkciją

$$xe^{-x^5}$$

užrašykite kaip laipsninės eilutės su centru taške 0 sumą.

8. Naudodami netiesioginio integralo konvergavimo bei jo reikšmės apibrėžimus, įrodykite, kad integralas

$$\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x - 15}$$

konverguoja ir raskite jo reikšmę.

9. Pateikite po vieną pavyzdį:

1. Funkcijos ir jos pirmąsias funkcijos;
2. Dviejų kintamųjų funkcijos;
3. Analizinės taško 0 aplinkoje funkcijos;
4. Integruojamosios funkcijos;
5. Racionaliosios dvimačio argumento funkcijos  $R(x, y)$ .

10. Nurodykite ar šie teiginiai yra teisingi (atsakymą pagrįskite):

1. Eilutės  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  narius galima perstatyti taip, kad suma būtų lygi 2010.
2. Kokia tvarka beužrašytum eilutės  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  narius, jos suma nesikeis.
3. Kadangi  $\forall a > 0 \quad |x^2 + y^2| < a$  su visais  $(x, y) : |(x, y) - (0, 0)| < \sqrt{a}$ , tai  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) = 0$
- 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(e^{-2} - 1)^n}{n} = -2$$

5. Integralo  $\int_{-2}^2 \sqrt[5]{x^2} dx$  reikšmę galima rasti naudojant kintamojo keitinį  $t = x^{\frac{2}{5}}$ . Tuomet:

$$\int_{-2}^2 \sqrt[5]{x^2} dx = \frac{5}{2} \int_{\sqrt[5]{4}}^{\sqrt[5]{4}} t t^{\frac{3}{2}} dt = 0$$

Parengė A.Lenkšas