Tiesiniai atvaizdžiai

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

2015 m. sausio 13 d.

Turinys

Tiesinis atvaizdis

Tiesinę erdvę V virš kūno sutarkime žymėti (V, k), jos nulinį elementą – O_V. Sakykime, (V, k) ir (W, k) tiesinės erdvės, O_V, O_W – jų nuliniai elementai.

Apibrėžimas 1

Atvaizdis $f : V \to W$ yra vadinamas **tiesiniu atvaizdžiu**, jei bet kuriems $\alpha \in k$, v, v_1, $v_2 \in V$,

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$;
2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

Šias sąlygas galima pakeisti viena sąlyga.

Apibrėžimas 2

Atvaizdis $f : V \to W$ yra vadinamas tiesiniu atvaizdžiu, jei bet kuriems $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$,

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Tiesinis atvaizdis

Visų tiesinių atvaizdžių $f : V \to W$ aibę pažymėkime $L_k(V, W)$ arba $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

Teiginys 3

Tegul (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės, O_V, O_W – jų nuliniai elementai, $f : V \to W$ – tiesinis atvaizdis. Tada

1. $f(O_V) = O_W$;
2. *Kiekvienam* $v \in V$, $f(-v) = -f(v)$.

Įrodymas.

1. Remiantis tiesinio atvaizdžio apibrėžimu,

$$f(O_V) = f(O_V + O_V) = f(O_V) + f(O_V) \Rightarrow f(O_V) = O_W.$$

2. Remiantis tiesinio atvaizdžio apibrėžimu,

$$O_W = f(O_V) = f(v + (-v)) = f(v) + f(-v) \Rightarrow f(-v) = -f(v).$$

Tiesinių atvaizdžių suma

Tegul $f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ – tiesiniai atvaizdžiai. Atvaizdis

$$f + g : V \to W, \ (f+g)(v) = f(v) + g(v), \ v \in V,$$

vadinamas tiesinių atvaizdžių f ir g **suma**.

Teiginys 4

Tiesinių atvaizdžių $f, g \in Hom_k(V, W)$, suma $f + g$ taip pat yra tiesinis atvaizdis, t. y. $f + g \in Hom_k(V, W)$.

Įrodymas.

Tegul $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tada

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) = \\ &= \alpha_1 (f(v_1) + g(v_1)) + \alpha_2 (f(v_2) + g(v_2)) = \\ &= \alpha_1 (f+g)(v_1) + \alpha_2 (f+g)(v_2).\end{aligned}$$

□

Tiesinio atvaizdžio daugyba iš skaičiaus

Tegul $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ – tiesinis atvaizdis, $\mu \in k$. Atvaizdis

$$\mu f : V \to W, \ (\mu f)(v) = \mu f(v), \ v \in V,$$

vadinamas **skaičiaus μ ir tiesinio atvaizdžio f sandauga**.

Teiginys 5

Skaičiaus $\mu \in k$ ir tiesinio atvaizdžio $f \in Hom_k(V, W)$ sandauga μf taip pat yra tiesinis atvaizdis, t. y. $\mu f \in Hom_k(V, W)$.

Įrodymas.

Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tada

$$(\mu f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \mu f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$$

$$= \mu(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) = \alpha_1(\mu f)(v_1) + \alpha_2(\mu f)(v_2).$$

$\square$

Tiesinių atvaizdžių sandauga

Teiginys 6

Jei atvaizdžiai $f : V \to W$ ir $g : W \to Z$ yra tiesiniai, tai atvaizdis $g \circ f : V \to Z$ yra tiesinis.

Įrodymas.

Tegul $\alpha_1, \alpha_2 \in k$, v_1, $v_2 \in V$. Tada

$$(g \circ f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = g(f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) =$$
$$= g(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) = \alpha_1 g(f(v_1)) + \alpha_2 g(f(v_2)) =$$
$$= \alpha_1 (g \circ f)(v_1) + \alpha_2 (g \circ f)(v_2).$$

$\square$

Transformacija

Apibrėžimas 7

Jeigu tiesinės erdvės V ir W sutampa, ($V = W$, $m = n$), tai atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas erdvės V **tiesine transformacija**.

Pavyzdys 8

Atvaizdis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - y)$ yra erdvės $\mathbb{R}^2$ tiesinė transformacija.

Pavyzdys 9

Nagrinėkime tiesinę erdvę

$$\mathbb{R}_2[t] = \{a \in \mathbb{R}[t] : \deg a \leqslant 2\}.$$

Atvaizdis $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, $f(a(t)) = a'(t)$ yra erdvės $\mathbb{R}_2[t]$ tiesinė transformacija.

Tiesinio atvaizdžio matrica

Sakykime, (V, k) ir (W, k) – tiesinės erdvės virš kūno k;
$f : V \to W$, – tiesinis atvaizdis;
$v_1, v_2, \ldots, v_m$ – erdvės V bazė;
$w_1, w_2, \ldots, w_n$ – erdvės W bazė;
Išreikškime bazinių vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vaizdus erdvės W baziniais vektoriais:

$$\begin{array}{ll} f(v_1) & = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \cdots + \alpha_{1n} w_n \\ f(v_2) & = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \cdots + \alpha_{2n} w_n \\ \quad \ldots & \qquad\qquad\qquad \ldots \\ f(v_m) & = \alpha_{m1} w_1 + \alpha_{m2} w_2 + \cdots + \alpha_{mn} w_n. \end{array}$$

Surašę koordinates α_{ij} į $m \times n$ lentelę, gauname **tiesinio atvaizdžio f matricą** nurodytose bazėse:

Tiesinio atvaizdžio matrica

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Žinodami tiesinio atvaizdžio matricą, galime suskaičiuoti bet kurio vektoriaus $v \in V$ vaizdą $f(v)$. Tarkime, kad

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_m v_m,$$

t. y. vektoriaus v koordinatės bazėje v_1, v_2, ..., v_m yra $v = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$. Tada vektoriaus v vaizdo

$$f(v) = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \cdots + \gamma_n w_n$$

koordinatės $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ erdvės W bazėje w_1, w_2, ..., w_n apskaičiuojamos taip:

Tiesinio atvaizdžio matrica

$$f(v) = vA = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys 10

Tiesinis atvaizdis f trimatės erdvės V bazinius vektorius v_1, v_2, v_3 atvaizduoja į dvimatę erdvę W:

$$\begin{array}{rcrcr} f(v_1) & = & -w_1 & + & 4w_2, \\ f(v_2) & = & 5w_1 & + & 3w_2, \\ f(v_3) & = & 2w_1 & - & 5w_2, \end{array}$$

kur w_1, w_2 – erdvės W bazė. Užrašysime tiesinio atvaizdžio matricą ir suskaičiuosime vektoriaus $v = 7v_1 - 2v_2 - v_3$ vaizdą $f(v)$.

Tiesinio atvaizdžio matrica

Sprendimas.

Surašę erdvės W bazinių vektorių v_1, v_2, v_3 vaizdų koordinates, gauname 3×2 matricą:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vektoriaus v koordinatės bazėje v_1, v_2, v_3 yra $v = (7, -2, -1)$, todėl atlikę matricų daugybos veiksmus, gauname

$$f(v) = vA = (7, -2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = (-19, 27).$$

Taigi $f(v) = -19w_1 + 27w_2$. $\square$

Tiesinio atvaizdžio matrica

Pastaba. Tiesinės transformacijos $f : V \to V$ atveju $(V = W)$ vektoriaus v ir jo vaizdo $f(v)$ koordinatės skaičiuojamos toje pačioje erdvės V bazėje, t. y. $w_1 = v_1, \dots, w_n = v_n$.

Pavyzdys 11

Tiesinės transformacijos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - y)$ matrica standartinėje $\mathbb{R}^2$ bazėje $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ yra

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

nes

$$f(e_1) = (2, 1) = 2e_1 + e_2$$
$$f(e_2) = (1, -1) = e_1 - e_2$$

Teiginys 12

Tegul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *– tiesinės erdvės* V *virš kūno* k *bazė, o* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *– bet kokia erdvės* V *vektorių šeima. Tada egzistuoja vienintelė erdvės* V *tiesinė transformacija* f*, tenkinanti sąlygas*

$$f(v_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Įrodymas

Apibrėžkime atvaizdį $f : V \to V$: kiekvienam $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$,

$$f(v) = f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) := x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n.$$

Nesunku įsitikinti, kad atvaizdis f yra erdvės V tiesinė transformacija, tenkinanti (1) sąlygą.
Dabar tarkime, kad $g : V \to V$ – bet kuri kita erdvės V tiesinė transformacija, tenkinanti (1) sąlygą.

Tada kiekvienam $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in V$,

$$f(v) = f(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n =$$
$$x_1g(v_1) + \cdots + x_ng(v_n) = g(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = g(v),$$

t. y. tiesinės transformacijos f ir g sutampa. □

Išvada 13

Egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis tarp n-matės tiesinės erdvės V virš kūno k tiesinių transformacijų aibės ir $n \times n$ matricų su koeficientais iš k aibės $M_n(k)$.

Tegul V ir W – baigtinės dimensijos tiesinės erdvės virš kūno k.

Teorema 14

Tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$ matricą erdvės V bazėje $v_1, \ldots, v_n$ ir erdvės W bazėje $w_1, \ldots, w_m$ pažymėkime A, matricą erdvės V bazėje $v'_1, \ldots, v'_n$ ir erdvės W bazėje $w'_1, \ldots, w'_m$ – A'. Tada

$$A' = TAR^{-1},$$

kur T – perėjimo matrica iš bazės $v_1, \ldots, v_n$ į bazę $v'_1, \ldots, v'_n$, o R – perėjimo matrica iš bazės $w_1, \ldots, w_m$ į bazę $w'_1, \ldots, w'_m$.

Įrodymas

Kadangi T ir R – perėjimo matricos, tai

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_m' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Kadangi A ir A' – atvaizdžio f matricos, tai

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(v_1') \\ \vdots \\ f(v_n') \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_m' \end{pmatrix} \tag{3}$$

Iš (2) ir (3) išplaukia

$$\begin{pmatrix} f(v_1') \\ \vdots \\ f(v_n') \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = TA \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

Kita vertus, remiantis (2),

$$\begin{pmatrix} f(v_1') \\ \vdots \\ f(v_n') \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_m' \end{pmatrix} = A'R \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Iš paskutinių dviejų lygybių išplaukia

$$TA \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = A'R \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Iš čia gauname lygybę $TA = A'R$, t. y. $A' = TAR^{-1}$. $\square$

Išvada 15

Tiesinės erdvės V virš kūno k tiesinės transformacijos $f : V \to V$ matricą A bazėje $v_1, \ldots, v_n$ su tos transformacijos matrica A' bazėje $v_1', \ldots, v_n'$ sieja lygybė

$$A' = TAT^{-1},$$

čia T – perėjimo matrica iš bazės $v_1, \ldots, v_n$ į $v_1', \ldots, v_n'$ bazę .

Apibrėžimas 16

Matrica $A \in M_n(k)$ vadinama **panašia** į matricą $B \in M_n(k)$ jei egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $T \in M_n(k)$, kad $B = TAT^{-1}$.

Pastebėsime, kad

$$B = TAT^{-1} \Rightarrow A = T^{-1}BT,$$

t. y., jei maica A panaši į matricą B, tai matrica B panaši į matricą A.

Išvada 17

Keičiant tiesinės erdvės bazę, tiesinės transformacijos matrica keičiama į jai panašią matricą.

Išvada 18

Panašių matricų determinantai yra lygūs.

Įrodymas.

Tarkime, kad matrica $A \in M_n(k)$ panaši į matricą $B \in M_n(k)$. Tada egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $T \in M_n(k)$, kad $B = TAT^{-1}$. Skaičiuojame determinantą:

$$\det(B) = \det(TAT^{-1}) = \det(T)\det(A)\det(T^{-1}) = \det(T)\det(A)\frac{1}{\det(T)} = \det(A).$$

□

Teiginys 19

Tegul $A, B \in M_n(k)$, $\det(B) \neq 0$. *Tada*

$$rg(AB) = rg(BA) = rg(A).$$

Išvada 20

Panašių matricų rangai lygūs.

Įrodymas.

Tarkime, kad matrica $A \in M_n(k)$ panaši į matricą $B \in M_n(k)$. Tada egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $T \in M_n(k)$, kad $B = TAT^{-1}$. Skaičiuojame rangą:

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(TAT^{-1}) = \mathrm{rg}(TA) = \mathrm{rg}(A).$$

$\square$

Paskutinės dvi išvados leidžia apibrėžti tiesinės transformacijos determinanto ir rango sąvokas.

Apibrėžimas 21

Tiesinės transformacijos f **determinantu** $|f|$ vadinamas jos matricos determinantas. Transformacijos f **rangu** $\mathrm{rg}(f)$ vadinamas jos matricos rangas.

Teiginys 22

Tiesinės erdvės V tiesinių transformacijų sumos matrica bet kokioje šios erdvės bazėje lygi tų transformacijų matricų sumai toje pačioje bazėje.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

Teiginys 23

Tarkime, kad tiesinių transformacijų $f : V \to V$ ir $g : V \to V$ matricos tiesinės erdvės V bazėje $v_1, \ldots, v_n$ yra atitinkamai A ir B. Tada transformacijos $f \circ g$ matrica bazėje $v_1, \ldots, v_n$ yra BA.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

Teiginys 24

Skaičiaus ir tiesinės transformacijos sandaugos matrica bet kokioje bazėje lygi to skaičiaus ir transformacijos matricos toje pačioje bazėje sandaugai.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.