PRATARMĖ

Matematinės analizės uždavinynų lietuvių kalba yra labai mažai. Šis uždavinynas šiek tiek užpildys minėtąją spragą. Jo pagrindas yra autoriaus daugelį metų vestos pratybos Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto studentams.

Uždavinyne be skaičiavimo užduočių nemažai yra įrodymo užduočių. Tai labai aktualu dabar, kai mokyklose beveik niekas neįrodoma. Dalis užduočių yra vadinamosios "kontraužduotys". Užduočių tarpe yra ir pakankamai sunkių. Uždavinynas paruoštas pagal autoriaus vadovėlio "Matematinė analizė I" teorinę medžiagą. Užduotys formuluojamos tiksliai ir gana sklandžiai.

Uždavinynas skiriamas pirmiausia matematikos fakultetų studentams, be to, visiems, besidomintiems matematinės analizės gilesnėmis žiniomis.

E. Misevičius

I. REALIEJI SKAIČIAI

I.1. Veiksmai su aibėmis.

1.1. Apibrėžimai. *Aibės* sąvoka yra pirminė ir neapibrėžiama. Aibės sinonimais naudojami terminai: *sankaupa, šeima. klasė.* Objektai, kurie sudaro aibę, yra vadinami tos aibės *elementais* arba *taškais.* Tai, kad *elementas* a priklauso aibei A, yra žymima $a \in A$ arba $A \ni a$. Jeigu elementas a nepriklauso aibei A, tai žymima

$$a \overline{\in} A \quad \text{arba} \quad a \notin A.$$

Jeigu visi aibės A elementai $a_1, ..., a_n, ...$, yra žinomi, tai žymima

$$A = \{a_1, ..., a_n, ...\}.$$

Jeigu yra žinoma aibės A elementų kuri nors savybė P, tai žymima

$$A = \big\{a : P(a)\big\}.$$

Aibė, neturinti nė vieno elemento, vadinama *tuščiąja* ir žymima $\emptyset$.

Aibė, kurios elementų skaičius yra baigtinis, vadinama *baigtine.* Apibrėšime, kad tuščioji aibė yra baigtinė. Aibė, sudaryta iš vieno elemento, vadinama *vienaelemente.* Aibė, turinti be galo daug elementų, vadinama *begaline.*

Kai kurie išsireiškimai matematikoje yra žymimi tam tikrais simboliais, kurie vadinami *loginiais ženklais.* Nurodysime keletą iš jų:

$\Rightarrow$ — "išplaukia";
$\Leftrightarrow$ — "tada ir tik tada" arba "būtina ir pakankama";
$\forall$ — "kiekvienam";
$\exists$ — "egzistuoja";
$:=$ arba $\stackrel{\text{def}}{=}$ — "lygu pagal apibrėžimą".

Kai kurios aibės žymimos tokiais simboliais:

$\mathbb{N}$ — natūraliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Z}$ — sveikųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Q}$ — racionaliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}$ — realiųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}_+$ — teigiamųjų skaičių aibė.

Sakykime, $A \subset X$, $B \subset X$, čia X – bet kuri aibė ir teisingas sąryšis

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Tuomet sakoma, kad aibė A yra aibės B *poaibis* ir žymima

$$A \subset B \quad arba \quad B \supset A.$$

Jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai aibės A ir B vadinamos *lygiomis* ir žymima $A = B$. Priešingu atveju aibės vadinamos *nelygiomis* ir žymima $A \neq B$.

Jeigu $A \neq \emptyset$, $A \subset B$, ir $\exists b \in B:\ b \overline{\in} A$, tai aibė A yra vadinama *tikriniu* aibės B poaibiu.

Aibė $A \cup B := \{x \in X:\ x \in A$ arba $x \in B\}$ vadinama *aibių* A ir B *sąjunga*.

Aibė $A \cap B := \{x \in X:\ x \in A$ ir $x \in B\}$ vadinama *aibių* A ir B *sankirta*.

Jeigu $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, tai aibės A ir B vadinamos *nesikertančiomis*.

Aibė $A \setminus B := \{x \in X:\ x \in A$ ir $x \notin B\}$ vadinama *aibių* A ir B *skirtumu*.

Sakykime, $\{A_t : t \in T\}$ yra aibių šeima, čia T – baigtinė arba begalinė indeksų aibė ir $\forall t \in T\colon A_t \subset X$. Tuomet yra apibrėžiamos aibės: šeimos *sąjunga*

$$\bigcup_{t\in T} A_t := \{x : \exists t_0 \in T, x \in A_{t_0}\}$$

ir sankirta

$$\bigcap_{t\in T} A_t := \{x : \forall t \in T, x \in A_t\}.$$

Jeigu $T = \{1, 2, ..., n\}$ arba $T = \mathbb{N}$, tai sąjunga ir sankirta žymima atitinkamai $\cup_{i=1}^{n} A_i$ ir $\cap_{i=1}^{n} A_i$ bei $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ir $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Jeigu $A \subset X$, tai aibė

$$A^c := C_X A := CA := X \setminus A$$

yra vadinama *aibės* A *papildiniu* aibėje X.

Aibė

$$A \times B := \{(a, b)\colon a \in A, b \in B\},$$

čia $A \subset X$, $B \subset Y$ ir X bei Y – bet kurios aibės, yra vadinama aibių A ir B *dekartine sandauga*. Analogiškai apibrėžiama aibių baigtinės šeimos $\{A_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dekartinė sandauga $\times_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times \cdots \times A_n$. Jeigu $A_1 = A_2 = \cdots = A_n =: A$, tai dekartinė sandauga žymima A^n. Taigi $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pavyzdžiai. 1) Rasime aibę

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \forall x \exists y \in [1; +\infty), 2^x = y\}.$$

Išsprendę x atžvilgiu lygtį $2^x = y$, rasime $x = \log_2 y$, $y \geqslant 1$. Taigi $x \geqslant 0$. Todėl aibė $A \subset [0; +\infty)$.

2) Sakykime, aibės

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}.$$

Rasime aibes $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Aibė A yra skritulys plokštumoje su centru $(0,0)$ ir spinduliu 1, o aibė B – pirmasis ir trečiasis ketvirčiai. Todėl

$A \cup B = B \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1, xy < 0\}$,

$A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1, xy \geqslant 0\}$,

$A \setminus B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1, xy < 0\}$,

$B \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1, xy \geqslant 0\}$.

I.1.1. Sakykime, aibė A yra sudaryta iš visų skaičiaus 15 daliklių, aibė B – iš pirminių skaičių, mažesnių už 10, aibė C – iš lyginių skaičių, mažesnių už devynis. Raskite aibes $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $(A \cup C) \cap B$, $A \cap B \cap C$.

I.1.2. Sakykime, X yra bet kuri aibė. Raskite tokias aibes $A \subset X$, $B \subset X$, kad $\forall C \subset X$: $C \cap A = C \cup B$.

I.1.3. Turistų grupę sudaro 100 asmenų, jų tarpe 70 moka angliškai, 45 – prancūziškai ir 23 – ir angliškai, ir prancūziškai. Raskite skaičių turistų, kurie nemoka nei angliškai, nei prancūziškai.

I.1.4. Raskite aibę $A \cap B$, jeigu $A = \{4n + 2 \colon n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

I.1.5. Sakykime, aibės $A \subset X$, $B \subset X$, čia X – bet kuri aibė. Įrodykite, kad lygybės: 1) $A \cup B = B$, 2) $A \cap B = A$, yra teisingos tada ir tik tada, kai $A \subset B$.

I.1.6. Sakykime, aibės $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, čia X – bet kuri aibė. Įrodykite, kad sąryšis $A \setminus B \subset C$ yra teisingas tada ir tik tada, kai $A \subset B \cup C$.

I.1.7. Sakykime, aibės $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, čia X – bet kuri aibė. Įrodykite, kad teisingos lygybės: 1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 2) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; 3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

I.1.8. Sakykime, T yra kuri nors indeksų aibė ir $\forall t \in T \colon A_t \subset X$. Įrodykite *aibių dualumo* savybes:

$$1)\ C\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcap_{t \in T} CA_t, \qquad 2)\ C\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} CA_t.$$

I.1.9. Sakykime, aibės A, B, C ir D yra aibės X poaibiai. Raskite sąryšį $U \subset V$, $V \subset U$ arba $U = V$ tarp aibių U ir V, jeigu:

1) $U := A \setminus (B \cup C)$, $\quad V := (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
2) $U := A \times B) \cup (C \times B)$, $\quad V := (A \cup C) \times B$;
3) $U := (A \cap B) \setminus C$, $\quad V := (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

I.1.10. Sakykime, aibės

$A = \{x \in \mathbb{N} \colon x \in (2;6]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x \in (1;4)\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \colon x^2 - 4 = 0\}$.

Raskite aibes: 1) $A \cap B \cap C$, 2) $A \cup B \cup C$, 3) $B \times C$, 4) $C \times B$.

I.1.11. Sakykime, aibėje $A \subset X$ yra n elementų, aibėje $B \subset X$ – m elementų, aibėje $A \cap B$ – k elementų, čia X – bet kuri aibė, $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$. Raskite elementų kiekį aibėje: 1) $A \cup B$, 2) $A \times B$.

I.1.12. Raskite aibę $A \subset \mathbb{R}$, jeigu:

1) $\forall a \in A\ \exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2ax + a = 0$;

2) $\forall a \in A\ \exists x \in \mathbb{R}: 3a + 2ax - x^2 > 0$;

3) $\forall a \in A\ \exists b \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 2ax + b^2 + 1 < 0$.

I.1.13. Raskite aibes $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ bei $B \setminus A$ ir jas pavaizduokite, jeigu:

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 > y^3\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y^2\}$;

2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$.

I.1.14. Sakykime, aibės $A_{mn} = \{x \in \mathbb{R} : m < x < m + n\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Raskite aibes:

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; 2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; 3) $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

4) $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; 5) $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; 6) $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$.

I.1.15. Raskite aibes $\cup_{t \in T} A_t$, $\cap_{t \in T} A_t$, jeigu: 1) $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = ty\}$: $a) T = \mathbb{R}_+$; $b) T = [-1; 1]$;

2) $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = tx^2\}, T = \mathbb{R}_+$.

I.2. Funkcijos sąvoka.

2.1. Apibrėžimai. Sakykime, X ir Y yra dvi aibės ir nurodytas dėsnis (taisyklė) f, kuris kiekvienam $x \in X$ priskiria vienintelį $y \in Y$. Tas dėsnis f yra vadinamas aibės X *atvaizdžiu aibėje* Y ir žymima

$$f : X \to Y, \quad f : X \ni x \to f(x) \in Y, \quad y := f(x), x \in X.$$

Atvaizdžio sinonimais yra naudojami terminai: *funkcija, operatorius, atitiktis, transformacija.* Elementas $y = f(x)$ yra vadinamas funkcijos f *reikšme taške* x, aibė X – funkcijos f *apibrėžimo sritimi* (žymima $\mathcal{D}(f)$), aibė Y – funkcijos f *kitimo sritimi*, aibė $R(f) := \{f(x) \in Y : x \in X\}$ – funkcijos f *reikšmių sritimi*, aibė $G(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ – funkcijos f *grafiku.*

Jeigu aibės $A \subset X$, $B \subset Y$, tai aibė $f(A) := \{f(x) \in Y : x \in A\}$ yra vadinama aibės A *vaizdu*, o aibė

$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ – aibės B *pirmavaizdžiu.* Jeigu aibė B yra vienaelementė, t.y. $B = \{y\}$, tai aibė $f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}$ yra vadinama elemento y *pirmavaizdžiu.*

Jeigu $f(X) = Y$, tai atvaizdis f yra vadinamas aibės X *siurjekcija* į aibę Y arba aibės X atvaizdžiu į aibę Y.

Jeigu $\forall (x_1, x_2) \in X^2$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$, tai atvaizdis f yra vadinamas aibės X *injekcija* aibėje Y.

Jeigu atvaizdis $f : X \to Y$ yra ir injekcija, ir siurjekcija, tai jis vadinamas *bijekcija* arba *abipusiškai vienareikšmiu* atvaizdžiu ir žymima $f : X \leftrightarrows Y$.

Jeigu funkcijos $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ ir $\forall x \in X$: $f(x) = g(x)$, tai jos vadinamos *lygiomis* ir žymima $f = g$ aibėje X.

Jeigu funkcija $f : X \to Y$, $A \subset X$, funkcija $g : A \to Y$ ir $\forall x \in A$: $g(x) = f(x)$, tai funkcija g yra vadinama funkcijos f *siauriniu* aibėje A ir žymima $g =: f/_A$. Pati funkcija f yra vadinama funkcijos g tęsiniu aibėje X.

Jeigu funkcijos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, tai funkcija $g \circ f$: $X \ni x \to g\big(f(x)\big) \in Z$ yra vadinama funkcijų g ir f *kompozicija* arba *sudėtine* funkcija.

Jeigu funkcija $f : X \leftrightarrows Y$, tai funkcija $f^{-1} : Y \ni f(x) \to x \in X$ yra vadinama funkcijos f *atvirkštine.*

Funkcija $f : \mathbb{N} \to X$ yra vadinama *seka* aibėje X ir žymima (x_n) arba $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, čia dydis $x_n := f(n)$ yra vadinamas n-uoju sekos nariu.

Pastaba. Jeigu funkcijos apibrėžimo sritis nenurodyta, tai ja laikoma plačiausioji aibė, kurioje ta funkcija turi prasmę.

Pavyzdžiai. 1) Rasime funkcijos f, $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\lg\, \cos\, x}}$, apibrėžimo sritį.

Apibrėžimo sritis yra aibė

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \cos\, x < 1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\Big(2n\pi - \frac{\pi}{2}; 2n\pi\Big) \cup \Big(2n\pi; 2n\pi + \frac{\pi}{2}\Big) \Big).$$

2) Rasime funkcijos f, $f(x) = 4^x - 2^x + 1$, reikšmių sritį. Funkcijos f apibrėžimo sritis $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Kadangi rodiklinės funkcijos $t, t(x) := 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, reikšmių sritis yra intervalas $\mathbb{R}_+$ ir funkcijos g, $g(t) := t^2 - t + 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, grafiko viršūnė yra taškas $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, tai funkcijos f reikšmių sritis yra intervalas $R(f) = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

3) Duota funkcija f : $\mathbb{Z}^2 \ni (m,n) \to (m,0) \in \mathbb{Z}^2$ ir aibės $A = \big\{(0,n) : n \in \mathbb{Z}\big\}$, $B = \big\{(m,0) : m \in \mathbb{N}\big\}$. Rasime vaizdą $f(A)$ ir pirmavaizdį $f^{-1}(B)$.

Pagal funkcijos f apibrėžimą

$$f(A) = \big\{(0,0)\big\}, \quad f^{-1}(B) = \big\{(m,n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\big\}.$$

4) Rasime funkcijų $f, f(x) := \lg\, x^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ir $g, g(x) := \sin\, x$, $x \in \mathbb{R}$, kompozicijas $f \circ g$ ir $g \circ f$ bei jų apibrėžimo sritis.

Kadangi

$$(f \circ g)(x) = \lg \sin^2 x,$$

tai

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \sin^2 x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \big(n\pi; (n+1)\pi\big).$$

Analogiškai rastume

$$(g \circ f)(x) = \sin \lg x^2, \qquad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5) Duota funkcija $f : \mathbb{R} \ni x \to x^2 - 4x + 2 \in \mathbb{R}$. Įrodysime, kad 1) reikšmių sritis $R(f)$ yra tikrinis tiesės $\mathbb{R}$ poaibis; 2) funkcija f yra siurjekcija, bet nėra injekcija; 3) funkcijos f siaurinys aibėje $A := (-\infty; 2]$ $f\big|_A : A \to R(f)$ yra bijekcija. Be to, rasime siaurinio atvirkštinę funkciją $g := \big(f\big|_A\big)^{-1}$.

1) Funkcijos f grafiko viršūnė yra taškas $(2; -2)$. Todėl funkcijos f reikšmių sritis yra intervalas $R(f) = [-2; +\infty)$, kuris yra tikrinis tiesės $\mathbb{R}$ poaibis.

2) Fiksuokime $y_0 \in (-2; +\infty)$ ir, išsprendę lygtį $f(x) = y_0$, rasime du skirtingus sprendinius

$$x_1 := 2 - \sqrt{2 + y_0}, \quad x_2 := 2 + \sqrt{2 + y_0}.$$

Taigi $\forall y_0 \in (-2, +\infty)$ $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Todėl funkcija $f : \mathbb{R} \to R(f)$ yra siurjekcija, bet nėra injekcija.

3) Sakykime, $y_0 \in [-2; +\infty)$ yra fiksuotas taškas. Tuomet lygtis $f(x) = y_0$, $x \in A$, turi vienintelį sprendinį $x = 2 - \sqrt{2 + y_0}$. Taigi siaurinys g yra bijekcija, t.y. $g : A \leftrightarrows R(f)$. Be to, $x = g^{-1}(y) = 2 - \sqrt{2 + y}$, $y \in R(f)$.

Kadangi funkcijų g ir g^{-1} grafikai sutampa toje pačioje plokštumoje, tai joje yra brėžiamas funkcijos g^{-1}, $g^{-1}(x)$, $x \in R(f)$, grafikas. Jis yra simetrinis tiesės $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ atžvilgiu.

I.2.1. Raskite funkcijos f apibrėžimo sritį, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\arcsin(2 - x)}$; 2) $f(x) = \sqrt{\lg \dfrac{3x - x^2}{x - 1}}$;

3) $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 3x + 2)$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 - 35x - 6x^2}}$.

I.2.2. Raskite funkcijos f reikšmių sritį, jeigu:

1) $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$; 2) $f(x) = \log_3 x + \log_x 3$;

3) $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}, (a; b) \in \mathbb{R}^2, ab > 0$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1}$.

I.2.3. Įrodykite, kad lyginė funkcija neturi atvirkštinės, t.y. ji nėra bijekcija apibrėžimo srityje.

I.2.4. Raskite funkcijas $f\circ g$ ir $g\circ f$ bei jų apibrėžimo sritis, jeigu:

1) $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}$; 2) $f(x)=10^x, g(x)=\lg x$;
3) $f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x}$; 4) $f(x)=x^5, g(x)=x+5$.

I.2.5. Įrodykite, kad funkcija f yra bijekcija ir raskite jos atvirkštinę, jeigu:

1) $f(x)=x^2-1, x\in(-\infty;0]$; 2) $f(x)=\sqrt[4]{x}$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$; 4) $f(x)=x|x|+2x$.

I.2.6. Duota funkcija $f:\mathbb{Z}\ni n\to n(n+1)\in\mathbb{Z}$. Raskite

1)$f^{-1}(\{1\})$; 2)$f^{-1}(\{2\})$;
3)$f^{-1}(\mathbb{N})$; 4)$f^{-1}(A),\ A:=\{-n+1:n\in\mathbb{N}\}$.

I.2.7. Nustatykite, ar funkcija f yra bijekcija, ar injekcija, ar siurjekcija, ar atvaizdis aibėje, jeigu:

1) $f:\mathbb{Z}\ni n\to n^2\in\mathbb{Z}$; 2) $f:\mathbb{Z}^2\ni(m,n)\to(m+1,n)\in\mathbb{Z}^2$;
3) $f:\mathbb{Z}^2\ni(m,n)\to(m+n,m-n)\in\mathbb{Z}^2$;
4) $f:\mathbb{N}^2\ni(m,n)\to\big(m+\frac{1}{2}(m+n-2)\qquad(m+n-1)\big)\in\mathbb{Z}^2$;
5)$f:\mathbb{N}^2\ni(m,n)\to\max\{m,n\}\in\mathbb{N}$.

I.2.8. Sakykime, aibės X ir Y yra sudarytos atitinkamai iš m ir n elementų. Raskite skaičių: 1) funkcijų $f:X\to Y$; 2) injekcijų $f:X\to Y$; 3) bijekcijų $f:X\leftrightarrows Y$.

I.2.9. Nurodykite pavyzdį aibės X ir atvaizdžio $f:X\to X$, kuris būtų siurjekcija, bet ne bijekcija. Išnagrinėkite atvejus, kai aibė X yra baigtinė arba begalinė.

I.3. Matematinė indukcija.

Indukcija yra efektyvus įvairių teiginių įrodymo būdas, pereinant nuo dalinių prie bendrųjų teiginių. Jis pagrįstas natūraliųjų skaičių indukcijos aksioma.

3.1. Matematinės indukcijos teorema. *Sakykime, $T(n)$ yra teiginys, priklausantis nuo natūraliojo argumento n, ir tenkinamos sąlygos:*

1) teiginys $T(1)$ yra teisingas;

2) iš prielaidos, kad teiginys $T(n)$ yra teisingas, kai $n=k$, išplaukia, kad jis teisingas ir, kai $n=k+1$. Tuomet teiginys $T(n)$ yra teisingas $\forall n\in\mathbb{N}$.

3.2. Apibrėžimai. Jeigu $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1; 2; ...; n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, tai apibrėžiami dydžiai

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Skaičiai

$$C_n^k := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad k \in \{1; 2; ...; n\},$$
$$C_n^\circ := 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

yra vadinami *binominiais koeficientais*, čia $0! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pavyzdžiai. 1) Indukcijos metodu įrodysime, kad $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x_k \in \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, teisinga nelygybė

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant n. \tag{1}$$

► Jeigu $n = 1$, tai (1) nelygybė yra teisinga, nes tada $x_1 = 1$. Sakykime, kad ji teisinga, kai $n = k$, t.y., jeigu $\prod_{i=1}^{k} x_i = 1$, tai

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant k. \tag{2}$$

Įrodysime, kad iš sąlygos $\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$ išplaukia nelygybė

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i \geqslant k + 1. \tag{3}$$

Jeigu $x_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, tai $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = k + 1$ ir (3) nelygybė teisinga. Sakykime, $\exists i_0 : x_{i_0} > 1$. Tuomet $\exists i_1 : x_{i_0} \cdot x_{i_1} = 1$. Kad būtų paprasčiau laikysime, jog $i_0 = k$, $i_1 = k + 1$. Kadangi $\prod_{i=1}^{k-1} x_i (x_k x_{k+1}) = 1$, tai, naudojant (2) nelygybę, kuri teisinga pagal prielaidą, $\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \cdot x_{k+1} \geqslant k$. Todėl

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k x_{k+1} - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) + 1 > k + 1,$$

nes $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$. Taigi (3) nelygybė yra teisinga. Remiantis indukcijos teorema, (1) sąryšis yra teisingas. ◄

2) Įrodysime, kad $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x_k \in [0; +\infty)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, teisinga nelygybė

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \tag{4}$$

t.y. aritmetinis skaičių x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, vidurkis yra nemažesnis už jų geometrinį vidurkį.

▶ Jeigu $\exists i_0 : x_{i_0} = 0$, tai (4) nelygybė yra teisinga: geometrinis vidurkis lygus 0, o aritmetinis vidurkis neneigiamas.

Sakykime, $\forall k : x_k > 0$. Tada skaičiai $\frac{x_k}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tenkina 1) pavyzdžio sąlygas. Todėl teisinga nelygybė

$$n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

iš kurios išplaukia (4) sąryšis. ◀

3) Rasime sumą $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

Remiantis binominių koeficientų apibrėžimu,

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)\cdot k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}, 0 \leqslant k \leqslant n, n \in \mathbb{N}.$$

Binomo formulėje

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

imdami $a = b = 1$, gausime

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Todėl

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \Big(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k - C_{n+1}^0 \Big) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1).$$

I.3.1. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad teisingos nelygybės:

1) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$;

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

3) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 : 2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$;

4) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 : \frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} < n$;

5) $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}} < \sqrt{n}+1;$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2: 2^n \cdot n! < n^n.$

I.3.2. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad teisingos lygybės:

1) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1};$

2) $\forall n \in \mathbb{N}: \prod\limits_{k=1}^{n} \Big(1-\frac{1}{(k+1)^2}\Big) = \frac{n+2}{2n+2};$

3) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

4) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$

5) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$

6) $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ šaknų}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}};$

7) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{n+1};$

8) $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{3+33+\cdots+33\cdots3}_{n \text{ dėmenų}} = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$

I.3.3. Raskite sumas:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in [0; 2\pi];$ 2) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx, \ n \in \mathbb{N}, x \in [0; 2\pi];$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x, \ x \in [0; 2\pi];$ 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x, \ x \in [0; 2\pi];$

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)C_n^k;$ 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k}.$

I.3.4. Raskite dėstinio koeficientą prie x^k, jeigu:

1) $\Big(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big)^{16}, \ k=3;$ 2) $(1-x+x^2)^3, \ k=3;$

3) $(1+2x-3x^2)^4, \ k=4;$ 4) $(1+x^2-x^3)^9, \ k=8;$

5) $\sum\limits_{n=3}^{15} (1+x)^n, \ k=3.$

I.4. Realieji skaičiai.

4.1. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, ir $\exists z \in \mathbb{R}\ \forall x \in E : x \leqslant z$. Tokia aibė E vadinama *iš viršaus aprėžta*, o skaičius z – tos *aibės viršutiniu rėžiu*. Jeigu egzistuoja toks aibės E viršutinis rėžis z_0, jog kiekvienas kitas viršutinis rėžis $z \geqslant z_0$, tai z_0 vadinamas aibės E *tiksliuoju viršutiniu rėžiu* ir žymimas $\sup E := z_0$. Jeigu aibė E neturi nė vieno viršutinio rėžio, tai ji vadinama *iš viršaus neaprėžta* ir jos tikslusis viršutinis rėžis $\sup E := +\infty$. Analogiškai apibrėžiamos sąvokos: iš apačios aprėžta aibė, aibės apatinis rėžis, aibės tikslusis apatinis rėžis $\inf E$, iš apačios neaprėžta aibė. Jeigu aibė E iš apačios neaprėžta, tai $\inf E := -\infty$.

4.2. Tiksliojo viršutinio rėžio aksioma. *Iš viršaus aprėžta aibė turi vienintelį tikslųjį viršutinį rėžį.*

4.3. Apibrėžimai. Jeigu $\sup E \in E$, tai sakoma, kad aibė E *turi didžiausiąjį elementą* $\sup E$, kuris žymimas $\max E := \sup E$. Jeigu $\sup E \notin E$, tai sakoma, kad aibė E *neturi didžiausiojo elemento.*

4.4. Teorema. *Iš apačios aprėžta aibė E turi vienintelį tikslųjį apatinį rėžį* $\inf E = -\sup\{-x : x \in E\}$.

4.5. Apibrėžimai. Analogiškai apibrėžiamos sąvokos: aibė E *turi mažiausiąjį elementą* $\min E := \inf E$ ir *jo neturi.* Jeigu aibė E yra ir iš viršaus, ir iš apačios aprėžta, tai ji vadinama *aprėžta.* Aprėžtasis intervalas vadinamas *baigtiniu*, o neaprėžtasis – *begaliniu.*

Jeigu $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra kurių nors aibių seka ir $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \supset E_{n+1}$, tai ta seka vadinama *įdėtųjų aibių seka.*

4.6. Įdėtųjų intervalų (Kantoro) principas. *Sakykime,* $\{[a_n; b_n] : n \in \mathbb{N}\}$, $[a_n; b_n] \subset \mathbb{R}, a_n \leqslant b_n$, *yra įdėtųjų intervalų seka. Tada*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = [\xi; \eta],$$

čia $\xi := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \eta := \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4.7. Išvada. *Sakykime, tenkinamos Kantoro principo sąlygos. Tuomet*

$$(\xi = \eta) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : b_N - a_N < \varepsilon).$$

4.8. Archimedo principas. $\forall x \in \mathbb{R}_+\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists! k \in \mathbb{Z} :$

$$(k-1)x \leqslant y < kx.$$

4.9. Apibrėžimas. Funkcijos $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $[x] := k-1$, $x \in [k-1; k)$, $k \in \mathbb{Z}$, reikšmė $[x]$ yra vadinama skaičiaus x *sveikąja dalimi.*

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad aibė

$$E := \Big\{(-1)^n\Big(1-\frac{1}{n}\Big) \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\}$$

yra aprėžta ir rasime $\inf E$, $\sup E$ bei $\min E$ ir $\max E$, jeigu jie egzistuoja.

► Pastebėsime, kad $\forall n \in \mathbb{N} : -1 < x_n < 1$, čia

$$x_n := (-1)^n\Big(1-\frac{1}{n}\Big).$$

Taigi aibė E yra aprėžta. Kadangi $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$0 < x_{2k} < x_{2k+2} = 1 - \frac{1}{2k+2} < 1,$$

$$-1 < -1 + \frac{1}{2k+1} = x_{2k+1} < x_{2k-1} \leqslant 0,$$

tai $\sup E = 1$, $\inf E = -1$. Tačiau $\sup E \overline{\in} E$, $\inf E \overline{\in} E$. Todėl aibė E neturi nei didžiausiojo, nei mažiausiojo elementų. ◄

2) Įrodysime, kad nekiekvienos įdėtųjų intervalų sekos $\{(a_n;b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, $(a_n;b_n) \subset \mathbb{R}$, sankirta $\cap_{n=1}^{\infty}(a_n;b_n) \neq \emptyset$.

► Imkime seką $\big\{\big(0;\frac{1}{n}\big) \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$. Kadangi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$, tai $\forall x \in \mathbb{R}_+ : x \overline{\in} \cap_{n=1}^{\infty}\big(0;\frac{1}{n}\big)$. Be to, ir $0 \overline{\in} \cap_{n=1}^{\infty}\big(0;\frac{1}{n}\big)$. Todėl ta sankirta yra tuščia. ◄

Taigi intervalų uždarumas Kantoro principe yra esminė sąlyga.

3) Rasime aibės

$$E := \Big\{\frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1} : t \in \mathbb{R}_+\Big\}$$

sup E, inf E bei max E, min E, jeigu jie egzistuoja.

Kadangi $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$0 \leqslant \big(|a|-|b|\big)^2 = a^2 + b^2 - 2|ab|,$$

tai

$$\frac{|ab|}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2}, \quad a^2+b^2 \neq 0;$$

čia lygybė yra tik tuo atveju, kai $|a| = |b|$. Apibrėžkime $a := \sqrt{t}$, $b := \sqrt{t+1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, ir, naudodami pirmesniąją nelygybę, gausime

$$0 < \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1} < \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Taigi aibė E yra aprėžta. Kadangi funkcijos f, $f(t) := \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, išvestinė

$$f'(t) = \frac{1}{2(2t+1)^2\sqrt{t(t+1)}} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

tai funkcija f didėja intervale $\mathbb{R}_+$. Funkcijos f reikšmės artimuose 0 taškuose bus artimos 0, taigi $\inf E = 0 \overline{\in} E$. Kadangi $f(t) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{2+\frac{1}{t}}$, tai funkcijos f reikšmės "artimuose" $+\infty$ taškuose yra artimos $\frac{1}{2}$. Todėl $\sup E = \frac{1}{2} \overline{\in} E$. Vadinasi, aibė E neturi nei didžiausiojo, nei mažiausiojo elementų.

I.4.1. Raskite aibės E $\sup E$, $\inf E$ bei $\max E$, $\min E$, kai jie egzistuoja, jeigu:

1) $E := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; 2) $E := \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

3) $E := \left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; 4) $E := \left\{\frac{3^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

5) $E := \left\{\frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n) : n \in \mathbb{N}\right\}$; 6) $E := \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}^2\right\}$;

7) $E := \left\{\frac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$; 8) $E := \left\{\frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}^2\right\}$;

9) $E := \left\{\frac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$; 10) $E := \{\sin n : n \in \mathbb{Z}\}$;

11) $E := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^2, m < n\right\}$.

I.4.2. Raskite:

1) $\inf\left\{\sup\left\{\frac{m-n}{m+n} : m \in \mathbb{N}\right\} : n \in \mathbb{N}\right\}$; 2) $\sup\left\{\inf\left\{\frac{m-n}{m+n} : n \in \mathbb{N}\right\} : m \in \mathbb{N}\right\}$;

3) $\sup\left\{\inf\left\{\frac{m}{m+n} : n \in \mathbb{N}\right\} : m \in \mathbb{N}\right\}$; 4) $\inf\left\{\sup\left\{\frac{m}{n+m} : m \in \mathbb{N}\right\} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

I.4.3. Raskite aibės E $\sup E$, $\inf E$ bei $\max E$, $\min E$, kai jie egzistuoja, jeigu:

1) $E := \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}\}$; 2) $E := \{\lg n - [\lg n] : n \in \mathbb{N}\}$;

3) $E := \left\{\sqrt[3]{n} - \left[\sqrt[3]{n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\}$.

I.4.4. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$ ir $F \subset \mathbb{R}$ tenkina sąlygą $E \subset F$. Įrodykite, kad $\sup E \leqslant \sup F$.

I.4.5. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$ ir $F \subset \mathbb{R}$ tenkina sąlygą $\forall x \in E \;\; \exists y \in F : x \leqslant y$. Įrodykite, kad $\sup E \leqslant \sup F$.

I.4.6. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$ ir $F \subset \mathbb{R}$ yra aprėžtos. Įrodykite, kad

$$\sup(E \cup F) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(E \cup F) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

I.4.7. Įrodykite, kad

$$\sup G = \sup E + \sup F, \quad \inf G = \inf E + \inf F,$$

čia $G := \{x + y : x \in E, y \in F\}$.

I.4.8. Sakykime, aibės $E \subset [0;+\infty)$, $F \subset [0;+\infty)$, $G := \{xy : x \in E, y \in F\}$. Įrodykite, kad

$$\inf G = \inf E \cdot \inf F,$$

$$\sup G = \begin{cases} \sup E \cdot \sup F, & \text{kai } \sup E > 0 \text{ ir } \sup F > 0, \\ 0, & \text{kai arba } \sup E = 0, \text{ arba } \sup F = 0. \end{cases}$$

I.4.9. Nurodykite sąryšius tarp aibių $E \subset \mathbb{R}$ ir $F \subset \mathbb{R}$ tiksliųjų rėžių, jeigu 1) $F := \{x^3 : x \in E\}$; 2) $F := \{x^2 : x \in E\}$; 3) $F := \{x + a : x \in E\}$, čia $a \in \mathbb{R}$ – konstanta; 4) $F := \{ax : x \in E\}$, čia $a \in \mathbb{R}$ – konstanta.

I.4.10. Sakykime, funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad

$$\inf(f+g)(E) \geqslant \inf f(E) + \inf g(E), \qquad \sup(f+g)(E) \leqslant \sup f(E) + \sup g(E).$$

I.4.11. Įrodykite, kad $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a-b|), \qquad \max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a-b|).$$

I.4.12. Įrodykite, kad

$$\sup G = \sup E - \inf F,$$

čia aibės $G := \{x - y : x \in E, y \in F\}$, $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$.

I.4.13. Nurodykite pavyzdį įdėtųjų intervalų sekos $([a_n; b_n] : n \in \mathbb{N})$, čia $\forall n \in \mathbb{N} : [a_n; b_n] \subset \mathbb{Q}$, kad būtų $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]\right) \cup \mathbb{Q} = \emptyset$. Taigi Kantoro principas racionaliųjų skaičių aibėje neteisingas.

I.4.14. Nurodykite pavyzdį įdėtųjų intervalų sekos $\big((a_n; b_n) : n \in \mathbb{N}\big)$, čia $\forall n \in \mathbb{N} : (a_n; b_n) \subset \mathbb{R}$, kad būtų $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n; b_n) \neq \emptyset$.

I.4.15. Sakykime, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : [a_n; b_n] \cup [a_m; b_m] \neq \emptyset$, čia $\forall n \in \mathbb{N} : [a_n; b_n] \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset.$$

II. RIBA

II.1. Sekos riba.

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Ribų teorijoje yra naudojamos aibės: *taško* a ε*-aplinka*

$$U(a;\varepsilon) := \begin{cases} (\varepsilon;+\infty), & \text{kai } a=+\infty, \\ (a-\varepsilon;a+\varepsilon), & \text{kai } a\in\mathbb{R}, \\ (-\infty;-\varepsilon), & \text{kai } a=-\infty; \end{cases}$$

taško a *pradurtoji* ε*-aplinka*

$$\dot{U}(a;\varepsilon) := U(a;\varepsilon)\setminus\{a\};$$

taško a ε-aplinka aibėje E

$$U_E(a;\varepsilon) := U(a;\varepsilon)\cap E;$$

taško a pradurtoji ε-aplinka aibėje E

$$\dot{U}_E(a;\varepsilon) := \dot{U}(a;\varepsilon)\cap E;$$

taško $a\in\mathbb{R}$ dešininė ε-aplinka

$$U(a+0;\varepsilon) := [a;a+\varepsilon);$$

taško $a\in\mathbb{R}$ kairinė ε-aplinka

$$U(-0;\varepsilon) := (a-\varepsilon;a].$$

Paskutinės dvi aplinkos vadinamos *vienpusėmis*, o aplinka $U(a;\varepsilon)$, $a\in\mathbb{R}$, — *dvipuse*. Analogiškai apibrėžiamos *taško* $a\in\mathbb{R}$ *pradurtosios vienpusės, vienpusės aibėje* E*, pradurtosios vienpusės aibėje* E ε*-aplinkos*. Taško $a\in\{-\infty;+\infty\}$ aplinka, pradurtoji aplinka ir vienpusė aplinka yra sinonimai.

Sakykime, $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ yra tokia seka tiesėje, kuriai $\exists a\in\overline{\mathbb{R}}\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N:$ $x_n\in U(a;\varepsilon)$. Tuomet sakoma, kad *seka* (x_n) *turi ribą*

$$\lim x_n := a.$$

Jeigu $a\in\mathbb{R}$, tai seka vadinama *konverguojančia*. Jeigu $a\in\{-\infty;+\infty\}$ arba seka ribos neturi, tai ji vadinama *diverguojančia*. Jeigu $a=0$, tai seka vadinama *nykstamąja*.

Seka vadinama *iš viršaus aprėžta, iš apačios aprėžta, aprėžta, iš viršaus neaprėžta, iš apačios neaprėžta, neaprėžta*, jeigu jos reikšmių sritis yra atitinkama aibė.

1.2. Teorema. *Sakykime,* $\exists\lim x_n := a$*. Tada:*

1) riba a yra vienintelė;

2) jeigu $a \in \mathbb{R}$, tai seka aprėžta; jeigu $a \in \{-\infty; +\infty\}$, tai seka neaprėžta.

1.3. Teorema. *Sakykime, $\exists \lim x_n := a$, $\exists \lim y_n := b$. Tada:*

1) jeigu $a < b$, tai $\exists N\ \forall n \geqslant N:\ x_n < y_n$;

2) jeigu $a \neq 0$, tai $\exists N\ \forall n \geqslant N:\ a \cdot x_n > 0$;

3) jeigu $\exists N\ \forall n \geqslant N:\ x_n \leqslant y_n$, tai $a \leqslant b$;

4) jeigu $a = b$ ir $\exists N\ \forall n \geqslant N:\ x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, tai $\exists \lim z_n = a$.

1.4. Teorema. *Sakykime, $\lim x_n := a$, $\lim y_n := b$. Tada:*

1) $\exists \lim(x_n + y_n) = a + b$;

2) $\exists \lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3) $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$;

čia dešiniosios lygybių pusės yra apibrėžtos išplėstinėje tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$.

Taigi ta teorema nenaudojama, kai atitinkamai 1) arba $a = +\infty$, $b = -\infty$, arba $a = -\infty$, $b = +\infty$; 2) arba $a = 0$, $b \in \{-\infty; +\infty\}$, arba $a \in \{-\infty; +\infty\}$, $b = 0$; 3) arba $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b = 0$, arba $a \in \{-\infty; +\infty\}$, $b \in \{-\infty; +\infty\}$.

1.5. Apibrėžimas. Sakykime, seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ turi savybę $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N$ $\forall m \geqslant N:\ |x_n - x_m| < \varepsilon$. Tokia seka vadinama *fundamentaliąja*.

1.6. Sekos konvergavimo (Koši) kriterijus. *Seka konverguoja $\Leftrightarrow$ ji yra Koši seka.*

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad seka $x_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, neturi ribos.

► Pastebime, kad atstumas tarp dviejų gretimų sekos narių $|x_n - x_{n+1}| = 2$. Imkime $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ir $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tada $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n = N$ arba $n = N + 1:\ x_n \overline{\in} U\big(a; \frac{1}{2}\big)$. Iš tikrųjų, kadangi intervalo $U(a; \frac{1}{2})$, $a \in \mathbb{R}$, ilgis lygus 1, o atstumas $|x_N - x_{N+1}| = 2$, tai arba $x_N \overline{\in} U\big(a; \frac{1}{2}\big)$, arba $x_{N+1} \overline{\in} U\big(a; \frac{1}{2}\big)$. Jeigu $a \in \{-\infty; +\infty\}$, tai vėl arba $x_N \overline{\in} U\big(a; \frac{1}{2}\big)$, arba $x_{N+1} \overline{\in} U\big(a; \frac{1}{2}\big)$. Taigi nė vienas taškas $a \in \overline{\mathbb{R}}$ negali būti duotosios sekos riba. ◄

2) Įrodysime, kad sekos $x_n := \frac{2n-1}{n+0{,}5}$, $n \in \mathbb{N}$, riba $\lim x_n = 2$.

► Gausime, kad $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - 2| = \frac{2}{n + 0{,}5} < \frac{2}{n}.$$

Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę $\frac{2}{n} < \varepsilon$ n atžvilgiu, rasime $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Taigi numerį $N(\varepsilon)$, kuris yra ribos apibrėžime, mes galime imti paskutinės nelygybės mažiausią natūralųjį skaičių, t.y.

$$N(\varepsilon) := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1,$$

čia $[x]$ – sveikoji x dalis. Vadinasi, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N:\ |x - 2| < \varepsilon$, t.y. įrodėme, jog $\lim x_n = 2$. ◄

3) Įrodysime, kad sekos $x_n := \frac{n^2-10}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, riba $\lim x_n = +\infty$.

► Gausime, kad $\forall n \in \mathbb{N}:$
$$x_n = n - \frac{10}{n} \geqslant n - 10.$$
Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę $n - 10 > \varepsilon$ n atžvilgiu, rasime $n > 10 + \varepsilon$. Taigi numerį $N(\varepsilon)$ mes galime imti paskutinės nelygybės mažiausią natūralųjį sprendinį, t.y.
$$N(\varepsilon) := [10 + \varepsilon] + 1 = 11 + [\varepsilon].$$
Taigi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = 11 + [\varepsilon]\ \ \forall n \geqslant N:\ x_n > \varepsilon$.Pagal ribos apibrėžimą $\lim x_n = +\infty$. ◄

4) Įrodysime, kad sekos $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$, $n \in \mathbb{N}$, riba $\lim x_n = -\infty$.

► Pertvarkę sekos n-ojo nario išraišką, gausime, kad
$$x_n = -\left(\sqrt{n - \frac{1}{n}} + \sqrt{n}\right) \leqslant -\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) < -2\sqrt{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę
$$-2\sqrt{n-1} < -\varepsilon$$
n atžvilgiu, rasime, kad
$$n > 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$
Imsime numerį $N(\varepsilon)$ mažiausią natūralųjį paskutinės nelygybės sprendinį, t.y.
$$N(\varepsilon) := 2 + \left[\frac{\varepsilon^2}{4}\right].$$
Taigi $\forall \varepsilon\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \in \mathbb{N}:\ x_n < -\varepsilon$. Pagal ribos apibrėžimą, $\lim x_n = -\infty$. ◄

5) Įrodysime, kad seka $x_n := \dfrac{n+1}{3n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, yra fundamentali.

► Sakykime, $n > m \geqslant 1$. Tada, atlikę algebrinius veiksmus, gausime
$$x_m - x_n = \frac{5(n-m)}{(3m-2)(3n-2)} = \frac{5\left(1 - \frac{m}{n}\right)}{(3m-2)\left(3 - \frac{2}{n}\right)} < \frac{5}{3m-2}.$$
Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę $\frac{5}{3m-2} < \varepsilon$ m atžvilgiu, gausime $m > \frac{2}{3} + \frac{5}{3\varepsilon}$. Taigi numerį $N(\varepsilon)$ iš fundamentaliosios sekos apibrėžimo galime imti mažiausią natūralųjį paskutinės nelygybės sprendinį, t.y.
$$N(\varepsilon) := \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{3\varepsilon}\right] + 1.$$

Taigi įrodėme, kad $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\geqslant N\ \forall m\geqslant N:\ |x_n-x_m|<\varepsilon$, t.y. seka (x_n) fundamentali. ◄

6) Įrodysime, kad seka $x_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$, diverguoja, t.y. nėra Koši seka.

► Kadangi

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2},$$

tai

$$x_{2n}-x_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{(k+1)^2},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Kadangi pirmojoje sumoje yra n dėmenų ir iš jų mažiausias lygus $\frac{1}{2n+1}$, tai teisinga nelygybė

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1}\geqslant n\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\geqslant\frac{1}{3},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Nagrinėdami antrąją sumą gauname

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{(k+1)^2}<\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Spręsdami nelygybę

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{1}{6},\qquad n\in\mathbb{N},$$

įsitikiname, kad ji teisinga visoje natūraliųjų skaičių aibėje. Taigi $\forall n\in\mathbb{N}:$

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{6}. \tag{3}$$

Įstatę gautus (2) ir (3) rezultatus į (1) sąryšį, gauname nelygybę

$$x_{2n}-x_n>\frac{1}{6},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Taigi įrodėme, kad seka (x_n) tenkina Koši sekos apibrėžimo neiginio sąlygą, t.y. $\exists\varepsilon=\frac{1}{6}$ $\forall N\ \exists n=2N\geqslant N\ \exists m=N\geqslant N:$

$$x_n-x_m=x_{2N}-x_N>\frac{1}{6}.$$

Todėl seka (x_n) nėra Koši seka ir, remiantis Koši kriterijumi, ji diverguoja. ◄

II.1.1. Naudodami sekos ribos apibrėžimą įrodykite, kad $\lim x_n = a$, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$, $a=0$; 2) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$, $a=0$;

3) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $a=\dfrac{1}{2}$; 4) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$, $a=1$;

5) $x_n = \dfrac{1}{n^p}$, $p \in [1,+\infty)$ – konstanta, $a=0$;

6) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}}$, $k \in \mathbb{N}$ – konstanta, $a=0$;

7) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, $a=1$; 8) $x_n = \dfrac{3n}{2n-1}$, $a=\dfrac{3}{2}$;

9) $x_n = \dfrac{2-n}{2+n}$, $a=-1$; 10) $x_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}$, $a=0$;

11) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$, $a=0$; 12) $x_n = (-1)^n(0,99)^n$, $a=0$;

13) $x_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)2^n}$, $a=0$; 14) $x_n = \sqrt[3]{n-100}$, $a=+\infty$;

15) $x_n = n^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$ – konstanta, $a=+\infty$;

16) $x_n = n^p$, $p \in [1;+\infty)$ – konstanta, $a=+\infty$;

17) $x_n = \overset{3}{\lg} n$, $a=+\infty$; 18) $x_n = \dfrac{n^4-100n}{n^2+100}$, $a=+\infty$;

19) $x_n = \sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}$, $a=+\infty$; 20) $x_n = 4\sqrt{n}-n$, $a=-\infty$;

21) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$, $a=-\infty$;

22) $x_n = \log_b n$, $b \in (0;1)$ – konstanta, $a=-\infty$;

23) $x_n = \lg\lg n$, $n \geqslant 2, a=+\infty$; 24) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, $a=+\infty$.

II.1.2. Naudodami sekos ribos apibrėžimo neiginį įrodykite, kad seka (x_n) neturi ribos, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \dfrac{2-\cos\pi n}{2+\cos\pi n}$; 7) $x_n = (-1)^n n$;

2) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$; 8) $x_n = n^{(-1)^n}$;

3) $x_n = 2^{(-1)^n n}$; 9) $x_n = n^2\sin\dfrac{\pi n}{4}$;

4) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; 10) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{((-1)^n-1)n}$;

5) $x_n = \left[\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$; 11) $x_n = n^2 \cos\dfrac{\pi n}{2}$;

6) $x_n = \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$; 12) $x_n = \dfrac{n}{1+n\sin\frac{\pi n}{2}}$;

13) $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ - nelyginis},\\ 0, & n \text{ - lyginis}; \end{cases}$ 14) $x_n = \sin n$.

II.1.3. Raskite $\lim x_n$, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 2) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$;

3) $x_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

4) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b^k}$; čia $(a,b) \in (-1;1)^2$ – konstantos ir $0^0 := 1$;

5) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{n^2}, n \geqslant 2$; 6) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}k}{n}$;

7) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k^2}{n^3}, n \geqslant 2$; 8) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(2k-1)^2}{n^3}$;

9) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2^k}$; 10) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$;

11) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}$; 12) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\sqrt{k(k+1)}}$;

13) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$; 14) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$;

15) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)},\ m \in \mathbb{N}$; 16) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k!},\ n \geqslant 2$;

17) $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1},\ n \geqslant 2$.

II.1.4. Raskite $\lim x_n$, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{an+\sqrt{n}+2}, a \in \mathbb{R}$; 2) $x_n = \dfrac{n(n+a) - \sqrt{n^4+bn^3+1}}{n+5}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

3) $x_n = \sqrt{n + a\sqrt{n} + 1} - \sqrt{n}, a \in \mathbb{R}$; 4) $x_n = n\left(\sqrt[3]{\dfrac{n+a}{n+1}} - \sqrt{\dfrac{n+b}{n-1}}\right), n \geqslant 2, (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

5) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$.

II.1.5. Sakykime, $\exists \lim x_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$ ir $\sigma : \mathbb{N} \leftrightarrows \mathbb{N}$ yra kuri nors bijekcija. Įrodykite, kad $\exists \lim x_{\sigma(n)} = a$.

II.1.6. Sakykime, seka (x_n) neturi ribos. Įrodykite, kad $\forall \sigma : \mathbb{N} \leftrightarrows \mathbb{N}$ seka $(x_{\sigma(n)}$ irgi neturi ribos.

II.1.7. Sakykime, $\exists \lim x_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite, kad $\exists \lim |x_n| = |a|$. Pateikite pavyzdį, kad atvirkštinis teiginys būtų neteisingas.

II.1.8. Sakykime, $\exists \lim x_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$ ir $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0$. Ištirkite, ar seka $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ turi ribą. Pateikite pavyzdžius.

II.1.9. Sakykime, $\exists \lim x_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite:

1) jeigu $a \in \mathbb{R}$, tai $\exists \min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ arba $\exists \max\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$;

2) jeigu $a = +\infty$, tai $\exists \min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$;

3) jeigu $a = -\infty$, tai $\exists \max\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

II.1.10. Sakykime, seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ konverguoja, o seka $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ diverguoja. Ištirkite sekų $\{x_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergavimą. Pateikite pavyzdžius.

II.1.11. Sakykime, sekos $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ diverguoja. Ištirkite sekų $\{x_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergavimą. Pateikite pavyzdžius.

II.1.12. Sakykime, seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra nykstama. Ką galite pasakyti apie sekos $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$, čia $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ – bet kuri seka, nykstamumą? Pateikite pavyzdžius.

II.1.13. Įrodykite, kad seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra fundamentali, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = 0,\underbrace{7\cdots7}_{n \text{ skaitmenų}};$ 2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $q \in (-1;1)$;

3) $x_n = \begin{cases} \frac{-1}{k}, & n = 2k, \\ \frac{1}{k}, & n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$

4) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}, n \geqslant 2;$ 5) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin ka}{2^k}, a \in \mathbb{R};$

6) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!};$ 7) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n(n+1)}.$

II.1.14. Naudodami fundamentaliosios sekos apibrėžimo neiginį įrodykite, kad seka (x_n) diverguoja, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = 0,2^{(-1)^n n};$ 2) $x_n = \frac{n\cos \pi n - 1}{2n};$

3) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in (0;1]$.

II.1.15. Sakykime, (x_n) ir (y_n) yra fundamentaliosios sekos. Įrodykite, kad seka (z_n) yra fundamentali, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $z_n = |x_n|$; 2) $z_n = x_n + y_n$; 3) $z_n = x_n^2$;
4) $z_n = x_n y_n$; 5) $z_n = \max\{x_n, y_n\}$; 6) $z_n = \sqrt{|x_n|}$.

II.1.16. Sakykime, seka (x_n), $x_n = \sum_{k=1}^n |u_k|$, $n \in \mathbb{N}$, yra fundamentali. Įrodykite, kad seka (y_n), $y_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n \in \mathbb{N}$, yra fundamentali, čia $u_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

II.1.17. Sakykime, seka (x_n) yra tokia, kuriai $\exists \alpha \in (0;1)$ $\forall n \geqslant 2$: $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \alpha |x_n - x_{n-1}|$. Įrodykite, kad seka (x_n) yra fundamentali.

II.2. Monotoninės sekos. Posekiai.

2.1. Apibrėžimai. Seka (x_n) yra vadinama: a) *nemažėjančia*, b) *didėjančia*, c) *nedidėjančia*, d) *mažėjančia*, jeigu atitinkamai $\forall n \in \mathbb{N}$: a) $x_n \leqslant x_{n+1}$, b) $x_n < x_{n+1}$, c) $x_n \geqslant x_{n+1}$, d) $x_n > x_{n+1}$. Visų keturių tipų sekos vadinamos *monotoninėmis*, o b) ir d) tipų – *griežtai monotoniškomis*.

Seka (x_n) vadinama *monotonine*, jeigu ji yra tokia pradedant kuriuo nors numeriu $N \geqslant 1$.

2.2. Teorema. *Kiekviena monotoninė seka* (x_n) *turi ribą*

$$\lim x_n = \begin{cases} \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, & \text{kai } (x_n) \text{ nemažėjanti arba didėjanti}, \\ \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, & \text{kai } (x_n) \text{ nedidėjanti arba mažėjanti}. \end{cases}$$

2.3. Lema. 1)*Seka* (x_n),

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

yra didėjanti, o seka (y_n),

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

yra mažėjanti ir

$$\lim x_n = \lim y_n =: e,$$

čia skaičius $e = 2,71828...$

2) Seka $\left(\frac{q^n}{n!}\right)$, $q \in \mathbb{R}$, *yra nykstama.*

3) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

4) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad

$$\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad a \in (1; +\infty).$$

► Žinome, kad $\lim a^n = +\infty$, $a \in (1; +\infty)$. Todėl

$$\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \alpha \in (-\infty; 0], \quad a \in (1; +\infty).$$

Sakykime, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Remiantis Archimedo principu, $\exists! p \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p \leqslant \alpha < p+1$. Įrodysime, kad seka $\left(\frac{n^p}{a^n}\right)$, čia $p \in \mathbb{N}$, yra nykstama. Kadangi

$$\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1,$$

tai pagal 1.3.1) teoremą $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N : \frac{(n+1)^p}{a^{n+1}} < \frac{n^p}{a^n}$. Taigi seka $\left\{\frac{n^p}{a^n} : n \geqslant N\right\}$ yra mažėjanti ir iš apačios aprėžta (sekos nariai yra teigiami). Pagal 2 teoremą ta seka konverguoja, t.y. $\exists \lim \frac{n^p}{a^n} =: a_0 \in [0; +\infty)$. Kadangi

$$\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}} = \frac{n^p}{a^n} \cdot \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p, \quad n \in \mathbb{N},$$

tai, perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gausime pagal 1.4.2) teoremą a_0 atžvilgiu lygtį

$$a_0 = \frac{a_0}{a},$$

iš kurios $a_0 = 0$. Taigi seka $\left(\frac{n^p}{a^n}\right)$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, yra nykstama. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^{[\alpha]}}{a^n} \leqslant \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^{[\alpha]+1}}{a^n},$$

tai pagal 1.3.4) teoremą seka $\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a \in (1; +\infty)$, yra nykstama. ◄

2) Įrodysime, kad seka $\left(\frac{q^n}{n!}\right)$, $q \in \mathbb{R}$, yra nykstama.

► Teiginys teisingas, kai $q = 0$.

Sakykime, $q \in \mathbb{R}_+$. Kadangi

$$\frac{q^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{q^n}{n!} = \frac{q}{n+1} \to 0 < 1,$$

tai pagal 1.3.1) teoremą $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N : \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{q^n}{n!}$. Taigi seka $\left\{\frac{q^n}{n!} : n \geqslant N\right\}$ yra mažėjanti ir iš apačios aprėžta (sekos nariai yra teigiami). Pagal 2 teoremą ta seka konverguoja, t.y. $\exists \lim \frac{q^n}{n!} =: a \in [0; +\infty)$. Kadangi

$$\frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q^n}{n!} \cdot \frac{q}{n+1},$$

tai, perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gausime pagal 1.4.2) teoremą $a = a \cdot 0 = 0$. Kadangi $(\lim x_n = 0) \Leftrightarrow (\lim |x_n| = 0)$, tai

$$\lim \frac{q^n}{n!} = 0, \quad q \in (-\infty; 0). \blacktriangleleft$$

3) Įrodysime, kad

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a \in (1; +\infty).$$

$\blacktriangleright$ Pagal 3.3) lemą $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N : \ a^{-\varepsilon} < \sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon}$, nes $a^{\varepsilon} > 1$, $a^{-\varepsilon} \in (0; 1)$, $a \in (1; +\infty)$. Išlogaritmavę duotąją nelygybę gausime

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} \log_a n < \varepsilon, \quad n \geqslant N, \quad a \in (1; +\infty).$$

Taigi seka $\left(\frac{\log_a n}{n}\right)$, $a \in (1; +\infty)$, yra nykstama. $\blacktriangleleft$

2.4. Apibrėžimai. Sakykime, $\forall k \in \mathbb{N} : \ n_k \in \mathbb{N}$ ir $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_k < \cdots$, t.y. (n_k) yra didėjanti natūraliųjų skaičių seka. Tada seka (x_{n_k}) yra vadinama sekos (x_n) *posekiu*. Jeigu $\exists \lim x_{n_k} =: a \in \overline{\mathbb{R}}$, tai skaičius a yra vadinamas sekos (x_n) *daline* riba.

Jeigu aibė $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ ir $+\infty \in E$ arba $-\infty \in E$, tai $\sup E := +\infty$ ir atitinkamai $\inf E := -\infty$. Jeigu $E = \{+\infty\}$ arba $E = \{-\infty\}$, tai $\sup E := \inf E := +\infty$ ir atitinkamai $\sup E := \inf E := -\infty$.

2.5. Teorema. *1) Bet kurios sekos (x_n) visų dalinių ribų aibė E yra netuščia; 2) $(\inf E, \sup E) \in E^2$.*

2.6. Apibrėžimai. Jeigu seka (x_n) yra aprėžta, tai 5.1) teorema vadinama *Vejerštraso* teorema. Skaičiai

$$\underline{\lim}\, x_n := \inf E, \quad \overline{\lim}\, x_n := \sup E,$$

čia E – sekos (x_n) visų dalinių ribų aibė, yra vadinama sekos (x_n) atitinkamai *apatine* ir *viršutine* ribomis.

2.7. Teorema.

$$1) \ \left(\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n\right) \Leftrightarrow \exists \lim x_n,$$

tada visi tie trys skaičiai yra lygūs tarpusavyje.

2) Jeigu $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n$, tai

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n, \quad \overline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n.$$

Pavyzdžiai. 4) Rasime sekos

$$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

visų dalinių ribų aibę E, $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ bei $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Sudarome posekius

$$x_{3k-2} = \frac{(3k-2)^2}{1+(3k-2)^2}\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,\frac{(3k-2)^2}{1+(3k-2)^2} \to -\frac{1}{2},$$
$$x_{3k-1} = \frac{(3k-1)^2}{1+(3k-1)^2}\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,\frac{(3k-1)^2}{1+(3k-1)^2} \to -\frac{1}{2},$$
$$x_{3k} = \frac{(3k)^2}{1+(3k)^2}\cos 0 = \frac{(3k)^2}{1+(3k)^2} \to 1.$$

Kadangi posekiai $\{x_{3k-2} : k \in \mathbb{N}\}$, $\{x_{3k-1} : k \in \mathbb{N}\}$ ir $\{x_{3k} : k \in \mathbb{N}\}$ sudaro visą seką (x_n), tai ta seka neturi kitų dalinių ribų. Taigi $E = \{-\frac{1}{2}; 1\}$,

$$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}\, x_n = 1.$$

Kadangi

$$-\frac{1}{2} < x_{3k-2} \leqslant -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2} < x_{3k-1} \leqslant -\frac{2}{5}, \quad \frac{9}{10} \leqslant x_{3k} < 1,$$

tai

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = -\frac{1}{2}, \quad \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

5) Sakykime, (x_n) ir (y_n) yra sekos, tenkinančios sąlygas: a) seka (y_n) yra didėjanti ir $\exists \lim y_n = +\infty$, b) $\exists \lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Tada

$$\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = \alpha \quad (\textit{Štolco teorema}).$$

► Sakykime, $\alpha \in \mathbb{R}$. Remiantis a) sąlyga, $\exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_0 : y_n > 0$. Remiantis b) sąlyga, $\exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ N \geqslant N_0\ \forall n \geqslant N :$

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

o tos nelygybės yra ekvivalenčios nelygybėms

$$\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_{N+k} - y_{N+k-1}\right) < x_{N+k} - x_{N+k-1} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_{N+k} - y_{N+k-1}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sudėję panariui pirmąsias $k \in \mathbb{N}$ nelygybes, gausime

$$\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_{N+k} - y_N\right) < x_{N+k} - x_N < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(y_{N+k} - y_N\right)$$

arba
$$\frac{x_N}{y_{N+k}}\Big(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{y_N}{y_{N+k}}\Big)<\frac{x_{N+k}}{y_{N+k}}<\Big(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{y_N}{y_{N+k}}\Big)+\frac{x_N}{y_{N+k}}. \tag{2}$$
Perėję tose nelygybėse prie ribos, kai $k\to\infty$, ir, naudodami 7.2) teoremą, rasime, kad
$$\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\underline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}\leqslant\overline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}\leqslant\alpha+\frac{\varepsilon}{2},\quad \varepsilon\in\mathbb{R}_+.$$
Taigi pagal 7.1) teoremą
$$\exists\lim\frac{x_n}{y_n}=\alpha.$$
Sakykime, $\alpha=+\infty$. Tuomet (1) nelygybes atitiks nelygybės
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}>\varepsilon,\quad n\geqslant N\geqslant N_0.$$
Atlikę analogiškas operacijas, gausime (2) nelygybes atitinkančius sąryšius
$$\frac{x_{N+k}}{y_{N+k}}>\frac{x_N}{y_{N+k}}+\varepsilon\Big(1-\frac{y_N}{y_{N+k}}\Big).$$
Taigi pagal 7 teoremą
$$\underline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}\geqslant\varepsilon,\quad \varepsilon\in\mathbb{R}_+,$$
ir $\underline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}=+\infty$. Todėl $\exists\lim\frac{x_n}{y_n}=+\infty$.
Analogiškai išnagrinėtume atvejį $\alpha=-\infty$. ◀
Pastebėsime, kad Štolco teorema naudojama skaičiuojant sekų santykių ribas.
6) Naudodami Štolco teoremą rasime
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p,\quad p\in\mathbb{N}.$$
Apibrėžkime $x_n:=\sum_{k=1}^n k^p$, $y_n:=n^{p+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Seka (y_n) yra teigiama, didėjanti ir $\lim y_n=+\infty$. Be to,
$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^p}=\frac{(n+1)^p}{C^1_{p+1}n^p+C^2_{p+1}n^{p-1}+\cdots+1}=$$
$$=\frac{\big(1+\frac{1}{n}\big)^p}{p+1+C^2_{p+1}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^p}}\to\frac{1}{p+1},$$
čia priešpaskutinė lygybė teisinga pagal Niutono binomo formulę. Taigi tenkinamos Štolco teoremos visos sąlygos ir todėl
$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{p+1}.$$

II.2.1. Raskite tokį $N \in \mathbb{N}$, kad seka $\{x_n : n \geqslant N\}$ būtų monotoninė, jeigu:

1) $x_n = n + \frac{100}{n}$; 2) $x_n = \frac{3^n}{n^5}$; 3) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$; 4) $x_n = \frac{n!}{n^n}$; 5) $x_n = 5^n + (-4)^n$.

II.2.2. Raskite visas $x \in \mathbb{R}$ reikšmių aibes E_1 ir E_2, kad seka $\{a_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ būtų atitinkamai aprėžta ir monotoninė, jeigu:

1) $a_n(x) = (2x)^n$; 2) $a_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n^2}$; 3) $a_n(x) = 2^{nx}$; 4) $a_n(x) = 2^{n(x^2-x)}$.

II.2.3. Įrodykite, kad seka (x_n) yra monotoninė ir aprėžta, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+9}{2k-1}$; 2) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$;

3) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$; 4) $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}, p_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p_k \in \{0; 1; \cdots; 9\}, k \in \mathbb{N}$.

II.2.4. Įrodykite, kad seka (x_n) yra monotoninė ir aprėžta bei raskite jos ribą, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_{n+1}^2 = 3x_n - 2,\ x_1 = \frac{3}{2}$; 2) $x_{n+1} = a + x_n^2,\ x_1 = a \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

3) $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n},\ x_1 = 1$; 4) $x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)},\ x_1 = 0$;

5) $x_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right), n \geqslant 2$;

6) $x_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{+ \cdots + \sqrt{2 + x_1}}}}_{n \text{ šaknų}}, x_1 = a \in [-2; +\infty)$

7) $x_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), n \geqslant 2$.

II.2.5. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{R}_+$ ir seka (x_n) yra monotoninė. Įrodykite, kad seka $\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right)$ yra to paties monotoniškumo seka.

II.2.6. Įrodykite, kad sekos (x_n) ir (y_n), $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, yra monotoninės, aprėžtos ir

$$\lim x_n = \lim y_n \in (-\infty; 0).$$

II.2.7. Įrodykite, kad seka (x_n), $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \in \mathbb{N}$, didėja ir $\lim x_n = e$, o seka (y_n), $y_n = \frac{n}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, mažėja ir $\lim y_n = 0$.

II.2.8. Įrodykite, kad seka (x_n), $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\sqrt{k}}}$, $n \in \mathbb{N}$, konverguoja.

II.2.9. Įrodykite, kad seka (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, mažėja ir $\lim x_n = 1$, o seka (y_n), $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, didėja ir $\lim y_n = +\infty$.

II.2.10. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{R}_+$ ir $\exists \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} =: a \in [0;+\infty]$. Įrodykite, kad $\exists \lim \sqrt[n]{x_n} = a$. Pateikite pavyzdį, kad atvirkštinis teiginys būtų neteisingas.

II.2.11. Naudodami paskutinį teiginį, raskite sekos (x_n) ribą, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1)\ x_n = \left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad 2)\ x_n = \left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$3)\ x_n = \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad 4)\ x_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

II.2.12. Raskite sekos (x_n) ribą, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}; \qquad 2)\ x_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n};$$

$$3)\ x_n = \ln(n+1) - \ln n; \qquad 4)\ x_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

II.2.13. Sakykime, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodykite, kad $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n < y_n$, $x_n \in (0;1)$, seka (x_n) yra didėjanti, seka (y_n) yra mažėjanti ir jų ribos yra lygios skaičiui, kuris vadinamas *Oilerio konstanta* $C = 0,5772156649...$

II.2.14. Panaudoję paskutinį teiginį raskite sekos (x_n) ribą, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1)\ x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}; \qquad 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}; \qquad 3)\ x_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}; n \geqslant 2;$$

$$4)\ x_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}; n \geqslant 2; \qquad 5)\ x_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}; n \geqslant 2; \qquad 6)\ x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

II.2.15. Sakykime, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N :\ |x_n - x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Įrodykite, kad seka (x_n) konverguoja.

II.2.16. Naudodami Štolco teoremą raskite sekos (x_n) ribą, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1)\ x_n = \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \frac{n}{p+1},\ p \in \mathbb{N}; \qquad 2)\ x_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^p, p \in \mathbb{N};$$

$$3)\ x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}; \qquad 4)\ x_n = \frac{1}{na^n} \sum_{k=1}^{n} ka^k,\ a \in (1;+\infty);$$

$$5)\ x_n = \frac{n}{a^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{k-1}}{k}, a \in (1;+\infty); \qquad 6)\ x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k};$$

$$7)\ x_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}; \qquad 8)\ x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{k+1}.$$

II.2.17. Raskite sekos (x_n) visų dalinių ribų aibę, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $x_n = \dfrac{1}{n+1}\big(2(-1)^n n + 3\big)$; 2) $x_n = \dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{\pi n}{3}$;

3) $x_n = \big(2^{n(-1)^n} + 3^{n(-1)^{n+1}}\big)^{\frac{1}{n}}$; 4) $x_n = \Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\Big)^n$;

5) $x_n = \sin \pi r n,\ r \in \mathbb{Q}$; 6) $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$;

7) $x_n = nr - [nr],\ r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$; 8) $x_n = n\alpha - [n\alpha],\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

9) $x_n = \sin n$; 10) $x_n = 3\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) + 2(-1)^n$.

II.2.18. Sakykime, sekos (x_n) posekiai (x_{2n-1}) ir (x_{2n}) turi ribas. Ar seka (x_n) turi ribą? Pateikite pavyzdžius.

II.2.19. Pateikite pavyzdį sekos, kurios visų dalinių ribų aibė E būtų:
1) $E = \big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{0\}$; 2) $E = \{a_k : 1 \leqslant k \leqslant p\} \subset \mathbb{R}$; 3) $E = \{-\infty; +\infty\}$; 4) $E = \{a\} \cup E_1, a \in \mathbb{R}, E_1 \neq \emptyset, E_1 \subset \{-\infty; +\infty\}$; 5) $E = \overline{\mathbb{R}}$.

II.2.20. Įrodykite, kad aibė E nėra sekos visų dalinių ribų aibe, jeigu:
1) $E = \big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\}$; 2) $E = (0;1)$; 3) $E = \mathbb{Q}$; 4) $E = \mathbb{R}$.

II.2.21. Įrodykite, kad išplėstinėje tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$ teisingi sąryšiai

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n,$$
$$\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n.$$

Pateikite pavyzdžius, kad tuose sąryšiuose būtų griežtos nelygybės.

II.2.22. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} : (x_n, y_n) \in [0; +\infty)^2$. Įrodykite, kad išplėstinėje tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$ teisingi sąryšiai

$$\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}(x_n y_n) \leqslant \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n,$$
$$\underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n.$$

Pateikite pavyzdį, kad tuose sąryšiuose būtų griežtos nelygybės.

II.2.23. Sakykime, $\exists \lim x_n$.Įrodykite, kad $\forall (y_n)$ teisingi sąryšiai (išplėstinėje tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) = \lim\, x_n + \overline{\lim}\, y_n,$$
$$\overline{\lim}(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n,$$

paskutinėje lygybėje $x_n \in [0; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

II.2.24. Sakykime, (x_n) yra tokia seka, jog $\forall$ sekai (y_n) teisinga bent viena lygybė (išplėstinėje tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

arba

$$\overline{\lim}(x_n y_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n,$$

paskutinėje lygybėje $x_n \in [0;+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodykite, kad $\exists \lim x_n$.

II.2.25. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in \mathbb{R}_+$ ir teisinga lygybė

$$\overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = 1.$$

Įrodykite, kad seka (x_n) konverguoja.

II.2.26. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad

$$\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

II.2.27. Sakykime, $y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodykite, kad

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

II.2.28. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in \mathbb{R}_+$ ir $y_n := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. Įrodykite, kad

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

II.2.29. Sakykime, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2: \ x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$. Įrodykite, kad seka $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ turi ribą.

II.2.30. Įrodykite *Teplico* teoremą. Sakykime, 1) $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in \{1;\cdots;n\}: \ p_{nk} \in [0;+\infty)$, 2) $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} = 1$, 3) $\forall k \in \mathbb{N}: \ \exists \lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0$, 4) $\exists \lim x_n =: a \in \mathbb{R}$. Tada $\exists \lim y_n = a$, čia $y_n := \sum_{k=1}^{n} p_{nk}x_k$, $n \in \mathbb{N}$.

II.2.31. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \in \mathbb{R}_+$ ir $\exists \lim x_n =: a \in [0;+\infty]$. Įrodykite, kad $\exists \lim y_n = a$, čia skaičius $y_n := \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}$, $n \in \mathbb{N}$, yra vadinamas skaičių x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *harmoniniu* vidurkiu.

II.2.32. Ištirkite sekos (x_n), $x_1 = a \in \mathbb{R}_+$, $x_{n+1} = a^{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergavimą.

II.2.33. Įrodykite, kad seka (x_n), $x_1 = b \in \mathbb{R}_+$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+$, konverguoja ir raskite jos ribą.

II.2.34. Sakykime, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geqslant N: \ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Ar tokia seka (x_n) konverguoja? Išnagrinėkite sekų pavyzdžius $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ ir $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$.

II.2.35. Raskite sekos (x_n), $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_2 = b \in \mathbb{R}$, $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, ribą.

II.2.36. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $x_1 = a \in [0;+\infty)$, $y_1 = b \in [0;+\infty)$. Įrodykite, kad sekos (x_n) ir (y_n) konverguoja ir $\lim x_n = \lim y_n$.

II.2.37. Sakykime, $a \in \mathbb{R}_+$ $x_1 = b \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n}$. Įrodykite, kad seka (x_n) konverguoja.

II.2.38. Sakykime, (x_n) yra seka, tenkinanti sąlygas $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geqslant 3$. (Sekos nariai vadinami *Fibonačio skaičiais*). Raskite $\lim \sqrt[n]{x_n}$.

II.2.39. Nubrėžkite funkcijų f grafikus apibrėžimo srityse $\mathcal{D}(f)$, jeigu:

1) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \dfrac{1+x^n+x^{2n}}{1+3x^n+x^{2n}}$, $\mathcal{D}(f) = [0;+\infty)$;

2) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \sqrt[n]{1+(2\sin x)^{2n}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \sqrt[n]{1+3(\sqrt{x})^n+x^n}$, $\mathcal{D}(f) = [0;+\infty)$;

4) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $\mathcal{D}(f) = [0;+\infty)$;

5) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+(2x-2)^{2n}}$, $\mathcal{D}(f) = [0;+\infty)$;

6) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \dfrac{(\sin x)^{2n+2}+(\cos x)^{2n+2}}{(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

7) $f(x) = \lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k^n x^n}$, $\mathcal{D}(f) = (0;1]$.

II.3. Skaičiosios aibės.

3.1. Apibrėžimai. Sakykime, $A \neq \emptyset$ ir $B \neq \emptyset$ yra bet kurios aibės ir $\exists f : A \leftrightarrows B$. Tokios aibės yra vadinamos *ekvivalenčiomis* arba *vienodos galios* ir žymima $A \sim B$. Jeigu aibės A ir B neekvivalenčios, tai žymima $A \not\sim B$. Dvi baigtinės aibės yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų elementų skaičiai yra tarpusavyje lygūs. Jeigu aibė $A \sim \{1;\ldots;N\}$, $N \in \mathbb{N}$, tai sakoma, kad aibės A *galia* lygi N. Tuščiosios aibės *galia* pagal apibrėžimą lygi 0. Jeigu $A \not\sim B$, tačiau $\exists B_1 \subset B : A \sim B_1$, tai sakoma, kad aibės A *galia* yra *mažesnė* už aibės B *galią*, arba aibės B *galia* yra *didesnė* už aibės A *galią*.

Jeigu aibė $A \sim N$, tai aibė A yra vadinama *skaičiąja* arba *skaičiosios galios*.

Jeigu aibės A galia yra didesnė už aibės $\mathbb{N}$ galią, tai aibė A yra vadinama *neskaičiąja*.

Jeigu $A \sim \mathbb{R}$, tai aibė A vadinama *kontinuumo galios*.

3.2. Ekvivalentumo sąryšio savybės. 1°. $A \sim A$. 2°. $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$. 3°. $(A \sim B, B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$.

3.3. Teorema. *1) Jeigu $A \sim \mathbb{N}$ ir aibė $B \subset A$ yra begalinė, tai $B \sim \mathbb{N}$.*

2) Jeigu aibė A yra begalinė, tai $\exists B \subset A : B \sim \mathbb{N}$.

3) Jeigu $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \sim \mathbb{N}$, tai $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbb{N}$.

4) Baigtinė arba skaičioji baigtinių arba skaičiųjų aibių sąjunga yra baigtinė arba skaičioji aibė.

5) Baigtinė dekartinė skaičiųjų aibių sandauga yra skaičioji aibė.

3.4. Teorema. *1) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. 2) Aibė $\mathbb{R}$ yra neskaičioji.*

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

► Apibrėžkime atvaizdį

$$f(k) := \begin{cases} 2k, & k \in \mathbb{N}, \\ -2k+1, & k \in \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \end{cases}$$

kuris aibę $\mathbb{Z}$ bijektyviai atvaizduoja į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$. Taigi aibė $\mathbb{Z}$ yra skaiti. ◄

2) Įrodysime, kad $\mathbb{R} \sim (-1;1)$.

► Atvaizdis

$$f(x) := \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (-1;1),$$

yra bijekcija ir $f : (-1,1) \leftrightarrows \mathbb{R}$. ◄

3) Sakykime, aibė A yra begalinė, o aibė B – baigtinė arba skaiti. Įrodysime, kad $A \cup B \sim A$.

► Remiantis 3.3.2) teiginiu, $\exists C \sim \mathbb{N} : C \subset A$. Apibrėžkime $D := A \backslash C$. Tada $A = C \cup D$, $A \cup B = D \cup (C \cup B)$. Kadangi $D \sim D$, $C \cup B \sim C$, tai $A \cup B \sim A$. ◄

4) Sakykime, aibė A yra neskaiti, o aibė $B \subset A$ – baigtinė arba skaiti. Įrodysime, kad $A \setminus B \sim A$.

► Apibrėžkime aibę $C := A \setminus B$, kuri yra begalinė. Jeigu ji būtų baigtinė, tai aibė A būtų baigtinė arba skaiti. Pagal 3) pavyzdį $A = C \cup B \sim C$. ◄

5) Sakykime, $\forall k \in \{1; \ldots; n\}$ aibė A_k yra kontinuumo galios aibė ir $A_k \cap A_l = \emptyset$, $k \neq l$. Įrodysime, kad aibė $S := \cup_{k=1}^{n} A_k$ yra kontinuumo galios aibė.

► Imkime skaičių c_k, $k \in \{0; 1; ...; n\}$, didėjantį rinkinį, kuriame $c_0 = 0$, $c_n = 1$. Kadangi aibės A_k yra kontinuumo galios ir poromis nesikerta, tai $A_k \sim [c_{k-1}; c_k)$. Tuomet $S \sim [0;1)$, t.y. aibė S yra kontinuumo galios aibė. ◄

6) Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}$ aibė A_n yra kontinuumo galios ir $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$. Tada aibė $S := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ yra kontinuumo galios.

► Imkime tokią didėjančią seką (c_n), jog $c_0 = 0$, $\lim c_n = 1$. Kadangi aibės A_n yra kontinuumo galios ir poromis nesikerta, tai $A_n \sim [c_{n-1}; c_n)$ ir $S \sim [0;1)$ t.y. aibė S yra kontinuumo galios. ◄

7) Natūraliųjų skaičių aibių skaičioji dekartinė sandauga yra kontinuumo galios.

► Priminsime, kad reiškinys $0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, $\alpha_n \in \{0;1\}$ yra vadinamas *begaline dvejetaine trupmena*. Dabar $\forall x \in [0;1)$ priskirsime tokią trupmeną $0, \alpha_1...\alpha_n...$, kad būtų

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k} = x \tag{1}$$

ir tos trupmenos periodu gali būti tik 0. Visų tokių trupmenų aibę pažymėkime T. Pastebėsime, kad skaičių $x = \frac{m}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{2k-1 : k \in \{1; ...; 2^{n-1}\}\}$, atitiktų dvi (1) sąlygą tenkinančios trupmenos $0, \alpha_1...\alpha_{n-1}10...0...$ ir $0, \alpha_1...\alpha_{n-1}01...1...$

Akivaizdu, kad apibrėžtasis atvaizdis yra bijekcija ir $T \sim [0;1)$, t.y. T yra kontinuumo galios.

Sakykime, $t := 0,\alpha_1 ... \alpha_n ... \in T$, $k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 0\}$, $k_2 := \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\} : \alpha_k = 0\}$, Trupmenai $t \in T$ priskirkime apibrėžtą didėjantį natūraliųjų skaičių sekos posekį $\{k_r : r \in \mathbb{N}\}$. Visų tokių posekių aibę pažymėkime P. Akivaizdu, kad apibrėžtasis atvaizdis yra bijekcija ir $P \sim T$.

Sakykime, $p := \{k_r : r \in \mathbb{N}\} \in P$ ir apibrėžkime $n_1 := k_1$, $n_2 := k_2 - k_1, ..., n_r := k_r - k_{r-1}, ...$ Akivaizdu, kad $n_r \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$. Taigi apibrėžėme bijekciją tarp aibių P ir $\mathbb{N}^\infty := \times_{n=1}^{\infty} N_n$, $N_n := \mathbb{N}$. Vadinasi, aibė $\mathbb{N}^\infty$ yra kontinuumo galios aibė. ◀

8) Įrodysime, kad kontinuumo galios aibių baigtinė dekartinė sandauga yra kontinuumo galios.

▶ Kad būtų paprasčiau, nagrinėsime dviejų kontinuumo galios aibių A_1 ir A_2 dekartinę sandaugą. Kadangi $A_1 \sim \mathbb{N}^\infty$ ir $A_2 \sim \mathbb{N}^\infty$, čia aibė $\mathbb{N}^\infty$ yra apibrėžta 7) pavyzdyje, tai $\forall x \in A_1$ galima bijektyviai priskirti natūraliųjų skaičių posekį $\{k_r : r \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^\infty$ ir $\forall y \in A_2$ – posekį $\{l_r : r \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^\infty$. Tuomet $\forall (x,y) \in A_1 \times A_2$ galima bijektyviai priskirti posekį $\{k_1; l_1; k_2; l_2; ...; k_r; l_r; ...\} \in \mathbb{N}^\infty$. Taigi $A_1 \times A_2 \sim \mathbb{N}^\infty \sim \mathbb{R}$. ◀

9) Įrodysime, kad kontinuumo galios aibių kontinuumo galios sąjunga yra kontinuumo galios.

▶ Sakykime, $S \sim \mathbb{R}$ ir $\forall s \in S : A_s \sim \mathbb{R}$. Apibrėžkime tiesę, lygiagretę x-ų ašiai, $l_y := \{(x,y) : x \in \mathbb{R}\}$, $y \in \mathbb{R}$, ir $\forall s \in S$ priskirkime bijektyviai tiesę l_y, $y \in \mathbb{R}$. Po to $\forall u \in A_s$ priskirkime bijektyviai tašką $(x,y) \in l_y$. Tokiu būdu apibrėžėme bijekciją tarp aibių $\cup_{s\in S} A_s$ ir $\mathbb{R}^2$. Kadangi $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ pagal 8) pavyzdį, tai $\cup_{s \in S} A_s \sim \mathbb{R}$, t.y. ta aibė yra kontinuumo galios. ◀

10) Įrodysime, kad kontinuumo galios aibių skaičioji dekartinė sandauga yra kontinuumo galios.

▶ Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \sim \mathbb{R}$. Kadangi $\mathbb{N}^\infty \sim \mathbb{R}$, tai $\forall x \in A_n$ galima bijektyviai priskirti natūraliųjų skaičių sekos posekį $\{k_{nr} : r \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^\infty$. Taigi elementui $(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \times_{n=1}^{\infty} A_n$ galima bijektyviai priskirti natūraliųjų skaičių sekos posekį $(k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{13}, k_{22}, k_{31}, ...) \in \mathbb{N}^\infty$ ir $\times_{n=1}^{\infty} A_n \sim \mathbb{N}^\infty$, t.y. aibė $\times_{n=1}^{\infty} A_n$ yra kontinuumo galios. ◀

II.3.1. Nurodykite bijekciją f tarp aibių A ir B, jeigu:

1) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$; 2) $A = [0;1], B = [a;b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$;
3) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+$.

II.3.2. Įrodykite, kad aibės A ir B yra vienodos galios, jeigu:

1) $A = [-1;1]^2$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \mathbb{R}^2$;

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

II.3.3. Įrodykite teiginius:

1) $\big((A\setminus B)\sim(B\setminus A)\big)\Rightarrow(A\sim B;$ 2) $(A\subset B\subset C, A\sim C)\Rightarrow(A\sim B)$.

II.3.4. Įrodykite, kad išvardintosios aibės A yra skaičios:

1) $A=\{2^n : n\in\mathbb{N}\}$; 2) A – aibė visų plokštumos trikampių, kurių visų viršūnių koordinatės yra racionalieji skaičiai; 3) A – aibė visų polinomų, kurių koeficientai yra racionalieji skaičiai; 4) A – skaičiosios aibės visų baigtinių poaibių aibė.

II.3.5. Sakykime, aibės $A\subset\mathbb{R}$ elementai tenkina sąlygą $\forall(x,y)\in A^2,\ x\neq y : |x-y|>1$. Įrodykite, kad aibė A yra baigtinė arba skaiti.

II.3.6. Įrodykite, kad išvardintosios aibės A yra kontinuumo galios:

1) A – aibė visų sekų $(x_n): x_n\in\{0;1\}$, $n\in\mathbb{N}$;

2) A – aibė visų sekų $(x_n): x_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$;

3) $A=[a;b]^2\subset\mathbb{R}^2$, $a<b$;

4) A – atvirasis skritulys su centru (x_0,y_0) ir spinduliu $r\in\mathbb{R}_+$;

5) A – skaičiosios aibės visų poaibių aibė;

6) A – kontinuumo galios aibės visų skaičiųjų poaibių aibė;

7) A – aibė visų sekų $(x_n): x_n\in\mathbb{Q}$, $n\in\mathbb{N}$.

II.3.7. Sakykime, $A\subset\mathbb{R}^2$ yra poromis nesikertančių figūrų aibė. Ar gali aibė A būti neskaičia, jeigu:

1) A yra apskritimų aibė;

2) A yra pavidalo T figūrų aibė?

II.3.8. Raskite baigtinės aibės, sudarytos iš n elementų, visų poaibių aibės galią.

II.3.9. Įrodykite, kad kiekvienos netuščiosios aibės A visų poaibių aibės galia yra didesnė už aibės A galią.

II.3.10. Sakykime, funkcija $f: X\to Y$ yra siurjekcija. Įrodykite, kad $\exists A\subset X : f: A\leftrightarrows Y$, t.y. aibės A ir Y yra vienodos galios.

II.4. Funkcijos riba.

4.1. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $E\subset\mathbb{R}$ ir $\exists a\in\overline{\mathbb{R}}\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+ : \dot{U}_E(a,\varepsilon)\neq\emptyset$. Toks taškas a yra vadinamas *aibės E ribiniu tašku*; visų aibės E ribinių taškų aibė yra vadinama *aibės E išvestine aibe* ir žymima E'.

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad baigtinės aibės $E\subset\mathbb{R}$ išvestinė aibė $E'=\emptyset$.

► Sakykime, $E=\{x_k : 1\leqslant k\leqslant N,\ \ x_1<x_2<\cdots<x_N\}$. Kadangi aibė $\Big((-\infty;x_1)\cup\big(\cup_{i=2}^N(x_{i-1};x_i)\big)\cup(x_N;+\infty)\Big)\cap E=\emptyset$, tai nė vienas pirmosios aibės taškas negali būti aibės E ribiniu tašku. Jais negali būti taškai $-\infty$ ir $+\infty$.

Apibrėžkime $\varepsilon := \min\{x_i - x_{i-1} : \ 2 \leqslant i \leqslant N\}$. Kadangi $\dot{U}_E(x_k, \varepsilon) = \emptyset$, $1 \leqslant k \leqslant N$, tai nė vienas aibės E taškas negali būti jos ribiniu tašku. Taigi nė vienas išplėstinės tiesės $\overline{\mathbb{R}}$ taškas negali būti aibės E ribiniu tašku, t.y. $E' = \emptyset$. ◀

2) Įrodysime, kad aibės $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ išvestinė aibė $E' = \{0\}$.

▶ Kadangi aibė $\Big((-\infty; 0) \cup \big(\cup_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\big)\big) \cup (1; +\infty)\Big) \cap E = \emptyset$, tai nė vienas pirmosios aibės taškas negali būti aibės E ribiniu tašku. Tokiais taškais negali būti ir taškai $-\infty$ bei $+\infty$. Taškai $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, irgi negali būti ribiniais taškais, nes $\dot{U}_E\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}\Big) = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Kadangi $\lim \frac{1}{n} = 0$, tai $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \dot{U}_E(0, \varepsilon) \neq \emptyset$, t.y. taškas 0 yra vienintelis aibės E ribinis taškas. ◀

4.2. Apibrėžimai. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$ išvestinė aibė $E' \neq \emptyset$, $a \in E'$ ir funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ turi savybę: $\exists A_H \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E \setminus \{a\}\ \lim x_n = a : \exists \lim f(x_n) = A_H$. Tada skaičius A_H yra vadinamas *funkcijos f riba taške a pagal Heinę* ir žymima

$$\lim_{E \ni x \to a} f(x) := \lim_{x \to a} f(x) = A_H \quad \text{arba} \quad f(x) \to A_H, \quad \text{kai} \quad x \to a.$$

Sakykime, aibė E tenkina ankstesniąsias sąlygas, o funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ turi savybę:

$$\exists A_K \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : f\big(\dot{U}_E(a, \delta)\big) \subset U(A_K, \varepsilon).$$

Tada skaičius A_K yra vadinamas *funkcijos f riba taške a pagal Koši* ir žymima

$$\lim_{E \ni x \to a} f(x) := \lim_{x \to a} f(x) =: A_K \quad \text{arba} \quad f(x) \to A_K, \text{ kai } x \to a.$$

Pavyzdžiai. 3) Įrodysime, kad $\lim_{E \ni x \to 4} f(x) = 2$, čia $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$, $E = (3; 4) \cup (4; 5)$, naudodami apibrėžimus pagal Heinę ir Koši.

▶ Pastebime, kad $4 \in E' = [3; 5]$. Imkime bet kurią seką $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E : \lim x_n = 4$. Tada pagal sekų ribų teoremas

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{(x_n - 4)(x_n + 4)}{x_n(x_n - 4)} = 2.$$

Kadangi taip yra $\forall\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E : \lim x_n = 4$, tai įrodėme, kad funkcija f turi ribą 2 taške 4 pagal Heinę.

Įrodysime, kad funkcija f turi ribą 2 taške 4 pagal Koši. Randame, kad $\forall x \in E$:

$$\Big|\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2\Big| = \Big|\frac{x + 4}{x} - 2\Big| = \frac{|x - 4|}{x} < \frac{|x - 4|}{3}.$$

Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę $\frac{|x-4|}{3} < \varepsilon$, randame $|x - 4| < 3\varepsilon =: \delta$. Taigi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) = 3\varepsilon : f\big(\dot{U}_E(4, \delta)\big) \subset U(2, \varepsilon)$, t.y. $\lim_{E \ni x \to 4} f(x) = 2$. Vadinasi, funkcija f turi ribą 2 taške 4 pagal Koši. ◀

4) Įrodysime, kad funkcija f, $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, neturi ribos taške 0.

► Imkime dvi sekas $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x_n = \frac{1}{n}$, $x'_n = \frac{2}{4n+1}$, kurioms $\lim x_n = \lim x'_n = 0$. Kadangi $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, $f(x'_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, tai $\lim f(x_n) = 0$, $\lim f(x'_n) = 1$. Taigi funkcija f neturi ribos taške 0.

Jeigu imtume seką $\{x''_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x''_n = \frac{2}{2n+1}$, tai $f(x''_n) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$. Taigi seka $\{f(x''_n) : n \in \mathbb{N}\}$ neturi ribos, o $\lim x''_n = 0$. ◄

4.3. Apibrėžimai. Sakykime, funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$. Tuomet funkcijos $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ $\big(g(x) \neq 0, x \in E\big)$, $x \in E$, yra vadinamas *funkcijų* f ir g atitinkamai *suma, sandauga* ir *santykiu*. Funkcija $|f|(x) := |f(x)|$, $x \in E$, vadinama *funkcijos* f *moduliu*.

Jeigu $\forall x \in E : f(x) \leqslant g(x)$, tai sakoma, kad funkcija f yra *nedidesnė už funkciją* g *aibėje* E ir žymima $f \leqslant g$ aibėje E. Analogiškai apibrėžiamas simbolis $f < g$ aibėje E.

Jeigu $a \in E'$ ir $\exists \delta \in \mathbb{R}_+ : f \leqslant g$ aibėje $\dot{U}_E(a, \delta)$, tai sakoma, kad *funkcija* f yra *nedidesnė už funkciją* g *taško* a *aplinkoje* ir žymima $f \leqslant g$, kai $x \to a$. Analogiškai apibrėžiamas simbolis $f < g$, kai $x \to a$.

Jeigu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, tai funkcija f yra vadinama *nykstama taško* a *aplinkoje*.

Jeigu $\lim_{x \to a} |f|(x) = +\infty$, tai funkcija f yra vadinama *neaprėžtai didėjančia taško* a *aplinkoje*.

Jeigu aibė $f(E)$ yra aprėžta, tai funkcija f yra vadinama *aprėžta aibėje* E. Analogiškai apibrėžiamos sąvokos: *aibėje* E funkcija *iš viršaus aprėžta, iš apačios aprėžta, iš viršaus neaprėžta, iš apačios neaprėžta, neaprėžta*.

Jeigu $a \in E'$, tai apibrėžiamos analogiškos sąvokos *funkcijai* f *taško* a *aplinkoje*.

Sakykime, kad $a \in E'$ yra toks taškas, jog $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \dot{U}_E(a-0, \varepsilon) \neq \emptyset$, $\dot{U}_E(a+0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Toks taškas yra vadinamas *aibės* E *dvipusiu ribiniu* tašku. Jeigu $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \dot{U}_E(a-0, \varepsilon) \neq \emptyset$, tai taškas a yra vadinamas *aibės* E *dešininiu ribiniu* tašku. Analogiškai apibrėžiamas *aibės* E *kairinis ribinis* taškas. Abiejų tipų taškai yra vadinamai *aibės* E *vienpusiais ribiniais* taškais. Taškai $-\infty$ ir $+\infty$ gali būti tik vienpusiais ribiniais taškais: pirmasis – kairiniu, antrasis – dešininiu.

Sakykime, $a \in E'$ yra aibės E dešininis ribinis taškas, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ turi savybę: $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : f\big(\dot{U}_E(a-0, \delta)\big) \subset U(A, \varepsilon)$. Tada sakoma, kad *funkcija* f turi *kairinę ribą* A *taške* a *pagal Koši* ir žymima

$$f(a-0) := \lim_{E \ni x \to a-0} f(x) := A.$$

Jeigu taškas $a \in E'$ yra aibės E kairinis ribinis taškas, tai analogiškai apibrėžiamos *funkcijos* f *dešininės ribos taške* a *pagal Koši* sąvoka. Dešininė riba žymima simboliu $f(a+0) := \lim_{E \ni x \to a+0} f(x) := \lim_{x \to a+0} f(x)$. Abiejų tipų ribos vadinamos *vienpusėmis*. Jeigu taškas $a \in E'$ yra dvipusis ribinis taškas, tai riba yra vadinama *dvipuse*.

Apibrėšime $f(+\infty) := f(+\infty - 0)$, $f(+0) := f(0+0)$, $f(-\infty) := f(-\infty + 0)$, $f(-0) := f(0-0)$, kai egzistuoja atitinkamos ribos.

Pavyzdys. 5) Įrodysime, kad $\lim_{x\to+0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

► Jeigu $\varepsilon \in \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$, tai $\forall\delta \in \mathbb{R}_+$ $\forall x \in (0;\delta) : 0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} < \varepsilon$. Jeigu $\varepsilon \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai, spręsdami nelygybę $0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} < \varepsilon$, gausime ekvivalenčią nelygybę $0 = \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) = \operatorname{ctg} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}} = x < \operatorname{tg}\varepsilon$. Taigi galime imti $\delta := \operatorname{tg}\varepsilon$. Įrodėme, kad $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ $\exists\delta \in \mathbb{R}_+$ $\forall x \in (0;\delta) : 0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} < \varepsilon$, t.y. $\lim_{x\to 0+0} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Vadinasi $f(+0) = \frac{\pi}{2}$, čia $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Kadangi funkcija f yra nelyginė, tai $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$. Kadangi vienpusės ribos skirtingos, tai $\overline{\exists}\lim_{x\to 0} f(x)$. ◄

4.4. Apibrėžimai. Sakykime, $a \in E'$, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E\setminus\{a\}$ ir $\lim x_n = a$, o seka $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ turi ribą A. Ta riba yra vadinama funkcijos f *daline riba taške* a. Skaičiai $\underline{\lim}_{E\ni x\to a} f(x) := \inf F$, $\overline{\lim}_{E\ni x\to a} f(x) := \sup F$, yra vadinami *funkcijos* f atitinkamai *apatine* ir *viršutine ribomis taške* a, čia F – visų dalinių ribų taške a aibė.

Pavyzdys. 6) Įrodysime, kad funkcijos $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, visų dalinių ribų taške 0 aibė $F = [-1;1]$. Taigi $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1$, $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1$ ir $\overline{\exists}\lim_{x\to 0} f(x)$.

► Kadangi $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : |f|(x) \leqslant 1$, tai funkcijos f dalinės ribos taške 0 priklauso intervalui $[-1;1]$, t.y. $F \subset [-1;1]$. Įrodysime, kad $F = [-1;1]$.

Imkime skaičių $A \in [-1;1]$ ir, išsprendę lygtį $\sin\frac{1}{x} = A$, rasime jos sprendinių aibes $\{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, kai $A = 0$, ir $\left\{\frac{1}{\pi n + (-1)^n \arcsin A} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, kai $A \in [-1;1]\setminus\{0\}$. Iš tų aibių galėsime išrinkti tokią seką $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x_n = \frac{1}{\pi n + (-1)^n \arcsin A}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim x_n = 0$, kad $f(x_n) = \sin(\pi n + (-1)^n \arcsin A) = A$, $n \in \mathbb{N}$. Taigi $\lim f(x_n) = A$ ir $A \in F$. Kadangi $A \in [-1;1]$ buvo bet kuris taškas, tai $[-1;1] = F$. Pagal apatinės ir viršutinės ribų taške apibrėžimus $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1$, $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1$. Kadangi ribos skirtingos, tai $\overline{\exists}\lim_{x\to 0} f(x)$. ◄

4.5. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, ir $\forall\{x_1, x_2\} \subset E$, $x_1 < x_2$, ji tenkina tik vieno tipo nelygybę: arba 1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, arba 2) $f(x_1) < f(x_2)$, arba 3) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, arba 4) $f(x_1) > f(x_2)$. Tokia funkcija vadinama atitinkamai: 1) *nemažėjančia*, 2) *didėjančia*, 3) *nedidėjančia*, 4) *mažėjančia aibėje* E. Visų keturių tipų funkcijos vadinamos *monotoninėmis*, 2) ir 4) tipų funkcijos – *griežtai monotoniškomis aibėje* E.

Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Skaičius

$$w_f(E) := \sup\left\{|f(x) - f(y)| : \{x,y\} \subset E\right\} \in [0;+\infty]$$

yra vadinamas *funkcijos* f *skėtra aibėje* E.

Sakykime, $a \in E'$ ir apibrėžkime dydžius

$$\widehat{w}_{f;a}(\delta) := w_f\big(\dot{U}_E(a,\delta)\big), \quad \delta \in \mathbb{R}_+,$$
$$\widehat{w}_{f;a} := \begin{cases} \widehat{w}_{f;a}(+0), & \text{kai } a \in \mathbb{R}, \\ \widehat{w}_{f;a}(+\infty), & \text{kai } a \in \{-\infty, +\infty\}. \end{cases}$$

Skaičius $\widehat{\omega}_{f;a}$ yra vadinamas *funkcijos* f *nepilnąja skėtra taške* a.

4.6. Teorema. (Koši kriterijus).

$$\left(\exists \lim_{E\ni x\to a} f(x)\in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow (\widehat{\omega}_{f;a}=0).$$

4.7. Teorema. *Teisingos lygybės*

$$\begin{aligned}
&1)\ \exists \lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{a^x}=0, \qquad r\in\mathbb{R},\quad a\in(1;+\infty);\\
&2)\ \exists \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0, \qquad p\in\mathbb{R}_+,\quad a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\};\\
&3)\ \exists \lim_{x\to+0} x^p\log_a x=0, \qquad p\in\mathbb{R}_+,\quad a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\};\\
&4)\ \exists \lim_{x\to+0} x^{x^p}=1, \qquad p\in\mathbb{R}_+;\\
&5)\ \exists \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x^p}}=1, \qquad p\in\mathbb{R}_+;\\
&6)\ \exists \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\exists \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\exists\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\\
&7)\ \exists \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\\
&8)\ \exists \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\};\\
&9)\ \exists \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, \qquad a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\};\\
&10)\ \exists \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r, \qquad r\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pavyzdžiai. 7) Rasime funkcijos $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, nepilnąją skėtrą taške 0. Kadangi $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: |\sin x|<|x|$, funkcija f yra nelyginė ir $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, tai $\forall\varepsilon\in(0;1)$, $\exists\delta\in(0;\pi)$ $\forall x\in(0;\delta)$, $\forall x'\in(-\delta;0)$:

$$1-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\sin x}{x}<1, \qquad -1<\frac{-\sin x'}{x'}<-1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Todėl

$$2-\varepsilon<\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x'}{x'}<2$$

ir $2-\varepsilon<\widehat{\omega}_{f;0}(\delta)\leqslant 2$. Taigi $\forall\varepsilon\in(0;1): 2-\varepsilon\leqslant\widehat{\omega}_{f;0}\leqslant 2$ ir $\widehat{\omega}_{f;0}=2$. Vadinasi, $\overline{\exists}\lim_{x\to0}f(x)$.

8) Rasime $\lim_{x\to1}\frac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$.

Kadangi vardiklio riba taške 1 yra 0, tai negalime tiesiogiai naudoti funkcijų santykio ribos teoremą. Tai yra taip vadinamas neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$. Apibrėžkime $y := x-1$ ir $(y \to 0) \Leftrightarrow (x \to 0)$. Gausime

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1} &= \lim_{y\to0}\frac{(y+1)^{101}-101(y+1)+100}{(y+1)^2-2(y+1)+1} = \\ &= \lim_{y\to0}\frac{1+C_{101}^1y+C_{101}^2y^2+C_{101}^3y^3+\cdots+y^{101}-101y-1}{y^2} = \\ &= \lim_{y\to0}\frac{y^2(C_{101}^2+C_{101}^3y+\cdots+y^{99})}{y^2} = C_{101}^2.\end{aligned}$$

9) Rasime $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+x^2)}-x^2\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Tai yra taip vadinamas neapibrėžtumas $\infty-\infty$. Jeigu $n=1$, tai $\lim_{x\to+\infty}(1+x^2-x^2)=1$.
Sakykime, $n\geqslant 2$. tada

$$\prod_{k=1}^{n}(k+x^2) = x^{2n}+\sum_{k=1}^{n}k\cdot x^{2(n-1)}+P_{2(n-2)}(x),$$

$$P_{2(n-2)}(x) := \sum_{k=0}^{n-2}a_kx^{2(n-2-k)}, \qquad a_k\in\mathbb{N}.$$

Todėl

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k+x^2)}-x^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{P_{2(n-2)}(x)}{x^{2n}}\right)\cdot \\ &\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^2}+\frac{P_{2(n-2)}(x)}{x^{2n}}}-1}{\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{P_{2(n-2)}(x)}{x^{2n}}}.\end{aligned}$$

Pagal 7 teoremos 10) lygybę dešiniosios pusės trečiojo daugiklio riba lygi $\frac{1}{n}$, o pirmųjų dviejų daugiklių sandaugos riba lygi $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$. Todėl

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k+x^2)}-x^2\right) = s\frac{n+1}{2}, \quad n\geqslant 2.$$

10) Rasime $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$. Tai yra neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$. Apibrėžkime $y := x-\pi$ ir $(y\to 0)\Leftrightarrow(x\to\pi)$. Todėl

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim_{y\to0}\frac{\sin(y+\pi)}{\pi^2-(y+\pi)^2} = \lim_{y\to0}\frac{-\sin y}{-y}\frac{1}{2\pi+y} = \frac{1}{2\pi},$$

čia panaudojome 7 teoremos 7) lygybę.

11) Rasime $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$. Kadangi atskiro dėmens riba taške $-\infty$ neegzistuoja, tai negalėsime tiesiogiai naudoti funkcijų sumos ribos teoremą. Imkime $x\in(-\infty;-1]$. Tada

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}&=2\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}=\\&=2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\cdot\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}.\end{aligned}$$

Kadangi

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0,\qquad\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\right|\leqslant1,$$

tai ieškomoji riba lygi 0.

12) Rasime $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x}$. Tai yra neapibrėžtumas $\infty\cdot0$, todėl negalime tiesiogiai naudoti funkcijų sandaugos ribos teoremą.

Imkime $x\in(1;+\infty)$. Tada

$$x^2\ln\cos\frac{\pi}{x}=\frac{\ln\left(1+\cos\frac{\pi}{x}-1\right)}{\cos\frac{\pi}{x}-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2x}}{\frac{\pi}{2x}}\right)^2\left(-\frac{\pi^2}{2}\right).$$

Dešiniosios pusės pirmojo ir antrojo daugiklių ribos taške $+\infty$ lygios 1 pagal atitinkamas 7 teoremos 9) ir 7) lygybes. Todėl ieškomoji riba lygi $-\frac{\pi^2}{2}$.

13) Rasime $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(e+x)\right)^{\operatorname{ctg}x}$. Tai yra neapibrėžtumas 1^∞. Imkime $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$. Tada

$$\begin{aligned}\left(\ln(e+x)\right)^{\operatorname{ctg}x}&=e^{\operatorname{ctg}x\ln\ln(e+x)},\\\operatorname{ctg}x\cdot\ln\ln(e+x)&=\frac{\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{e}.\end{aligned}$$

Dešiniosios pusės pirmojo ir antrojo daugiklių ribos taške 0 lygios 1 pagal 7 teoremos 9) lygybę, trečiojo daugiklio riba taške 0 irgi lygi 1 pagal tos pačios teoremos 7) lygybę. Be to, $\lim_{x\to0}\cos x=1$. Todėl ieškomoji riba lygi $e^{\frac{1}{e}}$.

4.8. Apibrėžimai. Sakykime, funkcijos $f:E\to\mathbb{R}$, $g:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, $a\in E'$. Jeigu $\exists L\in\mathbb{R}_+\ \exists\delta\in\mathbb{R}_+\ \forall x\in\dot{U}_E(a,\delta):\ |f|(x)\leqslant L|g|(x)$, tai sakoma, kad *funkcija* f yra *aprėžta funkcijos* g *atžvilgiu taško* a *aplinkoje* ir žymima $f=O(g)$, $x\to a$. Užrašas $f=O(1)$, $x\to a$, reiškia, kad funkcija f yra aprėžta taško a aplinkoje.

Pavyzdžiai. 14) Sakykime, $f(x)=\sin^2x$, $g(x)=x$, $x\in(-\pi;\pi)\setminus\{0\}$. Tada $\lim_{x\to0}\frac{f}{g}(x)=0$, taigi $f=O(g)$, $x\to0$. Kadangi $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{\sin^2x}=+\infty$, tai

$\exists\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (-\pi;\pi) \setminus \{0\}\ \lim x_n = 0 : \frac{|x_n|}{\sin^2 x_n} > n,\ n \in \mathbb{N}$. Taigi $g \neq O(f)$ ir sąryšis $f = O(g)$ neapgręžiamas.

15) Įrodysime, kad $\ln x = O(x),\ x \to +\infty$.

► Kadangi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, tai $\exists\delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in (\delta;+\infty) : 0 < \frac{\ln x}{x} < 1$. Todėl $\ln x = O(x),\ x \to +\infty$. ◄

4.9. Apibrėžimai. Sakykime, funkcijos $f : E \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R},\ a \in E'$. Jeigu $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists\delta \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \dot{U}_E(a,\delta) : |f|(x) \leqslant \varepsilon|g|(x)$, tai sakoma, kad *funkcija f yra nykstama funkcijos g atžvilgiu taško a aplinkoje* ir žymima $f = o(g),\ x \to a$. Užrašas $f = o(1),\ x \to a$, reiškia, kad funkcija yra nykstama taško a aplinkoje.

Pavyzdžiai. 16) Įrodysime, kad $\forall p \in \mathbb{R}_+ : \ln x = o(x^p),\ x \to +\infty$.

► Žinome, kad $\forall p \in \mathbb{R}_+ : \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. Todėl $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists\delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in (\delta;+\infty) : 0 < \frac{\ln x}{x^p} < \varepsilon$. Taigi pagal sąryšio "$o$" apibrėžimą $\ln x = o(x^p),\ x \to +\infty,\ p \in \mathbb{R}_+$. ◄

17) Sakykime, $\alpha \in (1;+\infty)$, $\exists \lim_{E\ni x\to a} g(x) = +\infty$ ir $f = o(g),\ x \to a$. Įrodysime, kad $\alpha^f = o(\alpha^g),\ x \to a$.

► Kadangi

$$\lim_{E\ni x\to a} \frac{\alpha^{f(x)}}{\alpha^{g(x)}} = \lim_{x\to a} \alpha^{f(x)-g(x)} = \lim_{x\to a} \alpha^{-g(x)(1+o(1))} = 0,$$

tai $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \exists\delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in \dot{U}_E(a,\delta) : 0 < \frac{\alpha^{f(x)}}{\alpha^{g(x)}} < \varepsilon$. Todėl $\alpha^f = o(\alpha^g),\ x \to a$. ◄

4.10. Apibrėžimas. Sakykime, funkcijos $f : E \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R},\ a \in E'$. Jeigu $f - g = o(f),\ x \to a$, tai sakoma, kad *funkcija f ekvivalenti funkcijai g taško a aplinkoje* ir žymima $f \sim g,\ x \to a$.

Pavyzdys. 18) Įrodysime, kad iš sąryšio $f \sim g,\ x \to a$, apskritai neišplaukia sąryšis $e^f \sim e^g,\ x \to a$.

► Iš tikrųjų, $\forall x \in E \setminus \{a\}$:

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{(f-g)(x)}.$$

Kadangi $f - g = o(g),\ x \to a$, tai funkcijos $e^{o(g)}$ riba taške a gali neegzistuoti arba egzistuoti, bet nebūti 1. Tik tuo atveju, kai $\exists \lim_{x\to a} o(g(x)) = 0$, bus $e^f \sim e^g,\ x \to a$.

Pavyzdžiui, $f(x) = x + \sin x,\ g(x) = x,\ x \in \mathbb{R}_+$. Tada $f \sim g,\ x \to +\infty$, tačiau

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{\sin x},$$

taigi $\overline{\exists} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$ ir $e^f \not\sim e^g,\ x \to a$. ◄

4.11. Apibrėžimai. *Pagrindinėmis elementariosiomis* funkcijomis yra vadinamos pastovioji, laipsninė, rodiklinė, logaritminė, trigonometrinės ir atvirkštinės trigonometrinės funkcijos.

Funkcija, kuri gaunama iš pagrindinių elementariųjų funkcijų, atlikus baigtinį aritmetinių operacijų ir kompozicijų skaičių, vadinama *elementariąja.*

Elementariosios funkcijos, apibrėžtos lygybėmis

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} x, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

vadinamos atitinkamai *hiperboliniu: sinusu, kosinusu, tangentu* ir *kotangentu.* Monotoniškumo intervaluose tos funkcijos turi atvirkštines funkcijas: *atvirkštinį hiperbolinį sinusą* $\operatorname{ar\,sh}$, *atvirkštinį hiperbolinį kosinusą* $\operatorname{ar\,ch}$, *atvirkštinį hiperbolinį tangentą* $\operatorname{ar\,th}$ ir *atvirkštinį hiperbolinį kotangentą* $\operatorname{ar\,cth}$. Visos tos funkcijos vadinamos *atvirkštinėmis hiperbolinėmis funkcijomis.*

II.4.1. Raskite aibės E išvestinę aibę E', jeigu:

1) $E = \{0;1\}$; 2) $E = (0;1) \cup \{2\}$; 3) $E = [0;1] \cap \mathbb{Q}$; 4) $E = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \{0;1;\cdots;2^n\}, n \in \mathbb{N}\right\}$; 5) $E = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}\right\}$; 6) $E = \{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$.

II.4.2. Naudodami funkcijos ribos taške apibrėžimą pagal Koši įrodykite, kad $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, jeigu:

1) $f(x) = x^2$, $a = 2$, $A = 4$; 2) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$, $a = 3$, $A = \frac{1}{2}$; 3) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$, $A = 1$; 4) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $a = 1$, $A = 1$; 5) $f(x) = \lg x$, $a = 1$, $A = 0$; 6) $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$, $a = 1$, $A = 2$; 7) $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-3}$, $a = 3$, $A = 9$; 8) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a = +\infty$, $A = 0$; 9) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}$, $a = -\infty$, $A = 0$.

II.4.3. Naudodami funkcijos ribos taške apibrėžimo pagal Heinę neiginį įrodykite, kad $\overline{\exists} \lim\limits_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $a = 0$; 2) $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}$, $a = 0$; 3) $f(x) = \cos x$, $a = +\infty$; 4) $f(x) = x - [x]$, $a = +\infty$; 5) $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, $a = 0$; 6) $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$, $a = 0$.

II.4.4. Raskite funkcijos f skėtrą aibėje E ir $\inf f(E)$ bei $\sup f(E)$, jeigu:

1) $f(x) = 0$, kai $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ir $f(x) = n$, kai $x = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $(n,m) = 1$; 2) $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $E = \mathbb{R}$; 3) $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $E = [0;+\infty)$; 4) $f(x) = x^2$, $E = (-2;5)$; 5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $E = \mathbb{R}$; 6) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $E = \mathbb{R}_+$; 7) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $E = \mathbb{R}_+$; 8) $f(x) = \sin x$, $E = \mathbb{R}_+$; 9) $f(x) = \sin x + \cos x$, $E = [0;2\pi]$; 10) $f(x) = 2^x$, $E = (-1;2)$; 11) $f(x) = [x]$, *a)* $E = (0;2)$, *b)* $E = [0;2]$; 12) $f(x) = x - [x]$, $E = [0;1]$; 13) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$.

II.4.5. Sakykime, $m_f := \inf f(E)$, $M_f := \sup f(E)$, $E \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad

$$m_{f_1+f_2} \geqslant m_{f_1} + m_{f_2}, \qquad M_{f_1+f_2} \leqslant M_{f_1} + M_{f_2},$$

čia $f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \{1;2\}$.

Pateikite pavyzdžius funkcijų, kad nurodytuose sąryšiuose būtų: a) lygybės, b) griežtos nelygybės.

II.4.6. Sakykime, funkcija $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ – konstanta, yra aprėžta, $m_f(x) := \inf f\big([a;x]\big)$, $M_f(x) := \sup f\big([a;x]\big)$, $x \in [a;+\infty)$. Nubrėžkite funkcijų m_f ir M_f grafikus, jeigu: 1) $f(x) = \sin x$, 2) $f(x) = \cos x$.

II.4.7. Raskite funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, skėtrą taške $a \in E'$, jeigu:

1) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$;

3) $f(x) = x\Big(2 + \sin \frac{1}{x}\Big)$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$;

4) $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$;

5) $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$;

6) $f(x) = \big(1 + |x|\big)^{1/x}$, $E = (-1;1) \setminus \{0\}$, $a = 0$.

II.4.8. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}}$, $\quad a = +\infty, \{a_k, b_k\} \subset \mathbb{R}, a_0 \cdot b_0 \neq 0, \{m,n\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$;

2) $f(x) = \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$, $\quad a = 0$;

3) $f(x) = \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$, $\quad a = 0$;

4) $f(x) = \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $\quad a = 0; (m,n) \in \mathbb{N}^2$;

5) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$, $\quad a = +\infty$;

6) $f(x) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(x^k + 1)}{\big((nx)^n + 1\big)^{\frac{n+1}{2}}}$, $\quad a = +\infty, n \in \mathbb{N}$;

7) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$, $\quad a = 3$;

8) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$, $\quad a = 1$;

9) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$, $a = 2$;

10) $f(x) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x^k - n}{x - 1}$, $\quad a = 1, n \in \mathbb{N}$;

11) $f(x) = \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $\quad a = 1, (m,n) \in \mathbb{N}^2$;

12) $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$, $\quad a = 1, n \in \mathbb{N}$;

13) $f(x) = \dfrac{m}{1 - x^m} - \dfrac{n}{1 - x^n}$, $\quad a = 1, (m,n) \in \mathbb{N}^2$;

14) $f(x) = x^4 \sum\limits_{k=1}^{[\frac{1}{x^2}]} k, \quad a = 0;$ 15) $f(x) = x^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{x^2}\right], \quad a = 0, n \in \mathbb{N};$

16) $f(x) = \dfrac{[P(x)]}{P([x])}, \quad a = +\infty, \quad P(x) = x^{13} + x^7 + x + 1.$

II.4.9. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, $a = +\infty$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, $a = +\infty$;

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$, $a = 4$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$, $a = -8$;

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a \in [0; +\infty)$; 6) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+8}$, $a = -2$;

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$, $a = 16$; 8) $f(x) = \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, $a = 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1+x)}{x}$, $a = 0$; 10) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2}$, $a = 0$;

11) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$, $a = 0$; 12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$, $a = 7$;

13) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$, $a = 0$; 14) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+6} + |x|}{\sqrt[6]{x^4+2} - |x|}$, $a = -\infty$;

15) $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $a = 0, \{m,n\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$;

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$, $a = 0, \{m,n\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$;

17) $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k} - 1}{x}$, $a = 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a_k \in \mathbb{R}, 1 \leqslant k \leqslant n.$

II.4.10. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$, $a = 1$, $\{m, n\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

2) $f(x) = \dfrac{\prod_{k=2}^{n} (1 - x^{1/k})}{(1-x)^{n-1}}$, $a = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$;

3) $f(x) = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} (x + \alpha_k)} - x$, $a = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

4) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$;

5) $f(x)=x\Big(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\Big)$, $a=+\infty$;

6) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}$, $a=-\infty$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}$, $a=+\infty$;

8) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\Big((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big)$, $a=-\infty$;

9) $f(x)=\dfrac{\Big(x-\sqrt{x^2-1}\Big)^n+\Big(x+\sqrt{x^2-1}\Big)^n}{x^n}$, $a=+\infty$, $n\in\mathbb{N}$;

10) $f(x)=\dfrac{\Big(\sqrt{1+x^2}+x\Big)^n-\Big(\sqrt{1+x^2}-x\Big)^n}{x}$, $a=0$, $n\in\mathbb{N}$;

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt[n]{\alpha+x}-\sqrt[n]{\alpha-x}}{x}$, $a=0$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$.

II.4.11. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(0,r)\to\mathbb{R}_+$, $r\in\mathbb{R}_+$ yra nykstama taško 0 aplinkoje ir $\forall t\in\dot{U}(0,r)$ kvadratinė lygtis $f(t)x^2+bx+c=0$, $(b,c)\in\mathbb{R}^2$, $b\neq 0$, — konstantos, turi dvi skirtingas realiąsias šaknis $x_1(t)$ ir $x_2(t)$, $x_1(t)<x_2(t)$. Raskite $lim_{t\to 0}x_k(t)$, $k\in\{1;2\}$.

II.4.12. Raskite tokias $\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\mathbb{R}$, kad funkcija $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $r\in\mathbb{R}_+$, būtų nykstama taško a aplinkoje, jeigu:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta$, $a=-\infty$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta$, $a=-\infty$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta$, $a=+\infty$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\alpha x-\beta$, $a=+\infty$;

5) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3}-\alpha x^2-\beta x-\gamma$, $a=+\infty$;

6) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+\alpha x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+\beta x^2+1}-\dfrac{1}{3}$, $a=+\infty$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\alpha x-\beta$, $a=+\infty$;

8) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-\alpha x-\beta$, $a=+\infty$;

9) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3+3x+4}-\alpha x^2-\beta x-\gamma$, $a=+\infty$.

II.4.13. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $r\in\mathbb{R}_+$. Raskite $\lim_{x\to a}f(x)$, jeigu:

1) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$, $a=0$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $a=-\infty$;

3) $f(x)=\frac{\sin mx}{\sin nx}$, $a=\pi, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$;

4) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $a=0$; 5) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$, $a=0$;

6) $f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin\alpha x-\cos\alpha x}$, $a=0, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

7) $f(x)=\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\big(\dfrac{\pi}{4}-x\big)$, $a=\dfrac{\pi}{4}$; 8) $f(x)=(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{z}$, $a=1$;

9) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$, $a=\dfrac{\pi}{6}$; 10) $f(x)=\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$, $a=0$;

11) $f(x)=\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x},\ a=\dfrac{\pi}{3}$; 12) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)},\ a=\dfrac{\pi}{3}$;

13) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x)-\operatorname{tg}^2\alpha}{x^2}, a=0, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi+\frac{\pi}{2}:n\in\mathbb{Z}\}$.

14) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3x},\ a=\dfrac{\pi}{4}$.

II.4.14. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\overline{\mathbb{R}},\ r\in\mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, jeigu:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x},\ a=0$; 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3},\ a=0$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}},\ a=0$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x},\ a=0$;

5) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}},\ a=0$; 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2},\ a=0$;

7) $f(x)=\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x},\ a=+\infty$; 8) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}},\ a=0$;

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x},\ a=0$; 10) $f(x)=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}x^2},\ a=0$;

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2x},\ a=\dfrac{\pi}{2}$; 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}, a=0$.

II.4.15. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\overline{\mathbb{R}},\ r\in\mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, jeigu:

1) $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, a=+0$; 2) $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, a=1$;

3) $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, a=+\infty$; 4) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, a=+\infty$;

5) $f(x)=\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg}2x}, a=\dfrac{\pi}{4}+0$; 6) $f(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}, a=+\infty$;

7) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}, a=+\infty$; 8) $f(x)=\sqrt[x]{1-2x}, a=0$;

9) $f(x)=\left(\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x, a=+\infty, \alpha\in\mathbb{R}$;

10) $f(x)=\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^x, a=+\infty, \{\beta,\delta\}\subset\mathbb{R}, \{\alpha,\gamma\}\subset\mathbb{R}_+$;

11) $f(x)=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2x}, a=0$; 12) $f(x)=\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}, a=1$;

13) $f(x)=\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}, a=0$; 14) $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}, a\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi:n\in\mathbb{Z}\}$;

15) $f(x)=\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, a=0$; 16) $f(x)=\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}2x}, a=\dfrac{\pi}{4}$;

17) $f(x)=\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}x}, a=\dfrac{\pi}{2}$; 18) $f(x)=\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}, a=0$;

19) $f(x) = \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x, a = +\infty;$ 20) $f(x) = \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}},\ a = +0.$

II.4.16. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},\ r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \sin\ln(x+1) - \sin\ln x,\ a = +\infty;$ 2) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)},\ a = +\infty;$

3) $f(x) = \lg\dfrac{100 + x^2}{1 + 100x^2},\ a = +\infty;$ 4) $f(x) = \dfrac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})},\ a = +\infty;$

5) $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)},\ a = +\infty;$

6) $f(x) = \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha x\right)}{\sin\beta x},\ a = 0, \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

7) $f(x) = \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x},\ a = 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

8) $f(x) = \left(x + e^x\right)^{\frac{1}{x}},\ a = 0;$ 9) $f(x) = \dfrac{a^x - x^a}{x - a},\ a \in \mathbb{R}_+;$

10) $f(x) = \dfrac{x^x - a^a}{x - a},\ a \in \mathbb{R}_+;$ 11) $f(x) = \left(\dfrac{1 + x\cdot 2^x}{1 + x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\ a = 0;$

12) $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x},\ a = 0, \{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta;$

13) $f(x) = \left(\dfrac{\alpha^x + \beta^x + \gamma^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},\ a = 0,\ \{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \mathbb{R}_+;$

14) $f(x) = \left(\dfrac{\alpha^{x^2} + \beta^{x^2}}{\alpha^x + \beta^x}\right)^{\frac{1}{x}}, a = 0, \{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R}_+;$ 15) $f(x) = \dfrac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}, a \in \mathbb{R}_+;$

16) $f(x) = \dfrac{\alpha^{x^2} - \beta^{x^2}}{(\alpha^x - \beta^x)^2},\ a = 0, \{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R}_+;$ 17) $f(x) = (1 - x)\log_x 2,\ a = 1.$

II.4.17. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},\ r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \arcsin\dfrac{1 - x}{1 + x},\ a = +\infty;$ 2) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right),\ a = +\infty;$

3) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x - 4}{(x - 2)^2},\ a = 2;$ 4) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}},\ a = -\infty;$

5) $f(x) = \dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)},\ a = 0;$ 6) $f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x + 1}\}\right),\ a = +\infty;$

7) $f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right),\ a = +\infty;$ 8) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right),\ a = -\infty.$

II.4.18. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},\ r \in \mathbb{R}_+$. Raskite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln\operatorname{ch} 3x},\ a = 0;$ 2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x},\ a = +\infty;$

3) $f(x) = x - \ln \operatorname{ch} x,\ a = +\infty;$ 4) $f(x) = \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x},\ a = 0;$

5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x},\ a = 0;$ 6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\cos x - 1},\ a = 0;$

7) $f(x) = \dfrac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2},\ a = +\infty;$ 8) $f(x) = \dfrac{e^{\operatorname{sh} 3x} - e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{th} x},\ a = 0;$

9) $f(x) = x^2 - \ln \operatorname{ch} x^2,\ a = +\infty;$ 10) $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2},\ a = 0.$

II.4.19. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}$ funkcija $f_n : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}$. Raskite $\lim\limits_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} f_n(x)$, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(x + \dfrac{ka}{n}\right), \quad n \geqslant 2, E = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R};$

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(x + \dfrac{ka}{n}\right)^2, \quad n \geqslant 2, E = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R};$

3) $f_n(x) = \left(\dfrac{n + x}{n - 1}\right)^n,\ n \geqslant 2, E = \mathbb{R};$ 4) $f_n(x) = \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}},\ E = \mathbb{R};$

5) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),\ E = \mathbb{R}_+;$ 6) $f_n(x) = n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right),\ E = \mathbb{R}_+;$

7) $f_n(x) = \underbrace{\sin \cdots \sin x}_{n \text{ simbolių}},\ E = \mathbb{R};$ 8) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n,\ E = \mathbb{R};$

9) $f_n(x) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!},\ E = \mathbb{R};$ 10) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n},\ E = [0; +\infty);$

11) $f_n(x) = \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}},\ E = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 12) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}},\ E = \mathbb{R};$

13) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n},\ E = [0; +\infty);$ 14) $f_n(x) = \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}},\ E = [0; +\infty);$

15) $f_n(x) = \sin^{2n} x,\ E = \mathbb{R};$ 16) $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(2^n + x^n\right)}{n},\ E = [0; +\infty);$

17) $f_n(x) = (x - 1)\operatorname{arc\,tg} x^n,\ E = \mathbb{R};$ 18) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}},\ E = \mathbb{R};$

19) $f_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x^k}{k!},\ E = \mathbb{R};$ 20) $f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right),\ E = (-1; 1);$

21) $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{x}{2^k},\ E = \mathbb{R};$ 22) $f_n(x) = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x}}}}_{n \text{ šaknų}},\ E = \mathbb{R}_+.$

II.4.20. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a, r) \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_+$. Raskite vienpuses ribas $f(a - 0)$ ir $f(a + 0)$, jeigu:

1) $f(x) = x + [x^2], \quad a = 1;$ 2) $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \pi x, \quad a \in \mathbb{Z};$

3) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$, $a=0$; 4) $f(x)=\arccos(x-1)$, $a=0$;
5) $f(x)=e^{-1/x^2}$, $a=0$; 6) $f(x)=2^{\operatorname{ctg} x}$, $a=0$;
7) $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $a=1$; 8) $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$, $a=\dfrac{\pi}{2}$;
9) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg} x$, $a=\dfrac{\pi}{2}$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{1/(3-x)}}$, $a=3$;
11) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$, $a=-1$; 12) $f(x)=\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $a=1$;
13) $f(x)=\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}$, $a=1$.

II.4.21. Sakykime, funkcija $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, $a\in E_1'$, $E_1\subset E$. Ištirkite, ar egzistuoja $\lim\limits_{E_1\ni x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $E=\mathbb{R}$, $a=0$, 1_1) $E_1=E$; 1_2) $E_1=\mathbb{R}_+$; 1_3) $E_1=\mathbb{Q}$; 1_4) $E_1=\{\frac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\}$;

2) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a=0$, 2_1) $E_1=\mathbb{R}_+$; 2_2) $E_1=\left\{\dfrac{1}{n\pi}:n\in\mathbb{N}\right\}$.

II.4.22. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $r\in\mathbb{R}$. Raskite $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ ir $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$, $a=0$; 2) $f(x)=(2-x^2)\cos\dfrac{1}{x}$, $a=0$;
3) $f(x)=\left(1+\cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$, $a=0$; 4) $f(x)=\sin x$, $a=+\infty$;
5) $f(x)=x^2\cos^2 x$, $a=-\infty$; 6) $f(x)=2^{\sin x^2}$, $a=-\infty$;
7) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin x^2}$, $a=+\infty$; 8) $f(x)=e^{\cos\frac{1}{x^2}}$, $a=0$;
9) $f(x)=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}$, $a=0$; 10) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}$, $a=0$;
11) $f(x)=\dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2}\sin x^2$, $a=-\infty$;

12) $f(x)=\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)(1+\cos 2x)$, $a=-\infty$.

II.4.23. Sakykime, funkcija $f:\dot{U}(a,r_1)\to U(b,r_2)$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $\{r_1,r_2\}\subset\mathbb{R}_+$, $\exists\lim_{x\to a}f(x)=:$ $b\in\mathbb{R}$, funkcija $g:U(b,r_2)\to\mathbb{R}$ ir $\exists\lim_{y\to b}g(y)=:B\in\overline{\mathbb{R}}$. Ar galima tvirtinti, kad $\exists\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=B$? Išnagrinėkite atvejį, kai f yra Rymano funkcija, $a=0$, o funkcija g, $g(y)=0$, kai $y=0$, ir $g(y)=1$, kai $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

II.4.24. Sakykime, funkcija $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, tenkina sąlygas: 1) $\forall b\in(a;+\infty)$ funkcija f aprėžta intervale $(a;b)$, 2) $\exists n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=:A\in\overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite, kad $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{A}{n+1}$.

II.4.25. Sakykime, 1) funkcijos $f : \dot{U}(0,r) \to \mathbb{R}$, $g : \dot{U}(0,r) \to \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$ – konstanta, yra ekvivalenčios taško 0 aplinkoje, 2) sekų seka $\{\{x_{mn} : n \in \mathbb{N}\} : m \in \mathbb{N}\} \subset U(0,r)$ tenkina sąlygą $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall m \in \mathbb{N} : \; |x_{mn}| < \varepsilon$, 3) $\exists \lim \sum\limits_{m=1}^{n} g(x_{mn}) =: A \in [0; +\infty)$.

Įrodykite, kad $\exists \lim \sum\limits_{m=1}^{n} f(x_{mn}) = A$.

II.4.26. Naudodami 25 teiginį raskite sekų $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ribas, jeigu:

1) $x_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{m}{n^2}} - 1\right)$, 2) $x_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \sin \dfrac{ma}{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$;

3) $x_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \left(a^{\frac{m}{n^2}} - 1\right), a \in \mathbb{R}_+$; 4) $x_n = \prod\limits_{m=1}^{n} \left(1 + \dfrac{m}{n^2}\right)$;

5) $x_n = \prod\limits_{m=1}^{n} \cos \dfrac{ma}{n^{3/2}}, a \in \mathbb{R}$.

II.4.27. Raskite sekų $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ribas, jeigu:

1) $x_n = \sin^n \dfrac{2\pi n}{3n+1}$; 2) $x_n = \operatorname{tg}^n \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)$;

3) $x_n = \left(\dfrac{\alpha - 1 + \sqrt[n]{\beta}}{\alpha}\right)^n, \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$; 4) $x_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}}{2}\right)^n, \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$;

5) $x_n = \left(\dfrac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$; 6) $x_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$;

7) $x_n = \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$; 8) $x_n = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n}\right)$;

9) $x_n = n \sin(2\pi e n!)$; 10) $x_n = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n}\right)$.

II.4.28. Sakykime, funkcijos $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}$, $g : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}_+$, $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad $f(x) = O(g)$ $x \to a$, jeigu:

1) $f(x) = 2x + \ln x + \sin x$, $g(x) = x$, $a = +\infty$;

2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_0 \neq 0$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a = +\infty$;

3) $f(x) = x + 2^{x+1}$, $g(x) = 2^x$, $a = +\infty$;

4) $f(x) = 2^{x+1} x + x^{10} = 7$, $g(x) = 3^x$, $a = +\infty$;

5) $f(x) = x \sin x + \sqrt{x}$, $g(x) = x$, $a = +\infty$;

6) $f(x) = x^2 \ln^{10} x + x$, $g(x) = x^{2+p}$, $p \in \mathbb{R}_+, a = +\infty$;

7) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1} - x^2$, $g(x) = x$, $a = +\infty$;

8) $f(x) = 2^x \ln^2 x + 1$, $g(x) = 2^x \cdot x$, $a = +\infty$;

9) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $a=+\infty$;
10) $f(x)=2^{-x}\cdot x^5+\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $a=+\infty$;
11) $f(x)=\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x}+2^{-x}\cdot x$, $g(x)=\frac{1}{\ln x}$, $a=+\infty$;
12) $f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}$; $g(x)=x$, $a=+\infty$;
13) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $a=0$;
14) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, $g(x)=1$, $a=0$;
15) $f(x)=x+x^2\sin x$, $g(x)=x^2$, $a=+\infty$.

II.4.29. Sakykime, funkcijos $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $g:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $r\in\mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad $f=o(g)$, $x\to a$, jeigu:
1) $f(x)=x^2+\sin^2 x$, $g(x)=x$, $a=0$;
2) $f(x)=(1+x)^n-1-nx$, $g(x)=x$, $n\in\mathbb{N}$ $a=0$;
3) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{1}{x^p}$, $p\in\mathbb{R}_+$ $a=+0$;
4) $f(x)=2^{-\frac{1}{x}}$, $g(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ $a=+0$;
5) $f(x)=x^{\frac{1}{n+1}}$, $g(x)=x^{\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$ $a=+\infty$;
6) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $1\leqslant k\leqslant n$, $a_o\neq 0$, $g(x)=x^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ $a=+\infty$;
7) $f(x)=x^n$, $g(x)=e^x$, $n\in\mathbb{N}$ $a=+\infty$;
8) $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^p$, $p\in\mathbb{R}_+$, $a=+\infty$;
9) $f(x)=2^x\cdot x^{13}$, $g(x)=3^x$, $a=+\infty$;
10) $f(x)=2^{-x}\cdot x^{13}$, $g(x)=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, $a=+\infty$;
11) $f(x)=\ln\ln x$, $g(x)=\ln x$, $a=+\infty$;
12) $f(x)=x\ln x$, $g(x)=x^{3/2}$, $a=+\infty$;
13) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$, $g(x)=x^p$, $p\in\mathbb{R}_+$ $a=0$;
14) $f(x)=x^{\ln x}$, $g(x)=e^x$, $a=+\infty$;
15) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $g(x)=x^p$, $p\in\mathbb{R}_+$, $a=0$.

II.4.30. Sakykime, funkcijos $f:U(+\infty,r)\to\mathbb{R}$, $g:U(+\infty,r)\to\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+$, $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $f=o(g)$ taško $+\infty$ aplinkoje. Įrodykite, kad $e^f=o(e^g)$, $x\to+\infty$.

II.4.31. Sakykime, funkcijos $f:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $g:\dot{U}(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\mathbb{R}}_+$, $r\in\mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad $f\sim g$, $x\to a$, jeigu:
1) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{m+k}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $0\leqslant k\leqslant n$, $a_0\neq 0$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $g(x)=a_0x^m$, $a=0$;
2) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{m+k}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $0\leqslant k\leqslant n$, $a_n\neq 0$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $g(x)=a_nx^{m+n}$, $a=+\infty$;

3) $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $a = 0$;

4) $f(x) = 3^x + 2^x \cdot x + \ln x + 1$, $g(x) = 3^x$, $a = +\infty$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$, $g(x) = \frac{1}{2}$, $a = +\infty$;

6) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $g(x) = \sqrt[8]{x}$, $a = 0$;

7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $a = +\infty$;

8) $f(x) = x^2 + x \ln^{100} x$, $g(x) = x^2$, $a = +\infty$;

9) $f(n) = n^{n+\frac{1}{n}} + n! + 2^n$, $g(n) = n^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a = +\infty$;

10) $f(n) = n^2 + 2n \ln n + 1$, $g(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $a = +\infty$.

II.4.32. Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Naudodami funkcijų ekvivalentumą raskite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \operatorname{tg} \sin \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} \operatorname{tg} \sin x$, $a = 0$;

2) $f(x) = \dfrac{\sin\big(x \sin(2x \sin 3x)\big)}{x^3}$, $a = 0$;

3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(2 - x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$, $a = 2$;

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1 + x^2} + x^3 - 1}{\ln \cos x}$, $a = 0$;

5) $f(x) = \dfrac{x^3 \sqrt[10]{x} \cos x + \sin^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^3}}$, $a = 0$;

6) $f(x) = \dfrac{2 \sin \sqrt{x^2 + \sqrt{x}^3} + \ln(1 + x)}{x + \sqrt{x^{3/2}}}$, $a = +0$;

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}\big(e^{7\sqrt[3]{x}} - 1\big)}{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} \cdot \ln(1 + 3x)}$, $a = +0$;

8) $f(x) = \dfrac{(\sin 2x - 2\operatorname{tg} x)^2 + (1 - \cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x + \sin^6 x}$, $a = 0$.

II.4.33. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} :\ f_n : U(+\infty, r) \to \mathbb{R}$. Įrodykite, kad $\exists g : U(+\infty, r) \to \mathbb{R}_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n = o(g)$, $x \to +\infty$.

II.5. Funkcijos tolydumas.

5.1. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$. Jeigu $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ $\exists \delta \in \mathbb{R}_+ :\ f\big(U_E(a,\delta)\big) \subset U\big(f(a), \varepsilon\big)$, tai funkcija f yra vadinama *tolydžia taške* a.

Jeigu funkcija f yra tolydi $\forall a \in E$, tai ji vadinama *tolydžia aibėje* E. Visų tolydžių aibėje E funkcijų aibė žymima $C(E)$ arba $C^0(E)$, arba $C(E,F)$, čia $F \subset \mathbb{R}$ – funkcijų kitimo sritis. Jeigu $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ : \ f\big(U_E(a+0,\delta)\big) \subset U\big(f(a),\varepsilon\big)$, tai funkcija f yra vadinama *iš dešinės tolydžia taške* a. Analogiškai apibrėžiama funkcijos *iš kairės tolydumo taške* sąvoka.

Taškas $a \in E$, $a \overline{\in} E'$, yra vadinamas aibės E *izoliuotoju* tašku. Kiekviena funkcija yra tolydi apibrėžimo srities izoliuotajame taške. Taigi seka $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ yra tolydi apibrėžimo srityje, t.y. $f \in C(\mathbb{N})$.

Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E \cap E'$ yra dvipusis ribinis taškas ir funkcija f netolydi jame. Toks taškas a yra vadinamas *funkcijos* f *trūkio tašku.*

Jeigu $\exists f(a-0) \in \mathbb{R}$, $\exists f(a+0) \in \mathbb{R}$, ir bent du skaičiai iš trijų $f(a-0)$, $f(a+0)$, $f(a)$, yra skirtingi, tai toks taškas a yra vadinamas funkcijos f *pirmojo tipo trūkio tašku.* Likusieji trūkio taškai yra vadinami *antrojo tipo trūkio taškais.*

Analogiškai klasifikuojami vienpusiai ribiniai taškai.

Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$. Apibrėžkime

$$w_{f;a}(\delta) := w_f\big(U(a,\delta)\big), \qquad \delta \in \mathbb{R}_+,$$

čia $w_f(F)$ – funkcijos f skėtra aibėje F. Jeigu $\exists\delta_0 \in \mathbb{R}_+ : w_{f;a}(\delta_0) < +\infty$, tai $\exists w_{f;a}(+0) \in [0;+\infty)$. Jeigu $\forall\delta \in \mathbb{R}_+ : w_{f;a}(\delta) = +\infty$, tai apibrėšime $w_{f;a}(+0) := +\infty$. Skaičius $w_{f;a} := w_{f;a}(+0)$ yra vadinamas funkcijos f *pilnąja skėtra taške* a.

Pavyzdžiai. 1) Naudodami funkcijos tolydumo taške apibrėžimą įrodysime, kad funkcija $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in E = [0;+\infty)$, yra tolydi apibrėžimo srityje.

► Sakykime, $a \in \mathbb{R}_+$. Kadangi $\forall x \in E : \ |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leqslant \dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}}$,

tai, imdami $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir išsprendę nelygybę

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon,$$

gausime $|x-a| < \varepsilon\sqrt{a}$, $x \in E$. Todėl galime apibrėžti $\delta := \varepsilon\sqrt{a}$ ir $\forall x \in U_E(a,\delta)$: $f(x) \in U\big(\sqrt{a},\varepsilon\big)$. Pagal apibrėžimą funkcija f yra tolydi intervale $\mathbb{R}_+$.

Įrodysime, kad funkcija f yra iš dešinės tolydi taške 0.

Imkime $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ir, išsprendę nelygybę

$$0 \leqslant \sqrt{x} - \sqrt{0} = \sqrt{x} < \varepsilon, \qquad x \in E,$$

gausime $0 \leqslant x < \varepsilon^2$. Taigi galime apibrėžti $\delta := \varepsilon^2$ ir $\forall x \in U(0+0,\delta) : \ f(x) \in U(0+0,\varepsilon)$. Pagal apibrėžimą funkcija f yra iš dešinės tolydi taške 0.

Įrodėme, kad $f \in C(E)$. ◄

2) Naudodami funkcijos tolydumo taške apibrėžimo neiginį įrodysime, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

netolydi taške 0.

▶ Imkime $\varepsilon_0 = 1$ ir apibrėžkime

$$x_\delta := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \delta \in [1; +\infty); \\ \frac{\delta}{2}, & \delta \in (0; 1). \end{cases}$$

Tada

$$f(x_\delta) = \begin{cases} 2, & \delta \in [1; +\infty), \\ \frac{2}{\delta}, & \delta \in (0; 1). \end{cases}$$

Taigi $\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \ \exists x_\delta \in U(0, \delta) : \ f(x_\delta) > 1$, t.y. $f(x_\delta) \overline{\in} U(0, 1)$, ir funkcija f netolydi taške 0. ◀

3) Rasime tokias $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, reikšmes, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right] \setminus \{0; \pi\}, \\ \alpha, & x = 0, \\ \beta, & x = \pi, \end{cases}$$

būtų tolydi apibrėžimo srityje.

Kad funkcija f būtų tolydi taške 0, turi būti

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{x} = 1 = f(0) = \alpha,$$

t.y. $\alpha = 1$.

Kad funkcija f būtų tolydi taške π, turi būti

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \pi \lim_{x \to \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} = f(\pi) = \beta,$$

t.y. $\beta = \frac{\pi}{2}$.

4) Rasime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \alpha, & x = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

trūkio taškus ir jų tipus.

Pirmiausia pastebime, kad

$$\lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty} \operatorname{sgn} \sin \pi k = 0,$$
$$\lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty} f\left(\frac{1}{2k + \frac{1}{2}}\right) = \lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty} \operatorname{sgn} \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Taigi $\overline{\exists} \lim_{x \to 0} f(x)$ ir taškas 0 yra funkcijos f antrojo tipo trūkio taškas. Todėl nėra tokios $\alpha \in \mathbb{R}$ reikšmės, kad funkcija f būtų tolydi taške 0.

Dabar tirsinme funkcijos f tolydumą aibėje $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Lygtis $f(x)=1$ yra ekvivalenti nelygybei $0<\sin\frac{\pi}{x}\leqslant 1$, kurią išsprendę rasime, kad

$$x\in\Bigg(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\Big)\Bigg)\cup(1;+\infty).$$

Analogiškai rasime lygties $f(x)=-1$ sprendinių aibę

$$(-\infty;-1)\cup\Bigg(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}\Big)\Bigg).$$

Tose aibėse funkcija f kaip tolydžiųjų funkcijų kompozicija yra tolydžioji funkcija. Lygties $f(x)=0$ sprendinių aibėje $\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ yra $f\big(\frac{1}{k}-0\big)=(-1)^k$, $f\big(\frac{1}{k}+0\big)=(-1)^{k-1}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Todėl visi tos aibės taškai yra funkcijos f pirmojo tipo trūkio taškai.

5) Rasime funkcijos $f(x)=[x]$, $x\in\mathbb{R}$, pilnąją skėtrą taške $x\in\mathbb{R}$. Jeigu $x\in\mathbb{Z}$, tai $\forall\delta\in(0;1]$:

$$w_{f;x}(\delta)=\sup f\big(U(x,\delta)\big)=1,$$

taigi $w_{f;x}=w_{f;x}(+0)=1$.
Jeigu $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, tai $\exists!k\in\mathbb{Z}:\ k<x<k+1$. Todėl $\forall\delta\in\big(0;\min\{x-k,k+1-x\}\big)$:

$$w_{f;x}(\delta)=\sup f\big(U(x,\delta)\big)=0,$$

taigi $w_{f;x}=w_{f;x}(+0)=0$.
Funkcija f yra tolydi aibėje $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, visi jos trūkio taškai yra pirmojo tipo. Iš tikrųjų, $\forall k\in\mathbb{Z}:\ f(k+0)=f(k)=k$, $f(k-0)=k-1$. Todėl ta funkcija yra iš kairės trūki, o iš dešinės tolydi taške $k\in\mathbb{Z}$.

6) Įrodysime, kad $\forall\varepsilon\in[0;1]$ funkcija g_ε, $x=g_\varepsilon(y):=y-\varepsilon\sin y$, $y\in\mathbb{R}$, yra tolydi, didėjanti ir $g_\varepsilon(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Todėl funkcija g_ε turi atvirkštinę g_ε^{-1}, kuri yra tolydi ir didėjanti.

► Funkcija $g_\varepsilon\in C(\mathbb{R})$ kaip tolydžiųjų funkcijų suma. Įrodysime, kad ta funkcija yra didėjanti. Imkime $\{y_1,y_2\}\subset\mathbb{R}$, $y_1<y_2$. Tada

$$g_\varepsilon(y_2)-g_\varepsilon(y_1)=y_2-y_1-\varepsilon\big(\sin y_2-\sin y_1\big)=y_2-y_1-2\varepsilon\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_2-y_1}{2}\geqslant$$
$$\geqslant y_2-y_1-2\varepsilon\Big|\sin\frac{y_2-y_1}{2}\Big|>(y_2-y_1)(1-\varepsilon),$$

čia priešpaskutinė ir paskutinė nelygybės gautos iš nelygybių

$$\Big|\sin\frac{y_2-y_1}{2}\cos\frac{y_1+y_2}{2}\Big|\leqslant\Big|\sin\frac{y_2-y_1}{2}\Big|<\frac{y_2-y_1}{2}.$$

Taigi funkcija g_ε yra didėjanti intervale $\mathbb{R}$. Kadangi

$$\lim_{y\to-\infty} g_\varepsilon(y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to+\infty} g_\varepsilon(y) = +\infty,$$

tai $g_\varepsilon(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ◀

II.5.1. Naudodami funkcijos tolydumo taške apibrėžimą įrodykite, kad funkcija $f : U(a,r)$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, yra tolydi taške a, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad a = 1$;
2) $f(x) = x^4$, $\quad a \in \mathbb{R}$;
3) $f(x) = 2x - 1$, $\quad a = 1$;
4) $f(x) = x^2$, $\quad a = 1$;
5) $f(x) = \alpha x + \beta$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$;
6) $f(x) = x^3$, $\quad a \in \mathbb{R}$;
7) $f(x) = \sqrt[3]{x}, a \in \mathbb{R}$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
9) $f(x) = \sqrt[4]{1-x}, a \in (-\infty; 1)$;
10) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$, $\quad a \in \mathbb{R}$;
11) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a \in \mathbb{R}\setminus\big\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\big\}$;
12) $f(x) = x^2 + 2\sin x$, $a \in \mathbb{R}$;
13) $f(x) = \sqrt{x}\sin 2x$, $a \in \mathbb{R}_+$;
14) $f(x) = x[x]$, $a \in \mathbb{R}\setminus \mathbb{Z}$;
15) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $a \in \mathbb{R}$;
16) $f(x) = \cos x$, $a \in \mathbb{R}$.

II.5.2. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, ir $\exists A \subset \mathbb{R}_+\ \forall \varepsilon \in A\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ :\ f\big(U_E(a,\delta)\big) \subset U\big(f(a),\varepsilon\big)$. Ar funkcija f yra tolydi taške a, jeigu: 1) aibė A yra baigtinė? 2) $A = \big\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\big\}$?

II.5.3. Sakykime, funkcija f, $f(x) = x + \alpha[x]$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad:

1) $\forall \varepsilon \in (\alpha; +\infty)\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall \{x,a\} \subset \mathbb{R}\ |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon \in (0; \alpha]$ nėra tokio $\delta \in \mathbb{R}_+$, kuris tenkintų 1) teiginio sąlygas, t.y. $\forall \varepsilon (0;\alpha]\ \forall \delta \in \mathbb{R}_+\ \exists \{x,a\} \subset \mathbb{R}\ |x-a| < \delta :\ |f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Raskite funkcijos f visų trūkio taškų aibę ir nustatykite jų tipą.

II.5.4. Sakykime, $\exists \delta_0 \in \mathbb{R}_+\ \forall \delta \in (0;\delta_0)\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ :\ f\big(U_E(a,\delta)\big) \subset U\big(f(a),\varepsilon\big)$, čia funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$. Nustatykite, kokią savybę turi tokia funkcija ir ar ji tolydi taške a.

II.5.5. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ ir $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in E\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon :\ |x-a| < \delta$. Nustatykite, kokią savybę turi funkcija f ir ar ji tolydi taške a.

II.5.6. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ ir $\forall \delta \in \mathbb{R}_+\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in E\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon :\ |x-a| < \delta$. Nustatykite, kokią savybę turi funkcija f ir ar ji tolydi taške a. Išnagrinėkite pavyzdį

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ \pi - \operatorname{arc\,tg} x, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

II.5.7. Raskite funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, pirmojo ir antrojo tipo trūkio taškų atitinkamas aibes F_1 ir F_2, kai $A \in \mathbb{R}$, jeigu:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \\ 4, & x = 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ 0, & x = -1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ A, & x = 0; \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ A, & x = 1; \end{cases}$ 8) $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

9) $f(x) = [x]$; 10) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}], \quad x \in [0; +\infty)$;

11) $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ A, & x = -1; \end{cases}$ 12) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(1+x)^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ A, & x = -1; \end{cases}$

13) $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ A, & x = 0; \end{cases}$ 14) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ A, & x = 0; \end{cases}$

15) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x)}, & x \in \mathbb{R}_+, \\ A, & x = 0; \end{cases}$ 16) $f(x) = \begin{cases} e^{x+\frac{1}{x}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ A, & x = 0; \end{cases}$;

17) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 1], \\ 2 - x, & x = (1; 2]; \end{cases}$ 18) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty; 0), \\ A + x, & x \in [0; +\infty); \end{cases}$

19) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1], \\ 2 - x, & x \in (1; 2]; \end{cases}$ 20) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1; 1], \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]; \end{cases}$

21) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [-1; 1], \\ |x - 1|, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]; \end{cases}$ 22) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

23) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

II.5.8. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N}$ funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Raskite funkciją f, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^n}, \quad E = [0; +\infty)$; 2) $f_n(x) = \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad E = \mathbb{R}$;

3) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad E = \mathbb{R}$; 4) $f_n(x) = \cos^{2n} x, \quad E = \mathbb{R}$;

5) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}, \quad E = \mathbb{R}$; 6) $f_n(x) = \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}, \quad E = \mathbb{R}$;

7) $f_n(x) = x \operatorname{arc\,tg}(n \operatorname{ctg} x)$, $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; 8) $f_n(x) = \dfrac{\ln(1 + e^{x^n})}{\ln(1 + e^x)}, \quad E = \mathbb{R}$;

9) $f_n(x) = (1 + x) \operatorname{th} nx$, $E = \mathbb{R}$;

10) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + (x - 1)^{2n}}$, $E = [0; +\infty)$;

11) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}$, $E = \mathbb{R}_+$; 12) $f_n(x) = \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}, E = [0; +\infty)$;

13) $f_n(x) = \left(x^n + x^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $E = [0; +\infty)$; 14) $f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, E = \mathbb{R}$.

II.5.9. Įrodykite: jeigu $f \in C([a;b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tai $|f| \in C([a;b])$. Pateikite pavyzdį, kad atvirkštinis teiginys būtų neteisingas.

II.5.10. Raskite reikšmes $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, kad funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ būtų tolydi, jeigu:

1) $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & x \in (-\infty; 1), \\ x^2 + x + 1, & x \in [1; +\infty); \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & x \in (-\infty; -1), \\ x^2 + 1, & x \in [-1; 1], \\ -Ax + 2B, & x \in (1; +\infty); \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x + A\sin x, & x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left[2\pi k; \pi(2k+1)\right], \\ Bx, & x \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\pi(2k-1); 2\pi k\right). \end{cases}$

II.5.11. Raskite aibę $\{(A_k, B_k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}\}$, kad funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} A_k + \sin \pi x, & x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k; 2k+1], \\ B_k + \cos \pi x, & x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k-1; 2k), \end{cases}$$

būtų tolydi.

II.5.12. Sakykime, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra nemažėjanti. Įrodykite, kad funkcijos f pilnoji skėtra

$$w_{f;x} = f(x+0) - f(x-0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

II.5.13. Raskite funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pilnąją skėtrą, jeigu:

1) $f(x) = [x]$; 2) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (*Dirichlė funkcija*).

II.5.14. Raskite funkcijos $f(x) = x\mathcal{D}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ – Dirichlė funkcija, pirmojo ir antrojo tipų trūkio taškų atitinkamas aibes F_1 ir F_2.

II.5.15. Raskite funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tolydumo ir trūkio taškų atitinkamas aibes T ir F, jeigu:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+1}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m,n) = 1, \\ |x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x - [x], & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (-\infty; 0), \\ 1, & x = 0; \\ \frac{e^x - 1}{x}, & x \in \mathbb{R}_+; \end{cases}$

4) $f(x) = [x]\left(x - [x]\right)$, 5) $f(x) = [x] \sin \pi x$,

6) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2 - 1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \\ 0, & x \in \{-1; 1\}. \end{cases}$

II.5.16. Sakykime, funkcija $f \in C(\mathbb{R})$ ir yra nemažėjanti. Įrodykite, kad kiekvienai aprėžtajai sekai $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$: $\underline{\lim} f(x_n) = f(\underline{\lim}\, x_n)$ ir $\overline{\lim} f(x_n) = f(\overline{\lim}\, x_n)$. Nurodykite pavyzdį funkcijos, kuriai būtų teisinga tik pirmoji lygybė.

II.5.17. Sakykime, funkcijos $f : U(a,r) \to \mathbb{R}$, $g : U(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Ištirkite funkcijų $f+g$ ir fg tolydumą taške a, jeigu:

1) funkcija f yra tolydi, o funkcija g trūki taške a;

2) abi funkcijos yra trūkios tame taške.

Pateikite atitinkamus pavyzdžius.

II.5.18. Ištirkite funkcijų $f \circ g$ ir $g \circ f$ tolydumą, jeigu:

1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(1 - x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;1], \\ 2 - x, & x \in (1;2), \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ 2 - x, & x \in (0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \end{cases}$

4) $f(x) = 1 - |x - 1|, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

II.5.19. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ yra didėjanti ir trūki taške $x_0 \in [a;b]$, o funkcija $g : [f(a); f(b)] \to \mathbb{R}$ yra monotoninė.

1) Pateikite tokių funkcijų f ir g pavyzdžius, kad funkcija $g \circ f$ būtų tolydi taške x_0.

2) Įrodykite: jeigu funkcija g yra griežtai monotoniška taško $f(x_0)$ aplinkoje, tai funkcija $g \circ f$ yra trūki taške x_0.

II.5.20. Sakykime, funkcija $f \in C([a;b])$. Įrodykite, kad $\{m, M\} \subset C([a;b])$, čia $m(x) := \min f([a;x])$, $M(x) := \max f([a;x])$, $x \in [a;b]$.

II.5.21. Sakykime, funkcijos $f \in C(E)$ $g \in C(E)$, $E \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad $\{m, M\} \subset C(E)$, čia $m(x) := \min\{f(x), g(x)\}$, $M(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in E$.

II.5.22. Sakykime, funkcija $f \in [a;b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, yra aprėžta. Įrodykite, kad funkcijos m ir M, $m(x) := \inf f([a;x))$, $M(x) := \sup f([a;x))$, $x \in (a;b]$, yra iš kairės tolydžios, o funkcijos $\overline{m}$ ir $\overline{M}$, $\overline{m}(x) := \inf f((x;b])$, $\overline{M}(x) := \sup f((x;b])$, $x \in [a;b)$, yra iš dešinės tolydžios.

II.5.23. Sakykime, funkcija $f \in C((a;b))$ ir $\exists f(a+0) \in \mathbb{R}$, $f(b-0) \in \mathbb{R}$. Įrodykite, kad funkcija f yra aprėžta.

II.5.24.) Įrodykite, kad funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}, & x \in [-2;2] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tenkina sąlygą $[f(-2); f(2)] \subset f([-2;2])$, tačiau yra trūki. Nubrėžkite jos grafiką.

2) Įrodykite, kad funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

tenkina sąlygą $\forall a \in \mathbb{R}_+ :\ [f(0); f(a)] \subset f([0;a])$, tačiau ta funkcija yra trūki intervale $[0;a]$.

II.5.35. Ar egzistuoja funkcija $f \in C([a;b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, kurios reikšmių sritis $f([a;b])$ būtų: 1) $(0;1]$, 2) $(0;1)$, 3) $\mathbb{R}_+$, 4) $[0;1] \cup [2;3]$?

II.5.36. Nurodykite funkciją $f \in C((a;b))$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, kurios reikšmių sritis būtų: 1) uždarasis intervalas, 2) atvirasis intervalas, 3) pusintervalis.

II.5.37. Sakykime, funkcija $f \in C([0;1],[0;1])$. Įrodykite, kad $\exists x \in [0;1] : f(x) = x$.

II.5.38. Įrodykite, kad aibė E yra vienaelementė, jeigu:

1) $E = \{x \in \mathbb{R} : x \cdot 2^x = 1\}$; 2) $E = \{x \in \mathbb{R} : xe^x = 2\}$; 3) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \varepsilon \sin x + a\}$, $\varepsilon \in (0;1)$, $a \in \mathbb{R}$; 4) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \operatorname{arc\,tg} = a\}$, $a \in \mathbb{R}$; 5) $E = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : 10^{x-1} = x\}$; 6) $E = \big\{x \in \big(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\big) : \operatorname{tg} x = ax\big\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

II.5.39. Įrodykite, kad funkcija f,

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

turi atvirkštinę ir raskite ją.

II.5.40. Sakykime, funkcija $f \in C([a;b])$ ir yra apgręžiama. Įrodykite, kad ta funkcija yra griežtai monotoniška.

II.5.41. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra griežtai monotoniška. Įrodykite, kad atvirkštinė funkcija f^{-1} yra tolydi apibrėžimo srityje $f([a;b])$.

II.5.42. Įrodykite, kad funkcija f, $f(x) = (1+x^2)\operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, yra didėjanti ir trūki, o atvirkštinė funkcija yra tolydi ir didėjanti apibrėžimo srityje $f(\mathbb{R})$.

II.5.43. Įrodykite, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \to \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nėra monotoninė, tačiau apgręžiama.

II.5.44. Įrodykite, kad funkcijos f, $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$, $x \in (0;\pi)$, atvirkštinė funkcija yra tolydi ir mažėjanti apibrėžimo srityje $f((0;\pi))$.

II.5.45. Sakykime, funkcija f, $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, aibė $E \subset \mathbb{R}$ ir funkcija $g := f|_E$. Įrodykite, kad: 1) jeigu $E = \mathbb{R}$, tai funkcija g neturi atvirkštinės; 2) jeigu $E = (-\infty;1]$ arba $E = [1;+\infty)$, tai funkcija g ją turi. Raskite g^{-1}.

II.5.46. Raskite visų $A \in \mathbb{R}$ reikšmių, su kuriomis funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in (-\infty;0], \\ Ax^2 - 2x, & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

yra tolydi ir atverčiama, aibę E bei f^{-1}.

II.5.47. Raskite funkcijos f, $f(x) = x + [x]$, $x \in \mathbb{R}$, atvirkštinę funkciją ir ištirkite jos tolydumą.

II.6. Tiesės topologija.

6.1. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, ir $\exists a \in E \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : U(a, \delta) \subset E$. Toks taškas a yra vadinamas *aibės E vidiniu* tašku, o visų jų aibė – *aibės E vidumi* ir žymima $\operatorname{int} E$.

Jeigu $\exists a \in CE \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : U(a, \delta) \subset CE$, tai toks taškas yra vadinamas *aibės E išoriniu* tašku, visų jų aibė — *aibės E išore* ir žymima $\operatorname{ext} E$.

Jeigu $\exists a \in \mathbb{R} \ \forall \delta \in \mathbb{R}_+ : U_E(a, \delta) \neq \emptyset$, $U_{CE}(a, \delta) \neq \emptyset$, tai toks taškas a yra vadinamas *aibės E kraštiniu* tašku, visų jų aibė — *aibės E kraštu* ir žymima ∂E. Skaičius $d(E, F) := \inf\{|x - y| : x \in E, y \in F\}$ vadinamas *atstumu tarp aibių E ir F*, čia $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$. Jeigu $E = \{x\}$ yra vienaelementė aibė, tai tas skaičius vadinamas *atstumu tarp taško x ir aibės F*.

Pavyzdžiai. 1) Rasime aibės $E = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\}$ vidų, išorę ir kraštą.

Kadangi $E = \{\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, tai $\operatorname{int} E = \emptyset$,

$$\operatorname{ext} E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\Big), \quad \partial E = E.$$

2) Rasime aibės $\mathbb{Q}$ vidų, išorę ir kraštą. Kadangi $\forall a \in \mathbb{R} \ \forall \delta \in \mathbb{R}_+ : U_{\mathbb{Q}}(a, \delta) \neq \emptyset$, $U_{C\mathbb{Q}}(a, \delta) \neq \emptyset$, tai $\delta \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Todėl $\overset{\mathbb{Q}}{\underset{=}{\int}} \operatorname{ext} \mathbb{Q} = \emptyset$.

6.2. Apibrėžimai. Jeigu visi aibės $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, taškai yra jos vidiniai taškai, t.y. $E = \operatorname{int} E$, tai tokia aibė E yra vadinama *atvirąja* (tiesėje $\mathbb{R}$).

Jeigu $E' \cap \mathbb{R} \subset E$, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, tai tokia aibė E yra vadinama *uždarąja* (tiesėje $\mathbb{R}$). Aibė $\overline{E} := E \cup (E' \cap \mathbb{R})$ vadinama aibės E *uždariniu* (tiesėje $\mathbb{R}$). Jeigu aibės $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, ir $\overline{E} \supset F$, tai aibė E yra vadinama *tiršta aibėje F*. Jeigu $\overline{E} = \mathbb{R}$, tai aibė E vadinama *visur tiršta* tiesėje $\mathbb{R}$.

Apibrėžiama, kad aibė $\emptyset$ yra kartu ir uždara, ir atvira.

6.3. Apibrėžimai. Sakykime, T yra bet kuri aibė, $E \subset \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ aibė $G_t \subset \mathbb{R}$ yra atvira ir

$$\bigcup_{t \in T} G_t \supset E.$$

Tuomet aibė $\{G_t : t \in T\}$ yra vadinama *aibės E atviruoju denginiu*.

Jeigu kiekvienas aibės E atvirasis denginys turi tokį baigtinį poaibį, kuris yra aibės E atvirasis denginys, tai tokia aibė E yra vadinama *kompaktine* arba *kompaktu*.

Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$. Tada funkcija w_f,

$$w_f(\delta) := \sup\big\{|f(y) - f(x)| : (x, y) \in E^2, |x - y| < \delta\big\}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+,$$

yra vadinama *funkcijos f tolydumo moduliu*. Ji yra nemažėjanti.

Jeigu $\forall\delta \in \mathbb{R}_+ : w_f(\delta) = +\infty$, tai apibrėžiame $w_f(+0) := +\infty$. Jeigu $\exists\delta_0 \in \mathbb{R}_+ : w_f(\delta_0) < +\infty$, tai $\exists w_f(+0) \in [0; +\infty)$.

Jeigu $w_f(+0) = 0$, tai funkcija f yra vadinama *tolygiai tolydžia aibėje* E.

6.4. Kantoro teorema. *Sakykime, aibė* $K \subset \mathbb{R}$ *yra kompaktas, funkcija* $f \in C(K)$. *Tada* $w_f(+0) = 0$.

Pavyzdžiai. 3) Begalinė atvirųjų aibių sankirta gali nebūti atvirąja aibe.

Imkime atvirųjų intervalų seką $\{(a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$. Tada $\cap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}) = [a; b]$, taigi begalinė (skaiti) atvirųjų intervalų sankirta nėra atviroji aibė.

4) Begalinė uždarųjų aibių sąjunga gali nebūti uždarąja aibe. Iš tikrųjų,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1\right] = (0; 1].$$

Taigi begalinė (skaiti) uždarųjų aibių sąjunga nėra uždaroji aibė, nes taškas 0 nepriklauso sąjungai ir yra jos ribinis taškas.

5) Intervalų seka $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, $G_n : \left(\frac{1}{n+1}, \frac{3}{2}\right)$, yra atvirasis intervalo $(0; 1]$ denginys. Tačiau jis neturi baigtinio poaibio, kuris būtų atviruoju intervalo $(0; 1]$ denginiu.

► Sakykime, priešingai, egzistuoja baigtinė aibė $T \subset \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{n \in T} G_n \supset (0; 1] \tag{1}$$

ir $N := \max T$. Tuomet $(0; \frac{1}{N+1}] \cap (\cup_{n \in T} G_n) = \emptyset$, o tai prieštarauja (1) sąryšiui. Taigi seka $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ neturi baigtinio poaibio, kuris būtų atviruoju intervalo $(0; 1]$ denginiu. ◄

6) Įrodysime, kad funkcija f, $f(x) = e^x$, $x \in (0; 1)$, yra tolygiai tolydi apibrėžimo srityje.

► *Pirmasis būdas.* Kadangi $f'(x) = e^x$ ir $\sup f'((0; 1)) = e$, tai funkcija greičiausiai kinta taško 1 aplinkoje. Todėl tolydumo modulis

$$w_f(\delta) = \sup\{|e^{x_1} - e^{x_2}| : (x_1, x_2) \in (0; 1)^2, |x_1 - x_2| < \delta\} = \begin{cases} e - e^{1-\delta}, & \delta \in (0; 1], \\ e - 1, & \delta \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Kadangi $w_f(+0) = 0$, tai funkcija f yra tolygiai tolydi intervale $(0; 1)$.

Antrasis būdas. Kadangi $f(+0) = 1$ ir $f(1 - 0) = e$, tai funkciją f galima tolydžiai pratęsti į taškus 0 ir 1. Funkcija $\widehat{f}$,

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (0; 1], \\ 1, & x = 0, \\ e, & x = 1, \end{cases}$$

yra tolydi kompaktiniame intervale $[0;1]$ ir pagal Kantoro teoremą ji yra tolygiai tolydi tame intervale. Kadangi aibės, kurioje funkcija yra tolygiai tolydi, bet kuriame poaibyje ta funkcija yra tolygiai tolydi, tai funkcija $\widehat{f} = f$ yra tolygiai tolydi intervale $(0;1)$. ◄

7) Įrodysime, kad funkcija f, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0;1)$, nėra tolygiai tolydi intervale $(0;1)$.

► Kadangi $\forall (x', x'') \in (0;1)^2$:

$$|f(x') - f(x'')| = 2\Big|\sin\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\Big)\cos\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\Big)\Big| \leqslant 2,$$

tai tolydumo modulis w_f, $w_f(\delta) \leqslant 2$, $\delta \in \mathbb{R}_+$.

Imkime sekas $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{x''_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \in (0;1), \qquad x''_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \in (0;1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kadangi $\lim x'_n = \lim x''_n = 0$, $f(x'_n) - f(x''_n) = 2$, tai $w_f(\delta) = 2$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. Todėl $w_f(+0) = 2$ ir funkcija f nėra tolygiai tolydi intervale $(0;1)$. ◄

Iš tolygiojo tolydumo apibrėžimo išplaukia, kad tolygiai tolydi aibėje E funkcija f yra tolydi toje aibėje. Atvirkštinis teiginys apskritai neteisingas, ką parodo 7) pavyzdys.

II.6.1. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad: 1) aibė $\operatorname{int} E$ atvira;

2) jeigu E atvira, o F uždara, tai $E \setminus F$ atvira, $F \setminus E$ uždara;

3) (aibė $F \neq \emptyset$ uždara) $\iff$ ($\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in F : d(x,F) = |x-y|$), čia $d(x,F)$ yra atstumas tarp taško x ir aibės F;

4) jeigu aibės E ir F yra uždaros ir bent viena aprėžta, tai $\exists (x,y) \in E \times F : d(E,F) = |x-y|$, čia $d(E,F)$ yra atstumas tarp aibių E ir F;

5) jeigu aibės E ir F yra uždaros, $E \cap F = \emptyset$ ir bent viena aprėžta, tai $d(E,F) \in \mathbb{R}_+$;

6) funkcija f, $f(x) := d(x,E)$, $x \in \mathbb{R}$, yra tolydi;

7) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ aibė $\{x \in \mathbb{R} : d(x,E) < \varepsilon\}$ yra atvira;

8) $\forall \varepsilon \in [0,+\infty)$ aibė $\{x \in \mathbb{R} : d(x,E) \leqslant \varepsilon\}$ yra uždara;

9) jeigu aibė $F \neq \emptyset$ yra uždara ir $x \in CF$, tai $\exists$ atvirosios aibės G_1 ir G_2:

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad F \subset G_1, \qquad x \in G_2.$$

II.6.2. Sakykime, aibės $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$. Įrodykite, kad:

1) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$;

2) aibė $E' \cap \mathbb{R}$ yra uždara (tiesėje $\mathbb{R}$);

3) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$;

4) $(E \cup F)' = E' \cup F'$ (tiesėje $\mathbb{R}$).

II.6.3. Nurodykite tokią aibę $E \subset \mathbb{R}$, kad visi jos taškai būtų izoliuotieji, tačiau $E' \neq \emptyset$.

II.6.4. Įrodykite, kad bet kurios aibės $E \subset \mathbb{R}$ visų izoliuotųjų taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.

II.6.5. Nurodykite tokią aibę $E \subset \mathbb{R}$, kad:

1) $E' \neq \emptyset$, $E'' := (E')' = \emptyset$;

2) $E \sim \mathbb{N}$, $E' \sim \mathbb{R}$, $E' \cap E = \emptyset$.

II.6.6. Įrodykite: jeigu aibė $E \subset \mathbb{R}$ tenkina sąlygą $E' \sim \mathbb{N}$, tai $E \sim \mathbb{N}$.

II.6.7. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, o aibę M sudaro visos uždarosios aibės $F \subset \mathbb{R}$, jog $F \supset E$. Įrodykite, kad

$$\overline{E} = \bigcap_{f \in M} F.$$

II.6.8. Sakykime, $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra netuščių kompaktų seka ir $\forall n \in \mathbb{N} : F_n \supset F_{n+1}$. Įrodykite, kad $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ yra netuščias kompaktas.

II.6.9. Įrodykite, kad $\forall$ atviroji aibė $G \subset \mathbb{R}$ yra baigtinė arba skaiti atvirųjų poromis nesikertančių intervalų sąjunga.

II.6.10. Įrodykite: jeigu aibė $F \subset \mathbb{R}$ yra begalinė ir uždara, tai $\exists E \subset F$, $E \sim \mathbb{N} : \overline{E} = F$.

II.6.11. Nurodykite tokią atvirąją aibių seką $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = [a, b],$$

čia $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

II.6.12. Nurodykite tokią uždarųjų aibių seką $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (a, b),$$

čia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

II.6.13. Įrodykite: $\forall$ atvirajai aibei $G \subset \mathbb{R}$ $\exists$ tokia uždarųjų aibių seka $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, jog $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

II.6.14. Įrodykite: $\forall$ atvirajai aibei $F \subset \mathbb{R}$ $\exists$ tokia atvirųjų aibių seka $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, jog $F = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$.

II.6.15. Sakykime, aibė $\{G_t : t \in T\}$, čia T – begalinė aibė, yra atvirasis aibės $E \subset \mathbb{R}$ denginys. Įrodykite, kad iš to denginio galima išrinkti skaitųjį aibės E denginį.

II.6.16. Sakykime, funkcija $f \in C(F)$, čia $F \subset \mathbb{R}$ yra uždara. Nurodykite funkciją $g \in C(\mathbb{R})$, jog $g\big|_F = f$.

II.6.17. Sakykime, funkcija $f \in C(F)$, čia $F \subset \mathbb{R}$ yra uždara. Įrodykite: $\forall c \in \mathbb{R}$ aibė $\{x \in F : f(x) \geqslant c\}$ yra uždara.

II.6.18. Nurodykite tokią trūkiąją funkciją $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kad $\forall c \in \mathbb{R}$ abi aibės $\{x \in [a, b] : f(x) \geqslant c\}$ ir $\{x \in [a, b] : f(x) = c\}$ būtų uždaros.

II.6.19. Sakykime, funkcija $f \in C([a,b])$ yra didėjanti ir $\overline{E} = [a,b]$, čia aibė $E \subset [a,b]$. Įrodykite, kad $\overline{f(E)} = [f(a), f(b)]$.

II.6.20. Sakykime, $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra atvirųjų visur tirštų aibių seka. Įrodykite, kad $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ yra visur tiršta.

II.6.21. Nurodykite tokią visur tirštų aibių seką $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : E_n \supset E_{n+1}$, jog $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.

II.6.22. Įrodykite, kad $\forall E \subset \mathbb{R}$ aibė $\overline{CE \cup \operatorname{int} E} = \mathbb{R}$.

II.6.23. Sakykime, funkcija $f \in C([a,b])$, aibė $F \subset [a,b]$ yra kompaktas. Įrodykite, kad aibė $f(F)$ yra kompaktas.

II.6.24. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $F := \cup_{x \in E} \overline{U}(x, \varepsilon)$, čia $\overline{U}(x,\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} : |y - x| \leqslant \varepsilon\})$. Įrodykite:

1) jeigu E atvira, tai F atvira;

2) jeigu E uždara, tai F uždara.

II.6.25. Sakykime, aibė $G \subset \mathbb{R}$ atvira ir aprėžta, o aibė $F \subset G$ yra netuščiasis kompaktas. Įrodykite, kad $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ :$

$$\{x \in \mathbb{R} : d(x, F) \leqslant \varepsilon\} \subset G.$$

II.6.26. Įrodykite, kad funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, yra tolygiai tolydi aibėje E, jeigu:

1) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $E = (0;1)$;
2) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $E = (0;1)$;
3) $f(x) = \sin^2 x$, $E = [0;+\infty)$;
4) $f(x) = e^{-x}$, $E = [0;+\infty)$;
5) $f(x) = \sin \sin x$, $E = [0;+\infty)$;
6) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $E = [0;+\infty)$;
7) $f(x) = 2x - 1$, $E = \mathbb{R}$;
8) $f(x) = x^2$, $E = (-l;l), l \in \mathbb{R}_+$;
9) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $E = [0;2]$;
10) $f(x) = \sin x$, $E = (-3;3)$;
11) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $E = (0;\pi)$;
12) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $E = \mathbb{R}$.

II.6.27. Įrodykite, kad funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, nėra tolygiai tolydi aibėje E, jeigu:

1) $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, $E = (0;1)$;
2) $f(x) = \sin x^2$, $E = \mathbb{R}$;
3) $f(x) = \ln x$, $E = (0;1)$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $E = (0;1)$;
5) $f(x) = x \sin x$, $E = [0;+\infty)$;
6) $f(x) = \sin x^2$, $E = [0;+\infty)$;
7) $f(x) = e^x$, $E = [0;+\infty)$;
8) $f(x) = e^{\sin x^2}$, $E = [0;+\infty)$;
9) $f(x) = \sin(x \sin x)$, $E = [0;+\infty)$;
10) $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $E = (0;1)$.

II.6.28. Ištirkite, ar funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, yra tolygiai tolydi aibėje E, jeigu:

1) $f(x) = x + \sin x$, $E = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = e^{-\arcsin x}$, $E = [-1;1]$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $E = \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $E = (0;1)$;

5) $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $E = (-1; 1)$; 6) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $E = \mathbb{R}_+$;

7) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1; 0], \\ 1 + x, & x \in (0; 1]; \end{cases}$ 8) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty; 0], \\ e^{-x}, & x \in \mathbb{R}_+; \end{cases}$

9) $f(x) = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{x}$, $E = (0; 1)$; 10) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $E = [a; +\infty), a \in \mathbb{R}_+$.

II.6.29. Įrodykite, kad funkcija f, $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$, yra tolygiai tolydi kiekviename intervale $(-1; 0)$ ir $(0; 1)$, tačiau nėra tolygiai tolydi apibrėžimo srityje.

II.6.30. Raskite funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, tolydumo modulį w_f, jeigu

1) $f(x) = 2x - 1$, $E = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = |x|$, $E = \mathbb{R}$;
3) $f(x) = x$, $E = [-2; -1] \cup [1; 2]$; 4) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $E = [-2; 5]$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $E = [a; 1], a \in (0; 1)$; 6) $f(x) = 2 \sin x - \cos x$, $E = \mathbb{R}$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{2a}(|x + a| - |x - a|)$, $E = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$; 8) $f(x) = \cos x$, $E = \mathbb{R}$;
9) $f(x) = \ln x$, $E = [1; +\infty)$; 10) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $E = (0; 1)$;
11) $f(x) = x^3$, $E = [0; 1]$.

II.6.31. Nurodykite funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ pavyzdį, kad būtų

$$w_f(\delta) = \begin{cases} \delta, & \delta \in (0; 1], \\ +\infty, & \delta \in (1; +\infty). \end{cases}$$

II.6.32. Sakykime, funkcijos f ir g yra tolygiai tolydžios i) intervale $[a; b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$; ii) intervale $[a; +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Nurodykite, kurios iš funkcijų 1) cf, $c \in \mathbb{R}$; 2) $f + g$; 3) fg yra tolygiai tolydžios intervale $[a; b]$ bei intervale $[a; +\infty)$. Pateikite atitinkamus pavyzdžius.

II.6.33. Sakykime, funkcija $f : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ yra tolygiai tolydi intervale $[1; +\infty)$. Įrodykite, kad $\exists C \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in [1; +\infty)$:

$$\frac{|f(x)|}{x} \leqslant C.$$

II.6.34. Sakykime, funkcija $f \in C([a; +\infty))$, $a \in \mathbb{R}$, ir $\exists f(+\infty) \in \mathbb{R}$. Įrodykite, kad funkcija f yra tolygiai tolydi intervale $[a; +\infty)$.

II.6.35. Sakykime, funkcija $f \in C(\mathbb{R})$ ir periodinė. Įrodykite, kad funkcija f yra tolygiai tolydi tiesėje $\mathbb{R}$.

II.6.36. Sakykime, funkcija $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, yra tolygiai tolydi apibrėžimo srityje. Įrodykite, kad tada yra teisingas vienas iš teiginių: 1) f yra aprėžta apibrėžimo srityje, 2) $\exists f(+\infty) = -\infty$, 3) $\exists f(+\infty) = +\infty$.

III. FUNKCIJOS $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DIFERENCIALINIS SKAIČIAVIMAS

III.1. Išvestinė.

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, $a\in E$ ir

$$\exists\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=: f'(a)\in\overline{\mathbb{R}}. \tag{1}$$

Tuomet skaičius $f'(a)$ vadinamas *funkcijos f išvestine taške a*. Kitaip $f'(a)$ dar vadinama *funkcijos f kitimo* arba *akimirkiniu greičiu taške a*. Pirmoji riba dar žymima simboliais $\frac{df}{dx}(a)$ arba $f'|_{x=a}$. Jeigu $f'(a)\in\mathbb{R}$, tai funkcija f vadinama *diferencijuojama taške a*. Jeigu taškas $a\in E$ yra aibės E dešininis ribinis taškas ir

$$\exists\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=: f'_k(a)\in\overline{\mathbb{R}},$$

tai skaičius $f'_k(a)$ vadinamas *funkcijos f kairine išvestine taške a*. Jeigu taškas $a\in E$ yra aibės E kairinis ribinis taškas, tai analogiškai apibrėžiama funkcijos f *dešininė išvestinė $f'_d(a)$ taške a*.

Jeigu funkcija f yra diferencijuojama kiekviename aibės E taške, tai ji vadinama *diferencijuojama aibėje E*. Tuomet apibrėžiama nauja funkcija $f':E\to\mathbb{R}$, kuri vadinama *funkcijos f išvestine aibėje E*.

1.2. Teorema. *Sakykime, funkcijos $f:E\to\mathbb{R}$, $g:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, yra diferencijuojamos taške $a\in E$ tada funkcijos $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ yra diferencijuojamos tame taške ir teisingos lygybės*

$$(f+g)'(a)=(f'+g')(a),\qquad (fg)'(a)=(f'g+fg')(a),$$
$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(a)=\frac{f'g-fg'}{g^2}(a).$$

1.3. Teorema. *Sakykime, funkcija $f:E\to F$, $E\subset\mathbb{R}$, $F\subset\mathbb{R}$, yra diferencijuojama taške a, o funkcija $g:F\to\mathbb{R}$ diferencijuojama taške $b=f(a)$. Tada funkcija $g\circ f:E\to\mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške a ir teisinga lygybė*

$$(g\circ f)'(a)=g'(b)\cdot f'(a).$$

1.4. Išvestinių lentelė. Teisingos formulės:

$$f(x)=C,\quad x\in\mathbb{R},\ C\in\mathbb{R}-\text{konstanta}\ \Rightarrow f'(x)=0,\ x\in\mathbb{R}; \tag{2}$$

$$f(x)=x^{\alpha},\quad x\in\mathbb{R}_+,\ \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\alpha x^{\alpha-1},\ x\in\mathbb{R}_+; \tag{3}$$

$$f(x)=a^{x},\quad x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}\Rightarrow f'(x)=a^{x}\ln a,\ x\in\mathbb{R}; \tag{4}$$

$$f(x)=\log_a x,\quad x\in\mathbb{R}_+,\ a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln a},\ x\in\mathbb{R}_+; \tag{5}$$

$$f(x)=\sin x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}; \tag{6}$$

$$f(x)=\cos x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=-\sin x,\ x\in\mathbb{R}; \tag{7}$$

$$f(x)=\operatorname{tg} x,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\cdot k\in\mathbb{Z}\right\}=:E\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\in E; \tag{8}$$

$$f(x)=\operatorname{ctg} x,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi: k\in\mathbb{Z}\}=:E\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\in E; \tag{9}$$

$$f(x)=\operatorname{sh} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\operatorname{ch} x,\ x\in\mathbb{R}; \tag{10}$$

$$f(x)=\operatorname{ch} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\operatorname{sh} x,\ x\in\mathbb{R}; \tag{11}$$

$$f(x)=\operatorname{th} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ x\in\mathbb{R}; \tag{12}$$

$$f(x)=\operatorname{cth} x,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\ x\in\mathbb{R}; \tag{13}$$

$$f(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1;1]\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1),\\ +\infty, & x\in\{-1;1\};\end{cases} \tag{14}$$

$$f(x)=\arccos x,\quad x\in[-1;1]\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1;1),\\ -\infty, & x\in\{-1;1\};\end{cases} \tag{15}$$

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}; \tag{16}$$

$$f(x)=\operatorname{arc\,ctg} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}; \tag{17}$$

$$f(x)=\operatorname{ar\,sh} x,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}; \tag{18}$$

$$f(x)=\operatorname{ar\,ch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\in[1;+\infty)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x\in(1;+\infty),\\ +\infty, & x=1;\end{cases} \tag{19}$$

$$f(x)=\operatorname{ar\,th} x,\quad x\in(-1;1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1-x^2},\ x\in(-1;1); \tag{20}$$

$$f(x)=\operatorname{ar\,cth} x,\quad x\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]=:E\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2-1},\ x\in E; \tag{21}$$

$$h(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},\ x\in E\Rightarrow h'(x)=\left(h\left(g'\ln f+\frac{f'g}{f}\right)\right)(x), x\in E, \tag{22}$$

čia funkcijos $f:E\to\mathbb{R}_+$, $g:E\to\mathbb{R}$, yra diferencijuojamos aibėje E.

Pavyzdžiai. 1) Ištirsime, ar funkcija f, $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, diferencijuojama tiesėje R. Jeigu $x\in(-\infty;0)$, tai $f(x)=-x$ ir $f'(x)=-1$. Jeigu $x\in\mathbb{R}_+$, tai $f(x)=x$ ir $f'(x)=1$. Dabar ištirsime, ar funkcija diferencijuojama taške 0. Randame kairinę ir dešininę išvestines tame taške:

$$f'_k(0) = \lim_{h\to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{-h}{h} = -1,$$
$$f'_d(0) = \lim_{h\to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h}{h} = 1.$$

Kadangi $f'_k(0) \neq f'_d(0)$, tai funkcija f neturi išvestinės taške 0, taigi nediferencijuojama tame taške.

Vadinasi, $f'(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Rasime funkcijos f, $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x^2}{sh^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x^2}{2}$ išvestinę f' ir jų apibrėžimo sritis.

Funkcijos f apibrėžimo sritis $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Naudodami funkcijų santykio ir sudėtinės funkcijos diferencijavimo formules, rasime

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \operatorname{sh} x^2 \cdot \operatorname{sh}^2 x^2 - 2\operatorname{sh} x^2 \cdot \operatorname{ch} x^2 \cdot 2x \cdot \operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^4 x^2} - \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{x^2}{2}} \cdot \Big(- \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{x^2}{2}} \Big) x =$$
$$= \frac{2x(\operatorname{sh}^2 x^2 - 2\operatorname{ch}^2 x^2)}{\operatorname{sh}^3 x^2} + \frac{2x}{2\operatorname{ch} \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{x^2}{2}} = \frac{4x\big(\operatorname{sh}^2 x^2 - \operatorname{ch}^2 x^2\big)}{\operatorname{sh}^3 x^2} = -\frac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2},$$

apibrėžimo sritis $\mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$.

3) Sakykime, funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty; a], \\ Ax + B, & x \in (a; +\infty), \end{cases}$$

čia $(a, A, B) \in \mathbb{R}^3$. Rasime tokias A ir B reikšmes, kad funkcija f būtų diferencijuojama taške a.

Būtinoji sąlyga, kad funkcija f būtų diferencijuojama taške a, yra jos tolydumas tame taške. Todėl trys skaičiai $f(a) = a^2$, $f(a-0) = a^2$, $f(a+0) = Aa + B$, turi būti tarpusavyje lygūs. Taigi $B = a^2 - aA$.

Kad tolydžioji funkcija f būtų diferencijuojama taške a, turi egzistuoti, būti baigtinėmis ir tarpusavyje lygiomis abi vienpusės išvestinės. Randame

$$f'_k(a-0) = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-0} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a,$$
$$f'_d(a+0) = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+0} \frac{A(x-a)+a^2-a^2}{x-a} = A.$$

Taigi $A = 2a$, $B = -a^2$.

4) Išspręsime lygtį $f'(x) = 0$ aibėje $\mathcal{D}(f')$, jeigu $f(x) = \max\{7x - 6x^2, |x|^3\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Išsprendę nelygybę $7x-6x^2>|x|^3$, gausime

$$f(x)=\begin{cases}|x|^3, & x\in\mathbb{R}\setminus(0;1),\\ 7x-6x^2, & x\in(0;1).\end{cases}$$

Todėl

$$f'(x)=\begin{cases}7-12x, & x\in(0;1),\\ 3x^2\operatorname{sgn}x, & x\in\mathbb{R}\setminus[0;1].\end{cases}$$

Ištirsime, ar funkcija f turi išvestines taškuose 0 ir 1. Randame

$$\begin{aligned}
f'_k(0)&=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-x^3}{x}=0,\\
f'_d(0)&=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{7x-6x^2}{x}=7,\\
f'_k(1)&=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{7x-6x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)(1-6x)}{x-1}=-5,\\
f'_d(1)&=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3.
\end{aligned}$$

Taigi funkcija f neturi išvestinės taškuose 0 ir 1, todėl $\mathcal{D}(f')=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Išsprendę lygtį $f'(x)=0$, $x\in\mathcal{D}(f')$, randame vienintelį sprendinį $x_0=\frac{7}{12}$.

5) Sakykime, $E=\{a_k:1\leqslant k\leqslant n\}\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ – fiksuotas skaičius. Sudarysinme funkciją, kuri būtų tolydi tiesėje $\mathbb{R}$, diferencijuojama aibėje $\mathbb{R}\setminus E$ ir nediferencijuojama aibėje E. Tam panaudosime faktą, kad funkcija g, $g(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, yra tolydi tiesėje, diferencijuojama aibėje $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ir nediferencijuojama taške 0.

Apibrėžkime funkciją f,

$$f(x):=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|,\quad x\in\mathbb{R},$$

kuri yra tolydi tiesėje ir diferencijuojama aibėje $\mathbb{R}\setminus E$. Kadangi

$$\begin{aligned}
f'_k(a_k)&=\lim_{x\to a_k-0}\frac{f(x)}{x-a_k}=-\prod_{j=1,j\neq k}^{n}|a_k-a_j|\neq0,\\
f'_d(a_k)&=\lim_{x\to a_k+0}\frac{f(x)}{x-a_k}=-f'_k(a_k),\quad k\in\{1;\cdots;n\},
\end{aligned}$$

tai funkcija f nediferencijuojama aibėje E.

6) Įrodysime, kad funkcijos f, $f(x)=x+\sin x$, $x\in\mathbb{R}$, atvirkštinė funkcija yra diferencijuojama aibėje $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}$, o aibėje $\{(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}$ jos išvetinė lygi $+\infty$.

► Žinome, kad funkcija f yra didėjanti, tolydi ir $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (II.5.10) pavyzdys). Be to, ji diferencijuojama ir $f'(x) = 1 + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Kadangi $\forall x \in \mathbb{R}:\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$, tai, naudodami atvirkštinės funkcijos diferencijavimo teoremą, randame

$$(f^{-1})'(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}, & y \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ +\infty, & y \in \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \end{cases}$$

čia $y := f(x)$.

Iš tikrųjų, aibė $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\} = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ir $y = f\big((2k+1)\pi\big) = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ◄

1.5. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : U(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $r \in (0; +\infty]$, ir $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Tuomet funkcija $d_a f =: df$,

$$(d_a f)(h) := f'(a)h, \qquad h \in \mathbb{R},$$

vadinama *funkcijos f diferencialu taške a*.

Tiesės

$$T_{(a,f(a))}(\Gamma) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(a) + f'(a)(x-a)\big\}$$

ir

$$N_{(a,f(a))}(\Gamma) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)\Big\}, \quad f'(a) \neq \emptyset,$$

vadinamos *funkcijos f grafiko* Γ atitinkamai *liestine* ir *normale taške* $(a, f(a))$.

Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}^2$, funkcija $F\colon E \to \mathbb{R}$, aibė $C := \{(x,y) \in E : F(x,y) = 0\} \neq \emptyset$, $\exists$ toks atvirasis intervalas $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ ir tokia diferencijuojama funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, kad aibė $\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{J}\} \subset C$. Tokia funkcija f vadinama *neišreikštine funkcija*, kurią apibrėžia lygtis $F(x,y) = 0$.

Pavyzdžiai. 7) Rasime funkcijos f, $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $x \in \mathbb{R}$, grafiko Γ liestinę ir normalę taškuose $(-1;0)$, $(2;3)$ ir $(3;0)$.

Kadangi

$$f'(x) = \frac{4(2-x)}{3(3-x)^{2/3}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\},$$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(4+h)\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(4+h)}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty,$$

tai

$$T_{(-1;0)}(\Gamma) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt[3]{4}(x+1)\big\},$$

$$N_{(-1;0)}(\Gamma) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)\big\},$$

$$T_{(2;3)}(\Gamma) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3\big\}, \quad N_{(2;3)}(\Gamma) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\big\},$$

$$T_{(3;0)}(\Gamma) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\big\}, \quad N_{(3;0)}(\Gamma) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\}.$$

8) Rasime neišreikštinės funkcijos f, $y=f(x)$, $x\in\mathcal{D}(f)$, $y\geqslant -5$, kurią apibrėžia lygtis $x^2+y^2-6x+10y-2=0$ išvestinę aibėje $\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ ir d_3f.
Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $(x-3)^2+(y+5)^2=36$, kurios sprendinių aibė yra apskritimas su centru $(3;-5)$ ir spinduliu 6, kurį sudaro dviejų funkcijų f_1 ir f,

$$f_1(x)=-5-\sqrt{27+6x-x^2},\qquad f(x)=-5+\sqrt{27+6x-x^2},\quad x\in[-3;9],$$

grafikų sąjunga. Laikydami, kad $y=f(x)$, $x\in(-3;9)$, diferencijuojame pradinę lygtį ir randame

$$2x+2yy'-6+10y'=0,\qquad (y+5)y'=3-x,$$
$$f'(x)=\frac{3-x}{f(x)+5},\quad x\in(-3;9).$$

Kadangi $f'(3)=0$, tai $(d_3f)(h)=0$, $h\in\mathbb{R}$.

III.1.1. Raskite funkcijos f baigtinę išvestinę f' ir abiejų funkcijų apibrėžimo sritis, jeigu:

1) $f(x)=(1+nx^m)(1+mx^n)$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$;
3) $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; 4) $f(x)=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$, $(p,q)\in\mathbb{R}^2$;
5) $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;
7) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; 8) $f(x)=\sin\cos^2x\cdot\cos\sin^2x$;
9) $f(x)=\sin^nx\cdot\cos nx$, $n\in\mathbb{N}$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^nx}$, $n\in\mathbb{N}$;
11) $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$; 12) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;
13) $f(x)=\sec^2\dfrac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{a}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 14) $f(x)=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;
15) $f(x)=e^x\Big(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\Big)$;
16) $f(x)=e^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0;0\}$;
17) $f(x)=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$;
18) $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$;
19) $f(x)=\overset{3}{\lg}x^2$; 20) $f(x)=\ln\ln\ln x$;
21) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 22) $f(x)=\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$;
23) $f(x)=\ln\operatorname{tg}\Big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\Big)$; 24) $f(x)=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$;
25) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$; 26) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$;
27) $f(x)=\arcsin\,\sin x$; 28) $f(x)=\arcsin(\sin x-\cos x)$;

29) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

30) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\Big(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\Big), b\in[0;+\infty),\ a>b$;

31) $f(x)=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

32) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

33) $f(x)=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}},\ a\in\mathbb{R}_+$;

34) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

35) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)$;

36) $f(x)=\arcsin\dfrac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}$;

37) $f(x)=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$;

38) $f(x)=\sqrt[x]{x}$;

39) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$;

40) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;

41) $f(x)=\log_x e$;

42) $f(x)=\ln\operatorname{ch}x+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$;

43) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{th}x$;

44) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$;

45) $f(x)=\log_x\cos x$;

46) $f(x)=(\operatorname{ch}x)^{e^x}$.

III.1.2. Sakykime, funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Raskite funkcijos f išvestinę, jeigu:

1) $f(x)=x|x|$;
2) $f(x)=(x-1)^2|x+1|^3$;
3) $f(x)=|\sin x|^{3/2}$;
4) $f(x)=[x]\sin^2\pi x$;
5) $f(x)=|\sin x|\sin x$;
6) $f(x)=\big(x-[x]\big)\sin^2\pi x$;
7) $f(x)=\big(\sin x+|\sin x|\big)^2$.

III.1.3. Sakykime, funkcijos $f_{kl}:U(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $r\in(0;+\infty]$, $n\geqslant 2$, yra diferencijuojamos taške a. Įrodykite, kad

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k1} & \cdots & f_{kl} & \cdots & f_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nl} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}'(a)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1l} & \cdots & f_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f'_{k1} & \cdots & f'_{kl} & \cdots & f'_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nl} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}(a).$$

III.1.4. Sakykime, funkcijos $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra diferencijuojamos. Raskite funkcijos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ išvestinę, jeigu:

1) $h:=\sqrt[n]{f^2+g^2}$, $n\in\mathbb{N}$, $f^2+g^2>0$ tiesėje $\mathbb{R}$;

2) $h=\ln|\frac{f}{g}|$, $f\cdot g\neq 0$ tiesėje $\mathbb{R}$;

3) $h=\log_g f$, $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}_+$, $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$;

4) $h=\sqrt[g]{f}$, $g\neq 0, f>0$ tiesėje $\mathbb{R}$;

5) $h(x)=f(\sin^2 x)+g(\cos^2 x)$.

III.1.5. Raskite tokias $(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$ reikšmes, kad funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ būtų diferencijuojama, jeigu:

$$1)f(x)=\begin{cases}Ax+B, & x\in(-\infty;1],\\ x^2, & x\in(1;+\infty);\end{cases}\qquad 2)f(x)=\begin{cases}A+Bx^2, & x\in(-1;1),\\ \frac{1}{|x|}, & x\in\mathbb{R}\setminus(-1;1);\end{cases}$$

$$3)f(x)=\begin{cases}Ax^3+Bx, & x\in[-2;2],\\ \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus[-2;2];\end{cases}$$

$$4)f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in(-\infty;1],\\ A(x-1)(x-2)(x-B), & x\in(1;2);\\ \frac{x}{2}-1, & x\in[2;+\infty);\end{cases}$$

$$5)f(x)=\begin{cases}(x+A)e^{-Bx}, & x\in(-\infty;0),\\ Ax^2+Bx+1, & x\in[0;+\infty];\end{cases}\qquad 6)f(x)=\begin{cases}Ax+B, & x\in(-\infty;0),\\ A\cos x+B\sin x, & x\in[0;+\infty);\end{cases}$$

$$7)f(x)=\begin{cases}4x, & x\in(-\infty;0],\\ Ax^2+Bx+C, & x\in(0;1),\\ 3-2x, & x\in[1;+\infty);\end{cases}\qquad 8)f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in(-\infty;a],\\ Ax+B, & x\in(a;+\infty),\end{cases}$$

čia funkcija g diferencijuojama intervale $(-\infty;a]$, $g'(a)=g'_k(a)$, $a\in\mathbb{R}$ – konstanta.

III.1.6. Raskite visas $t\in\mathbb{R}$ reikšmes, su kuriomis funkcija

$$f(x)=\begin{cases}|x|^t\sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

taške 0 : 1) tolydi, 2) diferencijuojama, 3) turi tolydžią išvestinę.

III.1.7. Raskite visas $t\in\mathbb{R}$ ir $u\in\mathbb{R}_+$ reikšmes, su kuriomis funkcija

$$f(x)=\begin{cases}|x|^t\sin\frac{1}{|x|^u}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

taške 0 : 1) tolydi, 2) diferencijuojama, 3) turi tolydžią išvestinę.

III.1.8. Raskite funkcijos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ išvestinę visuose taškuose, kuriuose ji diferencijuojama, jeigu:

$$1)f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\end{cases}\qquad 2)f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q},\\ 2|x|-1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

III.1.9. Raskite funkcijos $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, kairinę ir dešininę išvestines, jeigu:

$$1)\ f(x)=[x]\sin\pi x,\ E=\mathbb{R};\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

$$3)\ f(x)=\sqrt{\sin x^2}, E=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(!\big[-\sqrt{(2n+1)\pi};-\sqrt{2n\pi}\big]\cup\big[\sqrt{2n\pi};\sqrt{(2n+1)\pi}\big]!\Big)\Big)\cup\big[-\sqrt{\pi};\sqrt{\pi}\big];$$

4) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{1/x}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 5) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}},\ x\in\mathbb{R};$

6) $f(x)=|\ln|x||,\ E=\mathbb{R}\setminus\{0\};$ 7) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R};$

8) $f(x)=\begin{cases}(x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{2\},\\ 0, & x=2;\end{cases}$ 9) $f(x)=\max\{x^2,x+2\},\ x\in\mathbb{R};$

10) $f(x)=\max\{\sin x,0\},\ x\in\mathbb{R}.$

III.1.10. Naudodami išvestinės sąvoką, raskite sumas S_n, jeigu:

1) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N};$ 2) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^k,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N};$

3) $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)x^{2k+1},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N};$ 4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k,\ n\in\mathbb{N};$

5) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k,\ n\in\mathbb{N};$ 6) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k;$

7) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$

III.1.11. Sakykime, funkcijos $f:U(a,r)\to\mathbb{R},\ g:U(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}_+$. Įrodykite arba paneikite pavyzdžiais teiginius:

1) jeigu funkcija f diferencijuojama, o funkcija g nediferencijuojama taške a, tai funkcijos $f+g$ ir fg nediferencijuojamos taške a;

2) jeigu funkcijos f ir g nediferencijuojamos taške a, tai ir funkcijos $f+g$ bei fg nediferencijuojamos taške a.

III.1.12. Įrodykite arba paneikite pavyzdžiais teiginį: jeigu funkcija $f:U(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+$, yra diferencijuojama taške a, tai $\exists r_1\in(0;r]$, jog funkcija f diferencijuojama aplinkoje $U(a,r_1)$.

III.1.13. Nurodykite tokią funkciją $f:U(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}_+$, kad funkcijos f ir f^2 būtų nediferencijuojamos, o funkcija f^3 diferencijuojama taške a.

III.1.14. Nurodykite funkcijų $f:U(a,r)\to U(b,r_1),\ g:U(b,r_1)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R},\ b=f(a)$, $(r,r_1)\in\mathbb{R}_+^2$, pavyzdžius, kad funkcija $g\circ f$ būtų diferencijuojama taške a, jeigu:

1) funkcija f nediferencijuojama taške a, o funkcija g diferencijuojama taške b;

2) funkcija f diferencijuojama taške a, o funkcija g nediferencijuojama taške b;

3) funkcijos f ir g nediferencijuojamos atitinkamuose taškuose a ir b.

III.1.15. Sakykime funkcijos $f:(a;b)\to\mathbb{R},\ g:(a,b)\to\mathbb{R},\ (a;b)\in\overline{\mathbb{R}}^2,\ a<b$, yra diferencijuojamos intervale $(a;b)$. Įrodykite arba paneikite pavyzdžiais teiginius:

1) jeigu $f<g$, tai $f'\leqslant g'$ intervale $(a;b)$;

2) jeigu $f'<g'$, tai $f<g$ intervale $(a;b)$;

3) jeigu funkcijos f ir g yra apibrėžtos ir tolydžios taške a, $f(a)=g(a)$ bei $f'<g'$, tai $f<g$ intervale $(a;b)$.

III.1.16. Sakykime, funkcija $f:U(0;r)\to\mathbb{R}$, $r\in(0;+\infty]$, yra diferencijuojama. Įrodykite teiginius:

1) jeigu funkcija f yra nelyginė, tai f' yra lyginė;

2) jeigu funkcija f yra lyginė, tai f' yra nelyginė.

III.1.17. Sakykime, funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra diferencijuojama ir T – periodinė, $T\in\mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad f' yra T– periodinė.

III.1.18. Sakykime, funkcija $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, $(a;b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$, $a<b$ yra diferencijuojama intervale $(a;b)$. Įrodykite arba paneikite pavyzdžiais teiginius:

1) jeigu $\exists f'(a+0)\in\{-\infty;+\infty\}$, tai $\exists f(a+0)\in\{-\infty;+\infty\}$;

2) jeigu $\exists f(a+0)\in\{-\infty;+\infty\}$, tai $\exists f'(a+0)\in\{-\infty;+\infty\}$;

3) jeigu $b=+\infty$ ir $\exists f(+\infty)$, tai $\exists f'(+\infty)$;

4) jeigu $b=+\infty$ ir $\exists f'(+\infty)$, tai $\exists f(+\infty)$.

III.1.19. Sakykime, funkcija $f:U(a;r)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $r\in(0;+\infty]$, yra diferencijuojama taške a. Raskite ribas:

1) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} n\Big(f\Big(a+\dfrac{1}{n}\Big)-f(a)\Big)$;

2) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} n\Big(f(a)-f\Big(a-\dfrac{1}{2n}\Big)\Big)$;

3) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} n\Big(f\Big(a+\dfrac{1}{n}\Big)-f\Big(a-\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$;

4) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$, čia seka $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\dot{U}(a,r)$, $\lim x_n=a$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$, $a=0, f'(0)\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$, $n\in\mathbb{N}$;

7) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} n\left(\sum\limits_{i=1}^{k} f\Big(a+\dfrac{i}{n}\Big)-kf(a)\right)$, $k\in\mathbb{N}$;

8) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f\Big(a+\dfrac{i}{n^2}\Big)-nf(a)\right)$;

9) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$, $f(a)\in\mathbb{R}_+$;

10) $\lim\limits_{x\to a}\big(\dfrac{f(x)}{f(a)}\big)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$, $a\in\mathbb{R}_+, f(a)\in\mathbb{R}_+$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{j=1}^{k} f\Big(\dfrac{x}{j}\Big)$, $a=0, f(0)=0, k\in\mathbb{N}$.

III.1.20. Naudodami išvestinės sąvoką raskite ribas:

1) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{m-1}}\sum\limits_{j=1}^{k}(n+j)^m-kn\right)$, $(k,m)\in\mathbb{N}^2$;

2) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\dfrac{1}{a^{nk}}\prod\limits_{j=1}^{k}\Big(a+\dfrac{j}{n}\Big)^n$, $a\in\mathbb{R}_+, k\in\mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\prod\limits_{j=1}^{n}\Big(1+\frac{aj}{n^2}\Big), \quad a\in\mathbb{R}_+;$

4) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\cos^n\frac{1}{n};$

5) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\operatorname{tg}^n\frac{\pi(n+1)}{4n};$

6) $\lim\limits_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}\sin^n\frac{\pi(n+1)}{2n}.$

III.1.21. Sakykime, funkcija $f: U(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $r\in(0;+\infty]$, diferencijuojama taške a, sekos $\{x_n: n\in\mathbb{N}\}\subset\dot{U}(a,r)$, $\{y_n: n\in\mathbb{N}\}\subset\dot{U}(a,r)$, $\lim x_n=\lim y_n=a$, $\forall n\in\mathbb{N}:$ $x_n\neq y_n$. Įrodykite:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$ gali neegzistuoti arba egzistuoti, bet nebūti lygia $f'(a)$;

2) jeigu $\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n<a<y_n$, tai 1) teiginio riba egzistuoja ir lygi $f'(a)$.

III.1.22. Raskite figūros $\{(t,y)\in\mathbb{R}^2: t\in[0;|x|], y\in[0;f(t)]\}$ plotą $S(x)$, išvestinę $S'(x)$ ir nubrėžkite funkcijos S' grafiką, jeigu:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;2],\\ 2(x-1), & x\in(2;+\infty);\end{cases}\qquad 2)\ f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, x\in[-a;a], a\in\mathbb{R}_+.$$

III.1.23. Sakykime, funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra diferencijuojama. Raskite visų taškų, kuriuose funkcija $|f|$ gali būti nediferencijuojama, aibę E ir funkcijos $|f|$ išvestinę aibėje $\mathbb{R}\setminus E$.

III.1.24. Sakykime, funkcijos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra diferencijuojamos. Raskite visų taškų, kuriuose funkcija h, $h(x):=\max\{f(x),g(x)\}$, $x\in\mathbb{R}$, diferencijuojama, aibę E ir $h'(x)$, $x\in E$.

III.1.25. Sakykime, funkcija $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, yra diferencijuojama, $f'_d(a):=f'(a)$, $f'(b):=f'_k(b)$. Ištirkite, ar funkcija h, $h(x):=\max f\big([a;x]\big)$, $x\in[a;b]$, yra diferencijuojama ir ar egzistuoja h'_k bei h'_d.

III.1.26. Raskite funkcijos $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, apgręžimo aibes ir jas atitinkančių atvirkštinių funkcijų išvestines, jeigu:

1) $y=f(x)=x^3+3x, x\in\mathbb{R};$ 2) $y=f(x)=x+\frac{1}{5}x^5, x\in\mathbb{R};$

3) $y=f(x)=x+\varepsilon\sin x, x\in\mathbb{R}, \varepsilon\in[0;1];$ 4) $y=f(x)=2x-\frac{1}{2}\cos x, x\in\mathbb{R};$

5) $y=f(x)=x+e^x, x\in\mathbb{R};$ 6) $y=f(x)=x+\ln x, x\in\mathbb{R}_+;$

7) $y=f(x)=\operatorname{sh}x, x\in\mathbb{R};$ 8) $y=f(x)=\operatorname{th}x, x\in\mathbb{R}.$

III.1.27. Raskite funkcijos f diferencialą d_xf, $x\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$, jeigu

1) $f(x)=\dfrac{1}{x};$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$

3) $f(x) = \dfrac{1}{2a} \ln \left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 4) $f(x) = \ln \left|x + \sqrt{x^2+a}\right|, a \in \mathbb{R};$
5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};$ 6) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}, a \in \mathbb{R};$
7) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{a}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 8) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{|x|};$
9) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|};$ 10) $f(x) = x^{x^2}.$

III.1.28. Raskite funkcijos f diferencialą $(d_a f)(h)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $h \in \mathbb{R}$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{x-1}{x}, a = -1;$ 2) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\ln x}{x}, a = \dfrac{1}{e};$
3) $f(x) = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}, a = 0;$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2 2^x}{x^x}, a = 1.$

III.1.29. Panaudodami sąryšį $f(a+h) = f(a) + (d_a f)(h) + o(h)$, $h \to 0$, raskite reikšmės $f(x)$ įvertį, jeigu

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 65;$ 2) $f(x) = \sqrt[5]{x}, x = 243,45;$
3) $f(x) = \sqrt[10]{x}, x = 1000;$ 4) $f(x) = \sin x, x = 359°;$
5) $f(x) = \arcsin x, x = 0,51;$ 6) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x, x = 47°15'.$

III.1.30. Sakykime, aibė $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ yra atvirasis intervalas, kuriam priklauso taškas x_0, o funkcija $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ yra ta diferencijuojama neišreikštinė funkcija, kurią apibrėžia lygtis $F(x,y) = 0$ ir kuri tenkina sąlygą $y_0 = f(x_0)$. Raskite f' ir $d_{x_0} f$, jeigu:
1) $F(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 2x$, $x_0 = -1$, $y_0 = -3$;
2) $F(x,y) = y^2 - 2px$, $p \in \mathbb{R}_+$, $x_0 = \frac{p}{2}$, $y_0 = p$;
3) $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2_+$, $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$;
4) $F(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $x_0 = \frac{a}{4}$, $y_0 = \frac{a}{4}$;
5) $F(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, $y_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}a$;
6) $F(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
7) $F(x,y) = y^3 - y - 6x^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$;
8) $F(x,y) = x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$;
9) $F(x,y) = (2a-x)y^2 - x^3$, $a \in \mathbb{R}_+$, $x_0 = a$, $y_0 = -a$;
10) $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+$, $x_0 = \sqrt{2}a$, $y_0 = -b$.

III.1.31. Parašykite liestinės ir normalės lygtis funkcijos $y = f(x)$, $x \in \mathcal{D}(f)$, grafikui Γ nurodytame taške (x_0, y_0), jeigu:
1) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$, $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}], (1, f(1))$;

2) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $(0, f(0))$;

3) $f(x) = \ln \frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(0, f(0))$;

4) $f(x) = 4\operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$;

5) $f(x) = |x-1|\sqrt[3]{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$, $(-2; f(-2)$;

6) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0,\ y \in (-3; +\infty)\}$, $(0; f(0))$;

7) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1\}$, $(6; 6,4)\}$;

8) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + \ln y = 1\}$, $(1;1)\}$.

III.1.32. Raskite kreivių $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$ ir $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ sankirtos taškus ir kampus φ tarp kreivių tuose taškuose, jeigu:

1) $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$;

2) $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{\frac{x}{2}}\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$;

3) $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4x\}$;

4) $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - xy - 7 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$.

III.1.33. Raskite sąryšį tarp koeficientų $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(b,c) \in \mathbb{R}^2$, kad funkcijos f, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas liestų $0x$ ašį.

III.1.34. Raskite koeficiento $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, reikšmes, kad funkcijos f, $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, grafikas liestų funkcijos f_2, $f_2(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}_+$, grafiką.

III.1.35. Raskite kreivių – parabolių

$$\Gamma_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = p^2 - 2px\}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ir

$$\widehat{\Gamma}_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = q^2 + 2qx\}, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

sankirtos taškus ir kampus φ tarp kreivių tuose taškuose.

III.2. Aukštesniųjų eilių išvestinės.

2.1. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, taškas $x_0 \in E \cap E'$, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ir $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, jog funkcija f yra diferencijuojama aibėje $U_E(x_0, \delta) \subset E$ ir $\exists (f')'(x_0)$. Tuomet skaičius $f''(x_0) := (f')'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ yra vadinamas *funkcijos f antrosios eilės išvestine taške* x_0. Jeigu $f''(x_0) \in \mathbb{R}$, tai *funkcija f* vadinama *du kartus diferencijuojama taške x_0*. Induktyviai apibrėžiamas skaičius $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, vadinamas *funkcijos f n-tosios eilės išvestine taške x_0*. Jeigu $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, tai funkcija f vadinama *n kartų diferencijuojama taške x_0*. Jeigu funkcija f yra diferencijuojama aibėje E ir $f' \in C(E)$, tai ta funkcija f vadinama *glodžia* arba *tolydžiai difgerencijuojama aibėje E*. Visų tokių funkcijų aibė žymima $C^1(E)$. Jeigu funkcija f yra n kartų, $n \geqslant 2$, diferencijuojama aibėje E ir $f^{(n)} \in C(E)$, tai funkcija f vadinama *$n-$ glodžia* arba *n kartų tolydžiai diferencijuojama aibėje E*. Visų tokių funkcijų aibė žymima $C^n(E)$. Jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$:

$f \in C^n(E)$, tai ji vadinama *be galo glodžia* arba *be galo tolydžiai diferencijuojama aibėje* E. Visų tokių funkcijų aibė žymima $C^\infty(E)$.

Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, yra du kartus diferencijuojama taške $x_0 \in E$. Tada funkcija $d^2_{x_0} f$

$$\big(d^2_{x_0} f\big)(h) := \big(d_{x_0}(d_{x_0} f)(h)\big)(h) = f''(x_0)h^2, \quad h \in \mathbb{R},$$

yra vadinama *funkcijos* f *antrosios eilės diferencialu taške* x_0. Tarus, jog funkcija f yra n kartų diferencijuojama taške x_0, induktyviai yra apibrėžiamas *funkcijos* f n*-osios eilės* $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$ *diferencialas taške* x_0 $d^n_{x_0} f$,

$$\big(d^n_{x_0}\big)(h) := \big(d_{x_0}(d^{n-1}_{x_0} f)(h)\big)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Pavyzdžiai. 1) Rasime funkcijos

$$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad x \in (0;2),$$

antrosios eilės išvestinę intervale $(0;2)$ ir antrosios eilės diferencialą taške 1.

Paeiliui diferencijuodami randame

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{1 + \frac{(1-x)^2}{2x-x^2}} \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1-x)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x - x^2} = (2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}(2x - x^2)^{-\frac{3}{2}} 2(1-x) = \frac{x-1}{(2x-x^2)^{3/2}}, \; x \in (0;2). \end{aligned}$$

Tada

$$(d^2_1 f)(h) = f''(1)h^2 = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

2) Rasime funkcijos

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-5x}}, \qquad x \in \Big(-\infty; \frac{1}{5}\Big),$$

n-tosios, $n \in \mathbb{N}$, eilės išvestinę apibrėžimo srityje ir n-tosios eilės diferencialą taške 0.

Kad būtų patogiau skaičiuoti funkcijos f išvestines, ją užrašome

$$f(x) = \frac{1}{5}\big((1-5x)^{-\frac{1}{2}} - (1-5x)^{\frac{1}{2}}\big)$$

ir apibrėžiame funkcijas g_1 ir g_2,

$$g_1(x) := (1-5x)^{-\frac{1}{2}}, \; g_2(x) := (1-5x)^{\frac{1}{2}}, \; x \in \Big(-\infty; \frac{1}{5}\Big).$$

Tada

$$g_1'(x) = \frac{5}{2}(1-5x)^{-\frac{3}{2}}, g_1''(x) = \frac{5^2 \cdot 3}{2^2}(1-5x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$g_1^{(n)}(x) = \frac{5^n(2n-1)!!}{2^n}(1-5x)^{-\frac{2n+1}{2}}, n \in \mathbb{N};$$

$$g_2'(x) = -\frac{5}{2}g_1(x), g_2^{(n)}(x) = -\frac{5}{2}g_1^{(n-1)}(x), n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

Kadangi

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{5}\big(g_1^{(n)} - g_2^{(n)}\big)(x),$$

tai, atlikę veiksmus, rasime

$$f^{(n)}(x) = \frac{5^{n-1}\varkappa_n}{2^n}(2n-5x)(1-5x)^{-\frac{2n+1}{2}}, x \in \Big(-\infty; \frac{1}{5}\Big), n \in \mathbb{N},$$

čia

$$\varkappa_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (2n-3)!!, & n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Randame n-tosios eilės diferencialą

$$\big(d_0^n f\big)(h) = f^{(n)}(0)h^n = \Big(\frac{5}{2}\Big)^{n-1} \cdot n \cdot \varkappa_n h^n, \quad h \in \mathbb{R}.$$

3) Rasime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & x \in (-\infty; 0), \\ \sin x \operatorname{ch} x, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

diferencijuojamumo taške 0 eilę n.

Kadangi

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & x \in (-\infty; 0), \\ \cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x, & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

$$f_k'(0) = \lim_{x \to -0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{ch} 0 = 1,$$

$$f_d'(0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x \operatorname{ch} x}{x} = \cos 0 \operatorname{ch} 0 + \sin 0 \operatorname{sh} 0 = 1,$$

tai funkcija f yra diferencijuojama taške 0 ir $f'(0) = 1$. Be to, $f' \in C(\mathbb{R})$.

Analogiškai

$$f''(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & x \in (-\infty; 0), \\ 2\cos x \operatorname{sh} x, & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

$$f_k''(0) = \lim_{x \to -0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x} = \operatorname{sh} 0 = 0,$$

$$f_d''(0) = \lim_{x \to +0} \frac{\cos x \operatorname{ch} x + \sin x \operatorname{sh} x - 1}{x} = 2\cos 0 \operatorname{sh} 0 = 0.$$

Taigi funkcija f yra du kartus diferencijuojama taške 0, $f''(0) = 0$ ir $f'' \in C(\mathbb{R})$. Randame trečiosios eilės išvestines:

$$f'''(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & x \in (-\infty; 0), \\ 2(-\sin x \operatorname{sh} x + \cos x \operatorname{ch} x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

$$f_k'''(0) = \lim_{x \to -0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{ch} 0 = 1,$$

$$f_d'''(0]) = \lim_{x \to +0} \frac{2\cos x \operatorname{ch} x}{x} = 2(-\sin 0 \operatorname{sh} 0 + \cos 0 \operatorname{ch} 0) = 2.$$

Taigi $\overline{\exists} f'''(0)$ ir $n = 2$.

III.2.1. Raskite funkcijos antrosios eilės išvestinę apibrėžimo srityje $\mathcal{D}(f)$ ir antrosios eilės diferencialą taške x_0, jeigu:

1) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \mathcal{D}(f) = (-1; 1)$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = e^{-x^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, x_0 = 0$; 4) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, x_0 = 0$;
5) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\mathcal{D}(f) = (-1; 1), x_0 = 0$; 6) $f(x) = x\ln x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+, x_0 = 1$;
7) $f(x) = x(\sin\ln x + \cos\ln x)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+, x_0 = 1$;
8) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}, x_0 = 0$;
9) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, x_0 = 0$;
10) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, x_0 = 0$.

III.2.2. Sakykime, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra du kartus diferencijuojama, o funkcija $\varphi := f \circ g$. Raskite funkcijos φ antrosios eilės išvestinę apibrėžimo srityje ir antrosios eillės diferencialą taške x_0, jeigu:

1) $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}, x_0 = 0$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_0 = 1$;
3) $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, x_0 = 0$; 4) $g(x) = \ln x, x \in \mathbb{R}_+, x_0 = 1$.

III.2.3. Sakykime, aibė $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ yra intervalas, o funkcija $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ yra ta du kartus diferencijuojama intervale $U(x_0)$ funkcija, kurią apibrėžia lygtis $F(x,y) = 0$ ir kuri tenkina sąlygą $y_0 = f(x_0)$. Raskite f'' ir $d^2_{x_0} f$, jeigu:

1) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25, x_0 = 3, y_0 = 4$; 2) $F(x,y) = y^2 - 2px, p \in \mathbb{R}_+, x_0 = \dfrac{p}{2}, y_0 = -p$;
3) $F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1, x_0 = 1, y_0 = 1$; 4) $F(x,y) = y^2 + 2\ln y - x^4, x_0 = -1, y_0 = 1$;
5) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - ae^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}, a \in \mathbb{R}_+, x_0 = -a, y_0 = 0$;
6) $F(x,y) = e^{x-y} - (x+y), x_0 = \dfrac{1}{2}, y_0 = \dfrac{1}{2}$;
7) $F(x,y) = y - x\operatorname{tg} \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0, x_0 = e^{\pi}, y_0 = 0$;

III.2.4. Raskite funkcijos f n-tosios, $n \in \mathbb{N}$, eilės išvestinę apibrėžimo srityje, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, c \neq 0$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

4) $f(x) = \sin^2 x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

5) $f(x) = \cos^3 x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

6) $f(x) = \cos ax \cos bx, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

7) $f(x) = x^2 \sin ax, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

9) $f(x) = e^x \sin x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

10) $f(x) = \ln \dfrac{a+bx}{a-bx}, \mathcal{D}(f) = \Big(- \Big|\dfrac{a}{b}\Big|; \Big|\dfrac{a}{b}\Big|\Big), \{a,b\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

11) $f(x) = e^{ax} P_m(x), \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, P_m - -m - \text{tojo}, m \in \mathbb{N}, \text{laipsnio polinomas};$

12) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+,$

13) $f(x) = e^{ax} \sin(bx+c), \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a^2+b^2 \neq 0$

(nuoroda: 13)–15) uždaviniuose panaudokite Muavro–Laplaso formules $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $i := \sqrt{-1}$);

14) $f(x) = \operatorname{ch} ax \cos bx, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2+b^2 \neq 0$;

15) $f(x) = \sin^m x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ (nuoroda: funkciją f užrašykite kaip trigonometrinį polinomą $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k \cos 2kx$, kai $m = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, arba $\sum\limits_{k=1}^{p} b_k \sin(2k-1)x$, kai $m = 2p-1$, $p \in \mathbb{N}$);

16) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (nuoroda: panaudokite lygybę $\dfrac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$);

17) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, x \in \mathbb{R}$ (nuoroda: panaudokite 16) užduotį).

III.2.5. Sakykime, $\mathbb{R} \subset \mathcal{J}$ yra atvirasis intervalas, funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ yra tris kartus diferencijuojama ir $f' \neq 0$ intervale $\mathcal{J}$.

Įrodykite, kad atvirkštinė funkcija $f^{-1} : f(\mathcal{J}) \to \mathbb{R}$ yra irgi tris kartus diferencijuojama aibėje $\mathcal{D}(f^{-1})$ bei raskite jos išvestines iki trečiosios eilės imtinai.

III.2.6. Sakykime, funkcija $f : (-\infty; x_0] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, yra du kartus diferencijuojama. Raskite sąryšius tarp koeficientų $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, kad funkcija

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (-\infty; x_0], \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x \in (x_0; +\infty), \end{cases}$$

irgi būtų du kartus diferencijuojama.

III.2.7. Sakykime, funkcija $\varphi \in C^{n-1}\big(U(a,r)\big), n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, r \in (0;+\infty]$. Raskite funkcijos f, $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, $x \in U(a,r)$, išvestinę $f^{(n)}(a)$.

III.2.8. Įrodykite, kad funkcijai f,

$$f(x) := \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\exists f^{(n)}(0)$ ir $\overline{\exists} f^{(n+1)}(0)$.

III.2.9. Raskite polinomų $P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, analizinę išraišką, jeigu:

1) $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\big((x^2-1)^m\big)^{(m)}$ (*Ležandro polinomai*);

2) $P_m(x) = e^x \big(x^m e^{-x}\big)^{(m)}$ (*Lagerio polinomai*);

3) $P_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \big(e^{-x^2}\big)^{(m)}$ (*Čebyševo–Ermito polinomai*).

II.2.10. Įrodykite, kad funkcija $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, jeigu:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \exp\Big\{-\frac{1}{x}\Big\}, & x \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & x \in (-\infty; 0]; \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} \exp\Big\{-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-x}\Big\}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (a;b), \end{cases}$$

$(a,b)^2 \in \mathbb{R}$, $a < b$.

III.2.11. Matematinės indukcijos metodu įrodykite lygybes:

$$1)\ \big(x^n \ln x\big)^{(n)} = n!\Big(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big), x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N};$$

$$2)\ \Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\Big(\ln x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big), x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N};$$

$$3)\ \big(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\big)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

III.2.12. Raskite tokį $n \in \mathbb{N}$, kad funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\exists f^{(n)}(0)$, $\overline{\exists} f^{(n+1)}(0)$, ir raskite $f^{(k)}(0)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, jeigu:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 1-\cos x, & x \in (-\infty;0), \\ \ln(1+x) - x, & x \in [0;+\infty); \end{cases} \quad 2)\ f(x) = \begin{cases} 2x\cos x, & x \in (-\infty;0), \\ \sin 2x, & x \in [0;+\infty); \end{cases}$$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x - x, & x \in (-\infty;0), \\ x - \sin x, & x \in [0;+\infty); \end{cases} \quad 4)\ f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x^{10}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

III.2.13. Taškas juda tiese pagal dėsnį $s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t^3$, čia s matuojama metrais, t – sekundėmis. Raskite taško pagreitį praėjus $5s$ nuo judėjimo pradžios.

III.2.14. Vienas taškas juda tiese pagal dėsnį $s_1(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^3 - 5t$, antrasis – pagal dėsnį $s_2(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$, čia s_1 ir s_2 matuojami metrais, t – sekundėmis. Raskite taškų pagreičius tuo momentu, kai jų greičiai yra lygūs.

III.2.15. Materialusis taškas, kurio masė $m = 0,1\,kg$, juda tiese pagal dėsnį $s(t) = t^2 - 4t^4$, čia s matuojamas metrais, t – sekundėmis. Raskite jėgos, veikiančios tašką laiko momentu $t = 3s$, dydį.

III.2.16. Taškas juda tolygiai apskritimu $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$, $r \in \mathbb{R}_+$, čia r matuojamas metrais, apeidamas jį vieną kartą per Ts. Raskite taško projekcijos į $0x$ ašį greitį $v(t)$ ir pagreitį $a(t)$, $t \in [0;T]$, jeigu pradiniu momentu $t = 0$ taškas užima padėtį $(r,0)$.

III.3. Diferencialinės tarpinių reikšmių teoremos

3.1. Lagranžo (baigtinių pokyčių) teorema. *Sakykime, 1) funkcija* $f \in C([a;b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, *2)* $\exists f' : (a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$. *Tada* $\exists \xi \in (a;b)$:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi).$$

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad funkcija f, $f(x) = x(x^2-1)$ tenkina Rolio teoremos sąlygas intervaluose $[-1;1]$ ir $[0;1]$. Rasime visus grafiko taškus, kuriuose grafiko liestinė lygiagretė $0x$ ašiai.

► Funkcija f tolydi abiejuose intervaluose ir jų viduje diferencijuojama. Be to, $f(-1) = f(1) = f(0) = 0$. Taigi Rolio teoremos visos sąlygos tenkinamos.

Kadangi lygties

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

sprendinių aibė yra $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\}$, tai funkcijos f grafike intervale $[-1;1]$ yra du taškai $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}})$ ir $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{3\sqrt{3}})$, kuriuose grafiko liestinė lygiagretė $0x$ ašiai. Funkcijos f grafikas intervale $[0;1]$ turi tik vieną tašką $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{3\sqrt{3}})$, kuriame liestinė lygiagreti $0x$ ašiai. ◄

2) Įrodysime, kad Ležandro polinomų (III.2.9.1))

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\big((x^2-1)^n\big)^{(n)}, \; x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

visos šaknys yra realiosios, skirtingos ir priklauso intervalui $(-1;1)$.

► Apibrėžkime polinomus

$$Q_{2n}(x) := (x^2-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N},$$

kurie teturi dvi šaknis -1 ir 1, o kiekviena iš jų yra n-kartotinė. Jeigu $n \geqslant 2$, tai polinomas Q'_{2n} turi dvi šaknis -1 ir 1, kurių kiekviena yra $(n-1)$-kartotinė, ir pagal Rolio teoremą polinomui Q_{2n} dar bent vieną šaknį $a \in (-1;1)$. Kadangi $\deg Q'_{2n} = 2n-1$ ($\deg P$ – polinomo P laipsnis) ir šaknų kartotinumų suma turi būti lygi $2n-1$, tai a yra paprastoji polinomo Q'_{2n} šaknis. Indukcijos būdu įrodytume, kad polinomo $Q_{2n}^{(n-1)}$ visos šaknys yra realiosios ir paparastosios. Sunumeravę jas didėjimo tvarka, t.y. $-1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = 1$ ir taikydami Rolio teoremą polinomui $Q_{2n}^{(n-1)}$ intervale $[x_k; x_{k+1}]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, gausime, kad intervale $(x_k; x_{k+1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, yra bent viena polinomo $Q_{2n}^{(n)}$ šaknis. Kadangi $\deg Q_{2n}^{(n)} = n$, tai visos polinomo $Q_{2n}^{(n)}$ šaknys, kurių yra n, yra realiosios, skirtingos ir priklauso intervalui $(-1;1)$. Tačiau

$$Q_{2n}^{(n)} = 2^n n! P_n,$$

taigi polinomų $Q_{2n}^{(n)}$ ir P_n šaknų aibės sutampa. ◄

3.2. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E \cap E'$ ir $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in U_E(a,\delta)$: $f(x) \leqslant f(a)$ $\big(f(x) \geqslant f(a)\big)$. Toks taškas a yra vadinamas *funkcijos f lokaliojo maksimumo (minimumo) tašku.*

Jeigu $\forall x \in \dot{U}_E(a.\delta)$: $f(x) < f(a)$ $\big(f(x) > f(a)\big)$, tai taškas a vadinamas *funkcijos f griežto lokaliojo maksimumo (minimumo) tašku.*

Minėtieji taškai yra vadinami *funkcijos f lokaliojo* atitinkamai *griežtojo lokaliojo ekstremumo taškais.*

Jeigu $\exists a \in E$ $\forall x \in E$: $f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$, tai taškas a vadinamas *funkcijos f globaliojo maksimumo (minimumo) tašku.*

Pavyzdžiai. 3) Rasime funkcijos f,

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

monotoniškumo intervalus, ekstremumo taškus bei didžiausiąją ir mažiausiąją reikšmes, jeigu jos egzistuoja.

Kadangi

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tai funkcija didėja, kai $4 - x^2 > 0$, t.y. intervale $(-2;2)$, ir mažėja, kai $4 - x^2 < 0$, t.y. kiekviename iš intervalų $(-\infty;-2)$ ir $(2;+\infty)$. Taškas -2 yra funkcijos griežto lokaliojo minimumo, o taškas 2 – griežto lokaliojo maksimumo taškai. Kadangi $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$, tai tie taškai yra ir griežto lokaliojo ekstremumo taškai. Todėl

$$\min f(\mathbb{R}) = -\frac{1}{4}, \qquad \max f(\mathbb{R}) = \frac{1}{4}.$$

4) Įrodysime, kad $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $e^x > 1 + x$.

► Apibrėžkime funkciją f, $f(x) := e^x - 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$. Ta funkcija didėja, kai $f'(x) = e^x - 1 > 0$, t.y. intervale $\mathbb{R}_+$, ir mažėja, kai $f'(x) < 0$, t.y. intervale $(-\infty; 0)$. Todėl taškas 0 yra funkcijos f griežto globaliojo minimumo taškas ir $f(0) = 0$. Taigi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f(x) > 0$, ką ir reikėjo įrodyti. ◄

5) Įrodysime, kad $\forall x \in [1; +\infty)$:

$$2\mathrm{arc\,tg}\, x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

► Apibrėžkime funkciją f,

$$f(x) := 2\mathrm{arc\,tg}\, x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [1; +\infty).$$

Kadangi $f \in C([1; +\infty))$ ir $\forall x \in (1; +\infty)$:

$$f'(x) := \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{1+x^2})}} \frac{2(1 + x^2 - 2x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\big(1 + \mathrm{sgn}\,(1 - x^2)\big) = 0,$$

tai funkcija f yra pastovi intervale $(1; +\infty)$, taigi ir intervale $[1; +\infty)$. Tačiau $f(1) = \pi$, todėl $\forall x \in [1; +\infty)$: $f(x) = \pi$, ką ir reikėjo įrodyti. ◄

6) Kanalas, kurio plotis b m, yra statmenas upei, kurios plotis a m. Raskite laivo, kuris iš upės gali įplaukti į kanalą, didžiausiąjį ilgį.

Laivo, kurio padėtis nurodyta 1 brėžinyje, ilgis

$$l(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}, \quad \varphi \in \Big(0; \frac{\pi}{2}\Big).$$

Kadangi

$$l'(\varphi) = \frac{a\sin^3\varphi - b\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}, \quad \varphi \in \Big(0; \frac{\pi}{2}\Big),$$

tai funkcija l mažėja, kai $l'(\varphi) < 0$, t.y. intervale $(0; \varphi_0)$, čia $\varphi_0 := \mathrm{arc\,tg}\,(\frac{b}{a})^{1/3}$, ir didėja, kai $l'(\varphi) > 0$, t.y. intervale $(\varphi_0; \frac{\pi}{2})$. Taškas φ_0 yra funkcijos l griežtojo globaliojo minimumo taškas. Todėl laivo di-

1 brėžinys

džiausiasis ilgis

$$l(\varphi_0) = \Big(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\Big)^{\frac{3}{2}} m.$$

3.3. Apibrėžimai. Sakykime, $\mathbb{R} \supset \mathcal{J}$ yra intervalas, funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ turi savybę $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{J}^2 \;\; x_1 < x_2 \;\; \forall x \in [x_1; x_2]$:

$$f(x) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{1}$$

Tokia funkcija vadinama *žemyn (aukštyn) iškila intervale* $\mathcal{J}$. Jeigu (1) sąryšyje " = " ženklas yra tik tada, kai $x = x_1$ arba $x = x_2$, tai funkcija f vadinama *griežtai žemyn (aukštyn) iškila intervale* $\mathcal{J}$.

Jeigu funkcija f yra tolydi taške $x_0 \in \operatorname{int} \mathcal{J}$ ir $\exists \delta \in \mathbb{R}$, jog intervale $[x_0 - \delta; x_0] \subset \operatorname{int} \mathcal{J}$ funkcija f yra griežtai vienaip iškila, o intervale $[x_0; x_0 + \delta] \subset \operatorname{int} \mathcal{J}$ – griežtai priešingai iškila, tai toks taškas x_0 yra vadinamas *funkcijos* f *perlinkio tašku*.

Pavyzdžiai. 7) Rasime funkcijos f, $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, iškilumo intervalus ir perlinkio taškus.

Randame antrosios eilės išvestinę

$$f''(x) = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

ir aibes $\{x \in \mathbb{R} : -\sin x > 0\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}'_k$ bei $\{x \in \mathbb{R} : -\sin x < 0\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}''_k$, čia $\mathcal{J}'_k := \big((2k+1)\pi; 2(k+1)\pi\big)$, $\mathcal{J}''_k := \big(2k\pi; (2k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Intervaluose $\mathcal{J}'_k(\mathcal{J}''_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, funkcija f bus žemyn (aukštyn) iškila, o visi perlinkio taškai sudarys aibę $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

8) Įrodysime, kad $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$:

$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{1}{2}(x+y)}.$$

► Apibrėžkime funkciją f, $f(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Kadangi $f''(x) = e^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$, tai funkcija f yra griežtai žemyn iškila intervale $\mathbb{R}$. Todėl $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \;\; x \neq y$:

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)),$$

ką ir reikėjo įrodyti. ◄

3.4. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : U(+\infty, \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, tenkina sąlygas:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Tuomet tiesė

$$L := \{(x, y) : y = Ax + B\}$$

yra vadinama *funkcijos* f *grafiko pasvirąja (horizontaliąja, kai* $A = 0$*) asimptote*, kai $x \to +\infty$. Analogiškos sąvokos apibrėžiamos funkcijai $f : U(-\infty, \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, kai $x \to -\infty$.

Sakykime, funkcija $f : \dot{U}(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, tenkina sąlygą: egzistuoja bent vienas skaičius $f(x_0 - 0)$ arba $f(x_0 + 0)$ ir jis priklauso aibei $\{-\infty; +\infty\}$. Tuomet tiesė

$$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}$$

yra vadinama *funkcijos f grafiko vertikaliąja asimptote*, kai $x \to x_0 - 0$ ($f(x_0 - 0) \in \{-\infty; +\infty\}$) arba $x \to x_0 + 0$ ($f(x_0 + 0) \in \{-\infty; +\infty\}$).

Pavyzdys. 9) Rasime visas funkcijos f, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$, $x \in \mathbb{R}$, grafiko asimptotes.

Akivaizdu, kad grafikas neturi vertikaliųjų asimptočių, nes $f \in C(\mathbb{R})$. Kadangi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} x\Big(\Big(1 - \frac{6}{x^2}\Big)^{\frac{1}{3}} - 1\Big) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\Big(1 - \frac{2}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) - 1\Big) = 0 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x),\end{aligned}$$

tai funkcijos grafikas turi vieną asimptotę $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x\}$, kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$.

Dabar nurodysime planą, pagal kurį "raštingai" yra brėžiamas funkcijos grafikas.

1. Nustatoma funkcijos apibrėžimo sritis, periodiškumas, grafiko simetriškumas, trūkio taškai ir taškai, kuriuose grafikas kerta koordinatines ašis, randamos funkcijos reikšmės arba ribos apibrėžimo srities kraštiniuose taškuose.
2. Randamos asimptotės.
3. Randami monotoniškumo intervalai ir ekstremumo taškai.
4. Randami iškilumo intervalai ir perlinkio taškai.
5. Gauti rezultatai surašomi lentelėn.
6. Nubrėžiamas grafikas.

Pavyzdžiai. 10) Nubrėšime funkcijos f, $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ grafiką apibrėžimo srityje.

1. Apibrėžimo sritis $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, funkcija neperiodinė, nei lyginė, nei nelyginė, $f \in C(\mathbb{R})$, grafikas kerta $0x$ ašį taške $(2, 0)$ ir $0y$ ašį taške $(0, -2)$, $f(-\infty) = -1$, $f(+\infty) = 1$.

2. Naudodami dvi paskutines ribas, randame dvi horizontaliąsias asimptotes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$, kai $x \to -\infty$, ir $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, kai $x \to +\infty$.

3. Kadangi

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tai funkcija f didėja, kai $f'(x) > 0$, t.y. intervale $(-\frac{1}{2}; +\infty)$, ir mažėja, kai $f'(x) < 0$, t.y. intervale $(-\infty; -\frac{1}{2})$. Taškas $-\frac{1}{2}$ yra funkcijos f griežto globaliojo minimumo taškas ir $f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5} \approx -2,24$.

4. Kadangi

$$f''(x) = \frac{-4x^2 - 3x + 2}{(x^2+1)^{5/2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tai funkcija f yra žemyn iškila, kai $f''(x) > 0$, t.y. intervale $(x_1; x_2)$, ir aukštyn iškila, kai $f''(x) < 0$, t.y. intervaluose $(-\infty; x_1)$ bei $(x_2; +\infty)$, čia

$$x_1 = -\frac{\sqrt{41}+3}{8} \approx -1,18, \quad x_2 = \frac{\sqrt{41}-3}{8} \approx 0,43.$$

Taškai x_1 ir x_2 yra funkcijos f perlinkio taškai, $f(x_1) \approx -2,06$, $f(x_2) \approx -1,46$.

5. Sudarome lentelę

x	$-\infty$	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; x_2)$	x_2	$(x_2; +\infty)$	$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow\frown$	$f(x_1)$	$\searrow\smile$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow\smile$	$f(x_2)$	$\nearrow\frown$	1
$f'(x)$	–	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0	–
$f''(x)$	–	< 0	0	> 0	> 0	> 0	0	< 0	–

6. Funkcijos f grafikas pavaizduotas 2 brėžinyje.

2 brėžinys

11) Nubrėšime kreivę $\Gamma = \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$, kurią sudaro neišreikštinių funkcijų $y = f(x)$, $x \in \mathcal{D}(f)$, grafikai.

1. Kadangi kreivė yra simetrinė koordinatinių ašių atžvilgiu, tai jos dalį nubrėšime pirmajame ketvirtyje, kuriame $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 y$, $\operatorname{ch} y = \operatorname{sh} y$, $y = \operatorname{ar}\operatorname{ch}\operatorname{sh} x = \ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 - 1})$, $x \in [\operatorname{sh} 1; +\infty) = [\ln(\sqrt{2}+1); +\infty)$. Grafikas kerta $0x$ ašį taške $(\ln(\sqrt{2}+1), 0)$, $0y$ ašies nekerta. Funkcija neperiodinė, $f(+\infty) = +\infty$.

2. Kadangi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\bigl(\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}\bigr)}{x}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x\bigl(1+o(1)\bigr)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+o(1)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)-x\bigr)=\lim_{x\to+\infty}\bigl(x+o(1)-x\bigr)=0,$$

tai tiesė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$ yra funkcijos f grafiko asimptotė, kai $x\to+\infty$.

3. Diferencijuodami lygtį $\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}y=0$, $x\in[\operatorname{sh}1;+\infty)$, $y\in[0;+\infty)$, randame

$$y'=f'(x)=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}y},\quad x\in(\operatorname{sh}1;+\infty),$$

taigi funkcija f didėja išvestinės apibrėžimo srityje. Be to,

$$f'_d(\operatorname{sh}1)=\lim_{x\to sh1+0}\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}y}=+\infty.$$

Taškas $\operatorname{sh}1$ yra griežto globaliojo minimumo taškas, funkcijos f grafiko dešininė liestinė taške $(\operatorname{sh}1,0)$ yra pustiesė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\in[0;+\infty),\ x=\operatorname{sh}1\}$.

4. Randame antrosios eilės išvestinę

$$y''=f''(x)=\Bigl(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}y}\Bigr)'=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y-\operatorname{ch}x\operatorname{ch}yy'}{\operatorname{sh}^2y}=$$
$$\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y(\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x)-(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}y)}{\operatorname{sh}^3y}=\frac{-2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}^3y},\ x\in(\operatorname{sh}1;+\infty).$$

Kadangi $f''(x)<0$, $x\in(\operatorname{sh}1;+\infty)$, tai funkcija f yra aukštyn iškila tame intervale ir perlinkio taškų nėra.

5. Sudarome lentelę

x	$\operatorname{sh}1$	$(\operatorname{sh}1;+\infty)$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow\frown$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	>0	$-$
$f''(x)$	$-$	<0	$-$

6. Kreivė pavaizduota 3 brėžinyje.

3 brėžinys.

III.3.1. Ištirkite, ar funkcija f, $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1;1]$, tenkina Rolio teoremos sąlygas ir ar ta teorema jai teisinga.

III.3.2. Ištirkite, ar funkcija f tenkina Lagranžo teoremos sąlygas ir ar jai teisinga ta teorema nurodytajame intervale, jeigu:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \in [-1;1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [a;b], \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

čia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < 0 < b$.

III.3.3. Raskite taškus $\xi \in (-1;1) \cup (1;2)$, kuriuose funkcijos f, $f(x) = (x^2-1)(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$, grafiko liestinė būtų horizontali.

III.3.4. Funkcijos f, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, grafike raskite taškus, kuriuose liestinės būtų lygiagrečios stygai, jungiančiai taškus $(-1;1)$ ir $(2;8)$.

III.3.5. Sakykime, P_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, yra n-tojo laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais ir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, yra dvi jo šaknys. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;b) : P_n'(\xi) = 0$.

III.3.6. Sakykime, 1) funkcija $f \in C^{n-1}\big([a,b]\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$; 2) $\exists f^{(n)} : (a;b) \to \mathbb{R}$; 3) $\exists x_k \in [a;b]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_n := b$, jog $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;b) : f^{(n)}(\xi) = 0$.

III.3.7. Sakykime, funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $a < b$, yra diferencijuojama ir $\exists\big(f(a+0), f(b-0)\big) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $f(a+0) = f(b-0)$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) = 0$.

III.3.8. Įrodykite, kad polinomo P_5, $P_5(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $x \in \mathbb{R}$, išvestinės visos šaknys yra realiosios, paprastos ir priklauso intervalams $(0;1), (1;2), (2;3), (3;4)$.

III.3.9. Sakykime, P_n yra n-tojo, $n \in \mathbb{N}$, laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais, kurio visos šaknys yra realiosios. Įrodykite, kad visų išvestinių $P_n^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, visos šaknys irgi realiosios.

III.3.10. Sakykime, funkcija $f \in C\big([a;b]\big)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$, $\exists f' : (a;b) \to \overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite, kad $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists \xi \in (a;b) : \alpha f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

III.3.11. Sakykime, funkcija $f \in C\big([a;b]\big)$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $a < b$, $\exists f' : (a;b) \to \overline{\mathbb{R}}$ ir $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;b) : \xi f'(\xi) = f(\xi)$.

III.3.12. Sakykime, funkcija $f \in C^1\big([a;b]\big)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b) = 0$, $\exists f'' : (a;b) \to \overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite, kad $\exists (\xi_1, \xi_2) \in (a;b)^2$, $\xi_1 < \xi_2 : f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

III.3.13. Įrodykite, kad lygtis $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{D}(f)$, turi vienintelį sprendinį $x_0 \in \mathbb{R}_+$ ir raskite tokį $n \in \mathbb{N} : x_0 \in [n-1; n)$, jeigu

$$1)\ f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad 2)\ f(x) = \Big(\frac{3}{5}\Big)^x + \Big(\frac{4}{5}\Big)^x - 1, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$3)\ f(x) = x^{13} + x^7 - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

III.3.14. Sakykime, funkcija $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$. Įrodykite, kad visos lygties $f(x) = 0$ šaknys priklauso aibei $E \subset \mathbb{R}$, jeigu:

1) $f(x) = (1+x^2)^n \Big(\dfrac{1}{1+x^2}\Big)^{(n)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = x^{2n} e^{-\frac{1}{x}} \Big(e^{-\frac{1}{x}}\Big)^{(n)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

3) $f(x) = e^x \big(x^n e^{-x}\big)^{(n)}$, (Lagerio polinomai), $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_+$;

4) $f(x) = (-1)^n e^{x^2} \big(e^{-x^2}\big)^{(n)}$, (Čebyševo-Ermito polinomai), $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
$E = \big(-\sqrt{2n+1}; \sqrt{2n+1}\big)$.

III.3.15. Sakykime, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \in [0;1], \\ \frac{1}{x}, & (1;2]. \end{cases}$$

Įrodykite, kad funkcija f tenkina visas baigtinių pokyčių teoremos sąlygas ir raskite visas $\xi \in (0;2)$ reikšmes, su kuriomis $f(2) - f(0) = 2f'(\xi)$.

III.3.16. Sakykime, funkcija $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Raskite aibę

$$E := \big\{\xi \in (x; x+h) : f(x+h) - f(x) = f'(\xi)h\big\}, h \in \mathbb{R}_+, [x; x+h] \subset \mathcal{D}(f),$$

jeigu:

1) $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 0$;

2) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$;

5) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$;

6) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}_+$;

8) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;

9) $f(x) = \begin{cases} x \sin \ln x, & x \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

III.3.17. Naudodami Lagranžo teoremą, įrodykite, kad teisingos nelygybės:

1) $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}} < \dfrac{1}{\alpha}\Big(\dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

2) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

3) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$;

4) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x \in \mathbb{R}_+$;

5) $e^x > e \cdot x$, $x \in (1; +\infty)$;

6) $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leqslant |x - y|$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

7) $x^\alpha |\ln x| < \frac{1}{\alpha e}$, $x \in (0; 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$;

8) $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $b < a$.

III.3.18. Sakykime, funkcijos f ir g yra n, $n \in \mathbb{N}$, kartų diferencijuojamos intervale $[0; +\infty)$ ir $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad $f(x) > g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

III.3.19. Sakykime, funkcija f yra diferencijuojama ir neaprėžta baigtiniame intervale $(a; b)$. Įrodykite, kad funkcija f' irgi neaprėžta tame intervale. Pateikite pavyzdį, kad atvirkštinis teiginys neteisingas.

III.3.20. Sakykime, funkcija f diferencijuojama intervale $(a; b)$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $a < b$, ir $\exists (f(a+0), f(b-0)) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $f(a+0) = f(b-0)$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a; b): \ f'(\xi) = 0$.

III.3.21. Sakykime, funkcija f yra diferencijuojama intervale $(a; b)$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $a < b$, ir jos išvestinė f' yra aprėžta. Įrodykite, kad funkcija f yra tolygiai tolydi tame intervale.

III.3.22. Naudodami Lagranžo teoremą įrodykite, kad funkcija $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ yra tolygiai tolydi, jeigu:

1) $f(x) = \ln(1+x)$, 2) $f(x) = \ln(1+x^2)$, 3) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, 4) $f(x) = \sqrt{x}$.

III.3.23. Sakykime, funkcija f yra du kartus diferencijuojama intervale $(a; b)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, ir funkcija f'' yra aprėžta. Įrodykite, kad funkcija f yra tolygiai tolydi intervale $(a; b)$.

III.3.24. Sakykime, funkcija f yra diferencijuojama intervale $[a; b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $ab \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a; b)$:

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

III.3.25. Sakykime, funkcija $f \in C^1((a;b))$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $a < b$. Ar galime tvirtinti, kad $\forall \xi \in (a,b)$, $\exists (x_1, x_2) \in (a;b)^2$, $x_1 \neq x_2$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \xi \in (x_1; x_2)?$$

III.3.26. Ar funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1;1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tenkina Lagranžo teoremos sąlygas intervale $[-1;1]$? Ar $\exists \xi \in (-1;1)$: $f(1) - f(-1) = 2f'(\xi)$?

III.3.27. Sakykime, funkcija $f : (a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, yra diferencijuojama ir $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Įrodykite, kad

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

III.3.28. Sakykime, funkcija $f : (a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, yra diferencijuojama ir $f(x) = o(x)$, $x \to +\infty$. Įrodykite, kad

$$\varliminf_{x \to +\infty} |f'|(x) = 0.$$

III.3.29. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, tenkina Rolio teoremos sąlygas ir nėra pastovi. Įrodykite, kad

$$\exists (\xi_1, \xi_2) \in (a;b)^2 : f'(\xi_1) \in \mathbb{R}_+, \quad f'(\xi_2) \in (-\infty; 0).$$

III.3.30. Sakykime, funkcija $f \in C([a;b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, nėra tiesinė ir yra diferencijuojama intervale $(a;b)$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;b)$:

$$|f'|(\xi) > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

III.3.31. Sakykime, funkcija $f \in C(U(a;r))$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$ diferencijuojama aibėje $\dot{U}(a,r)$, $\exists f'(a-0)$, $\exists f'(a+0)$ ir $f'(a-0) \neq f'(a+0)$. Įrodykite, kad funkcija f nediferencijuojama taške a.

III.3.32. Sakykime, funkcija $f : (a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, yra du kartus diferencijuojama ir $f(a+0) = f(+\infty) = 0$. Įrodykite, kad $\exists \xi \in (a;+\infty)$: $f''(\xi) = 0$.

III.3.33. Raskite neišreikštinės funkcijos $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $y := f(x)$, monotoniškumo intervalus, jeigu funkciją f apibrėžia lygtis:

1) $x^2y^2 + y = 1$, $y \in \mathbb{R}_+$; 2) $x^3y^3 = x - y$, $x \in \mathbb{R}_+$.

III.3.34. Raskite visas parametro $a \in \mathbb{R}$ reikšmes, su kuriomis funkcija f didėja visoje skaičių tiesėje, jeigu:

1) $f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x$; 2) $f(x)=ax+3\sin x+4\cos x$;
3) $f(x)=4x+\dfrac{a+1}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{a-5}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

III.3.35. Sakykime, funkcija $g:U(a,r)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+$, yra tolydi taške a ir $g(a)\neq 0$. Ištirkite, ar taškas a yra funkcijos f_n, $f_n(x):=(x-a)^n g(x)$, $x\in U(a,r)$, $n\in\mathbb{N}$, ekstremumo taškas.

III.3.36. Įrodykite, kad taškas 0 yra funkcijos

$$f(x):=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

negriežto lokaliojo minimumo taškas.

III.3.37. Įrodykite, kad taškas 0 yra funkcijos

$$f(x):=\begin{cases} x^2\Big(2+\cos\frac{1}{x}\Big), & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

griežto globaliojo minimumo taškas, tačiau nė viename intervale $(-\delta;0)$ funkcija nemažėja ir nė viename intervale $(0;\delta)$, $\delta\in\mathbb{R}_+$, funkcija nedidėja.

III.3.38. Sakykime funkcijos

$$f(x):=\begin{cases} |x|\Big(2+\cos\frac{1}{x}\Big), & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{-1}{|x|}\left(\sqrt{2}+\cos x\right)}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Įrodykite, kad:

1) $\overline{\exists} f'(0)$, $\forall n\in\mathbb{N}: g^{(n)}(0)=0$;

2) taškas 0 yra abejų funkcijų griežto globaliojo minimumo taškas;

3) nė viename intervale $(-\delta;0)$ funkcijos nemažėja ir nė viename intervale $(0;\delta)$ jos nedidėja, $\delta\in\mathbb{R}_+$.

III.3.39. Sakykime, funkcijos

$$f(x):=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}\qquad g(x):=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Įrodykite, kad:

1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$;

2) taškas 0 yra funkcijos f griežto globaliojo minimumo taškas ir nėra funkcijos g lokaliojo ekstremumo taškas.

III.3.40. Raskite $M:=\max f(E)$ ir $m:=\min f(E)$, jeigu

1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $E=[-1;2]$;
2) $f(x)=|x^2-3x+2|$, $E=[-10;10]$;
3) $f(x)=(x-3)e^{|x+1|}$, $E=[-2;4]$;
4) $f(x)=x^x$, $E=(0;1]$;
5) $f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$, $E=[\pi;2\pi]$;
6) $f(x)=2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$, $E=\mathbb{R}$;
7) $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\leqslant 0,\\ x^{x^2}, & x>0,\end{cases}$ $E=[-1;2]$;
8) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\operatorname{sgn} x\right)$, $E=[-\pi;\pi]$.

III.3.41. Raskite $\sup f(E)$ ir $\inf f(E)$, jeigu:
1) $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$, $E=\mathbb{R}_+$;
2) $f(x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, $E=\mathbb{R}_+$;
3) $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$, $E=\mathbb{R}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$, $E=\mathbb{R}$;
5) $f(x)=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$, $E=\mathbb{R}_+$.

III.3.42. Raskite funkcijas m ir M,

$$m(x):=\inf\{f(t):t\in(x;+\infty)\},$$
$$M(x):=\sup\{f(t):t\in(x;+\infty)\}, x\in\mathbb{R},$$

jeigu

$$f(x):=\frac{x+1}{x^2+3},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

III.3.43. Sakykime, funkcijos $f:E\to\mathbb{R}$, $g:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$. Raskite

$$\Delta(f,g):=\sup\{|f-g|(x):x\in E\},$$

jeigu:
1) $f(x)=x(x+2)(x-1)^2$, $g(x)=0$, $E=[-2;1]$;
2) $f(x)=x^2+q$, $q\in\mathbb{R}$, $g(x)=0$, $E=[-1;1]$; su kuria q reikšme dydis $\Delta(f,g)$ bus mažiausias?
3) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $E=[0;1]$;
4) $f(x)=x^2$, $g(x)=(a+b)x+q$, $E=[a;b]$; su kuria q reikšme dydis $\Delta(f,g)$ bus mažiausias?

III.3.44. Raskite funkcijos f ,

$$f(x):=\max\{2|x|,|1+x|\}, x\in\mathbb{R},$$

griežto globaliojo minimumo tašką a ir $f(a)$.

III.3.45. Raskite visas parametro $a \in \mathbb{R}$ reikšmes, su kuriomis funkcija f, $f(x) = e^x + ax^3$, $x \in \mathbb{R}$, turi perlinkio taškus.

III.3.46. Sakykime, funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} x^3\Big(2 + \cos\frac{1}{x^2}\Big), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Įrodykite, kad:

1) funkcijos f grafikas turi liestinę taške $(0;0)$;

2) funkcijos f grafikas pereina iš tos liestinės vienos pusės į kitą;

3) taškas 0 nėra funkcijos f perlinkio taškas.

III.3.47. Nubrėžkite funkcijos f grafiką, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 2) $f(x) = \Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^4$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$;

5) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{10}{3x^2} + \dfrac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$;

7) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, $x \in [0;+\infty)$; 8) $f(x) = \sqrt{x^2(8-x^2)}$, $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$;

9) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$; 10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

11) $f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$; 12) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$;

13) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$;

14) $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1;1)$;

15) $f(x) = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus [-3;0)$;

16) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 17) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

18) $f(x) = (7 + 2\cos x)\sin x$, $x \in \mathbb{R}$; 19) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$;

20) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $x \in \mathbb{R}$;

21) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k - \dfrac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

22) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

23) $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \dfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$;

24) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 25) $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

26) $f(x)=x+e^{-x},\ x\in\mathbb{R};$

27) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}e^{-x},\ x\in\mathbb{R};$

28) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\};$

29) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}},\ x\in\mathbb{R};$

30) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x\in\mathbb{R}_+;$

31) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R};$

32) $f(x)=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x\in\mathbb{R};$

33) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R};$

34) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1);$

35) $f(x)=x+\operatorname{arc\,tg} x,\ x\in\mathbb{R};$

36) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg} x,\ x\in\mathbb{R};$

37) $f(x)=x\operatorname{arc\,tg} x,\ x\in\mathbb{R};$

38) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R};$

39) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f(0)=0;$

40) $f(x)=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}},\ x\in\mathbb{R}\setminus(-1;1);$

41) $f(x)=a\arcsin\dfrac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a;a],\ a\in\mathbb{R}_+;$

42) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x}{1-2x},\ x\in\mathbb{R}\setminus(0;\dfrac{2}{3});$

43) $f(x)=x^x,\ x\in\mathbb{R}_+,\ f(0)=1;$

44) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}},\ x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\},\ f(0)=e.$

III.4. Globaliųjų ekstremumų uždaviniai.

III.4.1. Raskite aibės $E:=\{a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}:\{x\in\mathbb{R}_+:\log_a x=x\}\neq\emptyset\}$ $\max E$.

III.4.2. Visų stačiakampių, kurių plotai yra vienodi ir lygūs $S\in\mathbb{R}_+$, tarpe raskite tą, kurio perimetras būtų mažiausias.

III.4.3. Visų stačiųjų trikampių, kurių vieno statinio ir įžambinės ilgių sumos yra vienodos ir lygios $a\in\mathbb{R}_+$, tarpe raskite to, kurio plotas yra didžiausias, smailiųjų kampų dydžius.

III.4.4. Sakykime, konservų dėžutės yra ritiniai. Visų ritinių, kurių tūriai yra vienodi ir lygūs $V\in\mathbb{R}_+$, tarpe raskite tą, kurio pilnasis paviršiaus plotas yra mažiausias.

III.4.5. Visų lygiašonių trapecijų, kurių plotai ir kampai prie apatinio pagrindo yra vienodi ir lygūs atitinkamai $S\in\mathbb{R}_+$ ir $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$, tarpe raskite tos, kurios perimetras yra mažiausias, šoninės kraštinės ilgį.

III.4.6. Visų stačiakampių, įbrėžtų į elipsę

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\right\},\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2_+,$$

kurių kraštinės yra lygiagrečios elipsės ašims, tarpe raskite kraštinių ilgius to, kurio plotas būtų didžiausias.

III.4.7. Visų trapecijų, įbrėžtų į pusskritulį su spindulio ilgiu $r\in\mathbb{R}_+$, kurių apatinis pagrindas yra pusskritulio skersmuo, tarpe raskite tos, kurios plotas yra didžiausias, aukštinės ir viršutinio pagrindo ilgius.

III.4.8. Sakykime, tunelio skerspjūvis yra stačiakampis, užviršuotas pusskrituliu. Visų tokių tunelių, kurių perimetrai yra vienodi ir lygūs $p \in \mathbb{R}_+$, tarpe raskite pusskritulio spindulio ilgį to tunelio, kurio skerspjūvio plotas yra didžiausias.

III.4.9. Į pusrutulį, kurio spindulio ilgis lygus $r \in \mathbb{R}_+$, įbrėžtas stačiakampis gretasienis, kurio pagrindas yra kvadratas. Visų tokių įbrėžtųjų briaunainių tarpe raskite matmenis to, kurio tūris yra didžiausias.

III.4.10. Kartono lakštas yra stačiakampis, kurio kraštinių ilgiai yra $a \in \mathbb{R}_+$ ir $b \in \mathbb{R}_+$. Lakšto kampuose išpjaunami keturi lygiapločiai kvadratai, o kryžiaus formos likusios figūros atsikišusios dalys užlenkiamos ir pagaminama iš viršaus atvira dėžutė. Raskite kvadrato kraštinės ilgį, kad atitinkamas dėžutės tūris būtų didžiausias.

III.4.11. Iš trijų vienodo pločio lentų sukalamas lovys. Raskite tokį kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo, kad atitinkamo lovio skerspjūvio plotas būtų didžiausias.

III.4.12. Raskite taisyklingos trikampės prizmės, įbrėžtos į rutulį, kurio spindulio ilgis yra $r \in \mathbb{R}_+$, ir turinčios didžiausiąjį tūrį, aukštinės ilgį.

III.4.13. Apie rutulį, kurio spindulio ilgis lygus $r \in \mathbb{R}_+$, apibrėžtas kūgis. Visų tokių kūgių tūrių tarpe raskite mažiausiąjį.

III.4.14. Ritinio pilnasis paviršiaus plotas lygus $S \in \mathbb{R}_+$. Visų tokių ritinių tūrių tarpe raskite didžiausiąjį.

III.4.15. Į rutulį, kurio spindulio ilgis lygus $r \in \mathbb{R}_+$, įbrėžtas ritinys. Visų tokių ritinių pilnųjų paviršiaus plotų tarpe raskite didžiausiąjį.

III.4.16. Per elipsės, kurią apibrėžia lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2_+,$$

tašką pravesta liestinė, kurios atkarpa kartu su koordinatinių ašių atkarpomis apriboja trikampį. Visų tokių trikampių plotų tarpe raskite mažiausiąjį.

III.4.17. Į rutulį, kurio spindulio ilgis lygus $r \in \mathbb{R}_+$, įbrėžtas kūgis. Raskite didžiausiojo tūrio kūgio aukštinės ilgį.

III.4.18. Iš skritulio pavidalo skardos lapo išpjaunamas sektorius ir susukamas kūgin. Raskite sektoriaus kampą, kad kūgio tūris būtų didžiausias.

III.4.19. Mesto akmens pradinis greitis yra duotas, o jo trajektorija su horizontu sudaro kampą α. Raskite tokį kampą, kad akmuo nulėktų toliausiai.

III.4.20. Į pusrutulio, kurio spindulio ilgis lygus $r \in \mathbb{R}_+$, formos indą nuleistas vienalytis ilgio $l \in (2r; 4r]$ strypas. Raskite strypo lygsvaros padėtį.

III.4.21. Kad vandens trintis su kanalo sienomis būtų mažiausia, kanalo "šlapiojo" skerspjūvio, kuris yra lygiašonės trapecijos formos, perimetras turi būti trumpiausias. Raskite tokį perimetrą atitinkantį kanalo šono pasvirimo kampą $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, jeigu vandens kanale skerspjūvio plotas lygus $S \in \mathbb{R}_+$, o vandens aukštis yra $h \in \mathbb{R}_+$.

III.4.22. Iš apvalaus rasto su skersmens ilgiu $d \in \mathbb{R}_+$ išpjaunamas balkis, kurio skerspjūvis yra stačiakampis su pagrindo ir aukštinės atitinkamais ilgiais $a \in \mathbb{R}_+$ ir $h \in \mathbb{R}_+$. Žinoma, kad balkio atsparumas yra proporcingas dydžiui ah^2. Visų tokių balkių tarpe raskite atspariausiojo matmenis.

III.4.23. Gamyklą A reikia sujungti plentu su tiesia geležinkelio juosta, prie kurios yra gyvenvietė B. Atstumas tarp gamyklos ir geležinkelio $|AC| = a$, $|BC| = b$. Krovinių pervežimų kaina plentu k $(k \in (1; +\infty))$ kartų didesnė už pervežimų kainą geležinkeliu. Raskite tašką $\mathcal{D}$ atkarpoje BC, į kurį reikia nutiesti plentą iš gamyklos, kad pervežimų kaina iš gamyklos A į gyvenvietę būtų mažiausia.

III.4.24. Raskite aukštį, kuriame virš apskrito stalo su spindulio ilgiu $r \in \mathbb{R}_+$ centro reikia pakabinti lempą, kad stalo kraštas būtų geriausiai apšviestas.

III.4.25. Dviejų rutulių išorėje, atkarpoje, jungiančioje rutulių centrus, yra šviesos šaltinis. Raskite tokį tašką atkarpoje, kad sferų apšviestų dalių plotų suma būtų didžiausia. Žinoma, jog rutulių spindulių ilgiai yra $r_1 \in \mathbb{R}_+$ ir $r_2 \in \mathbb{R}_+$.

III.4.26. Svorį horizontaliojoje plokštumoje reikia paslinkti pridėta prie jo jėga. Raskite tos jėgos sudarytą kampą su plokštuma, kad jėga būtų mažiausia. Žinoma, kad svorio trinties koeficientas lygus $k \in \mathbb{R}_+$.

III.4.27. Du laivai plaukia tiesiai pastoviais greičiais, atitinkamai lygiais u ir v, o kampas tarp jų krypčių lygus $\theta \in (0; \pi)$. Tam tikru momentu laivų atitinkami atstumai nuo plaukimo krypčių sankirtos buvo $a \in \mathbb{R}_+$ ir $b \in \mathbb{R}_+$. Raskite trumpiausiąjį atstumą tarp laivų.

III.5. Lopitalio ir Teiloro teoremos.

Pavyzdžiai. 1) Naudodami Lopitalio teoremą rasime

$$\lim_{x\to 0} \frac{f}{g}(x),$$

čia funkcija $f(x) := \operatorname{tg} x - \operatorname{arc\,tg} x$, $g(x) = \sin x - x\cos x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Kadangi funkcijos f ir g yra diferencijuojamos apibrėžimo aibėje,

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = x\sin x \neq 0,\\
&\exists \lim_{x\to 0} f(x) = \exists \lim_{x\to 0} g(x) = 0,\\
&\exists \lim_{x\to 0} \frac{f'}{g'}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} + \frac{\sin x}{x}\right) = 2,
\end{aligned}$$

tai

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f}{g}(x) = 2.$$

2) Įrodysime, kad

$$\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{f}{g}(x),$$

čia $f(x) := x + \sin x$, $g(x) := x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, tačiau $\nexists \lim\limits_{x\rho+\infty} \dfrac{f'}{g'}(x)$.

► Iš tikrųjų,

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1,$$

nes $f(x) \sim g(x) \sim x$, $x \to +\infty$. Akivaizdu, kad $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Funkcijos f ir g yra diferencijuojamos tiesėje $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + \cos x, \qquad g'(x) = 1 - \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

taigi $\forall n \in \mathbb{N} : g'(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$. Todėl nėra taško $+\infty$ aplinkos, kurioje būtų $g' \neq 0$. Kadangi $\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \frac{f'}{g'}(2n\pi) = 2$, $\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \frac{f'}{g'}(2n\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, tai $\nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'}{g'}(x)$. ◄
Taigi Lopitalio teoremos sąlygos yra pakankamos, tačiau nėra būtinos.

III.5.1. Raskite funkcijos $f : U(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \in \mathbb{R}_+$, ribą taške a, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $a = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$, $a = 0$;
3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, $a = 0$,
4) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$, $a = 0$;
5) $f(x) = \dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$, $a = 0$;
6) $f(x) = \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$, $a = 0$;
7) $f(x) = \dfrac{c^x - c^{\sin x}}{x^3}$, $a = 0, c \in \mathbb{R}_+$;
8) $f(x) = \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$, $a = 1$;
9) $f(x) = \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$, $a = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
10) $f(x) = \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\Big)$, $a = 0$;
11) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{ar\,sh}\sin x}{\operatorname{sh} x - \sin x}$, $a = 0$;
12) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $a = +\infty, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$;
13) $f(x) = \dfrac{x^\varepsilon}{e^{\alpha x}}$, $a = +\infty, (\alpha,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$;
14) $f(x) = \ln x \cdot \ln(1-x)$, $a = 1 - 0$;
15) $f(x) = x^\varepsilon \ln x$, $a = +0, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$;
16) $f(x) = x^x$, $a = +0$;
17) $f(x) = x^{x^x - 1}$, $a = +0$;
18) $f(x) = x^{x^x} - 1$, $a = +0$;
19) $f(x) = x^{\frac{k}{1+\ln x}}$, $a = +0, k \in \mathbb{R}$;
20) $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$, $a = 1$;
21) $f(x) = (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$, $a = 1$;
22) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, $a = \dfrac{\pi}{4}$;
23) $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$, $a = 0$;
24) $f(x) = \Big(\ln\dfrac{1}{x}\Big)^x$, $a = +0$;
25) $f(x) = \Big(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\Big)^{\frac{1}{x}}$, $a = +\infty$;
26) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$, $a = 0$;
27) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$, $a = 1$;
28) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}$, $a = 0$;
29) $f(x) = \Big(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{\frac{1}{x}}$, $a = 0$;
30) $f(x) = \Big(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$, $a = 0$;
31) $f(x) = (\operatorname{th} x)^x$, $a = +\infty$;
32) $f(x) = \Big(\dfrac{\arcsin x}{x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$, $a = 0$;

33) $f(x)=\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}},\ a=0;$

34) $f(x)=\dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[p]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[q]{\operatorname{ch} x}},\ a=0,$ $\{p,q\}\subset \mathbb{R}\setminus\{0\},\ p\neq q;$

35) $f(x)=\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x},\ a=0;$

36) $f(x)=(x+\alpha)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+\alpha}},\ a=+\infty,\alpha\in\mathbb{R};$

37) $f(x)=|\ln x|^{2x},\ a=+0;$ 38) $f(x)=x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}},\ a=+0.$

III.5.2. Sakykime, funkcija $f:U(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\overline{\mathbb{R}},\ r\in\mathbb{R}_+$. Nustatykite, ar galima naudoti Lopitalio teoremą ribai $\lim_{x\to a}f(x)$ rasti. Raskite tą ribą, kai ji egzistuoja, jeigu:

1) $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}, a=+\infty;$

2) $f(x)=\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}, a=+\infty;$

3) $f(x)=\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}, a=+\infty;$ 4) $f(x)=\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}, a=0.$

5.1. Apibrėžimas. Sakykime, funkcija $f:U(a,r)\to\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}_+$, yra n kartų, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, diferencijuojama taške a. Tada polinomas

$$Q_n(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\quad x\in\mathbb{R}, 0^\circ:=1, \tag{1}$$

vadinamas *funkcijos f n-tojo laipsnio Teiloro polinomu taške a.*

5.2. Teiloro teorema. *Sakykime, funkcija $f\in C^n([a;x])$, $(a,x)\in\mathbb{R}^2$, $a\neq x$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\exists f^{(n+1)}:(a;x)\to\mathbb{R}$. Tada $\exists(\xi_1;\xi_2)\in(a;x)^2$:*

$$f(x)=(Q_n+R_n)(x), \tag{2}$$

čia

$$R_n(x):=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{3}$$

arba

$$R_n(x):=\frac{\left(1-\frac{\xi_2-a}{x-a}\right)^n f^{(n+1)}(\xi_2)}{n!}(x-a)^{n+1}. \tag{4}$$

Jeigu be minėtųjų sąlygų $\exists f^{(n+1)}(a)\in\mathbb{R}$ ir funkcija $f^{(n+1)}$ yra tolydi taške a, tai

$$f(x)=Q_{n+1}(x)+o\big((x-a)^{n+1}\big),\quad x\to a, \tag{5}$$

ir tas užrašas yra vienintelis.

5.3. Apibrėžimai. (2) ir (5) lygybės vadinamos atitinkamai funkcijos f n-tosios ir $(n+1)$-osios eilių Teiloro (Makloreno, kai $a = 0$) formulėmis taško a aplinkoje su liekamaisiais nariais: (3) – Lagranžo formos, (4) – Koši formos, (5) – Peano formos.

Nurodysime (5) formules kai kurioms elementariosioms funkcijoms.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \tag{6}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), \tag{7}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \tag{8}$$

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{9}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \alpha \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}), \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \tag{12}$$

čia visose (6)-(12) formulėse $x \to 0$.

Pavyzdys. 3) Parašysime 4-tosios eilės Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu funkcijai f,

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rasime išvestines $f^{(k)}(0)$, $1 \leqslant k \leqslant 4$.

Kadangi

$$f(x) = 1 + 2x(1-x-x^2)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tai, naudodami (10) formulę, parašysime nurodytąją 3-osios eilės Makloreno formulę funkcijai g,

$$g(x) = (1-x+x^2)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}(-x+x^2) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-x+x^2)^2 +$$
$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-x+x^2)^3 + o(x^3) = 1 + x - x^3 + o(x^3), \ x \to 0.$$

Todėl

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Kadangi pastarasis užrašas yra vienintelis, tai

$$f'(0) = 2\cdot 1! = 2, f''(0) = 2\cdot 2! = 4, f'''(0) = 0\cdot 3! = 0, f^{(4)}(0) = -2\cdot 4! = -48.$$

Jeigu funkcija f,

$$f(x) = \frac{g}{h}(x), \quad x \in U(a,r), a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

ir funkcijoms h, $h(a) \neq 0$, bei g žinomos (5) formulės, tai funkcijai f Teiloro formulė parašoma naudojant vadinamąjį *neapibrėžtųjų koeficientų metodą.*

Sakykime,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big), \tag{14}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big),\ c_0 = h(a) \neq 0, \tag{15}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big),\ x \to a, \tag{16}$$

čia koeficientai b_k, c_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, yra žinomi, o koeficientai a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, nežinomi. Įstatę (14)-(16) išraiškas į (13) sąryšį ir, sulyginę koeficientus prie laispnių $(x-a)^k, 0 \leqslant k \leqslant n$, abejose lygybės $f \cdot h = g$ pusėse, gausime lygčių sistemą

$$\sum_{l=0}^{n} a_l c_{k-l} = b_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Ją išsprendę, rasime koeficientus a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pavyzdžiai. 4) Parašysime funkcijai f,

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \qquad x \in \Big(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big),$$

7-tosios eilės Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu.

Sakykime, $\operatorname{tg} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^8)$, $x \to 0$, nes funkcija tg yra nelyginė. Naudodami (7) ir (8) sąryšius ir , sulyginę koeficientus prie x, x^3, x^5 ir x^7 lygybėje $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$, gausime lygčių sistemą $a_1 = 1$, $a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}$, $a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} = \frac{1}{120}$, $a_7 - \frac{a_5}{2} + \frac{a_3}{24} - \frac{a_1}{720} = -\frac{1}{5040}$. Ją išsprendę, rasime

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8), \quad x \to 0.$$

5) Parašysime funkcijai:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sin x}{x}, & x \in (-\pi;\pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

6-tosios eilės Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu.

Panaudodami (7) formulę, parašome 6-tosios eilės Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu funkcijai g,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\in(-\pi;\pi)\setminus\{0\},\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{x}\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\Big)=$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^7)=:1+u, x\to 0.$$

Panaudoję (9) formulę, gauname

$$f(x)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(x^7)=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}-\frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{36}-\frac{x^6}{360}\Big)+$$

$$+\frac{1}{3}\Big(-\frac{x^6}{216}\Big)+o(x^7)=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^7), x\to 0.$$

Sakykime, žinoma n-tosios eilės Teiloro formulė funkcijai f', t.y.

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k+o\big((x-a)^n\big),\quad x\to a,$$

čia

$$b_k=\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!},\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Todėl galime parašyti $(n+1)$-osios eilės Teiloro formulę funkcijai f, t.y.

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n+1} a_k(x-a)^k+o\big((x-a)^{n+1}\big),\quad x\to a,$$

čia

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\qquad 1\leqslant k\leqslant n+1.$$

Kadangi $a_{k+1}=\frac{b_k}{k+1}$, $0\leqslant k\leqslant n$, tai

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-a)^{k+1}+o\big((x-a)^{n+1}\big),\quad x\to a, \tag{17}$$

Pavyzdžiai. 6) Pnaudodami (17) sąryšį, parašysime Makloreno formulę funkcijai $f(x)=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$.

Kadangi

$$f'(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}, \qquad x \in (-1;1),$$

tai pagal (10) formulę

$$f'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o\big(x^{2n+1}\big), x \to 0.$$

Taigi

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o\big(x^{2n+2}\big), x \to 0.$$

7) Rasime didžiausiąjį numerį $n \in \mathbb{N}$, su kuriuo funkcijai

$$f(x) = \sin|x|^3 + e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

teisinga n-tosios eilės Makloreno formulė su Peano formos liekamuoju nariu. Kadangi

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sgn} x \cos x^3 + e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$f''(x) = 3x(2\cos x^3 - 3x^3 \sin x^3)\operatorname{sgn} x + e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, $f_k'''(0) = -5$, $f_d'''(0) = 7$, tai $n = 2$ ir

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

8) Naudodami (6) ir (8) formules, rasime $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, čia

$$f(x) = \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Kadangi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5), x \to 0,$$

tai

$$f(x) = \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{12} + o(x), x \to 0,$$

ir $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{12}$.

III.5.3. Parašykite funkcijai f n-tosios eilės Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}, n = 2;$

2) $f(x) = (a^\alpha + x)^{\frac{1}{\alpha}}, x \in -a^\alpha; +\infty), a \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = 2;$

3) $f(x) = e^{2x-x^2}, x \in \mathbb{R}, n = 5;$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad n = 4;$

5) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}, x \in \mathbb{R}, n = 13;$

6) $f(x) = \ln\cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), n = 6;$

7) $f(x) = \sin\sin x, x \in \mathbb{R}, n = 3;$

8) $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}, x \in \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), n = 3;$

9) $f(x) = e^{\cos x} - e^{x+1}, x \in \mathbb{R}, n = 3;$

10) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{x^3}{3}\right); x \in (-1; 1), n = 7;$

11) $f(x) = \ln(1+x^2) + e^{\sin x} - e^x + x^8 - \operatorname{arc\,tg} x, x \in \mathbb{R}, n = 5;$

III.5.4. Parašykite funkcijai f $(2n)$-tosios, kai f lyginė, ir $(2n+1)$-osios, kai f nelyginė, $n \in \mathbb{N}$, Makloreno formulę su Peano formos liekamuoju nariu, jeigu:

1) $f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R};$

2) $f(x) = x\ln(1+x^2), x \in \mathbb{R};$

3) $f(x) = x\sin x - \cos^2 x, x \in \mathbb{R};$

4) $f(x) = \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x \in (-1; 1);$

5) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R};$

6) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x, x \in \mathbb{R}.$

III.5.5. Prašykite funkcijai f n-tosios eilės Teiloro formulę taške a su Peano formos liekamuoju nariu, jeigu:

1) $f(x) = x^x - 1, x \in \mathbb{R}_+, n = 3, a = 1;$

2) $f(x) = \operatorname{th} x, x \in \mathbb{R}, n = 6, a = 0;$

3) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}, \\ e, & x = 0, \end{cases} \quad n = 3, a = 0;$

4) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\,\sin x, x \in \mathbb{R}, n = 3, a = 0;$

5) $f(x) = \sin\operatorname{arc\,tg} x, x \in \mathbb{R}, n = 4, a = 0;$

6) $f(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}_+, n = 2, a = 1.$

III.5.6. Raskite tokias $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ reikšmes, kad, kai $x \to 0$, būtų:

1) $ae^x - \frac{b}{1-x} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$;
2) $(a + b\cos x)\sin x = x + o(x^4)$;
3) $a\arcsin x + b\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^6)$;
4) $\operatorname{tg} x = \frac{x+ax^3}{1+bx^2} + o(x^6)$;
5) $x - (a + b\cos x)\sin x = -\frac{1}{30}x^5 + o(x^6)$.

III.5.7. Naudodami Teiloro formulę, raskite $\lim_{x\to a} f(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, a = 0$;
2) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}\Big(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\Big), x \in [1; +\infty), a = +\infty$;
3) $f(x) = \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[3]{x^6 - x^5}, x \in [0; +\infty), a = +\infty$;
4) $f(x) = \Big(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\Big)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, a = +\infty$;
5) $f(x) = \dfrac{b^x + b^{-x} - 2}{x^2}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}_+, a = 0$;
6) $f(x) = x - x^2\ln\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big), x \in \mathbb{R}_+, a = +\infty$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}, x \in (-\pi; \pi)\setminus\{0\}, a = 0$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\Big), x \in (-\pi; \pi)\setminus\{0\}, a = 0$;
9) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + \sin^{13} x) - \sin^{13} x}{\operatorname{tg}^{26} x}, x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big)\setminus\{0\}, a = 0$;
10) $f(x) = \dfrac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, a = 0, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$;
11) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x^n - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}}, x \in (-1; 1)\setminus\{0\}, a = 0, n \in \mathbb{N}$.

III.5.8. Raskite funkcijos f pagrindinę dalį ax^n, t.y. tokias $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ir $n \in \mathbb{N}$, kad būtų $f(x) \sim ax^n$, kai $x \to 0$, jeigu:

1) $f(x) = xe^x - \sin x, x \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x, x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big)$;
3) $f(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, x \in \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{tg} x) + \arcsin 2x, x \in \Big(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\Big)$;
5) $f(x) = x\sin\sin x - \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$;
6) $f(x) = \operatorname{tg}\,\sin x - \sin\operatorname{tg} x, x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big)$;
7) $f(x) = (1+x)^x - 1, x \in (-1; +\infty)$;
8) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x \in (-1; +\infty)\setminus\{0\}$.

III.5.9. Naudodami Teiloro formulę su Lagranžo formos liekamuoju nariu raskite funkcijos $f : U(a, r) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, reikšmės $f(a)$ įvertį (apytikslę reikšmę) Δ tikslumu, jeigu:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, a = 127, \Delta = 10^{-3}$;
2) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}, a = 250, \Delta = 10^{-3}$;

3) $f(x)=x^{\frac{1}{12}}, a=4000, \Delta=10^{-3}$;
4) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}, a=1, \Delta=10^{-3}$;
5) $f(x)=\cos x, a=72^\circ, \Delta=10^{-3}$;
6) $f(x)=\ln x, a=1,2, \Delta=10^{-3}$;
7) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x, a=0,8, \Delta=10^{-3}$;
8) $f(x)=\arcsin x, a=0,45, \Delta=10^{-3}$;
9) $f(x)=e^x, a=1, \Delta=10^{-9}$;
10) $f(x)=\sin x, a=1^\circ, \Delta=10^{-8}$;
11) $f(x)=\cos x, a=9^\circ, \Delta=10^{-5}$;
12) $f(x)=\sqrt{x}, a=5, \Delta=10^{-4}$;
13) $f(x)=\lg x, a=11, \Delta=10^{-5}$.

III.5.10. Naudodami funkcijos Makloreno formulę su Lagranžo formos liekamuoju nariu, įvertinkite apytikslės formulės $f(x)\approx Q_n(x),\ x\in[\alpha;\beta]$, čia Q_n – funkcijos f n-tojo laipsnio Teiloro polinomas taške a, absoliučiąją paklaidą $\Delta=\max|f-Q_n|([\alpha;\beta])$, jeigu:

1) $f(x)=e^x, \alpha=0, \beta=1, n\in\mathbb{N}$;
2) $f(x)=\sin x, \alpha=-1, \beta=1, n=5$;
3) $f(x)=\operatorname{tg} x, \alpha=-0,1, \beta=0,1, n=3$;
4) $f(x)=\sqrt{1+x}, \alpha=0, \beta=0,2, n=3$;
5) $f(x)=\ln(1+x), \alpha=-0,1, \beta=0,1, n=4$;
6) $f(x)=\cos x, \alpha=-\dfrac{1}{2}, \beta=\dfrac{1}{2}, n=6$.

III.5.11. Įrodykite, kad: 1) $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2,\ \exists\theta\in(0;1)$:

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{n\cdot n!};$$

2) $e\in C\mathbb{Q}$.

III.5.12. Sakykime, funkcija $f\in C^2([0;1]),\ f(0)=f(1)=0$ ir $\exists M\in\mathbb{R}_+\ \forall x\in(0;1):\ |f''|(x)\leqslant M$. Įrodykite, kad $\forall x\in(0;1):\ |f'|(x)\leqslant\frac{M}{2}$.

III.5.13. Sakykime, funkcija $f\in C^{n+1}(U(a;r)),\ a\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}_+\ n\in\mathbb{N},\ f^{(n+1)}(a)\neq 0$ ir $\forall x\in\dot{U}(a,r)$

$$\theta(x)\in\Big\{\theta\in(0;1):f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\Big\}.$$

Įrodykite, kad

$$\lim_{x\to a}\theta(x)=\frac{1}{n+1}.$$

III.5.14. Sakykime, funkcija $f\in C^2((-1;1)),\ f(0)=0$. Raskite

$$\lim_{x\to+0}\sum_{k=1}^{[x^{-\frac{1}{2}}]}f(kx),$$

čia $[\cdot]$ – sveikoji dalis.

IV. FUNKCIJA $\vec{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

IV.1. Euklidinė erdvė.

1.1. Apibrėžimai. Dydis $\vec{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, vadinamas *n-mačiu vektoriumi, (n-mačiu tašku)*, skaičius x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *–vektoriaus $\vec{x}$ k-tąja koordinate.* Jeigu $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^w)^2$ ir $\forall k \in \{1; \cdots; n\} : x_k = y_k$, tai vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ vadinami *lygiais* ir žymima $\vec{x} = \vec{y}$. Jeigu $\exists k_0 \in \{1; \dots; n\} : x_{k_0} \neq y_{k_0}$, tai vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ vadinami *nelygiais* ir žymima $\vec{x} \neq \vec{y}$. Erdvėje $\mathbb{R}^n$ apibrėžiama vektorių *sudėtis*

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \tag{1}$$

daugyba iš realiųjų skaičių, kurie vadinami *skaliarais*,

$$c\vec{x} := (cx_1, \dots, cx_n), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

ir *skaliarinė daugyba*

$$< \vec{x}, \vec{y} >:= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{3}$$

Erdvė $\mathbb{R}^n$, kurioje apibrėžta (1) vektorių sudėtis (2) daugyba iš skaliaro ir (3) skaliarinė daugyba, vadinama *n-mate realiąja euklidine erdve*, vektoriaus $\vec{x}$ koordinatės *–dekartinėmis koordinatėmis.* Vektorius $\vec{0} := (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ vadinamas erdvės $\mathbb{R}^n$ *nuliumi*, o vektorius $-\vec{x} := (-1)\vec{x}$ *– priešingu vektoriui $\vec{x}$.*

Funkcija $|\cdot|$,

$$|\vec{x}| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

vadinama *euklidiniu ilgiu*, o funkcija $d(\cdot, \cdot)$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := |\vec{x} - \vec{y}|, \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2,$$

euklidiniu atstumu erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tų funkcijų reikšmės $|\vec{x}|$ ir $d(\vec{x}, \vec{y})$ vadinamos atitinkamai *vektoriaus $\vec{x}$ euklidiniu ilgiu* ir *euklidiniu atstumu tarp vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$.* Jeigu $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, tai kampas $\alpha \in [0; 2\pi)$, apibrėžtas lygybe

$$\cos\alpha := \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{|\vec{x}||\vec{y}|},$$

vadinams *kampu tarp vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$.* Jeigu $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$ (čia gali būti $\vec{x} = \vec{0}$ arba $\vec{y} = \vec{0}$), tai vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ vadinami *ortogonaliais* ir žymima $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Aibės

$$U(\vec{a}; r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\},$$
$$\overline{U}(\vec{a}; r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| \leqslant r\},$$
$$S(\vec{a}; r) := \partial U(\vec{a}, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| = r\}, \vec{a} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+,$$

yra vadinamas atitinkamai n-mačiais *atviruoju* bei *uždaruoju rutuliais* ir *sfera* erdvėje $\mathbb{R}^n$ *su centru* $\vec{a}$ *ir spindulio ilgiu* r. Atvirasis rutulys dar yra vadinamas *taško* $\vec{a}$ *rutuline* r*-aplinka*. Jeigu $n = 2$, tai tos aibės vadinamos atitinkamai *atviruoju* bei *uždaruoju skrituliais* ir *apskritimu*. Aibė $U(\vec{\infty}; r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| > r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$, vadinama *taško* $\vec{\infty}$ r*-aplinka*. Aibės

$$\Delta(\vec{a}; r_1; \cdots; r_n) := \mathop{\times}_{k=1}^{n} \big(a_k - r_k; a_k + r_k\big),$$
$$\Delta(\vec{a}; r_1; \cdots; r_n) := \mathop{\times}_{k=1}^{n} \big[a_k - r_k; a_k + r_k\big],$$

čia $\vec{a} = (a_1; \cdots; a_n) \in \mathbb{R}^n$, $r_k \in \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant k \leqslant n$, yra vadinamos atitinkamai *atviruoju* ir *uždaruoju* n*-mačiais stačiakampiais gretasieniais su centru* $\vec{a}$ ir *briaunų ilgiais* $2r_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Jeigu $n = 2$, tai tos aibės vadinamos atitinkamai *atviruoju* ir *uždaruoju stačiakampiais.* Atvirasis n-matis stačiakampis gretasienis taipogi vadinamas taško $\vec{a}$ *gretasiene aplinka.* Jeigu $r_1 = \cdots = r_n =: r$, tai aibės

$$\Delta(\vec{a}; r) := \Delta(\vec{a}; r; \cdots; r),$$
$$\overline{\Delta}(\vec{a}; r) := \overline{\Delta}(\vec{a}; r; \cdots; r),$$

yra vadinamos atitinkamai n*-mačiu atviruoju ir uždaruoju kubais su centru* $\vec{a}$ ir *briaunos ilgiu* $2r$. Jeigu $n = 2$, tai tos aibės vadinamos atitinkamais *kvadratais.* Atvirasis n-matis kubas taipogi vadinamas *taško* $\vec{a}$ *kubine* r*-aplinka.*

Jeigu $(\vec{a}, \vec{b}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\vec{a} \neq \vec{b}$, tai aibė

$$[\vec{a}; \vec{b}] := \{\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) : t \in [0; 1]\},$$

vadinama *atkarpa erdvėje* $\mathbb{R}^n$*, jungiančia taškus* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$.

Aibė

$$\{\vec{a} + t\vec{c} : t \in \mathbb{R}\},\ (\vec{a}, \vec{c}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \vec{c} \neq \vec{0},$$

yra vadinama *tiese erdvėje* $\mathbb{R}^n$.

Jeigu $E_i \subset \mathbb{R}^n$, $E_i \neq \emptyset$, $i \in \{1; 2\}$, tai skaičius

$$d(E_1, E_2) := \inf\{|\vec{x}' - \vec{x}''| : \vec{x}' \in F_1, \vec{x}'' \in E_2\}$$

vadinamas *atstumu tarp aibių* E_1 ir E_2. Jeigu aibė $E_1 := \{\vec{a}\}$ yra vienaelementė, tai skaičius $d(\vec{a}, E_2) := d(\{\vec{a}\}, E_2)$ vadinamas *taško* $\vec{a}$ *atstumu nuo aibės* E_2. Skaičius

$$\operatorname{diam} E := \sup\left\{|\vec{x}' - \vec{x}''| : (\vec{x}', \vec{x}'') \in E^2\right\}$$

vadinamas *aibės* E *skersmeniu,* čia $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$. Jeigu $\operatorname{diam} E \in [0; +\infty)$, tai aibė E vadinama *aprėžta,* priešingu atveju – *neaprėžta.*

Pavyzdys. Įrodysime, kad euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^n$ teisinga lygybė

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2+|\vec{x}-\vec{y}|^2=2\big(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2\big).$$

Tai žinomas planimetrijos teiginys: lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo kraštinių ilgių kvadratų sumai.

► Kadangi $|\vec{x}|=\sqrt{<\vec{x},\vec{y}>}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, tai

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2=<\vec{x}+\vec{y},\quad \vec{x}+\vec{y}|>=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2<\vec{x},\vec{y}>,$$
$$|\vec{x}-\vec{y}|^2=<\vec{x}-\vec{y},\quad \vec{x}-\vec{y}|>=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2<\vec{x},\vec{y}>.$$

Sudėję tų lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses, gausime reikiamąją lygybę. ◄

IV.1.1. Sakykime, $(\vec{a},\vec{b})\in(\mathbb{R}^n)^2$, $n\geqslant 3$, $\vec{a}\neq\vec{b}$, yra bet kurie fiksuoti vektoriai, $d:=|\vec{a}-\vec{b}|$ ir $r\in\mathbb{R}_+$ – fiksuotas skaičius, aibė $E_r:=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:|\vec{x}-\vec{a}|=|\vec{x}-\vec{b}|=r\}$. Įrodykite:

1) jeigu $r\in(\frac{d}{2};+\infty)$, tai aibė E_r yra begalinė;

2) jeigu $r=\frac{d}{2}$, tai aibė E_r yra vienaelementė;

3) jeigu $r\in(0;\frac{d}{2}$, tai $E_r=\emptyset$.

Suformuluokite tuos teiginius, kai $n\in\{1;2\}$.

IV.1.2. Įrodykite: $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\exists\vec{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$:

$$<\vec{x},\vec{y}>=0.$$

Ar tas teiginys teisingas tiesėje?

IV.1.3. 1) Sakykime, $(\vec{a},\vec{b})\in(\mathbb{R}^n)^2$, $n\geqslant 2$, $\vec{a}\neq\vec{b}$, yra fiksuoti vektoriai. Raskite tokius $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ ir $r\in\mathbb{R}_+$, kad būtų

$$\big\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:|\vec{x}-\vec{a}|=2|\vec{x}-\vec{b}|\big\}=\big\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:|\vec{x}-\vec{c}|=r\big\}.$$

2) Įrodykite, kad tiesėje $\mathbb{R}$ sprendinių c ir r išraiškos tokios pat kaip ir erdvėje $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Raskite aibę $\{x\in\mathbb{R}:|x-a|=2|x-b|\}$.

IV.1.4. Raskite tokias $c\in\mathbb{R}$ reikšmes, kad vektoriai $(\vec{a},\vec{a}+c\vec{b})\in(\mathbb{R}^n)^2$, $n\geqslant 2$, būtų ortogonalūs, jeigu:

1) $\vec{a}=(1;2;1;3)$, $\vec{b}=(4;1;1;1)$, 2) $\vec{a}=(1;2;\cdots;n)$, $\vec{b}=(n;n-1;\cdots;1)$.

IV.1.5. Kubo $[0;a]^n\subset\mathbb{R}^n$, $a\in\mathbb{R}_+$ euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^n$ k-mate, $0\leqslant k\leqslant n-1$, siena vadinama aibė

$$\begin{aligned}&S_{\alpha_1\ldots\alpha_{n_1-1}n_1\alpha_{n_1+1}\ldots\alpha_{n_k-1}n_k\alpha_{n_k+1}\ldots\alpha_n}:=\\&=\{\vec{x}=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_l=\alpha_l,\\&\quad l\neq n_j,\quad 1\leqslant j\leqslant k,\quad x_{n_j}\in[0;a]\},\end{aligned}\tag{4}$$

čia $\alpha_l\in\{0;a\}$, $1\leqslant n_1<\cdots<n_k\leqslant n$. Jeigu $k=0$ arba $k=1$, tai tokia siena vadinama atitinkamai *kubo viršūne* arba *briauna*. Bet kuri viena iš ilgiausių atkarpų, jungiančių dvi

kubo arba k-matės, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, (4) sienos viršūnes, vadinama atitinkamai *kubo* arba (4) *sienos įstrižaine*.

Raskite: 1) kubo įstrižainės ilgį; 2) k-matės, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sienos įstrižainės ilgį; 3) kampą φ_n tarp kubo įstrižainės ir k-matės, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sienos; 4) $\lim \varphi_n$; 5) k-mačių, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sienų skaičių; 6) kubo įstrižainių, statmenų duotąjai kubo įstrižainei, skaičių.

IV.1.6. Sakykime, $\overline{\Delta}(\vec{a}; r_1; \cdots; r_n)$ yra n-matis uždarasis stačiakampis gretasienis. Įrodykite: 1) $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \;\; \forall r \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \{r_1; \cdots; r_n\} \subset \mathbb{R}_+ :$

$$\overline{\Delta}(\vec{a}; r_1; \cdots; r_n) \subset \overline{U}(\vec{a}; r);$$

2) $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \;\; \forall \{r_1; \cdots; r_n\} \subset \mathbb{R}_+ \;\; \exists r \in \mathbb{R}_+ :$

$$\overline{U}(\vec{a}; r) \subset \overline{\Delta}(\vec{a}; r_1; \cdots; r_n);$$

3) Pitagoro teoremą erdvėje $\mathbb{R}^n$

$$d_n^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} r_k^2,$$

čia d_n – gretasienio įstrižainės ilgis.

IV.1.7. Raskite

$$\max \Big\{ n \in \mathbb{N} : \overline{\Delta}\Big(\vec{a}; \frac{r}{2}\Big) \subset \overline{U}(\vec{a}; r) \Big\}$$

čia $\overline{\Delta}$ ir $\overline{U}$ – n-mačiai uždarieji kubas ir rutulys.

IV.1.8. Raskite atstumą tarp aibių $E_1 \subset \mathbb{R}^n$, $E_2 \subset \mathbb{R}^n$, jeigu:

1) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 1\}$ (hiperbolė), $E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ (tiesė);

2) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j > k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (k-matis poerdvis), $E_2 = \{(1; \cdots; 1) \in \mathbb{R}^n\}$;

3) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$ (parabolė), $E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 - 2\}$ (tiesė);

4) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$ (elipsė), $E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2\sqrt{3}x_2 = 8\}$ (tiesė);

5) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ (tiesė), $E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, x_3 = 0\}$;

6) $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$ (elipsė), $E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 4\}$ (hiperbolė);

7) $E_1 = \{(3+t; 1-t; 2(1+t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ (tiesė), $E_2 = \{(-t; 2+3t; 3t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ (tiesė);

8) $E_1 = \{t(1; \cdots; 1) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$ (tiesė), $E_2 = \{(t; 1-t; 0; \cdots; 0) : t \in \mathbb{R}\}$ (tiesė).

IV.1.9. Raskite $\operatorname{diam} E$, jeigu:

1) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 3x_2^2 < 2\}$;

2) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 - 3x_2^2 = 2\}$;

3) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}|^2((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - 1) = 0\}$;

4) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \sin \frac{1}{x_1},\; x_1 \in (-\frac{2}{\pi}; \frac{2}{\pi}) \setminus \{0\}\}$;

5) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 - 1 < 0\}$;
6) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 1 \leqslant 0\}$;
7) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 - 1 = 0\}$;
8) $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 + x_3^2 + 2x_3 - 1 \leqslant 0\}$.

IV.2. Funkcijos $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ riba, tolydumas, išvestinė

2.1. Apibrėžimai. Funkcija

$$\vec{f} := (f_1, \ldots, f_n) : E \ni t \to \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big) =: (f_1, \ldots, f_n)(t) \in \mathbb{R}^n,$$

čia $E \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – euklidinė erdvė, vadinama *realiojo argumento n-mate vektorine funkcija*, funkcija $f_k : E \ni t \to f_k(t) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, – *funkcijos $\vec{f}$ k-tąja koordinatine funkcija*. Tokiai funkcijai $\vec{f}$ apibrėžiamos ribos, tolydumo ir išvestinės sąvokos analogiškai kaip ir funkcijai $f : E \to \mathbb{R}$.

Funkcija $\vec{g} \in C^p(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, čia $\mathbb{R} \subset \mathcal{J}$ – intervalas, $\mathbb{R}^n$ – euklidinė erdvė, vadinama *p-glodžia* (*glodžia*, kai $p = 1$; *be galo glodžia*, kai $p = +\infty$) *kreive erdvėje* $\mathbb{R}^n$, funkcijos argumentas – *kreivės parametru*. Taigi pagal tą apibrėžimą kreivė ir jos reikšmių sritis yra skirtingi objektai, kurie *laikomi sinonimais*, kai funkcija $\vec{g}$ yra bijekcija. Funkcijos $f \in C^p(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ grafikas yra p-glodi kreivė $\vec{g}$,

$$\vec{g}(x) := \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathcal{J},$$

plokštumoje.

Kreivė

$$\vec{g} : [a;b] \leftrightarrows \vec{g}\big([a;b]\big), \quad \vec{g} \in C^p\big([a;b]\big), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

vadinama *p-glodžia žordanine kreive.* Jeigu funkcija $\vec{g}$ yra bijekcija intervale $[a;b)$ ir $\vec{g}(a) = \vec{g}(b)$, tai ji vadinama *p-glodžia uždarąja žordanine kreive.*

Jeigu $t_0 \in \operatorname{int} \mathcal{J}$ ir $\vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$, tai vektoriai $\vec{g}'(t_0)$ ir

$$\vec{\tau}(\vec{x}_0) := \frac{\vec{g}'}{|\vec{g}'|}(t_0), \quad \vec{x}_0 = \vec{g}(t_0),$$

vadinami *kreivės liečiamaisiais taške $\vec{x}_0$* atitinkamai *vektoriumi* ir *vienetiniu vektoriumi.*

Tiesė

$$\{\vec{x}_0 + t\vec{\tau}(\vec{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

vadinama *kreivės $\vec{g}$ liestine taške $\vec{x}_0$*.

Vektorius $\vec{\eta}(\vec{x}_0)$, tenkinantis sąlygas $\vec{\eta}(\vec{x}_0) \perp \vec{\tau}(\vec{x}_0)$, $|\vec{\eta}(\vec{x}_0)| = 1$, vadinamas *kreivės $\vec{g}$ normalės taške $\vec{x}_0$ vienetiniu vektoriumi.* Jeigu $n = 2$, tai

$$\vec{\eta}(\vec{x}_0) = (\tau_2, -\tau_1)(\vec{x}_0) \quad \text{arba} \quad \vec{\eta}(\vec{x}_0) = (-\tau_2, \tau_1)(\vec{x}_0).$$

2.2. Lema. *Sakykime,* $\mathbb{R} \supset I$ *yra intervalas, kreivė* $\vec{g} = (g_1, g_2) \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$, $\exists t_0 \in \operatorname{int} I$: $g_1'(t_0) \neq 0$. *Tada egzistuoja tokie: atvirasis intervalas* $U \ni t_0$, *jog* $g_1 : U \leftrightarrows g_1(U)$ *ir* $\forall t \in U : g_1'(t) \neq 0$, *ir funkcija* $f \in C^2(g_1(U), \mathbb{R})$, *jog* $\vec{g}(U) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in g_1(U),\ x_2 = f(x_1)\}$. *Be to,*

$$f' = \frac{g_2'}{g_1'} \circ g_1^{-1}, \tag{1}$$

$$f'' = \frac{g_1' g_2'' - g_2' g_1''}{{g_1'}^3} \circ g_1^{-1}. \tag{2}$$

Naudojant tą lemą brėžiamos p-glodžiosios, $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $p \geqslant 2$, kreivės.

2.3. Apibrėžimai. Sakykime, aibė

$$\Gamma := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : F(\vec{x}) = 0\},$$

čia F – "gera" tam tikra prasme funkcija, yra p – glodžios kreivės reikšmių sritis. Tokia aibė vadinama *neišreikštine kreive.* Pavyzdžiui, neišreikštinė kreivė

$$\Gamma := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : F(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 - r^2 = 0\}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

yra apskritimas su centru $\vec{0}$ ir spindulio ilgiu r. Apskritimas yra be galo glodi uždaroji žordaninė kreivė

$$\Gamma \ni \vec{x} := \vec{g}(t) := r(\cos t, \sin t), \quad t \in [0; 2\pi].$$

Sakykime, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ yra standartinė ortonormuota plokštumos bazė, čia $\vec{e}_1 := (1; 0)$, $\vec{e}_2 := (0; 1)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Kiekvienas aibės

$$\operatorname{Arg} \vec{x} := \left\{ t \in \mathbb{R} : \cos t = \frac{x_1}{|\vec{x}|} \right\}$$

elementas vadinams *vektoriaus* $\vec{x}$ *argumentu,* kuris geometriškai reikštų kampą tarp vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{e}_1$. Kampas $t_0 \in \operatorname{Arg} \vec{x} \cap [\alpha; \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, vadinams *vektoriaus* $\vec{x}$ *pagrindiniu argumentu* ir žymimas $\arg \vec{x} := t_0$.

Atvaizdis

$$\mathbb{R}_+ \times\ [\alpha; \alpha + 2\pi) \in \big(|\vec{x}|, \operatorname{Arg} \vec{x}\big) \leftrightarrows \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

vadinams *poline koordinačių sistema* plokštumoje, o pora $(|\vec{x}|, \operatorname{Arg} \vec{x})$ – *taško* $\vec{x}$ *polinėmis koordinatėmis.*

Sakykime, aibė

$$\Gamma := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| = f(\arg \vec{x})\big\},$$

čia $f \in C^p(I)$, $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R} \supset I$ – intervalas. Tokia aibė Γ vadinama *kreive, apibrėžta polinėje koordinačių sistemoje.* Tą kreivę atitinkantis atvaizdis $\vec{g}$ yra

$$\vec{g}(t) = f(t)(\cos t, \sin t), \quad t \in I.$$

Pavyzdžiai. Įrodysime, kad kreivė

$$\vec{x} := (x_1, x_2, x_3) := \vec{g}(t) := ae^t(\cos t, \sin t, 1), \quad t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+,$$

kerta visas kūgio

$$S := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$$

sudaromąsias tuo pačiu kampu.

► Kadangi $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(g_1^2 + g_2^2)(t) = g_3^2(t),$$

tai kreivė

$$\Gamma := \left\{\vec{g}(t) : t \in \mathbb{R}\right\} \subset S,$$

t.y. kreivė Γ yra kūgyje S (kreivė Γ yra "apvyniota" apie kūgį S).
Imkime bet kurią kūgio sudaromąją ir jos projekcijos horizintaliojoje plokštumoje sudarytą su $0x_1$ ašimi kampą pažymėkime $\alpha \in [0; 2\pi)$. Tada sudaromoji bus atvaizdis

$$\vec{h}(u) := u(\cos\alpha; \sin\alpha; 1), \quad u \in [0; +\infty).$$

Sudaromoji $\vec{h}$ ir kreivė $\vec{g}$ kirsis taškuose, kuriuose $\vec{h}(u) = \vec{g}(t)$, t.y.

$$u = ae^t, \quad \cos t = \cos\alpha, \quad \sin t = \sin\alpha.$$

Pažymėkime kampą tarp kreivės ir sudaromosios jų sankirtos taškuose raide β, t.y.

$$\cos\beta = \frac{< \vec{h}'(u), \vec{g}'(t) >}{|\vec{h}'(u)||\vec{g}'(t)|} =$$
$$= \frac{\cos\alpha(\cos t - \sin t) + \sin\alpha(\sin t + \cos t) + 1}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

nes

$$\vec{h}'(u) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 1), \quad u \in [0; +\infty),$$
$$\vec{g}'(t) = ae^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Taigi kampas

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$$

nepriklauso nuo sankirtos taško. ◄

2) Pavaizduosime kreivę

$$\vec{g}(t) := \frac{t}{t-1}\left(t, \frac{1}{t+1}\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\},$$

vadovaudamiesi planu, pagal kurį brėžėme funkcijos grafiką. Randame

$$
\begin{aligned}
&g_1(-\infty)=-\infty,\ g_2(-\infty)=-0, && g_1(1-0)=-\infty,\ g_2(1-0)=-\infty,\\
&g_1(-1-0)=-\frac{1}{2},\ g_2(-1-0)=-\infty, && g_1(1+0)=+\infty,\ g_2(1+0)=+\infty,\\
&g_1(-1+0)=-\frac{1}{2},\ g_2(-1+0)=+\infty, && g_1(+\infty)=+\infty,\ g_2(+\infty)=+0.
\end{aligned}
$$

Kadangi

$$\lim_{t\to1}\frac{g_2}{g_1}(t)=\frac{1}{2},\quad \lim_{t\to1}\Big(g_2-\frac{1}{2}g_1\Big)(t)=-\frac{3}{4},$$

tai kreivė turi pražulniąją asimptotę $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{4}\}$, kai $x_1\to-\infty$ ir $x_1\to+\infty$. Ji turi horizontaliąją asimptotę $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : x_2=0\}$, kai $x_1\to-\infty$ ir $x_1\to+\infty$, ir vertikaliąją $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : x_1=-\frac{1}{2}\}$.
Randame koordinatinių funkcijų išvestines

$$g_1'(t)=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2},\quad g_2'(t)=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},$$

kurias naudodami gauname, jog kreivės taškai $\vec{x}=(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}\setminus(0;4))\times\mathbb{R}$. Kadangi apibrėžimo srityje išvestinė $g_2'<0$, tai laikysime, kad kreivę sudaro be galo glodžių funkcijų f, $x_1=f(x_2)$, $x_2\in I$, $\mathbb{R}\supset I$ – intervalas, grafikų sąjunga. Tuomet

$$f'(x_2)=\frac{g_1'}{g_2'}(t)=-\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}.$$

Taigi $f'(x_2)$, kai $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$, ir $f'(x_2)>0$, kai $t\in(0;1)\cup(1;2)$.
Apibrėžkime

$$
\begin{aligned}
\vec{g}\big((-\infty;-1)\big)&=:\big\{\big(f_1(x_2),x_2\big) : x_2\in(-\infty;0)\big\},\\
\vec{g}\big((-1;1)\big)&=:\big\{\big(f_2(x_2),x_2\big) : x_2\in\mathbb{R}\big\},\\
\vec{g}\big((1;+\infty)\big)&=:\big\{\big(f_3(x_2),x_2\big) : x_2\in\mathbb{R}_+\big\}.
\end{aligned}
$$

Pagal f' išraišką gauname

$$f_1'(x_2)<0,\quad x_2\in(-\infty;0);$$

$f_2'(x_2)>0$, kai $x_2\in(-\infty;0)$, $f_2'(x_2)<0$, kai $x_2\in(0;+\infty)$, taigi taškas 0 yra funkcijos f_2 griežto globaliojo maksimumo taškas, $f_2(0)=0$; $f_3'(x_2)<0$, kai $x_2\in(0;\frac{2}{3})$, $f_3'(x_2)>0$, kai $x_2\in(\frac{2}{3};+\infty)$, taigi taškas $\frac{2}{3}$ yra funkcijos f_3 griežto globaliojo minimumo taškas, $f_3(\frac{2}{3})=2$.
Be to, $f_1(-1)=f_2(-1)=-1$, t.y. $\vec{g}(t)=-(1;1)$, kai $t\in\{-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$.
Kadangi

$$g_1''(t)=\frac{2}{(t-1)^3},\quad g_2''(t)=\frac{2t(t^2+3)}{(t^2-1)^3},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},$$

tai

$$f''(x_2) = \frac{g_2' g_1'' - g_1' g_2''}{{g_2'}^3}(t) + \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)(t=1)^3}{(t^2+1)^3}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} f''(x_2) &< 0, \qquad t \in (-\infty;-1) \cup (t_0;1), \\ f''(x_2) &> 0, \qquad t \in (-1;t_0) \cup (1;+\infty), \end{aligned}$$

čia $t_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \approx -0,322$ yra vienintelė realioji lygties $t^3+3t+1=0$ šaknis. Naudodami gautus rezultatus, nustatome, kad

$$\begin{aligned} f_1''(x_2) &< 0, \qquad x_2 \in (-\infty;0); \\ f_2''(x_2) &< 0, \qquad x_2 \in (-\infty;a), \\ f_2''(x_2) &> 0, \qquad x_2 \in (a;+\infty), \end{aligned}$$

čia $a := g_2(t_0) \approx 0,359$ yra funkcijos f_2 perlinkio taškas, $f_2(a) = g_1(t_0) \approx -0,078$; $f_3''(x_2) > 0$, $x_2 \in \mathbb{R}_+$.

Kreivė pavaizduota 4 brėžinyje.

4 brėžinys

IV.2.1. Raskite kampą tarp *logaritminės spiralės*

$$\Gamma := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| = ae^{m \operatorname{Arg} \vec{x}}\right\}, a \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{R},$$

liečiamojo vektoriaus taške $\vec{x} \in \Gamma$ ir vektoriaus $\vec{x}$.

IV.2.2. Įrodykite, kad yra statmenos sankirtos taškuose: 1) parabolės

$$\Gamma_a := \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = 4a(a - x_1)\}, a \in \mathbb{R}_+,$$

ir

$$\Gamma_b := \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = 4b(b + x_1)\}, b \in \mathbb{R}_+;$$

2) hiperbolės

$$\Gamma_a := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = a\},$$

ir

$$\Gamma_b := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = b\},$$

čia $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

IV.2.3. Pavaizduokite kreivę

$$\Gamma = \{\vec{x} = (x_1, x_2)^T = \vec{g}(t) : t \in \mathcal{J}\},$$

jeigu

1) $\vec{g}(t) = \frac{1}{4}\big((t+1)^2, (t-1)^2\big)^T, \quad t \in \mathbb{R};$
2) $\vec{g}(t) = (2t - t^2, 3t - t^3)^T, \quad t \in \mathbb{R};$
3) $\vec{g}(t) = \Big(\frac{t^2}{1-t^2}, \frac{1}{1+t^2}\Big)^T, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\};$
4) $\vec{g}(t) = (t + e^{-t}, 2t + e^{-2t})^T, \quad t \in \mathbb{R};$
5) $\vec{g}(t) = a(\cos 2t, \cos 3t)^T, \quad t \in [0; \pi],\ a \in \mathbb{R}_+;$
6) $\vec{g}(t) = (\cos^4 t, \sin^4 t)^T, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}];$
7) $\vec{g}(t) = a\Big(\frac{1}{\cos^3 t}, \operatorname{tg}^3 t\Big)^T, \quad t \in \Big(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\Big),\ a \in \mathbb{R}_+;$
8) $\vec{g}(t) = \ln t\Big(t, \frac{1}{t}\Big)^T, \quad t \in \mathbb{R}_+;$
9) $\vec{g}(t) = a(\operatorname{sh} t - t, \operatorname{ch} t - 1)^T, \quad t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+;$
10) $\vec{g}(t) = (\operatorname{arc\,tg} t, \operatorname{arc\,ctg} t)^T, \quad t \in \mathbb{R};$
11) $\vec{g}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)^T, \quad t \in \mathbb{R}$ (hiperbolės šaka);
12) $\vec{g}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)^T, \quad t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$ *(cikloidė)*.

IV.2.4. Pavaizduokite aibę

$$\Gamma = \{\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : F(\vec{x}) = 0\},$$

jeigu

1) $F(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2, a \in \mathbb{R}_+$ *(Dekarto lapas)*;
2) $F(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 - x_1^4 - x_2^4;$
3) $F(\vec{x}) = |\vec{x}|^4 - a^2(x_1^2 - x_2^2),\ a \in \mathbb{R}_+$ *(Bernulio lemniskatė)*;

4) $F(\vec{x}) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}, a \in \mathbb{R}_+$ *(astroidė)*;
5) $F(\vec{x}) = x_1^2 x_2^2 - x_1^3 + x_2^3$;
6) $F(\vec{x}) = |\vec{x}| - e^{\operatorname{Arg}\vec{x}}$ *(logaritminė spiralė)*.

IV.2.5. Nubrėžkite grafikus funkcijų $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, apibrėžtų polinėje koordinačių sistemoje, t.y. $|\vec{x}| := g(t)$, $t := \operatorname{Arg}\vec{x}$, jeigu

1) $g(t) = a + b\cos t,\ t \in [-\alpha; \alpha],\ \alpha := \pi - \arccos\dfrac{a}{b},\ (a, b) \in \mathbb{R}_+^2,\ a \leqslant b$ *(kardioidė)*;
2) $g(t) = a\sin 3t,\ t \in [0; \dfrac{\pi}{3}] \cup [\dfrac{2\pi}{3}; \pi] \cup [\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}],\ a \in \mathbb{R}_+$ *(trilapė rožė)*;
3) $g(t) = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3t}},\quad t \in \Big(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\Big) \cup \Big(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\Big) \cup \Big(\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\Big),\ a \in \mathbb{R}_+$.

V. EILUTĖS

V.1. Elementariosios eilučių savybės.

1.1. Apibrėžimai. Dvilypė seka $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$, čia $a_n \in \mathbb{R}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, vadinama *skaičių eilute*, dydžiai a_n ir s_n – atitinkamai *eilutės n-tuoju nariu* ir *n-tąja daline suma*. Eilutė žymima simboliais

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{arba} \quad a_1 + \cdots + a_n + \cdots. \tag{1}$$

Jeigu $\exists \lim s_n =: s \in \mathbb{R}$, tai skaičius s vadinamas (1) *eilutės suma*, pati eilutė vadinama *konverguojančia* ir žymima

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := s.$$

Priešingu atveju (1) eilutė vadinama *diverguojančia*.

Eilutė

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

vadinama (1) eilutės *N-tąja liekana*.

Jeigu $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ yra didėjanti seka, $n_1 := 1$, tai eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad b_k := \sum_{l=n_k}^{n_{k+1}-1} a_l,$$

vadinama (1) eilutės *sugrupuotąja eilute*, atitinkančia *grupuojančiąją seką* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Pavyzdžiai. 1) Ištirsime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, konvergavimą.

Apibrėžkime aibę $E := \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Kadangi $\forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N} : \sin nx = 0$, tai $\forall x \in E$ eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ konverguoja ir jos suma lygi 0.

Įrodysime, kad $\forall x \in \mathbb{R} \setminus E$ seka $\{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ nėra nykstama. Sakykime, priešingai $\exists x_0 \in \mathbb{R} \setminus E : \lim\limits_{n\to\infty} \sin nx_0 = 0$. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n+1)x_0 = \sin nx_0 \cdot \cos x_0 + \cos nx_0 \cdot \sin x_0$$

ir $\sin x_0 \neq 0$, tai turi būti $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx_0 = 0$. Tačiau

$$1 = \cos^2 nx_0 + \sin^2 nx_0,$$

taigi dešinioji lygybės pusė negali būti nykstama. Todėl prielaida $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx_0 = 0$ buvo klaidinga ir $\forall x \in \mathbb{R}\setminus E$ seka $\{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ nėra nykstama, o eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}\setminus E$, netenkina būtinosios konvergavimo sąlygos ir diverguoja.

Taigi eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ konverguoja aibėje E ir diverguoja aibėje $\mathbb{R}\setminus E$.

2) Įrodysime, kad $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ eilutė $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, $a_n := \frac{1}{a+nb}$, diverguoja. Pastebėsime, kad eilutės nariai yra begalinės aritmetinės progresijos narių atvirkštiniai.

► Tam tikslui naudosime Koši kriterijaus neiginį ir įrodysime, kad dalinių sumų $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ seka nėra Koši seka, t.y. $\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geqslant N \ \ \exists p \in \mathbb{N} :$

$$s_{n+p} - s_n \geqslant \varepsilon_0.$$

Apibrėžkime $p := n$. Tada

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k > n \cdot a_{2n} = \frac{n}{n\left(\frac{a}{n} + 2b\right)}.$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{n} + 2b) = 2b$, tai $\exists N_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N_0 :$

$$\left(\frac{a}{n} + 2b < 3b\right) \Leftrightarrow \left(n > \frac{a}{b}\right),$$

t.y. $N_0 := [\frac{a}{b}] + 1$, čia $[\cdot]$– sveikoji dalis. Įrodėme, kad $\forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n := \max\{N; N_0\} \geqslant N$ $\exists p = n :$

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{\frac{a}{n} + 2b} > \frac{1}{3b} =: \varepsilon_0.$$

Taigi dalinių sumų seka nėra Koši seka ir eilutė diverguoja. ◄

3) Naudodami Koši kriterijų įrodysime, kad eilutė $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, $a_n := \frac{p_n}{10^n}$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_n \in (-10; 10)$, $n \in \mathbb{N}$, konverguoja.

► Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \ \ \forall p \in \mathbb{N} :$

$$|s_{n+p} - s_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{10^{k-1}} = \frac{10^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{10^{n+p}}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{1}{9\cdot 10^{n-1}},$$

tai, išsprendę nelygybę

$$\frac{1}{9\cdot 10^{n-1}} < \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+,$$

rasime $N := \max\{1; [-\lg(9\varepsilon)] + 2\}$, čia $[\cdot]$– sveikoji dalis. Taigi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N$ $\forall p \in \mathbb{N} : \ |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Todėl dalinių sumų seka yra Koši seka ir eilutė konverguoja.

Pastebėsime, kad, esant papildomoms sąlygoms, išnagrinėta eilutė yra begalinė dešimtainė trupmena. ◀

4) Rasime eilutės $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n := \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)}$, $m \in \mathbb{N}$, sumą.

Pastebime, kad

$$a_n = \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}}\Big), \quad c_n := \prod_{k=0}^{m-1}(n+k), n \in \mathbb{N}.$$

Todėl

$$s_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_{k+1}}\Big) = \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_{n+1}}\Big), \quad \lim s_n = \frac{1}{m \cdot c_1} = \frac{1}{m!m}$$

V.1.1. Ištirkite, ar eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, ar diverguoja, ir raskite konverguojančios eilutės sumą, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$; 2) $a_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$;
3) $a_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$; 4) $a_n = \dfrac{1}{n(n+m)}, m \in \mathbb{N}$;
5) $a_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 6) $a_n = t^n \sin nx, t \in (-1;1), x \in \mathbb{R}$;
7) $a_n = t^n \cos nx, t \in (-1;1), x \in \mathbb{R}$; 8) $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$;
9) $a_n = \dfrac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$;
10) $a_n = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}}$, čia $\{c_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$ ir $\lim c_n = +\infty$;
11) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$; 12) $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$;
13) $a_n = \dfrac{n}{(4n^2-1)^2}$; 14) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$;
15) $a_n = \dfrac{1}{n(mn+k)}, (m,k) \in \mathbb{N}^2$, k dalijasi iš m, žymima $k = o(\operatorname{mod} m)$; 16) $a_n = \cos nx, x \in \mathbb{R}$;
17) $a_n = \dfrac{x^{2^n-1}}{1-x^{2^n}}, x \in (0;1)$.

V.1.2. Naudodami Koši kriterijų įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, jeigu: 1) $a_n = \dfrac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$; 2) $a_n = \dfrac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}, x \in \mathbb{R}$.

V.1.3. Naudodami Koši kriterijaus neiginį, įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in \{3k-2, 3k-1 : k \in \mathbb{N}\}, \\ -\frac{1}{n}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

diverguoja.

V.1.4. Sakykime, eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja ir $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ irgi konverguoja. Pateikite pavyzdžius, kad pirmosios dvi eilutės diverguotų, o trečioji eilutė: a) konverguotų, b) diverguotų.

V.1.5. Pateikite dviejų diverguojančių eilučių pavyzdžius, kad tų eilučių suma: a) konverguotų, b) diverguotų.

V.1.6. Įrodykite, kad konverguojančios ir diverguojančios eilučių suma diverguoja.

V.1.7. Įrodykite, kad eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja ir raskite jų sumą, jeigu

$$a_n := \frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad b_n := \frac{1}{3^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}}.$$

V.1.8. Raskite eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sumą, jeigu:

$$1)\ a_n := \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}, \qquad 2)\ a_n := \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n};$$

$$3)\ a_n := a^{[\frac{n}{2}]} b^{[\frac{n+1}{2}]}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, |ab| < 1, [\cdot] - \text{sveikoji dalis.}$$

V.2. Teigiamosios eilutės.

2.1. Apibrėžimai. Eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in [0; +\infty)$, vadinama *teigiamąja*. Jeigu $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}_+$, tai (1) eilutė vadinama *griežtai teigiama.*

2.2. Pirmasis Koši požymis. *Sakykime, (1) eilutė yra teigiama ir jos narių seka yra nedidėjanti. tada (1) ir*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

eilutės kartu arba konverguoja, arba diverguoja.

2.3. Dalambero požymis. *Sakykime, (1) eilutė yra griežtai teigiama,*

$$\alpha := \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\beta := \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Jeigu $\beta < 1$, tai (1) eilutė konverguoja, jeigu $\alpha > 1$, tai (1) eilutė diverguoja.

2.4. Antrasis Koši požymis. *Sakykime, (1) eilutė yra teigiama, $\alpha := \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$. Jeigu $\alpha < 1$, tai (1) eilutė konverguoja; jeigu $\alpha > 1$, tai (1) eilutė diverguoja.*

2.5. Raabės požymis. *Sakykime, (1) eilutė yra griežtai teigiama,*

$$\alpha := \underline{\lim}\, n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big), \quad \beta := \overline{\lim}\, n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big).$$

Jeigu $\alpha > 1$, tai (1) eilutė konverguoja; jeigu $\beta < 1$, tai (1) eilutė diverguoja.

Pavyzdžiai. 1) Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$a_n := \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

konvergavimą, t.y. su kuriomis (α, β) reikšmėmis eilutė konverguoja, diverguoja.
Randame, kad

$$a_n \sim \begin{cases} n^{\alpha-\beta}, & \beta \in \mathbb{R}_+, \\ \frac{n^\alpha}{2}, & \beta = 0, \\ n^\alpha, & \beta \in (-\infty; 0), \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kadangi eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

konverguoja, kai $t \in (1; +\infty)$, ir diverguoja, kai $t \in (-\infty; 1]$, tai pagal palyginimo požymį eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja aibėje $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > \max\{0; \alpha + 1\}\} \cup ((-\infty; -1) \times (-\infty; 0))$ ir diverguoja likusioje (α, β) – plokštumos dalyje.

2) Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n := \frac{n^3\big(\sqrt{2} + (-1)^n\big)^n}{3^n}$$

konvergavimą.
Kadangi $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}\frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$, tai pagal antrąjį Koši požymį eilutė konverguoja.

3) Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n := \frac{3^n \cdot n!}{n^n},$$

konvergavimą.

Kadangi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1,$$

tai pagal Dalambero požymį eilutė diverguoja.

4) Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$,

$$a_n := \frac{1}{n \ln^p n}, p \in \mathbb{R},$$

konvergavimą.

Kadangi $\forall p \in (-\infty; 0]$ $\forall n \geqslant 3$:

$$a_n \geqslant \frac{1}{n}$$

ir harmoninė eilutė diverguoja, tai pagal palyginimo požymį eilutė $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ irgi diverguoja. Jeigu $p \in \mathbb{R}_+$, tai $\forall n \geqslant 2$: $a_n > a_{n+1}$, taigi tenkinamos pirmojo Koši požymio sąlygos. Kadangi eilutė $\sum_{k=2}^{\infty} b_k$, $b_k := 2^k a_{2^k} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \frac{1}{k^p}$, konverguoja, kai $p > 1$, ir diverguoja, kai $p \in (0; 1]$, tai pagal minėtąjį požymį taip pat elgiasi ir eilutė $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

Taigi pradinė eilutė konverguoja, kai $p > 1$, ir diverguoja, kai $p \leqslant 1$.

V.2.1. Ištirkite eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergavimą, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}_+$;

2) $a_n = \dfrac{\alpha^n \cdot n!}{n^n}, \alpha \in \mathbb{R}_+$;

3) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

4) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

5) $a_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a+(k-1)d}{b+(k-1)d}\right)^\alpha, (a, b, d) \in \mathbb{R}_+^3, \alpha \in \mathbb{R}$;

6) $a_n = \dfrac{n! e^n}{n^{n+\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$;

7) $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{\prod_{k=1}^{n}(2+\sqrt{k})}$;

8) $a_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(a+k-1)}{n!} \dfrac{1}{n^\alpha}, (a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$;

9) $a_n = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha \dfrac{1}{n^\beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

10) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\left(1 - \dfrac{x \ln n}{n}\right)^n, (\alpha, x) \in \mathbb{R}^2$;

11) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \sin \dfrac{\pi}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$;

12) $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha \ln \frac{n-1}{n+1}, n \geqslant 2, \alpha \in \mathbb{R}$;

13) $a_n = \log_{b^n}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right), (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, b \neq 1$;

14) $a_n = \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$;

15) $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{a}{\ln n}}}, n \geqslant 2, a \in \mathbb{R}$;

16) $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

17) $a_n = n^{\ln x}, x \in \mathbb{R}_+$;

18) $a_n = \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}, \; n \geqslant 2$;

19) $a_n = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n (\ln \ln n)^\beta}, n \geqslant 3, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

20) $a_n = \dfrac{1}{\ln n!}, n \geqslant 2;$

21) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}, n \geqslant 2, \alpha \in \mathbb{R};$

22) $a_n = \ln \dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}, n \geqslant 3;$

23) $a_n = \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}};$

24) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \dfrac{n+1}{n}};$

25) $a_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, n \geqslant 2;$

26) $a_n = a^{\frac{1}{n}} - \dfrac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3_+;$

27) $a_n = n^{n^\alpha} - 1, \alpha \in \mathbb{R};$

28) $a_n = \ln \dfrac{1}{n^\alpha} - \ln \sin \dfrac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R};$

29) $a_n = \dfrac{1}{\ln^2 \sin \frac{1}{n}};$

30) $a_n = \left(\cos \dfrac{a}{n}\right)^{n^3}, a \in \mathbb{R}.$

V.2.2. Sakykime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yra konverguojanti teigiamoji eilutė ir seka $\{d_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [0;+\infty)$ yra aprėžta. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n d_n$ konverguoja ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n d_n \leqslant ad$, čia $a := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $d := \sup\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$.

V.2.3. Sakykime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yra diverguojančios teigiamosios eilutės. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$ irgi diverguoja. Nurodykite tokius pradinių eilučių pavyzdžius, kad : a) eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ konverguotų, b) kad ji diverguotų.

V.2.4. Sakykime, teigiamoji eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja. Įrodykite, kad konverguoja ir eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Nurodykite pavyzdžius, kad atvirkštinis teiginys būtų neteisingas.

V.2.5. Sakykime, teigiamoji eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja. Įrodykite, kad eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ irgi konverguoja.

V.2.6. Sakykime, $\exists \lim n a_n =: a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja.

V.2.7. Sakykime teigiamoji eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, o jos narių seka $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra nedidėjanti. Įrodykite, kad $\lim n a_n = 0$.

V.2.8. Sakykime, teigiamoji eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja. Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ irgi diverguoja, o eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ konverguoja. Pateikite pavyzdžius, kad eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+na_n}$ ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$: a) konverguotų, b) diverguotų.

V.2.9. Sakykime, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \frac{\operatorname{arc\,tg} a_n}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodykite, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguoja.

V.3. Absoliučiai ir reliatyviai konverguojančios eilutės.

3.1. Apibrėžimai. Jeigu eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{1}$$

konverguoja, tai eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

vadinama *absoliučiai konverguojančia.* Jeigu (1) eilutė diverguoja, o (2) konverguoja, tai (2) eilutė vadinama *reliatyviai konverguojančia.*

3.2. Abelio–Dirichlė požymis. *Sakykime, eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *tenkina sąlygas: arba*

1) (2) eilutė konverguoja ir 2) seka $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ *yra monotoninė ir aprėžta,*

arba 1') (2) eilutės dalinių sumų seka yra aprėžta ir 2') seka $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ *yra monotoninė ir nykstama.*

Tada pradinė eilutė konverguoja.

3.3. Leibnico požymis. *Sakykime, seka* $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ *yra monotoninė ir nykstama. Tada eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ *konverguoja.*

3.4. Apibrėžimas. Sakykime, funkcija $\varphi : \mathbb{N} \leftrightarrows \mathbb{N}$, $a'_k := a_{\varphi(k)}$. Tada eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$$

vadinama (2) *eilutės perstata*, atitinkančia perstatančiąją funkciją φ.

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad eilutė $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$, absoliučiai konverguoja, ir rasime jos sumą.

► Geometrinė eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, konverguoja ir

$$\lim \frac{|a_n|}{b_n} = \lim \frac{2n-1}{2^{\frac{n-1}{2}}} = 0.$$

Pagal palyginimo požymį pradinė eilutė absoliučiai konverguoja. Kadangi

$$2s_n = -s_{n-1} + \frac{2 + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-3}}}{3},$$

tai $2s = -s + \frac{2}{3}$, $s = \frac{2}{9}$, čia $\lim s_n =: s$. Taigi eilutės suma lygi $\frac{2}{9}$.

2) Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, $a_n := \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus.

Žinome, kad

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad x \to 0, \tag{3}$$

ir kad eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n := \frac{1}{n^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, konverguoja, kai $\beta > 1$, ir diverguoja, kai $\beta \leqslant 1$. Kadangi $|a_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, $n \to \infty$, tai pradinė eilutė konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir absoliučiai nekonverguoja, kai $\alpha \in (0; 1]$.

Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ reliatyvųjį konvergavimą, kai $\alpha \in (0; 1]$. Pagal (3) lygybę $a_n = a'_n - a''_n$, čia $a'_n := \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $a''_n := \frac{1}{2n^{2\alpha}}(1 + o(1))$, $n \to \infty$. Eilutė $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a'_n$ konverguoja, kai $\alpha \in (0; 1]$, pagal Leibnico požymį, taigi ji konverguoja reliatyviai. Eilutė $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a''_n$ konverguoja, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, ir diverguoja, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$. Taigi pradinė eilutė konverguoja reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, ir diverguoja, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$. (Iš tikrųjų, jeigu eilutė $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguotų, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$, tai turėtų konverguoti eilutė $a''_n = a'_n - a_n$, tačiau ji diverguoja). Todėl pradinė eilutė diverguoja, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$, konverguoja reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, ir konverguoja absoliučiai, kai $\alpha \in (1; +\infty)$.

3) Sakykime, eilutė $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N}\}$ tenkina sąlygas: 1) $\exists \lim a_n = 0$, 2) $\exists$ grupuojančioji seka $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$: $N := \sup\{n_{k+1} - n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}$, 3) sugrupuotoji eilutė $\{(b_k, B_k) : k \in \mathbb{N}\}$ konverguoja. Įrodysime, kad konverguoja ir pradinė eilutė ir tų eilučių sumos yra tarpusavyje lygios.

► Turime, kad $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \{n_k; n_k + 1; \cdots; n_{k+1} - 1\}$:

$$B_k = s_n + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n_{k+1}-1}}_{\gamma_k}.$$

Kadangi $\forall k \in \mathbb{N}$ sumos γ_k dėmenų skaičius yra nedidesnis už N, tai pagal 1) sąlygą $\lim \gamma_n = 0$. Todėl $\exists \lim s_n = \lim B_k$. ◄

V.3.1. Ištirkite eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$; 2) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

3) $a_n = \frac{(-1)^{[\frac{n-1}{3}]}}{n}$, čia $[\cdot]$ — sveikoji dalis;

4) $a_n = \dfrac{\ln^{100} n}{n} \sin \dfrac{n\pi}{4}$;

5) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$;

6) $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right), a \in \mathbb{R}$; 7) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

8) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$; 9) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}$;

10) $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{2^n \sin^{2n} x}{n}, x \in \mathbb{R}$; 11) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$;

12) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+(-1)^{n-1})^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$; 13) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$;

14) $a_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^\alpha + \sin \frac{n\pi}{4}}, \alpha \in \mathbb{R}$; 15) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$;

16) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$; 17) $a_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}, n \geqslant 2$;

18) $a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$, čia$[\cdot]$ — sveikoji dalis;

19) $a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

V.3.2. Sakykime, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja reliatyviai,

$$p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n := \frac{|a_n| - a_n}{2},$$
$$P_n := \sum_{k=1}^{n} p_k, \quad Q_n := \sum_{k=1}^{n} q_k, n \in \mathbb{N}.$$

Įrodykite, kad

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 1.$$

V.3.3. Nurodykite pavyzdžius eilučių $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kad $a_n \sim b_n$, kai $n \to \infty$, tačiau viena eilutė konverguotų, o kita diverguotų.

V.3.4. Sakykime, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ yra fiksuoti skaičiai. Įrodykite, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$,

$$\varepsilon_n := \begin{cases} 1, & (k-1)(p+q)+1 \leqslant n \leqslant (k-1)(p+q)+p, \\ -1, & kp+(k-1)q+1 \leqslant n \leqslant k(p+q), k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

konverguoja, kai $p = q$, ir diverguoja, kai $p \neq q$.

V.3.5. Sakykime, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tenkina sąlygą

$$\exists \lim n\Big(\frac{bn}{b_{n+1}} - 1\Big) \in (0; \infty].$$

Įrodykite, kad pradinė eilutė konverguoja.

V.3.6. Sakykime, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguoja reliatyviai. Įrodykite, kad egzistuoja grupuojančioji seka $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ ir ją atitinkanti absoliučiai konverguojanti pradinės eilutės sugrupuotoji eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

V.3.7. Ištirkite eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, perstatos $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$, atitinkančios perstatančiąją funkciją φ,

$$\varphi(k) = \begin{cases} 4n-3, & k = 3n-2, \\ 4n-1, & k = 3n-1, \\ 2n, & k = 3n, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus.

V.3.8. Sakykime, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, $m \in \mathbb{N}$ fiksuotas skaičius ir φ yra perstatančioji funkcija, tenkinanti sąlygą $\forall k \in \mathbb{N} : |\varphi(k) - k| \leqslant m$. Įrodykite, kad perstatančiąją funkciją atitinkanti pradinės eilutės perstata konverguoja ir abiejų eilučių sumos yra lygios.

V.3.9. Raskite reliatyviai konverguojančios eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ diverguojančią perstatą.

V.3.10. Įrodykite, kad teiginiai:

1) eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai,

2) $\forall\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}, \varepsilon_n \in \{-1; 1\}$, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ konverguoja,

3) $\forall\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}, \varepsilon_n \in \{0; 1\}$, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ konverguoja,

yra ekvivalentūs.

V.3.11. Sakykime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yra diverguojanti teigiamoji eilutė ir $\lim a_n = 0$. Įrodykite, kad $\forall s \in \mathbb{R}$ $\exists\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\varepsilon_n \in \{-1; 1\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = s.$$

V.3.12. Sakykime, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ yra fiksuoti skaičiai. Įrodykite, kad reliatyviai konverguojančios eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ perstata

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots-\frac{1}{4q}+\cdots$$

konverguoja ir jos suma lygi $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

V.4. Eilučių daugyba. Begalinės sandaugos.

4.1. Apibrėžimai. *Eilučių* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *ir* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sandauga* vadinama aibė

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi_1(k)} \cdot b_{\varphi_2(k)} : \vec{\varphi} \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

čia aibę

$$\mathcal{A} := \{\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) : \vec{\varphi} : (\mathbb{N} \cup \{0\}) \leftrightarrow (\mathbb{N} \cup \{0\})^2\}$$

sudaro visos perstatančiosios funkcijos.

Sugrupuotoji (1) aibės eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \tag{2}$$

vadinama *eilučių* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *Koši sandauga.*

4.2. Mertenso teorema. *Jeigu abi eilutės konverguoja ir bent viena absoliučiai, tai jų Koši sandauga irgi konverguoja ir jos suma lygi pradinių eilučių sumų sandaugai.*

4.3. Koši teorema. *Jeigu eilutės* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *ir* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguoja absoliučiai, tai* $\forall \vec{\varphi} \in \mathcal{A}$ *eilutė*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi_1(k)} b_{\varphi_2(k)}$$

konverguoja absoliučiai ir jos suma lygi pradinių eilučių sumų sandaugai.

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, konverguoja reliatyviai, o tokių dviejų eilučių Koši sandauga diverguoja.

► Kadangi

$$|a_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \to \infty,$$

ir eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverguoja, tai pagal eilučių palyginimo požymį pradinė eilutė absoliučiai nekonverguoja. Pagal Leibnico požymį ji konverguoja reliatyviai.

Tokių dviejų eilučių Koši sandaugos n-tasis narys

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Kadangi

$$\max\{f(x) := x \in [0; n]\} = f\Big(\frac{n}{2}\Big) = \Big(\frac{n}{2} + 1\Big)^2,$$

čia $f(x) := (x+1)(n-x+1)$, tai

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1, n \geqslant 0.$$

Todėl Koši sandauga $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ netenkina būtinosios konvergavimo sąlygos ir diverguoja. ◄

2) Įrodysime, kad eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$,

$$a_n := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^n, & n \in \mathbb{N}; \end{cases} \qquad b_n := \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1} \Big(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\Big), n \geqslant 0,$$

diverguoja, tačiau jų Koši sandauga konverguoja absoliučiai.

► Kadangi

$$\lim a_n = -\infty, \quad \lim b_n = +\infty,$$

tai abi eilutės netenkina būtinosios konvergavimo sąlygos ir diverguoja.

Atlikę algebrinius veiksmus ir naudodami geometrinės progresijos sumos formulę rasime eilučių Koši sandaugos n-tojo nario c_n išraišką

$$c_n = \Big(\frac{3}{4}\Big)^n, n \geqslant 0.$$

Taigi geometrinė eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguoja ir jos suma lygi 4. ◄

V.4.1. Raskite dviejų tų pačių eilučių $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n := q^n$, $q \in \mathbb{R}$, $0^\circ := 1$, Koši sandaugą ir ištirkite jos absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus.

V.4.2. Įrodykite, kad dviejų konverguojančių eilučių $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, Koši sandauga konverguoja aibėje $E := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta > 1\}$ ir diverguoja aibėje $\mathbb{R}_+^2 \setminus E$.

V.4.3. Sakykime, eilutė $\{(a_n, s_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra eilučių $\{(a'_n, s'_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ir $\{(a''_n, s''_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ Koši sandauga. Įrodykite:

1) $\forall n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} s_k = \sum_{k=0}^{n} s'_k s''_{n-k};$$

2) jeigu visos trys eilutės konverguoja, $s := \lim s_n$, $s' = \lim s'_n$, $s'' = \lim s''_n$, tai $s = s' \cdot s''$.

4.4. Apibrėžimai. Seka $\{(a_n, p_n) : n \in \mathbb{N}\}$,

$$p_n := \prod_{k=1}^{n} a_k, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

vadinama *begaline sandauga* ir žymima

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{4}$$

dydžiai a_n ir p_n yra vadinami *begalinės sandaugos* atitinkamai *n-tuoju nariu* ir *n-tąja daline sandauga*. Jeigu $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}_+$, tai (4) begalinė sandauga vadinama *griežtai teigiama*.

Jeigu $\exists \lim p_n =: p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tai (4) begalinė sandauga vadinama *konverguojančia*, skaičius p – *jos reikšme* ir apibrėžiama

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := p.$$

Priešingu atveju begalinė sandauga vadinama *diverguojančia*.

4.5. Būtinoji begalinės sandaugos konvergavimo sąlyga. *Jeigu (4) begalinė sandauga konverguoja, tai* $\exists \lim a_n = 1$.

4.6. Teorema. *(Griežtai teigiama (4) begalinė sandauga konverguoja) $\Leftrightarrow$ (konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$).*

4.7. Apibrėžimai. Sakykime, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}_+$. Jeigu eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

konverguoja arba absoliučiai, arba reliatyviai, tai (4) *begalinė sandauga* vadinama atitinkamai *absoliučiai* arba *reliatyviai konverguojančia.* Funkcija $\varphi : \mathbb{N} \leftrightarrows \mathbb{N}$ vadinama (4) *begalinės sandaugos perstatančiąja funkcija*, o begalinė sandauga $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ – (4) sandaugos *perstata, atitinkančia funkciją* φ.

Pavyzdžiai. 3) Rasime begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, $a_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, reikšmę p.

Kadangi

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} a_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \\ = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}, n \geqslant 2,$$

tai

$$\lim p_n = \frac{2}{3}$$

ir begalinės sandaugos reikšmė yra $\frac{2}{3}$.

4) Ištirsime begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 1 - x^n$, $x \in \mathbb{R}$, konvergavimą.

Kadangi $\nexists \lim a_n$, kai $x \in (-\infty, -1]$, ir

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ -\infty, & x \in (1; +\infty), \end{cases}$$

tai nurodytosiose aibėse netenkinama būtinoji konvergavimo sąlyga ir begalinė sandauga diverguoja.

Kadangi

$$|\ln(1-x^n)| \sim |x|^n, n \to \infty, x \in (-1; 1),$$

ir geometrinė eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$, $x \in (-1; 1)$, konverguoja, tai pagal 6 teoremą, begalinė sandauga konverguoja.

Taigi begalinė sandauga konverguoja, kai $x \in (-1; 1)$ ir diverguoja, kai $x \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

5) Ištirsime begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus.

Jeigu $\alpha \leqslant 0$, tai $\nexists \lim a_n$, netenkinama būtinoji konvergavimo sąlyga ir begalinė sandauga diverguoja.

Jeigu $\alpha > 0$, tai
$$|\ln a_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}, n \to \infty.$$
Todėl begalinė sandauga konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir absoliučiai nekonverguoja, kai $\alpha \in (0; 1]$. Kadangi
$$\ln a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}}(1 + o(1)), n \to \infty,$$
eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ konverguoja, kai $\alpha \in (0; 1]$, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ konverguoja, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, ir diverguoja, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$, tai eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ konverguoja reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, ir diverguoja, kai $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$.

Taigi begalinė sandauga $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja, kai $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$.

V.4.4. Raskite begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ reikšmę, jeigu:

1) $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$; 2) $a_n = 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}$;

3) $a_n = 1 + x^{2^{n-1}}, x \in (-1; 1)$; 4) $a_n = \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}$;

5) $a_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}, x \in \mathbb{R}$; 6) $a_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$;

7) $a_n = a^{\frac{(-1)^n}{n}}, a \in \mathbb{R}_+$; 8) $a_n = 1 + \frac{1}{b_n}, b_1 = 1, b_{n+1} = (n+1)(1 + b_n), n \in \mathbb{N}$.

V.4.5. Sakykime, begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja. Įrodykite, kad konverguoja begalinės sandaugos: 1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Pateikite pavyzdžius, kad begalinė sandauga $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverguotų.

V.4.6. Ištirkite begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergavimą, jeigu:

1) $a_n = \left(\frac{n(n+2)}{n^2 + 2n + 2}\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$; 2) $a_n = 1 + \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $a_n = 1 + x^n, x \in (-1;1)$; 4) $a_n = 1 + e^{-n^2 x}, x \in \mathbb{R}_+$;
5) $a_n = \sqrt[n]{n}$; 6) $a_n = \sqrt[n^2]{n}$;
7) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$; 8) $a_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+$;
9) $a_n = \left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+$; 10) $a_n = \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}, x \in \mathbb{R}_+$;
11) $a_n = \left(n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+$;

V.4.7. Ištirkite begalinės sandaugos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absoliutųjį ir reliatyvųjį konvergavimus,jeigu:

1) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;
3) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; 4) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$;
5) $a_n = n^{(-1)^n}$; 6) $a_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$;
7) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$; 8) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^{\alpha}}, & n \in \{3k-2; 3k : k \in \mathbb{N}\}, \\ \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha}}\right)^2, & n \in \{3k-1 : k \in \mathbb{N}\}, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$

V.4.8. Įrodykite, kad begalinė sandauga $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sum_{l=1}^{2} \left(\frac{2}{n+3}\right)^{\frac{l}{2}}, & n \in \{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}, \\ 1 - \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}, & n \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

konverguoja, o eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - 1)$ diverguoja.

V.4.9. Sakykime, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguoja ir $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| < \frac{\pi}{2}$. Įrodykite, kad konverguoja begalinė sandauga $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos a_n$.

V.4.10. Sakykime, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai ir $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$. Įrodykite, kad begalinė sandauga $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + a_n)$ konverguoja.

V.4.11. Sakykime, begalinė sandauga $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai. Įrodykite, kad kiekvienai perstatančiajai funkcijai $\varphi : \mathbb{N} \leftrightarrows \mathbb{N}$ perstata $\prod_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguoja ir jos reikšmė nepriklauso nuo funkcijos φ.

V.4.12. Sakykime, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ fiksuoti skaičiai. raskite begalinės sandaugos $\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}$ ir jos perstatos

$$e^{\frac{1}{1}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdots e^{\frac{1}{2p-1}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdots$$
$$\cdots e^{-\frac{1}{2q}} e^{\frac{1}{2p+1}} \cdot e^{\frac{1}{2p+3}} \cdots e^{\frac{1}{4p-1}} e^{-\frac{1}{2q+2}} e^{-\frac{1}{2q+4}} \cdots e^{-\frac{1}{4q}} + \cdots$$

reikšmes.

V.4.13. Įrodykite, kad begalinė sandauga $\prod_{n=3}^{\infty} a_n$,

$$a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{2}{n+3}}, & n = 2k-1, \\ 1 + \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{l}{2}}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

konverguoja, o abi eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)^2$ diverguoja.

VI. RYMANO INTEGRALAS

VI.1. Neapibrėžtinis integralas.

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, $\mathbb{R} \subset \mathcal{J}$ yra intervalas, funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ tenkina sąlygas: 1) $\exists F \in C(\mathcal{J})$, 2) $\exists$ baigtinė arba skaiti aibė $E \subset \mathcal{J}$ $\forall x \in \mathcal{J} \setminus E$ $\exists F'(x) = f(x)$, 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ aibė $E \cap [-n; n]$ yra baigtinė. Tokia funkcija F vadinama funkcijos f *pirmykšte funkcija* intervale $\mathcal{J}$.

Toliau šiame skyrelyje laikysime $E = \emptyset$. Sakykime, funkcija $F : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ yra funkcijos f pirmykštė funkcija intervale $\mathcal{J}$. Aibė

$$\int f(x)dx := \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\} =: F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

čia $C : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ – pastovioji funkcija, t.y. $\forall x \in \mathcal{J} : C(x) = C$, vadinama *funkcijos f neapibrėžtiniu integralu intervale $\mathcal{J}$*, pati funkcija f – *pointegralinė funkcija*, reiškinys $f(x)dx$ – *pointegraliniu reiškiniu*. Apibrėšime

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' := f(x), \quad x \in \mathcal{J}.$$

1.2. Neapibrėžtinio integralo savybės. *Sakykime, funkcijos $F; \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $G : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, yra atitinkamų funkcijų f ir g pirmykštės funkcijos intervale $\mathcal{J}$, funkcija $\varphi : \widehat{\mathcal{J}} \to \mathcal{J}$ – diferencijuojama intervale $\widehat{\mathcal{J}}$ siurjekcija, $\widehat{C}$ – pastovioji intervale $\widehat{\mathcal{J}}$ funkcija. Tada teisingos lygybės*

$$\int (f + g)(x)dx = (F + G)(x) + C, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{2}$$

$$\int (\widehat{C}f)(x)dx = \widehat{C}F(x) + C, \quad x \in \mathcal{J}, \tag{3}$$

$$\int (Fg)(x)dx = (FG)(x) - \int (Gf)(x)dx, \quad x \in \mathcal{J}, \text{(integravimo dalimis formulė)}, \tag{4}$$

$$\int f(x)dx = \int ((f \circ \varphi)\varphi')(t)dt = (F \circ \varphi)(t) + C, t \in \widehat{\mathcal{J}}, \text{(kintamojo keitimo formulė)}. \tag{5}$$

1.3. Integralų lentelė.

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \ln|x| + C, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha = -1, \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & x \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}; \tag{7}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,\ x \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,\ x \in \mathbb{R}; \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}; \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C,\ x \in (-|a|; |a|),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,\ x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{13}$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,\ x \in \mathbb{R}; \tag{14}$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,\ x \in \mathbb{R}; \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,\ x \in \mathbb{R}; \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,\ x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus [-|a|; |a|],\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-a; a\},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{20}$$

Jeigu pointegralinės funkcijos apibrėžimo sritis yra baigtinė arba skaiti poromis nesikertančių intervalų sąjunga, tai (1)-(20) sąryšiai teisingi kiekviename tokiame intervale su jį atitinkančia pastoviąja funkcija C.

Pavyzdžiai. 1) Funkcijai f,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

rasime tokią pirmykštę funkciją F tiesėje $\mathbb{R}$, kad $F(1) = \pi$.
Pagal (13) formulę

$$\int f(x) dx = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kadangi

$$\operatorname{arc\,tg} 1 + C = \frac{\pi}{4} + C = \pi,$$

tai $C = \frac{3\pi}{4}$ ir

$$F(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3\pi}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Rasime integralą

$$F_{(a,b)}(x) := \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x = 0\},$$

čia $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.
Jeigu $(a, b) \in T_1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} : |a| = |b|\}$, tai

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2|a|} + C, \; x \in \mathbb{R}.$$

Jeigu $(a, b) \in T_2 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} : ab \neq 0, \; |a| \neq |b|\}$, tai $\forall x \in \mathbb{R} : \; t := a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x \in \mathbb{R}_+$ ir $dt = 2(a^2 - b^2) \sin x \cos x \, dx$. Naudodami kintamojo keitimo formulę, randame

$$\begin{aligned} F_{(a,b)}(x) &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C, \; x \in \mathbb{R}, (a, b) \in T_2. \end{aligned}$$

Jeigu $(a, b) \in T_3 := \{(0; b) \in \mathbb{R}^2 : b \neq 0\}$, tai

$$\begin{aligned} F_{(a,b)}(x) &= \frac{1}{|b|} \int \frac{\sin x \cos x}{|\cos x|} dx = \frac{\operatorname{sgn} \cos x}{|b|} \int \sin x dx = \\ &= -\frac{|\cos x|}{|b|} + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Jeigu $(a, b) \in T_4 := \{(a; 0) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$, tai

$$\begin{aligned} F_{(a,b)}(x) &= \frac{1}{|a|} \int \frac{\sin x \cos x}{|\sin x|} dx = \frac{\operatorname{sgn} \sin x}{|a|} \int \cos x dx = \\ &= \frac{|\sin x|}{|a|} + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

3) Rasime integralą

$$F_{(a,b)}(x) := \int e^{ax} \cos bx \, dx, \; x \in \mathbb{R}, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Akivaizdu, kad

$$F_{\vec{0}}(x) = x + C, \; x \in \mathbb{R}.$$

Sakykime, $(a,b) \in T := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}$. Naudodami du kartus integravimo dalimis formulę, gausime

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bx dx \right) =$$
$$= \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int \sin bx d(e^{ax}) \right) = \frac{e^{ax}}{a^2}(a \cos bx + b \sin bx) - \frac{b^2}{a^2} F_{(a,b)}(x).$$

Išsprendę tą lygtį funkcijos $F_{(a,b)}$ atžvilgiu rasime

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C, x \in \mathbb{R}.$$

Kadangi $\forall b \neq 0$:

$$F_{(0,b)}(x) = \int \cos bx dx = \frac{\sin bx}{b} + C, x \in \mathbb{R},$$

tai

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C, x \in \mathbb{R}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}.$$

4) Rasime integralą

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx, \ x \in \mathbb{R}.$$

Akivaizdu, kad funkcija $F \in C^1(\mathbb{R})$. Jeigu $x \neq 0$, tai

$$F(x) = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C_k,$$

$x \in \mathcal{J}_k$, $k \in \{0;1\}$, $\mathcal{J}_0 := (-\infty;0)$, $\mathcal{J}_1 := \mathbb{R}_+$.
Pratęskime funkciją F tolydžiai į tašką 0, t.y. pareikalaukime, kad

$$F(0) := F(-0) = F(+0).$$

Randame

$$F(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_0, \quad F(+0) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_1, \ C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_0.$$

Todėl

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \pi k \right) + C_0, & x \in \mathcal{J}_k, k \in \{0;1\}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_0, & x = 0, \end{cases}$$

čia C_0 – pastovioji tiesėje $\mathbb{R}$ funkcija.

VI.1.1. Raskite integralą $\int f(x)dx$, $x \in E$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}, E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) $f(x) = \operatorname{th}^2 x, E = \mathbb{R}$;
3) $f(x) = e^{|x|}, E = \mathbb{R}$; 4) $f(x) = |x|e^x, E = \mathbb{R}$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}},\ E = \mathbb{R}_+$; 6) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^8 - 2}, E = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[8]{2}; \sqrt[8]{2}\}$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}, E = \mathbb{R}$; 8) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}, E = \left(\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$;
9) $f(x) = |x^2 - 2x|, E = \mathbb{R}$; 10) $f(x) = |\cos x|, E = \mathbb{R}$;
11) $f(x) = \sin x + |\sin x|, E = \mathbb{R}$; 12) $f(x) = |\ln x|, E = \mathbb{R}_+$;
13) $f(x) = \min\{x - k; k + 1 - x\}, x \in [k; k+1], k \in \mathbb{Z}$;
14) $f(x) = \max\{1; x^2\}, E = \mathbb{R}$; 15) $f(x) = |1 + x| - |1 - x|, E = \mathbb{R}$;
16) $f(x) = [x]|\sin \pi x|, E = \mathbb{R}$; 17) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1; 1], \\ 1 - |x|, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]; \end{cases}$
18) $f(x) = (x + |x|)^2, E = \mathbb{R}$; 19) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty; 0), \\ x + 1, & x \in [0; 1]; \\ 2x, & x \in (1; +\infty); \end{cases}$
20) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}, E = \mathbb{R}$.

VI.1.2. Įrodykite, kad funkcija F,

$$F(x) = (-1)^k \cos x + 2(k-1), \quad x \in [(k-1)\pi; k\pi], k \in \mathbb{Z},$$

yra funkcijos f, $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, pirmykštė funkcija.

VI.1.3. Įrodykite, kad funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0], \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

neturi diferencijuojamos pirmykštės funkcijos intervale $(-1; 1)$.

VI.1.4. Sakykime, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ turi pirmykštę funkciją F tiesėje $\mathbb{R}$. Įrodykite teiginius:

1) jeigu funkcija f yra lyginė, tai funkcija $F - F(0)$ nelyginė;

2) jeigu funkcija f yra nelyginė, tai funkcija F lyginė;

3) jeigu funkcija f yra T-periodinė ir $F(0) = F(T)$, tai funkcija F yra T-periodinė.

Nurodykite pavyzdžius: 1) kad funkcija f būtų lyginė, o funkcija F nebūtų nelyginė; 2) kad funkcija f būtų T-periodinė, o funkcija F nebūtų T-periodinė.

VI.1.5. Sakykime, funkcija $F \in C((a; b))$, funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ yra tolydi taške $c \in (a; b)$ ir funkcija F yra funkcijos f pirmykštė kiekviename intervale $(a; c)$ ir $(c; b)$. Įrodykite, kad funkcija F yra funkcijos f pirmykštė intervale $(a; b)$.

Nurodykite pavyzdžius, kad funkcija f būtų trūki taške c, o funkcija F: 1) būtų funkcijos f pirmykštė intervale $(a; b)$; 2) nebūtų funkcijos f pirmykštė tame intervale.

VI.1.6. Naudodami integravimo dalimis formulę, raskite integralą $\int f(x)dx$, $x \in E$, jeigu:

1) $f(x)=\sqrt{x}\ln^2 x,\ E=\mathbb{R}_+;$ 2) $f(x)=x^3e^{-x^2},\ E=\mathbb{R};$
3) $f(x)=x^2\sin 2x,\ E=\mathbb{R};$ 4) $f(x)=x\operatorname{sh}x,\ E=\mathbb{R};$
5) $f(x)=x^2\arccos x,\ E=[-1;1];$
6) $f(x)=\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x,\ E=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\big(k\pi;(2k+1)\frac{\pi}{2}\big);$
7) $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}e^{\operatorname{arc\,tg}x},\ E=\mathbb{R};$ 8) $f(x)=\sin\ln x,\ E=\mathbb{R}_+;$
9) $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x},\ E=\mathbb{R}\setminus\big\{(2k+1)\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\big\};$
10) $f(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2},\ E=\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$

Pavyzdys. 5) Rasime integralą

$$F(x)=\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Naudojame neapibrėžtųjų koeficientų metodą:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=$$
$$=\frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=$$
$$=\frac{(A_1+B)x^3+(A_1+A_2-2B+C)x^2+(2A_2+B-2C)x-2A_1+2A_2+C}{(x-1)^2(x^2+2x+2)},$$

$$\begin{cases}A_1+B=0,\\ A_1+A_2-2B+C=0,\\ 2A_2+B-2C=1,\\ -2A_1+2A_2+C=0,\end{cases}\qquad A_1=\frac{1}{25},\ A_2=\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{25},\ C=-\frac{8}{25}.$$

Todėl

$$F(x)=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{25}\int\frac{x+8}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{25}\ln|x-1|+$$
$$-\frac{1}{5}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{25}\frac{1}{2}\left(\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}+14\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}\right)=$$
$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{25}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+2x+2}}-\frac{7}{25}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$$

VI.1.7. Naudodami neapibrėžtųjų koeficientų metodą raskite integralą $\int f(x)dx$, $x\in E$, jeigu:

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x},\ E=\mathbb{R}\setminus\{0;2;3\};$

2) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)$, $E = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}$, $E = \mathbb{R}$;
4) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$, $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$, $E = \mathbb{R}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^8 + 1}$, $E = \mathbb{R}$.

1.4. Kai kurių neracionaliųjų funkcijų integravimas. Funkcija P_N, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$P_N(\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in T_N} c_{\vec{k}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$T_N := \{\vec{k} = (k_1, ..., k_n) \in \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)^n : \sum_{j=1}^{n} k_j \leqslant N\}$, $c_{\vec{k}} \in \mathbb{R}$, yra vadinama n*-mačio argumento* $\vec{x}$ N*-tojo laipsnio polinomu su realiaisiais koeficientais* $c_{\vec{k}}$. Dviejų tokių polinomų santykis vadinamas n*-mačio argumento racionaliąja funkcija.*

Sakykime egzistuoja tokia diferencijuojama siurjekcija $g : \widehat{E} \to E_1$, $x := g(t)$, jog

$$\int f(x)dx = \int R(t)dt,$$

čia R – racionalioji funkcija, aibė $\widehat{E} \subset \mathbb{R}$ yra baigtinė arba skaiti poromis nesikertančių intervalų (jų vidūs netuščios aibės) sąjunga, aibė $E_1 \subset \mathcal{D}(f)$ ir $\mathcal{D}(f) \setminus F_1$ yra baigtinė arba skaiti. Toks integralas $\int f(x)dx$ vadinamas *racionalinamu.* Radus funkcijos R pirmykštę funkciją $\widehat{F}$, funkcija $\widehat{F} \circ g^{-1}$ tolydžiai pratęsiama į aibę $\mathcal{D}(f) \setminus E_1$.

Jeigu

$$f(x) = R(\sin x, \cos x), \tag{21}$$

čia R – dvimačio argumento $(\sin x, \cos x)$ racionalioji funkcija, tai integralas $\int f(x)dx$, $x \in \mathcal{D}(f)$, racionalinamas keitiniu

$$t := \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \; dt = \frac{1 + t^2}{2} dx, \; \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \; \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \tag{22}$$

Jeigu

$$f(x) = R\big(x, \sqrt[n]{ax + b}\big), \; (a, b) \in \mathbb{R}^2, \; a \neq 0, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geqslant 2, \tag{23}$$

čia R–dvimačio argumento $(x, \sqrt[n]{ax + b})$ racionalioji funkcija, tai integralas $\int f(x)dx$, $x \in \mathcal{D}(f)$, racionalinamas keitiniu

$$t := \sqrt[n]{ax + b}, \; x = \frac{t^n - b}{a}, \; dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt. \tag{24}$$

Jeigu

$$f(x) = R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0, b^2-4ac \neq 0, \tag{25}$$

čia R–dvimačio argumento $(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ racionalioji funkcija, tai integralas $\int f(x)dx$ $x \in \mathcal{D}(f)$, racionalinamas vadinamaisiais *Oilerio keitiniais:*

$$1)\ t := \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x,\ \ b^2-4ac<0,\ \ a>0; \tag{26}$$

$$2)\ t := \frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c},\ \ b^2-4ac>0; \tag{27}$$

x_1 yra kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknis.

Jeigu pointegralinė funkcija $f = P\cdot g$, čia P – polinomas, o funkcija g yra arba rodiklinė, arba logaritminė, arba $\sin$, arba $\cos$, tai toks integralas dažniausiai randamas naudojant integravimo dalimis formulę.

Pavyzdžiai. 6) Rasime integralą

$$F(x) = \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx,\ \ x \in [-1;+\infty).$$

Kadangi pointegralinė funkcija f,

$$f(x) = R\big(\sqrt[6]{x+1}\big) = \frac{1-\big(\sqrt[6]{x+1}\big)^3}{1+\big(\sqrt[6]{x+1}\big)^2},\ \ x \in [-1;+\infty),$$

yra racionalioji argumento $\sqrt[6]{x+1}$ funkcija, tai naudojame (24) keitinį

$$t := \sqrt[6]{x+1},\ \ x = t^6-1,\ \ dx = 6t^5dt,\ \ t \in [0;+\infty),$$

ir gauname

$$F(x) = 6\int \frac{(1-t^3)t^5}{1+t^2}dt = 6\int \Big(1-t-t^2+t^3+t^4-t^6+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\Big)dt =$$
$$= 6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(t^2+1)-6\operatorname{arc\,tg} t + C.$$

7) Rasime integralą

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}},\ \ x \in [x_1;x_2],\ \ x_1 := -(\sqrt{5}+1),\ \ x_2 := \sqrt{5}-1.$$

Kadangi pointegralinė funkcija f,

$$f(x) = R\big(\sqrt{1-2x-x^2}\big) = \frac{1}{1+\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}},\ \ x \in [x_1;x_2],$$

yra racionalioji argumento $\sqrt{1-2x-x^2}$ funkcija, tai naudojame (27) keitinį

$$t := \frac{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}}{x-x_1} = \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}},\ x = (x_1; x_2],$$
$$x = \frac{x_1t^2+x_2}{t^2+1},\ dx = -\frac{4\sqrt{5}t}{(t^2+1)^2}dt,\ t \in [0; +\infty),$$

ir gauname

$$F(x) = -4\sqrt{5}\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{5}t+1)} = -\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\int \frac{t^2+2\sqrt{5}t+1-(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{5}t+1)}dt =$$
$$= 2\int \frac{dt}{(t+\sqrt{5})^2-4} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{t+\sqrt{5}-2}{t+\sqrt{5}+2} - 2\operatorname{arc\,tg} t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-2)\sqrt{x-x_1}+\sqrt{x_2-x}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt{x-x_1}+\sqrt{x_2-x}} - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} + C,\ x \in (x_1; x_2].$$

Pratęsime funkciją F tolydžiai į tašką x_1 apibrėžę

$$F(x_1) := F(x_1+0) = -\pi + C.$$

VI.1.8. Racionalindami raskite integralą $f(x)dx$, $x \in E$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}},\ E = [0; +\infty);$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}},\ E = \mathbb{R}_+;$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},\ E = [-1; +\infty);$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}},\ E = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\};$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}},\ E = [0; +\infty);$

6) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}},\ E = \mathbb{R}\setminus\{-1\};$

7) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}},\ E = (-1; 1);$

8) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}},\ E = \Big(-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Big);$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^{3/2}},\ E = \mathbb{R}.$

VI.1.9. Raskite integralą $f(x)dx$, $x \in E$, jeigu:

1) $f(x) = \cos^6 x,\ E = \mathbb{R};$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, $E=\cup_{k\in \mathbb{Z}}\left(k\pi; k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$;
3) $f(x)=\cos^2 ax\cdot\cos^2 bx$, $E=\mathbb{R},(a,b)\in\mathbb{R}^2$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$;
5) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, $E=\mathbb{R}$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}: a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x=0\}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$;
7) $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$, $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi k+\dfrac{3\pi}{4} : k\in\mathbb{Z}\right\}$;
8) $f(x)=\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}: a\sin x+b\cos x=0\}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$;
9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, $E=\mathbb{R}$;
10) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, $E=\mathbb{R}$;
11) $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}$, $E=\mathbb{R}$;
12) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}$, $E=\mathbb{R}$.

VI.1.10. Raskite integralą $\int f(x)dx$, $x\in E$, jeigu:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^{12}}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{1\}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^5}{(2+x^2)^3}$, $E=\mathbb{R}$;
3) $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{(x-a)^n}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{a\}, a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$,
P_m – m – tojo laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;
4) $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{2+e^x}$, $E=\mathbb{R}$;
5) $f(x)=x^3\sqrt{1-x^2}$, $E=[-1;1]$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$;
7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$, $E=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$;
8) $f(x)=x^2\ln\dfrac{x-1}{x}$, $E=\mathbb{R}\setminus[0;1]$;
9) $f(x)=\ln(1+x+x^2)$, $E=\mathbb{R}$;
10) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $E=\mathbb{R}$;
11) $f(x)=(a^x+a^{-x})^n$, $E=\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}, n\in\mathbb{N}$;

12) $f(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^2 + a^2}$, $E = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
13) $f(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^2 - a^2}$, $E = \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
14) $f(x) = \dfrac{1}{x^{2n}(x^2 + a^2)}$, $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
15) $f(x) = e^{ax} P_m(x)$, $E = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
P_m – m-tojo laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

VI.2 Rymano integralo pagrindinės sąvokos

2.1. Apibrėžimai. Aibė

$$P := \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}, \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \ n \in \mathbb{N},$$

vadinama *intervalo* $[a; b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, *skaidiniu*, vektorius

$$\vec{\xi} := (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \ \xi_k \in [x_{k-1}; x_k], \ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

– *skaidinio* P *tarpiniu (žymėtuoju) tašku*, suma

$$S_f(P, \vec{\xi}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k, \tag{1}$$

čia $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, funkcija $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, – *funkcijos* f *integraline suma intervale* $[a; b]$, *atitinkančia tašką* $(P, \vec{\xi})$. Visų intervalo $[a; b]$ skaidinių ir jų tarpinių taškų aibę žymėsime $\mathcal{P}$ ir $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$ apibrėšime aibę

$$\mathcal{B}_\delta := \left\{(P, \vec{\xi}) \in \mathcal{P} : d(P) < \delta\right\},$$

čia skaičius

$$d(P) := \max\{\Delta x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

yra vadinamas *skaidinio* P *diametru.*

Sakykime, funkcija $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ tenkina sąlygą: $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \forall (P, \vec{\xi}) \in \mathcal{B}_\delta$:

$$|S_f(P, \vec{\xi}) - A| < \varepsilon.$$

Tokia funkcija f vadinama *integruojama* (*pagal Rymaną*) *intervale* $[a; b]$, o skaičius A yra žymimas simboliais

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f := A$$

ir vadinamas *funkcijos* f (*Rymano*) *integralu intervale* $[a; b]$.

Visų integruojamų intervale $[a;b]$ funkcijų aibę žymėsime $\mathcal{R}([a;b])$.

Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, tenkina sąlygą: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists T \subset \mathbb{N} \ \exists \{\mathcal{J}_k : k \in T\}$:

$$\bigcup_{k\in T} \mathcal{J}_k > E, \quad \sum_{k\in T} |\mathcal{J}_k| < \varepsilon,$$

čia $\mathcal{J}_k \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{J}_k \neq \emptyset$, – intervalai, $|\mathcal{J}_k|$ – intervalo $\mathcal{J}_k$ ilgis. Tokia aibė E vadinama *nuline Lebego aibe.* Jeigu $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ aibė T yra baigtinė, tai aibė E vadinama *nuline Žordano aibe.* Apibrėšime, kad tuščioji aibė yra nulinė Žordano, taigi ir Lebego, aibė.

Sakykime, kuris nors teiginys yra teisingas kiekviename aibės E taške, išskyrus galbūt tos aibės nulinį Lebego poaibį. Tuomet sakoma, kad tas teiginys yra teisingas *beveik visur aibėje* E.

2.2. Lebego teorema. (*Funkcija* $f \in \mathcal{R}([a;b])$) $\Leftrightarrow$ (*funkcija* f *yra aprėžta ir beveik visur tolydi intervale* $[a;b]$).

2.3. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, yra aprėžta, $P = \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ yra intervalo $[a;b]$ skaidinys, kurių visų aibę žymėsime $\mathcal{P}_1$. Apibrėšime

$$m_k := \inf f\big([x_{k-1};x_k]\big),$$
$$M_k := \sup f\big([x_{k-1};x_k]\big), \ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Sumos

$$\underline{S}_f(P) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \tag{1}$$

$$\overline{S}_f(P) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \ \Delta x_k := x_k - x_{k-1}, \tag{3}$$

yra vadinamos *funkcijos* f atitinkamai *apatine* ir *viršutine (Darbú) sumomis intervale* $[a;b]$, *atitinkančiomis skaidinį* P.

Skaičiai

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\big\{\underline{S}_f(P) : P \in \mathcal{P}_1\big\},$$

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\big\{\overline{S}_f(P) : P \in \mathcal{P}_1\big\},$$

vadinami *funkcijos* f atitinkamai apatiniu ir *viršutiniu (Rymano) integralais intervale* $[a;b]$.

Pavyzdžiai. 1) Rasime funkcijas f,

$$f(x) = 1 + x, \qquad x \in [-1;4],$$

integralinę sumą $S_f(P,\vec{\xi})$, atitinkančią skaidinį

$$P=\{x_k: 0\leqslant k\leqslant n\},\quad \Delta x=x_k-x_{k-1}=\frac{5}{n},\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

ir tarpinį tašką

$$\vec{\xi}=(\xi_1,...,\xi_n),\quad \xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

integralinių sumų sekos ribą ir integralą $\int_{-1}^4 f$.
Pagal integralinės sumos apibrėžimą

$$\begin{aligned}S_f(P,\vec{\xi})&=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=\frac{5}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\\&=\frac{5}{n}\sum_{k=1}^n\Big(1+\frac{1}{2}\Big(-1+\frac{5(k-1)}{n}-1+\frac{5k}{n}\Big)\Big)=\frac{25}{2n^2}\sum_{k=1}^n(2k-1)=\\&=\frac{25}{n^2}\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=\frac{25}{2},\end{aligned}$$

nes $x_k=-1+\frac{5k}{n}$, $0\leqslant k\leqslant n$. Kadangi funkcija $f\in C([-1;4])$, tai pagal Lebego teoremą $f\in\mathcal{R}([-1;4])$. Be to, sudarytoji integralinių sumų seka yra pastovi, todėl jos riba lygi

$$\frac{25}{2}=\int_{-1}^4(1+x)dx.$$

2) Funkcijai f,

$$f(x)=x^4,\quad x\in[1;2],$$

rasime apatinę sumą $\underline{S}_f(P)$, atitinkančią skaidinį

$$P=\{x_k: 0\leqslant k\leqslant n\},\ x_k=q^k,\ 0\leqslant k\leqslant n,\ n\in\mathbb{N},$$

sumų sekos ribą ir integralus $\int_1^2 x^4\,dx$, $\underline{\int_1^2} x^4\,dx$ ir $\overline{\int_1^2} x^4\,dx$.

Skaidinio P elementai sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis $q=2^{\frac{1}{n}}$. Funkcija f yra tolydi ir didėjanti intervale $[1;2]$, todėl

$$\begin{aligned}\underline{S}_f(P)&=\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\Delta x_k=\sum_{k=1}^n x_{k-1}^4(q^k-q^{k-1})=(2^{\frac{1}{n}}-1)\sum_{k=1}^n 2^{\frac{5(k-1)}{n}}=\\&=(2^{\frac{1}{n}}-1)\frac{2^{\frac{5}{n}\cdot n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{31(2^{\frac{1}{n}}-1)}{2^{\frac{5}{n}-1}},\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Kadangi $a^x - 1 \sim x \ln a$, $x \to 0$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_f(P) = 31 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{5}{n}\ln 2} = \frac{31}{5}.$$

Pagal Lebego teoremą funkcija $f \in \mathcal{R}([1;2])$. Be to,

$$\underline{S}_f(P) = S_f(P, \vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_k = x_{k-1}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Todėl

$$\int_1^2 x^4 dx = \frac{31}{5}.$$

Pagal Darbu teoremą

$$\underline{\int_1^2} x^4 dx = \overline{\int_1^2} x^4 dx = \frac{31}{5}.$$

VI.2.1. Parinkę tinkamus intervalo skaidinį ir jo tarpinį tašką, raskite funkcijos $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ integralinių sumų seką, įrodykite, kad ta funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$, ir raskite integralą $\int_a^b f$ kaip sumų sekos ribą, jeigu:

1) $f(x) = x^2, x \in [-1;2]$;
2) $f(x) = a^x, x \in [0;1]; a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \in [a;b], (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, a < b$;
4) $f(x) = \sin x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
5) $f(x) = \cos x, x \in [0;a], a \in \mathbb{R}_+$;
6) $f(x) = x^m, x \in [a;b], (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, a < b, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in [a;b], (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, a < b$;
8) $f(x) = \ln(1 - 2t\cos x + t^2), x \in [0;\pi], t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, (Puasono integralas).

VI.2.2. Raskite funkcijos $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ apatinę ir viršutinę sumas intervale $[a,b]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, atitinkančias skaidinį $P = \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, jeigu:

1) $f(x) = x^2,\ x \in [0;1]$;
2) $f(x) = x^3,\ x \in [-2;3]$;
3) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0;1]$;
4) $f(x) = 2^x,\ x \in [0;10]$.

VI.2.3. Įrodykite teiginį: jeigu funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra monotoninė ir $f \in C([a;b])$, tai $\forall P \in \mathcal{P}_1$ $\exists$ tarpiniai taškai $\vec{\xi}_1$ ir $\vec{\xi}_2$:

$$\underline{S}_f(P) = S_f(P, \vec{\xi}_1), \quad \overline{S}_f(P) = S_f(P, \vec{\xi}_2).$$

VI.2.4. Sakykime, funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Įrodykite, kad $f \overline{\in} \mathcal{R}([0;1])$.

VI.2.5. Sakykime, funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Įrodykite, kad $f \in \mathcal{R}([0;1])$.

VI.2.6. Sakykime, seka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a;b]$ konverguoja, o funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta ir $f \in C([a;b] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Įrodykite, kad funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$.

VI.2.7. Sakykime, funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$. Įrodykite, kad:

$$1)\ \sin f \in \mathcal{R}([a;b]); \quad 2)\ \operatorname{arc\,tg} f \in \mathcal{R}([a;b]); \quad 3)\ \forall p \in \mathbb{R}_+ |f|^P \in \mathcal{R}([a;b]).$$

VI.2.8. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta. Įrodykite, kad funkcija $g \in \mathcal{R}([a;b])$, čia

$$g(x) := \inf f([a;x]), \quad x \in [a;b].$$

VI.2.9. Sakykime, funkcijos $\{f, g\} \subset \mathcal{R}([a;b])$. Įrodykite, kad funkcija $h \in \mathcal{R}([a;b])$, čia

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in [a;b].$$

VI.2.10. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir $\forall x \in [a;b]$ $\exists \lim_{t \to x} f(t) \in \mathbb{R}$. Įrodykite, kad $f \in \mathcal{R}([a;b])$.

VI.2.11. Sakykime, funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$,

$$x_k := a + \frac{b-a}{n} \cdot k,\ k \in \{0; \cdots; n\}, n \in \mathbb{N},$$
$$f_n(x) := \begin{cases} \sup f([x_{k-1}; x_k)), & x \in [x_{k-1}; x_k), 1 \leqslant k \leqslant n, \\ f(b), & x = b. \end{cases}$$

Įrodykite, kad

$$\exists \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

VI.2.12. Įrodykite teiginį: $\forall f \in \mathcal{R}([a;b])$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists g_n \in C([a;b])$ $\forall c \in [a;b]$:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \int_a^c g_n = \int_a^c f.$$

2.5. Niutono-Leibnico teorema. Sakykime, funkcija $f[a;b] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta ir $\exists$ baigtinė aibė $E \subset [a;b]$, jog $f \in C([a;b] \setminus E)$. Tada funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$, turi pirmykštę funkciją G intervale $[a;b]$ ir teisinga lygybė

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) =: G|_a^b. \tag{4}$$

Pavyzdys. 3) Apskaičiuosime ribą

$$A := \lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p, \ \ p \in \mathbb{R}_+.$$

Ta suma yra funkcijos f, $f(x) = x^p$, $x \in [0;1]$, integralinė suma intervale $[0;1]$, atitinkanti skaidinį $P = \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$, ir tarpinį tašką $\vec{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\xi_k = x_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Kadangi $f \in \mathcal{R}([0;1])$, tai

$$A = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

2.6. Integravimo dalimis teorema. *Sakykime, 1) funkcijos $\{f,g\} \subset C([a;b])$, 2) $\exists$ baigtinė aibė $E \subset [a;b]$: $\exists\{f',g'\} \subset C([a;b] \setminus E)$, 3) $\{f',g'\} \subset \mathcal{R}([a;b])$. Tada $\{fg', gf'\} \subset \mathcal{R}([a;b])$ ir teisinga lygybė*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b gf'. \tag{5}$$

2.7. Kintamojo keitinio teorema. *Sakykime, funkcija $\varphi \in C^1([\alpha;\beta])$, $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, yra griežtai monotoniška, funkcija $f \in \mathcal{R}([\varphi(\alpha);\varphi(\beta)])$. Tada funkcija $f \circ \varphi \in \mathcal{R}([\alpha;\beta])$ ir teisinga lygybė*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi'.$$

VI.2.13. Sakykime, funkcija $f \in \mathcal{R}([a;b])$, aibė $E \subset [a;b]$ yra baigtinė, funkcija f yra diferencijuojama aibėje $[a;b] \setminus E$ ir $f' \in \mathcal{R}([a;b])$. Ar teisinga lygybė

$$\int_a^b f' = f\Big|_a^b?$$

Išnagrinėkite pavyzdžius:

$$1)\ f(x) := \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, & x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \end{cases}$$

$$2)\ f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}, & x \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}, \\ 0, & x \in \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}. \end{cases}$$

Raskite integralą $\int_a^b f'$.

VI.2.14. Įrodykite, kad seka $\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$ konverguoja ir, naudodami Niutono–Leibnico formulę, raskite $\lim s_n$, jeigu:

1) $s_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k$; 2) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{n+k}$;

3) $s_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k^2}$; 4) $s_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n}$;

5) $s_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+\dfrac{k}{n}}$; 6) $s_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$;

7) $s_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\Big(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\Big)$, $f \in \mathcal{R}([a;b])$;

8) $s_n = \dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\sqrt[3]{k^3+n^3}$; 9) $s_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{2^n-1}\Big(1+\dfrac{k}{2^n}\Big)\right)^{\frac{1}{2^n}}$;

10) $s_n = \left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\right)^{\frac{1}{n}}$, $f \in C\big([0;1];\mathbb{R}_+\big)$.

VI.2.15. Raskite $\int_a^b f$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, b = \sqrt{3}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x\cos t+1}$,

3) $f(x) = |1-x|, a = 0, b = 2$;

$a = -1, b = 1, t \in (0;\pi)$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-2ux+u^2)(1-2vu+v^2)}}$,

$a = -1, b = 1, (u,v) \in E := (-1;1)^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u\cdot v < 0\}$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{u^2\sin^2 x + v^2\cos^2 x}, a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u\cdot v = 0\}$;

6) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-x^3), a = 0, b = 3$; 7) $f(x) = [e^x], a = 0, b = 2$;

8) $f(x) = x\operatorname{sgn}\cos x,\ a = 0, b = \pi$; 9) $f(x) = \ln[x],\ a = 1, b = n+1, n \in \mathbb{N}$;

10) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}, a = 0, b = 4$; 11) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}, a = 0, b = \dfrac{\pi}{4}$;

12) $f(x) = \dfrac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}$;

13) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}, a = 0, b = \pi$.

VI.2.16. Raskite $\int_E f$, jeigu

1) $f(x) = |\cos x|\sqrt{\sin x},\ E = \{x \in [0;4\pi] : \sin x \geqslant 0\}$;

2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin\ln x, & x\in(0;1],\\ 0, & 0;\end{cases}$

3) $f(x)=\left|\left[\cos\ln\dfrac{1}{x}\right]\right|,\ E=\left[e^{-2\pi n};1\right], n\in\mathbb{N}.$

VI.2.17. Įrodykite, kad funkcija $g\in C([-1;3])$, čia

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f'}{1+f^2}(x), & x\in[-1;3]\setminus\{0;2\},\\ \lim\limits_{t\to x} g(t), & x\in\{0;2\},\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},\ x\in[-1;3]\setminus\{0;2\},$$

ir raskite $\int_{-1}^{3} g$.

VI.2.18. Raskite $\int_a^b f$, jeigu:

1) $f(x)=x^2\cos x,\ a=0, b=2\pi;$

2) $f(x)=x\operatorname{arc\,tg} x,\ a=0, b=\sqrt{3};$

3) $f(x)=xe^{-x},\ a=0, b=\ln 2;$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{kai } x\in[0;1],\\ 2-x, & \text{kai} x\in(1;2];\end{cases}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5-4x}},\ a=-1, b=1;$

6) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}},\ a=0, b=\dfrac{3}{4};$

7) $f(x)=\sqrt{e^x-1},\ a=0, b=\ln 2;$

8) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1},\ a=1, b=-1;$

9) $f(x)=(x\ln x)^2,\ a=1, b=e;$

10) $f(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},\ a=0, b=3;$

11) $f(x)=\dfrac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)},\ a=0, b=2\pi;$

12) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x},\ a=0, b=2\pi;$

13) $f(x)=(x\sin x)^2,\ a=0, b=\pi;$

14) $f(x)=e^x\cos^2 x,\ a=0, b=\pi;$

15) $f(x)=\arccos x,\ a=0, b=1.$

VI.2.19. Raskite funkciją F,

$$F(t)=\int_a^b f_t, t\in\mathcal{J},$$

jeigu:

1) $f_t(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;t],\\ t\frac{1-x}{1-t}, & x\in(t,1);\end{cases},\quad \mathcal{J}=[0;1];$

2) $f_t(x)=x|x-t|, a=0, b=1, \mathcal{J}=\mathbb{R};$

3) $f_t(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{1+2t\cos x+t^2}, & (t,x)\in\mathbb{R}\times[0;\pi]\setminus\{\vec a_0;\vec a_1\},\\ 1, & (t,x)\in\{\vec a_0;\vec a_1\}; \vec a_0:=(-1;0), \vec a_1:=(1;\pi);\end{cases},\quad \mathcal{J}=\mathbb{R}.$

VI.2.20. Sakykime, funkcija $f\in\mathcal{R}([a;b])$, taškas $x_0\in[a;b]$ yra funkcijos f trūkio taškas ir funkcija F,

$$F(x):=\int_a^x f,\quad x\in[a;b].$$

Ką galima pasakyti apie $F'(x_0)$? Išnagrinėkite pavyzdžius:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, \\ 1, & x \in \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}; \end{cases}$,

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}$.

VI.2.21. Naudodami keitinį $x := g(t)$ ($\mathcal{D}(g)$ nustatykite patys), raskite $\int_a^b f$, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $a = -1, b = 1$, $\qquad g^{-1}(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$;

2) $f(x) = \left(1 + x - \dfrac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$, $a = \dfrac{1}{2}, b = 2$, $\qquad g^{-1}(x) = x + \dfrac{1}{x}, x \in [\dfrac{1}{2}; 2]$.

VI.2.22. Raskite $\int_a^b f_n$, $n \in \mathbb{N}$, jeigu:

1) $f_n(x) = \cos^n x, a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}$; $\qquad$ 2) $f_n(x) = \operatorname{tg}^{2n} x, a = 0, b = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $f_n(x) = (1-x^2)^n, a = 0, b = 1$; $\qquad$ 4) $f_n(x) = \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1}, a = 0, b = \dfrac{\pi}{4}$.

VI.2.23. Naudodami kompleksinių skaičių savybes bei vektorinės realiojo argumento funkcijos integralo apibrėžimą, raskite $\int_a^b f$, jeigu

1) $f(x) = e^{i(k-m)x}$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$;

2) $f(x) = e^{(u+iv)x}, x \in [a;b], (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$;

3) $f(x) = \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x, a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}, (m,n) \in \mathbb{N}^2$;

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}, & x \in [0;\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}, \\ (-1)^n(2n+1), & x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

5) $f(x) = \cos^n x \cdot \cos nx, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}$;

6) $f(x) = \sin^n x \cdot \sin nx, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}$;

7) $f(x) = \sin^{n-1} x \cos(n+1)x, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}$;

8) $f(x) = \cos^{n-1} x \sin(n+1)x, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}$;

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x}, & x \in (0;\pi), \\ n, & x = 0, \\ (-1)^{n-1}n, & x = \pi, a = 0, b = \pi, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

VI.2.24. Raskite $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, jeigu:

1) $g(x) = \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a = 0$;

2) $g(x) = \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}, a = +\infty$;

3) $g(x)=\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}, x\in \mathbb{R}\setminus\{0\}, a=+\infty;$

4) $g(x)=\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}dt}, x\in\big(0;\dfrac{\pi}{2}\big), a=+0;$

5) $g(x)=\dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}, x\in(1;+\infty), a=+\infty;$

6) $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt, x\in\big(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\big)\setminus\{0\}, a=0;$

7) $g(x)=\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}, x\in\mathbb{R}_+, a=+\infty;$

8) $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{e^x}\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^2}}, x\in\mathbb{R}_+, a=+\infty;$

9) $g(x)=\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}, x\in\mathbb{R}_+, a=+\infty.$

VI.2.25. Sakykime, funkcijos f,

$$f(x):=\begin{cases}0, & x=0,\\ \cos\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}_+,\end{cases}$$

ir F,

$$F(x):=\int_0^x f, x\in[0;+\infty).$$

Raskite $F'(0)$.

VI.2.26. Raskite ribas:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}dt;\quad 2)\ \lim_{x\to+0}\int_x^1 u^{t-1}\ln u\,du,\ t\in\mathbb{R}_+.$$

VI.2.27. Sakykime, funkcijos $\{f,g\}\subset\mathcal{R}([a;b])$. Įrodykite, kad

$$1)\ \left|\int_a^b fg\right|\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}, (p,q)\in(1;+\infty)^2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{(Helderio nelygybė)}$$

$$2)\ \left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p\in[1;+\infty)\text{(Minkovskio nelygybė)}.$$

VI.2.28. Sakykime, funkcija $f\in C^1([a,b])$ ir $f(a)=0$. Įrodykite, kad

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2,$$

čia

$$M := \max |f|([a;b]).$$

VI.2.29. Sakykime, aibė

$$M := \left\{ f \in C([0;1]) : \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

Raskite

$$\min \left\{ \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx : f \in M \right\}$$

ir funkciją $f_0 \in M$, su kuria tas minimumas įgyjamas.

VI.2.30. Raskite $\lim\limits_{\mathbb{R}_+ \ni t \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f_t$, jeigu:

$$1)\ f_t(x) = \frac{x^t}{1+x}, x \in [0;1]; \qquad 2)\ f_t(x) = \sin^t x, x \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big].$$

VI.2.31. Raskite funkcijos f, $f(x) := \int_0^x e^{t^2}(t^2 - 3t + 2)dt$, $x \in \mathbb{R}$, lokaliojo ekstremumo taškus.

VI.3. Netiesioginiai integralai.

3.1. Apibrėžimai. Sakykime, $\forall x \in (a,b) : f \in \mathcal{R}([a;x])$. Tuomet funkcija $(f, F) : [a;b) \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a;b), \tag{1}$$

vadinama *funkcijos* f *netiesioginiu integralu intervale* $[a;b)$ *su vieninteliu ypatinguoju tašku* b ($N\mathcal{J}_{\{b\}}$) ir žymima simboliu

$$\int_a^b f \quad \text{arba} \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Jeigu $\exists F(b-0) \in \mathbb{R}$, tai $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b f$ vadinamas *konverguojančiu* ir apibrėžiama

$$\int_a^b f := F(b-0).$$

Pati funkcija f vadinama netiesiogiai integruojama intervale $[a;b)$. Visų tokių funkcijų aibę žymėsime simboliu $\mathcal{R}([a;b))$. Priešingu atveju $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b f$ vadinamas *diverguojančiu*. Sakykime, $(f,F) : [a;b) \to \mathbb{R}^2$ yra $N\mathcal{J}_{\{b\}}$ ir $|f| \in \mathcal{R}([a;b))$. Tada $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b f$ vadinamas *absoliučiai konverguojančiu*. Jeigu $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b |f|$ diverguoja, o $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b f$ konverguoja, tai pastarasis integralas vadinamas *reliatyviai konverguojančiu*.

3.2. Integralinis eilutės konvergavimo požymis. *Sakykime, funkcija* $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$ *yra nedidėjanti. Tada eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *ir* $N\mathcal{J}_{\{b\}}\ \int_1^{+\infty} f$ *arba kartu konverguoja, arba kartu diverguoja.*

Pavyzdžiai. 1) Naudodami apibrėžimus, įrodysime, kad integralas $\int_0^1 \ln x dx$ turi vienintelį ypatingąjį tašką 0 ir konverguoja, bei rasime jo reikšmę.

► Funkcija $\ln \in C((0;1])$, todėl $\forall x \in (0;1) : \ln \in \mathcal{R}([x;1])$. Taigi integralas $\int_0^1 \ln x dx$ turi vienintelį ypatingąjį tašką 0. Kadangi $\ln(+0) = -\infty$, tai ln neaprėžtas intervale $(0;1]$, todėl $\ln \overline{\in} \mathcal{R}([0;1])$. Apibrėžkime

$$F(x) := \int_x^1 \ln t dt, \quad x \in (0;1),$$

ir, naudodami integravimo dalimis formulę, gausime

$$F(x) = t \ln t|_x^1 - \int_x^1 t \cdot \ln' t dt = -x \ln x + x - 1.$$

Kadangi $F(+0) = -1$, tai $N\mathcal{J}_{\{0\}}\ \int_0^1 \ln x dx$ konverguoja ir

$$\int_0^1 \ln x dx = -1. \qquad ◄$$

2) Ištirsime integralo

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^u} dx, \quad u \in \mathbb{R},$$

konvergavimą.

Integralas turi vienintelį ypatingąjį tašką $+\infty$, o pointegralinės funkcijos reikšmės yra ir teigiamos, ir neigiamos. Todėl reikės nustatyti, su kuriomis u reikšmėmis integralas konverguoja absoliučiai, reliatyviai ir diverguoja.

Kadangi

$$\left| \frac{(-1)^{[x]}}{x^u} \right| = \frac{1}{x^u}, \quad x \in [1; +\infty),$$

ir

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^u} = \lim_{x \to +\infty} \begin{cases} \ln t|_1^x, & u = 1, \\ \left.\frac{t^{-u+1}}{-u+1}\right|_1^x, & u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & u \in (-\infty; 1], \\ \frac{1}{u-1}, & u \in (1; +\infty), \end{cases}$$

tai pradinis integralas konverguoja absoliučiai, kai $u \in (1; +\infty)$, ir nekonverguoja absoliučiai, kai $u \in (-\infty; 1]$ (tačiau jis gali konverguoti reliatyviai).

Sakykime, $u \in (-\infty; 0]$. Kadangi pointegralinės funkcijos ženklas yra pastovus intervale $[n; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, tai

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_n^{n+1} \frac{(-1)^{[x]}}{x^u} dx\Big| = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^u} = \frac{x^{-u+1}}{-u+1}\Big|_n^{n+1} = \\
&= \frac{n^{-u+1}}{-u+1}\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-u+1} - 1\Big) \sim \\
&\sim \frac{n^{-u+1}}{-u+1}\frac{-u+1}{n} = n^{-u} \to \begin{cases} 1, & u = 0, \\ +\infty, & u \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Todėl pradinis integralas netenkina konvergavimo Koši kriterijaus sąlygos ir diverguoja, kai $u \in (-\infty; 0]$.

Sakykime, $u \in (0; 1]$ ir apibrėžkime

$$f(x) := (-1)^{[x]}, \quad g(x) := \frac{1}{x^u}, \ x \in [1; +\infty).$$

Funkcija g yra mažėjanti, $g(+\infty) = 0$, o funkcija F,

$$F(x) := \int_1^x f = \begin{cases} 2k - 1 - x, & x \in [2k-1; 2k), \\ x - (2k+1), & x \in [2k; 2k+1), \end{cases}, k \in \mathbb{N},$$

yra aprėžta, nes $\forall x \in [1; +\infty) : -1 \leqslant F(x) \leqslant 0$. Pagal Abelio–Dirichlė požymį pradinis integralas konverguoja, tačiau neabsoliučiai, taigi reliatyviai.

VI.3.1. Naudodami netiesioginio integralo konvergavimo bei jo reikšmės apibrėžimus, įrodykite, kad integralas $\int_a^b f$ konverguoja ir raskite jo reikšmę, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^u}, x \in [a; +\infty), \quad a \in \mathbb{R}_+, \quad u \in (1; +\infty)$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1)$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+8}, x \in [1; +\infty)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}, x \in [0; +\infty)$;

7) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+1}, x \in [0; +\infty)$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}, x \in [0; 1)$;

9) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}_+$;

10) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}, x \in [0; +\infty)$.

VI.3.2. Raskite $\int_a^b f_n$, $n \in \mathbb{N}$, jeigu:

1) $f_n(x) = x^n e^{-x}, x \in [0; +\infty)$;

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^n}, x \in \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha\gamma - \beta^2 > 0;$

3) $f_n(x) = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}, x \in [1; +\infty);$ 4) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [0; 1);$

5) $f_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{n+1} x}, x \in [0; +\infty).$

VI.3.3. Raskite $\int_a^b f$, jeigu:

1) $f(x) = \ln \sin x, x \in (0; \frac{\pi}{2}];$ 2) $f(x) = \ln \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}).$

VI.3.4. Raskite $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$, jeigu:

1) $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+, a = +\infty;$

2) $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+, a = +\infty;$

3) $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\right)^{\sqrt{x}}, g(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{x}}, \ x \in \mathbb{R}_+, a = +\infty;$

4) $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \ x \in (0; 1], a = +0;$

5) $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt, \qquad g(x) = \ln \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}_+, a = +0;$

6) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt, \qquad g(x) = x^3, \ x \in \mathbb{R}_+, a = +\infty;$

7) $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{h(t)}{t^{u+1}} dt, \qquad g(x) = \frac{1}{x^u}, \ x \in (0; 1], u \in \mathbb{R}_+, a = +0, h \in C([0; 1]).$

VI.3.5. Ištirkite integralo $\int_a^b f$ konvergavimą, jeigu:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}, \ x \in [0; +\infty);$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}, \ x \in [1; +\infty);$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}, \ x \in (0; 2) \setminus \{1\};$ 4) $f(x) = x^u \ln^v \dfrac{1}{x}, \ x \in (0; 1), (u, v) \in \mathbb{R}^2;$

5) $f(x) = \dfrac{x^u}{1 + x^v}, \ x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty);$

6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} ux}{x^v}, \ x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R}^2;$

7) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^u}, \ x \in \mathbb{R}_+, u \in \mathbb{R};$

8) $f(x) = \dfrac{x^u \operatorname{arc\,tg} x}{2 + x^v}, \ x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty);$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^u x \cdot \cos^v x}$, $x \in \big(0; \dfrac{\pi}{2}\big)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$;

10) $f(x) = \dfrac{1}{x^u + x^v}$, $x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

VI.3.6. Ištirkite, ar integralas $\int_a^b f$ konverguoja absoliučiai, ar reliatyviai, ar diverguoja, jeigu:

1) $f(x) = x^u \sin x^v$, $x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R}^2$; 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^u} \sin x$, $x \in \mathbb{R}_+, u \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^u \sin x}{1 + x^v}$, $x \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in \mathbb{R} \times [0; +\infty)$; 4) $f(x) = \dfrac{\sin(x + \frac{1}{x}}{x^u}$, $x \in \mathbb{R}_+, u \in \mathbb{R}$;

5) $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}(x) \sin x$, $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, čia P_m ir Q_n – atitinkamai $m - tojo$ ir n-tojo laipsnių polinomai, $\{m, n\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, ir $\forall x \in [0; +\infty)$: $Q_n(x) \in \mathbb{R}_+$;

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x + \sin x} e^{\cos x}$, $x \in [1; +\infty)$.

VI.3.7. Sakykime, funkcija $f \in C^1(\mathbb{R})$ ir $|f'| \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$. Įrodykite, kad $\exists (f(-\infty), f(+\infty)) \in \mathbb{R}^2$.

VI.3.8. Sakykime, funkcija $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\{f, |f'|\} \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$. Įrodykite, kad $\exists (f(-\infty), f(+\infty)) = \vec{0}$.

VI.3.9. Sakykime, funkcija $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}} \int_a^{+\infty} f$, $a \in \mathbb{R}$, konverguoja ir $\exists f(+\infty) \in \overline{\mathbb{R}}$. Įrodykite, kad $f(+\infty) = 0$. Pateikite pavyzdžius funkcijų f, kurioms $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}} \int_a^{+\infty} f$ konverguoja ir $\overline{\exists} f(+\infty)$.

VI.3.10. Sakykime, funkcija $f : [a; b] \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, neaprėžta taško b aplinkoje ir $N\mathcal{J}_{\{b\}} \int_a^b f$ konverguoja. Įrodykite, kad arba $\overline{\exists} \lim\limits_{d(P) \to 0} S_f(P, \vec{\xi})$, arba $\exists \lim\limits_{d(P) \to 0} S_f(P, \vec{\xi}) \in \{-\infty; +\infty\}$, čia $S_f(P, \vec{\xi})$ yra funkcijos f integralinė suma intervale $[a; b]$, atitinkanti skaidinį P ir tarpinį tašką $\vec{\xi}$.

VI.3.11. Sakykime, funkcija $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, yra monotoninė ir integralas $\int_a^{+\infty} f$ konverguoja. Įrodykite, kad: 1) $\exists f(+\infty) = 0$, 2) $\exists \lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$.

VI.3.12. Sakykime, funkcija $f : (0; 1] \to \mathbb{R}$, yra monotoninė apibrėžimo srityje ir $\exists u_0 \in \mathbb{R}$: integralas

$$\int_0^1 x^{u_0} f(x) dx$$

konverguoja. Įrodykite, kad: 1) $\exists \lim_{x \to +0} x^{u_0 + 1} f(x) = 0$, 2) jeigu $u_0 = 0$, tai

$$\exists \lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f.$$

Raskite

$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}.$$

VI.3.13. Sakykime, $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}}\ \int_a^{+\infty} f$, $a\in\mathbb{R}$, konverguoja, funkcija $g:[a;+\infty)\to\mathbb{R}$ yra aprėžta ir $\forall x\in(a;+\infty):\ g\in\mathcal{R}([a;x])$. Pateikite tokių funkcijų f ir g pavyzdžius, kad $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}}$ $\int_a^{+\infty} fg$: 1) konverguotų, 2) diverguotų.

Įrodykite: jeigu $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}}\ \int_a^{+\infty} f$ absoliučiai konverguoja, o funkcija $g:[a;+\infty)\to\mathbb{R}$ tenkina ankstesniąsias sąlygas, tai $N\mathcal{J}_{\{+\infty\}}$

$$\int_a^{+\infty} fg$$

konverguoja absoliučiai.

VI.4. Integralo taikymai.

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f:[a;b]\to[0;+\infty)$. Tuomet aibė

$$Q:=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a;b], y\in[0;f(x)]\big\} \tag{1}$$

yra vadinama *kreivine trapecija*. Jeigu $f\in\mathcal{R}([a;b])$, tai skaičius

$$|Q|:=\int_a^b f \tag{2}$$

vadinamas *kreivinės trapecijos plotu* arba *dvimačiu Žordano matu*. Kreivinė trapecija, turinti plotą, vadinama *kvadruojama*.

Jeigu funkcijos f grafikas Γ apibrėžtas kaip glodžioji kreivė, t.y.

$$\Gamma=\big\{(x,y)=\vec{g}(t)=(g_1,g_2)(t) : t\in[\alpha;\beta]\big\},$$

čia $\vec{g}\in C^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^2)$, $g_1'(t)>0$, $t\in[\alpha,\beta]$, tai

$$|Q|=\int_\alpha^\beta g_2 g_1'. \tag{3}$$

Jeigu aibė $Q\subset\mathbb{R}^2$ apibrėžta polinėje koordinačių sistemoje, t.y.

$$Q=\big\{(t,r) : t\in[\alpha,\beta], r\in[0;g(t)]\big\},$$

čia (t,r) yra taško $(x,y)\in Q$ polinės koordinatės, $g\in C([\alpha,\beta];[0;+\infty))$, tai

$$|Q|=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta g^2. \tag{4}$$

Pavyzdžiai. 1) Rasime aibės

$$Q=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0;\pi],\ y\in[x;x+\sin^2 x]\big\}$$

plotą. Pagal (2) formulę

$$|Q| = \int_0^{\pi} (x + \sin^2 x - x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

2) Rasime aibės

$$Q = \big\{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x = g_1(t), y \in [0; g_2(t)], t \in [0; 2\pi]\big\},$$

čia

$$\vec{g}(t) = (g_1, g_2)(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), t \in [0; 2\pi], a \in \mathrm{I\!R}_+,$$

plotą. (Kreivė $\vec{g}$ vadinama *cikloide*).
Pagal (3) formulę

$$|Q| = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\Big)dt = 3\pi a^2.$$

3) Rasime aibės

$$Q = \big\{(t,r) : t \in [0; 2\pi], \sin 3t \geqslant 0, r \in [0; a \sin 3t]\big\}, a \in \mathrm{I\!R}_+,$$

duotos polinėje koordinačių sistemoje, plotą.
Dėl simetriškumo pagal (4) formulę

$$Q = 6 \cdot \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 3t\, dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 - \cos 6t)dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

4) Aibę Q apriboja kreivės – Dekarto lapo –

$$\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x^3 + y^3 = 3axy\big\}, a \in \mathrm{I\!R}_+,$$

"kilpa" . Panaudoję polinę koordinačių sistemą, rasime aibės Q plotą.
Dekartines koordinates (x,y) pakeitę polinėmis koordinatėmis (t,r) pagal formulę

$$(x,y) = r(\cos t, \sin t)$$

ir įstatę į neišreikštinės kreivės Γ lygtį, gausime

$$Q = \big\{(t,r) : t \in [0; \frac{\pi}{2}], r \in [0; \frac{3a \sin t \cos t}{\sin^3 t + \cos^3 t}]\big\}.$$

Tuomet dėl simetriškumo pagal (4) formulę

$$|Q| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{(\sin^3 t+\cos^3 t)^2}dt = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{(\operatorname{tg}^3 t+1)^2\cos^4 t}dt =$$
$$= 9a^2\int_0^1\frac{u^2du}{(u^3+1)^2} = 9a^2\Big(-\frac{1}{3}\Big)\frac{1}{1+u^3}\Big|_0^1 = \frac{3a^2}{2},$$

čia vidurinioji lygybė gauta panaudojus keitinį

$$u = \operatorname{tg} t, \quad du = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

VI.4.1. Raskite plotą aprėžtos aibės Q, duotos dekartinėje koordinačių sistemoje, kurią apriboja kreivių Γ_i, $i\in T\subset\mathbb{N}$, lankai, jeigu:

1) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax=y^2\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ay=x^2\}, a\in\mathbb{R}_+$;
2) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=2\}$;
3) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x-x^2\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$;
4) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=|\lg x|, x\in\mathbb{R}_+\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$,
$\Gamma_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0,1\}$, $\quad\Gamma_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=10\}$;
5) $\Gamma_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}\Big\}$, $a\in\mathbb{R}_+$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$;
6) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2=x^2(a^2-x^2)\}$, $a\in\mathbb{R}_+$;
7) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2=2ax\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 27ay^2=8(x-a)^3\}, a\in\mathbb{R}_+$;
8) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax^2+2bxy+cy^2=1\}$, $\quad(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, ac-b^2>0$, (elipsė);
9) $\Gamma_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}\Big\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2a\}, a\in\mathbb{R}_+$ (cisoidė);
10) $\Gamma_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\Big\}$, $a\in\mathbb{R}_+$ (traktrisė),
$\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$;
11) $\Gamma_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2=\dfrac{x^4}{(1+x^{u+2})^2}\Big\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}, u\in(-2;+\infty)$;
12) $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=e^{-x}\sin x, x\in[0;+\infty)\}$, $\quad\Gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$.

VI.4.2. Sakykime

$$\begin{aligned}\Gamma\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=a^2\}, a\in\mathbb{R}_+ \text{ (hiperbolė)},\\ \Gamma_1 &:= \{t\vec{x} : t\in[0;+\infty)\},\\ \Gamma_2 &:= \{t(x,-y) : t\in[0;+\infty)\},\end{aligned}$$

čia $\vec{x}:=(x,y)\in\Gamma$, taigi $(x,-y)\in\Gamma$. Išreikškite vektorių $\vec{x}$ plotu $q(\vec{x})$ aibės, kurią apriboja hiperbolės Γ lankas ir spindulių Γ_1 bei γ_2 atkarpos, jungiančios atitinkamai taškų poras $\vec{0}$ ir $\vec{x}$ bei $\vec{0}$ ir $(x,-y)$.

VI.4.3. Raskite plotą aprėžtos aibės Q, kurią dekartinėje koordinačių sistemoje apriboja kreivių Γ_i, $i \in T \subset \mathbb{N}$, lankai, jeigu:

1) $\Gamma_1 = \{t(2-t, t(2-t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$;
2) $\Gamma_1 = \{a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0;2\pi]\}$,
$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, y \leqslant 0\}, a \in \mathbb{R}$:
3) $\Gamma_1 = \{a(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) : t \in [0;2\pi]\}, a \in \mathbb{R}_+$;
4)$\Gamma_1 = \Big\{c^2\Big(\dfrac{\cos^3 t}{a}, \dfrac{\sin^3 t}{b}\Big) : t \in [0;2\pi]\Big\}, (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, a > b, c^2 = a^2 - b^2$;
5) $\Gamma_1 = \{a(\cos^3 t, \sin^3 t) : t \in [0;2\pi]\}, a \in \mathbb{R}_+$;
6) $\Gamma_1 = \Big\{\dfrac{at}{1+t^4}(1,t) : t \in \mathbb{R}\Big\}, a \in \mathbb{R}_+$.

VI.4.4. Raskite plotą aibės Q, kurią apriboja kreivių Γ_i, $i \in T \subset \mathbb{N}$, polinėje koordinačių sistemoje lankai, jeigu:

1) $\Gamma_1 = \Big\{(t,r) : r^2 = a^2\cos 2t, t \in \Big[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\Big] \cup \Big[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\Big]\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$ (lemniskatė);
2) $\Gamma_1 = \{(t,r) : r = a(1+\cos t), t \in [0;2\pi]\}$, $a \in \mathbb{R}_+$ (kordioidė);
3) $\Gamma_1 = \Big\{(t,r) : r = \dfrac{a}{1-\cos t}, t \in (0;2\pi)\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$ (parabolė);
$\Gamma_2 = \Big\{(t,r) : t = \dfrac{\pi}{4}\Big\}$, $\Gamma_3 = \Big\{(t,r) : t = \dfrac{\pi}{2}\Big\}$;
4) $\Gamma_1 = \Big\{(t,r) : r = \dfrac{a}{1+\varepsilon\cos t}, t \in [0;2\pi]\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in (0;1)$ (elipsė);
5) $\Gamma_1 = \Big\{(t,r) : r = a\cos t, t \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]\Big\}$,
$\Gamma_2 = \Big\{(t,r) : r = a(\cos t + \sin t) : t \in \Big[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\Big]\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+, \text{ir}\Big(\dfrac{a}{2}, 0\Big) \in Q$;
6) $\Gamma_1 = \{(t,r) : t = r\operatorname{arc\,tg} r, t \in [0;2\pi]\}, \Gamma_2 = \{(t,r) : t = 0\}, \Gamma_3 = \Big\{(t,r) : t = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\Big\}$;
7) $\Gamma_1 = \Big\{(t,r) : r = \dfrac{2au}{1+u^2}, t = \dfrac{\pi u}{1+u}, u \in [0;+\infty)\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

VI.4.5. Naudodami polinę koordinačių sistemą, raskite aprėžtos aibės Q dekartinėje koordinačių sistemoje plotą, jeigu:

1) $\partial Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)\}, a \in \mathbb{R}_+$;
2) $\partial Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = 2a^2xy\}, a \in \mathbb{R}_+$.

4.2. Apibrėžimai. Sakykime, $\vec{g} := (g_1, ..., g_n) \in C([\alpha;\beta])$, $n \geqslant 2$, yra kreivė, $P = \{t_k : 0 \leqslant k \leqslant m\}$ – intervalo $[\alpha;\beta]$ skaidinys,

$$\sigma_{\vec{g}}(P) := \sum_{k=1}^{M} |\vec{g}(t_k) - \vec{g}(t_{k-1})|.$$

Jeigu skaičius

$$l(\vec{g}) := \sup\{\sigma_{\vec{g}}(p) : p \in \mathcal{P}_1\} \in [0; +\infty)$$

tai tokia kreivė vadinama *ištiesinama*, o skaičius $l(\vec{g})$ – *kreivės ilgiu*. Jeigu $l(\vec{g}) = +\infty$, tai kreivė vadinama *neištiesinama*.

4.3. Teorema. *Jeigu kreivė* $\vec{g} \in C^1([\alpha; \beta]; \mathbb{R}^n)$, *tai ji ištiesinama, o jos ilgis*

$$l(\vec{g}) = \int_\alpha^\beta |\vec{g}'|. \tag{5}$$

Jeigu $n = 2$ ir $\vec{g}(x) = (1, f(x))$, $x \in [a; b]$, čia $f \in C^1([a; b])$, tai

$$l(\vec{g}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}. \tag{6}$$

(Kreivė $\vec{g}$ yra funkcijos f grafikas).

Jeigu kreivė $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ yra duota polinėje koordinačių sistemoje

$$\Gamma = \big\{(t, r) : t \in [\alpha; \beta],\ r = g(t)\big\},$$

čia $g \in C^1([\alpha; \beta])$, (t, r) – polinės koordinatės, tai

$$l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{g^2 + g'^2}. \tag{7}$$

Pavyzdžiai. 5) Rasime funkcijos f,

$$f(x) = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}, x \in [0; a_0], a \in \mathbb{R}_+, a_0 \in (0; a),$$

grafiko Γ ilgį.

Kadangi $f \in C^\infty([0; a_0])$, tai pagal (6) formulę

$$l(\Gamma) = \int_0^{a_0} \sqrt{1 + \Big(\frac{2ax}{a^2 - x^2}\Big)^2} dx = \int_0^{a_0} \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx = \int_0^{a_0} \Big(-1 + \frac{2a^2}{a^2 - x^2}\Big) dx =$$
$$= \Big(-x + a \ln \frac{a + x}{a - x}\Big)\Big|_0^{a_0} = -a_0 + a \ln \frac{a + a_0}{a - a_0}.$$

6) Rasime kreivės

$$\vec{g}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1),\ t \in [0; +\infty),$$

ilgį.

Kreivė yra "užvyniota" ant kūgio

$$S = \Big\{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big\},$$

kreivės pradžia $g(0) = (1;0;1)$, galas $g(+\infty) = \vec{0}$. Kadangi $\vec{g} \in C^\infty\big([0;+\infty);\mathbb{R}^3\big)$, tai pagal (5) formulę

$$l(\vec{g}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1}dt =$$
$$= \sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -\sqrt{3}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{3}.$$

Pastebėsime, kad "apvijų" skaičius yra skaičioji aibė.
7) Rasime kreivės (kardioidės) Γ polinėje koordinačių sistemoje

$$\Gamma = \big\{(t,r) : r = g(t) = a(1+\cos t), t \in [0;2\pi]\big\}, a \in \mathbb{R}_+,$$

ilgį.
Kadangi $g \in C^\infty([0;2\pi])$, tai pagal (5) formulę ir dėl simetriškumo

$$l(\Gamma) = 2a\int_0^\pi \sqrt{(1+\cos)^2 + \sin^2 t}dt = 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos t)}dt =$$
$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt = 8a\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

VI.4.6. Raskite kreivės Γ ilgį, jeigu:

1) $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;4], y = x^{\frac{3}{2}}\big\}$;
2) $\Gamma = \big\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;x_0], y^2 = 2ax\big\}$, $(a,x_0) \in \mathbb{R}_+^2$;
3) $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;x_0], y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\big\}$; $(a,x_0) \in \mathbb{R}_+^2$;
4) $\Gamma = \big\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;x_0], y = e^x\big\}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$;
5) $\Gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1;e], x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y\Big\}$;
6) $\Gamma = \big\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x \in [0;x_0], y = \ln\cos x\big\}$, $x_0 \in \big(0;\frac{\pi}{2}\big)$;
7) $\Gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [b;a],\ x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\Big\}$; $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2, b < a$;
8) $\Gamma = \Big\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x \in \big[0;\frac{6}{3}a\big], y^2 = \frac{x^3}{2a-x}\Big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$;
9) $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\big\}$; $a \in \mathbb{R}_+$ (astroidė);
10) $\Gamma = \Big\{c^2\Big(\frac{\cos^3 t}{a}, \frac{\sin^3 t}{b}\Big) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0;2\pi]\Big\}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $b < a$, $c^2 = a^2 - b^2$;

11) $\Gamma = \{(\cos^4 t, \sin^4 t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$;
12) $\Gamma = \{a(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; 2\pi]\},\ a \in \mathbb{R}_+$;
13) $\Gamma = \{a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) : t \in [0; 2\pi]\},\ a \in \mathbb{R}_+$;
14) $\Gamma = \{a(\operatorname{sh} t - t, \operatorname{ch} t - 1) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; T]\},\ T \in \mathbb{R}_+$;
15) $\Gamma = \{t(3, 3t, 2t^2) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0; 1]\}$.

VI.4.7. Raskite kreivės Γ polinėje koordinačių sistemoje ilgį, jeigu:

1) $\Gamma = \{(t, r) : t \in [0; 2\pi], r = at\},\ a \in \mathbb{R}_+$ (Archimedo spiralė);
2) $\Gamma = \{(t, r) : t \in (-\infty; 0], r = ae^{mt}\},\ (a, m) \in \mathbb{R}^2_+$;
3) $\Gamma = \left\{(t, r) : t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], r = \frac{a}{1 + \cos t}\right\},\ a \in \mathbb{R}_+$;
4) $\Gamma = \left\{(t, r) : t \in [0; 3\pi], r = a\sin^3 \frac{t}{3}\right\},\ a \in \mathbb{R}_+$;
5) $\Gamma = \left\{(t, r) : t \in [0; 2\pi], r = a\operatorname{th} \frac{t}{2}\right\},\ a \in \mathbb{R}_+$;
6) $\Gamma = \left\{(t, r) : r \in [1; 3], t = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\right\}$.

VI.4.8. Įrodykite, kad kreivių

$$\Gamma_1 = \{(a\cos t, b\sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; 2\pi]\} \quad \text{(elipsė)},$$

ir

$$\Gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; 2\pi b], y = c\sin \frac{x}{b}\right\},$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2_+, a \geqslant b, c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{(viena sinusoidės banga)},$$

ilgiai yra lygūs.

VI.4.9. Raskite kreivės

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; \frac{1}{3}], y^2 = (\frac{1}{3} - x)^2 x\right\},$$

ilgį $l(\Gamma_1)$, tos kreivės apribotos aibės Q_1 plotą $|Q_1|$ ir santykį $\frac{|Q_1|}{|Q_2|}$, čia $|Q_2|$ yra skritulio, kurį apriboja apskritimas Γ_2, $l(\Gamma_2) = l(\Gamma_1)$, plotas.

VI.4.10. Įrodykite, kad kreivė $\vec{g} : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{g}(t) = \begin{cases} \left(\cos\left(2\pi t \sin \frac{1}{t}\right); \sin\left(2\pi t \sin \frac{1}{t}\right)\right), & t \in (0; 2\pi], \\ (1; 0), & t = 0, \end{cases}$$

neištiesinama, t.y. jos ilgis $l(\vec{g}) = +\infty$.

4.4. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $V \subset \mathbb{R}^3$ yra aprėžta, aibė $T \subset \mathbb{N}$ yra baigtinė,

$$\underline{\mathcal{P}} := \left\{\bigcup_{k \in T} \Delta_k : \Delta_k \subset V\right\},\ \overline{\mathcal{P}} := \left\{\bigcup_{k \in T} \Delta_k : \Delta_k \cap V \neq \emptyset\right\},$$

čia Δ_k – uždarasis aprėžtas stačiakampis gretasienis, $\operatorname{int}\Delta_j \cap \operatorname{int}\Delta_k = \emptyset,\ j \neq k$.
Skaičiai

$$|\underline{V}| := \sup\big\{|B| : B \in \underline{\mathcal{P}}\big\}, \quad |\overline{V}| := \inf\big\{|B| : B \in \overline{\mathcal{P}}\big\},$$

vadinami *aibės* V atitinkamai *vidiniu* ir *išoriniu tūriais* arba *trimačiais Žordano matais*, čia $|B|$ –aibės B tūris. Jeigu $|\underline{V}| = |\overline{V}| =: A$, tai *aibė* V vadinama *kubuojama* arba *mačia pagal Žordaną*, o skaičius

$$|V| := A$$

vadinamas aibės V tūriu arba trimačiu Žordano matu.
Aibių $\underline{\mathcal{P}}$ ir $\overline{\mathcal{P}}$ elementai vadinami *briaunainiais*, atitinkamai *įbrėžtais į* ir *apibrėžtais apie aibę* V. Jeigu $B = \cup_{k\in T}\Delta_k$, tai

$$|B| = \sum_{k\in T} |\Delta_k|,$$

čia $|\Delta_k|$ – stačiakampio gretasienio Δ_k tūris.

4.5. Lema. *Sakykime, aibė* $V \in \mathbb{R}^3$ *yra kubuojama,* $\forall x_0 \in [a;b]$ *aibė*

$$Q(x_0) := \{\vec{x} = (x,y,z) \in V : x = x_0\}$$

yra kvadruojama ir jos plotas $|Q| \in \mathcal{R}([a;b])$. *tada aibės* V *tūris*

$$|V| := \int_a^b |Q|. \tag{8}$$

Pastebėsime, kad aibė $Q(x_0), x_0 \in [a;b]$, yra aibės V ir plokštumos $T := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_0\}$ sankirta.

4.6. Apibrėžimas. Aibė

$$V := \big\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a;b], y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\big\}, \tag{9}$$

čia $f \in \mathcal{R}([a;b])$, vadinama *sukiniu, gautu sukant aibę*

$$Q := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;b], y \in \big[0; |f|(x)\big]\big\}$$

apie $0x$ ašį.

4.7. Lema. *(9) aibė* V *yra kubuojama ir jos tūris*

$$|V| = \pi\int_a^b f^2. \tag{10}$$

Pavyzdžiai. 8) Rasime tūrį aibės $V \subset \mathbb{R}^3$, kurią apriboja paviršių

$$\begin{aligned}
&S_1 = \big\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\big\},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2_+ (\text{ritinys}),\\
&S_2 = \big\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{c}{a}x\big\},\ c \in \mathbb{R}_+,\\
&S_3 = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\},
\end{aligned}$$

dalys.
Plokštumos $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 \in [0;a]\}$ ir aibės V sankirta yra stačiakampis

$$Q(x_0) = \Big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_0, y \in \Big[-b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}; b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\Big], z \in \Big[0; \frac{c}{a}x_0\Big]\Big\},$$

kurio plotas

$$|Q|(x_0) = \frac{2bc}{a}x_0\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}.$$

Dėl aibės V simetriškumo ir pagal (8) formulę

$$|V| = 2\int_0^a |Q| = \frac{4bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = -\frac{4abc}{3}\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{4abc}{3}.$$

9) Rasime aibės $V \subset \mathbb{R}^3$, gautos sukant aibę Q, apribotą kreivių

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \big\{a(t-\sin t, 1-\cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0;2\pi]\big\}, a \in \mathbb{R}_+;\\
&\Gamma_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\},
\end{aligned}$$

lankais, apie $0x$ ašį, tūrį.
Naudodami (10) formulę, randame

$$\begin{aligned}
|V| &= \pi a^3 \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt =\\
&= \pi a^3\Big(t - 3\sin t + \frac{3}{2}\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big) - \Big(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\Big)\Big)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

10) Sakykime,

$$\begin{aligned}
V = &\big\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0;1]^2, z \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\big\} \cup\\
&\big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [-1;0]^2, z \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big\}.
\end{aligned}$$

Akivaizdu, kad

$$|\underline{V}| = 0, \quad |\overline{V}| = 2.$$

Taigi aibė V nekubuojama. Tačiau $\forall z_0 \in [0;1]$ skerspjūvis

$$Q(z_0) = \{\vec{x} \in V : z = z_0\} = \begin{cases} [0;1]^2 \times \{z_0\}, & z_0 \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ [-1,0]^2 \times \{z_0\}, & z_0 \in [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$$

yra kvadruojama aibė, jos plotas

$$|Q|(z_0) = 1$$

ir $|Q| \in C([0;1])$.

VI.4.11. Raskite aibės V, kurią apriboja paviršių S_i, $i \in T$, $T \subset \mathbb{N}$ –baigtinė, dalys, tūrį, jeigu:

1) $S_1 := \Big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1\Big\}$; $\quad S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = -c\big\}$,
$S_3 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = c\big\}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$;
2) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2\big\}$, $\quad S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = a^2\big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$;
3) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| = a\big\}$, $\quad S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax\big\}$, $\big(\frac{a}{2}; 0; 0\big) \in V$, $a \in \mathbb{R}_+$;
4) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z^2 = b(a - x)\big\}$, $\quad S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax\big\}$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2_+$;
5) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{z^2} = 1\big\}$, $S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$, $S_3 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = a\big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$;
6) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z^2 = 1\big\}$, $S_2 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x = 0\big\}$,
$S_3 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : y = 0\big\}$, $S_4 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}$;
7) $S_1 := \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}|^2 + xy + yz + zx = a^2\big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $\vec{x} = (x, y, z)$.

VI.4.12. Raskite aibės V, gautos sukant aibę $Q \subset \mathbb{R}^2$ apie nurodytąją tiesę l tūrį, jeigu:

1) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; a],\ y \in \big[0; b\big(\frac{x}{a}\big)^{3/2}\big]\big\}$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2_+$; $l = Ox$;
2) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; 2],\ y \in [0; 2x - x^2]\big\}$; *a)* $l = Ox$; *b)* $l = Oy$;
3) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; \pi], y \in [0; \sin x]\big\}$; *a)* $l = Ox$; *b)* $l = Oy$;
4) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-a; a], y \in \big[b\big(\frac{x}{a}\big)^2; b\big|\frac{x}{a}\big|\big]\big\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2_+$; *i)* $l = Ox$; *j)* $l = Oy$;
5) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; +\infty), y \in \big[0; e^{-x}\big]\big\}$; *a)* $l = Ox$; *b)* $l = Oy$;
6) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - b)^2 \leqslant a^2\big\}$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2_+$, $a \leqslant b$; $l = Ox$;
7) aibę Q apriboja kreivė $\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = a^2\big\}$, $a \in \mathbb{R}_+$; $l = Ox$;
8) $Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \cup_{k=0}^{\infty}\big[2k\pi; (2k + 1)\pi\big], y \in \big[0; e^{-x}\sqrt{\sin x}\big]\big\}$; $l = Ox$;

9) aibę Q apriboja kreivių

$$\Gamma_1 = \big\{a(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; 2\pi]\big\}, a \in \mathbb{R}_+,$$

ir

$$\Gamma_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\}$$

lankai; *i)* $l = Oy$; *j)* $l = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2a\big\}$;

10) aibę Q apriboja kreivė

$$\Gamma = \{a\sin^3 t; b\cos^3 t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0; 2\pi]\}, (a; b) \in \mathbb{R}^2_+;$$

$i)$ $l = Ox$; $j)$ $l = Oy$.

4.8. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f \in C^1([a; b])$. Aibė

$$S := \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a; b], y^2 + z^2 = f^2(x)\}$$

vadinama *sukinio paviršiumi, gautu sukant funkcijos f grafiką*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y = f(x)\}$$

apie Ox ašį. Tokio *paviršiaus plotu* vadinamas skaičius

$$|S| = 2\pi \int_a^b |f|\sqrt{1 + f'^2}. \tag{12}$$

Pavyzdys. 11) Rasime sukinio paviršiaus S, gauto sukant funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, grafiką apie Ox ašį, plotą.
Naudodami (12) formulę, gausime

$$|S| = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} + 1}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx =$$
$$= \pi \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}dt = \pi \int_{u_0}^{u_1} \frac{1 + \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh} u}du = \pi\left(\int_{u_0}^{u_1} \operatorname{sh} u du + \int_{u_0}^{u_1} \frac{\operatorname{sh} u du}{\operatorname{ch}^2 u - 1}\right) =$$
$$= \pi\left(\operatorname{ch} u + \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1}\right)\Big|_{u_0}^{u_1} = \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{2}\right),$$

čia trečioji lygybė gauta naudojant keitinį

$$t(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad dt = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx, \quad t(0) = 1, \quad t\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

o ketvirtoji – keitinį

$$u := u(t) := \operatorname{ar\,sh} t, \quad u_0 := u(1) = \operatorname{ar\,sh} 1, \quad u_1 := u(2) = \operatorname{ar\,sh} 2.$$

VI.4.13. Raskite sukinio paviršiaus S, gauto sukant kreivę Γ apie tiesę $l \subset \mathbb{R}^2$, plotą, jeigu:

1) $\Gamma = \{(x, \frac{x^{3/2}}{a^{1/2}}) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0; a]\}$, $a \in \mathbb{R}_+, l = Ox$;

2) $\Gamma = \{(x, a\cos\frac{\pi x}{2b}) \in \mathrm{I\!R}^2 : x \in [-b; b]\}$, $(a; b) \in \mathrm{I\!R}^2_+, l = Ox$;

3) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x \in [0; a], y^2 = 2px\}$, $(a; p) \in \mathrm{I\!R}^2_+; i)\ l = Ox; j)\ l = Oy$;

4) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, $(a; b) \in \mathrm{I\!R}^2_+, b \in (0; a]; i)\ l = Ox; j)\ l = Oy$;

5) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$, $a \in \mathrm{I\!R}_+, l = Ox$;

6) $\Gamma = \{(x, a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}) : x \in [-b; b]\}$, $(a; b) \in \mathrm{I\!R}^2_+; i)\ l = Ox, j)\ l = Oy$;

7) $\Gamma = \{(f(y), y) \in \mathrm{I\!R}^2 : y \in (0; a]\} \cup \{(-f(y), y) \in \mathrm{I\!R}^2 : y \in (0; a]\}$, $a \in \mathrm{I\!R}_+$

$$f(y) := a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad l = Ox;$$

8) $\Gamma = \{a(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathrm{I\!R}^2 : t \in [0; 2\pi]\}$, $a \in \mathrm{I\!R}_+$;
$i)\ l = Ox; j)\ l = Oy; k)\ l = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : y = 2a\}$;

9) $\Gamma = \{a(\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathrm{I\!R}^2 : t \in [\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]\}$, $a \in \mathrm{I\!R}_+; l = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : y = x\}$;

10) $\Gamma = \{(t, r) \in \mathrm{I\!R}^2 : t \in [0; \pi], r = a(1 + \cos t)\}$, $a \in \mathrm{I\!R}_+, l = Ox, (t, r) -$ polinės koordinatės.

VI.4.14. Aibė

$$Q = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x \in [0; \frac{p}{2}], y \in [-\sqrt{2px}; \sqrt{2px}]\}, p \in \mathrm{I\!R}_+,$$

sukama apie tiesę $l = \{(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2 : y = p\}$. Raskite sukinio tūrį ir paviršiaus plotą.

VII. FUNKCIJŲ SEKOS IR EILUTĖS

VII.1. Pataškinis ir tolygusis konvergavimai

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, aibė $E \subset \mathbb{R}$, funkcija $f : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := f(n, x)$, $(n, x) \in \mathbb{N} \times E$. Tada funkcijų aibė

$$\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

vadinama *funkcijų seka aibėje* E, o aibė E – tos *sekos apibrėžimo sritimi.* Aibė

$$E_1 := \big\{x \in E : \exists \lim_{\mathbb{N} \ni n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\big\}$$

vadinama (1) sekos *konvergavimo sritimi.* Kad būtų paprasčiau, laikysime, jog $E_1 = E$. Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} f_n(x),$$

vadinama (1) *sekos riba aibėje* E, žymima

$$f := \lim f_n$$

aibėje E. Pati (1) seka vadinama *pataškiui konverguojančia į funkciją* f *aibėje* E ir žymima $f_n \to f$ aibėje E. Tai reiškia, jog $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in E\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant N :$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Aibė

$$\big\{(f_n, S_n) : n \in \mathbb{N}\big\} =: \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \tag{3}$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k, \tag{4}$$

vadinama *funkcijų eilute aibėje* E, funkcija f_n *–eilutės* n*-tuoju nariu*, funkcija S_n – *eilutės* n*-tąja daline suma.* Jeigu $S_n \to S$ aibėje E, tai (3) eilutė vadinama *pataškiui konverguojančia į funkciją* S *aibėje* E, funkcija S – *eilutės suma aibėje* E ir žymima

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := S$$

aibėje E.

Sakykime,

1) $f_n \to f$ aibėje E,

2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant N \ \ \forall x \in E:$

$$|f_n - f|(x) < \varepsilon.$$

Tokia (1) seka vadinama *tolygiai konverguojančia į ribą* f *aibėje* E ir žymima

$$f_n \rightrightarrows f$$

aibėje E.

Jeigu (3) eilutės dalinių sumų seka $S_n \rightrightarrows S$ aibėje E, tai ta eilutė vadinama *tolygiai konverguojančia į sumą* S *aibėje* E.

Sakykime, funkcijų seka $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ aibėje E tenkina sąlygą: $\exists g : E \to [0; +\infty) \ \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n|(x) \leqslant g(x)$. Tokia funkcijų seka vadinama *pataškiui aprėžta aibėje* E.

Jeigu $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n|(x) \leqslant M$, tai tokia funkcijų seka vadinama *tolygiai aprėžta aibėje* E.

Jeigu $\forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \ \ (f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x))$, tai tokia funkcijų seka vadinama *nemažėjančia (nedidėjančia) aibėje* E. Abiejų tipų sekos vadinamos *monotoninėmis aibėje* E.

Pavyzdžiai. 1) Rasime funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, divergavimo, absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes A, B ir C.

Kadangi $\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\} =: A$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|^n} = +\infty,$$

tai aibėje A netenkinama būtinoji eilutės konvergavimo sąlyga ir pradinė eilutė diverguoja aibėje A.

Kadangi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] =: B$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|x|^n}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

tai pagal teigiamosios eilutės konvergavimo Koši požymį pradinė eilutė absoliučiai konverguoja aibėje B.

Kadangi $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tai reliatyviojo konvergavimo aibė $C = \emptyset$.

2) Ištirsime, kaip konverguoja funkcijų seka $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ aibėje E tolygiai ar pataškiui, jeigu

a) $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in E := \mathbb{R}$, b) $f_n(x) := e^{-(x-n)^2}$, $x \in E := \mathbb{R}$.

a) Kadangi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = |x| =: f(x)$$

ir

$$\lim\sup\{|f_n - f|(x) : x \in \mathbb{R}\} = \lim\sup\left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \lim\frac{1}{n} = 0,$$

tai $f_n \rightrightarrows f$ tiesėje $\mathbb{R}$.

b) Kadangi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$$

ir

$$\lim\sup\{|f_n - f|(x) : x \in \mathbb{R}\} = \lim f_n(n) = 1,$$

tai $f_n \to f$ tiesėje $\mathbb{R}$.

3) Ištirsime, kaip konverguoja funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ aibėje E tolygiai ar pataškiui, jeigu

a) $h_n(x) := \frac{(-1)^n}{x+n}$, $x \in E := \mathbb{R}_+$, b) $h_n(x) := \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $x \in E := [-2;2] \setminus (-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

a) Apibrėžkime sekas $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$f_n(x) := (-1)^n, \quad g_n(x) := \frac{1}{x+n}, \ x \in \mathbb{R}_+.$$

Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \begin{cases} -1, & n\text{–nelyginis}, \\ 0, & n\text{–lyginis}, \ x \in E, \end{cases}$$

tai seka $S_n : n \in \mathbb{N}$ yra tolygiai aprėžta aibėje.

Kadangi $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$g_n(x) > g_{n+1}(x),$$

tai seka $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra monotoninė aibėje $\mathbb{R}_+$. Be to,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

ir

$$\lim\sup\{g_n(x) : x \in \mathbb{R}_+\} = \lim\frac{1}{n} = 0,$$

taigi $g_n \rightrightarrows 0$ aibėje $\mathbb{R}_+$. Pagal Abelio–Dirichlė požymį funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ tolygiai konverguoja aibėje $\mathbb{R}_+$.

b) Naudodami išvestinę nustatome, kad funkcija g_n,

$$g_n(x) := x^n + x^{-n}, \quad x \in \left[\frac{1}{2};2\right],$$

mažėja intervale $(\frac{1}{2};1)$ ir didėja intervale $(1;2)$. Todėl

$$\max\{g_n(x): x\in[\frac{1}{2};2]\}=2^n+2^{-n}.$$

Kadangi $\forall x\in E\ \ \forall n\in\mathbb{N}:$

$$|h_n|(x)=\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\big(|x|^n+|x|^{-n}\big)\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n+2^{-n})<\frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}=:C_n$$

ir

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}=\big(1+\frac{1}{n}\big)^2\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to+0,$$

tai pagal Dalambero požymį konverguoja mažorantė $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$, o pagal mažorantinį požymį funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}h_n$ tolygiai konverguoja aibėje E.

VII.1.1. Ištirkite, kaip pataškiui ar tolygiai aibėje E konverguoja funkcijų seka $\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$, jeigu:

1) $f_n(x)=x^n,\quad i)E=[0;\frac{1}{2}], ii)E=[0;1]$;
2) $f_n(x)=x^n-x^{n+1},\quad E=[0;1]$;
3) $f_n(x)=x^n-x^{2n},\quad E=[0;1]$;
4) $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n},\quad E=\mathbb{R}_+$;
5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x},\quad E=[0;1]$;
6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n},\ i)E=[0;1-a], ii)E=[1-a;1+a], iii)E=[1+a;+\infty)$, čia $a\in(0;1)$;
7) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2},\quad i)E=[0;1], ii)E=(1;+\infty)$;
8) $f_n(x)=n\Big(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\Big),\quad E=\mathbb{R}_+$;
9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n},\quad E=\mathbb{R}$;
10) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n},\quad E=\mathbb{R}$;
11) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx,\quad E=\mathbb{R}_+$;
12) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx,\quad E=\mathbb{R}_+$;
13) $f_n(x)=e^{n(x-1)},\quad E=(0;1)$;
14) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2},\quad E=(-a;a),\ a\in\mathbb{R}_+$;
15) $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n},\quad E=(0;1)$;
16) $f_n(x)=\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n,\quad i)E=(a;b),(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ ii)\ E=\mathbb{R}$;
17) $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1),\quad E=[1;a],\ a\in(1;+\infty)$;
18) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n},\quad E=[0;2]$;

19) $f_n(x) = \sin^{2n} x, \quad i) E = [0; 2\pi],\ ii) E = \big[0; \frac{\pi}{4}\big];$

20) $f_n(x) = \cos^n x(1 - \cos^n x), \quad E = \big[0; \frac{\pi}{2}\big];$

21) $f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad E = \mathbb{R};$

22) $f_n(x) = n \ln\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big), \quad E = \mathbb{R};$

23) $f_n(x) = n \ln\Big(1 + \frac{1}{nx}\Big), \quad E = \mathbb{R}_+;$

24) $f_n(x) = n\Big(\sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - \sin x\Big), \quad E = \mathbb{R};$

25) $f_n(x) = n\Big(\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^t - 1\Big), \quad t \in \mathbb{R}, i) E = [0; +\infty), ii) E = [0; 1];$

26) $f_n(x) = n \sin\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}, \quad i) E = [0; a], a \in \mathbb{R}_+; ii) E = \mathbb{R};$

27) $f_1(x) = x, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0; \frac{1}{n}], \\ n^2(\frac{2}{n} - x), & x \in (\frac{1}{n}; \frac{2}{n}), n \geqslant 2, E = [0; 1]; \\ 0; & x \in [\frac{2}{n}; 1], \end{cases}$

28) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n}, \\ 0, & x \in [0; 1] \setminus \{\frac{1}{n}\}, \end{cases} \quad E = [0; 1]$

29) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; n), \\ 1, & x \in [n; +\infty), \end{cases} \quad E = [0; +\infty).$

VII.1.2. Įrodykite, kad funkcijų seka $f_n \rightrightarrows g$ aibėje E, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n}$, $n \geqslant 1$, $E = (a; b)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, čia funkcija f yra bet kuri funkcija, $[\cdot]$ – sveikoji dalis, $g = f$;

2) $f_n(x) = n\Big(f\big(x + \dfrac{1}{n}\big) - f(x)\Big)$, $n \geqslant \Big[\frac{1}{b-\beta}\Big] + 1$, $E = [\alpha; \beta]$, $f \in C^1\big((a; b)\big)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < \alpha < \beta < b$, $g = f'$.

VII.1.3. Sakykime, aibėje E funkcijų sekos $f_n \to f$, $g_n \to g$. Įrodykite, kad aibėje E $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$.

VII.1.4. Sakykime, aibėje E funkcijų sekos $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Įrodykite, kad $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ aibėje E. Nurodykite sekų pavyzdžius, kad būtų aibėje E $f_n g_n \rightrightarrows fg$ ir $f_n g_n \to fg$.

VII.1.5. Sakykime, aibėje E: 1) funkcijų sekos $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$, 2) funkcijos f ir g yra aprėžtos. Įrodykite, kad $f_n g_n \rightrightarrows fg$ aibėje E.

VII.1.6. Sakykime, aibėje $\mathbb{R}$: 1) $\forall n \in \mathbb{N}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tolygiai tolydi, 2) $f_n \rightrightarrows f$. Įrodykite, kad funkcija f yra tolygiai tolydi tiesėje $\mathbb{R}$.

VII.1.7. Sakykime, funkcija $f \in C\big([a; b]\big)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ir $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \int_a^b f\Big(\frac{u}{n} + \frac{n-1}{n}x\Big)\,du, \quad x \in [a; b].$$

Įrodykite, kad $f_n \rightrightarrows f$ intervale $[a; b]$.

VII.1.8. Sakykime, funkcija $f \in C\big((\mathbb{R})\big)$ ir $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{R}:$

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\Big(x + \frac{j}{n}\Big).$$

Įrodykite, kad $\forall [a;b] \subset \mathbb{R}:\ f_n \rightrightarrows f$ intervale $[a;b]$.

VII.1.9. Raskite funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje $E \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, divergavimo, absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $A \subset E$, $B \subset E$ ir $C \subset E$, $E = A \cup B \cup C$, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)^n, \quad E = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$

2) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+1}\Big(\dfrac{x}{2x+1}\Big)^n, \quad E = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\};$

3) $f_n(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j}\Big(\frac{2x}{1+x^2}\Big)^n, \quad E = \mathbb{R};$

4) $f_n(x) = \dfrac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n \quad E = \mathbb{R};$

5) $f_n(x) = \dfrac{2^n \sin^n x}{n^2} \quad E = \mathbb{R};$

6) $f_n(\vec{x}) = \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^t}, \vec{x} = (x,t) \in E = (-1;+\infty) \times \mathbb{R};$

7) $f_n(\vec{x}) = \dfrac{n^t \sin nx}{1+n^u}, \vec{x} = (x,t,u) \in E = (0;\pi) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+;$

8) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}, E = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\};$

9) $f_n(x) = \Big(\dfrac{x(x+n)}{n}\Big)^n, E = \mathbb{R};$

10) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, E = \mathbb{R};$

11) $f_n(x) = x^n \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x^j}, E = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$

12) $f_n(x) = ne^{-nx}, E = \mathbb{R};$

13) $f_n(\vec{x}) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\dfrac{1}{1+t^{2n}x^2}, \vec{x} = (x,t) \in E = \mathbb{R}^2;$

14) $f_n(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\Big(2 - x^{\frac{1}{j}}\Big), E = \mathbb{R}_+;$

15) $f_n(x) = \dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}, E = \mathbb{R}.$

VII.1.10. Naudodami mažorantinį požymį įrodykite, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tolygiai konverguoja aibėje E, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2},\ E = \mathbb{R};$ 2) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+2^n},\ E = (-2;+\infty);$

3) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$, $E = [0; +\infty)$; 4) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $E = \mathbb{R}$;
5) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $E = (-a; a), a \in \mathbb{R}_+$; 6) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $E = \mathbb{R}$;
7) $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $E = \mathbb{R}$; 8) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^{3/2}}$, $E = \mathbb{R}$;
9) $f_n(x) = \ln\Big(1 + \dfrac{x}{n\ln^2 n}\Big)$, $E = (-a; a), a \in (0; 2\ln^2 a), n \geqslant 2$;
10) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $E = [0; +\infty)$; 11) $f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $E = \mathbb{R}$.

VII.1.11. Nustatykite, kaip aibėje E tolygiai ar pataškiui konverguoja funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, jeigu:

1) $f_n(x) = x^n$, $i)E = (-a; a), a \in (0; 1)$, $ii)E = (-1; 1)$;
2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}, E = [-1; 1]$; 3) $f_n(x) = (1-x)x^n, E = [0; 1)$;
4) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, E = [-1; 1]$; 5) $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}, E = \mathbb{R}_+$;
6) $f_n(x) = \dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, E = \mathbb{R}_+$;
7) $f_n(x) = \dfrac{nx}{\prod_{k=1}^{n}(1+kx)}, i)E = [0; a], a \in \mathbb{R}_+$, $ii)E = [a; +\infty)$;
8) $f_n(x) = 2^n \sin \dfrac{1}{3^n x}, E = \mathbb{R}_+$; 9) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin x}, E = [0; 2\pi], n \geqslant 2$;
10) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}, E = \mathbb{R}$.

VII.1.12. Įrodykite, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n(x) = (-1)^n(1-x)x^n$, $x \in [0; 1]$, absoliučiai ir tolygiai konverguoja intervale $[0; 1]$, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n|$ konverguoja pataškiui tame intervale.

VII.1.13. Sakykime, funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ tolygiai konverguoja kompaktiniame intervale $[a; b]$. Įrodykite, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ taip pat tolygiai konverguoja tame intervale.

VII.1.14. Sakykime, 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ funkcija $f_n : [a; b] \to \mathbb{R}$ yra monotoninė apibrėžimo srityje, čia $[a; b]$ – kompaktinis intervalas, 2) eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|(a)$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|(b)$ konverguoja. Įrodykite, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai tame intervale.

VII.1.15. Sakykime, 1) seka $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ir $\exists \lim |a_n| = +\infty$, 2) eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ konverguoja. Įrodykite, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai kiekviename kompakte $C \subset \mathbb{R} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

VII.1.16. Sakykime, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja. Įrodykite, kad konverguoja tolygiai intervale $[0; +\infty)$ eilutės

1) Dirichlė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$.

VII.1.17. Raskite funkcijų begalinės sandaugos $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje E konvergavimo sritį $A \subset E$, jeigu:

1) $f_n(x) = 1 + 2^{n(x-x^2)}$, $E = \mathbb{R}$; 2) $f_n(x) = 1 + 2^n \sin^{2n} x$, $E = \mathbb{R}$.

VII.1.18. Sakykime, 1) $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : E \to \mathbb{R}_+$, $E \subset \mathbb{R}$, 2) funkcijų begalinė sandauga $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja tolygiai į funkciją $f : E \to \mathbb{R}_+$ aibėje E, 3) $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in E : f(x) \geqslant M$. Įrodykite, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \ln f_n$ konverguoja tolygiai į funkciją $\ln f$ aibėje E.

VII.1.19. Sakykime, 1) funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja tolygiai į funkciją f aibėje E, 2) $\sup\{|f|(x) : x \in E\} \in \mathbb{R}_+$. Įrodykite, kad funkcijų begalinė sandauga $\prod_{n=1}^{\infty} e^{f_n}$ konverguoja į funkciją g, $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in E$, tolygiai aibėje E.

VII.2. Tolygusis konvergavimas ir analizės pagrindinės operacijos

Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad funkcijų eilutė (FE) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n(x) = xe^{-nx}(n - (n-1)e^x)$, $x \in [0;1]$, konverguoja pataškiui intervale $[0;1]$ į funkciją $f \in C([0;1])$.

► Akivaizdu, kad $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C([0;1])$. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0;1]$:

$$S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = nxe^{-nx},$$

tai

$$f(x) = \lim_{\mathbb{N} \ni n \to +\infty} S_n(x) = 0, \qquad x \in [0;1],$$

ir $f \in C([0;1])$. Naudodami išvestinę randame, kad

$$\max\big\{(S_n - f)(x) : x \in [0;1]\big\} = S_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = e^{-1},$$

todėl $S_n \to f$ intervale $[0;1]$, t.y. tolydžiųjų funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja pataškiui intervale $[0;1]$ į tolydžiąją funkciją. ◄

2) Įrodysime, kad $f_n \rightrightarrows 0$ aibėje $\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\mathcal{D}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$\mathcal{D}$– Dirichlė funkcija, t.y.

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Taigi trūkiųjų funkcijų seka konverguoja tolygiai tiesėje $\mathbb{R}$ į tolydžiąją funkciją.

► Iš tikrųjų,

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \to +\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

taigi funkcija $0 \in C(\mathbb{R})$, $0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Kadangi visi tiesės taškai yra Dirichlė funkcijos II-ojo tipo trūkio taškai, tai $\forall n \in \mathbb{N}$ funkcija f_n yra trūki kiekviename tiesės taške. ◄

3) Įrodysime, kad funkcija $f \in C^1(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

► Kadangi $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n|(x) \leqslant \frac{1}{n^3}, \quad |f_n'|(x) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

čia

$$f_n(x) := \frac{\sin nx}{n^3},$$

tai pagal Vejerštraso požymį FE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguoja tolygiai tiesėje $\mathbb{R}$. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, tai pagal FE tolydumo ir diferencijavimo teoremas $f \in C^1(\mathbb{R})$. ◄

4) Įrodysime, kad funkcijų sekos (FS) $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad g_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0;1],$$

konverguoja pataškiui į nulį intervale $[0;1]$, tačiau

$$\lim \int_0^1 f_n \neq 0, \qquad \lim \int_0^1 g_n = 0.$$

► Kadangi $\forall x \in [0;1]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0,$$

$$\max\{f_n(x) : x \in [0;1]\} = f_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) = \frac{\sqrt{n}}{2}e^{-\frac{1}{2}} \to +\infty,$$

$$\max\{g_n(x) : x \in [0;1]\} = g_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \to \frac{1}{e},$$

tai $f_n \to 0$, $g_n \to 0$, intervale $[0;1]$. Pastebėsime, kad maksimumo taškus radome naudodami išvestines.

Be to,

$$\int_0^1 f_n = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \to \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 g_n = n\frac{\Gamma(2)\Gamma(n+1)}{(n+2)!} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0,$$

Čia panaudojome Oilerio funkcijas ir sąryšį

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+^2. \ ◄$$

VII.2.1. Raskite ribas:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$;

3) $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{m+1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^m x^n,\ m\in\mathbb{N}$.

VII.2.2. Raskite FE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergavimo sritį E ir ištirkite, ar eilutės suma f tolydi toje srityje, jeigu:

1) $f_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n,\ x\in\mathbb{R}$; 2) $f_n(x)=\frac{x}{(1+x^2)^n},\ x\in\mathbb{R}$;

3) $f_n(x)=\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2},\ x\in\mathbb{R}$; 4) $f_n(x)=\frac{x\sin(n^2x)}{n^2},\ x\in\mathbb{R}$;

5) $f_n(x)=\frac{x^n\sin(nx)}{n!},\ x\in\mathbb{R}$; 6) $f_n(x)=|x|^{\sqrt{n}},\ x\in\mathbb{R}$;

7) $f_n(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^n+\frac{1}{x^n},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 8) $f_n(x)=\operatorname{arc\,tg}^n\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

VII.2.3. Raskite begalines sandaugas $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ tiesėje $\mathbb{R}$ konvergavimo sritį E ir įrodykite, kad ta sandauga $f\in C(E)$, jeigu:

1) $f_n(x)=1+e^{nx}$; 2) $f_n(x)=1+nx^n$;

3) $f_n(x)=1+\sqrt{n}2^{-n(x+1)}$; 4) $f_n(x)=1+\frac{n}{x^{2n}}$.

VII.2.4. Sakykime, FS $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ apibrėžta tiesėje $\mathbb{R}$. Įrodykite, kad $f_n\rightrightarrows f$ kiekviename aprėžtajame intervale $\mathcal{J}\in\mathbb{R}$, tačiau $f_n\to f$ tiesėje $\mathbb{R}$, ir ištirkite, ar teisinga lygybė

$$\lim\sup f_n(\mathbb{R})=sup f(\mathbb{R}),$$

jeigu

1) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; 2) $f_n(x)=n\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}$.

VII.2.5. Įrodykite, kad 1) FE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tolygiai konverguoja intervale $[a;b]$, 2) eilutės suma $f\in C([a;b])$ ir 3) teisinga lygybė

$$\int_a^b f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n \quad (\text{raskite} \quad \int_a^b f_n),$$

jeigu:

1) $f_n(x)=\sin^2\frac{x}{n}, a=0, b=2$; 2) $f_n(x)=\frac{1}{(n+x)(n+2x)^2}, a=0, b=1$;

3) $f_n(x) = \prod_{k=0}^{2} \frac{1}{x+\sqrt{n}+k}, a=0, b=1.$

VII.2.6. Įrodykite, kad 1) FS $f_n \to f$ intervale $[0;1]$ ir 2)

$$\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f,$$

čia $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$.

VII.2.7. Įrodykite, kad 1) FE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pataškiui konverguoja intervale $[0;1]$ ir 2) teisinga lygybė

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n,$$

čia $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$.

VII.2.8. Sakykime, seka $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = [0;1] \cap \mathbb{Q} =: E$. Įrodykite, kad funkcija f,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}, \quad x \in [0;1],$$

tenkina sąlygas: 1) $f \in C([0;1])$, 2) $\forall x \in [0;1] \setminus E \ \ \exists f'(x) \in \mathbb{R}$, 3) $\forall x \in E \ \ \nexists f'(x)$.

VII.2.9. Įrodykite, kad funkcija $f \in C^1(E)$, čia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E,$$

jeigu:

1) $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}, E = \mathbb{R}$; 2) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{1+n^2}, E = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$;
3) $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{n}}, E = \mathbb{R}$; 4) $f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n^3+1}, E = \mathbb{R}$;
5) $f_n(x) = \sqrt{n} \operatorname{tg}^n x, E = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

VII.2.10. Įrodykite, kad funkcija $f \in C^1(E)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad E = [0;+\infty).$$

Raskite $f'(0)$, $f'(1)$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

VII.2.11. Raskite $FE\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje $\mathcal{D}$ konvergavimo sritį E ir įrodykite, kad $\exists f' : E \to \mathbb{R}$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje E, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{x+n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$; 2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \mathcal{D} = \mathbb{R}$;
3) $f_n(x) = 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R}$; 4) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
5) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; 6) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R}$;
7) $f_n(x) = \dfrac{2^n}{1+x^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 8) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
9) $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{1+x^n}, \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 10) $f_n(x) = \dfrac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}, \mathcal{D} = \mathbb{R}$;
11) $f_n(x) = \sqrt{n} x^n e^{-2nx^2}, \mathcal{D} = \mathbb{R}$.

VII.2.12. Įrodykite, kad funkcija $f \in C(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ir $\nexists f'(0)$, čia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

VII.2.13. Įrodykite, kad funkcija $f \in C([0;+\infty])$, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ ir $\nexists f'(0)$, čia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

VII.2.14. Sakykime, $f : \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje E. Įrodykite, kad funkcija $f \in C^{\infty}(E)$, jeigu:

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, $E = (1;+\infty)$ (funkcija f vadinama *Rymano dzeta funkcija*);
2) $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{3}\right)^n + \dfrac{1}{x^n}$, $E = (-3;3) \setminus [-1;1]$;
3) $f_n(x) = \sqrt{n} \ln^n(1+x)$, $E = \left(\dfrac{1}{e} - 1; e-1\right)$;
4) $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $E = [2;+\infty)$.

VII.2.15. Raskite begalinės sandaugos $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje $\mathcal{D}$ konvergavimo sritį E ir įrodykite, kad $\exists f' : E \to \mathbb{R}$, $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ aibėje E, jeigu:
1) $f_n(x) = 1 + x^n$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; 2) $f_n(x) = 1 + 2^{nx}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$;
3) $f_n(x) = 1 + nx^{2n}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; 4) $f_n(x) = 1 + \frac{n^2}{x^{2n}}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
5) $f_n(x) = 1 + \frac{x^{2n}}{n!}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

VII.2.16. rodykite, kad FS $f_n \rightrightarrows f$ tiesėje $\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = x^2,$$

ir $\exists x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim f_n'(x_0) \neq f'(x_0).$$

VII.2.17. Įrodykite, kad $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ tiesėje $\mathbb{R}$, čia

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n^2}.$$

VII.2.18. Sakykime, funkcija $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ir $f^{(n)} \rightrightarrows g$ kiekviename aprėžtajame intervale $\mathcal{J}$. Įrodykite, kad $g(x) = Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, C–konstanta.

VII.3. Laipsninės eilutės

3.1. Apibrėžimai. Funkcijų eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \mathbb{R} \ni a \quad \text{– konstanta}, \quad 0^0 := 1, \tag{1}$$

vadinama *laipsnine eilute*, $\mathbb{R} \ni a_n$ – *eilutės* n*-tuoju koeficientu.* Dydis

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & \alpha = +\infty, \\ +\infty, & \alpha = 0, \end{cases}$$

$\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, vadinamas *laipsninės eilutės konvergavimo spinduliu*, o aibė $U(a,R)$, $R \in [0;+\infty]$, $U(a;0) := [a;a]$ $U(a,+\infty) := \mathbb{R}$ — *laipsninės eilutės konvergavimo intervalu.* Jeigu seka $\{|a_n| : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathbb{R}_+$ ir $\exists \lim |\frac{a_n}{a_n+1}| =: A$, tai konvergavimo spindulys $R = A$.

3.2. Koši–Adamaro teorema. *Laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai konvergavimo intervale ir diverguoja jo išorėje.*

3.3. Teorema. *Sakykime, (1) laipsninės eilutės konvergavimo spindulys $R \in (0;+\infty]$. Tada eilutė konverguoja tolygiai kiekviename kompakte $C \subset U(a,R)$ ir eilutės suma $f \in C(U(a,R))$.*

3.4. Teorema. *Sakykime, (1) laipsninės eilutės konvergavimo spindulys $R \in (0;+\infty]$. Tada 1) eilutės suma $f \in C^{\infty}(U(a,R))$, teisinga lygybė $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in U(a,R)$:*

$$f^{(p)}x = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n(x-a)^{n-p}, \quad 0^0 := 1, \tag{2}$$

ir (2) dešiniosios eilutės konvergavimo spindulys lygus R;

2) $\forall x \in U(a,R)$ *teisinga lygybė*

$$\int_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}. \tag{3}$$

ir (3) dešiniosios eilutės konvergavimo spindulys lygus R.

3.5. Abelio teorema. *Sakykime, (1) laipsninė eilutė konverguoja taške* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. *Tada ji konverguoja tolygiai intervale* $[a; x_0]$ *ir jos suma* $f \in C([a; x_0])$.

3.6. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $f : U(a,r) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in (0; +\infty]$, ir $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Tuomet laipsninė eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \ 0^0 := 1,$$

vadinama *funkcijos* f *Teiloro eilute taške* a. Jeigu $\exists r_1 \in (0; r]$ $\forall x \in U(a, r_1)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

tai funkcija f vadinama *analizine taške* a.

3.7. Lema. *Teisingos lygybės* $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{4}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{5}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \tag{6}$$

$\forall x \in (-1; 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \tag{7}$$

$\forall x \in (-1; 1)$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}); \tag{8}$$

be to, (7) eilutė konverguoja reliatyviai taške 1, *(8) eilutė konverguoja absoliučiai aibėje* $\{-1; 1\}$, *kai* $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$, *konverguoja reliatyviai taške* 1, *kai* $\alpha \in (-1; 0)$, *diverguoja taške* -1, *kai* $\alpha \in (-\infty; 0)$, *ir taške* 1, *kai* $\alpha \in (-\infty; -1]$.

Pavyzdžiai. 1) Rasime laipsninės eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in\mathbb{R}$, konvergavimo spindulį R, ištirsime konvergavimą konvergavimo intervalo galuose, jeigu $R\in\mathbb{R}_+$, t.y. ar eilutė konverguoja reliatyviai, ar absoliučiai, ar diverguoja, ir rasime eilutės sumą f.

Kadangi $\lim\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}=1$, tai pagal Koši–Adamaro teoremą konvergavimo spindulys $R=1$ ir eilutė konverguoja absoliučiai intervale $(-1;1)$, diverguoja aibėje $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ diverguoja, nes $\frac{1}{2n-1}\sim\frac{1}{2n}$, $n\to+\infty$, ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ diverguoja. Kadangi taške $x=-1$ visi eilutės nariai yra neigiami ir $\frac{|-1|}{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$, tai tokia eilutė irgi diverguoja. Todėl pradinė eilutė diverguoja aibėje $\mathbb{R}\setminus(-1;1)$.

Pagal 4.1) teiginį $\forall x\in(-1;1)$:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

o pagal 4.2) teiginį

$$f(x)=\int_0^x f'=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

2) Funkcijai f,

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x), & x\in(-1;+\infty),\\ 0, & x=-1,\end{cases}$$

parašykite Teiloro eilutę taške 0, raskite jos konvergavimo spindulį R ir ištirkite konvergavimą intervalo galuose, kai $R\in\mathbb{R}_+$.

Kadangi pagal (7) sąryšį

$$f'(x)=1+\ln(1+x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1;1],$$

tai pagal 4.2) teiginį $\forall x\in(-1;1)$:

$$f(x)=\int_0^x f'=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

ir $R=1$, nes

$$\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}=1.$$

Dešinioji eilutė yra funkcijos f Teiloro eilutė taške 0. Kadangi

$$\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$$

ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguoja, tai Teiloro eilutė konverguoja absoliučiai intervale $[-1;1]$ ir jame

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Intervalo išorėje ta eilutė diverguoja.

VII.3.1. Raskite laipsninės eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergavimo spindulį R bei intervalą ir ištirkite (kai $R \in \mathbb{R}_+$) ar eilutė intervalo krašte konverguoja absoliučiai, ar reliatyviai, ar diverguoja, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{1}{n^t}, t \in \mathbb{R}, a = 0;$

2) $a_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}, a = -1;$

3) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}, a = 0;$

4) $a_n = t^{n^2}, t \in (0;1), a = 0;$

5) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}, a = 0;$

6) $a_n = \dfrac{n!}{t^{n^2}}, t \in (1;+\infty), a = 0;$

7) $a_n = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^t \dfrac{1}{2^n}, t \in \mathbb{R}, a = 1;$

8) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^t, t \in \mathbb{R}, a = 0;$

9) $a_n = \dfrac{u^n}{n} + \dfrac{v^n}{n^2}, (u,v) \in \mathbb{R}_+^2, a = 0;$

10) $a_n = \dfrac{1}{u^n + v^n}, (u,v) \in \mathbb{R}_+^2, a = 0;$

11) $a_n = \dfrac{1}{t^{\sqrt{n}}}, t \in \mathbb{R}_+, a = 0;$

12) $a_n = \dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}, a = 0;$

13) $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, a = 0;$

14) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n, a = 0;$

15) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}, a = 0;$

16) $a_n = \dfrac{(3 + (-1)^n)^n}{n}, a = 0;$

17) $a_n = \dfrac{(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{\ln n}, n \geqslant 2, a = 0;$

18) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & n = k^2, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}, \end{cases} \quad a = 0;$

19) $a_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}, \ a = 0$ (Prinsheimo eilutė).

VII.3.2. Raskite funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^n(x), \ x \in E$, absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų aibes atitinkamai $\mathcal{D}_1$ ir $\mathcal{D}_2$, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}, \quad f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, E = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$

2) $a_n = \sin \dfrac{\pi}{2^n}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}, E = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

3) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}, \quad f(x) = e^{-x}, E = \mathbb{R};$

4) $a_n = \dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, E = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\};$

5) $a_n = 1, \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}, E = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

6) $a_n = \dfrac{4^n n}{3^n}$, $f(x) = x(1-x), E = \mathbb{R}$;

7) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$, $f(x) = 3x - 1, E = \mathbb{R}$;

8) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $f(x) = 2^{1-x}, E = \mathbb{R}$;

9) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $f(x) = \dfrac{1+x}{x}, E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

VII.3.3. Užrašykite funkciją f,

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

kaip sumą funkcijų eilučių:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-b)^n,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

ir raskite tų eilučių absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ ir $\mathcal{D}_2$.

VII.3.4. Naudodami (4)–(8) lygybes bei analizines operacijas su laipsninėmis eilutėmis užrašykite funkciją f su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}(f)$ kaip laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sumą ir raskite tos eilutės absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ bei $\mathcal{D}_2$, jeigu:

1) $f(x) = \operatorname{sh} x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = \operatorname{ch} x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \sin^2 x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

4) $f(x) = a^x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$;

5) $f(x) = e^{-x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

6) $f(x) = \cos^2 x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

7) $f(x) = \sin^3 x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

8) $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

10) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}, \mathcal{D}(f) = (-\infty; \dfrac{1}{2})$;

11) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \mathcal{D}(f) = (-1; 1)$;

12) $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}; 1\}$;

13) $f(x) = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-6; 1\}$;

14) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$;

15) $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \Big\{ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Big\}$;

VII.3.5. Funkciją f su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}(f)$ užrašykite kaip eilutės $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ sumą, raskite bent keturis pirmuosius eilutės narius, kurių koeficientai nelygūs nuliui, ir eilutės konvergavimo intervalą D_1, jeigu

1) $f(x) = x^x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+, a = 1$;

2) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \in (-1;+\infty) \setminus \{0\}, \\ e, & x = 0, \end{cases} \qquad a = 0;$
3) $f(x) = \operatorname{tg} x, \mathcal{D}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), a = 0;$
4) $f(x) = \operatorname{th} x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, a = 0;$
5) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}, & x \in (-\pi;\pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad a = 0;$
6) $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)^{-1}, \mathcal{D}(f) = (-1;1), a = 0.$

VII.3.6. Funkciją f su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}(f)$ užrašykite kaip laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sumą ir raskite tos eilutės absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ ir $\mathcal{D}_2$, jeigu:

1) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R};$
2) $f(x) = \arcsin x, \mathcal{D}(f) = [-1;1];$
3) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R};\right.$
4) $f(x) = \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, kai, $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} =: E_1;$
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, kai, $t \in \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} =: E_2;$
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, kai, $t \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} =: E_3;$
5) $f(x) = \begin{cases} (1+x)\ln(1+x), & x \in (-1;+\infty), \\ 0, & x = -1; \end{cases}$
6) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x, \mathcal{D}(f) = (-1;1);$
7) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\frac{2(1-x)}{1+4x}, & x \in \left(-\frac{1}{4};+\infty\right), \\ \frac{\pi}{2}, & x = -\frac{1}{4}, \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2(1-x)}{1+4x} + \pi, & x \in -\infty; -\frac{1}{4}; \end{cases}$
8) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2-x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\};$
9) $f(x) = x\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R};$
10) $f(x) = \begin{cases} \arccos(1-2x^2), & x \in [0;1], \\ -\arccos(1-2x^2), & x \in [-1;0). \end{cases}$

VII.3.7. Funkciją f su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}(f)$ užrašykite kaip funkcijų eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n(x)$ sumą ir raskite tos eilutės absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ ir $\mathcal{D}_2$, jeigu:

1) $f(x) = \ln\frac{1}{x^2+2x+2}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, g(x) = x+1, \mathcal{D}(g) = \mathbb{R};$
2) $f(x) = \frac{1}{1-x}, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = \frac{1}{x}, \mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
3) $f(x) = \ln x, \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{x-1}{x+1}, \mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, \mathcal{D}(f)=(-1;+\infty), g(x)=\dfrac{x}{1+x}, \mathcal{D}(g)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$

VII.3.8. Sakykime,

$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad f_1(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$f_2(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, x\in\mathbb{R}, 0^0:=1.$$

Naudodami eilučių daugybą įrodykite, kad teisingos lygybės

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$
$$(f_1\cdot f_2)(x)=\frac{1}{2}f_1(2x),$$
$$(f_1^2+f_2^2)(x)=1,$$
$$(f_2^2-f_1^2)(x)=f_2(2x), x\in\mathbb{R}.$$

VII.3.9. Funkciją f,

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}, \qquad x\in\Big(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big),$$

užrašykite kaip laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ sumą ir raskite tos eilutės konvergavimo intervalą $\mathcal{D}$. Skaičiai $E_n:=(2n)!a_n$ vadinami *Oilerio skaičiais*. Raskite sąryšius tarp šių skaičių.

VII.3.10. Sakykime, funkcija f,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \qquad x\in(-r;r), r\in(0;+\infty],$$

čia $r-$ eilutės konvergavimo spindulys. Funkciją g su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}(g)$ užrašykite kaip laipsninės eilutės $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ sumą ir raskite tos eilutės konvergavimo spindulį r_1, jeigu:

1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(u^2)du$, $\mathcal{D}(g)=(-\sqrt{r};\sqrt{r})$;

2) $g(x)=(1-x)f(x)$, $\mathcal{D}(g)=(-r;r)$;

3) $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f\Big(\frac{x}{n^2}\Big)$, $a_0=0$, $\mathcal{D}(g)=(-r;r)$;

4) $g(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$, $\mathcal{D}(g)=(-r_0;r_0)$, $r_0=\min\{1;r\}$;

5) $g(x)=f^2(x)$, $\mathcal{D}(g)=(-r;r)$.

VII.3.11. Sakykime, eilučių $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ir $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ konvergavimo spinduliai yra atitinkamai $r_1\in(0;+\infty]$ bei $r_2\in(0;+\infty]$. Įrodykite, kad :

1) eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ konvergavimo spindulys yra $r = \min\{r_1; r_2\}$, jeigu $r_1 \neq r_2$;

2) eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ konvergavimo spindulys $r \geqslant r_1 \cdot r_2$.

Ką galime pasakyti apie eilučių sumos konvergavimo spindulį, kai $r_1 = r_2$?

VII.3.12. Sakykime, seka $\{a_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Įrodykite, kad eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergavimo spindulys r tenkina nelygybes:

$$\underline{\lim}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant r \leqslant \overline{\lim}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

VII.3.13. Sakykime, seka $\{a_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tenkina sąlygą: $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \geqslant 0$:

$$|n! a_n| \leqslant M.$$

Įrodykite, kad 1) eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergavimo spindulys $r = +\infty$, 2) eilutės suma $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 3) $\forall a \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

VII.3.14. Sakykime, seka 1) $\{a_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset [0; +\infty)$, 2) eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguoja intervale $(-r; r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, 3) $\exists f(r-0) \in \mathbb{R}$, čia f – eilutės suma.

Įrodykite, kad eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguoja.

VII.3.15. Raskite

$$\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

jeigu:

1) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \end{cases}$

3) $g(x) = \begin{cases} \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}, & x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

VII.3.16. Raskite eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ bei $\mathcal{D}_2$ ir eilutės sumą, jeigu:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$;

5) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n+2)!}$; visur $0^0 := 1$.

VII.3.17. Raskite eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergavimo spindulį r ir įrodykite, kad eilutės suma f tenkina konvergavimo intervale nurodytąsias sąlygas, jeigu

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}, f'(x) = 1 + xf(x), f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}, xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0$.

VII.3.18. Raskite eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sumą, jeigu:

1) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

3) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$; 4) $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

5) $a_n = \frac{1}{n(n+m)}, m \in \mathbb{N}$; 6) $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$;

7) $a_n = \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$; 8) $a_n = \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$;

9) $a_n = \frac{1}{n(2n+1)}$; 10) $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

VII.3.19. Raskite laipsninės eilutės $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoliučiojo ir reliatyviojo konvergavimų atitinkamas aibes $\mathcal{D}_1$ bei $\mathcal{D}_2$ bei eilutės sumą, jeigu:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n, P(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \{b_k : 0 \leqslant k \leqslant m\} \subset \mathbb{R}, b_m \neq 0$;

2) $a_n = \dfrac{n^2+1}{2^n \cdot n!}$;

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$;

5) $a_n = \dfrac{n^2}{(2n+1)!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$;

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1+3k}{3+3k} \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

VIII. RYMANO–STYLTJESO INTEGRALAS. BAIGTINĖS VARIACIJOS FUNKCIJOS

VIII.1. Rymano–Styltjeso integralas pagal nemažėjančią funkciją.

1.1. Apibrėžimai. Sakykime, $[a;b] \subset \mathbb{R}$ yra kompaktinis intervalas, funkcija $\alpha \in I([a;b])$, čia $I([a;b])$ – visų nemažėjančių intervale $[a;b]$ funkcijų aibė, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta, $\mathcal{P}_1$ – intervalo $[a;b]$ visų skaidinių aibė, $\mathcal{P}_1 \ni P := \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$m_k := \inf f\big([x_{k-1}; x_k]\big), \quad M_k := \sup f\big([x_{k-1}; x_k]\big),$$
$$\Delta\alpha_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Funkcijų

$$\underline{S}_{f;\alpha} : \mathcal{P}_1 \ni P \to \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k,$$
$$\overline{S}_{f;\alpha} : \mathcal{P}_1 \ni P \to \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k,$$

reikšmės $\underline{S}_{f;\alpha}(P)$ ir $\overline{S}_{f;\alpha}(P)$ yra vadinamos *funkcijos* f atitinkamai *apatine* ir *viršutine (Darbu—Styltjeso) sumomis intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α.

Sakykime, $\mathcal{P} := \{(P, \vec{\xi}) : P \in \mathcal{P}_1, \vec{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n) \in T_P\}$, čia T_P– visų skaidinį P atitinkančių tarpinių (žymėtųjų) taškų aibė. Tada funkcijos

$$S_{f;\alpha} : \mathcal{P} \ni (P, \vec{\xi}) \to \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha_k$$

reikšmė $S_{f;\alpha}(P, \vec{\xi})$ vadinama *funkcijos* f *integraline suma intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α, *atitinkančia skaidinį* P *ir tarpinį tašką* $\vec{\xi}$. Dydžiai

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha := \sup\{\underline{S}_{f;\alpha}(P) : P \in \mathcal{P}_1\},$$

ir

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha := \inf\{\overline{S}_{f;\alpha}(P) : P \in \mathcal{P}_1\},$$

vadinami *funkcijos* f atitinkamai *apatiniu* ir *viršutiniu Rymano–Styltjeso integralais intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α. Jeigu tie dydžiai yra tarpusavyje lygūs, tai funkcija f

vadinama *integruojama intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α *Rymano–Styltjeso prasme*, o dydis

$$\int_a^b f\,d\alpha := \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f\,d\alpha$$

vadinamas *funkcijos* f *Rymano—Styltjeso integralu intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α. Visų tokių funkcijų erdvė žymima $RS([a;b];\alpha)$.

1.2. Teorema. $C([a;b]) \subset RS([a;b];\alpha)$.

1.3. Teorema. *Sakykime, 1) funkcija* $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ *yra monotoninė, 2) funkcija* $\alpha \in C([a;b]) \cap I([a;b])$. *Tada* $f \in RS([a;b];\alpha)$.

1.4. Teorema. *Sakykime, 1) funkcija* $f \in R([a;b])$, *2) funkcija* $\alpha \in I([a;b])$, *diferencijuojama ir* $\alpha' \in R([a;b])$. *Tada* $f \in RS([a;b];\alpha)$, $f\alpha' \in R([a;b])$ *ir teisinga lygybė*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f\alpha'.$$

1.5. Teorema. *Sakykime, 1) funkcija* $\alpha \in I([a;b])$ *ir, be to, tenkinamos sąlygos arba 1)* $f \in C([a;b])$, *arba 2)* $\alpha \in C([a;b])$ *ir* $f \in RS([a;b];\alpha)$. *Tada*

$$\exists \lim_{d(P)\to 0} S_{f;\alpha}(P,\vec{\xi}) = \int_a^b f d\alpha.$$

Pavyzdžiai. 1) Sakykime,

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [-1;0], \\ 1, & x \in (0;1]; \end{cases} \qquad \alpha(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ 1, & x \in (0;1]. \end{cases}$$

Apskaičiuosime $\underline{\int_{-1}^{1}} f\,d\alpha$ ir $\overline{\int_{-1}^{1}} f\,d\alpha$.

Sakykime, $P = \{x_k : 0 \leqslant k \leqslant n\} \in \mathcal{P}_1$, ir $0 \in P$, t.y. $\exists k_0 : x_{k_0-1} = 0$. Tada $\forall k \neq k_0$: $\Delta\alpha_k = 0$, $\Delta\alpha_{k_0} = 1$. Be to, $m_{k_0} = -1$, $M_{k_0} = 1$.

Jeigu $0 \notin P$, t.y. $\exists k_0 : 0 \in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$, tai vėl $\forall k \neq k_0$: $\Delta\alpha_k = 0$, $\Delta\alpha_{k_0} = 1$, $m_{k_0} = -1$, $M_{k_0} = 1$.

Naudodami gautus rezultatus, randame $\forall P \in \mathcal{P}_1$:

$$\underline{S}_{f;\alpha}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k = -1, \qquad \overline{S}_{f;\alpha}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k = 1.$$

Todėl

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f\,d\alpha = \sup\{\underline{S}_{f;\alpha}(P) : P \in \mathcal{P}_1\} = -1,$$

$$\overline{\int_{-1}^{1}} f\,d\alpha = \inf\{\overline{S}_{f;\alpha}(P) : P \in \mathcal{P}_1\} = 1.$$

Kadangi apatinis ir viršutinis integralai skirtingi, tai $f \notin RS([-1;1];\alpha)$.
2) Rasime tokią funkciją $\alpha \in I([0;1])$, kuri tenkintų sąlygas

$$\int_0^1 x(1-x)d\alpha(x) = 0, \int_0^1 xd\alpha(x) = \frac{1}{3}\big(\alpha(1)-\alpha(0)\big).$$

Pagal pirmąją sąlygą funkcija α yra pastovi intervale $(0;1)$. Pagal 5. Teoremą ir antrąją sąlygą $\int_0^1 xd\alpha(x) = \alpha(1)-\alpha(1-0) = \frac{1}{3}\big(\alpha(1)-\alpha(0)\big)$. Todėl

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x = 0, \\ \frac{\alpha(0)+2\alpha(1)}{3}, & x \in (0;1), \\ \alpha(1), & x = 1. \end{cases} \quad \text{čia } \big(\alpha(0),\alpha(1)\big) \in \mathbb{R}^2, \alpha(0) \leqslant \alpha(1).$$

3) Apskaičiuosime $\int_0^1 x^2 d\alpha(x)$, jeigu

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 2, & x \in (0;1), \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Kadangi $\forall (P,\vec{\xi}) \in \mathcal{P}$:

$$S_{f;\alpha}(P,\vec{\xi}) = \xi_1^2 \Delta\alpha_1 + \xi_n^2 \Delta\alpha_n = \xi_1^2 + \xi_n^2,$$

tai

$$\lim_{d(P)\to 0} S_{f;\alpha}(P,\vec{\xi}) = 1 = \int_0^1 x^2 d\alpha(x),$$

čia $f(x) := x^2$, $x \in [0;1]$.

VIII.1.1. Raskite $\underline{\int_a^b} f d\alpha$ ir $\overline{\int_a^b} f d\alpha$, čia $\alpha \in I([a;b])$, jeigu:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0;1] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad 2) f(x) = x, \quad \alpha(x) = x^2, x \in [0;1].$$

VIII.1.2. Sakykime, funkcija $\alpha \in I([a;b])$ tolydi taške $x_0 \in [a;b]$, o funkcija f,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \in [a;b] \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Įrodykite, kad $f \in RS([a;b];\alpha)$ ir $\int_a^b f d\alpha = 0$.

VIII.1.3. Sakykime, funkcija $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ yra aprėžta, funkcijos

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;1], \\ 0, & x \in [-1;0), k \in \{1;2;3\}, \end{cases}$$

$\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_2(0) = 1$, $\alpha_3(0) = \frac{1}{2}$.

1) Įrodykite, kad $(f \in RS([-1;1];\alpha_1)) \Leftrightarrow \big(f(0) = f(+0)\big)$ ir tuo atveju

$$\int_{-1}^{1} f d\alpha_1 = f(0).$$

2) Suformuluokite ir įrodykite analogišką teiginį apie funkcijos f integruojamumą pagal funkciją α_2.

3) Įrodykite, kad $(f \in RS([-1;1];\alpha_3)) \Leftrightarrow (f$ tolydi taške $0)$.

4) Sakykime, funkcija f tolydi taške 0. Įrodykite, kad $\forall k \in \{1;2;3\} : f \in RS([-1;1];\alpha_k)$ ir

$$\int_{-1}^{1} f d\alpha_k = f(0).$$

5) Įrodykite, kad $\alpha_2 \in RS([-1;1];\alpha_1)$, $\int_{-1}^{1} \alpha_2 d\alpha_1 = 1$, tačiau $\overline{\exists} \lim_{d(P)\to 0} S_{\alpha_2;\alpha_1}(P,\vec{\xi})$.

6) Sakykime, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0;1)$ yra skirtingų elementų seka, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yra konverguojanti griežtai teigiama eilutė, funkcija $f \in C([0;1])$,

$$\alpha(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_1(x - x_n), \quad x \in [0;1].$$

Įrodykite, kad

$$\int_0^1 f d\alpha_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x_n).$$

VIII.1.4. Apskaičiuokite $\int_a^b f d\alpha$, jeigu:

1) $f(x) = x$, $\alpha(x) = \sin x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$;

2) $f(x) = x$, $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ n, & x \in (n-1;n], n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \end{cases}$ $\quad x \in [1;N]$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$.

3) $f(x)=x$, $\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & x\in[-2;-1],\\ 2, & x\in(-1;0),\\ x^2+3, & x\in[0;2];\end{cases}$

4) $f(x)=x^2$, $x\in[-2;2]$, funkcija α iš 3) užduoties;

5) $f(x)=x^3+1$, $x\in[-2;2]$, funkcija α iš 3) užduoties.

VIII.1.5. Sakykime, $\{f,g\}\subset RS([a;b];\alpha)$, $c\in\mathbb{R}$. Įrodykite, kad funkcijos $\{cf, f+g, fg, |f|\}\subset RS([a;b];\alpha)$.

VIII.1.6. Sakykime, $\alpha\in I([a;b])$. Įrodykite, kad

$$\Big(\forall f\in C([a;b]): \int_a^b f d\alpha = 0\Big) \Leftrightarrow \big(\alpha(a)=\alpha(b)\big).$$

VIII.1.7. Sakykime, funkcija $f\in C([a;b])$, $\alpha\in I([a;b])$. Įrodykite, kad

$$\exists c\in[a;b]: \int_a^b f d\alpha = \big(\alpha(b)-\alpha(a)\big)f(c).$$

VIII.1.8. Sakykime, funkcija $\alpha\in I([0;\pi])$ ir tenkina sąlygą

$$\int_0^\pi \sin x d\alpha(x) = \alpha(\pi)-\alpha(0).$$

Įrodykite, kad

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha(0), & x\in[0;\frac{\pi}{2}),\\ \alpha(\pi), & x\in[\frac{\pi}{2};\pi].\end{cases}$$

VIII.1.9. Sakykime, funkcija $\alpha\in I([0;2])$ tenkina sąlygą

$$\forall f\in C([0;2]): \int_0^2 f d\alpha = f(1).$$

Įrodykite, kad

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha(0), & x\in[0;1),\\ \alpha(2), & x\in[1;2].\end{cases}$$

VIII.1.10. Sakykime, funkcija $\alpha\in I([0;1])$ tenkina sąlygą

$$\forall f\in C([0;1]): \int_0^1 f d\alpha = f(0)+2f(1).$$

Įrodykite, kad

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha(0), & x=0,\\ \alpha(0)+1, & x\in(0;1),\\ \alpha(0)+2, & x=1.\end{cases}$$

VIII.1.11. Sakykime, funkcija $\alpha \in I([0;1])$ ir $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall f \in C([0;1])$:

$$\int_0^1 f d\alpha = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\Big(\frac{k}{N}\Big).$$

Raskite funkcijos α išraišką.

VIII.1.12. Sakykime, funkcija $f \in C([a;b])$ tenkina sąlygą $\forall \alpha \in I([a;b])$: $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$. Raskite funkcijos f išraišką.

VIII.1.13. Sakykime, $\alpha \in I([a;b])$, funkcijų seka $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C([a;b])$ ir $f_n \rightrightarrows f$ intervale $[a;b]$. Įrodykite, kad

$$\lim \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

VIII.1.14. Apskaičiuokite

1) $\displaystyle\lim \int_0^1 x^n d\alpha(x)$; 2) $\displaystyle\lim \int_0^1 (x^n + 2^{-nx}) d\alpha(x)$ čia $\alpha \in I([0;1])$.

VIII.1.15. Raskite tokią funkciją $\alpha \in I([a;b])$, kad

$$\forall f \in C([a;b]) : \int_a^b f d\alpha = 0.$$

VIII.1.16. Raskite tokią funkciją $\alpha \in I([0;2])$, kad

$$\forall f \in C([0;2]) : \int_0^2 f d\alpha = f(0) + \int_0^1 f.$$

VIII.1.17. Raskite tokią funkciją $\alpha \in I([a;b])$, kad

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \int_a^b x^n d\alpha(x) = 0.$$

VIII.1.18. Raskite tokią funkciją $\alpha \in I([0;1])$, kad

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_0^1 x^n d\alpha(x) = 0.$$

VIII.1.19. Sakykime, $\{f, g\} \subset C([a;b])$, $g \geqslant 0$, $\alpha \in I([a;b])$,

$$\beta(x) := \int_a^x g(t) d\alpha(t), \quad x \in [a;b].$$

Įrodykite, kad $\beta \in I([a;b])$ ir teisinga lygybė

$$\int_a^b f d\beta = \int_a^b f g d\alpha.$$

VIII.2. Baigtinės variacijos funkcijos

2.1. Apibrėžimai. Sakykime, funkcija $\vec{f}:[a;b]\to\mathbb{R}^m$, $P:=\{x_k: 0\leqslant k\leqslant n\}\in\mathcal{P}_1$, čia $\mathcal{P}_1$ – visų intervalo $[a;b]$ skaidinių aibė,

$$\sigma_{\vec{f}}(P):=\sum_{k=1}^{N}|\vec{f}(x_k)-\vec{f}(x_{k-1})|.$$

Dydis

$$V_{\vec{f}}([a;b]):=\sup\{\sigma_{\vec{f}}(P): P\in\mathcal{P}_1\}$$

vadinamas *pilnąja funkcijos* $\vec{f}$ *variacija intervale* $[a;b]$. Jeigu $V_{\vec{f}}([a;b])\in[0;+\infty)$, tai $\vec{f}$ vadinama *baigtinės intervale* $[a;b]$ *variacijos funkcija*, o visų tokių funkcijų erdvė žymima $BV([a;b];\mathbb{R}^m)$ ($BV([a;b])$, kai $m=1$). Be to, $V_{\vec{f}}([a;a]):=0$.

Jeigu $\vec{f}\in BV([a;b];\mathbb{R}^m)$, tai funkcija $v_{\vec{f}}$,

$$v_{\vec{f}}(x):=V_{\vec{f}}([a;x]),\quad x\in[a;b],$$

vadinama *funkcijos* $\vec{f}$ *pilnosios variacijos funkcija*, o funkcijos v_{f+} ir v_{g-} $(m=1)$,

$$2v_{f+}(x):=\big(v_f+f\big)(x)-f(a),$$
$$2v_{f-}(x):=\big(v_f-f\big)(x)+f(a),\ x\in[a;b],$$

vadinamos *funkcijos* f rtitinkamai *teigiamosios* ir *neigiamosios variacijų funkcijomis.*

2.2. Lema. *1)* $\big(\vec{f}\in BV([a;b];\mathbb{R}^m)\big)\Rightarrow\big(\vec{f}$ *aprėžta intervale* $[a;b]$*);*

2) $\big(\{f_1,f_2\}\subset BV([a;b])\big)\Rightarrow\big(\{f_1+f_2,f_1\cdot f_2\}\subset BV([a;b])\big)$;

3) $\big(\{f_1,f_2\}\subset I([a;b])\big)\Rightarrow\big(f_1-f_2\in BV([a;b])\big)$.

2.3. Lema. *Sakykime, funkcija* $\vec{f}\in BV([a;b];\mathbb{R}^m)$*. Tada*

1) $\forall\{x,y\}\subset[a;b],\ x\leqslant y:\ V_{\vec{f}}([a;y])=V_{\vec{f}}([a;x])+V_{\vec{x}}([x;y])$;

2) $\big(\vec{f}\in C([a;b])\big)\Leftrightarrow\big(v_{\vec{f}}\in C([a;b])\big)$.

Pavyzdžiai. 1) Sakykime, funkcija $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ tenkina sąlygą $\exists P^*:=\{x_k^*: 0\leqslant k\leqslant N^*\}\in\mathcal{P}_1$, jog funkcija f yra monotoninė intervale $[x_{k-1}^*;x_k^*]$, $1\leqslant k\leqslant n$. Įrodysime, kad $f\in BV([a;b])$ ir

$$V_f([a;b])=\sum_{k=1}^{N^*}|f(x_k)-f(x_{k-1}^*)|.$$

► Sakykime, $P':=\{x_k': 0\leqslant k\leqslant N'\}\in\mathcal{P}_1$, $P:=P^*\cup P':=\{x_k: 0\leqslant k\leqslant n\}$. Tada

$$\sigma_f(P'):=\sum_{k=1}^{N'}|f(x_k')-f(x_{k-1}')|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=$$
$$=\sum_{k=1}^{N^*}|f(x_k^*)-f(x_{k-1}^*)|=\sigma_f(P^*).$$

Todėl

$$V_f([a;b]) = \sup\{\sigma_f(P') : P' \in \mathcal{P}_1\} = \sigma_f(P^*) \in [0;+\infty). \qquad \blacktriangleleft$$

2) Rasime funkcijos f,

$$f(x) := 3x^2 - 2x^3, \qquad x \in [-2;2],$$

variacijų funkcijas v_f, v_{f+}, v_{f-} bei $V_f([-2;2])$.
Pagal pilnosios variacijos apibrėžimą ir 1) pavyzdį

$$v_f(x) = \begin{cases} 28 + 2x^3 - 3x^2, & x \in [-2;0], \\ 28 + 3x^2 - 2x^3, & x \in (0;1], \\ 30 + 2x^3 - 3x^2, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

Pagal funkcijų v_{f+} ir v_{f-} apibrėžimus

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2;0], \\ 3x^2 - 2x^3, & x \in (0;1], \\ 1, & x \in (1;2]. \end{cases} \qquad v_{f-}(x) = \begin{cases} 28 + 2x^3 - 3x^2, & x \in [-2;0], \\ 28, & x \in (0;1], \\ 29 + 2x^3 - 3x^2, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

Tuomet

$$V_f([-2;2]) = v_f(2) = 34.$$

VIII.2.1. Raskite funkcijas v_f, v_{f+}, v_{f-} ir pilnąją variaciją $V_f([a;b])$, jeigu:

1) $f(x) = \sin x,\ x \in [0;2\pi]$;

2) $f(x) = |\sin x|, x \in [0;10\pi]$;

3) $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-1;0], \\ x - x^2, & x \in (0;1]; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in [-1;1] \setminus \{0\}; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1-x, & x \in (0;1), \\ 2, & x = 1; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [0;1), \\ 5, & x = 1, \\ x^2, & x \in (1;2); \end{cases}$

7) $f(x) = |x|,\ x \in [-1;1]$;

8) $f(x) = x - [x],\ x \in [0;3]$;

9) $f(x) = x - x^2,\ x \in [-1;1]$;

10) $f(x) = x^2,\ x \in [-1;1]$;

11) $f(x) = x^3 - |x|,\ x \in [-1;1]$;

12) $f(x) = \cos x,\ x \in [0;2\pi]$.

VIII.2.2. Įrodykite, kad $f \notin BV([0;1])$, jeigu:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \in (0;1]; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0;1], \\ 0, & x \in [0;1] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (2n+1)x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2n+1}; \frac{1}{2n}\right], \\ -(2n-1)x + 1, & x \in \left(\frac{1}{2n}; \frac{1}{2n-1}\right], n \in \mathbb{N}; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0;1]; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \operatorname{sgn} \sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0;1]. \end{cases}$

VIII.2.3. Sakykime, funkcija

$$f_{uv}(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^u\sin\frac{1}{x^v}, & x\in(0;1],\ (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+=:E.\end{cases}$$

Raskite aibę $B:=\{(u,v)\in E: f_{uv}\in BV([0;1])\}$.

VIII.2.4. Sakykime, funkcija $f\in BV([a,b])$, funkcija g,

$$g(x)=uf(x)+v,\quad x\in[a;b],\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Įrodykite, kad $V_g([a;b])=|u|V_f([a;b])$.

VIII.2.5. Sakykime, funkcija $f\in BV([a,b])$, funkcija $g\in C([c;d],[a;b])\cap I([c;d])$, $g(c)=a$, $g(d)=b$. Įrodykite, kad

$$V_f([a;b])=V_{f\circ g}([c;d]).$$

VIII.2.6. Sakykime, funkcija $f\in BV([a,b])$. Įrodykite, kad $|f|\in BV([a,b])$.

VIII.2.7. Sakykime, funkcijos $f\in C([a,b])$, $|f|\in BV([a,b])$. Įrodykite, kad $f\in BV([a,b])$. Pateikite pavyzdį, kad be pirmosios sąlygos teiginys neteisingas.

VIII.2.8. Sakykime, funkcija $f\in C([a,b])$, aibė $E\subset[a,b]$ yra baigtinė, $\exists f':[a;b]\setminus E\to\mathbb{R}$ ir $f'\in\mathcal{R}([a;b])$. Įrodykite, kad $f\in BV([a;b])$ ir

$$V_f([a;b])=\int_a^b|f'|.$$

VIII.2.9. Sakykime, funkcija $g\in\mathcal{R}([a;b])$,

$$f(x):=\int_a^x g,\quad x\in[a;b].$$

Įrodykite, kad $f\in BV([a,b])$ ir

$$V_f([a;b])=\int_a^b|g|.$$

VIII.2.10. Įrodykite, kad

$$\mathcal{P}([a;b])\subset BV([a;b]),$$

čia $\mathcal{P}([a;b])$ yra visų polinomų intervale $[a;b]$ aibė.

VIII.2.11. Įrodykite, kad

$$BV([a;b])\subset\mathcal{R}([a;b]).$$

VIII.2.12. Ištirkite, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguoja, ir kaip, reliatyviai ar absoliučiai, ar diverguoja, jeigu:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{V_{\sin([0,n\pi])}}$;

2) $a_n = \dfrac{1}{nV_f\Big(\Big[\frac{1}{(n+1)\pi};\frac{1}{\pi}\Big]\Big)}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0;\frac{1}{\pi})$;

3) $a_n = V_f^3([n;n+1])$, $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \in [1;+\infty)$;

4) $a_n = \dfrac{1}{V_f([0;n])}$, $f(x) = \sin x^2$, $x \in [0;+\infty)$;

5) $a_n = \dfrac{1}{n^4}V_f([0;n\pi])$, $f(x) = x\sin^2 x$, $x \in [0;+\infty)$.

VIII.2.13. Sakykime, $\{f,g\} \subset BV([a;b])$, $M_f := \sup|f|([a;b])$, $M_g := \sup|g|([a;b])$. Įrodykite, kad

1) $\forall c \in \mathbb{R}: V_{cf}([a;b]) = |c|V_f(a;b)$;

2) $V_{f+g}([a;b]) \leqslant (V_f + V_g)([a;b])$;

3) $V_{|f|}([a;b]) \leqslant V_f([a;b])$;

4) $V_{fg}([a;b]) \leqslant M_f V_g([a;b]) + M_g V_f([a;b])$;

5) $V_{\frac{f}{g}}([a;b]) \leqslant \frac{1}{A^2}\big(M_g V_f([a;b]) + M_f V_g([a;b])\big)$, esant sąlygai $\exists A \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in [a;b]: g(x) \geqslant A$.

VIII.2.14. Sakykime, $\{f,g\} \subset BV([a;b])$,

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in [a;b].$$

Įrodykite, kad $h \in BV([a;b])$.

VIII.2.15. Nurodykite pavyzdį, kad būtų $f \in BV([a;b],[c;d])$, $g \in BV([c;d])$, tačiau $g \circ f \notin BV([a;b])$.

VIII.2.16. Sakykime, funkcija $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in (a;+\infty): f \in BV([a;b])$,

$$V_f([a;+\infty)) := \lim_{b\to+\infty} V_f([a;b]) \in [0;+\infty).$$

Įrodykite, kad

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

VIII.2.17. Sakykime, funkcija $f \in BV([0;1])$. Įrodykite, kad

$$\forall n \in \mathbb{N}: \Big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{n}V_f([0;1]).$$

VIII.2.18. Sakykime, funkcija $f \in BV([a;b])$,

$$g(x) := \begin{cases} 0\text{,x=a,} \\ \frac{1}{x-a}\int_0^x f, \quad x \in (a;b]. \end{cases}$$

Įrodykite, kad $g \in BV([a;b])$.

VIII.2.19. Sakykime, funkcija $g \in \mathcal{R}([a;b])$,

$$f(x) := \int_a^x g,\ g_+(x) := \max\{g(x), 0\},\ g_-(x) := -\min\{g(x), 0\},\ x \in [a;b].$$

Įrodykite, kad $f \in BV([a;b])$ ir teisingos lygybės

$$v_f(x) = \int_a^x |g|, \quad v_{f+}(x) = \int_a^x g_+, \quad v_{f-}(x) = \int_a^x g_-, \quad x \in [a;b].$$

VIII.3. Rymano–Styltjeso integralas pagal baigtinės variacijos funjkciją

3.1. Apibrėžimai. Sakykime, funkcijos $\alpha : [a;b] \to \mathbb{R}$ ir $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ tenkina sąlygas:
1) $f \in C([a;b])$, $\alpha \in BV([a;b])$,
arba
2) $f \in BV([a;b])$, $\alpha \in BV([a;b]) \cap C([a;b])$.
Tada funkcija f vadinama *integruojama pagal funkciją* α *intervale* $[a;b]$ *Rymano–Styltjeso prasme*, o dydis

$$\int_a^b f d\alpha := \int_a^b f d\beta - \int_a^b f d\gamma \tag{1}$$

vadinamas *funkcijos* f *Rymano–Styltjeso integralu intervale* $[a;b]$ *pagal funkciją* α; čia $\alpha = \beta - \gamma$, $\{\beta, \gamma\} \subset I([a;b])$, ir, jeigu tenkinamos 2) sąlygos, tai apibrėžiama, kad $\{\beta, \gamma\} \subset C([a;b])$ ir $f := g - h$, $\{g, h\} \subset I([a;b])$. Tuomet (1) dydis užrašomas

$$\int_a^b f d\alpha := \int_a^b g\, d\beta - \int_a^b g\, d\gamma - \int_a^b h\, d\beta + \int_a^b h\, d\gamma. \tag{2}$$

Visų integruojamų pagal funkciją $\alpha \in BV([a;b])$ intervale $[a;b]$ funkcijų erdvė žymima $\mathcal{RS}([a;b];\alpha)$.

3.2. Teorema. *Sakykime, funkcija* $f \in \mathcal{RS}([a;b];\alpha)$. *Tada*
1) $|f| \in \mathcal{RS}([a;b];\alpha)$ *ir teisinga nelygybė*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |f| dv_\alpha,$$

čia v_α *– funkcijos* α *pilnosios variacijos funkcija;*
2) teisinga nelygybė

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M V_\alpha([a;b]),$$

čia $M := \sup|f|([a;b]) \in [0;+\infty)$.

3.3. Integravimo dalimis teorema. *Sakykime, funkcijos* $f \in C([a;b]) \cap BV([a;b])$ *ir* $\alpha \in BV([a;b])$. *Tada* $\alpha \in \mathcal{RS}([a;b];f)$ *ir teisinga lygybė*

$$\int_a^b f d\alpha = \alpha f|_a^b - \int_a^b \alpha df. \tag{3}$$

3.4. Pirmoji tarpinės reikšmės teorema. Sakykime, funkcijos $f \in C([a;b])$ ir $\alpha \in I([a;b])$. Tada $\exists \xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f d\alpha = \big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) f(\xi). \tag{4}$$

3.5. Antroji tarpinės reikšmės teorema. Sakykime, funkcija $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ yra monotoninė, funkcija $\alpha \in C([a;b]) \cap BV([a;b])$. Tada $\exists \xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f d\alpha = \big(\alpha(\xi) - \alpha(a)\big) f(a) + \big(\alpha(b) - \alpha(\xi)\big) f(b). \tag{5}$$

3.6. Kintamojo keitimo teorema. Sakykime, funkcija $g \in C([a;b])$ yra didėjanti, funkcija $f \in \mathcal{R}\big([g(a);g(b)]\big)$. Tada teisinga lygybė

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ g) dg. \tag{6}$$

Pavyzdžiai. 1) Apskaičiuokite $\int_0^3 f d\alpha$, $f(x) = x$, $\alpha(x) = [x] - x$, $x \in [0;3]$.
Kadangi $f \in C([0;3])$, $\alpha \in BV([0;3])$ $(V_\alpha([0;3]) = 6)$, tai $f \in \mathcal{RS}([0;3];\alpha)$. Apibrėžkime $\beta(x) := [x]$, $\gamma(x) := x$, $x \in [0;3]$. Tada $\{\beta, \gamma\} \subset I([0;3])$, $\alpha = \beta - \gamma$. Pagal (1) sąryšį

$$\int_0^3 f d\alpha = \int_0^3 f d\beta - \int_0^3 f d\gamma = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

2) Sakykime, funkcija $f \in BV([0;2\pi])$ ir $f(0) = f(2\pi)$. Įrodykite, kad $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\max\left\{\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx\right|, \left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right|\right\} \leqslant \frac{1}{n} V_f([0;2\pi]).$$

► Apibrėžkime funkcijas α_1 ir α_2,

$$\alpha_1(x) := \frac{\sin nx}{n}, \quad \alpha_2(x) = -\frac{\cos nx}{n}, x \in [0;2\pi].$$

Tos funkcijos $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathcal{R}([0; 2\pi])$ ir

$$V_{\alpha_1}([0; 2\pi]) = 4 = v_{\alpha_2}([0; 2\pi]).$$

Pagal integravimo dalimis formulę

$$\int_0^{2\pi} \alpha_1 df = \alpha_1 f|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f d\alpha_1 = -\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha_2 df = \alpha_2 f|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f d\alpha_2 = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Kadangi

$$\left| \int_0^{2\pi} \alpha_k df \right| \leqslant \frac{1}{n} V_f([0; 2\pi]),$$

tai teiginį įrodėme. ◀

VIII.3.1. Apskaičiuokite $\int_a^b f d\alpha$, jeigu:

1) $f(x) = x$, $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = -1, \\ 1, & x \in (-1; 2], \\ -1, & x \in [2; 3]; \end{cases}$

2) $f(x) = x^2$, $\alpha(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \\ 2, & x = \frac{3}{2}; \\ -2, & x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right]; \end{cases}$

3) $f(x) = x$, $\alpha(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$;

4) $f(x) = x^2$, $\alpha(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in [n; n+1), n \in \{0; 1; \cdots; N-1\}, N \in \mathbb{N}, \\ (-1)^N, & x = N; a = 0, b = N; \end{cases}$

5) $f(x) = x^2$, $\alpha(x) = x^2 \widehat{\alpha}(x)$, čia $\widehat{\alpha}$ iš 4) užduoties, $a = 0$, $b = N \in \mathbb{N}$;

6) $f(x) = 1 + x$, $\alpha(x) = x^2 \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, $a = 0$, $b = 2N$, $N \in \mathbb{N}$.

VIII.3.2. Sakykime, funkcijos $\{f, g\} \subset C([a; b])$, $\alpha \in BV([a; b])$,

$$\beta(x) := \int_a^x f d\alpha, \quad x \in [a; b].$$

Įrodykite, kad $\beta \in BV([a; b])$ ir teisinga lygybė

$$\int_a^b g d\beta = \int_a^b g f d\alpha.$$

VIII.3.3. Sakykime, funkcija $\alpha \in BV([a; b])$, funkcijos $\{f, g\} \subset \mathcal{RS}([a; b]; \alpha)$. Įrodykite, kad teisinga *Švarco nelygybė*

$$\left(\int_a^b fg\, dx \right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 d\alpha \cdot \int_a^b g^2 d\alpha.$$

ATSAKYMAI

I. REALIEJI SKAIČIAI.

I.1. Veiksmai su aibėmis.

I.1.1. $A \cup B = \{1;2;3;5;7;15\}$, $(A \cup C) = \{1;2;3;4;5;6;8;15\}$, $B \cap C = \{2\}$, $(A \cup C) \cap B = \{2;3;5\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

I.1.2. $A = X$, $B = \emptyset$.

I.1.3. 8.

I.1.4. $A \cap B = \{12(n-1)+6 : n \in \mathbb{N}\}$.

I.1.9. 1)$U \subset V$. 2) $U = V$. 3) $U = V$.

I.1.10. 1) $\emptyset$. 2) $\{2;3;4;5;6\}$. 3) $\{(2;2),(3;2)\}$. 4) $\{(2;2),(2;3)\}$.

I.1.11. 1) $n+m-k$. 2) nm.

I.1.12. 1) $A \subset (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$. 2) $A \subset (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$. 3) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

I.1.13. 1) $A \cup B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant |x|\}$, $A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$, $A \setminus B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -|x|\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, x \in \mathbb{R}_+\}$, $B \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -|y|\}$. 2) $A \cup B = B \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, |x| > \frac{1}{2}\}$ $A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, |x| \leqslant \frac{1}{2}\}$, $A \setminus B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, |x| > \frac{1}{2}\}$, $B \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1, y \neq x\}$.

I.1.14. 1) $(m;+\infty)$. 2) $(m;m+1)$. 3) $(0;+\infty)$. 4) $\emptyset$. 5) $(1;+\infty) \setminus \mathbb{N}$. 6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

I.1.15. 1) $\cup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} \cup \{(0;0)\}$, $\cup_{t \in [-1;1]} A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geqslant |x|\}$, $\cap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \cap_{t \in [-1;1]} A_t = \{0;0\}$. 2) $\cup_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x \neq 0\} \cup \{(0;0)\}$, $\cap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \{(0;0)\}$.

I.2. Funkcijos sąvoka.

I.2.1. 1) $[1;2)$. 2) $(-\infty;-\sqrt{2}+1] \cup (1;\sqrt{2}+1]$. 3) $(-1;0) \cup (0;1) \cup (2;+\infty)$. 4) $(-6;-\frac{5}{3}\pi] \cup [-\frac{\pi}{3};\frac{1}{6})$.

I.2.2. 1) $\{0\}$. 2) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. 3) $(-\infty;-2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab};+\infty)$. 4) $[-2;2]$.

I.2.4. 1) $f \circ g(x) = g \circ f(x) = |x|$, $x \in [-1;1]$. 2) $f \circ g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}_+$; $g \circ f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. 3) $f \circ g(x) = x$, $x \geqslant 0$; $g \circ f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $f \circ g(x) = (x+5)^5$; $g \circ f(x) = x^5 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

I.2.5. 1) $-\sqrt{x+1}$. 2) x^4, $x \in [0;+\infty)$. 3) $\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$. 4) $-1+\sqrt{1+x}$, $x \in [0;+\infty)$, ir $1-\sqrt{1-x}$, $x \in (-\infty;0)$.

I.2.6. 1) $\emptyset$. 2) $\{-2;1\}$. 3) $\mathbb{Z} \setminus \{-1;0\}$. 4) $\{-1;0\}$.

I.2.7. 1) Atvaizdis aibėje. 2) Bijekcija. 3) Injekcija. 4) Bijekcija. 5) Siurjekcija.

I.2.8. 1) n^m. 2) $m!C_n^m$, $m \leqslant n$; 0, kai $n < m$. 3) $m!$, $m = n$; 0, kai $m \neq n$.

I.2.9. $x = \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} 1, & n\text{–nelyginis}, \\ \frac{n}{2}, & n\text{–lyginis}; \end{cases}$ jeigu aibė X yra baigtinė, tai toks atvaizdis neegzistuoja.

I.3. Matematinė indukcija.

I.3.3. 1) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, kai $x\in(0;2\pi)$; 0, kai $x\in\{0;2\pi\}$. 2) $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$, kai $x\in(0;2\pi)$; $2n+1/over2$, kai $x\in\{0;2\pi\}$. 3) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$, kai $x\in(0;\pi)\cup(\pi;2\pi)$; 0, kai $x\in\{0;\pi;2\pi\}$. 4) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, kai $x\in(0;\pi)\cup(\pi;2\pi)$; n, kai $x\in\{0;2\pi\}$; $-n$, kai $x=\pi$. 5) $(n+2)2^{n-1}$. 6) 2^{2n-1}. I.3.4. 1) C_{16}^6. 2) -7. 3) -74. 4) 378. 5) C_{16}^4.

I.4. Realieji skaičiai.

I.4.1. 1) $\min E=0$, $\max E=\frac{3}{2}$. 2) $\min E=\frac{1}{2}$, $\sup E=1$. 3) $\inf E=0$, $\max E=\frac{9}{8}$. 4) $\inf E=0$, $\max E=\frac{9}{2}$. 5) $\min E=\frac{1}{4}$, $\sup E=3$. 6) $\min E=4$, $\sup E=+\infty$. 7) $\min E=-\frac{1}{4}$, $\max E=\frac{1}{4}$. 8) $\inf E=0$, $\sup E=1$. 9) $\inf E=-1$, $\sup E=1$. 10) $\inf E=-1$, $\sup E=1$. 11) $\inf E=0$, $\sup E=1$.

I.4.2. 1) 1. 2) -1. 3) 0. 4) 1.

I.4.3. 1) $\min E=0$, $\sup E=1$. 2) $\min E=0$, $\sup E=1$. 3) $\min E=0$, $\sup E=1$.

I.4.9. 1) $\inf F=(\inf E)^3$, $\sup F=(\sup E)^3$. 2) $\inf F=(\inf G)^2$, $\sup F=(\sup G)^2$, čia $G:\{|x|:x\in E\}$. 3) $\inf F=\inf E+a$, $\sup F=\sup E+a$. 4) Jeigu $a\in\mathbb{R}_+$, tai $\inf F=a\inf E$, $\sup F=a\sup E$; jeigu $a=0$, tai $\inf F=\sup F=0$; jeigu $a\in(-\infty;0)$, tai $\inf F=a\sup E$, $\sup F=a\inf E$.

II. RIBA

II.1. Sekos riba.

II.1.3. 1) 0. 2) 0. 3) $\frac{1}{3}$. 4) $\frac{1-b}{1-a}$. 5) $\frac{1}{2}$. 6) $\frac{1}{2}$. 7) $\frac{1}{3}$. 8) $\frac{4}{3}$. 9) 3. 10) 1. 11) 2. 12) 1. 13) $\frac{1}{12}$. 14) $\frac{1}{8}$. 15) $\frac{1}{m!m}$. 16) 1. 17) $\frac{2}{3}$.

II.1.4. 1) 0, kai $a\neq 0$; 1, kai $a=0$. 2) $a-\frac{b}{2}$. 3) $\frac{a}{2}$. 4) $\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-\frac{5}{6}$. 5) 1.

II.1.8. Jeigu $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, tai $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$; jeigu $a\in\{-\infty;0;+\infty\}$, tai seka $\{\frac{x_{n+1}}{x_n}:n\in\mathbb{N}\}$ gali turėti ribą, bet gali ir neturėti jos. Išnagrinėkite pavyzdžius $(\frac{1}{n})$ ir $(x_n), x_n=\frac{1}{n}$, kai n-nelyginis, $x_n=\frac{1}{n^z}$, kai n-lyginis.

II.1.10. Seka (x_n+y_n) diverguoja; seka (x_ny_n) gali konverguoti, bet gali ir diverguoti. Išnagrinėkite pavyzdžius $\dfrac{\left((-1)^{n-1}\right.}{\left.n\right)}$, $((-1)^{n-1})$ bei $((-1)^{n-1}n)$.

II.1.11. Sekos gali konverguoti, bet gali ir diverguoti. Išnagrinėkite pavyzdžius: a) $x_n=1+(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n-1}$; b) $x_n=1+(-1)^n$, $y_n=(-1)^n$; c) $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n-1}$; d) $x_n=(-1)^n$, $y_n=n^2$.

II.1.12. Jeigu seka (y_n) yra aprėžta, tai seka (x_ny_n) yra nykstama; jeigu seka (y_n) neaprėžta, tai seka (x_ny_n) gali būti nykstama, bet gali ir nebūti tokia. Išnagrinėkite pavyzdžius: a) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\sqrt{n}$; b) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=(-1)^nn$.

II.2. Monotoninės sekos. Posekiai.

II.2.1. 1) $N=10$. 2) $N=5$. 3) $N=3$. 4) $N=1$. 5) $N=1$.

II.2.2. 1) $E_1=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$, $E_2=[0;+\infty)$. 2) $E_1=[-2;2]$, $E_2=[0;+\infty)$. 3) $E_1=(-\infty;0]$, $E_2=\mathbb{R}$. 4) $E_1=[0;1]$, $E_2=\mathbb{R}$.

II.2.4. 1) 2. 2) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a})$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{1}{3}$. 6) 2. 7) $\frac{1}{2}$.

II.2.5. Jeigu seka (x_n) yra nemažėjanti, tai $\forall n\in\mathbb{N}: x_1\cdots x_n\leqslant x_{n+1}^n$, o ta nelygybė ekvivalenti nelygybei $(\prod_{k=1}^n x_k)^{\frac{1}{n}+1}\leqslant\prod_{k=1}^{n+1}x_k$.

II.2.7. Panaudokite 5 teiginį.

II.2.8. $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $n\in[m^2;m^2+2m]: x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^{\sqrt{k}}}\leqslant x_{m^2+2m}=\sum_{l=1}^m\sum_{k=l^2}^{l^2+2l}\frac{1}{2^{\sqrt{k}}}$ $<\sum_{l=1}^m\frac{2l+1}{2^l}=: s_m$, $s_m-\frac{1}{2}s_m=\frac{5}{2}-\frac{2m+5}{2^{m+1}}$, $s_m=5-\frac{2m+5}{2^m}$. Todėl $x_n<5$, $n\in\mathbb{N}$, seka (x_n) didėjanti ir aprėžta, taigi ji konverguoja.

II.2.9. Naudodami Bernulio nelygybę įrodykite, kad $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{x_n}{x_{n+1}}>1$. Kadangi $(1+\frac{1}{n})^n\nearrow e$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\searrow e$, tai $(1+\frac{1}{n})^{n^2}=((1+\frac{1}{n})^n)^n<((1+\frac{1}{n+1})^{n+1})^n=(1+\frac{1}{n+1})^{n^2+n}<(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$, ir seka (y_n) yra didėjanti. Be to, $\forall n\in\mathbb{N}: (1+\frac{1}{n})^n\geqslant 2$, taigi $(1+\frac{1}{n})^{n^2}\geqslant 2^n$.

II.2.10. Jeigu $a\in\mathbb{R}_+$, tai $\forall\varepsilon\in(0;a)\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N: a-\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}<a+\varepsilon$; taigi $\forall k\in\mathbb{N}: x_N(a-\varepsilon)^k<x_{N+k}<x_N(a+\varepsilon)^k$, $a-\varepsilon\leqslant\underline{\lim}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n}\leqslant a+\varepsilon$ ir $\exists\lim\sqrt[n]{x_n}=a$. Analogiškai nagrinėjami atvejai $a\in\{0;+\infty\}$. Pavyzdys: $x_n=\begin{cases}\frac{1}{k}, n=2k,\\ \frac{1}{2k-1}, n=2k-1, k\in\mathbb{N}.\end{cases}$ Tuomet $\lim\sqrt[n]{x_n}=1$, $\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}=2$, taigi $\overline{\exists}\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

II.2.11. 1) 1. 2) e^{-2}. 3) e^3. 4) 1.

II.2.12. 1) e^2. 2) $\sqrt{e}$. 3) 0. 4) 1.

II.2.13. Panaudokite nelygybę $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

II.2.14. 1) $\ln 2$. 2) $\frac{1}{2}\ln 2$. 3) 1. 4) 2. 5) $\frac{1}{2}$. 6) $\ln 2$.

II.2.15. Įrodykite, kad (x_n) yra Koši seka.

II.2.16. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{2^p}{p+1}$. 3) 2. 4) $\frac{a}{a-1}$. 5) $\frac{1}{a-1}$. 6) $\frac{2}{3}$. 7) $\frac{2}{5}$. 8) 0.

II.2.17. 1) $\{-2;2\}$. 2) $\{-\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. 3) $\{2;3\}$. 4) $\{e^{-1};e\}$. 5) $\{\sin\frac{sp}{q}\pi : s\in\mathbb{Z}, \{0\leqslant s\leqslant q-1\}$, kai $\mathbb{N}\cup\{0\}\ni p$-lyginis; $\{\sin\frac{sp}{q}\pi : s\in\mathbb{Z}, -q+1\leqslant s\leqslant q-1\}$, kai $\mathbb{N}\ni p$-nelyginis; čia $r=\frac{p}{q}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $(p,q)=1$. Jeigu $r<0$, tai reiktų pasinaudoti tuo, kad sin yra nelyginė funkcija. 6) $[0;1]$. Panaudokite tai, kad $[\sqrt{n}]=k$, $n\in[k^2;k^2+2k]$. 7) $\{\frac{sp}{q} : s\in\mathbb{Z}, 0\leqslant s\leqslant q-1\}$, čia $r=\frac{p}{q}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$. 8) $[0;1]$. 9) $[0;1]$. 10) $\{1;5\}$.

II.2.18. Jeigu $a\neq b$, čia $a:=\lim x_{2n-1}$, $b:=\lim x_{2n}$, tai seka (x_n) ribos neturi. Jeigu $a=b$, tai $\exists\lim x_n a$.

II.2.19. 1) Sunumeravę begalinės lentelės (matricos) (a_{mn}), $a_{mn} = \frac{1}{m}$, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ elementus a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, $a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots$, turėsime nurodytąją seką. 2) $x_n = a_{k+1}$, $n = pm + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 3) $x_n = (-1)^n n$. 4) $x_n = (1 + (-1)^n)n$. 5) Aibė $\mathbb{Q}$, kurios elementai sunumeruoti (kuria nors tvarka).

II.2.20. 1) Taškas 0 turi būti daline riba. 2) Taškai 0 ir 1 turi būti dalinėmis ribomis. 3) Taškai $-\infty$ ir $+\infty$ turi būti dalinėmis ribomis. 4) Kaip ir 3) atveju.

II.2.21. Egzistuoja $(x_n + y_n)$ toks posekis $(x_{n_r} + y_{n_r})$, jog $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \lim(x_{n_r} + y_{n_r})$ posekiai (x_{n_r}) (y_{n_r}) turi ribas. Todėl $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \lim x_{n_r} + \lim y_{n_r} \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$. Egzistuoja sekos $(x_n + y_n)$ toks posekis $(x_{m_q} + y_{m_q})$, jog posekiai (x_{m_q}) ir (y_{m_q}) turi ribas ir $\lim x_{mq} = \underline{\lim}\, x_n$. Todėl $\underline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \lim(x_{m_q} + y_{m_q}) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_{m_q} \leqslant \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$. Analogiškai įrodoma, kad teisingas ir antrasis sąryšis. Pavyzdys: $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}$, $y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2 \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

II.2.22. Įrodoma, kaip ir 21 teiginys. Pavyzdys: $x_n = 2 + (-1)^n$, $y_n = 2 + (-1)^{n-1} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

II.2.23. Pirmoji lygybė išplaukia iš 21 teiginio, o antroji — iš 22 teiginio.

II.2.24. Jeigu teisinga pirmoji lygybė, tai, imdami $y_n = -x_n$, $n \in \mathbb{N}$, gautume $\underline{\lim}\, x_n - \overline{\lim}\, x_n = 0$, t.y. seka (x_n) konverguoja. Jeigu teisinga antroji lygybė, tai, imdami $y_n = -1$, $n \in \mathbb{N}$, gautume $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, t.y. $\exists \lim x_n$.

II.2.25. Kadangi $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}_+$ ir $\overline{\lim} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$, tai $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, t.y. seka (x_n) konverguoja.

II.2.26. Jeigu $\beta := \overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, tai $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \beta$. Jeigu $\beta \in [0; +\infty)$, tai $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geqslant N$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \beta + \varepsilon$. Taigi $\forall k \in \mathbb{N}$: $x_{N+k} < x_N(\beta + \varepsilon)^k$ ir $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \beta$. Analogiškai įrodytume, kad $\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{x_n}$.

II.2.27. Įrodoma analogiškai kaip ir 26 teiginys.

II.2.28. Įrodoma analogiškai kaip ir 26 teiginys.

II.2.29. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \leqslant n x_1$, tai $\frac{x_n}{n} \leqslant x_1$, taigi seka $(\frac{x_n}{n})$ iš viršaus aprėžta. Sakykime, $\alpha := \inf\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty; x_1]$. Jeigu $\alpha \in (-\infty; x_1]$, tai $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\alpha \leqslant \frac{x_N}{N} < \alpha + \varepsilon$. Kadangi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists! p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists! q \in \{0; 1; \ldots; N-1\}$: $x_n = pN + q$, tai $\alpha < \frac{x_n}{n} < \frac{p x_N + x_q}{pN + q} = \frac{x_N}{N} \frac{pN}{pN+q} + \frac{x_q}{pN+q} \leqslant (\alpha + \varepsilon)\frac{pN}{pN+q} + \frac{x_q}{pN+q}$. Taigi $\alpha \leqslant \underline{\lim} \frac{x_n}{n} \leqslant \overline{\lim} \frac{x_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon$ ir $\exists \lim \frac{x_n}{n} = \alpha$. Analogiškai nagrinėjamas atvejis $\alpha = -\infty$.

II.2.30. Seka (x_n) konverguoja, todėl $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ $\exists N$ $\forall n \geqslant N$: $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Konverguojanti seka yra aprėžta, todėl $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $|x_n - a| \leqslant M$. Seka $\{p_{nk} : n \in \mathbb{N}\}$, $k \in \mathbb{N}$, yra nykstama, todėl $\exists \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $N_1 > N$ $\forall n \geqslant N_1$ $\forall k \in \{1; \ldots; N\}$: $p_{nk} < \frac{\varepsilon}{2MN}$. Taigi $\forall n \geqslant N_1$: $|y_n - a| = |\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x_k - a)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} p_{nk}|x_k - a| + \sum_{k=N+1}^{n} p_{nk}|x_k - a| \leqslant MN\frac{\varepsilon}{2MN} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} p_{nk} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1 + \sum_{k=1}^{n} p_{nk}) = \varepsilon$, t.y. $\exists \lim y_n = a$.

II.2.31. Galima naudoti Teplico teoremą apibrėžus $p_{nk} := \frac{\frac{1}{x_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1; \cdots; n\}$, bet reikia įrodyti, kad $\forall k \in \mathbb{N} : \exists \lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0$. Todėl paprasčiau naudoti apatinę ir viršutinę ribas. Jeigu $\lim x_n =: a \in \mathbb{R}_+$, tai $\forall \varepsilon \in (0; a) \exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geqslant N$:

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. Todėl $\forall n \geqslant N: \frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a-\varepsilon}$, $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k} + \frac{n-N}{a+\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k} + \frac{n-N}{a-\varepsilon}$, $\frac{n(a-\varepsilon)}{M(a-\varepsilon)+n-N} \leqslant y_n \leqslant \frac{n(a+\varepsilon)}{M(a+\varepsilon)+n-N}$, čia $M := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k} \in \mathbb{R}_+$. Todėl $a-\varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n \leqslant a+\varepsilon$, t.y. $\exists \lim y_n = a$. Analogiškai nagrinėjami atvejai $a \in \{0; +\infty\}$.

II.2.32. Seka konverguoja, kai $a \in [\frac{1}{e^e}; e^{\frac{1}{e}}]$: $\exists \lim x_n = +\infty$, kai $a \in (e^{\frac{1}{e}}; +\infty)$; $\overline{\exists} \lim x_n$, kai $a \in (0; \frac{1}{e^e})$.

II.2.33. Funkcijos f, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}})^2 + \sqrt{a}$, $x \in \mathbb{R}_+$, mažiausioji reikšmė įgyjama taške $\sqrt{a}$. Todėl $\forall b \in \mathbb{R}_+$ seka $\{x_n : n \geqslant 2\}$ yra nedidėjanti, $x_n \geqslant \sqrt{a}$, $n \geqslant 2$ ir $\exists \lim x_n =: c \in [\sqrt{a}; x_2]$. Taigi $\frac{1}{2}(c + \frac{a}{c}) = c$ ir $c = \sqrt{a}$.

II.2.34. Seka $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ diverguoja, o seka $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ konverguoja, ir abi jos tenkina nurodytąją sąlygą.

II.2.35. Kadangi $x_k - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2}$, $k \geqslant 3$, tai $x_3 - x_2 = -\frac{b-a}{2}$, $x_4 - x_3 = \frac{b-a}{2^2}, \dots, x_k - x_{k-1} = (-1)^{k-2} \frac{b-a}{2^{k-2}}, \dots$ Taigi $x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})$ $= b - \frac{b-a}{3}(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}})$, $n \geqslant 3$, ir $\lim x_n = \frac{a+2b}{3}$.

II.2.36. Kadangi $\forall u, v \in [0; +\infty) : \sqrt{uv} \leqslant \frac{u+v}{2}$, tai $x_n \leqslant y_n$, $n \geqslant 2$. Todėl $x_{n+1} \geqslant x_n$, $y_{n+1} \leqslant y_n$, $n \geqslant 2$, sekos $\{x_n : n \geqslant 2\}$ ir $\{y_n : n \geqslant 2\}$ yra monotoninės ir aprėžtos. Taigi jos konverguoja ir, perėję lygybėje $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, prie ribos, kai $n \to \infty$, randame, kad $\lim x_n = \lim y_n$.

II.2.37. Lygtis $x = \frac{a}{1+x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, turi vienintelį sprendinį $x_0 = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}$. Jeigu $x_1 = x_0$, tai $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = x_0$. Jeigu $x_1 \in (x_0; +\infty)$, tai posekis (x_{2n-1}) yra mažėjantis, posekis (x_{2n}) didėjantis ir $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = x_0$. Jeigu $x_1 \in (0; x_0)$, tai posekis (x_{2n-1}) yra didėjantis, o posekis (x_{2n})– mažėjantis ir vėl $\lim x_{2n-1} = \lim x_{2n} = x_0$.

II.2.38. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

II.2.39. 1) $f(x) = 1$, kai $x \in [0; +\infty) \setminus \{1\}$, ir $f(1) = \frac{3}{5}$. 2) f(x)=1, kai $x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n\pi - \frac{\pi}{6}; n\pi + \frac{\pi}{6}]$, ir $f(x) = 4\sin^2 x$, kai $x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} ((2n-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}; (2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$. 3) $f(x) = 1$, kai $x \in [0; 1]$, ir $f(x) = x$, kai $x \in (1; +\infty)$. 4) $f(x) = 1$, kai $x \in [0; 1]$; $f(x) = x$, kai $x \in (1; 2]$; $f(x) = \frac{x^2}{2}$, kai $x \in (2; +\infty)$. 5) $f(x) = (2x-2)^2$, kai $x \in [0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{9+\sqrt{17}}{8}; +\infty$; $f(x) = 1$, kai $x \in (\frac{1}{2}; 1]$; $f(x) = x$, kai $x \in (1; \frac{9+\sqrt{17}}{8})$. 6) $f(x) = \cos^2 x$, kai $x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n\pi - \frac{\pi}{4}; n\pi + \frac{\pi}{4}]$, ir $f(x) = \sin^2 x$, kai $x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n\pi + \frac{\pi}{4}; n\pi + \frac{3\pi}{4})$. 7) $f(x) = [\frac{1}{x}] - \frac{1}{2}\chi_{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}(x)$, kai $\chi_E(x) := 1$, kai $x \in E \subset \mathbb{R}$, ir $\chi_E(x) := 0$, kai $x \in \mathbb{R} \setminus E$ (funkcija χ_E vadinama aibės E *charakteristine funkcija*).

II.3. Skaičiosios aibės.

II.3.1. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in A$. 2) $f(x) = a + (b-a)x$, $x \in A$. 3) $f(x) = e^x$, $x \in A$.

II.3.2. 1) Atkarpa, jungianti kvadrato kraštinės tašką su centru $(0,0)$ ir sudaranti kampą α su teigiamąja horizontaliosios ašies kryptimi ir apskritimo spindulys, sudarantis tokį pat kampą su atitinkama kryptimi, yra ekvivalenčiosios aibės. Analogiški yra 2) ir 3) atvejai.

II.3.3. 1) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

II.3.7. 1) Gali; pavyzdžiui, visų koncentrinių apskritimų aibė. 2) Negali. Bet kuri tokia aibė A bus baigtinė arba skaiti. Iš tikrųjų $\forall T \in A$ priskirsime tokius tris taškus plokštumoje M, N ir P su racionaliosiomis koordinatėmis, kad atkarpa $[MN]$ kirstų raidės T kojelę, o atkarpos $[MP]$ ir $[NP]$ kirstų tos raidės "ataugas". Tuomet kiekvienam tokių taškų trejetui bus priskirta tik viena arba nė vienos T raidės. Jeigu vienam tokiam trejetui būtų priskirtos dvi raidės, tai nesunkiai galima įrodyti, kad jos kirstųsi. Taigi tarp aibės A ir kurios nors taškų trejetų aibės galima apibrėžti bijekciją. Kadangi tokių taškų trejetų aibė yra baigtinė arba skaiti, tai tokia ir aibė A.

II.3.8. 2^n.

II.4. Funkcijos riba.

II.4.1. 1) $\emptyset$. 2) $[0;1]$. 3) $[0;1]$. 4) $[0;1]$. 5) $[0;1]$. 6) $[-1;1]$.

II.4.4. 1) $+\infty, 0, +\infty$. 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. 3) $1, 0, 1$. 4) $25, 0, 25$. 5) $1, 0, 1$. 6) $1, 0, 1$. 7) $+\infty, 2, +\infty$. 8) $2, -1, 1$. 9) $2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$. 10) $\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4$. 11) a) $1, 0, 1$; b) $2, 0, 2$. 12) $1, 0, 1$. 13) $\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

II.4.5. a) $f_1(x) = 1 - \cos \pi x$, $f_2(x) = x^2$, $x \in [-1;1]$; b) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

II.4.7. 1) 2. 2) $+\infty$. 3) 0. 4) 1. 5) 1. 6) $e - e^{-1}$.

II.4.8. 1) 0, kai $n < m$; $\frac{a_0}{b_0}$, kai $n = m$; $+\infty \cdot \operatorname{sgn} \frac{a_0}{b_0}$, kai $n > m$. 2) 6. 3) 10. 4) $\frac{nm}{2}(n-m)$. 5) $(\frac{3}{2})^{30}$. 6) $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. 7) $-\frac{1}{2}$. 8) $\frac{1}{2}$. 9) $\frac{1}{4}$. 10) $\frac{n(n+1)}{2}$. 11) $\frac{m}{n}$. 12) $\frac{n(n+1)}{2}$. 13) $\frac{m-n}{2}$. 14) $\frac{1}{2}$. 15) $\frac{n(n+1)}{2}$. 16) 1.

II.4.9. 1) 1. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3) $\frac{4}{3}$. 4) -2. 5) $f(+0) = +\infty$; $f(a+0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, $a \in \mathbb{R}_+$. 6) $\frac{1}{144}$. 7) $\frac{1}{4}$. 8) $\frac{1}{n}$. 9) -2. 10) $\frac{1}{4}$. 11) $\frac{2}{27}$. 12) $\frac{112}{27}$. 13) $-\frac{1}{2}$. 14) -2. 15) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. 16) $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$. 17) $\frac{a_1}{m}$.

II.4.10. 1) $\frac{n}{m}$ 2) $\frac{1}{n!}$. 3) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $-\frac{1}{4}$. 6) $\frac{2}{3}$. 7) 2. 8) $\frac{4}{3}$. 9) 2^n. 10) $2n$. 11) $\frac{2\sqrt[n]{\alpha}}{n\alpha}$.

II.4.11. 1) $\lim_{t\to 0} x_1(t) = -\infty$, $\lim_{t\to 0} x_2(t) = -\frac{c}{b}$, kai $b \in \mathbb{R}_+$; $\lim_{t\to 0} x_1(t) = -\frac{c}{b}$, $\lim_{t\to 0} x_2(t) = +\infty$, kai $b \in (-\infty; 0)$.

II.4.12. 1) $\alpha = 1$, $\beta = -1$. 2) $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$. 3) $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$. 4) $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$. 5) $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$. 6) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = \alpha - 1$. 7) $\alpha = 2$, $\beta = 1$. 8) $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2}$. 9) $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$ arba $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

II.4.13. 1) 5. 2) 0. 3) $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{1}{2}$. 6) $\frac{1}{\alpha}$. 7) $\frac{1}{2}$. 8) $\frac{2}{\pi}$. 9) -3. 10) 14. 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 12) -24. 13) $\frac{-\cos 2\alpha}{\cos^4 \alpha}$. 14) $\frac{3}{4}$.

II.4.14. 1) $\sqrt{2}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) $\frac{4}{3}$. 4) $-\frac{1}{12}$. 5) 0. 6) 3. 7) 0. 8) $4\sqrt{2}$. 9) $\frac{1}{3}$. 10) $\frac{3}{2}$. 11) $\frac{1}{24}$. 12) $\frac{13}{6}$.

II.4.15. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 3) 1. 4) 0. 5) 0. 6) 1. 7) 1. 8) e^{-2}. 9) $e^{2\alpha}$. 10) 0, kai $\alpha < \gamma$; $+\infty$, kai $\alpha > \gamma$; $e^{\frac{\beta-\delta}{\alpha}}$, kai $\alpha = \gamma$. 11) e. 12) e^{-1}. 13) 1. 14) $e^{\operatorname{ctg} a}$. 15) $e^{\frac{3}{2}}$. 16) e^{-1}. 17) 1. 18) e^{-2}. 19) e. 20) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

II.4.16. 1) 0. 2) $\frac{1}{5}$. 3) -2. 4) $\frac{3}{2}$. 5) $\frac{3}{2}$. 6) $\frac{2\alpha}{\beta}$. 7) $(\frac{\alpha}{\beta})^2$. 8) e^2. 9) $a^a \ln \frac{a}{e}$. 10) $a^a \ln ae$. 11) $\frac{2}{3}$. 12) 1. 13) $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$. 14) $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$. 15) $a^{a^a \ln a}$. 16) $\ln^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$. 17) $-\ln 2$.

II.4.17. 1) $-\frac{\pi}{2}$. 2) $\frac{\pi}{3}$. 3) $-\frac{\pi}{2}$. 4) $\frac{3\pi}{4}$. 5) 2. 6) $\frac{1}{2}$. 7) 1. 8) $-\frac{\pi}{6}$.

II.4.18. 1) $\frac{1}{18}$. 2) $2\operatorname{sh}\frac{1}{2}$. 3) $\ln 2$. 4) 1. 5) 1. 6) -4. 7) $\frac{25}{2}$. 8) 2. 9) $\ln 2$. 10) $e^{\frac{3}{2}}$.

II.4.19. 1) $x+\frac{a}{2}$. 2) $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. 3) e^{x+1}. 4) $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 5) $\ln x$. 6) $\ln x$. 7) 0. 8) e^x. 9) e^x. 10) 0, kai $x \in [0;1)$; $\frac{1}{2}$, kai $x = 1$; 1, kai $x \in (1;+\infty)$. 11) -1, kai $x \in (-1;1) \setminus \{0\}$; 0, kai $x \in \{-1;1\}$; 1, kai $x \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]$. 12) $|x|$. 13) 1, kai $x \in [0;1]$; x, kai $x \in (1;+\infty)$. 14) 0, kai $x \in [0;2)$; $2\sqrt{2}$, kai $x = 2$; x^2, kai $x \in (2;+\infty)$. 15) 0, kai $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; 1, kai $x \in \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. 16) $\ln 2$, kai $x \in [0;2]$; $\ln x$, kai $x \in (2;+\infty)$. 17) 0, kai $x \in (-1;1]$; $\frac{\pi}{2}(x-1)$, kai $x \in (1;+\infty)$; $\overline{\exists} \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} f_n(x)$, kai $x \in (-\infty;-1]$. 18) 1, kai $x \in (-\infty;-1]$; e^{x+1}, kai $x = (-1;+\infty)$. 19) 0. 20) $\frac{1}{1-x}$. 21) 1, kai $x = 0$; $\frac{\sin x}{x}$, kai $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 22) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4x})$.

II.4.20. 1) $1;2$. 2) $(-1)^{a-1};(-1)^a$. 3) $1;0$. 4) $\overline{\exists} f(-0);\pi$. 5) $0;0$. 6) $0;+\infty$. 7) $\frac{3}{2};\frac{1}{4}$. 8) $1;-1$. 9) $\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}$. 10) $0;\frac{1}{3}$. 11) $1;+\infty$. 12) $0;1$. 13) $3;2$.

II.4.21. 1) 1_1), 1_3) ir 1_4) neegzistuoja. 1_2) 1. 2) 2_1) neegzistuoja. 2_2) 0.

II.4.22. 1) $-1;2$. 2) $-2;2$. 3) $2;e$. 4) $-1;1$. 5) $0;+\infty$. 6) $\frac{1}{2};2$. 7) $0;+\infty$. 8) $\frac{1}{e};e$. 9) $0;\pi$. 10) $-\frac{1}{2};+\infty$. 11) $-3;3$. 12) $-1;0$.

II.4.26. 1) $\frac{1}{6}$. 2) $\frac{a}{2}$. 3) $\frac{1}{2}\ln a$. 4) $\sqrt{e}$. 5) $e^{-\frac{a^2}{6}}$.

II.4.27. 1) 0. 2) e^2. 3) $\sqrt[\alpha]{\beta}$. 4) $\sqrt{\alpha\beta}$. 5) e^{π^2}. 6) $e^{\frac{2}{\pi}}$. 7) 0. 8) 1. 9) 2π. 10) 0.

II.4.32. 1) 1. 2) 6. 3) $-\frac{1}{4}$. 4) $-\frac{1}{2}$. 5) -2. 6) 2 . 7) $\frac{7}{3}$. 8) 12.

II.5. Funkcijos tolydumas.

II.5.2. 1) Nebūtinai. 2) Tolydi.

II.5.3. Kiekvienas trūkio taškas yra pirmojo tipo, o visų jų aibė yra $\mathbb{Z}$.

II.5.4. Aprėžta taško a aplinkoje, bet nebūtinai tolydi.

II.5.5. Jeigu aibė E aprėžta, tai bet kuri funkcija f tenkina teiginio sąlygas. Jeigu aibė E iš viršaus arba apačios neaprėžta, tai funkcija f yra neaprėžtai didėjanti atitinkamai taškų $+\infty$ ir $-\infty$ aplinkose; nebūtinai tolydi.

II.5.6. Funkcija f yra bijekcija, atvirkštinė funkcija yra tolydi taške a; nebūtinai tolydi.

II.5.7. 1) $F_1 = F_2 = \emptyset$, kai $A = 4$. 2) $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{-1\}$. 3) $F_1 = F_2 = \emptyset$. 4) $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \emptyset$. 5) $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{0\}$, kai $A \in \mathbb{R}$. 6) $F_1 = F_2 = \emptyset$. 7) $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \emptyset$, kai $A \in \mathbb{R}$. 8) $F_1 = F_2 = \emptyset$. 9) $F_1 = \mathbb{Z}$, $F_2 = \emptyset$. 10) $F_1 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, $F_2 = \emptyset$. 11) $F_1 = F_2 = \emptyset$, kai $A = \frac{1}{3}$; $F_1 = \{-1\}$, $F_2 = \emptyset$, kai $A \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. 12) $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{-1\}$, kai $A \in \mathbb{R}$. 13) $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{0\}$, kai $A \in \mathbb{R}$. 14) $F_1 = \{0\}$, $F_2 = \emptyset$, kai $A \in \mathbb{R}$. 15) $F_1 = \emptyset$, kai $A = 0$; $F_1 = \{0\}$, kai $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $F_2 = \emptyset$. 16) $F_1 = \emptyset$, $F_2 = \{0\}$, kai $A \in \mathbb{R}$. 17) $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \emptyset$. 18) $F_1 = \emptyset$, kai $A = 1$; $F_1 = \{0\}$, kai $A \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$F_2=\emptyset$. 19) $F_1=F_2=\emptyset$. 20) $F_1=\{-1\}$, $F_2=\emptyset$. 21) $F_1=\{-1\}$, $F_2=\emptyset$. 22) $F_1=\emptyset$, $F_2=\mathbb{Z}$. 23) $F_1=\emptyset$, $F_2=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

II.5.8. 1) $f(x)=1$, $x\in[0;1)$; $f(x)=\frac{1}{2}$, $x=1$; $f(x)=0$, $x\in(1;+\infty)$. 2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $x\in\mathbb{R}$. 3) $f(x)=1$, $x\in[-1;1]$; $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. 4) $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$; $f(x)=1$, $x\in\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. 5) $f(x)=x$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi-\frac{\pi}{6};k\pi+\frac{\pi}{6})$; $f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\{k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6} : k\in\mathbb{Z}\}$; $f(x)=0$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}((k\pi+\frac{\pi}{6};k\pi+\frac{5\pi}{6})\cup(k\pi-\frac{5\pi}{6};k\pi-\frac{\pi}{6}))$. 6) $f(x)=x$, $x\in(-\infty;0]$; $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}_+$. 7) $f(x)=\frac{\pi}{2}x$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi;k\pi+\frac{\pi}{2})$; $f(x)=0$, $x\in\{k\pi+\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$; $f(x)=-\frac{\pi}{2}x$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi-\frac{\pi}{2};k\pi)$. 8) $f(x)=0$, $x\in(-\infty;0]$; $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}_+$. 9) $f(x)=-(1+x)$, $x\in(-\infty;0)$; $f(0)=0$, $f(x)=1+x$, $x\in\mathbb{R}_+$. 10) $f(x)=1$, $x\in[0;1]$; $f(x)=x$, $x\in(1;\frac{3+\sqrt5}{2}$; $f(x)=(x-1)^2$, $x\in(\frac{3+\sqrt5}{2};+\infty)$. 11) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0;1]$; $f(x)=1$, $x\in(1;2]$; $f(x)=\frac{x^2}{4}$, $x\in(2;+\infty)$. 12) $f(x)=\ln2$, $x\in[0;2]$; $f(x)=\ln x$, $x\in(2;+\infty)$. 13) $f(x)=x$, $x\in[0;1]$; $f(x)=x^2$, $x\in(1;+\infty)$. 14) $f(x)=|\cos x|$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi-\frac{\pi}{4};k\pi+\frac{\pi}{4}]$; $f(x)=|\sin x|$, $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi+\frac{\pi}{4};k\pi+\frac{3\pi}{4}]$.

II.5.9. $f(x)=+1$, $x\in\mathbb{Q}\cap[0;1]$; $f(x)=-1$, $x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0;1]$.

II.5.10. 1) $B=3-A$, $A\in\mathbb{R}$. 2) $A=-2$, $B=0$. 3) $B=1$, $A\in\mathbb{R}$.

II.5.11. $A_k=A_0+2k$, $B_k=A_0+2k-1, k\in\mathbb{Z}$, $A_0\in\mathbb{R}$.

II.5.13. 1) $w_{f;x}=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; $w_{f;x}=1$, $x\in\mathbb{Z}$. 2) $w_{f;x}=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $w_{f;0}=2$. 3) $w_{f;x}=1$, $x\in\mathbb{R}$.

II.5.14. $F_1=\emptyset$, $F_2=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

II.5.15. 1) $T=\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Q}\cup\{0\}$, $F=\mathbb{R}\setminus T$. 2) $T=\emptyset$, $F=\mathbb{R}$. 3) $T=\mathbb{R}$, $F=\emptyset$. 4) $T=\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}\setminus\{1\})$, $F=\mathbb{Z}\setminus\{1\}$. 5) $T=\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $F=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. 6) $T=\mathbb{R}$, $F=\emptyset$.

II.5.17. 1) $f+g$ trūki, fg gali būti trūki arba tolydi. 2) $f+g$ ir fg gali būti trūkios arba tolydžios.

II.5.18. 1) $f\circ g$ tolydi, $g\circ f$ trūki taške 0. 2) $f\circ g$ trūki aibėje $\{-1;0;1\}$, $g\circ f$ tolydi. 3) $f\circ g$ tolydi, $g\circ f$ tolydi tik taške 1. 4) $f\circ g$ tolydi, $g\circ f$ tolydi tik taške 1.

II.5.25. 1) Ne. 2) Ne. 3) Ne. 4) Ne.

II.5.29. $\mathbb{R}\setminus\{3\}\ni y\to f^{-1}(y)=\frac{2y-1}{y-3}$.

II.5.35. $g^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$, $y\in[0;+\infty)$, $E=(-\infty;1]$; $g^{-1}(y)=1+\sqrt{y}$, $y\in[0;+\infty)$, $E=[1;+\infty)$.

II.5.36. $E=(-\infty;0]$, $f^{-1}(y)=1-\sqrt{1+y}$, $y\in[0;+\infty)$; $f^{-1}(y)=-\frac{y}{1+\sqrt{1+Ay}}$, $y\in(-\infty;0)$.

II.5.37. $f^{-}(y)=y-k$, $y\in[2k;2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$; f^{-1} tolydi apibrėžimo srityje.

II.6. Tiesės topologija.

II.6.28. 1) Taip. 2) Taip. 3) Taip. 4) Ne. 5) Taip. 6) Taip. 7) Taip. 8) Taip. 9) Ne. 10) Taip.

II.6.30. 1) $w_f(\delta)=2\delta$. 2) $w_f(\delta)=\delta$. 3) $w_f(\delta)=\delta$, $\delta\in(0;1]\cup(2;4]$; $w_f(\delta)=1$,

$\delta \in (1;2]$; $w_f(\delta) = 4$, $\delta \in (4;+\infty)$. 4) $w_f(\delta) = 8\delta - \delta^2$, $\delta \in (0;4]$; $w_f(\delta) = 16$, $\delta \in (4;+\infty)$. 5) $w_f(\delta) = \frac{\delta}{a(a+\delta)}$, $\delta \in (0;1-a]$; $w_f(\delta) = \frac{1-a}{a}$, $\delta \in (1-a;+\infty)$. 6) $w_f(\delta) = 2\sqrt{5}\sin\frac{\delta}{2}$, $\delta \in (0;\pi]$; $w_f(\delta) = 2\sqrt{5}$, $\delta \in (\pi;+\infty)$. 7) $w_f(\delta) = \frac{\delta}{a}$, $\delta \in (0;2a]$; $w_f(\delta) = 2$, $\delta \in (2a;+\infty)$. 8) $w_f(\delta) = 2\sin\frac{\delta}{2}$, $\delta \in (0;\pi]$; $w_f(\delta) = 2$, $\delta \in (\pi;+\infty)$. 9) $w_f(\delta) = \ln(1+\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. 10) $w_f(\delta) = +\infty$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. 11) $w_f(\delta) = \delta^3 - 3\delta^2 + 3\delta)$, $\delta \in (0;1]$; $w_f(\delta) = 1$, $\delta(1;+\infty)$.

II.6.32. i) Visos funkcijos yra tolygiai tolydžios. ii) 1) ir 2) funkcijos tolygiai tolydžios, 3) funkcija nebūtinai tolygiai tolydi.

III. FUNKCIJOS $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DIFERENCIALINIS SKAIČIAVIMAS.

III.1. Išvestinė.

III.1.1. 1) $mn(x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1})$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 2) $-(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4})$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 3) $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. 4) $-\frac{(1-x)^{p-1}(p+q+(p-q)x)}{(1+x)^{q+1}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \{-1;1\}$. 5) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\mathcal{D}(f) = [0;+\infty)$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}_+$. 6) $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = (-|a|;|a|)$. 7) $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. 8) $-\sin 2x \cdot \cos\cos 2x$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 9) $n\sin^{n-1}x \cdot \cos(n+1)x$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 10) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. 11) $\frac{x^2}{(\cos x+\sin x)^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg} x = -\frac{1}{x}\}$. 12) $\frac{2}{\sin^2 x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. 13) $-\frac{16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi a}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. 14) $-\frac{1}{x^2} \cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \sec^2\frac{1}{x} \cdot \ln 2$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{2}{(2k+1)\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$. 15) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. 16) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 17) $e^x(1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}}))$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 18) $f(x)(\ln\frac{b}{a} - \frac{a-b}{x})$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}_+$. 19) $\frac{6}{x}\lg e \lg^2 x^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. 20) $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = (e;+\infty)$. 21) $\frac{x}{x^4-1}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$. 22) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 23) $\frac{1}{\cos x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k - \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \frac{\pi}{2})$. 24) $2\sin\ln x$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}_+$. 25) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $\mathcal{D}(f) = [-2;2]$, $\mathcal{D}(f') = (-2;2)$. 26) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus (-1;1)$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$. 27) $\operatorname{sgn}\cos x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. 28) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $\mathcal{D}(f) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $\mathcal{D}(f') = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2})$. 29) $\frac{1}{1+x^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. 30) $\frac{1}{a+b\cos x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. 31) $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $\mathcal{D}(f) = [1;+\infty)$, $\mathcal{D}(f') = (1;+\infty)$. 32) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $\mathcal{D}(f) = [-1;1]$, $\mathcal{D}(f') = (-1;1)$. 33) $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = (0;a)$. 34) $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. 35) $\frac{1}{2(1+x^2)}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 36) $\frac{\sin a\operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1-\cos a\cos x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus E$, $a \in E := \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. $\mathcal{D}(f) == \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi - a; 2k\pi + a : k \in \mathbb{Z}\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus E$. 37) $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{-\sqrt{\sin(2x^2)}}$, $\mathcal{D}(f) = \cup_{k=0}^{\infty}([-\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}; -\sqrt{k\pi}] \cup [\sqrt{k\pi}; \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}])$, $\mathcal{D}(f') = \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. 38) $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}_+$. 39) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x) - (\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x)$,

$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \cup_{k\in \mathbb{Z}}(2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2})$. 40) $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}(x^2 - 2\ln^2 x + x\ln x \cdot \ln\ln x)$, $\mathcal{D}(f) = [1; +\infty)$, $\mathcal{D}(f') = (1; +\infty)$. 41) $-\frac{1}{x}\log_x^2 e$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. 42) $\operatorname{th}^3 x$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 43) $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. 44) $\frac{\operatorname{sgn}\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. 45) $-\frac{x\operatorname{tg} x+\log_x \cos x}{x\ln x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = ((0; \frac{\pi}{2})\setminus\{1\}) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}}(2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}))$. 46) $f(x)\cdot e^x(\ln\operatorname{ch} x + \operatorname{th} x)$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$.

III.1.2. 1) $2|x|$. 2) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$. 3) $\frac{3}{2}|\sin x|^{\frac{1}{2}}\cos x \operatorname{sgn}\sin x$. 4) $\pi[x]\sin 2\pi x$. 5) $2|\sin x|\cos x$. 6) $\sin^2 \pi x + \pi(x - [x])\sin 2\pi x$. 7) $2(1 + \operatorname{sgn}\sin x)\sin 2x$.

III.1.4. 1) $\frac{2}{n}\frac{ff'+gg'}{\sqrt[n]{(f^2+g^2)^{n-1}}}$. 2) $\frac{gf'-fg'}{fg}$. 3) $\frac{f'\ln g - g'\ln f}{fg\ln^2 g}$. 4) $\frac{h(gf'-fg'\ln f)}{fg^2}$. 5) $(f'(\sin^2 x) - g'(\cos^2))\sin 2x$.

III.1.5. 1) $A = 2$, $B = -1$. 2) $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. 3) $A = -\frac{\pi+2\sqrt{3}}{96\pi}$, $B = \frac{3\pi+2\sqrt{3}}{24\pi}$. 4) $A = \frac{5}{2}$, $B = \frac{9}{5}$. 5) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$. 6) $A = B$. 7) $A = -3$, $B = 4$, $C = 0$. 8) $A = g'(a)$, $B = g(a) - ag'(a)$.

III.1.6. 1) $\mathbb{R}_+$. 2) $(1; +\infty)$. 3) $(2; +\infty)$.

III.1.7. 1) $t \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathbb{R}$. 2) $t \in (1; +\infty)$, $u \in \mathbb{R}$. 3) $t \in (1; +\infty)$, $u \in (-\infty; \alpha - 1)$.

III.1.8. 1) $f'(0) = 0$. 2) $f'(1) = 2$, $f'(-1) = -2$.

III.1.9. 1) $f_k'(x) = f_d'(x) = \pi[x]\cos\pi x$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; $f_k'(l) = (-1)^l\pi(l-1)$, $f_d'(l) = (-1)^l\pi l$ $l \in \mathbb{Z}$. 2) $f_k'(x) = f_d'(x) = (2x\cos\frac{\pi}{x} + \pi\sin\frac{\pi}{x})\operatorname{sgn}\cos\frac{\pi}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{2l+1} : l \in \mathbb{Z}\}$; $f_k'(0) = f_d'(0) = 0$; $f_k'(x) = -\pi$, $f_d'(x) = \pi$, $x \in \{\frac{2}{2l+1} : l \in \mathbb{Z}\}$. 3) $f_k'(x) = f_d'(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$, $x \in \operatorname{int}E\setminus\{0\}$; $f_k'(x) = -\infty$, $x \in \{-\sqrt{\pi n}, \sqrt{(2n-1)\pi} : n \in \mathbb{N}\}$, $f_k'(0) = -1$; $f_d'(x) = +\infty 1$, $x \in \{-\sqrt{(2n-1)\pi}, \sqrt{2\pi n} : n \in \mathbb{N}\}$, $f_d'(0) = 1$. 4) $f_k'(x) = f_d'(x) = \frac{1+(1+\frac{1}{x})e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f_k'(0) = 1$, $f_d'(0) = 0$. 5) $f_k'(x) = f_d'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f_k'(0) = -1$, $f_d'(0) = 1$. 6) $f_k'(x) = f_d'(x) = \frac{\operatorname{sgn}\ln|x|}{x}$, $x \in E\setminus\{-1; 1\}$; $f_k'(-1) = f_k'(1) = -1$, $f_d'(-1) = f_d'(1) = 1$. 7) $f_k'(x) = f_d'(x) = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$; $f_k'(-1) = -1$, $f_k'(1) = +1$, $f_d(-1) = 1$, $f_d(1) = -1$. 8) $f_k'(x) = f_d'(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2-4x+5}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$; $f_k'(2) = -\frac{\pi}{2}$, $f_d(2) = \frac{\pi}{2}$. 9) $f_k'(x) = f_d'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}\setminus[-1; 2]$; $f_k'(x) = f_d'(x) = 1$, $x \in (-1; 2)$; $f_k'(-1) = -2$, $f_d'(-1) = 1$, $f_k'(2) = 1$, $f_d'(2) = 4$. 10) $f_k'(x) = f_d'(x) = \cos x$, $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi; (2k+1)\pi)$; $f_k'(x) = f_d'(x) = 0$, $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}((2k-1)\pi; 2k\pi)$; $f_k'(x) = 0$, $f_d'(x) = 1$, $x \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; $f_k'(x) = -1$, $f_d'(x) = 0$, $x \in \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

III.1.10. 1) $S_n(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$. 2) $S_n(x) = \frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}x$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $S_n(1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$. 3) $S_n(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}((2n+1)x^{2n+4} - (2n+3)x^{2n+2} + x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$; $S_n(x) = (n+1)^2\operatorname{sgn} x$, $x \in \{-1; 1\}$. 4) $S_n = n2^{n-1}$. 5) $S_n = n(n+1)2^{n-2}$. 6) $S_1 = -1$, $S_n = 0$; $n \geqslant 2$. 7) $S_n(x) = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}(n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin^2\frac{nx}{2})$, $x \in \mathbb{R}\setminus E$; $S_n(x) = \frac{1}{2}n(n+1)$; $x \in E := \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

III.1.11. 1) Teiginys teisingas funkcijai $f+g$ ir neteisingas funkcijai fg. 2) Teiginys neteisingas funkcijai $f+g$, ir funkcijai fg.

III.1.12. 1) Teiginys neteisingas.

III.1.15. 1) ir 2) teiginiai neteisingi, 3) teiginys teisingas.

III.1.18. Visi teiginiai neteisingi. Pavyzdžiai: 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0;1)$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$, $x\in(0;1)$; 3) $f(x)=\frac{\cos x^2}{x}$, $x\in(1;+\infty)$; 4) $f(x)=\sin\ln x$, $x\in(2;+\infty)$.

III.1.19. 1) $f'(a)$. 2) $\frac{1}{2}f'(a)$. 3) $2f'(a)$. 4) $f'(a)$. 5) $1+\frac{f}{f'}(0)$. 6) $a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $-f(0)$, $a=0$, $n=1$; 0, $a=0$, $n\geqslant 2$. 7) $\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$. 8) $\frac{1}{2}f'(a)$. 9) $\exp\{\frac{f'}{f}(a)\}$. 10) $\exp\{a\frac{f'}{f}(a)\}$. 11) $f'(0)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$.

III.1.20. 1) $\frac{k(k+1)}{2}m$. 2) $\exp\{\frac{k(k+1)}{2a}\}$. 3) $\exp\{\frac{a}{2}\}$. 4) 1. 5) $\exp\{\frac{\pi}{2}\}$. 6) 1.

III.1.22. 1) $S(x)=\frac{x^2}{2}$, $S'(x)=x$, $x\in[0;2]$. $S(x)=x^2-2x+2$, $S'(x)=2(x-1)$, $x\in(2;+\infty)$. 2) $S(x)=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}+\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a;a]$; $S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x$, $x\in[-a;a]\setminus\{0\}$; $S'_k(0)=-a$, $S'_d(0)=a$.

III.1.23. 1) $E=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$; $|f|'(x)=f'(x)\operatorname{sgn}f(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus E$.

III.1.24. 1) $E=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in\mathbb{R}:f(x)=g(x),\ f'(x)=g'(x)\}$; $h'(x)=f'(x)$, $f(x)>g(x)$; $h'(x)=g'(x)$, $g(x)>f(x)$; $h'(x)=f'(x)$, $f(x)=g(x)$, $f'(x)=g'(x)$.

III.1.25. Funkcija h gali būti nediferencijuojama; pavyzdžiui, $f(x)=x^3-x$, $x\in[-1;2]$; abi vienpusės išvestinės egzistuoja.

III.1.26. 1) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{3(x^2+1)}$, $y\in\mathbb{R}$. 2) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{x^4+1}$, $y\in\mathbb{R}$. 3) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$, $y\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in[0;1)$; $(f^{-1})'(y)=1\leq 1+\cos x$, $y\in\mathbb{R}\setminus F$; $(f^{-1})'(y)=+\infty$, $y\in F:=\{(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}$. 4) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{2}{4+\sin x}$, $y\in\mathbb{R}$. 5) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{1+e^x}$, $y\in\mathbb{R}$. 6) $f:\mathbb{R}_+\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{x}{x+1}$, $y\in\mathbb{R}$. 7) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows\mathbb{R}$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, $y\in\mathbb{R}$. 8) $f:\mathbb{R}\leftrightarrows(-1;1)$, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{1-y^2}$, $y\in(-1;1)$.

III.1.27. 1) $-\frac{h}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h\in\mathbb{R}$. 2) $\frac{h}{a^2+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$. 3) $\frac{h}{x^2-a^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{a;-a\}$, $h\in\mathbb{R}$. 4) $\frac{h}{\sqrt{x^2+a}}$, $a\in\mathbb{R}_+$, $x\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$; $\frac{h}{x}$, $a=0$, $x\in\mathbb{R}_+$, $h\in\mathbb{R}$; $\frac{h}{\sqrt{x^2+a}}$, $a\in(-\infty;0)$, $x\in\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{-a};\sqrt{-a}]$, $h\in\mathbb{R}$. 5) $\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}h$, $x\in\mathbb{R}_+$, $h\in\mathbb{R}$. 6) $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}h$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$; $h\operatorname{sgn}x$, $a=0$, $x\neq\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h\in\mathbb{R}$. 7) $\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}h$, $x\in(-|a|;|a|)$, $h\in\mathbb{R}$. 8) $\frac{h}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$, $h\in\mathbb{R}$. 9) $\frac{h}{\cos^3x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\}$, $h\in\mathbb{R}$. 10) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)h$, $x\in\mathbb{R}_+$, $h\in\mathbb{R}$.

III.1.28. 1) $-\frac{1}{2}h$. 2) $\frac{e}{\operatorname{ch}1}h$. 3) $-\frac{89\sqrt{2}}{192}h$. 4) $(2+\ln 4)h$. III.1.29. 1) $4{,}0207$. 2) $3{,}001110$. 3) $1{,}9952$. 4) $-0{,}01745$. 5) $0{,}5351$. 6) $0{,}078$.

III.1.30. 1) $\frac{y+x-1}{y-x}$; $\frac{5}{2}h$, $h\in\mathbb{R}$. 2) $\frac{p}{y}$; h, $h\in\mathbb{R}$. 3) $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$; $-\frac{b}{a}h$, $h\in\mathbb{R}$. 4) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$; $-h$, $h\in\mathbb{R}$. 5) $-(\frac{y}{x})^{\frac{1}{3}}$; h, $h\in\mathbb{R}$. 6) $\frac{x+y}{x-y}$; h, $h\in\mathbb{R}$. 7) $\frac{12x}{3y^2-1}$; $\frac{12}{11}h$, $h\in\mathbb{R}$. 8) $\frac{x(4-x^2)}{y(y^2-5)}$; $\frac{1}{4}h$, $h\in\mathbb{R}$. 9) $\frac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}$; $-2h$, $h\in\mathbb{R}$. 10) $\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$; $-\frac{\sqrt{2}b}{a}h$, $h\in\mathbb{R}$; čia visur $y=f(x)$,

$x \in U(x_0)$.

III.1.31. 1) $T_{(1;2)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}, x \in \mathbb{R}\}$, $N_{(1;2)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, x \in \mathbb{R}\}$. 2) $T_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, x \in \mathbb{R}\}$, $N_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}x, x \in \mathbb{R}\}$. 3) $T_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -3x, x \in \mathbb{R}\}$, $N_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{3}x, x \in \mathbb{R}\}$. 4) $T_{(\frac{\pi}{2};0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -3x + \frac{3\pi}{2}, x \in \mathbb{R}\}$, $N_{(\frac{\pi}{2};0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}, x \in \mathbb{R}\}$. 5) $T_{(-2;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2, y \in \mathbb{R}\}$, $N_{(-2;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$. 6) $T_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{3}, x \in \mathbb{R}\}$, $N_{(0;0)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -3x, x \in \mathbb{R}\}$. 7) $T_{(6;6,4)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 5y - 50 = 0\}$, $N_{(6;6,4)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 3y - 10{,}8 = 0\}$. 8) $T_{(1;1)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y - 3 = 0\}$, $N_{(1;1)}(\Gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y - 1 = 0\}$.

III.1.32. 1) $(0;0)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $(1;1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. 2) $(2;e)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{e}$. 3) $(1;-2)$, $(1;+2)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. 4) $(1;2)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{6}{5}$.

III.1.33. $b^2 - 4ac = 0$.

III.1.34. $a = \frac{1}{2e}$.

III.1.35. $(\frac{p-q}{2}, \sqrt{pq})$, $(\frac{p-q}{2}, -\sqrt{pq})$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kai $pq \in \mathbb{R}_+$; parabolės nesikerta, kai $pq \in (-\infty;0)$, $p+q \neq 0$; parabolės sutampa, kai $pq \in (-\infty;0)$, $p+q=0$.

III.2. Aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai.

III.2.1. 1) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 2) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 3) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; $-2h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 4) $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 5) $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 6) $\frac{1}{x}$; h^2, $h \in \mathbb{R}$. 7) $-\frac{2}{x}\sin\ln x$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 8) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 9) $4\operatorname{ch} 2x$; $4h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 10) $-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$; 0, $h \in \mathbb{R}$.

III.2.2. 1) $4x^2(f'' + 2f') \circ g(x)$; 0, $h \in \mathbb{R}$. 2) $\frac{1}{x^4}f'' \circ g(x) + \frac{2}{x^3}f' \circ g(x)$; $(f'' + 2f')(1)h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 3) $e^{2x}f'' \circ g(x) + e^x f' \circ g(x)$; $(f'' + 2f')(1)h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 4) $\frac{1}{x^2}(f'' - f') \circ g(x)$; $(f'' - f')(0)h^2$, $h \in \mathbb{R}$.

III.2.3. 1) $-\frac{25}{y^3}$; $-\frac{25}{64}h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 2) $-\frac{p^2}{y^3}$; $\frac{1}{p}h$, $h \in \mathbb{R}$. 3) $\frac{6}{(x-2y)^3}$; $-6h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 4) $\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}(3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2))$; $3h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 5) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; $-\frac{2}{a}h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 6) $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; $\frac{1}{2}h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 7) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; $2e^{-\pi}h^2$, $h \in \mathbb{R}$; visur $y = f(x)$.

III.2.4. 1) $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. 2) $(-1)^n n!(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}})$. 3) $f'(x) = \frac{3+2x}{3(1+x)^{4/3}}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. 4) $-2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$. 5) $\frac{3}{4}\cos(x + \frac{n\pi}{2}) + \frac{3^n}{4}\cos(3x + \frac{n\pi}{2})$. 6) $\frac{(a-b)^n}{2}\cos((a-b)x + \frac{n\pi}{2}) + \frac{(a+b)^n}{2}\cos((a+b)x + \frac{n\pi}{2})$. 7) $a^n(x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2})\sin(ax + \frac{n\pi}{2}) - 2na^{n-1}x\cos(ax + \frac{n\pi}{2})$. 8) $e^x(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{A_n^k}{x^{k+1}})$, čia $A_n^k := n(n-1)\ldots(n-k+1)$. 9) $e^x 2^{\frac{n}{2}}\sin(x + \frac{n\pi}{2})$. 10) $\frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}((a+bx)^n + (-1)^{n-1}(a-bx)^n)$. 11) $e^{ax}\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}P_m^{(k)}(x)$, $P_M^{(0)} := P$. 12) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}(\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$. 13) $e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\varphi)$, čia $\cos\varphi := \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi := \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 14) $(a^2 +$

$b^2)^{\frac{n}{2}}(\cos(n\varphi - \frac{n\pi}{2})\operatorname{ch} ax \cos(bx + \frac{n\pi}{2}) - \sin(n\varphi - \frac{n\pi}{2})\operatorname{sh} ax \sin(bx + \frac{n\pi}{2})$, čia $\cos\varphi$ ir $\sin\varphi$ iš 13) atsakymo. 15) $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^n C_{2p}^k \cos(2(p-k)x + \frac{n\pi}{2})$, kai $m = 2p$; $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k-1}\frac{(2(p-k)-1)^n}{2^{2(p-1)}}C_{2p-1}^k \sin((2(p-k)-1)x + \frac{n\pi}{2})$, kai $m = 2p-1$. 16) $\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin((n+1)\operatorname{arc\,ctg} x)$. 17) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arc\,ctg} x)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f^{(n)}(0) = 0$, kai n-lyginis, $f^{(n)}(0) = (-1)(n-1)!$, kai n-nelyginis.

III.2.5. $(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \circ f^{-1}$, $(f^{-1})'' = -\frac{f''}{f'^3} \circ f^{-1}$, $(f^{-1})''' = \frac{3f''^2 - f'f'''}{f'^5} \circ f^{-1}$.

III.2.6. $a = \frac{1}{2}f_k''(x_0)$, $b = f_k'(x_0)$, $c = f(x_0)$.

III.2.7. $n!\varphi(a)$.

III.2.9. 1) $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\sum_{k=0}^m k!(m-k)!(C_m^k)^3(x+1)^k(x-1)^{m-k}$, $m \in \mathbb{N}$; $P_0(x) = 1$. 2) $\sum_{k=0}^m(-1)^{m-k}(C_m^k)^2 k! x^{m-k}$, kai $m \in \mathbb{N}$; $P_0(x) = 1$. 3) $\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^k(2k)!\frac{C_m^{2k}}{k!}(2x)^{m-2k}$, kai $m \in \mathbb{N}$; $P_0(x) = 1$.

III.2.12. 1) $n = 1$, $f'(0) = 0$. 2) $n = 2$, $f'(0) = f''(0) = 0$. 3) $n = 4$, $f^{(k)}(0) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant 4$. 4) $n = 1$, $f'(0) = 0$.

III.2.13. $54\,m/s$.

III.2.14. Atitinkami pagreičiai $a_1(2) = 14\,m/s^2$, $a_2(2) = 13\,m/s^2$, $a_1(3) = 18\,m/s^2$, $a_2(3) = 19\,m/s^2$.

III.2.15. $43N$.

III.2.16. $V(t) = -\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}$, $a(t) = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\frac{2\pi t}{T}$.

III.3. Diferencialinės tarpinių reikšmių teoremos.

III.3.1. Netenkina, neteisinga.

III.3.2. 1) Netenkina, teisinga. 2) Netenkina, neteisinga.

III.3.3. $-\frac{\sqrt{7}-2}{3}$, $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$.

III.3.4. $(-1,-1)$, $(1,1)$.

III.3.13. 1) $n = 1$, $x_0 \in (0;1)$. 2) $n = 2$, $x_0 = 1$. 3) $n = 3$, $x_0 = 2$.

III.3.15. $\xi \in \{\frac{1}{2}; \sqrt{2}\}$.

III.3.16. 1) $E = (x; x+h)$. 2) $E = \{x + \frac{h}{2}\}$. 3) $E = \{\sqrt{x(x+h)}\}$, $x \in \mathbb{R}_+$; $E = \{-\sqrt{x(x+h)}\}$, $x \in (-\infty; -h)$. 4) $E = \{\frac{1}{4}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})^2\}$. 5) $E = \{-\sqrt{x^2 + xh + \frac{h^2}{3}}\}$, $x \in (-\infty; -\frac{h}{3})$; $E = \{\sqrt{x^2 + xh + \frac{h^2}{3}}\}$, $x \in (-\frac{2}{3}h; +\infty)$. 6) $E = \{x + \ln\frac{e^h - 1}{h}\}$. 7) $E = \{\frac{h}{\ln(1+\frac{h}{x})}\}$. 8) $E = \{-\sqrt{\frac{h}{f(x+h)-f(x)} - 1} =: \xi\}$, $x \in (-\infty; x_0)$; čia $x_0 \in (-\frac{h}{2}; 0)$ yra vienintelis lygties $f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1+x^2}$ sprendinys tame intervale; $E = \{-\xi\}$, $x \in (x_1; +\infty)$; čia $x_1 \in (-h; -\frac{h}{2})$ yra vienintelis lygties $f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1+(x+h)^2}$ sprendinys tame intervale . 9) $E = \{\xi_k := \exp\{\pi k + (-1)^k \arcsin\frac{f(x+h)-f(x)}{h\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\} : k \in A\}$, čia $A := \{k \in \mathbb{Z} : \xi_k \in (x; x+h)\}$.

III.3.19. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;1)$.

III.3.25. Ne; pavyzdys: $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}^3$, $\xi=0$.

III.3.26. Netenkina, nes $\nexists f'(0)$. Taip, nes kiekviename intervale $(-\frac{1}{n\pi};-\frac{2}{(2n+1)\pi})$ ir $(\frac{2}{(2n+1)\pi};\frac{1}{n\pi})$, $n\in\mathbb{N}$, lygtis $\operatorname{tg}\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\xi}$ turi vieną sprendinį.

III.3.33. 1) didėjimo intervalas $(-\infty;0)$, mažėjimo intervalas $(0;+\infty)$. 2) didėjimo intervalas $(0;1)$, mažėjimo intervalas $(1;+\infty)$.

III.3.34. 1) $\mathbb{R}\setminus(-3;1)$. 2) $[5;+\infty)$. 3) $[-1;7]$.

III.3.35. Jeigu n-nelyginis, tai a nėra ekstremumo taškas. Jeigu n-lyginis, tai a yra lokaliojo minimumo taškas, kai $g(a)>0$, ir lokaliojo maksimumo taškas, kai $g(a)<0$.

III.3.40. 1) 3; -13. 2) 132; 0. 3) e^5; $-e^3$. 4) 1; $\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$. 5) 13π; $12\pi-1$. 6) π; $-\pi$. 7) 16; -2. 8) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $-(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$.

III.3.41. 1) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 0. 2) 1; 0. 3) 1; $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$. 4) $\sqrt{3}$; 0. 5) $\frac{1}{e}$; 0.

III.3.42. $m(x)=-\frac{1}{6}$, kai $x\in(-\infty;-3]$; $m(x)=f(x)$, kai $x\in(-3;-1]$; $m(x)=0$, kai $x\in(-1;+\infty)$; $M(x)=\frac{1}{2}$, kai $x\in(-\infty;1]$; $M(x)=f(x)$, kai $x\in(1;+\infty)$.

III.3.43. 1) $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}$. 2) $\Delta(f,g)=-q$, kai $q\in(-\infty;-\frac{1}{2})$; $\Delta(f,g)=1+q$, kai $q\in[-\frac{1}{2};+\infty)$; $\min\{\Delta(f,g):q\in\mathbb{R}\}=\frac{1}{2}$, kai $q=-\frac{1}{2}$. 3) $\frac{4}{27}$. 4) $\Delta(f,g)=-(ab+q)$, kai $q\in(-\infty;-\frac{a^2+6ab+b^2}{8}]$, $\Delta(f,g)=\frac{(a+b)^2}{4}+q$, kai $q\in(-\frac{a^2+6ab+b^2}{8};+\infty)$; $\min\{\Delta(f,g):q\in\mathbb{R}\}=\frac{(b-a)^2}{8}$, kai $q=-\frac{a^2+6ab+b^2}{8}$.

III.3.44. $a=-\frac{1}{3}$, $f(a)=\frac{2}{3}$.

III.3.45. $(-\infty;-\frac{e}{6})\cup\mathbb{R}_+$.

III.3.47.

1) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;-4)$ ir $(0;+\infty)$, mažėjimo $(-4;-1)$ ir $(-1;0)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo -4 ir $f(-4)=-\frac{256}{27}$, minimumo 0 ir $f(0)=0$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-1)$, žemyn $(-1;+\infty)$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=-1\}$, kai $x\to-1-0$ ir $x\to-1+0$; pražulnioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=x-3\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

2) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-1;1)$, mažėjimo $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$; griežto globaliojo minimumo taškas -1 ir $f(-1)=0$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-4)$, žemyn $(-4;1)$, $(1;+\infty)$; perlinkio taškas -4 ir $f(-4)=\frac{81}{625}$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=1\}$, kai $x\to1-0$ ir $x\to1+0$; horizontalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=1\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

3) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;x_1)$, $(-1;0)$, $(x_2;+\infty)$, mažėjimo $(x_1;-1)$, $(0;x_2)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo x_1, 0 ir $f(x_1)=-\frac{17\sqrt{17}+71}{16}$, $f(0)=0$, minimumo x_2 ir $f(x_2)=\frac{17\sqrt{17}-71}{16}$, čia $x_1=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-1)$, $(-1;\frac{1}{5})$, žemyn $(\frac{1}{5};+\infty)$; perlinkio taškas $\frac{1}{5}$ ir $f(\frac{1}{5})=-\frac{4}{45}$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=-1\}$, kai $x\to-1+0$ ir

$x \to -1-0$; pražulnioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x-3\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

4) Funkcija nelyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-1;1)$, mažėjimo $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, žemyn $(0;1)$, $(1;+\infty)$; perlinkio taškas 0 ir $f(0) = 0$. Asimptotės: vertikaliosios $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$, kai $x \to -1-0$ ir $x \to -1+0$, ir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$, kai $x \to 1-0$ ir $x \to 1+0$; horizontalioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

5) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;1)$,$(5;+\infty)$, mažėjimo $(1;5)$; griežto lokaliojo minimumo taškas 5 ir $f(5) = \frac{27}{2}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-1)$, žemyn $(-1;1)$, $(1;+\infty)$; perlinkio taškas -1 ir $f(-1) = 0$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$, kai $x \to 1-0$ ir $x \to 1+0$, pražulnioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+5\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

6) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(0;1)$, $(1;+\infty)$, mažėjimo $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-1)$, $(x_1;0)$, $(0;x_2)$, $(1;+\infty)$, žemyn $(-1;x_1)$, $(x_2;1)$; perlinkio taškai $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -x_1$, ir $f(x_1) = -\frac{8}{3} = f(x_2)$. Asimptotės: vertikaliosios $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$, kai $x \to -1-0$ ir $x \to -1+0$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, kai $x \to -0$ ir $x \to +0$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$, kai $x \to 1-0$ ir $x \to 1+0$; horizontalioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

7) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(0;1)$, didėjimo $(1;3)$; griežto globaliojo minimumo taškas 1 ir $f(1) = -2$, kraštinis griežto lokaliojo maksimumo taškas 0 ir $f(0) = 0$, $f'_d(0) = -\infty$. Griežto žemyn iškilumo intervalas $(0;+\infty)$.

8)Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-2\sqrt{2};-2)$, $(0;2)$, mažėjimo $(-2;0)$, $(2;2\sqrt{2})$; globaliojo ekstremumo taškai: maksimumo -2 ir 2, $f(-2) = f(2) = 4$, minimumo 0 ir $f(0) = 0$ bei kraštiniai minimumo $-2\sqrt{2}$ ir $2\sqrt{2}$, $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = 0$, $f'_d(-2\sqrt{2}) = +\infty$, $f'_k(0) = -2\sqrt{2}$, $f'_k(0) = 2\sqrt{2}$, $f'_k(2\sqrt{2}) = -\infty$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai $(-2\sqrt{2};0)$, $(0;2\sqrt{2})$.

9) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;-\frac{1}{3})$, $(1;+\infty)$, mažėjimo $(-\frac{1}{3};1)$. Griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo $-\frac{1}{3})$ ir $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$, minimumo 1 ir $f(1) = 0$; $f'(-1) = +\infty$, $f'_k(1) = -\infty$, $f'_d(1) = +\infty$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty;-1)$, aukštyn $(-1;1)$, $(1;+\infty)$; perlinkio taškas -1 ir $f(-1) = 0$. Pražulnioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - \frac{1}{3}\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

10) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty;0)$, didėjimo $(0;+\infty)$; griežto globaliojo minimumo taškas 0 ir $f(0) = -1$, $f'_k(0) = -\infty$, $f'_d(0) = +\infty$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai: $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

11) Funkcija nelyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$, didėjimo $(-2;2)$; griežto globaliojo ekstremumo taškai: minimumo -2 ir $f(-2) = -2\sqrt[3]{2}$, $f'_k(-2) = -\infty$, $f'_d(-2) = +\infty$, maksimumo 2 ir $f(2) = 2\sqrt[3]{2}$, $f'_k(2) = +\infty$, $f'_d(2) = -\infty$. Griežtojo iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, žemyn $(0;2)$, $(2;+\infty)$; perlinkio taškas 0 ir $f(0) = 0$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

12) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty;-1)$, $(0;1)$, didėjimo

$(-1;0)$, $(1;+\infty)$; globaliojo minimumo taškai -1 ir 1, $f(-1)=f(1)=\sqrt[3]{4}$, $f'_k(-1)=-\infty$, $f'_d(-1)=+\infty$, $f'_k(1)=-1$, $f'_d(1)=+\infty$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai: $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

13) Funkcija nelyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};+\infty)$, mažėjimo $(-\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt{3})$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo $-\sqrt{3}$ ir $f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, minimumo $\sqrt{3}$ ir $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-3;-1)$, $(0;1)$, $(3;+\infty)$, žemyn $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(1;3)$; perlinkio taškai -3 ir $f(-3)=-\frac{3}{2}$, 0 ir $f(0)=0$, 3 ir $f(3)=\frac{3}{2}$.

14) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty;-1)$, didėjimo $(1;+\infty)$; kraštiniai globaliojo minimumo taškai -1 ir 1, $f(-1)=f(1)=0$, $f'_k(-1)=-\infty$, $f'_d(-1)=+\infty$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$. Pražulniosios asimptotės $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\frac{x}{2}\}$, kai $x\to+\infty$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-\frac{x}{2}\}$, kai $x\to-\infty$.

15) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty;-4)$, $(0;+\infty)$, didėjimo $(-4;-3)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: minimumo -4 ir $f(-4)=13$, kraštinis maksimumo 0 ir $f(0)=1$, $f'_d(0)=-1$. Griežto žemyn iškilumo intervalai $(-\infty;-3)$, $(0;+\infty)$. Asimptotės: horizontalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-\frac{1}{2}\}$, kai $x\to+\infty$, pražulnioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-2x+\frac{5}{2}\}$, kai $x\to-\infty$, vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-3\}$, kai $x\to-3-0$.

16) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-2;-1)$, $(-1;0)$, didėjimo $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: minimumo 0 ir $f(0)=0$, $f'_k(0)=-\infty$, $f'_d(0)=+\infty$, maksimumo -2 ir $f(-2)=-\sqrt[3]{4}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty;x_1)$, $(-1;x_2)$, aukštyn $(x_1;-1)$, $x_2;0$, $(0;+\infty)$; perlinkio taškai $x_1=-(2+\sqrt{3})$ ir $f(x_1)=-\sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{2}}$, $x_2=-(2-\sqrt{3})$ ir $f(x_2)=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{2}}$. Vertikalioji asimptotė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1\}$, kai $x\to-1-0$ ir $x\to-1+0$.

17) Funkcija 2π –periodinė, pagrindinis intervalas $[0;2\pi]$. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(0;\frac{\pi}{6})$, $(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6})$, $(\frac{3\pi}{2};2\pi)$, mažėjimo $(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2})$, $(\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2})$; globaliojo ekstremumo taškai: maksimumo $\frac{\pi}{6}$ ir $\frac{5\pi}{6}$, $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5}{4}$, minimumo $\frac{3\pi}{2}$ ir $f(\frac{3\pi}{2})=-1$. Griežto lokaliojo minimumo taškas $\frac{\pi}{2}$ ir $f(\frac{\pi}{2})=1$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(0;x_1)$, $(x_2;x_3)$, $(x_4;2\pi)$, žemyn $(x_1;x_2)$, $(x_3;x_4)$; perlinkio taškai $x_1=\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$, $x_2=\pi-x_1$, $f(x_1)=f(x_2)=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}$, $x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x_4=3\pi-x_3$, $f(x_3)=f(x_4)=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$.

18) Funkcija 2π –periodinė, nelyginė, pagrindinis intervalas $[-\pi;\pi]$. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-x_0;x_0)$, mažėjimo $(-\pi;x_0)$, $(x_0;\pi)$; globaliojo ekstremumo taškai: minimumo $x_0=-\arccos\frac{1}{4}$, $f(x_0)=-\frac{15}{8}\sqrt{15}$, maksimumo $-x_0$, $f(-x_0)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\pi;x_1)$, $(0;-x_1)$, žemyn $(-x_1;0)$, $(x_1;\pi)$; perlinkio taškai $x_1=-\arccos(-\frac{7}{8})$ ir $f(x_1)=-\frac{21}{32}\sqrt{15}$, $-x_1$ ir $f(-x_1)=\frac{21}{32}\sqrt{15}$, $-\pi$ ir π, $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

19) Funkcija nelyginė, 2π –periodinė, pagrindinis intervalas $[-\pi;\pi]$. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\pi;-\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{4};\pi)$, didėjimo $(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4})$; globaliojo ekstremumo taškai: minimumo $-\frac{3\pi}{4}$ ir $-\frac{\pi}{4}$, $f(-\frac{3\pi}{4})=f(-\frac{\pi}{4})=$

$-\frac{2}{3}\sqrt{2}$, maksimumo $\frac{\pi}{4}$ ir $\frac{3\pi}{4}$, $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo $-\frac{\pi}{2}$, $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}$, minimumo $\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\pi; x_1)$, $(x_2; 0)$, $(x_3; x_4)$, aukštyn $(x_1; x_2)$, $(0; x_3)$, $(x_4; \pi)$; perlinkio taškai $-\pi$, 0 ir π, $f(-\pi) = f(\pi) = f(0) = 0$, $x_1 = -\big(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\big)$, $x_2 = -\pi - x_1$, $x_3 = -x_2$, $x_4 = -x_1$, $f(x_1) = f(x_2) = -\frac{4}{27}\sqrt{30}$, $f(x_3) = f(x_4) = -f(x_1)$.

20) Funkcija lyginė, $\frac{\pi}{2}$ –periodinė, pagrindinis periodas $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\frac{\pi}{4}; 0)$, mažėjimo $(0; \frac{\pi}{4})$; globaliojo ekstremumo taškai: minimumo $-\frac{\pi}{4}$ ir $\frac{\pi}{4}$, $f(-\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, maksimumo 0, $f(0) = 1$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8})$, aukštyn $(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8})$; perlinkio taškai $-\frac{\pi}{8}$ ir $\frac{\pi}{8}$, $f(-\frac{\pi}{8}) = f(\frac{\pi}{8}) = \frac{3}{4}$.

21) Funkcija π –periodinė, pagrindinis intervalas $(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$. Didėjimo intervalas $(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$, žemyn $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$; perlinkio taškas $\frac{\pi}{4}$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vertikaliosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{\pi}{4}\}$, kai $x \to -\frac{\pi}{4} + 0$, ir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{3\pi}{4}\}$, kai $x \to \frac{3\pi}{4} - 0$.

22) Funkcija lyginė, 2π –periodinė, pagrindinė aibė $[-\pi; \pi] \setminus \{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} : k \in \{-2; -1; 0; 1\}\}$. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\pi; -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}; 0)$, $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$, didėjimo $(0; \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo $-\pi$ ir π, $f(-\pi) = f(\pi) = -1$, minimumo 0 ir $f(0) = 1$. Vertikaliosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$, kai $x \to a - 0$ ir $x \to a + 0$, $a \in \{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$.

23) Funkcija nelyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi - \frac{\pi}{4})$, $(k\pi + \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{2})$, didėjimo $(k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{4})$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: minimumo $x_k := k\pi - \frac{\pi}{4}$, $f(x_k) = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 1$, maksimumo $x'_k := k\pi + \frac{\pi}{4}$, $f(x'_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi)$, aukštyn $(k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2})$; perlinkio taškai $k\pi$, $f(k\pi) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vertikaliosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x''_k\}$, kai $x \to x''_k - 0$ ir $x \to x''_k + 0$, $x''_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

24) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty; 1)$, mažėjimo $(1; +\infty)$; griežto globaliojo maksimumo taškas 1, $f(1) = e$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$, aukštyn $(x_1; x_2)$; perlinkio taškai $x_1 := 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 := 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x_1) = f(x_2) = \sqrt{e}$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

25) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty; 0)$, mažėjimo $(0; +\infty)$; griežto globaliojo maksimumo taškas 0, $f(0) = 1$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$, aukštyn $(x_1; x_2)$; perlinkio taškai $x_1 := -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = -x_1$, $f(x_1) = f(x_2) = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

26) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; 0)$, didėjimo $(0; +\infty)$; griežto globaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 1$. Griežto žemyn iškilumo intervalas $\mathbb{R}$. Pražulnioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$, kai $x \to +\infty$.

27) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; 0)$, $(\frac{2}{3}; +\infty)$, didėjimo $(0; \frac{2}{3})$; griežto ekstremumo taškai: globaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 0$, $f'_k(0) = -\infty$, $f'_d(0) = +\infty$, lokaliojo maksimumo taškas $\frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3}) \approx 0{,}39$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$, aukštyn $(x_1; 0)$, $(0; x_2)$; perlinkio taškai $x_1 := -\frac{\sqrt{6}-2}{3}$, $f(x_1) \approx$

$0,34$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}+2}{3}$, $f(x_2) \approx 0,30$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to +\infty$.

28) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, didėjimo $(0; +\infty)$; griežto lokaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 1$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty; -1)$, žemyn $(-1; +\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to -\infty$.

29) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; 0)$, didėjimo $(0; +\infty)$; griežto lokaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 0$, $f'_k(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

30) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(0; e^2)$, mažėjimo $(e^2; +\infty)$; griežto globaliojo maksimumo taškas e^2, $f(e^2) = \frac{2}{e}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(0; e^{\frac{8}{3}})$, žemyn $(e^{\frac{8}{3}}; +\infty)$; perlinkio taškas $e^{\frac{8}{3}}$, $f(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, kai $x \to +0$, horizontalioji $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, kai $x \to +\infty$.

31) Funkcija nelyginė. Didėjimo intervalas $\mathbb{R}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; 0)$, aukštyn $(0; +\infty)$; perlinkio taškas 0, $f(0) = 0$.

32) Funkcija nelyginė. Didėjimo intervalas $\mathbb{R}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; 0)$, aukštyn $(0; +\infty)$; perlinkio taškas 0, $f(0) = 0$.

33) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; 0)$, didėjimo $(0; +\infty)$; griežto globaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 0$, $f'_k(0) = -2$, $f'_d(0) = 2$. Griežto aukštyn iškilumo intervalai $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pi\}$, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$.

34) Funkcija nelyginė. Didėjimo intervalas $(-1; 1)$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-1; 0)$, žemyn $(0; 1)$; perlinkio taškas 0, $f(0) = 0$. Vertikaliosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = -1\}$, kai $x \to -1+0$ ir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$, kai $x \to 1-0$.

35) Funkcija nelyginė. Didėjimo intervalas $\mathbb{R}$. Griežto iškilumo intervalai: žemyn $(-\infty; 0)$, aukštyn $(0; +\infty)$; perlinkio taškas 0, $f(0) = 0$. Pražulniosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - \frac{\pi}{2}\}$, kai $x \to -\infty$, ir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + \frac{\pi}{2}\}$, kai $x \to +\infty$.

36) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, mažėjimo $(-1; 1)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo -1, $f(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}$, minimumo 1, $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty; 0)$, žemyn $\mathbb{R}_+$; perlinkio taškas 0, $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Pražulniosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2} + \pi\}$, kai $x \to -\infty$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\}$, kai $x \to +\infty$.

37) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(-\infty; 0)$, didėjimo $(0; +\infty)$; griežto globaliojo minimumo taškas 0, $f(0) = 0$. Griežto žemyn iškilumo intervalas $\mathbb{R}$. Pražulniosios asimptotės $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\pi}{2}x - 1\}$, kai $x \to -\infty$, ir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\pi}{2}x - 1\}$, kai $x \to +\infty$.

38) Funkcija nelyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-1; 1)$, mažėjimo $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; griežto globaliojo ekstremumo taškai: minimumo -1, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, maksimumo 1, $f(1) = \frac{\pi}{2}$, $f'_k(-1) = f'_d(1) = -1$, $f'_d(-1) = f'_k(1) = 1$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, žemyn $(0; 1)$, $(1; +\infty)$; perlinkio taškas 0, $f(0) = 0$. Hori-

zontalioji asimptotė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

39) Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$, mažėjimo $(-1;0)$, $(0;2)$; griežto lokaliojo ekstremumo taškai: maksimumo -1, $f(-1)=\frac{1}{e}$, minimumo 2, $f(2)=4\sqrt{e}$, kairinis minimumo 0, $f(0)=0$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;-\frac{2}{5})$, žemyn $(-\frac{2}{5};0)$, $(0;+\infty)$; perlinkio taškas $-\frac{2}{5}$, $f(-\frac{2}{5})=\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$. Asimptotės: vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$, kai $x\to+0$, pražulnioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x+3\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

40) Funkcija lyginė. Monotoniškumo intervalai: didėjimo $(-\infty;-1)$, mažėjimo $(1;+\infty)$, kraštiniai globaliojo maksimumo taškai -1 ir 1, $f(-1)=f(1)=2^{\sqrt{2}}$. Griežto iškilumo žemyn intervalai $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

41) Didėjimo intervalas $(-a;a)$; kraštiniai griežto globaliojo ekstremumo taškai: minimumo $-a$, $f(-a)=-\frac{\pi}{2}a$, $f'_d(-a)=0$, maksimumo a, $f(a)=\frac{\pi}{2}a$, $f'_k(a)=+\infty$.

42) Mažėjimo intervalai $(-\infty;0)$, $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; kraštiniai griežto globaliojo ekstremumo taškai 0, $f(0)=0$, $f'_k(0)=-\infty$, ir $\frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3})=\pi$, $f'_d(\frac{2}{3})=-\infty$. Griežto iškilumo intervalai: aukštyn $(-\infty;0)$, žemyn $(\frac{2}{3};+\infty)$. Horizontalioji asimptotė $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\frac{\pi}{3}\}$, kai $x\to-\infty$ ir $x\to+\infty$.

43) Monotoniškumo intervalai: mažėjimo $(0;\frac{1}{e})$, didėjimo $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; griežto ekstremumo taškai: kraštinis lokaliojo maksimumo taškas 0, $f(0)=1$, $f'_d(0)=-\infty$, globaliojo minimumo taškas $\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e})\approx 0,69$. Griežto žemyn iškilumo intervalas $\mathbb{R}_+$.

44) Mažėjimo intervalas $(-1;+\infty)$, $f'(0)=-\frac{e}{2}$. Griežto žemyn iškilumo intervalas $(-1;+\infty)$. Asimptotės: horizontalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\}$, kai $x\to+\infty$, ir vertikalioji $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1\}$, kai $x\to-1+0$.

III.4. Globaliųjų ekstremumų uždaviniai.

III.4.1. $e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$.

III.4.2. Kvadratas su kraštinės ilgiu $\sqrt{S}$.

III.4.3. $\frac{\pi}{3}$ ir $\frac{\pi}{6}$.

III.4.4. $h=2r=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, čia h –aukštinės, r – pagrindo spindulio ilgiai.

III.4.5. $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$.

III.4.6. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.

III.4.7. $\frac{\sqrt{3}r}{2}$, r.

III.4.8. $\frac{P}{\pi+4}$.

III.4.9. $\frac{2r}{\sqrt{3}}, \frac{2r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}$.

III.4.10. $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

III.4.11. $\frac{\pi}{3}$.

III.4.12. $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

III.4.13. $\frac{8}{3}\pi r^3$.

III.4.14. $\frac{S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{6\pi}}$.

III.4.15. $\pi(\sqrt{5}+1)r^2$.

III.4.16. ab.

III.4.17. $\frac{4r}{3}$.

III.4.18. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

III.4.19. $\frac{\pi}{4}$.

III.4.20. Strypo pasvirimo į horizontą kampas lygus $\arccos((l+\sqrt{l^2+128r^2}) \setminus 16r)$.

III.4.21. $\frac{\pi}{3}$.

III.4.22. $a=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $h=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

III.4.23. $|BD| = b - \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$, jeigu $b > a/\sqrt{k^2-1}$; $|BD| = 0$, jeigu $b \leqslant a/\sqrt{k^2-1}$.

III.4.24. $r/\sqrt{2}$.

III.4.25. $d_1 = (\frac{r_1}{r_2})^{3/2} d_2$, čia d_i yra šaltinio atstumas nuo i-tojo rutulio centro, $i \in \{1;2\}$.

III.4.26. $\operatorname{arc\,tg} k$.

III.4.27. $\frac{|av \pm bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$.

III.5. Lopitalio ir Teiloro teoremos.

III.5.1. 1) $\frac{\alpha}{\beta}$. 2) 1. 3) 2. 4) $-\frac{1}{3}$. 5) $\frac{1}{6}$. 6) 1. 7) $\frac{1}{6}\ln c$. 8) -2. 9) $(\frac{\alpha}{\beta})^2$. 10) $\frac{2}{3}$. 11) 1. 12) 0. 13) 0. 14) 0. 15) 0. 16) 1. 17) 1. 18) -1. 19) e^k. 20) e^{-1}. 21) $e^{\frac{2}{\pi}}$. 22) e^{-1}. 23) 1. 24) 1. 25) 1. 26) $\frac{1}{2}$. 27) $\frac{1}{2}$. 28) 0. 29) $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 30) e^{-1}. 31) 1. 32) $e^{\frac{1}{6}}$. 33) $e^{-\frac{1}{2}}$. 34) $\frac{pq}{q-p}$. 35) $\sqrt{e}$. 36) α. 37) 1. 38) e.

III.5.2. 1) Negalima, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. 2) Negalima, riba neegzistuoja. 3) Negalima, riba neegzistuoja. 4) Negalima, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

III.5.3. 1) $1+60x+1950x^2+o(x^2)$. 2) $a+\frac{x}{\alpha a^{\alpha-1}} - \frac{(\alpha-1)x^2}{2\alpha^2 a^{2\alpha-1}} + o(x^2)$. 3) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$. 4) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$. 5) $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{13})$. 6) $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$. 7) $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. 8) $\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$. 9) $-ex-ex^2-\frac{e}{6}x^3+o(x^3)$. 10) $\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{8}x^5+\frac{103}{240}x^7+o(x^8)$. 11) $-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^4-\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$.

III.5.4. 1) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$. 2) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k+1}}{k}+o(x^{2n+2})$. 3) $-1+\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2k-2)!(2k)!}+o(x^{2n+1})$. 4) $x-\sum_{k=1}^n \frac{2x^{2k+1}}{(2k-1)^{(2k+1)}}+o(x^{2n+2})$. 5) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{k=2}^n (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$. 6) $1+\sum_{k=1}^n (-1)^k\frac{4^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$.

III.5.5. 1) $x-1+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. 2) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$. 3) $e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$. 4) $x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$. 5) $x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$. 6) $1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+o((x-1)^2)$.

III.5.6. 1) $a = b = 1$. 2) $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. 3) $a = 1$, $b = -1$. 4) $a = -\frac{1}{15}$, $b = -\frac{2}{5}$. 5) $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$.

III.5.7. 1) $\frac{1}{3}$. 2) $-\frac{1}{4}$. 3) $\frac{1}{3}$. 4) $\frac{1}{6}$. 5) $\ln^2 b$. 6) $\frac{1}{2}$. 7) 0. 8) $\frac{1}{3}$. 9) $-\frac{1}{2}$. 10) $\frac{n}{6}$. 11) $\frac{n}{2}$.

III.5.8. 1) x^2. 2) $\frac{2}{3}x^3$. 3) $\frac{x^3}{3}$. 4) $3x$. 5) $-\frac{x^3}{3}$. 6) $\frac{x^7}{30}$. 7) x^2. 8) $\frac{x}{2}$.

III.5.9. 1) 5,027. 2) 3,017. 3) 1,996. 4) 1,649. 5) 0,309. 6) 0,182. 7) 0,675. 8) 0,467. 9) 2,718281828. 10) 0,01745241. 11) 0,98769. 12) 2,2361. 13) 1,04139.

III.5.10. 1) $\frac{e}{(n+1)!}$. 2) $\frac{1}{7!}$. 3) $2 \cdot 10^{-6}$. 4) $1,5 \cdot 10^{-3}$. 5) $2 \cdot 10^{-6}$. 6) $\frac{1}{2^8 \cdot 8!}$.

III.5.14. $\frac{f'(0)}{2}$.

IV. FUNKCIJA $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

IV.1. Euklidinė erdvė.

IV.1.1. Jeigu $n = 2$ ir 1) $r \in (\frac{d}{2}; +\infty)$, 2) $r = \frac{d}{2}$, 3) $r \in (0; \frac{d}{2})$, tai atitinkamai aibė E_r yra 1) dvitaškė, 2) vienaelementė, 3) $\emptyset$. Jeigu $n = 1$ ir 1) $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{d}{2}\}$, 2) $r = \frac{d}{2}$, tai atitinkamai aibė E_r yra 1) $\emptyset$, 2) vienaelementė.

IV.1.2. Ne.

IV.1.3. 1) $\vec{c} = \frac{1}{3}(4\vec{b} - \vec{a})$, $r = \frac{2}{3}|\vec{b} - \vec{a}|$. 2) $\{2b - a, \frac{2b+a}{3}\}$.

IV.1.4. 1) $-\frac{3}{2}$. 2) $-\frac{2n+1}{n+2}$.

IV.1.5. 1) $a\sqrt{n}$. 2) $a\sqrt{k}$. 3) $\arccos\sqrt{\frac{k}{n}}$. 4) $\frac{\pi}{2}$. 5) $C_n^k \cdot 2^{n-k}$. 6) 0, jeigu $n = 2l-1$; C_{2l-1}^{l-1}, $n = 2l$.

IV.1.7. 4.

IV.1.8. 1) 0. 2) $\sqrt{n-k}$. 3) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. 4) $\frac{4}{\sqrt{13}}$. 5) $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 6) $2\lambda_0\sqrt{\frac{8\lambda_0+5}{5\lambda_0+2}} \approx 1,331$, čia $\lambda_0 \approx 0,469$ yra lygties $((1+\lambda)(1+4\lambda))^{3/2} = 2(2+5\lambda)$ sprendinys. 7) $\sqrt{\frac{162}{55}}$. 8) $\sqrt{\frac{n-2}{n+2}}$.

IV.1.9. 1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 2) $+\infty$. 3) $1+\sqrt{2}$. 4) $\frac{2}{\pi}\sqrt{4+\pi^2}$. 5) $2\sqrt{2}$. 6) 0. 7) $+\infty$. 8) $+\infty$.

IV.2. Funkcijos $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ riba, tolydumas, išvestinė.

IV.2.1. $\arccos\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$.

IV.2.3. 1)

2) $a_0 = -2\sqrt{3} - 3 \approx -6,46; \qquad a_1 = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,46.$

3)

4)

5)

6)

7)

8) $a_0 = \frac{1}{e} \approx 0,37;\ a_1 = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx 0,34,\ a_2 = e \approx 2,72;\ a_3 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx 5,82.$

9)

10)

11)

12)

IV.2.4.

1) $\vec{a}_0 = a(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4})$, $\vec{a}_1 = a(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2})$, $\sqrt[3]{4} \approx 1,59$, $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

2) $\vec{a}_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1};\sqrt{2})^T \approx (1,10;0,71)^T$, $\vec{a}_1 = \sqrt[4]{\frac{3}{8}}(\sqrt{1+a};\sqrt{1-a})^T \approx (1,05;0,35)^T$,

$a = \sqrt{2\sqrt{\frac{2}{3}}}$ – aibė simetrinė koordinatinių ašių ir kampų pusiaukampinių atžvilgiu.

3) $\vec{a}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}a(\sqrt{3};1)^T \approx a(0,61;0,35)^T$ aibė simetrinė koordinatinių ašių atžvilgiu.

4) aibė simetrinė koordinatinių ašių atžvilgiu ir kampų pusiaukampinių atžvilgiu.

5) Aibė simetrinė II-tojo ir IV-tojo ketvirčių pusiaukampinės atžvilgiu. $\vec{a}_0 = (a_{01};a_{02})^T = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}(1;-\sqrt[3]{2})^T \approx (1,89;-2,38)^T$; $\widehat{\vec{a}}_0 = (-a_{02};-a_{01})^T$; $\vec{a}_1 = (a_{11};\ a_{12})^T =$

$\frac{1+a}{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}; -1\right)^T \approx (2,18; -4,14)^T$; $a = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$; $\widehat{\vec{a}}_1 = (-a_{12}; -a_{11})^T$.

6) Taškuose $\vec{x}_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} e^{\frac{4k+1}{4}\pi}(1;1)^T$, $k \in \mathbb{Z}$, liestinės lygiagretės Ox_2 ašiai, o taškuose $\widehat{\vec{x}}_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} e^{\frac{4k-1}{4}\pi}(1;-1)^T$, $k \in \mathbb{Z}$, liestinės lygiagretės Ox_1 ašiai.

IV.2.5. 1) Grafikas simetrinis $0x_1$ ašies atžvilgiu, $\vec{a}_1 := \frac{a}{4b}(-a; \sqrt{4b^2 - a^2})^T$, $\vec{a}_2 := \frac{4b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+8b^2}}{8b}(1; \frac{\sqrt{a^2+8b^2}+3a}{\sqrt{2}})$; taškuose $\vec{a}_1$ ir $(a+b)(1;0)^T$ liestinės lygiagretės Ox_2 ašiai, taške $\vec{a}_2$ liestinė lygiagreti Ox_1 ašiai, taške $\vec{0}$ vienpusės liestinės sudaro su Ox_1

ašimi kampą $\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$.

2) Grafikas simetrinis $0x_2$ ašies atžvilgiu, $\vec{a}_1 := \frac{(3+\sqrt{33})\sqrt{9-\sqrt{33}}}{64}\big(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \sqrt{9-\sqrt{33}}\big)^T a \approx (0,88; 0,44)^T a$; $\vec{a}_2 := \frac{3}{16}(\sqrt{15}; 3)^T a \approx (0,73; 0,56)^T a$, $\vec{a}_3 := \frac{(\sqrt{33}\cdot 3)\sqrt{\sqrt{33}+9}}{64}\big(\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -\sqrt{9+\sqrt{33}}\big)^T a \approx (0,18; -0,63)^T a$, taškuose $\vec{a}_1$ ir $\vec{a}_3$ liestinės lygiagretės $0x_2$ ašiai, taške $\vec{a}_2$ liestinė lygiagreti $0x_1$ ašiai, taške $\vec{0}$ liestinės sudaro su $0x_1$ ašimi kampus $0, \frac{\pi}{3}$ ir $\frac{2\pi}{3}$.

3) Grafikas simetrinis $0x_1$ ašies atžvilgiu, $\vec{a} := \frac{\sqrt[4]{32}}{\left(\sqrt{7\sqrt{33}-15}\sqrt[4]{9-\sqrt{33}}\right)}\Big(-\sqrt{9-\sqrt{33}}; \sqrt{\sqrt{33}-1}\Big)^T a \approx (-0,64; 0,77)^T a$; taške $a(1;0)^T$ liestinė lygiagretė $0x_2$ ašiai, o taške

$\vec{a}$ – $0x_1$ ašiai.

V. EILUTĖS.

V.1. Elementariosios eilučių savybės.

V.1.1. 1) $\frac{2}{3}$. 2) $\frac{3}{2}$. 3) 3. 4) $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$. 5) $\frac{1}{3}$. 6) $\frac{t\sin x}{1-2t\cos x+t}$. 7) $\frac{t\cos x-t}{1-2t\cos x+t}$. 8) $1-\sqrt{2}$. 9) 1. 10) $\frac{1}{c_1}$. 11) $\frac{1}{12}$. 12) $\frac{1}{2}$. 13) $\frac{1}{8}$. 14) 1. 15) $\sum_{l=1}^{\frac{k}{m}}\frac{1}{lm}$. 16) Diverguoja $\forall x\in\mathbb{R}$. 17) $\frac{1}{1-x}$.
V.1.7. $\frac{2}{3}$.
V. 1. 8. 1) $\frac{3}{4}$. 2) $-\frac{2}{7}$. 3) $\frac{1+a}{1-ab}$.

V.2. Teigiamosios eilutės.

V.2.1. 1) Konverguoja $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+$. 2) Konverguoja, kai $\alpha\in(0;e)$, ir diverguoja, kai $\alpha\in[e;+\infty)$. 3) Konverguoja. 4) Konverguoja. 5) Konverguoja aibėje $E:=\{(a,b,d,\alpha)\in\mathbb{R}_+^3\times\mathbb{R}:\frac{(b-a)\alpha}{d}>1\}$; diverguoja aibėje $(\mathbb{R}_+^3\times\mathbb{R})\setminus E$. 6) Konverguoja, kai $\alpha\in(\frac{3}{2};+\infty)$, diverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;\frac{3}{2}]$. 7) Konverguoja. 8) Konverguoja aibėje $E:\{(\alpha,a)\in\mathbb{R}^2:\alpha>a\}$; diverguoja aibėje $\mathbb{R}^2\setminus E$. 9) Konverguoja aibėje $E:\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\frac{\alpha+2\beta}{2}>1\}$; diverguoja aibėje $\mathbb{R}^2\setminus E$. 10) Konverguoja aibėje $E:=\{(\alpha,x)\in\mathbb{R}^2:\alpha+x>1\}$; diverguoja aibėje $\mathbb{R}^2\setminus E$. 11) Konverguoja intervale $\mathbb{R}_+$; diverguoja intervale $(-\infty;0]$. 12) Konverguoja, kai $\alpha\in\mathbb{R}_+$; diverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;0]$. 13) Konverguoja aibėje $E:=\{(a,b)\in\mathbb{R}_+^2:b\neq1\}$. 14) Konverguoja, kai $\alpha\in(1;+\infty)$; diverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;1]$. 15) Diverguoja $\forall a\in\mathbb{R}$. 16) Diverguoja. 17) Konverguoja, kai $x\in(0;\frac{1}{e})$; diverguoja, kai $x\in[\frac{1}{e};+\infty)$. 18) Konverguoja. 19) Konverguoja aibėje $E:=((1;+\infty)\times\mathbb{R})\cup(\{1\}\times(1;+\infty))$; diverguoja aibėje $\mathbb{R}^2\setminus E$. 20) Diverguoja. 21) Konverguoja, kai $\alpha\in(\frac{1}{2};+\infty)$; diverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;\frac{1}{2}]$. 22) Konverguoja. 23) Diverguoja. 24) Konverguoja. 25) Konverguoja. 26) Konverguoja aibėje $E:=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3:a=\sqrt{bc}\}$, diverguoja aibėje $\mathbb{R}_+^3\setminus E$. 27) Konverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;-1)$; diverguoja, kai $\alpha\in[-1;+\infty)$. 28) Konverguoja, kai $\alpha\in(\frac{1}{2};+\infty)$; diverguoja, kai $\alpha\in(-\infty;\frac{1}{2}]$. 29) Diverguoja. 30) Konverguoja, kai $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; diverguoja, kai $a=0$.

V.3. Absoliučiai ir reliatyviai konverguojančios eilutės.

V.3.1. 1) Konverguoja absoliučiai. 2) Konverguoja absoliučiai. 3) Konverguoja reliatyviai. 4) Konverguoja reliatyviai. 5) Konverguoja reliatyviai. 6) Konverguoja reliatyviai, kai $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ir absoliučiai, kai $a = 0$. 7) Diverguoja. 8) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (0;1]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant 0$. 9) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (0;1]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant 0$. 10) Konverguoja absoliučiai, kai $x \in \cup_{k\in \mathbb{Z}}(\pi k - \frac{\pi}{4}; \pi k + \frac{\pi}{4}) =: E_1$, ir reliatyviai, kai $x \in \{\pi k - \frac{\pi}{4}; \pi k + \frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\} =: E_2$; diverguoja, kai $x \in \mathbb{R} \setminus (E_1 \cup E_2)$. 11) Konverguoja reliatyviai, kai $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. 12) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (0;1]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant 0$. 13) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 2$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (1;2]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant 1$. 14) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2};1]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 15) Konverguoja reliatyviai. 16) Diverguoja. 17) Konverguoja reliatyviai. 18) Diverguoja. 19) Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 2$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (0;2]$;

V.3.7. Konverguoja absoliučiai, kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha = 1$; diverguoja, kai $\alpha < 1$.

V.4. Eilučių daugyba. Begalinės sandaugos.

V.4.1. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$; absoliučiai konverguoja, kai $q \in (-1;1)$, ir diverguoja, kai $q \in \mathbb{R} \setminus (-1;1)$.

V.4.4. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{1-x}$. 4) $\frac{1}{4}$. 5) $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$, kai $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 1, kai $x = 0$. 6) 2. 7) $a^{-\ln 2}$. 8) 2.

V.4.6. 1) Konverguoja, kai $\alpha \in \mathbb{R}$. 2) Konverguoja, kai $\alpha > 1$, ir diverguoja, kai $\alpha \leqslant 1$. 3) Konverguoja. 4) Konverguoja. 5) Diverguoja. 6) Konverguoja. 7) Konverguoja. 8) Konverguoja. 9) Diverguoja. 10) Konverguoja. 11) Diverguoja.

V.4.7. 1) Konverguoja reliatyviai. 2) Diverguoja. 3) Diverguoja. 4) Diverguoja. 5) Diverguoja. 6) Konverguoja reliatyviai. 7) Konverguoja reliatyviai. 8) Konverguoja absoliučiai,kai $\alpha > 1$, ir reliatyviai, kai $\alpha \in (\frac{1}{2};1]$; diverguoja, kai $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

V.4.12. 2; $2\sqrt{\frac{p}{q}}$.

VI. RYMANO INTEGRALAS.

VI.1. Neapibrėžtinis integralas.

VI.1.1. 1) $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$. 2) $x - \operatorname{th} x + C$. 3) $(e^{|x|}-1)\operatorname{sgn} x + C$. 4) $(|x|e^x - (e^x - 1)\operatorname{sgn} x + C$. 5) $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C$. 6) $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}| + C$. 7) $x - \ln(1+e^x) + C$. 8) $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x} + C$. 9) $\frac{x^3}{3} - x^2 + C$, kai $x \in (-\infty;0)$; $-\frac{x^3}{3} + x^2 + C$, kai $x \in [0;2]$; $\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3} + C$, kai $x \in (2;+\infty)$. 10) $(-1)^k \sin x + 2k + C$, $x \in [-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. 11) $-(1+(-1)^k)\cos x + 2k + C$, $x \in [\pi k; \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$. 12) $(x\ln x - x + 1)\operatorname{sgn}(x-1) + C$. 13) $\frac{2(x-k)^2+k}{4} + C$, kai $x \in [k; k+\frac{1}{2}$; $\frac{k+1-2(k+1-x)^2}{4} + C$, kai $x \in \left[k+\frac{1}{2}); k+1\right)$; $k \in \mathbb{Z}$. 14) $x + C$, kai $x \in [-1;1]$; $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x$, kai $x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1]$. 15) $\frac{1}{2}((x+1)^2\operatorname{sgn}(x+1) + (x-1)^2\operatorname{sgn}(1-x)) + C$. 16) $\frac{[x]}{\pi}([x] + (-1)^{[x]-1}\cos \pi x) + C$. 17) $x - \frac{x^3}{3} + C$, kai $x \in [-1;1]$; $x - \frac{3x^2-1}{6}\operatorname{sgn} x + C$, kai

$x \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]$. 18) $\frac{2x^3}{3}(1+\operatorname{sgn} x)+C$. 19) $x+C$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{x^2}{2}+x+C$, kai $x\in[0;1]$; $x^2+\frac12+C$, kai $x\in(1;+\infty)$. 20) $(-1)^k\sqrt2\sin(x+\frac{\pi}{4})+2\sqrt2 k+C$, $x\in(-\frac{3\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$.

VI.1.6. 1) $\frac23 x^{\frac32}(\ln^2 x-\frac43\ln x)+\frac89+C$. 2) $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$. 3) $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$. 4) $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C$. 5) $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}+C$. 6) $\ln\operatorname{tg}\frac x2-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x+C$. 7) $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+C$. 8) $\frac{x}{\sqrt2}\sin\left(\ln x-\frac\pi4\right)+C$. 9) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$. 10) $\frac{e^x}{x+1}+C$.

VI.1.7. 1) $x+\frac16\ln|x|-\frac92\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$. 2) $\frac{6-5x}{x^2-3x+2}+4\ln|\frac{x-1}{x-2}|+C$. 3) $\operatorname{arctg}x+\frac56\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C$. 4) $\frac16\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}+C$. 5) $\frac14\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt3}+\frac{\pi}{4\sqrt3}\operatorname{sgn}x+C$, kai $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; C, kai $x=0$. 6) $\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt2+1}{x^4+x^2\sqrt2+1}+C$.

VI.1.8. 1) $2\sqrt x-2\ln(1+\sqrt x)+C$. 2) $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$. 3) $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac12\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$. 4) $-\frac32\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. 5) $\frac x2+\sqrt x-\frac12\sqrt{x(1+x)}-\frac12\ln(\sqrt x+\sqrt{1+x})+C$. 6) $-\ln|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}|+C$. 7) $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C$. 8) $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt5}+C$. 9) $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$.

VI.1.9. 1) $\frac{5}{16}x+\frac14\sin2x+\frac{3}{64}\sin4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$. 2) $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}-\frac{1}{\sqrt2}(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-1}-\frac\pi2\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}x-1))+C$, kai $x\in(k\pi;k\pi+\frac\pi2)\setminus\{k\pi+\frac\pi4\}$, $k\in\mathbb Z$; $\frac{1}{\sqrt2}\ln(\sqrt2+1)+C$, kai $x=k\pi+\frac\pi4$, $k\in\mathbb Z$. 3) $x+C$, $(a,b)=\vec0$; $\frac x2+\frac{1}{4a}\sin2ax+C$, $a\ne0$, $b=0$; $\frac x2+\frac{1}{4b}\sin2bx+C$ $a=0$, $b\ne0$; $\frac34x+\frac{1}{2a}\sin2ax+\frac{1}{16a}\sin4ax+C$, $|a|=|b|\ne0$; $\frac x4+\frac{1}{8a}\sin2ax+\frac{1}{8b}\sin2bx+\frac{1}{16(a+b)}\sin2(a+b)x+\frac{1}{16(a+b)}\sin2(a-b)x+C$, $|a|\ne|b|$, $ab\ne0$. 4) $\frac16\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^3}{(1+\cos x)^3}+C$. 5) $x-\frac{1}{\sqrt2}(\operatorname{arctg}(\sqrt2\operatorname{tg}x)+\pi k)+C$, kai $x\in(\pi k-\frac\pi2;\pi k+\frac\pi2)$, $k\in\mathbb Z$; $\frac{(\sqrt2-1)(2k+1)\pi}{2\sqrt2}+C$, kai $x=\pi k+\frac\pi2$, $k\in\mathbb Z$. 6) jeigu $a\ne0$, $b=0$, tai $-\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}x+C$, $x\in\mathbb R\setminus\{k\pi:k\in\mathbb Z\}$; jeigu $a=0$, $b\ne0$, tai $\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}x+C$, $x\in\mathbb R\setminus\{k\pi+\frac\pi2:k\in\mathbb Z\}$; jeigu $|a|=|b|\ne0$, tai $\frac{x}{a^2}+C$, $x\in\mathbb R$; jeigu $|a|\ne|b|$, $ab\ne0$, tai $\frac{1}{ab}(\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}x}{b}+\pi k\operatorname{sgn}(ab))+C$, $x\in(\pi k-\frac\pi2;\pi k+\frac\pi2)$, ir $\frac{(2k+1)\pi}{2|ab|}+C$, $x=\pi k+\frac\pi2$, $k\in\mathbb Z$. 7) $\frac12(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt2}\ln|\operatorname{tg}(\frac x2+\frac\pi8)|+C$. 8) jeigu $a\ne0$, $b=0$, tai $-\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}x+C$, $x\in\mathbb R\setminus\{k\pi:k\in\mathbb Z\}$; jeigu $a=0$, $b\ne0$, tai $\frac1{b^2}\operatorname{tg}x+C$, $x\in\mathbb R\setminus\{k\pi+\frac\pi2:k\in\mathbb Z\}$; jeigu $ab\ne0$, tai $\frac{-\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C$, $x\in\mathbb R\setminus\{\pi k-\operatorname{arctg}\frac ba:k\in\mathbb Z\}$. 9) $\frac1{\sqrt2}(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt2}+\pi k)+C$, $x\in(\frac{(2k-1)\pi}{4};\frac{(2k+1)\pi}{4})$, $k\in\mathbb Z$; $\frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt2}+C$, $x=\frac{(2k+1)\pi}{24}$, $k\in\mathbb Z$. 10) $\frac1{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2-\sin2x}{\sqrt2+\sin2x}+C$. 11) $\frac12\operatorname{arctg}\sin^2x+C$. 12) $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{2}+\pi k+C$, $x\in(\frac{(2k-1)\pi}4;\frac{(2k+1)\pi}4)$, $k\in\mathbb Z$; $\frac{(2k+1)\pi}{2}+C$, $x=\frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k\in\mathbb Z$.

VI.1.10. 1) $-\frac{165x^3-55x^2+11x-1}{1320(x-1)^{11}}+C$. 2) $\frac12\ln(2+x^2)+\frac{2x^2+3}{(2+x^2)^2}+C$. 3) $\sum_{k=0}^m\frac{P_m^{(k)}(a)}{k!(k-n+1)}(x-a)^{k-n+1}+C$, kai $m\leqslant n-2$, $n\geqslant2$; $\sum_{\substack{k=0\\k\ne n-1}}^m\frac{P_m^{(k)}(a)}{k!(k-n+1)}(x-a)^{k-n+1}+\frac{P_m^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\ln|x-a|+C$, kai $m\geqslant n-1$. 4) $\frac{e^x(e^x-4)}{2}+4\ln(e^x+2)+C$. 5) $-\frac{3x^2+2}{15}(1-x^2)^{\frac32}+C$. 6)

$-\frac{1}{8}(\frac{3}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|+\frac{3x^2+3x-2}{(x-1)(x+1)^2})+C$. 7) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. 8) $-\frac{1}{3}(x^3\ln\frac{x-1}{x}-\ln|x-1|)-\frac{x^2+2x}{6}+C$. 9) $-2x+\frac{2x+1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 10) $-\frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2}+x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 11) $\frac{1}{\ln a}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k-n}a^{(2k-n)x}+C$, kai n-nelyginis; $\frac{1}{\ln a}\sum_{k=0,k\neq\frac{n}{2}}^{n}\frac{C_n^k}{2k-n}a^{(2k-n)x}+C_n^{\frac{n}{2}}x+C$, kai n-lyginis. 12) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2(n-k)-1}x^{2(n-k)-1}+(-1)^n a^{2n-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, kai $n\in\mathbb{N}$; $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, kai $n=0$. 13) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{2(n-1-k)}}{2k+1}x^{2k+1}+\frac{a^{2n-1}}{2}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$, kai $n\in\mathbb{N}$; $\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$, kai $n=0$. 14) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2(n-k)+1}\frac{1}{x^{2(n-k)+1}}+\frac{(-1)^n}{a^{2n+1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, kai $n\in\mathbb{N}$; $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, kai $n=0$. 15) $e^{ax}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}P_m^{(k)}(x)+C$.

VI.2. Rymano integralo pagrindinės sąvokos.

VI.2.1. 1) $\Delta x_k=\frac{3}{n}$, $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=3(1+\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n^2})$; 3. 2) $\Delta x_k=\frac{1}{n}$, $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=\frac{a^{\frac{1}{n}}(a-1)}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}$; $\frac{a-1}{\ln a}$. 3) $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$, $\xi_k=\sqrt{x_{k-1}x_k}$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. 4) $\Delta x_k=\frac{\pi}{2n}$, $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=\frac{\pi\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{2\sqrt{2}n\sin\frac{\pi}{4n}}$; 1. 5) $\Delta x_k=\frac{a}{n}$, $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=\frac{a\sin\frac{a}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2n}}{n\sin\frac{a}{2n}}$; $\sin a$. 6) $x_k=aq^k$, $0\leqslant k\leqslant n$, $q=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$, $\xi_k=x_{k-1}$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}-1}{(\frac{b}{a})^{\frac{m+1}{n}}-1}$; $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. 7) Skaidinys P ir tarpinis taškas $\vec{\xi}$ kaip ir 6) atveju; $S_f(P,\vec{\xi})=n((\frac{b}{a})^n-1)$; $\ln\frac{b}{a}$. 8) $\Delta x_k=\frac{\pi}{n}$, $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$; $S_f(P,\vec{\xi})=\frac{\pi}{n}\ln\frac{(t+1)(t^{2n}-1)}{t-1}$; $2\pi\ln|t|$, kai $|t|>1$, ir 0, kai $|t|<1$. Pasinaudoti tuo, jog $t^{2n}-1=\prod_{k=0}^{2n-1}\left(t-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$.

VI.2.2. 1) $\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$; $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$. 2) $\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; $\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$. 3) $\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}$; $\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. 4) $\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$; $\frac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$.

VI.2.13. 1) $\frac{2}{3}$. 2) $\sqrt{2}\pi$.

VI.2.14. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\ln 3$. 3) $\frac{\pi}{4}$. 4) $\frac{2}{\pi}$. 5) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 6) $\frac{1}{e}$. 7) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. 8) $\frac{1}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$. 9) $\frac{4}{e}$. 10) $e^{\int_0^1\ln f}$.

VI.2.15. 1) $\frac{\pi}{6}$. 2) $\frac{\pi}{2\sin t}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{\sqrt{uv}}\ln\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}$, $(u,v)\in E$, $u-v>0$; 2, $(u,v\in E)$, $uv=0$. 5) $\frac{\pi}{2|uv|}$. 6) -1. 7) $14-\ln 7!$. 8) $-\frac{\pi^2}{4}$. 9) $\ln n!$. 10) $2+\frac{3}{4}\ln\frac{27}{5}$. 11) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$. 12) $\frac{\pi^2}{4}$. 13) $\frac{\pi^2}{4}$.

VI.2.16. 1) $\frac{8}{3}$. 2) $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. 3) $\frac{1-e^{-2\pi n}}{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}$.

VI.2.17. $\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{27}-25$.

VI.2.18. 1) 4π. 2) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. 4) $\frac{5}{6}$. 5) $\frac{1}{6}$. 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. 7) $2-\frac{\pi}{2}$. 8) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 9) $\frac{5}{27}e^3-\frac{1}{9}$. 10) $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. 11) $2\pi(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}})$. 12) $2\pi\sqrt{2}$. 13) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$. 14) $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. 15) 1.

VI.2.19. 1) $\frac{t}{2}$. 2) $\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$, kai $t\in(-\infty;0)$; $\frac{1}{3}-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{3}$, kai $t\in[0;1]$; $\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$, kai $t\in(1;+\infty)$. 3) $\frac{\pi}{2}$, kai $t\in[-1;1]$; $\frac{\pi}{2t^2}$, kai $t\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.

VI.2.20. 1) $\forall x_0\in\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\cup\{0\}:\ F'(x_0)=0$. 2) $\overline{\exists}F'(0)$.

VI.2.21. 1) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2) $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$.

VI.2.22. 1) $\frac{(n-1)!!}{n!!}x_n$, $x_n=\frac{\pi}{2}$, kai n-lyginis, $x_n=1$, kai n-nelyginis. 2) $(-1)^n\big(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\big)$. 3) $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. 4) $(-1)^n(-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k})$.

VI.2.23. 1) 0, kai $k\neq m$; 2π, kai $k=m$. 2) $\frac{e^{b(u+iv)}-e^{a(u+iv)}}{u+iv}$. 3) $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$. 4) $(-1)^n\pi$. 5) $\frac{\pi}{2^n}$. 6) $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. 7) 0. 8) 0. 9) 0, kai n-lyginis; π, kai n-nelyginis.

VI.2.24. 1) 1. 2) $\frac{\pi^2}{4}$. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) $\frac{1}{2}$. 7) e. 8) 1. 9) 0.

VI.2.25. 0.

VI.2.26. 1) 0. 2) $-\frac{1}{t^2}$.

VI.2.29. $\frac{4}{\pi}$; $\frac{4}{\pi(1+x^2)}$, $x\in[0;1]$.

VI.2.30. 1) 0. 2) 0.

VI.2.31. Griežto lokaliojo ekstremumo taškai: 1–maksimumo, 2–minimumo.

VI.3. Netiesioginiai integralai.

VI.3.1. 1) $(u-1)a^{1-u}$. 2) π. 3) π. 4) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$. 5) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. 6) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 7) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 8) $\frac{\pi}{2}$. 9) 0. 10) $\frac{\pi}{2}-1$.

VI.3.2. 1) $n!$. 2) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi\alpha^{n-1}\operatorname{sgn}\alpha}{(\alpha\gamma-\beta^2)^{n-\frac{1}{2}}}$, kai $n\geqslant 2$; $\frac{\pi\operatorname{sgn}\alpha}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}$, kai $n=1$.

3) $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$. 4) $\frac{(n-1)!!}{n!!}\chi_n$, čia $\chi_n=\frac{\pi}{2}$, kai n–lyginis; $\chi_n=1$, kai n–nelyginis. 5) $\frac{(n-1)!!}{n!!}\chi_n$, čia $\chi_n=\pi$, kai n–lyginis; $\chi_n=1$, kai n–nelyginis.

VI.3.3. 1) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 2) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

VI.3.4. 1) 0. 2) $\frac{1}{2}$. 3) 1. 4) 1. 5) 1. 6) $\frac{1}{3}$. 7) $\frac{1}{u}h(0)$.

VI.3.5. 1) Konverguoja. 2) Konverguoja. 3) Diverguoja. 4) Konverguoja, kai $(u,v)\in(-1;+\infty)^2$; diverguoja, kai $(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus(-1;+\infty)^2$. 5) Konverguoja aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}\times[0;+\infty):u>-1,v-u>1\}$; diverguoja likusioje aibės $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ dalyje. 6) Konverguoja aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:u=0\}\cup\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:u\in\mathbb{R}\setminus\{0\},v\in(1;2)\}$; diverguoja likusioje aibės $\mathbb{R}^2$ dalyje. 7) Konverguoja intervale $(1;2)$; diverguoja likusioje $\mathbb{R}$ dalyje. 8) Konverguoja aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:u>-2,v\geqslant 0,v-u>1\}$; diverguoja likusioje aibės $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ dalyje. 9) Konverguoja aibėje $(-\infty;1)^2$; diverguoja aibėje $\mathbb{R}^2\setminus(-\infty;1)^2$. 10) Konverguoja aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\min\{u;v\}<1,\max\{u;v\}>1\}$; diverguoja likusioje $\mathbb{R}^2$ dalyje.

VI.3.6. 1) Konverguoja: absoliučiai aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:v\neq 0,-1<\frac{u+1}{v}<0\}$, reliatyviai aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:v\neq 0,\ 0\leqslant\frac{u+1}{v}<1\}$; likusioje $\mathbb{R}^2$ dalyje diverguoja. 2) Konverguoja reliatyviai intervale $(1;2)$, diverguoja likusioje $\mathbb{R}$ dalyje. 3) Konverguoja: absoliučiai aibėje $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:u>-2,v\geqslant 0,v>u+1\}$, reliatyviai aibėje

$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > -2, v \geqslant 0, u < v < u+1\}$; likusioje $\mathbb{R} \times [0;+\infty)$ dalyje diverguoja. 4) Konverguoja reliatyviai intervale $(0;2)$, diverguoja likusioje $\mathbb{R}$ dalyje. 5) Konverguoja: absoliučiai aibėje $\{(m,n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 : n > m+1\}$, reliatyviai aibėje : $\{(m,n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 : n = m+1\}$; diverguoja likusioje $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ dalyje. 6) Konverguoja reliatyviai.

VI.3.9. 1) $f(x) = \sin x^2$, $x \in [0;+\infty)$. 2) $f(x) = (-1)^{[x^2]}$, $x \in [0;+\infty)$.

VI.3.12. $\frac{1}{e}$.

VI.3.13. 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \cos x$, $x \in [1;+\infty)$. 2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \sin x$, $x \in [1;+\infty)$.

VI.4. Integralo taikymai.

VI.4.1. 1) $\frac{a^2}{3}$. 2) $\frac{9}{2}$. 3) $\frac{9}{2}$. 4) $9,9 - 8,1 \lg e \approx 6,38$. 5) πa^2. 6) $\frac{4a^3}{3}$. 7) $\frac{88}{15}\sqrt{2}a^2$. 8) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$. 9) $3\pi a^2$. 10) $\frac{\pi a^2}{2}$. 11) $\frac{2\pi}{u+2}$. 12) $\frac{1}{2}\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2} \approx 0,546$.

VI.4.2. $\vec{x} = a(\mathrm{ch}\,\frac{q(\vec{x})}{a^2}, \mathrm{sh}\,\frac{q(\vec{x})}{a^2})$.

VI.4.3. 1) $\frac{8}{15}$. 2) $\frac{\pi a^2}{3}(4\pi^2+3)$. 3) $6\pi a^2$. 4) $\frac{3\pi c^4}{8ab}$. 5) $\frac{3}{8}\pi a^2$. 6) $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$.

VI.4.4. 1) a^2. 2) $\frac{3\pi a^2}{2}$. 3) $\frac{a^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. 4) $\frac{\pi a^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. 5) $(\pi-1)\frac{a^2}{2}$. 6) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2\ln 2}{3})$. 7) $\pi(1-\frac{\pi}{4})a^2$.

VI.4.5. 1) $\sqrt{2}\pi a^2$. 2) a^2.

VI.4.6. 1) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 2) $\sqrt{2x_0(2x_0+a)} + a\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+a}}{\sqrt{a}}$. 3) $a\mathrm{sh}\,\frac{x_0}{a}$. 4) $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. 5) $\frac{e^2+1}{4}$. 6) $\ln\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{2})$. 7) $a\ln\frac{a}{b}$. 8) $4a(1+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}})$. 9) $6a$. 10) $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. 11) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$. 12) $8a$. 13) $2\pi^2 a$. 14) $2(\mathrm{ch}\,\frac{T}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,T}-1) - \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\mathrm{ch}\,\frac{T}{2}+\sqrt{\mathrm{ch}\,T}}{\sqrt{2}+1}$. 15) 5.

VI.4.7. 1) $\frac{a}{2}(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}))$. 2) $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. 3) $a(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$. 4) $\frac{3\pi a}{2}$. 5) $a(2\pi - th\pi)$. 6) $2+\frac{1}{2}\ln 3$.

VI.4.11. 1) $\frac{8\pi abc}{3}$. 2) $\frac{16}{3}a^3$. 3) $\frac{2(3\pi-4)}{9}a^3$. 4) $\frac{16}{15}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. 5) $\frac{\pi a^3}{2}$. 6) $\frac{4}{15}$. 7) $\frac{2^{\frac{5}{2}}\pi}{3}a^3$.

VI.4.12. 1) $\frac{3}{7}\pi ab^2$. 2) a) $\frac{16\pi}{15}$. b) $\frac{8\pi}{3}$. 3) a) $\frac{\pi^2}{2}$. b) $2\pi^2$. 4) i) $\frac{4}{15}\pi ab^2$. j) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. 5) a) $\frac{\pi}{2}$. b) 2π. 6) $2\pi^2 a^2 b$. 7) $\frac{8\pi a^3}{3}$. 8) $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$. 9) i) $6\pi^2 a^3$. j) $7\pi^2 a^3$. 10) i) $\frac{32}{102}\pi ab^2$. j) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$.

VI.4.13. 1) $\frac{4\pi a^2}{243}(21\sqrt{13} + 2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2})$. 2) $2a^2\sqrt{\pi^2+4c^2} + \frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+4c^2}}{2c}$, $c := \frac{b}{a}$. 3) i) $\frac{2\pi}{3}((2a+p)\sqrt{2ap+p^2} - p^2)$; j) $\frac{\pi}{4}((p+4a)\sqrt{2a(p+2a)} - p^2\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{p+2a}}{\sqrt{p}})$. 4) i) $2\pi b(b+a)\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; j) $2\pi(a^2+\frac{b^2}{\varepsilon}\ln(\frac{a}{b}(1+\varepsilon)))$, $\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 5) $\frac{12}{5}\pi a^2$. 6) i) $\pi a(2b + a\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a})$; j) $2\pi a(a + b\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - a\mathrm{ch}\,\frac{b}{a})$. 7) $4\pi a^2$. 8) i) $\frac{64}{3}\pi a^2$; j) $16\pi^2 a^2$; k) $\frac{32}{3}\pi a^2$. 9) $\frac{3(4\sqrt{2}-1)}{5}\pi a^2$. 10) $\frac{32}{5}\pi a^2$.

VI.4.14. $\frac{4\pi}{3}p^3$; $2\pi p^2(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$.

VII. FUNKCIJŲ SEKOS IR EILUTĖS.

VII.1. Pataškinis ir tolygusis konvergavimai.

VII.1.1. 1) i) Tolygiai; ii) pataškiui. 2) Tolygiai. 3) Pataškiui. 4) Tolygiai. 5) Tolygiai. 6) i) Tolygiai; ii) pataškiui; iii) tolygiai. 7) i) Pataškiui; ii) tolygiai. 8) Pataškiui. 9) Tolygiai. 10) Pataškiui. 11) Pataškiui. 12) Tolygiai. 13) Pataškiui. 14) Tolygiai. 15) Tolygiai. 16) i) Tolygiai; ii) pataškiui. 17) Tolygiai. 18) Tolygiai. 19) i) Pataškiui; ii) tolygiai. 20) Pataškiui. 21) Tolygiai. 22) Pataškiui. 23) Pataškiui. 24) Tolygiai. 25) i) Tolygiai, kai $t=1$, pataškiui, kai $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; ii) tolygiai. 26) i) Tolygiai; ii) pataškiui. 27) Pataškiui. 28) Pataškiui. 29) Pataškiui.

VII.1.9. 1) $A=(-\infty;0)\setminus\{-1\}$, $B=\mathbb{R}_+$, $C=\{0\}$. 2) $A=[-1;-\frac{1}{3}]\setminus\{-\frac{1}{2}\}$, $B=\mathbb{R}\setminus[-1;-\frac{1}{3}]$, $C=\emptyset$. 3) $A=\{1\}$, $B=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, $C=\{-1\}$. 4) $A=\mathbb{R}\setminus((-\frac{\sqrt{17}-3}{6};\frac{1}{3})\cup(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{17}+3}{6}))$, $B=E_1$, $C=\emptyset$, čia $E_1:=(-\frac{\sqrt{17}-3}{6};\frac{1}{3})\cup(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{17}+3}{6})$. 5) $A=\mathbb{R}\setminus E_1$, $B=E_1$, $C=\emptyset$, čia $E_1:=\cup_{k\in\mathbb{Z}}[\pi k-\frac{\pi}{6};\pi k+\frac{\pi}{6}]$. 6) $A=(-1;+\infty)\times(-\infty;0]$, $B=(-1;+\infty)\times(1;+\infty)$, $C=(-1;+\infty)\times(0;1]$. 7) $A=\{\vec{x}\in E: u\leqslant t\}$, $B=\{\vec{x}\in E: u>t+1\}$, $C=\{\vec{x}\in E: u\in(t;t+1]\}$. 8) $A=\mathbb{R}\setminus B$, $B=(-1;1)$, $C=\emptyset$. 9) $A=\mathbb{R}\setminus B$, $B=(-1;1)$, $C=\emptyset$. 10) $A=\{-1;1\}$, $B=E\setminus A$, $C=\emptyset$. 11) $A=\emptyset, B=E$, $C=\emptyset$. 12) $A=E\setminus\mathbb{R}_+, B=\mathbb{R}_+$, $C=\emptyset$. 13) $A=\mathbb{R}^2\setminus B, B=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus[-1;1])$, $C=\emptyset$. 14) $A=(0;e]\setminus\{2\}$, $B=\mathbb{R}_+\setminus A$, $C=\emptyset$. 15) $A=(-\infty;1]$, $B=\mathbb{R}\setminus A$, $C=\emptyset$.

VII.1.11. 1) i) Tolygiai; ii) pataškiui. 2) Tolygiai. 3) Pataškiui. 4) Tolygiai. 5) Tolygiai. 6) Pataškiui. 7) i) Pataškiui; ii) tolygiai. 8) Pataškiui. 9) Tolygiai. 10) Tolygiai.

VII.1.17. 1) $A=\mathbb{R}\setminus[0;1]$. 2) $A=\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k)$.

VII.2. Tolygusis konvergavimas ir analizės pagrindinės operacijos.

VII.2.1. 1) $\frac{1}{2}\ln 2$. 2) 1. 3) 1. 4) $\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-n+1}(-1)^k n^m C_{m+1}^k$.

VII.2.2. 1) $E=(-1;1)$, $f\in C(E)$. 2) $E=\mathbb{R}$, $f\in C(E\setminus\{0\})$. 3) $E=\mathbb{R}$, $f\in C(E)$. 4) $E=\mathbb{R}$, $f\in C(E)$. 5) $E=\mathbb{R}$, $f\in C(E)$. 6) $E=(-1;1)$, $f\in C(E)$. 7) $E=(-3;-1)\cup(1;3)$, $f\in C(E)$. 8) $E=\mathbb{R}\setminus[-\operatorname{ctg}1;\operatorname{ctg}1]$, $f\in C(E)$.

VII.2.3. 1) $E=(-\infty;0)$. 2) $E=(-1;1)$. 3) $E=(-1;+\infty)$. 4) $E=\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.

VII.2.4. 1) Neteisinga. 2) Teisinga.

VII.2.5. 1) $\int_a^b f_n=1-\frac{n}{4}\sin\frac{4}{n}$. 2) $\int_a^b f_n=\frac{1}{n^2}(\ln\frac{n+1}{n+2}-\frac{2}{n+2})$.

3) $\int_a^b f_n=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{n}+1)^3(\sqrt{n}+3)}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)^3}$.

VII.2.10. $f'(0)=\ln 2$, $f'(1)=1-\ln 2$, $f'(+\infty)=0$.

VII.2.11. 1) $E=\mathcal{D}$. 2) $E=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. 3) $E=\mathbb{R}$. 4) $E=\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. 5) $E=\mathbb{R}\setminus[0;2]$. 6) $E=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 7) $E=\mathbb{R}\setminus[-2;2]$. 8) $E=(-1;1)$. 9) $E=(-\infty;0)\setminus\{-1\}$. 10) $E=(-\infty;-1)$. 11) $E=\mathbb{R}$.

VII.2.15. 1) $E=(-1;1)$. 2) $E=(-\infty;0)$. 3) $E=(-1;1)$. 4) $E=\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. 5) $E=\mathbb{R}$.

VII.3. Laipsninės eilutės.

VII.3.1. 1) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = 1$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 1$, reliatyviai, kai $t \in (0;1]$, diverguoja, kai $t \leqslant 0$; jeigu $x = 1$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 1$, ir diverguoja, kai $t \leqslant 1$. 2) $R = \frac{1}{3}; (-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$. Jeigu $x = -\frac{4}{3}$, tai eilutė konverguoja reliatyviai; jeigu $x = -\frac{2}{3}$, tai eilutė diverguoja. 3) $R = 4; (-4;4)$. Jeigu $x \in \{-4;4\}$, tai eilutė diverguoja. 4) $R = +\infty; \mathbb{R}$. 5) $R = \frac{1}{e}; (-\frac{1}{e}; \frac{1}{e})$. Jeigu $x \in \{-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\}$, tai eilutė diverguoja. 6) $R = +\infty; \mathbb{R}$. 7) $R = 2; (-1;3)$. Jeigu $x = -1$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 2$, reliatyviai, kai $t \in (0;2]$, diverguoja, kai $t \leqslant 0$; jeigu $x = 3$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 2$, diverguoja, kai $t \leqslant 2$. 8) $R = 2^t; (-2^t; 2^t)$. Jeigu $x = -2^t$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 2$, diverguoja, kai $t \leqslant 2$; jeigu $x = 2^t$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 2$, reliatyviai, kai $t \in (0;2]$, diverguoja, kai $t \leqslant 0$. 9) $R = \min\{\frac{1}{u}; \frac{1}{v}\}$; $(-R;R)$. Jeigu $x = -R$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ : u < v\} =: E_1$, reliatyviai, kai $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus E_1$; jeigu $x = R$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $(u,v) \in E_1$, diverguoja, kai $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus E_1$. 10) $R = \max\{u;v\}; (-R;R)$. Jeigu $x = \{-R;R\}$, tai eilutė diverguoja, kai $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$. 11) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = \{-1;1\}$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, kai $t > 1$, ir diverguoja, kai $t \in (0;1]$. 12) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = \{-1;1\}$, tai eilutė konverguoja absoliučiai. 13) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = -1$, tai eilutė konverguoja reliatyviai, jeigu $x = 1$, tai eilutė diverguoja. 14) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = -1$, tai eilutė diverguoja; jeigu $x = 1$, tai eilutė konverguoja reliatyviai. 15) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x \in \{-1;1\}$, tai eilutė diverguoja. 16) $R = \frac{1}{4}; (-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Jeigu $x = \{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\}$, tai eilutė diverguoja. 17) $R = \frac{1}{3}; (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Jeigu $x = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$, tai eilutė diverguoja. 18) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = \{-1;1\}$, tai eilutė konverguoja absoliučiai. 19) $R = 1; (-1;1)$. Jeigu $x = \{-1;1\}$, tai eilutė konverguoja reliatyviai.

VII.3.2. 1) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 2) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 3) $\mathcal{D}_1 = (-1;+\infty)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 4) $\mathcal{D}_1 = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{4})$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 5) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus [-x_0; x_0]$, $x_0 := \operatorname{ctg} 1$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 6) $\mathcal{D}_1 = (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 7) $\mathcal{D}_1 = (\frac{1}{6}; \frac{1}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \{\frac{1}{6}\}$. 8) $\mathcal{D}_1 = (1;+\infty)$, $\mathcal{D}_2 = \{1\}$. 9) $\mathcal{D}_1 = (-\infty; -\frac{1}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \{-\frac{1}{2}\}$.

VII.3.3. 1) $a_n = -\frac{1}{a^{n+1}}$, $\mathcal{D}_1 = (-a;a)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 2) $b_n = -\frac{1}{(a-b)^{n+1}}$, $\mathcal{D}_1 = (b - |a-b|; b + |a-b|)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 3) $c_n = a^{n-1}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus [-|a|; |a|]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.

VII.3.4. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 4) $a_n = \frac{\ln^n a}{n!}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 6) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 8) $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 9) $a_n = n+1$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 10) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \{-\frac{1}{2}\}$. 11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3} x^n$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 13) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{6^n}$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4} x^n$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 15) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2^{n+1} + (-1)^n x_1^{n+1})$, $\mathcal{D}_1 = (-x_1; x_1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $x_1 := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_2 := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (skaičiai a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, vadinami *Fibonačio skaičiais*, jie tenkina sąlygą

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = a_1 = 1$).

VII.3.5. 1) $a_n = 1$, $0 \leqslant n \leqslant 2$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{D}_1 = (0;2)$. 2) $a_0 = e$, $a_1 = -\frac{e}{2}$, $a_2 = \frac{11}{24}e$, $a_3 = -\frac{7}{16}e$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$. 3) $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$, $a_7 = \frac{17}{315}$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. 4) $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$, $a_7 = -\frac{17}{315}$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. 5) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{45}$, $a_5 = -\frac{2}{945}$, $a_7 = -\frac{1}{4725}$, $\mathcal{D}_1 = (-\pi;\pi)$. 6) $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$, $a_3 = -\frac{1}{24}$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$.

VII.3.6. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \{-1;1\}$. 2) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 3) $x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\cos nt}{n} x^n$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$; $\mathcal{D}_2 = \{-1;1\}$, kai $t \in E_1$; $\mathcal{D}_2 = \{1\}$, kai $t \in E_2$; $\mathcal{D}_2 = \{-1\}$, kai $t \in E_3$. 5) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}$, $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 7) $\operatorname{arc\,tg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $\mathcal{D}_2 = \{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$. 8) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}$, $\mathcal{D}_1 = (-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$, $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 10) $2x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$, $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.

VII.3.7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} g^{2n}(x)$, $\mathcal{D}_1 = (-2;0)$, $\mathcal{D}_2 = \{-2;0\}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)g^n(x)$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} g^{2n-1}(x)$, $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$. 4) $g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} g^{n+1}(x)$, $\mathcal{D}_1 = (-\frac{1}{2};+\infty)$, $\mathcal{D}_2 = \{\frac{-1}{2}\}$.

VII.3.9. $E_0 = 1$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{E_n - k}{(2k)!(2n-2k)!} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{D} = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

VII.3.10. 1) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1}$, $r_1 = \sqrt{r}$. 2) $b_0 = a_0$, $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $r_1 = r$. 3) $b_0 = 0$, $b_n = a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $r_1 = r$. 4) $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $n \geqslant 0$, $r_1 = r_0$. 5) $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$, $n \geqslant 0$, $r_1 = r$.

VII.3.15. 1) 0, kai $n = 2k+1$; $\frac{(-1)^k 2^{2k}}{(k+1)(2k+1)}$, kai $n = 2k$; $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 2) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. 3) $-\frac{n!}{n+2}$.

VII.3.16. 1) $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in \mathcal{D}_1$. 2) $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \{-1;1\}$; $\operatorname{arc\,tg} x$, $x \in [-1;1]$. 3) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $\operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $\mathcal{D}_1 = [-1;1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $f(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $x \in \mathcal{D}_1 \setminus \{0;1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 5) $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \{-1\}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x \in [-1;1)$. 6) $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $\frac{x}{(1-x)^2}$, $x \in \mathcal{D}_1$. 7) $\mathcal{D}_1 = (-1;1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, $x \in \mathcal{D}_1$. 8) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $\frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2}$. 9) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$; $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(0) = \frac{1}{2}$.

VII.3.17. 1) $+\infty$. 2) $+\infty$. 3) $+\infty$.

VII.3.18. 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) $2\ln 2 - 1$. 4) $\frac{1}{4}$. 5) $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$. 6) $\ln 2 - \frac{1}{2}$. 7) $\frac{3}{4}$. 8) 1. 9) $2(1 - \ln 2)$. 10) $2e$.

VII.3.19. 1) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = e^x \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k$, $x \in \mathcal{D}_1$, čia koeficientai $\{\alpha_k : 0 \leqslant k \leqslant m\}$ apibrėžiami lygybe $\alpha_0 \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=0}^{k-1}(n^k - j) = P(n)$. 2) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 4)e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathcal{D}_1$. 3) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = \frac{(x^3 + x^2 + 1)e^{-x} - 1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(0) = -1$. 4) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = (1 - \frac{x^2}{2})\cos x - \frac{x}{2}\sin x$, $x \in$

$\mathcal{D}_1$. 5) $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = \frac{1}{4}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{sh}\sqrt{x} - \mathrm{ch}\sqrt{x}\Big)$, kai $x \in \mathbb{R}_+$; $f(0) = 0$; $f(x) = \frac{1}{4}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|} - \cos\sqrt{|x|}\Big)$, kai $x \in (-\infty; 0)$. 6) $\mathcal{D}_1 = (-1; 1)$, $\mathcal{D}_2 = \{-1\}$, $f(x) = \ln\frac{1}{1-x}$, $x \in [-1; 1)$. 7) $\mathcal{D}_1 = [-1; 1]$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = 2x\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \ln(1+x^2)$, $x \in \mathcal{D}_1$. 8) $\mathcal{D}_1 = (-1; 1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $x \in \mathcal{D}_1$. 9) $\mathcal{D}_1 = (-2; 2)$, $\mathcal{D}_2 = \{-2\}$, $f(x) = (1-\frac{x}{2})^{-\frac{1}{3}} - 1$, $x \in [-2; 2)$. 10) $\mathcal{D}_1 = (-1; 1)$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in \mathcal{D}_1$.

VIII. RYMANO–STYLTJESO INTEGRALAS. BAIGTINĖS VARIACIJOS FUNKCIJOS.

VIII.1. Rymano–Styltjeso integralas.

VIII.1.1. 1) $\int\limits_0^1 f\,d\alpha = 0$, $\int\limits_0^1 f d\alpha = \alpha(1) - \alpha(0)$; jeigu $\alpha(1) > \alpha(0)$, tai $f \notin \mathcal{R}S([0;1];\alpha)$. 2) $\int\limits_0^1 f\,d\alpha = \int\limits_0^1 f\,d\alpha = \frac{2}{3}$, $f \in \mathcal{R}S([0;1];\alpha)$.

VIII.1.4. 1) $\frac{\pi}{2} - 1$. 2) $\frac{(N-1)N}{2}$. 3) $\frac{17}{6}$. 4) $\frac{34}{3}$. 5) $\frac{301}{20}$.

VIII.1.11. 1) $\alpha(x) = \alpha(0)$, $x \in \big[0; \frac{1}{N}\big)$; $\alpha(x) = \alpha(0) + \frac{k}{N}$, $x \in \big[\frac{k}{N}; \frac{k+1}{N}\big)$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$; $\alpha(1) = \alpha(0) + 1$.

VIII.1.12. 1) $f(x) = 1$, $x \in [a; b]$.

VIII.1.14. 1) $\alpha(1) - \alpha(1-0)$. 2) $\alpha(0+0) - \alpha(0) + \alpha(1) - \alpha(1-0)$.

VIII.1.15. α pastovi intervale $[a; b]$.

VIII.1.16. $\alpha(x+0) = \alpha(0) + 1 + x$, $x \in [0; 1)$; $\alpha(x) = \alpha(1)$, $x \in [1; 2]$.

VIII.1.17. α pastovi intervale $[a; b]$.

VIII.1.18. $\alpha(x) = \alpha(1)$, $x \in (0; 1]$.

VIII.2. Baigtinės variacijos funkcijos.

VIII.2.1.

1) $v_f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 2 - \sin x, & x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ 4 + \sin x, & x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi]; \end{cases}$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ 2 + \sin x, & x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \sin x, & x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ 2, & x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi]; \end{cases} \quad V_f([0; 2\pi]) = 4.$$

2) $v_f(x) = \begin{cases} 2k + |\sin x|, & x \in [k\pi; \frac{2k+1}{2}\pi], 0 \leqslant k \leqslant 9, \\ 2k - |\sin x|, & x \in (\frac{2k-1}{2}\pi; k\pi], 1 \leqslant k \leqslant 10; \end{cases}$

$$v_{f_+}(x) = \begin{cases} k + |\sin x|, & x \in [k\pi; \frac{2k+1}{2}\pi], 0 \leqslant k \leqslant 9, \\ k, & x \in (\frac{2k-1}{2}\pi; k\pi], 1 \leqslant k \leqslant 10; \end{cases}$$

$$v_{f_-}(x) = \begin{cases} k, & x \in [k\pi; \frac{2k+1}{2}\pi], 0 \leqslant k \leqslant 9, \\ k - |\sin x|, & x \in (\frac{2k-1}{2}\pi; k\pi], 1 \leqslant k \leqslant 10; \end{cases} \quad V_f([0; 10\pi]) = 20.$$

3) $$v_f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1; 0], \\ 2 + x - x^2, & x \in (0; \frac{1}{2}], \\ \frac{5}{2} + x^2 - x, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases}$$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 1 + x - x^2, & x \in (0; \frac{1}{2}], \\ \frac{5}{4}, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; \frac{1}{2}], \\ \frac{5}{4} + x^2 - x, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases} \quad V_f([-1; 1]) = \frac{5}{2}.$$

4) $$v_f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x = 0, \\ 2, & x \in (0; 1]; \end{cases} ;$$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; 1], \end{cases} ;$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 1]; \end{cases} \quad V_f([-1; 1]) = 2.$$

5) $$v_f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x, & x \in (0; 1), \\ 4, & x = 1; \end{cases}$$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; 1), \\ 3, & x = 1; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = x\,,\ x \in [0; 1];\ V_f([0; 1]) = 4.$$

6) $$v_f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1), \\ 6, & x = 1, \\ 9 + x^2, & x \in (1; 2]; \end{cases}$$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1), \\ 5 + x^2, & x \in [1; 2]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1]), \\ 4, & x \in (1; 2]; \end{cases} \quad V_f([0; 2]) = 13.$$

7) $v_f(x) = x + 1\,,\ x \in [-1; 1]\,;$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ x, & x \in (0; 1]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; 1]; \end{cases} \quad V_f([-1; 1]) = 2.$$

8) $v_f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ 1+x, & x \in [1;2), \\ 2+x, & x \in [2;3), \\ 6, & x = 3; \end{cases}$ $\qquad v_{f+}(x) = x\,,\ x \in [0;3]\,;$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2), \\ 2, & x \in [2;3), \\ 3, & x = 3; \end{cases} \qquad V_f([0;3]) = 6\,.$$

9) $v_f(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2, & x \in [-1; \frac{1}{2}], \\ \frac{5}{2} - x + x^2, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases}$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2, & x \in [-1; \frac{1}{2}], \\ \frac{9}{4}, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{4} - x + x^2, & x \in (\frac{1}{2}; 1]; \end{cases} \qquad V_f([-1;1]) = \frac{5}{2}\,.$$

10) $v_f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1;0], \\ 1 + x^2, & x \in (0;1]; \end{cases}$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ x^2, & x \in (0;1]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1;0], \\ 1, & x \in (0;1]; \end{cases} \qquad V_f([-1;1]) = 2\,.$$

11) $v_f(x) = \begin{cases} 2 + x + x^3, & x \in [-1;0], \\ 2 + x - x^3, & x \in (0; \frac{1}{\sqrt{3}}], \\ \frac{2(9+2\sqrt{3})}{9} - x + x^3, & x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]; \end{cases}$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 2 + x + x^3, & x \in [-1;0], \\ 2, & x \in (0; \frac{1}{\sqrt{3}}], \\ \frac{2(9+\sqrt{3})}{9} - x + x^3, & x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ x - x^3, & x \in (0; \frac{1}{\sqrt{3}}], \\ \frac{2\sqrt{3}}{9}, & x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]; \end{cases} \qquad V_f([-1;1]) = \frac{2(9+2\sqrt{3})}{9}\,.$$

12) $v_f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \in [0;\pi], \\ 3 + \cos x, & x \in (\pi; 2\pi]; \end{cases}$

$$v_{f+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;\pi], \\ 1 + \cos x, & x \in (\pi; 2\pi]; \end{cases}$$

$$v_{f-}(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \in [0;\pi], \\ 2, & x \in (\pi; 2\pi]; \end{cases} \qquad V_f([0;2\pi]) = 4\,.$$

VIII.2.3. $B = \{(u,v) \in E : u > v\}$.

VIII.2.12. 1) Reliatyviai konverguoja. 2)–5) Absoliučiai konverguoja.

VIII.3. Rymano–Styltjeso integralas pagal aprėžtos variacijos funkciją.

VIII.3.1. 1) -5. 2) $-\frac{17}{4}$. 3) 1. 4) $2\sum_{k=1}^{N}(-1)^k k^2$. 5) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k(3k^4+(k-1)^4)$. 6) $2\sum_{k=1}^{2N-1}(-1)^k(1+k)k^2+(1+2N)4N^2+\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k-1}(2k-1+\frac{2}{3}(2k^2-1))$.

LITERATŪRA

1. Misevičius E., Kamuntavičius D., Norvidas S. Matematinės analizės pratybų užduotys. – V.: Vilniaus universiteto leidykla, 1996, 124 p.
2. Kubilius K., Saulis L. Matematinės analizės uždavinynas I. – V.: TEV, 2000, 144 p.
3. Demidovič B.P. Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. – M.: Nauka, 1990, 624 p.
4. Dorogovcev A.J. Matematičeskij analiz: Sbornik zadač. – K.: Višča škola, 1987, 409 p.
5. Kudriavcev L.D., Kutasov A.D., Čechlov V.J., Šabunin M.I. Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. – M.: Nauka, 1984, 592 p.
6. Vinogradova J.A., Olechnik S.N., Sadovničij V.A., Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. – M.: Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1988, 416 p.