3 pratybos. Vektoriai erdvėje

Paulius Drungilas

Turinys

Tarkime, taškas $C(x_3, y_3, z_3)$ priklauso atkarpai, jungiančiai taškus $A(x_1, y_1, z_1)$ ir $B(x_2, y_2, z_2)$, ir dalija šią atkarpą santykiu $\lambda = |AC| / |CB|$. Tada taško C koordinatės yra

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Vektoriaus $\vec{a}\,(x, y, z)$ **ilgis**, žymimas $|\vec{a}|$, yra skaičius $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Dviejų vektorių, $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$, **skaliarinė sandauga** yra skaičius

$$\vec{a}\cdot\vec{b} := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 .$$

Kampas φ tarp vektorių $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ skaičiuojamas pagal formulę

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Skaičius $ad - bc$ vadinamas skaičių a, b, c, d **determinantu** ir žymimas

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Skaičių a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} **determinantu** vadinamas skaičius, apibrėžtas tokia lygybe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Vektorinė sandauga. Dviejų vektorių, $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ ir $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$, **vektorinė** sandauga yra vektorius

$$\vec{a} \times \vec{b} := \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Vektorius $\vec{a} \times \vec{b}$ turi šias savybes :

1) Vektorius $\vec{a} \times \vec{b}$ yra statmenas vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$;
2) Vektoriaus $\vec{a} \times \vec{b}$ ilgis lygus lygiagretainio, kurio kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, plotui;
3) Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{a} \times \vec{b}$ sudaro dešininę sistemą (apie tai pašnekėsim per pratybas).

Taigi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai $\vec{a} \times \vec{b} = \mathcal{O}$, čia $\mathcal{O}$ – nulinis vektorius.

Vektorinė sandauga taip pat pasižymi tokiomis savybėmis:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
b) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \;\; \lambda \in \mathbb{R}$;
c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Mišrioji sandauga. Trijų vektorių $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ ir $\vec{c}\,(x_3, y_3, z_3)$ **mišrioji sandauga** yra skaičius

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Mišrioji sandauga turi šias savybes :

1) Mišriosios sandaugos modulis $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ lygus gretasienio, kurio kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, tūriui;
2) Piramidės, kurios kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, tūris lygus
$$\frac{1}{6} \cdot |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \,;$$
3) Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra komplanarūs (guli vienoje plokštumoje) tada ir tik tada, kai jų mišrioji sandauga $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

Trys erdvės vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ vadinami **baze**, jei $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$. Jei vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra erdvės bazė, tai bet kurį vektorių $\vec{d}$ galima vienareikšmiškai išreikšti per bazės vektorius :

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} ,$$

čia $x, y, z \in \mathbb{R}$. Skaičiai x, y ir z vadinami vektoriaus $\vec{d}$ koordinatėmis bazėje $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$.

1. **pavyzdys.** Įsitikinsime, kad vektoriai $\vec{a}\,(1,2,1)$, $\vec{b}\,(1,1,2)$ ir $\vec{c}\,(0,1,1)$ yra erdvės bazė ir rasime vektoriaus $\vec{d}(5,5,6)$ koordinates toje bazėje.

Sprendimas. Mišrioji sandauga lygi

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,.$$

Todėl, vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra erdvės bazė. Dabar reikia rasti skaičius x, y ir z, tenkinančius lygybę

$$\vec{d} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + z\cdot\vec{c}\,.$$

Sulyginę kairės ir dešinės pusių x-o koordinates, gauname lygybę $5 = x+y$. Analogiškai, sulyginę kairės ir dešinės pusių y-o ir z-o koordinates, gauname lygybes $5 = 2x+y+z$ ir $6 = x+2y+z$ atitinkamai. Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y & = 5 \\ 2x+y+z & = 5 \\ x+2y+z & = 6 \end{cases},$$

gauname $x = 2$, $y = 3$ ir $z = -2$. Taigi $\vec{d} = (2,3,-2)$ bazėje $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$. □

2. **pavyzdys.** Trikampio viršūnės yra taškai $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ ir $C(-5,2,\,-6)$. Rasime pusiaukampinės AM ilgį.

Sprendimas. Rasime taško M koordinates. $\vec{AB}\ (1,2,1)$, $\vec{AC}\ (-6,3,-3)$, $|\ \vec{AB}\ | = \sqrt{6}$, $|\ \vec{AC}\ | = 3\sqrt{6}$. Žinome pusiaukampinės savybę $|BM|\,/\,|MC| = |AB|\,/\,|AC| = 1/3$. Taigi taško M koordinatės yra $M(1/4, 5/4, -3)$ (žiūrėti pirmą formulę šiose pratybose). Tada $\vec{AM}\ (-3/4, 9/4, 0)$ ir $|AM| = 3\sqrt{10}/4$. □

Uždaviniai.

1*. Duoti trys vektoriai $\vec{a} = (1,3,1)$, $\vec{b} = (2,1,-3)$ ir $\vec{c} = (4,3,7)$. Apskaičiuokite a) $\vec{a}\times\vec{b}$; b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$; c) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$; d) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$; e) $\vec{a}\times(\vec{b}+2\vec{c})$.
Ats.: a) $(-10,5,-5)$; b) $(32,14,-74)$; c) $(50,50,-50)$; d) $(-120,-60,$ $180)$; e) $(26,-1,-23)$.

2*. Raskite vektorių, statmeną vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$: a) $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$; b) $\vec{a} = (0, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, 4)$; c) $\vec{a} = (4, 1, 5)$, $\vec{b} = (7, 2, -3)$; d) $\vec{a} = (4, 2, 4)$, $\vec{b} = (1, 1, 7)$.

Ats.: a) $(3, 1, -5)$; b) $(11, 3, -2)$; c) $(-13, 47, 1)$; d) $(10, -24, 2)$.

3*. Ar vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra vienoje plokštumoje?

a) $\vec{a} = (1, 2, 4)$, $\vec{b} = (2, 4, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 7)$; b) $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 4, 1)$, $\vec{c} = (4, 9, 5)$; c) $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 2, 2)$, $\vec{c} = (4, 4, 3)$.

Ats.: a) ne; b) taip; c) taip.

4*. Raskite lygiagretainio, kurio kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, plotą :

a) $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 2, 5)$; b) $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, 3)$; c) $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 4)$.

Ats.: a) $\sqrt{30}$; b) $3\sqrt{2}$; c) 0.

5*. Duotas vektorius $\vec{a}\,(1, 2, 1)$. Raskite vektorių $\vec{b}$, tenkinantį sąlygas $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, -3)$ ir $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$.

Ats.: $\vec{b}\,(2, 1, 1)$.

6*. Duoti keturi vektoriai $\vec{a}\,(2, 1, 0)$, $\vec{b}\,(1, -1, 2)$, $\vec{c}\,(2, 2, -1)$ ir $\vec{d}\,(3, 4, -3)$. Kiekvieną vektorių išreikškite kitais trim.

Ats.: $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$ $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$, $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

7*. Duoti vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ir $\vec{a}$ yra statmeni.

8*. Duoti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Įrodykite, kad vektoriai

$$\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \quad \text{ir} \quad \vec{a}$$

yra statmeni.

9*. Duoti trys nenuliniai erdvės vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, kurie yra statmeni vienas kitam, o realieji skaičiai x_1, x_2 ir x_3 yra tokie, kad

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \mathcal{O}.$$

Įrodykite, jog $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

10. Įrodykite, jog bet kuriems erdvės vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ teisingos tokios lygybės:

a) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$.

11. Tegul α – kampas tarp erdvės vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Įrodykite Kosinusų teoremą:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha.$$

12. Tegul $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ – nenuliniai erdvės vektoriai. Įrodykite, jog iš lygybės $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ nebūtinai išplaukia vektorių lygybė $\vec{b} = \vec{c}$.
13. Duoti taškai $A(1,3,-1)$ ir $B(-4,5,2)$. Raskite šių taškų koordinates:
    a) atkarpos AB vidurio taško;
    b) taškų, priklausančių atkarpai AB ir dalijančių šią atkarpą į tris lygias dalis;
    c) taško P, priklausančio atkarpai AB ir dalijančio šią atkarpą santykiu $AP : PB = 1 : 4$;
    d) taško P, priklausančio atkarpai AB ir dalijančio šią atkarpą santykiu $AP : PB = 2 : 3$.

    Ats.: a) $(-\frac{3}{2}, 4, \frac{1}{2})$; b) $(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 0)$, $(-\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, 1)$; c) $(0, \frac{17}{5}, -\frac{2}{5})$; d) $(-1, \frac{19}{5}, \frac{1}{5})$.
14. Duotos trys lygiagretainio viršūnės $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ ir $C(1,2,-3)$. Raskite šio lygiagretainio viršūnės, priešingos viršūnei B, koordinates.

    Ats.: $(9,-5,6)$.
15. Duotos dvi gretimos lygiagretainio viršūnės $A(-2,6)$ ir $B(2,8)$ bei šio lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas $M(2,2)$. Raskite likusias dvi šio lygiagretainio viršūnes.

    Ats.: $(6,-2)$ ir $(2,-4)$.
15. Koordinačių ašyje $\mathcal{O}y$ raskite tokį tašką M, kuris būtų vienodai nutolęs nuo taškų $A(1,-4,7)$ ir $B(5,6,-5)$.

    Ats.: $M(0,1,0)$.
16. Duotos trikampio ABC viršūnės $A(3,-1,5)$, $B(4,2,-5)$ ir $C(-4,0,3)$. Raskite pusiaukraštinės, išvestos iš viršūnės A, ilgį.

    Ats.: 7.
17. Duotos trikampio ABC viršūnės $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ ir $C(-6,3,-4)$. Raskite šio trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško koordinates.

    Ats.: $(-1,1,-3)$.

18. Įrodykite, jog bet kuriems erdvės vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ teisinga lygybė $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b})$.
19. Kokias sąlygas turi tenkinti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kad vektoriai $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ būtų kolinearūs?
20. Duoti erdvės vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių abiejų ilgis yra 5, o kampas tarp šių vektorių lygus $\pi/4$. Raskite trikampio, kurio dvi gretimos kraštinės yra vektoriai $\vec{a}-2\vec{b}$ ir $3\vec{a}+2\vec{b}$, plotą.
    Ats.: $50\sqrt{2}$.
21. Erdvės vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ tenkina lygybę $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \mathcal{O}$. Įrodykite, jog
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}.$$
22. Raskite trikampio, kurio viršūnės yra taškai $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ ir $C(4,3,2)$, plotą.
    Ats.: $2\sqrt{6}$.
23. Duotos trikampio ABC viršūnės $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ ir $C(1,3,-1)$. Raskite šio trikampio aukštinės, nuleistos iš viršūnės B, ilgį.
    Ats.: 5.
24. Trys nenuliniai erdvės vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ tenkina lygybes
$$\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}, \quad \vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \quad \text{ir} \quad \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}.$$
    Raskite šių vektorių ilgius ir kampus tarp jų.
25. Įrodykite, jog bet kuriems erdvės vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ teisinga lygybė
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$
26. Įrodykite, jog taškai $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ ir $D(2,1,3)$ priklauso vienai plokštumai.
27. Duotas tetraedras, kurio viršūnės yra taškai $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ ir $D(3,4,-3)$. Raskite šio tetraedro aukštinės, išvestos iš viršūnės D, ilgį.
    Ats.: $3\sqrt{2}$.
28. Įrodykite šias mišriosios sandaugos savybes:
    a) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\Big(\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b})\Big) = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
    b) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\Big((\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\Big) = 3\,\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
    c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\Big((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\Big) = 2\,\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.