Algebros egzaminas

2010-01-13

1. Ar egzistuoja kvadratinė forma $f(x_1, x_2, x_3)$ su sveikaisiais koeficientais, tenkinanti sąlygą a) $f(1, 0, 0) = -2009$; b) $f(1, 0, 0) = 2010$; c) $f(3, 3, 3) = 17$; d) $f(2, 2, 2) = 6$; e) $f(3, 3, 3) = 54$?

2. Įrodykite, jog kvadratinės formos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 11x_2^2 + 33x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 36x_2x_3$$

ir

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 18y_2^2 + 40y_3^2 + 8y_1y_2 - 6y_1y_3 - 40y_2y_3$$

yra kongruenčios ir raskite kintamųjų keitinį, su kuriuo iš kvadratinės formos $f(x_1, x_2, x_3)$ gaunama kvadratinė forma $g(y_1, y_2, y_3)$. (Kitaip sakant, rasti tokį keitinį $X = YT$, kad $g(Y) = f(YT)$.)

3. Ar neigiamai apibrėžtos kvadratinės formos matricos determinantas gali būti teigiamas?

4. Ar atvaizdis $< \cdot, \cdot >: \mathrm{C}([-1, 1]) \times \mathrm{C}([-1, 1]) \to \mathbb{R}$

$$a) \;\; < a(t), b(t) > := \int_{-1}^{1} a(t) b(t^2)\, dt;$$

$$b) \;\; < a(t), b(t) > := \int_{-1}^{1} a(-t) b(-t)\, dt;$$

yra tiesinės erdvės $\mathrm{C}([-1, 1])$ skaliarinė sandauga? (Erdvę $\mathrm{C}([-1, 1])$ sudaro tolydžios intervale $[-1, 1]$ funkcijos.)

5. Raskite vektoriaus $v = (17, 7, 1, 7)$ projekciją ir statmenį į (erdvės $\mathbb{R}^4$) poerdvį $U =< (1, 2, 1, 1), (3, 0, 2, 1) >$.

6. Raskite matricos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

tikrinį vektorių (bent vieną), atitinkantį didžiausią tikrinę reikšmę.

Prašau spausdintinėmis raidėmis užrašyti vardą ir pavardę.

Rezultatus sausio 14 d. galima bus rasti čia: www.mif.vu.lt/~drungilas