3 pratybos. Tiesiniai atvaizdžiai

Paulius Drungilas ir Jonas Jankauskas

Turinys

Kas yra tiesinis atvaizdis? Tarkim, $(V, +)$ ir $(W, +)$ – dvi tiesinės erdvės virš kūno K. Atvaizdis (funkcija) $f : V \to W$ yra vadinamas tiesiniu, jeigu jis tenkina du svarbius reikalavimus:

1) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ visiems $v \in V, \alpha \in K$;
2) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ visiems vektoriams $u, v \in V$.

Taigi tiesinės funkcijos išsaugo abu tiesinius veiksmus (vektorių sudėtį ir daugybą iš skaliaro).

1. **pavyzdys.** Įrodysime, kad atvaizdis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, apibrėžtas lygybe

$$f(x_1, x_2) := (2x_1 - x_2, 3x_1 + x_2),$$

yra tiesinis.

Iš tikrųjų, reikia patikrinti dvi apibrėžimo sąlygas. Tegul α - bet koks realus skaičius. Tada $\alpha v = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Pagal atvaizdžio f apibrėžimą,

$$f(\alpha v) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, 3\alpha x_1 + \alpha x_2) = \alpha(2x_1 - x_2, 3x_1 + x_2) = \alpha f(v).$$

Taigi pirmoji sąlyga tenkinama. Tikriname antrąją. Tegul $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Tuomet $u+v = (x_1+y_1, x_2+y_2)$. Pagal atvaizdžio apibrėžimą,

$$f(u + v) = (2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), 3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) =$$
$$= (2x_1 - x_2, 3x_1 + x_2) + (2y_1 - y_2, 3y_1 + y_2) = f(u) + f(v).$$

Vadinasi, f yra tiesinis atvaizdis.

2. **pavyzdys.** Tolydžių intervale $[0, 1]$ realių funkcijų erdvėje apibrėžtas atvaizdis f, kuris funkciją $v = v(t)$ atvaizduoja į skaičių $f(v) = \int_0^1 v(t)dt$. Patikrinkite, ar tai yra tiesinis atvaizdis.

Sprendimas. Tegul α - bet koks realusis skaičius, o funkcijos $u(t), v(t)$ yra tolydžios intervale $[0,1]$. Pagal integralo savybes, turime:

$$f(\alpha v) = \int_0^1 \alpha v(t)dt = \alpha \int_0^1 v(t)dt = \alpha f(v),$$

$$f(u+v) = \int_0^1 (u(t)+v(t))dt = \int_0^1 u(t)dt + \int_0^1 v(t)dt = f(u) + f(v).$$

Taigi f yra tiesinis atvaizdis iš erdvės $V = C[0,1]$ į erdvę $W = \mathbb{R}$. $\square$

Žinoma, toli gražu ne kiekvienas atvaizdis yra tiesinis.

3. **pavyzdys.** Patikrinkite, ar funkcija $f(x) = x^2$ yra yra tiesinis atvaizdis iš erdvės $\mathbb{R}$ į $\mathbb{R}$.

Sprendimas. Užtenka parodyti, kad nors vienas reikalavimas netenkinamas. Mes patikrinsime abu. Tegul $x \neq 0, \alpha \neq 0, 1$. Tada

$$f(\alpha x) = \alpha^2 x^2 \neq \alpha x^2 = \alpha f(x),$$

Toliau, tegul x, y yra nelygūs nuliui skaičiai. Tuomet

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = f(x+y).$$

Vadinasi, nė viena savybė negalioja. $\square$

Kas yra tiesinio atvaizdžio matrica? Tarkime, kad abi nagrinėjamos tiesinės erdvės V ir W yra baigtinės dimensijos,

$$\dim_K V = m, \qquad \dim_K W = n.$$

Išsirinkime jose bazes: tegul $v_1, v_2, \ldots, v_m$ yra erdvės V bazė, o $w_1, w_2, \ldots, w_n$ yra erdvės W bazė. Tegul $f : V \to W$ yra tiesinis atvaizdis. Išreikškime bazinių vektorių $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vaizdus erdvės W baziniais vektoriais:

$$\begin{array}{ll} f(v_1) & = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{12}w_2 + \cdots + \alpha_{1n}w_n \\ f(v_2) & = \alpha_{21}w_1 + \alpha_{22}w_2 + \cdots + \alpha_{2n}w_n \\ \cdots & \qquad\qquad \cdots \\ f(v_m) & = \alpha_{m1}w_1 + \alpha_{m2}w_2 + \cdots + \alpha_{mn}w_n. \end{array}$$

Tvarkingai surašę koordinates α_{ij} į $m \times n$ matmenų lentelę, gauname **tiesinio atvaizdžio f matricą** nurodytose bazėse:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Žinodami tiesinio atvaizdžio matricą, galime suskaičiuoti bet kurio vektoriaus $v \in V$ vaizdą $f(v)$. Tarkime, kad

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_m v_m,$$

t. y. vektoriaus v koordinatės bazėje v_1, v_2, $\dots$, v_m yra $v = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$. Tuomet vektoriaus v vaizdo

$$f(v) = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_n w_n$$

koordinatės $f(v) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ erdvės W bazėje w_1, w_2, $\dots$, w_n apskaičiuojamos taip:

$$f(v) = vA = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

4. **pavyzdys.** Tiesinis atvaizdis f trimatės erdvės V bazinius vektorius v_1, v_2, v_3 atvaizduoja į dvimatę erdvę W:

$$\begin{array}{rcrcr} f(v_1) & = & -w_1 & + & 4w_2, \\ f(v_2) & = & 5w_1 & + & 3w_2, \\ f(v_3) & = & 2w_1 & - & 5w_2, \end{array}$$

kur w_1 ir w_2 yra W baziniai vektoriai. Užrašykite tiesinio atvaizdžio matricą ir suskaičiuokite vektoriaus $v = 7v_1 - 2v_2 - v_3$ vaizdą $f(v)$.

Sprendimas. Tvarkingai surašę erdvės W bazinių vektorių v_1, v_2, v_3 vaizdų koordinates, gauname 3×2 matricą

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vektoriaus v koordinatės bazėje v_1, v_2, v_3 yra $v = (7, -2, -1)$, todėl atlikę matricų daugybos veiksmus, gauname

$$f(v) = vA = (7, -2, -1) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = (-19, 27).$$

Taigi $f(v) = -19w_1 + 27w_2$. □

5. **pastaba.** Jeigu tiesinės erdvės V ir W sutampa, ($V = W$, $m = n$), tai atvaizdis $f : V \to V$ yra vadinamas erdvės V **tiesine transformacija** pasirinktoje bazėje ($v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, $\dots$, $v_n = w_n$). Tokių atvaizdžių matricos yra kvadratinės $n \times n$ matricos.

6. **pavyzdys.** Raskite erdvės $\mathbb{R}^3$ tiesinės transformacijos

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2)$$

matricą standartinėje bazėje e_1, e_2, e_3, bei vektoriaus $v = (1, 1, 1)$ vaizdą.

Sprendimas. Standartinė $\mathbb{R}^3$ bazė yra

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

Taigi

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f(e_1) & = & (1, 0, 4) & = & e_1 & + & 0e_2 & + & 4e_3; \\ f(e_2) & = & (0, 2, -1) & = & 0e_1 & + & 2e_2 & - & e_3; \\ f(e_3) & = & (-1, 1, 0) & = & -e_1 & + & e_2 & + & 0e_3. \end{array}$$

Vadinasi, tiesinio atvaizdžio matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Įsistatę koordinates, gauname $f(1, 1, 1) = (0, 3, 3)$. Tas pats būtų, jei skaičiuotume $f(v) = vA$. $\square$

7. **pavyzdys.** Raskite matricą tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$, kuris tiesinės erdvės V vektorius $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, -1, -5)$, $u_3 = (2, 5, 5)$ atvaizduoja į vektorius $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$ (vektorių koordinatės ir matrica duotos kažkurioje fiksuotoje V bazėje).

Sprendimas. Konkreti erdvės V bazė nėra duota - bet mums jos ir nereikia, nes žinome koordinates. Kadangi $dim_K V = 3$, ieškoma matrica yra 3×3. Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

kur $\alpha_{i,j}$ yra nežinomi koeficientai. Padauginę vektorius u_1, u_2, u_3 iš matricos A j-ojo stulpelio, gausime vektorių v_1, v_2, v_3 j-tąsias koordinates. Todėl galime sudaryti lygčių sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha_{11} & +2\alpha_{21} & +3\alpha_{31} & = & 1 \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{21} & -5\alpha_{31} & = & 0 \\ 2\alpha_{11} & +5\alpha_{21} & +5\alpha_{31} & = & -1 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha_{12} & +2\alpha_{22} & +3\alpha_{32} & = & 0 \\ -\alpha_{12} & -\alpha_{22} & +5\alpha_{32} & = & 1 \\ 2\alpha_{12} & +5\alpha_{22} & +5\alpha_{32} & = & 1 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha_{13} & +2\alpha_{23} & +3\alpha_{33} & = & 1 \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & -5\alpha_{33} & = & 1 \\ 2\alpha_{13} & +5\alpha_{23} & +5\alpha_{33} & = & 0 \end{array} \right..$$

Spręsti kiekvieną atskirai reiktų didvyriško ryžto. Bet pastebėkime, kad koeficientai kairėje lygčių pusėje yra vienodi - skiriasi tik sistemų laisvieji nariai. Todėl galime atlikti Gauso veiksmus trijose sistemose vienu metu. Surašykime visas lygtis į vieną matricą:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Šios matricos eilutės kairėje pusėje sudarytos iš vektorių u_1, u_2, u_3, dešinėje - iš vektorių v_1, v_2, v_3. Atlikime Gauso veiksmus su jos eilutėmis, kad kairė pusė pavirstų į vienetinę matricą:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 27 & -2 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Gautos matricos dešinės pusės stulpeliai - pradinių lygčių sistemų sprendiniai. Todėl ieškoma matrica yra:

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -2 & 25 \\ -7 & 1 & -6 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

8. **pastaba.** Šis būdas tinka spręsti bendroms matricų lygtims $AX = B$, kur A, B - dvi žinomos matricos, X - nežinoma matrica. Mes jau jį naudojome skaičiuoti atvirkštinei matricai.

Kaip apskaičiuoti tiesinio atvaizdžio matricą, jei pasikeitė bazė? Tegul $f : V \to W$ yra tiesinis atvaizdis. Sakykime, kad erdvėje V yra išrenkama nauja bazė v_1', v_2', …, v_m', o erdvėje W yra išrenkama nauja bazė w_1', w_2', …, w_n'. Tada tiesinio atvaizdžio f matrica A' yra apskaičiuojama taip:

$$A' = TAR^{-1},$$

kur: A yra atvaizdžio f matrica senose bazėse, T - perėjimo matrica erdvėje V, o R yra perėjimo matrica erdvėje W. Atskiru atveju, jeigu f yra tiesinė transformacija (t. y. $V = W$ ir bazės sutampa), gauname $T = R$, ir formulė pasidaro dar paprastesnė:

$$A' = TAT^{-1}$$

9. **pavyzdys.** Tiesinio atvaizdžio $f : V \to V$ matrica bazėje v_1, v_2, v_3 yra

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raskite atvaizdžio f matricą naujoje bazėje $u_1 = 2v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_3$.

Sprendimas. Atvaizdis f yra tiesinė erdvės V transformacija. Perėjimo matrica T ir jos atvirkštinė iš bazės v_1, v_2, v_3 į bazę u_1, u_2, u_3 yra

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pagal formulę, naujoje bazėje atvaizdžio f matrica yra:

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Kitos svarbios tiesinių atvaizdžių savybės. Tegul f ir g yra tiesiniai atvaizdžiai iš V į W, o jų matricos nurodytose bazėse yra atitinkamai A ir B. Tada bet kuriam kūno K elementui α, tiesinio atvaizdžio αf matrica yra αA. Atvaizdžių sumos $f + g$ matrica C yra lygi matricų sumai $C = A + B$.

Sakykime, turime tiesinius atvaizdžius $f : U \to V$, $g : V \to W$ su matricomis A ir B. Tada atvaizdžių kompozicijos $g(f(v))$ matrica C yra lygi matricų sandaugai $C = AB$.

Tiesinės transformacijos $f : V \to V$ atvirkštinė transformacija f^{-1} egzistuoja tada ir tik tada, jeigu matrica A yra neišsigimusi, $\det A \neq 0$. Tada atvirkštinio atvaizdžio f^{-1} matrica yra lygi A^{-1}.

Tapačiosios transformacijos $f(v) = v$ matrica yra vienetinė matrica.

10. **pavyzdys.** Erdvės $\mathbb{R}^2$ tiesinių transformacijų f ir g matricos yra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nustatykite, ar egzistuoja atvaizdis $h(v) = g(f^{-1}(v)) - 3g(v) + 2v$, ir raskite jo matricą toje pat bazėje.

Sprendimas. Kadangi $\det A = 1$, tai f yra neišsigimęs ir turi atvirkštinį atvaizdį. Formulėje pakeitę atvaizdžius jų atitinkamomis matricomis ($v = \mathbb{1}v$), gauname:

$$C = A^{-1}B - 3B + 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suskaičiavę gauname

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

Uždaviniai.

1. **uždavinys.** Patikrinkite, ar nurodyti atvaizdžiai $f : V \to W$ yra tiesiniai:

a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2)$;
b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1 + 5)$;
c) $V = C[0, 1]$, $W = \mathbb{R}$, $f(v) = \int_0^1 v^2(t)dt$;
d) $V = C[0, 1]$, $W = \mathbb{R}$, $f(v) = \int_0^1 v(t^3)\cos t dt$;
e) $V = W = \mathbb{R}[x]$,$f(v) = (x^3 + 1) \cdot v$;
f) $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f(v) = x \cdot v'$.

Ats.: a) taip; b) ne; c) ne; d) taip; e) taip; f) taip.

2. **uždavinys.** Raskite atvaizdžių $f : V \to W$ matricas nurodytose bazėse ir nurodyto vektoriaus $v \in V$ vaizdą:

a) $f(v_1) = w_1 + w_2 - w_3$, $f(v_2) = w_1 - w_2 - w_3$, $f(v_3) = -w_1 + w_3$, kur v_1, v_2, v_3 yra V bazė, o w_1, w_2, w_3 yra W bazė; vektorius $v = -v_1 - v_2 - v_3$;
b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_3)$ standartinėse bazėse; $v = (2, 0, 1)$;

c) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2)=(4x_1+5x_2, 3x_1-2x_2, x_1+x_2)$, erdvės V bazė $v_1=(-1,1)$, $v_2=(2,-1)$, W standartinė bazė e_1, e_2, e_3; $v=(1,1)$;

d) $V=\mathbb{R}_4[x]$, $W=\mathbb{R}_3[x]$; $f(v)=v'$ standartinėse $\mathbb{R}_n[x]$ bazėse $1,x,\ldots,x^n$; $v=1+x+x^2+x^4$;

e) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\mathbb{R}_3[x]$; $f(v)=\int_0^x v(t)dt$ standartinėse bazėse; $v=1+2x+x^2$;

f) $V=W=M_2[\mathbb{R}]$, $f(v)=Bv$, standartinėje bazėje e_1, e_2, e_3, e_4, kur

$$B=\begin{pmatrix}1&3\\1&7\end{pmatrix},$$

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\end{pmatrix}$$

Ats.:

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $f(v)=-w_1+w_3$;

b) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $f(v)=(1,1)$;

c) $A=\begin{pmatrix}1&-5&0\\3&8&1\end{pmatrix}$, $f(v)=(9,1,2)$;

d) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$, $f(v)=1+2x+4x^3$;

e) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1/3\end{pmatrix}$, $f(v)=x+x^2+x^3/3$;

f) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\3&0&7&0\\0&3&0&7\end{pmatrix}$, $f(v)=\begin{pmatrix}11&-7\\23&-11\end{pmatrix}$.

3. **uždavinys.** Suskaičiuokite matricą tiesinės transformacijos $f:V\to V$, kuri duotus vektorius v_1, v_2, $\ldots$, v_n perveda į nurodytus vektorius $f(v_1)$, $f(v_2)$, $\ldots$, $f(v_n)$:

a) $v_1 = (1, -3)$, $v_2 = (-2, 5)$, $f(v_1) = (-2, 1)$, $f(v_2) = (2, -1)$;
b) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, $f(v_1) = (-2, 1, 0)$, $f(v_2) = (0, -1, 1)$, $f(v_3) = (-1, 1, 1)$;
c) $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 2, 4)$, $f(v_1) = (3, 1, 0)$, $f(v_2) = (2, -4, 1)$, $f(v_3) = (1, 2, 0)$;
d) $v_1 = (1, -2, 1, 1)$, $v_2 = (2, -3, 2, 3)$, $v_3 = (1, -2, 0, 2)$, $v_4 = (1, -3, 2, 0)$, $f(v_1) = (1, 1, 0, 2)$, $f(v_2) = (0, 2, 0, -1)$, $f(v_3) = (1, 0, 1, 1)$, $f(v_4) = (2, 0, 0, 1)$;

Ats.:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}; \qquad d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 19 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. **uždavinys.** Tiesinio atvaizdžio $f : V \to W$, kurio matrica senoje bazėje yra A. Rasti f matricą naujoje bazėje:

a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bazėje v_1, v_2; nauja bazė $u_1 = 3v_1 + 4v_2$, $u_2 = 2v_1 + 3v_2$;
b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ bazėje v_1, v_2; nauja bazė $u_1 = v_1 + 3v_2$, $u_2 = 3v_1 + 8v_2$;
c) $V = W = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ bazėje v_1, v_2, v_3; nauja bazė $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - 5v_3$, $u_3 = 4v_1 + v_2 - 6v_3$;
d) $V = W = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ bazėje v_1, v_2, v_3; nauja bazė $u_1 = v_1 - 3v_2 + v_3$, $u_2 = -2v_1 + 7v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + 8v_3$;
e) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ standartinėse bazėse; nauja V bazė $v_1 = (1, 4, 0)$, $v_2 = (-5, -19, 0)$, $v_3 = (-1, 1, 1)$, nauja W bazė $w_1 = (3, -2)$, $w_2 = (1, -1)$;

f) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ standartinėse bazėse, nauja V bazė $v_1 = (5, -2)$, $v_2 = (2, -1)$, nauja W bazė $w_1 = (1, 0, -6)$, $w_2 = (0, 1, 1)$, $w_3 = (2, 0, -11)$.

Ats.:

a)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -33 \\ 16 & -21 \end{pmatrix};$$

b)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 35 & -12 \\ 88 & -30 \end{pmatrix};$$

c)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 125 & 36 & -30 \\ 166 & 46 & -39 \end{pmatrix};$$

d)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -56 & -25 & 7 \\ -16 & -7 & 2 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 109 & 48 & -14 \\ -379 & -168 & 48 \\ -486 & -218 & 60 \end{pmatrix};$$

e)

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \qquad TAR^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

f)

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -162 & 0 & 87 \\ -67 & 0 & 36 \end{pmatrix};$$

5. **uždavinys.** Tiesinių atvaizdžių

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

atitinkamos matricos A, B, C standartinėse bazėse yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nustatykite, kurie iš apačioje užrašytų atvaizdžių egzistuoja, ir raskite jų matricas standartinėse bazėse:

a) $f(v) + g^{-1}(v)$, $v \in \mathbb{R}^2$;

b) $g(f(v)) - v$, $v \in \mathbb{R}^2$;
c) $(f+g)^{-1}(v)$
d) $f^{-1}(g(v) - v)$, $v \in \mathbb{R}^2$;
e) $h(g(v)) + 2v$, $v \in \mathbb{R}^2$;
f) $h^{-1}(f(v)))$, $v \in \mathbb{R}^2$;
g) $f^{-1}(h(v))$, $v \in \mathbb{R}^3$.

Ats.:

a) Ne, nes g^{-1} neegzistuoja;
b) Taip, $AB - \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;
c) Taip, $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/14 & 3/14 \\ 5/14 & 1/14 \end{pmatrix}$;
d) Taip, $(B - \mathbb{1}_2)A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$;
e) Ne, nes h apibrėžimo sritis yra $\mathbb{R}^3$, o ne $\mathbb{R}^2$ - matricų C ir B daugyba nėra suderinta;
f) Ne, nes h^{-1} neegzistuoja (jos matrica nėra kvadratinė, todėl neturi atvirkštinės);
g) Taip, $CA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.