Tiesė plokštumoje

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

2014 m. rugsėjo 24 d.

Tiesė plokštumoje

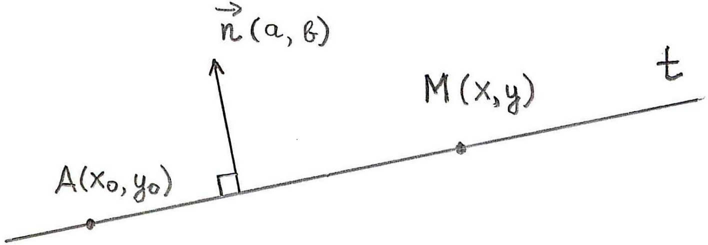
Nagrinėkime tiesę t, kuri eina per tašką $A(x_0, y_0)$ ir yra statmena nenuliniam vektoriui $\vec{n}(a, b)$.

$$M(x, y) \in t \iff \vec{n} \perp \vec{AM} \iff \vec{n}(a, b) \cdot \vec{AM}(x - x_0, y - y_0) = 0$$

Taigi tiesė t – tai aibė plokštumos taškų $M(x, y)$, tenkinančių lygybę

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.}$$

$\vec{n}$ – tiesės t **normalės vektorius**.



Bendroji tiesės lygtis

Teiginys 1

Tiesės, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmenos nenuliniam vektoriui $\vec{n}(a, b)$, lygtis yra

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

Pažymėję

$$ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0}_{c} = 0,$$

(1) lygtį galime perrašyti:

$$\boxed{ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.}$$

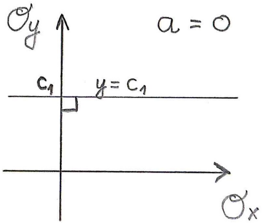
Tai **bendroji tiesės lygtis**.

Atskiri atvejai

$a = 0, \ b \neq 0$

Tiesės lygtis: $y = c_1$.

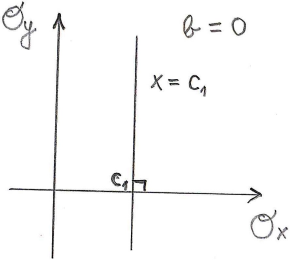
Ši tiesė $||$ $\mathcal{O}x$ ašiai.



$b = 0, \ a \neq 0$

Tiesės lygtis: $x = c_1$.

Ši tiesė $||$ $\mathcal{O}y$ ašiai.



Kryptinė tiesės lygtis

Teiginys 2

Tarkime, kad tiesė t eina per tašką $M(x_0, y_0)$ ir su $\mathcal{O}x$ ašimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus m. Tada tiesės t lygtis yra:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

Tai **kryptinė tiesės lygtis**.

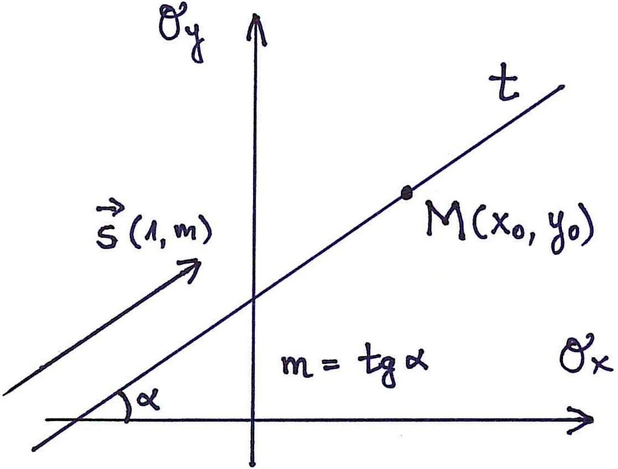
Įrodymas.

Vektorius $\vec{s}(1, m)$ su $\mathcal{O}x$ ašimi sudaro kampą, kurio tangentas lygus m. Todėl $\vec{s} \,||\, t$. Tada $\vec{n}(m, -1) \perp t$, nes $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$. Remiantis (1), tiesės t lygtis yra:

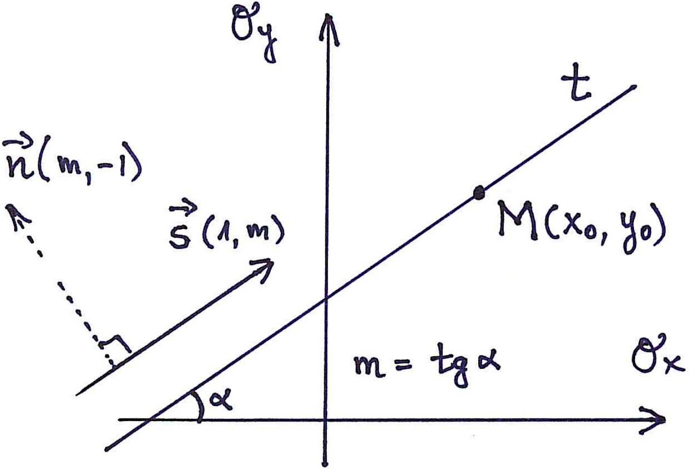
$$m(x - x_0) + (-1) \cdot (y - y_0) = 0,$$
$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

$\square$

Kryptinė tiesės lygtis



Kryptinė tiesės lygtis



Tiesė, lygiagreti vektoriui

Teiginys 3

Tarkime, kad tiesė t yra lygiagreti nenuliniam vektoriui $\vec{s}(a_1, a_2)$ ir eina per tašką $A(x_0, y_0)$. Tada tiesės t lygtis yra:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

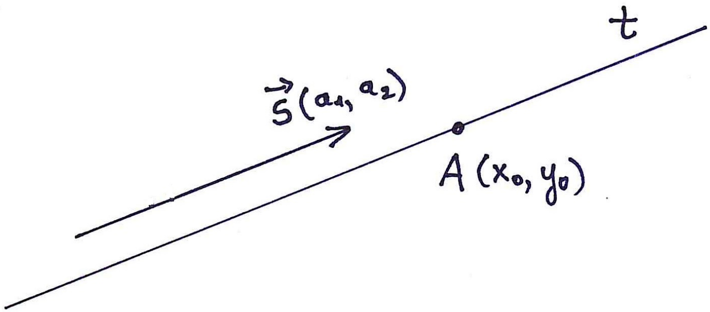
Įrodymas.

Vektorius $\vec{n}(a_2, -a_1) \perp t$, nes $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$. Remiantis (1), tiesės t lygtis yra:

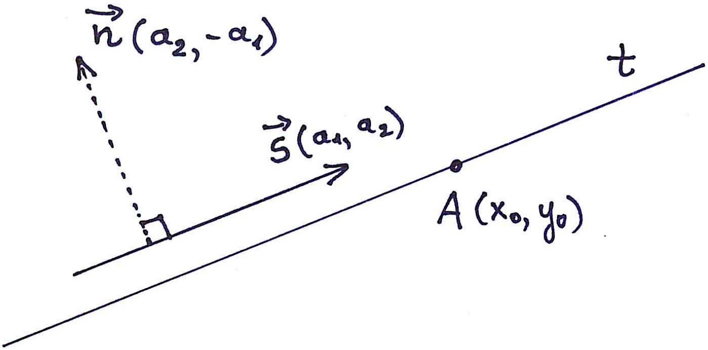
$$a_2(x - x_0) - a_1 \cdot (y - y_0) = 0,$$
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

$\square$

Tiesė, lygiagreti vektoriui



Tiesė, lygiagreti vektoriui



Parametrinės tiesės lygtys

Tarkime, kad tiesė $T \parallel \vec{s}(a_1, a_2) \neq \vec{0}$ ir $A(x_0, y_0) \in T$. Sakykime, kad $M(x, y) \in T$. Tada

$$\vec{AM}(x - x_0, y - y_0) \parallel \vec{s}(a_1, a_2),$$

todėl $\exists t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{AM} = t \cdot \vec{s},$$

$$(x - x_0, y - y_0) = (a_1 t, a_2 t),$$

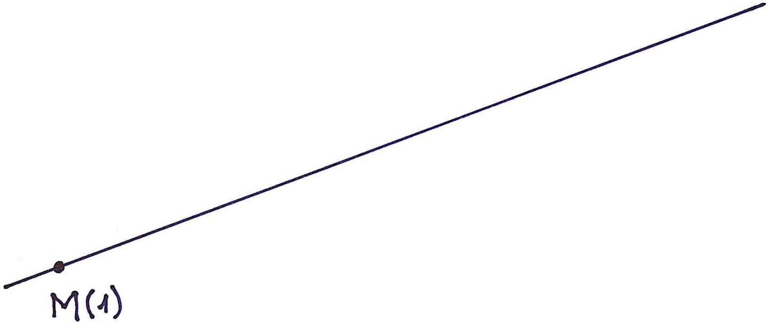
$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} .}$$

Kita vertus, su kiekvienu $t \in \mathbb{R}$ taškas $M(x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t) \in T$.

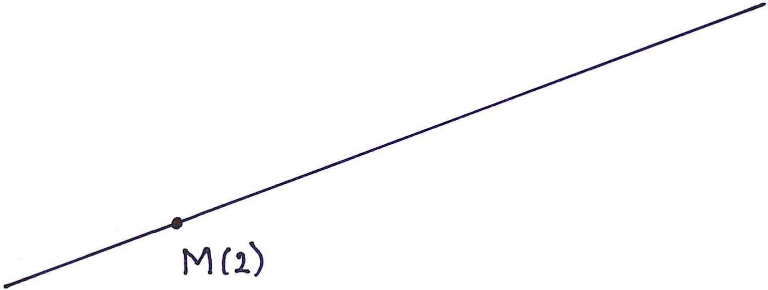
Parametrinės tiesės lygtys

$$M(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$



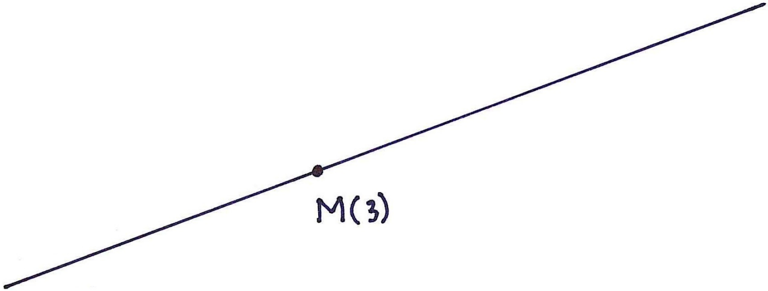
Parametrinės tiesės lygtys

$$M(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$



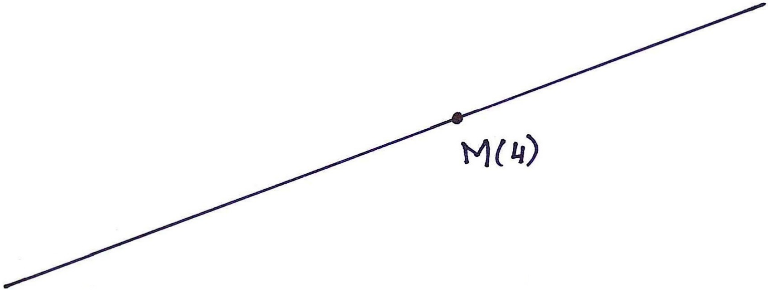
Parametrinės tiesės lygtys

$$M(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

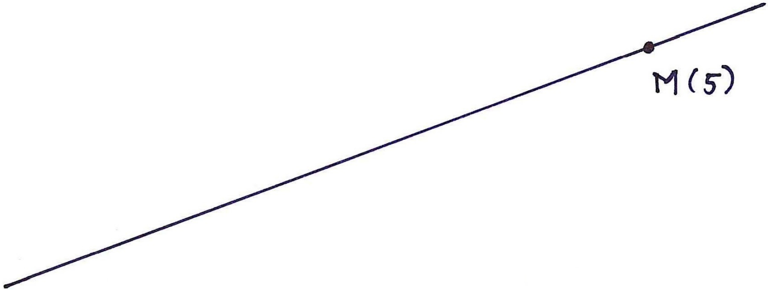


Parametrinės tiesės lygtys

$$M(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$



$$M(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t),\quad t \in \mathbb{R}$$



Tiesė, einanti per du duotuosius taškus

Teiginys 4

Tarkime, kad tiesė t eina per du skirtingus taškus $A(x_0, y_0)$ ir $B(x_1, y_1)$. Tada tiesės t lygtis yra:

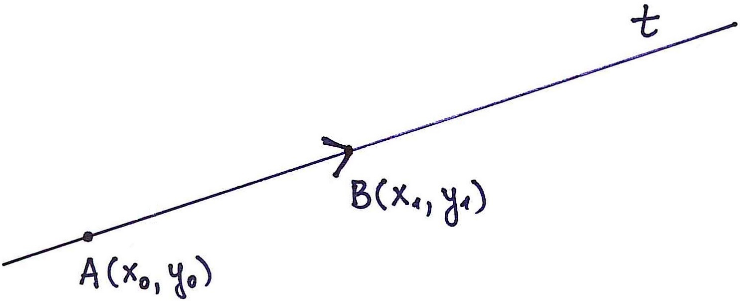
$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.}$$

Įrodymas.

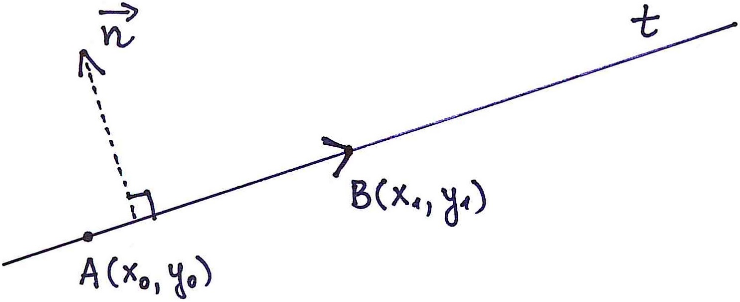
Vektorius $\vec{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \,||\, t$. Todėl $\vec{n}(y_1 - y_0, -(x_1 - x_0)) \perp t$, nes $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$. Remiantis (1), tiesės t lygtis yra:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0) \cdot (y - y_0) = 0,$$
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Tiesė, einanti per du duotuosius taškus



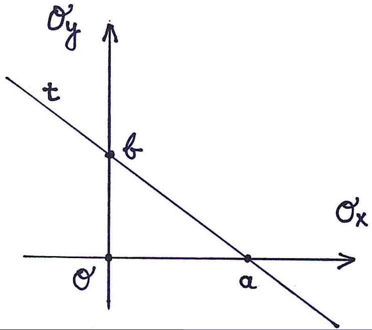
Tiesė, einanti per du duotuosius taškus



Išvada 5

Tarkime, kad tiesė t neina per koordinačių pradžios tašką $\mathcal{O}$. Be to, tarkime, kad tiesė t kerta $\mathcal{O}x$ ašį taške $(a, 0)$, o ašį $\mathcal{O}y$ – taške $(0, b)$. Tada tiesės t lygtis yra:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

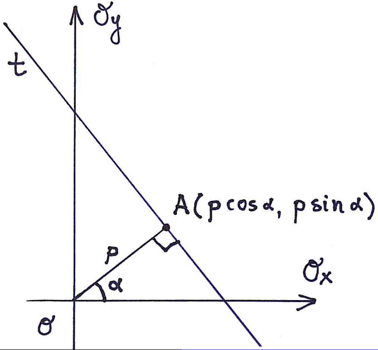


Normalinė tiesės lygtis

Teiginys 6

Tarkime, kad statmuo, nuleistas iš koordinačių pradžios taško į tiesę t, su $\mathcal{O}x$ ašimi sudaro kampą α, o šio statmens ilgis lygus $p > 0$. Tada tiesės t lygtis yra:

$$\boxed{x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.}$$



Normalinė tiesės lygtis

Įrodymas.

Vektorius $\vec{n}(p\cos\alpha, p\sin\alpha) \perp t$, o taškas $A(p\cos\alpha, p\sin\alpha) \in t$. Remiantis (1), tiesės t lygtis yra:

$$p\cos\alpha \cdot (x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha \cdot (y - p\sin\alpha) = 0,$$

$$px\cos\alpha + py\sin\alpha - p^2 = 0,$$

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.} \qquad (2)$$

□

- Vektorius $\vec{n}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ yra tiesės t vienetinis normalės vektorius
- (2) normalinės lygties laisvasis narys yra atstumas nuo koordinačių pradžios taško iki tiesės, paimtas su minuso ženklu

Bendrosios lygties suvedimas į nomalinę

Tiesė t: $ax + by + c = 0$, $c \neq 0$.
Normalės vektorių $\vec{n}(a, b)$ reikia padaryti vienetiniu, todėl šį vektorių padalijame iš jo ilgio $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \text{arba}$$
$$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y + \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Ženklą pasirenkame taip, kad laisvasis narys $\frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ būtų neigiamas.

Išvada 7

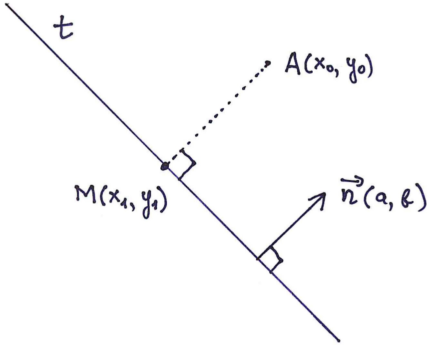
Atstumas nuo koordinačių pradžios taško iki tiesės $ax + by + c = 0$ *lygus* $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Atstumas nuo taško iki tiesės

Teiginys 8

Taško $A(x_0, y_0)$ *atstumas* d *iki tiesės* $t:\ ax + by + c = 0$ *lygus*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Įrodymas

Ieškome tokio tiesės t taško $M(x_1, y_1)$, kad $\vec{AM} \perp t$, t.y.

$$\vec{AM} \parallel \vec{n}(a, b) \iff \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b}. \tag{3}$$

$M(x_1, y_1) \in t$, todėl

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \tag{4}$$

$$d = |\vec{AM}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \overset{(3)}{=} \frac{|x_1 - x_0|}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{5}$$

Iš (3) gauname išraišką $y_1 = y_0 + \frac{b}{a}(x_1 - x_0)$, kurią statome į (4):

$$ax_1 + b\Big(y_0 + \frac{b}{a}(x_1 - x_0)\Big) + c = 0,$$

Atstumas nuo taško iki tiesės

$$ax_1 + by_0 + \frac{b^2}{a}(x_1 - x_0) + c = 0.$$

Iš čia išreiškiame $\frac{x_1 - x_0}{a}$:

$$\frac{x_1 - x_0}{a} = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Šią išraišką įstatę į (5), gauname:

$$d = \frac{|x_1 - x_0|}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\square$

Kampas tarp tiesių

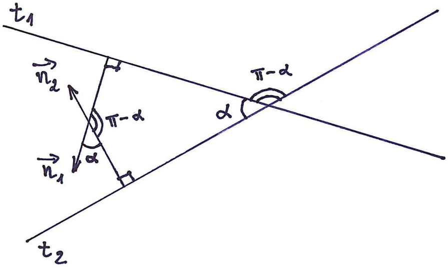
Tegul t_1 ir t_2 – tiesės,

$$t_1: \; a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$t_2: \; a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$\vec{n_1}(a_1, b_1) \perp t_1$ ir $\vec{n_2}(a_2, b_2) \perp t_2$ – normalės vektoriai.

Apibrėžimas 9

Kampu tarp tiesių t_1 ir t_2 vadinamas kampas tarp jų normalės vektorių $\vec{n_1}$ ir $\vec{n_2}$.



Kampas tarp tiesių

Pastaba 10

Kampas tarp tiesių apibrėžiamas nevienareikšmiškai (išskyrus atvejį, kai tiesės yra statmenos): jei α – kampas tarp tiesių t_1 ir t_2, tai $\pi - \alpha$ – taip pat kampas tarp šių tiesių.

Taigi kampą α tarp tiesių t_1 ir t_2 galima rasti pagal formulę

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos

Teiginys 11

Tiesės

$$t_1 : \ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ \ \textit{ir}$$
$$t_2 : \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

yra lygiagrečios tada ir tik tada, kai jų normalės vektoriai yra kolinearūs, t.y.

$$t_1 \parallel t_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos tada ir tik tada, kai jų normalės vektoriai yra statmeni, t.y.

$$t_1 \perp t_2 \iff a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0.$$