1 pratybos. Įrodymas ir matematinė indukcija

Paulius Drungilas

Turinys

Iracionalieji skaičiai. Skaičius r vadinamas *racionaliuoju*, jei jį galima užrašyti tokia forma: $r = m/n$, kur m - sveikas skaičius $(\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, o n - natūralusis skaičius $(1, 2, 3, \ldots)$. Jei realusis skaičius nėra racionalus, tai jis vadinamas *iracionaliuoju.*

1. **pavyzdys.** Prieštaros metodu įrodysime, kad skaičius $\sqrt{2}$ yra iracionalusis (nėra racionalusis).

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius $\sqrt{2}$ yra racionalusis (tai prielaida, kuriai toliau gausime prieštarą). Tada egzistuoja toks sveikasis skaičius m ir toks natūralusis skaičius n, kad

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}. \tag{0.1}$$

Galima laikyti, kad **skaičių** m **ir** n **didžiausias bendras daliklis yra** 1, nes priešingu atveju galėtume suprastinti trupmeną m/n. Keliame kvadratu (0.1) lygybės abi puses ir dauginame iš n^2

$$2n^2 = m^2. \tag{0.2}$$

Šios lygybės kairė pusė yra lyginis skaičius, todėl ir m^2 yra lyginis skaičius. Iš čia išplaukia, kad skaičius m - lyginis. Užrašykime m tokia forma: $m = 2m_1$, kur m_1 - sveikasis skaičius. Šią išraišką statome į (0.2) lygybę. Suprastinę lygybę iš 2, gauname

$$n^2 = 2m_1^2.$$

Šios lygybės dešinė pusė yra lyginis skaičius, todėl ir skaičius n^2 yra lyginis, o tai reiškia, jog n – taip pat lyginis. Taigi gavome, kad n ir m dalijasi iš 2, o tai prieštarauja skaičių m ir n pasirinkimui (žiūrėti paryškintą frazę viršuje). Gauta prieštara reiškia, kad skaičius $\sqrt{2}$ negali būti racionalusis. □

Uždaviniai.

1. **uždavinys.** Įrodykite šiuos teiginius:

a)* Bet kokio sveikojo skaičiaus kvadrato dalybos iš 3 liekana yra 0 arba 1.
b)* Bet kokio sveikojo skaičiaus kvadrato dalybos iš 4 liekana yra 0 arba 1.
c)* Skaičius $\sqrt{3}$ yra iracionalusis.
d)* Jei n – sveikasis skaičius, tai $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6.
e)* Jei n – natūralusis, tai skaičių 8^n ir 15^n dalybos iš 7 liekana yra 1.

2. **uždavinys.** Įrodykite arba paneikite šiuos teiginius:

a)* Dviejų racionaliųjų skaičių suma yra racionalusis skaičius.
b)* Racionaliojo ir iracionaliojo skaičių suma yra iracionalusis skaičius.
c)* Dviejų iracionaliųjų skaičių suma yra iracionalusis skaičius.
d)* Dviejų iracionaliųjų skaičių sandauga yra iracionalusis skaičius.

Matematinė indukcija.

2. **pavyzdys.** Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad kiekvienam natūraliajam n teisinga lygybė $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$.

Sprendimas. Įrodymas matematinės indukcijos metodu susideda iš trijų dalių:

Pirmoje dalyje patikriname, ar teiginys teisingas su mažiausia reikšme. Šiuo atveju, kai $n = 1$, teiginys akivaizdžiai teisingas.

Antroje dalyje darome prielaidą, jog teiginys teisingas su visomis reikšmėmis $n \leqslant k$. Šiuo atveju tariame, kad lygybė $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ teisinga su visais $n \leqslant k$.

Trečioje dalyje **naudodamiesi pirma, o ypač antra dalimi** įrodome, jog teiginys teisingas ir su reikšme $n = k+1$. Šiuo atveju reikia įrodyti, kad teisinga lygybė

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = (k+1)(k+2)/2. \tag{0.3}$$

Iš antros dalies (indukcijos prielaidos) išplaukia lygybė

$$1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2.$$

Šią išraišką įstatę į (0.3) lygybės kairiąją pusę, gauname

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2.$$

Taigi, (0.3) lygybė teisinga, todėl, remiantis indukcijos principu, lygybė $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ teisinga su visais natūraliaisiais n. □

3. **pavyzdys.** Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad su visais natūraliaisiais $n \geqslant 2$ teisinga nelygybė

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}. \tag{0.4}$$

Sprendimas. Pirmoje dalyje tikriname, ar nelygybė teisinga su mažiausia reikšme $n = 2$. Turime nelygybę $1 + 1/\sqrt{2} > \sqrt{2}$, kuri akivaizdžiai teisinga (ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $\sqrt{2} > 1$).

Antroje dalyje darome prielaidą, jog (0.4) nelygybė teisinga su visomis reikšmėmis $n \leqslant k$.

Trečioje dalyje, naudodamiesi antros dalies prielaida, įrodysime, kad (0.4) nelygybė teisinga su reikšme $n = k + 1$. Pagal antros dalies prielaidą (su reikšme $n = k$) teisinga nelygybė

$$1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{k} > \sqrt{k}.$$

Iš čia gauname:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \\ &\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k} + \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \\ &\sqrt{k} + \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{k+1}. \end{aligned}$$

Taigi (0.4) nelygybė teisinga ir su reikšme $n = k + 1$, todėl, remiantis indukcijos principu, (0.4) nelygybė teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geqslant 2$. □

Uždaviniai.

3. **uždavinys.** Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n teisingos šios lygybės:

a)*
$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

b)*
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c)*
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

d)*
$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

e)
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

f) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$

g) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$

h)
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

i)
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$

j)
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

4. **uždavinys.** Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n teisingos šios nelygybės:

a)*
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

b)*
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2},\quad n\geqslant 2.$$

c)*
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n, \quad n\geqslant 2.$$
d)
$$2^n>n^2, \quad n\geqslant 5.$$
e) $(1+a)^n \geq 1+na$ su visais natūraliaisiais n ir su visais realiaisiais $a \geq -1$.

f)
$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
su visais natūraliaisiais $n \geq 2$.

g)
$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\leq n$$
su visais natūraliaisiais n.

5. **uždavinys.** Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n teisingi šie teiginiai:

a) Skaičius $11^{6n+3}+1$ dalijasi iš 148.

b) Skaičius $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dalijasi iš 9.

c) Skaičius $7^{2n}-4^{2n}$ dalijasi iš 33.