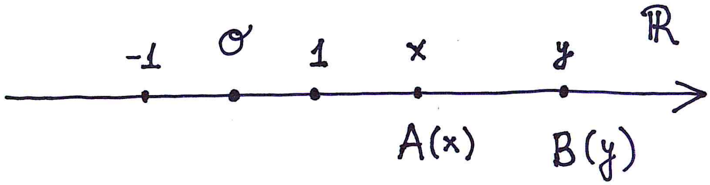
Geometrija: pradžia

Paulius Drungilas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas

2014 m. rugsėjo 3 d.

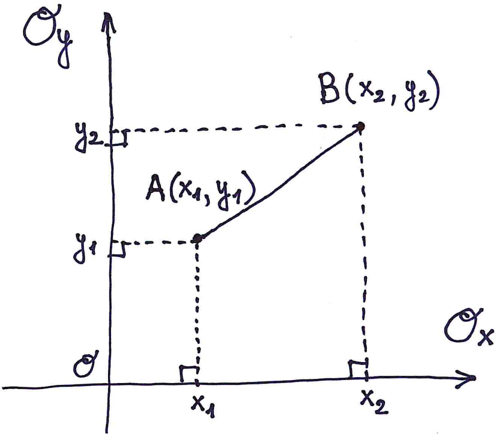
Koordinačių sistema tiesėje:



Atkarpos AB ilgis:

$$|AB| = |y - x|.$$

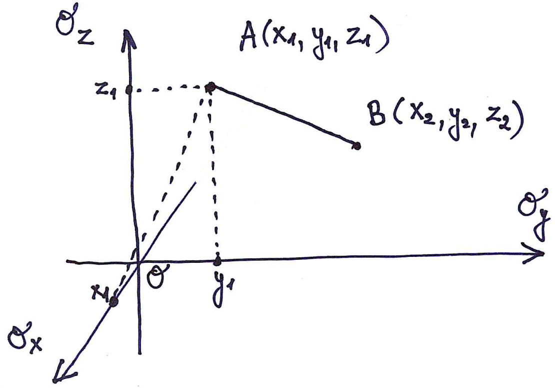
Dekarto koordinačių sistema plokštumoje



Atkarpos AB ilgis:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dekarto koordinačių sistema erdvėje

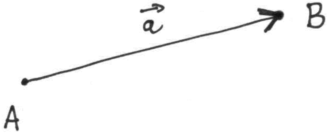


Atkarpos AB ilgis:

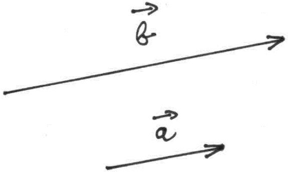
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Vektoriai

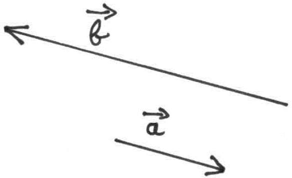
Vektorius – atkarpa, turinti kryptį. Žymėsime $\vec{AB}$ arba $\vec{a}$. Atkarpos AB ilgis vadinamas **vektoriaus $\vec{AB}$ ilgiu** ir žymimas $|\vec{AB}|$.



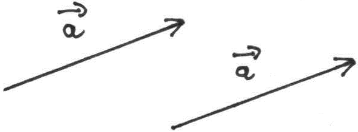
Vienakrypčiai vektoriai: yra lygiagrečiose tiesėse ir vienodų krypčių.



Priešingos krypties vektoriai: yra lygiagrečiose tiesėse ir priešingų krypčių.



Lygūs vektoriai: yra vienodo ilgio ir vienakrypčiai.

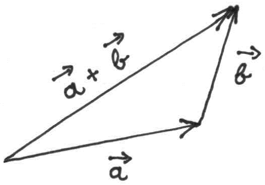


Nulinis vektorius: pradžios taškas sutampa su pabaigos tašku. Žymimas $\mathcal{O}$ arba $\vec{0}$. Kryptis neapibrėžta.

Vektorių suma

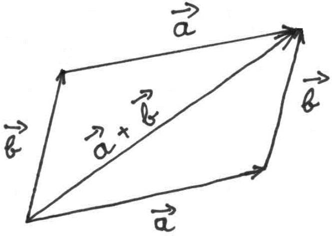
Tarkime, kad vektoriaus $\vec{a}$ pabaiga sutampa su vektoriaus $\vec{b}$ pradžia.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **suma**, žymima $\vec{a}+\vec{b}$, vadinamas vektorius, jungiantis pirmojo pradžią su antrojo galu.



Vektorių sudėtis – **komutatyvi** (lygiagretainio taisyklė):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$



Vektorių sudėtis – **asociatyvi**:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Vektorių sumos savybės

Nulinis vektorius $\mathcal{O}$ tenkina lygybę

$$\vec{a} + \mathcal{O} = \vec{a}.$$

Kiekvienam vektoriui $\vec{a}$ egzistuoja vienintelis vektorius $\vec{b}$, tenkinantis sąlygą:

$$\vec{a} + \vec{b} = \mathcal{O}.$$

Vektorius $\vec{b}$ vadinamas **priešingu** vektoriui $\vec{a}$ ir žymimas $-\vec{a}$. (Vektorius $\vec{AB}$ yra priešingas vektoriui $\vec{BA}$.)

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

Skaičiaus α ir vektoriaus $\vec{a}$ **sandauga** vadiname vektorių, žymimą $\alpha \cdot \vec{a}$, kurio:

1) ilgis lygus skaičiaus α modulio ir vektoriaus $\vec{a}$ ilgio sandaugai $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
2) kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi, kai $\alpha > 0$; priešinga vektoriaus $\vec{a}$ krypčiai, kai $\alpha < 0$.

Vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybės

Tegul $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Asociatyvumas: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$

Distributyvumas: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

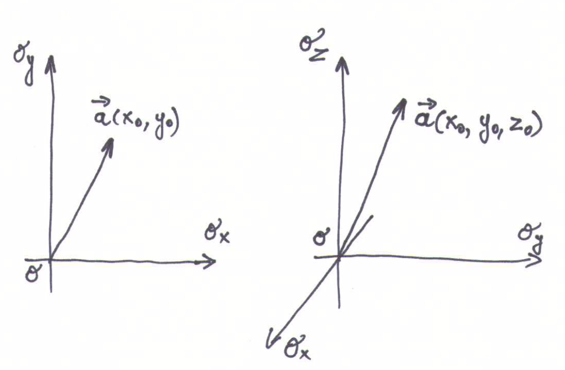
Distributyvumas: $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

Teiginys 1 (Vektorių kolinearumo kriterijus)

Du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai vieną jų galima tiesiškai išreikšti kitu, t. y. kai egzistuoja toks skaičius $\alpha \in \mathbb{R}$, kad $\vec{a} = \alpha \vec{b}$ arba $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

Vektoriaus koordinatės

$\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ – vektorius, kurio pradžia yra koordinačių pradžios taškas $\mathcal{O}$, o pabaiga – taškas (x_0, y_0, z_0).



$$\vec{a}(x_0, y_0, z_0) = \vec{b}(x_1, y_1, z_1) \iff x_0 = x_1,\ y_0 = y_1 \text{ ir } z_0 = z_1.$$

Vektorių suma ir daugyba iš skaičiaus

Tegul $\vec{a}(x_0, y_0)$, $\vec{b}(x_1, y_1)$ – bet kokie vektoriai, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1),$$
$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_0, \alpha y_0).$$

Kolinearumas:

$$\vec{a}(x_0, y_0) \,||\, \vec{b}(x_1, y_1) \iff \frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} \iff x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0.$$

Vektorių suma ir daugyba iš skaičiaus

Tegul $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b}(x_1, y_1, z_1)$ – bet kokie vektoriai, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1),$$
$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0).$$

Kolinearumas:

$$\vec{a}(x_0, y_0, z_0) \,||\, \vec{b}(x_1, y_1, z_1) \iff \frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{z_0}{z_1}.$$

Atkarpos dalinimas duotu santykiu

Teiginys 2

Tegul $A(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $B(x_2, y_2, z_2)$ *– atkarpos galai, taškas* $C(x_3, y_3, z_3)$ *priklauso šiai atkarpai ir dalija ją santykiu* $\lambda : 1$ *(*$\lambda > 0$*). t. y.* $\frac{AC}{CB} = \lambda$*. Tada*

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Įrodymas

$\vec{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \,||\, \vec{CB}(x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)$
Be to, šie vektoriai yra vienakrypčiai, nes taškas C priklauso atkarpai AB. Todėl

$$\vec{AC} = t \cdot \vec{CB}, \quad t > 0.$$

Tada

$$|\vec{AC}| = |t \cdot \vec{CB}| = t|\vec{CB}|.$$

Vadinasi, $t = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \lambda$. Taigi

$$\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}.$$

Šioje vektorių lygybėje sulyginę atitinkamas koordinates, gauname x_3, y_3 ir z_3 išraiškas:

$$x_3 - x_1 = \lambda(x_2 - x_3) \Rightarrow x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Panašiai gauname y_3 ir z_3 išraiškas. $\square$

Atkarpos vidurio taško koordinatės

Išvada 3

Atkarpos AB, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, *vidurio taško* C *koordinatės yra*

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$