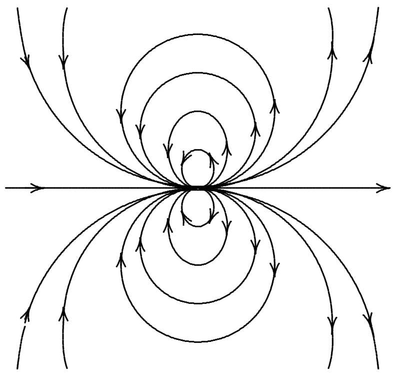
ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

Matematinis modeliavimas



Vilniaus universitetas
2004

TURINYS

5 SKYRIUS

6 SKYRIUS

7 SKYRIUS

1 SKYRIUS

PAPRASČIAUSI MATEMATINIAI MODELIAI

1.1 PAGRINDINĖS SĄVOKOS

Sprendžiant gamtos ir technikos mokslų uždavinius naudojami įvairūs matematiniai modeliai. Dažniausiai jie aprašomi viena arba keliomis lygtimis, siejančiomis nepriklausomus kintamuosius, ieškomąją funkciją ir jos išvestines. Tokios lygtys yra vadinamos *diferencialinėmis lygtimis*. Jeigu diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, tai tokią lygtį vadiname *paprastąja diferencialine lygtimi*. Priešingu atveju diferencialinė lygtis vadinama *dalinių išvestinių lygtimi*. Lygtis vadinama k-osios eilės lygtimi, jeigu į ją įeina ieškomos funkcijos k-osios eilės išvestinė ir neįeina aukštesnių eilių išvestinės. Pavyzdžiui lygtis

$$y' = y^2$$

yra pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis. Lygtis

$$y'' + 3y' + y = 0$$

yra antrosios eilės paprastoji diferencialinė lygtis, o lygtis

$$\sqrt{x}u_x + \sqrt{y}u_y + \sqrt{z}u_z = 0$$

yra pirmos eilės dalinių išvestinių lygtis.

Bendruoju atveju k-osios eilės paprastąją diferencialinę lygtį galima užrašyti taip:

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(k)}\big) = 0; \tag{1.1}$$

čia $F-$žinoma funcija, apibrėžta kokioje nors srityje $D \subset \mathbb{R}^{k+2}$. Tokia lygtis dar gali priklausyti nuo papildomų kintamųjų $\lambda, \mu, \dots$ Šiuo atveju sakoma, kad ieškomoji funkcija y priklauso nuo kintamųjų $\lambda, \mu, \dots$ kaip nuo parametrų. Kartais (1.1) lygtį galima išspręsti aukščiausios išvestinės atžvilgiu ir užrašyti pavidalu

$$y^{(k)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}\big). \tag{1.2}$$

Tada tokią lygtis vadinama *normaliąja lygtimi*.

Tarkime, f yra tolydi funkcija, apibrėžta kokioje nors srityje $G \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^1$, apibrėžta kokiame nors intervale $\langle a, b\rangle$, yra (1.2) lygties sprendinys, jeigu:

1. φ yra k kartų diferencijuojama intervale $\langle a, b\rangle$.
2. Taškas $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x)\big) \in G$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

3. $\varphi^{(k)}(x) = f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x)\big)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$.

Sprendinio apibrėžimas bendresnei (1.1) lygčiai yra analogiškas.

P a s t a b a. Iš funkcijos f tolydumo bei sprendinio φ apibrėžimo išplaukia, kad išvestinė $\varphi^{(k)}$ yra tolydi intervale $\langle a, b \rangle$ funkcija. Be to, sprendinio apibrėžimo sritis yra jungioji aibė, t.y. intervalas $\langle a, b \rangle$.

Tegu (1.1) lygtyje funkcija F yra tiesinė ieškomos funkcijos ir visų jos išvestinių atžvilgiu. Tada tokia lygtis vadinama *tiesine k-osios eilės lygtimi*. Ją galima užrašyti taip:

$$y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + a_2(x)y^{(k-2)} + \dots + a_{k-1}(x)y' + a_k(x)y = f(x). \tag{1.3}$$

Nagrinėjant tiesinę k-osios eilės lygtį patogu lygiagrečiai nagrinėti *tiesinę homogeninę k-osios eilės lygtį*

$$y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + a_2(x)y^{(k-2)} + \dots + a_{k-1}(x)y' + a_k(x)y = 0. \tag{1.4}$$

Kai (1.3) arba (1.4) lygtyje koeficientai a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ yra pastovūs, tai tokios lygtys yra vadinamos tiesinėmis k-osios eilės lygtimis su pastoviais koeficientais

Tarkime, (1.1), (1.2), (1.3) ir (1.4) lygtyse $k = 1$. Tada pastarosios lygtys yra pirmosios eilės paprastosios diferencialinės lygtys ir jas galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} &F(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y), \\ &y' + p(x)y = f(x), \quad y' + p(x)y = 0. \end{aligned}$$

Paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje nagrinėjama ne tik viena lygtis, bet ir lygčių sistemos. Pavyzdžiui, pirmosios eilės n lygčių sistemą, išreikštą išvestinių atžvilgiu, galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} y_1' & = & f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Tokia sistema vadinama *normaline*. Atkreipsime dėmesį į tai, kad tokioje sistemoje ieškomų funkcijų $y_1, \dots, y_n$ skaičius lygus lygčių skaičiui n. Pažymėję

$$y = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n), \quad f = \mathrm{colon}(f_1, \dots, f_n)$$

pastarąją sistemą galima užrašyti vektorinėje formoje

$$y' = f(x, y). \tag{1.6}$$

P a s t a b a. Daugeliu atveju įvairias aukštesnės eilės sistemas ir lygtis galima suvesti į pirmos eilės normaliąją lygčių sistemą. Pavyzdžiui, antros eilės n lygčių sistemą

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_n)$$

keitiniu $y' = w$, $w = \mathrm{colon}(w_1, \dots, w_n)$ galima suvesti į pirmos eilės normaliąją $2n$ lygčių sistemą

$$\begin{cases} w' = f(x, y, w), \\ y' = w. \end{cases}$$

Trečios eilės lygtį

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

keitiniu $y' = u, u' = v$ galima suvesti į pirmos eilės normaliąją 3 lygčių sistemą

$$\begin{cases} v' = f(x, y, u, v), \\ y' = u, \\ u' = v. \end{cases}$$

Tarkime, f yra tolydi funkcija, apibrėžta kokioje nors srityje $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $\varphi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ yra (1.6) sistemos sprendinys, jeigu:

1. Ji yra diferencijuojama intervale $\langle a, b \rangle$.
2. Taškas $(x, \varphi(x)) \in G$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$.
3. Teisinga tapatybė $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$.

Konstruojant kokio nors uždavinio matematinį modelį visu pirma stebimi jį aprašantys dydžiai. Tokie dydžiai gali būti temperatūra, greitis, slėgis ir t.t. Po to atliekami įvairūs bandymai. Remiantis atliktais bandymais yra atmetami neesminiai faktoriai, kurie mažai įtakoja nagrinėjamos sistemos būseną. Apibendrinant esminius faktorius, veikiančius sistemą, formuluojama viena arba kelios hipotezės (fundamentalūs gamtos dėsniai). Jų pagalba parodoma, kad aprašantys tam tikrą procesą dydžiai turi tenkinti vieną ar kelias lygtis. Šios lygtys dažniausiai yra diferencialinės. Suradę šių lygčių sprendinius, išskiriame iš jų tuos, kurie tenkina tam tikras papildomas sąlygas. Paprastai šitos sąlygos yra apibrėžiamos srities, kurioje ieškomas sprendinys, kraštiniuose taškuose. Todėl jos yra vadinamos *kraštinėmis sąlygomis*, o nagrinėjami uždaviniai – *kraštinais uždaviniais*. Pavyzdžiui, uždavinys, kai reikia rasti funkciją u, kuri srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tenkintų lygtį

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

o kontūro $l = \partial\Omega$ taškuose kraštinę sąlygą

$$u\big|_l = \varphi(x, y),$$

yra kraštinis uždavinys. Tuo atveju, kai kuris nors vienas iš kintamųjų, pavyzdžiui, laikas, yra išskiriamas iš kitų, jį atitinkančios sąlygos yra vadinamos *pradinėmis* arba *Koši sąlygomis*. Uždavinys tik su pradinėmis sąlygomis yra vadinamas *pradiniu* arba *Koši uždaviniu*. Pavyzdžiui, uždavinys, kai ieškoma fuunkcija u, kuri pusplokštumėje $\{(t, x) : t > 0\}$ tenkintų lygtį

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a = const$$

o tiesėje $t = 0$ pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

yra pradinis (Koši) uždavinys. Jeigu uždavinyje, be pradinių sąlygų, yra ir kitos kraštinės sąlygos, tai toks uždavinys vadinamas *mišriuoju uždaviniu*. Pavyzdžiui, uždavinys, kai ieškoma funkcija u, kuri juostoje $\{(t, x) : t > 0, x \in (0, l)\}$ tenkintų lygtį

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad a = const,$$

intervalo $(0, l)$ kraštiniuose taškuose sąlygas

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0,$$

o segmente $x \in [0, l]$ pradinę sąlygą

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

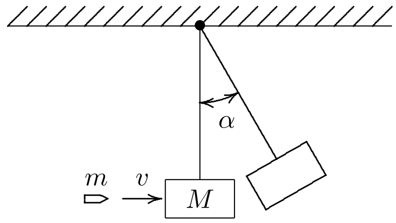
yra mišrusis uždavinys.

Norint įsitikinti ar sukonstruotas matematinis modelis yra geras reikia rastus sprendinius palyginti su eksperimentų rezultatais. Jeigu skirtumas yra didelis, tai matematinis modelis yra blogas ir jį reikia arba atmesti, arba modifikuoti.

1.2 FUNDAMENTALIŲ GAMTOS DĖSNIŲ TAIKYMAS

Vienas iš dažniausiai naudojamų matematinių modelių konstravimo metodų yra fundamentalių gamtos dėsnių taikymas konkrečiu atveju. Pateiksime kelis pavyzdžius.

1. Energijos tvermės dėsnis. Rasime kulkos, iššautos iš revolverio, greitį. Tuo atveju, kai eksperimentatorius neturi šiuolaikinės laboratorijos, galima pasinaudoti sąlyginai paprastu prietaisu – švytuokle. Tegu kūnas, masės M, yra pakabintas ant standaus lengvo strypo, kuris gali laisvai suktis (žr. 1.1 pav.) ir pradiniu laiko momentu nejuda.



1.1 pav.

Kulka masės m, įstrigusi kūne, perduoda jam savo kinetinę energiją. Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)}{2}V^2(\alpha) + (M+m)gl(1-\cos\alpha);$$

čia v – kulkos greitis, $V(\alpha)$ – sistemos "kūnas+kulka" greitis, g – laisvojo kritimo pagreitis, l – strypo ilgis, α – strypo nuokrypio kampas. Tegu α^* yra maksimalus strypo nuokrypio kampas nuo pradinės padėties. Tada greitis $V(\alpha^*) = 0$ ir šiuo momentu sistemos "kūno + kulkos" kinetinė energija pereina į potencinę. Taigi

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha^*). \tag{1.7}$$

Iš čia randame kulkos greitį

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha^*)}{m}}.$$

Ši formulė yra pakankamai tiksli, jeigu energijos nuostolis dėl šilumos išsiskyrimo bei energijos nuostolis dėl oro pasipriešinimo yra mažas. Priešingu atveju (1.7) formulės taikyti negalima. Energijos tvermės dėsnis teigia, kad nekinta pilna sistemos energija, o ne mechaninė energija.

2. Masės tvermės dėsnis. Nagrinėsime radioaktyvios medžiagos skilimo procesą. Tarkime "mažas" radioaktyvios medžiagos (pavyzdžiui, urano) kiekis yra patalpintas "dideliame" kiekyje kitos medžiagos (pavyzdžiui, švino). Sakydami žodį "mažas", turime omenyje tai, kad visi skilimo produktai, nesusidurdami su kitais atomais, laisvai palieka užimamą sritį, o sakydami žodį

"didelis" turime omenyje tai, kad visi skilimo produktai absorbuojasi radioaktyvią medžiagą supančioje srityje. Tegu $m(t)$ ir $M(t)$ yra atitinkamai radioaktyvios, ir ją supančios medžiagos masė laiko momentu t. Tada pagal masės tvermės dėsnį

$$m(0) + M(0) = m(t) + M(t).$$

Radioaktyvios medžiagos skilimo greitį charakterizuoja suskilusių atomų skaičius per laiko vienetą. Eksperimentai rodo, kad šis skaičius yra tiesiog proporcingas bendram radioaktyvios medžiagos atomų skaičiui tuo laiko momentu. Kadangi radioaktyvios medžiagos masė yra tiesiog proporcinga jos atomų skaičiui, tai radioaktyvios medžiagos masės kitimo greitis yra tiesiog proporcingas jos masei tuo laiko momentu, t.y.

$$m'(t) = -km(t), \quad k > 0.$$

Proporcingumo koeficientas k kiekvienai konkrečiai radioaktyviai medžiagai nustatomas eksperimento pagalba. Iš pastarosios formulės matome, kad radioaktyvios medžiagos masė tenkina pirmos eilės tiesinę homogeninę lygtį. Tiesiogiai galima patikrinti, kad funkcija

$$m(t) = m(0)e^{-kt}.$$

yra šios lygties sprendinys. Be to, kai $t \to +\infty$, radioaktyvios medžiagos masė nyksta eksponentiškai ir artėja prie nulio. Kadangi bendra medžiagos masė nekinta, tai

$$M(t) = M(0) + m(0)\big(1 - e^{-kt}\big).$$

Be to, kai $t \to +\infty$, $M(t) \to M(0) + m(0)$ ir visa radioaktyvioji medžiaga pereina į ją supančią medžiagą.

3. I m p u l s o t v e r m ė s d ė s n i s. Šis dėsnis teigia, kad pilnas sistemos impulsas nekinta, jeigu sistemos neveikia išorinės jėgos. Gyvenime su šiuo principu susiduriama gana dažnai. Pavyzdžiui, jeigu stovinčioje valtyje žmogus žengia žingsnį į kurią nors pusę, tai valtis pasislenka į priešingą pusę. Šio principo pagrindu veikia įvairūs technikos prietaisai. Išnagrinėsime tiesiaeigio raketos judėjimo matematinį modelį, kai jos neveikia oro pasipriešinimo bei gravitacijos jėgos. Tegu u yra išmetamo sudegusio raketos kuro greitis (šiuolaikiniam kurui šis greitis kinta nuo 3 iki 5 km/s) raketos korpuso atžvilgiu, o v(t) – raketos greitis laiko momentu t Žemės atžvilgiu. Laikotarpiu Δt dalis kuro sudega ir raketos masė $m(t)$ sumažėja dydžiu $\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t)$. Kadangi pilnas sistemos impulsas nekinta, tai

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - v_1(t + \Delta t)\Delta m;$$

čia $v_1(t + \Delta t)$ degimo produktų išmetimo greitis Žemės atžvilgiu, o $\Delta m < 0$. Pastarąją lygybę patogu perrašyti taip:

$$\frac{m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - m(t)v(t)}{\Delta t} = \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} v_1(t + \Delta t).$$

Artindami čia $\Delta t \to 0$, gausime diferencialinę lygtį

$$\big(m(t)v(t)\big)' = m'(t)v_1(t) \quad \Longleftrightarrow \quad m(t)v'(t) = m'(t)\big(v_1(t) - v(t)\big).$$

Tačiau $v_1(t) - v(t) = -u$, t.y. degimo produktų greitis atžvilgiu raketos korpuso. Todėl pastarąją lygtį galime perrašyti taip:

$$m(t)\frac{dv(t)}{dt} = -u\frac{dm(t)}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv(t)}{dt} = -u\frac{d\ln m(t)}{dt}.$$

Integruodami abi pastarosios lygties puses randame

$$v(t) = v(0) + u\ln\Big(\frac{m(0)}{m(t)}\Big). \tag{1.8}$$

Jeigu $v(0) = 0$, tai maksimalus raketos greitis pasiekiamas, kai kuras pilnai sudega ir lygus

$$v_{max} = u\ln\Big(\frac{m(0)}{m_* + m_s}\Big);$$

čia m_* – masė objekto, kurį reikia iškelti į orbitą (pavyzdžiui, palydovo masė), o m_s – struktūrinė raketos konstrukcijos masė. Imdami $m_* = 0$, $m(0)/m_s = 10$, $u = 3km/s$ gauname, kad maksimalus raketos greitis

$$v_{max} = u\ln 10 \approx 6.9km/s < 7.$$

Iš šios formulės matome, kad netgi idealiu atveju, kai gravitacijos jėgos lygios nuliui, nėra oro pasipriešinimo bei raketos naudinga masė (pavyzdžiui, palydovo) lygi nuliui, maksimalus raketos greitis yra mažesnis už pirmąjį kosminį greitį $v \approx 7.91km/s$. Dėl šios priežasties kosmonautikoje buvo pradėtos naudoti daugiapakopės raketos.

Konkretumo dėlei nagrinėkime raketą su trimis pakopomis. Jos pradinė masė

$$m_0 = m_* + m_1 + m_2 + m_3;$$

čia $m_k, k = 1, 2, 3$ yra k-osios pakopos bendra masė. Be to, tegu $m_k^*, k = 1, 2, 3$ yra k-osios pakopos kuro masė ir skaičius $\lambda = (m_k - m_k^*)/m_k$ bei išmetamo sudegusio kuro greitis u yra vienodas visoms trims pakopoms. Tarkime, momentu t_1 yra sudegintas visas pirmosios pakopos kuras. Tada raketos masė lygi

$$m(t_1) = m_* + (m_1 - m_1^*) + m_2 + m_3.$$

Remiantis (1.8) formule laiko momentu t_1 raketa pasiekia greitį

$$v_1 = u\ln\Big(\frac{m_0}{m(t_1)}\Big).$$

Šiuo momentu struktūrinė pirmosios pakopos masė $m_1 - m_1^*$ atmetama ir įsijungia antroji pakopa. Raketos masė šiuo momentu lygi $m_* + m_2 + m_3$. Tarkime, laiko momentu t_2 yra sudeginamas visas antrosios pakopos kuras. Remiantis (1.8) formule raketos greitis momentu t_2 lygus

$$v_2 = v_1 + u \ln\Big(\frac{m_* + m_2 + m_3}{m_* + (m_2 - m_2^*) + m_3}\Big).$$

Analogiškai samprotaudami gauname, kad sudegus trečiosios pakopos kurui raketa pasiekia greitį

$$v_3 = v_2 + u \ln\Big(\frac{m_* + m_3}{m_* + (m_3 - m_3^*)}\Big).$$

Pažymėkime

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_* + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_* + m_2 + m_3}{m_* + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_* + m_3}{m_*}.$$

Tada

$$v_3 = u \ln\Big(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)}\Big)\Big(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)}\Big)\Big(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)}\Big).$$

Reiškinys dešinėje gautos lygybės pusėje yra simetrinis dydžių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ atžvilgiu. Galima įrodyti, kad didžiausią reikšmę jis įgyja, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Šiuo atveju

$$v_3 = 3u \ln\Big(\frac{\alpha}{1 + \lambda(\alpha - 1)}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{e^{-v_3/3u} - \lambda}.$$

Be to, sandauga

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{m_0}{m_*} = \alpha^3.$$

P a s t a b a. Pastarąsias formules galima apibendrinti bet kokiam baigtiniam raketos pakopų skaičiui. Tiksliau galima įrodyti, kad k pakopų raketa gali pasiekti greitį

$$v_k = ku \ln\Big(\frac{\alpha}{1 + \lambda(\alpha - 1)}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{e^{-v_k/ku} - \lambda},$$

o santykis

$$\frac{m(0)}{m_*} = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k = \alpha^k.$$

Tegu $\lambda = 0.1$ Pareikalavę, kad dviejų pakopų raketa pasiektų greitį $v_2 = 10.5km/s$ gausime, kad $m(0)/m_* = 149$. Taigi norint dviejų pakopų raketai pakelti į orbitą vienos tonos krovinį reikia apytiksliai 149 tonų kuro[1]. Trijų pakopų raketa pasieks greitį $v_3 = 10.5km/s$, kai $m(0)/m_* = 77$. Taigi trijų pakopų raketai iškelti į orbitą vieną toną krovinio reikia beveik du kartus mažiau kuro negu dviejų pakopų raketai. Galima parodyti, kad keturių pakopų raketos atveju, lyginant su trijų pakopų raketos atveju, kuro sanaudos sumažėja nežymiai.

[1] Laikome, kad didžiąją dalį raketos masės sudaro kūro masė.

4. Archimedo dėsnis. Tarkime, povandeninis laivas plaukia pastoviu greičiu v gylyje h. Laiko momentu $t = 0$ gautas įsakymas iškilti į paviršių. Reikia rasti povandeninio laivo iškilimo į vandenino paviršių trajektoriją.

Tarkime, laikas, per kurį iš laivo talpų yra išstumiamas vanduo ir į jas įpučiamas, oras yra mažas. Tada pagal Archimedo dėsnį laiko momentu $t = 0$ laivas netenka vandens svorio

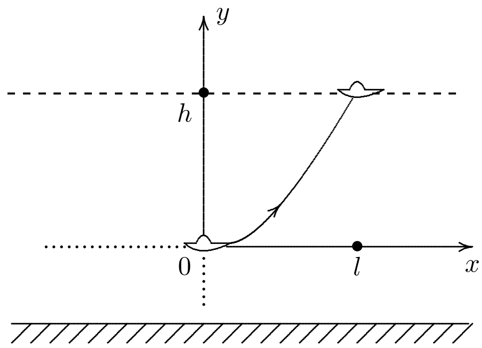
$$P_1 = \rho_1 V g,$$

bet įgyja oro svorį

$$P_2 = \rho_2 V g;$$

čia ρ_1 – vandens tankis, ρ_2 – oro tankis išstumus vandenį, V – vandens talpos tūris, g – laisvojo kritimo pagreitis. Suminė jėga $P_1 - P_2$ yra keliamoji jėga ir suteikia laivui pagreitį a.

Įveskime ortogonalią koordinačių sistemą Oxy taip, kaip pavaizduota 1.2 paveikslėlyje ir tarkime, kad povandeninio laivo iškilimo į vandenyno paviršių trajektoriją galima apibrėžti lygtimi $y = y(x)$, $x \in [0, l]$.



1.2 pav.

Pagal antrąjį Niutono dėsnį (nepaisome vandens pasipriešinimo jėgos)

$$ma = P_1 - P_2 \quad \iff \quad \rho_2 V \frac{d^2 y}{dt^2} = gV(\rho_1 - \rho_2).$$

Be to, x ašies kryptimi laivas plaukia pastoviu greičiu

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Suintegravę šias lygtis randame

$$y(t) = g\frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_2}t^2, \quad x(t) = vt.$$

Eliminavę iš šių lygčių parametrą t gauname, kad laivo į vandenyno paviršių iškilimo trajektorija yra parabolė

$$y = g\frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_2 v^2}x^2.$$

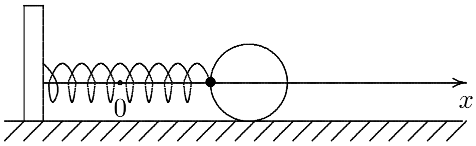
Laikas T, per kurį laivas pasiekia vandenyno paviršių, randamas iš lygties

$$g\frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_2}T^2 = h,$$

o atstumas, kurį jis nuplaukia x ašies kryptimi, lygus

$$l = vT = v\Big(\frac{2\rho_2 h}{g(\rho_1 - \rho_2)}\Big)^{1/2}.$$

A n t r a s i s N i u t o n o d ė s n i s. Nagrinėsime rutuliuką masės m, kuris yra pritvirtintas prie spyruoklės (žr. 1.3 pav.).



1.3 pav.

Išvedę rutuliuką iš pusiausvyros padėties taške, kuri yra taške $x = 0$, suteikiame jam pradinį nuokrypį x_0 ir pradinį greitį v_0. Tegu $x = x(t)$ yra rutuliuko nuokrypis nuo pusiausvyros padėties laiko momentu t. Tada laiko momentu $t = 0$ yra žinomas rutuliuko pradinis nuokrypis $x(0) = x_0$ ir pradinis greitis $x'(0) = v_0$. Be to, tegu $a = a(t)$ yra rutuliuko pagreitis laiko momentu t. Nagrinėdami šį procesą laikysime, kad tiesė, kuria svyruoja rutuliukas, yra ideali (t.y. rutuliuko svyravimas vyksta be trinties), oro pasipriešinimo jėga lygi nuliui ir sunkio jėga yra statmena judėjimo krypčiai. Tada vienintelė jėga, veikianti rutuliuką, yra spyruoklės stangrumo jėga F. Pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Tačiau spyruoklę veikianti jėga (Huko dėsnis) yra proporcinga spyruoklės ilgio pokyčiui, t.y.

$$F = -kx.$$

Taigi funkcija x, apibrėžianti spyruoklės svyravimą, turi tenkinti antros eilės diferencialinę lygtį

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad t > 0. \tag{1.9}$$

Lengvai galima įsitikinti, kad funkcija

$$x = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

yra šios lygties sprendinys. Laisvas konstantas c_1 ir c_2 randame iš sąlygų

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

P a s t a b a . Matematinis modelis išvestas remiantis vienais gamtos dėsniais neturi prieštarauti kitiems gamtos dėsniams. Be to, vieną ir tą patį modelį galima sudaryti remiantis skirtingais gamtos dėsniais. Pavyzdžiui, ka tik išvestą rutuliuko svyravimo matematinį modelį galima apibrėžti naudojant ne antrąjį Niutono dėsnį, o energijos tvermės dėsnį. Iš tikrųjų, kadangi spyruoklė yra pritvirtinta prie rutuliuko ir sienelės, be to rutuliuko svyravimas vyksta be trinties, oro pasipriešinimo jėga lygi nuliui ir sunkio jėga yra statmena judėjimo krypčiai, tai sistemos "spyruoklė-rutuliukas" mechaninė energija yra pastovi, t.y.

$$E = T + P = const;$$

čia kinetinė energija

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2$$

o potencinė energija

$$P = -\int\limits_0^x F\,ds = \int\limits_0^x ks\,ds = \frac{1}{2}kx^2.$$

Taigi suminė energija

$$E = T + P = \frac{1}{2}m\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Jos išvestinė

$$\frac{d}{dt}E = m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\Big(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\Big) = 0.$$

Iš šios formulės matome, kad funkcija x turi tenkinti tą pačią lygtį

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad t > 0.$$

Jeigu spyruoklę veikia išorinė jėga $F(x', x, t)$, priklausanti nuo laiko, jo padėties ir nuo greičio, tai vietoje (1.9) lygties gauname lygtį

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(x', x, t), \quad t > 0. \tag{1.10}$$

Tuo atveju, kai jėga F yra pastovi, t.y. $F(x', x, t) = F_0 = const$, tai padarę keitinį $\tilde{x} = x - F_0/k$ gausime lygtį

$$m\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + k\tilde{x} = 0, \quad t > 0.$$

Šiuo atveju matome, kad pastovi jėga rutuliuko svyravimo iš esmės nekeičia. Tik jos koordinatė pasislenka dydžiu F_0/k. Sudėtingesnis atvejis gaunamas, kai spyruoklę veikianti jėga F priklauso nuo laiko t. Pavyzdžiui, tegu $F(x', x, t) = F_0 \sin \tilde{\omega} t$. Tada pastarosios lygties sprendinys

$$x = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)} \sin \tilde{\omega} t, \quad \text{kai } \omega \neq \tilde{\omega}.$$

Iš šios formulės matome, kad sprendinyje ne tik atsiranda papildomas narys su amplitude $\tilde{\omega}$, bet ir rezonansas, t.y. sprendinio svyravimo amplitudė neaprėžtai auga, kai $\tilde{\omega} \to \omega$. Dar sudėtingesnį modelį gausime, jeigu rutuliuką veikia trinties jėga, atsirandanti dėl aplinkos, kurioje juda rutuliukas, pasipriešinimo. Šiuo atveju jėga F priklauso nuo rutuliuko judėjimo greičio. Ši priklausomybė apibrėžiama formule $F(x', x, t) = -\mu x'$. Čia koeficientas $\mu > 0$ priklauso nuo rutuliuko skerspiūvio statmeno greičiui ploto, aplinkos tankio bei jos klampumo. Rutuliuko svyravimas tokioje aplinkoje apibrėžiamas lygtimi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}, \quad t > 0.$$

Padarę keitinį

$$x(t) = \tilde{x}(t) e^{\alpha t}, \quad \alpha = -\mu/2m$$

gausime lygtį

$$m \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = -k_1 \tilde{x}, \quad k_1 = k - \frac{\mu^2}{4m}.$$

Ši lygtis iš esmės skiriasi nuo (1.9) lygties tuo, kad koeficiento k_1 prie ieškomos funkcijos ženklas priklauso nuo parametrų k, μ ir m reikšmių. Jeigu aplinkos klampumas nėra didelis, t.y. kai $k_1 = k - \mu^2/(4m) > 0$, rutuliuko svyravimą galima (žr. 3.2 skyrelį) apibrėžti formule

$$x(t) = \tilde{x}(t) e^{\alpha t} = (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t) e^{-t\mu/2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1}{m}}.$$

Šiuo atveju svyravimo dažnis yra ω ir didėjant laikui svyravimai gęsta. Jeigu $k_1 = 0$, tai rutuliuko judėjimą galima apibrėžti formule

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-t\mu/2m}.$$

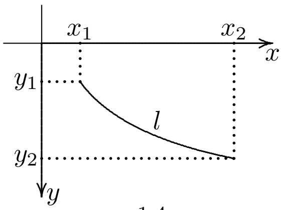
Šiuo atveju dėl didelies trinties svyravimų nėra. Tegu $k_1 < 0$. Šiuo atveju trinties jėgos yra tiek didelės, kad rutuliukas tiesiog įstringa jį supančioje aplinkoje. Galima įrodyti, kad rutuliukas nepereina per tašką $x = 0$ ir tik artėja prie jo, kai $t \to +\infty$.

1.3 VARIACINIO SKAIČIAVIMO ELEMENTAI

Vienas iš pirmųjų variacinio skaičiavimo uždavinių yra 1696 m. J. Bernulio suformuluotas uždavinys apie brachistochronę:

1 u ž d a v i n y s. Vertikalioje plokštumoje Oxy yra du taškai, nesantys vienoje vertikalioje tiesėje. Tegu x_1, y_1 ir x_2, y_2 yra šių taškų koordinatės. Iš taško (x_1, y_1) į tašką (x_2, y_2) kreive l be trinties juda materialus taškas. Pradiniu laiko momentu jo greitis $\mathbf{v}$ lygus nuliui. Aibėje tokių kreivių reikia rasti tą, kuria judėdamas materialus taškas pasiektų tašką (x_2, y_2) per trumpiausią laiką. Ieškomoji kreivė l yra vadinama brachistochrone.

Tarkime, koordinačių ašys x, y parinktos taip, kaip nurodyta 1.4 paveikslėlyje,



1.4 pav.

o kreivė l apibrėžta lygtimi

$$y = y(x),\ x \in [x_1, x_2]. \tag{1.11}$$

Tada

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{1.12}$$

Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = mg(y - y_1);$$

čia: m – judančio taško masė, g – laisvojo kritimo pagreitis. Kadangi

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt},$$

tai

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - y_1)}}\, dx.$$

Suintegravę šią lygybę nuo x_1 iki x_2, gausime

$$T \equiv I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - y_1)}}\, dx; \tag{1.13}$$

čia T – laikas, kurį sugaišta materialus taškas, judėdamas kreive l iš taško (x_1, y_1) į tašką (x_2, y_2). Taigi nagrinėjamas uždavinys susiveda į tokį variacinį uždavinį. Tegu $y : (a, b) \to \mathbb{R}^1$ yra diferencijuojama argumento x funkcija, tenkinanti (1.12) sąlygą. Aibėje tokių funkcijų reikia rasti tą, kuriai (1.13) integralas įgyja mažiausią reikšmę.

2 u ž d a v i n y s. Tegu $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ yra šviesos sklidimo nehomogeninėje medžiagoje greitis. Rasti šviesos sklidimo trajektoriją l, jungiančią taškus (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2).

Tarkime, šviesos sklidimo trajektorija yra apibrėžiama lygtimis:

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{1.14}$$

Tada

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_1) = z_1, \quad z(x_2) = z_2. \tag{1.15}$$

Kadangi

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\frac{dx}{dt},$$

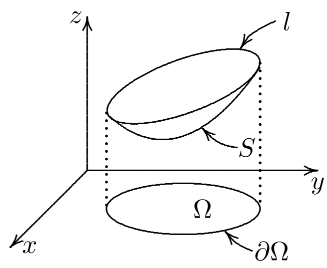
tai šviesos spindulys, išeinantis iš taško (x_1, y_1, z_1), pasieks tašką (x_2, y_2, z_2) per laiką

$$T \equiv I(y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{|\mathbf{v}(x, y, z)|}\, dx. \tag{1.16}$$

Pagal Ferma dėsnį šviesa sklinda ta trajektorija, kuria judant laikas T yra minimalus. Todėl nagrinėjamas uždavinys susiveda į tokį variacinį uždavinį. Tegu $y, z : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}^1$ yra diferencijuojamos argumento x funkcijos, tenkinančios (1.15) sąlygas. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tas, kurioms (1.16) integralas įgyja mažiausią reikšmę.

3 u ž d a v i n y s. Tegu l yra uždaras kontūras erdvėje $\mathbb{R}^3$, o S – paviršius, užtemptas ant kontūro l. Tokių paviršių aibėje reikia rasti tą, kurio plotas yra mažiausias.

Tarkime, ortogonalioje koordinačių sistemoje $Oxyz$ paviršius S apibrėžiamas lygtimi $z = u(x, y)$, $x, y \in \Omega$, $\partial\Omega$ – kontūro l projekcija į plokštumą Oxy (žr. 1.5 pav.).



1.5 pav.

Tada paviršiaus S plotas

$$|S| \equiv I(z) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy. \tag{1.17}$$

Jeigu taškas $(x, y) \in \partial\Omega$, tai taškas $(x, y, u(x, y)) \in l$. Tai reiškia, kad funkcija $u(x, y)$ taškuose $(x, y) \in \partial\Omega$ įgyja žinomą reikšmę. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y); \tag{1.18}$$

čia φ – žinoma funkcija. Taigi gavome tokį variacinį uždavinį.

Tegu $z = u(x, y)$ yra diferencijuojama srityje Ω funkcija, tenkinanti (1.18) sąlygą. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tą, kuriai (1.17) integralas įgyja mažiausią reikšmę.

4 uždavinys. Plokštumoje Oxy yra du taškai, sujungti atkarpa ir kreive l, kurios ilgis a. Tokių kreivių aibėje reikia rasti tą, kuri kartu su atkarpa apriboja didžiausio ploto figūrą.

Tarkime, kad tie taškai yra x ašyje ir turi koordinates $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, o kreivę l galima apibrėžti lygtimi $y = y(x), x \in [x_1, x_2]$. Tada

$$y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0. \tag{1.19}$$

Figūros, apribotos kreive l ir atkarpa $[x_1, x_2]$, plotas lygus

$$|S| = I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\, dx. \tag{1.20}$$

Kreivės l ilgis

$$|l| = G(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{1.21}$$

Taigi gavome tokį variacinį uždavinį.

Tegu $y : (x_1, x_2) \to \mathbb{R}^1$, yra diferencijuojama argumento x funkcija, tenkinanti (1.19) sąlygą. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tą, kuriai (1.20) integralas įgyja mažiausią reikšmę, o (1.21) integralas įgyja reikšmę a.

Visuose šiuose uždaviniuose ieškome funkcijos (arba kelių funkcijų), kuri tenkina tam tikras papildomas sąlygas ir suteikia nagrinėjamam integralui ekstremalią, t.y. minimalią arba maksimalią, reikšmę. Tiesa, 4 uždavinyje ieškomoji funkcija kartu su (1.19) turi tenkinti dar ir (1.21) sąlygą, kuri yra visai kitokio pobūdžio. Apibendrindami šiuos uždavinius sakysime, kad *pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys* yra rasti tokią funkciją, kuriai nagrinėjamas funkcionalas įgyja ekstremalią reikšmę. Šis uždavinys yra analogiškas elementariems analizės uždaviniams, kai yra ieškomi vienos arba kelių kintamųjų funkcijos ekstremumo taškai. Vieno kintamojo diferencijuojamos funkcijos f atveju sąlyga $f'(x) = 0$ yra būtina lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlyga. Nagrinėjamu atveju taip pat yra išvedama būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga. Dažniausiai tai yra paprastoji arba dalinių išvestinių lygtis. Ją turi tenkinti ieškomoji funkcija, jeigu tik ji egzistuoja. Išvedant būtiną ekstremumo egzistavimo sąlygą, naudojami keli teiginiai. Jie yra vadinami pagrindinėmis variacinio skaičiavimo lemomis.

1.1 lema. *Tegu f yra tolydi segmente $[a,b]$ funkcija ir*[1]

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)\,.$$

Tada $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

◁ Tarkime priešingai, kad lemos sąlygos yra patenkintos, tačiau funkcija $f(x) \not\equiv 0$. Tada egzistuoja taškas $x_0 \in [a,b] : f(x_0) \neq 0$. Tegu $f(x_0) > 0$. Kadangi funkcija f yra tolydi, tai egzistuoja taško x_0 aplinka $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tokia, kad $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Jeigu taškas x_0 yra segmento $[a,b]$ kraštinis taškas, pavyzdžiui, $x_0 = b$, tai reikia imti vienpusę šio taško aplinką. Aibėje $\mathrm{C}_0^\infty(a,b)$ imkime kokią nors funkciją η, kuri yra teigiama $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ir lygi nuliui, kai $x \in [a,b] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Tada

$$0 = \int\limits_a^b f(x)\eta(x)\,dx = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x)\eta(x)\,dx > 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. Taigi $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. Atvejis, kai $f(x_0) < 0$, nagrinėjamas analogiškai. ▷

Toks pats teiginys yra teisingas dvilypių, trilypių ir apskritai n-lypių integralų atveju.

1.2 lema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir*

$$\int\limits_\Omega f(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\,.$$

Tada $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

P a s t a b a . Šios lemos įrodymas yra analogiškas 1.1 lemos įrodymui. Be to, 1.2 lema išlieka teisinga ir tuo atveju, jeigu joje sritį Ω pakeisime glodžiu n-mačiu paviršiumi S.

[1] Tolydžių funkcijų intervale (a,b) aibę žymėsime $\mathrm{C}(a,b)$. Aibę funkcijų, kurios intervale (a,b) turi tolydžias išvestines iki k-tos eilės imtinai, žymėsime $\mathrm{C}^\mathrm{k}(a,b)$. Jeigu, be to jos intervale (a,b) yra finičios, tai tokią aibę žymėsime $\mathrm{C}_0^\mathrm{k}(a,b)$. Kai $k = \infty$ aibė $\mathrm{C}_0^\infty(a,b)$ yra be galo diferencijuojamų finičių intervale (a,b) funkcijų aibė.

1.3 lema. *Tegu f yra tolydi segmente $[a,b]$ funkcija ir*

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a,b), \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Tada funkcija f yra konstanta.

◁ Pažymėkime

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = C.$$

Tada

$$\int_a^b (f(x) - C)\,dx = 0. \tag{1.22}$$

Tegu

$$\eta(x) = \int_a^x (f(t) - C)\,dt.$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija η tenkina lemos sąlygas, o jos išvestinė $\eta'(x) = f(x) - C$. Todėl

$$\int_a^b (f(x) - C)f(x)\,dx = 0. \tag{1.23}$$

Padauginę (1.22) lygybę iš $-C$ ir pridėję prie (1.23), rezultatą užrašysime taip:

$$\int_a^b (f(x) - C)^2\,dx = 0.$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $f(x) = C$, $\forall x \in [a,b]$. ▷

1.4 lema. *Tegu f ir g yra tolydžios segmente $[a,b]$ funkcijos ir*

$$\int_a^b (g(x)\eta(x) + f(x)\eta'(x))\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a,b), \eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{1.24}$$

Tada $f \in \mathrm{C}^1(a,b)$ ir $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

◁ Tegu

$$w(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Tada
$$\int_a^b w(x)\eta'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\eta(x)\,dx$$
ir (1.24) tapatybę galime perrašyti taip:
$$\int_a^b (f(x) - w(x))\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a,b), \eta(a) = \eta(b) = 0.$$
Funkcija $f - w$ tenkina 1.3 lemos sąlygas. Todėl ji yra konstanta, t.y.
$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + C.$$
Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę $f' = g$. $\triangleright$

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F \in \mathrm{C}(\Omega \times \mathbb{R})$; l – glodi kreivė, gulinti srityje Ω ir jungianti du taškus. Tarkime, kreivę l galima apibrėžti lygtimi $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ ir $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Tada $\forall x \in [a,b]$ taškas $(x, y(x)) \in \Omega$. Aibę diferencijuojamų funkcijų, tenkinančių šias sąlygas, pažymėkime raide $\mathfrak{M}$.

Apibrėžkime integralą
$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx, \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{1.25}$$
Tada pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją $y \in \mathfrak{M}$ tokią, kad integralas I įgytų ekstremalią, t.y. minimalią arba maksimalią, reikšmę. Čia yra kalbama apie *absoliutųjį* ekstremumą, t.y. ieškoma funkcija turi būti tokia, kad
$$I(y) \le I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in \mathfrak{M}$$
arba
$$I(y) \ge I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in \mathfrak{M}.$$
Norint apibrėžti lokalaus ekstremumo sąvoką, reikia apibrėžti funkcijos (kreivės) aplinkos sąvoką.

Tegu $\varepsilon > 0$ yra fiksuotas skaičius ir $y \in \mathfrak{M}$. Funkcijos y nulinės eilės (arba stipriąja) ε aplinka vadinsime aibę
$$\mathfrak{M}_0 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| \le \varepsilon\}.$$
Funkcijos y pirmosios eilės (arba silpnąja) ε aplinka vadinsime aibę
$$\mathfrak{M}_1 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{y}'(x) - y'(x)| \le \varepsilon\}.$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia funkcionalui I *stiprųjį* (*silpnąjį*) lokalų ekstremumą, jeigu kokioje nors stipriojoje ε aplinkoje $\mathfrak{M}_0$ (silpnojoje ε aplinkoje $\mathfrak{M}_1$)

$$I(y) \leq I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1)$$

arba

$$I(y) \geq I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1).$$

Jeigu kokia nors funkcija y suteikia funkcionalui I absoliutųjį ekstremumą, tai ji suteikia ir stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir silpnąjį lokalų ekstremumą. Todėl, jeigu kokia nors sąlyga yra būtina tam, kad funkcija y suteiktų funkcionalui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ši sąlyga yra būtina ir tam, kad funkcija y suteiktų funkcionalui I stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir absoliutųjį ekstremumą. Taigi išvedant būtiną ekstremumo sąlygą reikia išnagrinėti silpnojo lokalaus ekstremumo atvejį.

Toliau vietoje natūralios tolydumo sąlygos reikalausime, kad funkcija F turėtų tolydžias dalines išvestines iki antrosios eilės imtinai pagal visus savo argumentus. Atkreipsime dėmesį į tai, kad, įrodant kai kuriuos teiginius, pakanka reikalauti tik pirmųjų išvestinių tolydumo.

Tarkime, funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia (1.25) funkcionalui silpnąjį lokalų ekstremumą, o funkcija $\eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)$. Funkcija $y + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos y aplinkai, jeigu skaičiaus ε modulis yra pakankamai mažas. Todėl tokioms ε reikšmėms yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(y) \leq I(y + \varepsilon\eta) \quad \text{arba} \quad I(y) \geq I(y + \varepsilon\eta).$$

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta)$. Pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(y + \varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} = \int_a^b \Big[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\Big]\, dx.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos Φ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\Big]\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,. \tag{1.26}$$

Taigi funkcija y turi tenkinti (1.26) integralinę tapatybę.

Atvirkštinis teiginys yra neteisingas. Jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ tenkina (1.26) integralinę tapatybę, tai nebūtinai ji suteikia integralui I silpnąjį lokalų ekstremumą. Šiuo atveju sakysime, kad integralas I įgyja *stacionariąją* reikšmę, o funkcija y yra *stacionarusis* integralo I taškas.

Panaudoję integravimo dalimis formulę, perrašysime (1.26) integralinę tapatybę taip:

$$\int_a^b \Big[F_{y'}(x, y, y') - \int_a^x F_y(t, y(t), y'(t))\, dt\Big]\eta'(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,.$$

Pagal 1.3 lemą funkcija y turi tenkinti lygtį

$$F_{y'}(x, y, y') - \int_a^x F_y(t, y(t), y'(t))\, dt = C. \tag{1.27}$$

Ši lygtis yra vadinama *Oilerio* lygtimi užrašyta integraline forma.

Įrodytą teiginį galima suformuluoti taip: jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia integralui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai egzistuoja konstanta C tokia, kad funkcija y yra (1.27) integrodiferencialinės lygties sprendinys.

P a s t a b a. Išvesdami (1.27) lygtį, nesinaudojome tuo, kad funkcija F turi tolydžią išvestinę F_x. Galima įrodyti (žr. [2]), kad funkcija y tenkina taip pat integralinę lygtį

$$F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y') - \int_a^x F_x(t, y(t), y'(t))\, dt = C, \quad x \in [a, b]. \tag{1.28}$$

Grįžkime dabar prie (1.26) integralinės tapatybės. Pagal 1.4 lemą koeficientas prie η' turi tolydžią kintamojo x atžvilgiu išvestinę. Todėl (1.26) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$F_{y'}(x, y, y')\eta \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \Big[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big) \Big] \eta(x)\, dx = 0,$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)$. Kadangi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tai

$$\int_a^b \Big[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big) \Big] \eta(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)\,.$$

Šioje integralinėje tapatybėje reiškinys, esantis laužtiniuose skliaustuose, tenkina 1.1 lemos sąlygas. Todėl funkcija y yra diferencialinės lygties

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big) = 0 \tag{1.29}$$

sprendinys. Ši lygtis yra vadinama *Oilerio* lygtimi užrašyta diferencialine forma. Padauginę Oilerio lygtį iš y', ją perrašome taip:

$$\frac{d}{dx}\big(F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y')\big) - F_x(x, y, y') = 0 \tag{1.30}$$

Suformuluosime įrodytą teiginį. *Jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia integralui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ji turi tenkinti (1.29) ir (1.30) lygtis.*

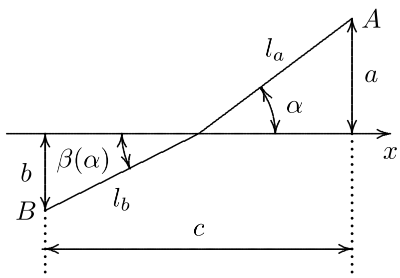
P a s t a b a. Jeigu (1.25) integrale skaliarinę funkciją y pakeisime į vektorinę funkciją $y =: (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, tai vietoje vienos Oilerio lygties gausime n Oilerio lygčių sistemą. Pavyzdžiui, vietoje (1.29) lygties gausime n lygčių sistemą

$$F_{y_i}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y_i'}(x, y, y')\big) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.31}$$

1.4 VARIACINIŲ PRINCIPŲ TAIKYMAS

Kitas dažnai naudojamas matematinių modelių konstravimo metodas yra "variacinių principų" taikymo metodas. Vieno iš tokių principų esmė yra ta, kad tam tikras dydis, aprašantis nagrinėjamos sistemos perėjimą iš vienos padėties į kitą, perėjimo metu įgyją ekstremalią reikšmę. Pavyzdžiui, pagal Ferma dėsnį šviesos spindulys, paleistas iš taško A į tašką B, juda ta trajektorija, kuriai šviesos sklidimo laikas yra minimalus. Remiantis šiuo principu galima išvesti visus pagrindinius geometrinės optikos dėsnius. Išnagrinėsime paprasčiausią pavyzdį.

1. Š v i e s o s l ū ž i m a s. Tarkime, dvi skitingų savybių homogenines terpes skiria tiesė. Pažymėkime ją raide x. Tegu šviesos spindulys, išeinantis iš taško A, kerta tiesę x kampu α ir $\beta(\alpha)$ yra kampas tarp x ašies ir spindulio kitoje terpėje (žr. 1.6 pav). Be to, tegu pirmoje terpėje šviesos sklidimo greitis lygus v_a, o antroje v_b. Rasime $\beta(\alpha)$.



1.6 pav.

Tada šviesos spindulys, išeinantis iš taško A, pasieks tašką B per laiką

$$t(\alpha) = \frac{l_a}{v_a} + \frac{l_b}{v_b} = \frac{a}{v_a \sin\alpha} + \frac{b}{v_b \sin\beta(\alpha)}.$$

Šis laikas bus trumpiausias, kai $t'(\alpha) = 0$, t.y. kai

$$-\frac{a}{v_a}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{b}{v_b}\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta(\alpha)} \cdot \beta'(\alpha) = 0.$$

Kadangi

$$\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg}\beta(\alpha)} = c,$$

tai

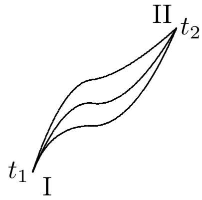
$$-\frac{a}{\sin^2\alpha} - \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)} \cdot \beta'(\alpha) = 0.$$

Eliminavę iš pastarųjų dviejų lygčių $\beta'(\alpha)$, gausime žinomą šviesos lūžimo formulę

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta(\alpha)} = \frac{v_a}{v_b}.$$

Sudarant fizikos ir mechanikos reiškinių matematinius modelius dažnai naudojamas *Hamiltono principas*. Jo esmė yra tokia.

Tarkime, laiko momentu t_1 nagrinėjamas kūnas yra **I** padėtyje, o laiko momentu t_2 – **II** padėtyje. Aišku, kad perėjimas iš **I** padėties į **II** galimas skirtingais keliais (žr. 1.7 pav.).



1.7 pav.

Pažymėsime raidėmis T ir P kūno kinetinę ir potencinę energijas. Tada Hamiltono principas tvirtina, kad realiame procese, veikiant potencinėms jėgoms kūnas juda ta trajektorija, kurioje integralas

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - P)\, dt$$

įgyja stacionarią reikšmę. Kartais stacionari reikšmė yra mažiausia integralo reikšmė. Todėl Hamiltono principas dar yra vadinamas *mažiausio veiksmo* principu. Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. M a t e r i a l a u s t a š k o t r a j e k t o r i j a. Iš pradžių išnagrinėsime paprasčiausią atvejį, kai materialus taškas mestas vertikaliai aukštyn juda vakume veikiamas pastovios sunkio jėgos. Tegul yra žinoma taško koordinatė ir greitis pradiniu laiko momentu. Tarkime, taško trajektoriją galima apibrėžti lygtimi $y = y(t)$. Be to, tegu pradiniu laiko momentu $t = 0$ aukštis $y(0) = 0$, o greitis $v = c$. Taško kinetinė energija

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{y}^2}{2}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Taško potencinė energija

$$P = mgy.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome integralą

$$I(y) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy \Big)\, dt.$$

Šį integralą atitinka Oilerio lygtis

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0.$$

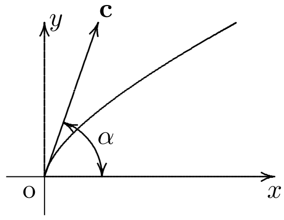
Jos sprendinys

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Pagal prielaidą $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = c$. Todėl $C_2 = 0$, o $C_1 = c$. Vadinasi, vertikaliai aukštyn mesto materialaus taško judėjimas yra aprašoma lygtimi

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct.$$

Tarkime dabar, kad materialus taškas metamas iš koordinačių pradžios kampu α (žr. 1.8 pav.) pradiniu greičiu $\mathbf{c}$. Rasime šio taško trajektoriją.



1.8 pav.

Bendru atveju ją galima apibrėžti lygtimis

$$y = y(t), \quad x = x(t).$$

Tada taško kinetinė energija

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ \dot{y} = \frac{dy}{dt},$$

o potencinė energija

$$P = mgy.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome integralą

$$I(x,y) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \Big)\, dt.$$

Šį integralą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0.$$

Perrašysime jas taip:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g.$$

Šių lygčių sprendiniai:

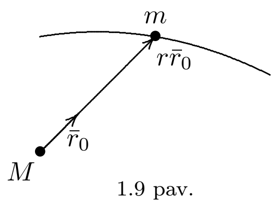
$$x = C_1 t + C_2, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4.$$

Pagal prielaidą $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Todėl $C_2 = C_4 = 0$. Be to,

$$\dot{x}(0) = c\cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = c\sin\alpha, \quad c = |\mathbf{c}|.$$

Todėl
$$C_1 = c\cos\alpha, \qquad C_2 = c\sin\alpha.$$
Taigi nagrinėjamojo taško trajektoriją galima aprašyti parametrinėmis lygtimis:
$$x = ct\cos\alpha, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + ct\sin\alpha,$$
iš kurių gauname
$$y = -\frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha.$$

3. P l a n e t ų j u d ė j i m o d ė s n i a i. Tarkime M yra Saulės masė, o m – planetos masė. Pagal visuotinį traukos dėsnį (žr. 1.9 pav.)



1.9 pav.

abi masės veikia viena kitą jėga
$$\bar{F} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\bar{r}_0, \quad |\bar{r}_0| = 1.$$
Veikiant šiai jėgai, potencinė energija
$$P = \int_r^\infty \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\gamma Mm\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = -\gamma\frac{Mm}{r}.$$
Pažymėkime $\gamma M = k$. Tada $P = -\dfrac{km}{r}$. Tarkime planetos judėjimą galima apibrėžti parametrinėmis lygtimis [1] $x = x(t), y = y(t)$. Tada Planetos kinetinė energija
$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$
Nagrinėjant šį uždavinį, patogu įvesti polines koordinates:
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$
Polinėse koordinatėse
$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

[1] Pagal antrąjį Niutono dėsnį $m\bar{r}'' = \bar{F}$. Todėl $\bar{r}\times m\bar{r}'' = \bar{r}\times\bar{F} = 0$. Pastarąją lygybę galima perrašyti taip $(\bar{r}\times m\bar{r}')' = 0$. Integruodami ją randame $\bar{r}\times m\bar{r}' = \bar{c}$, $\bar{c}$ – vektorinė konstanta. Padauginę skaliariškai abi šios lygybės puses iš $\bar{r}$ turime $\bar{c}\cdot\bar{r} = 0$. Tai yra vektorinė plokštumos lygtis. Todėl galime tvirtinti, kad planetos skriejimo apie saulę trajektorija yra plokščia

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome integralą

$$I(r,\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \frac{km}{r}\Big]\,dt.$$

Šį integralą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(m\dot r) + \frac{km}{r^2} - mr\dot\varphi^2 = 0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0.$$

Antrosios Oilerio lygties sprendinys

$$r^2\dot\varphi = C, \quad C = const > 0. \tag{1.32}$$

Padauginę pirmąją lygtį iš $\dot r$, o antrąją iš $\dot\varphi$, perrašysime jas taip:

$$r\ddot r - r\dot r\dot\varphi^2 + \frac{k}{r^2}\dot r = 0.$$

$$2r\dot r\dot\varphi^2 + r^2\dot\varphi\ddot\varphi = 0.$$

Sudėję šias lygtis gausime

$$\dot r\ddot r + r\dot r\dot\varphi^2 + r^2\dot\varphi\ddot\varphi + \frac{k}{r^2}\dot r = 0.$$

Pastebėsime, kad kairioji pastarosios lygties pusė yra pilnasis diferencialas. Todėl ją galima perrašyti taip:

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{k}{r}\Big] = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{k}{r} = C_1. \tag{1.33}$$

Suintegravę (1.32)lygtį nuo t_1 iki t_2, gausime

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} r^2\dot\varphi\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}C(t_2 - t_1).$$

Tai yra *antrasis Keplerio dėsnis*[1]. Jis teigia, kad planetos skrieja aplink Saulę taip, kad planetos spindulys vektorius per vienodą laiko tarpą apibrėžią vienodą plotą.

Išreiškę iš (1.32) išvestinę $\dot\varphi$ ir įstatę į (1.33), gausime

$$\frac{1}{2}\Big(\dot r^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big) - \frac{k}{r} = C_1 \Longleftrightarrow \pm\frac{dr}{\sqrt{2C_1 + \frac{2k}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} = dt = \frac{r^2}{C}d\varphi.$$

[1]Šiuolaikinėje literatūroje Keplerio dėsnių numeracija skiriasi nuo originalios, suformuluotos Keplerio. Keplerio formuluotėje tai yra pirmasis Keplerio dėsnis.

Integruodami šią lygtį randame

$$\mp\arccos\Big\{\frac{C^2-kr}{r\sqrt{k^2+2C_1C^2}}\Big\}=\varphi-C_2$$

arba

$$r=\frac{C^2}{k+\sqrt{k^2+2C_1C^2}\cos(\varphi-C_2)}.$$

Tai yra elipsės lygtis polinėse koordinatėse. Kai $C_2=0$, gausime, kad elipsės ašis yra tiesėje $\varphi=0$. Pažymėkime

$$p=\frac{C^2}{k},\quad \varepsilon=\sqrt{1+2\tfrac{C_1C^2}{k^2}}.$$

Tada elipsės lygtį galima užrašyti taip:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Tai yra *pirmasis Keplerio dėsnis*[1]. Jis teigia, kad planeta skrieja aplink Saulę elipse, kurios viename iš židinių yra Saulė.

Elipsės pusašės

$$a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}=-\frac{k}{2C_1},\quad C_1<0,\quad b=\sqrt{pa}=\frac{C}{\sqrt{-2C_1}}.$$

Tegu T yra laikas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę. Tada elipsės ribojamos figūros plotas

$$\pi ab=\frac{1}{2}CT.$$

Iš šių formulių lengvai galima išvesti, kad

$$T^2=4\pi^2a^3\frac{1}{k}.$$

Tai yra *trečiasis Keplerio dėsnis*. Jis teigia, kad laiko kvadratas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę, yra proporcingas didžiosios pusašės kubui.

4. R u t u l i u k o s v y r a v i m ų l y g t i s. Rutuliuko, pritvirtinto prie spyruoklės, svyravimų matematinį modelį dviem skirtingais metodais sudarėme 1.2 skyrelyje. Parodysime, kad taikant Hamiltono principą yra gaunama ta pati rutuliuko svyravimą aprašanti lygtis.

Priminsime, kad masės m rutuliuko kinetinė ir potencinė energija lygi

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2,\quad P=\frac{1}{2}kx^2.$$

Remiantis Hamiltono principu sudarome integralą

$$I(x)=\int_{t_1}^{t_2}(T-P)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{1}{2}m\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2-\frac{1}{2}kx^2\Big)\,dt. \tag{1.34}$$

[1] Keplerio formuluotėje tai yra antrasis Keplerio dėsnis

Jį atitinka Oilerio lygtis

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

5. Lėktuvo trajektorija. Kokia uždara plokščia kreive l turi skristi lėktuvas, kad per laiką T apskrietų didžiausio ploto figūrą, jeigu lėktuvo greitis, kai nėra vėjo, lygus v_0, o vėjo greitis a yra pastovus ir turi pastovią kryptį.

Tarkime, vėjo kryptis yra nukreipta x ašies kryptimi ir lėktuvo masės centro padėtį laiko momentu t galima apibrėžti lygtimis:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Be to, tegu

$$\alpha = \alpha(t)$$

yra kampas tarp x ašies ir lėktuvo krypties. Lėktuvo greičio vektorius

$$v(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Antra vertus, šis greičio vektorius

$$v(t) = (v_0 \cos\alpha + a, v_0 \sin\alpha).$$

Sulyginę šias reikšmes gausime

$$x' = v_0 \cos\alpha + a, \quad y' = v_0 \sin\alpha. \tag{1.35}$$

Plotas figūros, kurios kontūru skrenda lėktuvas, išreiškiamas integralu

$$I(l) = \frac{1}{2}\int_0^T (xy' - yx')\,dt.$$

Taigi reikia rasti kampą α ir kreivę $l : x = x(t), y = y(t)$, kurie tenkintų (1.35) sąlygas ir suteiktų funkcionalui $I(l)$ didžiausią reikšmę. Tai yra sąlyginio ekstremumo uždavinys. Funkcijų trejetas α, x ir y yra šio uždavinio sprendinys, jeigu prie tam tikrų Lagranžo daugiklių $\lambda_1 = \lambda_1(t), \lambda_2 = \lambda_2(t)$ jos yra funkcionalo

$$I^*(l) = \int_0^T [xy' - yx' - \lambda_1(x' - v_0\cos\alpha - a) - \lambda_2(y' - a\sin\alpha)]\,dt$$

ekstremalės. Šį funkcionalą atitinka trys Oilerio lygtys:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F_{x'}) - F_x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(-y - \lambda_1) - y' = 0,\\
\frac{d}{dt}(F_{y'}) - F_y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(x - \lambda_2) + x' = 0,\\
\frac{d}{dt}(F_{\alpha'}) - F_\alpha = 0 \quad &\Longleftrightarrow -\lambda_1\sin\alpha + \lambda_2\cos\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių randame

$$2x + c_2 = \lambda_2, \quad 2y + c_1 = -\lambda_1.$$

Apibrėžkime polines koordinates

$$x + c_2/2 = \tilde{r}\cos\varphi, \quad y + c_1/2 = \tilde{r}\sin\varphi.$$

Tada

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2y + c_1}{2x + c_2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Iš trečiosios Oilerio lygties gauname, kad

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Todėl yra teisiga formulė

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Iš jos randame

$$\alpha = \varphi + \pi/2.$$

Kartu galime tvirtinti, kad kiekvienu laiko momentu t kampas tarp lėktuvo krypties ir padėties vektorių yra status.

Įstatę rastą α reikšmę į (1.35) formules, gausime sistemą

$$x' = -v_0\sin\varphi + a, \quad y' = v_0\cos\varphi.$$

Padauginę pirmąją lygtį iš x, antrąją iš y, ir abi gautas lygtis sudėję, gausime

$$xx' + yy' = ax = ar\cos\varphi = ar\sin\alpha.$$

Pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$r\frac{dr}{dt} = ar\sin\alpha, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

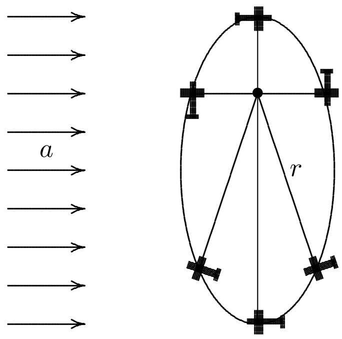
Kadangi $\sin\alpha = y'/v_0$, tai

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{v_0}\frac{dy}{dt}.$$

Suintegravę pastarąją lygtį, gausime

$$r = \frac{a}{v_0}y + C.$$

Pagal uždavinio prasmę skaičius $e := a/v_0 < 1$. Todėl pastaroji lygtis apibrėžia elipsę, kurios ekscentricitetas yra e ir vienas iš židinių yra koordinačių pradžios taške, o elipsės didžioji ašis nukreipta y ašies kryptimi.



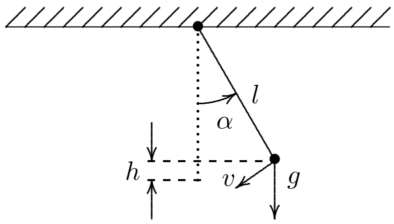
1.10 pav.

Taigi didžiausio ploto figūra, kurią apibrėžia skrisdamas lėktuvas greičiu didesniu už vėjo greitį, yra elipsė. Šios elipsės didžioji ašis yra nukreipta statmenai vėjo krypčiai. Be to, lėktuvo ašies kryptis kiekvienu laiko momentu yra ortogonali lėktuvo masių centro radiuso vektoriui (žr. 1.10 pav.).

1.5 KELI PAPRASČIAUSI NETIESINIŲ PROCESŲ MODELIAI

Tiesiniai procesai pasižymi viena svarbia savybe. Bet kokių juos aprašančių sprendinių tiesinis darinys taip pat yra sprendinys. Netiesiniai procesai šia savybe nepasižymi. Žinant kelis netiesinį procesą aprašančius sprendinius jų tiesinis darinys nebūtinai bus sprendinys. Be to, jeigu kokį nors netiesinį procesą aprašantį parametrą pakeisime nežymiai, tai tą procesą aprašantys dydžiai gali pasikeisti iš esmės. Daugumas netiesinių procesų ir juos aprašančių matematinių modelių yra netiesiniai. Tiesiniai modeliai dažniausiai yra netiesinių modelių pirmieji artiniai. Pateiksime kelis paprasčiausius netiesinių modelių atvejus.

1. Švytuoklės svyravimas. Tarkime, vienas strypo galas yra pritvirtintas prie sijos, o prie kito strypo galo pritvirtintas kūnas masės m. Be to, tegu strypo masė yra pakankamai maža lyginant su kūno mase, o strypas įtvirtinimo vietoje gali laisvai, be trinties, suktis (žr. 1.11 pav.).



1.11 pav.

Nagrinėsime plokščią švytuoklės svyravimą ir laikysime, kad oro pasipriešinimo galime nepaisyti. Kokiu nors būdu švytuoklę išveskime iš pusiausvyros padėties. Pažymėkime raide α švytuoklės nuokrypio kampą nuo pusiausvyros padėties. Tada nagrinėjamos sistemos kinetinė energija

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\Big(l\frac{d\alpha}{dt}\Big)^2,$$

o potencinė energija

$$P = mgh = mg(l - l\cos\alpha);$$

čia l – strypo ilgis, g – laisvo kritimo pagreitis, $h \geq 0$ – švytuoklės nuokrypis nuo žemiausios padėties. Remiantis Hamiltono principu sudarome integralą

$$I(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - P)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{1}{2}m\Big(l\frac{d\alpha}{dt}\Big)^2 - mg(l - l\cos\alpha)\Big]\,dt.$$

Tegu funkcija $\alpha = \alpha(t)$ aprašo realų švytuoklės svyravimą. Tada ji turi tenkinti Oilerio lygtį

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\sin\alpha = 0.$$

Pastaroji lygtis yra netiesinė antros eilės lygtis. Tačiau jeigu svyravimai maži, tai $\sin\alpha \approx \alpha$ švytuoklės mažų svyravimų matematinis modelis yra tiesinis

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\alpha = 0.$$

Netiesinės lygties atveju rasti sprendinio analizinę išraišką dažniausiai neįmanoma. Todėl tokių lygčių sprendimui pasitelkiami skaitiniai metodai.

2. Š u o l i s s u p a r a š i u t u. Tarkime, parašiutininkas masės m išskleidžia parašiutą laiko momentu $t = 0$ ir jo greitis šiuo momentu $v(0) = v_0$. Tegu šis greitis nukreiptas sunkio jėgos kriptymi. Tada parašiutininko trajektorija yra tiesė. Rasime parašiutininko greitį bet kuriuo laiko momentu t, jeigu oro pasipriešinimo jėga U yra tiesiog proporcinga greičio kvadratui, t.y. $U = bv^2$ (proporcingumo koeficientas b priklauso nuo parašiuto). Parašiutininką veikia sunkio jėga $P = mg$ ir oro pasipriešinimo jėga U nukreipta priešinga judėjimui kryptimi. Todėl pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$ma = P - U \quad \Longleftrightarrow \quad m\frac{dv(t)}{dt} = mg - bv^2.$$

Taigi funkcija v turi tenkinti lygtį

$$\frac{dv(t)}{dt} = -(v^2 - k^2)\frac{b}{m}, \quad k^2 = \frac{mg}{b}.$$

Atskyrę kintamuosius ir integruodami gausime

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = -\int \frac{b}{m}\,dt. \tag{1.36}$$

Kadangi

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\Big(\frac{1}{v-k} - \frac{1}{v+k}\Big),$$

tai

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\Big(\int \frac{dv}{v-k} - \int \frac{dv}{v+k}\Big) = \frac{1}{2k}\big(\ln|v-k| - \ln|v+k|\big)$$

ir (1.36) lygybę galime perrašyti taip:

$$\ln\Big|\frac{v-k}{v+k}\Big| = -\frac{2bk}{m}t + \ln|c| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v-k}{v+k} = ce^{-\frac{2bk}{m}t}.$$

Išsprendę šią lygtį v atžvilgiu, gausime

$$v(t) = k\frac{1 + ce^{-\frac{2bk}{m}t}}{1 - ce^{-\frac{2bk}{m}t}}. \tag{1.37}$$

Iš šios formulės matome, kad parašiutininko greitis $v(t) \to k$, kai $t \to +\infty$. Iš sąlygos $v(0) = v_0$ randame laisvąją konstantą

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k} < 1.$$

Įstatę taip apibrėžtą konstantą c į (1.37) formulę, rasime parašiutininko greitį laiko momentu t.

Tegu $x(t)$ yra atstumas, kurį nuskrieja parašiutininkas, iššokęs iš lėktuvo, žemės kryptimi laiko momentu t. Tada parašiutininko greitis

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = k\frac{e^{\frac{bk}{m}t} + ce^{-\frac{bk}{m}t}}{e^{\frac{bk}{m}t} - ce^{-\frac{bk}{m}t}},$$

o atstumas žemės kryptmi

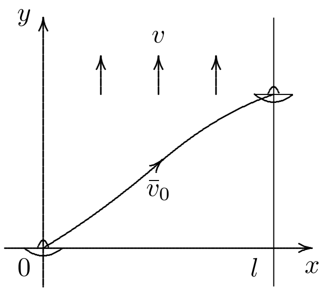
$$x(t) = k\int_0^t \frac{e^{\frac{bk}{m}s} + ce^{-\frac{bk}{m}s}}{e^{\frac{bk}{m}s} - ce^{-\frac{bk}{m}s}}\,ds = \frac{m}{b}\int_0^t \frac{d\big(e^{\frac{bk}{m}s} - ce^{-\frac{bk}{m}s}\big)}{e^{\frac{bk}{m}s} - ce^{-\frac{bk}{m}s}} =$$

$$\frac{m}{b}\ln\Big(\frac{e^{\frac{bk}{m}t} - ce^{-\frac{bk}{m}t}}{1-c}\Big).$$

3. N a v i g a c i j o s u ž d a v i n y s. Valtis iš vieno upės kranto plaukia į kitą. Tarkime, upės krantai yra tiesėse $x = 0$ ir $x = l$ (žr. 1.12 pav.). Be to, tegu pradiniu laiko momentu valtis yra koordinačių pradžios taške $x = 0, y = 0$, upės greitis $\bar{v}$ yra lygiagretus krantui ir upės greičio modulis $v = v(x)$, valties greičio $\bar{v}_0$ atžvilgiu vandens modulis $v_0 = v_0(x) > 0$ ir

$$v_0^2(x) > v^2(x), \quad \forall x \in [0, l].$$

Reikia rasti valties trajektoriją, kuria plaukdama ji pasieks kitą krantą per trumpiausią laiką.



1.12 pav.

Pažymėkime raide α nežinomą kampą tarp x ašies ir valties judėjimo krypties. Tada valties masių centro absoliutaus greičio koordinatės apibrėžiamas formulėmis

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v + v_0\sin\alpha.$$

Eliminavę iš šių lygčių laiką t randame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v + v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}.$$

Pastarąją lygtį perrašykime taip:

$$y' - \frac{v}{v_0\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Pakėlę abi šios lygties puses kvadratu gausime reiškinio $1/\cos\alpha$ atžvilgiu kvadratinę lygtį

$$(v_0^2 - v^2)\frac{1}{v_0^2\cos^2\alpha} + 2vy'\frac{1}{v_0\cos\alpha} - (1 + y'^2) = 0.$$

Jos sprendinys

$$\frac{1}{v_0\cos\alpha} = \frac{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2} - vy'}{v_0^2 - v^2}.$$

Laikas, kurį sugaišta valtis plaukdama iš vieno upės kranto į kitą, priklauso nuo valties trajektorijos, t.y.

$$T(y) = \int_0^l \frac{dt}{dx}\,dx = \int_0^l \frac{dx}{v_0\cos\alpha} = \int_0^l \frac{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2} - vy'}{v_0^2 - v^2}\,dx.$$

Tegu funkcija $y = y(x)$, $x \in [0, l]$, tenkinanti sąlygą $y(0) = 0$, aprašo realią valties trajektoriją. Leistiną valties trajektoriją galima apibrėžti lygtimi $y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, $\eta(0) = 0$. Taškas, kuriame valtis pasiekia kitą krantą yra nežinomas. Todėl funkcijai $y = y(x)$ taške $x = l$ nekeliami jokie reikalavimai. Kartu taške $x = l$ nekeliami jokie reikalavimai ir funkcijai η.

Būtiną integralo T lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlygą

$$\delta T(y, \eta) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T(y + \varepsilon\eta) - T(y)}{\varepsilon} = 0$$

perrašykime taip:

$$\delta T(y, \eta) = \int_0^l \left[\frac{1}{v_0^2 - v^2}\left(\frac{v_0^2 y'}{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2}} - v\right)\right]\cdot\eta'(x)\,dx = 0. \tag{1.38}$$

Imkime šioje integralinėje tapatybėje $\eta(l) = 0$. Tada, remiantis 1.3 lema, galime tvirtinti, kad funkcija y turi tenkinti lygtį

$$\frac{1}{v_0^2 - v^2}\left(\frac{v_0^2 y'}{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2}} - v\right) = c, \quad c = const. \tag{1.39}$$

Grįžkime prie (1.38) integralinės tapatybės. Integruodami ją dalimis ir pasinaudoję tuo, kad funkcija y turi tenkinti (1.39) lygtį, gauname

$$\frac{1}{v_0^2 - v^2}\left(\frac{v_0^2 y'}{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2}} - v\right)\cdot\eta\Big|_0^l = 0.$$

Kadangi $\eta(0) = 0$, o $\eta(l)$ gali įgyti bet kokias reikšmes, tai funkcija y taške $x = l$ turi tenkinti sąlygą

$$\frac{v_0^2 y'}{\sqrt{v_0^2(1 + y'^2) - v^2}} - v = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{v}{v_0} \tag{1.40}$$

Pastaroji sąlyga yra vadinama *naturaliąja kraštine sąlyga*. Taigi ieškoma funkcija y intervale $(0, l)$ turi tenkinti (1.39) lygtį, taške $x = 0$ kraštinę sąlygą $y(0) = 0$ ir taške $x = l$ naturaliąją (1.40) kraštinę sąlygą. Pasinaudoję (1.40) sąlyga gauname, kad (1.39) lygtyje konstanta $c = 0$. Todėl pastarąją lygtį galime perrašyti taip: $y' = v/v_0$. Integruodami ją randame, kad ieškoma valties trajektorija yra apibrėžiama lygtimi

$$y(x) = \int_0^x \frac{v(s)}{v_0(s)}\, ds,$$

o laikas per kurį valtis pasiekia kitą krantą

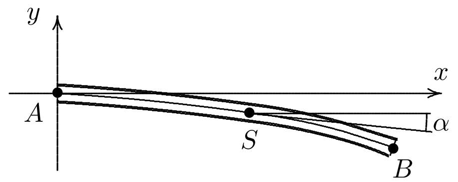
$$T = \int_0^l \frac{1}{v_0(s)}\, ds.$$

4. Strypo išlinkimo uždavinys. Tegu ilgio l strypo AB galas A yra įtvirtintas. Kitas jo galas B yra laisvas ir prie jo pritvirtintas kūnas masės m. Nustatyti strypo pusiausvyros formą, nekreipiant dėmesio į jo paties masę.

Tarkime, x ašis yra horizontali tiesė, einanti per tašką A. Laisvai pasirenkame tašką $S \in AB$. Pažymėkime raide s lanko AS ilgį. Tada sunkio jėgų potencinė energija

$$P_{sj} = mgh = mg \int_0^l mg \sin\alpha\, ds, \quad \sin\alpha\, ds = dy;$$

čia h yra atstumas nuo taško B iki x ašies, o α – kampas tarp x ašies ir stypo liestinės taške S (žr. 1.13 pav.).



1.13 pav.

Tarkime, kampas α yra parametro s funkcija, t.y. $\alpha = \alpha(s)$. Tada strypo tamprumo jėgų potencinė energija [žr. ???]

$$P_{tj} = \int_0^l J{\alpha'}^2(s)\, ds;$$

čia $\alpha' = d\alpha/ds$ – strypo kreivis, J – standumo modulis. Todėl bendra strypo potencinė energija

$$P = \int_0^l \left(J{\alpha'}^2 + mg\sin\alpha\right) ds$$

Tarkime, funkcija $\alpha = \alpha(s), s \in [0, l]$, aprašo realų strypo išlinkimą. Tada ji turi tenkinti Oilerio lygtį

$$2J\alpha'' - mg\cos\alpha = 0.$$

Be to, įtvirtintame strypo gale A turi būti patenkinta kraštinė sąlyga $\alpha(0) = \alpha_0$, o laisvame gale natūraliąją kraštinę sąlyga $\alpha'(l) = 0$ (jos išvedimas yra toks pat kaip praeitame pavyzdyje).

Tarkime, strypas yra mažai išlinkęs (t.y. artimas x ašiai) ir funkcija $y = y(x), x \in [0, b]$, aprašo jo išlinkimą. Tada

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \approx \alpha.$$

Dėl tos pačios priežasties

$$\frac{d\alpha}{ds} \approx \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2\alpha}{ds^2} \approx \frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) \approx \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\cos\alpha \approx 1, \quad l = \int\limits_0^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \approx b.$$

Be to, tegu $\alpha_0 = 0$. Tada Oilerio lygtį ir kraštines sąlygas galima užrašyti taip:

$$2J\frac{d^3y}{dx^3} - mg = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(b) = 0, \quad l \approx b.$$

Šios Oilerio lygties sprendinys

$$y = \frac{mg}{12J}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Iš kraštinių sąlygų randame

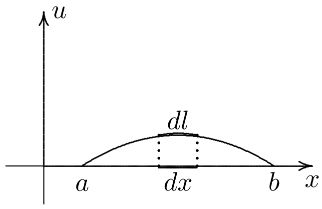
$$C_1 = -\frac{mgl}{2J}, \quad C_2 = C_3 = 0.$$

Taigi mažai išlenkto strypo pusiausvyros padėtį aprašo funkcija

$$y = \frac{mg}{12J}(x^3 - 6lx^2).$$

1.6 STYGOS SVYRAVIMŲ LYGTIS

Kietą kūną, kurio ilgis daug didesnis už kitus jo matmenis, vadinsime styga. Tarkime, įtempta baigtinė styga yra įtvirtinta galuose ir pusiausvyros būsenoje stygos taškai yra tiesėje. Pažymėsime šitą tiesę x ašimi, o taškus, kuriuose styga įtvirtinta – taškais a ir b. Kokiu nors būdu išveskime stygą iš pusiausvyros. Nagrinėsime tik tokius svyravimus, kai stygos taškai juda vienoje plokštumoje statmenai x ašiai. Taško x nuokrypį nuo pusiausvyros padėties pažymėsime $u(x, t)$. Tada stygos svyravimus aprašo viena skaliarinė funkcija $u = u(x, t)$. Be to, nagrinėsime tik mažus stygos svyravimus. Jėgas, kurios priešinasi stygos išlenkimui, laikysime mažomis, lyginant su jos įtempimo jėgomis.



1.14 pav.

Tegu $K(x)$ – stygos specifinė deformacijos energija taške x, dl – deformuotos stygos elemento ilgis (žr. 1.14). Tada darbas, reikalingas elemento dx deformacijai, yra proporcingas stygos ilgio pokyčiui

$$K(x)(dl - dx) = K(x)(\sqrt{1 + u_x^2} - 1)\, dx.$$

Kai svyravimai maži, šaknies $\sqrt{1 + u_x^2}$ skleidinyje u_x laipsniais galima atmesti aukštesniuosius laipsnius. Todėl elemento dx potencinė energija

$$K(x)(dl - dx) \approx K(x)(1 + \frac{1}{2}u_x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{2}K(x)u_x^2\, dx.$$

Visos stygos potencinę energiją galima išreikšti integralu

$$\int_a^b \frac{1}{2}K(x)u_x^2\, dx.$$

Jeigu stygą veikia išorinės jėgos, kurių linijinis tankis $f(x, t)$, tai šitų jėgų atliekamas darbas išreiškiamas integralu

$$-\int_a^b f(x, t)u\, dx.$$

Taigi stygos suminė potencinė energija

$$P = \int_a^b \left[\frac{1}{2}K(x)u_x^2 - f(x, t)u\right] dx.$$

Tegu $\rho(x)$ – linijinis stygos tankis taške x. Tada elemento dx kinetinė energija

$$dT = \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\,dx.$$

Visos stygos kinetinė energija

$$T = \int\limits_a^b \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\,dx.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2}(T-P)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_a^b \left[\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2 - \frac{1}{2}K(x)u_x^2 + f(x,t)u\right]dxdt.$$

Tarkime, funkcija u aprašo tikrąjį stygos svyravimą, η – bet kokia diferencijuojama finiti stačiakampyje $\Omega = (t_1,t_2)\times(a,b)$ funkcija, o ε – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Tada funkcija $u+\varepsilon\eta$ aprašo leistiną stygos svyravimą.

Funkcija u yra funkcionalo I stacionarioji reikšmė. Todėl

$$\begin{aligned} \delta I(u,\eta) := \quad & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(u+\varepsilon\eta)-I(u)}{\varepsilon} = \\ & \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_a^b [\rho(x)u_t\eta_t - K(x)u_x\eta_x + f(x,t)\eta]\,dxdt = 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę ir pasinauduoję tuo, kad funkcija η stačiakampyje Q yra finiti, perrašysime (1.41) sąlygą taip:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_a^b \big[-(\rho(x)u_t)_t + (K(x)u_x)_x + f(x,t)\big]\eta\,dxdt = 0.$$

Šioje integralinėje tapatybėje η yra laisvai pasirinkta diferencijuojama finiti funkcija. Todėl reiškinys kvadratiniuose skliaustuose lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkina Oilerio lygtį:

$$\rho(x)u_{tt} - (K(x)u_x)_x = f(x,t). \tag{1.42}$$

Iš visų (1.42) lygties sprendinių reikia išrinkti tą, kuris tenkina visas nagrinėjamo uždavinio sąlygas. Išvesdami stygą iš pusiausvyros padėties, suteikėme jai pradinį nuokrypį ir pradinį greitį. Vadinasi, pradiniu laiko momentu (tarkime, momentu $t=0$) funkcija u turi tenkinti pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \ \forall x\in[a,b]. \tag{1.43}$$

Be to, taškuose a ir b styga yra įtvirtinta. Todėl bet kuriuo laiko momentu $t \geq 0$ turi būti patenkintos kraštinės sąlygos:

$$u|_{x=a} = 0, \ u|_{x=b} = 0. \tag{1.44}$$

Tokiu būdu įtvirtintos taškuose a ir b stygos svyravimo uždavinys yra mišrusis (1.42)–(1.44) uždavinys.

Jeigu styga yra homogeninė ir tolygiai įtempta, t.y. funkcijos ρ ir K yra pastovios, tai (1.42) lygtį galima perrašyti taip:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t); \tag{1.45}$$

čia: $a^2 = K/\rho, F = f/\rho$. Ši lygtis yra vadinama *vienmate bangavimo* lygtimi.

P a s t a b a. Esant kitokioms kraštinėms sąlygoms, stygos svyravimas aprašomas ta pačia Oilerio lygtimi (tai išplaukia iš jos išvedimo). Tos pačios išlieka ir pradinės sąlygos. Keičiasi tik kraštinės sąlygos. Pavyzdžiui, jeigu taškas $x = a$ juda pagal tam tikrą dėsnį arba jį veikia tam tikra jėga, arba jis yra elastingai įtvirtintas, tai kraštinę sąlygą šiame taške reikia pakeisti atitinkamai viena iš sąlygų:

$$u|_{x=a} = \mu(t), \ K(x)u_x|_{x=a} = \mu(t), \ K(x)u_x + \sigma(x,t)u|_{x=a} = 0.$$

1.7 MEMBRANOS SVYRAVIMAS IR PUSIAUSVYRA

Kietą kūną, kurio storis kur kas mažesnis už visus kitus jo matmenis, vadinsime membrana. Tarkime, pusiausvyros būsenoje membrana užima sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, apribotą kontūru l, ir kontūro l taškuose yra įtvirtinta. Išveskime ją (kokiu nors būdu) iš pusiausvyros padėties. Nagrinėsime tik tokius svyravimus, kai kiekvienas membranos taškas juda tiese, statmena Ω. Pažymėsime $u(x,t)$ taško $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ nuokrypį nuo pusiausvyros padėties laiko momentu t. Tada membranos svyravimą galima aprašyti viena skaliarine funkcija $u = u(x,t)$. Be to, nagrinėsime tik mažus membranos svyravimus ir laikysime membranos išlenkimo jėgas mažomis, lyginant su jos įtempimo jėgomis.

Membranos ir stygos svyravimo lygties išvedimas yra analogiškas. Todėl, išvesdami membranos svyravimo lygtį, praleisime kai kurias pasikartojančias detales.

Potencinę ir kinetinę membranos energijas galima išreikšti integralais:

$$P = \int\limits_\Omega \frac{1}{2} K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)\,dx - \int\limits_\Omega f(x,t)u\,dx,$$

$$T = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\,dx;$$

čia: $K(x)$ – membranos specifinė deformacijos energija taške x, $f(x,t)$ – paviršinis išorinių jėgų tankis, ρ – paviršinis membranos tankis.

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2 - \frac{1}{2}K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + f(x,t)u\right] dxdt.$$

Tegu funkcija u aprašo tikrąjį membranos svyravimą, η – bet kokia diferencijuojama finiti ritinyje $Q = \Omega \times (t_1, t_2)$ funkcija, o ε – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Tada funkcija $u + \varepsilon\eta$ aprašo leistiną membranos svyravimą.

Funkcija u yra funkcionalo I stacionarioji reikšmė. Todėl

$$\begin{aligned}\delta I(u,\eta) = {} & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(u+\varepsilon\eta) - I(u)}{\varepsilon} = \\ & \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega [\rho(x)u_t\eta_t - K(x)(u_{x_1}\eta_{x_1} + u_{x_2}\eta_{x_2}) + f(x,t)\eta]\,dxdt = 0.\end{aligned}$$

Iš šios integralinės tapatybės lengvai gauname, kad funkcija u turi tenkinti Oilerio lygtį

$$\rho(x)u_{tt} - \sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i} = f(x,t). \tag{1.46}$$

Be to, funkcija u turi tenkinti pradines

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \phi(x), \quad x \in \overline{\omega} \tag{1.47}$$

ir kraštinę

$$u|_l = 0, \quad t \geq 0 \tag{1.48}$$

sąlygas.

Taigi įtvirtintos kontūre l membranos svyravimo uždavinys yra mišrusis (1.46)–(1.48) uždavinys.

Tuo atveju, kai membrana yra homogeninė ir jos įtempimas visomis kryptimis yra vienodas, t.y. kai funkcijos K ir ρ yra pastovios, (1.46) lygtį galima perrašyti taip:

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = F(x,t); \tag{1.49}$$

čia: $a^2 = K/\rho,\ F = f/\rho$. Ši lygtis yra vadinama *dvimate bangavimo* lygtimi.

P a s t a b a. Jei membrana nėra įtvirtinta, tai Oilerio lygtis ir pradinės sąlygos išlieka tos pačios. Keičiasi tik kraštinė sąlyga. Pavyzdžiui, jeigu membranos kontūras svyruoja pagal tam tikrą dėsnį arba jį veikia tam tikra jėga, arba jis yra elastingai įtvirtintas, tai vietoje (1.48) kraštinės sąlygos reikia imti atitinkamai vieną iš sąlygų:

$$u\Big|_l = \mu(x,t),\ K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_l = \mu(x,t),\ K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_l + \sigma(x,t)u\Big|_l = 0;$$

čia: μ ir σ žinomos funkcijos, $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė normalės kryptimi. Savaime aišku, kad galimos ir kitos kraštinės sąlygos, taip pat ir netiesinės.

Tarkime, kontūro l taškuose nėra jokių išankstinių sąlygų. Be to, tegu membraną veikianti jėga f nepriklauso nuo laiko t. Veikiant šiai jėgai, membrana išsilenks ir liks pusiausvyroje. Tegu funkcija $u = u(x),\ x = (x_1, x_2) \in \Omega$ aprašo deformuotos membranos paviršių. Šiuo atveju membranos potencinė energija

$$P(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) - f(x)u\right] dx$$

įgyja mažiausią reikšmę.

Tegu $\eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, ε – pakankamai mažas moduliu skaičius. Tada funkcija $u + \varepsilon\eta$ apibrėžia leistiną membranos deformaciją. Pagal Hamiltono principą deformuotos membranos potencinė energija

$$P(u) \leq P(u + \varepsilon\eta),$$

jeigu tik ε modulis yra pakankamai mažas. Todėl

$$\delta P(u,\eta) := \frac{d}{d\varepsilon}\Big(I(u+\varepsilon\eta)\Big)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega [K(x)(u_{x_1}\eta_{x_1} + u_{x_2}\eta_{x_2}) - f(x)\eta]\ dx = 0.$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, šią integralinę tapatybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i}+f(x)\Big]\eta\,dx-\int\limits_{l}K(x)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\eta\,dl=0. \tag{1.50}$$

Tarkime, funkcija η lygi nuliui kontūro l taškuose. Tada

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i}+f(x)\Big]\eta\,dx=0$$

ir funkcija u turi tenkinti Oilerio lygtį

$$\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i}+f(x)=0,\ \ x\in\Omega. \tag{1.51}$$

Grįžkime prie (1.50) tapatybės. Tegu η yra bet kokia diferencijuojama funkcija. Kadangi funkcija u tenkina (1.51) Oilerio lygtį, tai (1.50) tapatybę galime perrašyti taip:

$$\int\limits_{l}K(x)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\eta\,dl=0.$$

Kontūro l taškuose funkcija η gali įgyti bet kokias reikšmes. Todėl reiškinys $K(x)\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$ yra lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkina kraštinę sąlygą

$$K(x)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}=0,\ \ x\in l. \tag{1.52}$$

Taigi membranos pusiausvyros uždavinys yra kraštinis (1.51), (1.52) uždavinys.

Kai funkcija K yra pastovi, (1.51) lygtis yra *Puasono* lygtis

$$\Delta u=-F,\ \ F=f/K,$$

kuri, kai $f=0$, virsta *Laplaso* lygtimi

$$\Delta u=0;$$

čia $\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{2}u_{x_ix_i}$.

P a s t a b a. Nagrinėjant membranos pusiausvyros uždavinį, galimos ir kitos kraštinės sąlygos.

1.8 ŠILUMOS LAIDUMAS IR DUJŲ DIFUZIJA

Tarkime: erdvėje $\mathbb{R}^3$ kietas kūnas užima sritį Ω; žinoma jo temperatūra pradiniu laiko momentu $t = 0$ ir paviršiaus $S = \partial\Omega$ temperatūra bet kuriuo laiko momentu $t \geq 0$. Ištirsime temperatūrą kūno viduje. Kūno temperatūrą taške $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ laiko momentu t pažymėsime $u(x, t)$. Tegu $\Omega' \subset \Omega$ – bet kokia vidinė sritis su glodžiu paviršiumi S'. Pagal Furjė dėsnį šilumos kiekis, pratekantis per paviršių S' laikotarpiu $t_2 - t_1$, išreiškiamas integralu

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS'\, dt;$$

čia: k – šilumos laidumo koeficientas, $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė normalės kryptimi.

Kai yra šilumos šaltiniai su tankiu $f(x, t)$, tai šilumos kiekis, patenkantis iš jų į sritį Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$, lygus

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(x, t)\, dxdt.$$

Antra vertus, tas pats šilumos kiekio pokytis srityje Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$ lygus

$$\int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u(x, t_2)\, dx - \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u(x, t_1)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u_t(x, t)\, dxdt;$$

čia $\rho(x)$ ir $c(x)$ – atitinkamai kūno tankis ir šilumos talpumas (specifinė šiluma) taške x. Išskirtoje srityje Ω' sudarome *šilumos balanso* lygtį:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS'\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(x, t)\, dxdt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u_t(x, t)\, dxdt.$$

Pagal Gauso–Ostrogradskio formulę

$$\int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS' = \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u)u_{x_i}\big)\, dx.$$

Todėl šilumos balanso lygtį galima perrašyti taip:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} \Big[\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u)u_{x_i}\big) - c(x)\rho(x)u_t + f(x, t)\Big]\, dxdt = 0. \tag{1.53}$$

Kadangi integravimo rėžiai t_1, t_2 ir sritis Ω' pasirinkti laisvai, tai reiškinys kvadratiniuose skliaustuose yra lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkina lygtį

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u)u_{x_i}\big) - c(x)\rho(x)u_t + f(x, t) = 0,\ \forall x \in \Omega, t > 0. \tag{1.54}$$

Iš visų šios lygties sprendinių reikia išrinkti tą, kuris tenkintų pradines ir kraštines sąlygas. Nagrinėjamu atveju yra žinoma kūno temperatūra pradiniu laiko momentu ir kūno paviršiaus temperatūra bet kuriuo laiko momentu. Todėl funkcija u turi tenkinti pradinę

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega} \tag{1.55}$$

ir kraštinę

$$u\big|_S = \mu_1(x,t), \quad t \geq 0 \tag{1.56}$$

sąlygas. Taigi šilumos pasiskirstymo kietame kūne $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uždavinys yra mišrusis (1.54)–(1.56) uždavinys.

P a s t a b o s:

1. Paviršiuje S galimi ir kiti šilumos režimai. Pavyzdžiui, jeigu kiekvienu laiko momentu t žinome šilumos kiekį $\mu_2(x,t)$, kuris patenka į sritį Ω per paviršių S, arba žinome supančios sritį Ω erdvės temperatūrą $\mu_3(x,t)$, tai vietoje (1.56) kraštinės sąlygos reikia imti atitinkamai vieną iš sąlygų:

$$k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \mu_2, \ \ k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma(x,t,u)(u-\mu_3)\Big|_S = 0;$$

   čia σ – šilumos mainų koeficientas.

2. Jeigu $\Omega = \mathbb{R}^n$, tai (1.56) sąlyga neturi prasmės ir nagrinėjamas uždavinys susiveda į (1.54)–(1.55) Koši uždavinį.

3. Tuo atveju, kai nagrinėjamasis kūnas yra homogeninis, t.y. funkcijos k, ρ ir c yra pastovios, (1.54) lygtis yra *šilumos laidumo* lygtis

$$u_t - a^2\Delta u = F(x,t); \tag{1.57}$$

   čia: $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}, F = \dfrac{f}{c\rho}, \Delta u = \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i}$.

Jeigu procesas stacionarus, t.y. temperatūros pasiskirstymas yra nusistovėjęs ir laikui bėgant nekinta, tai funkcijos u, f ir k nepriklauso nuo kintamojo t. Todėl $u_t = 0$ ir (1.54) lygtį galima perrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i}\big(k(x,u)u_{x_i}\big) + f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Kai funkcija k yra pastovi, ši lygtis yra Puasono lygtis

$$-\Delta u = F, \quad F = f/k,$$

o kai ir $f = 0$, – Laplaso lygtis

$$\Delta u = 0.$$

Aišku, kad nagrinėjant stacionarų procesą, pradinė sąlyga nereikalinga, o kraštinė sąlyga išlieka. Praktiniuose uždaviniuose dažniausiai naudojamos tokios kraštinės sąlygos:

$$u\Big|_S = \mu(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \mu(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma(x)u\Big|_S = \mu(x).$$

Dvimačiu ir vienmačiu atvejais gaunamos analogiškos lygtys. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėjamasis kūnas yra plona plokštelė arba plonas strypas ir atitinkamai šiluma sklinda dviem arba viena kryptimi, tai gausime dvimatę arba vienmatę šilumos laidumo lygtį

$$u_t - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = F, \quad u_t - a^2 u_{x_1x_1} = F.$$

Išnagrinėsime dujų difuzijos uždavinį. Tarkime, dujos arba ištirpintos tirpale medžiagos dalelės netolygiai pasiskirsčiusios kokioje nors srityje Ω. Dalelių arba dujų koncentraciją [1] taške $x \in \Omega$ laiko momentu t pažymėsime $u(x,t)$.

Tegu $\Omega' \subset \Omega$ – kokia nors vidinė sritis; $S' = \partial\Omega'$ – glodus paviršius. Dalelių arba dujų kiekis, patenkantis per paviršių S' laikotarpiu $t_2 - t_1$, kai nėra išorinių šaltinių, išreiškiamas integralu

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{S'} D(x,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS'\, dt;$$

čia $D(x,u) > 0$ – difuzijos koeficientas. Jeigu yra šilumos šaltiniai ir $f(x,t)$ jų intensyvumas, tai visas dujų arba dalelių kiekis, patenkantis į sritį Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$, lygus

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{S'} D(x,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS'\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} f(x,t)\, dxdt.$$

Kita vertus, dujų arba dalelių kiekio pokytis srityje Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$ išreiškiamas integralu

$$\int_{\Omega'} c(x)\big(u(x,t_2 - u(x,t_1)\big)\, dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} c(x)u_t\, dxdt;$$

čia $c(x)$ – medžiagos akytumo koeficientas. Sulyginę gautas išraiškas, gausime lygybę

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{S'} (x,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS'\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} f(x,t)\, dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega'} c(x)u_t\, dxdt.$$

[1] Koncentraciją suprantame kaip medžiagos kiekį tūrio vienete. Kalbėdami apie mažą skysčio arba dujų tūrio elementą, laikome jį mažu, lyginant su visu tūriu, bet pakankamai dideliu, lyginant su atstumais tarp molekulių, t.y. manome, kad tokiame elemente yra dar pakankamai daug molekulių. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėjame kokio nors taško poslinkį skystyje arba dujose, tai turime omenyje ne kokios nors vienos molekulės poslinkį, o viso elementariojo tūrio, kuriame yra daug molekulių, poslinkį.

Iš jos, lygiai taip pat kaip ir šilumos pasiskirstymo kietame kūne atveju, išplaukia, kad funkcija u turi tenkinti lygtį

$$cu_t - \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i}\big(D(x,u)u_{x_i}\big) = f(x,t), \quad \forall x \in \Omega,\, t > 0.$$

Jeigu funkcijos c ir D yra pastovios, tai ši lygtis yra šilumos laidumo lygtis.

Tam, kad difuzijos procesas būtų vienareikšmiškai apibrėžtas, būtina žinoti dujų arba medžiagos dalelių skystyje koncentraciją pradiniu laiko momentu $t = 0$, t.y. funkcija u turi tenkinti (1.55) pradinę sąlygą. Be to, bet kokiu laiko momentu $t \geq 0$ turi būti žinomas difuzijos režimas nagrinėjamos srities paviršiuje S. Pavyzdžiui, jeigu yra žinoma dujų arba medžiagos dalelių skystyje koncentracija paviršiuje S, tai funkcija u turi tenkinti (1.56) kraštinę sąlygą.

1.9 EKOLOGINIAI MODELIAI

Ką tik gimę gyvi organizmai (gyvūnai, daugialąsčiai augalai ar mikroorganizmai) iš karto patenka į gana sudėtingą sąveika su juos supančia aplinka ir kitų rūšių gyvais organizmais. Be to, jie patys veikia juos supančią aplinką bei kitus gyvus organizmus, keisdami ir vieną ir kitą tam tikra linkme. Ekologija nagrinėja visus šiuos veiksnius visumoje.

Visumą gyvų organizmų, kartu su juos supančia aplinka bei sąveika tarp jų, vadinsime *ekosistema,* o pačius organizmus – *individais*. Grupę vienos rūšies individų, užimančių konkrečią teritoriją ir dauginimosi procese perduodančių genetinę informaciją savo palikuonims, vadinsime *populiacija.* Modeliuojant kokią nors ekosistemą individai populiacijose paprastai skirstomi į grupes pagal tam tikras savybes, apibrėžiančias jų išlikimą, dauginimąsį ir t.t. Kiekvienoje tokioje grupėje individai privalo turėti panašias savybes, lemiančias jų vystymąsį populiacijoje ir ekosistemoje. Jeigu grupių skaičius yra baigtinis, tai populiaciją (populiacijas) kiekvienu laiko momentu t galima apibrėžti n-mačiu vektoriumi

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t));$$

čia n – grupių skaičius, o $x_i(t)$ yra i-tos grupės dydis (individų skaičius užimamos teritorijos vienete) laiko momentu t, arba kokia nors kita kiekybinė charakteristika. Visos populiacijos dydis

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t).$$

Požymiai pagal kuriuos individai populiacijose gali būti skirstomi į grupes gali turėti tolydžią struktūrą. Pavyzdžiui amžius, svoris ir t.t. Šiuo atveju populiacija yra apibrėžiama tam tikra tankio funkcija. Tarkime, populiacijos individų amžių a laiko momentu t apibrėžia tankio funkcija $\rho(a,t)$. Tai reiškia, kad bet kokioms parametrų $a_1 \le a_2$ reikšmėms individų amžiaus $a \in [a_1, a_2]$ skaičius populiacijoje laiko momentu t lygus

$$p(a_1, a_2, t) = \int_{a_1}^{a_2} \rho(a,t)\, da.$$

Visų individų skaičius populiacijoje laiko momentu t lygus

$$p(t) = \int_{0}^{\infty} \rho(a,t)\, da.$$

Gimstamumą populiacijoje nusako naujų palikuonių atsiradimas per laiko vienetą. Dažnai naudojama santykinio gimstamumo sąvoka. Ją nusako naujai gimusių per laiko vienetą ir visų populiacijos individų santykis. Mirtingumą populiacijoje nusako žuvusių individų skaičius per laiko vienetą. Dažnai naudojama santykinio mirtingumo sąvoka. Ją nusako mirusių individų per laiko vienetą ir visų populiacijos individų santykis.

Populiacijos individų augimo dinamikos modeliai sudaromi iš *balanso* lygties

$$p(t+\Delta t) = p(t) + g(t,\Delta t) - q(t,\Delta t) + h(t,\Delta t); \tag{1.58}$$

čia $p(t)$ – populiacijos individų skaičius laiko momentu t, $g(t,\Delta t)$ – gimusių individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ skaičius, $q(t,\Delta t)$ – mirusių individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ skaičius, $h(t,\Delta t,)$ – atvykusių ar išvykusių (dėl migracijos) individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ skaičius. Bendru atveju reiškiniai g, q ir h priklauso nuo sistemos resursų r, fizinių gyvenimo sąlygų, vidinių populiacijos charakteristikų (amžiaus ir genetinės sudėties) ir nuo sąveikos su kitomis įeinančiomis į ekosistemą populiacijomis. Atkreipsime dėmesį į tai, kad gyvenimo sąlygų, resursų ir vidiniai populiacijos charakteristikų pasikeitimai veikia gimstamumą, mirtingumą bei migraciją tik po tam tikro laiko. Todėl būtina atsižvelgti į ekosistemos priešistoriją.

Sudarant ekologinius modelius neįmanoma iš karto atsižvelgti į visus faktorius, veikiančius populiaciją. Todėl esminiais paprastai laikomi vienas arba keli faktoriai. Pavyzdžiui, tegu neesminiais yra laikomi vidiniai populiacijos charakteristikų pasikeitimai bei priešistorija. Be to, tegu individų gyvenimo sąlygos yra stacionarios (gimimo, mirimo ir individų migracijos greičiai nepriklauso nuo laiko t). Tada

$$\begin{aligned} g(t,\Delta t, p, r) &= g(p,r)\cdot\Delta t,\\ q(t,\Delta t, p, r) &= q(p,r)\cdot\Delta t,\\ h(t,\Delta t. p, r) &= h(p,r)\cdot\Delta t. \end{aligned}$$

Šiuo atveju ekosisitemos su n populiacijomis ir m resursais dinamikos lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} p_i(t+\Delta t) = p_i(t) + \big[g_i(p,r) - q_i(p,r) + h_i(p,r)\big]\Delta t,\\ r_j(t+\Delta t) = r_j(t) + d_j(p,r)\Delta t; \end{cases} \tag{1.59}$$

čia $p_i(t)$ yra i-os populiacijos individų skaičius laiko momentu t, $r_j(t)$ yra j-ojo resurso kiekis laiko momentu t, d_j yra j-ojo resurso kitimo greitis, $p = (p_1,\dots,p_n)$, $r = (r_1,\dots,r_m)$. Jeigu populiacijų kitimas yra tolydus, tiksliau funkcijos p_i yra diferencijuojamos, tai (1.59) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot p_i(t) = g_i(p,r) - q_i(p,r) + h_i(p,r),\\ \dot r_j(t) = d_j(p,r). \end{cases} \tag{1.60}$$

Nagrinėjant (1.60) sistemą kartais patogu pereiti prie santykinių koeficientų:

$$g_i \to g_i/p_i, \quad q_i \to q_i/p_i, \quad h_i \to h_i/p_i.$$

Tada turime sistemą

$$\begin{cases} \dot p_i(t) = p_i\big[g_i(p,r) - q_i(p,r) + h_i(p,r)\big],\\ \dot r_j(t) = d_j(p,r). \end{cases} \tag{1.61}$$

Jeigu ekosistemoje resursų yra neribotas skaičius, tai (1.59) – (1.61) sistemose antrąją grupę lygčių galima atmesti. Šiuo atveju kiekvienai individų populiacijai yra įvedami tam tikri parametrai, nusakantys didžiausią individų skaičių duotoje aplinkoje ir jais, pirmoje lygčių grupėje yra pakeičiamas vektorius r.

P a s t a b a. Sudarant ekosistemų dinamikos modelius kartais norima ištirti ne pačių populiacijų dinamiką, o jų tankių dinamiką. Šiuo atveju lygčių išvedimas yra analogiškas. Reikia tik vietoje populiacijos balanso lygties sudaryti populiacijos tankio balanso lygtį

$$\rho(t+\Delta t) = \rho(t) + g(t,\Delta t) - q(t,\Delta t) + h(t,\Delta t); \tag{1.62}$$

čia $\rho(t)$ – populiacijos tankis laiko momentu t, $g(t,\Delta t)$ – gimusių individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ tankis, $q(t,\Delta t)$ – mirusių individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ tankis, $h(t,\Delta t,)$ – atvykusių ar išvykusių (dėl migracijos) individų laiko intervale $[t, t+\Delta t]$ tankis.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $p(t)$ yra kokios nors populiacijos dydis laiko momentu t (pvz., žemės gyventojų, lydekų ežere, atomų radioaktyvioje medžiagoje ir t.t.). Tada $\dot p(t) = dp(t)/dt$ yra šios populiacijos kitimo greitis laiko momentu t, o $\dot p(t)/p(t)$ – santykinis kitimo greitis. Pastarasis yra laiko t ir populiacijos p funkcija, t.y.

$$\frac{\dot p(t)}{p(t)} = f(t,p). \tag{1.63}$$

Uždaroje sistemoje

$$f(t,p) = g(t,p) - q(t,p);$$

čia $g(t,p)$ – santykinis gimimo, o $q(t,p)$ – santykinis mirimo greičiai. Jeigu funkcijos g ir q yra žinomos, tai nagrinėjamos populiacijos dinamiką aprašo (1.63) lygties sprendinys $p = p(t)$. Tarkime, laiko momentu $t = t_0$ populiacija yra žinoma, t.y.

$$p(t_0) = p_0. \tag{1.64}$$

Tada nagrinėjamas populiacijos uždavinys susiveda į tokį Koši uždavinį: rasti diferencijuojamą intervale $[t_0, \infty)$ funkciją $p = p(t)$, kuri tenkintų (1.63) lygtį ir (1.64) pradinę sąlygą.

Paprasčiausiu atveju, kai populiacijos santykinis kitimo greitis yra pastovus, t.y.

$$f(t,p) = k = const, \quad \forall (t,p) \in \mathbb{R}^2,$$

(1.63) lygtį (Malthus modelis) galima perrašyti taip:

$$\frac{\dot p(t)}{p(t)} = k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\ln|p(t)| = k.$$

Suintegravę šią lygtį, gausime

$$\ln|p(t)| = kt + \ln|C| \quad \Longleftrightarrow \quad p(t) = Ce^{kt}.$$

Konstanta C randama iš (1.64) sąlygos, t.y.

$$p(t_0) = p_0 = Ce^{kt_0}.$$

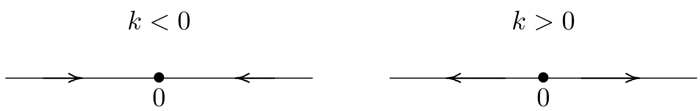
Todėl nagrinėjamos populiacijos evoliucija aprašoma lygtimi

$$p(t) = p_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{1.65}$$

P a s t a b a. Iš (1.65) formulės išvedimo išplaukia, kad $\forall p_0 \in \mathbb{R}$ Koši uždavinys

$$\dot{p}(t) = kp(t), \quad p(t_0) = p_0$$

turi vienintelį sprendinį. Be to, sprendinys $p(t) \to \infty$ (neaprėžtai auga), kai $t \to \infty$, jeigu $k > 0$, $p(t) \to 0$ (nyksta), kai $t \to \infty$, jeigu $k < 0$ ir $p(t) = p_0$, kai $k = 0$. Sprendinių kitimas p ašyje geometriškai pavaizduotas 1.15 paveikslėlyje.



1.15 pav.

Atvejis, kai funkcija f yra pastovi aprašo dvi skirtingas situacijas: populiacija p neaprėžtai didėja arba nyksta. Dažniausiai abu šie modeliai yra nerealūs. Pavyzdžiui, neaprėžtai didėjanti populiacija yra galima tik tokioje aplinkoje, kurios resursai yra neaprėžti. Norint sustabdyti neaprėžtą augimą, galima įvesti atraktorių $p^* > 0$, t.y. tarti, kad egzistuoja tokia ribinė populiacija p^*, kad

$$f(t,p) \le 0, \quad \text{kai} \quad p \ge p^*.$$

Funkcijų, tenkinančių šią sąlygą, yra be galo daug. Paprasčiausia iš jų yra tiesinė funkcija

$$f(t,p) = \alpha - kp = k(p^* - p), \quad p \in \mathbb{R};$$

čia k – teigiama konstanta, $\alpha = kp^*$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją f į (1.63) lygtį, perrašysime ją taip

$$\frac{\dot{p}}{p} = k(p^* - p). \tag{1.66}$$

Pastaroji lygtis yra vadinama *aprėžto augimo* lygtimi. Atskyrę joje kintamuosius, gausime

$$\frac{dp}{k(p^* - p)p} = dt, \quad p \ne 0, p \ne p^*.$$

Reiškinys

$$\frac{1}{(p^* - p)p} = \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^* - p}\Big)\frac{1}{p^*}.$$

Todėl

$$\frac{1}{k}\int \frac{dp}{(p^* - p)p} = \frac{1}{kp^*}\Big(\ln|p| - \ln|p - p^*|\Big) = \ln\Big|\frac{p}{p - p^*}\Big|^{1/p^* k}$$

ir yra teisinga formulė

$$\left|\frac{p}{p-p^*}\right|^{1/p^*k} = Ce^t. \tag{1.67}$$

Kai $t = t_0$, populiacija $p(t_0) = p_0$. Tarkime, $p_0 \neq 0$ ir $p_0 \neq p^*$. Tada

$$\left|\frac{p_0}{p_0-p^*}\right|^{1/p^*k} = Ce^{t_0}$$

ir pastarąją formulę galima perrašyti taip

$$\left|\frac{p(t)}{p_0}\right| = \left|\frac{p(t)-p^*}{p_0-p^*}\right| e^{(t-t_0)kp^*}.$$

Iš (1.67) formulės išplaukia, kad $p(t) \neq 0$ ir $p(t) \neq p^*, \forall t \geq t_0$. Todėl reiškiniai $p(t)/p_0$ ir $(p(t)-p^*)/(p_0-p^*)$ yra teigiami ir modulio ženklų galime nerašyti

$$\frac{p(t)}{p_0} = \frac{p(t)-p^*}{p_0-p^*} e^{(t-t_0)kp^*}.$$

Išsprendę šią lygtį p atžvilgiu, gausime

$$p(t) = \frac{p^* p_0}{p_0 + (p^* - p_0)e^{-kp^*(t-t_0)}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.68}$$

Iš pastarosios formulės matome, kad:

1. $p \to p^*$ didėdama, jei $p_0 < p^*$,
2. $p \to p^*$ mažėdama, jei $p_0 > p^*$,
3. $p = p^*$, jei $p_0 = p^*$.

Taigi, jeigu $p_0 \neq 0$ ir $p_0 \neq p^*$, tai funkcija p, apibrėžta (1.68) formule, yra vienintelis Koši uždavinio

$$\dot{p} = kp(p^* - p), \quad p(t_0) = p_0$$

sprendinys. Kai $p_0 \in (0, p^*)$, taip apibrėžta funkcija p yra didėjanti, o kai $p_0 > p^*$ – mažėjanti. Be to, kai $t \to \infty$, $p(t) \to p^*$. Funkcijos p antroji išvestinė

$$\ddot{p}(t) = \frac{d}{dt}\big(kp(p^* - p)\big) = k\dot{p}(p^* - 2p) = k^2 p(p^* - p)(p^* - 2p).$$

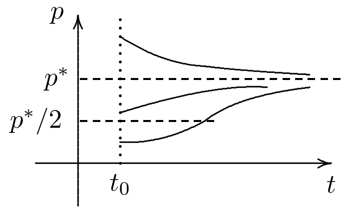
Iš čia gauname, kad

$$\ddot{p} > 0, \quad \text{kai} \quad p \in (0, p^*/2) \cup (p^*, +\infty)$$

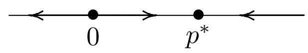
ir

$$\ddot{p} < 0, \quad \text{kai} \quad p \in (p^*/2, p^*).$$

Be to, $p = p^*/2$ yra trajektorijos vingio taškas. Aprėžto augimo lygties sprendinių kitimas kintamųjų (p, t) plokštumoje ir tiesėje p pavaizduotas 1.16, 1.17 paveikslėliuose.



1.16 pav.



1.17 pav.

2. Analogiškai nagrinėjamas dviejų populiacijų sąveikos modelis. Tegu $p_1(t)$ yra kokios nors rūšies aukų, o $p_2(t)$ – grobuonių populiacijos (pvz. kiškiai – lapės). Tada kiekviena populiacija turi tenkinti "augimo lygtį," kurios dešinioji pusė turi priklausyti ir nuo kitos rūšies populiacijos, t.y.

$$\dot{p}_1/p_1 = f_1(t, p_1, p_2), \quad \dot{p}_2/p_2 = f_2(t, p_1, p_2), \tag{1.69}$$

Taigi gavome dviejų susijusių pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemą. Tarkime, kad grobuonis maitinasi tik aukomis, o aukų maistas yra neribotas. Toks dviejų populiacijų modelis vadinasi *Räuber–Beute* modeliu. Išskirsime du galimus šio modelio atvejus.

Tarkime, kai grobuonių nėra, aukų populiacijos santykinis augimo greitis pastovus, o kai grobuonys yra, šis greitis mažėja proporcingai grobuonių skaičiui, t.y.

$$f_1(t, p_1, p_2) = \alpha_1 - \nu_2 p_2 = \nu_2(p_2^* - p_2), \quad \nu_2, p_2^* > 0;$$

čia ν_2, p_2^* – teigiamos konstantos, $\alpha_1 = \nu_2 p_2^*$. Be to, tegu grobuonių populiacijos santykinis nykimo greitis kai nėra aukų yra pastovus, o, kai aukos yra, grobuonių populiacijos santykinis augimo greitis yra proporcingas aukų skaičiui, t.y.

$$f_2(t, p_1, p_2) = \nu_1 p_1 - \alpha_2 = \nu_1(p_1 - p_1^*);$$

čia ν_1, p_1^* – teigiamos konstantos, $\alpha_2 = \nu_1 p_1^*$. Tada (1.69) lygčių sistemą galima perrašyti taip

$$\dot{p}_1 = \nu_2(p_2^* - p_2)p_1, \quad \dot{p}_2 = \nu_1(p_1 - p_1^*)p_2. \tag{1.70}$$

Pastaroji sistema vadinama *Voltera–Lotka* lygčių sistema. Ji turi du pusiausvyros taškus: $(0, 0)$ ir (p_1^*, p_2^*), t.y. taškus kuriuose sistemos dešiniosios pusės lygios nuliui. Biologinę prasmę turi tik antrasis pusiausvyros taškas. Išsiaiškinsime kaip elgiasi sistemos trajektorijos jo aplinkoje. Tuo tikslu padauginkime pirmąją (1.70) sistemos lygtį iš ν_1, o antrąją iš ν_2 ir gautus reiškinius sudėkime. Tada gausime lygtį

$$\nu_1\dot{p}_1 + \nu_2\dot{p}_2 = \nu_2\nu_1 p_2^* p_1 - \nu_2\nu_1 p_1^* p_2.$$

Kai $p_1 \neq 0$ ir $p_2 \neq 0$ (1.70) sistemos lygtis galima perrašyti taip:

$$\nu_2 p_2 = \nu_2 p_2^* - \frac{\dot{p}_1}{p_1}, \quad \nu_1 p_1 = \nu_1 p_1^* + \frac{\dot{p}_2}{p_2}.$$

Todėl reiškinys

$$\nu_1\dot{p}_1 + \nu_2\dot{p}_2 = \nu_2 p_2^*\Big(\nu_1 p_1^* + \frac{\dot{p}_2}{p_2}\Big) - \nu_1 p_1^*\Big(\nu_2 p_2^* - \frac{\dot{p}_1}{p_1}\Big).$$

Suprastinę vienodus narius, gausime lygtį

$$\nu_1\dot{p}_1 + \nu_2\dot{p}_2 = \nu_1 p_1^*\frac{\dot{p}_1}{p_1} + \nu_2 p_2^*\frac{\dot{p}_2}{p_2}.$$

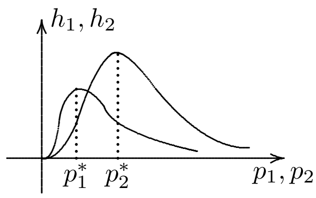
Jos bendrąjį integralą

$$\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 = \nu_1 p_1^* \ln p_1 + \nu_2 p_2^* \ln p_2 - \ln c$$

galima perrašyti taip:

$$h_1(p_1)\cdot h_2(p_2) = c;$$

čia $h_1(p_1) = p_1^{\nu_1 p_1^*} e^{-\nu_1 p_1}$, $h_2(p_2) = p_2^{\nu_2 p_2^*} e^{-\nu_2 p_2}$, c – laisva konstanta. Funkcijos h_1, h_2 yra to paties pavidalo. Intervale $(0,\infty)$ jos yra teigiamos ir turi vienintelį maksimumą taškuose p_1^*, p_2^* (žr. 1.18 pav.).



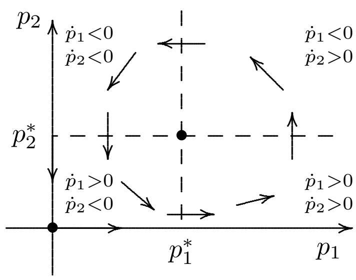
1.18 pav.

Todėl šių funkcijų sandauga

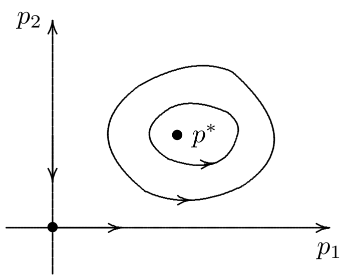
$$H(p) = h_1(p_1)\cdot h_2(p_2), \quad p_1 > 0,\ p_2 > 0$$

taip pat yra teigiama ir turi vienintelį maksimumą taške $p^* = (p_1^*, p_2^*)$. Be to, jeigu bent vienas iš kintamųjų p_1, p_2 artėja į 0 arba į ∞, tai $H(p) \to 0$. Iš čia išplaukia, kad funkcijos H lygio kreivės, apibrėžtos lygtimi $H(p) = c$, yra uždaros kreivės, supančios tašką p^*. Tačiau šios kreivės yra (1.70) sistemos trajektorijos. Taigi taškas p^* yra šios sistemos centro taškas, t.y toks taškas kai visos pakankamai artimos jam trajektorijos yra uždaros.

Voltera–Lotka lygčių sistemos krypčių laukas (žr. 2.1 skyrelį) pavaizduotas 1.19, o trajektorijų elgesys pusiausvyros taško p^* aplinkoje – 1.20 paveikslėliuose.



1.19 pav.



1.20 pav.

Iš bendros teorijos žinoma (žr. 4.1 skyrelį), kad uždaras trajektorijas atitinkančius sprendinius galima pratęsti į visą realių skaičių ašį ir gauti sprendiniai yra periodinės funkcijos, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius ω, kad

$$p(t+\omega) = p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tai reiškia, kad kiekviena iš populiacijų p_1, p_2 periodiškai svyruoja. Tiksliau, jeigu plėšrūnų yra pakankamai mažai ($p_2 < p_2^*$), tai aukų skaičius didėja, nepriklausomai nuo to ar plėšrūnų daugėja ar mažėja. Tačiau kai plėšrūnų skaičius yra pakankamai didelis ($p_2 > p_2^*$), tai aukų skaičius mažėja. Analogiška situacija yra ir su aukomis. Jeigu aukų skaičius yra pakankamai mažas ($p_1 < p_1^*$), tai plėšrūnų skaičius mažėja, nepriklausomai nuo to ar aukų daugėja ar mažėja. Tačiau kai aukų skaičius yra pakankamai didelis ($p_1 > p_1^*$), tai plėšrūnų skaičius auga.

Voltera–Lotka sistemą galima modifikuoti taip, kad aukų populiacijos augimas nebūtų pastovus nesant grobuonims. Pagal analogiją su aprėžto augimo lygtimi sudarome sistemą

$$\dot{p}_1 = (\alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1)p_1, \quad \dot{p}_2 = (\nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2)p_2; \tag{1.71}$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2, \gamma_1, \gamma_2$ – teigiamos konstantos. Pastarosios sistemos pusiausvyros taškai $(0,0)$, $(0, -\alpha_2/\gamma_2)$, $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$, (p_1^*, p_2^*) yra algebrinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1)p_1 = 0, \\ (\nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2)p_2 = 0 \end{cases}$$

sprendiniai. Ketvirtasis taškas su koordinatėmis

$$p_1^* = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\nu_1}{\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2}, \quad p_2^* = \frac{\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\gamma_1}{\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2}$$

yra tiesių

$$l_1 : \alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1 = 0, \quad l_2 : \nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2 = 0$$

sankirtos taškas. Jis turi biologinę prasmę tik tuo atveju, kai

$$\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\gamma_1 \geq 0 \iff p_2 \geq 0.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad tiesės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_2 ašiai, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_1 ašiai.

Parašę (1.71) sistemos pirmąjį artinį taško $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ aplinkoje (žr. 5.2 skyrelį), gausime matricą[1]

$$A(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \nu_1\tilde{p}_2 - 2\gamma_1\tilde{p}_1 & -\nu_1\tilde{p}_1 \\ \nu_2\tilde{p}_2 & \nu_2\tilde{p}_1 - \alpha_2 - 2\gamma_2\tilde{p}_2 \end{pmatrix}.$$

[1] Dviejų autonominių diferencialinių lygčių sistemos $\dot{x} = f(x)$ pirmasis artinis pusiausvyros taško $x = \tilde{x}$ aplinkoje yra tiesinė sistema $\dot{x} = A(\tilde{x})(x - \tilde{x})$, kurioje matrica

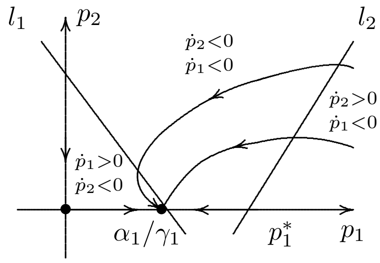
$$A(\tilde{x}) = \begin{matrix} f_{1x_1}(\tilde{x}) & f_{1x_2}(\tilde{x}) \\ f_{2x_1}(\tilde{x}) & f_{2x_2}(\tilde{x}) \end{matrix} \quad .$$

Pakeitę čia $\tilde{p}$ pusiausvyros taškais, gausime matricas

$$A(0,0)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_2\end{pmatrix},\quad A\Big(0,-\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\Big)=\begin{pmatrix}\alpha_1+\dfrac{\nu_1\alpha_2}{\gamma_2} & 0\\ -\dfrac{\nu_2\alpha_2}{\gamma_2} & \alpha_2\end{pmatrix},$$

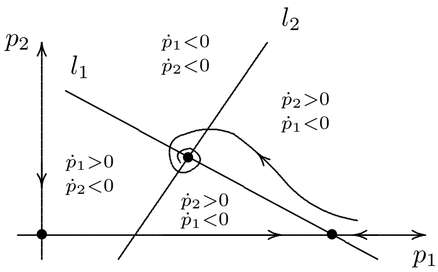
$$A\Big(\frac{\alpha_1}{\gamma_1},0\Big)=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\dfrac{\nu_1\alpha_1}{\gamma_1}\\ 0 & \dfrac{\nu_2\alpha_1}{\gamma_1}-\alpha_2\end{pmatrix},\quad A(p_1^*,p_2^*)=\begin{pmatrix}-\gamma_1 p_1^* & -\nu_1 p_1^*\\ \nu_2 p_2^* & -\gamma_2 p_2^*\end{pmatrix}.$$

Jeigu tiesės l_1 ir l_2 pirmame ketvirtyje nesikerta, tai galima įrodyti, kad pusiausvyros taško $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$ aplinkoje (1.71) sistemos trajektorijos elgiasi taip kaip pavaizduota 1.21 paveikslėlyje.



1.21 pav.

Jeigu tiesės l_1, l_2 kertasi pirmame ketvirtyje ir matricos $A(p_1^*, p_2^*)$ tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra kompleksiškai jungtinės, tai galima įrodyti, kad (1.71) sistemos trajektorijos pusiausvyros taško (p_1^*, p_2^*) aplinkoje elgiasi taip kaip pavaizduota 1.22 paveikslėlyje



1.22 pav.

Iš atlikto tyrimo matome, kad net nežymus Voltera—Lotka lygčių sistemos modifikavimas gali iššaukti esminį šios sistemos trajektorijų pokytį. Iš tikrųjų (1.71) sistema jau neturi centro taško ir jos trajektorijos nėra uždaros. Tai yra charakteringa centrų savybė. Sakoma, kad centrai yra struktūriškai nestabilūs (žr. [6]). Kita galimybė atsirasti uždaroms trajektorijoms (periodiniams svyravimams), yra "ribinis ciklas." Ribiniai ciklai yra struktūriškai stabilūs. Jie neturi tendencijos išnykti, nežymiai deformuojant sistemą. Pateiksime pavyzdį sistemos kurioje, tinkamai parinkus parametrų reikšmes, egzistuoja ribinis ciklas, t.y. uždara trajektorija, kurios pakankamai mažoje aplinkoje visos kitos trajektorijos arba ją apsivinioja arba nuo jos nusivinioja.

3. *Cholingo—Tenerio modelis*. Tarkime, kai grobuonių nėra aukų santykinis augimo greitis $\dot{p}_1/p_1$ lygus $\alpha_1 - \gamma_1 p_1$, o kai grobuonys yra, šis greitis mažėja proporcingai jų skaičiui, t.y. dydžiu $\nu_1 p_2$. Bendru atveju proporcingumo koeficientas nėra pastovus ir priklauso nuo aukų skaičiaus. Iš tikrųjų, realiame gyvenime sotūs grobuonys aukų nežudo. Todėl kuo daugiau yra aukų, tuo santykinai mažiau jų reikia nužudyti vienam grobuoniui, kad pasisotintų. Taigi galime tarti, kad proporcingumo koeficientas ν_1 yra mažėjanti kintamojo p_1 funkcija. Be to, pagal biologinę prasmę, ji yra teigiama. Apibrėžkime ją taip:

$$\nu_1(p_1) = \frac{k}{d + p_1};$$

čia k ir d – teigiamos konstantos.

Vienam grobuoniui išgyventi reikalingas tam tikras aukų skaičius. Tarkime, šis skaičius lygus a. Tada aukų populiacija p_1 gali išmaitinti p_1/a grobuonių. Taigi grobuonių populiacija p_2 neturi viršyti šio kritinio skaičiaus. Tarkime toliau, kad grobuonių populiacijos santykinis augimo greitis $\dot{p}_2/p_2$ didėja, kai $p_2 < p_1/a$ ir mažėja, kai $p_2 > p_1/a$. Tiksliau tegu šis greitis lygus $\alpha_2(1-ap_2/p_1)$, α_2 – teigiama konstanta. Tada populiacijų p_1, p_2 kitimo dinamiką apibrėžia lygtys:

$$\dot{p}_1 = \big(\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1(p_1) p_2\big) p_1, \quad \dot{p}_2 = \alpha_2 \big(1 - a p_2/p_1\big) p_2. \tag{1.72}$$

Tegu

$$l_1 : \alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1(p_1) p_2 = 0, \quad l_2 : p_1 - a p_2 = 0.$$

Kreivė l_1 yra parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, o viršūnės koordinatės

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d\big), \quad \bar{p}_2 = \frac{\gamma_1}{4k}\big(\alpha_1/\gamma_1 + d\big)^2 > 0.$$

Ji kerta ašį p_1 taškuose $(-d, 0)$, $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$. Kreivė l_2 yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią, su krypties koeficientu $1/a$. Pirmame ketvirtyje

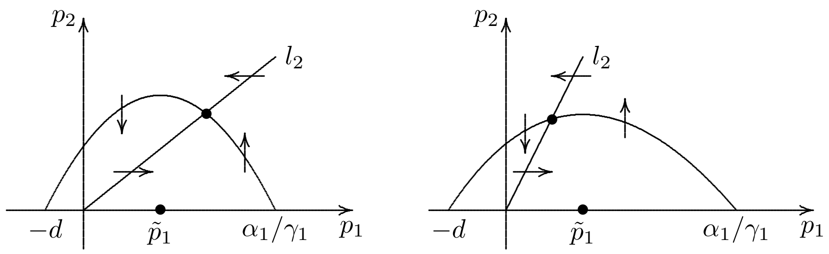
$$p_1 > 0, p_2 > 0$$

yra vienintelis šių kreivių sankirtos taškas (p_1^*, p_2^*). Jo koordinatės

$$p_1^* = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big) p_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)^2 + 4d\alpha_1/\gamma_1},$$

$$p_2^* = \frac{1}{2a}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big) p_1 + \frac{1}{2a}\sqrt{\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)^2 + 4d\alpha_1/\gamma_1}.$$

Atvejai, kai $p_1^* > \bar{p}_1$ ir $p_1^* < \bar{p}_1$ pavaizduoti 1.23 ir 1.24 paveikslėliuose.



1.23 pav. 1.24 pav.

Atkreipsime dėmesį, kad parabolės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$.

Vietoje kintamųjų p_1, p_2 apibrėžkime naujus kintamuosius

$$x_1 = p_1/p_1^*, \quad x_2 = p_2/p_2^*.$$

Tada (1.72) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{x}_1 = \big(\alpha_1 - \gamma_1^* x_1 - \frac{k/a}{d^* + x_1} x_2\big)x_1, \quad \dot{x}_2 = \alpha_2(1 - x_2/x_1)x_2; \tag{1.73}$$

čia $\gamma_1^* = \gamma_1 p_1^*$, $d^* = d/p_1^*$. Po tokios transformacijos kreivės l_1, l_2 pereis į kreives

$$l_1^* : \alpha_1 - \gamma_1^* x_1 - \frac{k/a}{d^* + x_1} x_2 = 0, \quad l_2^* : x_2 = x_1.$$

Parabolė l_1^* kerta koordinačių ašį x_1 taškuose $(-d^*, 0)$ ir $(\alpha_1/\gamma^*, 0)$. Jos viršūnės koordinatės

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1^* - d^*\big), \quad \bar{x}_2 = \frac{a\gamma_1^*}{4k}\big(\alpha_1/\gamma_1^* + d^*\big)^2 > 0.$$

Parabolės l_1^* ir tiesės l_2^* sankirtos taškas $x^* = (1, 1)$ yra vienintelis (1.73) sistemos pusiausvyros taškas su teigiamomis koordinatėmis.

Parašę (1.73) sistemos pirmąjį artinį taško $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ aplinkoje, gausime matricą

$$A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\gamma_1^* \tilde{x}_1 - \frac{k/a}{d^* + \tilde{x}_1}\tilde{x}_2 + \frac{k/a}{(d^* + \tilde{x}_1)^2}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 & -\frac{k/a}{d^* + \tilde{x}_1}\tilde{x}_1 \\ \alpha_2 \tilde{x}_2^2/\tilde{x}_1^2 & \alpha_2 - 2\alpha_2\tilde{x}_2/\tilde{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Pusiausvyros taške x^* matrica

$$A(x^*) = \begin{pmatrix} -\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^*+1)^2} & -\frac{k/a}{d^*+1} \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

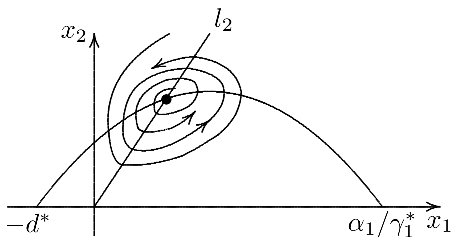
Šios matricos determinantas

$$\det\{A(x^*)\} = \alpha_2\Big(\gamma_1^* - \frac{k/a}{(d^* + 1)^2} + \frac{k/a}{d^* + 1}\Big) = \alpha_2\Big(\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^* + 1)^2} \cdot d^*\Big) > 0.$$

Matricos $A(x^*)$ pėdsakas

$$\operatorname{Sp} A(x^*) = -\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^*+1)^2} - \alpha_2$$

gali įgyti kaip teigiamas, taip ir neigiamas reikšmes. Galima parodyti (žr.4.5 skyrelį), kad atitinkamai parinkus parametrų reikšmes pusiausvyros taškas x^* gali būti arba mazgas, arba centras, arba židinys. Jeigu pusiausvyros taškas x^* yra židinys, tai yra galima tokia situacija, kai šio taško aplinkoje egzistuoja ribinis ciklas. (žr. 1.25 pav.).



1.25 pav.

4. *Konkuruojančios populiacijos.* Tarkime, dviejų konkuruojančių[1] populiacijų dinamikos lygtis galima užrašyti taip:

$$\dot{p}_i/p_i = f_i(p), \quad i = 1, 2; \tag{1.74}$$

čia p_i yra i-oji populiacija, o $f_i = g_i - m_i$ – jos santykinis augimo greitis. Konkuruojančių populiacijų sąveiką nusako tam tikros sąlygos, kurias turi tenkinti funkcijos f_i. Šių sąlygų pasirinkimą apsprendžia keliami uždaviniai. Norint atlikti teorinį tyrimą ir išanalizuoti visus galimus ekosistemos dinamikos variantus reikalaujama, kad funkcijos f_i tenkintų tam tikras bendras, turinčias biologinę prasmę, sąlygas (žr. pavyzdžiui [7]). Nagrinėjant realią ekosistemą funkcijos f_i yra konkretizuojamos. Tiksliau jos apibrėžiamos parametriniu pavidalu (į jas įeinantys parametrai dažniausiai turi tam tikrą biologinę prasmę). Yra žinoma gana daug tokių konkrečių konkuruojančių populiacijų modelių (žr.[7]). Vieną iš tokių modelių išnagrinėsime čia.

Tegu dvi panašios gyvūnų populiacijas p_1, p_2 konkuruoja tarpusavyje ir užima tam tikrą teritoriją, kurios resursai baigtiniai. Tada yra galimos keturios skirtingos jų konkurencijos baigtys:

1. Pirmoji populiacija išgyvena, o antroji išnyksta.

2. Antroji populiacija išgyvena, o pirmoji išnyksta.

3. Abi populiacijos išgyvena.

[1] Terminas "konkurencija" gali turėti daug skirtingų aspektų. Jų čia nenagrinėsime. Sakydami, kad dvi populiacijos konkuruoja tarpusavyje, turėsime omenyje tai, kad kurios nors vienos populiacijos kitimas iššaukia priešingą kitos populiacijos kitimą.

4. Abi populiacijos išnyksta.

Kiekvieną tokią baigtį atitinka pusiausvyros taškas. Todėl populiacijas p_1, p_2 modeliuojančios dinamikos lygtys turi turėti keturis izoliuotus pusiausvyros taškus. Taigi jos turi būti netiesinės. Išnagrinėsime vieną iš paprasčiausių dviejų konkuruojančių tarpusavyje populiacijų modelį.

Tarkime, kai nėra vidinės bei tarprūšinės konkurencijos populiacijų p_1, p_2 santykiniai augimo greičiai $\dot{p}_1/p_1$, $\dot{p}_2/p_2$ yra pastovūs, o kai konkurencija yra, šie greičiai mažėja proporcingai populiacijų individų skaičiui. Tada populiacijų p_1, p_2 kitimą galima aprašyti netiesine sistema

$$\dot{p}_1 = (\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2)p_1, \quad \dot{p}_2 = (\alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2)p_2; \tag{1.75}$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2, \gamma_1, \gamma_2$ – teigiami parametrai. Parametras α_i apibrėžia populiacijos p_i santykinį augimo greitį, kai nėra konkurencijos. Parametrai γ_i ir ν_i apibrėžia šio greičio mažėjimą, kai yra vidinė bei tarprūšinė konkurencija.

Pastarosios sistemos pusiausvyros taškai $(0,0)$, $(0, \alpha_2/\gamma_2)$, $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$, (p_1^*, p_2^*) yra algebginių lygčių sistemos

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2)p_1 = 0, \\ (\alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2)p_2 = 0 \end{cases}$$

sprendiniai. Ketvirtasis taškas su koordinatėmis

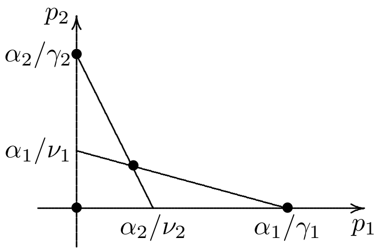
$$p_1^* = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\nu_1}{\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2}, \quad p_2^* = \frac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\nu_2}{\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2} \tag{1.76}$$

yra tiesių

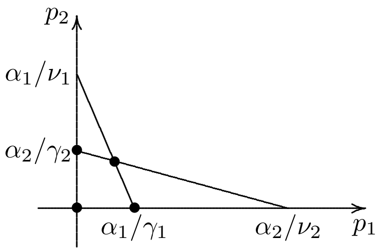
$$l_1 : \alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2 = 0, \quad l_2 : \alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2 = 0$$

sankirtos taškas. Tarkime, kad toks taškas yra vienintelis. Atkreipsime dėmesį į tai, kad tiesės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_2 ašiai, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_1 ašiai.

Konkurentinėje kovoje abi populiacijos gali išgyventi tik tuo atveju, jeigu (1.75) sistema turi pusiausvyros tašką su abiem teigiamom koordinatėm. Pirmojo pusiausvyros taško abi koordinatės lygios nuliui. Antrojo ir trečiojo pusiausvyros taškų viena koordinatė lygi nuliui. Todėl abi populiacijos gali išgyventi tik tuo atveju, kai ketvirtojo taško koordinatės yra teigiamos, t.y. kai tiesės l_1, l_2 kertasi pirmame ketvirtyje (žr. 1.26, 1.27 pav.).



1.26 pav.



1.27 pav.

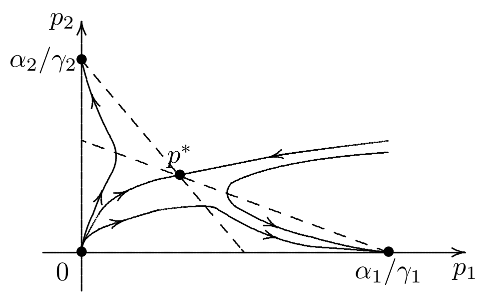
Iš (1.76) formulių matome, kad $p_1^* > 0$ ir $p_2^* > 0$, jeigu

$$\alpha_1\gamma_2 < \alpha_2\nu_1, \ \alpha_2\gamma_1 < \alpha_1\nu_2 \text{ ir } \gamma_1\gamma_2 < \nu_1\nu_2$$

arba

$$\alpha_1\gamma_2 > \alpha_2\nu_1, \ \alpha_2\gamma_1 > \alpha_1\nu_2 \text{ ir } \gamma_1\gamma_2 > \nu_1\nu_2.$$

Šios sąlygos apibrėžia tiesių l_1, l_2 tarpusavio padėtį plokštumoje. Todėl pakanka išnagrinėti atvejį, kai yra patenkinta kuri nors viena iš šių sąlygų. Tarkime, patenkinta pirmoji sąlyga (žr. 1.26 pav.). Tada galima įrodyti, kad abiejų populiacijų išnykimas yra negalimas, nes, kai $t \to \infty$, nėra nei vienos trajektorijos, kuri įeitų į koordinačių pradžią. Abiejų populiacijų išgyvenimas yra labai retas reiškinys, nes, kai $t \to \infty$, į pusiausvyros tašką įeina tik dvi trajektorijos (separatrisės). Visos likusios trajektorijos įeina į pusiausvyros tašką $(0, \alpha_2/\gamma_2)$ arba į pusiausvyros tašką $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$. Jeigu trajektorija įeina į pirmąjį iš šių taškų, tai išnyksta populiacija p_1, o jeigu į antrąjį, tai populiacija p_2. Todėl galima tvirtinti, kad jeigu yra patenkinta pirmoji iš minėtų dviejų sąlygų, tai konkuruojant dviem populiacijom viena iš jų dažniausiai išnyksta. Trajektorijų elgesys pusiausvyros taškų aplinkoje pavaizduotas 1.28 paveikslėlyje.



1.28 pav.

2 SKYRIUS

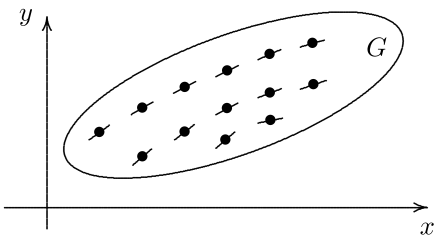
PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

2.1 PIRMOSIOS EILĖS PAPRASTOSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS IŠREIKŠTOS IŠVESTINĖS ATŽVILGIU

Tegu G yra sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathrm{C}(G)$ ir funkcija $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ yra pirmos eilės paprastosios diferencialinės lygties

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

sprendinys. Funkcija $y = \varphi(x)$ srityje G apibrėžia kreivę l. Kreivė l vadinama *integraline kreive*. Kiekvienam taškui $(x, y) \subset G$ priskirkime atkarpą su krypties koeficientu $k = f(x, y)$, einančią per šį tašką. Tokių atkarpų visuma srityje G apibrėžia *krypčių lauką*, atitinkantį (2.1) lygtį (žr. 2.1 pav.).



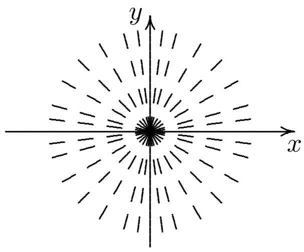
2.1 pav.

Pagal apibrėžimą kreivė $l \subset G$ yra integralinė tada ir tik tada, kai ji yra glodi ir jos liestinės krypties koeficientas kiekviename taške (x, y) sutampa su $f(x, y)$. Taigi (2.1) lygtis apibrėžia sąryšį tarp kiekvieno integralinės kreivės taško ir jos liestinės krypties koeficiento tame pačiame taške. Kartais šis sąryšis leidžia gauti kokybinį integralinių kreivių vaizdą tiesiogiai iš pačios lygties, jos tiksliai nesprendžiant. Norint apytiksliai nubrėžti inegralines kreives iš pradžiu tikslinga rasti geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas yra pastovus. Ši geometrinė vieta taškų vadinama *izokline*. Izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi $f(x, y) = k$.

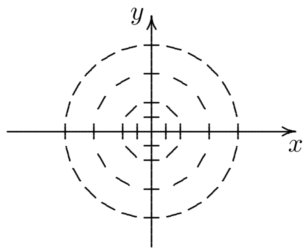
P a v y z d ž i a i:

1. Nagrinėsime lygtį
$$y' = y/x. \tag{2.2}$$
Kiekviename taške $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, išskyrus koordinačių pradžios tašką, ieškomos integralinės kreivės krypties koeficientas $k = y/x$, t.y. sutampa su

tiesės, einančios per koordinačių pradžią ir tašką (x, y), krypties koeficientu (žr. 2.2 pav.).



2.2 pav.



2.3 pav.

Todėl (2.2) lygties integralinės kreivės yra pustiesės

$$y = kx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

2. Nagrinėsime lygtį

$$y' = -x/y. \tag{2.3}$$

Kiekviename ieškomos integralinės kreivės taške, išskyrus koordinačių pradžios tašką, liestinės krypties koeficientas $k = -x/y$. Kadangi $-x/y \cdot y/x = -1$, tai krypčių laukas sukonstruotas pirmame pavyzdyje yra ortogonalus (2.3) lygties krypčių laukui (žr. 2.3 pav.). Kartu galime tvirtinti, kad (2.3) lygties integralinės kreivės yra pusapskritimiai

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0$$

su centru koordinačių pradžioje.

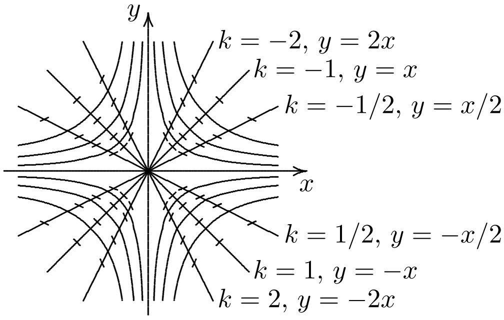
3. Nagrinėsime lygtį

$$y' = -y/x, \quad x \neq 0. \tag{2.4}$$

Iš pradžių rasime geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas turi tą patį krypties koeficientą k. Priminsime, kad taip apibrėžta aibė taškų vadinama izokline. Nagrinėjamu atveju izoklinės yra pustiesės

$$-y/x = k \Leftrightarrow y = -kx, \quad x \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 2.4 pav.).



2.4 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra hiperbolių šakos. Iš tikrųjų, atskyrę (2.4) lygtyje kintamuosius (žr.2.2 skyrelį) ir gautą lygtį suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra hiperbolių, apibrėžtų lygtimi

$$y = c/x, \ x \neq 0, \ c \in \mathbb{R}$$

šakos.

Iš šių pavyzdžių matome, kad diferencialinė lygtis turi be galo daug sprendinių. Bendru atveju šiuos sprendinius galima apibrėžti lygtimi

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

arba lygtimi išreikšta kintamojo y atžvilgiu

$$y = \varphi(x, c).$$

Norint iš jų išskirti kokį nors vieną reikia pareikalauti, kad sprendinys tenkintų kokią nors papildomą sąlygą. Dažniausiai tokia sąlyga apibrėžiama taip:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.5}$$

Ši sąlyga yra vadinama *pradine* arba *Koši* sąlyga. Jeigu (2.1) lygtį nagrinėsime kartu su (2.5) sąlyga, tai tokį uždavinį vadinsime *pradiniu* arba *Koši uždaviniu*.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, tolydi funkcija $y = \varphi(x, c)$, apibrėžta kokioje nors srityje $D \subset \mathbb{R}^2$, yra (2.1) lygties *bendrasis sprendinys* srityje $G_0 \subset G$, jeigu

1. $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ lygtis
$$y_0 = \varphi(x_0, c)$$
turi vienintelį sprendinį $c_0 = c(x_0, y_0)$.

2. Taškas $(x_0, c_0) \in D$ ir $y = \varphi(x, c_0)$ yra (2.1), (2.5) Koši uždavinio sprendinys.

Sprendinį $y = \varphi(x, c_0)$, gautą iš bendrojo sprendinio paėmus konkrečią konstantos $c = c_0$ reikšmę, vadinsime *atskiruoju* (2.1) lygties sprendiniu.

P a s t a b a. Analogiškai apibrėžiami bendrasis ir atskirasis (2.1) lygties sprendiniai neišreikšti išvestinės atžvilgiu. Kartais tokie sprendiniai vadinami bendruoju ir atskiruoju šios lygties *integralais*.

Nagrinėjant (2.1),(2.5) Koši uždavinį patogu lygiagrečiai nagrinėti integralinę lygtį

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{2.6}$$

A p i b r ė ž i m a s. Funkcija $y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$ yra (2.6) integralinės lygties sprendinys, jeigu

1. $\varphi \in \mathrm{C}\langle a, b\rangle$.
2. $(x, \varphi(x)) \in G, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.
3. $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Jeigu tolydi funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.6) integralinės lygties sprendinys, tai ji yra tolydžiai diferencijuojama, tenkina (2.1) lygtį ir (2.5) pradinę sąlygą. Atvirkštinis teiginis taip pat yra teisingas. Jeigu funkcija $y = \varphi(x)$ yra (2.1),(2.5) Koši uždavinio sprendinys, tai ji yra (2.6) integralinės lygties sprendinys.

2.2 SPRENDINIŲ EGZISTAVIMAS, VIENATIS, PRATĘSIMAS

Šiame skyrelyje be įrodymo[1] pateiksime kai kuriuos teiginius iš paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos. Nagrinėsime vienos lygties su viena nežinomąja funkcija atvejį. Tiksliau nagrinėsime pirmosios eilės paprastąją diferencialinę lygtį, išreikštą išvestinės atžvilgiu

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G; \tag{2.7}$$

čia G – sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathrm{C}(G)$.

Priminsime, kad funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ yra (2.7) lygties sprendinys, jeigu:

1. Funkcija φ yra diferencijuojama intervale $\langle a, b\rangle$.
2. Taškas $(x, \varphi(x)) \in G$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.
3. Teisinga tapatybė $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

Be to, sprendinio apibrėžimo sritis yra intervalas, t.y. jungioji aibė. Pavyzdžiui, funkcija $y = (c - x)^{-1}$ apibrėžta $\forall x \neq c$ (žr. 2.4 skyrelį) nėra lygties

$$y' = y^2 \tag{2.8}$$

sprendinys plokštumoje $\mathbb{R}^2$, nors visos trys apibrėžimo sąlygos yra patenkintos. Antra vertus, funkcija $y = (c - x)^{-1}$, apibrėžta intervale $(-\infty, c)$ arba intervale (c, ∞), yra šios lygties sprendinys.

2.1 teorema. *Tegu f yra tolydi srityje G funkcija. Tada $\forall (x_0, y_0) \in G$ egzistuoja bent vienas (2.7) lygties sprendinys $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ toks, kad $\varphi(x_0) = y_0$.*

Teoremoje tvirtinama, kad per kiekvieną tašką $(x_0, y_0) \in G$ eina bent viena (2.7) lygties integralinė kreivė, jeigu tik funkcija f yra tolydi srityje G. Karu yra galima ir tokia situacija, kai per vieną srities G tašką eina kelios (2.7) lygties integralinės kreivės. Pavyzdžiui, lygties

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

dešinioji pusė yra tolydi funkcija visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Pagal 2.1 teoremą per kiekvieną tašką $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eina bent viena šios lygties integralinė kreivė. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad funkcija $\varphi(x) \equiv 0$, kai $x \in (-\infty, \infty)$, o taip pat funkcijos:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - c)^2, & \text{kai } x \in (c, \infty); \\ 0, & \text{kai } x \in (-\infty, c) \end{cases}$$

ir

$$\varphi(x) = \begin{cases} -(x - c)^2, & \text{kai } x \in (-\infty, c); \\ 0, & \text{kai } x \in (c, +\infty), \end{cases}$$

[1] Įrodymus galima rasti [3] knygoje.

tenkina pastarąją lygtį. Tarp šių funkcijų yra be galo daug tokių, kurios tenkina sąlygą $\varphi(x_0) = 0$ (pakanka paimti $c > x_0$ pirmu atveju ir $c < x_0$ antru atveju). Todėl per tašką $(x_0, 0)$ eina be galo daug nagrinėjamos lygties integralinių kreivių.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, sritis G yra *vienaties sritis* (2.7) lygčiai, jeigu bet kokie du jos sprendiniai, apibrėžti intervale $\langle a, b\rangle$ ir sutampantys taške $x_0{\in}\langle a, b\rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b\rangle$.

2.2 **teorema.** *Tarkime, funkcijos f dalinė išvestinė f_y egzistuoja ir yra tolydi srityje G. Tada sritis G yra vienaties sritis (2.7) lygčiai.*

Jeigu funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G, tai pagal 2.2 teoremą per kiekvieną srities G tašką eina lygiai viena (2.7) lygties integralinė kreivė. Tačiau kartais ši savybė išlieka ir tuo atveju, kai funkcija f yra tik tolydi. Pavyzdžiui lygtis

$$y' = f(x)g(y), \quad x{\in}(a, b),\ y{\in}(c, d) \tag{2.9}$$

kiekvienam $x_0{\in}(a, b)$, $y_0{\in}(c, d)$ turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.10}$$

jeigu

$$f{\in}\,\mathrm{C}(a, b),\ g{\in}\,\mathrm{C}(c, d)\ \text{ ir } g(y) \neq 0,\ \forall y{\in}(c, d).$$

Tuo lengvai galime įsitikinti (žr. 2.3 skyrelį), jeigu atskirsime kintamuosius ir gautą lygtį suintegruosime. Taigi sritis

$$G = \{(x, y) : x{\in}(a, b),\ y{\in}(c, d)\}$$

yra vienaties sritis (2.9) lygčiai, nors dešinioji šios lygties pusė yra tik tolydi.

Išskirsime kelis atvejus, kai galima garantuoti sprendinio egzistavimą ir vienatį visoje nagrinėjamoje srityje.

2.3 **teorema.** *Tegu funkcija f yra tolydi juostoje*

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}$$

ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L(x)|y - \bar{y}|, \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in G, \quad L \in \mathrm{C}(a, b)\,. \tag{2.11}$$

Tada $\forall (x_0, y_0) \in G$ egzistuoja vienintelis (2.7), (2.10) Koši uždavinio sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas visame intervale (a, b); čia skaičiai a ir b gali įgyti bet kokias reikšmes, net ir simbolius $\pm\infty$.

2.4 **teorema.** *Tegu funkcija f yra tolydi juostoje*

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty\}$$

ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in G,\ L = \text{const}. \tag{2.12}$$

Tada $\forall (x_0, y_0) \in G$ egzistuoja vienintelis aprėžtas (2.7), (2.10) Koši uždavinio sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas visame segmente $[a, b]$.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $y = \varphi(x), x\in\langle a, b\rangle$ ir $y = \psi(x), x\in\langle \alpha, \beta\rangle$ yra (2.7) lygties sprendiniai. Be to, tegu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$ ir

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x\in\langle \alpha, \beta\rangle.$$

Tada sakysime, kad sprendinys $y = \psi(x)$ yra sprendinio $y = \varphi(x)$ *siaurinys*, o sprendinys $y = \varphi(x)$ yra sprendinio $y = \psi(x)$ *tęsinys*.

Kiekvieną (2.7) lygties sprendinį, apibrėžta intervale $\langle a, b]$, galima pratęsti į dešinę, o sprendinį, apibrėžtą intervale $[a, b\rangle$, galima pratęsti į kairę. Jeigu $y = \varphi(x)$, $x\in(a, b)$ yra (2.7) lygties sprendinys ir jo negalima pratęsti nei į kairę nei į dešinę, tai toks sprendinys vadinamas *nepratęsiamu,* o intervalas (a, b) – *maksimaliu sprendinio egzistavimo intervalu.*

2.5 teorema. *Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_y yra tolydžios srityje G ir (x_0, y_0) – laisvai pasirinktas taškas srityje G. Tada egzistuoja vienintelis (2.7) lygties pilnasis sprendinys $y = \varphi(x)$, apibrėžtas maksimaliame intervale (a, b), tenkinantis (2.10) sąlygą. Be to, taškas $x_0\in(a, b)$ ir, kai $x \to a + 0$ arba kai $x \to b - 0$, taškas $(x, \varphi(x))$ artėja į srities G kontūrą ∂G.*

Toliau kalbėdami apie diferencialinės lygties sprendinį, jeigu nenurodyta priešingai, visada turėsime omenyje pilnąjį sprendinį.

Tegu $G = \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ ir f yra tiesinė kintamojo y atžvilgiu funkcija, t.y.

$$f(x, y) = p(x)y + q(x), \quad p, q \in \mathrm{C}(a, b)\,.$$

Tada $\forall(x_0, y_0) \in G$ tiesinė lygtis

$$y' = p(x)y + q(x)$$

turi vienintelį sprendinį, apibrėžtą visame intervale (a, b), tenkinantį (2.10) sąlygą. Iš tikrųjų, funkcijos f dalinė išvestinė $f_y = p \in \mathrm{C}(a, b)$. Todėl 2.3 teoremoje galime imti $L = p$.

Tegu $G = \{(x, y) : a \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$ ir yra teisinga nelygybė

$$|f_y(x, y)| \le L, \quad \forall(x, y) \in G,\ L = \text{const}.$$

Tada $\forall(x_0, y_0) \in G$ egzistuoja vienintelis aprėžtas (2.7), (2.10) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame segmente $[a, b]$ (žr. 2.4 teoremą). Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad funkcija f kintamojo y atžvilgiu auga ne greičiau už tiesinę funkciją. Tuo atveju, kai funkcija f kintamojo y atžvilgiu auga greičiau už tiesinę funkciją, situacija gali iš esmės pasikeisti. Tiksliau, gali atsitikti taip, kad sprendinio negalima pratęsti į visą intervala (a, b) arba pratęstas į visą intervalą (a, b) sprendinys nėra aprėžtas. Pavyzdžiui, funkcija $f(x, y) = y^2$ yra apibrėžta ir diferencijuojama visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Todėl per kiekvieną šios plokštumos tašką eina lygiai viena lygties

$$y' = y^2$$

integralinė kreivė. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad nėra jokių kliūčių sprendinį neribotai pratęsti tiek į kairę, tiek į dešinę. Tačiau taip nėra. Šiuo atveju funkcija f kintamojo y atžvilgiu auga kaip kvadratinė. Todėl negalime tvirtinti, kad egzistuoja pastarosios lygties sprendinys, apibrėžtas visame intervale $(-\infty, \infty)$ ir tenkinantis laisvai pasirinktą pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$. Iš tikrųjų, ši lygtis turi sprendinį $y(x) \equiv 0$, apibrėžtą visame intervale $(-\infty, \infty)$. Likusius sprendinius (žr. 2.3 skyrelį) galima apibrėžti formule

$$y = (c - x)^{-1};$$

čia $x > c$ arba $x < c$, c – laisva konstanta. Tegu $y_0 \neq 0$. Tada iš sąlygos $y(x_0) = y_0$ randame, kad $c = x_0 + y_0^{-1}$. Vadinasi, sprendinys

$$y = \frac{1}{x_0 + y_0^{-1} - x}$$

yra apibrežtas arba intervale $(-\infty, x_0 + y_0^{-1})$, arba intervale $(x_0 + y_0^{-1}, \infty)$. Taigi maksimalus sprendinio egzistavimo intervalas nesutampa su visa tiese. Be to, kai x artėja į intervalo $(-\infty, x_0 + y_0^{-1})$ arba intervalo $(x_0 + y_0^{-1}, \infty)$ kraštinius taškus, taškas $(x, y(x))$ artėja į begalybę.

P a s t a b a Visi šie teiginiai apie sprendinių egzistavimą, vienatį ir pratęsimą, išlieka teisingi ir normaliajai paprastųjų diferencialinių lygčių sistemai.

2.3 LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

Vienos iš paprasčiausių pirmos eilės diferencialinių lygčių yra lygtys su *atskiriamais kintamaisiais*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0. \tag{2.13}$$

Šią lygtį patogu perrašyti simetriniu pavidalu

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx. \tag{2.14}$$

Tegu

$$f \in \mathrm{C}[x_0 - a, x_0 + a], \quad g \in \mathrm{C}[y_0 - b, y_0 + b]\,.$$

Suintegravę (2.14) lygtį panariui, gausime jos bendrąjį integralą

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c.$$

Norit išskirti atskirąjį integralą, tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0,$$

pakanka neapibrėžtinius integralus pakeisti apibrėžtiniais, t.y. perrašyti integralą taip:

$$\int\limits_{y_0}^{y} g(s)\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds + c_1$$

ir pareikalauti, kad jis tenkintų pradinę sąlygą. Tada gausime, kad konstanta $c_1 = 0$, o atskirasis integralas bus apibrėžtas formule

$$\int\limits_{y_0}^{y} g(s)\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds.$$

Remiantis šios formulės išvedimu galime tvirtinti, kad (2.13) lygties sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$, egzistuoja ir yra vienintelis, jeigu tik $g(y) \neq 0$.

Kai funkcija $g(y) = 1$, tai lygties

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

bendrasis sprendinys

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds + c.$$

Atskirą sprendinį tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0,$$

patogu užrašyti taip:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds.$$

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$x\, dx - y\, dy = 0$$

bendrąjį integralą. Nagrinėjama lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Todėl integruodami ją panariui gauname:

$$\int x\, dx - \int y\, dy = c_1 \quad \text{arba} \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1.$$

Taigi bendrąjį integralą galima užrašyti taip:

$$x^2 - y^2 = c, \quad c = 2c_1.$$

P a s t a b a. Lygtyje užrašytoje simetrinėje formoje (2.14) kintamieji x ir y yra lygiateisiai. Be to, nagrinėjant pastarąją lygtį galima atsisakyti prielaidos, kad funkcija $g(y) \neq 0$. Šiuo atveju reikia atskirai išspręsti lygtį $g(y) = 0$ ir rasti tuos diferencialinės lygties sprendinius, kuriuos negalima gauti iš bendrojo lygties sprendinio. Tokie sprendiniai yra vadinami *ypatingais sprendiniais*
P a v y z d ž i a i:

1. Nagrinėsime lygtį

$$y(1 + x)\, dx + x(1 - y)\, dy = 0.$$

Tarkime $xy \neq 0$. Tada pastaraja lygtį, padalinę iš xy gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{1 + x}{x}\, dx + \frac{1 - y}{y}\, dy = 0.$$

Integruodami abi šios lygties puses randame bendrąjį integralą

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = c \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|xy| + x - y = c.$$

Dalindami lygti iš xy galėjome prarasti kai kuriuos sprendinius. Iš tikrųjų, funkcijos $x = 0$ ir $y = 0$ yra nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendiniai. Tačiau juos negalima gauti iš bendruojo sprendinio. Todėl sprendiniai $x = 0$ ir $y = 0$ yra ypatingi sprendiniai.

2. Rasime lygties

$$y' = y^2$$

sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$. Tegu $y \neq 0$. Tada atskirę kintamuosius, gauname lygtį

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

Suintegravę ją randame bendrąjį sprendinį

$$-\frac{1}{y} = x - c \Longleftrightarrow y = \frac{1}{c - x}.$$

Pareikalavę, kad šis sprendinys tenkintų duotą pradinę sąlygą randame $c = 1/y_0 + x_0$. Taigi atskirasis nagrinėjamos lygties sprendinys

$$y = \frac{1}{y_0^{-1} + x_0 - x}.$$

Dalindami lygtį iš y^2 praradome sprendinį $y = 0$. Kadangi jo negalima gauti iš bendrojo sprendinio, tai jis yra ypatingas sprendinys.

Kai kurias pirmosios eilės paprastasias diferencialines lygtis galima suvesti į lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Pavyzdžiui, lygtis

$$y' = f(ax + by + l), \quad a, b, l \in \mathbb{R}$$

keitiniu $v = ax + by + l$ susiveda į lygtį

$$\frac{dv}{dx} = a + bf(v)$$

su atskiriamais kintamaisiais. Integruodami ją randame bendrąjį integralą

$$\int \frac{dv}{a + bf(v)} = x + c.$$

Pakeitę čia v į $ax + by + l$ gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį integralą

Sakysime, funkcija f yra n-tos eilės *homogeninė funkcija*, jeigu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Pavyzdžiui funkcija $f(x, y) = x^2 - xy$ yra antros eilės homogeninė funkcija, nes

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 - xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ yra homogeninė pirmos eilės funkcija (netgi teigiamai homogeninė). Iš tikrųjų,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| f(x, y).$$

Sakysime, pirmos eilės lygtis

$$y' = f(x, y)$$

yra *homogeninė*, jeigu funkcija f yra nulinės eilės homogeninė funkcija. Parodysime, kad pirmos eilės homogeninę lygtį galima suvesti į lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

Tegu f yra homogeninė nulinės eilės funkicja. Tada pagal apibrėžimą

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Imkime šioje formulėje $\lambda = 1/x$. Tada

$$f(x, y) = f(1, y/x) := \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

ir pirmos eilės homogeninė lygtis susiveda į lygtį

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Šioje lygtyje vitoje ieškomos funkijos y apibrėžkime naują ieškomą funkciją $u = y/x$. Tada $y = ux$, $y' = u'x + u$ ir naujos ieškomos funkcijos u atžvilgiu gauname lygtį

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Ši lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Radę jos bendrą sprendinį (arba bendrą integralą) ir pakeitę jame u į y/x gausime nagrinėjamos homogeninės lygties bendrąjį sprendinį (bendrąjį integralą).

P a v y z d y s. Rasime homogeninės lygties

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

bendrąjį integralą. Kadangi funkcija esanti dešinėje šios lygties pusėje yra nulinės eilės homogeninė funkcija, tai pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2y/x}.$$

Vietoje ieškomos funkcijos y apibrėžkime naują ieškomą funkciją $u = y/x$. Tada funkcijos u atžvilgiu gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$\frac{2u}{1 + u^2}\, du = -\frac{dx}{x},$$

kurios bendrasis integralas

$$\ln(1 + u^2) = -\ln|x| + \ln|c| \quad \Longleftrightarrow \quad x(1 + u^2) = c.$$

Pakeitę paskutinėje lygtyje u į y/x gausime nagrinėjamos homogėninės lygties bendrąjį integralą

$$x^2 + y^2 = cx.$$

Kai kurias pirmos eilės diferencialines lygtis galima suvesti į homogeninę lygtį. Pavyzdžiui, lygtis

$$y' = f\Big(\frac{ax + by + c}{mx + ny + d}\Big), \quad a, b, c, m, n, d \in \mathbb{R},$$

susiveda į homogeninę lygtį

$$v' = f\Big(\frac{au+bv}{mu+nv}\Big), \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Reikia tik koordinačių pradžią perkelti į tiesių

$$ax + by + c = 0, \quad mx + ny + d = 0$$

susikirtimo tašką (x_0, y_0), t.y. atlikti keitinį

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0.$$

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$$

bendrąjį sprendinį. Tiesių

$$x + 2y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

susikirtimo taškas $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Tegu $u = x - 1, v = y + 1$. Tada nagrinėjama lygtis susiveda į homogeninę lygtį

$$v' = \frac{u+2v}{2u+v}, \quad v' = \frac{dv}{du}.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$(v-u)^3 = c(v+u).$$

Grįžę prie senų kintamųjų x ir y, gausime nagrinėjamos lygties bendrąjį sprendinį

$$(y-x+2)^3 = c(x+y).$$

2.4 TIESINĖS PIRMOS EILĖS LYGTYS

Nagrinėsime tiesinę pirmos eilės lygtį

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2.15}$$

Šios lygties bendrąjį sprendinį rasime dviem skirtingais būdais. Iš pradžių jo ieškosime konstantų variavimo metodu. Atmetę (2.15) lygtyje narį $f(x)$, gausime tiesinę homogeninę lygtį

$$y' + p(x)y = 0. \tag{2.16}$$

Tai yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Perrašysime ją taip:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

Suintegravę šią lygtį gausime homogeninės lygties bendrajį sprendinį

$$\ln|y(x)| = -\int p(x)\,dx + \ln|c|,$$

kurį galima perrašyti taip:

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}, \quad c \neq 0.$$

Akivaizdu, kad atskirasis sprendinys $y(x) = 0$, kuri mes praradome dalindami iš y, įeina į gautą formulę kai $c = 0$.

Homogeninės lygties sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0,$$

patogu užrašyti taip:

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds}. \tag{2.17}$$

Remiantis šios formulės išvedimu galime tvirtinti, kad (2.16) lygties sprendinys yra vienintelis, jeigu tik jis egzistuoja. Norint įrodyti sprendinio egzistavimą pakanka pareikalauti tokio funkcijos p glodumo, kad funkcija y, apibrėžta (2.17) formule, tenkintų visas diferencialinės lygties sprendinio apibrėžimo sąlygas. Akivaidu, kad funkcija y tenkins šias sąlygas, jeigu funkcija p bus tolydi.

Tegu y_1 ir y_2 yra kokie nors du (2.15) lygties sprendiniai. Tada jų skirtumas $y = y_1 - y_2$ yra (2.16) lygties sprendinys. Todėl bendrasis (2.15) lygties sprendinys yra lygus kokio nors atskiro šios lygties sprendinio ir bendrojo (2.16) homogeninės lygties sprendinio sumai. Rasime atskirąjį (2.15) lygties sprendinį.

Konstantų variavimo metodo esmė yra ta, kad rastame tiesinės homogeninės lygties sprendinyje konstantą c pakeičiame nežinoma funkciją $c(x)$ ir atskirajį nehomogeninės lygties sprendinį ieškome pavidalu

$$y = c(x)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (2.15), gausime lygtį

$$c'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + c(x)e^{-\int p(x)\,dx} \cdot (-p(x)) +$$

$$p(x)c(x)e^{-\int p(x)\,dx} = f(x).$$

Suprastinę šioje lygtyje vienodus narius matome, kad funkcijos $c(x)$ atžvilgiu tai yra paprastoji pirmos eilės diferencialinė lygtis, kurią galima užrašyti taip:

$$c'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Šios lygties sprendinys

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx.$$

Taigi atskirasis (2.15) lygties sprendinys

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx.$$

Pridėję prie jo (2.16) homogeninės lygties bendrąjį sprendinį, gausime (2.15) nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx. \tag{2.18}$$

Pareikalausime, kad taip apibrėžtas sprendinys tenkinantų pradinę sąlygą

$$y(x_0) = y_0.$$

Pakeitę (2.18) formulėje neapibrėžtinius integralus apibrėžtiniais gausime, kad $c = y_0$, o

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(s)e^{\int\limits_{x_0}^{s} p(t)\,dt}\,ds. \tag{2.19}$$

Akivaizdu, kad ši formulė apibrėžia vienintelį sprendinį, jeigu tik jis egzistuoja. Tai tiesiogiai išplaukia iš jos išvedimo. Norint įrodyti sprendinio egzistavimą pakanka pareikalauti tokio funkcijų p ir f glodumo, kad funkcija y, apibrėžta (2.19) formule, tenkintų visas diferencialinės lygties sprendinio apibrėžimo sąlygas. Šios sąlygos bus patenkintos, jeigu pareikalausime, kad funkcijos p ir f yra tolydžios.

P a v y z d y s. Konstantų variavimo metodu rasime tiesinės nehomogeninės lygties

$$y' + 2xy = 2x$$

bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinkančios tiesinės homogeninės lygties

$$y' + 2xy = 0 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

bendrasis sprendinys

$$y = ce^{-x^2}.$$

Atskirojo nehomogeninės lygties sprendinio ieškome pavidalu

$$y = c(x)e^{-x^2}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į nagrinėjamą lygtį, ieškomai funkcijai c gausime lygtį

$$c'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Šios lygties atskirasis sprendinys

$$c(x) = \int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2}.$$

Taigi atskirasis nagrinėjamos nehomogeninės lygties sprendinys

$$y = e^{x^2} \cdot e^{-x^2} = 1.$$

Bendrasis nehomogenin4s lygties sprendinys

$$y = ce^{-x^2} + 1.$$

Dabar rasime (2.15) lygties bendrąjį sprendinį *Bernulio metodu*. Sprendinio ieškosime pavidalu $y = uv$, čia u ir v ieškomos kintamojo x funkcijos ir viena iš jų, pavyzdžiui v, nelygi nuliui. Įstatę taip apibrėžtos funkcijos y išraišką į (2.15) lygtį, gausime

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x).$$

Sugrupavę narius šią lygtį perrašome taip:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \tag{2.20}$$

Reikalaujame, kad reiškinys skliaustuose būtų lygus nuliui. Tada funkcijai v gauname tiesinę homogeninę pirmos eilės lygtį

$$v' + p(x)v = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$v = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Paėmę šioje formulėje $c = 1$, gausime atskirąjį sprendinį

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (2.20) lygtį, funkcijai u gausime pirmos eilės diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisiais, kurią galima užrašyti pavidalu

$$u' = f(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Integruodami šią lygtį randame

$$u = \int f(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c.$$

Taigi bendrąjį (2.15) lygties sprendinį galima užrašyti taip:

$$y = uv = \Big(\int f(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\Big) e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Akivaizdu, kad Bernulio metodu rastas sprendinys sutampa su konstantų variavimo metodu rastu sprendiniu (žr. (2.18) formule).

P a v y z d y s. Bernulio metodu rasime tiesinės nehomogeninė lygties

$$y' - y = x$$

bendrąjį sprendinį. Tegu $y = uv$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į lygtį, gausime

$$u'v + uv' - uv = x \Longleftrightarrow u'v + u(v' - v) = x.$$

Funkciją $v = e^x$ randame iš lygties : $v' - v = 0$. Tada funkcija u turi tenkinti lygtį

$$u' = xe^{-x} \Longleftrightarrow u = \int xe^{-x}\,dx$$

Integruodami pastarąją lygtį dalimis, gauname

$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

Taigi bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys

$$y = uv = (-xe^{-x} - e^{-x} + c)e^x = ce^x - x - 1.$$

Lygtis

$$y'(x) + p(x)y = f(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0 \quad \text{ir} \quad \alpha \neq 1 \tag{2.21}$$

yra vadinama *Bernulio lygtimi*. Tegu $z = y^{1-\alpha}$ nauja nežinoma funkcija. Tada $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ir Bernulio lygtis virsta tiesine lygtimi

$$\frac{z'}{\alpha - 1} + p(x)z(x) = f(x),$$

kurią spręsti jau mokame.

P a v y z d y s. Išspręskime Bernulio lygtį

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

Akivaizdu, kad $y = 0$ yra šios lygties atskirasis sprendinys. Tegu $y \neq 0$. Apibrėžkime naują nežinomą funkciją $z = y^{-1}$. Tada $y = z^{-1}$, $y' = -z'/z^2$ ir gauname tiesinę lygtį

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$z = \ln x + 1 + cx.$$

Taigi nagrinėjamos Bernulio lygties bendrasis sprendinys

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}.$$

Artindami čia c į ∞, gausime atskirąjį sprendinį $y = 0$.

Lygtis

$$y'(x) + p(x)y + q(x)y^2 = f(x). \tag{2.22}$$

yra vadinama Rikati lygtimi. Bendruoju atveju ji nesuintegruojama kvadratūromis[1]. Tačiau jeigu žinome kokį nors atskirą jos sprendinį $y = y_1(x)$, tai apibrėžę naują nežinomą funkciją $z = y - y_1$ gausime Bernulio lygtį

$$z'(x) + [p(x) + 2q(x)y_1]z(x) + q(x)z^2(x) = 0,$$

kurią spręsti mokame.

P a v y z d y s. Išspręskime Rikačio lygtį

$$y' = -y^2 + 2y\sin x + \cos x - \sin^2 x.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad funkcija $y_1(x) = \sin x$ yra šios lygties sprendinys. Apibrėžkime naują nežinomą funkciją $z = y - \sin x$. Tada $y = z + \sin x$, $y' = z' + \cos x$ ir naginėjama lygtis susiveda į Bernulio lygtį

$$z' = -z^2.$$

Ši lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais ir jos bendrasis sprendinys

$$z = \frac{1}{x + c}.$$

Taigi nagrinėjamos Rikačio lygties bendrasis sprendinys

$$y = \frac{1}{x + c} + \sin x.$$

[1]Sakysime, kad diferencialinė lygtis yra integruojama kvadratūromis, jeigu jos sprendinį galima išreikšti (nebūtinai tiesiogiai) elementariomis funkcijomis ir jų neapibrėžtiniais integralais naudojant baigtinį skaičių algebrinių operacijų.

2.5 PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SIMETRINĖ FORMA

Nagrinėjant lygtį

$$y' = f(x, y); \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

kartais ją patogu perrašyti taip:

$$x' = g(x, y); \quad x' = \frac{dx}{dy}, \quad g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Pastarasias dvi lygtis galima apjungti į vieną, neišskiriant nei vieno iš kintamųjų. Tiksliau pirmos eilės diferencialinę lygtį, išreikštą išvestinės atžvilgiu, galima užrašyti *simetrinėje formoje*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0; \tag{2.23}$$

čia M ir N – tolydžios srityje G funkcijos.

Jeigu bent vienas iš koeficientų M arba N taške $(x_0, y_0) \in G$ nelygus nuliui, tai (2.23) lygtį, pakankamai mažoje šio taško aplinkoje, galima suvesti į lygtį išreikštą išvestinės atžvilgiu. Jeigu kokiame nors taške $(x_0, y_0) \in G$ abu koeficientai M ir N lygūs nuliui, t.y.

$$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0,$$

tai sakysime, kad taškas (x_0, y_0) yra *ypatingas taškas*. Taigi nagrinėjant diferencialines lygtis simetrinėje formoje nauja yra tai, kad abu koeficientai M ir N gali būti lygūs nuliui. Atkreipsime dėmesį į tai, kad ankstesnė teorija neatsako į klausimus ar egzistuoja integralinė kreivė einanti per ypatingą tašką, kiek tokių integralinių kreivių yra, kaip elgiasi integralinės kreivės arti ypatingo taško. Be to, (2.23) lygties atveju integralinė kreivė gali turėti liestinę lygiagrečią bet kuriai iš koordinačių ašių, ji ne būtinai eina nuo vieno srities krašto iki kito (pavyzdžiui ji gali būti uždara) ir t.t..

Y p a t i n g ų t a š k ų p a v y z d ž i a i.

1. Lygties

   $$y\, dy + x\, dx = 0$$

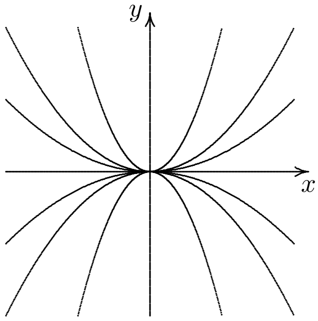
   integralinės kreivės yra apskritimų šeima $x^2 + y^2 = c^2$ su centru koordinačių pradžioje (žr. 2.3 pav.).Taškas $(0, 0)$ yra šios lygties ypatingas taškas. Tokio tipo taškas yra vadinamas *centru*.

2. Lygties

   $$y\, dx + x\, dy = 0$$

   bendrasis sprendinys $y = c/x$ apibrėžia hiperbolių šeimą (žr. 2.4 pav.). Tokio tipo ypatingas taškas vadinamas *balno tašku*.

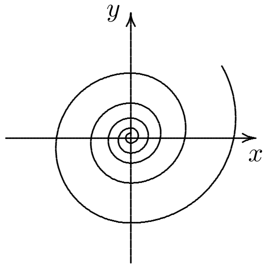
3. Lygties
$$x\,dy - 2y\,dx = 0$$
bendrasis sprendinys $y = cx^2$ apibrėžia parabolių šeimą (žr. 2.5 pav.).



2.5 pav.

Tokio tipo ypatingas taškas vadinamas *mazgu*.

4. Lygties
$$(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$$
integralinės kreivės yra logaritminių spiralių šeima (žr. 2.6 pav.)
$$\sqrt{x^2+y^2} = ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$
Polinėse koordinatėse šią lygtį galima perrašyti taip: $r = ce^{\varphi}$.



2.6 pav.

Tokio tipo ypatingas taškas vadinamas *židiniu.*

Tegu Σ yra aibė ypatingų taškų. Kadangi funkcijos M ir N yra tolydžios, tai aibė Σ yra uždara. Kartu aibė $G \setminus \Sigma$ yra atvira.

Kiekvienam taškui $(x_0, y_0) \in G \setminus \Sigma$ egzistuoja tokia jo aplinka, kurioje arba $M(x,y) \neq 0$ arba $N(x,y) \neq 0$. Šioje aplinkoje (2.23) lygtis yra ekvivalenti vienai iš lygčių
$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \qquad x' = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}. \tag{2.24}$$

Todėl (2.23) lygties sprendinį galima apibrėžti kaip vienos iš (2.24) lygčių sprendinį.

Koši uždavinys diferencialinės lygties simetrinėje formoje atveju formuluojamas taip pat kaip nesimetrinės lygties atveju. Reikia rasti (2.23) lygties sprendinį, einanti per tašką (x_0, y_0). Jeigu $(x_0, y_0) \in G \setminus \Sigma$ ir $y = \varphi(x)$ (arba $x = \psi(y)$) yra Koši uždavinio

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad y(x_0) = y_0 \,(\text{arba}\, x(y_0) = x_0)$$

sprendinys, tai jis yra vienos iš (2.24) lygčių sprendinys. Todėl nagrinėjant (2.23) lygtį išlieka teisingi visi ankstesni apibrėžimai ir teiginiai, turintys lokalų charakterį.

Srityje G (2.23) lygtis apibrėžia krypčių lauką. Tiksliau šį lauką apibrėžia viena iš (2.24) lygčių. Todėl krypčių laukas yra apibrėžtas kiekviename neypatingame srities G taške. Į šį krypčių lauką įeina ir kryptys lygiagrečios koordinačių ašims. Priminsime, kad integralinė kreivė tai sprendinio grafikas. Todėl kiekviena glodi kreivė gulinti srityje G yra integralinė kreivė, jeigu jos kiekviename taške liestinės kryptis sutampa su lauko kryptimi. Bet kurios dvi integralinės kreivės gulinčios vienatinumo srityje ir turinčios bendrą tašką, sutampa bendroje jų apibrėžimo srityje. Be to, kiekviena glodi kreivė, kurios visi taškai yra ypatingi, yra integralinė kreivė.

Reikalavimas, kad integralinė kreivė būtų apibrėžta lygtimi $y = \varphi(x)$ arba lygtimi $x = \psi(y)$ yra susijęs tik su sprendinio apibrėžimu. Bendru atveju integralinę kreivę galima apibrėžti kaip bet kokią glodžią kreivę, kurios liestinės kryptis kiekviename taške sutampa su lauko kryptimi. Kiekvieno savo taško aplinkoje tokia kreivė yra funkcijos grafikas. Tačiau visoje srityje G ją ne visada galima apibrėžti kaip funkcijos grafiką. Todėl visumoje integralinę kreivę galima apibrėžti lygtimi $U(x,y) = 0$.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. $x\,dy - y\,dx = 0, \quad G = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$. Šios lygties bendrasis sprendinys $y = Cx$. Išsprendę pastarąją lygtį C atžvilgiu, gausime bendrąjį integralą $y/x = C$.

2. $y\,dy + x\,dx = 0, \quad G = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$. Suintegravę šią lygtį, gausime bendrąjį integralą $y^2 + x^2 = c$. Išsprendę pastarąją lygtį y atžvilgiu, gausime bendrąjį sprendinį $y = \sqrt{c - x^2}$, $0 < c < \infty$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad sprendinio apibrėžimo sritis priklauso nuo c. Tiksliau sprendinys yra apibrėžtas intervale $(0, \sqrt{c})$.

2.6 PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS NEIŠREIKŠTOS IŠVESTINĖS ATŽVILGIU

Tegu funkcija $F \in \mathrm{C}(D), D$ – sritis erdvėje $\mathbb{R}^3$. Nagrinėsime pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.25}$$

neišreikštą išvestinės atžvilgiu. Išskirsime kelis paprasčiausius tokių lygčių integravimo atvejus.

1. Tarkime, funkcija F nepriklauso nuo kintamųjų x ir y. Tada (2.25) lygtį galima perrašyti taip:

$$F(y') = 0. \tag{2.26}$$

Tegu p^* yra reali lygties

$$F(p) = 0 \tag{2.27}$$

šaknis. Tada integruodami lygtį

$$y' = p^*,$$

gausime

$$y = p^* x + C.$$

Kadangi

$$\frac{y - C}{x} = p^*$$

yra (2.27) lygties šaknis, tai

$$F\Big(\frac{y - C}{x}\Big) = 0$$

yra (2.26) lygties bendrasis integralas.

P a v y z d y s. Lygtis

$$y'^3 + y'^2 + y' - 3 = 0$$

išvestinės y' atžvilgiu turi realią šaknį $y' = 1$. Integruodami randame $y = x + C$. Todėl nagrinėjamos lygties bendrasis integralas yra

$$\Big(\frac{y - C}{x}\Big)^3 + \Big(\frac{y - C}{x}\Big)^2 + \frac{y - C}{x} - 3 = 0.$$

2. Tarkime, funkija F nepriklauso nuo kintamojo y. Tada (2.25) lygtį galima perrašyti taip:

$$F(x, y') = 0. \tag{2.28}$$

Jeigu šią lygtį galima išspręsti kintamojo y' atžvilgiu, tai gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais. Priešingu atveju patogu įvesti parametrą. Lygtis $F(x, u) = 0$ kintamųjų x, u plokštumoje apibrėžia kreivę. Tarkime, kad $x = \varphi(p)$, $u = \psi(p)$ yra šios kreivės parametrinės lygtys. Tada (2.28) lygtį galima pakeisti dviem lygtimis

$$x = \varphi(p), \quad y' = \psi(p).$$

Kadangi

$$dy = \psi(p)\, dx = \psi(p)\varphi'(p)\, dp,$$

tai parametrinės lygtys

$$x = \varphi(p), \quad y = \int \psi(p)\varphi'(p)\, dp + C$$

apibrėžia (2.28) lygties integralines kreives. Jeigu (2.28) lygtį galima išspręsti kintamojo x atžvilgiu: $x = \varphi(y')$, tai šią lygtį patogu pakeisti parametrinėmis lygtimis: $x = \varphi(p), y' = p$. Šiuo atveju parametrinės lygtys

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$$

apibrėžia (2.28) lygties integralines kreives.

P a v y z d y s. Lygtis

$$x = \left(y'\right)^3 - y' - 1$$

yra išspręsta x atžvilgiu. Todėl ją patogu pakeisti dviem parametrinėmis lygtimis

$$y' = p, \quad x = p^3 - p - 1.$$

Kadangi

$$dy = p\, dx = p(3p^2 - 1)\, dp,$$

tai

$$y = \int p(3p^2 - 1)\, dp = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C.$$

Todėl parametrinės lygtys

$$x = p^3 - p - 1, \quad y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + C$$

apibrėžia nagrinėjamos lygties integralines kreives.

3. Tegu funkcija F nepriklauso nuo kintamojo x. Tada (2.25) lygtį galima perrašyti taip:

$$F(y, y') = 0. \tag{2.29}$$

Jeigu šią lygtį galima išspręsti kintamojo y' atžvilgiu, tai gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais. Priešingu atveju patogu įvesti parametrą. Lygtis $F(y, u) = 0$ kintamųjų y, u plokštumoje apibrėžia kreivę. Tarkime, kad $y = \varphi(p)$, $u = \psi(p)$ yra šios kreivės parametrinės lygtys. Tada (2.29) lygtį galima pakeisti dviem lygtimis

$$y = \varphi(p), \quad y' = \psi(p).$$

Kadangi

$$dx = \frac{1}{\psi(p)}\,dy = \frac{1}{\psi(p)}\varphi'(p)\,dp,$$

tai parametrinės lygtys

$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\,dp + C$$

apibrėžia (2.29) lygties integralines kreives. Jeigu (2.29) lygtį galima išspręsti kintamojo y atžvilgiu: $y = \varphi(y')$, tai šią lygtį patogu pakeisti parametrinėmis lygtimis: $y = \varphi(p), y' = p$. Šiuo atveju parametrinės lygtys

$$y = \varphi(p), \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C$$

apibrėžia (2.28) lygties integralines kreives.

P a v y z d y s. Lygtį

$$y^{2/3} + \left(y'\right)^{2/3} = 1$$

galima pakeisti dviem parametrinėmis lygtimis

$$y = \cos^3 p, \quad y' = \sin^3 p.$$

Kadangi

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{3\cos^2 p}{\sin^3 p}\sin p\,dp = -3\operatorname{ctg}^2 p\,dp,$$

tai

$$x = 3p + 3\operatorname{ctg} p + C.$$

Todėl parametrinės lygtys

$$y = \cos^3 p, \quad x = 3p + 3\operatorname{ctg} p + C$$

apibrėžia nagrinėjamos lygties integralines kreives.

3 SKYRIUS

Aukštesnės eilės paprastosios diferencialinės lygtys

3.1 PAPRASČIAUSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS, KURIŲ EILĘ GALIMA SUMAŽINTI

Nagrinėjant n – tos eilės diferencialinę lygtį

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{3.1}$$

arba lygtį išreikštą išvestinės atžvilgiu

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \tag{3.2}$$

kartais pavyksta sumažinti jos eilę. Dažniausiai tai palengvina lygties integravimą. Išskirsime kelis paprasčiausius atvejus, kai lygties eilę galima sumažinti.

Tarkime (3.2) lygties dešinioji pusė nepriklauso nuo ieškomos funkcijos y ir jos išvestinių, t.y.

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.3}$$

Pažymėję $y^{(n-1)} = v$ gausime pirmos eilės diferencialinę lygtį $v' = f(x)$. Suintegravę šią lygtį rasime funkciją $v = g(x) + c$. Taigi padarę tokį keitinį gavome tokio pačio pavidalo $n - 1$ eilės diferencialinę lygtį

$$y^{(n-1)} = g(x) + c_1.$$

Pakartoję šiai lygčiai tokius pačius samprotavimus $n - 1$ kartą, rasime ieškomą sprendinį

$$y = q(x) + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_n.$$

Tačiau praktikoje, ieškant (3.3) lygties sprendinio elgiamasi kitaip. Tiksliau abi lygties puses n kartų integruojame panariui. Pavyzdžiui tegu turime antros eilės lygtį

$$y'' = f(x).$$

Suintegravę abi šios lygties puses panariui, gausime lygtį

$$y' = \int f(x)\, dx := g(x) + c_1.$$

Integruodami ją panariui rasime ieškomą sprendinį

$$y = \int (g(x) + c_1)\, dx := q(x) + c_1 x + c_2.$$

Tarkime, (3.1) lygtis nepriklauso nuo ieškomos funkcijos ir visų jos išvestinių iki $k-1$ eilės imtinai, t.y.

$$F\big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\big) = 0, \quad k < n.$$

Padarę keitinį $y^{(k)} = v$ naujos ieškomos funkcijos v atžvilgiu gausime $n-k$ eilės lygtį

$$F\big(x, v, v', \dots, v^{(n-k)}\big) = 0.$$

P a v y z d y s. Rasti lygties

$$y'' - y'/x = 0$$

bendrąjį sprendinį. Ši lygtis nepriklauso nuo ieškomos funkcijos y. Padarę keitinį $y' = v$ naujos ieškomos funkcijos v atžvilgiu gausime lygtį su atskiriamais kintamaisiais:

$$v' - v/x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Integruodami ją randame

$$\ln|v| = \ln|x| + \ln|c_1| \quad \Longleftrightarrow \quad v = c_1 x.$$

Grįžę prie seno kintamojo y, randame $y' = c_1 x$ ir bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys $y = c_1 x^2 + c_2$.

Tarkime, (3.1) lygtyje funkcija F priklauso tik nuo ieškomos funkcijos y išvestinių $y^{(n-1)}$ ir $y^{(n)}$ ir šią lygtį galima išspręsti išvestinės $y^{(n)}$ atžvilgiu. Tada tokią lygtį galima užrašyti pavidalu

$$y^{(n)} = f\big(y^{(n-1)}\big).$$

Apibrėžę naują ieškomą funkciją $v = y^{(n-1)}$, gausime pirmos eilės lygtį su atskiriamais kintamaisiais

$$v' = f(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{f(v)} = dx.$$

Jos bendrasis integralas

$$\int \frac{dv}{f(v)} = x + c_1, \quad f(v) \neq 0.$$

Tarkime šį sąryšį galima išspręsti v atžvilgiu: $v = \varphi(x, c_1)$. Pakeitę čia v į $y^{(n-1)}$ gausime lygtį

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1).$$

Integruodami ją $n-1$ kartą, gausime bendrąjį sprendinį

$$y = \int \cdots \int \varphi(x, c_1)\, dx \dots dx + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + c_3 \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} + \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

Tarkime, (3.1) lygtyje funkcija F priklauso tik nuo ieškomos funkcijos y išvestinių $y^{(n-2)}$ ir $y^{(n)}$ ir šią lygtį galima išspręsti išvestinės $y^{(n)}$ atžvilgiu. Tada tokią lygtį galima užrašyti pavidalu

$$y^{(n)} = f\big(y^{(n-2)}\big).$$

Apibrėžę naują ieškomą funkciją $v = y^{(n-2)}$, gausime antros eilės diferencialinę lygtį

$$v'' = f(v).$$

Padauginę šią lygtį iš $2v'$ perrašykime ją taip:

$$2v'dv' = 2v'f(v)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad d\big(v'\big)^2 = 2f(v)\,dv.$$

Pastarąją lygtį integruodami ir atlikdami elementarius veiksmus, randame

$$v'^2 = 2\int f(v)\,dv + c_1 \quad \Longleftrightarrow \quad v' = \pm\sqrt{2\int f(v)\,dv + c_1}.$$

Gauta lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Tarkime, jos bendrąjį integralą

$$\int \frac{dv}{\sqrt{2\int f(v)\,dv + c_1}} = \pm x + c_2$$

galima išspręsti v atžvilgiu. Tiksliau tegu $v = \varphi(x, c_1, c_2)$. Pakeitę čia v į $y^{(n-2)}$ gausime $n-2$ eilės lygtį

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2),$$

kurios bendrąjį integralą randame $n-2$ kartus integruodami šią lygtį panariui.

3.2 TIESINĖS HOMOGENINĖS ANTROS EILĖS LYGTYS

Tarkime, funkcijos a_1, a_2 yra tolydžios intervale (a, b) ir

$$\mathrm{L}(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

Reiškinys $\mathrm{L}(y)$ yra vadinamas antros eilės *tiesiniu diferencialiniu reiškiniu*, o operatorius L antros eilės *tiesiniu diferencialinu operatoriumi*. Jo apibrėžimo sritis yra funkcijų erdvė $\mathrm{C}^2(a, b)$. Kadangi funkcija y ir visos jos išvestinės iki antros eilės imtinai įeina į operatorių L tiesiškai, tai

1. $\mathrm{L}(\lambda\varphi) = \lambda\,\mathrm{L}(\varphi), \quad \forall\varphi \in \mathrm{C}^2(a, b), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
2. $\mathrm{L}(\varphi + \psi) = \mathrm{L}(\varphi) + \mathrm{L}(\psi), \quad \forall\varphi, \psi \in \mathrm{C}^2(a, b)\,.$

Nagrinėsime tiesinę homogeninę antros eilės diferencialinę lygtį

$$\mathrm{L}(y) = 0. \tag{3.4}$$

Tegu funkcijos φ_1 ir φ_2 yra (3.4) lygties sprendiniai. Tada jų tiesinis darinys

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \tag{3.5}$$

taip pat yra (3.4) lygties sprendinys. Iš tikrųjų

$$\mathrm{L}(\varphi) = \mathrm{L}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \mathrm{L}(c_1\varphi_1) + \mathrm{L}(c_2\varphi_2) =$$

$$c_1\,\mathrm{L}(\varphi_1) + c_2\,\mathrm{L}(\varphi_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

P a v y z d y s. Lygtis

$$y'' = 0$$

turi du atskirus sprendinius $y = 1$ ir $y = x$. Todėl jų tiesinis darinys

$$y = c_1 + xc_2$$

taip pat yra sprendinys.

Sprendinys (3.5) priklauso nuo dviejų laisvų konstantų c_1 ir c_2. Išsiaiškinsime ar jis yra bendrasis (3.4) lygties sprendinys.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, tolydžios funkcijos φ_1, φ_2 yra *tiesiškai nepriklausomos* intervale (a, b), jeigu lygybė

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

yra galima tik tuo atveju, kai

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Priešingu atveju jos vadinamos *tiesiškai priklausomomis*. Tiksliau, jeigu egzistuoja konstantos c_1, c_2, iš kurių bent viena nelygi nuliui, tokios, kad

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b),$$

tai sakysime, kad funkcijos φ_1, φ_2 yra tiesiškai priklausomos.

Iš šio apibrėžimo matome, kad funkcijos φ_1, φ_2 yra tiesiškai priklausomos, jeigu bent viena iš jų lygi nuliui. Be to, jeigu prie tiesiškai priklausomų funkcijų prijungsime dar kelias funkcijas, tai gauta funkcijų sistema bus tiesiškai priklausoma. Akivaizdu, dvi funcijos φ_1, φ_2 yra tiesiškai priklausomos, jei jos yra proporcingos, t.y. kai $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$, $\lambda = const$.

Pavyzdžiui, funkcijos $\varphi_1 = e^{2x}$ ir $\varphi_2 = e^x$ yra tiesiškai nepriklausomos bet kokiame intervale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, nes lygybė

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = c_1e^{2x} + c_2e^x = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

yra galima tik tuo atveju, kai $c_1 = c_2 = 0$. Funkcijos $\varphi_1 = 2\sin x$ ir $\varphi_2 = \sin x$ yra tiesiškai priklausomos, nes jos yra proporcingos

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{2\sin x}{\sin x} = 2.$$

Tegu φ_1, φ_2 yra diferencijuojamos intervale (a, b) funkcijos. Iš šių funkcijų ir jų išvestinių sudarome determinantą

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Taip apibrėžtas determinantas yra vadinamas funkcijų sistemos φ_1, φ_2 *Vronskio determinantu*.

3.1 teorema. *Jeigu funkcijos φ_1, φ_2 yra tiesiškai priklausomos intervale (a, b), tai jas atitinkantis Vronskio determinantas šiame intervale tapačiai lygus nuliui.*

$\triangleleft$ Pagal apibrėžimą funkcijos φ_1, φ_2 yra tiesiškai priklausomos intervale (a, b), jeigu

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

ir bent vienas iš koeficientų c_1, c_2 nelygus nuliui. Tarkime, $c_2 \neq 0$. Tada

$$\varphi_2(x) = -\frac{c_1}{c_2}\varphi_1(x).$$

ir funkcijas φ_1, φ_2 atitinkantis Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & -\frac{c_1}{c_2}\varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) & -\frac{c_1}{c_2}\varphi_1'(x) \end{vmatrix} = 0. \triangleright$$

Tarkime, kad φ_1, φ_2 yra (3.4) lygties sprendiniai ir $W(x)$ yra šiuos sprendinius atitinkantis Vronskio determinantas. Tada yra teisinga teorema.

3.2 teorema. *Teiginiai*[1]

[1] Ši ir kai kurios kitos šio skyrelio teoremos pateiktos be įrodymų. Jų įrodymus galima rasti bet kokiame paprastųjų diferencialinių lygčių vadovėlyje.

1. $W(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b)$,

2. $W(x_0) = 0$, *kokiame nors taške* $x_0 \in (a,b)$,

3. Sprendiniai φ_1, φ_2 *– tiesiškai priklausomi*

yra ekvivalentūs.

I š v a d a. Tegu funkcijos φ_1, φ_2 yra (3.4) lygties tiesiškai nepriklausomi sprendiniai intervale (a,b). Tada jie yra tiesiškai nepriklausomi ir bet kokiame intervale $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$.

Tegu funkcijos φ_1, φ_2 yra (3.4) lygties tiesiškai nepriklausomi sprendiniai intervale (a,b). Tada

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix}$$

Kadangi funkcijos φ_1, φ_2 yra (3.4) lygties sprendiniai, tai

$$\varphi_1''(x) = -a_1(x)\varphi_1'(x) - a_2(x)\varphi_1(x), \quad \varphi_2''(x) = -a_1(x)\varphi_2'(x) - a_2(x)\varphi_2(x)$$

ir Vronskio determinanto išvestinė

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ -a_1(x)\varphi_1'(x) - a_2(x)\varphi_1(x) & -a_1(x)\varphi_2'(x) - a_2(x)\varphi_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(x)\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} - a_2(x)\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x).$$

Vadinasi Vronskio determinantas W yra diferencialinės lygties

$$W'(x) = -a_1(x)W(x)$$

sprendinys. Tai yra pirmos eilės tiesinė homogeninė lygtis. Jos sprendinys

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds}.$$

Pastaroji formulė vadinama *Liuvilio – Ostrogradskio* formule. Iš jos matome, kad Vronskio determinantas tapačiai lygus nuliui, jeigu jis lygus nuliui bent viename taške. Kartu galime tvirtinti, kad sprendiniai φ_1, φ_2 yra tiesiškai nepriklausomi, jeigu Vronskio determinantas bent viename taške nelygus nuliui.

Kiekvienas (3.4) lygties sprendinys $\varphi_k, k = 1,2$ vienareikšmiškai apibrėžiamas jo ir jo išvestinės reikšmėmis kokiame nors fiksuotame taške $x_0 \in (a,b)$. Šias pradines reikšmes galima užrašyti stulpeliu ir iš jų sudaryti matricą

$$\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Pavadinkime ją pradine matrica. Akivaizdu, kad

$$W(x_0) = \det \Phi(x_0).$$

Taigi (3.4) lygties sprendiniai φ_1, φ_2 yra tiesiškai nepriklausomi, jeigu juos atitinkanti pradinė matrica yra neišsigimusi, t.y.

$$\det \Phi(x_0) \neq 0.$$

Kartu ji yra neišsigimusi ir kiekviename intervalo (a, b) taške.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, du (3.4) lygties sprendiniai φ_1, φ_2, yra šios lygties sprendinių bazė, jeigu bet kurį šios lygties sprendinį φ galima išreikšti sprendinių φ_1, φ_2, tiesiniu dariniu, t.y.

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Koeficientai c_1, c_2 vadinami sprendinio φ koordinatėmis duotoje bazėje.

3.3 **teorema.** *Bet kokie (3.4) lygties sprendiniai φ_1, φ_2 su neišsigimusia pradine matrica yra šios lygties sprendinių bazė.*

Pagal 3.3 teoremą (3.4) lygties sprendiniai φ_1, φ_2 yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai iš jų sudaryta pradinė matrica Φ yra neišsigimusi kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$. Todėl pastarąją teoremą galima performuluoti taip.

3.4 **teorema.** *Bet kokie du tiesiškai nepriklausomi (3.4) lygties sprendiniai yra šios lygties sprendinių bazė.*

Tegu φ_1, φ_2 yra (3.4) lygties sprendinių bazė. Funkcija

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

yra vadinama (3.4) lygties *bendruoju sprendiniu*.

Bendrasis sprendinys pasižymi šiomis savybėmis:

1. Kiekvienam konkrečiam parametrų c_1, c_2 rinkiniui funkcija φ, apibrėžta (3.6) formule, yra (3.4) lygties sprendinys.

2. Kiekvieną (3.4) lygties sprendinį galima išreikšti (3.6) formule, tinkamai parinkus parametrų c_1, c_2 reikšmes.

Sprendinių erdvės bazė, t.y. dviejų tiesiškai nepriklausomų sprendinių visuma, vadinama *fundamentaliąja sprendinių sistema*.

3.3 KONSTANTŲ VARIAVIMO METODAS

Šiame skyrelyje parodysime, kad tiesimės nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį galima rasti žinant šią lygtį atitinkančios tiesinės homogeninės lygties kokią nors fundamentaliąją sprendinių sistemą. Be to, įsitikinsime, kad nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį galima išreikšti šios lygties atskirojo sprendinio ir ją atitinkančios homogeninės lygties bendrojo sprendinio suma.

Iš pradžių nagrinėsime tiesinę nehomogeninę antros eilės lygtį

$$\mathrm{L}(y) := y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = q(x), \quad x \in (a,b). \tag{3.7}$$

Tegu y ir v yra kokie nors du šios lygties sprendiniai intervale (a,b), t.y.

$$\mathrm{L}(y) = q(x) \quad \text{ir} \quad \mathrm{L}(v) = q(x), \quad x \in (a,b).$$

Tada jų skirtumas $\varphi = y - v$ yra tiesinės homogeninės lygties

$$\mathrm{L}(\varphi) := \varphi'' + a_1(x)\varphi' + a_2(x)\varphi = 0.$$

sprendinys. Iš tikrųjų,

$$\mathrm{L}(\varphi) = \mathrm{L}(y - v) = \mathrm{L}(y) - \mathrm{L}(v) = q(x) - q(x) = 0.$$

Todėl jeigu žinome kokį nors (3.7) lygties atskirąjį sprendinį v, tai bet kurį kitą šios lygties sprendinį y galima apibrėžti formule $y = v + \varphi$, kurioje φ yra tiesinės homogeninės lygties $\mathrm{L}(\varphi) = 0$ bendrasis sprendinys. Jeigu žinome homogeninės lygties kokią nors fundamentaliąją sprendinių sistemą φ_1, φ_2, tai jos bendrasis sprendinys

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2.$$

Tačiau tada

$$y = v + \varphi = v + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \tag{3.8}$$

yra (3.7) lygties bendrasis sprendinys. Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad bet kurį kitą (3.7) lygties sprendinį ψ galima išreikšti (3.8) formule. Iš tikrųjų, tegu ψ yra koks nors (3.7) lygties sprendinys. Sudarykime tiesinę dviejų algebrinių lygčių sistemą

$$v(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) = \psi(x_0),$$

$$v'(x_0) + c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) = \psi'(x_0)$$

kintamųjų c_1, c_2 atžvilgiu. Šios sistemos determinantas yra fundamentalios sprendinių sistemos φ_1, φ_2 Vronskio determinantas $W(x_0)$. Kadangi jis nelygus nuliui, tai sistema turi vienintelį sprendinį $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$. Kartu galime tvirtinti, kad sprendiniai

$$y = v + c_1^0\varphi_1 + c_2^0\varphi_2 \quad \text{ir} \quad y = \varphi$$

tenkina tas pačias pradines sąlygas. Remiantis vienaties teorema šie sprendiniai sutampa.

Taigi, jeigu žinome homogeninės lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai nehomogeninės lygties sprendimas sisiveda į jos atskirojo sprendinio radimą. Pasirodo, kad nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį galima surasti, jeigu yra žinoma kokia nors homogeninės lygties fundamentalioji sprendinių sistema. Atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį ieškosime *konstantų variavimo metodu*. Šio metodo esmė yra tame, kad atskirasis (3.7) lygties sprendinys yra ieškomas pavidalu:

$$v(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x); \tag{3.9}$$

čia c_1, c_2 – ieškomos diferencijuojamos funkcijos, o φ_1, φ_2 – fundamentalioji homogeninės lygties sprendinių sistema. Suskaičiuosime funkcijos v išvestines ir pareikalausime, kad pabrauktas narys būtų lygus nuliui.

$$v'(x) = c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x) + \underline{c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x)},$$

$$v''(x) = c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) + c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x),$$

Padauginę funkciją v iš a_2, jos pirmąją išvestinę v' iš a_1, o antąją išvestinę v'' iš 1 ir viską sudėję, gausime

$$\mathrm{L}(v) = c_1\,\mathrm{L}(\varphi_1) + c_2\,\mathrm{L}(\varphi_2) + c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2'.$$

Funkcija v tenkins (3.7) lygtį, jeigu paskutinis reiškinys yra lygus $q(x)$. Taigi funkcijų c_1', c_2' atžvilgiu, gavome dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0,$$

$$c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = q(x).$$

Šios sistemos determinantas $W(x) \neq 0$. Todėl ji turi vienintelį sprendinį

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)};$$

čia W_1 ir W_2 yra determinantai, gaunami iš Vronskio determinanto W, pakeitus atitinkamai pirmąjį ir antrąjį stulpelį į stulpelį $\mathrm{colon}(0, q(x))$. Taigi

$$c_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)}\,ds + c_{k0}, \quad k = 1, 2;$$

čia c_{k0} – fiksuotos konstantos. Įstatę taip apibrėžtas funkcijas c_k į (3.9) formulę, gausime atskirįjį (3.7) lygties sprendinį.

P a v y z d y s. Rasime lygties

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinkanti tiesinė homogeninė lygtis

$$y'' + y = 0$$

turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius $\varphi_1 = \cos x$ ir $\varphi_2 = \sin x$. Todėl $\varphi = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ yra bendrasis homogeninės lygties sprendinys. Rasime atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį. Remiantis (3.9) formule šį sprendinį galima užrašyti pavidalu

$$v = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

Nežinomų funkcijų c_1 ir c_2 išvestines rasime iš lygčių:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0, \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Funkcijų sistemos $\cos x, \sin x$ Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Determinantai

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Todėl

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -\operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad c_1(x) = \int (-\operatorname{tg} x)\, dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_2(x) = \int 1\, dx = x,$$

o atskirasis sprendinys $v = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$. Taigi bendrasis nagrinėjamos lygties sprendinys

$$y = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Įrodyti teiginiai antros eilės tiesinei lygčiai yra teisingi ir n-tos eilės tiesinei lygčiai

$$\mathrm{L}(y) := y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = q(x), \quad x \in (a, b). \tag{3.10}$$

Tiksliau bendrąjį šios lygties sprendinį galima išreikšti pavidalu

$$y = v + \varphi,$$

kur v yra koks nors atskiras šios lygties sprendinys, o φ yra bendrasis homogeninės lygties

$$\mathrm{L}(y) := y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0, \quad x \in (a, b). \tag{3.11}$$

sprendinys. Be to, jeigu žinoma kokia nors fundamentalioji homogeninės lygties sprendinių sistema $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, tai bendrasis homogeninės lygties sprendinys

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n.$$

Atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį galima ieškoti pavidalu

$$v = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + c_n(n)\varphi_n(x); \tag{3.12}$$

čia ieškomos funkcijos $c_1, c_2, \dots, c_n$ randamos iš n algebrinių lygčių sistemos:

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = q(x). \end{cases}$$

Šios sistemos Vronskio determinantas $W(x) \neq 0$. Todėl ji turi vienintelį sprendinį

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \dots, c_n'(x) = \frac{W_n(x)}{W(x)};$$

čia $W_k, k = 1, \dots, n$ yra determinantai, gaunami iš Vronskio determinanto W, pakeitus k-ąjį stulpelį į stulpelį $\operatorname{colon}(0, \dots, 0, q(x))$. Taigi

$$c_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)}\, ds + c_{k0};$$

čia c_{k0} – fiksuotos konstantos. Įstatę taip apibrėžtas funkcijas c_k į (3.12) formulę, gausime atskirąjį (3.10) lygties sprendinį.

Šio skyrelio pabaigoje pateiksime pavyzdį, kai žinant vieną homogeninės lygties sprendinį jos eilę galima sumažinti vienetu.

P a v y z d y s. Tarkime, yra žinomas antros eilės lygties

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3.13}$$

netrivialus sprendinys $y = \varphi(x)$. Apibrėžkime naują ieškomą funkciją z formule

$$y(x) = \varphi(x) \int z(x)\, dx.$$

Tada

$$y'(x) = \varphi'(x) \int z(s)\, ds + \varphi(x)z(x),$$

$$y''(x) = \varphi''(x) \int z(s)\, ds + 2\varphi'(x)z(x) + \varphi(x)z'(x).$$

Įstatę taip apibrėžtos funkcijos y ir jos išvestinių y', y'' reikšmes į (3.13) lygtį, gausime funkcijos z atžvilgiu pirmos eilės tiesinę homogeninę lygtį

$$\varphi(x)z'(x) + \big(a_1(x)\varphi(x) + 2\varphi'(x)\big)z(x) = 0,$$

kurios bendrasis sprendinys

$$z = ce^{-\int\left(a_1(x)+2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)dx} = c\varphi^{-2}(x)e^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

Todėl

$$y = \varphi(x) \quad \text{ir} \quad y = \varphi(x)\int e^{-\int a_1(x)\,dx}\varphi^{-2}(x)\,dx$$

yra (3.13) lygties sprendiniai. Akivaizdu, kad jie yra tiesiškai nepriklausomi. Todėl jų tiesinis darinys yra (3.13) lygties bendrasis sprendinys.

3.4 TIESINĖS ANTROS EILĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS

Tiesinę antros eilės lygtį

$$\mathrm{L}(y) := y'' + 2ay' + by = q(x) \tag{3.14}$$

su pastoviais realiais koeficicientais a, b atitinka homogeninė lygtis

$$\mathrm{L}(y) := y'' + 2ay' + by = 0. \tag{3.15}$$

Jos sprendinį ieškosime pavidalu $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (3.15) lygtį gausime

$$e^{\lambda x}\big(\lambda^2 + 2a\lambda + b\big) = 0.$$

Taigi funkcija $y = e^{\lambda x}$ yra (3.15) lygties sprendinys, jeigu skaičius λ yra *charakteristinės lygties*

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

šaknis. Šios lygties šaknys

$$\lambda_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \lambda_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Išskirsime tokius atvejus:

1. Šaknys λ_1, λ_2 yra realios ir skirtingos, t.y.
$$a^2 - b > 0.$$
2. Šaknys λ_1, λ_2 yra realios ir sutampa, t.y.
$$a^2 - b = 0.$$
3. Šaknys λ_1, λ_2 yra kompleksinės ir jų realioji dalis nelygi nuliui, t.y.
$$a^2 - b < 0, \quad a \neq 0.$$
4. Šaknys λ_1, λ_2 yra menamos, t.y.
$$a = 0, \quad b > 0.$$

Kiekvieną iš šių atveju išnagrinėsime atskirai.

1. Tegu λ_1, λ_2 yra realios charakteristinės lygties šaknys ir $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tada

$$\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2 = e^{\lambda_2 x}$$

yra du tiesiškai nepriklausomi (3.15) homogeninės lygties sprendiniai, nes Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} \neq 0.$$

Bendrasis homogeninės lygties sprendinys

$$\varphi = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Atskirą (3.14) nehomogeninės lygties sprendinį galima rasti konstantų variavimo metodu. Remiantis šiuo metodu atskirasis sprendinys ieškomas pavidalu:

$$v = c_1(x) e^{\lambda_1 x} + c_2(x) e^{\lambda_2 x},$$

nežinomų funkcijų c_1, c_2 išvestinės randamos iš dviejų algebrinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{\lambda_1 x} + c_2'(x) e^{\lambda_2 x} = 0, \\ c_1'(x) \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2'(x) \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = q(x). \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą ir gautus sprendinius suintegravę, randame

$$c_1(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{-\lambda_1 s}\, ds,$$

$$c_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{-\lambda_2 s}\, ds.$$

Todėl atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį galima apibrėžti taip:

$$v(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{-\lambda_1 s}\, ds + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{-\lambda_2 s}\, ds$$

Tarkime, funkcija q yra aprėžta, t.y. $\max |q(x)| \le M$. Imkime $x_1 = x_2 = \infty$, kai $\lambda_1 > 0$, $x_1 = x_2 = -\infty$, kai $\lambda_2 < 0$, $x_1 = -\infty, x_2 = \infty$, kai $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Tada

$$|v(x)| \le \Big(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \Big) \frac{M}{|\lambda_2 - \lambda_1|}.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad ne visoms x reikšmėms funkcija q gali būti apibrėžta. Šiuo atveju ją reikia pratęsti ir pasirūpinti, kad integralai

$$\int q(s) e^{-\lambda_1 s}\, ds, \qquad \int q(s) e^{-\lambda_2 s}\, ds$$

su atitinkamais rėžiais konverguotų.

2. Tegu $\lambda_1 = \lambda_2 = -a, a^2 = b$ ir $a \ne 0$. Tada $\varphi_1 = e^{-ax}$ yra (3.15) homogeninės lygties sprendinys. Kitą tiesiškai nepriklausomą šios lygties sprendinį galima ieškoti pavidalu $\varphi_2 = c(x) e^{-ax}$, kur c – nežimoma funkcija. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (3.15) lygtį ieškomai funkcijai c gausime lygtį $c'' = 0$. Suintegravę šią lygtį randame jos sprendinį $c(x) = x$. Taigi kitas tiesiškai nepriklausomas (3.15) lygties sprendinys $\varphi_2 = x e^{-ax}$. Sprendinių sistemos φ_1, φ_2 Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-ax} & x e^{-ax} \\ -a e^{-ax} & e^{-ax} - a x e^{-ax} \end{vmatrix} = e^{-2ax} \ne 0.$$

Todėl bendrasis (3.15) homogeninės lygties sprendinys

$$\varphi = c_1 e^{-ax} + c_2 x e^{-ax}.$$

Atskirasis (3.14) nehomogeninės lygties sprendinys

$$v(x) = e^{-ax} \int\limits_{x_1}^{x} (x-s) q(s) e^{as}\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų variavimo metodu. Taigi bendrasis (3.14) nehomogeninės lygties sprendinys

$$y = c_1 e^{-ax} + c_2 x e^{-ax} + v(x).$$

3. Tegu $\lambda_1 = -\alpha - i\beta, \lambda_2 = -\alpha + i\beta, \alpha = a, \beta = \sqrt{b - a^2}$. Tada

$$\varphi_1 = e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x),$$

$$\varphi_2 = e^{-(\alpha-i\beta)x} = e^{-\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$

yra du kompleksiškai jungtiniai (3.15) lygties sprendiniai. Kadangi pastarosios lygties koeficientai yra realūs, tai sprendinių z_1, z_2 realioji ir menamoji dalys

$$\varphi_1 = e^{-\alpha x} \cos\beta x, \quad \varphi_2 = e^{-\alpha x} \sin\beta x$$

yra relūs (3.15) lygties sprendiniai. Funkcijų sistemos φ_1, φ_2 Vronskio determinantas

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-\alpha x}\cos\beta x & e^{-\alpha x}\sin\beta x \\ (e^{-\alpha x}\cos\beta x)' & (e^{-\alpha x}\sin\beta x)' \end{vmatrix} = \beta e^{-2\alpha x} \neq 0.$$

Todėl (3.15) sistemos bendrasis sprendinys

$$\varphi = c_1 e^{-\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{-\alpha x} \sin\beta x.$$

Atskirasis (3.14) lygties sprendinys

$$v(x) = \frac{\sin\beta x}{\beta} \int\limits_{x_2}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \cos\beta s\, ds - \frac{\cos\beta x}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \sin\beta s\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų variavimo metodu. Paėmę $x_1 = x_2$ perrašysime pastarąją formulę taip:

$$v(x) = \frac{1}{\beta} \int\limits_{x_1}^{x} q(s) e^{\alpha(s-x)} \sin(x-s)\beta\, ds.$$

4. Tegu $a = 0, \beta = \sqrt{b}, b > 0,\ \lambda_1 = -i\beta,\ \lambda_2 = +i\beta$. Šiuo atveju (3.14) lygtį galime perrašyti taip:

$$y'' + \beta^2 y = q(x). \tag{3.16}$$

Homogeninė lygtis

$$y'' + \beta^2 y = 0 \tag{3.17}$$

turi du kompleksiškai jungtinius sprendinius

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x, \quad e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x.$$

Šių sprendinių realioji ir menamoji dalys

$$\varphi_1 = \cos\beta x, \quad \varphi_2 = \sin\beta x$$

yra realūs tiesiškai nepriklausomi (3.17) homogeninės lygties sprendiniai. Todėl bendrasis(3.17) homogeninės lygties sprendinys

$$\varphi = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x.$$

Atskirasis (3.16) lygties sprendinys

$$v(x) = -\frac{\cos\beta x}{\beta}\int_{x_1}^{x} q(s)\sin\beta s\, ds + \frac{\sin\beta x}{\beta}\int_{x_2}^{x} q(s)\cos\beta s\, ds.$$

Jį galima rasti konstantų variavimo metodu. Bendrasis (3.16) lygties sprendinys

$$y = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x + v(x) = c\sin(\beta x + \tau) + v(x);$$

čia $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tau = \operatorname{arcctg}(c_2/c_1)$. Jis yra aprėžtas tada ir tik tada, kai yra aprėžtas atskirasis (3.16) lygies sprendinys v.

P a v y z d y s. Nagrinėsime lygtį

$$y'' + \beta^2 y = A\sin\alpha x, \quad A > 0.$$

Išskirsime du atvejus:

1. $\alpha \neq \beta$.
2. $\alpha = \beta$.

Pirmuoju atveju atskirasis sprendinys

$$v(x) = \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2}\sin\alpha x.$$

Bendrasis sprendinys

$$y = c_1\sin\beta x + c_2\cos\beta x + \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2}\sin\alpha x = c\sin(\beta x + \tau) + \frac{A}{\beta^2 - \alpha^2}\sin\alpha x;$$

čia $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\tau = \operatorname{arctg}(c_2/c_1)$. Taigi pirmuoju atveju visi sprendiniai yra aprėžti.

Antruoju atveju atskirasis sprendinys

$$v(x) = -\frac{Ax}{2\beta} \cos \beta x.$$

Bendrasis sprendinys

$$y = c \sin(\beta x + \tau) - \frac{Ax}{2\beta} \cos \beta x.$$

Taigi antruoju atveju visi sprendiniai yra neaprėžti ir turime rezonansą.

Tuo atveju, kai (3.14) lygties dešinioji pusė q turi specialų pavidalą, jos atskirąjį sprendinį galima rasti žymiai lengviau. Tiksliau neapibrėžtinių koeficientų metodų. Metodo esmė yra ta, kad pagal lygties dešiniosios pusės išraišką atskirąjį sprendinį ieškome specialiu (priklausančių nuo lygties dešiniosios pusės) pavidalu su neapibrėžtiniais koeficientais. Vėliau taip apibrėžtą sprendinį įstatome į lygtį ir iš gautos tapatybės randame neapibrėžtinius koeficientus. Išskirsime funkcijos q kelis specialius pavidalus:

1. $q(x) = e^{\alpha x} P_n(x),\ P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k,\ \alpha, p_k \in \mathbb{R}, \forall k = 0, 1, \ldots, n.$
2. $q(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
3. $q(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Pirmuoju atveju (3.14) lygties atskirąjį sprendinį ieškome pavidalu:

$$v(x) = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),\ Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R};$$

čia skaičius r gali įgyti reikšmes $0, 1$ arba 2 priklausomai nuo tuo ar skaičius α yra charakteristinės lygties $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ šaknis ir koks jos kartotinumas. Tiksliau, jeigu skaičius α nėra charakteristinės lygties $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ šaknis, tai imame $r = 0$, jeigu α yra charakteristinės lygties pirmo kartotinumo šaknis, tai imame $r = 1$, o kai antro kartotinumo šaknis, tai imame $r = 2$.

Antruoju ir trečiuoju atveju (3.14) lygties atskirąjį sprendinį ieškome pavidalu:

$$v(x) = x^r e^{\alpha x} \big(Q_n(x) \cos \beta x + G_n(x) \sin \beta x \big);$$

čia Q_n ir G_n yra n-tojo laipsnio polinomai, o skaičius r gali įgyti reikšmes 0 arba 1 priklausomai nuo to ar skaičius $\alpha + i\beta$ yra charakteristinės lygties šaknis.

P a v y z d ž i a i.

1. Rasime lygties

   $$y'' - 2y' + y = x - 4$$

   bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinka homogeninė lygtis

   $$y'' - 2y' + y = 0.$$

Charakteristinė lygtis
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
turi vieną šaknį $\lambda = 1$, kurios kartotinumas $r = 2$. Todėl $\varphi_1 = e^x$ yra homogeninės lygties sprendinys. Antras, tiesiškai nepriklausomas, šios lygties sprendinys $\varphi_2 = xe^x$ (žr. 97 pusl.). Taigi bendrasis homogeninės lygties sprendinys $\varphi = c_1e^x + c_2xe^x$. Nagrinėjamu atveju $\alpha = 0 \neq 1$. Todėl nehomogeninės lygties atskirojo sprendinio ieškome pavidalu $v = ax + b$; čia a ir b neapibrėžrtiniai koeficientai. Įstatę taip apibrėžtą funkciją v į nehomogeninę lygtį gausime tapatybę $ax + b - 2a = x - 4$. Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių randame $a = 1$, $b - 2a = -4 \Rightarrow b = -2$. Taigi atskirasis sprendinys $v = x - 2$, o bendrasis sprendinys $y = c_1e^x + c_2xe^x + x - 2$.

2. Rasime lygties
$$y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$$
bendrąjį sprendinį. Šią lygtį atitinka homogeninė lygtis
$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$
Charakteristinė lygtis
$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$
turi dvi kopleksiškai jungtines šaknis $\lambda_1 = 2 + i3$, $\lambda_2 = 2 - i3$. Todėl homogeninė lygtis turi du kompleksiškai jungtinius sprendinius
$$z_1 = e^{(2+i3)x} = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x),\ z_2 = e^{(2-i3)x} = e^{2x}(\cos 3x - i\sin 3x).$$
Šių sprendinių realioji ir menamoji dalys
$$\varphi_1 = e^{2x}\cos 3x, \quad \varphi_2 = e^{2x}\sin 3x$$
yra homogeninės lygties du tiesiškai nepriklausomi sprendiniai. Todėl bendrasis homogeninės lygties sprendinys
$$\varphi = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$$
Rasime atskirąjį nehomogeninės lygties sprendinį. Nagrinėjamu atveju $q(x) = e^{0\cdot x}(40\cos 3x + 0\sin 3x)$, $\alpha = 0, \beta = 3$. Be to, $0 + i3 \neq 2 \pm i3$. Todėl $r = 0$ ir atskirojo sprendinio ieškome pavidalu $y = a\cos 3x + b\sin 3x$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į nehomogeninę lygtį gausime tapatybę
$$(4a - 12b)\cos 3x = (12a + 4b)\sin 3x = 40\cos 3x.$$
Sulyginę koeficientus prie tiesiškai nepriklausomų funkcijų $\sin 3x$ ir $\cos 3x$ gausime dviejų algebrinių lygčių sistemą
$$\begin{cases} 4a - 12b = 40, \\ 12a + 4b = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą randanme $a = 1, b = -3$. Taigi atskirasis nehomogeninės lygties sprendinys $v = \cos 3x - 3\sin 3x$, o bendrasis sprendinys

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x.$$

P a s t a b a. Tegu y_1 ir y_2 yra atskirieji tiesinių nehomogeninių lygčių

$$\mathrm{L}(y) = q_1(x) \quad \text{ir} \quad \mathrm{L}(y) = q_2(x)$$

sprendiniai. Tada $y = y_1 + y_2$ yra atskirasis tiesinės nehomogeninės lygties

$$\mathrm{L}(y) = q_1(x) + q_2(x)$$

sprendinys. Iš tikrųjų,

$$\mathrm{L}(y) = \mathrm{L}(y_1 + y_2) = \mathrm{L}(y_1) + \mathrm{L}(y_2) = q_1(x) + q_2(x).$$

4 SKYRIUS

Diferencialinių lygčių sistemos

4.1 BENDROS SĄVOKOS

Tegu G yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ ir $f = \text{colon}(f_1, \ldots, f_n)$ tolydi funkcija apibrėžta srityje G. Nagrinėsime normaliąją diferencialinių lygčių sistemą

$$y' = f(x, y), \quad y = \text{colon}(y_1, \ldots, y_n),\; f = \text{colon}(f_1, \ldots, f_n). \tag{4.1}$$

Jeigu (4.1) sistemoje funkcija f tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo x, tai tokia sistema vadinama *autonomine*. Autonominę sistemą vektoriniu pavidalu galima užrašyti taip:

$$y' = f(y), \quad y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Bendru atveju (4.1) lygties sprendinys priklauso nuo n laisvų konstantų ir jį galima užrašyti taip:

$$y = \varphi(x, C), \quad C = (c_1, \ldots, c_n).$$

Norint iš jų išskirti kokį nors vieną reikia pareikalauti, kad sprendinys tenkintų kokią nors papildomą sąlygą. Dažniausiai tokia sąlyga apibrėžiama taip:

$$y(x_0) = y_0, \quad y_0 = \text{colon}(y_{10}, \ldots, y_{0n}). \tag{4.3}$$

Ši sąlyga yra vadinama *pradine* arba *Koši* sąlyga. Jeigu (4.1) lygtį nagrinėsime kartu su (4.3) sąlyga, tai tokį uždavinį vadinsime *pradiniu* arba *Koši uždaviniu*.

Tegu $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ yra (4.1) lygčių sistemos sprendinys. Tada funkcija φ srityje $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ apibrėžia kreivę

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \varphi(x),\, x \in \langle a, b\rangle\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

kuri yra vadinama šios sistemos *integraline kreive*. Be integralinės kreivės erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ sprendinys φ apibrėžia kreivę

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y = \varphi(x),\, x \in \langle a, b\rangle\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Taip apibrėžta kreivė, kartu su apėjimo kryptimi, vadinama *fazine trajektorija*, o erdvė $\mathbb{R}^n$ – *fazine erdve*. Taigi fazinė trajektorija yra integralinės kreivės projekcija lygiagrečiai x ašiai. Jeigu kokiame nors taške kertasi dvi integralinės kreivės ir šiame taške jų liestinių krypties koeficientai sutampa, tai šiame taške nėra Koši uždavinio sprendinio vienaties. Trjektorijos fazinėje erdvėje gali kirstis nepažeidiant šios savybės. Be to, trajektorija gali sutapti su tašku. Tokia trajektorija yra vadinama *pusiausvyros tašku* (kartais *ramybės tašku*). Kadangi pusiausvyros taškas yra pastovaus sprendinio trajektorija, tai taškas y yra pusiausvyros taškas tada ir tik tada, kai

$$f(x, y) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Jeigu (4.1) sistemoje funkcijos $f_1, \dots, f_n$ yra tiesinės kintamųjų $y_1, \dots, y_n$ atžvilgiu, tai tokia sistema vadinama pirmosios eilės *tiesinių diferencialinių lygčių sistema.* Bendruoju atveju pirmosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n &= q_1(x), \\ \vdots & \quad \vdots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n &= q_n(x). \end{cases}$$

arba matriciniu pavidalu

$$y' + A(x)y = q(x); \tag{4.4}$$

čia $A = \{a_{ij}\}$ – žinoma $n \times n$ eilės matrica, o $q = \mathrm{colon}(q_1, \dots, q_n)$ – žinomas vektorius stulpelis. Kai funkcija q yra lygi nuliui, tai sistema

$$y' + A(x)y = 0 \tag{4.5}$$

yra vadinama *homogenine*. Priešingu atveju – *nehomogenine*.

Normaliajai diferencialinių lygčių sistemai išlieka teisingi visi teiginiai apie sprendinių egzistavimą, vienatį ir pratęsimą, kurie buvo suformuluoti 2.1 skyrelyje vienos lygties atveju. Tiksliau yra teisingi tokie teiginiai.

4.1 teorema (Egzistavimo ir vienaties). *Tegu funkcija $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ yra tolydi ir kintamųjų y atžvilgiu lokaliai srityje G tenkina Lipšico sąlygą. Tada*

1. *Bet kokiam pradiniam taškui $(x_0, y_0) \in G$ egzistuoja (4.1) lygties sprendinys $y = y(x)$, apibrėžtas pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje ir tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$.*

2. *Sritis G yra vienaties sritis.*

4.2 teorema. *Tarkime, (4.4) lygtyje matricos A elementai a_{ij} ir vektoriaus q elementai q_j yra tolydžios intervale (a, b) funkcijos. Tada*

1. *Bet kokiam pradiniam taškui (x_0, y_0), $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ egzistuoja (4.4) sistemos sprendinys $y = y(x)$, apibrėžtas visame intervale (a, b) ir tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$.*

2. *Sritis $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ yra vienaties sritis.*

Tegu $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ yra (4.1) sistemos sprendinys. Sakysime, kad jį galima pratęsti į dešinę, jeigu egzistuoja šios sisitemos sprendinys $y = \psi(x)$ apibrėžtas intervale $\langle a, b_1 \rangle$, $b_1 > b$, kuris intervale $\langle a, b \rangle$ sutampa su sprendiniu $y = \varphi(x)$. Analogiškai apibrėžiamas sprendinio pratęsimas į kairę.

4.3 teorema. *Tegu $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b)$ yra (4.1) sistemos sprendinys. Jį galima pratęsti į dešinę tada ir tik tada, kai egzistuoja riba*

$$\lim_{x\to b-0}\varphi(x) = y^* \quad \text{ir} \quad (b, y^*) \in G.$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime (4.1) sistemos sprendinys $y = \varphi(x)$ apibrėžtas intervale I yra *nepratęsiamas*, o intervalas I *maksimalus* sprendinio egzistavimo intervalas, jeigu jo negalima pratęsti nei į dešinę, nei į kairę už intervalo I.

4.4 teorema. *Normaliosios (4.1) sistemos sprendinys $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ yra nepratęsiamas tada ir tik tada, kai arba $b = \infty$ ($a = -\infty$), arba bet kokiam kompaktui $K \subset G$ galima nurodyti tokį skaičių $\delta > 0$, kad taškas $(x, \varphi(x)) \in G/K$, kai $x \in (b-\delta, b)$ ($x \in (a, a+\delta)$).*

Jeigu yra žinoma, kad autonominėms sistemoms nepratęsiamąjį sprendinį atitinkanti trajektorija nepalieka kokio nors kompakto, tai tokio sprendinio apibrėžimo sritis yra visa realių skaičių tiesė. Tiksliau yra teisinga teorema.

4.5 teorema. *Tegu K yra kompaktas srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ir $y = \varphi(x)$ yra (4.2) autonominės sistemos sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale (a,b). Tada, jeigu sprendinį $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ apibrėžianti trajektorija γ nepalieka kompakto K, tai $(a,b) = \mathbb{R}$.*

$\triangleleft$ Tegu $y = \varphi(x)$ yra autonominės sistemos sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale (a,b) ir $Q = K \times (a,b)$ yra cilindras erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$. Reikia įrodyti, kad $(a,b) = \mathbb{R}$. Tarkime priešingai, $(a,b) \neq \mathbb{R}$. Pagal teoremos sąlygą integralinė kreivė $\{(x,y) : y = \varphi(x),\ x \in (a,b)\}$ nepalieka cilindro Q per jo šoninį paviršių. Todėl ji pasiekia cilindrą jo apatiniame ir viršutiniame pagrinduose: $x = a$ ir $x = b$. Tai rieškia, kad taškuose $x = a$ ir $x = b$ funkcija φ yra apibrėžta. Todėl sprendinį $y = \varphi(x)$ galima pratęsti į intervalo (a,b) išorę. Tačiau tai prieštarauja tam, kad sprendinys $y = \varphi(x)$ yra apibrėžtas maksimaliame intervale (a,b). Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga ir $(a,b) = \mathbb{R}$. $\triangleright$

P a s t a b a. Įrodant šią teoremą pasinaudojome tik tuo, kad kiekvienam taškui (x_0, y_0), $y_0 \in \Omega$, egzistuoja Koši uždavinio

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0$$

sprendinys, apibrėžtas kokioje nors taško x_0 aplinkoje $|x_0| < \delta$. Todėl iš funkcijos f pakanka reikalauti, kad $f \in \mathrm{C}(\Omega)$. Jeigu (4.5) teoremos sąlygos nėra patenkintos, tačiau funkcija f tenkina Lipšico sąlygą srityje Ω, tai (žr. 2.4) teoremą, galima įrodyti, kad bet kuris autonominės sistemos sprendinys $y = \varphi(x)$ yra aprėžtas ir jį galima pratęsti į visą realių skaičių ašį.

Iš kitų sistemų autonominė sistema išsiskiria viena svarbia savybe.

4.6 teorema. *Tegu $y = \varphi(x), x \in (a,b)$ yra autonominės sistemos sprendinys. Tada $y = \psi(x) = \varphi(x+c), x \in (a-c, b-c), c \in \mathbb{R}$, taip pat yra šios sistemos sprendinys.*

◁ Pagal funkcijos ψ apibrėžimą

$$\psi'(x) = \varphi\prime(x + c) = f(\varphi(x + c)) = f(\psi(x)).$$

Taigi integralinė kreivė, apibrėžiama lygtimi $y = \varphi(x)$, gaunama iš integralinės kreivės, apibrėžiamos lygtimi $y = \psi(x)$, poslinkiu teigiama x ašies kryptimi dydžiu c. ▷

I š v a d o s:

1. Tarkime, Ω yra vienaties sritis ir $y = y(x, x_0, y_0)$ yra autonominės sistemos

$$y' = f(y)$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(x_0) = y_0$. Tada $\forall x$ iš maksimalaus sprendinio egzistavimo intervalo yra teisinga lygybė

$$y(x + c, x_0 + c, y_0) = y(x, x_0, y_0). \tag{4.6}$$

Iš tikrųjų, kai $x = x_0$, reiškiniai kairėje ir dešinėje sutampa su y_0. Kadangi Ω yra vienaties sritis, tai jie sutampa $\forall x$ iš jų apibrėžimo intervalo.

2. Imkime (4.6) formulėje $c = -x_0$. Tada autonominės sistemos sprendinį galima užrašyti taip:

$$y(x, x_0, y_0) = y(x - x_0, 0, y_0) := \varphi(x - x_0, y_0).$$

Iš čia išplaukia, kad autonominės sistemos sprendinys priklauso ne nuo nepriklausomo kintamojo x, pradinės reikšmės x_0 ir pradinio taško y_0, o nuo skirtumo $x - x_0$ ir pradinio taško y_0. Geometriškai šią savybę galima interpretuoti taip. Jeigu dvi autonominės sistemos trajektorijos turi bendrą tašką, tai jos sutampa.

4.2 TIESINĖS HOMOGENINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Nagrinėsime tiesinių homogeninių lygčių sistemą

$$y' = A(x)y. \tag{4.7}$$

Jos sprendiniai turi svarbių išskirtinių savybių. Tiesinės homogeninės lygčių sistemos sprendinių aibė yra tisinė erdvė, t.y.

1. Jeigu funkcija φ yra (4.7) sitemos sprendinys, tai funkcija $c\varphi$ taip pat yra šios sistemos sprendinys, c – skaliarinė konstanta;
2. Jeigu funkcijos φ ir ψ yra (4.7) sitemos sprendiniai, tai funkcija $\varphi+\psi$ taip pat yra šios sistemos sprendinys.

Iš tikrųjų, tegu φ ir ψ yra (4.7) sitemos sprendiniai. Tada

$$\frac{d}{dx}(c\varphi) = c\varphi' = cA(x)\varphi = A(x)c\varphi,$$

$$\frac{d}{dx}(\varphi+\psi) = \varphi' + \psi' = A(x)\varphi + A(x)\psi = A(x)(\varphi+\psi).$$

I š v a d o s:

1. Jeigu $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ yra (4.7) sistemos sprendiniai, tai jų tiesinis darinys
$$c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m$$
taip pat yra (4.7) sistemos sprendinys.
2. Tegu $x = \varphi + i\psi$ yra kompleksinis (4.7) lygčių sistemos su realiais koeficientais $a_{kj}, k, j = 1, \dots, n$ sprendinys. Tada
$$\varphi' + i\psi' = A(x)\varphi + iA(x)\psi.$$
Sulyginę realią ir menamą dalis, gausime
$$\varphi' = A(x)\varphi, \quad \psi' = A(x)\psi.$$
Taigi kompleksinio sprendinio realioji ir menamoji dalys yra (4.7) lygčių sistemos sprendiniai.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, vektorinės funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_m : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ yra tiesiškai nepriklausomos, jeigu lygybė

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

yra galima tik tuo atveju, kai $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Priešingu atveju sakysime, kad vektorinės funkcijos $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ yra tiesiškai priklausomos.

Vektorinės funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ yra tiesiškai priklausomos, jeigu egzistuoja konstantos $c_1, \ldots, c_m$, iš kurių bent viena nelygi nuliui, tokios, kad

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Jeigu vektorinės funkcijos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ yra tiesiškai priklausomos, tai kiekviename fiksuotame taške $x_0 \in (a, b)$ vektoriai $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi. Atvirštinis teiginys yra neteisingas. Tačiau, jeigu vektoriai $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ yra (4.7) sistemos sprendiniai ir jie yra tiesiškai priklausomi kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$, tai jie yra tiesiškai priklausomi visame intervale (a, b). Tiksliau yra teisinga teorema.

4.7 teorema. *Tegu $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ yra (4.7) sistemos sprendiniai ir kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$ vektoriai $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi, t.y.*

$$c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_m\varphi_m(x_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \neq 0.$$

Tada

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

◁ Funkcija

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x)$$

yra (4.7) sistemos sprendinys. Be to, taške $x_0 \in (a, b)$ jis tenkina homogeninę pradinę sąlygą

$$\varphi(x_0) = c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_m\varphi_m(x_0) = 0.$$

Funkcija $\psi(x) \equiv 0$ taip pat tenkina (4.7) sistemą ir tą pačią homogeninę pradinę sąlygą. Pagal sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą šie sprendiniai sutampa, t.y. $\varphi(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. ▷

4.8 teorema. *Bet kokie n tiesiškai nepriklausomi (4.7) sistemos sprendiniai yra šios sistemos sprendinių erdvės bazė.*

◁ Tegu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – n tiesiškai nepriklausomi (4.7) sistemos sprendiniai. Tada vektoriai $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$ yra tiesiškai nepriklausomi, $\forall x_0 \in (a, b)$. Todėl jie yra erdvės $\mathbb{R}^n$ bazė.

Laisvai pasirenkame (4.7) sistemos sprendinį ψ. Vektorius $\psi(x_0) \in \mathbb{R}^n$. Išreiškę jį per bazinius vektorius $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$, gausime

$$\psi(x_0) = c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n(x_0).$$

Iš šios lygybės matome, kad vektoriai $\psi(x_0), \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi taške x_0. Pagal 4.7 teoremą jie yra tiesiškai priklausomi visame intervale (a, b) (su tais pačiais koeficientais), t.y.

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).▷$$

I š v a d a. Bet kokie (4.7) sistemos sprendiniai $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra šios sistemos sprendinių erdvės bazė, jeigu kokiame nors taške $x_0 \in (a, b)$ vektoriai $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$ yra tiesiškai nepriklausomi.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad (4.7) sistemos sprendinių erdvės bazė egzistuoja. Vektorius $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ galima apibrėžti kaip Koši uždavinių

$$\begin{array}{rcll} y' & = & A(x)y, & y(x_0) = (1, 0, \ldots, 0), \\ y' & = & A(x)y, & y(x_0) = (0, 1, \ldots, 0), \\ \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots & \quad\quad \vdots \\ y' & = & A(x)y, & y(x_0) = (0, \ldots, 0, 1); \end{array}$$

sprendinius.

Sprendinių erdvės bazė dažnai yra vadinama *fundamentaliaja sprendinių sistema*. Tegu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ yra (4.7) sistemos fundamentalioji sprendinių sistema. Tada funkcija

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \tag{4.8}$$

su laisvais koeficientais $c_1, \ldots, c_n$ yra (4.7) sistemos bendrasis sprendinys. Iš tikrųjų, funkcija φ, apibrėžta (4.8) formule, yra (4.7) sistemos sprendinys su kiekvienu konstantų rinkiniu $c_1, \ldots, c_n$. Atvirkščiai, tegu $y = \varphi(x)$ yra koks nors (4.7) sistemos sprendinys tenkinantis pradinę sąlygą $\varphi(x_0) = y_0$. Tada tiesinė algebrinių lygčių sistema

$$y_0 = c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n(x_0)$$

turi vienintelį netrivialų sprendinį $c_1^0, \ldots, c_n^0$. Funkcija

$$\varphi_0(x) = c_1^0\varphi_1(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x)$$

taip pat yra (4.7) sistemos sprendinys tenkinantis tą pačią pradinę sąlygą. Pagal sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą $\varphi_0(x) = \varphi(x)$. Taigi funkciją φ galima išreikšti (4.8) formule.

Tegu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – fundamentalioji sprendinių sistema, Φ – iš šių vektorių sudaryta matrica. Matrica Φ vadinama *fundamentaliaja matrica*. Pažymėję $C = \mathrm{colon}(c_1, \ldots, c_n)$ bendrąjį (4.7) sistemos sprendinį galime užrašyti taip:

$$\varphi(x) = \Phi(x)C. \tag{4.9}$$

Matricos Φ determinantas

$$W(x) = \det\Phi(x)$$

yra vadinamas funkcijų sistemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *Vronskio determinantu*.

4.9 teorema. *Yra ekvivalentūs tokie trys teiginiai:*

1. $W(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$;
2. $W(x_0) = 0$, *kokiame nors taške* $x_0 \in (a, b)$;
3. *Sprendiniai* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *– tiesiškai priklausomi.*

◁ Įrodysime, kad $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Implikacija $1 \Rightarrow 2$ yra akivaizdi. Tarkime, kad $W(x_0) = 0, x_0 \in (a,b)$. Tada vektoriai $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ yra tiesiškai priklausomi. Tačiau tada pagal 4.7 teoremą sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomi. Taigi iš $2 \Rightarrow 3$. Tarkime, sprendiniai $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra tiesiškai priklausomi. Tada vektoriai $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in (a,b)$ yra tiesiškai priklausomi ir iš jų sudarytas determinantas yra lygus nuliui. ▷

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – fundamentalioji sprendinių sistema, $W = \det \Phi$ – ją atitinkantis Vronskio determinantas, $\varphi_k = \operatorname{colon}(\varphi_{k1}, \dots, \varphi_{kn})$, $k = 1, \dots, n$. Tada

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1k}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nk}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Jo išvestinė

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi'_{1k}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi'_{nk}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x). \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

Kiekviena iš funkcijų φ_k yra (4.7) sistemos sprendinys. Todėl

$$\varphi'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{ij}$$

ir

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{1j}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{nj}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Išskleidę determinantą po sumos ženklu, gausime sumą determinantų su koeficientais a_{kj}, iš kurių vienas prie koeficiento a_{kk} lygus $W(x)$, o kiti lygūs nuliui. Taigi

$$W'(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\Big) W(x).$$

Ši lygtis yra pirmos eilės tiesinė homogeninė diferencialinė lygtis. Jos sprendinys

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x)\, dx \right\}. \tag{4.11}$$

Pastaroji formulė vadinama *Liuvilio* formule.

4.3 NEHOMOGENINĖS TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Tegu $\psi = \mathrm{colon}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ yra koks nors tiesinės nehomogeninės lygčių sistemos

$$y' = A(x)y + q(x) \tag{4.12}$$

sprendinys. Padarę keitinį $y = \varphi + \psi$, gausime tiesinę homogeninę lygčių sistemą

$$\varphi' = A(x)\varphi. \tag{4.13}$$

Tarkime $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ yra šios sistemos fundamentalioji sprendinių sistema. Tada jos bendrasis sprendinys

$$\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

Kartu

$$y = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n + \psi \tag{4.14}$$

yra (4.12) sistemos sprendinys. Įrodysime, kad (4.14) formulė apibrėžia bendrąjį (4.12) sistemos sprendinį juostoje $x \in (a, b)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Akivaizdu, kad kiekvienam konstantų rinkiniui $c_1, \dots, c_n$ (4.14) formulė apibrėžia (4.12) sistemos sprendinį. Tegu $y = y(x)$ yra Koši uždavinio

$$y' = A(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

sprendinys. Tiesinė algebrinių lygčių sistema

$$c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_n\varphi_n(x_0) + \psi(x_0) = y_0$$

turi vienintelį sprendinį, nes jos determinantas nelygus nuliui. Pažymėkime jį $c_1^0, \dots, c_n^0$. Tada

$$y = y(x) \quad \text{ir} \quad y = c_1^0\varphi_1(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x) + \psi(x)$$

yra to paties Koši uždavinio sprendiniai. Pagal Koši uždavinio sprendinių vienaties teoremą jie sutampa. Taigi kiekvieną Koši uždavinio sprendinį $y = y(x)$ galima išreikšti (4.14) formule.

I š v a d a. Bendrasis (4.12) sistemos sprendinys

$$y = \varphi + \psi;$$

čia ψ – koks nors atskirasis (4.12) sistemos sprendinys, o φ – bendrasis (4.13) sistemos sprendinys.

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – fundamentalioji (4.13) sistemos sprendinių sistema, Φ – iš jų sudaryta fundamentalioji matrica. Rasime atskirąjį (4.12) sistemos sprendinį. Jį ieškosime konstantų variavimo metodu.

Apibrėžkime funkciją

$$\psi(x) = \Phi(x)c(x);$$

čia $c(x) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ – nežinoma vektorinė funkcija. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (4.12) sistemą, gausime

$$\Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)\Phi(x)c(x) + q(x).$$

Fundamentalioji matrica Φ tenkina homogeninę diferencialinių lygčių sistemą, t.y.

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x).$$

Todėl vektorinė funkcija c turi tenkinti sistemą

$$\Phi(x)c'(x) = q(x).$$

Šios sistemos Vronskio determinantas

$$W(x) = \det \Phi(x) \neq 0.$$

Todėl ją galima išspręsti c' atžvilgiu, t.y.

$$c'(x) = \Phi^{-1}(x)q(x).$$

Ši lygtis turi sprendinį

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$$

Taigi atskirasis (4.12) sistemos sprendinys

$$\psi(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{4.15}$$

Bendrasis (4.13) sistemos sprendinys

$$y = \Phi(x)c;$$

čia $c \in \mathbb{R}^n$ – pastovus vektorius. Todėl (4.12) sistemos bendrasis sprendinys

$$y = \Phi(x)c + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{4.16}$$

4.4 TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU PASTOVIAIS REALIAIS KOEFICIENTAIS

Nagrinėsime tiesinę diferencialinių lygčių sistemą

$$y' = Ay + q(x), \tag{4.17}$$

kurioje matricos A elementai a_{ij} yra pastovūs realūs skaičiai. Šios sistemos sprendimas susiveda į homogeninės sistemos

$$y' = Ay \tag{4.18}$$

sprendimą. Iš tikrųjų, jeigu žinome kokią nors (4.18) sistemos fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai konstantų variavimo metodu galime rasti (4.17) sistemos atskirąjį sprendinį. Kartu galime rasti ir jos bendrąjį sprendinį. Todėl toliau nagrinėsime (4.18) sistemą.

Atskirojo (4.18) sistemos sprendinio ieškosime pavidalu

$$y = be^{\lambda x}, \quad b = \mathrm{colon}(b_1, \dots, b_n).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (4.18) sistemą, gausime

$$\lambda be^{\lambda x} = Abe^{\lambda x} \iff (A - \lambda E)be^{\lambda x} = 0.$$

Tai yra tiesinė algebrinė n lygčių sistema $b_1, \dots, b_n$ atžvilgiu. Ji turi netrivialų sprendinį[1] tada ir tik tada, kai jos determinantas

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ši lygtis vadinama *charakteristine lygtimi* (4.18) sistemai. Parametro λ atžvilgiu kairioji charakteristinės lygties pusė yra n-ojo laipsnio polinomas. Jis vadinamas *charakteristiniu polinomu*. Iš tiesinės algebros yra žinoma, kad n-ojo laipsnio polinomas turi lygiai n šaknų. Tegu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra charakteristinio polinomo šaknys. Atskirai išnagrinėsime tris atvejus:

1. Šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos ir realios.
2. Šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos, tačiau tarp jų yra kompleksinės.
3. Kai kurios iš šaknų $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra kartotinės.

Iš pradžių išnagrinėsime atvejį, kai šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos ir realios. Šiuo atveju vektorinės funkcijos

$$\varphi_k = b_k e^{\lambda_k x}, \quad b_k = \mathrm{colon}(b_{k1}, \dots, b_{kn}), \quad k = 1, \dots, n \tag{4.19}$$

yra (4.18) sistemos sprendiniai, o vektoriai b_k yra algebrinių lygčių sistemos $(A - \lambda_k E)b = 0$ sprendiniai. Be to, funkcijos φ_k, $k = 1, 2, \dots, n$ yra tiesiškai

[1] Tokių sprendinių yra be galo daug. Tiksliau, jeigu vektorius $be^{\lambda x}$ yra (4.18) sistemos sprendinys, tai vektorius $kbe^{\lambda x}$, $k \in \mathbb{R}$ taip pat yra šios sistemos sprendinys.

nepriklausomos (patikrinkite). Todėl taip apibrėžtos funkcijos φ_k yra fundamentalioji sprendinių sistema.

Išnagrinėsime antrąjį atvejį. Tarkime, šaknys $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra skirtingos, tačiau tarp jų yra kompleksinės. Tegu $\sigma = \alpha + i\beta$ yra viena iš kompleksinių šaknų. Tada $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$ taip pat yra kompleksinė šaknis, t.y. kompleksinės šaknys įeina poromis. Šaknį σ atitinka algebrinių lygčių sistema

$$(A - \sigma E)b = 0.$$

Kadangi visos šaknys yra skirtingos, tai ši sitema turi vienintelį, daugiklio tikslumu, netrivialų kompleksinį sprendinį $b = u + iv$ ir

$$be^{\sigma x} = (u + iv)e^{(\alpha + i\beta)x} = (u + iv)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$

yra (4.18) sistemos kompleksinis sprendinys[1] Atskyrę jame realią ir menamą dalis, gausime du realius (4.18) sistemos sprendinius

$$(u\cos\beta x - v\sin\beta x)e^{\alpha x}, \quad (v\cos\beta x + u\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Lengvai galima įsitikinti, kad kompleksiškai jungtinę šaknį $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$ atitinka ta pati realių sprendinių pora. Kartu kiekvieną kompleksiškai jungtinių šaknų porą atitinka du realūs sprendiniai, o skirtingas n šaknų atitinka lygiai n realių sprendinių. Be to, šie sprendiniai yra tiesiškai nepriklausomi. Norint tuo įsitikinti reikia grįžti nuo trigonometrinių prie rodiklinių funkcijų.

Išnagrinėsime trečiąjį atvejį. Tarkime, dalis šaknų $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra kartotinės. Jeigu kurios nors šaknies, pavyzdžiui λ_1, kartotinumas lygus vienetui, tai nepriklausomai nuo to kokios yra kitos šaknys, ją visada atitinka sprendinys $be^{\lambda x}$, $b = \text{colon}(b_1, \dots, b_n)$.

Tegu μ yra charakteristinio polinomo r kartotinumo šaknis. Tada matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad šią šaknį atitinka sprendinys

$$P_{r-1}(x)e^{\mu x},\ P_{r-1}(x) = \text{colon}(p_{1r-1}(x), \dots, p_{nr-1}(x));$$

čia $p_{1r-1}(x), \dots, p_{kr-1}(x)$ yra $s \le r - 1$ laipsnio polinomai, turintis visumoje lygiai r laisvų koeficientų.

Tegu μ yra charakteristinio polinomo r karotinumo kompleksinė šaknis. Tada jungtinė šaknis $\bar{\mu}$ taip pat yra r kartotinumo šaknis. Šaknį μ atitinka kompleksinis sprendinys $P_{k-1}(x)e^{\mu x}$ su r kompleksinių laisvų konstantų. Atskirę jame realią ir menamą dalis, gausime porą realių sprendinių. Kiekviename iš jų yra r laisvų konstantų.

Taigi kiekvieną realią charakteristinio polinomo r kartotinumo šaknį atitinka sprendinys su r laisvų konstantų. Kiekvieną kompleksinių r kartotinumo šaknų porą atitinka atitinka realus sprendinys su $2r$ laisvų konstantų. Visumą

[1] Kompleksinė funkcija $x = y + iz$ yra (4.18) sistemos sprendinys, jeigu

$$y' + iz' = Ay + iAz.$$

Tuo atveju, kai matricos A koeficientai yra realūs, kompleksinio sprendinio realioji ir menamoji dalys taip pat yra (4.18) sistemos sprendiniai.

charakteristinio polinomo šaknų atitinka sprendinys su n laisvų konstantų. Iš jo galima išskirti lygiai n realių, teisiškai nepriklausomų sprendinių, t.y. galime sukonstruoti fundamentaliąją sprendinių sistemą. Kartu galime rasti bendrąjį homogeninės lygties sprendinį.

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} y,$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

šaknys $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ yra realios ir skirtingos. Todėl atskirus nagrinėjamos sistemos sprendinius ieškome pavidalu:

$$\varphi_1 = \mathrm{colon}(b_1, b_2)e^{-x}, \quad \varphi_2 = \mathrm{colon}(d_1, d_2)e^{3x}.$$

Įstatę pirmąjį sprendinį į sistemą gausime algebrinę homogeninę dviejų lygčių sitemą

$$\begin{cases} -b_1 = b_1 - b_2, \\ -b_2 = -4b_1 + b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b_1 - b_2 = 0, \\ -4b_1 + 2b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ gausime atskirąjį sprendinį $\varphi_1 = \mathrm{colon}(1, 2)e^{-x}$. Įstatę į nagrinėjamą sistemą sprendinį φ_2 gausime sistemą

$$\begin{cases} 3d_1 = d_1 - d_2, \\ 3d_2 = -4d_1 + d_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2d_1 + d_2 = 0, \\ 4d_1 + 2d_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $d_1 = 1$, $d_2 = -2$ rasime atskirąjį sprendinį $\varphi_2 = \mathrm{colon}(1, -2)e^{3x}$. Taigi bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = \begin{pmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{3x} \\ 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

2. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 3y_2 + y_3, \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} y,$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2, y_3)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

šaknys $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, $\lambda_3 = 1 - 2i$. Šaknį λ_1 atitinkantį atskirąjį sprendinį galime ieškoti pavidalu $\varphi_1 = \mathrm{colon}(b_1, b_2, b_3)e^x$. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_1 = b_1 + b_2, \\ b_2 = -b_1 + b_2 - b_3 \\ b_3 = +3b_2 + b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} b_2 = 0, \\ -b_1 - b_3 = 0, \\ 3b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$ gausime $b_3 = -1$. Taigi atskirasis sprendinys $\varphi_1 = \mathrm{colon}(1, 0, -1)e^x$. Šaknį λ_2 atitinka kompleksinis sprendinys $\tilde{\varphi} = \mathrm{colon}(d_1, d_2, d_3)e^{(1+2i)x}$ su kompleksinėm laisvom konstantom d_1, d_2, d_3. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} (1+2i)d_1 = d_1 + d_2, \\ (1+2i)d_2 = -d_1 + d_2 - d_3 \\ (1+2i)d_3 = +3d_2 + d_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2id_1 = d_2, \\ 2id_2 = -d_1 - d_3, \\ 2id_3 = 3d_2. \end{cases}$$

kintamųjų d_1, d_2, d_3 atžvilgiu. Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $d_2 = 2i$ randame: $d_1 = 1$, $d_3 = 3$. Todėl kompleksinis sprendinys

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{colon}(1, 2i, 3)e^{(1+2i)x}.$$

Atskyrę jame realią ir menamą dalis gausime du realius sprendinius

$$\varphi_1 = \mathrm{colon}(\cos 2x, -2\sin 2x, 3\cos 2x)e^x,$$
$$\varphi_2 = \mathrm{colon}(\sin 2x, 2\cos 2x, 3\sin 2x)e^x.$$

Kompleksinę šaknį λ_3 atitinka ta pati realių sprendinių pora. Taigi bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 = e^x \begin{pmatrix} c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x \\ -2c_2\sin 2x2x + 2c_3\cos 2x \\ -c_1 + 3c_2\cos 2x + 3c_3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

3. Rasime sistemos

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_2 + 2y_3, \end{cases} \iff y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} y,$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2, y_3)$ bendrąjį sprendinį. Charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

šaknys $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Šaknį λ_1 atitinkantį atskirąjį sprendinį galime ieškoti pavidalu $\varphi_1 = \operatorname{colon}(b_1, b_2, b_3)e^{2x}$. Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime algebrinę homogeninę trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2b_1 = b_1 - b_2 + b_3, \\ 2b_2 = b_1 + b_2 - b_3 \\ 2b_3 = -b_2 + 2b_3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 = 0, \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0, \\ b_2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi be galo daug sprendinių. Paėmę $b_1 = 1$ gausime $b_3 = 1$. Taigi atskirasis sprendinys $\varphi_1 = \operatorname{colon}(1, 0, 1)e^{2x}$. Antrosios charakteristinio polinomo šaknies kartotinumas lygus dviem. Todėl kitų atskirų sprendinių galima ieškoti pavidalu

$$\tilde{\varphi} = \operatorname{colon}(b_1 + b_2x, d_1 + d_2x, \gamma_1 + \gamma_2x)e^x.$$

Įstatę taip apibrėžtą sprendinį į lygtį gausime lygybes

$$\begin{cases} b_2 + (b_1 + b_2x) = (b_1 + b_2x) - (d_1 + d_2x) + (\gamma_1 + \gamma_2x), \\ d_2 + (d_1 + d_2x) = (b_1 + b_2x) + (d_1 + d_2x) - (\gamma_1 + \gamma_2x) \\ \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2x) = -(d_1 + d_2x) + 2(\gamma_1 + \gamma_2x). \end{cases}$$

Sutraukę panašius narius jas perrašysime taip:

$$\begin{cases} (\gamma_2 - d_2)x + \gamma_1 - d_1 - b_2 = 0, \\ (b_2 - \gamma_2)x + b_1 - \gamma_1 - d_2 = 0, \\ (\gamma_2 - d_2)x + \gamma_1 - d_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Šios lygybės bus teisingos su visais $x \in \mathbb{R}$ tada ir tik tada, kai

$$\begin{cases} \gamma_2 - d_2 = 0, \\ b_2 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_2 - d_2 = 0, \\ \gamma_1 - d_1 - b_2 = 0, \\ b_1 - \gamma_1 - d_2 = 0, \\ \gamma_1 - d_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Kadangi šaknies kartotinumas $r = 2$, tai pastarosios algebrinės šešių lygčių sistemos sprendinių aibė priklauso nuo dviejų laisvų konstantų. Išsprendę šią sistemą atžvilgiu konstantų b_2 ir γ_1 randame:

$$\gamma_2 = b_2,\ d_2 = b_2,\ d_1 = \gamma_1 - b_2,\ b_1 = \gamma_1 + b_2.$$

Tegu $b_2 = 1, \gamma_1 = 0$. Tada $\gamma_2 = 1$, $d_2 = 1$, $d_1 = -1$, $b_1 = 1$. Kai $b_2 = 0, \gamma_1 = 1$ turime $\gamma_2 = 0$, $d_2 = 0$, $d_1 = 1$, $b_1 = 1$. Taigi antrąją kartotinumo $r = 2$ šaknį atitinka du tiesiškai nepriklausomi sprendiniai

$$\varphi_2 = \operatorname{colon}(1 + x, -1 + x, x)e^x, \quad \varphi_3 = \operatorname{colon}(1, 1, 1)e^x,$$

o bendrasis nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} + c_2(1+x)e^x + c_3 e^x \\ c_2(x-1)e^x + c_3 e^x \\ c_1 e^{2x} + c_2 x e^x + c_3 e^x \end{pmatrix}.$$

P a s t a b a. Čia pateikta konstrukcija nesuteikia pilnos informacijos apie fundamentaliosios matricos struktūrą, kol fundamentalioji matrica nėra surasta. Žemiau pateiksime metodą, kurio pagalba galima sukonstruoti iš karto visą fundamentaliąją matricą, skirtingai nuo čia pateikto metodo, kuriame fundamentalioji matrica yra konstruojama palaipsniui.

Tegu A – pastovioji $n \times n$ eilės matrica. Tiesinė sistema $y' = Ay$ keitiniu $y = Qz, \quad \det Q \neq 0$, susiveda į sistemą $z' = Q^{-1}AQz$. Neišsigimusią matricą Q galima parikti taip, kad $Q^{-1}AQ = J$; čia J – *Žordano matrica*. Kartu tiesinę sistemą su pastoviais koeficientais galima suvesti į paprastesnę sistemą

$$z' = Jz. \tag{4.20}$$

Ši sistema vadinama *kanonine*. Tegu

$$J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\};$$

čia λ_k yra s_k kartotinumo charakteristinio polinomo $\det(A - \lambda E) = 0$ šaknis, o $J_{s_k}(\lambda_k)$ – Žordano langelis. Tada (4.20) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{array}{rcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 + z_2, \\ z_2' &=& \lambda_1 z_2 + z_3, \\ \vdots & & \vdots \\ z_{s_1}' &=& \lambda_1 z_{s_1}, \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n-s_m+1}' &=& \lambda_m z_{n-s_m+1} + z_{n-s_m+2}, \\ z_{n-s_m+2}' &=& \lambda_m z_{n-s_m+2} + z_{n-s_m+3}, \\ \vdots & & \vdots \\ z_n &=& \lambda_m z_n. \end{array}$$

Pastaroji sistema turi svarbų privalumą prieš bendro pavidalo sistemą. Visu pirma ji išsiskaido į m nepriklausomų sistemų. Kiekvieną iš šių sistemų galima suintegruoti atskirai. Bendrąjį sistemos sprendinį lengvai galima apibrėžti nuosekliai ją integruojant, pradedant nuo paskutinės sistemos lygties.

Antra – nagrinėjant įvairius diferencialinių lygčių teorijos klausimus, pakanka šiuos klausimus ištirti kanoninėms sistemoms. Pavyzdžiui, nagrinėjant įvairius uždavinius susijusius su antros eilės sistema

$$y' = Ay \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y_1' = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

pakanka išnagrinėti tokias tris sistemas

$$\begin{cases} y_1' = & \lambda_1 y_1, \\ y_2' = & \lambda_2 y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = & \lambda_1 y_1, \\ y_2' = & \lambda_1 y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = & \lambda_1 y_1 + y_2, \\ y_2' = & \lambda_1 y_2. \end{cases} \tag{4.21}$$

Kartu galime tvirtinti, kad tiesinės sistemos $y' = Ay$ su pastoviais koeficientais fundamentalioji matrica sutampa su viena iš matricų

$$Q\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0, \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0, \\ 0 & e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x}, \\ 0 & e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}.$$

4.5 KANONINIŲ SISTEMŲ PLOKŠTUMOJE FAZINIAI PORTRETAI

Tegu A yra antros eilės kvadratinė matrica ir J yra ją atitinkanti Žordano matrica. Tada tiesinę sistemą

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^2 \tag{4.22}$$

atitinka kanoninė sistema

$$y' = Jy, \quad y \in \mathbb{R}^2; \tag{4.23}$$

Ištirsime šios sistemos pusiausvyros taškų charakterį, priklausomai nuo charakteristinio polinomo šaknų λ_1, λ_2. Charakteristinę lygtį $\det(A - \lambda E) = 0$ galima užrayti taip:

$$\lambda^2 - (\mathrm{Sp}\, A)\lambda + \det A = 0;$$

čia $\mathrm{Sp}\, A = \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ii}$. Jos šaknys

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathrm{Sp}\, A \pm \sqrt{D}), \quad D = (\mathrm{Sp}\, A)^2 - 4 \det A.$$

Pagal Vijetos teoremą

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Sp}\, A, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A.$$

Panašių matricų[1] charakteristiniai polinomai sutampa. Todėl

$$\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, J = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det A = \det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Tegu matricos A tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra realios, skirtingos ir nelygios nuliui. Tada (4.23) sistemą (žr. (4.21) formulę) galima perrašyti taip:

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Eliminavę iš (4.24) lygčių kintamąjį x, gausime lygtį

$$y_1 = c|y_2|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c = c_1/|c_2|^{\lambda_1/\lambda_2}. \tag{4.25}$$

Išskirsime tris atvejus:

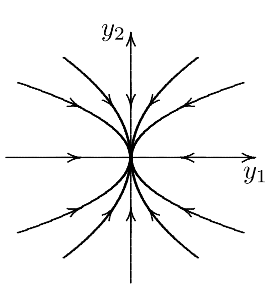
[1] Kvadratinės matricos A ir B yra panašios, jeigu egzistuoja tos pačios eilės kvadratinė neišsigimusi matrica Q tokia, kad $AQ = QB$. Panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa. Iš tikrųjų

$$|A - \lambda E| = |QBQ^{-1} - \lambda QQ^{-1}| = |Q(B - \lambda E)Q^{-1}| = |B - \lambda E|.$$

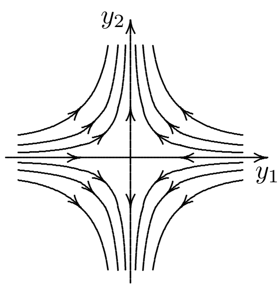
1. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra neigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$, $D > 0$ ir $\operatorname{Sp} A < 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Tada $|y_1(x)| \to 0$ ir $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Taigi visos nagrinėjamos sistemos trajektorijos artėja į koordinačių pradžią. Iš (4.25) lygčių išplaukia, kad (4.23) sistemos trajektorijos yra parabolės[2]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 > 1$. Todėl visos jos liečia ašį y_2 (žr. 4.1 pav.)

2. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra priešingų ženklų. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A < 0$, $D > 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2$. Tiksliau tegu $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Tada $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, tai (4.23) lygčių sistemos trajektorijos, apibrėžiamos (4.25) lygtimi, yra hiperbolės[3] (žr. 4.2 pav.).

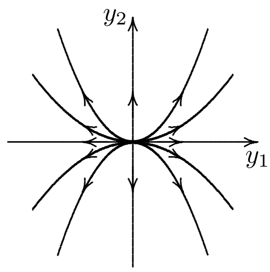
3. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra teigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$, $D > 0$ ir $\operatorname{Sp} A > 0$. Tegu $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Tada $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 > 0$, tai (4.23) lygčių sistemos trajektorijos, apibrėžiamos (4.25) lygtimi, yra parabolės[1]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 < 1$. Todėl jos visos liečia ašį y_1 (žr. 4.3 pav).



4.1 pav.



4.2 pav.



4.3 pav.

Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 4.1 ir 4.3 paveikslėliuose, vadinamas *mazgo* tašku, o pusiausvyros taškas, pavaizduotas 4.2 paveikslėlyje – *balno* tašku.

Tarkime dabar, kad tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 sutampa ir nelygios nuliui. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$ ir $D = 0$. Tegu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Išskirsime du atvejus:

1. Tarkime, matrica J yra diagonali. Tada (4.23) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = \lambda y_1, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

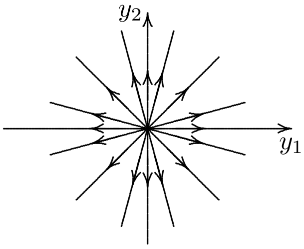
$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda x}.$$

Tegu $\lambda > 0$. Tada $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį x, gausime lygtį

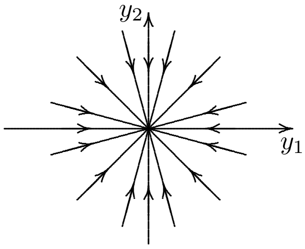
$$y_1 = k y_2, \quad k = c_1/c_2.$$

[2] Iš tikrųjų tikrosios parabolės yra gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 2$.
[3] Iš tikrųjų tikrosios hiperbolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = -1$.
[1] Iš tikrųjų tikrosios parabolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$.

Taigi sistemos trajektorijos yra spinduliai, išeinantys iš koordinačių pradžios, kai $\lambda > 0$, ir įeinantys į koordinačių pradžią, kai $\lambda < 0$ (žr. 4.5 ir 4.4 pav.). Pusiausvyros taškai, pavaizduoti 4.5 ir 4.4 paveikslėliuose, vadinami *dikritiniais (žvaigždiniais)* mazgais.



4.5 pav.



4.4 pav.

2. Matrica J nėra diagonali. Tada turime sistemą

$$y_1' = \lambda y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = c_2 e^{\lambda x}.$$

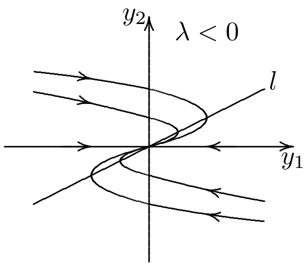
Jeigu $\lambda > 0$, tai $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį x, gausime sitemos trajektorijų lygtį

$$y_1 = \frac{c_1}{c_2} y_2 + \frac{1}{\lambda} y_2 \ln \frac{y_2}{c_2}.$$

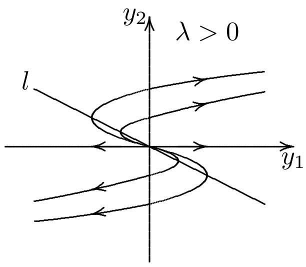
Išvestinė $dy_1/dy_2 \to \infty$, kai $y_2 \to 0$. Todėl visos trajektorijos liečia ašį y_1 koordinačių pradžios taške. Geometrinė vieta taškų, kuriuose trajektorijos keičia kryptį, apibrėžiama lygtimi $y_1' = 0$. Iš pirmosios sistemos lygties gauname, kad tai yra tiesė

$$l: \ \lambda y_1 + y_2 = 0.$$

Fazinis sitemos portretas, kai $\lambda < 0$ ir $\lambda > 0$, pavaizduotas 4.6 ir 4.7 paveikslėliuose. Abiem atvejais pusiausvyros taškas vadinamas *išsigimusiu mazgo* tašku.



4.6 pav.



4.7 pav.

Tarkime, tikrinės reikšmės yra kompleksiškai jungtinės: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Tai bus tada ir tik tada, kai $D < 0$. Šiuo atveju (4.23) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y_2' = -\beta y_1 + \alpha y_2.$$

Įvedę polines koordinates

$$y_1 = r\cos\theta, \quad y_2 = r\sin\theta,$$

gausime sistemą

$$r' = \alpha r, \quad \theta' = -\beta.$$

Jos sprendinys

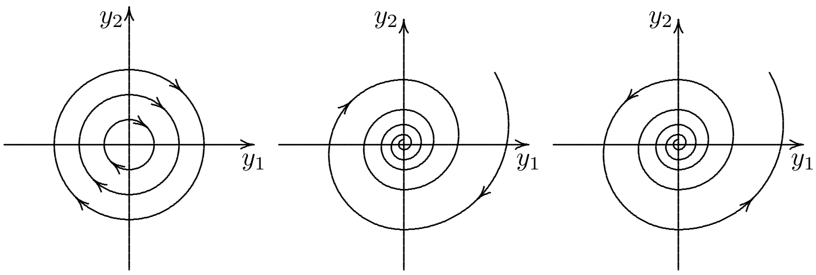
$$r = r_0 e^{\alpha x}, \quad \theta = \theta_0 - \beta x.$$

Taigi

$$y_1 = r_0 e^{\alpha x}\cos(\theta_0 - \beta x), \quad y_2 = r_0 e^{\alpha x}\sin(\theta_0 - \beta x).$$

Jeigu $\alpha < 0$, tai $|y_1(x)| \to 0$, $|y_2(x)| \to 0$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\alpha > 0$, tai $|y_1(x)| \to \infty$, $|y_2(x)| \to \infty$, kai $x \to \infty$. Jeigu $\alpha = 0$, tai visos trajektorijos yra $2\pi/\beta$ periodinės funkcijos.

Tarkime $\alpha = 0$, t.y. tikrinė reikšmė λ yra grynai menama (tai bus tada ir tik tada, kai $\operatorname{Sp} A = 0$). Šiuo atveju trajektorijos yra koncentriški apskritimai su centru koordinačių pradžioje (žr. 4.8 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 4.8 paveikslėlyje, vadinamas *centro* tašku. Tegu $\alpha \neq 0$. Tada trajektorijos yra spiralės. Kai $x \to \infty$ ir $\alpha < 0 (\Leftrightarrow \operatorname{Sp} A < 0)$, fazinis taškas juda spirale, artėdamas prie koordinačių pradžios (žr. 4.9 pav.), o kai $\alpha > 0$ ($\Leftrightarrow \operatorname{Sp} A > 0$), fazinis taškas juda spirale, toldamas nuo koordinačių pradžios į begalybę (žr. 4.10 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 4.9, 4.10 paveikslėliuose, vadinamas *židinio* tašku. Visais atvejais judėjimą prieš ar pagal laikrodžio rodyklę, nusako koeficiento β ženklas.



4.8 pav. 4.9 pav. 4.10 pav.

Tarkime $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Jeigu $\lambda_1 = 0$, o $\lambda_2 \neq 0$, tai (4.23) sistemą galima perrašyti taip:

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = C_1, \quad y_2(x) = C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas. Kai $\lambda_2 > 0$ ($\lambda_2 < 0$), trajektorijos yra iš y_1 ašies išeinantys (įeinantys) spinduliai, lygiagretūs y_2 ašiai. Fazinis sistemos portretas, kai $\lambda_2 > 0$ ir $\lambda_2 < 0$, pavaizduotas 4.11 ir 4.12 paveikslėliuose.

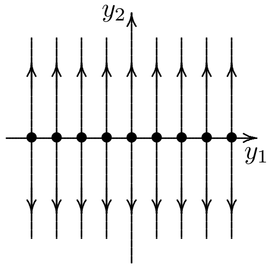
Jeigu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ir matrica J nėra nulinė, tai (4.23) sistemą (žr. (4.21) formulę) galima perrašyti taip:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 0.$$

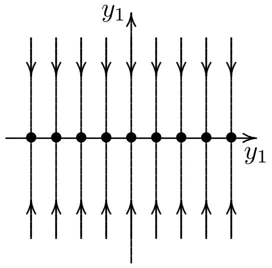
Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(x) = C_2 x, \quad y_2(x) = C_2.$$

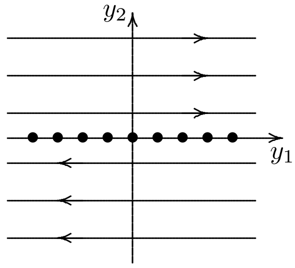
Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas, o trajektorijos yra tiesės, lygiagrečios y_1 ašiai. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 4.13 paveikslėlyje.



4.11 pav.

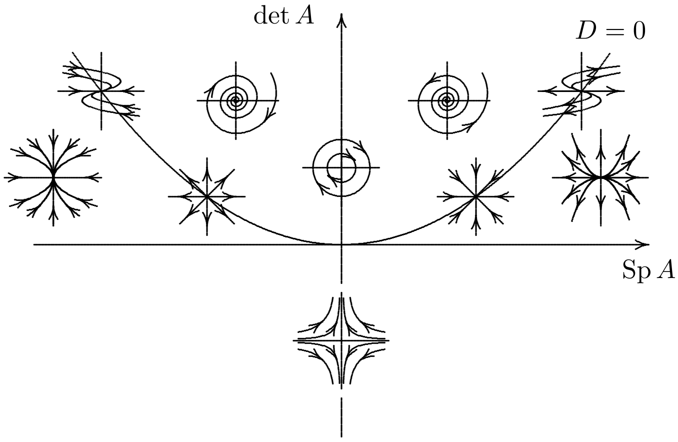


4.12 pav.



4.13 pav.

Kanoninės sistemos $y' = Jy$ pusiausvyros taško charakteris priklauso nuo Žordano matricos J tikrinių reikšmių. Tiksliau, nuo charakteristinio polinomo koeficientų $\operatorname{Sp} J$ ir $\det J$. Kadangi panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa, tai $\operatorname{Sp} J = \operatorname{Sp} A$, $\det J = \det A$. Todėl tiesinių sistemų $y' = Ay$ pusiausvyros taškus galima klasifikuoti lygiai taip pat kaip ir jas atitinkančių kanoninių sistemų pusiausvyros taškus. Pavyzdžiui, jeigu kokios nors kanoninės sistemos $y' = Jy$ pusiausvyros taškas yra židinys, tai visų ją atitinkančių tiesinių sistemų pusiausvyros taškai taip pat yra židiniai.



4.14 pav.

Kiekvieną fiksuotą reikšmių Sp A ir det A porą atitinka charakteristinis polinomas

$$\lambda^2 - (\mathrm{Sp}\, A)\lambda + \det A = 0.$$

Kadangi

$$\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, J = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det A = \det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

tai šis charakteristinis polinomas vienareikšmiškai apibrėžia kanoninę sistemą $y' = Jy$ bei jos pusiausvyros tašką. Kartu yra apibrėžiamas ir su šia sistema susijusios tiesinės sistemos $y' = Ay$ pusiausvyros taškas. Taigi kiekvieną reikšmių Sp A, det A porą atitinka tam tikras tieisnės sistemos $y' = Ay$ pusiausvyros taškas. Ši atitinkamybė geometriškai pavaizduota 4.14 paveikslėlyje

Tegu Q yra neišsigimusi matrica, kurios pagalba matrica A suvedama į Žordano pavidalą J. Tada transformacija $y = Qz$ deformuoja kanoninės sistemos $z' = Jz$ fazinį portretą į tiesinės sistemos $y' = Ay$ fazinį portretą. Kadangi tokia transformacija yra tiesinė ir tolydi, tai trajektorijų kokybinis vaizdas išlieka toks pats. Jos gali būti tik kiek ištemptos (suspaustos) ir pasuktos apie koordinačių pradžią. Pavyzdžiui, sistema

$$y_1' = \frac{5}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_2, \quad y_2' = \frac{4}{3}y_1 - \frac{5}{3}y_2$$

tiesinės transformacijos

$$y_1 = 2z_1 + z_2, \quad y_2 = z_1 + 2z_2$$

pagalba suvedama į kanoninį pavidalą

$$z_1' = z_1, \quad z_2' = -z_2.$$

Šiuo atveju Žordano matricos tikrinės reikšmės $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Todėl pusiausvyros taškas yra balno taškas. Kanoninės sistemos bendrasis sprendinys

$$z_1 = c_1 e^x, \quad z_2 = c_2 e^{-x}.$$

Eliminavę nepriklausomą kintamąjį x gauname, kad fazinės trajektorijos yra hiperbolės

$$z_1 z_2 = c, \quad c = c_1 c_2.$$

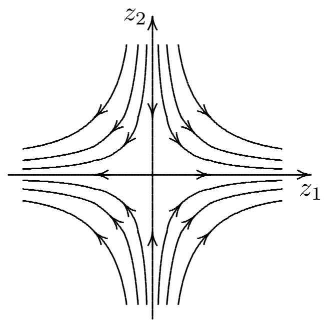
Fazinis sitemos portretas pavaizduotas 4.15 paveikslėlyje. Grįžę prie kintamųjų y_1, y_2, gausime

$$y_1 = 2c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad y_2 = c_1 e^x + 2c_2 e^{-x}.$$

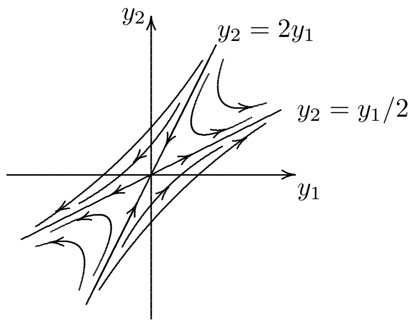
Iš šių lygčių eliminavę kintamąji x, gausime nagrinėjamos sistemos trajektorijų lygtį

$$(y_2 - 2y_1)(y_1 - 2y_2) = c;$$

čia $c = 9c_1 c_2$. Taigi nagrinėjamos sitemos trajektorijos yra hiperbolės. Jų fazinis portetas pavaizduotas 4.16 paveikslėlyje.



4.15 pav.



4.16 pav.

5 SKYRIUS

Autonominės sistemos

5.1 AUTONOMINĖS LYGTYS TIESĖJE

Nagrinėjant autonomines lygtys nepriklausomas kintamasis dažniausiai yra laikas. Todėl šiame skyriuje nepriklausomą kintamąjį žymėsime raide t, o ieškomą funkcija raide x. Lygtys, kurių dešinioji pusė tiesiogiai nepriklauso nuo laiko t, t.y.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in (a,b) \subset \mathbb{R} \tag{5.1}$$

vadinamos *autonominėmis*. Jų sprendinio kitimo greitis priklauso tik nuo paties sprendinio. Kitais žodžiais tariant, tokių lygčių sprendinys pats valdo savo keitimąsi.

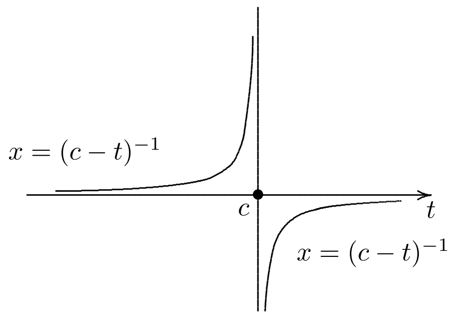
Priminsime, kad autonominės lygtys išsiskiria iš kitų viena svarbia savybe. Jeigu $x = \varphi(t), t \in (a,b)$ yra (5.1) lygties sprendinys, tai $x = \psi(t) = \varphi(t+c), t \in (a-c, b-c), c \in \mathbb{R}$, taip pat yra (5.1) lygties sprendinys.

I š v a d a. Tegu $x = \varphi(t)$ yra (5.1) lygties sprendinys, apibrėžtas $\forall t \in \mathbb{R}$ ir I – šio sprendinio reikšmių sritis. Be to, tegu per kiekvieną juostos $\Pi = \mathbb{R} \times I$ tašką eina tik viena (5.1) lygties integralinė kreivė. Tada bet kurią kitą šios lygties integralinę kreivę, esančią juostoje Π, galima apibrėžti lygtimi $x = \varphi(t+c), c \in \mathbb{R}$. Taigi integralinės kreivės juostoje Π gaunamos viena iš kitos poslinkiu t ašies kryptimi.

P a v y z d y s. Lygtis

$$\dot{x} = x^2$$

turi trivialų sprendinį $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ ir netrivialius sprendinius $x = (c-t)^{-1}$, kai $t > c$ bei $x = (c-t)^{-1}$, kai $t < c$. Pastaruosius sprendinius atitinkančios integralinės kreivės yra hiperbolės (žr. 5.1 pav.).



5.1 pav.

Integralinės kreivės dalina plokštumą $\mathbb{R}^2$ į dvi pusplokštumes $x > 0$ ir $x < 0$. Pusplokštumėje $x > 0$ bet kurią integralinę kreivę galima gauti paslinkus viršutinę hiperbolės $x = -t^{-1}, t < 0$ šaką t ašies kryptimi. Analogiškai pusplokštumėje $x < 0$ bet kurią integralinę kreivę galima gauti paslinkus apatinę hiperbolės $x = -t^{-1}, t > 0$ šaką t ašies kryptimi.

Integralinių kreivių šeimų, kurios gaunamos viena iš kitos poslinkiu t ašies kryptimi, kokybinį vaizdą nusako kiekvienas individualus sprendinys. Savo ruožtu kiekvieno tokio sprendinio kokybinį vaizdą apibrėžia funkcija f. Jeigu kokiame nors taške $x = c$ funkcija $f(c) = 0$, tai funkcija

$$\varphi(t) = c, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

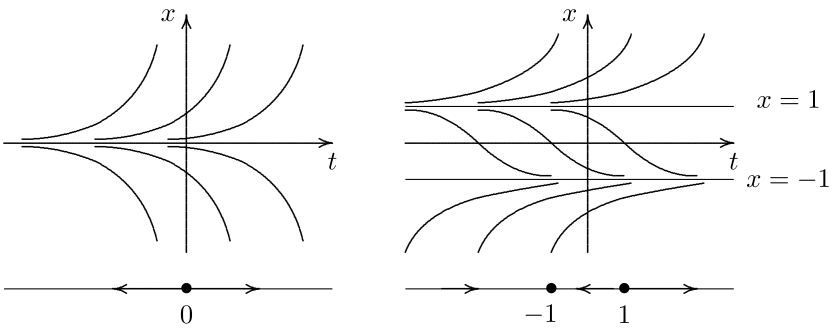
yra (5.1) lygties sprendinys. Toks sprendinys vadinamas *stacionariuoju* sprendiniu, o taškas c-*pusiausvyros* tašku. Jeigu $f(x) \neq 0$, t.y. $f(x) > 0$, arba $f(x) < 0$, tai kiekvienas (5.1) lygties sprendinys yra arba didėjanti, arba mažėjanti funkcija. Tokias sprendinių savybes patogiau vaizduoti x ašyje negu (t, x) plokštumoje. Pavyzdžiui taškas $x = 0$ yra lygties

$$\dot{x} = x$$

pusiausvyros taškas. Kai $x > 0$, visi šios lygties sprendiniai yra didėjančios, o kai $x < 0$ – mažėjančios funkcijos. Integralinių kreivių kokybinis vaizdas (t, x) plokštumoje ir x ašyje pavaizduotas 5.2 paveikslėlyje. Lygties

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

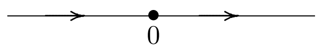
pusiausvyros taškai $x = \pm 1$. Kai $x > 1$ arba $x < -1$, visi šios lygties sprendiniai yra didėjančios, o kai $-1 < x < 1$ – mažėjančios funkcijos. Integralinių kreivių kokybinis vaizdas plokštumoje (t, x) ir x ašyje pavaizduotas 5.3 paveikslėlyje.



5.2 pav. 5.3 pav.

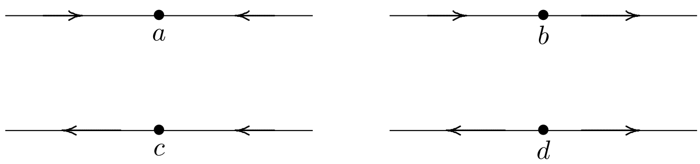
Geometrinis sprendinių kokybinis vaizdas x ašyje vadinamas *faziniu portretu*, x ašis – *fazine* ašimi, o jos taškai-*faziniais* taškais. Jeigu sprendinys $x = \varphi(t)$ nėra pusiausvyros taškas, tai φ yra arba didėjanti, arba mažėjanti funkcija. Todėl jeigu pusiausvyros taškų yra baigtinis skaičius, tai juos atitinkančių skirtingų fazinių portretų taip pat yra tik baigtinis skaičius. Čia, sakydami "skirtingi", turime omenyje, kad jie skiriasi sritimis, kuriose sprendiniai didėja arba mažėja.

Pavyzdžiui lygties $\dot{x} = x^2$ fazinis portretas, pavaizduotas 5.4 paveikslėlyje



5.4 pav.

skiriasi nuo lygties $\dot{x} = x$ fazinio portreto pavaizduoto 5.2 paveikslėlyje. Akivaizdu, kad vieno pusiausvyros taško atveju yra galimi tik keturi skirtingi faziniai portretai (žr. 5.5 paveikslėlį).



5.5 pav.

Pusiausvyros taškas a vadinamas *atraktoriumi* , taškai b ir c – *šuntu*, o taškas d – *repeleriu.*

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, skirtingos diferencialinės lygtys yra *kokybiškai ekvivalenčios*, jeigu jos turi tą patį fazinį portretą, t.y. turi vienodą skaičių ta pačia tvarka išsidėsčiusių pusiausvyros taškų.

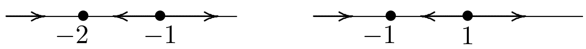
Pavyzdžiui, lygtys:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = x^3$$

yra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi vieną pusiausvyros tašką – repelerį. Lygtys:

$$\dot{x} = (x+2)(x+1), \quad \dot{x} = x^2 - 1$$

taip pat yra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi po du pusiausvyros taškus. Vienas iš jų yra atraktorius, o kitas – repeleris. Be to, atraktorių atitinka mažesnioji reikšmė (žr. 5.6 pav.).

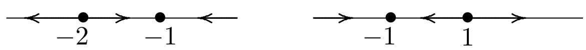


5.6 pav.

Lygtys:

$$\dot{x} = -(x+2)(x+1), \quad \dot{x} = x^2 - 1$$

nėra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi po du pusiausvyros taškus: atraktorių ir repelerį. Tačiau jie yra išsidėstę priešinga tvarka (žr. 5.7 pav.).



5.7 pav.

Diferencialinės lygtys gali turėti be galo daug pusiausvyros taškų (pvz. lygtis $\dot{x} = \sin x$). Todėl skirtingų fazinių portretų taip pat gali būti be galo daug. Tačiau, bet kuris fazinis portretas gali turėti ne daugiau kaip keturis skirtingus pusiausvyros taškus.

5.2 AUTONOMINĖS SISTEMOS PLOKŠTUMOJE

Autonominę diferencialinių lygčių sistemą plokštumoje $\mathbb{R}^2$ galima užrašyti vektoriniu pavidalu

$$\dot{x} = f(x); \tag{5.2}$$

čia $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$. Tegu $x = \varphi(t)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ yra šios sistemos sprendinys. Tada fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$ jis apibrėžia kreivę. Jeigu ši kreivė nėra taškas, tai jai galima priskirti apėjimo kryptį, kai laikas t auga. Priminsime, kad kreivė, kartu su jos apėjimo kryptimi, vadinama *trajektorija.*

Bendru atveju (5.2) sistemos sprendiniai priklauso nuo dviejų laisvų konstantų. Todėl fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$ šie sprendiniai apibrėžia dviparametrinę kreivių (trajektorijų) šeimą. Norint gauti kokybinį (5.2) sistemos trajektorijų vaizdą, reikia žinoti kaip kinta fazinis taškas x fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$, kai laikas t auga. Taigi (5.2) sistemos fazinis portretas yra dvimatis, o jos kokybinį vaizdą nusako kreivių šeima kartu su jų apėjimo kryptimi.

Kokybinį (5.2) sistemos tyrimą plokštumoje $\mathbb{R}^2$ pradėsime nuo šios sistemos pusiausvyros taškų. Taškas $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ yra (5.2) sistemos *pusiausvyros* taškas, jeigu $f(c) = 0$. Pusiausvyros tašką c atitinka *stacionarusis* (5.2) sistemos sprendinys $\varphi(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Išsiaiškinsime (5.2) sistemos trajektorijų galimą elgesį pusiausvyros taško aplinkoje. Tuo tikslu išnagrinėsime keletą paprasčiausių sistemų su vienu pusiausvyros tašku.

1 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \tag{5.3}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{-t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

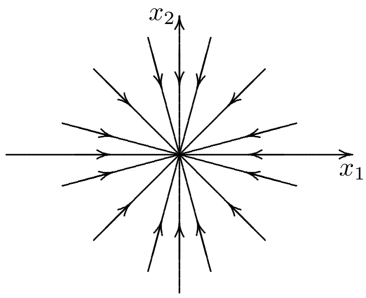
Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1 = k x_2, \quad k = c_1/c_2.$$

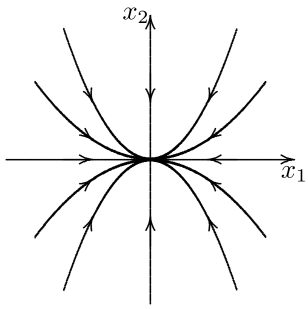
Todėl galime tvirtinti, kad kiekviena (5.3) sistemos trajektorija yra kokioje nors tiesėje, einančioje per koordinačių pradžią. Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to 0.$$

Taigi kiekvienas (5.3) sistemos fazinis taškas artėja prie koordinačių pradžios taško tiese $x_1 = k x_2$, kai $t \to \infty$. Fazinis (5.2) sistemos portretas pavaizduotas 5.8 paveikslėlyje.



5.8 pav.



5.9 pav.

2 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 \tag{5.4}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_2 = kx_1^2, \quad k = c_2/c_1^2.$$

Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to 0.$$

Taigi kiekvienas (5.4) sistemos fazinis taškas juda parabole $x_2 = kx_1^2$ ir artėja prie koordinačių pradžios, kai $t \to \infty$. Fazinis (5.4) sistemos portretas pavaizduotas 5.9 paveikslėlyje.

3 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \tag{5.5}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

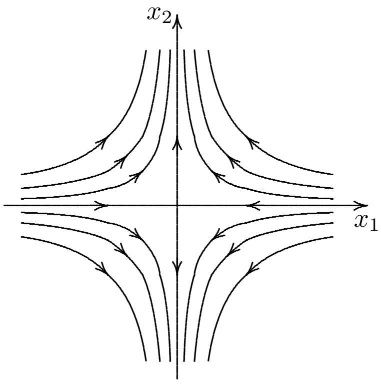
Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1 x_2 = k, \quad k = c_1 c_2.$$

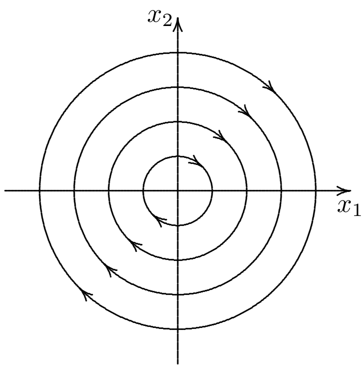
Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to \infty.$$

Taigi kiekvienas (5.5) sistemos fazinis taškas juda hiperbole $x_1 x_2 = k$ ir artėja į begalybę, kai $t \to \infty$. Fazinis (5.5) sistemos portretas pavaizduotas 5.10 paveikslėlyje.



5.10 pav.



5.11 pav.

4 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \tag{5.6}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$. Apibrėžkime polines koordinates

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$$

Naujose koordinatėse gausime sistemą

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = -1,$$

kurios sprendiniai

$$r = c_1, \quad \varphi = -t + c_2.$$

Grįžę prie senų kintamųjų x_1, x_2, rasime (5.6) sistemos sprendinius

$$x_1(t) = c_1\cos(-t + c_2), \quad x_2(t) = c_1\sin(-t + c_2), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1^2 + x_2^2 = c^2, \quad c = c_1.$$

Iš (5.6) lygties išplaukia, kad pusplokštumėje $x_2 > 0$ sprendinys x_1 didėja, o pusplokštumėje $x_2 < 0$ jis mažėja. Be to, pusplokštumėje $x_1 > 0$ sprendinys x_2 mažėja, o pusplokštumėje $x_1 < 0$ jis didėja. Taigi (5.6) sistemos trajektorijos yra koncentriniai apskritimai su centru pusiausvyros taške $(0, 0)$ ir apėjimo kryptimi pagal laikrodžio rodyklę, kai laikas t didėja. Fazinis (5.6) sistemos portretas pavaizduotas 5.11 paveikslėlyje.

5 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \tag{5.7}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$ ir sprendinius

$$x_1(t) = c_1 e^t, \quad x_2(t) = e^t(c_1 t + c_2), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_2 = x_1(\ln x_1/c_1 + c_2/c_1).$$

Antrosios eilės išvestinė $d^2x_2/dx_1^2 = 1/x_1$. Todėl visos trajektorijos yra iškilos į apačią, kai $x_1 > 0$ ir iškilos į viršų, kai $x_1 < 0$.

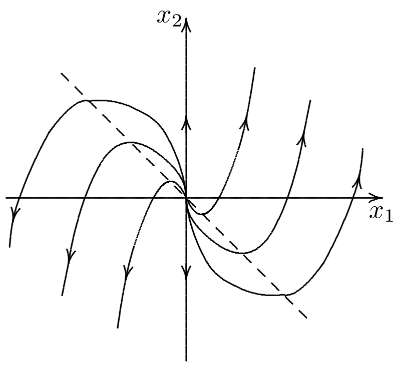
Tegu $c_1 > 0$. Tada sprendinys x_1 didėja nuo 0 iki ∞, kai t kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Sprendinys $x_2 \to +\infty$, kai $t \to +\infty$, ir $x_2 \to -0$, kai $t \to -\infty$. Kai $c_1 = 0$, turime sprendinį

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = c_2 e^t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

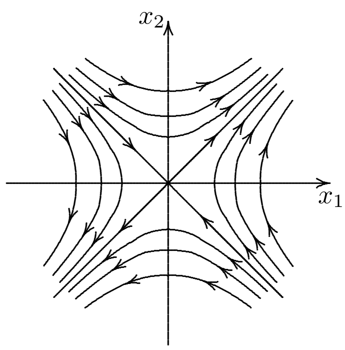
Kai $c_1 < 0$, kiekviena sistemos trajektorija yra simetrinė koordinačių pradžios taško atžvilgiu vienai iš trajektorijų, atitinkančių atvejį $c_1 > 0$. Tuo lengvai galima įsitikinti ir iš pačios sistemos. Reikia tik pastebėti, kad ji yra invariantiška keitinio $x_1 \to -x_1$, $x_2 \to -x_2$ atžvilgiu. Be to, iš pačios sistemos išplaukia, kad

$$\begin{array}{lll} \dot{x}_1 > 0, & \text{kai} & x_1 > 0, \\ \dot{x}_1 < 0, & \text{kai} & x_1 < 0, \\ \dot{x}_2 > 0, & \text{kai} & x_1 + x_2 > 0, \\ \dot{x}_2 < 0, & \text{kai} & x_1 + x_2 < 0, \\ \dot{x}_2 = 0, & \text{kai} & x_1 + x_2 = 0. \end{array}$$

Fazinis (5.7) sistemos portretas pavaizduotas 5.12 paveikslėlyje.



5.12 pav.



5.13 pav.

6 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \tag{5.8}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$. Padalinę antrąją šios sistemos lygtį iš pirmosios, gausime paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0$$

kintamųjų x_1, x_2 atžvilgiu. Šios lygties sprendiniai yra hiperbolės

$$x_2^2 - x_1^2 = c.$$

Jų asimptotės yra tiesės $x_1 + x_2 = 0$ ir $x_1 - x_2 = 0$. Hiperbolių apėjimo kryptį galima nustatyti iš (5.8) lygčių. Pavyzdžiui, $\dot{x}_2 > 0$, kai $x_1 > 0$, $\dot{x}_1 > 0$, kai $x_2 > 0$, t.y. pusplokštumėje $x_1 > 0$ sprendinys x_2 didėja, o pusplokštumėje $x_2 > 0$ didėja sprendinys x_1. Fazinis (5.8) sistemos portretas pavaizduotas 5.13 paveikslėlyje.

Norint nubrėžti (5.2) sistemos trajektorijų kokybinį vaizdą, nevisada būtina žinoti jos sprendinius apibrėžiančias formules. Tai galima padaryti nesprendžiant pačios sistemos. Šiuo atveju reikia pasinaudoti izoklinių metodu.

Tarkime, funkcija f yra apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Kiekviename taške $x \in \Omega$ yra apibrėžtas vektorius $\dot{x}$. Šių vektorių visuma sudaro krypčių lauką. Priminsime, kad izoklinė yra geometrinė vieta taškų, kuriuose krypčių laukas yra pastovus, t.y.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = k = const.$$

Ypatingai įdomūs tie izoklinių taškai, kuriuose dx_2/dx_1 lygus nuliui arba begalybei, t.y. izoklinės, kuriose $\dot{x}_2 = 0$ arba $\dot{x}_1 = 0$.

7 P a v y z d y s. Sistemos

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \tag{5.9}$$

vienintelis pusiausvyros taškas yra koordinačių pradžioje. Izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi

$$\frac{x_1}{x_2^2} = k.$$

Kai $x_2 = 0$, turime $k = \infty$. Kai $x_1 = 0$, turime $k = 0$. Kitoms k reikšmėms izoklinės yra parabolės $x_1 = kx_2^2$. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll}
k = 1/2, & \text{parabolėje} & x_1 = x_2^2/2, \\
k = 1, & \text{parabolėje} & x_1 = x_2^2, \\
k = 2, & \text{parabolėje} & x_1 = 2x_2^2, \\
k = -1/2, & \text{parabolėje} & x_1 = -x_2^2/2, \\
k = -1, & \text{parabolėje} & x_1 = -x_2^2, \\
k = -2, & \text{parabolėje} & x_1 = -2x_2^2.
\end{array}$$

Trajektorijų apėjimo kryptį nusako sistemos lygčių dešiniosios pusės. Iš pirmosios lygties išplaukia, kad x_1 didėja, kai t kinta nuo $-\infty$ iki ∞. Iš antrosios lygties gauname, kad x_2 didėja, kai $x_1 > 0$ ir mažėja, kai $x_1 < 0$.

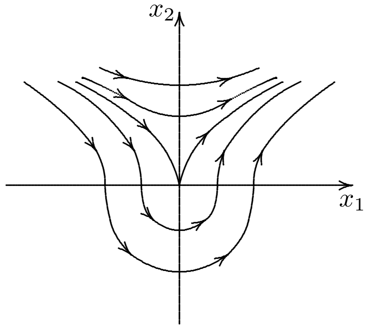
Padalinę antrąją šios sitemos lygtį iš pirmosios, gausime paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2^2}, \quad x_2 \neq 0$$

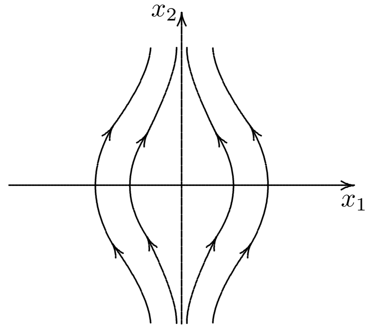
kintamųjų x_1, x_2 atžvilgiu. Šios lygties sprendiniai yra apibrėžiami formule

$$x_2^3 - 3x_1^2 = c.$$

Kai $c = 0$, gauname trajektoriją $x_2^3 - 3x_1^2 = 0$, einančią per koordinačių pradžią. Trajektorijų fazinis portretas pavaizduotas 5.14 paveikslėlyje.



5.14 pav.



5.15 pav.

8 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{5.10}$$

turi vienintelį pusiausvyros tašką $(0, 0)$. Jos izoklinės apibrėžiamos lygtimi

$$-\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = k.$$

Iš šios lygties išplaukia, kad $k \geq 2$ ir izoklinės yra tiesės

$$x_2 = \alpha x_1;$$

čia α yra randamas iš lygties

$$-\frac{1 + \alpha^2}{\alpha} = k.$$

Kai $\alpha = 0$, turime $k = \pm\infty$. Todėl visos trajektorijos kerta statmenai x_1 ašį. Kai $\alpha \to \pm\infty$, $k \to \mp\infty$. Kai $x_1 = 0$, turime trajektoriją, apibrėžtą lygtimi $\dot{x}_2 = x_2^2$. Kitoms k reikšmėms izoklinės yra tiesės $x_2 = \alpha x_1$. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll} k = 5/2, & \text{tiesės} & x_2 = -2x_1,\ x_2 = -x_1/2, \\ k = 2, & \text{tiesėj} & x_2 = -x_1, \\ k = -5/2, & \text{tiesės} & x_2 = 2x_1,\ x_2 = x_1/2, \\ k = -2, & \text{tiesė} & x_2 = x_1. \end{array}$$

Trajektorijų apėjimo kryptį nusako lygčių sistemos dešiniosios pusės. Iš antrosios lygties išplaukia, kad x_2 didėja, kai x kinta nuo $-\infty$ iki ∞. Iš pirmosios lygties gauname, kad x_1 didėja, kai $x_1 x_2 < 0$ ir mažėja, kai $x_1 x_2 > 0$. Fazinis (5.10) sistemos portretas pavaizduotas 5.15 paveikslėlyje

9 P a v y z d y s. Nubrėžti sistemos

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2) \tag{5.11}$$

trajektorijų kokybinį vaizdą. Nagrinėjamu atveju

$$f_1(x) = x_1^2, \quad f_2(x) = x_2(2x_1 - x_2).$$

Todėl lygtis $f(x) = 0$ turi tik trivialų sprendinį $x = (0, 0)$. Kartu galime tvirtinti, kad vienintelis (5.11) sistemos pusiausvyros taškas yra koordinačių pradžioje. Be to, $f(x) = f(-x)$. Iš čia išplaukia, kad visos trjektorijos yra invariantinės keitinio $x \to -x$ atžvilgiu. Atkreipsime dėmesį, kad izoklinė $\dot{x}_1 = 0$ sutampa su x_2 ašimi. Jos taškuose $\dot{x}_2 = -x_2^2$. Todėl egzistuoja trajektorija, einanti per šią ašį. Tiksliau ji įeina į koordinačių pradžią, kai $x_2 > 0$ ir išeina iš jos, kai $x_2 < 0$. Kai $x_1 \neq 0$, izoklinių lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{x_2(2x_1 - x_2)}{x_1^2} = k \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 = kx_1^2.$$

Iš jos randame

$$x_1^2(1 - k) = (x_1 - x_2)^2.$$

Taigi $k \leq 1$, o izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi

$$x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{1 - k}).$$

Kai $k = 1$, izoklinė yra tiesė $x_2 = x_1$. Per šią tiesę einančių trajektorijų kryptis nusako lygtys $\dot{x}_1 = x_1^2$, $\dot{x}_2 = x_2^2$. Iš šių lygčių išplaukia, kad funkcijos x_1 ir x_2 didėja, kai laikas t auga. Todėl per šią tiesę einanti trajektorija įeina į koordinačių pradžią, kai $x_1, x_2 < 0$ ir išeina iš koordinačių pradžios, kai $x_1, x_2 > 0$. Kitoms k reikšmėms izoklinė yra pora tiesių. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll}
k = 0, & \text{tiesėse} & x_2 = 0 \text{ ir } x_2 = 2x_1, \\
k = 1/2, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{2}/2), \\
k = 3/4, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm 1/2), \\
k = -1, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{2}), \\
k = -2, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{3}), \\
k = -3, & \text{tiesėse} & x_2 = 3x_1 \text{ir} x_2 = -x_1.
\end{array}$$

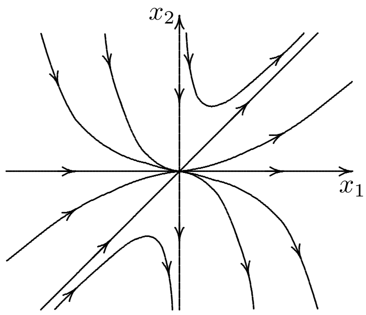
Trajektorijų iškilumo į apačią (iškilumo į viršų) taškai randami iš sąlygos

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0 \quad \Big(\frac{d^2x_2}{dx_1^2} < 0\Big).$$

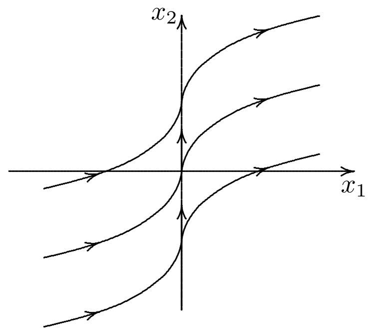
Nagrinėjamu atveju $\ddot{x}_2 = x_2[(2x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_1^2]$, $\ddot{x}_1 = 2x_1^3$. Todėl

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\ddot{x}_2\dot{x}_1 - \ddot{x}_1\dot{x}_2}{\dot{x}_1^3} = \frac{2x_2(x_1 - x_2)^2}{x_1^4};$$

Taigi pusplokštumėje $x_2 > 0$ trajektorijos yra iškilos, o pusplokštumėje $x_2 < 0$ – įgaubtos. Fazinis (5.11) sistemos trajektorijų vaizdas pavaizduotas 5.16 paveikslėlyje.



5.16 pav.



5.17 pav.

Tarkime, funkcija f yra apibrėžta ir tolydi srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jeigu $\forall x_0 \subset \Omega$ ir $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ egzistuoja vienintelis 5.2 sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$ toks, kad $\varphi(t_0) = x_0$, tai per kiekvieną srities Ω tašką eina lygiai viena (5.2) sistemos trajektorija. Jeigu vienaties nėra, tai dažniausiai jos nėra kokios nors kreivės, esančios srityje Ω, taškuose. Šios kreivės taškų aplinkoje trajektorijų kokybinį vaizdą ne iš karto galima nustatyti vien tik pagal sistemos dešinę pusę.

10 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = 3x_1^{2/3}, \quad \dot{x}_2 = 1 \tag{5.12}$$

pusiausvyros taškų neturi. Jos sprendiniai randami iš formulių

$$x_1(t) = (t + c_1)^3, \quad x_2(t) = t + c_2.$$

Be to, yra dar vienas sprendinys

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = t + c_2.$$

Imkime šiose formulėse $c_2 = 0$, $c_1 = -c$. Abiem atvejais taškas

$$\big(x_1(c), x_2(c)\big) = (0, c).$$

Vadinasi taškas $(0, c)$ guli ne mažiau kaip dviejose skirtingose trajektorijose. Eliminavę iš šių formulių kintamąjį t, gausime, kad (5.12) sistemos trajektorijos yra apibrėžiamos lygtimis:

$$x_1 = (x_2 + c)^3, \qquad x_1 = 0;$$

čia $c = c_1 - c_2$. Taigi trajektorijos yra kubinės parabolės, liečiančios ašį x_2. Jų apėjimo kryptį lengvai galima nustatyti iš (5.12) sistemos dešinės pusės. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 5.17 paveikslėlyje.

Toliau nagrinėsime tik tokias sistemas, kurios tenkina vienaties sąlygą. Priminsime, kad ši sąlyga yra patenkinta, jeigu funkcija f yra diferencijuojama.

Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad iš trajektorijų sudarytų skirtingų geometrinių konfigūracijų gali būti be galo daug. Kartu galime tvirtinti, kad skirtingų pusiausvyros taškų tipų taip pat gali būti be galo daug. Tiesa, čia, kaip ir 5.1 skyrelyje, reikia susitarti, ką reiškia žodis "skirtingi". Priklausomai nuo nagrinėjamų sistemų bei keliamų reikalavimų galima pasirinkti įvairius kriterijus.

Pavyzdžiui, galime nekreipti dėmesio į trajektorijų, įeinančių į pusiausvyros tašką, formą. Tiksliau, tegu a yra sistemos $\dot{x} = f(x)$, o b sistemos $\dot{x} = g(x)$ pusiausvyros taškai. Be to, tegu sistemos $\dot{x} = f(x)$ visos trajektorijos sueina į tašką a, o sistemos $\dot{x} = g(x)$ – į tašką b. Tada natūralu tokius nagrinėjamų sistemų taškus laikyti "vienodais". Pagal šį apibrėžimą sistemos $\dot{x} = -f(x)$ pusiausvyros takas a ir sistemos $\dot{x} = g(x)$ pusiausvyros taškas b yra "skirtingi", nes sistemos $\dot{x} = -f(x)$ visos trajektorijos išeina iš taško a. Be to, galime išskirti tiesines sistemas. Kiekvieną tokią sistemą atitinka kvadratinė matrica. Šią matricą galima suvesti į žordaninį pavidalą. Pagal tai, kokie yra šios matricos žordano langeliai, galima klasifikuoti tiesinių sistemų pusiausvyros taškus.

5.3 AUTONOMINIŲ SISTEMŲ TRAJEKTORIJOS

Tarkime, funkcija $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tolydi srityje Ω ir šioje srityje tenkina Lipšico sąlygą. Tada per kiekvieną tašką $x_0 \in \Omega$ eina lygiai viena autonominės sistemos

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.13}$$

trajektorija. Kiekvieno jos taško padėtį fazinėje erdvėje nusako pradinis taškas x_0 ir laiko atkarpa $t - t_0$ (žr. 2.2 skyrelį), t.y. (5.13) sistemos sprendinį $x = x(t, t_0, x_0)$ galima užrašyti tokiu pavidalu

$$x = x(t - t_0, 0, x_0) := \varphi(t - t_0, x_0).$$

Tegu $t_0 = 0$. Taškas $x_0 \in \Omega$ yra (5.13) sistemos *pusiausvyros taškas*, jeigu

$$\varphi(t, x_0) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Akivaizdu, kad taškas x_0 yra pusiausvyros taškas tada ir tik tada, kai $f(x_0) = 0$. Tašką $x_0 \in \Omega$ vadinsime (5.13) sistemos *paprastuoju tašku,* jeigu $f(x_0) \neq 0$. Jeigu taškas x_0 yra paprastasis (5.13) sistemos taškas ir funkcija f yra tolydi, tai kiekvienas taškas iš pakankamai mažos taško x_0 aplinkos taip pat bus paprastasis taškas.

Tegu $x = \varphi(t)$ yra (5.13) sistemos sprendinys, apibrėžtas $\forall t \in \mathbb{R}$. Jeigu šis sprendinys yra periodinė, periodo $T > 0$ funkcija, tai jį atitinkanti trajektorija vadinama *uždara trajektorija* arba *ciklu*.

Tarkime, taškas x_0 yra paprastasis (5.13) sistemos taškas. Jeigu sprendinio $x = \varphi(t, x_0)$ trajektorija γ savęs nekerta, tai šis sprendinys yra neperiodinis. Įrodysime, kad trajektorija γ kerta save tik tuo atveju, kai ji yra uždara, o ją apibrėžiantis sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinis.

Tarkime, trajektorija γ kerta save. Tada egzistuoja tokie t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$, kad

$$\varphi(t_1, x_0) = \varphi(t_2, x_0).$$

Kadangi x_0 nėra pusiausvyros taškas, tai galime tarti, kad

$$\varphi(t, x_0) \neq \varphi(t_1, x_0), \quad \text{kai} \quad t \in (t_1, t_2).$$

Įrodysime, kad sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinė funkcija su periodu $\omega = t_2 - t_1$. Iš tikrųjų, funkcija ψ apibrėžta formule

$$\psi(t) = \varphi(t + \omega, x_0), \quad t \in [t_1 - \omega, t_2 - \omega] = [t_1 - \omega, t_1]$$

yra (5.13) sistemos sprendinys. Be to,

$$\varphi(t_1 + \omega, x_0) = \varphi(t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0).$$

Remiantis vienaties teorema, sprendiniai $x = \varphi(t + \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_1 - \omega, t_1]$. Analogiškai galima įrodyti, kad sprendiniai $x = \varphi(t - \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_2, t_2 + \omega]$. Taip samprotaudami toliau gausime, kad sprendinį $x = \varphi(t, x_0)$ galima pratęsti į visą realių skaičių ašį $\mathbb{R}$ ir yra teisinga tapatybė

$$\varphi(t+\omega, x_0) = \varphi(t, x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Taigi funkcija φ yra ω-periodinė, o ją atitinkanti trajektorija yra uždara. Kartu yra įrodyta tokia teorema.

5.1 teorema. *Autonominės sistemos trajektorijos gali būti tik tokių trijų rūšių:*

1. *Pusiausvyros taškas.*
2. *Uždara trajektorija. Ją atitinka ω-periodinis sprendinys.*
3. *Nekertanti savęs trajektorija. Ją atitinka neperiodinis sprendinys.*

Nagrinėjant (5.13) autonominę sistemą svarbu žinoti ar ji turi uždarų trajektorijų. Kai $n = 2$ nurodysime dvi pakankamas sąlygas garantuojančias, kad (5.13) sistema uždarų trajektorijų neturi.

5.2 teorema. *Tarkime, srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ funkcija f tenkina kurią nors vieną iš šių sąlygų:*

1. *Vektorinis laukas f yra potencialus srityje Ω.*
2. *Vektorinio lauko divergencija* $\operatorname{div} f$ *turi pastovų ženklą srityje Ω.*

Tada (5.13) *autonominė sistema srityje Ω neturi uždarų trajektorijų.*

◁ Tarkime priešingai, (5.13) autonominė sistema srityje Ω turi uždara trajektoriją $\gamma \subset \Omega$. Sritį, apribota kreive γ, pažymėkime raide D. Jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga, tai $f_{2x_1} = f_{1x_2}$ ir

$$0 = \int\limits_D \big(f_{2x_1}(x) - f_{1x_2}(x)\big)\, dx = \int\limits_D \operatorname{div} f^*(x)\, dx = \int\limits_\gamma \big(f^*(x), \mathbf{n}(x)\big)\, dl;$$

čia $\mathbf{n}(x)$ yra vienetinis normalės vektorius trajektorijai γ taške x, išorinis srities D atžvilgiu, o vektorius f^* turi koordinates $f_1^* = f_2$ ir $f_2^* = -f_1$. Vektorius f^* yra statmenas vektoriui f. Tačiau vektorius f yra statmenas vektoriui $\mathbf{n}$. Taigi vektoriai f^* ir $\mathbf{n}$ yra lygiagretūs ir

$$\int\limits_\gamma \big(f^*(x), \mathbf{n}(x)\big)\, dl \neq 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad (5.13) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga.

Tarkime, yra patenkinta antroji teoremos sąlyga. Tada

$$0 \neq \int\limits_D \operatorname{div} f(x)\, dx = \int\limits_\gamma \big(f(x), \mathbf{n}(x)\big)\, dl = 0,$$

nes vektoriai f ir $\mathbf{n}$ yra statmeni. Gauta prieštara įrodo, kad (5.13) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta antroji teoremos sąlyga. $\triangleright$

P a v y z d y s. Tegu $f(x) = Ax, A \in \mathbb{R}^{2,2}$. Vektorinis laukas $f(x)$ yra potencialus, jeigu matrica A yra simetrinė. Vektorinės funkcijos f divergencija yra lygi matricos A pėdsakui, t.y. $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Sp} A$. Todėl tiesinė sistema

$$\dot{x} = Ax$$

plokštumoje $\mathbb{R}^2$ neturės uždarų trajektorijų, jeigu matrica A yra simetrinė arba jos pėdsakas $\operatorname{Sp} A \neq 0$.

5.4 AUTONOMINIŲ SISTEMŲ PLOKŠTUMOJE PUSIAUSVYROS TAŠKAI

Tegu Ω yra sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, f – diferencijuojama srityje Ω vektorinė funkcija su komponentėmis f_1, f_2. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.14}$$

Iš teoremos apie trajektorijų ištiesinimą išplaukia, kad visos sistemos pakankamai mažoje paprastojo taško aplinkoje yra difeomorfiškai ekvivalenčios. Tarkime, $x_0 \in \Omega$ yra (5.14) sistemos pusiausvyros taškas, t.y. $f(x_0) = 0$. Be to, tegu $x_0 = 0$. Priešingu atveju koordinačių pradžią perkeliame į tašką x_0. Išskleidę funkciją f Teiloro formule taško $x = 0$ aplinkoje, (5.14) sistemą perrašysime taip:

$$\dot{x} = Ax + q(x), \quad x \in \Omega; \tag{5.15}$$

čia $A = f_x(0) \in \mathbb{R}^{2,2}$ – pastovioji matrica su koeficientais $a_{ij} = \partial f_i(0)/\partial x_j$, q – vektorinė, tolydi taško $x = 0$ aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$|q(x)| \to 0, \quad \text{kai } |x| \to 0. \tag{5.16}$$

Atmetę (5.15) sistemoje narį $q(x)$, gausime (5.15) sistemos pirmąjį artinį

$$\dot{x} = Ax. \tag{5.17}$$

Jeigu matricos A determinantas $\det A \neq 0$ ir funkcija f tenkina aukščiau suformuluotas sąlygas, tai koordinačių pradžios taškas $x = 0$ yra izuoliotas (5.15) sistemos pusiausvyros taškas.

Tiesinė sistema $\dot{x} = Ax$ su $\det A \neq 0$ yra tiesiškai ekvivalenti vienai iš dešimties kanoninių sistemų (žr. 4.5 skyrelį). Jų faziniai portretai pavaizduoti 4.14 paveikslėlyje. Tiesines sistemas galima suskirstyti į keturias klases. Į pirmąją klasę patenka tokios sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra židinys arba mazgas[1] ir kiekvienas trajektorijos taškas artėja į pusiausvyros tašką, kai $t \to +\infty$. Į antrąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra balno taškas. Į trečiąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra židinys, arba mazgas ir kiekvienas trajektorijos taškas tolsta nuo pusiausvyros taško, kai $t \to +\infty$. Ir į ketvirtąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra centro taškas. Netiesinių sistemų pusiausvyros taškus taip pat patogu suskirstyti į klases pagal tai, kaip elgiasi sistemos trajektorijos šio taško aplinkoje.

Apibrėžimas. Sakysime, pusiausvyros taškas $x = 0$ yra (5.15) sistemos *traukos* taškas, jeigu egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad visi (5.15) sistemos sprendiniai $x = \varphi(t)$ yra apibrėžti $\forall t \geq 0$ arba $\forall t \leq 0$ ir $\varphi(t) \to 0$, kai $t \to \infty$ arba $t \to -\infty$, jeigu tik $|\varphi(0)| < \delta$. Traukos tašką vadinsime *židinio* tašku, jeigu visos trajektorijos $x = \varphi(t) \not\equiv 0$ yra spiralės. Židinio tašką vadinsime *taisyklingu* židinio tašku[2], jeigu kiekvienai trajektorijai, artėjančiai prie koordinačių

[1] Sakydami mazgo taškas čia turime omenyje arba taisyklingą mazgą, arba paprastą mazgą, arba išsigimusį mazgą.

[2] Tiesinę sistemą

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2, \quad \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0$$

pradžios, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$), reiškinys $t^{-1}|x(t)|$ artėja prie tam tikros konstantos c ir atvirkščiai, bet kuriai konstantai c egzistuoja toks netiesinės sistemos sprendinys $x = x(t)$, kad $t^{-1}|x(t)| \to c$, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$). Traukos tašką vadinsime *mazgo* tašku, jeigu visos trajektorijos $x = \varphi(t) \not\equiv 0$ turi liestinę taške $x = 0$, t.y. egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \theta_0; \quad (\text{arba } t \to -\infty)$$

čia $\theta_0 \in (-\infty, \infty)$. Mazgo tašką vadinsime *taisyklingu mazgu,* jeigu kiekvienam $\theta_0(\mod 2\pi)$ egzistuoja toks vienintelis sprendinys $x = \varphi(t)$, kad

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \theta_0. \quad (\text{arba } t \to -\infty)$$

Priešingu atveju mazgo tašką vadinsime netaisyklingu mazgu.

A p i b r ė ž i m a s. Pusiausvyros tašką $x = 0$ vadinsime (5.15) sistemos *sukimosi* tašku, jeigu kiekvienoje jo aplinkoje yra uždara trajektorija, supanti šį tašką. Sukimosi tašką vadinsime centro tašku, jeigu kiekviena tokia trajektorija, išskyrus $x = 0$, yra uždara.

Egzistuoja pusiausvyros taškai, kurie nėra nei traukos taškai, nei sukimosi taškai ir traukos taškai, kurie nėra nei židiniai, nei mazgai. Pavyzdžiui, *balno taškas* nėra nei traukos taškas, nei sukimosi taškas. Jį galima apibrėžti kaip pusiausvyros tašką į kurį artėja tik baigtinis skaičius trajektorijų, kai $t \to \infty$ arba $t \to -\infty$.

Tiesinei sistemai $\dot{x} = Ax$, $\det A \neq 0$, pusiausvyros taškas $x = 0$ yra traukos taškas tada ir tik tada, kai matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra abi teigiamos arba abi neigiamos. Pusiausvyros taškas $x = 0$ yra sukimosi taškas (centras) tada ir tik tada, kai matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys lygios nuliui. Netiesinei sistemai yra teisingas toks teiginys.

5.3 teorema. *Jeigu koordinačių pradžios taškas $x = 0$ yra* (5.17) *tiesinės sistemos traukos taškas, tai jis yra* (5.15) *netiesinės sistemos traukos taškas.*

Pasirodo, kad analogiškas teiginys yra teisingas ir tuo atveju, kai traukos taškas yra židinys. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

5.4 teorema. *Jeigu koordinačių pradžios taškas $x = 0$ yra* (5.17) *tiesinės sistemos židinio taškas, tai jis yra* (5.15) *netiesinės sistemos židinio taškas.*

$\triangleleft$ Taškas $x = 0$ yra (5.17) tiesinės sistemos židinio taškas, kai matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ yra kompleksinės ir $\alpha \neq 0$. Tarkime, matrica A turi kanoninį pavidalą, t.y.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ galima perrašyti taip: $\dot{r} = \alpha r$, $\dot{\varphi} = -\beta$. Išsprendę ją gausime, $r(t) = c_1 e^{\alpha t}$, $\varphi(t) = -\beta t + c_2$. Jeigu $\alpha < 0$ ir $\beta < 0$, tai $r(t) \to 0$, $\varphi(t) \to +\infty$, kai $t \to +\infty$. Be to, $\frac{\beta}{\alpha}\ln r(t) + \varphi(t) = c$, su tam tikra konstanta c. Ir atvirkščiai, bet kokiai konstantai c egzistuoja toks nagrinėjamos tiesinės sistemos sprendinys, kad $\frac{\beta}{\alpha}\ln r(t) + \varphi(t) = c$.

(priešingu atveju, neišsigimusios tiesinės transformacijos pagalba, suvedame ją į kanoninį pavidalą). Tada (5.15) sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \alpha x_1 + \beta x_2 + f_1(x), \\ \dot{x}_2 = & -\beta x_1 + \alpha x_2 + f_2(x) \end{cases} \tag{5.18}$$

arba polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$,

$$\begin{cases} \dot{r} = & \alpha r + o(r), \\ r\dot{\varphi} = & -\beta r + o(r). \end{cases}$$

Jeigu $\alpha < 0$, tai iš pirmosios lygties gauname, kad $r \to 0$, $t \to +\infty$. Todėl

$$\dot{\varphi} = -\beta t + o(1),$$

kai $t \to +\infty$. Kartu galime tvirtinti, kad kiekviena (5.18) netiesinės sistemos trajektorijai, prasidedančiai pakankamai arti koordinačių pradžios,

$$\varphi(t) = -\beta t + o(t),$$

kai $t \to +\infty$. Iš čia išplaukia, kad $\varphi(t) \to \pm\infty$, kai $t \to +\infty$. Ćia imame vieną iš ženklu $\pm$, priklausomai nuo to, koks yra β ženklas. Tačiau tai reiškia, kad bet kuri trajektorija, esanti pakankamai arti koordinačių pradžios ir nesanti pusiausvyros tašku $r = 0$, yra spiralė. $\triangleright$

Šioje teoremoje židinio tašką pakeisti į mazgo tašką negalima. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{\ln|x|}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{\ln|x|}$$

tenkina visas skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r, \quad \dot{\varphi} = 1/\ln r, \quad r \neq 0.$$

Išsprendę pirmąją lygtį, gausime

$$r(t) = c_1 e^{-t}, \quad c_1 > 0.$$

Taigi, kai $t \to +\infty$, $r \to 0$ ir

$$\dot{\varphi} = 1/(\ln c_1 - t).$$

Šios lygties sprendinys

$$\varphi(t) = -\ln(t - \ln c_1) + c_2 \to -\infty,$$

kai $t \to +\infty$. Todėl koordinačių pradžios taškas $r = 0$ yra netiesinės sistemos židinio taškas. Tačiau ją atitinkančiai tiesinei sistemai

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad x_2 = -x_2,$$

koordinačių pradžios taškas yra taisyklingas mazgo taškas.

Tiesinės sistemos židinio taškas (kartu jis yra ir taisyklingas židinio taškas) nebūtinai yra netiesinės sistemos taisyklingas židinio taškas. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{x_1}{\ln|x|}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_2}{\ln|x|}$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r + \frac{r}{\ln r}, \quad \dot{\varphi} = -1.$$

Išsprendę pirmąją lygtį, gausime

$$r(t)(1 - \ln r(t)) = ce^{-t}.$$

Kadangi $r(t) \to 0$, kai $t \to +\infty$, tai $r(t)e^t \to 0$, kai $t \to +\infty$ ir nagrinėjamos netiesinės sistemos pusiausvyros taškas yra netaisyklingas židinio taškas.

Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad nurodytų skyrelio pradžioje glodumo sąlygų funkcijai q nepakanka, kad tiesinės sistemos taisyklingas židinio (mazgo) taškas būtų ją atitinkančios netiesinės sistemos taisyklingu židinio (mazgo) tašku. Tarkime, ψ yra tolydi funkcija intervale $[0, a]$, tenkinanti sąlygas:

$$|q(x)| \le \psi(|x|); \quad \psi(r) = o(r), \text{ kai } r \to 0; \int_0^a \frac{\psi(r)}{r^2}\,dr < \infty. \tag{5.19}$$

Tada yra teisinga tokia teorema.

5.5 **teorema.** *Jeigu funkcija q tenkina (5.19) sąlygas ir koordinačių pradžios taškas yra (5.17) tiesinės sistemos židinio taškas (taisyklingas mazgo taškas), tai jis yra ir netiesinės sistemos taisyklingas židinio taškas (taisyklingas mazgo taškas).*

P a s t a b a . Jeigu funkcija q tenkina sąlygą

$$q(x) = O(|x|^{1+\varepsilon}),$$

kai $|x| \to 0$, tai ji tenkina ir (5.19) sąlygas. Kartu tokiai funkcijai yra teisinga pastaroji teorema.

Tarkime toliau, kad koordinačių pradžios taškas yra (5.15) tiesinės sistemos centro taškas. Iš pradžių išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. Netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1|x|, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2|x|$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r^2, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Išsprendę šią sistemą, gausime, kad trajektorija, laiko momentu $t = 0$ einanti per tašką (r_0, t_0), $r_0 \neq 0$, apibrėžiama formule

$$r(t) = (t + r_0^{-1})^{-1}, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0.$$

Todėl $r(t) \to 0$, kai $t \to +\infty$. Taigi koordinačių pradžios taškas yra netiesinės sistemos židinio taškas. Tačiau ją atitinkančiai tiesinei sistemai

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

koordinačių pradžios taškas yra centro taškas.

2. Netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1|x|^2 \sin(\pi/|x|), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2|x|^2 \sin(\pi/|x|)$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Be to, šios sistemos dešinės pusės turi tolydžias dalines išvestines. Todėl tokia sistema tenkina vienaties teoremos sąlygas, t.y. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$, egzistuoja vienintelis sprendinys, tenkinantis sąlygą $x(0) = x_0$.

Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = r^3 \sin(\pi/r), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Iš pirmos lygties gauname, kad apskritimai $r(t) = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$ yra uždaros šios sistemos trajektorijos. Be to,

$$\dot{r} > 0, \quad \text{kai } r > 1, \text{arba } \frac{1}{2k+1} < r < \frac{1}{2k},$$

$$\dot{r} < 0, \quad \text{kai } \frac{1}{2k} < r < \frac{1}{2k-1},$$

$\forall k = 1, 2, \dots$ Taigi visos trajektorijos, išskyrus apskritimus $r(t) = 1/k$, nėra uždaros ir nekerta šių apskritimų. Funkcijos r ir φ, apibrėžiančios neuždaras trajektorijas, yra monotoninės. Todėl jos vyniojasi apie apskritimus $r(t) = 1/k$, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$) ir $r(t) \to +\infty$, kai $t \to +\infty$, jeigu $r > 1$. Todėl koordinačių pradžios taškas yra sukimosi taškas.

Taigi, jeigu koordinačių pradžios taškas tiesinei sistemai yra sukimosi (centro) taškas, tai netiesinei sistemai jis yra židinys arba sukimosi taškas. Pasirodo, kad kitokių atvejų būti negali. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

5.6 teorema. *Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra (5.17) tiesinės sistemos sukimosi (centro) taškas. Tada jis yra netiesinės sistemos sukimosi taškas arba židinys.*

Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra (5.17) tiesinės sistemos netaisyklingas mazgo taškas. Be to, tegu ši sistema turi kanoninį pavidalą, t.y.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ir $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Tada yra teisinga tokia teorema.

5.7 **teorema.** *1. Kiekviena (5.15) netiesinės sistemos trajektorija, einanti pakankamai arti koordinačių pradžios, artėja prie koordinačių pradžios kampu $\varphi = 0$, $\pi/2$, π, arba $3\pi/2$. Be to, egzistuoja be galo daug trajektorijų, artėjančių į koordinačių pradžią kampu $\varphi = 0$ ir π.*

2. *Egzistuoja bent viena trajektorija, artėjanti į koordinačių pradžią kampu $\varphi = \pi/2$ ir kampu $\varphi = 3\pi/2$.*

3. *Jeigu dalinės išvestinės q_{1x_1} ir g_{2x_1} egzistuoja ir yra tolydžios kokioje nors koordinačių pradžios taško aplinkoje, tai egzistuoja lygiai po vieną trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu $\varphi = \pi/2$ ir $\varphi = 3\pi/2$.*

Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra (5.17) tiesinės sistemos balno taškas. Be to, tegu ši sistema turi kanoninį pavidalą, t.y. matrica

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ir $\lambda_1 < \lambda_2$. Tada yra teisinga tokia teorema.

5.8 **teorema.** *Egzistuoja bent po vieną (5.15) netiesinės sistemos trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu $\varphi = 0$ ir kampu $\varphi = \pi$. Be to, jeigu dalinės išvestinės q_{1x_2} ir q_{2x_2} egzistuoja ir yra tolydžios kokioje nors koordinačių pradžios taško aplinkoje, tai egzistuoja lygiai po vieną trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu $\varphi = 0$ ir $\varphi = \pi$. Visos kitos pakankamai artimos joms trajektorijos tolsta nuo jų, kai $t \to +\infty$.*

Šių teoremų įrodymą galima rasti [5] knygoje.

P a s t a b a. Jeigu (5.15) sistemoje matricos A determinantas lygus nuliui, tai įrodytais teiginiais pasinaudoti negalima. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2$$

turi vienintelį pusiausvyros tašką $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, o jos pirmasis artinys

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

turi visą tiesę pusiausvyros taškų $x_2 = 0$.

A p i b r ė ž i m a s. Uždarą trajektoriją γ vadinsime *ribiniu ciklu*, jeigu kiek norima mažoje jos aplinkoje nėra kitų uždarų trajektorijų.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad ne bet kokia uždara trajektorija yra ribinis ciklas ir ne visi ribiniai ciklai elgiasi vienodai. Išskirsime tris skirtingas ribinių ciklų klases:

1. Ribinį ciklą γ vadinsime *stabiliu*, jeigu visos pakankamai artimos jam trajektorijos viniojasi apie γ iš abiejų pusių.

2. Ribinį ciklą γ vadinsime *nestabiliu,* jeigu visos pakankamai artimos jam trajektorijos nusivynioja nuo γ iš abiejų pusių.

3. Ribinį ciklą γ vadinsime *pusiaustabiliu,* jeigu visos pakankamai artimos jam trajektorijos iš vienos pusės γ nusivynioja nuo jo, o iš kitos pusės ją apsivynioja.

P a v y z d y s. Nagrinėsime netiesinę autonominę sistemą

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \mu x_1 - x_2 - x_1 \cdot |x|^2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 + \mu x_2 - x_2 \cdot |x|^2, \end{cases} \quad \mu \in (-\infty, \infty).$$

Polinėse koordinatėse

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$$

šią sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{r} = & r(\mu - r^2), \\ \dot{\varphi} = & 1. \end{cases}$$

Kiekvienai parametro $\mu \in (-\infty, \infty)$ reikšmei pastaroji sistema turi sprendinį

$$r = 0, \quad \varphi = t + c.$$

Kai $\mu = 0$, turime sprendinį

$$\frac{1}{2} r^{-2} = t + c.$$

Kai $\mu \neq 0$, šios sistemos sprendinys apibrėžiamas formule

$$\frac{1}{\mu} \ln \frac{r}{\sqrt{|r^2 - \mu|}} = t + c.$$

Be to, kai $\mu > 0$, sistema turi dar vieną sprendinį

$$r = \sqrt{\mu}.$$

Bet kuriai parametro μ reikšmei koordinačių pradžios taškas yra nagrinėjamos sistemos pusiausvyros taškas.

Tegu $\mu \leq 0$. Tada $\dot{r} < 0$, kai $r \neq 0$ ir $\dot{r} = 0$, kai $r = 0$. Šiuo atveju visos trajektorijos, išskyrus koordinačių pradžios tašką, yra spiralės ir kiekviena iš jų vyniojasi apie koordinačių pradžią, kai $t \to +\infty$.

Tegu $\mu > 0$. Tada $\dot{r} > 0$, kai $r \in (0, \sqrt{\mu})$ ir $\dot{r} < 0$, kai $r > \mu$. Todėl koordinačių pradžios taškas yra nestabilus židinys bet kuriai kitai trajektorijai, esančiai skritulyje $r < \sqrt{\mu}$. Be to, visos šios trajektorijos vyniojasi apie apskritimą $r = \sqrt{\mu}$, kai $t \to +\infty$. Todėl šis apskritimas yra stabilus ribinis ciklas bet kuriai trajektorijai išskyrus pusiausvyros tašką $r = 0$.

Nagrinėjant realius uždavinius svarbiausios yra tos ribinės aibės taškų, kurios pritraukia trajektorijas, t.y. tokios aibės, kai bet kuri trajektorija, esanti tam tikroje traukos srityje, didėjant t artėja prie ribinės aibės. Tokios aibės vadinamos *atraktoriais.* Atraktoriais gali būti pusiausvyros taškai arba ribiniai ciklai.

P a s t a b a. Kai $n \geq 3$ autonominių sistemų ribinių aibių struktūra iki galo dar nėra ištirta. Netgi nėra ištirti visi galimi atraktoriai. Yra žinoma, kad be įprastų atraktorių, tokių kaip pusiausvyros taškai, ribiniai ciklai arba k-mačiai torai, egzistuoja dar taip vadinami *keisti atraktoriai.* Tai yra aprėžtos, pritraukiančios ribinės aibės, sudėtingos struktūros. Fazinės trajektorijos čia yra begalinės, niekur nesikertančios, trajektorijos. Be to, kai $t \to +\infty$ šios trajektorijos nepalieka tam tikros uždaros srities ir neartėja prie įprastų atraktorių. Keisti atraktoriai iš esmės skiriasi nuo įprastų. Kai $n \leq 2$, keisti atraktoriai neegzistuoja. Netiesinių svyravimų teorijoje tokį įprastą atraktorių kaip ribinį ciklą atitinka periodinis svyravimas, o keistą atraktorių atitinka chaotiniai auto svyravimai. Jų aprašymui naudojami terminai "determinuotas chaosas," "stochastinė dinamika" ir t.t.

6 SKYRIUS

Dalinių išvestinių lygtys

6.1 TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ SU DVIEM NEPRIKLAUSOMAIS KINTAMAISIAIS SUVEDIMAS Į KANONINĮ PAVIDALĄ

Tiesinę antros eilės lygtį

$$a(x,y)u_{xy} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \ldots = 0 \tag{6.1}$$

su dviem nepriklausomais kintamaisiais taško (x_0, y_0) aplinkoje galima suvesti į kanoninį pavidalą. Tarkime, funkcijos a, b ir c ir jų pirmosios eilės dalinės išvestinės yra tolydžios kurioje nors taško (x_0, y_0) aplinkoje U.

Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarykime kvadratinę formą

$$\Lambda(x,y,\xi,\eta) = a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2. \tag{6.2}$$

Kiekviename fiksuotame aplinkos U taške (x,y) šią formą galima suvesti į kanoninį pavidalą. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad (6.2) kvadratinės formos, suvestos į kvadratų sumą, teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui koeficientų skaičius lygus atitinkamai teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui charakteristinio polinomo

$$\begin{vmatrix} a(x,y) - \lambda & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

šaknų skaičiui. Jeigu charakteristinio polinomo šaknis pažymėsime $\lambda_1(x,y)$ ir $\lambda_2(x,y)$, tai jų sandauga

$$\lambda_1(x,y)\lambda_2(x,y) = a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y). \tag{6.3}$$

Galimi tokie atvejai:

1. Šaknys λ_1, λ_2 yra vienodų ženklų ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai

   $$b^2 - ac < 0. \tag{6.4}$$

   Šiuo atveju (6.1) lygtis yra vadinama *elipsine* lygtimi

2. Šaknys λ_1, λ_2 turi skirtingus ženklus ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai

   $$b^2 - ac > 0. \tag{6.5}$$

   Šiuo atveju (6.1) lygtis yra vadinama *hiperboline* lygtimi.

3. Kuri nors iš šaknų λ_1, λ_2 lygi nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai

$$b^2 - ac = 0. \tag{6.6}$$

Šiuo atveju (6.1) lygtis yra vadinama *paraboline* lygtimi.

P a s t a b a. Šaknys λ_1, λ_2 vienu metu negali būti lygios nuliui. Jeigu abi šaknys yra lygios nuliui, tai lengvai galima įsitikinti, kad koeficientai a, b ir c taip pat yra lygūs nuliui. O tai prieštarauja tam, kad (6.1) lygtis yra antros eilės lygtis.

Vietoje kintamųjų x, y apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Tarkime, funkcijos ξ ir η aplinkoje U yra dukart diferencijuojamos, o jakobianas

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada funkcijos u išvestinės

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.$$

Pasinaudoję šiomis formulėmis, (6.1) lygtį perrašysime taip:

$$A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + \ldots = 0; \tag{6.7}$$

čia koeficientai

$$A(\xi, \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$

$$C(\xi, \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,$$

$$B(\xi, \eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y.$$

Tiesiogiai galima įrodyti, kad

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}^2. \tag{6.8}$$

Ši lygybė (dvimačiu atveju) parodo, kad neišsigimusi transformacija lygties tipo nekeičia.

Funkcijas ξ ir η parinksime taip, kad (6.7) lygtis įgytų paprasčiausią pavidalą. Taip bus tada ir tik tada, kai dalis (6.7) lygties koeficientų prie antros eilės išvestinių bus lygi nuliui. Prilyginę nuliui koeficientą A, gausime lygtį

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \tag{6.9}$$

Šią lygtį atitinka charakteristikų lygtis

$$ay'^2 - 2by' + c = 0. \tag{6.10}$$

Išnagrinėsime tris galimus atvejus:

1. Tegu (6.1) lygtis yra hiperbolinė. Tada charakteristinė lygtis turi du skirtingus integralus

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}.$$

Pagal prielaidą funkcijos a, b ir c yra tolydžiai diferencijuojamos taško (x_0, y_0) aplinkoje U. Iš bendrosios paprastų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcijos φ ir ψ yra dukart diferencijuojamos aplinkoje U (aplinka U iš anksto paimta pakankamai maža). Todėl naujus nepriklausomus kintamuosius ξ ir η galima apibrėžti taip:

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Atlikus tokią transformaciją (6.7) lygtyje, koeficientai A ir C bus lygūs nuliui. Be to, lengvai galima įsitikinti, kad tokios transformacijos jakobianas yra nelygus nuliui. Remiantis (6.8) formule galima tvirtinti, kad koeficientas $B \neq 0$. Padalijię (6.7) lygtį iš $2B$, suvesime ją į antrąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0. \tag{6.11}$$

Keitiniu

$$\xi = \tilde{\xi} + \tilde{\eta}, \quad \eta = \tilde{\xi} - \tilde{\eta}$$

(6.11) lygtis susiveda į pirmąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\tilde{\xi}\,\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\,\tilde{\eta}} + \ldots = 0. \tag{6.12}$$

P a s t a b a. Lygtį, kurią galima suvesti į (6.11) pavidalą, kartais pasiseka suintegruoti, t.y. rasti formulę, apibrėžiančią visus lygties sprendinius.

P a v y z d y s. Rasti lygties

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

bendrąjį sprendinį. Tai yra hiperbolinė lygtis. Ji yra pirmojo kanoninio pavidalo. Keitiniu

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

ši lygtis susiveda į lygtį

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

kuri yra antrojo kanoninio pavidalo. Tegu $u_\xi = v$. Tada

$$v_\eta = 0.$$

Šios lygties bendrasis integralas yra $v = f(\xi)$, f – bet kokia diferencijuojama funkcija. Integruodami lygtį

$$u_\xi = f(\xi),$$

gausime

$$u = \int f(\xi)\, d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta);$$

čia φ ir ψ – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Grižę prie senų kintamųjų x ir y, gausime nagrinėjamosios lygties bendrą sprendinį:

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y).$$

2. Tarkime, aplinkoje U reiškinys

$$b^2 - ac = 0. \tag{6.13}$$

Šiuo atveju (6.1) lygtis yra parabolinė, o charakteristinė lygtis turi vieną bendrą integralą

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

Iš bendrosios diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcija φ aplinkoje U yra dukart tolydžiai diferencijuojama. Laisvai parinkime kokią nors diferencijuojamą aplinkoje U funkciją ψ tokią, kad jakobianas

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.14}$$

(jeigu $\varphi_y \neq 0$, tai galima imti $\psi(x, y) = x$).

Vietoje kintamųjų x ir y apibrėžkime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Kadangi funkcija φ tenkina (6.9) lygtį, tai (6.7) lygtyje koeficientas $A = 0$. Iš (6.8) formulės, (6.13) sąlygos išplaukia, kad koeficientas $B = 0$. Įrodysime, kad koeficientas $C \neq 0$. Jeigu koeficientas C būtų lygus nuliui, tai (6.7) lygtis būtų pirmosios eilės lygtis. Perėję joje nuo kintamųjų ξ ir η prie senų kintamųjų x ir y, gausime (6.1) lygtį, kuri yra antros eilės lygtis. Tačiau padarius nepriklausomų kintamųjų transformaciją, lygties eilė nepadidėja. Gauta prieštara rodo, kad $C \neq 0$. Todėl, padaliję (6.7) lygtį iš C, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{6.15}$$

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastarosios lygties nariai, pažymėti daugtaškiu, turi priklausyti nuo u_ξ. Priešingu atveju į šią lygtį galima žiūrėti kaip į paprastą diferencialinę lygtį, kurios kintamasis ξ yra laisvasis parametras.

3. Tarkime, aplinkoje U reiškinys

$$b^2 - ac < 0. \tag{6.16}$$

Šiuo atveju (6.1) lygtis yra elipsinė, o charakteristinė lygtis turi du kompleksiškai jungtinius bendrus integralus. Tegu

$$p(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$

čia: φ – realioji, o ψ – menamoji funkcijos p dalys. Vietoje kintamųjų x ir y galima įvesti naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Atlikus tokią transformaciją, (6.7) lygties koeficientas B bus lygus nuliui, o koeficientai A ir C sutaps. Norint tuo įsitikinti, reikia atskirti realiąją ir menamąją lygties

$$ap_x^2 + 2bp_xp_y + cp_y^2 = 0$$

dalis ir pastebėti, kad

$$A = C = \frac{1}{a}(ac - b^2)(\varphi_y^2 + \psi_y^2) \neq 0.$$

Taigi padaliję (6.7) lygtį iš bendros koeficientų A ir C reikšmės, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{6.17}$$

6.2 PAGRINDINIAI UŽDAVINIAI

Daugelis fizikos ir mechanikos uždavinių aprašomi antros eilės lygtimis. Paprasčiausios iš jų yra:

1. *Puasono* (elipsinė) lygtis
$$\Delta u = -f(x)$$
arba, kai $f = 0$, *Laplaso* lygtis
$$\Delta u = 0;$$
čia: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Šios lygtys aprašo įvairius stacionariuosius procesus ir pusiausvyros uždavinius.

2. *Šilumos laidumo* (parabolinė) lygtis
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti įvairius šiluminius procesus izotropiniame vienalyčiame kūne.

3. *Bangavimo* (hiperbolinė) lygtis
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti garso, elektromagnetinių bangų, hidrodinamikos, stygos ir membranos svyravimų procesus.

Šios lygtys yra geriausiai išnagrinėtos, ir su jomis dažniausiai tenka susidurti spendžiant praktinius uždavinius. Suformuluosime šioms lygtims tris pagrindinius uždavinių tipus.

1. K o š i u ž d a v i n y s formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Šilumos laidumo lygties atveju reikia rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradinę sąlygą
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$
Bangavimo lygties atveju Koši uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradines sąlygas
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$
Kraštinių sąlygų šiuose uždaviniuose nėra.

2. Kraštinis uždavinys formuluojamas Puasono arba Laplaso lygtims. Abiem atvejais reikia rasti funkciją u, kuri srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų Puasono (Laplaso) lygtį

$$\Delta u = -f(x) \quad (\Delta u = 0),$$

ir paviršiaus $S = \partial\Omega$ taškuose vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\big|_S = \varphi(x) \text{ – } \textit{pirmoji kraštinė} \text{ sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x) \text{ – } \textit{antroji kraštinė} \text{ sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x) \text{ – } \textit{trečioji kraštinė} \text{ sąlyga};$$

čia $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė išorinės normalės kryptimi. Pradinių sąlygų nėra.

Jeigu Laplaso lygtis nagrinėjama kartu su pirmąja kraštine sąlyga, tai toks uždavinys vadinamas *pirmuoju*, arba *Dirichlė*, uždaviniu, jeigu su antrąja – *antruoju*, arba *Noimano,* uždaviniu, o jeigu su trečiąja – *trečiuoju* kraštiniu uždavinu.

3. Mišrusis uždavinis formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Reikia rasti funkciją u, kuri cilindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų šilumos laidumo

$$u_t - a^2\Delta u = f(x,t)$$

arba bangavimo

$$u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t)$$

lygtį, atitinkamas pradines sąlygas (žr. Koši uždavinį) ir vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\big|_S = \varphi(x,t) \text{ – } \textit{pirmoji kraštinė} \text{ sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x,t) \text{ – } \textit{antroji kraštinė} \text{ sąlyga},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x,t) \text{ – } \textit{trečioji kraštinė} \text{ sąlyga}.$$

6.3 CHARAKTERISTIKŲ METODAS

Ieškosime vienmatės bangavimo lygties

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{6.18}$$

sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}; \tag{6.19}$$

čia $f,\ \varphi,\ \psi$ – žinomos funkcijos.

Bangavimo lygtį atitinka charakteristikų lygtis $x'^2 - a^2 = 0$. Integruodami ją, randame dvi charakteristikų klases:

$$x - at = \text{const}, \qquad x + at = \text{const}. \tag{6.20}$$

Kadangi (6.18), (6.19) Koši uždavinys yra tiesinis, tai jį patogu išskaidyti į du paprastesnius Koši uždavinius:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{6.21}$$

ir

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0. \tag{6.22}$$

Iš pradžių rasime (6.21) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu vietoje kintamųjų x ir t apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

Tada homogeninė bangavimo lygtis virs lygtimi

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$u = c_1(\xi) + c_2(\eta);$$

čia c_1 ir c_2 – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Įstatę į šitą formulę vietoje kintamųjų ξ ir η jų išraiškas kintamaisiais x ir t, gausime homogeninės bangavimo lygties bendrąjį sprendinį

$$u = c_1(x - at) + c_2(x + at). \tag{6.23}$$

Funkcijas c_1 ir c_2 parinksime taip, kad funkcija u tenkintų (6.19) pradines sąlygas, t.y. pareikalausime, kad funkcijos c_1 ir c_2 tenkintų lygčių sistemą

$$c_1(x) + c_2(x) = \varphi(x),$$

$$-ac_1'(x) + ac_2'(x) = \psi(x).$$

Suintegravę antrąją lygtį, gausime dviejų lygčių su dviem nežinomomis funkcijomis sistemą. Šios sistemos sprendiniai

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\tau)\,d\tau - \frac{\mathrm{c}}{2a},$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\tau)\,d\tau + \frac{\mathrm{c}}{2a};$$

čia c – laisvoji konstanta. Pirmoje formulėje argumentą x pakeiskime $x - at$, o antroje formulėje $x + at$. Įstatę gautas funkcijų c_1, c_2 išraiškas į (6.23) formulę, gausime (6.21) Koši uždavinio sprendinį

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,d\tau. \tag{6.24}$$

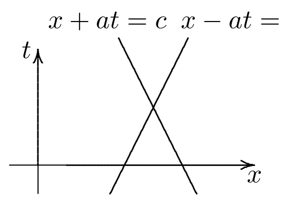
Pastaroji formulė vadinama *Dalambero* formule.

Tarkime, funkcija ψ yra diferencijuojama, o funkcija φ – dukart diferencijuojama. Tada funkcija u, apibrėžta (6.24) formule, yra dukart diferencijuojama, tenkina homogeninę bangavimo lygtį ir (6.19) pradines sąlygas. Be to, jeigu šitos sąlygos yra patenkintos, tai iš (6.24) formulės išplaukia, kad (6.21) Koši uždavinio sprendinys yra vienintelis.

P a s t a b a. Jeigu (6.21) Koši uždavinio sprendinys nagrinėjamas tik trikampyje, apribotame tiesėmis

$$x - at = \mathrm{const},\ x + at = \mathrm{const},\ t = 0,$$

tai (6.19) pradines sąlygas pakanka apibrėžti tik šio trikampio pagrinde (žr. 6.2 pav.).



6.2 pav.

Rasime (6.22) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu kiekvienam $\tau > 0$ sudarome pagalbinį uždavinį:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > \tau, \tag{6.25}$$

$$v|_{t=\tau} = 0,\ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{6.26}$$

Jeigu funkcija f yra diferencijuojama, tai pagal Dalambero formulę (6.25), (6.26) Koši uždavinio sprendinys

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy.$$

Parodysime, kad funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau \tag{6.27}$$

yra (6.22) Koši uždavinio sprendinys. Kadangi funkcija v yra (6.25), (6.26) Koši uždavinio sprendinys, tai

$$u_t = v(x,t,t) + \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} = v_t(x,t,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) + \int\limits_0^t \big[v_{tt}(x,t,\tau) - a^2 v_{xx}(x,t,\tau)\big]\,d\tau = f(x,t).$$

Taigi funkcija u, apibrėžta (6.27) formule, yra (6.22) Koši uždavinio sprendinys[1].

[1]Šitas metodas vadinamas Diuamelio principu. Jo esmė yra ta, kad tiesinės nehomogeninės dalinių išvestinių lygties Koši arba mišraus uždavinio su nulinėmis pradinėmis sąlygomis sprendinį galima išreikšti atitinkamu homogeninės lygties sprendiniu. Pavyzdžiui, Koši uždavinio

$$u_{tt} + Lu = f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0$$

sprendinį galima išreikšti formule

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau,$$

kurioje $v(x,t,\tau)$ yra Koši uždavinio

$$v_{tt} + Lv = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > \tau,$$
$$v|_{t=\tau} = 0,\ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

sprendinys, o L – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo t ir kuriame kintamojo t atžvilgiu yra ne aukštesnės kaip pirmos eilės išvestinės. Analogiškai yra konstruojamas ir Koši uždavinio

$$u_t + Mu = f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0$$

sprendinys. Čia M – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t ir kuriame yra išvestinės tik pagal kintamuosius x.

Akivaizdu, kad (6.21), (6.22) Koši uždavinių sprendinių suma, t.y. funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{6.28}$$

yra (6.18), (6.19) Koši uždavinio sprendinys. Funkcija u yra dukart diferencijuojama, jeigu funkcijos ψ ir f yra diferencijuojamos, o funkcija φ – dukart diferencijuojama.

P a s t a b a. Naudojant (6.23) formulę, galima rasti ne tik Koši, bet ir mišraus uždavinio sprendinį. Sprendžiant mišrųjį uždavinį, reikia turėti omenyje tai, kad funkcijos c_1 ir c_2 apibrėžtos ne visoms argumentų reikšmėms. Argumentai $x - at$ ir $x + at$ gali ir nepriklausyti funkcijų $c_1,\ c_2$ apibrėžimo sritims. Taigi, sprendžiant mišrų uždavinį, reikia tinkamai pratęsti funkcijas $c_1,\ c_2$ arba (tai visiškai ekvivalentu) φ ir ψ.

6.4 FURJĖ ARBA KINTAMŲJŲ ATSKYRIMO METODAS

Kintamųjų atskyrimo metodą galima taikyti gana plačiai tiesinių lygčių klasei. Lygtis $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ priklauso šiai klasei, jeigu diferencialinių operatorių M ir N koeficientai yra skirtingų kintamųjų funkcijos ir ieškomosios funkcijos u išvestinės įeina į reiškinius $\mathrm{M}u$ ir $\mathrm{N}u$ tik pagal skirtingus kintamuosius. Tarkime, v ir w yra funkcijos, priklausančios nuo šių skirtingų kintamųjų ir $u = v\,w$. Tada lygtį $\mathrm{M}v\,w + \mathrm{N}v\,w = 0$ galima suskaidyti į dvį lygtis. Šių lygčių atskirųjų sprendinių sandauga yra atskirasis lygties $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ sprendinys. Bendrąjį sprendinį gausime paėmę tokių sprendinių tiesinį darinį.

Tegu Δ yra vienmatis Laplaso operatorius, t.y. $\Delta = u_{xx}$. Rasime vienmatės bangavimo lygties

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (a, b),\ t > 0, \tag{6.29}$$

sprendinį, tenkinantį pradines

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [a, b] \tag{6.30}$$

ir kraštines

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = 0, \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0 \tag{6.31}$$

sąlygas.

Tegu $u = v(x)T(t)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (6.29) lygtį ir atskyrę kintamuosius, gausime

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x)}{v(x)}.$$

Kairėje šios lygybės pusėje yra kintamojo t, o dešinėje – kintamojo x funkcija. Šios funkcijos sutampa tik tuo atveju, kai jos yra konstantos. Pažymėkime bendrąją jų reikšmę raide $-\lambda$. Tada funkcija $u = v\,T$ yra (6.29) lygties sprendinys, jeigu funkcija T yra lygties

$$T'' + \lambda\, T = 0, \tag{6.32}$$

o funkcija v – lygties

$$-v_{xx} = \lambda\, v \tag{6.33}$$

sprendinys. Be to, funkcija $u = v\,T$ tenkins (6.31) kraštines sąlygas, jeigu šias sąlygas tenkins funkcija v. Taigi funkcijai v gavome *Šturmo–Liuvilio* uždavinį: rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus (6.33) lygties sprendinys, tenkinantis kraštines sąlygas

$$v + \alpha\, v_x\big|_{x=a} = 0, \quad v + \beta\, v_x\big|_{x=b} = 0. \tag{6.34}$$

Tokios parametro λ reikšmės vadinamos *tikrinėmis reikšmėmis*, o jas atitinkantys netrivialūs sprendiniai –*tikrinėmis finkcijomis*.

Tegu $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra (6.33), (6.34) uždavinio tikrinės reikšmės ir $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – jas atitinkančios tikrinės funkcijos, ortonormuotos erdvėje $L_2(a,b)$. Kiekvienam $\lambda=\lambda_k$ rasime bendrąjį (6.32) lygties sprendinį. Neigiamiems λ_k

$$T_k = C_{1k}e^{-\sqrt{|\lambda_k|}\,t} + C_{2k}e^{\sqrt{|\lambda_k|}\,t}.$$

Teigiamiems λ_k

$$T_k = C_{1k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + C_{2k}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t.$$

Tuo atveju, kai $\lambda_k = 0$,

$$T_k = C_{1k} + t\,C_{2k}.$$

Kiekviena iš funkcijų v_kT_k, $k=1,2,\dots$, tenkina (6.29) lygtį ir (6.31) kraštines sąlygas. Todėl funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)v_k(x)$$

taip pat tenkina (6.29) lygtį ir (6.31) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (6.30) pradines sąlygas, gausime

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m}\big(a_k\mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t\big)v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\big(a_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\big)v_k(x); \tag{6.35}$$

čia: m – neteigiamų tikrinių reikšmių skaičius, $a_k=(\varphi,v_k)$, $b_k=(\psi,v_k)$ – funkcijų φ ir ψ Furjė koeficientai. Jeigu tikrinė reikšmė $\lambda_m=0$, tai (6.35) formulėje vietoje funkcijų $\mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ ir $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_m|}}\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ reikia imti atitinkamai 1 ir t.

Žinant (6.33), (6.34) uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas, lengvai galima rasti ir nehomogeninės lygties

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad x\in(a,b),\ t>0, \tag{6.36}$$

sprendinį, tenkinantį homogenines pradines

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x\in[a,b] \tag{6.37}$$

ir (6.31) kraštines sąlygas. Jo ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\,v_k(x).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją u į (6.36) lygtį, gausime

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(F_k''(t) + \lambda_kF_k(t)\big)\,v_k(x) = f(x,t).$$

Funkcijos v_k yra tiesiškai nepriklausomos (įrodykite). Todėl funkcija F_k, $\forall k = 1, 2, \dots,$ turi tenkinti paprastąją diferencialinę lygtį

$$F_k''(t) + \lambda_k F_k(t) = f_k(t); \tag{6.38}$$

čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai kintamojo x atžvilgiu. Be to, iš (6.37) išplaukia, kad funkcija F_k turi tenkinti pradines sąlygas

$$F_k(0) = 0, \quad F_k'(0) = 0. \tag{6.39}$$

Nehomogeninės (6.38) lygties sprendinys, tenkinantis (6.39) pradines sąlygas,

$$F_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k > m, \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k \le m. \end{cases}$$

Todėl formalų (6.36), (6.37), (6.31) uždavinio sprendinį galima išreikšti eilute

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau. \tag{6.40}$$

Bendruoju atveju nehomogeninės (6.36) lygties sprendinio, tenkinančio (6.30) pradines ir nehomogenines kraštines sąlygas

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = \nu(t), \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = \mu(t), \quad t \ge 0, \tag{6.41}$$

galima ieškoti tokiu pavidalu:

$$u = w + \omega.$$

Šiuo atveju funkciją ω reikia parinkti taip, kad ji tenkintų (6.41) kraštines sąlygas. Tada funkcijai w gausime kraštinį uždavinį

$$\begin{aligned} &w_{tt} - w_{xx} = f - \omega_{tt} + \omega_{xx}, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \\ &w\big|_{t=0} = \varphi - \omega\big|_{t=0}, \quad w_t\big|_{t=0} = \psi - \omega_t\big|_{t=0}, \quad x \in [a,b], \\ &w + \alpha\, w_x\big|_{x=a} = 0, \quad w + \beta\, w_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \ge 0, \end{aligned}$$

su homogeninėm kraštinėm sąlygom. Savo ruožtu šį uždavinį galima išskaidyti į du uždavinius taip, kad vieno uždavinio pradinė ir kraštinė sąlygos būtų homogeninės, o kito lygtis ir kraštinė sąlyga būtų homogeninės.

Išnagrinėsime vienmatės šilumos laidumo lygties atvejį. Iš pradžių rasime lygties

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{6.42}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [a, b], \tag{6.43}$$

ir (6.31) kraštines sąlygas. Šiuo atveju vietoje (6.32) lygties gausime diferencialinę lygtį

$$T' + \lambda T = 0, \tag{6.44}$$

o (6.33) lygtis ir (6.34) kraštinės sąlygos išliks tos pačios.

Kai $\lambda = \lambda_k$, bendrasis (6.44) lygties sprendinys

$$T_k(t) = C_k\, e^{-\lambda_k t}.$$

Todėl funkcija $u_k = v_k\, T_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$, tenkina (6.42) lygtį ir (6.31) kraštines sąlygas. Tačiau tada funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t} v_k(x)$$

taip pat tenkins (6.42) lygtį ir (6.31) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (6.43) pradinę sąlygą, gausime formulę

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-\lambda_k t}\, v_k(x), \tag{6.45}$$

kurioje $a_k = (\varphi, v_k)$ yra funkcijos φ Furjė koeficientai.

Nehomogeninės lygties

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (a, b),\ t > 0, \tag{6.46}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a, b], \tag{6.47}$$

ir (6.31) kraštines sąlygas, galima išreikšti eilute

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, F_k(t), \tag{6.48}$$

kurioje

$$F_k(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, f_k(\tau)\, d\tau$$

yra Koši uždavinio

$$F_k' + \lambda_k\, F_k = f_k(t), \quad F_k(0) = 0,$$

sprendinys. Čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai.

Bendruoju atveju (6.46) lygties sprendinį, tenkinantį (6.43) pradinę ir (6.41) kraštines sąlygas, galima rasti lygiai taip pat kaip ir bangavimo lygties atveju.

P a s t a b a. Vietoje vienmačio Laplaso operatoriaus čia galima imti dvimatį, trimatį ir aplamai n-matį Laplaso operatorių. Reikia tik rasti atitinkamo Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas. Be to, vietoje Laplaso operatoriaus galima imti bet kokį bendresnį tiesinį elipsinį operatorių, kurio koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t.

P a v y z d ž i a i:

1. Kintamųjų atskyrimo metodu rasime kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,l), \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{6.49}$$

sprendinį. Atskirojo bangavimo lygties sprendinio ieškome pavidalu $u = v(x)T(t)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į lygtį ir atskyrę kintamuosius gausime lygybę

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Ji yra teisinga tik tuo atveju, kai abi jos pusės yra pastovios. Pažymėkime bendrą jų reikšmę $-\lambda$. Tada funkcijai T gausime lygtį

$$T'' + \lambda T = 0,$$

o funkcijai v lygtį

$$-v_{xx} = \lambda v.$$

Be to, funkcija v dar turi tenkinti kraštines sąlygas

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Teigiamoms λ reikšmėms pastaroji lygtis turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius

$$v_1 = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad v_2 = \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Todėl bendrasis jos sprendinys

$$v = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Pareikalavę, kad jis tenkintų homogenines kraštines sąlygas gausime:

$$c_1 = 0, \quad c_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Kadangi ieškomas sprendinys turi būti netrivialus, tai konstanta $c_2 \neq 0$. Taigi λ turi tenkinti lygtį

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Išsprendę ją randame tikrines reikšmes $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ Kiekvieną tikrinę reikšmę λ_k atitinka tikrinė funkcija

$$v_k = c_{2k} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Ji apibrėžiama pastovaus daugiklio c_{2k} tikslumu. Konstantas c_{2k} parenkame taip, kad

$$\int_0^l v_k^2(x)\, dx = 1, \forall k = 1, 2, \ldots$$

Iš šių sąlygų randame

$$c_{2k} = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Neigiamoms λ reikšmėms du tiesiškai nepriklausomi sprendiniai

$$v_1(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}, \quad v_2(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Bendrasis sprendinys

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Kai $\lambda = 0$,

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x,$$

o bendrasis sprendinys

$$v(x) = c_1 + c_2 x.$$

Pareikalavę, kad v tenkintų homogenines kraštines sąlygas $v(0) = 0$, $v(l) = 0$ abiem atvejais gausime: $c_1 = c_2 = 0$. Tai reiškia, kad neteigiamų tikrinių reikšmių nėra.

Imkime lygtyje $T'' + \lambda T = 0$ parametrą $\lambda = \lambda_k$. Tada gausime lygtį, kurios bendrasis sprendinys

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t.$$

Funkcijos v_k it T_k yra sukonstruotos taip, kad jų sandauga $T_k \cdot v_k$ tenkina (6.49) lygtį ir homogenines kraštines sąlygas. Todėl tokių sandaugų suma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x)$$

taip pat tenkina (6.49) lygtį ir homogenines kraštines sąlygas. Konstantas a_k ir b_k parinksime taip, kad taip apibrėžta funkcija u tenkintų pradines sąlygas. Iš pirmos pradinės sąlygos gauname lygybę

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) = \varphi(x).$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš v_m ir rezultatą suintegravę nuo 0 iki l randame

$$a_m = \int_0^l \varphi(x) v_m(x)\, dx. \tag{6.50}$$

Čia pasinaudojome tuo, kad tikrinės funkcijos $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra ortonormuotos erdvėje $\mathrm{L}_2(0,l)$, t.y.

$$\int_0^l v_k(x) v_m(x)\, dx = \delta_k^m = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = m, \\ 0, & \text{kai } k \neq m. \end{cases}$$

Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų antrąją pradinę sąlygą gausime lygybę

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} v_k(x) = \psi(x).$$

Iš jos lygiai taip pat randame

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_0^l \psi(x) v_m(x)\, dx. \tag{6.51}$$

Taigi nagrinėjamo kraštinio uždavinio sprendinys

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t\big) v_k(x);$$

čia koeficientai a_k ir b_k yra apibrėžti (6.50) ir (6.51) formulėmis.

6.5 INTEGRALINIŲ FURJĖ TRANSFORMACIJŲ METODAS

Nagrinėsime Koši uždavinį

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.52}$$

Įrodysime, kad jo sprendinį galima išreikšti *Puasono* formule:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy. \tag{6.53}$$

Išvesdami ją naudosime integralinį Furjė transformacijos metodą. Taikydami šį metodą, manysime, kad visi atliekami veiksmai yra teisėti.

Priminsime, kad tiesioginė ir atvirkštinė Furjė transformacijos kintamojo x atžvilgiu apibrėžiamos formulėmis:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx, \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \widehat{u}(\xi,t)\, d\xi,\ i = \sqrt{-1}.$$

Funkcijų u_t ir u_{xx} Furjė transformacijos:

$$\widehat{u_t}\,(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u_t(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx \Big) = \widehat{u}_t(\xi,t),$$

$$\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u_{xx}(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{ix\xi} u_x(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)^2 e^{ix\xi} u(x,t)\, dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,t).$$

Pritaikę Furjė transformacijos operatorių abiems šilumos laidumo lygties pusėms, gausime paprastąją diferencialinę kintamojo t atžvilgiu lygtį

$$\widehat{u}_t + a^2 \xi^2 \widehat{u} = 0.$$

Į kintamąjį ξ galima žiūrėti kaip į parametrą. Ši lygtis yra tiesinė pirmos eilės lygtis, ir jos bendrasis sprendinys

$$\widehat{u}(\xi, t) = C(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Kadangi

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} u(x, 0)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \varphi(x)\, dx = \widehat{\varphi}(\xi),$$

tai

$$\widehat{\varphi}(\xi) = C(\xi)$$

ir

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Pritaikę šios lygybės abiems pusėms atvirkštinį Furjė transformacijos operatorių, gausime

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Vietoje funkcijos $\widehat{\varphi}$ įstatykime jos integralinę išraišką ir sukeiskime integravimo tvarką. Tada gausime formulę

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi \Big) \varphi(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \varphi(y)\, dy;$$

čia

$$G(x - y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Suskaičiuosime integralą

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Tuo tikslu išskirsime pilnąjį kvadratą

$$-a^2\xi^2 t - ix\xi = -(a^2\xi^2 t + ix\xi) = -\Big[a^2 t \Big(\xi + i\frac{x}{2a^2 t} \Big)^2 + \frac{x^2}{4a^2 t} \Big]$$

ir integralą $G(x,t)$ perrašysime taip:

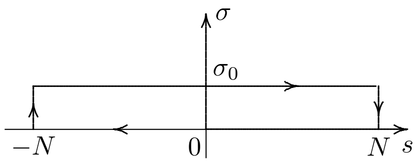
$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\left(\xi + i\frac{x}{2a^2t}\right)^2} d\xi. \tag{6.54}$$

Parodysime, kad integralas

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds$$

nepriklauso nuo parametro σ_0.

Tegu l – uždaras kontūras kompleksinėje kintamojo $z = s + i\sigma$ plokštumoje (žr. 6.1 pav.).



6.1 pav.

Pagal Koši teoremą

$$0 = \int\limits_l e^{-a^2tz^2} dz = \int\limits_{-N}^{N} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds + \int\limits_{\sigma_0}^{0} e^{-a^2t(N+i\sigma)^2} d\sigma +$$

$$\int\limits_{N}^{-N} e^{-a^2ts^2}\, ds + \int\limits_{0}^{\sigma_0} e^{-a^2t(-N+i\sigma)^2} d\sigma. \tag{6.55}$$

Kadangi

$$\Big|\int\limits_0^{\sigma_0} e^{-a^2t(\pm N+i\sigma)^2} d\sigma\Big| \le e^{-a^2tN^2} \int\limits_0^{\sigma_0} e^{a^2t\sigma^2} d\sigma \to 0$$

kai $N \to \infty$, tai perėję (6.55) formulėje prie ribos, gausime

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2}\, ds.$$

Be to, integralas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2}\, ds = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.$$

Todėl funkcija
$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{6.56}$$

Tokiu būdu formalųjį (6.52) Koši uždavinio sprendinį galima išreikšti (6.53) formule. Užrašysime ją tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\,dy. \tag{6.57}$$

Funkcija G yra vadinama šilumos laidumo lygties fundamentaliuoju sprendiniu (arba Gryno funkcija).

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad funkcija u, apibrėžta (6.53) formule, yra (6.52) Koši uždavinio sprendinys, jeigu funkcija φ yra tik tolydi ir aprėžta.

Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=o} = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6.58}$$

formalųjį sprendinį rasime taikydami Diuamelio principą. Tuo tikslu $\forall \tau > 0$ rasime formalųjį Koši uždavinio

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > \tau, \\ u|_{t=\tau} = f(x,\tau), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sprendinį. Pagal (6.57) formulę

$$v(x,t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy.$$

Tiesiogiai galima patikrinti, kad funkcija

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy d\tau \tag{6.59}$$

yra (6.58) Koši uždavinio formalusis sprendinys.

Sudėję (6.52) ir (6.58) Koši uždavinių sprendinius, gausime funkciją

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy d\tau, \tag{6.60}$$

kuri yra formalusis Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sprendinys.

Integralinį Furjė transformacijų metodą galima taikyti ne tik įvairių Koši uždavinių sprendimui, bet ir Kraštinių uždavinių sprendimui. Naudojant sinusinę Furjė transformaciją rasime kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.61}$$

sprendinį. Tegu funkcija u yra (6.61) kraštinio uždavinio sprendinys. Jos sinusinė tiesioginė ir atvirkštinė Furjė transformacijos kintamojo x atžvilgiu apibrėžiamos taip:

$$\widehat{u}^s(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u(x,t)\sin x\xi\,dx, \quad u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \widehat{u}^s(\xi,t)\sin x\xi\,d\xi.$$

Pritaikę sinusinę Furjė transformaciją funkcijai u_{tt} gausime

$$\widehat{u_{tt}}(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u_{tt}(x,t)\sin x\xi\,dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}^s(\xi,t) := \widehat{u}^s_{tt}(\xi,t).$$

Jeigu funkcija u begalybėje kartu su savo išvestine u_x lygi nuliui, tai integruodami dalimis gausime, kad funkcijos u_{xx} Furjė transformacija

$$\widehat{u_{xx}}(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u_{xx}(x,t)\sin x\xi\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u_x(x,t)\xi\cos x\xi\,dx =$$

$$-\xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u(x,t)\sin x\xi\,dx = -\xi^2\widehat{u}^s(\xi,t).$$

Taigi pritaikę sinusinę Furjė transformacija abiejoms (6.61) bangavimo lygties pusėms, gausime tiesinę antros eilės lygtį

$$\widehat{u}^s_{tt}(\xi,t) + a^2\xi^2\widehat{u}^s(\xi,t) = 0, \quad t > 0,$$

kurioje kintamasis ξ yra parametras. Šios lygties bendrasis sprendinys

$$\widehat{u}^s(\xi,t) = c_1(\xi)\cos a\xi t + c_2(\xi)\sin a\xi t.$$

Kadangi funkcija u tenkina (6.61) pradines sąlygas, tai jos sinusinė Furjė transformacija $\widehat{u}^s$ turi tenkinti pradines sąlygas

$$\widehat{u}^s|_{t=0} = \widehat{\varphi}^s(\xi), \quad \widehat{u}^s_t|_{t=0} = \widehat{\psi}^s(\xi), \quad \xi > 0.$$

Panaudoję šias sąlygas randame

$$c_1(\xi) = \widehat{\varphi}^s(\xi), \quad c_2(\xi) = \frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}.$$

Taigi funkcijos u sinusinė Furjė transformacija

$$\widehat{u}^s(\xi,t)=\widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t+\frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t.$$

Pritaikę abiejoms šios lygybės pusėms atvirkštinę sinusinę Furjė transformaciją, randame ieškomą funkciją

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\Big(\widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t+\frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t\Big)\sin x\xi\,d\xi. \tag{6.62}$$

Integralą dešinėje šios lygybės pusėje išskaidome į du integralus. Pirmasis iš jų

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\widehat{\varphi}^s(\xi)\cos a\xi t\sin x\xi\,d\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\widehat{\varphi}^s(\xi)\big(\sin(x+at)\xi+\sin(x-at)\xi\big)\,d\xi=$$
$$\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\operatorname{sign}(x-at)\varphi(|x-at|)\big).$$

Antrasis

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t\sin x\xi\,d\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\widehat{\psi}^s(\xi)}{a\xi}\big(\cos(x-at)\xi-\cos(x+at)\xi\big)\,d\xi=$$
$$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{x-at}^{x+at}\widehat{\psi}^s(\xi)\sin s\xi\,dsd\xi=\frac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(s)\,ds.$$

Įstatę šias integralų išraiškas į (6.62) formulę gauname

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\operatorname{sign}(x-at)\varphi(|x-at|)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(s)\,ds. \tag{6.63}$$

7 SKYRIUS

Skaitiniai diferencialinių lygčių sprendimo metodai

Netiesines paprastąsias diferencialines lygtis bei jų sistemas retai kada pavyksta siuntegruoti. Dar sudėtingesnė yra situacija yra kai nagrinėjame dalinių išvestinių lygtis arba jų sistemas. Todėl labai aktualūs yra tokių lygčių bei sistemų įvairūs skaitiniai sprendimo metodai.

Šiame skyriuje pateiksime du skaitinius diferencialinių lygčių sprendimo metodus. Pirmasis iš jų yra Rungė – Kuto metodas, antrasis – baigtinių skirtumų metodas. Iš pradžių pateiksime skaitinį paprasųjų diferencialinių lygčių bei jų sistemų sprendimą Rungė – Kuto metodu. Po to skaitinį diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sprendimą baigtinių skirtumų metodu. Pastarąjį metodą taikysime skaitiniam elipsinių, parabolinių ir hiperbolinių lygčių sprendimui.

7.1 RUNGE – KUTO METODAS PIRMOS EILĖS PAPRASTAJAI DIFERENCIALINEI LYGČIAI

Nagrinėsime Koši uždavinį

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{7.1}$$

pirmosios eilės paprastajai diferencialinei lygčiai. Jeigu funkcija f kokioje nors srityje turi n-tosios eilės tolydžias dalines išvestines, tai iš paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad ieškomas sprendinys turi $(n+1)$-os eilės tolydžias išvestines ir pagal Teiloro formulę

$$\begin{aligned} y(x) = \quad & y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \tfrac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \ldots + \\ & + \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_0) + o\big(|x - x_0|^{n+1}\big) \end{aligned}$$

Tegu $x = x_0 + h$. Tada, atmetę paskutinį narį, gausime apytikslią lygybę

$$y(x_0 + h) - y_0 \approx hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_0). \tag{7.2}$$

Išvestinių reikšmes taške x_0 galima apskaičiuoti iš (7.1) lygties:

$$\begin{aligned} y'(x_0) = \quad & f(x_0, y(x_0)) := y_0', \\ y''(x_0) = \quad & f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0)) \cdot y'(x_0) := y_0'', \\ y'''(x_0) = \quad & f_{xx}(x_0, y(x_0)) + 2f_{yx}(x_0, y(x_0)) \cdot y'(x_0) + f_{yy}(x_0, y(x_0) \cdot {y'}^2(x_0) + \\ & f_y(x_0, y(x_0)) \cdot y''(x_0) := y_0''' \end{aligned}$$

ir t.t. Įstatę gautas išvestinių reikšmes į (7.2) formulę gausime apytikslią sprendinio reikšmę. Dideliems n ši formulė tampa labai sudėtinga ir praktikoje nenaudojama.

Rungė pasiūlė kitą diferencialinių lygčių integravimo metodą, kurį vėliau išvystė Kuta ir kiti mokslininkai. Metodo esmė yra tame, kad funkcijos y pokytį $y(x_0+h)-y(x_0)$ ieškome pavidalu

$$y(x_0+h)-y_0=(\gamma_1 k_1+\cdots+\gamma_r k_r)h; \tag{7.3}$$

čia

$$\begin{aligned}&k_i=f(\xi_i,\eta_i),\ \xi_i=x_0+\alpha_i h, \quad \alpha_1=0,\ i=1,2,\ldots,r,\\ &\eta_i=y_0+\beta_{i1}k_1h+\beta_{i2}k_2h+\ldots+\beta_{ii-1}k_{i-1}h.\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned}&k_1=f(x_0,y_0),\\ &k_2=f(x_0+\alpha_2h,y_0+\beta_{21}k_1h),\\ &k_3=f(x_0+\alpha_3h,y_0+\beta_{31}k_1h+\beta_{32}k_2h),\\ &\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ &k_r=f(x_0+\alpha_rh,y_0+\beta_{r1}k_1h+\beta_{r2}k_2h+\cdots+\beta_{rr-1}k_{r-1}h).\end{aligned}$$

Konstantas γ_i,α_i ir β_{ij} randame sulyginę (7.2) ir (7.3) lygybių dešinių pusių koeficientus prie vienodų h laipsnių.

Atskirai išnagrinėsime kelis atvejus:

1. Tegu $r=1$. Tada skirtumas

$$y(x_0+h)-y(x_0)=\gamma_1 f(x_0,y_0)h.$$

Sulyginę su (7.2) formule gauname $\gamma_1=1$. Taigi yra teisinga formulė

$$y(x_0+h)-y(x_0)\approx f(x_0,y_0)h,$$

kurios paklaida yra $O(h^2)$.

2. Tegu $r=2$. Tada (7.3) formulę galima užrašyti taip

$$y(x_0+h)-y_0=(\gamma_1k_1+\gamma_2k_2)h. \tag{7.4}$$

Norint sulyginti (7.2) ir (7.4) formulėse koeficientus prie vienodų h laipsnių, koeficientą k_2 skleidžiame Teiloro eilute

$$\begin{aligned}k_2\ &=f(x_0+\alpha_2h,y_0+\beta_{21}k_1h)=\\ &=f(x_0,y_0)+\alpha_2hf_x(x_0,y_0)+\beta_{21}k_1hf_y(x_0,y_0)+\\ &+\frac{1}{2}\big(\alpha_2^2h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2\alpha_2\beta_{21}k_1h^2f_{xy}(x_0,y_0)+\beta_{21}k_1^2h^2f_{yy}(x_0,y_0)\big)+\ldots\end{aligned}$$

Šią išraišką įstatę į (7.4) formulę ir sulyginę koeficientus prie vienodų h laipsnių randame:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1+\gamma_2=1 & \text{prie} & hf(x_0,y_0), \\ \gamma_2\alpha_2=1/2 & \text{prie} & h^2 f_x(x_0,y_0), \\ \gamma_2\beta_{21}=1/2 & \text{prie} & h^2 f_y(x_0,y_0). \end{array}$$

Pastaroji sistema turi be galo daug sprendinių. Imdami $\alpha_2=1, \beta_{21}=1$ gausime $\gamma_1=1/2$, $\gamma_2=1/2$. Šiuo atveju

$$y(x_0+h)-y_0=\frac{1}{2}(k_1+k_2)h;$$

čia

$$k_1=f(x_0,y_0), \quad k_2=f(x_0+h,y_0+k_1h).$$

Imdami $\alpha_2=1/2, \beta_{21}=1/2$ gausime $\gamma_2=1$, $\gamma_1=0$. Todėl

$$y(x_0+h)-y_0=k_2h;$$

čia

$$k_1=f(x_0,y_0), \quad k_2=f(x_0+h/2,y_0+k_1h/2).$$

Abiem atvejais gautų formulių paklaida yra $O(h^3)$.

Tegu $r=3$. Tada (7.3) formulė užsirašo taip

$$y(x_0+h)-y_0=(\gamma_1k_1+\gamma_2k_2+\gamma_3k_3)h; \tag{7.5}$$

čia

$$\begin{array}{l} k_1=f(x_0,y_0),\ k_2=f(x_0+\alpha_2h,y_0+\beta_{21}k_1h), \\ k_3=f(x_0+\alpha_3h,y_0+\beta_{31}k_1h+\beta_{32}k_2h). \end{array}$$

Išskleidę koeficientus k_2 ir k_3 Teiloro eilute įstatome jų reikšmes į (7.5) formulę. Po to, sulyginame koeficientus prie vienodų h laipsnių su ir (7.2) formule. Tada gausime sistemą

$$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1, \\ \gamma_1\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=1/2, \\ \gamma_2\alpha_2^2+\gamma_3\alpha_3^2=1/3, \\ \gamma_3\beta_{32}\alpha_2=1/6, \\ \alpha_2=\beta_{21}, \\ \alpha_3=\beta_{31}+\beta_{32}. \end{cases} \tag{7.6}$$

Fiksuotoms α_2 ir α_3 reikšmėms į antrą, trečią ir ketvirtą pastarosios sistemos lygtis galime žiūrėti kaip į trijų tiesinių algebrinių lygčių sistemą kintamųjų γ_2 ir γ_3 atžvilgiu. Ji yra išsprendžiama, jeigu determinantas

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & 1/2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 1/3 \\ 0 & \beta_{32}\alpha_2 & 1/6 \end{vmatrix}=0,$$

t.y. kai

$$\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)-\beta_{32}\alpha_2^2(2-3\alpha_2)=0.$$

Iš (7.6) matome, kad $\gamma_3 \neq 0$, $\beta_{32} \neq 0$ ir $\alpha_2 \neq 0$. Todėl pastarąją lygybę padalinę iš α_2 gauname

$$\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{32}\alpha_2(2 - 3\alpha_2) = 0.$$

Todėl iš pradžių galime koeficientus $\alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ parinkti taip, kad jie tenkintų sistemą

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta_{21}, \\ \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}, \\ \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{32}\alpha_2(2 - 3\alpha_2) = 0, \end{cases}$$

o, po to, koeficientus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ rasti iš sistemos

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1, \\ \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 1/2, \\ \gamma_3\beta_{32}\alpha_2 = 1/6. \end{cases}$$

Pavyzdžiui, tegu $\alpha_2 = \beta_{21} = 1/2, \alpha_3 = 1$. Tada $\beta_{32} = 2$, $\beta_{31} = -1, \gamma_3 = 1/6$, $\gamma_2 = 2/3$, $\gamma_1 = 1/6$ ir (7.5) formulę galime užrašyti taip

$$y(x_0 + h) - y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h; \tag{7.7}$$

čia

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0), \\ k_2 &= f(x_0 + h/2, y_0 + k_1h/2), \\ k_3 &= f(x_0 + h, y_0 - k_1h + 2k_2h). \end{aligned}$$

Taigi parinkę kokį nors (7.6) sistemos sprendinį gausime (7.5) formulę su konkrečiomis koeficientų reikšmėmis, kurios paklaida yra $O(h^4)$.

P a s t a b o s:

1. Galima parodyti, (žr., pavyzdžiui, [8]), kad, kai $r = 4$, yra teisinga formulė

$$y(x_0 + h) - y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h;$$

čia

$$\begin{aligned} &k_1 = f(x_0, y_0),\ \ k_2 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_1h/2), \\ &k_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_2h/2), \\ &k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3h), \end{aligned}$$

kurios paklaida yra $O(h^5)$. Pastaroji formulė yra viena iš dažniausiai naudojamų Rungė – Kuto formulių.

2. Galima išvesti Rungė – Kuto formules kai $r \geq 5$. Tačiau jos yra gremėzdiškos ir praktikoje retai naudojamos.

Taikant vieną ar kitą Rungė – Kuto formulę galima rasti ieškomos funkcijos reikšmę taške $x_0 + h$, t.y. $y(x_0 + h)$. Imdami pradinį tašką $x_1 = x_0 + h$ ir pradinę reikšmę $y_1 = y(x_0 + h)$, analogiškai galime gauti ieškomos funkcijos reikšmę kitame taške $x_1 + h$ ir t.t. Tęsdami tokius skaičiavimus gausime ieškomos funkcijos reikšmes taškuose $x_0 + kh$, $k = 1, 2, \ldots$

7.2 RUNGE – KUTO METODAS PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMAI

Rungė – Kuto metodą galima taikyti ir pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemai. Konkretumo dėlei nagrinėsime Koši uždavinį dviejų pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z), \quad y(x_0) = y_0, \\ z' = g(x,y,z), \quad z(x_0) = z_0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Ieškomų funkcijų y ir z pokytį taškuose $x_0 + h$ ir x_0 ieškosime pavidalu

$$\begin{cases} y(x_0+h) - y_0 = (\gamma_1 k_1 + \cdots + \gamma_r k_r)h, \\ z(x_0+h) - z_0 = (\gamma_1^* l_1 + \cdots + \gamma_r^* l_r)h, \end{cases} \tag{7.9}$$

čia

$$\begin{aligned} &k_i = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),\ l_i = g(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), \\ &\xi_i = x_0 + \alpha_i h,\ \alpha_1 = 0,\ \xi_i^* = x_0 + \alpha_i^* h,\ \alpha_1^* = 0, \\ &\eta_i = y_0 + \beta_{i1} k_1 h + \beta_{i2} k_2 h + \ldots + \beta_{ii-1} k_{i-1} h, \\ &\eta_i^* = y_0 + \beta_{i1}^* k_1 h + \beta_{i2}^* k_2 h + \ldots + \beta_{ii-1}^* k_{i-1} h, \\ &\zeta_i = y_0 + \delta_{i1} l_1 h + \delta_{i2} l_2 h + \ldots + \delta_{ii-1} l_{i-1} h, \\ &\zeta_i^* = y_0 + \delta_{i1}^* l_1 h + \delta_{i2}^* l_2 h + \ldots + \delta_{ii-1}^* l_{i-1} h, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \ldots, r$. Pagal Teiloro formulę

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &\approx hy'(x_0) + \tfrac{h^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \tfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x_0), \\ z(x) - z(x_0) &\approx hz'(x_0) + \tfrac{h^2}{2!} z''(x_0) + \ldots + \tfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} z^{(n+1)}(x_0). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Funkcijų y ir z išvestines taške x_0 randame iš (7.8) sistemos

$$\begin{aligned} &y'(x_0) = f(x_0, y_0, z_0),\ z'(x_0) = g(x_0, y_0, z_0), \\ &y''(x_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) + f_y(x_0, y_0, z_0) y'(x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0) z'(x_0), \\ &z''(x_0) = g_x(x_0, y_0, z_0) + g_y(x_0, y_0, z_0) y'(x_0) + g_z(x_0, y_0, z_0) z'(x_0) \end{aligned}$$

ir t.t. Šias išvestinių reikšmes įstatome į (7.10) formulę. Gautoje ir (7.9) formulėse sulyginame koeficientus prie vienodų h laipsnių iki nario h^4. Tada koeficientų α_i, α_i^*, β_{ij}, β_{ij}^*, $\delta_{ij}, \delta_{ij}^*$ ir γ_i, γ_i^* atžvilgiu gausime algebrinių lygčių sistemą (žr., pavyzdžiui, [9]). Pastaroji sistema yra simetrinė koeficientų α_i, α_i^*, β_{ij}, β_{ij}^*, $\delta_{ij}, \delta_{ij}^*$ ir γ_i, γ_i^* atžvilgiu. Todėl galime imti

$$\alpha_i = \alpha_i^*,\ \beta_{ij} = \beta_{ij}^*,\ \delta_{ij} = \delta_{ij}^*,\ \gamma_i = \gamma_i^*.$$

ir, kai $r = 4$, Rungė – Kuto formules apibrėžti taip:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - y_0 &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \\ z(x_0 + h) - z_0 &= \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)h; \end{aligned} \tag{7.11}$$

čia

$$\begin{aligned} &k_1 = f(x_0, y_0, z_)), l_1 = g(x_0, y_0, z_)), \\ &k_2 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_1 h/2, z_0 + l_1 h/2), \\ &l_2 = g(x_0 + h/2, y_0 + k_1 h/2, z_0 + l_1 h/2), \\ &k_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + k_2 h/2, z_0 + l_2 h/2), \\ &l_3 = g(x_0 + h/2, y_0 + k_2 h/2, z_0 + l_2 h/2), \\ &k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3 h, z_0 + l_3 h),\ l_4 = g(x_0 + h, y_0 + k_3 h, z_0 + l_3 h). \end{aligned}$$

Šių formulių paklaida yra $O(h^5)$.

P a s t a b a. Analogiškos Ringė – Kuto formulės yra teisingos ir tuo atveju, kai lygčių skaičius yra didesnis už du.

7.3 RUNGE – KUTO METODAS AUKŠTESNĖS EILĖS PAPRASTAJAI DIFERENCIALINEI LYGČIAI

Kiekviena normalioji n-tos eilė paprastoji diferencialinė lygtis

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0 \tag{7.12}$$

susiveda į n pirmos eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} w' = f(x, y, u, \ldots, v, w), \\ v' = w, \\ \ldots\ldots \\ y' = u. \end{cases} \tag{7.13}$$

Todėl apytikslį n-tos eilės lygties sprendinį taip pat galima ieškoti Rungė – Kuto metodu. Be to, (7.13) sistemos dešiniosios pusės turi labai paprastą pavidalą. Todėl galima gauti paprastesnes Rungė – Kuto formules.

Paprastumo dėlei nagrinėsime Koši uždavinį antrosios eilės paprastajai diferencialinei lygčiai

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Standartiniu būdu ji suvedame į Koši uždavinį dviejų pirmos eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} z' = f(x, y, z), \quad z(x_0) = z_0 := y_0', \\ y' = z, \quad y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Sprendinių y ir z pokyčius ieškome pavidalu

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - y(x_0) &= (\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \gamma_3 k_3)h, \\ z(x_0 + h) - z(x_0) &= (\gamma_1^* l_1 + \gamma_2^* l_2 + \gamma_3^* l_3)h; \end{aligned} \tag{7.15}$$

čia

$$\begin{aligned} &k_i = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),\ l_i = g(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), \\ &\xi_i = x_0 + \alpha_i h,\ \alpha_1 = 0,\ \xi_i^* = x_0 + \alpha_i^* h,\ \alpha_1^* = 0, \\ &\eta_i = y_0 + \beta_{i1} k_1 h + \beta_{i2} k_2 h + \ldots + \beta_{ii-1} k_{i-1} h, \\ &\eta_i^* = y_0 + \beta_{i1}^* k_1 h + \beta_{i2}^* k_2 h + \ldots + \beta_{ii-1}^* k_{i-1} h, \\ &\zeta_i = y_0 + \delta_{i1} l_1 h + \delta_{i2} l_2 h + \ldots + \delta_{ii-1} l_{i-1} h, \\ &\zeta_i^* = y_0 + \delta_{i1}^* l_1 h + \delta_{i2}^* l_2 h + \ldots + \delta_{ii-1}^* l_{i-1} h, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$. Sulyginę koeficientus prie vienodų h laipsnių (7.15) ir (7.10) formulėse gausime sistemą

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \beta_{21} = \delta_{21}, && \alpha_2^* = \beta_{21}^* = \delta_{21}^*,\\
&\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32} = \delta_{31} + \delta_{32}, && \alpha_3^* = \beta_{31}^* + \beta_{32}^* = \delta_{31}^* + \delta_{32}^*,\\
&\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1, && \gamma_1^* + \gamma_2^* + \gamma_3^* = 1,\\
&\gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 1/2, && \gamma_2^*\alpha_2^* + \gamma_3^*\alpha_3^* = 1/2,\\
&\gamma_2\alpha_2^2 + \gamma_3\alpha_3^2 = 1/3, && \gamma_2^*\alpha_2^{*2} + \gamma_3^*\alpha_3^{*2} = 1/3,\\
&\gamma_3\beta_{32}\alpha_2 = 1/6, && \gamma_3^*\delta_{32}^*\alpha_2^* = 1/6,
\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_2^*}{\alpha} = \frac{\beta_{32}}{\delta_{32}^*} = \frac{\beta_{32}^*}{\delta_{32}^*}.$$

Koeficientai k_i ir l_i (7.14) sistemai gaunami tokie:

$$\begin{aligned}
&k_1 = z_0,\ l_1 = f(x_0, y_0, z_0),\\
&k_2 = z_0 + \delta_{21}hl_1,\ l_2 = f(x_0 + \alpha_2^*h, y_0 + \beta_{21}^*hz_0, z_0 + \delta_{21}^*hl_1)\\
&k_3 = z_0 + \delta_{31}hl_1 + \delta_{32}hf(x_0 + \alpha_2^*h, y_0 + \beta_{21}^*hz_0, z_0 + \delta_{21}^*hl_1),\\
&l_3 = f(x_0 + \alpha_3^*h, y_0 + \alpha_3^*hz_0 + \beta_{32}^*\delta_{21}h^2l_1, z_0 + \delta_{31}^*hl_1\\
&\quad +\delta_{32}^*hf(x_0 + \alpha_2^*h, y_0 + \beta_{21}hz_0, z_0 + \delta_{21}^*hl_1)),
\end{aligned}$$

o ieškomų funkcijų pokyčiai

$$\begin{aligned}
y(x_0+h) - y(x_0) = {} & (\gamma_1k_1 + \gamma_2k_2 + \gamma_3k_3)h = hz_0 + h^2\{(\gamma_2\delta_{21} + \gamma_3\delta_{31})l_1 +\\
& \gamma_3\delta_{32}f(x_0 + \alpha_2^*h, y_0 + \beta_{21}^*hz_0, z_0 + \gamma_{21}^*)hl_1\}\\
z(x_0+h) - z(x_0) = {} & (\gamma_1^*l_1 + \gamma_2^*l_2 + \gamma_3^*l_3)h.
\end{aligned}$$

Imdami čia

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = \alpha_2^* = \beta_{21} = \beta_{21}^* = \delta_{21} = \delta_{21}^* = 1/3,\\
&\alpha_3 = \alpha_3^* = \beta_{32} = \beta_{32}^* = \delta_{32} = \delta_{32}^* = 2/3,\\
&\beta_{31} = \beta_{31}^* = \delta_{31} = \delta_{31}^* = 0,\\
&\gamma_3 = \gamma_3^* = 3/4,\ \gamma_2 = \gamma_2^* = 0,\ \gamma_1 = \gamma_1^* = 1/4
\end{aligned}$$

gausime

$$\begin{aligned}
y(x_0+h) - y(x_0) = {} & hz_0 + \tfrac{1}{2}h^2f(x_0 + h/3, y_0 + hz_0/3, z_0 + hl_1/3)\\
z(x_0+h) - z(x_0) = {} & hl_1/4 + \tfrac{3}{4}hf(x_0 + 2h/3, y_0 + 2hz_0/3 + \tfrac{2}{9}h^2l_1,\\
& z_0 + \tfrac{2}{3}hf(x_0 + h/3, y_0 + hz_0/3, z_0 + hl_1/3)).
\end{aligned}$$

Pastarųjų formulių tikslumas yra eilės h^4.

Analogiškas Rungė – Kuto formules galima gauti parinkus kitokias koeficientų reikšmes. Be to, (7.14) sistemai spręsti galima nauduoti formules gautas nagrinėjant bendro pavidalo pirmos eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą (žr., pavyzdiui, (7.11) formulę).

7.4 BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODAS ELIPSINIĖS LYGTIES ATVEJU

Baigtinių skirtumų metodo esmė yra tokia. Sritis, kurioje sprendžiama diferencialinė lygtis, yra padengiama tinklu ir tinklo linijų susikirtimo taškuose diferencialinė lygtis keičiama skirtumine. Tinklo linijų susikirtimo su srities kontūru (paviršiumi) taškuose kraštines sąlygas keičiame į skirtumines sąlygas. Rezultate gauname skirtuminių lygčių sistemą. Sprendžiant šią sisitemą reikia išsiaiškinti ar ji turi sprendinį ir ar rastas sprendinys yra vienintelis. Be to, reikia dar pasirinkti sistemos sprendimo metodą ir išsiaiškinti ar rastas sprendinys yra artimas tikrajam diferencialinės lygties sprendiniui.

Aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ su kontūru Γ nagrinėsime elipsinę lygtį

$$\mathrm{L}(u) := a u_{xx} + b u_{yy} + p u_x + q u_y + d u = f(x, y); \tag{7.16}$$

čia koeficientai a, b, p, q, d ir f yra žinomos tolydžios srityje Ω funkcijos. Be to, koeficientai a ir b yra teigiami (elipsiškumo sąlyga).

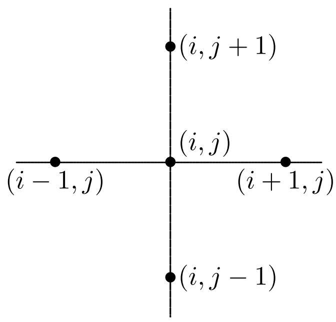
Tarkime tinklą sudaro dvi tiesių šeimos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ y &= y_0 + jl, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

Tašką (x_0+ih, y_0+jl) žymėsime (x_i, y_j) arba tiesiog (i, j), o funkcijos u reikšmes šiame taške – u_{ij}, t.y.

$$u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

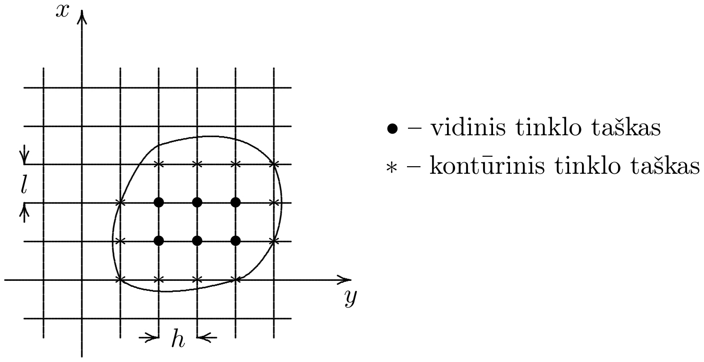
Taškai $(i \pm 1, j)$, $(i, j \pm 1)$ yra vadinami taško (i, j) gretimais taškais (žr. 7.1 pav.).



7.1 pav.

Visumą tinklo taškų, kurie priklauso aibei $\Omega \bigcup \Gamma$ žymėsime raide $\tilde{\Omega}$. Tinklo taškus, kurių visi gretimi taškai priklauso $\tilde{\Omega}$, vadinsime vidiniais ir žymėsime $\dot{\tilde{\Omega}}$. Tinklo tašką, kurio bent vienas gretimas taškas nepriklauso $\tilde{\Omega}$ vadinsime kontūriniu tinklo tašku. Visumą kontūrinių tinklo taškų žymėsime $\tilde{\Gamma}$ (žr. 7.2

pav.).



7.2 pav.

Kiekviename vidiniame tinklo $\tilde{\Omega}$ taške (i, j) ieškomos funkcijos išvestines u_x, u_y, u_{xx} ir u_{yy} pakeiskime, atitinkamai, skirtumais

$$\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h}, \ \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l}, \ \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}, \ \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2}.$$

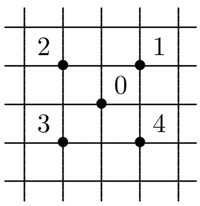
Įstatę šias išvestinių reikšmes į (7.16) lygtį taške (i, j) gausime skirtuminę lygtį

$$\begin{aligned} \tilde{L}(u_{ij}) := \quad & a_{ij}\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + b_{ij}\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} + \\ & p_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + q_{ij}\frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + d_{ij}u_{ij} = f_{ij}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Galima parodyti (žr., pavyzdžiui, [9]), kad tokios aproksimacijos paklaida yra didis eilės $O(h^2)$, jeigu $h/l = const$.

Sudarant skirtuminę lygtį kiekvieną ieškomos funkcijos išvestinę pakeitėme atitinkamu skirtumu. Tačiau yra galimas ir kitas skirtuminės lygties sudarymo būdas. Jo esmė yra tame, kad visą diferencialinę išraišką keičiame skirtuminę išraišką su neapibrėžtais koeficientais.

Imkime n tinklo taškų, supančių tašką (i, j). Tašką (i, j) pažymėkime 0, o jį supančius tinklo taškus $1, 2, \ldots, n$. Pavyzdžiui, kai $n = 4$, tašką 0 supančius taškus $1, 2, 3, 4$ galima imti taip kaip pavaizduota 7.3 paveikslėlyje.



7.3 pav.

Funkcijos u reikšmę taške j pažymėkime u_j. Sudarykime tiesinį darinį

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j.$$

Išskleiskime u_j Teiloro formulės pagalba taško 0 aplinkoje ir gautas u_j reikšmes įstatykime į šį darinį. Tada surinkę koeficientus prie vienodų funkcijos u išvestinių, gausime

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j = \sum_{i+k\le n} \gamma_{ik} \Big(\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}\Big)_0 + R; \tag{7.18}$$

čia R liekamasis narys. Jeigu funkcijos u išvestinės iki $n+1$ eilės imtinai yra aprėžtos, tai $R = O(h^{n+1})$, h – mažiausias atstumas tarp taškų 0 ir $1, 2, \ldots, n$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad koeficientai γ_{ik} tiesiškai išsireiškia per c_j. Neapibrėžtinius koeficientus c_j parenkame taip, kad (7.18) formulės dešinė pusė kuo labiau sutaptų su diferencialinio reiškinio Lu reikšme taške 0. Sulyginę koeficientus prie ieškomos funkcijos ir jos pirmos bei antros eilės išvestinių, gausime

$$\gamma_{00} = d_0,\ \gamma_{10} = p_0,\ \gamma_{01} = q_0,\ \gamma_{20} = 1_0,\ \gamma_{02} = b_0,\ \gamma_{11} = 0.$$

Kadangi nagrinėjama lygtis yra antros eilės lygtis, tai koeficientai $\gamma_{ik} = 0$, kai $i + k > 2$. Jeigu koeficientus c_j parinkti taip galima, tai iš (7.18) formulės gauname, kad

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j = \big(\mathrm{L}u\big)_0 + R$$

ir diferencialinę lygtį taške 0 galima pakeisti skirtumine lygtimi

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u_j = f_0.$$

Vienas iš šio metodo privalumu yra tas, kad vietoje stačiakampio tinklo galima imti ir kitokį tinklą (pavyzdžiui, taisiklingų trikampių arba taisiklingų šešekampių).

Išnagrinėsime šį metodą Puasono lygties

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{7.19}$$

atveju. Tarkime, tinklas yra kvadratinis ir imame keturis tašką 0 supančius taškus $1, 2, 3, 4$ (žr. 7.3 pav.). Sukeitę Laplaso operatoriuje kintamuosius x ir y gausime Laplaso operatorių. Be to, tinklo taškai $1, 2, 3, 4$ yra išsidėstę simetriškai taško 0 atžvilgiu. Todėl tiesiniame darinyje

$$\tilde{\Delta} u := \sum_{j=0}^{n} c_j u_j$$

galime imti $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 := c$. Išskleidę u_j Teiloro formule taško 0 aplinkoje, gausime

$$
\begin{aligned}
u_1 &:= u(x_0+h, y_0+h) = u_0 + \Big(hD_+u + \frac{h^2}{2!}D_+^2u + \frac{h^3}{3!}D_+^3u + \frac{h^4}{4!}D_+^4u + \dots\Big)_0\\
u_2 &:= u(x_0+h, y_0-h) = u_0 + \Big(hD_-u + \frac{h^2}{2!}D_-^2u + \frac{h^3}{3!}D_-^3u + \frac{h^4}{4!}D_-^4u + \dots\Big)_0\\
u_3 &:= u(x_0-h, y_0-h) = u_0 - \Big(hD_+u - \frac{h^2}{2!}D_+^2u + \frac{h^3}{3!}D_+^3u - \frac{h^4}{4!}D_+^4u + \dots\Big)_0\\
u_4 &:= u(x_0-h, y_0-h) = u_0 - \Big(hD_-u - \frac{h^2}{2!}D_-^2u + \frac{h^3}{3!}D_-^3u - \frac{h^4}{4!}D_-^4u + \dots\Big)_0
\end{aligned}
$$

Čia operatoriai

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_- = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Įstatę šias reikšmes į tiesinį darinį randame

$$\tilde{\Delta}u := c_0u_0 + 4cu_0 + \Big(2\frac{ch^2}{2!}(D_+^2 + D_-^2)u + 2\frac{ch^4}{4!}(D_+^4 + D_-^4)u + \dots\Big)_0$$

Konstantas c_0 ir c parenkame taip, kad šis reiškinys aproksimuotų Laplaso operatorių, t.y. reikalaujame, kad

$$c_0 + 4c = 0, \quad 2ch^2 = 1, \quad \Longrightarrow c = \frac{1}{2h^2}, \quad c_0 = -\frac{2}{h^2}.$$

Tada

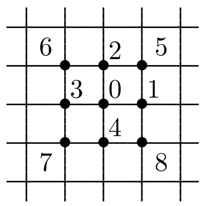
$$\Big(\Delta u\Big)_0 \approx \frac{1}{2h^2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0)$$

ir Puasono lygtį galima pakeisti skirtumine lygtimi

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = 2h^2 f_0.$$

Tokios aproksimacijos paklaida yra $O(h^2)$.

Tegu $n = 8$, tinklas yra kvadratinis ir taškų išsidėstimas yra pavaizduotas 7.4 paveikslėlyje.



7.4 pav.

Tada Puasono lygties skirtuminę aproksimaciją galima ieškoti pavidalu

$$L_0 := \sum_{j=0}^{8} c_j u_j = c_0u_0 + c_1(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + c_2(u_5 + u_6 + u_7 + u_8).$$

Išskleidę u_j Teiloro foormule taško 0 aplinkoje, gausime

$$\begin{aligned} L_0 = \quad & (c_0 + 4c_1 + 4c_2)u_0 + h^2(c_1 + 2c_2)(u_{xx} + u_{yy})_0 + \\ & \frac{h^4}{12}(c_1 + 2c_2)(u_{x^4} + u_{y^4})_0 + c_2 h^4 (u_{x^2y^2})_0 + \\ & \frac{2h^6}{6!}(u_{x^6} + u_{y^6})_0 + \frac{h^6}{12} c_2 (u_{x^4y^2} + u_{x^2y^4})_0 + \dots \end{aligned} \tag{7.20}$$

Tam, kad reiškinys L_0 aproksimuotų Laplaso operatorių reikia koeficientus c_0, c_1 ir c_2 apibrėžti taip, kad

$$c_0 + 4c_1 + 4c_2 = 0, \quad h^2(c_1 + 2c_2) = 1.$$

Akivaizdu, kad tokių aproksimacijų yra be galo daug. Todėl iš visų tokių aproksimacijų reikia pasirinkti tokią, kuri kuo tiksliau aproksimuotų Laplaso operatorių. Jeigu Laplaso operatorių du kartus diferencijuosime pagal kintamąjį x, po to du kartus pagal kintamąjį y ir gautus reiškinius sudėsime, tai gausime reiškinį

$$\Delta^2 u = (u_{x^4} + u_{y^4}) + 2u_{x^2y^2}.$$

Gautame reiškinyje koeficientas prie mišrios išvestinės yra du kartus didesnis už koeficientą prie vienodų išvestinių sumos. Pareikalavę, kad ši sąlyga būtų patenkinta (7.20) formulėje, gausime

$$c_2 = \frac{1}{6h^2}, \quad c_1 = \frac{2}{3h^2}, \quad c_0 = -\frac{10}{3h^2}.$$

Kadangi

$$(\Delta u)_0 = (u_{xx} + u_{yy})_0 = f_0,$$

tai

$$L_0 = f_0 + \frac{h^2}{12}(\Delta f)_0 + \frac{2h^4}{6!}(f_{x^4} + 4f_{x^2y^2} + f_{y^4})_0 + \dots$$

ir Puasono lygtį galima pakeisti tokia skirtumine lygtimi

$$\begin{aligned} & \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 20u_0}{6h^2} = \\ & f_0 + \frac{h^2}{12}(\Delta f)_0 + \frac{2h^4}{6!}(f_{x^4} + 4f_{x^2y^2} + f_{y^4})_0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Šios aproksimacijos paklaida yra $O(h^6)$. Tačiau pastarąją formulę galima taikyti tik tada, kai funkcija f yra pakankamai paprasta. Priešingu atveju (7.21) formulės dešinėje lygybės pusėje narį prie h^4 atmetame, o narį $(\Delta f)_0$ pakeičiame skirtumine išraiška

$$\frac{1}{h^2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0).$$

Rezultate gauname Puasono lygties skirtuminę lygtį

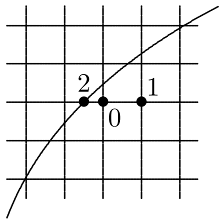
$$\begin{aligned} & \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 20u_0}{6h^2} = \\ & \frac{1}{12}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 8f_0), \end{aligned} \tag{7.22}$$

kurios aproksimacijos tikslumas yra eilės $O(h^4)$.

Tarkime dabar, taškas 0 yra kontūrinis tinklo taškas. Kraštinės sąlygos aproksimavimas kontūriniame tinklo taške priklauso nuo kraštinės sąlygos tipo. Iš pradžių nagrinėkime Dirichlė uždavinį, t.y. (7.16) lygtį kartu su pirmąja kraštine sąlyga

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \tag{7.23}$$

Kadangi 0 yra kontūrinis tinklo taškas, tai egzistuoja du gretutiniai taškai 1 ir 2, esantis vienoje tinklo tiesėje tokie, kad taškas 1 yra srityje Ω, o taškas 2 tiesės ir kontūro Γ sankirtoje (žr. 7.5 pav.).



7.5 pav.

Tegu δ yra atstumas tarp taškų 0 ir 2, o h atstumas tarp taškų 0 ir 1. Interpoliuodami funkcijos u reikšmes taškuose 1 ir 2 randame funkcijos u reikšmę taške 0, t.y.

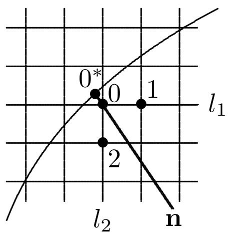
$$u_0 = \frac{\delta}{\delta + h} u_1 + \frac{h}{\delta + h} u_2.$$

Tokios aproksimacijos paklaida yra eilės $O(h^2)$.

Pabaigoje pateiksime vieną būdą, kaip pakeisti Noimano kraštinę sąlygą

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

skirtumine. Tegu 0 yra kontūrinis tinklo taškas. Kontūre Γ randame tašką 0^* tokį, kad iš jo išeinanti normalė eitų per tašką 0. Pasirenkame kokius nors du vidinius ar kontūrinius tinklo taškus 1 ir 2 tokius, kad tiesės l_1, l_2 einančios per taškus $0, 1$ ir $0, 2$ yra statmenos (žr. 7.6 pav.).



7.6 pav.

Tada

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial l_1} \cos\varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial l_2} \sin\varphi_0 \approx \frac{u_1 - u_0}{h_1} \cos\varphi_0 + \frac{u_2 - u_0}{h_2} \sin\varphi_0;$$

čia kampas tarp normalės **n** ir tiesės l_2, h_1 ir h_2 – atstumai tarp taškų 0, 1 ir 0, 2. Todėl Noimano krašinę sąlygą kontūriniame taške 0 galima pakeisti skirtumine lygtimi

$$\frac{u_1 - u_0}{h_1} \cos \varphi_0 + \frac{u_2 - u_0}{h_2} \sin \varphi_0 = \varphi_0.$$

P a s t a b a. Analogišką skirtuminę lygtį galima parašyti ir trečios kraštinės sąlygos atveju.

Parašę skirtumines lygtis kiekviename vidiniame tinklo taške ir prie jų prijungę skirtumines lygtis kontūriniuose tinklo taškuose, gausime tiesinių algebrinių lygčių sistemą, kurioje lygčių skaičius sutampa su nežinomųjų skaičiumi (t.y. su vidinių ir kontūrinių taškų skaičiumi). Dirichlė uždavinio atveju galima parodyti, kad visos gautos skirtuminių lygčių sistemos turi vienintelį sprendinį, jei tik nagrinėjamas tinklas yra pakankamai smulkus. Noimano uždavinio atveju sprendinio egzistavimas ir vienatis priklauso nuo papildomų sąlygų.

7.5 BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODAS PARABOLINĖS LYGTIES ATVEJU

Nagrinėsime parabolinę lygtį

$$\mathrm{L}(u) := u_t - a^2 u_{xx} + b u_x + c u = f(x,t), \tag{7.24}$$

kurioje koeficientai a, b, c ir f yra žinomos tolydžios kintamųjų x ir t funkcijos, $a \neq 0$. Koši uždavinys šiai lygčiai formuluojamas taip. Pusplokštumėje

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$$

reikia rasti (7.24) lygties sprendinį, tenkinanti pradinę sąlygą

$$u\big|_0 = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

φ – žinoma funkcija.

Imkime stačiakampį tinklą, kurio viršūnės (i,j) yra tiesių

$$\begin{aligned} x &= ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ t &= jl, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

sankirtos taškai. Kiekviename taške $(i,j), j \geq 1$ išvestines u_x ir u_{xx} galime pakeisti skirtumais

$$\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h}, \text{ ir } \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}.$$

Išvestinę u_t taške (i,j) galima pakeisti vienu iš skirtumu

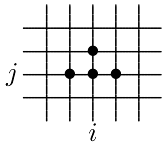
$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l}, \; \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{l}, \; \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l}.$$

Taigi (7.24) diferencialinę lygtį taške (i,j) galima pakeisti viena iš skirtuminių lygčių

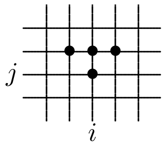
$$\begin{aligned} L_1(u_{ij}) :=\; & \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{l} - a_{ij}\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \\ & b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + c_{ij}u_{ij} = f_{ij}, \\ L_2(u_{ij}) :=\; & \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{l} - a_{ij}\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \\ & b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + c_{ij}u_{ij} = f_{ij}, \\ L_3(u_{ij}) :=\; & \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} - a_{ij}\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \\ & b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + c_{ij}u_{ij} = f_{ij}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Pirmoji skirtuminė lygtis aproksimuoja diferencialinę lygtį tikslumu $O(l+h^2)$ ir joje yra ieškomos funkcijos u reikšmės keturiose tinklo taškuose (žr. 7.7 pav.).

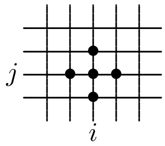
Antroji skirtuminė lygtis taip pat aproksimuoja diferencialinę lygtį tikslumu $O(l + h^2)$ ir šioje lygtyje ieškomos funkcijos u reikšmės yra apibrėžtos keturiose tinklo taškuose (žr. 7.8 pav.). Trečioji skirtuminė lygtis aproksimuoja diferencialinę lygtį tikslumu $O(l^2 + h^2)$ ir ieškomos funkcijos u reikšmės yra apibrėžtos penkiose tinklo taškuose (žr. 7.9 pav.).



7.7 pav.



7.8 pav.



7.9 pav.

Tinklo taškuose $(i, 0)$ ieškomos funkcijos u reikšmės

$$u_{i0} = \varphi(ih) := \varphi_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Pirmoji ir trečioji skirtuminės schemos vadinamos išreikštinėmis, o antroji – neišreikštine.

Puasono lygties

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

atveju gautas skirtumines lygtis galima perrašyti taip:

$$\begin{aligned}
&u_{ij+1} = (1 - 2\alpha)u_{ij} + \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}),\\
&(1 + 2\alpha)u_{ij} - \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}) = u_{ij-1},\\
&u_{ij+1} = 2\alpha(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + u_{ij-1};
\end{aligned} \tag{7.26}$$

čia $\alpha = l/h^2$. Koeficientą α geriausiai parinkti taip, kad gautos skirtuminės lygtys būtų kuo paprastesnės. Nagrinėjamu atveju geriausiai imti $\alpha = 1/2$. Tada gausime tokias tris skirtumines lygtis

$$\begin{aligned}
&u_{ij+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1j} + u_{i-1j}),\\
&4u_{ij} - (u_{i+1j} + u_{i-1j}) = 2u_{ij-1},\\
&u_{ij+1} = u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j} + u_{ij-1}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Praktiniams skaičiavimams geriausiai tinka pirmoji shema. Iš pradžių, naudojant pradines sąlygas, randame funkcijos u reikšmes taškuose $i, 1$, po to naudojant šias reikšmes randamos funkcijos u reikšmės taškuose $i, 2$ ir t.t. Naudojant antrąją schemą reikia spręsti lygčių sistemą. Naudojant trečiąją schemą iš pradžių, kokiu nors būdu reikia rasti funkcijos u reikšmes taškuose $(i, 1)$ Kituose taškuose funkcijos u reikšmės jau randamos lengvai. Tačiau pastaruoju atveju paklaida, atsiradusi kokiame nors žingsnyje pereinant nuo vieno sluoksnio prie kito, kaupiasi, didėja ir po keliu žingsniu visiškai iškreipia sprendinį. Todėl praktikoje ji nenaudojama, nors pastaroji schema diferencialinę lygtį aproksimuoja tiksliau už kitas dvi. Taigi skaičiuojant vienoms skirtuminėms schemoms paklaidos gali kauptis ir didėti, o kitoms ne.

Skirtuminė schema vadinama *s*tabilia, jeigu skaičiavimo paklaida, pereinant nuo vieno sluoksnio prie kito nedidėja. Priešingu atveju skirtuminė schema vadinama nestabilia. Galima parodyti, kad Puasono lygties atveju pirmoji iš (7.27) skirtuminių schemų yra stabili, o trečioji ne.

Mišrusis kraštinis uždavinys (7.24) lygčiai formuluojamas taip. Rasti funkciją u, kuri cilindre

$$Q_T = \{(x,t) : x \in (a,b), t \in (0,T)\}$$

tenkintų (7.24) lygtį, taške $t = 0$ pradinę sąlygą

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [a,b],$$

o intervalo (a,b) kraštiniose taškuose vieną iš kraštinių sąlygų[1]

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=a} = \mu(t), \quad u\big|_{x=b} = \nu(t), \quad t \in [0,T], \\ &u_x\big|_{x=a} = \mu(t), \quad u_x\big|_{x=b} = \nu(t), \quad t \in [0,T], \\ &(u_x + \alpha u)\big|_{x=a} = \mu(t), \quad (u_x + \beta u)\big|_{x=b} = \nu(t), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Kadangi lygtis yra sprendžiama stačiakampyje Q_T, tai patogu imti stačiakampį tinklą, kurio viršūnės yra tiesių

$$\begin{aligned} &x = a + ih, \quad i = 0,1,2,\dots,N, \quad N = (b-a)/h, \\ &t = jl, \quad j = 0,1,2,\dots,M, \quad M = T/l \end{aligned}$$

sankirtos taškai. Taškus, kurie yra tiesėse $x = a, x = b$ ir $t = 0$ vadinsime kontūriniais, o likusius cilindro Q_T taškus – vidiniais. Jeigu taškas (i,j) yra vidinis cilindro Q_T taškas, tai (7.24) lygtį šiame taške galima pakeisti viena iš (7.25) skirtuminių lygčių. Jeigu taškas (i,j) yra tiesėje $t = 0$, tai funkcijos u reikšmės taške $(i,0)$ apibrėžiamos taip:

$$u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 0,1,2\dots,N.$$

Kraštiniuose taškuose $x = a$ ir $x = b$ išvestinę u_x keičiame, atitinkamai, skirtumais

$$\frac{u_{1j} - u_{0j}}{h} \quad \text{ir} \quad \frac{u_{Nj} - u_{Nj-1}}{h}.$$

Taigi galima sudaryti tris skirtingas nagrinėjamo uždavinio sprendimo schemas:

$$\begin{cases} L_k u_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,N-1,\ j = 0,1,\dots,M-1, \\ u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 1,2,\dots,N, \\ l_a u_{0j} = \mu_j, \quad l_b u_{Nj} = \nu_j, \quad j = 0,1,\dots,M, \end{cases} \qquad k = 1,2,3; \tag{7.29}$$

čia l_a ir l_b yra operatoriai, aproksimuojantis kraštines sąlygas taškuose a ir b. Pavyzdžiui, trečios kraštinės sąlygos atveju

$$l_a u_{0j} = \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h} + \alpha u_{0j}, \quad l_b u_{Nj} = \frac{u_{Nj} - u_{N-1j}}{h} + \beta u_{Nj}.$$

[1] Skiringose intervalo (a,b) kraštiniose taškuose galima imti skirtingas kraštines sąlygas.

Homogeninės šilumos laidumo lygties atveju gautas tris skirtumines schemas galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} u_{ij+1} = (1-2\alpha)u_{ij} + \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}),\ i = 1,\dots,N-1,\ j = 0,\dots,M-1, \\ u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 1,2,\dots,N, \\ l_a u_{0j} = \mu_j, \quad l_b u_{Nj} = \nu_j, \quad j = 0,1,\dots,M, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+2\alpha)u_{ij} - \alpha(u_{i+1j} + u_{i-1j}) = u_{ij-1},\ i = 1,\dots,N-1,\ j = 0,\dots,M-1, \\ u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 1,2,\dots,N, \\ l_a u_{0j} = \mu_j, \quad l_b u_{Nj} = \nu_j, \quad j = 0,1,\dots,M, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{ij+1} = 2\alpha(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + u_{ij-1}, i = 1,..,N-1,\ j = 0,..,M-1, \\ u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 1,2,\dots,N, \\ l_a u_{0j} = \mu_j, \quad l_b u_{Nj} = \nu_j, \quad j = 0,1,\dots,M; \end{cases}$$

čia $\alpha = l/h^2$.

P a s t a b a. Visose trijose schemose kraštinių sąlygų aproksimacijos paklaida yra $O(h)$. Norint padidinti kraštinių sąlygų aproksimacijos tikslumą galima prie tinklo prijungti dar dvi tieses $x = a - h$ ir $x = a + (N+1)h$. Tada prie tinklo taškų prisidės taškai $(-1, j)$, $(N+1, j)$ ir išvestinę u_x taškuose $(0, j)$, (N, j) galima aproksimuoti taip:

$$\frac{u_{1j} - u_{-1j}}{2h}, \quad \frac{u_{N+1j} - u_{N-1j}}{2h}.$$

Tokios aproksimacijos paklaida yra $O(h^2)$. Tačiau padidėjus tinklo viršūnių skaičiui padidėja nežinomųjų ir lygčių skaičius. Trukstamas lygtis gausime parašę parašę diferencialinės lygties skirtuminę lygtį taškuose $(0, j)$ ir (N, j).

Pasiekti kraštinių sąlygų aproksimavimo tikslumą $O(h^2)$ galima ir kitaip. Sudarant skirtuminį tinklą vietoj tiesių $x = a + ih$ galima imti tieses $x = a + ih - h/2$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. Tada tiesės $x = a$ ir $x = b$ jau nebus tinklo tiesės ir funkcijos u reikšmes kraštiniuose taškuose $x = a$, $x = b$ galima aproksimuoti, atitinkamai, taip:

$$\frac{u_{1j} + u_{0j}}{2}, \quad \frac{u_{N+1j} + u_{Nj}}{2},$$

o išvestinės u_x reikšmes taip:

$$\frac{u_{1j} - u_{0j}}{h}, \quad \frac{u_{N+1j} - u_{Nj}}{h}.$$

Sakysime, skirtuminė schema yra išreikštinė, jeigu sudarant skirtuminę lygtį imami tinklo taškai yra išsidėstę taip, kad viršutinėje eilutėje yra tik vienas taškas. Kitaip tariant išreikštinėje schemoje nežinomąjį su didžiausiu j indeksu galima išreikšti nežinomaisiais su indeksais $j-1$, $j-2$ ir t.t. Priešingu atveju, kai viršutinėje eilutėje yra daugiau nei vienas taškas, skirtuminė schema vadinama neišreikštine. Taigi pirmoji ir trečioji iš (7.29) schemų yra išreikštinė, o antroji – neišreikštinė. Aišku, kad sistemas, sudarytas naudojant išreikštinę schemą, spręsti yra žymiai paprasčiau. Tačiau čia, kaip ir Koši uždavinio atveju, pasirenkant sprendimo schemą iš pradžių reikia išsiaiškinti ar ji yra stabili ar ne.

7.6 BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODAS HIPERBOLINĖS LYGTIES ATVEJU

Nagrinėsime hiperbolinę lygtį

$$\mathrm{L}(u) := u_{tt} - au_{xx} + bu_x + cu_t + qu = f(x,t), \tag{7.30}$$

kurioje koeficientai a, b, c, q ir f yra žinomos tolydžios kintamųjų x ir t funkcijos, $a \neq 0$ (hiperboliškumo sąlyga). Koši uždavinys šiai lygčiai formuluojamas taip. Pusplokštumėje

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$$

reikia rasti (7.30) lygties sprendinį, tenkinanti pradines sąlygas

$$u\big|_0 = \varphi(x), \quad , u_t\big|_0 = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.31}$$

φ ir ψ – žinomos funkcijos.

Čia, kaip ir parabolinės lygties atveju, pusplokštumę $\mathbb{R}^2_+$ padengiame stačiakampiu tinklu, kurio viršūnės (i,j) yra tiesių

$$x = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$
$$t = jl, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

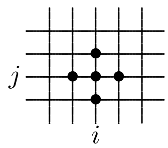
sankirtos taškai. Kiekviename taške $(i,j), j \geq 1$ išvestines u_t, u_x, u_{tt} ir u_{xx} galime pakeisti, atitinkamai, skirtumais

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij_1}}{2l}, \ \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h}, \ \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2}, \ \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}.$$

Taigi (7.30) diferencialinę lygtį taške (i,j) galima pakeisti skirtumine lygtimi

$$\begin{aligned}\tilde{L}(u_{ij}) := \ & \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{l^2} - a_{ij}\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \\ & b_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2h} + c_{ij}\frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2l} + q_{ij}u_{ij} = f_{ij},\end{aligned} \tag{7.32}$$

Pastaroji skirtuminė lygtis aproksimuoja diferencialinę lygtį tikslumu $O(l^2 + h^2)$ ir joje yra ieškomos funkcijos u reikšmės penkiose tinklo taškuose (žr. 7.10 pav.).



7.10 pav.

Tiesėje $t = 0$, t.y. tinklo taškuose $(i, 0)$ pirmąją pradinę salygą keičiame tokia

$$u_{i0} = \varphi(ih) := \varphi_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Antrą pradinę sąlygą galima pakeisti skirtumu

$$\frac{u_{i1}-u_{i0}}{l}=\psi(ih):=\psi_i,\quad i=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Tokios aproksimacijos paklaida yra $O(l)$. Norint padidinti aproksimavimo tikslumą galima antrą pradinę sąlygą pakeisti skirtumu

$$\frac{u_{i1}-u_{i-1}}{2l}=\psi(ih):=\psi_i,\quad i=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Tokios aproksimacijos paklaida yra $O(l^2)$. Tačiau šiuo atveju reikia dar papildomai parašyti (7.30) diferncialines lygties skirtumines lygtis tinklo taškuose $(i,0)$.

Mišrusis kraštinis uždavinys (7.30) lygčiai formuluojamas taip. Rasti funkciją u, kuri cilindre

$$Q_T=\{(x,t):x\in(a,b),t\in(0,T)\}$$

tenkintų (7.30) lygtį, taške $t=0$ pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in[a,b],\tag{7.33}$$

o intervalo (a,b) kraštiniose taškuose vieną iš kraštinių sąlygų[1]

$$\begin{aligned}&u\big|_{x=a}=\mu(t),\quad u\big|_{x=b}=\nu(t),\quad t\in[0,T],\\&u_x\big|_{x=a}=\mu(t),\quad u_x\big|_{x=b}=\nu(t),\quad t\in[0,T],\\&(u_x+\alpha u)\big|_{x=a}=\mu(t),\quad (u_x+\beta u)\big|_{x=b}=\nu(t),\quad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{7.34}$$

Kadangi lygtis yra sprendžiama stačiakampyje Q_T, tai patogu imti stačiakampį tinklą, kurio viršūnės yra tiesių

$$\begin{aligned}&x=a+ih,\quad i=0,1,2,\dots,N,\quad N=(b-a)/h,\\&t=jl,\quad j=0,1,2,\dots,M,\quad M=T/l\end{aligned}$$

sankirtos taškai. Taškus, kurie yra tiesėse $x=a,x=b$ ir $t=0$ vadinsime kontūriniais, o likusius cilindro Q_T taškus – vidiniais. Jeigu taškas (i,j) yra vidinis cilindro Q_T taškas, tai (7.30) lygtį šiame taške keičiame (7.32) skirtumine lygtimi. Jeigu taškas (i,j) yra tiesėje $t=0$, tai funkcijos u reikšmės taške $(i,0)$ apibrėžiamos taip:

$$u_{i0}=\varphi_i,\quad i=0,1,2\dots,N.$$

Kraštiniuose taškuose $x=a$ ir $x=b$ išvestinę u_x keičiame, atitinkamai, skirtumais

$$\frac{u_{1j}-u_{0j}}{h}\quad\text{ir}\quad\frac{u_{Nj}-u_{Nj-1}}{h}.$$

Tokių aproksimacijų paklaida yra $O(h)$. Padidinti išvestinės u_x aproksimacijos tikslumą galima lygiai taip pat kaip ir parabolinės lygties atveju.

[1]Skiringose intervalo (a,b) kraštiniose taškuose galima imti skirtingas kraštines sąlygas.

Taigi gavome tokią nagrinėjamo kraštinio uždavinio sprendimo schemą:

$$\begin{cases} \tilde{L}u_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 0, 1, \ldots, M-1, \\ u_{i0} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ l_a u_{0j} = \mu_j, \quad l_b u_{Nj} = \nu_j, \quad j = 0, 1, \ldots, M, \end{cases} \tag{7.35}$$

čia l_a ir l_b yra operatoriai, aproksimuojantis kraštines sąlygas taškuose a ir b (žr. 7.5 skyrelį).

Norint, kad skirtuminių lygčių sistemos sprendinys būtų artimas nagrinėjamo uždavinio sprendiniui, čia, kaip ir parabolinės lygties atveju, tinklo žingsnių h ir l pasirinkti visiškai laisvai nagalima. Tuo lengvai galima įsitikinti nagrinėant Koši uždavinį

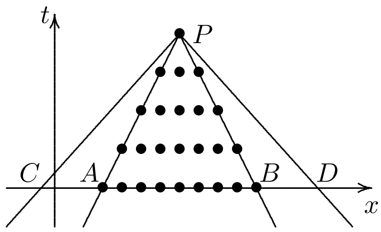
$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Šiuo atveju bangavimo lygtį keičiame skirtumine lygtimi

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{1j-1} + \alpha u^2(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}), \quad \alpha = l/h.$$

Funkcijos u reikšmes taškuose (i, j), $j = 0, 1$ randame iš pradinių sąlygų. Po to, iš skirtuminės lygties, randamos funkcijos u reikšmės taškuose (i, j), $j = 2, 3, \ldots$ Iš taško $P = (i, j)$ brėžiame du spindulius einančius per taškus $(i-1, j-1)$ ir $(i+1, j-1)$ iki susikirtimi su x ašimi taškuose A ir B. (žr. 7.11 pav.).



7.11 pav.

Sprendinio reikšmę u_{ij} nusako tinklo taškai esntis atkarpoje $[A, B]$. Bangavimo lygties charakteristikos yra tiesės $x \pm t = const$. Jos, eidamos per tašką P iškerta x ašyje atkarpą $[C, D]$ Iš dalinių išvestinių lygčių teorijos yra žinoma, kad bangavimo lygties sprendinį u taške (i, j) apibrėžia pradinės sąlygos duotos atkaroje $[C, D]$. Jeigu $\alpha > 1$, tai atkarpa $[A, B]$ yra atkarpos $[C, D]$ viduje. Jeigu pradines sąlygas keisime tik atkarpose $[C, A]$ ir $[B, D]$, tai keisime bangavimo lygties sprendinio reikšmę taške P, tačiau neikeisime skiruminės lygties reikšmės šiame taške. Vadinasi, kai $\alpha > 1$, t.y. $l > h$ skirtuminių lygčių sistemos sprendinys gali ir nearėti į diferencialinės lygties sprendinį. Todėl sąlyga $\alpha \leq 1$ yra būtina, kad skirtuminės lygties sprendinys artėtų į diferencialinės lygties sprendinį.

P a s t a b a. Kitokias hiperbolinių lygčių (taip kaip ir elipsinių lygčių) skirtumines schemas galima gauti neapibrėžtų koeficientų metodu.

LITERATŪRA

[1] Ambrazevičius A. – Matematinės fizikos lygtys. D. 1. Vilnius: "Aldorija", 1996. 380 p.

[2] Axiezeris N. I. – Variacinio skaičiavimo paskaitos. Maskva: 1954. 248 p. rus.

[3] Bibikovas J. N – Bendras paprastųjų diferencialinių lygčių kursas. Leningradas: LGU, 1981, 232 p. rus.

[4] Golokvosčius P. – Diferencialines lygtys. Vilnius: TEV, 2000, 512 p.

[5] Kodingtonas A., Levinsonas N. – Paprastųjų diferencialinių lygčių teorija. - M.: I*L 1958. - 476p. rus.

[6] Arnoldas V. – Matematiniai klasikinės mechanikos metodai. M.: Nauka, 1979 —???p.

[7] Poluektovas R. A., Pichas J. A., Švitovas I. A. – Dinaminiai ekologinių sistemų modeliai. - L.: Gidrometeoizdat, 1980, 288 p. rus.

[8] Kvedaras B., Sapagovas M. – Skaičiavimo metodai. Vilnius: "Mintis", 1974, 516 p.

[9] Berezinas I.S., Židkovas N.P. – Skaičiavimo metodai. D. 2. Maskva: "FizMat", 1959. 620 p.

[10] Samarskis A.A., Michailovas A.P. – Matematinis modeliavimas (idėjos, metodai, pavyzdžiai). Maskva, "FizMatLit" 1997. ??? p.