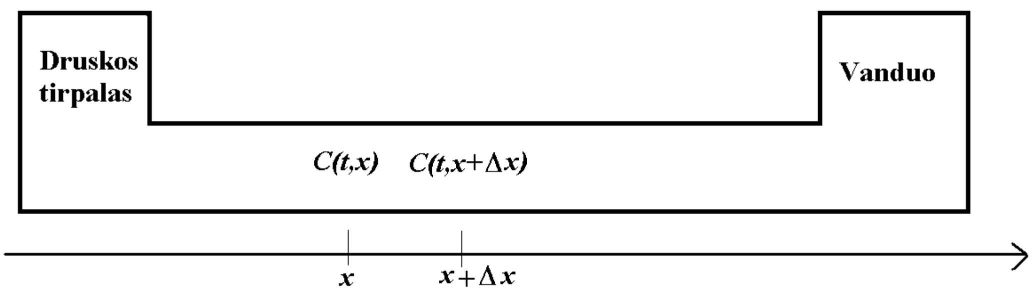
skyrius 4

Šilumos laidumo ir difuzijos lygtys

4.1 Difuzijos matematinis modelis

Dėl medžiagos (pavyzdžiui, druskos; 4.1 pav.) molekulių chaotinių judėsių kinta jos koncentracija (molekulių kiekis) kitoje medžiagoje (pavyzdžiui, vandenyje). Difuzuojančių medžiagų sąveikos procesas paprastai vyksta du-



4.1 pav: Difuzijos proceso modelis

jose ir skysčiuose ir vadinamas **difuzija**. Per laiko intervalą $\Delta t \ll 1$ per vamzdžio pjūvį (S – pjūvio plotas) praeina difuzuojančios medžiagos kiekis, kurio masė yra m. Šis kiekis priklauso nuo medžiagos (pavyzdžio atveju – druskos) koncentracijos $C(t,x)$ ir nuo difuzijos koeficiento λ. Masė m išreiškiama Fiko (A.Fick) dėsniu:

$$m = -\lambda \frac{\partial C}{\partial x} S \, \Delta t. \tag{4.1}$$

Pastebėkime, kad iš (4.1) išplaukia

$$\Delta_x m = m(t, x + \Delta x) - m(t, x) = -\lambda \left(\frac{\partial C(t, x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} \right) S\,\Delta t.$$

Kita vertus, per laiko intervalą $\Delta t \ll 1$ medžiagos (druskos) koncentacija indo dalyje tarp x ir $x + \Delta x$ pasikeis taip:

$$-\Delta_x m = (C(t + \Delta t, \tilde{x}) - C(t, \tilde{x}))\ \Delta V.$$

Čia ΔV – indo dalies tarp taškų x ir $x + \Delta x$ tūris, $\tilde{x} \in (x, x + \Delta x)$. Kai S–$const$, $\Delta V = S\,\Delta x$. Taigi gauname

$$\frac{C(t + \Delta t, \tilde{x}) - C(t, \tilde{x})}{\Delta t} S = \lambda S\, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C(t, x + \Delta x) - C(t, x)}{\Delta x} \right).$$

Perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$ ir $\Delta x \to 0$, gauname difuzijos lygtį

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{4.2}$$

čia $a = \sqrt{\lambda}$.

4.2 Šilumos laidumas strype

4.2.1 Modeliavimo prielaidos

- strypas yra tiek plonas, kad kiekvieno skersinio pjūvio taškuose tempertūra laikoma vienoda;
- $u(t, x)$ – strypo skersmenyje, kurio koordinatė yra x temperatūra laiko momentu t;
- $S(x) > 0$ – strypo skerspjūvio plotas;
- $p(x) > 0$ – skerspjūvio perimetras;
- $\rho(x) > 0$ – tankis;
- $C(x) > 0$ – specifinė šiluma (šilumos kiekis strypo elemente x, $x + \Delta x$ lygus $C\rho\, S\Delta x\, u$);
- $k(x) > 0$ – šilumos laidumo koeficientas;
- $\kappa(x) > 0$ – spinduliavimo (aušimo) koeficientas;
- $f(t, x)$ – oro temperatūra strypo aplinkoje.

4.2.2 Diferencialinė lygtis

$$C(x)\,\rho(x)\;S(x)\,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\kappa(x)p(x)\,(u-f(t,x))\,.$$

Kai visi modelio parametrai yra konstantos (vienalytė medžiaga ir vienodas skerspjūvis),

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b(u-f(t,x)),$$

$$a=\sqrt{\frac{k}{C\rho}},\;\;b=\frac{\kappa p}{C\rho S}.$$

Jei strypas yra izoliuotas ($\kappa=0$), gauname homogeninę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Šilumos sklidimas esant šilumos šaltiniui

Kai strypas yra izoliuotas ir veikia šilumos šaltinis, tai strypo temeratūrai galioja nehomogeninė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h(t,x). \tag{4.3}$$

4.2.3 Šilumos laidumas erdvėje

Tarkime, kad $\rho(x,y,z)$ – kūno tankis, $C(x,y,z)$ – specifinė šiluma, $k(x,y,x)$ – šilumos laidumo koeficientas. Kūno temperantūrai $u(t,x,y,z)$ galioja *šilumos laidumo lygtis*

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}\left(k\operatorname{grad}u\right). \tag{4.4}$$

Kai parametrai ρ, C, k yra konstantos (**homogeninis** kūnas) gauname lygtį

$$u_t=a^2\,\Delta u,$$

čia $a=\sqrt{\dfrac{k}{\rho C}}$, $\Delta\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplaso operatorius.

4.3 Koši uždavinio sprendimas

Begalinio strypo aušinimas

Spręsime uždavinį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u\,(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.5}$$

kai $-\infty < x < +\infty$, $t \geqslant 0$.

4.3.1 Kintamųjų atskyrimo metodas

Ieškosime netrivialių (nenulinių) (4.5) lygties spendinių tokiu pavidalu

$$u(t,x) = T(t)\,X(x).$$

Tada $u_t = T'(t)\,X(x),\; u_{xx} = T(t)\,X''(x)$ ir įrašę šiuos reiškinius į (4.5) lygtį, gauname

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2\,\frac{X''(x)}{X(x)} = const.$$

Nagrinėsime atvejį $const < 0$ (priešingas atvejis neturi fizikinės prasmės) ir pažymėkime $const \cdot a^2 = -\lambda^2$. Tada

$$T(t) = C\,e^{-\lambda^2\,a^2\,t},\;\; X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Taigi pastebėję, kad λ yra bet kuris neneigiamas realusis skaičius, gauname be galo daug lygties sprendinių

$$u(t,x) = e^{-\lambda^2\,a^2\,t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right).$$

4.3.2 Furjė metodas

Tiesioginiu patikrinimu įrodome, kad integralas

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\,a^2\,t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)\,d\lambda \tag{4.6}$$

irgi yra (4.5) lygties sprendinys.

Iš pradinės sąlygos gauname:

$$u(0,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)\,d\lambda = \varphi(x).$$

Tarkime, kad funkciją $\varphi(c)$ galima išreikšti Furjė integralu. Tada

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi.$$

Iš čia, taikydami formulę $\cos \lambda x \cos \lambda\xi + \sin \lambda x \sin \lambda\xi = \cos \lambda(\xi - x)$, gauname

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \left(\cos \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi + \sin \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi \right) d\lambda =$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \, d\xi \right) d\lambda.$$

Pakeitę integravimo tvarką, gausime

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \, I(\xi) \, d\xi,$$

čia

$$I(\xi) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) \, d\lambda.$$

Raskime funkcijos $I(\xi)$ išvestinę

$$I'(\xi) = -\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \lambda \sin \lambda(\xi - x) \, d\lambda =$$

$$\frac{1}{2a^2 t} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin \lambda(\xi - x) \, d \, e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

Diferencijavimu dalimis gauname diferencialinę lygtį

$$I'(\xi) = -\frac{\xi - x}{2a^2 t} I(\xi).$$

Iš čia ir iš funkcijos $I(\xi)$ reiškimo integralu, kai $\xi = x$:

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

išplaukia, kad

$$I(\xi)\big|_{\xi=x} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Taigi galime užrašyti (4.5) uždavinio sprendinį

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi, & t>0 \\ \varphi(x), & t=0 \end{cases} \tag{4.7}$$

4.3.3 Fundamentinio sprendinio fizikinė prasmė

Tarkime, kad funkcija $\varphi(\xi)$ (4.7) formulėje yra tokia

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kai } \xi < x_0 - \delta, \\ \varphi_0, \ \text{kai } x_0 - \delta \leqslant \xi \leqslant x_0 + \delta, & \\ 0, & \text{kai } \xi > x_0 + \delta, \end{cases}$$

čia δ – mažas teigiamas skaičius.

Paimkime,

$$\varphi_0 = \frac{Q_0}{2\delta S\rho C},$$

S – strypo skerspjūvio plotas,
ρ – strypo medžiagos tankis,
C – specifinė šiluma,
Q_0 – šilumos kiekis, sukoncentruotas strypo atkarpoje $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Įrašę φ_0 į (4.7) formulę, gausime

$$u(t,x) = \frac{Q_0}{S\rho C}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

ir kai $\delta \to 0$:

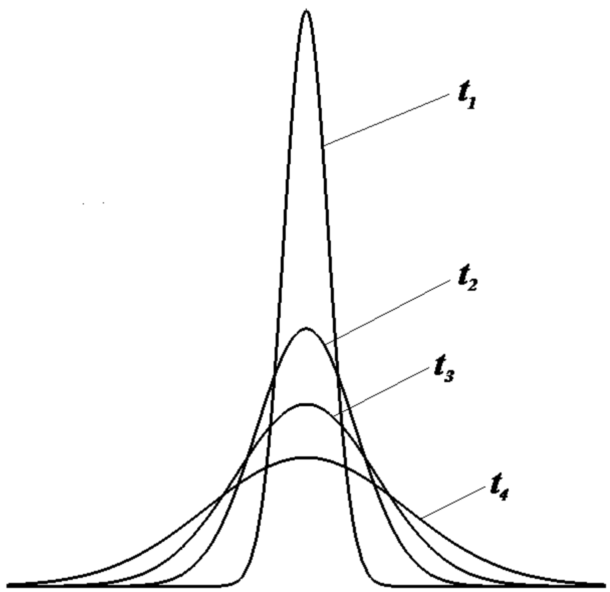
$$\frac{Q_0}{S\rho C}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}.$$

Paimkime šilumos kiekį Q_0 taip, kad jis galėtų pakelti vienetinio ilgio strypo atkarpos temperatūrą vienu laipsniu: $Q_0 = 1 \cdot S\rho C \cdot 1$. Funkciją

$$v(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2 t}} \tag{4.8}$$

vadiname **fundamentiniu sprendiniu**. Ši funkcija turi šaltinio prasmę, kai taške $x = x_0$ pradine akimirka patalpintas šilumos kiekis (toks, kad pakelti temperatūra taip, kaip buvo nurodyta), o kituose strypo taškuose jo temperatūra lygi nuliui.

Funkcijos $v(t,x)$ grafikas esant skirtingoms t reikšmėms $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ parodytas 4.2 paveiksle.



4.2 pav: Funkcijos (4.8) grafikas esant skirtingoms t reikšmėms

4.1 pratimas. Raskite laiko momentą t_x, kai taške $x \neq x_0$ strypo temperatūra $v\,(t_x, x)$ yra maksimali ir raskite šią temperatūrą.

Temperatūros formulė plokštumoje ir erdvėje

$$u(t,x,y) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta.$$

$$u(t,x,y,z)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

4.3.4 Kraštinės sąlygos

Baigtinio strypo galuose $x=0$ ir $x=l$ palaikoma kintanti temperatūra $\alpha(t)$ ir $\beta(t)$ – **pirmosios rūšies kraštinės sąlygos**:

$$u(t,x)|_{x=0}=\alpha(t),\;\; u(t,x)|_{x=l}=\beta(t).$$

Strypo galuose yra žinoma šilumos srovė (ji proporcinga temperatūros gradijentui) – **antrosios rūšies kraštinės sąlygos**:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=\gamma(t),\;\; \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=l}=\delta(t).$$

Trečiosios rūšies kraštinės sąlygos – strypo galuose vyksta šiluminis spinduliavimas į aplinką:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}-h_0(u(t,x)-f_0(t))\right|_{x=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+h_l(u(t,x)-f_l(t))\right|_{x=l}=0.$$

4.3.5 Kraštinio uždavinio sprendimas Furjė metodu

Baigtinio izoliuoto strypo aušinimas

$$u_t=a^2\,u_{xx},\;\; 0<x<l,\;\; t>0,$$

$$u(0,x)=\varphi(x),$$

$$u'_x(t,0)=0,\;\; u'_x(t,l)=0.$$

Taikome kintamųjų atskyrimo metodą (4.3.1, 30 p.):

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=-a^2\lambda^2,\qquad X''(x)+\lambda^2X(x)=0.$$

Iš čia gauname

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda^2t},\qquad X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Iš kraštinių sąlygų gauname, kad nenuliniai sprendiniai egzistuoja, kai

$$B = 0, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{l},\ n = 1, 2, \ldots$$

Todėl (atskirai išnagrinėkite atvejį, kai $\lambda = 0$)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

Iš pradinės sąlygos turime

$$u(0,x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Taigi apskaičiuojame Furjė eilutės koeficientus

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ n = 0, 1, \ldots$$

4.4 Maksimumo principas

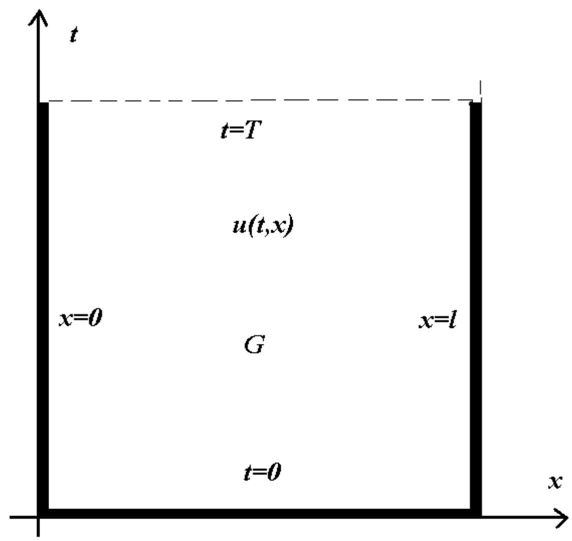
Pažymėkime stačiakampio $G = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ kontūrą $\Gamma = \{t = 0,\ x = 0,\ x = l\}$ (4.3 pav.) Tarkime, kad $M_\Gamma = \max\limits_{\Gamma} u(t,x)$ funkcijos u maksimumas kontūro Γ taškuose, $M_G = \max\limits_{G} u(t,x)$ – jos maksimumas srities G taškuose. Kadangi $\Gamma \subset G$, galioja nelygybė $M_\Gamma \leqslant M_G$. Tačiau šilumos laidumo lygties sprendiniui galioja lygybė $M_\Gamma = M_G$.

4.1 teorema. Tarkime, kad funkcija $u(t,x)$ – lygties $u_t = a^2u_{xx}$ – spendinys yra tolydi srityje G. Tada egzistuoja toks kontūro Γ taškas (t_0, x_0), kad

$$u\left(t_0, x_0\right) = M_G = \max_{G} u(t,x).$$

Įrodymas. Tarkime, kad $(t_1, x_1) \in G \setminus \Gamma$ yra vidinis srities G taškas ir $u(t_1, x_1) = M_\Gamma + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Sudarome pagalbinę funkciją (ji nėra šilumos laidumo lygties sprendinys)

$$U(t,x) = u(t,x) + \frac{\varepsilon}{2t_1}(t_1 - t).$$



4.3 pav: Maksimumo principas

Jei padaryta prielaida yra teisinga, funkcijos U maksimumas srities G taškuose lygus $M_\Gamma + \varepsilon$, o kontūro Γ taškuose

$$U(t,x)|_\Gamma \leqslant M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2t_1} t_1 = M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Taigi funkcija $U(t,x)$ įgyja maksimalią reikšmę kažkuriame vidiniame (atskirai reikia nagrinėti atvejį $t_2 = T$) srities taške (t_2, x_2). Maksimumo taške turi būti $U_{xx}(t_2, x_2) \leqslant 0$ ir iš funkcijos U apibrėžimo išplaukia, kad $u_{xx}(t_2, x_2) \leqslant 0$. Kita vertus, ekstremumo taške gausime įvertį $u_t(t_2, x_2) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2t_2}$ (lygybė galima tik, kai $t_2 = T$). Tada funkcija $u(t,x)$ nėra lygties $u_t = a^2 u_{xx}$ sprendinys, o tai prieštarauja teoremos sąlygai.

4.5 Uždavinys apie žemės temperatūrą

Spręsime uždavinį, kai žinoma vidutinė ilgametė temperatūra žemės paviršiuje

$$f(t) = \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, e^{\frac{2\pi n t}{T}},$$

čia T – metų ilgis (pavyzdžiui, $T = 365$).

Žymėsime $x = 0$ – žemės paviršius, $x = -\infty$ – didelis gylis.

Sprendinio ieškosime Furjė eilutės pavidalu

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n u_n(x)\, e^{\frac{2\pi nt}{T}}.$$

Funkcija $u(t,x)$ yra šilumos laidumo lygties sprendinys. Todėl

$$\frac{2\pi in}{T}\, u_n = a^2\, u''.$$

Bendrasis lygties sprendinys

$$u_n(x) = A_n e^{(1\pm i)q_n x} + B_n e^{-(1\pm i)q_n x},\ q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{a^2 T}}$$

bus aprėžtas tik, kai $A_n = 0$.

Iš pradinių sąlygų gauname, kad $u_n(0) = 1$. Pastebėkime, kad $f_n = f_{-n} = |f_n|\, e^{-i\gamma_n}$. Todėl

$$u(t,x) = f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\, e^{-q_n x} \cos\left(2\pi n\frac{t}{T} + \gamma_n - q_n x\right).$$

Furjė eilutės koeficientas f_0 turi ilgametės vidutinės temperatūros prasmę. Pavyzdžiui, šiaurės kraštuose $f_0 < 0$ ir tai reiškia amžinąjį įšalą.