Algoritmų teorijos uždaviniai

A. Birštunas

2015 m. balandžio 16 d.

1. Hilberto tipo teiginių skaičiavimas.

1) Nesinaudojant Dedukcijos teorema įrodyti Hilberto tipo teiginių skaičiavime:

a) $\vdash (p\&q) \to (q\&p)$.
b) $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$.
c) $\vdash ((r\&p) \vee (\neg r\&p)) \to p$.
d) $\vdash p \to ((q \to p)\&(r \vee p))$.
e) $\vdash \neg\neg\neg\neg p \to p$.
f) $\vdash (p\&q) \to (p \vee q)$.

2) Naudojantis Dedukcijos teorema įrodyti Hilberto tipo teiginių skaičiavime:

a) $\vdash (p\&q) \to (p \vee q)$.
b) $\vdash (p\&t) \to \neg\neg p$.
c) $\vdash \neg\neg q \to (p \to (t \vee q))$.
d) $\vdash (p\&q) \to (r \to (t \vee q))$.
e) $\vdash ((q \vee p) \to (r\&t)) \to (p \to (r\&t))$.
f) $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p\&q) \to r)$.
g) $\vdash (p \to q) \to ((r\&p) \to (t \vee q))$.
h) $\vdash (p \to q) \to ((p\&r) \to (q\&r))$.

2. Sekvenciniai skaičiavimai.

1) Ar sekvencijos išvedamos sekvenciniame skaičiavime G:

a) $q \to (s\&p) \vdash (\neg p \vee \neg s) \to \neg q$.

b) $s \vee (\neg p \to q) \vdash \neg q \to (p \vee s)$.

c) $p \vee (\neg q\&s), s \to \neg w \vdash \neg w \vee p$.

d) $(p\&q) \to (s\&w) \vdash (p\&s) \to (q \vee w)$.

e) $(p \vee (\neg(s \to \neg q))) \to (\neg q \vee p) \vdash p \vee (s \to \neg q)$.

f) $(p\&\neg q) \vee (\neg s \to p), q\&\neg s \vdash \neg p \to (q\&p)$.

g) $((p \to q) \vee \neg s) \to (\neg p \vee w) \vdash \neg s \to ((p \to q) \vee (\neg p \vee w))$.

h) $p \to (q\&s), (q \vee w) \to \neg s \vdash p \to (\neg w \vee u)$.

2) Parodyti, kad sekvencijos išvedamos Natūraliosios dedukcijos skaičiavime:

a) $q \to (s\&p) \vdash (\neg p \vee \neg s) \to \neg q$.

b) $s \vee (\neg p \to q) \vdash \neg q \to (p \vee s)$.

c) $p \vee (\neg q\&s), s \to \neg w \vdash \neg w \vee p$.

d) $(p \vee (\neg(s \to \neg q))) \to (\neg q \vee p) \vdash p \vee (s \to \neg q)$.

e) $(p\&\neg q) \vee (\neg s \to p), q\&\neg s \vdash \neg p \to (q\&p)$.

f) $p \to (q\&s), (q \vee w) \to \neg s \vdash p \to (\neg w \vee u)$.

3. Rezoliucijų metodas.

1) Su disjunktų dedukcine sistema nustatyti ar disjunktų aibė S prieštaringa:

   a) $S = \{r \vee \neg s \vee \neg u, \neg p \vee q \vee \neg u, p \vee \neg u \vee \neg s, \neg q \vee \neg r \vee p \vee \neg s, s, \neg s \vee u, \neg s \vee q, \neg p\}$.

   b) $S = \{q \vee \neg p, \neg r \vee \neg q, r \vee q \vee p, r \vee \neg q \vee p, r \vee \neg q \vee \neg p, \neg r \vee q \vee p\}$.

   c) $S = \{\neg p \vee \neg r, q \vee r, p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg q \vee r \vee t, \neg q \vee r \vee \neg t\}$.

2) Rezoliucijų metodu patikrinti ar iš prielaidų seka išvada:

   a) $(p \vee (\neg(r \rightarrow \neg q))) \rightarrow (\neg q \vee p) \vdash p \vee (r \rightarrow \neg q)$.

   b) $(p \& \neg q) \vee (\neg r \rightarrow p), q \& \neg r \vdash \neg p \rightarrow (q \& p)$.

   c) $((p \rightarrow q) \vee \neg r) \rightarrow (\neg p \vee w) \vdash \neg r \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee w))$.

   d) $p \rightarrow (q \& r), (q \vee t) \rightarrow \neg r \vdash p \rightarrow (\neg t \vee u)$.

   e) $(p|q) \rightarrow r, r \leftrightarrow (t \vee u) \vdash (\neg p \rightarrow (t \vee u)) \vee (\neg q \rightarrow (t \vee u))$.

3) Rezoliucijų metodu patikrinti ar formulė yra tapačiai klaidinga:

   a) $(\neg p \vee q) \& ((q \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \vee r))$.

   b) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \& (\neg(r \vee s) \& q))$.

4. Turingo mašinos ir baigtiniai automatai.

1) Parašyti 1-juostę determinuotą Turingo mašiną su abėcėle $\Sigma = \{0, 1, \flat\}$, kuri skaičiuoja funkciją:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei žodyje } x \text{ yra lyginis vienetų skaičius} \\ 0 & \text{, kitu atveju} \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei žodyje } x \text{ yra 3 ar daugiau nulių} \\ 0 & \text{, kitu atveju} \end{cases}$,

c) $f(x) = x + 1$,

d) $f(x) \equiv 0$,

e) $f(x) = y$, kur y gautas iš žodžio x jame visus 0 pakeičiant į 1, o 1 į 0,

f) $f(x) = y$, kur y gautas iš žodžio x jame pirmąjį 0 keičiant 1,
o jei 0 nėra, tai dirba be galo ilgai,

g) $f(x) = x \dot{-} 1$, t.y., jei $x > 0$, tai $f(x) = x - 1$, o $f(0) = 0$,

h) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei žodyje } x \text{ yra 2 iš eilės vienodi skaitmenys (0 arba 1)} \\ \infty & \text{, kitu atveju} \end{cases}$,

i) $f(x) = a_1 \& a_2 \& \ldots \& a_n$, čia $x = a_1 a_2 \ldots a_n$, $a_i \in \{0, 1\}$,

j) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei žodyje } x \text{ yra fragmentas 010} \\ 0 & \text{, kitu atveju} \end{cases}$,

k) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei žodyje } x \text{ sutampa pirmasis simbolis sutampa su paskutiniuoju} \\ 0 & \text{, kitu atveju} \end{cases}$,

l) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{, jei } x \text{ lyginis} \\ x + 1 & \text{, jei } x \text{ nelyginis} \end{cases}$,

m) * $f(x) = \begin{cases} y & \text{, kur žodis } y \text{ yra gautas iš žodžio } x \text{ jame pirmą iš kairės 0 pakeitus į 11} \\ xx & \text{, jeigu žodyje } x \text{ nėra 0} \end{cases}$,

2) Parašyti 1-juostę determinuotą Turingo mašiną su abėcėle $\Sigma = \{0, 1, ?, \flat\}$, kuri skaičiuoja funkciją $f(x) = y$, kur žodis y yra gautas iš žodžio x jame simbolį $?$ pakeičiant į pirmąjį sutiktą simbolį (0, 1, ar $\flat$) esantį dešinėje pusėje.

3) Kokią funkciją apskaičiuoja Turing mašina:
$\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, D)$, $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, N)$,
$\delta(q_0, 1) = (q_2, 1, N)$, $\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, D)$,
$\delta(q_0, \flat) = (q_0, \flat, D)$, $\delta(q_1, \flat) = (q_1, \flat, D)$,
čia $F = \{q_2\}$.

4) Parašyti 2-juostę determinuotą Turingo mašiną su abėcėle $\Sigma = \{0, 1, \flat\}$, kuri skaičiuoja funkciją

$f(x) = \begin{cases} y & \text{, kur žodis } y \text{ yra gautas iš žodžio } x \text{ jame pirmą iš kairės 0 pakeitus į 11} \\ xx & \text{, jeigu žodyje } x \text{ nėra 0} \end{cases}$,

5) Parašyti 3-juostę determinuotą Turingo mašiną su abėcėle $\Sigma = \{0, 1, \flat\}$, kuri skaičiuoja funkciją (Laikome, kad argumentas x atskirtas nuo argumento y lygiai vienu simboliu $\flat$):

a) $f(x, y) = x + y$,

b) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{, jei } x \geq y \\ 0 & \text{, kitu atveju} \end{cases}$.

6) Parašyti 1-juostę **nedeterminuotą** Turingo mašiną su abėcėle $\Sigma = \{0, 1, \flat\}$,
kuri skaičiuoja funkciją:

$f(x) = \begin{cases} x00 \text{ arba } x11 & \text{, jeigu žodžis } x \text{ baigėsi simboliu 0 (kurį žodį grąžinti parenkama atsitiktinai)} \\ 1x & \text{, jeigu žodžis } x \text{ baigėsi simboliu 1} \end{cases}$.

7) Rasti Turingo mašinų sudėtingumus laiko ir atminties atžvilgiu

a) Turingo mašinos, kurios galutinių būsenų aibė yra $F = \{q_3\}$ ir perėjimų funkcija δ yra:

δ	0	1	$\flat$
q_0	$(q_2, 1, N)$	$(q_1, 1, D)$	$(q_2, 1, K)$
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_1, 1, D)$	$(q_0, 0, D)$
q_2	$(q_2, 0, K)$	$(q_2, 1, K)$	$(q_3, 1, N)$

b) 1-juostės determinuotos Turingo mašinos, kuri skaičiuoja funkciją

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{, kur žodis } y \text{ yra gautas iš žodžio } x \text{ jame pirmą iš kairės 0 pakeitus į 11} \\ 1x0 & \text{, jeigu žodyje } x \text{ nėra 0} \end{cases},$$

c) * 1-juostės determinuotos Turingo mašinos, kuri skaičiuoja funkciją

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{, kur žodis } y \text{ yra gautas iš žodžio } x \text{ jame pirmą iš kairės 0 pakeitus į 11} \\ xx & \text{, jeigu žodyje } x \text{ nėra 0} \end{cases},$$

d) 3-juostės Turingo mašinos, kuri skaičiuoja funkciją $f(x, y) = x + y$.

e) 2-juostės Turingo mašinos, kuri skaičiuoja funkciją

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{, kur žodis } y \text{ yra gautas iš žodžio } x \text{ jame pirmą iš kairės 0 pakeitus į 11} \\ xx & \text{, jeigu žodyje } x \text{ nėra 0} \end{cases},$$

f) 2-juostės Turingo mašinos, kuri skaičiuoja funkciją

$f(x) = \begin{cases} xx^* & \text{, jei } x = y1 \\ x^*x & \text{, jei } x = y0 \end{cases}$. Čia x^* yra žodis x parašytas atvirkščia tvarka.

PASTABA: 3 Turingo mšinos variantai:

- Determinuota TM M_1, kuri iškarto juda 1 juostoje į galą ir tikrina paskutinį simbolį ir jeigu paskutinis simbolis 1, tai 1 juostoje grįžta į pradžią, tada 1 juosta juda dešinėn, o antra kairėn (rašo x^*), tada 1 ir 2 juosta juda kairėn (rašo x).
  jeigu paskutinis simbolis 0, tai 1 ir 2 juosta juda kairėn (rašo x), tada 1 juosta juda dešinėn, o antra kairėn (rašo x^*),
- Determinuota TM M_2, kuri iškarto 1 juosta juda dešinėn, o antra kairėn (rašo x^*) ir tikrina paskutinį simbolį,
  jeigu paskutinis simbolis 1, tai 1 ir 2 juosta juda kairėn (rašo x),
  jeigu paskutinis simbolis 0, tai 2 juosta juda dešinėn ir viską trina, tada 1 ir 2 juosta juda kairėn (rašo x), tada 1 juosta juda dešinėn, o antra kairėn (rašo x^*).
- Nedeterminuota TM M_3, kuri po pirmojo žingsnio atsitiktinai pasirenka dirbti kaip M_1 arba kaip M_2.

8) Rasti duotų kalbų baigtinius automatus:

a) $A = \{001, 0101\}$,

b) $A = \{(10)^n, n = 1, 2, \ldots\}$,

c) $A = \{10^{2n}1, n = 1, 2, \ldots\}$,

d) $A = \{1^{2n+1}0^{2m}, n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots\}$,

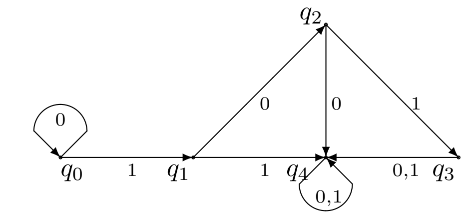
e) $A = \{100(0100)^n011, n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

f) A - aibė žodžių, kuriuose vienetų skaičius dalosi iš 2,

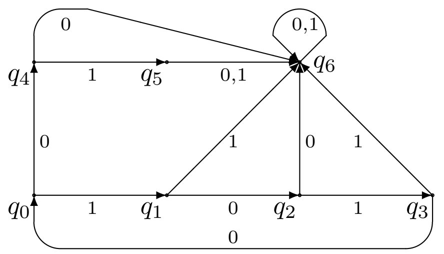
g) A - aibė žodžių, kuriuose nulių skaičius dalosi iš 3.

9) Kokias kalbas apibrėžia baigtiniai automatai:

a) $F = \{q_3\}$



b) $F = \{q_0, q_5\}$



10) Duotos baigtinių automatų kalbos: A_1 - aibė žodžių, kuriuose vienetų skaičius dalosi iš 2, ir A_2 - aibė žodžių, kuriuose nulių skaičius dalosi iš 3.
Rasti baigtinius automatus:

a) $A_1 \cap A_2$.

b) $A_1 \cup A_2$,

5. λ-skaičiavimas.

1) Atlikti duotų termų β-redukciją:

a) $[\,(\,\lambda x.\lambda z.[\,(xy)(zx)\,]\,)(\,\lambda w.\lambda y.(wy)\,)\,](ma)$,

b) $[\,(\,\lambda x.\lambda y.[\,(xy)(\,\lambda x.\lambda z.(xz)\,)\,]\,)(\,\lambda z.\lambda y.(zy)\,)\,](us)$,

c) $(xz)[\,(\lambda y.((\lambda x(xx))y))(\lambda z(zz))\,]$.

2) Funkcija $\neg x$ yra definuojama termu $\lambda x.((x0)1)$. Apskaičiuoti:

a) $\neg 0$,

b) $\neg 1$.

3) Funkcija $x \vee y$ yra definuojama termu $\lambda x.\lambda y.((xx)y)$. Apskaičiuoti:

a) $0 \vee 0$,

b) $1 \vee 0$,

c) $0 \vee 1$,

d) $1 \vee 1$.

4) Funkcija $x\&y$ yra definuojama termu $\lambda x.\lambda y.((xy)x)$. Apskaičiuoti:

a) $0\&0$,

b) $1\&0$,

c) $0\&1$,

d) $1\&1$.

5) Funkcija $pr_p^i(x_1, \ldots, x_p) = x_i$ yra definuojama termu $\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots\lambda x_p.x_i$. Apskaičiuoti:

a) $pr_4^3(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4})$,

b) $pr_4^2(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4})$.

6) Funkcija $s(x) = x + 1$ yra definuojama termu $\lambda n.\lambda f.\lambda x.((nf)(fx))$. Apskaičiuoti:

a) $s(\underline{1})$,

b) $s(\underline{2})$,

c) $s(\underline{3})$.

7) Funkcija $x + y$ yra definuojama termu $\lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.\,[(af)((bf)x)]$. Apskaičiuoti:

a) $\underline{1} + \underline{1}$.

b) $\underline{2} + \underline{3}$.

6. Primityviai rekursyviosios funkcijos.

1) Funkcija $f(x,y)$ yra gauta iš PR funkcijų $g(x) = pr_3^2(x, s(x), s(s(x)))$ ir $h(x,y,z) = x \cdot (y+1) \dot{-} z$ pritaikius primityviosios rekursijos operatorių. Rasti:

   a) $f(1,3)$,
   b) $f(3,2)$.

2) Funkcija $f(x,y,z)$ yra gauta iš PR funkcijų $g(x,y) = x + s(y)$ ir $h(x,y,z,t) = (x+y+z) \dot{-} t$ pritaikius primityviosios rekursijos operatorių. Rasti:

   a) $f(4,3,4)$,
   b) $f(2,1,3)$.

3) Parodyti, kad duotos funkcijos yra primityviai rekursyviosios:

   a) $sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jei } x > 0 \\ 0 & \text{, jei } x = 0 \end{cases} \in PR$,
   b) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, jei } x > 0 \\ 1 & \text{, jei } x = 0 \end{cases} \in PR$,
   c) $f(x,y) = x \cdot y \in PR$,
   d) $f(x) = x! \in PR$, kai $0! = 1$,
   e) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{, jei } x > 0 \\ 0 & \text{, jei } x = 0 \end{cases} \in PR$,
   f) $f(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{, jei } x > y \\ 0 & \text{, jei } x \leq y \end{cases} \in PR$,
   g) $f(x,y) = [x/y] \in PR$ (laikome, kad $[x/0] = x$),
   Naudotis teorema:
   Jei $g(x_1, \ldots, x_n) \in PR$, tai $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) \in PR$.
   h) $f(x,y) = |x - y| \in PR$,
   i) $rest(x,y) = z$, kur z yra liekana gauta x padalinus iš y, $rest(x,y) \in PR$
   (laikome, kad $rest(x,0) = x$).

4) Funkcija $f(x)$ yra gauta iš funkcijos $g(x)$ pritaikius iteracijos operatorių ($f(x) = g(x)^I$).
   Rasti f(4).

   a) $g(x) = q(x) + s(x)$,
   b) $g(x) = q(s(x)) + s(q(x))$.

5) Funkcija $f(x)$ yra gauta iš funkcijos $g(x)$ pritaikius iteracijos operatorių ($f(x) = g(x)^I$). Kokia yra funkcija $f(x)$:

   a) $g(x) = x + 2 \cdot \sqrt{x} + 1$,
   b) $g(x) = \overline{sg}(x)$.

6) Išreikšti PR vieno argumento funkcijas per bazines $s(x)$, $q(x)$ ir sudėties, kompozicijos ir iteracijos operatorius:

   a) $f(x) = pr_1^1(x)$,
   b) $f(x) \equiv 0$,
   c) $f(x) \equiv 1$,
   d) $f(x) = sg(x)$.

7. Dalinai rekursyviosios funkcijos.

1) Rasti funkcijų reikšmes:

a) $f(x,y)=\mu_z(sg(z\dot{-}y)+s(\overline{sg}(x\dot{-}z))=y)$. Rasti $f(2,3)$.

b) $f(x,y)=\mu_z((s(z)\dot{-}x)\cdot sg(y\dot{-}z)=x)$. Rasti $f(2,4)$.

c) $f(x,y)=\mu_z(|z-x|\cdot|y-sg(z)|=x)$. Rasti $f(2,3)$.

d) $f(x,y)=\mu_z(y\cdot sg(z\dot{-}x)-z=y-s(x)$. Rasti $f(0,2)$ ir $f(1,3)$.

2) Parodyti, kad funkcijos yra dalinai rekursyviosios (DR).

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{, jei } x \text{ yra natūralaus skaičiaus kvadratas}\\ \infty & \text{, kitu atveju}\end{cases}.$

b) $f(x,y)=\begin{cases}x/y & \text{, jei } x \text{ dalosi iš } y \text{ be liekanos}\\ \infty & \text{, kitu atveju}\end{cases}.$

c) $f(x)=\begin{cases}x & \text{, jei } x \text{ dalosi iš } 3\\ \infty & \text{, kitu atveju}\end{cases}.$

d) $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{, jei } (x+y) \text{ dalosi iš } 3\\ \infty & \text{, kitu atveju}\end{cases}.$