

Laboratorinis darbas Nr. 2

1. Materialaus taško priverstiniai svyravimai aprašomi antrosios eilės diferencialine lygtimi

$$x''(t) + k^2 x(t) = a \sin(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t).$$

Raštu ir kompiuteriu išspręskite Koši uždavinį, patikrinkite sprendinį ir nubrėžkite sprendinio grafiką. Ištirkite sprendinį, kai $t \rightarrow \infty$. Ar sprendinys yra periodinis? Ar turi rezonansą? Koks svyravimo periodas ir kokia amplitudė? Žr., pavyzdžiui, <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/Vibrations.aspx>

1. $x''(t) + 9x(t) = 5 \sin(2t) - 6 \cos(4t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
2. $x''(t) + 4x(t) = 6 \sin(3t) - 7 \cos(4t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
3. $x''(t) + 4x(t) = \sin(3t) + 9 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$
4. $x''(t) + 16x(t) = 5 \sin(2t) - 4 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5,$
5. $x''(t) + 4x(t) = 4 \sin(4t) - 4 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3,$
6. $x''(t) + x = 4 \sin t + \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
7. $x''(t) + 4x(t) = 10 \sin(3t) - 4 \cos(4t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
8. $x''(t) + 4x(t) = 4 \sin(4t) - 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
9. $x''(t) + 9x(t) = 6 \sin t + 7 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
10. $x''(t) + 4x(t) = 5 \sin(4t) - 8 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
11. $x''(t) + 4x(t) = \sin(3t) - 8 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
12. $x''(t) + x = 8 \sin(3t) - 4 \cos(4t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3,$
13. $x''(t) + 4x(t) = 2 \cos(3t) + 7 \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
14. $x''(t) + x = 3 \sin(2t) + 3 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$
15. $x''(t) + 9x(t) = 10 \sin(4t) + \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
16. $x''(t) + 4x(t) = \sin t - 2 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
17. $x''(t) + 16x(t) = 10 \sin t - 4 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
18. $x''(t) + 9x(t) = 4 \sin t - \cos(4t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
19. $x''(t) + x = 5 \sin(4t) - 3 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5,$
20. $x''(t) + 9x(t) = 2 \sin t - 6 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
21. $x''(t) + 4x(t) = 9 \sin(4t) - 8 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$
22. $x''(t) + 16x(t) = 9 \sin(2t) - 3 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3,$
23. $x''(t) + 9x(t) = 8 \sin t + 6 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
24. $x''(t) + x = 10 \sin(3t) - 10 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$
25. $x''(t) + 16x(t) = 8 \sin(4t) - 7 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4,$
26. $x''(t) + 16x(t) = 6 \sin(3t) + 5 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5,$
27. $x''(t) + 9x(t) = 8 \cos(4t) + \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5,$
28. $x''(t) + 9x(t) = \sin t - 5 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2,$
29. $x''(t) + 9x(t) = 3 \sin t - 7 \cos(3t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5,$
30. $x''(t) + 16x(t) = 7 \sin(2t) + 5 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4.$

2. Ištirkite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

ramybės taško $x = 0, y = 0$ aplinkoje ir nubrėžkite keletą integralinių kreivių fazinėje plokštumoje. Raskite analizinę sprendinio išraišką. Pradines sąlygas parinkite patys. Koeficientai $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ išreiškiami matrica $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, 30$. Šios sistemos modeliuoja daug reiškinių. Žr., pavyzdžiui

<http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf>

<http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf>

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/PhasePlane.aspx>

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ A_7 &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, A_9 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, A_{10} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, A_{14} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, A_{15} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, A_{16} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, A_{17} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, A_{18} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ A_{19} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_{24} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ A_{25} &= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{26} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, A_{27} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, A_{28} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, A_{29} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, A_{30} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Lotkos–Volteros lygtys (dar žinomos kaip plėšrūno–aukos lygtys) – pirmos eilės netiesinių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} x' &= (a - by)x, \\ y' &= (-c + dx)y. \end{cases}$$

Ši sistema modeliuoja biologines sistemas, kuriose sąveikauja dvi rūšys: plėšrūnas ir auka. Žr.:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equations

Nubrėžkite sprendinių grafikus ir fazinius portretus. Pradines sąlygas parinkite patys. Parametrai a, b, c, d išreiškiami matrica $B_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, 30$. Ištirkite kaip sprendiniai priklauso nuo parametru b ir c .

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ B_7 &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B_9 = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B_{10} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{13} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{14} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B_{15} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B_{16} = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B_{17} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{18} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ B_{19} &= \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B_{20} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_{24} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ B_{25} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, B_{26} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B_{27} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B_{28} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, B_{29} = \begin{bmatrix} 5 & 3.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B_{30} = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gynimui turėti 1 ir 2 užduoties sprendimus raštu ir kompiuteriu (3-ios užduoties tik kompiuteriu). Turėti veikiančią programą kokio nors matematinio paketo aplinkoje.

Šį darbą reikia apginti iki 2015 m. lapkričio 18 d. Variantų numeris sutampa su numeriu gupės sąrašė.