2 užsiėmimas. Tiesinės 2-osios eilės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Homogeninė lygtis

$$y'' + py' + qy = 0$$

Sudarome kvadratinę lygtį, pakeisdami y'' į k^2, y' – į k, y – į 1. Kvadratinė lygtis turės pavidalą

$$k^2 + pk + q = 0$$

Randame šios lygties sprendinius k_1 ir k_2. Bendrąjį homogeninės lygties sprendinį galima užrašyti vienu iš šių būdų:
1) $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, jeigu k_1 ir k_2 – realieji skaičiai, $k_1 \neq k_2$;
2) $y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}$, jeigu k_1 ir k_2 – realieji skaičiai, $k_1 = k_2$;
3) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$, jeigu $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$.

Pavyzdžiai

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
Sudarome kvadratinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3$$

.
Šaknys yra realiosios ir skirtingos (žr. **1** atvejį), todėl

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

2. $y'' - 9y = 0$.
Sudarome kvadratinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^2 - 9 = 0, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 3$$

Šaknys yra realiosios ir lygios (žr. (**2** atvejį)), todėl

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x}.$$

3. $y'' + y = 0$
Sudarome kvadratinę lygtį ir randame jos šaknis:

$$k^2 + 1 = 0, \quad k_1 = 0 + 1 \cdot i, \quad k_2 = 0 - 1 \cdot i$$

Šaknys yra kompleksinės (žr. **3** atvejį), todėl

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nehomogeninė lygtis

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Bendrąjį sprendinį randame pavidalu $Y = y_0 + y_a$, kur y_0 - homogeninės lygties sprendinys (homogeninę lygtį gauname, funkciją $f(x)$ pakeitus nuliu), o y_a galima rasti tokiu būdu:

A. Jeigu $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, kur $P_n(x)$ – n-osios eilės daugianaris ir

1. $a \neq k_1$, $a \neq k_2$, tai $y_a = e^{ax} Q_n(x)$, kur $Q_n(x)$ – n-osios eilės daugianaris su nežinomais koeficientais;

2. $a = k_1$ arba $a = k_2$, tai $y_a = x \cdot e^{ax} Q_n(x)$;

3. $a = k_1 = k_2$, tai $y_a = x^2 \cdot e^{ax} Q_n(x)$.

B. Jeigu $f(x) = e^{ax} \left(P_n(x) \cos(bx) + Q_m(x) \sin(bx) \right)$, ir

1. $a \pm bi \neq \alpha \pm \beta i$, tai $y_a = e^{ax} \left(S_j(x) \cos(bx) + T_j(x) \sin(bx) \right)$, kur $j = \max(n, m)$, o $S_j(x)$ ir $T_j(x)$ – j-osios eilės polinomai su nežinomais koeficientais;

2. $a \pm bi = \alpha \pm \beta i$, tai $y_a = x \cdot e^{ax} \left(S_j(x) \cos(bx) + T_j(x) \sin(bx) \right)$.

Pavyzdžiai

4. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$

Sprendžiame homogeninę lygtį $y'' - 7y' + 12y = 0$.

$$k^2 - 7k + 12 = 0, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 3, \quad y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}.$$

Sudarome y_a:

Kadangi $f(x) = -e^{4x}$, tai (žr. atvejį **A**) $a = k_1$, $P_n(x) = -1$ – konstanta, t.y. nulinės eilės polinomas ir $y_a = x \cdot Ae^{4x}$. Randame išvestines ir įstatome jas į diferencialinę lygtį:

$y_a' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x};$
$y_a'' = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x};$ ir
$8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} - 7(Ae^{4x} + 4Axe^{4x}) + 12(x \cdot Ae^{4x}) = -e^{4x};$
$Ae^{4x} = -e^{4x}, \quad A = -1;$
$y_a = -xe^{4x}.$

$Y = y_0 + y_a = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} - xe^{4x}.$
5. $y'' + 9y = e^{3x}.$

Pirmas žingsnis: $k^2 + 9 = 0, \quad k_{1,2} = 0 \pm 3i, \quad y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

Antras žingsnis: $y_a = Ae^{3x}, \quad y_a' = 3Ae^{3x}, \quad y_a'' = 9Ae^{3x}.$

Tada $9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = e^{3x}, \quad A = \frac{1}{18}, \quad y_a = \frac{1}{18}e^{3x}.$

$y = y_0 + y_a = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{18}e^{3x}.$

6. $y'' - 4y = 8x^3.$

Pirmas žingsnis: $k^2 - 4 = 0, \quad k_{1,2} = 2, \quad y_0 = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$

Antras žingsnis: $y_a = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad y_a' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$ $y_a'' = 6Ax + 2B.$

Tada $6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - D = 8x^3.$

$$\begin{array}{r|cc}
x^3: & -4A = 8, & A = -2; \\
x^2: & -4B = 0, & B = 0; \\
x: & 6A - 4C = 0, & C = -3; \\
\text{const} & 2B - D = 0, & D = 0.
\end{array}$$

$y = y_0 + y_a = (C_1 + C_2x)e^{2x} - 4x^3 - 3x.$

3. $y'' + 2y' + y = x + \sin x.$

Pirmas žingsnis: $k^2 + 2k + 1 = 0, \quad k_{1,2} = -1, \quad y_0 = (C_1 + C_2x)e^{-x}.$

Antras žingsnis: $y_a = Ax + B + C\sin x + D\cos x$, $\quad y_a' = A + C\cos x - D\sin x$, $\quad y_a'' = -C\sin x - D\cos x$.

Tada $-C\sin x - D\cos x + 2A + 2C\cos x - 2D\sin x + Ax + B + C\sin x + D\cos x = x + \sin x$, $\quad 2A + 2C\cos x - 2D\sin x + Ax + B = x + \sin x$,

$$\begin{array}{r|l} \sin x: & -2D = 1, \quad D = -\frac{1}{2}; \\ \cos x: & 2C = 0, \quad C = 0; \\ x: & A = 1; \\ \text{const} & 2A + B = 0, \quad B = -2. \end{array}$$

$y = y_0 + y_a = (C_1 + C_2x)e^{-x} + x - 2 - \frac{1}{2}\cos x$.

Užduotys savarankiškam darbui

1) $y'' - y' = 0$;
2) $y'' - 2y' + 2y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 13y = 0$;
4) $y'' + 2y' + y = 0$;
5) $y'' - 4y' + 2y = 0$;
6) $y = y'' + y'$;
7) $\dfrac{y' - y}{y''} = 3$;
8) $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8$;
9) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$;
10) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;
11) $y'' - 2y' = x^2 - 1$;
12) $y'' - 2y' + y = 2e^x$;
13) $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$;
14) $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$;
15) $y'' + y' = 5x + 2e^x$;
16) $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$;
17) $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$;

18) $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$;

19) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \dfrac{x}{2}$;

20) $y'' - 3y' = x + \cos x$;

21) $y'' - y = 2x \sin x$;

22) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$;

23) $y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3m \cos 2x + 1$;

24) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$;

25) $y'' = xe^x + y$;

26) $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$;

27) $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$;

28) $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$;

29) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$;

30) $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$;

31) $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$.