1. ATSITIKTINIŲ VYKSMŲ TEORIJOS PAGRINDAI

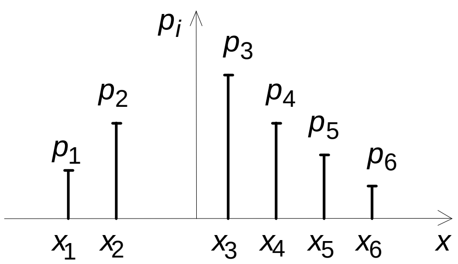
1.1. Atsitiktinis dydis. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio skirstinys

Dažnai bandymo rezultatas yra atsitiktinis įvykis, kurį atitinka kuris nors skaičius. ***Atsitiktiniu vadinamas dydis, kuris bandymo metu gali įgyti tai vieną ar kitą vertę, būtent kokią – tai priklauso nuo atsitiktinių bandymo sąlygų ir kuri iš anksto negali būti nusakyta***. Iš anksto gali būti žinomos tik tų dydžių įvykimo tikimybės.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiais gali būti: 1) skaičius taškų, gaunamų metant lošimo kauliuką; 2) iškraipymų skaičius kodo kombinacijoje iš n ženklų, esant priėmimui su trukdžiais; 3) integrinės grandinės darbo trukmė ir t.t.

Aprašant atsitiktinį dydį, reikia nurodyti jo galimas vertes. Tačiau vien tik nurodydami jo galimas vertes, nevisiškai apibūdinsime atsitiktinį dydį. Reikia žinoti, kiek dažnai pasikartos vienos atsitiktinio dydžio vertės ir kiek retai – kitos, arba, o tai yra tas pats, kokia yra atsitiktinio dydžio tikimybė įgyti viena ar kitą vertę.

Sąryšis, siejantis atsitiktinio dydžio vertes ir jų tikimybes, vadinamas atsitiktinio dydžio skirstiniu.



1.1 pav. Atsitiktinio dydžio skirstinys.

Atsitiktinį dydį pažymėsime simboliu X, jo galimas vertes x_i ir atitinkamas jų tikimybes p_i. Tada diskrečiojo atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai (1.1 pav.) arba pateiktas lentelės pavidalu (1.1 lentelė), arba analiziniu būdu.

1.1 lentelė. Atsitiktinio dydžio skirstinys.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Aišku, kad

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{1.1}$$

čia n - atsitiktinio dydžio X galimų verčių skaičius. Lygybė (1.1) vadinama ***skirstinio normavimo sąlyga***. Skirstinys visiškai apibūdina statistines diskrečiojo atsitiktinio dydžio charakteristikas.

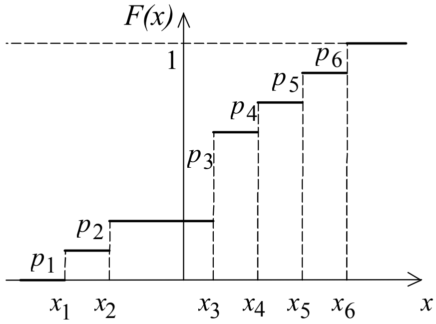
1.2. Pasiskirstymo funkcija

Skirstinys, anksčiau aptartas diskrečiajam dydžiui, netenka prasmės tolydžiajam dydžiui. Universali charakteristika, tinkanti aprašyti kaip diskrečiuosius, taip ir tolydžiuosius dydžius, yra pasiskirstymo funkcija.

Pasiskirstymo funkcija (***arba integraliniu tikimybių skirstiniu***) ***vadinama funkcija*** $F(x)$***, atitinkanti tikimybę P, kad atsitiktinis dydis X įgis vertes, mažesnes už*** x, t.y. intervale nuo $(-\infty)$ iki x:

$$F(x)=P(X<x) \;. \tag{1.2}$$

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija pavaizduota 1.2 pav.



1.2 pav. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Aptarsime ***pasiskirstymo funkcijos savybes***.

1) $F(-\infty)=0$. Ši savybė pažymi tą faktą, kad atsitiktinis dydis neturi verčių, kurios galėtų būti mažesnės už neigiamą begalybę.

2) $F(x)$ – nemažėjanti funkcija. Iš tikrųjų, tegul $x_2>x_1$, tada

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2)$$

arba

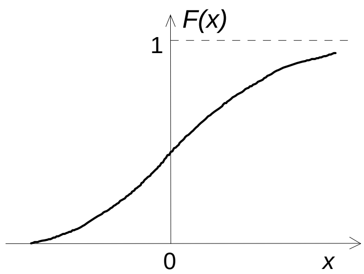
$$F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le X<x_2) \;. \tag{1.3}$$

Kadangi tikimybė negali būti neigiama, tai iš pastarosios lygybės gauname, kad

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ kai } x_2>x_1.$$

3) $F(\infty)=1$. Ši savybė pažymi tą faktą, kad įvykis – atsitiktiniam dydžiui įgyti vertes, mažesnes už teigiamą begalybę – yra tikras.

Iki šiol kalba vyko apie diskrečiųjų dydžių pasiskirstymo funkciją. Tačiau visos čia pateiktos savybės tinka ir tolydžiajam atsitiktiniam dydžiui. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija yra tolydinė (1.3 pav.) arba kai kuriuose taškuose turi trūkius (šuolius).



1.3 pav. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Bet kuri pasiskirstymo funkcija turi dar vieną savybę, vaidinančią ypatingą vaidmenį tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams.

4) Tikimybė patekti atsitiktiniam dydžiui į intervalą nuo x_1 iki x_2 − lygi pasiskirstymo funkcijos skirtumui šiuose taškuose. Tuo lengva įsitikinti, perrašius lygybę (1.3), t.y.

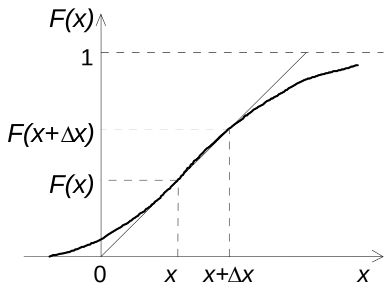
$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)\,. \tag{1.4}$$

Ši savybė galioja ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio atveju, tačiau šiuo atveju intervalas apima kraštinį kairįjį tašką ir neapima kraštinio dešiniojo taško.

1.3. Tikimybės tankis

Surasime tokią tolydžiojo atsitiktinio dydžio charakteristiką, kuri leistų pasakyti, kiek vienos atsitiktinio dydžio vertės labiau tikimos už kitas. Priminsime, kad tokia diskrečiojo atsitiktinio dydžio charakteristika yra skirstinys.

Turėdami galvoje, kad tolydžiojo atsitiktinio dydžio bet kokios konkrečios vertės tikimybė lygi nuliui, panagrinėsime nedidelį intervalą, apimantį mus dominančią vertę x, ir po to artinsime intervalo ilgį į nulį.



1.4 pav. Iliustracija tikimybės tankio apibūdinimui.

Tegul duota tam tikra vertė x. Paimsime tam tikrą Δx. Laikydami, kad funkcija $F(x)$ diferencijuojama, ir pritaikę išraiškos (1.4) dešinei pusei Lagranžo teoremą, gausime, kad

$$P(x \le X < x + \Delta x) = \frac{[F(x+\Delta x) - F(x)]}{\Delta x}\Delta x \approx F'(x)\Delta x\,. \tag{1.5}$$

Čia štrichas nurodo diferencijavimą. Tikimybė, kad tolydusis atsitiktinis dydis yra intervale nuo x iki $x+\Delta x$, bus tuo didesnė, kuo didesnė funkcija F' taške x. Tokiu būdu, funkcija F' gali būti ieškomąja charakteristika. Kol kas ši charakteristika nėra visiškai apibrėžta, nes priklauso nuo intervalo Δx. Kad panaikintume šią priklausomybę, surasime išraiškos (1.5) ribą, kai $\Delta x \to 0$:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dP}{dx}\,. \tag{1.6}$$

Funkcija $F'(x)$ vadinama ***tikimybės tankiu***. Jį žymėsime $w(x)$:

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dP}{dx}\,. \tag{1.7}$$

Iš čia pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(x)dx \tag{1.8}$$

Atsižvelgdami į funkcijos $F(x)$ prasmę ir į išraišką (1.7), galime pateikti tokią apibrėžtį:

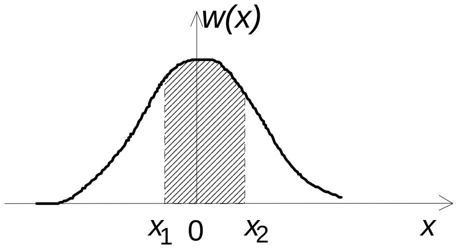
Atsitiktinio dydžio tikimybės tankiu vadinama tokia funkcija w(x), kuri padauginta iš mažo intervalo Δx, lygi tikimybei atsitiktiniam dydžiui patekti į intervalą nuo x iki x+Δx.

Tikimybės tankio savybės.

1) Tikimybės tankis – neneigiamas dydis, nes bet kokioms x vertėms $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija.

2) Tikimybė, kad tolydusis atsitiktinis dydis bus intervale (x_1, x_2), lygi

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_1} w(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x\,. \qquad (1.9)$$



1.5 pav. Tikimybės tankis.

Tai tiesiogiai gauname integruodami išraišką (1.9). Ieškomąją tikimybę galime pavaizduoti grafiškai: ji lygi plotui, esančiam tarp kreivės $w(x)$ ir abscisių ašies intervale nuo x_1 iki x_2 (1.5 pav.).

3) Tikimybės tankio integralas begaliniame x intervale lygus vienetui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{d}x = F(\infty) - F(-\infty) = 1\,.$$

Ši išraiška vadinama tikimybės tankio ***normavimo sąlyga***.

1.4. Skaitinės atsitiktinio dydžio charakteristikos. Vidurkis

Kai kuriais atvejais atsitiktinis dydis aprašomas nesinaudojant pasiskirstymo funkcija ar tikimybės tankiu, o imant tam tikras jo skaitines charakteristikas.

Paprasčiausios ir svarbiausios atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos yra teorinis vidurkis ir dispersija. Terminas *teorinis* dažnai praleidžiamas, jei vidurkis suprantamas, būtent, šia prasme.

Vidurkis yra atsitiktinio dydžio aritmetinio vidurkio tikimybinis apibendrinimas. Tegul vienas ir tas pats bandymas atliekamas tose pačiose sąlygose N kartų, ir atsitiktinis dydis m_1 kartų įgijo vertę x_1, m_2 kartų – vertę x_2, ..., m_n kartų – vertę x_n. Čia $m_1+m_2+...+m_n=N$. Surasime šio atsitiktinio dydžio aritmetinį vidurkį:

$$m_n(X) = \frac{1}{N}(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n) = x_1\frac{m_1}{N} + x_2\frac{m_2}{N} + ... + x_n\frac{m_n}{N}\,. \qquad (1.10)$$

Esant pakankamai ilgai bandymų serijai, įvykių, kad atsitiktinis dydis įgis vertes x_1, x_2, ..., x_n , santykiniai dažniai $\nu_1=m_1/N$, $\nu_2=m_2/N$, ..., $\nu_n=m_n/N$ grupuojasi apie šių verčių tikimybes $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$. Vadinasi, esant pakankamai ilgai bandymų serijai, atsitiktinio dydžio aritmetinio vidurkio vertė artėja prie dydžio

$$M(X)=x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\ ...\ +x_np(x_n)\ , \qquad (1.11)$$

kuris vadinamas atsitiktinio dydžio vidurkiu. Paprastai atsitiktinio dydžio X vidurkio konkreti vertė žymima m_X.

Vadinasi, atsitiktinio dydžio vidurkiu vadinama vertė, apie kurią grupuojasi jo aritmetinio vidurkio vertės, esant pakankamai dideliam bandymų skaičiui ir kuri aprašoma lygybe (1.11). Formulę (1.11) galime išreikšti sumos pavidalu:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i). \qquad (1.12)$$

Kai atsitiktinis dydis tolydusis, tada

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x)\mathrm{d}x\, , \qquad (1.13)$$

nes $w(x)dx$ atitinka tikimybę dP, kad atsitiktinis dydis bus intervale nuo x iki $(x+dx)$.

Tarptautinis ir Lietuvos standartas LST ISO 31-11:1996 siūlo vidurkinimo veiksmą žymėti kampiniais skliaustais:

$$M(X) = <X>.$$

Toliau taip ir žymėsime.

Labai dažnai tenka nagrinėti atsitiktinių dydžių funkcijas $\varphi(X)$. Šios funkcijos įgyja atsitiktines vertes tik tada, kai įvyksta pats atsitiktinis dydis X. Todėl šios funkcijos – tai nauji atsitiktiniai dydžiai. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X, jo funkcijos $\varphi(X)$ ir jų tikimybės pavaizduotos 1.2 lentelėje. Funkcija $\varphi(X)$ įgyja konkrečią vertę, pvz., $\varphi(x_1)$ tik tada, kai $x=x_1$; vadinasi, atsitiktinio dydžio X ir jo funkcijos $\varphi(X)$ tikimybių skirstiniai yra tie patys.

1.2 lentelė. Atsitiktinio dydžio X ir jo funkcijos $\varphi(X)$ skirstiniai.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$\varphi(X)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\varphi(x_3)$	$\varphi(x_4)$	$\varphi(x_5)$	$\varphi(x_6)$

Vadinasi, diskrečiojo atsitiktinio dydžio funkcijos $\varphi(X)$ vidurkis

$$<(\varphi(X))>= p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+...+p_n\varphi(x_n)=\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi(x_i). \qquad (1.14)$$

Panašiai tolydinio atsitiktinio dydžio funkcijos $\varphi(X)$ vidurkis lygus

$$<(\varphi(x))>= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x\, . \qquad (1.15)$$

Aptarsime kai kurias **vidurkio savybes**.

1) Atsitiktinio dydžio, padauginto iš pastovaus skaičiaus, vidurkis lygus jo vidurkiui padaugintam iš to paties skaičiaus:

$$<(\mathrm{c}X)>=\mathrm{c}<(X)>=\mathrm{c}m_X. \qquad (1.16)$$

2) Atsitiktinių dydžių sumos (skirtumo) teorinis vidurkis lygus jų vidurkių sumai (skirtumui):

$$<X \pm Y> = <X> \pm <Y> . \tag{1.17}$$

Panašiai šią lygybę galime apibendrinti ir didesniam atsitiktinių dydžių skaičiui.

3) ***Nepriklausomųjų*** atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkis lygus vidurkių sandaugai:

$$<X \cdot Y> = <X> \cdot <Y>. \tag{1.18}$$

Panašią lygybę galime užrašyti ir esant daugiau nepriklausomų atsitiktinių dydžių bei tolydiesiems dydžiams.

Dažnai naudojama sąvoka **–** ***centruotasis atsitiktinis dydis***. Atsitiktinis dydis vadinamas centruotu, jei jo vertės atskaitomos atžvilgiu vidurkio. Centruotąjį atsitiktinį dydį žymėsime $\mathring{X}$:

$$\mathring{X} = X - <X> = X - m_x . \tag{1.19}$$

Aišku, kad centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkis lygus nuliui.

1.5. Dispersija

Yra visa eilė uždavinių, kuriuose pakanka žinoti tik atsitiktinio dydžio vidurkį. Pavyzdžiui, perdegus apšvietimo lempai, tai paprastai nesukelia sunkių pasekmių. Ji pakeičiama antra, trečia, ir t.t., t.y. čia domimės vidutine jos veikimo trukme. Esant atsakingam elementui ir norint išvengti nereikalingų pasekmių, tikslinga tą elementą pakeisti anksčiau, negu jis susigadins. Todėl reikia žinoti, koks yra tų elementų patikimo darbo trukmės nuokrypis nuo jų vidutinės vertės.

Tikimybių teorijoje atsitiktinio dydžio verčių sklaidai apibūdinti naudojama speciali charakteristika **–** ***dispersija***.

Atsitiktinio dydžio dispersija – tai atitinkamo centruoto atsitiktinio dydžio kvadrato statistinis vidurkis.

Dažniausiai dispersija žymima $D(X)$ arba σ_x^2. Vadinasi, diskrečiojo atsitiktinio dydžio dispersija išreiškiama taip:

$$D(x) = \sigma_x^2 = <(X - m_x)^2> = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i , \tag{1.20}$$

o tolydžiojo atsitiktinio dydžio

$$\sigma_x^2 = <(X - m_x)^2> = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) \mathrm{d}x . \tag{1.21}$$

Dispersija turi atsitiktinio dydžio kvadrato dimensiją. Dažnai dar vartojama *kita charakteristika* **–** ***atsitiktinio dydžio standartinis nuokrypis (***anksčiau buvo vadinamas *vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu****),*** jis lygus kvadratinei šakniai iš dispersijos.

Iš (1.20) ir (1.21) matyti, kad atsitiktinio dydžio $Y=cX$ dispersija lygi

$$\sigma_y^2 = c^2 \sigma_x^2 . \tag{1.22}$$

Surasime ryšį tarp necentruotojo atsitiktinio dydžio kvadrato vidurkio, jo vidurkio ir dispersijos:

$$\sigma_x^2 = <(X - m_x)^2> = <X^2 - 2m_x X + m_x^2> = <X^2> - 2m_x <X> + m_x^2 = <X^2> - m_x^2 . \tag{1.23}$$

Ši formulė dažnai vartojama skaičiuojant dispersiją.

Dviejų ***nepriklausomųjų*** atsitiktinių dydžių **sumos (skirtumo)** dispersija lygi šių atsitiktinių dydžių dispersijų ***sumai***:

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2 \; . \tag{1.24}$$

Pagal apibrėžtį

$$D(X\pm Y)=\langle (X\pm Y-\langle X\pm Y\rangle)^2]=\langle [(X-m_x)\pm(Y-m_y)]^2\rangle=\langle \mathring{X}^2\rangle+\langle \mathring{Y}^2\rangle\pm 2\langle \mathring{X}\,\mathring{Y}\rangle.$$

Kadangi X ir Y nepriklausomi, tai $\langle \mathring{X}\,\mathring{Y}\rangle=\langle \mathring{X}\rangle\cdot\langle \mathring{Y}\rangle$, tačiau centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkis lygus nuliui, todėl

$$D(X\pm Y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2.$$

Pabrėšime, kad, skirtingai nuo vidurkio, dviejų nepriklausomųjų atsitiktinių dydžių skirtumo dispersija lygi jų dispersijų sumai, o ne skirtumui.

1.6. Atsitiktinių dydžių momentai

Gerokai bendresnės atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos nei vidurkis ir dispersija yra jo momentai. Skiriami ***pradiniai*** ir ***centriniai momentai***.

Atsitiktinio dydžio k-tosios eilės pradiniu momentu vadiname k-tojo laipsnio atsitiktinio dydžio vidurkį, o k-tosios eilės centriniu momentu vadiname k-tojo laipsnio centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkį.

Pagal apibrėžtį diskrečiojo ir tolydžiojo atsitiktinio dydžio momentus galime atitinkamai išreikšti taip:

$$m_k=\langle X^k\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i\,, \tag{1.25}$$

$$m_k=\langle X^k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^k w(x)\mathrm{d}x\,, \tag{1.26}$$

$$\mu_k=\langle \mathring{X}^k\rangle=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^k p_i\,, \tag{1.27}$$

$$\mu_k=\langle \mathring{X}^k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k w(x)dx\,. \tag{1.28}$$

Pagal šias apibrėžtis atsitiktinio dydžio vidurkis yra pirmosios eilės pradinis momentas, o dispersija – antrosios eilės centrinis momentas.

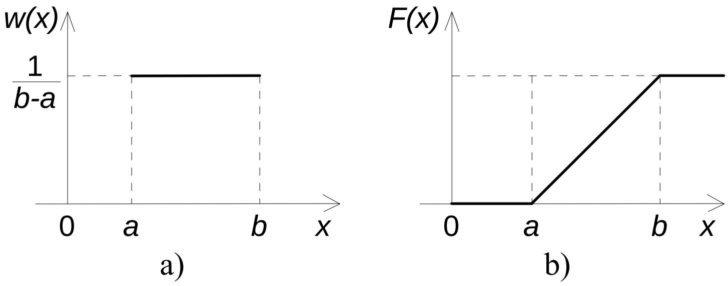
Žinant atsitiktinio dydžio skirstinį arba jo tikimybės tankį, galime apskaičiuoti bet kurios eilės momentą.

1.7. Atsitiktinių dydžių skirstiniai

1) ***Tolygusis skirstinys***.

Tolydusis atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs tolygiai, jei jo tikimybės tankis (1.6 pav., a) yra pastovus:

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{kai } a \le x \le b;\\ 0, & \text{kai } x < \text{a ir } x > b.\end{cases} \tag{1.29}$$



1.6 pav. Tolygiojo skirstinio tikimybės tankis (a)
ir pasiskirstymo funkcija (b).

Nesunku įrodyti, kad šiuo atveju pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kai } x \le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kai } a < x < b;\\ 1, & \text{kai } x \ge b.\end{cases}$$

Šio tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

$$< X >= m_x = \int_a^b x\, w(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b+a),$$

o atsitiktinio dydžio dispersija

$$\sigma_x^2 =< (X-m_x)^2 >= \int_a^b (x-m_x)^2 w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 w(x)\mathrm{d}x - m_x^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 .$$

2) *Binominis skirstinys.*

Tegul tam tikro įvykio A tikimybė lygi p, tai tikimybė $P_n(k)$, kad įvykis po n bandymų pasikartos k kartų, aprašoma Bernulio formule:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} , \tag{1.30}$$

čia q=1–p. Šis skirstinys vadinamas binominiu, nes tikimybė atitinka binomo skleidimo eilute koeficientus:

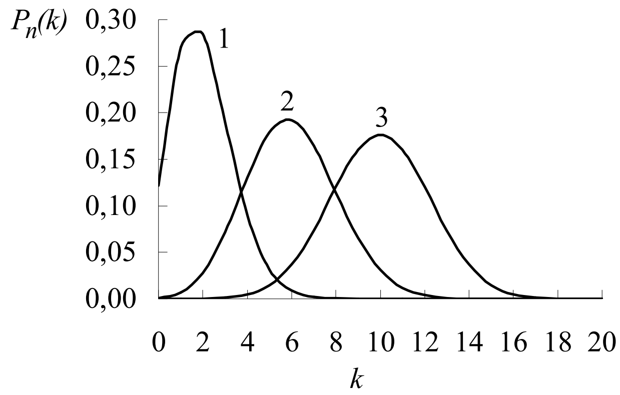
$$(pa+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} a^k . \tag{1.31}$$

Iš pastarosios lygybės, kai a=1, gauname binominio skirstinio normavimo sąlygą:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 . \tag{1.32}$$

1.7 pav. pateikti binominiai skirstiniai, kai bandymų skaičius n=20, o įvykio A tikimybė p įgyja šias vertes: 0,1; 0,3; 0,5. Matome, kad, kuo mažiau p skiriasi nuo 1/2, tuo simetriškesnis yra skirstinys.

Apskaičiuosime, kad įvykis A iš n bandymų pasikartos k kartų, vidurkį (čia k yra atsitiktinis dydis). Tuo tikslu lygybę (1.31) diferencijuojame pagal a:



1.7 pav. Binominiai skirstiniai, kai n=20, o p įgyja vertes 1 – 0,1; 2 – 0,3 ir 3 – 0,5.

$$np(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} a^{k-1} \tag{1.33}$$

ir prilyginame a=1, gauname:

$$np = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = <k> = m_k , \tag{1.34}$$

t.y. vidurkis lygus np. Apskaičiuosime dispersiją. Padauginame lygybės (1.33) abi puses iš a ir išdiferencijuojame pagal a:

$$npa(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} a^k \ ,$$

$$n(n-1)p^2 a(pa+q)^{n-2} + np(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} a^{k-1}$$

ir, prilyginę a=1, gauname:

$$n(n-1)p^2 + np = \sum_{k=0}^{n} k^2 P_n(k) = <k^2> .$$

Iš šios išraiškos pagal formulę (1.23) surandame dispersiją:

$$\sigma_k^2 = <k^2> - m_k^2 = npq . \tag{1.35}$$

Tada standartinis nuokrypis $\sigma_k = \sqrt{npq}$.

Iš gautų rezultatų matyti, kad standartinio nuokrypio ir vidurkio santykis yra atvirkščiai proporcingas kvadratinei šakniai iš n, t.y. didėjant bandymų skaičiui, santykinė dydžio k sklaida mažėja, o absoliučioji – didėja.

3) ***Puasono skirstinys***.

Dažnai pasitaiko tokių uždavinių (atvejų), kai reikia taikyti binominį skirstinį, esant dideliam bandymų skaičiui n. Tada taikomas Puasono skirstinys.

Atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį, kai jis įgyja vertes $x_k=k$ (k yra sveikas neneigiamas skaičius) su tikimybe

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \tag{1.36}$$

čia λ yra tam tikras teigiamas skaičius. Šį tikimybių skirstinį galime gauti ir kaip binominio skirstinio ribą, kai bandymų skaičius n artėja į begalybę, o sandauga $np=\lambda$, t.y. vidurkis lieka baigtinis. Parametras λ turi vidurkio prasmę. Tuo nesunku įsitikinti:

$$<k>=\sum_{k=0}^{\infty}kP(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}==\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda. \tag{1.37}$$

Parodysime, kad Puasono skirstinio dispersija taip pat lygi λ. Tuo tikslu iš pradžių apskaičiuosime antrosios eilės pradinį momentą:

$$<k^2>=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]=\lambda(\lambda+1).$$

Vadinasi, dispersija

$$\sigma_k^2=<k^2>-m_k^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda, \tag{1.38}$$

t.y. atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį, dispersija lygi vidurkiui.

Tenka pažymėti, kad Puasono skirstinys yra ne kaip asimptotinis binominio skirstinio atvejis, o kaip visiškai atskiras (nepriklausomas) skirstinys.

4) ***Normalusis (Gauso) skirstinys***.

Normalusis (Gauso) skirstinys taikomas labai plačiai ir vaidina ypatingą vaidmenį visų skirstinių tarpe.

Toliau bus įrodyta, kad tikimybės tankis sumos nepriklausomų arba silpnai priklausomų, mažų (t.y. vaidinančių maždaug vienodą vaidmenį) sandų (dedamųjų), be galo didinant jų skaičių, gali priartėti, kiek norima arti prie normaliojo skirstinio, nepriklausomai nuo to, kokį skirstinį turėjo šie sandai (*centrinė ribinė teorema*).

Jei turėsime omenyje, kad tikimybinis aprašymas taikomas dažniausiai kaip tik tada, kai reikia įskaityti didžiulį skaičių įvairių atsitiktinių poveikių, turinčių maždaug vienodą įtaką, tai paaiškės, kaip dažnai tenka, apibūdinant atsitiktinius dydžius, susidurti su normaliuoju skirstiniu.

Atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, tikimybės tankis nenormuotu pavidalu išreiškiamas taip:

$$w(x)=C\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]; \tag{1.39}$$

čia m, σ ir C - skirstinio parametrai.

Surasime šiuos parametrus. Atliekame skirstinio normavimą:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{d}x = C\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x = 1\ .$$

Pakeitę $t = (x-m)/\sigma\sqrt{2}$, gausime:

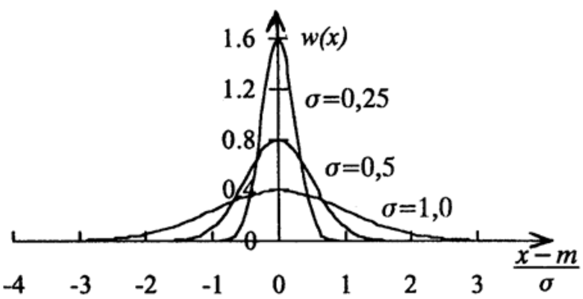
$$C\sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = 1\,.$$

Kadangi $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, tai $C = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Tada skirstinio tikimybės tankis įgauna įprastinį (normuotą) pavidalą:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\,. \qquad (1.40)$$

Tikimybės tankio grafikas parodytas 1.8 pav.



1.8 pav. Normaliojo tolydžiojo atsitiktinio dydžio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingiems σ: 1,0; 0,5; 0,25.

Parodysime, kad parametras m atitinka vidurkį, o σ^2 – dispersiją. Tuo tikslu surasime atsitiktinio dydžio X, vidurkį:

$$< X >= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x + \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x.$$

Pirmasis integralas lygus nuliui, nes pointegrinė funkcija yra nelyginė. Išraiška

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x = 1$$

pagal normavimo sąlygą. Tokiu būdu,

$$<X> = m, \qquad (1.41)$$

t.y. parametras m atitinka vidurkį. Surasime normaliojo atsitiktinio dydžio dispersiją:

$$D(X) =< (X-m)^2 >= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x.$$

Pakeitę $t = (x - m)/\sigma\sqrt{2}$, gauname:

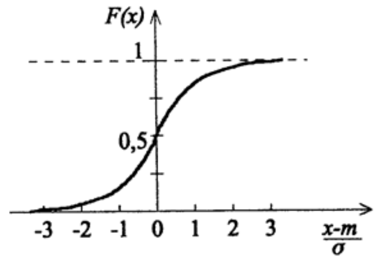
$$D(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \, \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right) == \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-t \, \mathrm{e}^{-t^2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sigma^2. \quad (1.42)$$

Vadinasi, parametras σ atitinka standartinį nuokrypį, o σ^2 – dispersiją.

Normaliojo atsitiktinio dydžio tikimybių pasiskirstymo funkcija išreiškiama taip:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x. \quad (1.43)$$

Jos grafikas parodytas 1.9 pav.



1.9 pav. Normaliojo tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Apskaičiuosime tikimybę, kad normalusis atsitiktinis dydis bus tam tikrame intervale, t.y.

$$P(a \le x < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x.$$

Paėmę naują kintamąjį $t=(x-m)/\sigma$, gauname

$$P(a \le x < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (1.44)$$

čia

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \quad (1.45)$$

– tikimybės integralas, dažniausiai pateikiamas lentele. Iš lentelių randame, kad normaliojo atsitiktinio dydžio tikimybė turėti vertes intervale nuo -σ iki σ (atžvilgiu vidutinės vertės) lygi 0,683, intervale (-2σ, 2σ) lygi 0,954 ir intervale (-3σ, 3σ) lygi 0,997.

Be binominio, normaliojo ir Puasono skirstinių teoriniuose ir eksperimentiniuose atsitiktinių dydžių tyrimuose galime susidurti ir su kitais skirstiniais. Galimų skirstinių skaičius yra labai didelis, kadangi bet kuri neneigiama funkcija $w(x)>0$, tenkinanti normavimo sąlygą, gali atitikti tam tikrą tikimybės tankį.

1.8. Tikimybės tankio transformavimas

Nagrinėjant vidurkį, buvo minėta, kad, žinant atsitiktinio dydžio X tikimybės tankį $w(x)$, lengvai galime apskaičiuoti šio atsitiktinio dydžio įvairių funkcijų $\varphi(X)$ parametrus: vidurkį, dispersiją ir kitus momentus.

Tačiau, nagrinėjant įvairių atsitiktinių signalų praėjimą pro įvairias tiesines ir netiesines grandines, reikia žinoti ir atsitiktinių dydžių funkcijos $Y=\varphi(X)$ tikimybės tankį $w(y)$, t.y. funkciją $\varphi(X)$ nagrinėjant kaip naują atsitiktinį dydį Y.

Tarkime, kad naujas atsitiktinis dydis Y yra susietas su atsitiktiniu dydžiu X sąryšiu:

$$Y = \varphi(X). \tag{1.46}$$

Laikome, kad atsitiktinio dydžio X tikimybės tankis $w(x)$ yra žinomas. Reikia rasti atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankį $w(y)$.

Tarkime, kad egzistuoja vienintelė atvirkštinė funkcija:

$$X = f(Y), \tag{1.47}$$

t. y. dydis x susietas su dydžiu y funkciniu sąryšiu:

$$x = f(y).$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y susieti vienintele funkcine priklausomybe, tai iš to fakto, kad atsitiktinis dydis X su tikimybe $w(x)\mathrm{d}x$ yra intervale $(x, x+\mathrm{d}x)$, turime, kad atsitiktinis dydis Y yra intervale $(y, y+\mathrm{d}y)$ su ta pačia tikimybe (1.10 pav.):

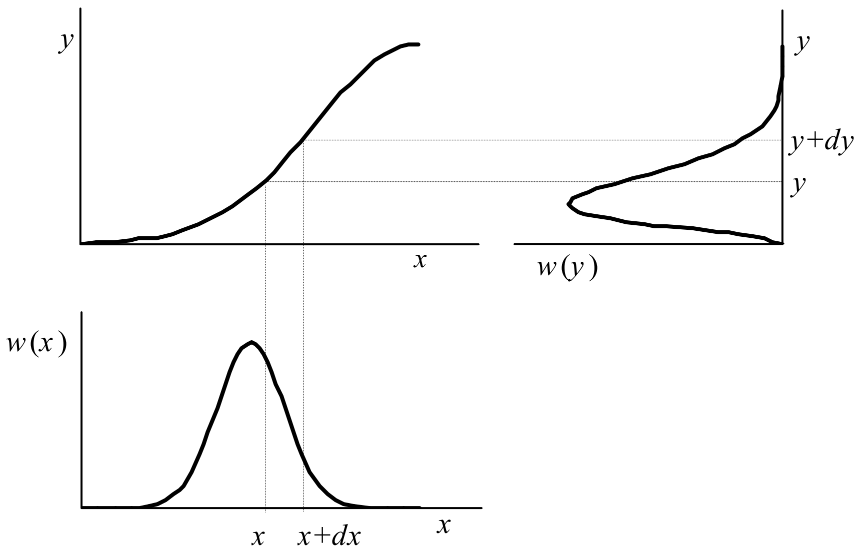
$$w(y)\mathrm{d}y = w(x)\mathrm{d}x.$$

Gautąją lygybę perrašome taip:

$$w(y) = w(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Modulio ženklas paimtas tam, kad užtikrintume tikimybės tankio neneigiamumą. Vietoje x įrašę jo išraišką $x=f(y)$, galutinai gauname:

$$w(y) = w[f(y)]\left|\frac{df(y)}{dy}\right| . \tag{1.48}$$



1.10 pav. Tikimybės tankio transformavimo iliustracija.

Jei atvirkštinė funkcija $x=f(y)$ yra ne vienintelė, o turi n sprendinių, tai susidaro n nesutampančių galimybių (1.11 pav.):

$x_1 \leq X \leq x_1 + \mathrm{d}x_1$;
$x_2 \leq X \leq x_2 + \mathrm{d}x_2$;
. . . .
$x_n \leq X \leq x_n + \mathrm{d}x_n$;

atitinkančių atsitiktinio dydžio Y buvimui intervale:

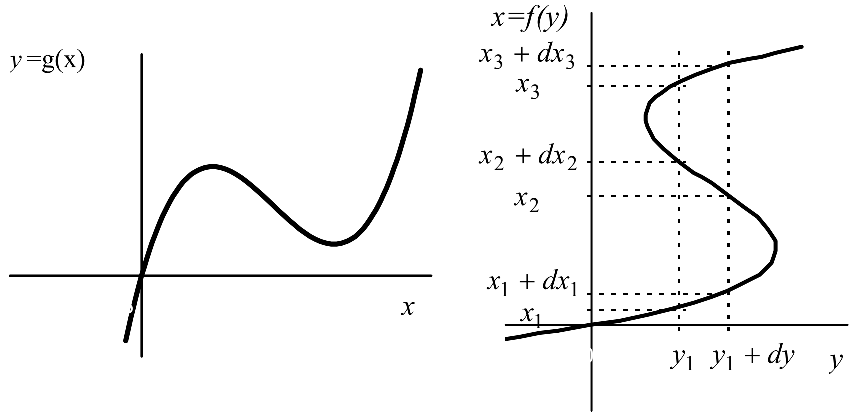
$$y_1 \leq Y \leq y_1 + \mathrm{d}y \ .$$

Vadinasi, pagal įvykių sąjungos tikimybės formulę galime užrašyti:

$$w(y)\mathrm{d}y = w(x_1)\mathrm{d}x_1 + w(x_2)\mathrm{d}x_2 + ... + w(x_n)\mathrm{d}x_n \ ,$$

arba

$$w(y) = w(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + w(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right| + ... + w(x_n)\left|\frac{dx_n}{dy}\right| \ ,$$



1.11 pav. Tikimybės tankio transformavimo iliustracija,
kai funkcija $x=f(y)$ turi kelias sprendinių šakas.

t.y.:

$$w(y) = \sum_{i=1}^{n} w[f_i(y)]\left|\frac{df_i(y)}{dy}\right|, \tag{1.49}$$

čia $f_i(y)$ - i-toji atvirkštinės funkcijos šaka.

Pvz. Tarkime, kad atsitiktinius dydžius X ir Y sieja funkcija

$$y = \varphi(x) = ax^2 \quad (a>0).$$

Reikia surasti atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankį $w(y)$, jei žinoma, kad X yra normalusis atsitiktinis dydis, kurio vidurkis lygus nuliui:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \ .$$

Apskaičiuojame atvirkštinę funkciją

$$x_{1,2} = f_{1,2}(y) = \pm\sqrt{y/a} \ ,$$

kuri turi dvi šakas:

$$x_1 = f_1(y) = \sqrt{y/a} \quad \text{ir} \quad x_2 = f_2(y) = -\sqrt{y/a} \ .$$

Surandame atvirkštinių funkcijų išvestinių pagal y modulius:

$$\left|\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}f_2(y)}{\mathrm{d}y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{a\,y}} \ .$$

Kadangi atvirkštinė funkcija $f(y)$ turi dvi sprendinių šakas ir, kai $a>0$, neturi neigiamų verčių, tai, pasinaudoję sąryšiu (2.9.4), gauname:

$$w(y) = \begin{cases} w[f_1(y)]\left|\dfrac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}\right| + w[f_2(y)]\left|\dfrac{\mathrm{d}f_2(y)}{\mathrm{d}y}\right| & \text{, kai} \quad y \ge 0; \\ 0 & \text{, kai} \quad y < 0. \end{cases}$$

Įrašę funkcijų $f_1(y)$ ir $f_2(y)$ išraiškas, gauname

$$w(y) = \begin{cases} \left[w\left(\sqrt{y/a}\right) + w\left(-\sqrt{y/a}\right)\right] / \left(2\sqrt{a\,y}\right) & \text{, kai} \quad y \ge 0; \\ 0 & \text{, kai} \quad y < 0. \end{cases}$$

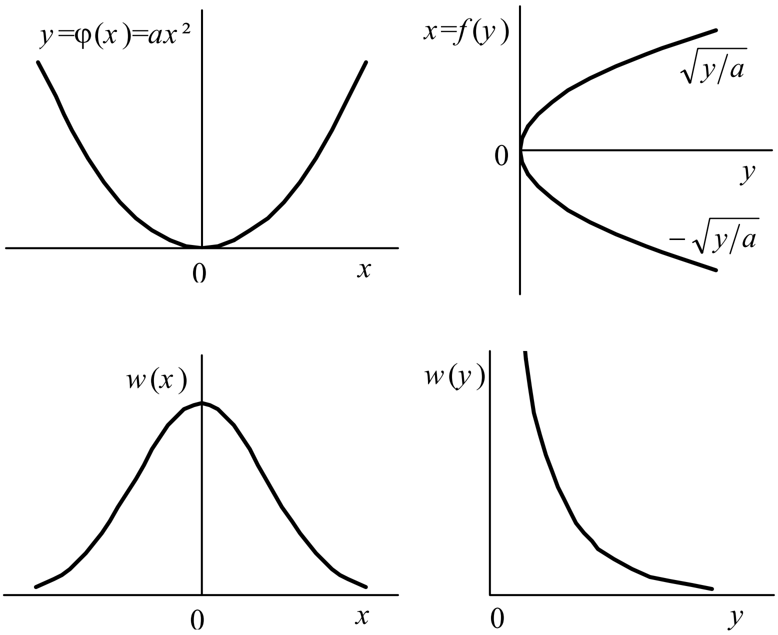
Iš čia:

$$w(y) = \frac{1}{2\sqrt{a\,y}}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a y}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right), \ \text{kai } y \ge 0;$$

$w(y)=0$, kai $y<0$.

Šių skaičiavimų rezultatų iliustracija pateikta 1.12 pav.



1.12 pav. Atsitiktinio dydžio kvadratinis transformavimas.

Vadinasi, tolydžiojo atsitiktinio dydžio $Y=\varphi(X)$ skaitines charakteristikas galime apskaičiuoti dviem būdais. Pavyzdžiui, atsitiktinio dydžio $Y=\varphi(X)$ vidurkį ir dispersiją galime išreikšti šitaip:

$$m_y = < Y > = \int_{-\infty}^{\infty} y\, w(y) \mathrm{d}y ;$$

$$\sigma_y^2 = < \overset{\circ}{Y}{}^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - m_y\right)^2 w(y) \mathrm{d}y ,$$

arba

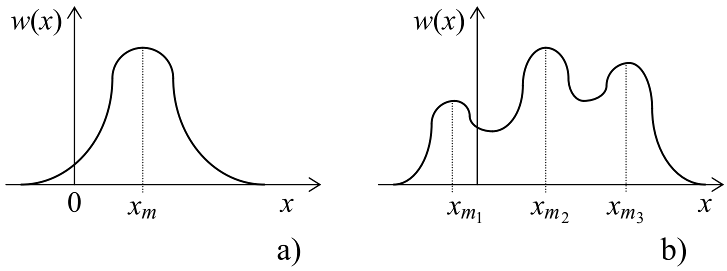
$$m_y = < \varphi(X) > = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w(x) \mathrm{d}x ;$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x) - m_y\right)^2 w(x) \mathrm{d}x .$$

Antrasis būdas dažniausiai yra paprastesnis, nes nereikia papildomai apskaičiuoti tikimybės tankio $w(y)$.

1.9. Skirstinių parametrai

Moda. Moda – tai tolydžiojo atsitiktinio dydžio vertė x_m , esant kuriai jo tikimybės tankis įgyja didžiausią vertę: $w(x_m)=w_{\max}(x)$. Pagal modų skaičių skiriama vienmodis, dvimodis ir daugiamodis skirstiniai, turintys vieną, dvi ir kelias modas (smailes) (1.13 pav.).



1.13 pav. Vienmodžio (a) ir daugiamodžio (b) skirstinių tikimybės tankiai.

Asimetrijos koeficientas. Visų simetriškų skirstinių nelyginiai centriniai momentai yra lygūs nuliui. Todėl tikslinga juos panaudoti skirstinių asimetrijai apibūdinti. Tuo tikslu asimetrijai išreikšti priimta vartoti trečiąjį centrinį momentą

$$\mu_3 = M\left[(x - m_1)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^3 w(x) dx , \tag{1.50}$$

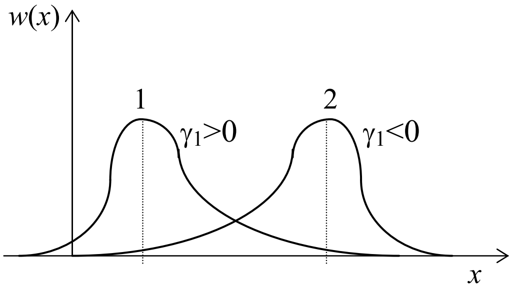
kurį galime išreikšti per pradinius momentus:

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 , \tag{1.51}$$

čia m_i=<X^i>. Asimetrija aprašoma nedimensiniu koeficientu

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} , \tag{1.52}$$

kuris vadinamas ***asimetrijos koeficientu***. 1.14 pav. parodyti tolydžiųjų atsitiktinių dydžių tikimybės tankio grafikai: 2 kreivė turi neigiamą, o 1 kreivė – teigiamą asimetrijos koeficientą.



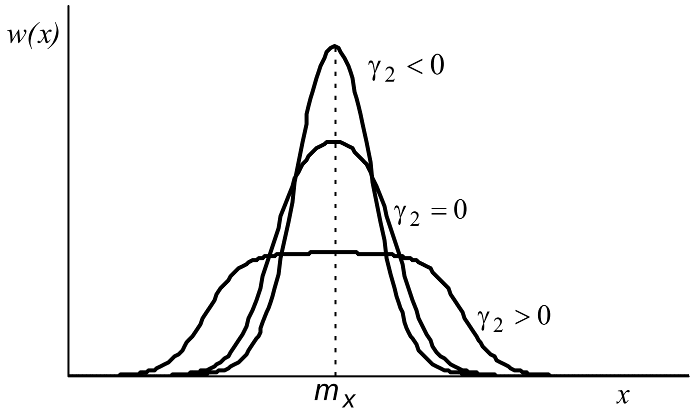
1.14 pav. Nesimetriškieji tikimybės tankiai.

Eksceso koeficientas. Ketvirtasis centrinis momentas $\mu_4 = \langle (X - m_1)^4 \rangle$ vartojamas apibūdinti skirstinio viršūnės smailumą, t.y. apskaičiuoti eksceso koeficientą:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{1.53}$$

jis pasirinktas taip, kad normaliojo skirstinio atveju būtų lygus nuliui (normaliojo skirstinio $\mu_4 = 3\sigma^4$).

Jei eksceso koeficientas yra neigiamas, tai rodo, kad nagrinėjamojo atsitiktinio dydžio tikimybės tankio viršūnė yra smailesnė nei normaliojo atsitiktinio dydžio, ir atvirkščiai (1.15 pav.).



1.15 pav. Tikimybės tankiai, kurie turi skirtingus eksceso koeficientus.

Vadinasi, įvertinant asimetrijos ir eksceso koeficientus, galime pasakyti, kiek nagrinėjamasis skirstinys yra artimas normaliajam skirstiniui.

1.10. Charakteringoji funkcija

Dabar aptarsime dar vieną iš pagrindinių atsitiktinių dydžių charakteristikų, savo reikšme prilygstančia skirstiniui, t.y. apibūdinsime charakteringąją funkciją ir išnagrinėsime jos savybes.

Atsitiktinio dydžio X charakteringąja funkcija vadiname funkcijos e^{juX} vidurkį

$$\Theta(u) = M\left(e^{juX}\right). \tag{1.54}$$

čia u – realusis dydis, j – menamasis vienetas.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X, kurio vertės x_i įgyjamos su tikimybėmis p_i , charakteringoji funkcija

$$\Theta(u) = M\left(e^{juX}\right) = \sum_i p_i e^{jux_i} \ . \tag{1.55}$$

Kadangi funkcijos modulis

$$\left|e^{j\alpha}\right| = \left|\cos\alpha + j\sin\alpha\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

ir $\sum_i p_i = 1$, vadinasi, eilutė $\sum_i p_i e^{jux_i}$ tolygiai ir absoliučiai konverguoja. Todėl charakteringoji funkcija $\Theta(u)$ yra kiekvienai realiai u vertei tolydinė, nes ji yra tolygiai konverguojančios tolydinių funkcijų eilutės suma.

Pvz. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti vertes x_1=-1 ir x_2=1 su tikimybėmis p_1=p_2=1/2. Apskaičiuosime šio atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u) = \sum_{i=1}^{2} p_i e^{jux_i} = 0{,}5\,e^{-ju} + 0{,}5\,e^{ju} =$$
$$= 0{,}5(\cos u - j\sin u) + 0{,}5(\cos u + j\sin u) = \cos u \quad .$$

Jei X yra tolydusis atsitiktinis dydis su tikimybės tankiu $w(x)$, tai jo charakteringoji funkcija išreiškiama lygybe:

$$\Theta(u) = M\left(e^{juX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} w(x)dx \ .$$

Šiuo atveju

$$|\Theta(u)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} w(x)dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{jux} w(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1, \tag{1.56}$$

nes $|e^{jux}|$=1. Todėl charakteringoji funkcija gali būti surasta bet kokiam atsitiktiniam dydžiui.

Pasinaudodami delta funkcijos išraiška kompleksiniu pavidalu

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dy, \tag{1.57}$$

surasime tikimybės tankio išraišką per charakteringąją funkciją. Užrašome tolydžiojo atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} w(x)dx \ .$$

Padauginame abi lygybės puses iš e^{jux_1} ir integruojame pagal u:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u)e^{-jux_1} du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} w(x) e^{-jux_1} dx du == 2\pi \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(x-x_1)} du\right] w(x)dx =$$
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1) w(x)dx = 2\pi w(x_1).$$

Atlikdami veiksmus, čia pasinaudojome (1.57) lygybe. Iš pastarosios lygybės gaunamе:

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(u)\mathrm{e}^{-jux}du\ , \tag{1.58}$$

t.y. gavome, kad atsitiktinio dydžio tikimybės tankis (2.11.5) ir charakteringoji funkcija (2.11.3) yra susieti Furjė transformacijos formulėmis:

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{jxy}dx\,,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\mathrm{e}^{-jxy}dy \tag{1.59}$$

Vadinasi, žinant atsitiktinio dydžio tikimybės tankį, visados galime surasti ir jo charakteringąją funkciją, ir atvirkščiai, t.y. charakteringoji funkcija visiškai aprašo atsitiktinį dydį. Iš (1.54) matyti, kad dydžio u matavimo vienetas yra $[x]^{-1}$, t.y sutampa su tikimybės tankio matavimo vienetu, o pati charakteringoji funkcija yra nedimensinis dydis: realusis arba menamasis skaičius.

Dabar aptarsime kai kurias charakteringosios funkcijos savybes.

1) Kai u=0,

$$\Theta(u)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\mathrm{e}^{j0x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}w(x)dx=1\,, \tag{1.60}$$

ši lygybė dar vadinama ***normavimo sąlyga***.

2) Iš lygybių

$$\Theta(u)=M\left(\mathrm{e}^{juX}\right)=M(\cos uX)+jM(\sin uX)$$

ir

$$\Theta(-u)=M\left(\mathrm{e}^{-juX}\right)=M(\cos uX)-jM(\sin uX)=\Theta^*(u)$$

matyti, kad $\Theta(u)$ ir $\Theta(-u)$ yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai.

3) Jei atsitiktinio dydžio skirstinys yra simetriškas ($w(x)=w(-x)$), tai

$$\begin{aligned}\Theta(u)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jux}w(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\, w(x)dx+j\int_{-\infty}^{\infty}\sin ux\, w(x)dx=\\&=2\int_{0}^{\infty}\cos ux\, w(x)dx\quad ,\end{aligned} \tag{1.61}$$

t.y. charakteringoji funkcija yra reali ir lyginė dydžio u funkcija.

4) Jei $\Theta_x(u)$ yra atsitiktinio dydžio X charakteringoji funkcija, tai atsitiktinio dydžio $Y=aX+b$ charakteringoji funkcija lygi

$$\begin{aligned}\Theta_y(u)&=M\left(\mathrm{e}^{ju(aX+b)}\right)=M\left(\mathrm{e}^{jauX}\,\mathrm{e}^{jbu}\right)=\\&=M\left(\mathrm{e}^{jauX}\right)M\left(\mathrm{e}^{jbu}\right)=\Theta_x(au)\mathrm{e}^{jbu}\ .\end{aligned} \tag{1.62}$$

5) Vienas Iš naudingesnių charakteringosios funkcijos pritaikymų yra momentų skaičiavimo supaprastinimas. Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio X k-tos eilės pradiniai momentai, tai charakteringoji funkcija turi$k$-tos eilės išvestines, t.y.

$$\frac{\partial \Theta(u)}{\partial u} = j \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx \ \ :;$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(u)}{\partial u^2} = j^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx \ \ :;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx \, .$$

Paėmę u=0, gauname

$$\left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, w(x) dx = j^k M\left(X^k\right),$$

iš čia

$$M\left(X^k\right) = \frac{1}{j^k} \left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0} . \tag{1.63}$$

Visiškai panašiai galime užrašyti ir centruotiesiems atsitiktiniams dydžiams:

$$M\left(\overset{\circ}{X}{}^k\right) = M\left[\left(X - m_x\right)^k\right] = \frac{1}{j^k} \left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0} . \tag{1.64}$$

Lygybės (1.63) ir (1.64) galioja ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio atveju.

6) Jei egzistuoja bet kurios eilės pradiniai ar centriniai momentai, tai charakteringąją funkciją galime išreikšti šiais momentais Makloreno eilutės pavidalu.

Čia pasinaudosime funkcijos e^x skleidiniu eilute

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \, .$$

Tada

$$\Theta(u) = M\left(\mathrm{e}^{juX}\right) = M\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(juX)^k}{k!}\right] = M\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} (ju)^k\right] .$$

Iš čia

$$\Theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k \, . \tag{1.65}$$

Visiškai analogiškai galime užrašyti centruotajam atsitiktiniam dydžiui:

$$\Theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(\overset{\circ}{X}{}^k)}{k!} (ju)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left[\left(X - m_x\right)^k\right]}{k!} (ju)^k \tag{1.66}$$

Išraiškos (1.65) ir (1.66) galioja tiek diskretiesiems, tiek ir tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams.

Vadinasi, žinant atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją, lengvai surandame bet kurios eilės momentus, surasime dažniausiai naudojamų skirstinių charakteringąsias funkcijas.

a) Atsitiktinis dydis X ***tolygiai pasiskirstęs*** intervale $[a, b]$, t.y. $w(x)=1/(b-a)$, o už šio intervalo ribų $w(x)=0$. Šio dydžio charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{b-a}\frac{\mathrm{e}^{jub}-\mathrm{e}^{jua}}{ju}.$$

b) ***Binominio skirstinio*** atveju charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=M\left(\mathrm{e}^{juk}\right)=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)\mathrm{e}^{juk}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}\mathrm{e}^{juk}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(p\mathrm{e}^{ju}\right)^k q^{n-k}=\left(p\mathrm{e}^{ju}+q\right)^n.$$

c) ***Puasono skirstinio*** atveju charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)\mathrm{e}^{juk}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{juk}=$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda\mathrm{e}^{ju}\right)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{ju}}=\mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^{ju}-1\right)}.$$

d) Apskaičiuosime tolydžiojo atsitiktinio dydžio, turinčio ***normalųjį skirstinį***, charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jux}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jux-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Pertvarkome laipsnio rodiklį:

$$jux-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}=\left(\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+ju(x-m)+jum-\frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2}}=$$

$$=\left(jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)-\left[\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}-\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right]^2=\left(jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)-\frac{\left[(x-m)-ju\sigma^2\right]^2}{2\sigma^2}.$$

Įrašę šį rodiklį į charakteringosios funkcijos išraišką, turime

$$\Theta(u)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\left[(x-m)-ju\sigma^2\right]^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Pakeitę $(x-m)-ju\sigma^2=y$, gauname

$$\Theta(u)=\mathrm{e}^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\mathrm{e}^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}.$$

Kai $m=0$ ir $\sigma=1$, turime

$$\Theta(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.$$