5 skyrius

Predikatų logika

5.1 Predikatų logikos formulės

Teiginių požymiai dar kitaip vadinami predikatais (lot. *praedicatum* – kas pasakyta, tarinys), t.y. tai, kas tvirtinama arba neigiama teiginyje. Pavyzdžiui, *Penki – natūralusis skaičius*. Čia objekto požymis yra natūralusis skaičius. Bendresne prasme predikatai suprantami kaip teiginiai su parametrais, t.y. tvirtinamojo pobūdžio sakiniai, kuriuose konkretizuoti požymiai, o objektai ne. Nurodyta tik objektų kitimo aibė. Pavyzdžiui, $3/4$ *ir* $4/5$ – *racionalieji skaičiai* yra teiginys, o pasakymas, kad x *ir* y *yra racionalieji skaičiai* – predikatas, jei greta nurodyta, kad, pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibė yra parametrų kitimo aibė. Pakeitę sakinyje x, y konkrečiais realiaisiais skaičiais, gauname teisingą arba klaidingą teiginį. Taigi teiginys, kurio *kai kuriose vietose* objektai pakeisti parametrais, virsta predikatu. Todėl ir predikatai yra vadinami *vienviečiais, dviviečiais, n-viečiais*, o parametrai – ***individiniais kintamaisiais***.

Pateiksime tikslesnį predikato apibrėžimą.

5.1 apibrėžimas. *n-viečiu predikatu aibėje A vadiname vienareikšmę n argumentų funkciją, kurios apibrėžimo sritis yra aibė A ir reikšmių aibė – $\{t, k\}$.*

Pavyzdžiai:

- x *ir* y *kaimynai*. Vilniaus miesto gyventojų aibė.
- x *ūgis didesnis kaip* 200 cm. Lietuvos piliečių aibė.
- x *ir* y *statmenos*. Tiesių plokštumoje aibė.
- x *dalijasi iš* 5. Sveikųjų skaičių aibė.
- $x + y = z$. Natūraliųjų skaičių aibė.

Predikatus bei predikatinius kintamuosius (kai funkcija nėra konkretizuota) žymime didžiosiomis lotyniškomis raidėmis (kartais su indeksais). Skliaustuose dažniausiai nurodome ir vietų (argumentų) skaičių:

$$P(x, y, z),\ Q(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ R(x), \ldots.$$

Taigi nagrinėjame trijų rūšių kintamuosius:

- *loginius* $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots,$
- *predikatinius* $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$
- *individinius* $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots.$

Teiginių logikos abėcėlę praplečiame predikatiniais ir individiniais kintamaisiais bei dviem ***kvantoriais*** (lot. *quantum* – kiek). Tai ***bendrumo kvantorius*** (žymime $\forall$) bei ***egzistavimo kvantorius*** (žymėsime $\exists$). Tai loginis veiksmas, kiekybiškai apibūdinantis objektų sritį. Ženklas $\exists$ yra angliško žodžio *Exist*, vokiškojo *Existieren* apversta pirmoji raidė, kurios vidurinis brūkšnelis prailgintas. ženklas $\forall$ yra angliškojo žodžio *All*, vokiškojo *Alle* apversta pirmoji raidė. Kvantorius naudojame tik kartu su individiniais kintamaisiais (aukštesnės eilės logikose ir su kitais objektais) ir vadiname ***kvantoriniais kompleksais***. Užrašą $\forall x, \forall y, \forall z, \forall x_1, \ldots, \exists x, \exists y, \exists z, \exists x_1, \ldots$ iki daugtaškio skaitome „kiekvienam x“, „kiekvienam x teisinga“, „kad ir koks būtų x“, o po daugtaškio – „egzistuoja x“, „egzistuoja x, su kuriuo teisinga“, „yra toks x“.

5.2 apibrėžimas. *Predikatų logikos formulių aibė $\mathcal{F}$ yra tokia pati mažiausia aibė, kad:*

- *predikatiniai kintamieji priklauso aibei $\mathcal{F}$,*
- *jei F yra formulė, tai $\neg F$ – taip pat formulė,*
- *jei F, G yra formulės, tai $(F \& G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ – taip pat formulės,*
- *jei F yra formulė, x – individinis kintamasis, tai $\forall x F$, $\exists x F$ – taip pat formulės.*

Pavyzdžiai:

$$\forall x \exists y ((P(x, y) \& Q(y, x, z)) \to \exists z R(z, x, y)), \tag{5.1}$$

$$(P(x, y, z) \vee \forall x \forall z (Q(y, z, x) \vee \neg Q(x, y, z))). \tag{5.2}$$

Dėl paprastumo formules rašome be išorinių skliaustų.

Kaip matome iš apibrėžimo, konstruojant formulę naudojamės kitomis, jau turimomis formulėmis, kurias, taip pat ir galutinę, vadiname gautosios ***poformuliais***.

Pavyzdys. Šios formulės yra (5.1) ***poformuliai***:

$$P(x,y),\quad Q(x,y,z),\quad P(x,y)\&Q(x,y,z),\quad R(z,x,y),\quad \exists zR(z,x,y),$$

$$(P(x,y)\&Q(x,y,z))\rightarrow\exists zR(z,x,y),\quad \exists y((P(x,y)\&Q(x,y,z))\rightarrow\exists zR(z,x,y)),$$

$$\forall x\exists y((P(x,y)\&Q(x,y,z))\rightarrow\exists zR(z,x,y)).$$

Kaip matome, formulė yra tam tikros abėcėlės žodis. Kuris nors žodis (atskiru atveju raidė), pavyzdžiui, individinis kintamasis x, gali būti aptinkamas (tai vadinsime ***įeitimi***) formulėje F (peržiūrint ją iš kairės į dešinę) ne vieną kartą. Priklausymą kvantoriniam kompleksui nelaikysime individinio kintamojo įeitimi. Pavyzdžiui: (5.1) formulėje yra trys x įeitys, trys y įeitys, dvi z įeitys ir nė vienos x_1 įeities; (5.2) formulėje yra po tris x, y, z įeitis. Panašiai apibrėžiamos ir *poformulio įeities* bei *kvantorinio komplekso įeities* sąvokos.

Atkreipiame dėmesį, kad, pavyzdžiui, $P(x,x,y,z,y,y)$ taip pat yra predikatinis kintamasis, t.y. kai kurios (atskiru atveju visos) individinių kintamųjų įeitys tame pačiame predikatiniame kintamajame gali būti vienodos.

5.3 apibrėžimas. *Tarkime, įeitis QxG ($Q\in\{\forall,\exists\}$) yra F poformulis. Tuomet nagrinėjamąją formulės G įeitį vadiname **kvantoriaus** Q bei kvantorinio komplekso Qx įeities **veikimo sritimi**.*

Kai iš konteksto aišku, apie kurią kvantoriaus įeitį kalbama, tai, užuot vartojus terminą *kvantoriaus įeities veikimo sritis*, sakoma *kvantoriaus veikimo sritis*.

5.4 apibrėžimas. *Individinio kintamojo x įeitis formulėje F vadinama **suvaržytąja**, jei ji patenka į kvantorinio komplekso $\forall x$ arba $\exists x$ veikimo sritį. Priešingu atveju nagrinėjamoji individinio kintamojo įeitis vadinama **laisvąja**.*

Pavyzdys. Visos x bei y įeitys (5.1) formulėje yra suvaržytos, o z – pirmoji įeitis laisva, antroji – suvaržyta. Kitoje (5.2) formulėje visos y įeitys yra laisvos, o pirmosios x, z įeitys – laisvos, antrosios bei trečiosios – suvaržytos.

Užuot vartoję terminą *individinis kintamasis*, dažniausiai sakysime tiesiog *kintamasis*. Jei formulėje F yra bent viena laisva x įeitis, kintamasis x toje formulėje yra laisvasis.

5.5 apibrėžimas. *Formulė vadinama* ***uždarąja****, jei joje nėra laisvųjų kintamųjų įeičių.*

Nenagrinėsime formulių, kuriose yra tokie poformuliai QxG, WxF ($Q, W \in \{\forall, \exists\}$), kad WxF yra G poformulis. Tokias formules laikysime netaisyklingomis. Pavyzdžiui, $\forall x \exists x P(x)$.

5.2 Semantika

Norint nustatyti tam tikros formulės vertę, reikia konkretizuoti *individinių kintamųjų apibrėžimo aibę, predikatinius kintamuosius ir laisvuosius kintamuosius.* Nuo jų parinkimo dažniausiai priklauso ir formulės vertė. Pavyzdžiui, ar tvirtinimas *Visi studentai gauna stipendiją* teisingas, ar ne, priklauso nuo pasirinktos studentų aibės.

Formulė $\forall x F(x)$ teisinga aibėje A, jei, nesvarbu, koks būtų aibės A elementas a, $F(a)$ ($F(a)$ gauta iš $F(x)$, pakeitus joje visas x laisvąsias įeitis į a) yra teisinga. Formulė $\forall x F(x)$ klaidinga, jei yra bent vienas aibės A elementas a, su kuriuo $F(a)$ klaidinga.

Kai A baigtinė (tarkime, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$), bendrumo kvantorių galima eliminuoti:

$$\forall x F(x) \equiv F(a_1)\&F(a_2)\&\ldots\&F(a_n).$$

Formulė $\exists x F(x)$ teisinga aibėje A, jei *galima rasti bent vieną* aibės A elementą (pažymėkime jį a), su kuriuo $F(a)$ teisinga. Formulė $\exists x F(x)$ klaidinga, jei nesvarbu, koks būtų aibės A elementas a, $F(a)$ klaidinga.

Kai A baigtinė, egzistavimo kvantorių galima eliminuoti:

$$\exists x F(x) \equiv F(a_1) \vee F(a_2) \vee \ldots \vee F(a_n).$$

Taigi predikatų logikos formulę, kurioje individinių kintamųjų kitimo aibė baigtinė, galima transformuoti į teiginių logikos formulę.

5.6 apibrėžimas. *Tarkime, kad $P_1^{k_1}, \ldots, P_n^{k_n}$ yra pilnas sąrašas predikatinių kintamųjų (viršutinis indeksas nurodo predikatinio kintamojo vietų skaičių), o $x_1, \ldots, x_m$ – pilnas sąrašas laisvųjų individinių kintamųjų, aptinkamų formulėje F. Sąrašą $< M; R_1^{k_1}, \ldots, R_n^{k_n}; a_1, \ldots, a_m >$ vadiname formulę F atitinkančia* ***struktūra S****; čia M – kuri nors netuščia aibė, $R_i^{k_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) – kurie nors predikatai (juos vadiname atitinkančiais predikatinius kintamuosius $P_i^{k_i}$), kurių apibrėžimo aibė yra M, a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) – kurie nors aibės M elementai (juos vadiname atitinkančiais laisvuosius individinius kintamuosius x_i).*

5.7 apibrėžimas. *Sakome, kad* ***formulė F teisinga*** *(klaidinga) ją atitinkančioje* ***struktūroje S****, jei pakeitę formulėje F predikatinius kintamuosius juos atitinkančiais predikatais, o laisvuosius kintamuosius – juos atitinkančiais elementais iš struktūros S, gauname teisingą (klaidingą) formulę.*

Kalbėdami apie formules bei struktūras, nagrinėjame tik formules *atitinkančias* struktūras, todėl žodį „atitinkanti" praleisime.

5.8 apibrėžimas. *Formulė vadinama* ***įvykdomąja****, jei yra struktūra, kurioje ji teisinga.*

5.9 apibrėžimas. *Formulė vadinama* ***tapačiai teisinga*** *(tautologija), jei ji teisinga bet kurioje struktūroje.*

5.10 apibrėžimas. *Formulė vadinama* ***tapačiai klaidinga****, jei ji klaidinga bet kurioje struktūroje.*

Pavyzdžiai:

1. Formulė $\forall x \forall y \forall z((P(x, y) \& P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$ įvykdoma struktūroje $< R; =>$, kadangi $\forall x \forall y \forall z((x = y \& y = z) \rightarrow x = z)$ yra teisinga.

2. $(P(x, y) \& \neg P(x, x)) \& \forall x \exists y P(x, y)$. Parašysime jos laisvuosius kintamuosius tokia tvarka: x, y. Formulė įvykdoma struktūroje $< N; <; 3, 5 >$, kadangi $(3 < 5 \& \neg(3 < 3)) \& \forall x \exists y(x < y)$ yra teisinga.

3. Formulė $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ tapačiai teisinga, nes nesvarbu, kokia būtų struktūra $< M; R >$, kiekvieną kartą, kai toje struktūroje teisinga $\forall x R(x)$, joje teisinga ir $\exists x R(x)$. Šiuo atveju yra toks x, su kuriuo $R(x)$ teisingas – tai bet kuris aibės M elementas. O jei struktūroje $\forall x P(x)$ klaidinga, tai nagrinėjamoji formulė taip pat teisinga.

4. Formulė $\exists x \forall y(P(x, x) \& \neg P(x, y))$ tapačiai klaidinga. Tarkime, formulė teisinga struktūroje $< M; R >$. Tuomet kad ir koks būtų aibės M elementas y, atsiras toks aibės M elementas (pažymėkime jį raide a), su kuriuo $R(a, y)$ klaidingas. Tuo pačiu klaidingas ir $R(a, a)$. Taigi su šiuo pasirinktuoju elementu a pradinė formulė klaidinga. Tas pats ir su bet kuriuo kitu elementu, su kuriuo $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ teisinga. Vadinasi, nėra tokios struktūros, kurioje nagrinėjamoji formulė būtų teisinga.

Pateiktieji pavyzdžiai nesudėtingi, ir todėl nesunku nustatyti, ar formulės įvykdomos, tapačiai teisingos, ar tapačiai klaidingos. O kaip bendru atveju? Ar egzistuoja algoritmas, kuriuo naudojantis galima būtų pasakyti, ar tam tikra formulė įvykdoma, tapačiai teisinga, ar tapačiai klaidinga? Deja, tokio algoritmo nėra. Visos tos klasės neišsprendžiamos. Pirmasis 1936 m. tai įrodė A. Church. Tą faktą suformuluosime kaip teoremą be įrodymo.

5.1 teorema. *Įvykdomų, tapačiai teisingų bei tapačiai klaidingų predikatų logikos formulių aibės yra nerekursyviosios.*

Pastebėsime, kad skirtingi sakiniai

Kiekvienas grybas, kuris nėra nuodingas, yra valgomas,
Kiekvienas grybas, kuris nėra valgomas, yra nuodingas,
Viskas, kas nėra nei valgomas grybas, nei nuodingas grybas, nėra grybas

gali būti užrašyti viena ir ta pačia formule

$$\forall x(\text{grybas}(x) \to (\neg\text{nuodingas.grybas}(x) \to \text{valgomas.grybas}(x)).$$

5.11 apibrėžimas. *Dvi formulės F, G vadinamos* ***ekvivalenčiosiomis*** *(žymime $F \equiv G$), jei bet kurioje struktūroje jos arba abi teisingos, arba abi klaidingos.*

5.2 teorema. *Predikatų logikoje šios poros formulių ekvivalenčios:*

$$\forall x\forall yH \equiv \forall y\forall xH, \tag{5.3}$$

$$\exists x\exists yH \equiv \exists y\exists xH, \tag{5.4}$$

$$\forall xH(x) \equiv \forall yH(y), \tag{5.5}$$

$$\exists xH(x) \equiv \exists yH(y), \tag{5.6}$$

(čia y – naujas kintamasis, neįeinantis į formulę $H(x)$)

$$\neg\forall xH \equiv \exists x\neg H, \tag{5.7}$$

$$\neg\exists xH \equiv \forall x\neg H. \tag{5.8}$$

Įrodymas. Įrodysime tik (5.7) ekvivalentumą. Tarkime, $\neg\forall xH$ teisinga struktūroje S. Tuomet $\forall xH$ joje klaidinga. Vadinasi, atsiras toks struktūros aibės elementas a, su kuriuo $H'(a)$ klaidinga. Čia H' gauta iš H, pakeitus pastarojoje, atsižvelgiant į jos struktūrą, predikatinius ir laisvuosius kintamuosius. $H'(a)$ gauta iš H' visas laisvąsias x įeitis joje pakeitus į a. Tuomet $\neg H'(a)$ teisinga, kartu teisinga ir $\exists x\neg H$.

Tarkime, kad $\neg\forall xH$ struktūroje S klaidinga. Tuomet joje $\forall xH$ teisinga. Vadinasi, kad ir koks būtų struktūros aibės elementas a, $H'(a)$ teisinga, t.y. *su bet kuriuo* struktūros aibės elementu a, $\neg H'(a)$ klaidinga ir kartu klaidinga $\exists x\neg H$.

Taigi įrodėme, kad nesvarbu, kokia būtų struktūra, kairėje ir dešinėje ekvivalentumo ženklo esančios formulės yra arba abi teisingos, arba abi klaidingos, t.y. jos ekvivalenčios.

Kitus ekvivalentumus paliekame įrodyti per pratybas. Teorema įrodyta.

Formulės $\forall x \exists y H$, $\exists y \forall x H$ nėra ekvivalenčios.

Nesunku rasti struktūrą, kurioje viena iš formulių būtų teisinga, o antroji – klaidinga. Pavyzdžiui, $S =< N; >>$. Pirmoji formulė $\forall x \exists y(y > x)$ natūraliųjų skaičių aibėje teisinga, o $\exists y \forall x(y > x)$ – klaidinga.

Dažnai neigimo įkėlimo (5.7), (5.8) taisyklės naudojamos norint patikslinti įvairias sąvokas (*funkcija nėra tolydi, seka nekonverguoja* ir pan.). Predikatas $P(x, y)$ vadinamas *refleksyviuoju*, jei $\forall x P(x, x)$ teisinga. Pavyzdžiui, $x = y$ realiųjų skaičių aibėje, $x \geqslant y$ natūraliųjų skaičių aibėje, $x \parallel y$ plokštumos tiesių aibėje. Predikatas $P(x, y)$ vadinamas *irefleksyviuoju*, jei teisinga $\forall x \neg P(x, x)$. Pavyzdžiui, $x > y$ natūraliųjų skaičių aibėje, $x \perp y$ plokštumos tiesių aibėje. O ką reiškia teiginys, kad *predikatas $P(x, y)$ nėra refleksyvusis*? Gal tai tolygu sąvokai *irefleksyvusis predikatas*? *Nėra refleksyvusis*, arba *netiesa, kad refleksyvusis*, užrašomas formule $\neg\forall x P(x, x)$. Ji ekvivalenti $\exists x \neg P(x, x)$. Kaip matome, tai skirtingos sąvokos. Pavyzdžiui, $5x = y$ sveikųjų skaičių aibėje nėra refleksyvusis ir nėra irefleksyvusis.

5.3 Pavyzdys formulės, įvykdomos begalinėje ir neįvykdomos jokioje baigtinėje aibėje

Norime nustatyti, ar tam tikra formulė įvykdoma. Naudojamės tokiu algoritmu.

Imame struktūras, kurių aibėse yra tik po vieną elementą (nesvarbu, koks tas elementas, o svarbu, kiek jų yra struktūros aibėje). Tokių struktūrų skaičius baigtinis. Tikriname, ar pasirinkta formulė teisinga bent vienoje iš jų. Jei taip, tai darbą baigiame ir atsakymas – *formulė įvykdoma*. Jei ne, tai darbą tęsiame struktūrų aibių galią padidinę vienetu, t.y. nagrinėjame struktūras, kurių aibės yra iš dviejų elementų. Ir vėl tokių struktūrų yra baigtinis skaičius. Tikriname, ar mūsų formulė teisinga bent vienoje iš jų. Jei taip, tai darbą baigiame ir atsakymas – *formulė įvykdoma*. Jei ne, tai darbą tęsiame struktūrų aibių galią padidinę vienetu.

Ar galime tikėtis, kad tuo atveju, kai formulė įvykdoma, naudodamiesi aprašytuoju algoritmu, rasime struktūrą, kurioje ji teisinga? Suprantama, jei ji neįvykdoma, tai aprašytasis procesas niekada nesibaigs. Deja, ne.

5.3 teorema. *Formulė*

$$\forall x \exists y P(x, y) \& \forall x \neg P(x, x) \& \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \& P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

įvykdoma begalinėje ir neįvykdoma jokioje baigtinėje aibėje.

Įrodymas. Formulė įvykdoma begalinėje aibėje (t.y. atsiras struktūra su begaline aibe, kurioje ji bus teisinga). Imkime $S =< N; <>$. Formulė yra konjunkcija trijų poformulių:

$$\forall x \exists y P(x, y),$$

$$\forall x \neg P(x, x),$$

$$\forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \& P(y, z)) \rightarrow P(x, z)).$$

Struktūroje S jos visos teisingos:

$$\forall x \exists y (x < y),$$

$$\forall x \neg (x < x),$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x < y) \& (y < z)) \rightarrow (x < z)).$$

Parodysime, kad ir kokia būtų struktūra su baigtine aibe, formulė toje struktūroje klaidinga. Įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, formulė teisinga struktūroje $S =< M; Q(x, y) >$ ir M yra baigtinė aibė. Jos elementus pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Predikatas $Q(x, y)$ ir apibrėžimo aibė M tokie, kad visos trys formulės yra teisingos:

(1) $\forall x \exists y Q(x, y)$,

(2) $\forall x \neg Q(x, x)$,

(3) $\forall x \forall y \forall z ((Q(x, y) \& Q(y, z)) \rightarrow Q(x, z))$.

Iš aibės M elementų konstruojame begalinę seką $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots$ tokiu būdu. Pirmąjį narį a_{i_1} imame kurį nors iš aibės M elementų. Antrąjį narį parenkame taip, kad $Q(a_{i_1}, a_{i_2})$ būtų teisinga. Toks bent vienas elementas yra, nes pagal prielaidą (1) formulė teisinga. Trečiąjį narį parenkame taip, kad $Q(a_{i_2}, a_{i_3})$ būtų teisinga. Vėl iš pirmosios formulės teisingumo išplaukia, kad atsiras bent vienas toks elementas. Taigi seką konstruojame taip, kad $Q(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) = t$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$). Imame jos pirmuosius $(m + 1)$ narių:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m+1}}.$$

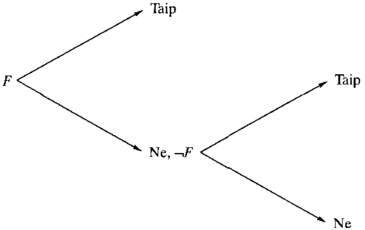
Kadangi aibėje iš viso yra m elementų, tai sekoje yra bent du vienodi nariai.

Tarkime, $a_{i_k} = a_{i_{k+s}}$. Iš to, kad (3) formulė teisinga, išplaukia, jog $Q(x, y)$ tranzityvus. Todėl $Q(a_{i_k}, a_{i_{k+2}}) = t$, $Q(a_{i_k}, a_{i_{k+3}}) = t, \ldots, Q(a_{i_k}, a_{i_{k+s}}) = t$. Bet $a_{i_k} = a_{i_{k+s}}$. Iš čia išplaukia, kad $Q(a_{i_k}, a_{i_k}) = t$. Bet tai prieštarauja (2) formulei, kuri tvirtina, kad ir koks būtų aibės M elementas a_i, $Q(a_i, a_i) = k$. Teorema įrodyta.

Vadovėlyje nagrinėjami įvairūs metodai, kuriais nustatoma, ar formulės yra *tapačiai teisingos*, ar *tapačiai klaidingos*, ar *įvykdomos*. Pastebėsime, kad iš efektyvios procedūros egzistavimo vienai iš išvardintųjų problemų spręsti, išplaukia tokios procedūros egzistavimas ir likusioms dviem, t.y. tos problemos tarpusavyje tampriai susijusios.

Tarkime, egzistuoja procedūra, kuria naudojantis galima patikrinti, ar bet kuri formulė F yra tapačiai teisinga. Tada egzistuoja ir procedūra, nustatanti, ar bet kuri formulė tapačiai klaidinga, bei ar ji įvykdoma.

Iš tikrųjų norėdami patikrinti, ar formulė F tapačiai klaidinga, tereikia nustatyti, ar $\neg F$ tapačiai teisinga. Norėdami patikrinti, ar formulė F įvykdoma, iš pradžių tikriname, ar F tapačiai teisinga. Jei *taip*, tai ji įvykdoma, jei *ne* – tikriname, ar $\neg F$ tapačiai teisinga. Jei *taip*, tai formulė *neįvykdoma*, jei *ne* – *įvykdoma*.



Pagal apibrėžimą struktūrų aibe gali būti bet kurios galios aibė. Iš 5.3 teoremos išplaukia, kad negalime apsiriboti vien tik baigtinėmis aibėmis. Tačiau kita teorema tvirtina, jog nebūtina nagrinėti individų aibių, kurių galia didesnė kaip skaičioji.

5.4 teorema (Löwenheimo–Skolemo). *Jei predikatų logikos formulė įvykdoma, tai ji įvykdoma ir kurioje nors numeruojamoje aibėje.*

5.4 Normaliosios priešdėlinės formos

Šiame skyrelyje parodysime, kad kiekvieną formulę galime transformuoti į tam tikrą specialų pavidalą, vadinamą *priešdėline normaliąja forma*.

5.12 apibrėžimas. *Formulės F* ***normaliąja priešdėline forma*** *vadiname jai ekvivalenčią formulę pavidalo* $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nG$; *čia G – formulė, kurioje nėra kvantorių (bekvantorė formulė, dar vadinama* ***matrica****), o* $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n$ *vadiname formulės F* ***prefiksu*** ($Q_i \in \{\forall, \exists\}(i = 1, \ldots, n)$).

5.5 teorema. *Kad ir kokia būtų predikatų logikos formulė F, atsiras jai ekvivalenti normaliosios priešdėlinės formos.*

Įrodymas. Nesvarbu, kokia yra formulė F, ją galima transformuoti į priešdėlinę normaliąją, t.y. visus kvantorius iškelti į formulės priekį, naudojantis ekvivalenčių formulių poromis.

$$\exists x A(x) \equiv \exists y A(y),$$

$$\forall x A(x) \equiv \forall y A(y);$$

čia y – naujasis kintamasis, neįeinantis į $A(x)$. Toks veiksmas vadinamas kintamojo pervardijimu.

$$\forall x(A(x)\&B) \equiv \forall x A(x)\&B, \tag{5.9}$$

$$\forall x(A(x) \vee B) \equiv \forall x A(x) \vee B, \tag{5.10}$$

$$\exists x(A(x)\&B) \equiv \exists x A(x)\&B, \tag{5.11}$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \equiv \exists x A(x) \vee B; \tag{5.12}$$

čia formulėje B nėra x.

$$\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x),$$

$$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x).$$

Be to, galima naudotis ir kitomis poromis ekvivalenčių formulių. Kartu suprastinsime priešdėlinę normaliąją formą. Prefikse bus mažiau kvantorinių kompleksų:

$$\forall x(A(x)\&B(x)) \equiv \forall x A(x)\&\forall x B(x),$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

Bet

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\equiv \forall x A(x) \vee \forall x B(x).$$

Struktūroje, kurios aibe yra N, $A(x)$ – $x < 5$, $B(x)$ – $x \geqslant 5$, kairioji formulė teisinga, o dešinioji – klaidinga.

$$\exists x(A(x)\&B(x)) \not\equiv \exists xA(x)\&\exists xB(x).$$

Struktūroje, kurios aibe yra N, $A(x)$ – $x < 3$, $B(x)$ – $x > 10$, kairioji formulė klaidinga, o dešinioji – teisinga.

Naudodamiesi aprašytomis ekvivalenčių formulių poromis, bet kurią formulę galime transformuoti į priešdėlinę normaliąją formą. Jei formulėje yra ir kitos loginės operacijos, tai jas išreiškiame per $\neg$, $\&$, $\vee$. Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Transformuokime

$$\forall x\exists yA(x, y) \to \forall y(B(y, y)\&\exists xA(y, x))$$

į priešdėlinę normaliąją formą.

Sprendimas:

$$\neg\forall x\exists yA(x, y) \vee \forall y(B(y, y)\&\exists xA(y, x)),$$

$$\exists x\forall y\neg A(x, y) \vee \forall y(B(y, y)\&\exists xA(y, x)),$$

$$\exists u\forall v\neg A(u, v) \vee \forall y(B(y, y)\&\exists xA(y, x)),$$

$$\exists u\forall v\forall y\exists x(\neg A(u, v) \vee (B(y, y)\&A(y, x))).$$

5.5 Formulės, į kurias įeina tik vienviečiai predikatiniai kintamieji

Nėra algoritmo, pagal kurį galėtumėme patikrinti, ar predikatų logikos formulė įvykdoma, ar ne. Kai kuriems formulių poaibiams, iš jų ir formulėms, į kurias įeina tik vienviečiai predikatiniai kintamieji, toks algoritmas egzistuoja.

Tarkime, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra pilnas formulės F laisvųjų kintamųjų sąrašas. Iš struktūros apibrėžimo išplaukia, kad F tapačiai teisinga (tapačiai klaidinga) tada ir tiktai tada, kai $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_nF$ tapačiai teisinga (tapačiai klaidinga). Formulė F įvykdoma tada ir tiktai tada, kai $\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_nF$ įvykdoma. Taigi, norėdami nustatyti, ar formulės tapačiai teisingos, ar tapačiai klaidingos, ar įvykdomos, galime nagrinėti tik formules be laisvųjų kintamųjų.

5.6 teorema. *Aibė formulių, į kurias įeina tik vienviečiai predikatiniai kintamieji, išsprendžiama įvykdomumo atžvilgiu.*

Įrodymas. Galime apsiriboti tik uždaromis formulėmis. Tarkime, formulėje F iš viso yra n skirtingų predikatinių kintamųjų (žymėkime juos $P_1, P_2, \dots, P_n$) ir ji yra normaliosios priešdėlinės formos $Q_1x_1\ Q_2x_2\ Q_mx_mG$. Parodysime, kad, jei F įvykdoma kurioje nors aibėje, tai ji įvykdoma ir aibėje, kurioje ne daugiau kaip 2^n elementų. Tarkime, ji teisinga struktūroje $< M;\ P_1^0, \dots, P_n^0 >$. Atliekame tokią transformaciją:

1. Jei $Q_m = \forall$, tai transformuojame G į normaliąją konjunkcinę formą. Po to, naudodamiesi (5.9), (5.10) ekvivalentumais, keliame $\forall x_m$ į skliaustus tol, kol tai įmanoma. Poformuliai, prasidedantys $\forall x_m$, yra pavidalo $\forall x_m(k_1P_{i_1} \vee \dots \vee k_sP_{i_s})$ ($k_j = \neg$ arba tuščias žodis, $j = 1, \dots, s$).

2. Jei $Q_m = \exists$, tai transformuojame G į normaliąją disjunkcinę formą. Po to, naudodamiesi (5.11), (5.12) ekvivalentumais, keliame $\exists x_m$ į skliaustus tol, kol tai įmanoma. Poformuliai, prasidedantys $\exists x_m$, yra pavidalo $\exists x_m(k_1P_{i_1}\& \dots \& k_uP_{i_u})$ ($k_j = \neg$ arba tuščias žodis, $j = 1, \dots, u$).

Panašiai įkeliame $Q_{m-1}, Q_{m-2}, \dots, Q_1$. Gautoji formulė yra pavidalo

$$\&_{j=1}^r(H_1^j \vee \dots \vee H_{v_j}^j) \tag{5.13}$$

arba

$$\vee_{j=1}^u(H_1^j \& \dots \& H_{l_j}^j). \tag{5.14}$$

Čia H_i^j – formulės, kurių visi poformuliai, prasidedantys kvantoriais, yra pavidalo

$$\forall x_v(k_1P_{i_1} \vee \dots \vee k_sP_{i_s}) \tag{5.15}$$

($k_j = \neg$ arba tuščias žodis ($j = 1, \dots, s$)) arba

$$\exists x_v(k_1P_{i_1}\& \dots \& k_uP_{i_u}) \tag{5.16}$$

($k_j = \neg$ arba tuščias žodis ($j = 1, \dots, u$)).

Parodysime, kad galima rasti kitą struktūrą, kurios aibėje yra ne daugiau kaip 2^n elementų, ir nagrinėjamoji formulė toje struktūroje teisinga. Tuo tikslu pakanka įrodyti, kad visos (5.15), (5.16) formulės, kurios teisingos (klaidingos) pradinėje struktūroje, yra teisingos (klaidingos) ir naujoje struktūroje.

Aibę M skaidome į poaibius $A_{k_1,\dots,k_n}$ ($k_j \in \{t, k\}$; $j = 1, 2, \dots, n$) laikydamiesi nuostatos: kad ir koks būtų aibės M elementas b, jis priklauso poaibiui $A_{k_1,\dots,k_n}$ tada ir tiktai tada, kai $P_1^0(b) = k_1, \dots, P_n^0(b) = k_n$. Gautieji poaibiai neturi bendrų elementų. Kai kurie iš jų gali būti tušti. Visų tokių poaibių atstovų aibę pažymėkime M'. Joje yra ne daugiau kaip 2^n elementų. Parodysime, kad visos (5.15), (5.16) formulės, kurios teisingos (klaidingos) pradinėje struktūroje, yra teisingos (klaidingos) ir struktūroje $< M'; P_1^0, \ldots, P_n^0 >$.

Tarkime, kuri nors formulė pavidalo (5.15) teisinga pradinėje struktūroje. Tuomet ji teisinga ir naujoje struktūroje, nes M' yra M poaibis. Tarkime, kuri nors formulė pavidalo (5.15) yra klaidinga pradinėje struktūroje. Vadinasi, atsiras toks aibės M elementas c, kad visi $k_1 P_{i_1}(c), \ldots, k_s P_{i_s}(c)$ bus klaidingi. Tarkime, $P_i^0(c) = d_i (i = 1, \ldots, n)$. Tuomet c priklauso poaibiui $A_{d_1 \ldots d_n}$. Taigi tas poaibis netuščias. Tuo atveju, kai c nepriklauso M', aibėje M' yra poaibio $A_{d_1 \ldots d_n}$ atstovas. Tarkime, tai e. Tuomet $P_i^0(e) = d_i (i = 1, \ldots, n)$, t.y. visi $k_1 P_{i_1}(e), \ldots, k_s P_{i_s}(e)$ yra klaidingi, kartu klaidingas ir nagrinėjamasis poformulis. Panašiai nagrinėjamas ir atvejis, kai formulė yra pavidalo (5.16). Teorema įrodyta.

Parodysime, kaip normaliosios priešdėlinės formos formulių aibės klasifikuojamos į išsprendžiamas ir neišsprendžiamas klases pagal prefiksą ir predikatinius kintamuosius. Aprašomose formulėse nėra laisvųjų kintamųjų. Raide P^i žymime i-vietį predikatinį kintamąjį. Klases žymime poromis (Π, σ); čia Π – žodis abėcėlėje $C = \{\forall, \exists, \forall^\infty, \exists^\infty, \forall^n, \exists^n\} (n = 2, 3, \ldots)$, σ – predikatinių kintamųjų aibė.

Tarkime, yra du abėcėlės C žodžiai A ir B. Sakykime, kad A yra B dalis, jei A gali būti gauta iš B pritaikius baigtinį skaičių operacijų:

1) išbraukus žodyje B simbolį $\forall$ arba $\exists$,

2) pakeitus žodyje B simbolį $\forall^\infty$ į $\forall^n$ arba $\exists^\infty$ į $\exists^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

3) pakeitus žodyje B simbolį $\forall^n$ į $\forall^m$ arba $\exists^n$ į $\exists^m$ $(m < n)$.

5.13 apibrėžimas. *Pora* (Π, σ) *žymime klasę* $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n G$ *normaliosios priešdėlinės formos formulių, tenkinančių sąlygas:*

1) $Q_1 Q_2 \ldots Q_n = \Pi$,

2) *egzistuoja predikatinių kintamųjų formulėje G ir σ abipusiškai vienareikšmė atitiktis (atsižvelgiant į vietų skaičių).*

Pavyzdžiui, formulė $\forall x \exists y((P(x) \vee P(y)) \& (Q(x, y) \vee R(y)))$ priklauso klasei $(\forall\exists, \{P^2, P_0^1, P_1^1\})$, nes joje yra vienas dvivietis predikatinis kintamasis ir du vienviečiai predikatiniai kintamieji, be to, $\forall\exists$ yra formulės prefiksas.

5.14 apibrėžimas. *Sakome, kad klasė* $(\Pi, \sigma) \leqslant (\Pi_1, \sigma_1)$, *jei:*

1) Π *lygus* Π_1 *arba yra jo dalis,*

2) σ *izomorfinis* σ_1 *poaibiui.*

Nesunku matyti, jei kuri nors klasė neišsprendžiama, tai bet kuri didesnė klasė tuo labiau neišsprendžiama. Kalbame apie neišsprendžiamumą *pagal išvedamumą*, t.y. nėra algoritmo, kuriuo galima nustatyti, ar predikatų skaičiavime formulė išvedama.

Šios klasės yra minimalios neišsprendžiamos:

1. $\Pi = \exists\forall\exists,\ \sigma = \{P^2, P_0^1, P_1^1, P_2^1, \ldots\}$.

Šiai klasei priklauso formulės, kurių prefiksai lygus $\exists\forall\exists$ arba $\exists\forall\exists$ yra jų dalis, be to, formulėse gali būti ne mažiau kaip vienas dvivietis predikatinis kintamasis ir bet kuris skaičius vienviečių predikatinių kintamųjų.

2. $\Pi = \exists^3\forall,\ \sigma = \{P^2, P_0^1, P_1^1, P_2^1, \ldots\}$.

3. $\Pi = \forall^\infty\exists^3\forall,\ \sigma = \{P^2\}$.

4. $\Pi = \exists^\infty\forall,\ \sigma = \{P^2\}$.

5. $\Pi = \exists\forall\exists^\infty,\ \sigma = \{P^2\}$.

6. $\Pi = \exists^3\forall^\infty,\ \sigma = \{P^2\}$.

7. $\Pi = \forall^\infty\exists\forall\exists,\ \sigma = \{P^2\}$.

8. $\Pi = \exists\forall^\infty\exists,\ \sigma = \{P^2\}$.

9. $\Pi = \exists\forall\exists\forall^\infty,\ \sigma = \{P^2\}$.

Klasė (Π, σ) išsprendžiama pagal išvedamumą, jei:

a) σ sudaro tik vienviečiai predikatiniai kintamieji,

b) $\Pi = \forall^\infty\exists^\infty$,

c) $\Pi = \forall^\infty\exists^2\forall^\infty$.

Taip pat klasė (Π', σ') išsprendžiama, jei $(\Pi', \sigma') \leqslant (\Pi, \sigma)$; čia (Π, σ) yra viena iš išvardytųjų *a, b, c*.

5.6 Aristotelio logika

Naudodamiesi kai kuriais predikatų logikos rezultatais, paaiškinsime graikų mokslininko Aristotelio (384–322 m. pr. Kr.) išplėtotos tradicinės (senosios) logikos teoriją – silogistiką. Tradicinėje logikoje teiginiai buvo vadinami *sprendimais*. Sprendimo objektas vadinamas *subjektu* (S), jo savybė – *predikatu* (P). Buvo nagrinėjami tik tokio pavidalo teiginiai (kategoriški silogizmai):

S yra P,

S nėra P.

Abu jie – subjektas ir predikatas vadinami *sprendimo terminais*. Šiuolaikinės logikos požiūriu sprendimo terminai yra *vienviečiai predikatai*, nes elementų savybės matematinėje logikoje nusakomos vienviečiais predikatais. Sprendimai skirstomi į *teigiamus*

Visi S yra P, (a)

Kai kurie S yra P (i)

ir *neigiamus*

Nė vienas S nėra P, (e)

Kai kurie S nėra P. (o)

Subjektas gali būti ir vienintelis. Tuomet teigiamajame sprendime jam priskiriamas (a) tipo sprendimas, o neigiamajame – (e) tipo.

Teigiamieji sprendimai žymimi raidėmis a, i. Tai lotyniškojo žodžio *affirmo* (teigiu) pirmosios dvi balsės. Neigiamieji sprendimai žymimi raidėmis e, o. Tai lotyniškojo žodžio *nego* (neigiu) balsės.

Taigi iš viso nagrinėjami keturių rūšių – (a), (i), (e), (o) sprendimai. Juos atitinka tokios matematinės logikos formulės:

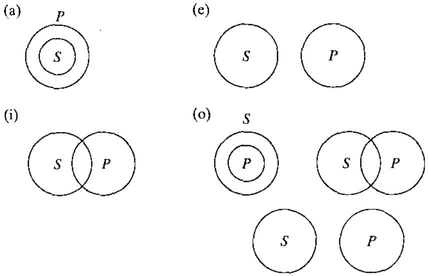
$$\forall x(S(x) \to P(x)) \tag{a}$$

$$\exists x(S(x) \& P(x)), \tag{i}$$

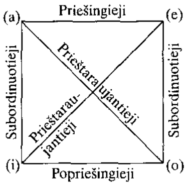
$$\forall x(S(x) \to \neg P(x)), \tag{e}$$

$$\exists x(S(x) \& \neg P(x)). \tag{o}$$

Sprendimų rūšys vaizduojamos diagramomis:



Teisingumo požiūriu sprendimų (a), (e), (i), (o) ryšys aprašomas loginiu kvadratu.



Sprendimų ryšys įrodomas naudojantis diagrama arba predikatų logikos dėsniais. Pavyzdžiui, parodysime, kad (a) ir (o) yra prieštaraujantys, t.y.

$$\neg\forall x(S(x) \to P(x)) \equiv \exists x(S(x) \& \neg P(x)).$$

Ekvivalentumas gaunamas naudojantis neigimo įkėlimo į skliaustus dėsniais bei savybe $\to$:

$$\neg\forall x(S(x) \to P(x)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \neg(S(x) \to P(x)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \neg(\neg S(x) \vee P(x)) \equiv$$

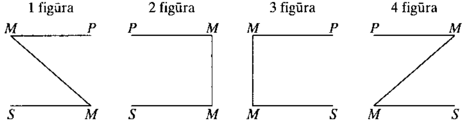
$$\equiv \exists x(S(x) \& \neg P(x)).$$

Tarp sprendimų (a) ir (i), (e) ir (o) yra *subordinacijos* ryšys. Jei (a) teisingas, tai ir (i) teisingas. Jei (e) teisingas, tai ir (o) teisingas.

Tarp sprendimų (a) ir (e) yra *priešingumo* ryšys. Jei vienas jų teisingas, tai antrasis klaidingas. Jei vienas jų klaidingas, tai antrasis neapibrėžtas.

Tarp sprendimų (i) ir (o) yra *popriešingumo* ryšys. Jei vienas jų klaidingas, tai antrasis teisingas. Jei vienas jų teisingas, tai antrasis neapibrėžtas.

Glaustai aprašysime vienviečių predikatų logikos fragmentą – Aristotelio sukurtą dedukcinę sistemą *silogistiką* (gr. *syllogistikos* – išvedantis samprotavimą). *Silogizmas* yra deduktyvus samprotavimas. Jį sudaro dvi prielaidos, viena išvada ir logikos taisyklė. Tiek prielaidomis, tiek ir išvada tegali būti (a), (i), (e), (o) tipo formulės. Iš viso galima gauti $4^3 = 64$ kombinacijas aaa, aea, aia, aoa, ... Jas vadiname *modusais* (lot. *modus* – saikas, rūšis, kiekis, matas). Be to, formulėse yra tiktai trys predikatai. Jie žymimi *P, M, S*. Į pirmąją prielaidą įeina predikatai *P, M*, į antrąją – *M, S*, o išvadoje yra *S, P*. Atkreipiame dėmesį, kad išvadoje jie yra būtent tokia tvarka, t.y. negali būti *P, S*. Priklausomai nuo predikatų išsidėstymo formulėse gaunamos keturios silogizmo figūros:



Iš viso gaunamos $64 \times 4 = 256$ kombinacijos. Yra 64 galimi modusai ir 4 galimos figūros. Logikos dėsniais gaunama tik 19 kombinacijų. Norėdami geriau jas įsiminti, senovės scholastai sukūrė joms pavadinimus:

1 figūra: aaa – *Barbara*, eae – *Celarent*, aii – *Darii*, eio – *Ferio*.

2 figūra: eae – *Cesare*, aee – *Camestres*, eio – *Festino*, aoo – *Baroco*.

3 figūra: aai – *Darapti*, iai – *Disamis*, aii – *Datisi*, eao – *Felapton*, oao – *Bocardo*, eio – *Ferison*.

4 figūra: aai – *Bramantip*, aee – *Camenes*, iai – *Dimaris*, eao – *Fesapo*, eio – *Fresison*.

Pavyzdys. Nustatykime silogizmo modusą ir figūrą:

Kiekvienas nelyginis skaičius yra natūralusis
Pirminiai skaičiai yra nelyginiai
———————————————
Vadinasi, pirminiai skaičiai yra natūralieji

Raide *M* pažymėkime tvirtinimą, kad *skaičius yra nelyginis*, *P* – *skaičius yra natūralusis*, *S* – *skaičius yra pirminis*. Tuomet matome, kad silogizmo modusas yra aaa, o figūra – pirmoji (*Barbara*). Vadinasi, samprotavimas pagrįstas.

Tuščios aibės sąvoka tais laikais nebuvo žinoma. Todėl šiuolaikinėje logikoje *Darapti, Felapton, Bramantip* bei *Fesapo* nėra logikos dėsniai. Kad tai būtų taisyklingi silogizmai, pridedama dar po vieną prielaidą, nurodančią, kad egzistuoja individai, tenkinantys predikatus.

Aristotelio logika įdomi istoriniu požiūriu. Logikos taikymams informatikoje bei matematikoje ja nesinaudojama, nes sukurtos bendresnės loginėms išvadoms nustatyti sistemos, kai prielaidų sąrašas yra bet kuris baigtinis skaičius formulių (o ne dvi kaip Aristotelio logikoje), kuriose vietų skaičius predikatuose nėra ribojamas (Aristotelio logikoje nagrinėjami tik vienviečiai predikatai). Be to, lygybės predikatas, be kurio negalima apsieiti formalizuojant matematikos uždavinius, neišreiškiamas formulėmis, nagrinėjamomis Aristotelio sistemoje.

5.7 Pratimai

1. Struktūros $S =< \mathbf{N}; Q, P >$, predikatai Q, P yra triviečiai ir tenkina sąlygas: $Q(x, y, z) = t$ tada ir tiktai tada, kai $x + y = z$, o $P(x, y, z) = t$ tada ir tiktai tada, kai $xy = z$. Parašykite formulę, kurioje yra vienas laisvasis kintamasis x ir kuri teisinga struktūroje S tada ir tiktai tada, kai:

a) $x = 0$,

b) $x = 1$,

c) $x = 2$,

d) x yra lyginis skaičius,

e) x yra nelyginis skaičius,

f) x yra pirminis skaičius.

2. Parašykite formulę, kurioje yra du laisvieji kintamieji x, y ir kuri teisinga struktūroje S tada ir tiktai tada, kai:

a) $x = y$,

b) $x \leqslant y$,

c) $x < y$,

d) x dalijasi iš y.

3. Struktūroje S parašykite formulę, kuria nusakomas:

a) sudėties asociatyvumas, b) sudėties komutatyvumas.

4. Tarkime, M yra taškų ir tiesių kurioje nors plokštumoje aibė. Joje apibrėžti predikatai:

$T(x) = t$ tada ir tiktai tada, kai x yra taškas,

$T_i(x) = t$ tada ir tikta tada, kai x yra tiesė,

$P(x, y) = t$ tada ir tiktai tada, kai x priklauso y.

Parašykite nurodytoje struktūroje formulę, kuria tvirtinama:

a) per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti tiesę; jei taškai skirtingi, tai tiesė vienintelė,

b) egzistuoja dvi lygiagrečios tiesės.

5. Tarkime, M yra kurios nors aibės A visų poaibių aibė, o predikatas $Q(x, y)$ teisingas tada ir tiktai tada, kai $x \subset y$.

Parašykite formulę, kurioje yra trys laisvieji kintamieji x, y, z ir kuri teisinga tada ir tiktai tada, kai:

a) x yra y ir z sankirta,

b) x yra y ir z sąjunga.

Parašykite formulę, kurioje yra vienas laisvasis kintamasis ir kuri teisinga tada ir tiktai tada, kai:

a) x yra tuščia aibė,

b) $x = A$.

Parašykite formulę, kurioje yra du laisvieji kintamieji ir kuri teisinga tada ir tiktai tada, kai x yra y papildinys.

6. Ar įvykdomos formulės:

a) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z)$,

b) $\exists x \exists y (P(x) \& \neg P(y))$,

c) $\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \forall z R(x, y, z))$,

d) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$,

e) $P(x) \rightarrow \forall y P(y)$?

7. Ar tapačiai teisingos formulės:

a) $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$,

b) $\neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$,

c) $\forall y \exists x P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$?

8. Parašykite formulę, kurioje yra vienviečiai predikatiniai kintamieji ir kuri teisinga tik struktūroje, turinčioje ne mažiau kaip 3 elementus.

9. Įrodykite, kad formulė $\neg\exists x A(x) \to \neg\forall x A(x)$ tapačiai teisinga.

10. Įrodykite, kad formulė $\exists x \forall y (P(x, y) \to (\neg P(y, x) \to (P(x, x) \leftrightarrow P(x, y))))$ teisinga struktūroje su dviem elementais.

11. Žinoma struktūra $S = < M; P, Q >$; čia $M = \{a, b, c\}$ predikatai $P(x, y)$, $Q(x, y)$ apibrėžti tokia lentele:

x	y	$P(x, y)$	$Q(x, y)$
a	a	t	k
a	b	k	k
a	c	k	k
b	a	k	t
b	b	k	k
b	c	k	k
c	a	k	k
c	b	t	t
c	c	k	t

Nustatykite, ar struktūroje S formulė $\exists x \forall y \exists z ((P(x, y) \& \neg Q(x, z)) \to (\neg P(x, z) \& Q(y, x)))$ teisinga.

12. Raskite normaliąją priešdėlinę formą:

a) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \to \exists u P(u, y, u)) \& \exists x \forall y \forall z (P(y, y, z) \& \exists P(u, x, z))$,

b) $\exists x \forall y \exists u \forall v P(x, y, u, v) \vee (\exists x \forall y \exists u Q(x, y, u) \& \exists x \forall u \exists y R(x, u, y))$.

13. Raskite normaliąją priešdėlinę formą, kurios prefiksas būtų pavidalo $\exists \ldots \exists \forall \ldots \forall$ $\forall x \exists y \forall z ((P(x) \& \neg Q(z)) \vee (P(z) \& \neg P(y)))$.

6 skyrius
Predikatų skaičiavimai

Šiame skyriuje praplėsime formulių kalbą įvesdami termo sąvoką. Remdamiesi tuo, kad predikatų logikos tapačiai teisingų formulių aibė yra rekursyviai skaiti, aprašysime keletą skaičiavimų, kuriuose formulė išvedama tada ir tiktai tada, kai ji tapačiai teisinga.

6.1 Formulės, kuriose yra funkciniai simboliai

Tarkime, M yra kuri nors individinių konstantų aibė. Nagrinėsime funkcijas, kurių apibrėžimo ir reikšmių aibė yra M. Kurią nors n argumentų funkciją vadiname n-viečiu funkciniu simboliu. Kai kada nurodome ir vietų skaičių, rašydami, pavyzdžiui, $f(x_1, \ldots, x_n)$ arba f^n. Atskiru atveju, jei funkciniame simbolyje vietų skaičius lygus nuliui, tai jis yra konstanta.

6.1 apibrėžimas (termo).

1. *Individinė konstanta yra termas.*
2. *Individinis kintamasis yra termas.*
3. *Jei f yra n-vietis funkcinis simbolis ir $t_1, \ldots, t_n$ — termai, tai $f(t_1, \ldots, t_n)$ taip pat yra termas.*

Pavyzdys. $M = \{a, b, c\}$, $f(x)$ yra vienvietis funkcinis simbolis. Termų pavydžiai: $a, b, c, x, y, z, f(x), f(a), f(c), f(f(x)), f(f(a)), f(f(f(y)))$.

Apibrėšime formules, kuriose yra funkciniai simboliai.

6.2 apibrėžimas:

1. *Jei P yra n-vietis predikatinis simbolis, $t_1, \ldots, t_n$ — termai, tai $P(t_1, \ldots, t_n)$ yra formulė. Ji dar vadinama atomine formule.*

2. *Jei F* yra formulė, *tai* $\neg F$ *– taip pat formulė.*

3. *Jei F, G* yra *formulės, tai* $(F\&G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ *– taip pat formulės.*

4. *Jei F* yra *formulė, x – formulės F laisvasis kintamasis, tai* $\forall x F$, $\exists x F$ *– taip pat formulės.*

Kaip ir anksčiau, išorinius skliaustus praleisime.

6.3 apibrėžimas. *Atominę formulę arba jos neigimą vadiname* ***litera.***

Įvykdomų, tapačiai teisingų bei tapačiai klaidingų formulių apibrėžimai tokie pat kaip ir praeitame skyriuje. Skiriasi tiktai struktūros sąvoka.

6.4 apibrėžimas. *Tarkime, formulė F ir* $P_1^{m_1}, \ldots, P_n^{m_n}$ *yra pilnas sąrašas predikatinių kintamųjų, įeinančių į F,* $x_1, \ldots, x_u$ *– pilnas sąrašas laisvųjų kintamųjų, o* $f_1^{k_1}, \ldots, f_v^{k_v}$ *– funkcinių simbolių. Tuomet* ***formulę F atitinkančia struktūra*** *vadiname reiškinį*

$$S =< M; Q_1^{m_1}, \ldots, Q_n^{m_n}; a_1, \ldots, a_u; g_1^{k_1}, \ldots, g_v^{k_v} >;$$

čia M – kuri nors aibė, $Q_i^{m_i}$ *–* m_i*-viečiai* $(i = 1, \ldots, n)$ *predikatai, apibrėžti aibėje M,* $a_i (i = 1, \ldots, u)$ *– kurie nors aibės M elementai,* $g_i^{k_i}$ *–* k_i*-vietės* $(i = 1, \ldots, v)$ *funkcijos, kurių apibrėžimo ir reikšmių aibė yra M.*

Sakome, kad ***formulė F įvykdoma struktūroje S****, jei* $P_i^{m_i}$, x_i, $f_i^{k_i}$ *pakeitę atitinkamai* $Q_i^{m_i} (i = 1, \ldots, n)$, a_i $(i = 1, \ldots, u)$, $g_i^{k_i}$ $(i = 1, \ldots, v)$ *gauname teisingą teiginį.*

6.5 apibrėžimas. *Sakome, kad formulė tapačiai teisinga, jei ji teisinga bet kurioje struktūroje. Formulė tapačiai klaidinga, jei ji klaidinga bet kurioje struktūroje.*

Pavyzdžiai:

1. $\forall x \exists y (Q(x, y, f(x)) \& P(y, y, y))$.

Išrašome predikatinius kintamuosius tokia tvarka: Q^3, P^3. Be to, formulėje yra ir funkcinis simbolis f. Formulė įvykdoma, nes ji teisinga struktūroje $< N; x+y = z, xy = z; x + 1 >$, t.y. teisinga formulė $\forall x \exists y (x + y = x + 1 \& yy = y)$.

2. $\forall x \neg P(x, x) \& \forall x P(y, f(x)) \& \forall x \exists y (P(f(x), y) \& P(y, f(f(x))))$.

Formulė teisinga struktūroje $< N; x < y; 1; x + 2 >$, t.y. teisinga formulė $\forall x \neg (x < x) \& \forall x (1 < x + 2) \& \forall x \exists y (x + 2 < y \& y < x + 4)$.

6.6 apibrėžimas. *Dvi formules F, G vadiname* ***deduktyviai ekvivalenčiomis****, jei F tapačiai klaidinga tada ir tiktai tada, kai G tapačiai klaidinga.*

Nagrinėjame uždaras formules normaliosios priešdėlinės formos, t.y. pavidalo $Q_1x_1 \dots Q_mx_mM(x_1, \dots, x_m)$; čia $M(x_1, \dots, x_m)$ – bekvantorė formulė, $Q_i \in \{\forall, \exists\}, x_1, \dots, x_m$ – pilnas sąrašas laisvųjų kintamųjų formulėje M. Parodysime, kaip remiantis bet kuria tokio pavidalo formule F galima rasti jai deduktyviai ekvivalenčią G, kurioje nėra egzistavimo kvantorių. Jų eliminavimą 1920 m. aprašė norvegų logikas Th. Skolem. Formulės F transformaciją į G vadiname ***skulemizacija***.

Tarkime, $Q_r = \exists$ ir tai yra pirmasis (iš kairės į dešinę) egzistavimo kvantorius prefikse. Tuomet $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{r-1} = \forall$. Pažymėkime raide G formulę

$$\forall x_1 \dots \forall x_{r-1} Q_{r+1} x_{r+1} \dots Q_m x_m \times M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_m);$$

čia f – naujas, nepriklausantis formulei F funkcinis simbolis.

6.1 teorema. *Formulės F ir G yra deduktyviai ekvivalenčios.*

Įrodymas. Parodysime, jei F nėra tapačiai klaidinga, tai ir G tokia nėra, bei atvirkščiai. Tarkime, S yra struktūra, kurioje F teisinga. Tuomet, kad ir kokie būtų struktūros aibės elementai $x_1^0, \dots, x_{r-1}^0$, atsiras toks x_r^0 iš tos pačios aibės, kad F bus teisinga struktūroje S (pažymėkime tą funkciją $f_0(x_1, \dots, x_{r-1})$). Formulė G teisinga struktūroje S', kuri skiriasi nuo S tiktai tuo, kad formulę G atitinkančioje struktūroje $f(x_1, \dots, x_{r-1})$ pakeista į $f_0(x_1, \dots, x_{r-1})$. Tarkime, kad yra struktūra S', kurioje G teisinga. Tuomet formulė teisinga struktūroje, kuri gauta iš S', išbraukus joje funkciją, atitinkančią $f(x_1, \dots, x_{r-1})$. Samprotavimai teisingi ir tuo atveju, kai $r = 1$, t.y. $f(x_1, \dots, x_{r-1})$ yra nauja konstanta, nepriklausanti formulei F. Teorema įrodyta.

Išvada. Kad ir kokia būtų uždara normaliosios priešdėlinės formos formulė, galima rasti jai deduktyviai ekvivalenčią, kurioje nėra egzistavimo kvantoriaus įeičių.

Įrodymas. Tarkime, uždara formulė yra normaliosios formos ir joje yra k egzistavimo kvantoriaus įeičių. Taikome k kartų teoremoje aprašytą procedūrą ir gauname deduktyviai ekvivalenčią formulę be egzistavimo kvantoriaus įeičių. Išvada įrodyta.

Pavyzdys. Skulemizuokime (eliminuokime visas egzistavimo kvantoriaus įeitis) formulę

$$\exists x_1\exists x_2\forall y_1\forall y_2\exists x_3\forall y_3\exists x_4 M(x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3, x_4).$$

Tarkime, a, b yra naujos konstantos, t.y. kurių nėra nurodytoje formulėje, $f(y_1, y_2)$, $g(y_1, y_2, y_3)$ – nauji funkciniai simboliai. Tuomet skulemizuotoji formulė yra pavidalo

$$\forall y_1\forall y_2\forall y_3 M(a, b, y_1, y_2, f(y_1, y_2), y_3, g(y_1, y_2, y_3)).$$

Tarkime, F yra kuri nors uždara formulė. Atliekame su ja tokius veiksmus:

a) transformuojame į normaliąją priešdėlinę formą,

b) skulemizuojame,

c) išbraukiame kvantorinius kompleksus, prasidedančius bendrumo kvantoriumi,

d) transformuojame į normaliąją konjunkcinę formą.

Gautoji formulė vadinama formulės F ***standartine forma***. Nors formulėje ir nėra kvantorių, visi joje esantys laisvieji kintamieji laikomi suvaržytais bendrumo kvantoriais.

Pavyzdys. Raskime formulės

$$\forall x((P(x)\&Q(x)) \to \exists y(R(x, y)\&C(y)))$$

standartinę formą.

Sprendimas. Jos normalioji priešdėlinė forma yra

$$\forall x\exists y((P(x)\&Q(x)) \to (R(x, y)\&C(y))).$$

Ją skulemizuojame, o kvantorinį kompleksą, prasidedantį bendrumo kvantoriumi, išbraukiame. Tada

$$(P(x)\&Q(x)) \to (R(x, f(x))\&C(f(x))).$$

Transformuojame į NKF ir gauname standartinę formą:

$$(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x, f(x)))\&(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee C(f(x))).$$

6.2 Hilberto tipo predikatų skaičiavimas

Tarkime, formulės $A(x)$ laisvasis kintamasis yra x ir termas – t. Formulę, gautą iš $A(x)$, pakeitus joje visas x laisvąsias įeitis termu t, žymime $A(t)$.

6.7 apibrėžimas. *Sakome, kad termas t yra laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje $A(x)$, jei nesvarbu, koks yra į termą t įeinantis individinis kintamasis y, jokia jo įeitis nepatenka nei į $\forall y$, nei į $\exists y$ veikimo sritį formulėje $A(t)$.*

Hilberto tipo predikatų skaičiavimas nusakomas aksiomų schemomis bei taisyklėmis. Aksiomų schemas sudaro teiginių logikos Hilberto tipo skaičiavimo aksiomų 1.1–4.3 schemos ir:

5.1. $\forall x A(x) \to A(t)$,

5.2. $A(t) \to \exists x A(x)$.

Schemoje pakeitę A kuria nors konkrečia formule, gauname aksiomą.
Taisyklės:

$$\text{(MP)}\ \frac{A,\quad A \to B}{B}, \qquad (\forall)\ \frac{B \to A(y)}{B \to \forall x A(x)}, \qquad (\exists)\ \frac{A(y) \to B}{\exists x A(x) \to B}.$$

Aksiomose 5.1, 5.2 reikalaujama, kad termas t būtų laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje $A(x)$. Jei šio reikalavimo nebūtų, tai iš teisingų teiginių galėtume išvesti klaidingus. Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibėje $\forall x \exists y (x \neq y)$ yra teisingas tvirtinimas, bet $\forall x \exists y (x \neq y) \to \exists y (y \neq y)$ būtų klaidingas.

Taisyklėse $(\forall)$, $(\exists)$ kintamasis y negali laisvai įeiti į apatinę formulę ir turi būti laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje $A(x)$. Kad tas reikalavimas būtinas, matome iš tokio pavyzdžio:

$$\frac{x > 7 \to x > 3}{x > 7 \to \forall x (x > 3)}.$$

Pastebėkime, kad y gali būti ir lygus x. Taisyklė $(\forall)$ atskiru atveju, kai nėra formulės B, užrašoma taip:

$$(\forall)\ \frac{A(y)}{\forall x A(x)}.$$

6.8 apibrėžimas. *Formulės F išvedimu iš formulių aibės Γ vadiname baigtinę seką $F_1, \ldots, F_n$, kuri baigiasi formule $F_n = F$, o kiekvienas sekos narys yra aksioma, prielaida (t.y. priklauso Γ) arba gaunama iš kairėje nuo jo esančių formulių pagal kurią nors* (MP), $(\forall)$ *ar* $(\exists)$ *taisyklę.*

Įrodyta, kad *formulė F tapačiai teisinga tada ir tiktai tada, kai ji išvedama Hilberto tipo predikatų skaičiavime.*

Pavyzdys. Įrodykime, kad nagrinėjamajame predikatų skaičiavime iš $\forall x \forall y A(x, y)$ išvedama formulė $\forall y \forall x A(x, y)$:

$\forall x \forall y A(x, y)$ (prielaida),
$\forall x \forall y A(x, y) \to \forall y A(x, y)$ (5.1 aksioma),
$\forall y A(x, y)$ (pagal (MP) taisyklę),
$\forall y A(x, y) \to A(x, y)$ (5.1 aksioma),
$A(x, y)$ (pagal (MP) taisyklę),
$\forall x A(x, y)$ (pagal ($\forall$) taisyklę),
$\forall y \forall x A(x, y)$ (pagal ($\forall$) taisyklę).

6.2 teorema. *Hilberto tipo predikatų skaičiavimas nėra prieštaringas.*

Įrodymas. Kiekvieną predikatų logikos formulę transformuokime į teiginių logikos, naudodamiesi operatoriumi $\mathrm{Tr}(P(t_1, \dots, t_n)) = P$, t.y. atominei formulei priskiriamas loginis kintamasis vardu P:

$$\mathrm{Tr}(\neg A) = \neg \mathrm{Tr}(A),$$
$$\mathrm{Tr}(A \& B) = \mathrm{Tr}(A) \& \mathrm{Tr}(B),$$
$$\mathrm{Tr}(A \vee B) = \mathrm{Tr}(A) \vee \mathrm{Tr}(B),$$
$$\mathrm{Tr}(A \to B) = \mathrm{Tr}(A) \to \mathrm{Tr}(B),$$
$$\mathrm{Tr}(\forall x A(x)) = \mathrm{Tr}(A(x)),$$
$$\mathrm{Tr}(\exists x A(x)) = \mathrm{Tr}(A(x)).$$

Jei F yra aksioma, tai transformavus ją į teiginių logiką, gaunama tapačiai teisinga formulė.

Jei transformacija F yra tapačiai teisinga formulė ir G gauta iš F pagal taisyklę ($\forall$) ar ($\exists$), tai transformavus G į teiginių logiką, gaunama taip pat tapačiai teisinga formulė, nes jų abiejų transformacijos sutampa.

Jei transformacijos A ir $A \to B$ yra tapačiai teisingos formulės, tai tokia yra ir transformacija B.

Taigi jei kuri nors formulė F išvedama Hilberto tipo predikatų skaičiavime, tai jos transformacija yra tapačiai teisinga formulė. Todėl $\neg F$ negali būti išvedama, nes jos transformacija nėra tapačiai teisinga (ji lygi $\neg \mathrm{Tr}(F)$). Teorema įrodyta.

Pastebėkime, kad dedukcijos teorema predikatų skaičiavimo atveju negalioja. Iš prielaidos $A(x)$ išvedama formulė $\forall x A(x)$ tokiu būdu:

$A(x)$ (prielaida),
$\forall x A(x)$ (pagal taisyklę ($\forall$)).

Predikatų skaičiavime $A(x) \to \forall x A(x)$ neišvedama, nes tai nėra tapačiai teisinga formulė. Struktūroje, kurios aibė yra $\{a, b\}$, $A(x)$ keičiamas predikatu $A_0(a) = t$, $A_0(b) = k$, o laisvasis kintamasis – elementu a, gaunamas klaidingas tvirtinimas $A_0(a) \to \forall x A_0(x)$. Dedukcijos teorema teisinga formulėms su tam tikrais apribojimais, pavyzdžiui, kai jos yra uždaros.

6.3 Sekvencinis skaičiavimas

6.9 apibrėžimas. *Sekvencija vadiname reiškinį pavidalo* $F_1, \ldots, F_n \vdash G_1, \ldots, G_m$; *čia* F_i $(i = 1, \ldots, n)$ *ir* G_i $(i = 1, \ldots, m)$ *yra formulės.*

Sekvencijos apibrėžimas toks pat kaip ir 4.4 skyrelyje. Tik šiuo atveju formulės yra bendresnio pavidalo – jos yra predikatų logikos formulės.

Kaip ir anksčiau, raidėmis $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$ žymime baigtines formulių sekas. Jos gali būti ir tuščios. Nagrinėsime tik sekvencijas, kuriose yra bent viena formulė.

Vokiečių logikas G. Gentzen 1930 m. aprašė vadinamąjį sekvencinį skaičiavimą, kuriame išvedimo paieška daugeliu atvejų paprastesnė negu Hilberto tipo skaičiavime.

Aksiomos: $F \vdash F$.

Struktūrinės taisyklės:

$$\text{(silpninimas)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{F, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, F},$$

$$\text{(prastinimas)} \qquad \frac{F, F, \Gamma \vdash \Delta}{F, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F, F}{\Gamma \vdash \Delta, F},$$

$$\text{(perstatymas)} \qquad \frac{\Gamma_1, F, G, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, G, F, \Gamma_2 \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, F, G, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, G, F, \Delta_2}.$$

Loginių operacijų taisyklės:

$$(\neg \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\neg F, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad (\vdash \neg) \quad \frac{F, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F},$$

$$(\& \vdash) \quad \frac{F, G, \Gamma \vdash \Delta}{F \& G, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad (\vdash \&) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \& G},$$

$$(\vee\vdash)\ \frac{F,\Gamma\vdash\Delta \quad G,\Gamma\vdash\Delta}{F\vee G,\Gamma\vdash\Delta}, \qquad (\vdash\vee)\ \frac{\Gamma\vdash\Delta,F,G}{\Gamma\vdash,\Delta,F\vee G},$$

$$(\to\vdash)\ \frac{\Gamma\vdash\Delta,F \quad G,\Gamma\vdash\Delta}{F\to G,\Gamma\vdash\Delta}, \qquad (\vdash\to)\ \frac{F,\Gamma\vdash\Delta,G}{\Gamma\vdash\Delta,F\to G}.$$

Pjūvio taisyklė:

$$\frac{\Gamma_1\vdash\Delta_1,F \quad F,\Gamma_2\vdash\Delta_2}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta_1,\Delta_2}.$$

Kvantorinės taisyklės:

$$(\exists\vdash)\ \frac{F(z),\Gamma\vdash\Delta}{\exists xF(x),\Gamma\vdash\Delta}, \qquad (\vdash\exists)\ \frac{\Gamma\vdash\Delta,F(t),\exists xF(x)}{\Gamma\vdash\Delta\exists xF(x)},$$

$$(\forall\vdash)\ \frac{F(t),\forall xF(x),\Gamma\vdash\Delta}{\forall xF(x),\Gamma\vdash\Delta}, \qquad (\vdash\forall)\ \frac{\Gamma\vdash\Delta,F(z)}{\Gamma\vdash\Delta\forall xF(x)}.$$

Čia z yra naujas kintamasis, neįeinantis į Γ, $\Delta, \exists xF(x)$ arba $\forall xF(x)$, t – termas, laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje $F(x)$.

Primename, kad sekvencijoje $\Gamma\vdash\Delta$ seka Γ vadinama ***antecedentu***, o Δ – ***sukcedentu***. Sakoma: formulė F priklauso sekvencijos antecedentui, jei ji yra sekoje Γ; formulė priklauso sukcedentui, jei ji yra sekoje Δ.

6.10 apibrėžimas. *Medžio pavidalo orientuotą grafą, kurio visos viršūnės pažymėtos sekvencijomis (šaknis – pradinė sekvencija) ir kiekviena viršūnė (išskyrus lapus) gauta iš tiesiogiai virš jos esančių (gretimų) sekvencijų, pritaikius kurią nors sekvencinio skaičiavimo taisyklę, vadiname* ***išvedimo paieškos medžiu.***

Jei visos medžio galinės viršūnės, t.y. lapai, yra aksiomos, tai medis vadinamas ***sekvencijos****, kuria pažymėta šaknis,* ***išvedimu.***

Visose loginių operacijų ir kvantorinėse taisyklėse formulių įeitys skirstomos į *centrines, šonines* bei *parametrines*. Pavyzdžiui, taisyklėje ($\vdash$ &), kurioje $F\&G$ yra centrinės formulės įeitis, F, G – šoninės, formulės, priklausančios Γ, Δ, vadinamos parametrinėmis. Taisyklėje ($\vdash\exists$), kurioje $\exists xF(x)$ yra centrinės formulės įeitis, $F(t)$ – šoninės, formulės, priklausančios Γ, Δ, vadinamos parametrinėmis.

Kaip ir anksčiau, išvedimo medyje žymime tik medžio viršūnes. Lanką atitinka brūkšnys. Primename, kad grafas orientuotas, kryptis – iš apačios į viršų.

Pavyzdžiai:

1. Parodykime, kad sekvencija $F\&G, \neg H \vdash (\neg F \lor \neg G) \to H$ išvedama nagrinėjamajame skaičiavime:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \vdash F}{F \vdash F, H}}{F \vdash H, F}}{\neg H, F \vdash H, F}}{F, \neg H \vdash H, F}}{G, F, \neg H \vdash H, F}}{F, G, \neg H \vdash H, F}}{\neg F, F, G, \neg H \vdash H}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{G \vdash G}{G \vdash G, H}}{G \vdash H, G}}{\neg H, G \vdash H, G}}{G, \neg H \vdash H, G}}{F, G, \neg H \vdash H, G}}{\neg G, F, G, \neg H \vdash H}}{\neg F \lor \neg G, F, G, \neg H \vdash H}}{F, G, \neg H \vdash (\neg F \lor \neg G) \to H}}{F\&G, \neg H \vdash (\neg F \lor \neg G) \to H}.
$$

2. Sekvencija $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)$ taip pat išvedama:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a, b) \vdash A(a, b)}{A(a, b) \vdash A(a, b), \exists x A(x, b)}}{\forall y A(a, y), A(a, b) \vdash A(a, b), \exists x A(x, b)}}{A(a, b), \forall y A(a, y) \vdash A(a, b), \exists x A(x, b)}}{A(a, b), \forall y A(a, y) \vdash \exists x A(x, b)}}{\forall y A(a, y) \vdash \exists x A(x, b)}}{\forall y A(a, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)}}{\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)}}{\vdash \exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)}.
$$

Vokiečių logikas G. Gentzen įrodė Hilberto ir sekvencinio skaičiavimų ekvivalentumą. Iš įrodymo išplaukia teorema:

6.3 teorema. *Predikatų logikos formulė F tapačiai teisinga tada ir tiktai tada, kai $\vdash F$ išvedama sekvenciniame skaičiavime.*

Loginių operacijų taisyklių prielaidos gaunamos skaidant kurią nors išvados formulę į poformulius, t.y. prielaidos formulės yra tik išvados formulės ar jų poformuliai. Kiekvienoje prielaidoje loginių operacijų skaičius vienetu mažesnis negu išvadoje. Todėl po baigtinio skaičiaus taisyklių taikymo sekvencijai, kurioje yra tik teiginių logikos formulės, gaunama sekvencija, kurioje yra tik loginiai kintamieji. Be to, tos taisyklės tenkina vadinamąją *apverčiamumo savybę*, t.y. *visos loginių operacijų bet kurios taisyklės prielaidos išvedamos tada ir tiktai* tada, kai išvedama išvada. Daugelio formulių išvedimo paieška gaunama *eksponentinio sprogimo* pavidalu. Išvedant vieną sekvenciją pagal kai kurias taisykles reikia tikrinti dviejų sekvencijų išvedimą. Daugelio sekvencijų išvedimą sunku praktiškai realizuoti, nes tam reikalingų išvesti sekvencijų skaičius sparčiai auga. Be to, atliekama daug nereikalingų žingsnių.

Pjūvio taisyklės prielaidose atsiranda formulės, kurių išvadoje gali ir nebūti. Pasirodo, be tos taisyklės galima apsieiti, t.y. teisingas tvirtinimas (jis dar vadinamas *pagrindine Gentzeno teorema*).

Gentzeno teorema. *Kad ir kokia būtų sekvencija $\Gamma \vdash \Delta$, kurioje laisvieji ir suvaržytieji individiniai kintamieji pažymėti skirtingais simboliais, ji sekvenciniame skaičiavime išvedama tada ir tiktai tada, kai išvedama skaičiavime be pjūvio taisyklės.*

Vienas dažniausiai logikos taikymuose pasitaikantis predikatas yra *lygybės*. *Sekvencinis skaičiavimas su lygybės predikatu* (žymimas $G^{=}$) nuo aprašytojo skiriasi tuo, kad aksiomų sąrašas papildomas *aksiomomis* $\vdash t = t$.

Taisyklių sąrašas papildomas naujomis taisyklėmis:

$$\frac{t_1 = t_2, [\Gamma]^{t_1}_{t_2} \vdash [\Delta]^{t_1}_{t_2}}{t_1 = t_2, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad \frac{t_1 = t_2, [\Gamma]^{t_2}_{t_1} \vdash [\Delta]^{t_2}_{t_1}}{t_1 = t_2, \Gamma \vdash \Delta};$$

čia $[\Gamma]^{t_1}_{t_2}$ žymime formulių seką, kurioje visų termų t_1 įeitys pakeistos termu t_2 (analogiškai $[\Delta]^{t_1}_{t_2}, [\Gamma]^{t_2}_{t_1}, [\Delta]^{t_2}_{t_1}$).

Raide G žymime sekvencinį skaičiavimą (žr. 4.4 skyrelį), kuris nuo aukščiau aprašytojo skiriasi tuo, kad jame nėra pjūvio bei struktūrinių taisyklių, o aksiomos atrodo šitaip:

$$\Gamma_1, F, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, F, \Delta_2.$$

Taisyklės panašios į ankstesniąsias, tik centrinė formulė nebūtinai pirmoji iš kairės yra antecedente arba paskutinė – sukcedente. Pavyzdžiui, taisyklė ($\vdash \&$) skaičiavime G yra tokia:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, F, \Delta_2 \quad \Gamma \vdash \Delta_1, G, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, F\&G, \Delta_2}.$$

Nesunku matyti, kad abu skaičiavimai ekvivalentūs, t.y. kad ir kokia būtų sekvencija, ji ankstesniame skaičiavime išvedama tada ir tiktai tada, kai išvedama skaičiavime G.

Kintamuosius, kurių reikšmės yra kurios nors individinės konstantos, žymime raidėmis $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots$. Tik tokie laisvieji kintamieji aptinkami nagrinėjamuose sekvencijų išvedimuose. Suvaržytuosius kintamuosius žymime $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$, t.y. laisvieji ir suvaržytieji kintamieji žymimi skirtingomis raidėmis. Termo įeitis vadinama *pagrindine*, jei jame nėra suvaržytųjų kintamųjų įeičių.

6.11 apibrėžimas. *Sekvencinis skaičiavimas vadinamas* ***minus-normaliuoju***, *jei termas t taisyklėse* ($\vdash \exists$), ($\forall \vdash$) *yra pagrindinis, įeinantis į kurią nors išvados formulę; jei išvadoje nėra pagrindinių termų, tai t yra kuri nors nauja konstanta a.*

Sekvencinių skaičiavimų ekvivalentumą 1963 m. įrodė švedų logikas S. Kanger. Mes ekvivalentumą įrodysime tik tuo atveju, kai formulėse nėra funkcinių simbolių. Kai kalbama apie formules be funkcinių simbolių, suprantama, kad į jas neįeina i-viečiai funkciniai simboliai su $i \geqslant 1$.

6.4 teorema. *Tarkime,* Γ, Δ *yra baigtinės formulių be funkcinių simbolių sekos.* $\Gamma \vdash \Delta$ *išvedama skaičiavime G tada ir tiktai tada, kai ji išvedama minus-normaliajame G.*

Įrodymas. Jei $\Gamma \vdash \Delta$ išvedama minus-normaliajame G, tai ji išvedama ir skaičiavime G. Tereikia parodyti, kad jei $\Gamma \vdash \Delta$ išvedama skaičiavime G, tai galime rasti jos išvedimą ir minus-normaliajame G. Šiuo atveju į išvedimo medį žiūrėsime kaip į neorientuotą medžio pavidalo grafą. Pervardijant galima pasiekti, kad taikant kiekvieną taisyklę ($\vdash \forall$), ($\exists \vdash$) laisvųjų kintamųjų neatsirastų ne tik taikymo išvadoje, bet ir išvedimo medyje, esančiame nuo nagrinėjamojo taikymo iki šaknies.

Leidžiamės kuria nors šaka žemyn nuo aksiomų link šaknies. Tarkime, radome pirmą taisyklės ($\vdash \exists$) taikymą, kuris netenkina minus-normalumo sąlygos (arba $\forall \vdash$, šiuo atveju samprotavimai būtų analogiški):

$$\cfrac{\cfrac{M}{\Gamma \vdash \Delta_1, A(a_i), \exists x_j A(x_j), \Delta_2}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \exists x_j A(x_j), \Delta_2}$$

$$\ldots$$

Virš sekvencijos $\Gamma \vdash \Delta_1, A(a_i), \exists x_j A(x_j), \Delta_2$ esantį išvedimo medį pažymėkime raide M. Viršutinėje sekvencijoje ir visur medyje M pakeiskime a_i kuria nors konstanta (pažymėkime ją a), įeinančia į taisyklės taikymo apatinę sekvenciją. Jei apatinėje sekvencijoje konstantų nėra, tai a yra kuri nors naujoji konstanta, neaptinkama medyje M.

Parodysime, kad po pakeitimo gautasis medis išlieka išvedimo medžiu, t.y.:

a) kvantorinių taisyklių taikymai tenkina jiems keliamus reikalavimus,

b) aksiomos ir po pakeitimo išlieka aksiomomis.

Visi taisyklių ($\vdash \forall$), ($\exists \vdash$) taikymai tenkina tuos pačius apribojimus ir medyje M, nes individiniai kintamieji, taikant tas taisykles, pakeisti kintamaisiais, skirtingais nuo esamų nagrinėjamoje sekvencijoje. Visi taisyklių ($\vdash \exists$), ($\forall \vdash$) taikymai taip pat tenkina tuos pačius apribojimus, nes laisvųjų ir suvaržytųjų kintamųjų vardai skirtingi, todėl a yra laisvas atžvilgiu individinio kintamojo, kurį pakeitėme nagrinėjamose formulėse. Jei kuri nors sekvencija buvo aksioma, tai ji liks ir po pakeitimo, nes keitėme visas a_i įeitis.

Gautajame išvedimo medyje taisyklės ($\vdash \exists$) (arba ($\forall \vdash$)) taikymų, netenkinančių minus-normalumo, yra vienu mažiau. Tarkime, kad pradiniame medyje tokių taikymų yra n. Pritaikę n kartų aprašytąją vienų kintamųjų keitimo kitais procedūrą, gauname minus-normalųjį pradinės sekvencijos išvedimą skaičiavime G. Teorema įrodyta.

6.5 teorema. *Formulių klasė be funkcinių simbolių su prefiksu $\forall^{\infty}\exists^{\infty}$ yra išsprendžiama pagal išvedamumą.*

Įrodymas. Tarkime, F yra kuri nors formulė be funkcinių simbolių pavidalo

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m \exists x_1 \ldots \exists x_n M(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n);$$

čia $M(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ – bekvantorė formulė ir $b_1, b_2, \ldots, b_s$ – pilnas formulėje F sąrašas laisvųjų kintamųjų. Iš 6.4 teoremos išplaukia, jei $\vdash F$ išvedama, tai galima rasti jos išvedimą ir minus-normaliajame G. Pritaikę taisyklę ($\vdash \forall$) (*tik ją ir tegalime taikyti nagrinėjamosios formulės atžvilgiu*) m kartų, gauname sekvenciją pavidalo $\vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n M(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n)$; čia a_i ($i = 1, \ldots, m$) yra tarpusavyje skirtingi ir nelygūs b_i ($i = 1, \ldots, s$) laisvieji kintamieji, kuriais pakeitėme y_i. Aukščiau medyje tegalėsime taikyti taisyklę ($\vdash \exists$) ir loginių operacijų taisykles. Kadangi taikant ($\vdash \exists$) kintamuosius x_i galima pakeisti tik kuriais nors iš $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_s\}$, tai skirtingų išvedimo paieškos medžių tėra baigtinis skaičius. Jei tarp jų bus bent vienas išvedimo medis, tai $\vdash F$ išvedama, jei ne, tai $\vdash F$ nėra išvedama. Teorema įrodyta.

Pateikiame vieną išsprendžiamą ir dvi neišsprendžiamas klases formulių su funkciniais simboliais.

Maksimalios išsprendžiamos klasės	Minimalios neišsprendžiamos klasės
$\Pi(pred\colon \infty; funkc\colon \infty)$	$\exists\exists(pred\colon 0, 1; funkc\colon 1)$
	$\exists\exists(pred\colon 1; funkc\colon 0, 1)$

Klasės išsprendžiamumą 1969 m. įrodė amerikiečių logikas Y. Gurevich. Formulės yra normaliosios priešdėlinės formos. Reiškiniu $pred\colon \infty;\ funkc\colon \infty$

žymime formules, kurių matricose gali būti bet koks skaičius vienviečių predikatinių ir vienviečių funkcinių kintamųjų. Reiškiniu *pred*: a, b žymime formules, kuriose yra a vienviečių predikatinių kintamųjų ir b — dviviečių predikatinių kintamųjų. Panašiai suprantame ir žymėjimą *funkc*: a, b. Raide Π žymime bet kurį prefiksą.

Pateikiame normaliosios priešdėlinės formos su lygybės predikatu formulių klasifikaciją (nurodomi reikalavimai prefiksui ir matricai) pagal įrodomumą.

Maksimalios išsprendžiamos klasės su lygybės predikatu	Minimalios neišsprendžiamos klasės su lygybės predikatu
$\Pi(=;\ pred\colon \infty;\ funkc\colon 1)$	$\exists\exists\forall(=,\ pred\colon \infty, 1)$
$\forall^*(=;\ pred\colon bet\ kurie;$ $funkc\colon bet\ kurie)$	$\exists\exists\forall(=;\ pred\colon 0, 1;$ $konstantos\colon \infty)$
$\forall^*\exists\forall^*(=;\ pred\colon bet\ kurie;\ funkc\colon 1)$	$\exists\exists\forall^*(=;\ pred\colon 0, 1)$
$\forall^*\exists^*(=;\ pred\colon bet\ kurie;$ $konstantos\colon \infty)$	$\forall^*\exists\exists\forall(=;\ pred\colon 0, 1)$
	$\exists(=;\ funkc\colon 2)$
	$\exists(=;\ funkc\colon 0, 1)$

Pavyzdžiui, reiškiniu $\Pi(=;\ pred\colon \infty;\ funkc\colon 1)$ pažymėta klasė formulių normaliosios priešdėlinės formos su bet kokiu prefiksu, o matricoje gali būti lygybės predikatas, bet kuris skaičius vienviečių predikatinių kintamųjų ir vienas vienvietis funkcinis simbolis.

6.4 Intuicionistinė logika

6.6 teorema. *Egzistuoja du tokie iracionalieji a, b, kad a^b yra racionalusis skaičius.*

Įrodymas. Tarkime, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ yra racionalusis skaičius. Tuomet pasirinkę $a = b = \sqrt{2}$, gauname, kad $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ yra racionalusis skaičius, o a, b — iracionalieji. Priešingu atveju, jei $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ yra iracionalus, imkime $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, o $b = \sqrt{2}$. Tada $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, t.y. a^b yra racionalusis skaičius. Teorema įrodyta.

Tai kam vis dėlto lygūs a ir b? Nors ir įrodėme egzistavimą tokių skaičių, bet kam jie lygūs, nežinome. Toks įrodymas vadinamas *nekonstruktyviuoju įrodymu*. Įrodoma, kad egzistuoja koks nors objektas, bet iš įrodymo neišplaukia algoritmas, kaip jį rasti. Teoremos 6.6 atveju galima rasti kitą, konstruktyvų jos įrodymą. Jis yra daug ilgesnis ir kur kas sudėtingesnis. Įrodyta, kad $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$.

Bet, pasirodo, ne visoms žinomoms matematikoje teoremoms galima rasti kitus, konstruktyvius įrodymus. Palyginkime dvi teoremas. Viena jų gerai žinoma matematikams.

Teorema. *Iš kiekvienos aprėžtos skaičių sekos galima išrinkti konverguojantį posekį.*

Teorema. *Nėra algoritmo, kuriuo iš bet kurios aprėžtos skaičių sekos galėtume išrinkti konverguojantį posekį.*

Norint turėti kitą, *konstruktyvią matematiką*, t.y. tokią, kurioje įrodžius, kad egzistuoja kurie nors objektai, galima būtų remiantis įrodymu juos rasti, reikalinga *kita logika*. Ji vadinama ***intuicionistine logika***. Ją 1930 m. sukūrė olandų logikas A. Heyting. Joje teisingi tik tokie logikos dėsniai, kuriais naudojantis galimi tik konstruktyvūs matematiniai įrodymai.

Hilberto intuicionistinis skaičiavimas nuo klasikinio skiriasi tiktai tuo, kad 4.3 aksioma $\neg\neg A \to A$ pakeista nauja – $\neg A \to (A \to B)$.

Intuicionistinė natūralioji dedukcija nuo klasikinės skiriasi tik tuo, kad iš taisyklių sąrašo išbraukta

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}.$$

Yra keletas intuicionistinio sekvencijų skaičiavimo variantų. Pateiksime vieną jų, kai sukcedente gali būti ne daugiau kaip viena formulė.

Intuicionistinis sekvencinis skaičiavimas. *Aksiomos:* $F \vdash F$.

Struktūrinės taisyklės:

$$\text{(silpninimas)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{F, \Gamma \vdash \Delta}, \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash F},$$

$$\text{(prastinimas)} \quad \frac{F, F, \Gamma \vdash \Delta}{F, \Gamma \vdash \Delta},$$

$$\text{(perstatymas)} \quad \frac{\Gamma_1, F, G, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, G, F, \Gamma_2 \vdash \Delta}.$$

Taisyklės loginėms operacijoms:

$$(\neg\vdash)\quad \frac{\Gamma\vdash F}{\neg F,\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\neg)\quad \frac{F,\Gamma\vdash}{\Gamma\vdash\neg F},$$

$$(\&\vdash)\quad \frac{F,G,\Gamma\vdash\Delta}{F\&G,\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\&)\quad \frac{\Gamma\vdash F\quad \Gamma\vdash G}{\Gamma\vdash F\&G},$$

$$(\vee\vdash)\quad \frac{F,\Gamma\vdash\Delta\quad G,\Gamma\vdash\Delta}{F\vee G,\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\vee)\quad \frac{\Gamma\vdash F}{\Gamma\vdash F\vee G}\ \text{arba}\ \frac{\Gamma\vdash G}{\Gamma\vdash F\vee G},$$

$$(\rightarrow\vdash)\quad \frac{\Gamma\vdash F\quad G,\Gamma\vdash\Delta}{F\rightarrow G,\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\rightarrow)\quad \frac{F,\Gamma\vdash G}{\Gamma\vdash F\rightarrow G}.$$

Kvantorinės taisyklės:

$$(\exists\vdash)\quad \frac{F(z),\Gamma\vdash\Delta}{\exists xF(x),\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\exists)\quad \frac{\Gamma\vdash F(t)}{\Gamma\vdash\exists xF(x)},$$

$$(\forall\vdash)\quad \frac{F(t),\Gamma\vdash\Delta}{\forall xF(x),\Gamma\vdash\Delta},\qquad (\vdash\forall)\quad \frac{\Gamma\vdash F(z)}{\Gamma\vdash\forall xF(x)}.$$

Kintamasis z bei termas t tenkina tuos pačius reikalavimus kaip ir klasikinio sekvencinio skaičiavimo atveju.

Pjūvio taisyklė:

$$\frac{\Gamma_1\vdash F\quad F,\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash\Delta}.$$

Sekvencija $\vdash F\vee\neg F$ intuicionistiniame skaičiavime neišvedama (jei neišvedamos $\vdash F$ ir $\vdash\neg F$), nes jos prielaidomis gali būti tik viena sekvencijų $\vdash F$, $\vdash\neg F$.

Pavyzdžiai. Sekvencijų $\vdash\neg(F\&\neg F)$ ir $\vdash\neg\neg\neg F\rightarrow\neg F$ išvedimai:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\vdash F}{F,\neg F\vdash}}{F\&\neg F\vdash}}{\vdash\neg(F\&\neg F)},\qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\vdash F}{\neg F,F\vdash}}{F\vdash\neg\neg F}}{\neg\neg\neg F,F\vdash}}{\neg\neg\neg F\vdash\neg F}}{\vdash\neg\neg\neg F\rightarrow\neg F}.$$

Intuicionistiniame skaičiavime sekvencija $\vdash \neg\neg F \to F$ neišvedama, o $\vdash F \to \neg\neg F$ išvedama.

Intuicionistinėje logikoje teisingi teiginiai:

1. Jei kuri nors sekvencija $\Gamma \vdash \Delta$ išvedama intuicionistiniame skaičiavime, tai ji išvedama ir klasikiniame skaičiavime.

2. Kiekviena sekvencija išvedama intuicionistiniame skaičiavime tada ir tiktai tada, kai ji išvedama intuicionistiniame skaičiavime be pjūvio taisyklės.

Kaip matyti iš kito pavyzdžio, prastinimo taisyklė būtina intuicionistiniame skaičiavime. Be jos sekvencija $\vdash \neg\neg(F \vee \neg F)$ neišvedama. Nes skaičiavime be pjūvio ir prastinimo taisyklių tėra tik tokie galimi išvedimo paieškos medžiai:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash F \quad \text{arba} \quad \cfrac{F \vdash}{\vdash \neg F}}{\vdash F \vee \neg F}}{\neg(F \vee \neg F) \vdash}}{\vdash \neg\neg(F \vee \neg F)}.$$

Turint prastinimo taisyklę, ji išvedama:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F \vdash F}{F \vdash F \vee \neg F}}{\neg(F \vee \neg F), F \vdash}}{F, \neg(F \vee \neg F) \vdash}}{\neg(F \vee \neg F) \vdash \neg F}}{\neg(F \vee \neg F) \vdash F \vee \neg F}}{\neg(F \vee \neg F), \neg(F \vee \neg F) \vdash}}{\neg(F \vee \neg F) \vdash}}{\vdash \neg\neg(F \vee \neg F)}.$$

Matematikoje dažnai konstruktyvumas prarandamas įrodant prieštaros būdu. Tariame, kad $\neg F$ (norėdami įrodyti F), įrodome $\neg\neg F$ ir darome išvadą, kad įrodėme F. Intuicionistinėje logikoje teiginiai F, $\neg\neg F$ turi skirtingą prasmę.

6.5 Kompaktiškumas

Šiame skyrelyje nagrinėsime tik teiginių logikos formulių aibes. Sakysime, kad formulėse loginiai kintamieji yra tik iš sąrašo $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, o loginės operacijos — $\neg, \&, \vee, \to$. Tarkime, $h(x)$ yra kuri nors interpretacija, t.y. funkcija, kurios apibrėžimo aibė yra P, o reikšmių aibė — $\{t, k\}$. Turėdami h, vienareikšmiškai galime nustatyti bet kurios formulės F reikšmę. Ją žymime $h(F)$.

6.12 apibrėžimas. *Formulių aibė vadinama* ***baigiai įvykdoma****, jei įvykdomas kiekvienas jos baigtinis poaibis.*

6.13 apibrėžimas. *Baigiai įvykdomų formulių* ***aibė*** *T yra* ***maksimali****, nesvarbu, kokia būtų formulė F, arba $F \in T$, arba $\neg F \in T$.*

6.7 teorema. *Egzistuoja interpretacijų ir maksimalių aibių abipusiškai vienareikšmė atitiktis.*

Įrodymas. Kiekvienai interpretacijai h priskiriame formulių aibę $\Sigma_h = \{F\colon h(F) = t\}$. Aišku, kad ji maksimali, nes kad ir kokia būtų formulė F, arba $h(F) = t$, arba $h(\neg F) = \neg h(F) = t$.

Kiekvienai maksimaliai (pagal apibrėžimą ji ir baigiai įvykdoma) aibei Σ priskiriame tokią interpretaciją: nors ir koks būtų p_i, $h(p_i) = t$ tada ir tiktai tada, kai $p_i \in \Sigma$.

Taikydami indukciją pagal loginių operacijų skaičių (žymėsime jį l) įrodysime, kad $\Sigma = \Sigma_h$, t.y. nesvarbu, kokia yra formulė F, $F \in \Sigma$ tada ir tiktai tada, kai $h(F) = t$.

Kai $l = 0$, teorema teisinga, nes taip jau apibrėžėme h. Tarkime, teorema teisinga, kai $l \leqslant m$. Parodysime, kad ji teisinga ir kai $l = m + 1$. Taigi formulėje F yra $(m + 1)$ loginių operacijų ir norime parodyti, kad $F \in \Sigma$ tada ir tiktai tada, kai $h(F) = t$. Formulės F pagrindine logine operacija gali būti $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$.

Tarkime, $F = \neg G$. Jei $\neg G \in \Sigma$, tai $G \notin \Sigma$, nes aibė yra maksimali. Formulėje G yra m loginių operacijų, todėl pagal indukcijos prielaidą $h(G) = k$, o iš čia $h(\neg G) = \neg h(G) = t$.

Jei $\neg G \notin \Sigma$, tai $G \in \Sigma$ (aibė juk maksimali). Pagal indukcijos prielaidą $h(G) = t$ ir todėl $h(\neg G) = \neg h(G) = k$.

Tarkime, $F = G\&H$. Jei $G\&H \in \Sigma$, tai $G \in \Sigma$ ir $H \in \Sigma$, nes jei kuri nors viena (pavyzdžiui, G) nepriklausytų, tai $\neg G$ priklausytų ir $\{G\&H, \neg G\}$ turėtų būti įvykdoma kaip baigtinis aibės poaibis. Tai yra neįmanoma. Pagal indukcijos prielaidą $h(G) = h(H) = t$ ir kartu $h(G\&H) = t$.

Jei $G\&H \notin \Sigma$, tai bent viena iš G, H taip pat nepriklauso Σ, nes jei abi priklausytų Σ, tai turėtų būti interpretacija, su kuria $\{G, H, \neg(G\&H)\}$ įvykdoma. Pagal indukcijos prielaidą bent viena iš G, H yra klaidinga su interpretacija h, o todėl ir $G\&H$ klaidinga su ta pačia interpretacija.

Panašiai nagrinėjami ir atvejai, kai formulės pagrindinė operacija yra $\vee$ arba $\rightarrow$. Teorema įrodyta.

6.8 teorema (kompaktiškumo). *Formulių aibė T įvykdoma tada ir tiktai tada, kai ji baigiai įvykdoma.*

Įrodymas. Jei formulių aibė T įvykdoma, tai, aišku, ji ir baigiai įvykdoma. Tarkime, kad T baigiai įvykdoma. Parodysime, kad ji įvykdoma. Pastebėsime, kad T nebūtinai sutampa su kuria nors Σ_h, nors ir yra begalinė. Pavyzdžiui, aibė $\{p_1, p_1\&p_2, p_1\&p_2\&p_3, \ldots\}$.

Teoremą įrodyti pakanka rasti tokią maksimalią aibę Σ, kad $T \subset \Sigma$, nes tuomet, remiantis 6.7 teorema, atsiras tokia interpretacija h, kad $\Sigma = \Sigma_h$. Su ta pačia interpretacija h bus teisingos ir visos T formulės, t.y. T įvykdoma. Visų formulių aibė yra skaičioji. Tarkime, sekoje $F_1, F_2, F_3, \ldots$ aptinkama bet kuri nagrinėjamojo pavidalo formulė ir tiktai vieną kartą. Aibes apibrėžiame tokiu būdu:

$$T_0 = T,$$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{F_n\}, & \text{jei ji baigiai įvykdoma,} \\ T_n \cup \{\neg F_n\} & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Parodysime, kad bent viena iš aibių $T_n \cup \{F_n\}$, $T_n \cup \{\neg F_n\}$ baigiai įvykdoma, jei tokia yra T_n. Jei jos abi nebūtų baigiai įvykdomos, tai atsirastų jų baigtiniai neįvykdomi poaibiai:

$$A = \{G_1, \ldots, G_r, F_n\}, \qquad B = \{H_1, \ldots, H_s, \neg F_n\}.$$

Tai reikštų, kad jau T_n nebuvo baigiai įvykdoma, nes $\{G_1, \ldots, G_r, H_1, \ldots, H_s\}$ yra T_n poaibis ir nėra įvykdomas. Iš tikrųjų, jei jis įvykdomas, t.y. yra tokia interpretacija g, kad

$$g(G_1) = \cdots = g(G_n) = g(H_1) = \cdots = g(H_s) = t,$$

tai su ta pačia interpretacija įvykdoma ir bent viena iš aibių A, B. Ieškomoji Σ ir yra $\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Aibė $T \subset \Sigma$ ir, be to, Σ yra maksimali. Teorema įrodyta.

Išvada. Jei begalinė formulių aibė prieštaringa, tai egzistuoja jos baigtinis prieštaringas poaibis.

6.6 Semantiniai medžiai

Nagrinėjame formules su funkciniais simboliais, bet be laisvųjų kintamųjų. Transformuojame į normaliąją priešdėlinę formą bei skulemizuojame.

Formulės F ***Herbrando universumas*** (sritis) nusakomas tokiu būdu:

1. Visos konstantos, priklausančios formulei F, priklauso ir universumui H. Jei formulėje F nėra konstantų, tai jai priklauso konstanta a.
2. Jei f^n yra n-vietis funkcinis simbolis, priklausantis F, ir $t_1, \ldots, t_n$ yra H elementai, tai $f(t_1, \ldots, t_n)$ taip pat priklauso universumui H.

Taigi kad ir kokia būtų formulė F, jos universumas H nėra tuščias. Jis gali būti baigtinis arba skaitusis.

Formulės F ***Herbrando bazę*** B sudaro visos tokios atominės formulės $P(t_1, \ldots, t_n)$, kuriose P^n yra n-vietis predikatinis kintamasis, priklausantis F, o $t_1, \ldots, t_n$ – kurie nors universumo H elementai.

Formulės F ***H-interpretacija*** vadiname aibę $\{\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2, \ldots\}$, kurioje $\alpha_i \in \{\neg, \emptyset\}$, o P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ yra visi aibės B elementai. Jei $\alpha_i = \neg$, tai laikome $P_i = k$, o jei $\alpha_i = \emptyset$, tai $P_i = t$.

Prancūzų logikas J. Herbrand 1930 m. įrodė teoremą.

Teorema. *Formulė F įvykdoma tada ir tiktai tada, kai ji įvykdoma aibėje H.*

Formulės F H-interpretacija vadinama ***modeliu***, jei F teisinga su ja.

Primename, kad nagrinėjame skulemizuotas formules, kurios prieš tai buvo transformuotos į normaliąją priešdėlinę formą. Tik tokioms formulėms galioja Herbrando teorema. Pavyzdžiui, formulė $P(a)\&\exists x \neg P(x)$ įvykdoma. Imkime individinių konstantų aibę $M = \{a, b\}$, o P apibrėžkime taip: $P(a) = t$, $P(b) = k$. Bet ji neturi H-modelio. $H = \{a\}$, $P(a) = t$ arba $P(a) = k$. Abiem atvejais formulė klaidinga.

Taigi nagrinėjame formules pavidalo $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; čia G – bekvantorė formulė. Remiantis Herbrando teorema, galima sakyti, kad individinių kintamųjų kitimo sritis yra aibė H. Nagrinėjame pagrindinių formulių aibę $T = \{G(t_1, \ldots, t_n)\colon t_1, \ldots, t_n \in H\}$. Ji baigtinė tik tuo atveju, kai formulėje nėra funkcinių simbolių. Pagal kompaktiškumo teoremos išvadą, aibė T nėra įvykdoma, t.y. prieštaringa tada ir tiktai tada, kai egzistuoja jos baigtinis neįvykdomas poaibis.

Visas galimas H-interpretacijas (jų ne daugiau kaip kontinuumas) vaizduosime medžiu. Tuo tikslu išrašome kokia nors tvarka nagrinėjamosios formulės bazės H elementus. Tarkime, tai $P_1, P_2, \ldots$. Medžio pavidalo grafą

$$\begin{array}{cccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\overline{P_3} & \overline{\neg P_3} & \overline{P_3} & \overline{\neg P_3} & \overline{P_3} & \overline{\neg P_3} & \overline{P_3} & \overline{\neg P_3} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{P_2} & \multicolumn{2}{c}{\neg P_2} & \multicolumn{2}{c}{P_2} & \multicolumn{2}{c}{\neg P_2} \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{P_1} & \multicolumn{4}{c}{\neg P_1} \\
\hline
\multicolumn{8}{c}{F}
\end{array}$$

vadiname ***semantiniu medžiu***.

Kiekvienas kelias (jis begalinis, kai H begalinė) atitinka kurią nors H-interpretaciją. Semantinis medis yra teisingumo lentelių teiginių logikos formulėms analogas. Jei formulė tapačiai klaidinga, tai remiantis kompaktiškumo teoremos išvada kiekviename kelyje, prasidedančiame formule F, yra toks k (jis priklauso nuo pasirinkto kelio), kad su interpretacija $\{\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2, \dots, \alpha_k P_k\}$ formulė klaidinga. Tuomet medyje nuvalome $\alpha_{k+1} P_{k+1}, \alpha_{k+2} P_{k+2}, \dots$, o virš viršūnės $\alpha_k P_k$ pažymime $\oplus$.

Semantinis medis transformuojamas į baigtinį tada ir tiktai tada, kai formulė tapačiai klaidinga.

Pavyzdžiai:

1. Raskime baigtinį semantinį formulės $\forall x(P(x, f(a))\&\neg P(x,x))$ medį.

Sprendimas. $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$, $B = \{P(a,a), P(a, f(a)), P(f(a), f(a)), \dots\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\oplus}{P(a,a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\oplus}{P(f(a),f(a))} \quad \dfrac{\oplus}{\neg P(f(a),f(a))}}{P(a,f(a))} \qquad \dfrac{\oplus}{\neg P(a,f(a))}}{\neg P(a,a)}}{F}.$$

2. Raskime formulės $\forall x(P(x)\&(\neg P(x) \vee Q(f(x)))\&\neg Q(f(a)))$ baigtinį semantinį medį.

Sprendimas. Čia $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$, $B = \{Q(a), P(a), Q(f(a)), P(f(a)), \dots\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\oplus}{Q(f(a))} \quad \dfrac{\oplus}{\neg Q(f(a))}}{P(a)} \qquad \dfrac{\oplus}{\neg P(a)}}{Q(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\oplus}{Q(f(a))} \quad \dfrac{\oplus}{\neg Q(f(a))}}{P(a)} \qquad \dfrac{\oplus}{\neg P(a)}}{\neg Q(a)}}{F}.$$

6.7 Rezoliucijų metodas

Nagrinėjame normaliosios priešdėlinės formos skulemizuotas formules F pavidalo $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n G(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Iš Herbrando teoremos išplaukia, kad F tapačiai klaidinga tada ir tiktai tada, kai aibė $A = \{G(t_1, \dots, t_n)\colon t_1, \dots, t_n \in H\}$ yra prieštaringa. Aibė A yra teiginių logikos formulių numeruojamoji aibė. Transformuojame $G(x_1, \dots, x_n)$ į normaliąją konjunkcinę formą. Tarkime,

$G(x_1, \dots, x_n) = \&_{i=1}^{s} D_i(x_1, \dots, x_n)$. Nagrinėjame teiginių logikos formulių aibę

$$K = \{D_i(t_1, \dots, t_n)\colon t_1, \dots, t_n \in H;\ i \in \{1, \dots, s\}\}. \qquad (6.1)$$

Ji prieštaringa tada ir tiktai tada, kai prieštaringa A. Remiantis kompaktiškumo teoremos išvada, aibė prieštaringa tada ir tiktai tada, kai egzistuoja jos baigtinis prieštaringas poaibis. Savo ruožtu baigtinė teiginių logikos formulių aibė prieštaringa tada ir tiktai tada, kai iš jos išvedamas tuščias disjunktas.

Taigi norėdami nustatyti, ar kuri nors uždara predikatų logikos formulė tapačiai klaidinga, atliekame tokius veiksmus:

1) transformuojame į normaliąją priešdėlinę formą,

2) skulemizuojame, išbraukiame bendrumo kvantorius,

3) randame Herbrando universumą H,

4) sudarome disjunktų aibę.

Tarkime, gautoji aibė $S = \{D_1(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, D_u(x_1^u, \dots, x_{n_u}^u)\}$. Prieštaringojo baigtinio poaibio ieškome taip.

Visus aibės $\{D_i(t_1^i, \dots, t_{n_i}^i)\colon t_1^i, \dots, t_{n_i}^i \in H;\ i \in \{1, \dots, u\}\}$ elementus (teiginių logikos formules) išrašome kuria nors tvarka (ji baigtinė arba skaičioji): $G_1, G_2, G_3, \dots$. Tikriname, ar iš $\{G_1, G_2\}$ išvedamas tuščias disjunktas. Jei taip, tai nagrinėjamoji formulė yra tapačiai klaidinga, jei ne, tai tikriname, ar iš $\{G_1, G_2, G_3\}$ išvedamas tuščias disjunktas. Formulė tapačiai klaidinga tada ir tiktai tada, kai yra toks i, kad iš $\{G_1, G_2, \dots, G_i\}$ išvedamas tuščias disjunktas. Taigi, jei ji klaidinga, turi būti tas poaibis, o jei ne, tai aprašytoji procedūra tęsis be galo ilgai.

Tokia procedūra nėra patogi ieškant prieštaringo poaibio. Aprašysime kitokią. Toks paieškos būdas vadinamas ***rezoliucijų metodu***. Jį 1965 m. aprašė amerikiečių logikas J.A. Robinson. Tarkime, norime nustatyti, ar uždara formulė F tapačiai klaidinga. Kaip ir anksčiau, pagal F randame disjunktų aibę S. Aprašysime metodą, kuriuo ieškoma tuščio disjunkto išvedimo iš S.

Reiškinį (termą, formulę, ...) vadiname *pagrindiniu*, jei jame nėra individinių kintamųjų įeičių.

6.14 apibrėžimas. ***Keitiniu*** *vadiname reiškinį pavidalo* $(t_1/x_1, t_2/x_2, \dots, t_n/x_n)$; *čia* t_i *— termai (nebūtinai pagrindiniai).*

Keitinius žymime raidėmis $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$. Reiškinį (termą, formulę), kuriame visos kintamojo x_i $(i = i, \dots, n)$ įeitys pakeistos termu t_i, žymime $R\alpha$.

6.15 apibrėžimas. *Keitinys α vadinamas reiškinių R, R'* ***unifikatoriumi****, jei $R\alpha = R'\alpha$.*

6.16 apibrėžimas. *Unifikatorius σ vadinamas* ***bendriausiuoju*** *reiškiniams R, R', jei bet kuriam reiškinių R, R' unifikatoriui α, egzistuoja toks β, kad α yra lygus β ir σ kompozicijai.*

Keitinys σ yra baigtinės atominių formulių aibės $\{A_1, \ldots, A_m\}$ bendriausias unifikatorius, jei $A_1\sigma = \cdots = A_m\sigma$ ir bet kuriam šios aibės unifikatoriui α yra toks β, kad α lygus β ir σ kompozicijai.

Pavyzdžiai:

1. Keitinys $\sigma = (c/x, d/y, f(d)/z)$ yra atominių formulių poros $P(g(y, c), z)$, $P(g(d, x), f(d))$ unifikatorius.

2. Atominių formulių pora $P(x, f(f(y)))$, $P(f(z), f(f(g(a))))$ unifikuojama. Jos unifikatoriai yra:

$$\sigma = (f(a)/x, g(a)/y, a/z), \qquad \beta = (f(f(a))/x, g(a)/y, f(a)/z).$$

Bendriausias unifikatorius yra keitinys $\alpha = (f(z)/x, g(a)/y, /z)$. Žymėjimas $/z$ reiškia, kad z gali būti bet koks iš nagrinėjamosios termų aibės. Keitiniuose tokius praleisime, t.y. bendriausiąjį unifikatorių šiuo atveju užrašysime $\alpha = (f(z)/x, g(a)/y)$.

Suprantama, ne visi reiškiniai unifikuojami. Formulės $P(t)$, $P(t')$ nėra unifikuojamos, jei, pavyzdžiui, termai t, t' yra:

a) dvi skirtingos konstantos,

b) kintamasis x ir termas (aukštis ne mažesnis kaip 1), kuriame aptinkamas x,

c) konstanta ir funkcinis simbolis,

d) prasidedantys skirtingais funkciniais simboliais termai.

Rezoliucijos taisyklė yra tokia:

$$\frac{C_1 \quad C_2}{C};$$

čia C, C_1, C_2 yra disjunktai, C_1, C_2 vadinami prielaidomis, o C – išvada. Rezoliucijos taisyklę taikysime disjunktų aibei S. Keitinių termuose pasitaikančios konstantos bei funkciniai simboliai priklauso aibės S formulėms. Kablelis aibėje

S atitinka konjunkciją, o visi laisvieji kintamieji suvaržyti tik bendrumo kvantoriais, todėl, jei tai tikslinga, skirtingus disjunktus galima laikyti neturinčiais bendrų laisvųjų kintamųjų.

Rezoliucijos taisyklė:

$$\frac{D_i\sigma \quad D_j\sigma}{D\sigma}.$$

Taisyklė taikoma prielaidoms, kuriose galima rasti tokias dvi literas $P(t_1', \ldots, t_n')$, $\neg P(t_1'', \ldots, t_n'')$ (jos yra skirtingose prielaidose), kad σ yra $P(t_1', \ldots, t_n')$, $P(t_1'', \ldots, t_n'')$ unifikatorius. $D\sigma$ gaunama išbraukus $P(t_1', \ldots, t_n')\sigma$, $\neg P(t_1'', \ldots, t_n'')\sigma$ iš prielaidų ir apjungus gautąsias formules disjunkcija. Jei išvadoje yra dvi vienodos literos ar daugiau, tai paliekama tik viena.

6.17 apibrėžimas. *Sakoma, kad iš S išvedamas tuščias disjunktas, jei egzistuoja baigtinė disjunktų seka $E_1, \ldots, E_r$, tenkinanti sąlygas*:

1) $E_r = \square$,

2) *kiekviena E_i priklauso aibei S arba gauta iš kairėje jos esančių disjunktų pagal rezoliucijos taisyklę.*

Kaip matome, keitiniuose naudojami ne tik pagrindiniai termai. Turint tuščio disjunkto išvedimą, kintamuosius jame galime pakeisti kuriais nors (skirtingus galbūt skirtingais) termais iš H ir gauti tuščio disjunkto išvedimą iš formulių aibės (6.1). Vadinasi, pradinė formulė yra tapačiai klaidinga.

Pavyzdys. Įrodykime rezoliucijų metodu, kad teisingas toks samprotavimas:

Nė vienas žmogus nėra vabzdys. Yra musės ir nė viena jų nėra ne vabzdys. Vadinasi, kai kurios musės nėra žmonės.

Pažymėkime $Z(x)$ predikatą „*x yra žmogus*“, $M(x)$ – „*x yra musė*“, $V(x)$ – „*x yra vabzdys*“. Tuomet reikia nustatyti, ar iš $\forall x(Z(x) \to \neg V(x))$, $\exists x M(x)$, $\forall x(M(x) \to V(x))$ išplaukia $\exists x(M(x)\&\neg Z(x))$, t.y. ar prieštaringa aibė

$$\{\forall x(Z(x) \to \neg V(x)), \exists x M(x), \forall x(M(x) \to V(x)), \neg\exists x(M(x)\&\neg Z(x))\}.$$

Transformuojame ją į disjunktų aibę:

$$S = \{\neg Z(x) \vee \neg V(x), M(a), \neg M(x) \vee V(x), \neg M(x) \vee Z(x)\}.$$

Tuomet tuščio disjunkto išvedimas yra toks (kad būtų vaizdžiau, pateiksime jį ne sekos pavidalu):

$$\frac{M(a) \quad \neg M(x) \vee V(x)}{V(a)}, \quad \sigma = \{a/x\},$$

$$\frac{V(a) \quad \neg Z(x) \vee \neg V(x)}{\neg Z(a)}, \quad \sigma = \{a/x\},$$

$$\frac{\neg Z(a) \quad \neg M(x) \vee Z(x)}{\neg M(a)}, \quad \sigma = \{a/x\},$$

$$\frac{M(a) \quad \neg M(a)}{\square}, \quad \sigma = \emptyset.$$

Rezoliucijų metodo taktikos. Taikant rezoliucijos taisyklę, galima reikalauti ir papildomų sąlygų tiek taisyklės prielaidoms, tiek ir išvadai. Tie reikalavimai vadinami ***išvedimų taktikomis***. Taktika vadinama *pilnąja*, jei tuščias disjunktas išvedamas rezoliucijų metodu tada ir tiktai tada, kai jis išvedamas ir prisilaikant taktikos. Naudojantis taktikomis, išvedamų disjunktų aibės dažniausiai yra siauresnės. Aprašysime keletą pilnųjų taktikų.

1. *Tiesinė taktika.* Tarkime, disjunktas C išvedamas iš aibės S ir $T_1, T_2, \ldots, T_k$ yra rezoliucijos taisyklės taikymų seka, tenkinanti sąlygas:

a) T_k išvada yra disjunktas C,

b) kiekvieno taikymo T_i ($i > 1$) viena iš prielaidų yra T_{i-1} išvada.

Toks disjunkto išvedimas vadinamas tiesiniu.

2. *Podisjunkčio taktika.* Disjunktas C yra D podisjunktis (D vadinamas C viršdisjunkčiu), jei egzistuoja toks keitinys σ, kad $D = C\sigma \vee D'$. Pavyzdžiui, $C = P(x)$, $D = P(a) \vee Q(a)$. Tuomet C yra D podisjunktis, nes $D = C\sigma \vee Q(a)$, kai $\sigma = \{a/x\}$. Apribojimai rezoliucijos taisyklei tokie: išvada negali būti jau turimų disjunktų viršdisjunkčiu.

Naudojantis šia taktika, peržiūrimi visi jau turimi disjunktai. Jei, pritaikius taisyklę, tarp turimų disjunktų yra išvados viršdisjunkčių, tai jie išbraukiami.

3. *Semantinės rezoliucijos taktika.* Tarkime, S yra disjunktų aibė ir I – kuri nors interpretacija, suskaidanti S į du poaibius: S_+ ir S_-. Poaibiui S_+ priklauso visi tie disjunktai, kurie teisingi su interpretacija I, o poaibiui S_- – tie, kurie klaidingi. Pagal semantinės rezoliucijos taktiką rezoliucijos taisyklės taikymo prielaidos gali būti tik disjunktai, priklausantys skirtingiems poaibiams. Gautąją išvadą, jei ji teisinga su interpretacija I, priskiriame aibei S_+, jei ne – aibei S_-.

Pavyzdys. $S = \{p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg r, r\}$, I: $p = t, q = t, r = k$.
Tuomet $S_+ = \{p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg r\}$, $S_- = \{r\}$,

$$\frac{p \vee q \vee \neg r \quad r}{p \vee q}, \qquad p \vee q = t.$$

Todėl $S_+ = \{p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg r, p \vee q\}$, $S_- = \{r\}$,

$$\frac{\neg q \vee \neg r \quad r}{\neg q}, \qquad \neg q = k.$$

Tada $S_+ = \{p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg r, p \vee q\}$, $S_- = \{r, \neg q\}$,

$$\frac{\neg q \quad p \vee q}{p}, \quad p \in S_+, \qquad \frac{\neg p \vee q \quad \neg q}{\neg p}, \quad \neg p \in S_-, \qquad \frac{p \quad \neg p}{\Box}.$$

4. *Tvarkos taktika.* Visus aibės S predikatinius simbolius (loginius kintamuosius) išrašome kuria nors tvarka $P > Q > R > \cdots$. Jei taisyklės taikymo prielaidoje yra ne viena litera, kurios atžvilgiu galima taikyti taisyklę, tai privalome rinktis tą, kurios vardas didžiausias.

5. *Absorbcijos taktika.* Sakysime, kad disjunktas $C' = L \vee D$ absorbuojamas disjunkto C'', jei $C'' = \neg L \vee D \vee D'$; čia L yra litera, laikome $\neg\neg L = L$, D, D' – disjunktai, D' gali būti ir tuščias. Pagal absorbcijos taktiką rezoliucijos taisyklę galima taikyti tik disjunktams, kai vienas jų absorbuojamas antrojo, tiksliau, kai $C'\sigma$ yra absorbuojamas $C''\sigma$ arba atvirkščiai.

6.8 Pratimai

1. Išveskite skaičiavime G sekvencijas:

a) $\exists x M(x), \forall x(M(x) \to P(x)), \forall x(M(x) \to S(x)) \vdash \exists x(S(x) \& P(x))$,

b) $\vdash (\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)) \& (\exists x \neg A(x) \to \neg\forall x A(x))$,

c) $\vdash \exists x \forall y \forall z \exists v((P(x) \vee \neg P(y)) \& (P(z) \vee \neg P(v)))$.

2. Įrodykite, kad sekvencija $\vdash \forall y \exists x A(x, y) \to \exists x \forall y A(x, y)$ neišvedama.

3. Išveskite intuicionistiniame sekvenciniame skaičiavime:

a) $\vdash A \to (\neg A \to B)$,

b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,

c) $\vdash \exists x \exists y(\neg\neg(\neg\neg A(x) \to A(y)))$,

d) $\vdash \forall x \exists y((\neg\neg A(x) \to A(y)) \to (\neg\neg(A(x) \to B(y)) \to (A(x) \to B(y))))$,

e) $\neg\neg(A \to B), A \vdash \neg\neg B$,

f) $\neg\neg B \to B, \neg\neg(A \to B) \vdash A \to B$,

g) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$.

4. Ar intuicionistinėje logikoje $\neg A \vee B \equiv A \to B$?

5. Raskite išvedimus klasikiniame ir intuicionistiniame sekvenciniame skaičiavimuose:

$$p_1 \vee (p_2 \vee (p_3 \vee \ldots (p_{n-1} \vee p_n))) \ldots) \vdash (((\ldots (p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \ldots \vee p_{n-1}) \vee p_n.$$

6. Ar unifikuojami termai:

$$t_1 = g(f(c, g(x_4, x_5)), f(c, g(x_5, x_4)), k(x_5, x_4, x_1)),$$

$$t_2 = g(x_2, x_2, x_6)?$$

7. Transformuokite į tiesinį išvedimą:

$$\dfrac{\dfrac{M}{C_3 \vee p} \qquad \dfrac{C_1 \vee \neg p \vee q \qquad C_2 \vee \neg q}{C_1 \vee C_2 \vee \neg p}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3}.$$

Raide M žymime disjunkto $C_3 \vee p$ išvedimą. Žinoma, kad M yra tiesinis.

8. Raskite tiesinį tuščio disjunkto išvedimą iš S:

$$S = \{\neg E(x) \vee V(x) \vee S(x, f(x)), \neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x)), P(a), E(a),$$

$$\neg S(a, y) \vee P(y), \neg P(x) \vee \neg V(x), \neg P(x) \vee \neg C(x)\}.$$

9. Naudodamiesi semantinės rezoliucijos taktika, raskite tuščio disjunkto išvedimą:

a) $S = \{p_1 \vee p_2, p_1 \vee \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_1 \vee \neg p_2\}$, I: $p_1 = t$, $p_2 = k$,

b) $S = \{\neg Q(x) \vee \neg Q(a), R(b) \vee S(c), Q(x) \vee Q(a) \vee \neg R(y) \vee \neg R(b), \neg S(c)\}$,
I: $Q(a) = t$, $Q(b) = t$, $Q(c) = t$,
$R(a) = k$, $R(b) = k$, $R(c) = k$,
$S(a) = k$, $S(b) = k$, $S(c) = k$.

10. Naudodamiesi absorbcijos taktika, išveskite tuščią disjunktą:

a) $S = \{\neg C(x) \vee Q(a) \vee P(y), \neg C(x) \vee \neg Q(a) \vee P(b), C(x) \vee \neg Q(x) \vee P(b), C(x) \vee Q(a) \vee \neg P(b), \neg C(a) \vee Q(a) \vee \neg P(x), C(a) \vee \neg Q(a) \vee \neg P(x), \neg C(a) \vee \neg Q(a) \vee \neg P(b), C(x) \vee Q(x) \vee P(b)\}$,

b) $S = \{\neg Q(f(a)) \vee R(f(x)) \vee V(x), Q(f(x)) \vee \neg P(f(x)), \neg V(x) \vee R(f(x)), \neg R(f(x)) \vee \neg Q(f(x)), P(f(a)) \vee W(x), \neg W(x) \vee Q(f(a))\}$.

1. Individinių konstantų aibė yra realieji skaičiai. $T(x, y, u, v) = t$ tada ir tiktai tada, kai figūra $xyuv$ yra trapecija. $P(x, y, u, v) = t$, kai atkarpa xy lygiagreti su atkarpa uv. $E(x, y, z, u, v, w) = t$, kai kampas xyz lygus kampui uvw.

Žinoma, kad:

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (T(x, y, u, v) \to P(x, y, u, v)),$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (P(x, y, u, v) \to E(x, y, v, u, v, y)),$$

$$T(a, b, c, d).$$

Rezoliucijų metodu įrodykite, kad iš šių formulių išplaukia $E(a, b, d, c, d, b)$.

2. Tarkime, kad išvedimo medį mokame transformuoti į išvedimo medį pagal absorbcijos taktiką, kai jame yra ne daugiau kaip n rezoliucijos taisyklių (indukcijos prielaida). Disjunkto $A \vee B$ išvedimo medis, kuriame $(n + 1)$ kartą taikoma rezoliucijos taisyklė:

$$(*)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{M_1}{A \vee p \vee q} \quad \dfrac{M_2}{A \vee p \vee \neg q}}{A \vee p} \qquad \dfrac{M_3}{B \vee \neg p}}{A \vee B}.$$

Ženklu $(*)$ pažymėtas taisyklės taikymas, pažeidžiantis absorbcijos reikalavimą. Įrodykite, kad disjunkto $A \vee B$ išvedimą galima rasti naudojantis absorbcijos taktika.

7 skyrius
Modalumo logikos

Klasikinės logikos kalbą praplėsime vadinamaisiais *modalumo operatoriais*, nusakančiais *būtinimą* ir *galimybę*. Jų dėka galima formalizuoti ir tvirtinimus, kuriais išreiškiame tvirtą įsitikinimą kurio nors teiginio teisingumu ar abejones. Modalumo logikos buvo nagrinėjamos dar antikos laikais. Naujo etapo pradžia siejama su amerikiečių logiko C.I. Lewiso darbais, pasirodžiusiais XX amžiaus antrajame dešimtmetyje. Juose aprašytos modalumo logikų formaliosios sistemos (skaičiavimai). Yra daug priežasčių, pateisinančių logikoje modalumą. Viena jų — išvengti „implikacijos paradokso" (iš klaidingo išvedamas bet koks teiginys). Buvo norima išskirti dvi rūšis *tiesos*: *būtiną* ir *galimą*. Galima tiesa egzistuoja tik tam tikruose pasauliuose.

7.1 Modalumo logikų formulių semantika

Naudosimės dviem modalumo operatoriais. Juos žymime $\Box$ (būtinumas) ir $\Diamond$ (galimybė). Pateikiame modalumo (teiginių) logikų formulių apibrėžimą.

7.1 apibrėžimas:

1. *Loginis kintamasis yra formulė.*

2. *Jei F yra formulė, tai $\neg F$, $\Box F$, $\Diamond F$ – taip pat formulės.*

3. *Jei F, G yra formulės, tai $(F\&G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ – taip pat formulės.*

Formulių pavyzdžiai: $\Box\Diamond p$, $\Box(p \to (\Box q \& \Diamond\Diamond p))$, $(\neg p \vee \Box\Box(q \vee p))$.

Toliau išorinius skliaustus praleisime. Užrašą $\Box p$ skaitome *„būtinai p"*, o $\Diamond p$ – *„galbūt p"*.

Galimos ir kitos modalumo operatorių interpretacijos:

$\Box F$	$\Diamond F$
Vienas asmuo (agentas) žino, kad F teisingas	Vienas asmuo (agentas) nežino, ar $\neg F$ teisingas
Vienas asmuo įsitikinęs, kad F	Vienas asmuo F laiko galimu
Visada F	Kai kada F
F tikrai įvyks	Įvykis F tikėtinas
F įrodoma	F nėra tapačiai klaidinga
Visi nedeterminuotojo skaičiavimo keliai su pradiniais duomenimis F baigiasi galutinėmis būsenomis	Kai kurie nedeterminuotojo skaičiavimo keliai su pradiniais duomenimis F baigiasi galutinėmis būsenomis

Kad būtų paprasčiau, kai kada nagrinėjamos formulės, kuriose yra tik vienas modalumo operatorius $\Box$, formulė $\neg\Box\neg F$ žymima $\Diamond F$.

Pateikiame Kripke standartinę modalumo logikų formulių semantiką.

7.2 apibrėžimas. *Modalumo logikų teiginių formulės F Kripke struktūra vadiname trejetą $\Phi = (M, R, V)$; čia M – kuri nors netuščia aibė, vadinama* ***galimų pasaulių aibe****, R – apibrėžtas aibėje M binarusis predikatas, vadinamas* ***pasaulių sąryšiu****, V –* ***aibė interpretacijų*** *pasauliuose (t.y. funkcijų, apibrėžtų formulės F loginių kintamųjų aibėje su reikšmėmis iš $\{t, k\}$ ir priklausančių nuo pasaulių).*

Tarkime, $\Phi = (M, R, V)$ yra tam tikros formulės kuri nors struktūra. Tvirtinimą, kad *formulė teisinga struktūros Φ pasaulyje α*, suprantame, kad *formulė teisinga su pasaulį α atitinkančia interpretacija iš V.*

7.3 apibrėžimas. *Formulės F teisingumas struktūros Φ pasaulyje α nusakomas taikant indukciją pagal formulės pavidalą:*

- *jei F yra loginis kintamasis, tai F yra teisinga tada ir tiktai tada, kai jis (loginis kintamasis) teisingas pasaulyje α,*
- *jei $F = \neg G$, tai F teisinga tada ir tiktai tada, kai G klaidinga pasaulyje α,*
- *jei $F = G \& H$, tai F teisinga tada ir tiktai tada, kai abi F, G teisingos pasaulyje α,*
- *jei $F = G \vee H$, tai F teisinga tada ir tiktai tada, kai bent viena iš G, H teisinga pasaulyje α,*
- *jei $F = G \to H$, tai F teisinga tada ir tiktai tada, kai G klaidinga arba H teisinga pasaulyje α,*

- *jei* $F = \Box G$, *tai* F *teisinga tada ir tiktai tada, kai* G *teisinga visuose tokiuose pasauliuose* α', *kad* $R(\alpha, \alpha') = t$,
- *jei* $F = \Diamond G$, *tai* F *teisinga tada ir tiktai tada, kai yra bent vienas toks pasaulis* α', *kad* $R(\alpha, \alpha') = t$ *ir* G *teisinga pasaulyje* α'.

7.4 apibrėžimas. *Sakoma, kad* ***formulė F įvykdoma****, jei egzistuoja tokia struktūra* $\Phi = (M, R, V)$ *ir pasaulis* $\alpha \in M$, *kad* F *teisinga pasaulyje* α.

7.5 apibrėžimas. *Sakoma, kad* ***formulė F tapačiai teisinga****, jei ji teisinga bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje.*

7.6 apibrėžimas. *Sakoma, kad* ***formulė F tapačiai klaidinga****, jei ji klaidinga bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje.*

Pavyzdžiai:

1. $F = \Box p$. Struktūrą (M, R, V) apibrėžiame taip: M – *pasaulio valstybės*, $R(x, y) = t$ tada ir tiktai tada, kai valstybės x, y turi bendrą sieną, interpretacijos V – *sausis yra šalčiausias valstybėje mėnuo.* Tuomet priklausomai nuo pasirinkto pasaulio formulė F gali būti tiek teisinga, tiek ir klaidinga. Pasirinktos struktūros pasaulyje *Lietuva* formulė teisinga, nes visose Lietuvos kaimyninėse valstybėse iš tikrųjų sausis yra šalčiausias metų mėnuo. Tuo tarpu pasirinkus *Pietų Afrikos Respubliką*, formulė būtų klaidinga. Taigi formulė įvykdoma, bet nėra tapačiai teisinga.

2. $F = p \to \Box\Box p$, M – sveikųjų skaičių aibė, $R(x, y) = t$ tada ir tiktai tada, kai $y = x + 1$. Interpretacijos V – *pasaulis nusakomas neigiamu skaičiumi.* Pasaulyje *minus vienetas* formulė p teisinga, o $\Box\Box p$ klaidinga, nes ji atitinka teiginį *plius vienetas yra neigiamas skaičius.* Kadangi F yra pastarųjų implikacija, tai ji pasaulyje *minus vienas* klaidinga.

7.7 apibrėžimas. *Modalumo logikų formulės* F *projekcija į klasikinę logiką vadiname formulę, gautą iš* F *(žymime* $\mathrm{pr}(F)$*), išbraukus joje visas modalumo operatorių įeitis.*

Pavyzdys. $F = p\&(\Box\Diamond q \vee \neg\Box p)$. Tuomet $\mathrm{pr}(F) = p\&(q \vee \neg p)$.

Pastebėkime, jei klasikinės logikos formulė $\mathrm{pr}(F)$ nėra tapačiai teisinga, tai ir F nėra tapačiai teisinga. Iš tikrųjų yra interpretacija, su kuria $\mathrm{pr}(F)$ klaidinga. Struktūrą apibrėžiame taip: M yra iš vienintelio elemento a, $R(a, a) = t$, aibei V priklauso tik viena interpretacija – būtent ta, su kuria $\mathrm{pr}(F)$ klaidinga. Tuomet abiejų formulių F ir $\mathrm{pr}(F)$ reikšmės sutampa, t.y. F klaidinga.

Tačiau, jei pr(F) tapačiai teisinga, F nebūtinai tapačiai teisinga. Pavyzdžiui, formulė $(p \vee q) \to (p \vee q)$ tapačiai teisinga, o $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ nėra tapačiai teisinga. Tarkime, M – natūraliųjų skaičių aibė. $R(x, y) = t$ tada ir tiktai tada, kai $y = x + 1$ arba $y = x + 2$. V yra tokių interpretacijų aibė: p – *pasaulis nusakomas lyginiu skaičiumi*, q – *pasaulis nusakomas nelyginiu skaičiumi*. Tuomet bet kuriame nurodytos struktūros pasaulyje formulė $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ klaidinga.

Kad ir kokia būtų modalumo logikos formulė F, galima rasti tokią klasikinės predikatų logikos formulę $[F]_\tau$, kad F įvykdoma tada ir tiktai tada, kai įvykdoma $[F]_\tau$.

Taikydami indukciją pagal F pavidalą, apibrėžiame $[F]_\tau$: $[p]_\tau = P(\tau)$, čia p – loginis kintamasis, $P(\tau)$ – vienvietis predikatinis kintamasis.

$$
\begin{aligned}
&[\neg G]_\tau = \neg[G]_\tau,\\
&[H \& G]_\tau = [H]_\tau \& [G]_\tau,\\
&[H \vee G]_\tau = [H]_\tau \vee [G]_\tau,\\
&[H \to G]_\tau = [H]_\tau \to [G]_\tau,\\
&[\Box G]_\tau = \forall x(R(\tau, x) \to [G]_x),\\
&[\Diamond G]_\tau = \exists x(R(\tau, x) \& [G]_x).
\end{aligned}
$$

Abiem paskutiniais atvejais x yra naujas individinis kintamasis.

Pavyzdys

$$
\begin{aligned}
&[\Box\Diamond(p \to q)]_\tau = \forall x(R(\tau, x) \to [\Diamond(p \to q)]_x) =\\
&\forall x(R(\tau, x) \to \exists y(R(x, y) \& [p \to q]_y)) =\\
&\forall x(R(\tau, x) \to \exists y(R(x, y) \& ([p]_y \to [q]_y))) =\\
&\forall x(R(\tau, x) \to \exists y(R(x, y) \& (P(y) \to Q(y)))).
\end{aligned}
$$

7.2 Modalumo logikų skaičiavimai

Aprašysime kai kurių dažniausiai literatūroje pasitaikančių modalumo logikų skaičiavimus.

Hilberto tipo skaičiavimai. Nagrinėkime formules, kuriose gali būti tik modalumo operatorius $\Box$. Skaičiavimai gaunami klasikinės teiginių logikos Hilberto skaičiavimą papildžius naujomis aksiomomis bei taisykle.

Aksiomos:

1.1. $A \to (B \to A)$,

...

4.3. $\neg\neg A \to A$,

k. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

t. $\Box A \to A$,

4. $\Box A \to \Box\Box A$.

Taisyklės:

$$\frac{A, A \to B}{B}, \quad \frac{A}{\Box A}.$$

Pirmoji taisyklė vadinama *modus ponens* (sutrumpintai ją žymime MP), o antroji – *apibendrinimo* (AT). Skaičiavimas, kuriame yra 1.1–4.3 ir k aksiomos, vadinamas modalumo logikos **K** skaičiavimu (arba tiesiog *modalumo logika* K). Modalumo logika **T** nusakoma skaičiavimu, kuris susideda iš 1.1–4.3 ir k, t aksiomų. Logika, kurios aksiomos yra 1.1–4.3 ir k, t, 4, vadinama modalumo logika **S4**. Abi taisyklės yra visų trijų minėtųjų logikų taisyklės.

7.8 apibrėžimas. *Formulės F išvedimu modalumo logikos X skaičiavime vadiname baigtinę formulių seką, kuri baigiasi formule F ir kurios kiekvienas narys yra modalumo logikos X skaičiavimo aksioma arba gautas iš kairėje nuo jo esančių narių pagal taisyklę* MP *ar* AT.

Paminėsime dar porą modalumo logikų, kurių šioje knygoje nenagrinėsime. Formulę $\Box A \to \Diamond A$ pažymėkime raide *d*, o formulę $\Diamond\Box A \to \Box A$ – skaičiumi 5. Modalumo logikos **D** skaičiavimą sudaro 1.1–4.3, k, d aksiomos, o logikos **S5** – 1.1–4.3, k, t, 4, 5 aksiomos. Taisyklės MP, AT yra vienintelės logikų D, S5 taisyklės.

Modalumo logikos, tarp kurių aksiomų yra k, vadinamos *normaliosiomis*, priešingu atveju – *pusiau normaliomis*.

Kai kuriose aksiomose yra tam tikrų pasaulių sąryšio apribojimų. Aprašysime juos lentele:

Aksioma	Savybė
t	$\forall x R(x, x)$
4	$\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \& R(y, z)) \to R(x, z))$
d	$\forall x \exists y R(x, y)$
5	$\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \& R(x, z)) \to R(y, z))$

Iš čia išplaukia, kad formulė tapačiai teisinga, pavyzdžiui, logikoje S4, tada ir tiktai tada, kai ji teisinga kiekvienos struktūros, kurios sąryšis *refleksyvus* ir *tranzityvus*, bet kuriame pasaulyje.

7.1 lema. *Jei $F(p_1, \dots, p_n)$ tapačiai teisinga klasikinės teiginių logikos formulė ir $G_1, \dots, G_n$ yra bet kurios modalumo logikų formulės, tai $F(G_1, \dots, G_n)$ išvedama kiekvienos modalumo logikos skaičiavime.*

Įrodymas. Kadangi $F(p_1, \dots, p_n)$ yra tapačiai teisinga formulė, tai egzistuoja tokia baigtinė klasikinės teiginių logikos formulių seka $F_1, \dots, F_s$, kad $F = F_s$ ir kiekvienas narys F_i yra viena iš 1.1–4.3 aksiomų arba gautas iš kairėje jo esančių formulių F_k, F_m $(k, m < i)$ pagal *modus ponens* taisyklę. Visose išvedime naudojamose formulėse loginius kintamuosius p_i $(i = 1, \dots, n)$ pakeiskime formulėmis G_i. Gauname modalumo logikų formulės $F(G_1, \dots, G_n)$ išvedimą, kuriame pasinaudota tik 1.1–4.3 aksiomomis ir taisykle MP. Kadangi šios aksiomos ir taisyklė priklauso visoms nagrinėjamoms modalumo logikoms, tai kartu gavome ir išvedimą modalumo logikose. Lema įrodyta.

Pavyzdys. Formulės $A \to \Diamond A$ išvedimas modalumo logikos T skaičiavime:

$\Box\neg A \to \neg A$ (aksioma t),
$(\Box\neg A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg\Box\neg A)$ (4.1 aksioma),
$\neg\neg A \to \neg\Box\neg A$ (pagal taisyklę MP),
$A \to \neg\neg A$ (4.2 aksioma),
$A \to \neg\Box\neg A$ (naudojantis implikacijos tranzityvumu ir 7.1 lema),
$A \to \Diamond A$ (pagal $\Diamond$ apibrėžimą, t.y. $\Diamond = \neg\Box\neg$).

Sekvenciniai skaičiavimai. Aprašysime sekvencinius modalumo logikų K, T, S4 skaičiavimų variantus.

Aksiomos: $F, \Pi \vdash F, \Delta$.

Taisyklės $(\to\vdash)$, $(\vdash\to)$, $(\&\vdash)$, $(\vdash\&)$, $(\vee\vdash)$, $(\vdash\vee)$, $(\neg\vdash)$, $(\vdash\neg)$ visoms modalumo logikoms tos pačios kaip ir sekvencinio skaičiavimo G. Tik į formulių sąrašus antecedente bei sukcedente žiūrime kaip į multiaibes.

Modalumo logikoms K, T, S4 apibrėšime tik taisykles $(\Box\vdash)$ ir $(\vdash\Box)$.

Modalumo logika **K**:

$$(\vdash\Box)\quad \frac{\Gamma^* \vdash F}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box F}.$$

Modalumo logika **T**:

$$(\Box\vdash)\quad \frac{F, \Box F, \Pi \vdash \Delta}{\Box F, \Pi \vdash \Delta}, \qquad (\vdash\Box)\quad \frac{\Gamma^* \vdash F}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box F}.$$

Modalumo logika **S4**:

$$(\Box\vdash)\quad \frac{F, \Box F, \Pi \vdash \Delta}{\Box F, \Pi \vdash \Delta}, \qquad (\vdash\Box)\quad \frac{\Box\Gamma \vdash F}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box F}.$$

Čia Π, Δ yra baigtinės formulių sekos; Σ – baigtinė seka formulių, neprasidedančių operatoriumi $\Box$; $\Box\Gamma$ – baigtinė seka formulių, prasidedančių operatoriumi $\Box$; Γ^* – gauta iš $\Box\Gamma$, išbraukus iš visų $\Box\Gamma$ formulių pirmąsias $\Box$ įeitis (formulių sekos gali būti ir tuščios); F – formulė.

Pateikiame porą išvedamų sekvencijų pavyzdžių.

Pavyzdžiai:

1. Sekvencijos $\vdash \neg\Box\neg(A \vee \Box\neg A)$ išvedimas logikos S4 sekvenciniame skaičiavime:

$$\begin{array}{c}
A, \Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash A, \Box\neg A \\ \hline
A, \Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash A \vee \Box\neg A \\ \hline
\neg(A \vee \Box\neg A), \Box\neg(A \vee \Box\neg A), A \vdash \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A), A \vdash \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash \neg A \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash A, \Box\neg A \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash A \vee \Box\neg A \\ \hline
\neg(A \vee \Box\neg A), \Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash \\ \hline
\vdash \neg\Box\neg(A \vee \Box\neg A)
\end{array}.$$

Logikos S4 taisyklėje $(\Box \vdash)$ kartojama centrinė formulė. Jei to nebūtų, tai nagrinėjamoji sekvencija nebūtų išvedama:

$$\begin{array}{c}
A \vdash \\ \hline
\vdash \neg A \\ \hline
\vdash A, \Box\neg A \\ \hline
\vdash A \vee \Box\neg A \\ \hline
\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash \\ \hline
\Box\neg(A \vee \Box\neg A) \vdash \\ \hline
\vdash \neg\Box\neg(A \vee \Box\neg A)
\end{array}.$$

2. Sekvencijos $\Box(p\&q) \vdash \Box p\&\Box q$ išvedimas logikos T sekvenciniame skaičiavime:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \vdash p}{p\&q \vdash p}}{\Box(p\&q) \vdash \Box p} \qquad \dfrac{\dfrac{p, q \vdash q}{p\&q \vdash q}}{\Box(p\&q) \vdash \Box q}}{\Box(p\&q) \vdash \Box p\&\Box q}.$$

7.3 Ekvivalenčiosios formulės

7.9 apibrėžimas. *Formulės F, G vadinamos ekvivalenčiosiomis (žymime $F \equiv G$) modalumo logikoje X, jei jų reikšmės vienodos bet kurios struktūros kiekviename pasaulyje. Pasaulių sąryšiai tenkina logikos X sąryšių apribojimus.*

Formulių F, G ekvivalentumo įrodymas, naudojantis Hilberto tipo skaičiavimu, suvedamas į dviejų formulių $F \to G$, $G \to F$ išvedimų paiešką, o sekvenciniame skaičiavime – į sekvencijų $F \vdash G$, $G \vdash F$ išvedimų paiešką.

Modalumo logikoje S4 galioja tokie ekvivalentumai:

1. $\Diamond\Diamond p \equiv \Diamond p$,
2. $\Box\Box p \equiv \Box p$,
3. $(\Box\Diamond)^2 \equiv \Box\Diamond p$,
4. $(\Diamond\Box)^2 \equiv \Diamond\Box p$,
5. $\neg\Box p \equiv \Diamond\neg p$,
6. $(\Box p \& \Box q) \equiv \Box(p \& q)$,
7. $(\Diamond p \vee \Diamond q) \equiv \Diamond(p \vee q)$.

Bet $\Box p \vee \Box q$ ir $\Box(p \vee q)$ nėra ekvivalenčios kaip ir $\Diamond p \& \Diamond q$, $\Diamond(p \& q)$.

Nagrinėjame formules pavidalo $M_1 \dots M_n l$; čia M_i $(i \leqslant n$ yra vienas iš modalumo operatorių $\Box$, $\Diamond$, o l – klasikinės logikos litera. Kai kurias tokio pavidalo formules galima redukuoti į ekvivalenčias, kuriose modalumo operatorių mažiau. Pavyzdžiui, formulė $\Box\Box\Box\neg p$ logikoje S4 redukuojama į $\Box\neg p$, bet neredukuojama į $\neg p$. Išvardysime visas neredukuojamas modalumo logikoje S4 formules: l, $\Box l$, $\Diamond l$, $\Box\Diamond l$, $\Diamond\Box l$, $\Box\Diamond\Box l$, $\Diamond\Box\Diamond l$.

Tarkime, A yra kurios nors formulės F poformulis. Jį žymime $F(A)$. Klasikinėje logikoje yra teisingas tvirtinimas: jei $A \equiv B$, tai ir $F(A) \equiv F(B)$. Deja, modalumo logikose jis neteisingas. Pavyzdžiui, modalumo logikoje S4 iš sąlygos $p \equiv q$ neišplaukia $\Box p \equiv \Box q$, nes tokios išvedimo paieškos medžio šakos negalima pratęsti iki aksiomų:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q, p, \Box p \vdash \Box q}{\dots}}{q, q \to p, \Box p \vdash \Box q}\Big/\dots}{p \to q, q \to p \vdash \Box p \to \Box q}\Big/\dots}{(p \to q)\&(q \to p) \vdash (\Box p \to \Box q)\&(\Box q \to \Box p)}.$$

Jei formulės A, B yra tokios, kad $\Box(A \equiv B)$ išvedama logikoje S4, tai keitimas formulėje F išlaikant ekvivalentumą galimas. Teisinga tokia teorema, kurią pateikiame be įrodymo.

7.1 teorema (Mintso). *Kad ir kokia būtų formulė F ir jos poformulis A, modalumo logikoje* S4 *iš sąlygos* $\Box(A \equiv B)$ *išplaukia* $F(A) \equiv F(B)$.

Taigi keitimas poformulių ekvivalenčiais ne visada leistinas. Tarkime, formulėse tėra loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$. Įrodyta, kad modalumo logikoje S4 formulėms galima rasti ekvivalenčias, kuriose neigimas yra tik prieš loginius kintamuosius. Tai gaunama, kai neigimas keliamas į skliaustus naudojantis žinomomis klasikinės logikos formulėmis ir $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$, $\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$. Šiuo atveju modalumo operatoriaus $\Box$ nepakanka. Naudojami abu modalumo operatoriai. Skaičiavimus reiktų papildyti aksiomomis ar taisyklėmis modalumo operatoriui $\Diamond$. Gali skirtis ir kai kurios taisyklės, taikomos modalumo operatoriui $\Box$.

Sekvencinio skaičiavimo **S4** modalumo operatorių taisyklės:

$$(\Diamond\vdash)\quad \frac{F, \Box\Gamma \vdash \Diamond\Lambda}{\Diamond F, \Box\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Diamond\Lambda}, \qquad (\vdash\Diamond)\quad \frac{\Pi \vdash \Delta, F, \Diamond F}{\Pi \vdash \Delta, \Diamond F},$$

$$(\Box\vdash)\quad \frac{F, \Box F, \Pi \vdash \Delta}{\Box F, \Pi \vdash \Delta}, \qquad (\vdash\Box)\quad \frac{\Box\Gamma \vdash F, \Diamond\Lambda}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Omega, \Box F, \Diamond\Lambda}.$$

Čia $\Diamond\Lambda$ žymi baigtinę seką formulių, prasidedančių operatoriumi $\Diamond$; Ω – baigtinę seką formulių, neprasidedančių operatoriumi $\Diamond$; kitos raidės – tuos pačius reiškinius kaip ir anksčiau aprašytame sekvenciniame skaičiavime.

7.10 apibrėžimas. *Modalumo litera vadiname klasikinės logikos literas bei formules pavidalo* $\Box l$, $\Diamond l$; *čia* l – *klasikinės logikos litera.*

7.11 apibrėžimas. *Modalumo disjunktu vadiname modalumo literų disjunkciją.*

7.2 teorema. *Kad ir kokia būtų formulė* F, *egzistuoja tokie modalumo disjunktai* $D_1, \ldots, D_n$ *ir klasikinės logikos litera* l, *kad* $\vdash F$ *įrodoma modalumo logikos* S4 *sekvenciniame skaičiavime tada ir tiktai tada, kai įrodoma* $\Box D_1, \ldots, \Box D_n, l \vdash$.

Įrodymas. Aprašysime tik transformavimo algoritmą. Poformulius $\neg p$, $p \vee q$, $p \& q$, $\Box p$, $\Diamond p$ (p, q yra loginiai kintamieji) tolydžio pakeisime naujais loginiais kintamaisiais. Antecedentą papildysime formulėmis $\Box(r \leftrightarrow \neg p)$, $\Box(r \leftrightarrow (p \vee q))$, $\Box(r \leftrightarrow (p\&q))$, $\Box(r \leftrightarrow \Box p)$, $\Box(r \leftrightarrow \Diamond p)$. Jas savo ruožtu redukuosime į seką formulių $\Box D$ (D – modalumo disjunktas):

$\Box(r \leftrightarrow \neg p)$: $\Box(r \to \neg p), \Box(\neg p \to r)$: $\Box(\neg r \vee \neg p), \Box(p \vee r)$,

$\Box(r \leftrightarrow (p \vee q))$: $\Box(r \to (p \vee q)), \Box((p \vee q) \to r)$: $\Box(\neg r \vee p \vee q)$, $\Box(\neg p \vee r), \Box(\neg q \vee r)$,

$\Box(r \leftrightarrow (p\&q))$: $\Box(r \to (p\&q)), \Box((p\&q) \to r)$: $\Box(\neg r \vee p), \Box(\neg r \vee q)$, $\Box(\neg p \vee \neg q \vee r)$,

$\Box(r \leftrightarrow \Box p)$: $\Box(r \rightarrow \Box p), \Box(\Box p \rightarrow r)$: $\Box(\neg r \vee \Box p), \Box(r \vee \Diamond\neg p)$,

$\Box(r \leftrightarrow \Diamond p)$: $\Box(r \rightarrow \Diamond p), \Box(\Diamond p \rightarrow r)$: $\Box(\neg r \vee \Diamond p), \Box(r \vee \Box\neg p)$.

Panašiai aprašomos redukcijos ir kitų loginių operacijų. Taip žingsnis po žingsnio redukuojant formulę, sukcedente liks tik kuris nors, tarkime, v, loginis kintamasis. Parašę antecedente $l = \neg v$, gauname sekvenciją $\Box D_1, \ldots, \Box D_n, l \vdash$. Ji išvedama skaičiavime S4 tada ir tiktai tada (įrodymas priklauso Mintsui), kai išvedama $\vdash F$. Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Redukuokime formulę $\neg\Box(p\&q) \vee q$. Tuo tikslu $p\&q$ pažymime nauju kintamuoju r. Gauname, kad $\vdash \neg\Box(p\&q) \vee q$ išvedamas skaičiavime S4 tada ir tiktai tada, kai išvedama

$$\Box(\neg r \vee p), \Box(\neg r \vee q), \Box(\neg p \vee \neg q \vee r) \vdash \neg\Box r \vee q.$$

Pažymėkime $\Box r$ raide v. Tuomet pastaroji sekvencija išvedama tada ir tiktai tada, kai išvedama

$$\Box(\neg r \vee p), \Box(\neg r \vee q), \Box(\neg p \vee \neg q \vee r), \Box(\neg v \vee \Box r), \Box(v \vee \Diamond\neg r) \vdash \neg v \vee q.$$

Pažymime $\neg v$ kintamuoju w. Tada

$$\Box(\neg r \vee p), \Box(\neg r \vee q), \Box(\neg p \vee \neg q \vee r), \Box(\neg v \vee \Box r), \Box(v \vee \Diamond\neg r),$$
$$\Box(\neg w \vee \neg v), \Box(w \vee v) \vdash w \vee q.$$

Pažymime $w \vee q$ kintamuoju u. Tuomet gauname, kad $\vdash \neg\Box(p\&q) \vee q$ išvedama skaičiavime S4 tada ir tiktai tada, kai jame išvedama sekvencija

$$\Box(\neg r \vee p), \Box(\neg r \vee q), \Box(\neg p \vee \neg q \vee r), \Box(\neg v \vee \Box r), \Box(v \vee \Diamond\neg r),$$
$$\Box(\neg w \vee \neg v), \Box(w \vee v), \Box(\neg u \vee w \vee q), \Box(\neg w \vee u), \Box(\neg q \vee u), \neg u \vdash .$$

7.12 apibrėžimas. *Tarkime, formulėje F yra tik loginės operacijos $\neg$, $\&$, $\vee$. Sakome, kad poformulio G įeitis formulėje F yra teigiama, jei ji patenka į 2n neigimo įeičių veikimo sritį ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Priešingu atveju įeitis neigiama.*

Teigiamas ir neigiamas įeičių sąvokas galima apibrėžti ir taip:

a) formulės F įeitis formulėje F yra teigiama,

b) jei $G = \neg H$ ir G įeitis teigiama (neigiama), tai H įeitis neigiama (teigiama),

c) jei $G = H \vee K$ arba $G = H\&K$ ir G įeitis teigiama (neigiama), tai ir H, K įeitys teigiamos (neigiamos).

Atkreipiame dėmesį, kad formulėse, kuriose yra tik loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$ ir neigimas gali būti tik prieš loginius kintamuosius, visų poformulių, išskyrus kai kurių loginių kintamųjų, įeitys yra teigiamos. Tuo atveju, kai visų poformulių, išskyrus loginių kintamųjų, įeitys teigiamos, formulės redukuojamos naudojantis paprastesnėmis taisyklėmis:

$\Box(r \leftrightarrow \neg p)$: $\Box(p \vee r)$,

$\Box(r \leftrightarrow (p \vee q))$: $\Box(\neg p \vee r), \Box(\neg q \vee r)$,

$\Box(r \leftrightarrow (p \& q))$: $\Box(\neg p \vee \neg q \vee r)$,

$\Box r \leftrightarrow \Box p)$: $\Box(r \vee \Diamond\neg p)$,

$\Box(r \leftrightarrow \Diamond p)$: $\Box(r \vee \Box\neg p)$.

Kad ir kokia būtų formulė, galima rasti jai ekvivalenčią, kurioje yra tik loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$ ir neigimas gali būti tik prieš loginius kintamuosius. Todėl pakanka paprastesnių redukcijos taisyklių.

7.4 Rezoliucijų metodas modalumo logikai S4

Pirmasis rezoliucijų metodą modalumo logikai 1985 m. aprašė prancūzų logikas L. Fariñas. Vėliau buvo pateikta dar keletas skirtingų metodo variantų. Šiame skyrelyje vieną jų aprašysime logikai S4.

Nagrinėkime formulių aibę $S = \{F_1, \ldots, F_n\}$, kurios elementai yra modalumo disjunktai bei formulės pavidalo $\Box D$ (D – modalumo disjunktai). Nustatysime, ar aibė S prieštaringa logikoje S4. Tuščią disjunktą žymime $\perp$. Tvarka disjunktuose nėra fiksuota, t.y. $F \vee G = G \vee F$. Iš praeitame skyrelyje aprašytų rezultatų išplaukia, kad bet kuriai formulei galima rasti tokią nagrinėjamojo pavidalo aibę, kad formulė tapačiai teisinga tada ir tiktai tada, kai ją atitinkanti aibė yra prieštaringa.

Pateikiame apibendrintos formulės apibrėžimą.

7.13 apibrėžimas:

1. *Jei F, G yra formulės, tai* res(F,G) *– apibendrintoji formulė.*

2. *Jei F yra apibendrintoji formulė, tai $\Box F$, $\Diamond F$ – taip pat apibendrintosios formulės.*

3. *Jei F yra formulė, G – apibendrintoji formulė, tai $(F \vee G)$, $(F \& G)$ taip pat yra apibendrintosios formulės.*

Taigi formulėse negali būti res, o apibendrintose formulėse yra tik viena res įeitis.

Įvedimo taisyklė taikoma tik formulėms

$$(\mathrm{r})\quad \frac{F,\ G}{\mathrm{res}(F, G)}.$$

Klasikinės taisyklės:

$$(\mathrm{c1})\quad \frac{\mathrm{res}(l \vee F, \neg l \vee H)}{F \vee H}, \qquad (\mathrm{c2})\quad \frac{\mathrm{res}(F \vee G, H)}{\mathrm{res}(F, H) \vee G}.$$

Čia raide l žymime klasikinės logikos literą. Visur nagrinėjamose formulėse $\neg\neg F = F$. Formulės F, H taisyklėje (c1) gali būti ir tuščios, t.y. $F \vee H = \perp$.

Modalumo taisyklės:

$$(\mathrm{m1})\quad \frac{\mathrm{res}(\Box F, \Box G)}{\Box\mathrm{res}(F, G)}, \qquad (\mathrm{m2})\quad \frac{\mathrm{res}(\Box F, \Diamond G)}{\Diamond\mathrm{res}(F, G)}, \qquad (\mathrm{m3})\quad \frac{\mathrm{res}(\Box F, G)}{\mathrm{res}(F, G)}.$$

Prastinimo taisyklė yra

$$\frac{F}{G};$$

čia G gauta iš F, pakeitus joje:

a) visas $\Box \perp$ įeitis simboliu $\perp$,

b) visas $\Diamond \perp$ įeitis simboliu $\perp$,

c) visas $H \vee \perp$ įeitis formule H,

d) visas $\Box\Box H$ įeitis formule $\Box H$,

e) visas $\Diamond\Diamond H$ įeitis formule $\Diamond H$.

Faktorizavimo taisyklė yra

$$\frac{F}{G};$$

čia G gauta iš F, pakeitus joje visas poformules $H \vee H \vee D$ formulėmis $H \vee D$.

7.14 apibrėžimas. *Formulės (apibendrintosios formulės) F išvedimu iš formulių aibės S vadiname baigtinę seką $G_1, \ldots, G_n$, tenkinančią sąlygas*:

1) $G_n = F$,

2) G_i $(i = 1, \ldots, n)$ *yra formulė arba apibendrintoji formulė,*

3) *kiekviena* G_i *priklauso aibei S arba tenkina vieną iš sąlygų:*

   a) $G_i = \mathrm{res}(G_j, G_k)$ $(j, k < i)$ *ir* G_j, G_k *yra formulės,*

   b) *egzistuoja sekoje apibendrintoji formulė* G_j $(j < i)$, *kurioje yra* $\mathrm{res}(H, K)$ *ir* G_i *gauta iš* G_j *pagal kurią nors taisyklę* (c1), (c2), (m1), (m2), (m3), *t.y.* $\mathrm{res}(H, K)$ *pakeista atitinkamos taisyklės išvada,*

   c) G_i *gauta iš* G_j *pagal prastinimo ar faktorizavimo taisyklę.*

Pavyzdys. Raskime tuščio disjunkto išvedimą iš aibės $S = \{\Box(\neg p \vee \Diamond q), \Box(p \vee r), \Box\neg q, \Diamond\neg r\}$. Laužtiniuose skliaustuose nurodome taisyklę, kuria remiantis gauta formulė (apibendrintoji formulė). Simboliu [S] žymime faktą, kad nagrinėjamoji formulė priklauso pradinei aibei.

$\Box(\neg p \vee \Diamond q)$ [S], $\Box(p \vee r)$ [S], $\mathrm{res}(\Box(\neg p \vee \Diamond q), \Box(p \vee r))$ [r], $\Box\mathrm{res}(\neg p \vee \Diamond q, p \vee r))$ [m1], $\Box(\Diamond q \vee r)$ [c1], $\Diamond\neg r$ [S], $\mathrm{res}(\Box(\Diamond q \vee r), \Diamond\neg r))$ [r], $\Diamond\mathrm{res}(\Diamond q \vee r, \neg r)$ [m2], $\Diamond\Diamond q$ [c1], $\Diamond q$ [prast.], $\Box\neg q$ [S], $\mathrm{res}(\Diamond q, \Box\neg q)$ [r], $\Diamond\mathrm{res}(q, \neg q)$ [m2], $\Diamond \perp$ [c1], $\perp$ [prast.].

7.5 Kvantorinė modalumo logika S4

Net tą pačią modalumo logiką, pavyzdžiui, S4, atitinka skirtingos kvantorinės modalumo logikos. Jos skirstomos pagal individinių konstantų aibių, termų žymėjimų bei konstantų egzistavimo reikalavimus.

Individinių konstantų aibė. Ar ji viena ir ta pati visuose pasauliuose? Jei taip, tai sakoma, kad *individinių konstantų aibė pastovi.* Jei ne, tai sakoma, nagrinėjama *kintanti individinių konstantų aibė.* Iš logikų su kintančiomis individinių konstantų aibėmis išskiriama logika su *monotonine individinių konstantų aibe.* Taip vadinamos logikos, tenkinančios sąlygą: jei iš pasaulio v galima patekti į pasaulį w (tiksliau, $R(v, w) = t$, R – pasaulių sąryšis), tai pasaulio v individinių konstantų aibė yra w individinių konstantų poaibis.

Termų žymėjimai. Jei bet kuris simbolis apibrėžiamas vienodai visuose gretimuose pasauliuose v, w, t.y. $R(v, w) = t$, tai logika vadinama *fiksuotąja,* priešingu atveju – *nefiksuotąja.*

Objektų (konstantų) egzistavimas. Jei nesvarbu, koks yra pasaulis w, nagrinėjamosios logikos kalbos n-vietis funkcinis simbolis f ir pasaulio w individinių konstantų aibės elementai $a_1, \ldots, a_n$, $f(a_1, \ldots, a_n)$ taip pat priklauso pasaulio w individinių konstantų aibei, tai logika vadinama *lokaliąja*, priešingu atveju – *nelokaliąja.*

Šiame skyrelyje nagrinėsime tik kvantorinę modalumo logiką S4, gautą iš klasikinės predikatų logikos, papildžius ją atitinkamomis modalumo operatorių aksiomomis bei taisyklėmis. Pavyzdžiui, sekvencinis kvantorinės modalumo logikos S4 skaičiavimas susideda iš klasikinės logikos sekvencinio skaičiavimo G, aprašyto 6.3 skyrelyje, ir modalumo operatorių taisyklių, aprašytų 7.3 skyrelyje. Pateikiame porą išvedamų sekvencijų pavyzdžių.

Pavyzdžiai:

1. Sekvencija $\vdash \Box\forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$ išvedama taip:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x) \vdash A(a)}{\forall x A(x), \Box\forall x A(x) \vdash A(a)}}{\Box\forall x A(x) \vdash A(a)}}{\Box\forall x A(x) \vdash \Box A(a)}}{\Box\forall x A(x) \vdash \forall x\Box A(x)}}{\vdash \Box\forall x A(x) \to \forall x\Box A(x)}.$$

2. Sekvencijos $\Box\forall x A(x) \& \Box\forall x B(x) \vdash \Box\forall x (A(x) \& B(x))$ išvedimas yra toks:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x), B(a), \forall x B(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \qquad M}{A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x), B(a), \forall x B(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)}}{A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x), \forall x B(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)}}{A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)}}{\forall x A(x), \Box\forall x A(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)}}{\Box\forall x A(x), \Box\forall x B(x) \vdash A(a) \& B(a)}}{\Box\forall x A(x), \Box\forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \& B(x))}}{\Box\forall x A(x), \Box\forall x B(x) \vdash \Box\forall x (A(x) \& B(x))}}{\Box\forall x A(x) \& \Box\forall x B(x) \vdash \Box\forall x (A(x) \& B(x))}.$$

Čia M yra sekvencija $A(a), \forall x A(x), \Box\forall x A(x), B(a), \forall x B(x), \Box\forall x B(x) \vdash B(a)$.

Logika, kurioje įrodoma $\Box\forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$, yra monotoninė. Jei logikoje įrodoma $\forall x A(x) \to A(t)$, t – bet kuris pagrindinis nagrinėjamoje kalboje termas, tai logika yra fiksuota ir lokali. Taigi, papildę klasikinį skaičiavimą G modalumo operatorių taisyklėmis, gauname monotoninę, fiksuotą ir lokalią logiką. Atkreipiame dėmesį, kad tokiame skaičiavime sekvencija $\forall x \Box A(x) \vdash \Box\forall x A(x)$ neišvedama. Formulė $\forall x \Box A(x) \to \Box\forall x A(x)$ vadinama *Barcano formule.*

Aprašysime sekvencinį kvantorinės modalumo logikos skaičiavimą, kai nagrinėjamose formulėse yra tik loginės operacijos $\neg$, &, $\vee$ ir neiginys gali būti tik prieš atomines formules. Tokias formules vadiname *teigiamosiomis*. Kaip ir anksčiau, formulių antecedente bei sukcedente tvarka nėra fiksuota. Pavyzdžiui, sekvencijoje $\Gamma, F \vdash \Delta$ išskirtoji formulė yra kuri nors F iš antecedento, bet nebūtinai paskutinė. Aprašysime skaičiavimą, kuriame $G \vdash$ išvedama tada ir tiktai tada, *kai G yra tapačiai klaidinga*.

Aksiomos: $\Gamma, F, \neg F \vdash$.

Taisyklės:

$$(\&)\quad \frac{\Gamma, F, G \vdash}{\Gamma, F\&G \vdash}, \qquad (\vee)\quad \frac{\Gamma, F \vdash \quad \Gamma, G \vdash}{\Gamma, F \vee G \vdash},$$

$$(\Box)\quad \frac{\Gamma, F, \Box F \vdash}{\Gamma, \Box F \vdash}, \qquad (\Diamond)\quad \frac{\Gamma^*, F \vdash}{\Gamma, \Diamond F \vdash},$$

$$(\forall)\quad \frac{\Gamma, F(t), \forall x F(x) \vdash}{\Gamma, \forall x F(x) \vdash}, \qquad (\exists)\quad \frac{\Gamma, F(a) \vdash}{\Gamma, \exists x F(x) \vdash}.$$

Sąrašas Γ^* susideda iš visų Γ formulių, prasidedančių operatoriumi $\Box$, t – kuris nors termas laisvas kintamojo x atžvilgiu formulėje F, a – naujas laisvasis kintamasis, neįeinantis į apatinę sekvenciją.

Dar 1962 m. S. Kripke įrodė, kad logikų K, T, D, S4, S5 klasė formulių, kuriose yra tik du skirtingi vienviečiai predikatiniai kintamieji, neišsprendžiama. Rusų logikas V.P. Orevkov 1967 m. įrodė neišsprendžiamumą klasės logikos S5 formulių, kuriose yra tik vienas vienintelis predikatinis kintamasis.

Kaip ir klasikinėje logikoje, egzistavimo kvantorius galima eliminuoti įvedus funkcinius simbolius. Pateikiame italų logikės M. Cialdea Mayer aprašytą skulemizavimą. Jis logikų K, D, T, S4 formulėms vienodas. Nagrinėkime tik teigiamas formules, kuriose taikant klasikinės logikos ekvivalentumus jau neįmanoma kvantorių iškelti į kurio nors poformulio pradžią. Pavyzdžiui, prieš skulemizuojant teigiama formulė $\forall x \Box P(x) \vee \Diamond \exists y(Q(y)\&\neg P(y))$ visų pirma turėtų būti transformuojama į $\forall x(\Box P(x) \vee \Diamond \exists y(Q(y)\&\neg P(y)))$, o paskui jau skulemizuojama. Be to, tarsime, kad formulė uždara ir nėra dviejų skirtingų kvantorinių kompleksų įeičių su vienodais kintamaisiais. Taigi, sakykime, kad formulė F tenkina aprašytąsias sąlygas. Tuomet skulemizuotoji $\mathrm{Sk}(F)$ gaunama žingsnis po žingsnio taikant operatorių Skm tol, kol jį įmanoma taikyti:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sk}(F) = \mathrm{Skm}(F, 0),\\
&\mathrm{Skm}(P, n) = P, \text{ jei } P \text{ yra litera},\\
&\mathrm{Skm}(A\&B, n) = \mathrm{Skm}(A, n)\&\mathrm{Skm}(B, n),\\
&\mathrm{Skm}(A \vee B, n) = \mathrm{Skm}(A, n) \vee \mathrm{Skm}(B, n),\\
&\mathrm{Skm}(\Box A, n) = \Box\mathrm{Skm}(A, n+1),\\
&\mathrm{Skm}(\Diamond A, n) = \Diamond\mathrm{Skm}(A, n+1),\\
&\mathrm{Skm}(\forall x A(x), n) = \mathrm{Skm}(A(x^n), n),\\
&\mathrm{Skm}(\exists x A(x), n) = \mathrm{Skm}(A(f_x^n(y_1, \ldots, y_m)), n).
\end{aligned}$$

Čia f_x yra naujasis funkcinis simbolis, o $y_1, \ldots, y_m$ – pilnas formulės $\exists x A(x)$ laisvųjų kintamųjų sąrašas.

Pavyzdys. Skulemizuokime formulę

$$F = \forall x\Box(P(x)\&\Diamond\exists y(Q(x, y) \vee \Box\forall u P(u, y))):$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Skm}(F, 0) = \mathrm{Skm}(\forall x\Box(P(x)\&\Diamond\exists y(Q(x, y) \vee \Box\forall u P(u, y))), 0) =\\
&\mathrm{Skm}(\Box(P(x^0)\&\Diamond\exists y(Q(x^0, y) \vee \Box\forall u P(u, y))), 0) =\\
&\Box\mathrm{Skm}(P(x^0)\&\Diamond\exists y(Q(x^0, y) \vee \Box P(u, y)), 1) =\\
&\Box(\mathrm{Skm}(P(x^0), 1)\&\mathrm{Skm}(\Diamond\exists y(Q(x^0, y) \vee \Box\forall u P(u, y)), 1)) =\\
&\Box(P(x^0)\&\Diamond(\mathrm{Skm}(\exists y(Q(x^0, y) \vee \Box\forall u P(u, y)), 2))) =\\
&\Box(P(x^0)\&\Diamond(\mathrm{Skm}(Q(x^0, f_y^2(x^0)) \vee \Box\forall u P(u, f_y^2(x_0))), 2)) =\\
&\Box(P(x^0)\&\Diamond(\mathrm{Skm}(Q(x^0, f_y^2(x^0)), 2) \vee \mathrm{Skm}(\Box\forall u P(u, f_y^2(x^0)), 2))) =\\
&\Box(P(x^0)\&\Diamond(Q(x^0, f_y^2(x^0)) \vee \Box\mathrm{Skm}(\forall u P(u, f_y^2(x^0), 3))) =\\
&\Box(P(x^0)\&\Diamond(Q(x^0, f_y^2(x^0)) \vee \Box\mathrm{Skm}(P(u^3, f_y^2(x^0)), 3))) =\\
&\Box P(x^0)\&\Diamond(Q(x^0, f_y^2(x^0)) \vee \Box P(u^3, f_y^2(x^0)))).
\end{aligned}$$

Kaip ir klasikinėje logikoje, pagrindinės skulemizuotosios formulės gaunamos pakeitus visas kintamųjų įeitis pagrindiniais termais. Tik modalumo logikos atveju, kai kintamojo laipsnis yra i, jį leidžiama pakeisti tik termais, kuriuose bet kurio funkcinio simbolio laipsnis neviršija i. Remdamasi skulemizacija, M. Cialdea Mayer 1991 m. aprašė rezoliucijų metodą kvantorinėms logikoms D, T, S4. G. Mints 1994 m. aprašė rezoliucijų metodą neskulemizuotoms logikos S4 formulėms.

7.6 Laiko logikos

Uždaviniai, formalizuojami klasikinės logikos formulėmis, atskleidžia nagrinėjamų objektų ar reiškinių statinę būseną. Keičiantis laikui, kinta objektų vertės, todėl formalizavimui reikia kitokios logikos, kuri atsižvelgtų į laiko faktorių.

Visų pirma nagrinėkime laiko logiką, kurios modelis yra *baigtiniai orientuoti grafai.* Raide V žymime baigtinę loginių kintamųjų aibę.

7.15 apibrėžimas. *Laiko logikos Kripke struktūra vadiname ketvertą* $M = (S, I, R, L)$; *čia:* S *– kuri nors baigtinė aibė, vadinama būsenų aibe;* $I \subseteq S$ *– netuščia aibė, vadinama pradinių būsenų aibe;* $R \subseteq S \times S$ *– perėjimų sąryšio aibė;* L: $S \times 2^V$ *– loginių kintamųjų interpretacijų aibė.*

Kripke struktūra vaizduojama orientuotu baigtiniu grafu, kurio viršūnės yra būsenos, o lankai atitinka perėjimų sąryšį. Iš viršūnės s eina lankas į s', jei $(s, s') \in R$. Be to, visos viršūnės pažymėtos V poaibiais, t.y. tais V loginiais kintamaisiais, kurie nagrinėjamoje viršūnėje (būsenoje) laikomi teisingais.

Baigtinę viršūnių seką $s_0, s_1, \ldots, s_k$ vadiname keliu iš s_0 į s_k, jei $(s_i, s_{i+1}) \in R$ $(i = 0, 1, \ldots, k - 1)$.

Kaip įprasta, raidėmis t, k žymime logines konstantas *tiesa* ir *melas.* Nagrinėjamoje logikoje yra keturi laiko operatoriai:

$\circ$: *kitoje (sekančioje) kelio viršūnėje,*
$\Diamond$: *kurioje nors kelio viršūnėje,*
$\Box$: *visose kelio viršūnėse,*
U: *iki tam tikros viršūnės.*

7.16 apibrėžimas (formulės):

1) *t ir k yra formulės.*

2) *Loginis kintamasis yra formulė (atominė).*

3) *Jei F yra formulė, tai $\neg F$ – taip pat formulė.*

4) *Jei F, G yra formulės, tai $(F \vee G)$, $(F \& G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ – taip pat formulės.*

5) *Jei F yra formulė, tai $\circ F$, $\Diamond F$, $\Box F$ yra* ***pagalbinės formulės****.*

6) *Jei F, G yra formulės, tai (FUG) yra* ***pagalbinė formulė****.*

7) *Jei F yra pagalbinė formulė, tai $\forall F$, $\exists F$ yra formulės.*

Kaip matome iš apibrėžimo, reiškiniai $\Box\Box F$, $\Diamond\Diamond F$ nėra nei formulės, nei pagalbinės formulės.

Paaiškinsime formulių semantiką. Tarkime, $M = (S, I, R, L)$ yra Kripke struktūra virš loginių kintamųjų aibės, V ir G – struktūrą atitinkantis orientuotas grafas, s – kuri nors viršūnė, $\pi = s_0, s_1, \ldots$ – kuris nors grafo kelias, F –

formulė, Π – pagalbinė formulė. Paaiškinsime, kaip suprantamas tvirtinimas, kad *F yra teisinga struktūros M būsenoje s* (žymime $M, s \models F$) ir *Π yra teisinga kelyje π* (žymime $M, \pi \models \Pi$). Taikysime indukciją pagal F, Π pavidalus.

1. $M, s \models p$, jei loginis kintamasis p teisingas struktūroje M.

2. $M, s \models G \vee H$, jei $M, s \models G$ arba $M, s \models H$. Panašiai apibrėžiama, kai $F = \neg G$, $F = G \& H$, $F = G \rightarrow H$, $F = G \leftrightarrow H$.

3. $M, s \models \forall G$, jei visuose keliuose π, prasidedančiouse viršūne s, galioja $M, \pi \models G$.

4. $M, s \models \exists G$, jei kai kuriuose keliuose π, prasidedančiuose viršūne s, galioja $M, \pi \models G$.

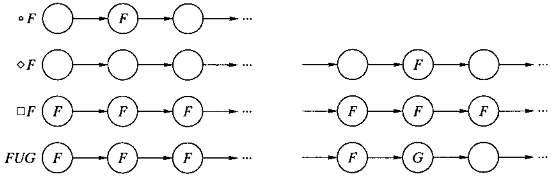
5. $M, \pi \models \circ G$, jei $M, s_1 \models G$.

6. $M, \pi \models \Diamond G$, jei egzistuoja toks $i \geqslant 0$, kad $M, s_i \models G$.

7. $M, \pi \models \Box G$, jei su visais $i \geqslant 0$ $M, s_i \models G$.

8. $M, \pi \models GUH$, jei egzistuoja toks $i \geqslant 0$, kad $M, s_i \models H$, ir su visais $j < i$ $M, s_j \models G$.

Taigi kvantoriais $\forall$, $\exists$ nusakome tam tikras kelių savybes, o laiko operatoriais $\circ$, $\Box$, $\Diamond$, U – viršūnių savybes. Laiko operatorių semantiką galima paaiškinti tokiomis schemomis:



7.17 apibrėžimas. *Sakome, kad formulė F teisinga Kripke struktūroje M (žymime $M \models F$), jei, esant bet kuriai pradinei būsenai $s \in I$, $M, s \models F$.*

7.18 apibrėžimas. *Sakome, kad formulės F, G ekvivalenčios, jei bet kurioje Kripke struktūroje $M \models F$ tada ir tiktai tada, kai $M \models G$.*

Kaip matome, teisingumo apibrėžime figūruoja pradinės būsenos. Teisinga tokia lema.

7.2 lema. *Tarkime, F yra kuri nors formulė ir Kripke strutūroje M yra tik viena pradinė būsena s. Tuomet $M \models F$ tada ir tiktai tada, kai $M, s \models F$.*

Nagrinėkime dar vieną laiko logiką – ***tiesinę laiko logiką***. Jos abėcėlėje yra *paskesniojo nario* operatorius $\circ$. Skaitome: *kitu laiko momentu*. Operatorius $\Diamond$, $\Box$, kaip ir $\circ$, vadiname *laiko operatoriais* ir skaitome: *visada* ($\Box$), *kai kada* ($\Diamond$). Nors tikslesnė jų semantika būtų: *pradedant nuo dabar, visada ateityje* ($\Box$) ir *pradedant nuo dabar, kartais ateityje* ($\Diamond$). Tiesinės laiko logikos modelis yra natūraliųjų skaičių aibė. Formulės apibrėžimas gaunamas iš 7.1 (teiginių modalumo logikos formulės) apibrėžimo, pakeitus 2 punktą tokiu:

2. *Jei F yra formulė, tai $\neg F$, $\Box F$, $\Diamond F$, $\circ F$ – taip pat formulės.*

Pateiksime keletą tiesinės laiko logikos skaičiavimų, kurių formulėse nėra operatoriaus $\Diamond$, ir vieną – su laiko operatoriumi U. Kaip ir anksčiau, laikysime $\Diamond F \equiv \neg\Box\neg F$.

Hilberto tipo skaičiavimas. *Aksiomos*:

1.1. $A \to (B \to A)$,

...

4.3. $\neg\neg A \to A$,

5.1. $\Box A \to (A \& \circ \Box A)$,

5.2. $(A \& \circ \Box A) \to \Box A$,

5.3. $\circ(A \to B) \to (\circ A \to \circ B)$,

5.4. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

5.5. $\neg \circ A \to \circ\neg A$,

5.6. $\circ\neg A \to \neg \circ A$.

Taisyklės:

$$\frac{A, \quad A \to B}{B}, \qquad \frac{A}{\Box A}, \qquad \frac{A}{\circ A}.$$

Sekvencinis skaičiavimas gaunamas papildžius klasikinį sekvencinį skaičiavimą struktūrinėmis taisyklėmis ir tokiomis:

$$(\circ)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Sigma, \circ\Gamma \vdash \circ\Delta, \Pi}, \qquad (\circ\Box)\quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash \circ\Box A, \Delta}{\Gamma \vdash \Box A, \Delta}.$$

Nė viena iš formulių, įeinančių į Σ, Π, neprasideda operatoriumi $\circ$.

$$(\Box\vdash)\quad \frac{A, \circ\Box A, \Gamma \vdash \Delta}{\Box A, \Gamma \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Box\Gamma \vdash A}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Box A, \Pi}.$$

Nė viena iš formulių, įeinančių į Σ, Π, neprasideda operatoriumi $\Box$.

Yra ir kitokių tiesinės laiko logikos variantų.

Tiesinė laiko logika su indukcijos aksioma. Prie aprašytojo Hilberto tipo skaičiavimo pridedama aksioma

5.7. $(A\&\Box(A \to \circ A)) \to \Box A$.

Ją atitinkanti taisyklė sekvenciniame skaičiavime yra

$$(\vdash\Box)\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B \quad B \to \circ B, \quad B \to A}{\Gamma \vdash \Delta, \Box A}.$$

Be jos, išlieka dvi (iš keturių) taisyklės, charakterizuojančios laiko operatorius – ($\circ$) ir ($\Box\vdash$).

Tiesinės laiko logikos Hilberto tipo skaičiavimas PLTL su laiko operatoriumi U.

Aksiomos:

1.1–4.3,

5.1. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

5.2. $\circ\neg A \to \neg\circ A$,

5.3. $\neg\circ A \to \circ\neg A$,

5.4. $\circ(A \to B) \to (\circ A \to \circ B)$,

5.5. $\Box A \to (A\&\circ\Box A)$,

5.6. $\Box(A \to \circ A) \to (A \to \Box A)$,

5.7. $(AUB) \to \Diamond B$,

5.8. $(AUB) \to (B \vee (A\&\circ(AUB)))$,

5.9. $(B \vee (A\&\circ(AUB))) \to (AUB)$.

Taisyklės:

$$\frac{A, \quad A \to B}{B}, \qquad \frac{A}{\Box A}.$$

D. Gabbay 1980 m. įrodė skaičiavimo PLTL pilnumą ir korektiškumą.

7.7 Pratimai

1. Pasaulių aibė yra N_+. Pasaulių sąryšis $R(x, y)$: $R(n, n+2)$, $R(n, n+3)$, $R(n, n+5)$ teisingas su visais n, p pasaulyje α tada ir tiktai tada, kai α yra lyginis skaičius, q – kai α nelyginis skaičius, r – α yra pirminis skaičius. Ar įvykdomos formulės:

   a) $\Box r$, b) $\Box\Diamond q$, c) $\Box(p\vee(q\vee\Box r))$, d) $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$?

2. Pasaulių aibė yra *visų tiesių plokštumoje aibė*, pasaulių sąryšis $R(x, y)$ teisingas tada ir tiktai tada, kai x ir y statmenos arba lygiagrečios skirtingos tiesės, p teisingas pasaulyje α, jei α kerta Ox ašį. Ar įvykdomos formulės:

   a) $\Box\Diamond p$, b) $\Box\Box p \vee \Diamond\Diamond p$?

3. Raskite sekvencijų išvedimus modalumo logikoje S4:

   a) $\Box(p \vee q) \vdash \Diamond(p \vee q)$, b) $\Diamond(p \vee q) \vdash \Diamond p \vee \Diamond q$,

   c) $\Diamond p \vee \Diamond q \vdash \Diamond(p \vee q)$.

4. Ar išvedamos modalumo logikoje S4 sekvencijos:

   a) $\Box(p \vee \Box p \vee q) \vdash \Box(\Box p \vee q)$, b) $\Box\Diamond p \vdash \Diamond\Box p$?

5. Transformuokite į klasikinės logikos formulę:

   a) $\Diamond(\Box p \to \Box(\neg q \vee r))$, b) $\Box p \& \Box\Diamond(q \to r)$.

6. Redukuokite į disjunktų ir formulių aibę:

   a) $\Box(\Box p \vee \Diamond q) \& \Diamond\Box\neg q$, b) $\Box(\Box p \& (\Box q \vee (\Box r \vee \neg p)))$.

7. Išveskite tuščią disjunktą iš aibės:

   a) $S = \{\Box\Diamond\neg w, \Box\neg r, \Box(\neg q \vee r \vee \Box w), \Box(p \vee \Diamond q), \neg p\}$,

   b) $S = \{\Box(\neg p_4 \vee \neg p_2), \Box(\neg p_3 \vee \Diamond p_4), \Box(\neg p_2 \vee \Box p_3), \Box(p_1 \vee \Box p_2), \neg p_1\}$.

8. Įrodykite, kad sekvenciniame skaičiavime $\forall x \Box A(x) \vdash \Box\forall x A(x)$ neišvedama.

9. Raskite sekvencijų išvedimus:

   a) $\exists x \Box A(x) \vee \exists x \Box B(x) \vdash \Box\exists x(A(x) \vee B(x))$,

   b) $\exists x \Box\forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x \neg\Box\neg A(x, y)$.

10. Skulemizuokite formules:

    a) $\forall x \Box\exists y \Diamond\forall u \Box(P(x, y) \& \neg\Box Q(y, u))$,

    b) $\Box\Diamond\forall x \Box\exists y(P(x, y) \& \Box\forall z R(x, y, z))$,

    c) $\forall x \exists y \forall u(\Box P(x) \vee \Diamond\Box Q(x, y))$.

7.7 Pratimai

1. Pasaulių aibė yra N_+. Pasaulių sąryšis $R(x, y)$: $R(n, n+2)$, $R(n, n+3)$, $R(n, n+5)$ teisingas su visais n, p pasaulyje α tada ir tiktai tada, kai α yra lyginis skaičius, q – kai α nelyginis skaičius, r – α yra pirminis skaičius. Ar įvykdomos formulės:

a) $\Box r$, b) $\Box\Diamond q$, c) $\Box(p\vee(q\vee\Box r))$, d) $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$?

2. Pasaulių aibė yra *visų tiesių plokštumoje aibė*, pasaulių sąryšis $R(x, y)$ teisingas tada ir tiktai tada, kai x ir y statmenos arba lygiagrečios skirtingos tiesės, p teisingas pasaulyje α, jei α kerta Ox ašį. Ar įvykdomos formulės:

a) $\Box\Diamond p$, b) $\Box\Box p \vee \Diamond\Diamond p$?

3. Raskite sekvencijų išvedimus modalumo logikoje S4:

a) $\Box(p \vee q) \vdash \Diamond(p \vee q)$, b) $\Diamond(p \vee q) \vdash \Diamond p \vee \Diamond q$,

c) $\Diamond p \vee \Diamond q \vdash \Diamond(p \vee q)$.

4. Ar išvedamos modalumo logikoje S4 sekvencijos:

a) $\Box(p \vee \Box p \vee q) \vdash \Box(\Box p \vee q)$, b) $\Box\Diamond p \vdash \Diamond\Box p$?

5. Transformuokite į klasikinės logikos formulę:

a) $\Diamond(\Box p \to \Box(\neg q \vee r))$, b) $\Box p \& \Box\Diamond(q \to r)$.

6. Redukuokite į disjunktų ir formulių aibę:

a) $\Box(\Box p \vee \Diamond q) \& \Diamond\Box\neg q$, b) $\Box(\Box p \& (\Box q \vee (\Box r \vee \neg p)))$.

7. Išveskite tuščią disjunktą iš aibės:

a) $S = \{\Box\Diamond\neg w, \Box\neg r, \Box(\neg q \vee r \vee \Box w), \Box(p \vee \Diamond q), \neg p\}$,

b) $S = \{\Box(\neg p_4 \vee \neg p_2), \Box(\neg p_3 \vee \Diamond p_4), \Box(\neg p_2 \vee \Box p_3), \Box(p_1 \vee \Box p_2), \neg p_1\}$.

8. Įrodykite, kad sekvenciniame skaičiavime $\forall x \Box A(x) \vdash \Box\forall x A(x)$ neišvedama.

9. Raskite sekvencijų išvedimus:

a) $\exists x \Box A(x) \vee \exists x \Box B(x) \vdash \Box\exists x(A(x) \vee B(x))$,

b) $\exists x \Box\forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x \neg\Box\neg A(x, y)$.

10. Skulemizuokite formules:

a) $\forall x \Box\exists y \Diamond\forall u \Box(P(x, y) \& \neg\Box Q(y, u))$,

b) $\Box\Diamond\forall x \Box\exists y(P(x, y) \& \Box\forall z R(x, y, z))$,

c) $\forall x \exists y \forall u(\Box P(x) \vee \Diamond\Box Q(x, y))$.

8 skyrius
Loginės teorijos

8.1 Pirmosios eilės teorijos

Pirmosios eilės teorijos abėcėlę sudaro:

1) loginės operacijos ($\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$) ir kvantoriai ($\forall$, $\exists$),

2) individinių kintamųjų simboliai $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots,$

3) skliaustai (,).

Šių simbolių aibę pažymėkime raide A. Loginių operacijų sąrašas gali būti ir kitoks. Tik reikalaujama, kad jis sudarytų pilną aibę. Individinių kintamųjų simboliai gali būti žymimi ir kitaip. Pagrindinis reikalavimas – ta aibė turi būti numeruojamoji. Galime apsieiti ir su baigtine abėcėle. Tuo tikslu pakanka prie abėcėlės pridėti skaitmenis $0, 1, \ldots, 9$, o individinius kintamuosius naujojoje abėcėlėje rašyti žodžiais. Pavyzdžiui, vietoje x_5 rašyti $x5$. Aibė A yra visų pirmosios eilės teorijų abėcėlės dalis. Kiekviena konkreti teorija dar charakterizuojama elementais, būdingais tik tai teorijai. Tai konstantos, funkcijos, predikatai, t.y. teorijos abėcėlė yra $A \cup K$. Kalbėdami apie konkrečią teoriją, nurodome tik K, t.y. tą teoriją charakterizuojančias konstantas, funkcijas bei predikatus, ir vadiname tai *specifine teorijos abėcėle.*

Iš visų galimų formulių aibės išskiriama dalis, kuri vadinama *aksiomomis.* Pirmosios eilės teorijos aksiomas sudaro kurio nors (Hilberto, sekvencinio ir pan.) pirmosios eilės predikatų logikos skaičiavimo aksiomos ir *specifinės teorijos aksiomos,* būdingos tik tai konkrečiai teorijai. Be predikatų logikos taisyklių, kiekviena teorija gali turėti ir *specifines teorijos taisykles.* Nagrinėjame tik pirmosios eilės teorijas, todėl jas vadiname tiesiog teorijomis. Taigi norint apibūdinti teoriją, pakanka nurodyti specifinę abėcėlę, specifines aksiomas bei taisykles. Gauname formaliąją sistemą.

Teorija – tai visų uždarųjų išvedamų formaliojoje sistemoje formulių aibė.

Pateikiame pirmosios eilės Hilberto formaliųjų sistemų porą pavyzdžių. Joms priklauso 1.1–5.2 aksiomos ir taisyklės, aprašytos 6 skyriuje.

Dalinės tvarkos teorija. *Specifinė abėcėlė*: konstantų ir funkcinių simbolių nėra, o iš predikatų tėra vienintelis dvivietis $<$.

Specifinės aksiomos:

1) $\forall x \neg(x < x)$,
2) $\forall x \forall y \forall z((x < y \& y < z) \to x < z)$.

Grupių teorija. *Specifinė abėcėlė*: konstanta 0, dvivietė funkcija $+$ ir dvivietis predikatas $=$.

Specifinės aksiomos:

1) $\forall x \forall y \forall z((x + (y + z)) = ((x + y) + z))$,
2) $\forall x((0 + x) = x)$,
3) $\forall x \exists y((y + x) = 0)$,
4) $\forall x(x = x)$,
5) $\forall x \forall y((x = y) \to (y = x))$,
6) $\forall x \forall y \forall z((x = y) \to ((y = z) \to (x = z)))$,
7) $\forall x \forall y \forall z((y = z) \to (((x + y) = (x + z)) \& ((y + x) = (z + x))))$.

Jei aksiomų sąraše yra ir $\forall x \forall y((x + y) = (y + x))$, tai tokia grupių teorija vadinama *Abelio*.

8.1 teorema. *Jei $Q(p_1, \ldots, p_n)$ yra kuri nors tapačiai teisinga teiginių logikos formulė, $F_1, \ldots, F_n$ – kurios nors predikatų logikos formulės, tai $Q(F_1, \ldots, F_n)$ išvedama predikatų skaičiavime.*

Įrodymas. Kadangi $Q(p_1, \ldots, p_n)$ tapačiai teisinga, tai ji išvedama teiginių skaičiavime. Tame išvedime visus loginius kintamuosius $p_1, \ldots, p_n$ pakeiskime atitinkamai predikatų logikos formulėmis $F_1, \ldots, F_n$. Gauname išvedimą predikatų logikos formulės $Q(F_1, \ldots, F_n)$. Išvedime taikomos tik teiginių skaičiavimo aksiomos ir taisyklės. Jos priklauso ir predikatų skaičiavimui, todėl gauname nagrinėjamosios formulės išvedimą predikatų skaičiavime. Teorema įrodyta.

8.2 teorema. *Jei F yra uždara formulė ir teorijoje T neišvedama $\neg F$, tai, prijungę F prie teorijos T aksiomų, gauname neprieštaringą teoriją T'.*

Įrodymas. Tarkime, T' yra prieštaringa. Tada egzistuoja tokia formulė G, kad teorijoje T' išvedamos G ir $\neg G$, t.y. $\vdash_{T'} G$ ir $\vdash_{T'} \neg G$.

Remiantis 8.1 teorema, teorijoje T' išvedama formulė

$$G \to (\neg G \to \neg F).$$

Pritaikę du kartus *modus ponens* taisyklę, gauname, kad teorijoje T' išvedama formulė $\neg F$. Vadinasi,

$$F \vdash_T \neg F.$$

Kadangi formulė F uždara, tai pritaikę dedukcijos teoremą, gauname, kad teorijoje T išvedama $F \to \neg F$. Pagal 8.1 teoremą teorijoje išvedama ir $(F \to \neg F) \to \neg F$. Taigi, pritaikę *modus ponens*, gauname, kad teorijoje T išvedama $\neg F$. O tai prieštarauja teoremos sąlygai. Teorema įrodyta.

8.1 apibrėžimas. *Teorija T vadinama pilnąja, jei nesvarbu, kokia yra uždara formulė F, teorijoje T išvedama arba F, arba $\neg F$.*

8.3 teorema. *Jei teorijos T abėcėlė baigtinė ir ji neprieštaringa, tai galima ją papildyti iki pilnosios.*

Įrodymas. Teorijos abėcėlė yra baigtinė aibė, todėl uždarųjų formulių aibė yra skaičioji. Tarkime,

$$F_1, F_2, \ldots \tag{8.1}$$

yra pilnas sąrašas skirtingų uždarų teorijos T formulių.

Teorijas $T_0, T_1, T_2, \ldots$ konstruojame tokiu būdu:

$T_0 = T$, jei teorijoje T_i $(i = 1, 2, \ldots)$ neišvedama $\neg F_{i-1}$, tai T_i gaunama iš T_{i-1} prijungus prie jos aksiomą F_i (pagal 8.2 teoremą gautoji teorija nėra prieštaringa). Priešingu atveju $T_i = T_{i-1}$ (kartu ji nėra prieštaringa).

Simboliu $\widetilde{T}$ pažymėkime teoriją $\cup_{i=0}^{\infty} T_i$. Įrodysime, kad ji neprieštaringa. Tarkime, yra tokia formulė G, kad teorijoje $\widetilde{T}$ išvedama ji bei jos neiginys. Tarkime, kad jų išvedimai yra šios sekos:

$$H_1, H_2, \ldots, H_s, G, \qquad L_1, L_2, \ldots, L_v, \neg G.$$

Jose gali būti ne daugiau kaip $(s + v + 1)$ (8.1) sekos narių. Tarkime, k yra toks natūralusis skaičius, kad visų aptinkamų formulių iš (8.1) indeksai nagrinėjamose sekose neviršija k. Tuomet abi formulės G ir $\neg G$ išvedamos teorijoje T_k. O tai prieštarauja teiginiui, kad visos T_i neprieštaringos. Teorema įrodyta.

Pirmosios eilės teorijose su baigtiniu predikatų ir funkcinių simbolių abėcėle galima „eliminuoti“ lygybės predikatą. Naują dvivietį predikatą pažymėkime raide A ir teorijos aksiomų sąrašą papildykime aksiomomis:

$\forall x A(x,x)$,

$\forall x \forall y (A(x,y) \to A(y,x))$,

$\forall x \forall y \forall z ((A(x,y) \& A(x,y)) \to A(x,y))$.

Kiekvieną n-vietį predikatą iš specifinės abėcėlės atitinka n naujų aksiomų:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y ((A(x_1,y) \& P(x_1,x_2,\dots,x_n)) \to P(y,x_2,\dots,x_n)),$$
$$\dots$$
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y ((A(x_n,y) \& P(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)) \to P(x_1,\dots,x_{n-1},y)).$$

Kiekvieną n-vietę funkciją iš specifinės abėcėlės atitinka n naujų aksiomų:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (A(x_1,y) \to A(f(x_1,x_2,\dots,x_n), f(y,x_2,\dots,x_n))),$$
$$\dots$$
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (A(x_n,y) \to A(f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n), f(x_1,\dots,x_{n-1},y))).$$

8.2 Formalioji aritmetika

Italų matematikas G. Peano 1891 m. suformulavo penkias aritmetikos aksiomas:

(P1) Nulis yra natūralusis skaičius.

(P2) Kad ir koks būtų natūralusis x, egzistuoja paskesnis skaičius $s(x)$.

(P3) Kad ir koks būtų natūralusis x, nulis nelygus $s(x)$.

(P4) Jei $s(x) = s(y)$, tai $x = y$.

(P5) Tarkime, Q yra savybė, kurią tenkina nulis. Be to, kad ir koks būtų natūralusis x, tenkinantis savybę Q, $s(x)$ taip pat tenkina Q. Tuomet visi natūralieji skaičiai tenkina savybę Q (indukcijos principas).

R. Dedekind 1901 m. sukūrė pusiau aksiominę aritmetikos teoriją, kurią pavadino *Peano aksiomų sistema*. Ja remiantis, vėliau buvo aprašyta formalioji aritmetika ir kai kurie jos aksiominiai variantai.

Peano aritmetika. *Specifinė abėcėlė*: konstanta 0, vienvietė funkcija s, dvivietės funkcijos $\cdot$, $+$, dviviečiai predikatai $=$, $<$.

Specifinės aksiomos:

1) $\forall x \neg (s(x) = 0)$,

2) $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$,

3) $\forall x \forall y (x = y \to s(x) = s(y))$,

4) $\forall x \forall y \forall z (x = y \to (x = z \to y = z))$,

5) $\forall x \neg(x < 0)$,

6) $\forall x \forall y(x < s(y) \to (x < y \lor x = y))$,

7) $\forall x \forall y((x < y \lor x = y) \to x < s(y))$,

8) $\forall x(x + 0 = x)$,

9) $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$,

10) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$,

11) $\forall x \forall y(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$,

12) $\forall x_1 \ldots \forall x_n((F(x_1, \ldots, x_n, 0) \& \forall y(F(x_1, \ldots, x_n, y) \to$
$\to F(x_1, \ldots, x_n, s(y)))) \to \forall y F(x_1, \ldots, x_n, y))$.

Čia F yra kuri nors nagrinėjamosios teorijos formulė. Pakeitę 12) aksiomą

12) $\forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)$,

gauname formaliąją teoriją, vadinamą ***Robinsono aritmetika***.

Iš specifinės abėcėlės išbraukus daugybą ir 10), 11) bei 12) specifines aksiomas, gaunama formalioji teorija, vadinama ***Presburgerio aritmetika***. Vokiečių matematikas M. Presburger 1929 m. įrodė, kad tokia teorija pilna ir išsprendžiama.

Sekvencinis Peano aritmetikos variantas. Nagrinėjame sekvencinį predikatų logikos skaičiavimą su lygybės predikatu. Skaičiavimui priklauso ir pjūvio taisyklė.

Specifinė abėcėlė: konstanta 0, funkcijos $\cdot$, $+$.
Specifinės aksiomos:

1) $s(t) = 0 \vdash$,

2) $s(t) = s(r) \vdash t = r$,

3) $t = r \vdash s(t) = s(r)$,

4) $\vdash t + 0 = t$,

5) $\vdash t + s(r) = s(t + r)$,

6) $\vdash t \cdot 0 = 0$,

7) $\vdash t \cdot s(r) = t \cdot r + t$.

Čia t, r yra nagrinėjamosios teorijos kurie nors termai.

Specifinė taisyklė (indukcijos schema):

$$\frac{\Gamma_1, F(x), \Gamma_2 \vdash \Delta_1, F(s(x)), \Delta_2}{\Gamma_1, F(0), \Gamma_2 \vdash \Delta_1, F(t), \Delta_2}.$$

Čia x neįeina į $F(0), \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$, t – bet kuris termas, $F(x)$ – kuri nors teorijos formulė.

Pavyzdžiai:

- Išvedamos sekvencijos:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{t = r, r = s \vdash r = s}{t = r, r = s \vdash t = s}}{t = r \vdash r = s \to t = s}}{\vdash t = r \to (r = s \to t = s)},$$

$$\cfrac{(pjv)\cfrac{\cfrac{4 \text{ aksioma}}{\vdash 0+0=0} \quad \cfrac{0+0=0 \vdash 0=0}{0+0=0 \vdash 0=0+0}}{\vdash 0=0+0} \qquad (ind)\cfrac{M}{0=0+0 \vdash t=0+t}}{\vdash t=0+t}.$$

- Medis M:

$$\cfrac{\cfrac{5 \text{ aksioma}}{\vdash 0+s(x)=s(0+x)} \quad \cfrac{\cfrac{0+s(x)=s(x), x=0+x \vdash s(x)=s(x)}{0+s(x)=s(0+x), x=0+x \vdash s(x)=s(0+x)}}{0+s(x)=s(0+x), x=0+x \vdash s(x)=0+s(x)}}{x=0+x \vdash s(x)=0+s(x)}.$$

Abejuose medžiuose visų pirma taikoma pjūvio taisyklė.

8.3 Peano aritmetikos nepilnumas

Sekvencinį Peano aritmetikos variantą vadiname PA teorija. Termus $0, s(0), s(s(0)), \ldots$ žymime $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots$ ir vadinsime juos *skaitmenimis*. PA teorijos pakanka, kad įrodytume viską, kas teisinga elementariojoje aritmetikoje. Pavyzdžiui, įrodomos sekvencijos:

$$\vdash t \cdot (r + s) = (t \cdot r) + (t \cdot s),$$

$$\vdash t \cdot \bar{2} = t + t.$$

Taip pat įrodoma, kad

$$\neg(m = n) \vdash \neg(s(m) = s(n)).$$

Todėl PA teorijos modelis yra begalinis, nes skirtingus skaitmenis atitinka skirtingi modelio srities elementai.

8.2 apibrėžimas. *Funkcija, kurios apibrėžimo ir reikšmių aibės yra natūraliųjų skaičių aibė, vadinama aritmetine.*

8.3 apibrėžimas. *Funkcija, kurios apibrėžimo aibė yra natūraliųjų skaičių aibė, o reikšmių – aibė $\{t, k\}$, vadinama aritmetiniu predikatu.*

8.4 apibrėžimas. *Aritmetinis predikatas $P(x_1, \ldots, x_n)$ apibrėžiamas* PA *teorijoje, jei egzistuoja tokia teorijos formulė su n laisvųjų kintamųjų $F(x_1, \ldots, x_n)$, kad bet kuriems natūraliesiems $m_1, \ldots, m_n$, teorijoje* PA *įrodoma*:

(a) $\vdash F(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$, *jei* $P(m_1, \ldots, m_n) = t$,
(b) $\vdash \neg F(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$, *jei* $P(m_1, \ldots, m_n) = k$.

Panašiai vartojama sąvoka *aritmetinė funkcija apibrėžiama* PA *teorijoje*.
PA teorijoje apibrėžiamų predikatų pavyzdžiai:

a) „$x < y$“ apibrėžiamas formule $\exists z(\neg(z = 0)\&(x + z = y))$,
b) „x *dalijasi iš* y“ apibrėžiamas formule $\exists z(x = z \cdot y)$.

PA teorijoje įrodomos ir tokios formulės:

1) $\forall x \forall z((z < x \to F(z)) \to F(x)) \to \forall x F(x)$. Tai yra *pilnosios indukcijos principas*.

Tarkime, kad savybė F yra tokia, kad nesvarbu, koks būtų natūralusis x, iš to, kad savybę tenkina bet kuris natūralusis mažesnis už x, išplaukia, kad ją tenkina ir x. Tuomet savybę F tenkina bet kuris natūralusis skaičius.

2) $F(x) \to \exists y(F(y)\&\forall z(z < y \to \neg F(z)))$. Tai yra *mažiausiojo skaičiaus principas.*

Jei kurią nors savybę tenkina nors vienas natūralusis skaičius, tai tarp natūraliųjų skaičių, tenkinančių F, egzistuoja mažiausias.

Apskritai bet kuriame *skaičių teorijos* vadovėlyje įrodytos teoremos išvedamos ir PA teorijoje. PA teorija turi tokias svarbias savybes:

8.4 teorema. PA *teorija yra neprieštaringa.*

8.5 teorema. *Visos primityviai rekursyvios funkcijos bei predikatai apibrėžiami* PA *teorijoje.*

Kiekvienai PA abėcėlės formulei F priskirkime po natūralųjį skaičių, kurį vadiname *formulės Gödelio numeriu* (žymime $\mathrm{nm}(F)$). Iš pradžių sunumeruojame simbolius, kurie gali pasitaikyti nagrinėjamose formulėse:

$$\mathrm{nm}(\neg) = 1, \mathrm{nm}(\&) = 2, \mathrm{nm}(\vee) = 3, \mathrm{nm}(\rightarrow) = 4, \mathrm{nm}(() = 5, \mathrm{nm}()) = 6, \mathrm{nm}(\forall) = 7, \mathrm{nm}(\exists) = 8, \mathrm{nm}(=) = 9, \mathrm{nm}(0) = 10, \mathrm{nm}(s) = 11, \mathrm{nm}(+) = 12, \mathrm{nm}(\cdot) = 13, \mathrm{nm}(\vdash) = 14, \mathrm{nm}(x_n) = 15 + n.$$

Kiekviena nagrinėjamojo pavidalo formulė yra sunumeruotos abėcėlės žodis. Žodžio $F = e_1e_2\dots e_s$ numeris $\mathrm{nm}(F)$ yra $\Pi_{i=1}^{s} p_i^{\mathrm{nm}(e_i)}$; čia p_i yra i-asis pirminis skaičius. Pavyzdžiui, formulės $\exists x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2)$ numeris yra $2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^7 \cdot 7^{17} \cdot 11^5 \cdot 13^{16} \cdot 17^9 \cdot 19^{17} \cdot 23^6$. Panašiai numeruojamos ir baigtinės formulių bei sekvencijų sekos. Kartu kiekvienam sekvencijos išvedimui galima priskirti po vienintelį natūralųjį skaičių.

Dėl patogumo individinius kintamuosius žymime ir kitomis raidėmis: x, y, z, $x_1, y_1, z_1, \dots$.

Apibrėžiame predikatą $W(x, y)$ natūraliųjų skaičių aibėje: $W(x, y) = t$ tada ir tiktai tada, kai x yra kurios nors formulės $F(z)$ su vienu laisvuoju kintamuoju z *Gödelio numeris* ir y yra formulės $F(\bar{x})$ (t.y. sekvencijos $\vdash F(\bar{x})$) išvedimo PA teorijoje *Gödelio numeris* (vadinsime tiesiog numeriu).

Įrodyta, kad $W(x, y)$ yra primityviai rekursyvus predikatas. Todėl PA aritmetikoje egzistuoja apibrėžianti formulė $V(x_1, x_2)$, t.y. kad ir kokie būtų natūralieji skaičiai m_1, m_2, PA teorijoje įrodoma:

(a) $\vdash V(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$, jei $W(m_1, m_2) = t$,

(b) $\vdash \neg V(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$, jei $W(m_1, m_2) = k$.

Nagrinėjame formulę $\forall x_2 \neg V(x_1, x_2)$. Tarkime, m yra jos numeris. Formulė $\forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2)$ yra uždara. Ji tvirtina, kad $W(m, x_2)$ klaidingas su bet kuriuo natūraliuoju x_2, t.y. ji tvirtina, kad ją atitinkanti sekvencija

$$\vdash \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2) \tag{8.2}$$

neįrodoma PA teorijoje.

8.6 teorema. *Jei* PA *teorija nepriештaringa, tai* (8.2) *sekvencija neįrodoma* PA *teorijoje.*

Įrodymas. Remiantis 8.4 teorema, PA teorija neprieštaringa. Tarkime, (8.2) įrodoma ir l yra kurio nors įrodymo numeris. Tuomet $W(m, l) = t$ ir todėl

$\vdash V(\bar{m}, \bar{l})$ įrodoma. Bet juk taip pat įrodoma ir $\vdash \neg V(\bar{m}, \bar{l})$:

$$\text{(pjv)}\,\dfrac{\dfrac{\text{prielaida}}{\vdash \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{aksioma}}{\neg V(\bar{m}, \bar{l}), \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2) \vdash \neg V(\bar{m}, \bar{l})}}{\forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2) \vdash \neg V(\bar{m}, \bar{l})}}{\vdash \neg V(\bar{m}, \bar{l})}.$$

Tai reikštų, kad PA teorija prieštaringa. Taigi

$$\text{su bet kuriuo } n \quad W(m, n) = k. \tag{8.3}$$

Teorema įrodyta.

8.5 apibrėžimas. *Teorija K vadinama ω-neprieštaringa, jei nesvarbu, kokia yra teorijos formulė $F(x)$, iš to, kad $F(\bar{n})$ įrodoma su bet kuriuo n, išplaukia, kad teorijoje K neįrodoma $\exists x \neg F(x)$.*

Taigi teorija *ω-prieštaringa*, jei yra tokia teorijos formulė $F(x)$, kad nesvarbu, koks būtų natūralusis n, teorijoje įrodoma $F(\bar{n})$, taip pat ir $\exists x \neg F(x)$.

Pastebėsime, kad teorijos neprieštaringumas išplaukia iš ω-neprieštaringumo, nes jei neįrodoma $\exists x \neg F(x)$, tai ne visos teorijos formulės įrodomos.

Standartinis PA modelis yra ω-neprieštaringas.

8.7 teorema. *Jei* PA *teorija ω-neprieštaringa, tai joje neįrodoma*

$$\vdash \neg \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2). \tag{8.4}$$

Įrodymas. Iš ω-neprieštaringumo išplaukia PA teorijos neprieštaringumas. Todėl pagal 8.6 teoremą (8.3) teisinga, t.y. $W(m, n) = k$ su bet kuriuo n. Iš čia išplaukia, kad PA teorijoje $\vdash \neg V(\bar{m}, \bar{n})$ įrodoma su bet kuriuo n. O iš PA teorijos ω-neprieštaringumo išplaukia, kad $\vdash \exists x_2 \neg\neg V(\bar{m}, x_2)$ neįrodoma, t.y. $\vdash \neg \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2)$. Teorema įrodyta.

Šias 8.6 ir 8.7 teoremas 1931 m. įrodė austrų matematikas *K. Gödel*. Dažniausiai jos abi vadinamos vienu vardu – *Gödelio teorema apie aritmetikos nepilnumą*.

PA teorijos nepilnumą galima įrodyti ir nesinaudojant ω-neprieštaringumu. Pakanka neprieštaringumo, t.y. silpnesnio rezultato, kad PA yra neprieštaringa. Tai 1936 m. įrodė J. B. Rosser, sukonstravęs tokią PA formulę, kad nei ji, nei jos neigimas nėra įrodomi PA teorijoje.

Prijunkime prie PA aksiomų $\neg \forall x_2 \neg V(\bar{m}, x_2)$. Pagal 8.2 teoremą gausime neprieštaringą teoriją. Pažymėkime ją PA$'$. Teorijoje PA$'$ įrodoma $\vdash \exists x_2 V(\bar{m}, x_2)$.

Tačiau iš (8.3) išplaukia, kad teorijoje PA$'$ įrodoma ir $\vdash \neg V(\bar{m}, \bar{n})$. Vadinasi, PA$'$ nėra prieštaringa, bet yra ω-prieštaringa.

8.8 teorema. *Visų teisingų uždarų* PA *teorijos formulių aibė nėra nei rekursyvioji, nei rekursyviai skaiti.*

Įrodymas. Tarkime, $f(x)$ yra primityviai rekursyvi funkcija, kurios reikšmių aibė $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$ nėra rekursyvi. Taigi A yra rekursyviai skaiti, bet nėra rekursyvi. Dvivietis predikatas $y = f(x)$ primityviai rekursyvus. Todėl pagal 8.5 teoremą atsiras jį apibrėžianti PA teorijos formulė $F(x, y)$. $F(m, n) = t$ tada ir tiktai tada, kai $n = f(m)$. Be to, sekvencija $\vdash F(\bar{m}, \bar{n})$ išvedama.

Nagrinėjame formules $\exists x F(x, \bar{n})$. Jos uždaros. Pagal natūralųjį n negalime pasakyti, ar formulė teisinga, nes kartu atpažintumėme, ar $n \in A$. Tarkime, visų uždarųjų teisingų formulių aibė $G_0, G_1, G_2, \ldots$ yra rekursyviai skaiti. Tuomet rekursyviai skaiti yra ir visų klaidingų formulių aibė $\neg G_0, \neg G_1, \neg G_2, \ldots$.

Visų uždarųjų formulių aibė rekursyvi. Ji suskaidoma į du bendrų elementų neturinčius poaibius. Todėl abu jie nėra nei rekursyviai skaitūs, nei rekursyvūs. Teorema įrodyta.

8.4 Aksiominė aibių teorija

Bet kurios aibės A atžvilgiu prasmingas klausimas: *Ar A yra aibės A* elementas? Kai kurios aibės turi tokią savybę, o kai kurios – ne. Pavyzdžiui, *visų Vilniaus miesto troleibusų aibė* nėra troleibusas ir, aišku, ji negali būti pačios savęs elementas. Bet jei imame *aibę visų aibių*, tai ji yra pačios savęs elementas.

Tarkime, B yra *aibė visų tų aibių, kurios nėra jų pačių elementai.* Norime išsiaiškinti, ar B yra aibės B elementas.

Tarkime, B yra aibės B elementas. Tuomet B yra pačios savęs elementas ir ji negali priklausyti aibei, t.y. aibei B.

Tarkime, B nėra aibės B elementas. Tuomet B nėra pačios savęs elementas ir ji turi priklausyti aibei B.

Taigi gauname paradoksą, kurį 1903 m. aprašė anglų logikas ir filosofas B. Russel: *B yra aibės B elementas tada ir tiktai tada, kai B nėra aibės B elementas.*

Šį paradoksą galima iliustruoti tokiu pavyzdžiu.

Tarkime, vieno kaimo kirpėjas skuta barzdas tik tiems kaimo gyventojams, kurie patys nesiskuta. Klausiama, ar kirpėjas skutasi. Jei ne, tai jis yra iš tų gyventojų, kurie patys nesiskuta, ir todėl kirpėjas privalo skustis. Jei jis skutasi, tai priklauso tiems gyventojams, kurie patys skutasi, ir todėl privalo nesiskusti. Taigi *kirpėjas skutasi tada ir tiktai tada, kai jis nesiskuta.*

Pasirodžiusios XX amžiaus pradžioje antinomijos sugriovė pasitikėjimą plačiai taikoma intuityviąja aibių teorija. Reikėjo sukurti kitą, formaliąją neprieštaringą aibių teoriją. Yra keletas jos variantų, bet jie skiriasi tik tuo, kad kitaip pateikiami. Aprašysime vieną jų, kurį 1928 m. nagrinėjo von Neumann, o vėliau patikslino ir suprastino R. Robinson, P. Bernays ir K. Gödel. Tai pirmosios eilės teorija su lygybės predikatu.

Specifinė abėcėlė: dvivietis predikatas $\in$.

Individinius kintamuosius žymime $X, Y, Z, x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$. Užuot žymėję $\neg(X \in Y)$, rašome $X \notin Y$. Įvedame dar kai kurių formulių žymėjimus:

$\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)$ žymime $X = Y$,
$\forall Z(Z \in X \rightarrow Z \in Y)$ žymime $X \subseteq Y$,
$X \subseteq \& X \neq Y$ žymime $X \subset Y$.

Specifinės aksiomos:

1 (ekstensionalumo, arba apimties) aksioma. $\forall X \forall Y(X = Y \rightarrow \forall Z(X \in Z \leftrightarrow Y \in Z))$.

Ne visos intuityviąja prasme aibės yra formaliosios teorijos aibės. Todėl $X, Y, Z, \ldots$ vadiname *klasėmis*. *Aibėmis* vadiname tik tuos kintamuosius X, kurie tenkina sąlygą $\exists Y(X \in Y)$. Žymime $M(X)$ arba mažosiomis raidėmis $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$.

2 (poros) aksioma. $\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$.

Ja tvirtinama, kad nesvarbu, kokios yra aibės x, y, egzistuoja tokia aibė z, kad x ir y yra jos vieninteliai elementai.

3 (tuščios aibės) aksioma. $\exists x \forall y(y \notin x)$.

Ji teigia, kad egzistuoja aibė, neturinti elementų. Teorijoje įrodoma, kad egzistuoja vienintelė tuščia aibė, ir ji žymima $\emptyset$.

Dvielementę aibę žymime $\{x, y\}$. Įrodoma, kad $\{x, y\} = \{y, x\}$. Pora $\{\{X\}, \{X, Y\}\}$ vadinama sutvarkytąja ir žymima $< X, Y >$.

4 (klasių egzistavimo) aksioma:

4a) $\exists X \forall u \forall v(< u, v > \in X \leftrightarrow u \in v)$.
4b) $\forall X \forall Y \exists Z \forall u(u \in Z \leftrightarrow (u \in X \& u \in Y))$.
4c) $\forall X \exists Z \forall u(u \in Z \leftrightarrow u \notin X)$.
4d) $\forall X \exists Z \forall u(u \in Z \leftrightarrow \exists v(< u, v > \in X))$.
4e) $\forall X \exists Z \forall u \forall v(< u, v > \in Z \leftrightarrow u \in X)$.
4f) $\forall X \exists Z \forall u \forall v \forall w(< u, v, w > \in Z \leftrightarrow < v, w, u > \in X)$.
4g) $\forall X \exists Z \forall u \forall v \forall w(< u, v, w > \in Z \leftrightarrow < u, w, v > \in X)$.

4b aksioma apibrėžiama sankirta, o 4c yra papildinys.

5 (sąjungos) aksioma. $\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists v(u \in v \& v \in x))$.

6 (visų poaibių aibės) aksioma. $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$.

7 (išskyrimo) aksioma. $\forall x \forall Y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in x \& u \in Y))$.

Ja tvirtinama, kad nesvarbu, kokia aibė x ir klasė Y, atsiras aibė, kurios elementai yra bendri x ir Y elementai.

$\mathrm{Un}(X)$ žymime formulę, nusakančią X vienareikšmiškumą $\forall x \forall y \forall z ((< x, y >\in X \& < x, z >\in X) \rightarrow y = z)$.

8 (pakeitimo) aksioma. $\forall x (\mathrm{Un}(X) \rightarrow \exists y \forall u (x \in y \leftrightarrow \exists v (< v, u >\in X \& v \in x)))$.

9 (begalybės) aksioma. $\exists x (\emptyset \in x \& \forall u (u \in x \rightarrow u \cup \{x\} \in x))$.

8.5 Antrosios eilės logika

Antrosios eilės logikos abėcėlė ir predikatų logikos (pirmosios eilės) su funkciniais simboliais abėcėlė sutampa. Termo, atominės formulės ir literos sąvokos taip pat tokios pat, kaip ir pirmosios eilės logikoje. Funkcinių simbolių aibę suskaidykime į dvi: funkcijų (turima omenyje konkrečios funkcijos) bei funkcinių kintamųjų. Analogiškai skaidome ir predikatinių simbolių aibę.

8.6 apibrėžimas. *Antrosios eilės logikos formulių aibė $\mathcal{F}$ yra tokia pati mažiausia aibė, kad:*

- *atominės formulės priklauso aibei $\mathcal{F}$,*
- *jei F yra formulė, tai $\neg F$ – taip pat formulė,*
- *jei F, G yra formulės, tai $(F \& G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ – taip pat formulės,*
- *jei F yra formulė, x – individinis kintamasis, tai $\forall x F$, $\exists x F$ – taip pat formulės,*
- *jei F yra formulė, P – predikatinis kintamasis, tai $\forall P F$, $\exists P F$ – taip pat formulės,*
- *jei F yra formulė, f – funkcinis kintamasis, tai $\forall f F$, $\exists f F$ – taip pat formulės.*

Sakome, kad formulė F yra *taisyklinga*, jei kiekvienas jos poformulis pavidalo $\forall X G$ ar $\exists X G$ (X gali būti individinis, predikatinis ar funkcinis kintamasis) tenkina sąlygą: nėra formulėje G poformulio, prasidedančio kvantoriniu kompleksu $\forall X$ ar $\exists X$. Nagrinėsime tik taisyklingas formules. Formalizuojamų teiginių aibė yra platesnė, palyginti su pirmosios eilės logikos galimybėmis.

Pavyzdžiai:

1. Pirmosios eilės logikos formule $\forall x(f(x) = x)$ tvirtinama, kad f yra projekcijos funkcija. Antrosios eilės logikos formule galima formalizuoti ir teiginį *egzistuoja projekcijos funkcija*: $\exists f \forall x(f(x) = x)$.

2. Pirmosios eilės logikoje galima užrašyti tvirtinimą kad, jei konkrečios dvi individinės konstantos lygios, tai jos arba turi kurią nors savybę P: $a = b \to (P(a) \leftrightarrow P(b))$, arba jos neturi. Antrosios eilės logikoje galima tiesiog apibrėžti dviejų elementų lygybę: $a = b \leftrightarrow \forall P(P(a) \leftrightarrow P(b))$.

Kita teorema tvirtinama, kad antrosios eilės logikoje negalioja Löwenheimo–Skolemo teorema.

8.9 teorema. *Egzistuoja antrosios eilės logikos formulė, kuri įvykdoma kontinuumo galios aibėje ir neįvykdoma jokioje numeruojamoje aibėje.*

Įrodymas. Nagrinėjame formulę

$$F\colon \exists z \exists u \forall X((X(z) \& \forall x(X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x X(x)). \tag{8.5}$$

Visi šios formulės kintamieji z, u, X, x suvaržyti, todėl bet kurią formulės struktūrą sudaro tik individinių konstantų aibės.

Formulė (8.5) teisinga bet kurioje skaičiojoje aibėje $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Imkime $z = a_1$, o funkciją $u(x)$ apibrėžkime tokiu būdu: $u(a_i) = a_{i+1}$. Tuomet su bet kuriuo vienviečiu predikatu X, kurio apibrėžimo aibė yra A, (8.5) formulė teisinga. Ji teisinga ir bet kurioje baigtinėje aibėje. Todėl $\neg F$ klaidinga bet kurioje numeruojamoje aibėje.

Parodykime, kad $\neg F$ teisinga realiųjų skaičių aibėje. Tuo tikslu įrodysime, kad F klaidinga realiųjų skaičių aibėje, t.y. kad ir kokie būtų z, u, egzistuoja toks predikatas X, kad formulė

$$(X(z) \& \forall x(X(x) \to X(u(x)))) \to \forall x X(x)$$

klaidinga. Pagal bet kurį $b \in R$ ir bet kurią vieno argumento funkciją $u(x)$ konstruojame aibę $B = \{b, u(b), u(u(b)), \ldots\}$. Aibė B yra numeruojama. Vienvietį predikatą $X(x)$ realiųjų skaičių aibėje R apibrėžiame tokiu būdu:

$$X(x) = \begin{cases} t, & \text{jei } x \in B, \\ k, & \text{jei } x \in R - B. \end{cases}$$

Formulė (8.5) realiųjų skaičių aibėje su aprašytaisiais b, u, X klaidinga. Teorema įrodyta.

Dar du antrosios eilės logikos teiginiai:

1. Antrosios eilės logikos tapačiai teisingų formulių aibė nėra rekursyviai skaiti.
2. Kompaktiškumo teorema antrosios eilės logikos formulių aibėms negalioja.

8.6 Tautologijos baigtinėse struktūrose

Raide T pažymėkime tapačiai teisingų pirmosios eilės logikos formulių aibę, o Tb — tapačiai teisingų baigtinėse struktūrose pirmosios eilės logikos formulių aibę. Aišku, kad $T \subset Tb$, bet $T \neq Tb$, nes formulė

$$F:\ \forall x \exists y P(x, y) \& \forall x \neg P(x, x) \& \forall x \forall y \forall z((P(x, y) \& P(y, z)) \to P(x, z))$$

įvykdoma begalinėje aibėje ir neįvykdoma jokioje baigtinėje aibėje (žr. 5.3 skyrelį). Todėl $\neg F \in Tb$, o $\neg F \notin T$. Informatikoje dažniausiai galima apsiriboti baigtinėmis, t.y. paprastesnėmis, struktūromis. Deja, tapačiai teisingų formulių aibė tokiose struktūrose nėra ne tik rekursyvi, bet ir rekursyviai skaiti.

Pažymėkime raide S visų įvykdomų baigtinėse struktūrose formulių aibę. Tuomet, kad ir kokia būtų formulė F, ji priklauso aibei Tb tada ir tiktai tada, kai $\neg F \notin S$. Iš čia išplaukia, kad jei S neišsprendžiama, tai ir Tb neišsprendžiama.

8.10 teorema. *Aibė S nerekursyvi.*

Įrodymas. Tuo tikslu nagrinėjame vienajuostes Turingo mašinas su vienpuse begaline juosta į dešinę. Parodysime formulėmis, kaip galima modeliuoti tokių Turingo mašinų darbą. Kad būtų paprasčiau, modeliuojame pirmosios eilės logikos formulėmis su lygybės predikatu ir funkcija $f(x) = x + 1$. Numeruojame juostos ląsteles. Pačiai pirmajai (iš kairės, juosta juk vienpusė) priskiriame 0, o toliau iš eilės $1, 2, 3, \ldots$.

Tarkime, yra Turingo mašina M, kurios abėcėlė $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, būsenų aibė $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_j\}$, o galutinių būsenų aibė yra iš vienos būsenos q_1. Nagrinėkime mašinas, kurios arba po baigtinio žingsnių skaičiaus pereina į galutinę būseną q_1, arba dirba be galo ilgai, t.y. jos nepatenka į poziciją be išeities. Iš algoritmų teorijos žinoma, kad bet kurią rekursyviąją funkciją galima apskaičiuoti tokiomis Turingo mašinomis. Mus domina tik aibių Σ, Q elementų indeksai. Tiksliau, laikysime $\Sigma = \{0, 1, \ldots, m\}$, o $Q = \{0, 1, \ldots, j\}$. Be to, aibei Σ priklauso tuščiosios ląstelės simbolis b ir jo numeris yra m. Pradiniai duomenys yra abėcėlės $\Sigma' = \{0, 1, \ldots, m\}$ žodžiai. Tariame, kad jie užrašomi pirmose ląstelėse, t.y., jei žodžio ilgis yra n, tai ląstelės su numeriais $0, 1, \ldots, n-1$ nėra tuščios, o visose likusiose $n, n+1, \ldots$ įrašytas simbolis b.

Turingo mašinos darbas diskretus. Jo žingsnius numeruojame skaičiais 0, 1, 2, ... ir vadiname juos laiko momentais. Aprašome predikatus, kurių apibrėžimų aibe yra natūraliųjų skaičių aibė:

- $S(l, s, k) = t$ tada ir tiktai tada, kai momentu l ląstelėje s yra simbolis k,
- $B(l, q) = t$ tada ir tiktai tada, kai momentu l mašina yra būsenos q,
- $P(l, s) = t$ tada ir tiktai tada, kai momentu l skaitymo galvutė yra ties ląstele su numeriu s.

Nagrinėjame mašinas be pradinių duomenų, t.y. kai jos pradeda darbą nulinės būsenos, jų skaitymo galvutė yra ties nuline ląstele ir visose ląstelėse yra simboliai b. Tokios mašinos iš pradžių užrašo pradinius duomenis, o paskui atlieka skaičiavimus.

Pradinė situacija aprašoma formule

$$\text{Pr: } \forall u S(0, u, b) \& B(0, 0) \& P(0, 0).$$

Egzistavimas ir vienatinumas nusakomi formule

$$\begin{aligned}\text{Ex: } &\forall t \exists x \exists y \exists z \exists u (B(t, x) \& P(t, y) \& S(t, z, u) \& \forall v (B(t, v) \to \\ &(x = v)) \& \forall v (P(t, v) \to (y = v)) \& \forall v (S(t, z, v) \to (u = v))).\end{aligned}$$

Formule Ex tvirtinama, kad kiekvienu laiko momentu t mašina yra kurios nors vienintelės būsenos x, skaitymo galvutė yra ties vienintele ląstele y ir ląstelėje įrašytas vienintelis aibės Σ elementas.

Modeliuojame aprašytosios mašinos perėjimus formulėmis. Tarkime, yra r perėjimų ir j-asis yra pavidalo $\delta(q, m) = (q', m', D)$. Jam priskiriame formulę

$$\begin{aligned}\text{Per}(j)\text{: } &\forall t \forall s ((B(t, q) \& P(t, s) \& S(t, s, m)) \to \\ &(B(t + 1, q') \& P(t + 1, s + 1) \& S(t + 1, s, m') \& \\ &\forall u \forall v ((\neg (u = s) \& S(t, u, v)) \to S(t + 1, u, v)))).\end{aligned}$$

Panašiai priskiriamos formulės ir likusiems $(r - 1)$ perėjimų.

$$\begin{aligned}\text{St: } &\forall t \forall s ((B(t, 1) \& P(t, s) \& S(t, s, m)) \to \\ &(B(t + 1, 1) \& P(t + 1, s) \& S(t + 1, s, m))).\end{aligned}$$

Nagrinėjame formulę

$$F\text{: } \exists t (B(t, 1) \& Pr \& Ex \&_{j=1}^{r} Per(j) \& St).$$

Tarkime, po τ žingsnių mašina patenka į galutinę būseną, naudodama h ląstelių atminties. Pažymėkime $k = \{\tau, m + 1, j + 1, h\}$. Tuomet formulė įvykdoma struktūroje, kurios aibė $\{0, 1, \ldots, k\}$. Ir atvirkščiai, jei formulė įvykdoma baigtinėje struktūroje iš k elementų, tai Turingo mašina pereina į galutinę būseną po ne daugiau kaip k žingsnių.

Nėra algoritmo, kuris pagal Turingo mašinos pradinius duomenis pasakytų, ar mašina baigs darbą, t.y. po baigtinio skaičiaus žingsnių pereis į būseną 1, ar dirbs be galo ilgai. Tai *baigtinumo problema*, kuri nėra išsprendžiama.

Teorema įrodyta.

8.11 teorema. *Aibė Tb nėra rekursyviai skaiti.*

Įrodymas. Tarkime, F kuri nors formulė. Tikriname, ar F įvykdoma. Visų pirma tikriname, ar F įvykdoma kurioje nors struktūroje, kurios aibė yra iš vieno elemento. Tokių struktūrų skaičius yra baigtinis. Jei F teisinga kurioje nors iš jų, tai ji įvykdoma. Priešingu atveju nagrinėjame, ar formulė įvykdoma kurioje nors struktūroje iš dviejų elementų. Jei ji teisinga kurioje nors iš jų, tai ji įvykdoma. Priešingu atveju nagrinėjame visas tas struktūras, kurių aibėse yra trys elementai ir t.t. Jei F įvykdoma kurioje nors baigtinėje struktūroje, tai, naudodamiesi aprašytąja struktūra, rasime ją. Jei F neįvykdoma jokioje baigtinėje struktūroje, tai aprašytoji procedūra tęsis be galo ilgai.

Taigi įvykdomų baigtinėse struktūrose formulių aibė yra rekursyviai skaiti. Bet remiantis 8.10 teorema, ji nėra rekursyvi. Todėl jos papildinys, t.y. tapačiai klaidingų baigtinėse struktūrose formulių aibė, nėra rekursyviai skaiti. Kartu ir aibė Tb nėra rekursyviai skaiti. Teorema įrodyta.

8.7 apibrėžimas. *Formulių aibė A vadinama baigiai kontroliuojama, kai kiekviena $F \in A$ tenkina sąlygą: jei F įvykdoma, tai ji įvykdoma ir baigtinėje aibėje.*

8.12 teorema. *Jei formulių aibė baigiai kontroliuojama, tai ji išsprendžiama.*

Įrodymas. Aibę A suskaidome į dviejų nepersikertančiųjų aibių A', A'' sąjungą: $A = A' \cup A''$ ir $A' \cap A'' = \emptyset$. Aibei A' priklauso visos įvykdomos baigtinėse aibėse formulės, o aibei A'' – visos likusios. Kadangi A baigiai kontroliuojama, tai aibei A'' priklausančios formulės neįvykdomos ne tik baigtinėse aibėse, bet ir visose begalinėse aibėse. Todėl, jei $F \in A''$, tai sekvencija $F \vdash$ išvedama sekvenciniame predikatų skaičiavime. Taigi abi aibės A', A'' yra rekursyviai skaičios ir todėl A išsprendžiama. Teorema įrodyta.

Išvada. Kad ir kokia būtų neišsprendžiama klasė, egzistuoja joje formulė, įvykdoma begalinėje ir neįvykdoma jokioje baigtinėje aibėje.

Pateikiame porą tokių formulių:

1. $\forall x \forall y \forall z \forall u(\neg G(x,x) \& ((G(x,y) \& G(y,z)) \to G(x,z)) \& G(x,u)),$

2. $\forall x \exists u \forall y(\neg G(x,x) \& G(x,u) \& (G(u,y) \rightarrow G(x,y)))$.

Abiejose formulėse raide G pažymėtas dvivietis predikatinis kintamasis.

8.7 Pratimai

1. Raskite sekvencijų išvedimus aksiominėje aibių teorijoje:

a) $\vdash X = Y \leftrightarrow (X \subseteq Y \& Y \subseteq X)$,
b) $\vdash X = Y \rightarrow (Z \in X \rightarrow Z \in Y)$,
c) $\vdash X = Y \leftrightarrow \forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y)$,
d) $\vdash M(Z) \& Z = Y \rightarrow M(Y)$.

2. Raskite formulės $\forall X \forall x \exists y P(X, x, y)$ ekvivalenčiąją, individiniams kintamiesiems žymėti naudodami tik didžiąsias raides (predikatą M).