Tikimybių teorija ir matematinė statistika

Vilius Stakėnas

VU MIF

2015

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

I. Tikimybinė erdvė

1.1. Bandymai, baigtys ir įvykiai

Tikimybių teorija prasideda taip: **nagrinėsime bandymus, kurių baigčių numatyti negalima**. Sakysime, kad tokio bandymo baigtys yra atsitiktinės.

Įprasta bandymo baigčių aibę žymėti didžiąja graikiška raide Ω (skaitome: omega), o pačias baigtis mažosiomis omega raidėmis su indeksais ir be jų: $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$

1.1. Bandymai, baigtys ir įvykiai

Tikimybių teorija prasideda taip: **nagrinėsime bandymus, kurių baigčių numatyti negalima**. Sakysime, kad tokio bandymo baigtys yra atsitiktinės.

Įprasta bandymo baigčių aibę žymėti didžiąja graikiška raide Ω (skaitome: omega), o pačias baigtis mažosiomis omega raidėmis su indeksais ir be jų: $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$

Monetos metimas

Pavyzdys. *Monetos metimas*
Moneta gali atvirsti herbu arba skaičiumi, baigtis žymėkime H ir S.

Galimos ir kitokios baigtys: moneta gali atsistoti ant briaunos arba tiesiog pasimesti. Tokios baigtys yra labai retos, todėl galime tarti, kad yra tik dvi baigtys.
Baigčių aibė $\Omega = \{H, S\}$.

▲

Monetos metimas

Pavyzdys. *Monetos metimas*
Moneta gali atvirsti herbu arba skaičiumi, baigtis žymėkime H ir S.

Galimos ir kitokios baigtys: moneta gali atsistoti ant briaunos arba tiesiog pasimesti. Tokios baigtys yra labai retos, todėl galime tarti, kad yra tik dvi baigtys.
Baigčių aibė $\Omega = \{H, S\}$.

▲

Trys monetos metimai

Pavyzdys. *Trys monetos metimai*
Jeigu monetą mesime tris kartus, tai bandymo baigtį galėsime užrašyti trijų simbolių seka.

Skirtingos baigtys:

$$\Omega = \{HHH, HHS, HSH, SHH, HSS, SHS, SSH, SSS\}.$$

▲

Iki pirmos sėkmės

Pavyzdys. *Iki pirmos sėkmės*
Tą pačią monetą galime mėtyti tol, kol atvirs pirmas skaičius (pasirodys pirmoji sėkmė). Skaičius gali atvirsti jau pirmajame metime, gali antrajame, trečiajame, ... Gali iš viso neatvirsti.

▲

Bandymo baigčių aibė begalinė:

$$\Omega = \{HHHH\ldots, S, HS, HHS, HHHS, \ldots\}.$$

Automobilio stabdymas

Pavyzdys. *Automobilio stabdymas*
Bandymas – stabdome automobilį. Baigtis – atstumas, kurį nuvažiuoja stabdomas automobilis.
Baigtis galime užrašyti teigiamais skaičiais.
Taigi $\Omega = (0; +\infty)$.

▲

Pradžia

Nagrinėti bandymą pradedame taip:

- Apibrėžiame visų bandymo baigčių aibę Ω;
- Su bandymu susijusius įvykius vaizduojame poaibiais $A \subset \Omega$. Šiuos poaibius vadinsime tiesiog įvykiais.

Jei baigtis ω yra įvykio A elementas, ją vadinsime palankia įvykiui A. Jeigu ω nėra įvykio A elementas, ją vadinsime nepalankia įvykiui A.

Pradžia

Nagrinėti bandymą pradedame taip:

- Apibrėžiame visų bandymo baigčių aibę Ω;
- Su bandymu susijusius įvykius vaizduojame poaibiais $A \subset \Omega$. Šiuos poaibius vadinsime tiesiog įvykiais.

Jei baigtis ω yra įvykio A elementas, ją vadinsime palankia įvykiui A. Jeigu ω nėra įvykio A elementas, ją vadinsime nepalankia įvykiui A.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pradžia

Nagrinėti bandymą pradedame taip:

- Apibrėžiame visų bandymo baigčių aibę Ω;
- Su bandymu susijusius įvykius vaizduojame poaibiais $A \subset \Omega$. Šiuos poaibius vadinsime tiesiog įvykiais.

Jei baigtis ω yra įvykio A elementas, ją vadinsime palankia įvykiui A. Jeigu ω nėra įvykio A elementas, ją vadinsime nepalankia įvykiui A.

Kelios sąvokos

Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė, o $A \subset \Omega$ koks nors su šiuo bandymu susijęs įvykis. Įvykį, sudarytą iš baigčių, kurios yra nepalankios įvykiui A, vadinsime priešingu jam įvykiu ir žymėsime $\bar{A}$.

Įvykį, kuriam palankios visos baigtys, vadinsime būtinuoju įvykiu ir žymėsime Ω, o jam priešingą vadinsime negalimuoju įvykiu ir žymėsime $\emptyset$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Kelios sąvokos

Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė, o $A \subset \Omega$ koks nors su šiuo bandymu susijęs įvykis. Įvykį, sudarytą iš baigčių, kurios yra nepalankios įvykiui A, vadinsime priešingu jam įvykiu ir žymėsime $\bar{A}$.

Įvykį, kuriam palankios visos baigtys, vadinsime būtinuoju įvykiu ir žymėsime Ω, o jam priešingą vadinsime negalimuoju įvykiu ir žymėsime $\emptyset$.

Uždaviniai

1. *Bandymas – tikimybių teorijos egzaminas. Kokias baigtis galime fiksuoti? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

2. *Trumpųjų nuotolių bėgikas J pateko į pusfinalį. Pusfinalyje bėgs aštuoni dalyviai. Pirmieji keturi pateks į finalą. Mus domina tik J rezultatai. Taigi bandymas – bėgiko J dalyvavimas paskutiniuose dviejuose varžybų etapuose. Apibrėžkite šio bandymo baigtis.*

3. *Kelių policijos patrulis nutaikė savo greičio matavimo prietaisą į atvažiuojantį automobilį. Kokios galimos tokio bandymo baigtys? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

Uždaviniai

4. *Bandymas – tikimybių teorijos egzaminas. Kokias baigtis galime fiksuoti? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

5. *Trumpųjų nuotolių bėgikas J pateko į pusfinalį. Pusfinalyje bėgs aštuoni dalyviai. Pirmieji keturi pateks į finalą. Mus domina tik J rezultatai. Taigi bandymas – bėgiko J dalyvavimas paskutiniuose dviejuose varžybų etapuose. Apibrėžkite šio bandymo baigtis.*

6. *Kelių policijos patrulis nutaikė savo greičio matavimo prietaisą į atvažiuojantį automobilį. Kokios galimos tokio bandymo baigtys? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

Uždaviniai

7. *Bandymas – tikimybių teorijos egzaminas. Kokias baigtis galime fiksuoti? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

8. *Trumpųjų nuotolių bėgikas J pateko į pusfinalį. Pusfinalyje bėgs aštuoni dalyviai. Pirmieji keturi pateks į finalą. Mus domina tik J rezultatai. Taigi bandymas – bėgiko J dalyvavimas paskutiniuose dviejuose varžybų etapuose. Apibrėžkite šio bandymo baigtis.*

9. *Kelių policijos patrulis nutaikė savo greičio matavimo prietaisą į atvažiuojantį automobilį. Kokios galimos tokio bandymo baigtys? Pasiūlykite bent du galimų baigčių aibės variantus.*

1.2. Klasikinis tikimybės apibrėžimas

Tikimybių teorijos pradininkai: G. Cardano (1501-1576), B. Pascal (1623-1662), P. Fermat (1601-1665)

Klasikinis tikimybės apibrėžimas

Klasikinis apibrėžimas

1 apibrėžimas. *Jeigu bandymo baigčių aibė Ω yra baigtinė, o visos baigtys yra vienodai galimos, tai įvykio $A \subset \Omega$ tikimybe vadinsime skaičių*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Paprastos savybės

1 teorema. Tegu bandymo baigčių aibė yra baigtinė ir visos baigtys yra vienodai galimos. Tada su šiuo bandymu susijusių įvykių tikimybės turi šias savybes:

1. bet kokio įvykio tikimybė yra intervalo $[0;1]$ skaičius, t. y. bet kokiam įvykiui A teisinga nelygybė $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
2. negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, o būtinojo – vienetui:
$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1;$$
3. įvykio A ir jam priešingojo įvykio $\overline{A}$ tikimybės susiję lygybe $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Paprastos savybės

2 teorema. Tegu bandymo baigčių aibė yra baigtinė ir visos baigtys yra vienodai galimos. Tada su šiuo bandymu susijusių įvykių tikimybės turi šias savybes:

1. bet kokio įvykio tikimybė yra intervalo $[0;1]$ skaičius, t. y. bet kokiam įvykiui A teisinga nelygybė $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
2. negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, o būtinojo – vienetui:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1;$$

3. įvykio A ir jam priešingojo įvykio $\overline{A}$ tikimybės susiję lygybe $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Paprastos savybės

3 teorema. Tegu bandymo baigčių aibė yra baigtinė ir visos baigtys yra vienodai galimos. Tada su šiuo bandymu susijusių įvykių tikimybės turi šias savybes:

1. bet kokio įvykio tikimybė yra intervalo $[0;1]$ skaičius, t. y. bet kokiam įvykiui A teisinga nelygybė $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
2. negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, o būtinojo – vienetui:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1;$$

3. įvykio A ir jam priešingojo įvykio $\overline{A}$ tikimybės susiję lygybe $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

1.3. Pavyzdžiai

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Daugybos taisyklė

Tegu aibėje U yra M, o aibėje V yra N elementų, porą sudarome pirmąjį elementą rinkdami iš aibės U, o antrąjį iš aibės V.

Tada šitaip galime sudaryti iš viso $M \cdot N$ skirtingų porų.

Daugybos taisyklė

Bendroji daugybos taisyklė

Tegu aibėse $U_1, U_2, \ldots, U_k$ yra atitinkamai $N_1, N_2, \ldots, N_k$ elementų, o elementų eilę sudarome rinkdami pirmąjį iš aibės U_1, antrąjį iš U_2 ir t.t.
Tada šitaip galime sudaryti iš viso

$$N_1 \cdot N_2 \cdots N_k$$

k ilgio elementų eilių.

Gretinys su pasikartojimais

Aibės $U_1, U_2, \ldots, U_k$ nebūtinai skirtingos. Tegu $U_1 = U_2 = \ldots = U_k = U$.
Elementus renkame iš tos pačios aibės U. Parinkę elementą užsirašome jo numerį, o elementą grąžiname atgal. Tada vėl renkame iš naujo.

Jeigu aibėje U yra N skirtingų elementų, tai šitaip sudarytą k elementų eilę vadiname **gretiniu iš N po k elementų su pasikartojimais**.
Tokių gretinių iš viso yra

$$\underbrace{N \cdot N \cdots N}_{k} = N^k.$$

Gretinys su pasikartojimais

Aibės $U_1, U_2, \ldots, U_k$ nebūtinai skirtingos. Tegu
$U_1 = U_2 = \ldots = U_k = U$.
Elementus renkame iš tos pačios aibės U. Parinkę elementą užsirašome jo numerį, o elementą grąžiname atgal. Tada vėl renkame iš naujo.

Jeigu aibėje U yra N skirtingų elementų, tai šitaip sudarytą k elementų eilę vadiname **gretiniu iš N po k elementų su pasikartojimais**.
Tokių gretinių iš viso yra

$$\underbrace{N \cdot N \cdots N}_{k} = N^k.$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Simetrišką lošimo kauliuką metame keturis kartus. Kokia tikimybė, kad antrajame ir ketvirtajame metimuose atvirs lyginis, o pirmajame ir trečiajame – nelyginis akučių skaičius?

▲

Pavyzdys.
Simetrišką lošimo kauliuką metame keturis kartus. Kokia tikimybė, kad nors kartą atvirs viena akutė?

▲

Kauliukai

Pavyzdys

Pavyzdys. *Dalelės klaidžiojimas*
Erdvėje pažymėti taškai $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Po šiuos taškus klaidžioja dalelė: patekusi į vieną tašką, po sekundės ji peršoka į kurį nors kitą tašką arba lieka kur buvusi.

Kokia tikimybė, kad po r sekundžių ji bus aplankiusi bent vieną iš taškų $A_1, A_2, \ldots, A_m (m < r)$?

Kokia tikimybė, kad per r sekundžių ji bus nors kartą sugrįžusi į jau aplankytą tašką?

▲

Gretinys be pasikartojimų

Jeigu sudarydami gretinį parinktųjų aibės U elementų nebegrąžinsime į aibę, tai gausime gretinį iš skirtingų elementų.

Jeigu aibėje U yra N elementų, o iš jos be grąžinimo renkame ir rikiuojame į eilę k elementų, tai gautąją eilę vadinsime **gretiniu iš N po k elementų be pasikartojimų.** Pažymėkime jų kiekį A_N^k.

$$\boxed{\begin{aligned} A_N^2 &= N\cdot(N-1), \quad A_N^3 = N\cdot(N-1)\cdot(N-2),\ldots, \\ A_N^k &= \underbrace{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots(N-k+1)}_{k}. \end{aligned}}$$

Gretinys be pasikartojimų

Jeigu sudarydami gretinį parinktųjų aibės U elementų nebegrąžinsime į aibę, tai gausime gretinį iš skirtingų elementų.

Jeigu aibėje U yra N elementų, o iš jos be grąžinimo renkame ir rikiuojame į eilę k elementų, tai gautąją eilę vadinsime **gretiniu iš N po k elementų be pasikartojimų.** Pažymėkime jų kiekį A_N^k.

$$\begin{aligned} A_N^2 &= N\cdot(N-1), \quad A_N^3 = N\cdot(N-1)\cdot(N-2),\ldots, \\ A_N^k &= \underbrace{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots(N-k+1)}_{k}. \end{aligned}$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Gretinys be pasikartojimų

Jeigu sudarydami gretinį parinktųjų aibės U elementų nebegrąžinsime į aibę, tai gausime gretinį iš skirtingų elementų.

Jeigu aibėje U yra N elementų, o iš jos be grąžinimo renkame ir rikiuojame į eilę k elementų, tai gautąją eilę vadinsime **gretiniu iš N po k elementų be pasikartojimų.** Pažymėkime jų kiekį A_N^k.

$$\begin{aligned} A_N^2 &= N\cdot(N-1), \quad A_N^3 = N\cdot(N-1)\cdot(N-2),\ldots, \\ A_N^k &= \underbrace{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots(N-k+1)}_{k}. \end{aligned}$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiamos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad visos ištrauktosios kortos būgnai?

▲

Pavyzdys. *Gimtadienių uždavinys*
Kokia tikimybė, kad atsitiktinai susibūrusioje r žmonių grupėje atsiras bent du žmonės gimę tą pačią metų dieną?

Kiek mažiausiai žmonių turėtų susirinkti, kad tikimybė jog grupėje bus bent du žmonės gimę tą pačią metų būtų didesnė už $\frac{1}{2}$?

▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Deriniai

Poaibį, sudarytą parinkus k elementų iš n elementų turinčios aibės, vadinsime **deriniu iš n po k elementų**.

Derinių skaičius C_n^k

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 1}_{k}}.$$

Deriniai

Poaibį, sudarytą parinkus k elementų iš n elementų turinčios aibės, vadinsime **deriniu iš n po k elementų**.

Derinių skaičius C_n^k

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 1}_{k}}.$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiamos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad iš jų lygiai dvi kortos bus būgnų?

▲

Pavyzdys.
Tegu urnoje yra N baltų ir M juodų rutulių (arba jeigu norite – gaminių partijoje N gerų ir M brokuotų). Atsitiktinai traukiame k rutulių. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus lygiai n baltų?

▲

Rutuliai iš urnos

Pavyzdys

Pavyzdys. *Dalelės klaidžiojimas*
Iš koordinačių plokštumos taško $O(0;0)$ į $(n;n)$ pajuda dalelė. Ji keliauja vienu iš trumpiausių kelių taškuose su sveikaskaitėmis koordinatėmis atsitiktinai rinkdamasi horizontalią arba vertikalią kryptį.

Kokia tikimybė, kad pakeliui ji aplankys tašką $A(x,y)$ $(x,y<n)$?

▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys. *Dalelės klaidžiojimas*
Iš koordinačių plokštumos taško $O(0;0)$ pajuda dalelė. Atsitiktinai pasirinkusi kryptį ji po sekundės atsiduria taške $(1;1)$ arba $(1,-1)$. Toliau ji juda analogiškai: iš taško (u,v) po sekundės atsiduria taške $(u+1,v+1)$ arba $(u+1,v-1)$. Kokia tikimybė, kad po n žingsnių ji atsidurs taške $(n;x)$?

▲

Uždaviniai

1. *Muzikos grotuvo grojaraštyje – n muzikinių kūrinių, kurie grojami atsitiktine tvarka. Tas pats kūrinys gali būti grojamas pakartotinai.*

Kokia tikimybė, kad pirmasis pagrotas kūrinys vėl bus pagrotas m-uoju, tačiau ne anksčiau?

Uždaviniai

2. *Muzikos grotuvo grojaraštyje – n muzikinių kūrinių, kurie grojami atsitiktine tvarka, tačiau tas pats kūrinys negali būti grojamas iš eilės du ar daugiau kartų.*

Kokia tikimybė, kad pirmasis pagrotas kūrinys vėl bus pagrotas m-uoju, tačiau ne anksčiau?

Uždaviniai

3. *Lošimas su simetriška moneta: jeigu mesta moneta atvirsta herbu, pirmasis žaidėjas gauna tašką, jeigu skaičiumi – antrasis.*

Kokia tikimybė, kad po keturių metimų bus lygiosios? Kokia tikimybė, kad po penkių metimų vienas iš žaidėjų turės vieno taško persvarą?

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Uždaviniai

4. *Fotografijų parodai pateikta n fotografijų, m iš jų – peizažai. Nuspręsta nuotraukas sukabinti atsitiktine tvarka.*

Kokia tikimybė, kad visi peizažai bus sukabinti vienas po kito?

5. *Tą patį rinkinį iš n SMS žinučių gavo m žmonių. Kiekvienas iš jų vieną ištrynė neperskaitęs.*

Kokia tikimybė, kad bent du žmonės ištrynė tą pačią žinutę?

Uždaviniai

6. *Į vienos įstaigos laukiamąjį vienas po kito suėjo n žmonių. Tačiau jie aptarnaujami ne eilės, bet atsitiktine tvarka.*

Kokia tikimybė, kad pirmasis atėjęs bus aptarnautas m-uoju?

7. *Namo aukštų skaičius n, liftu važiuoja m žmonių. Kiekvienas gali išlipti bet kuriame aukšte.*

Kokia tikimybė, kad lygiai viename aukšte išlips du žmonės, o kituose aukštuose po vieną?

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

1.4 Geometrinės tikimybės

Pavyzdys

Pavyzdys. *Kada sustos laikrodis?*
Kai elektroninio laikrodžio baterijos išsikraus, jis sustos. Kokia tikimybė, kad tai atsitiks, kai valandų rodyklė bus tarp 2 ir 3 valandos?

▲

$$P(A) = \frac{\text{lanko } A \text{ ilgis}}{\Omega \text{ ilgis}} = \frac{1}{12}.$$

Geometrinis tikimybės apibrėžimas

Geometrinis tikimybės apibrėžimas

Tegu bandymo baigtys vaizduojamos geometrinės srities Ω taškais, visos baigtys yra lygiavertės, o sritis Ω turi nenulinį ir baigtinį geometrinį matą (ilgį, plotą ar tūrį). Tada susijusio su bandymu įvykio $A \subset \Omega$ tikimybe vadinsime skaičių

$$P(A) = \frac{\text{geometrinis } A \text{ matas}}{\text{geometrinis } \Omega \text{ matas}},$$

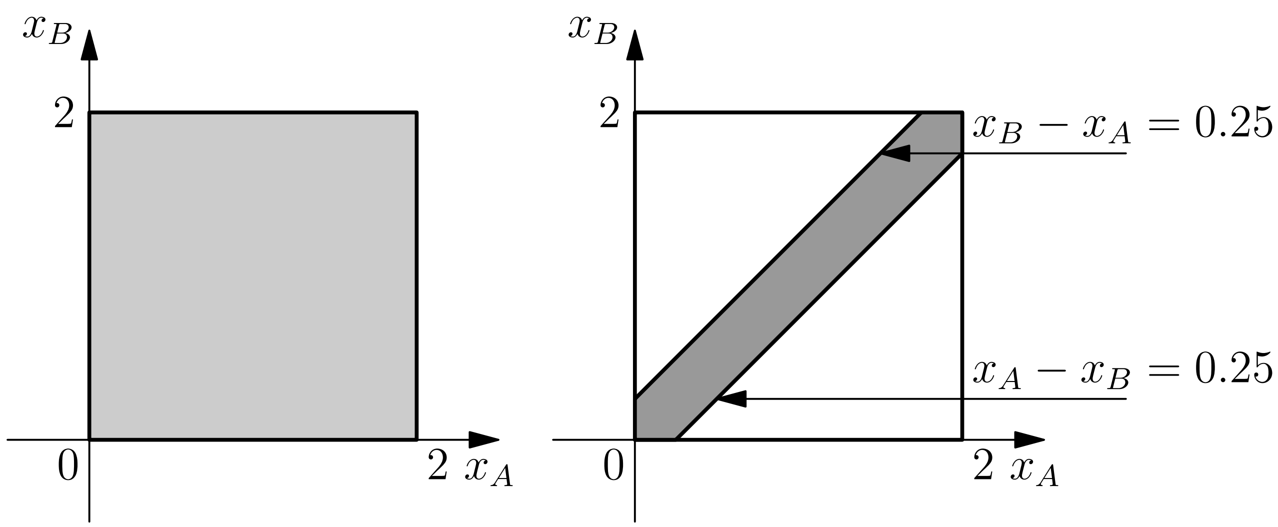
čia geometrinis matas reiškia ilgį, plotą ar tūrį.

Pavyzdys

Pavyzdys. *Draugų susitikimas*
Du draugai pažadėjo paskambinti trečiajam tarp pirmos ir trečios valandos. Kokia tikimybė, kad laikotarpis tarp pirmojo ir antrojo skambučių bus ne ilgesnis už 15 minučių?

▲

Sprendimas



Taigi

$$P(U) = \frac{2^2 - 1,75^2}{2^2} = \frac{15}{64} \approx 0,234.$$

Ar galėsime sudėti trikampį?

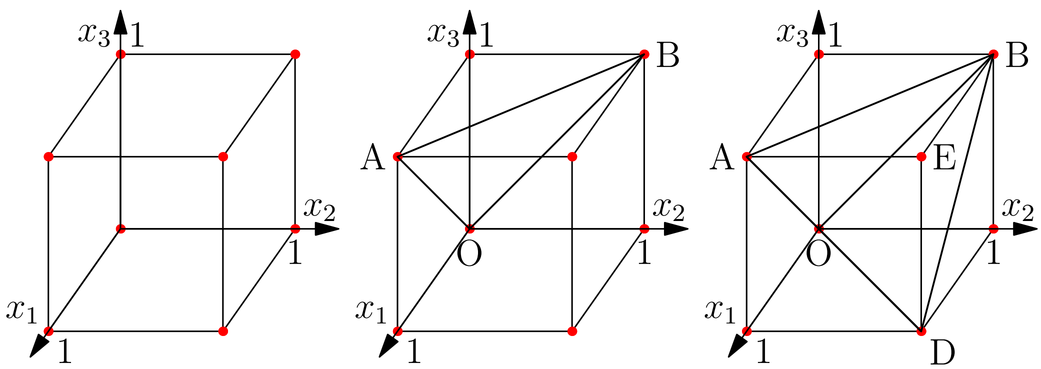
Pavyzdys. *Uždavinys apie trikampį*
Atsitiktinai parenkamos trys atkarpos, kurių ilgiai – intervalo $[0;1]$ skaičiai. Kokia tikimybė, kad iš atkarpų galėsime sudėti trikampį? ▲

Kad iš atkarpų, kurių ilgiai yra x_1, x_2, x_3, galėtume sudėti trikampį, būtina ir pakankama, kad būtų patenkintos trikampio nelygybės:

$$x_1 + x_2 \geqslant x_3, \quad x_1 + x_3 \geqslant x_2, \quad x_2 + x_3 \geqslant x_1.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Sprendimas

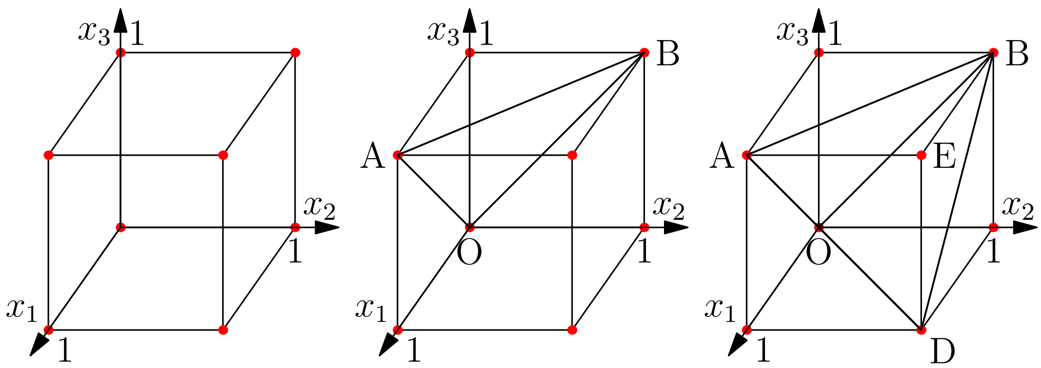


$$P(T) = \frac{OABDE \text{ tūris}}{\text{kubo tūris}}.$$

Kaip apskaičiuoti briaunainio tūrį? Paprasčiausia surasti trijų atkirstųjų piramidžių tūrius ir atimti juos iš kubo tūrio:

$$P(T) = \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Sprendimas



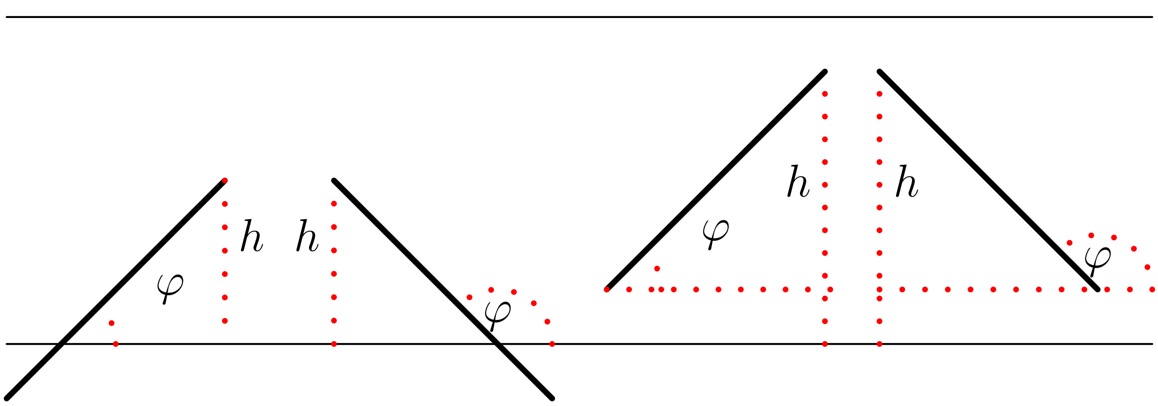
$$P(T) = \frac{OABDE \text{ tūris}}{\text{kubo tūris}}.$$

Kaip apskaičiuoti briaunainio tūrį? Paprasčiausia surasti trijų atkirstųjų piramidžių tūrius ir atimti juos iš kubo tūrio:

$$P(T) = \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Biuffono uždavinys

Pavyzdys. *Biuffono uždavinys*
Plokštumoje išvesta lygiagrečių tiesių šeima. Atstumas tarp dviejų gretimų tiesių lygus 1. Ant šios plokštumos metama l ($l < 1$) ilgio adata. Kokia tikimybė, jog ji kirs vieną iš lygiagrečių tiesių? ▲

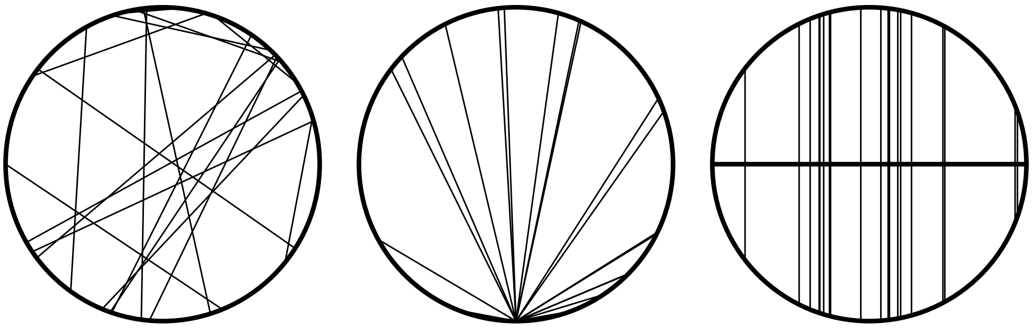


Bertrano uždavinys

Pavyzdys. *Bertrano uždavinys*
Atsitiktinai parenkama vienetinio apskritimo styga. Kokia tikimybė, jog ji ilgesnė už įbrėžto į šį apskritimą lygiakraščio trikampio kraštinę?

▲

Atsitiktinio stygos parinkimo būdai



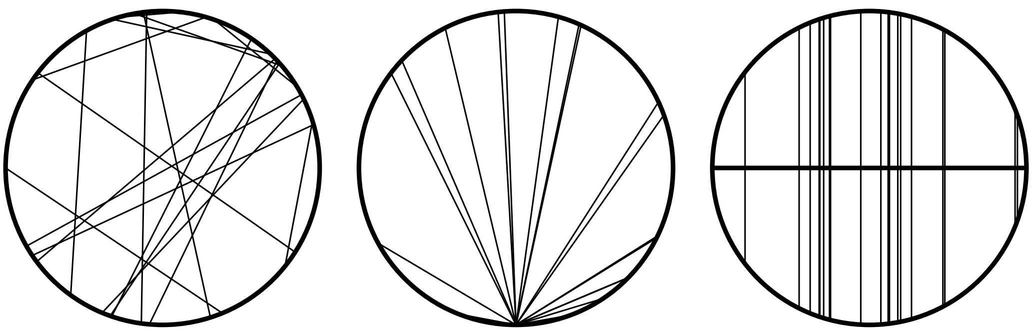
1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Bertrano uždavinys

Pavyzdys. *Bertrano uždavinys*
Atsitiktinai parenkama vienetinio apskritimo styga. Kokia tikimybė, jog ji ilgesnė už įbrėžto į šį apskritimą lygiakraščio trikampio kraštinę?

▲

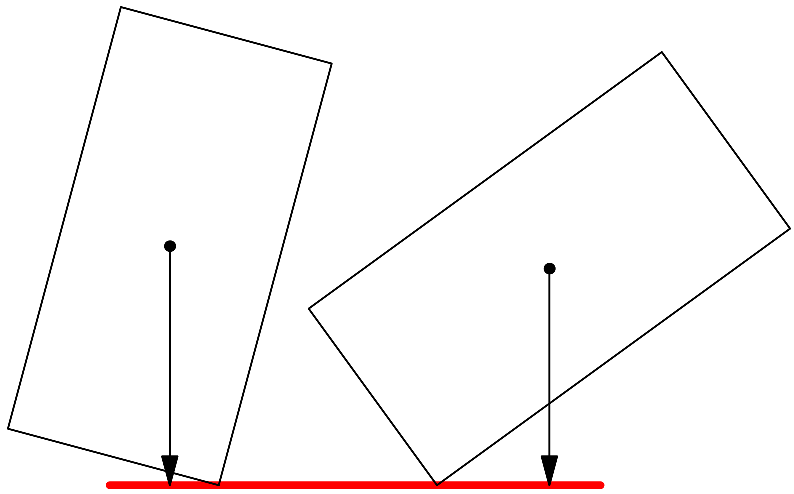
Atsitiktinio stygos parinkimo būdai



Stora moneta

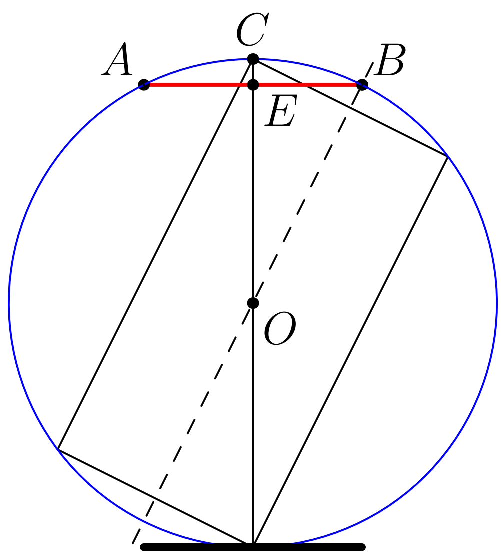
Pavyzdys. *Uždavinys*
Simetriškos monetos spindulys lygus r, storis h. Kokia tikimybė, kad metus monetą ji atsistos ant briaunos?

▲



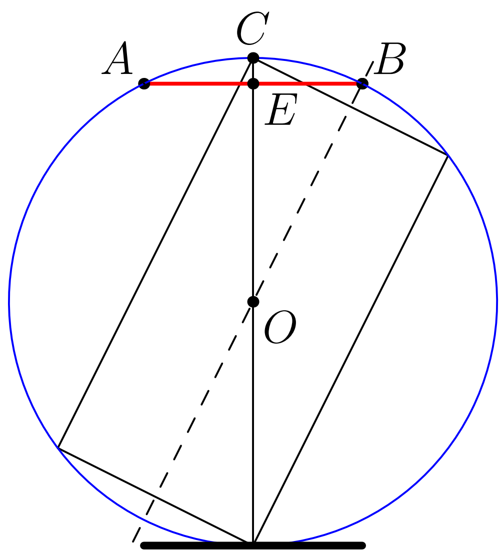
1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Stora moneta



$$P = \frac{2\pi \cdot OC \cdot CE}{2\pi \cdot OC^2}$$

Stora moneta



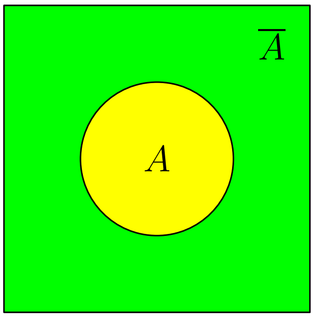
$$P = \frac{2\pi \cdot OC \cdot CE}{2\pi \cdot OC^2}$$

Įvykių vaizdavimas

Įvykius vaizduojame poaibiais, todėl aibių veiksmus galime naudoti įvykių ryšiams nagrinėti.
Tegu Ω yra bandymo baigčių aibė, o $\mathscr{A}$ – su bandymu siejamų įvykių šeima, $\mathscr{A}$ sudaro baigčių aibės poaibiai.

Priešingasis įvykis

Įvykius ir jų sąryšius patogu vaizduoti diagramomis.
Kiekvienam įvykiui A šioje šeimoje galime rasti „antrininką“ – priešingąjį įvykį $\overline{A}$.

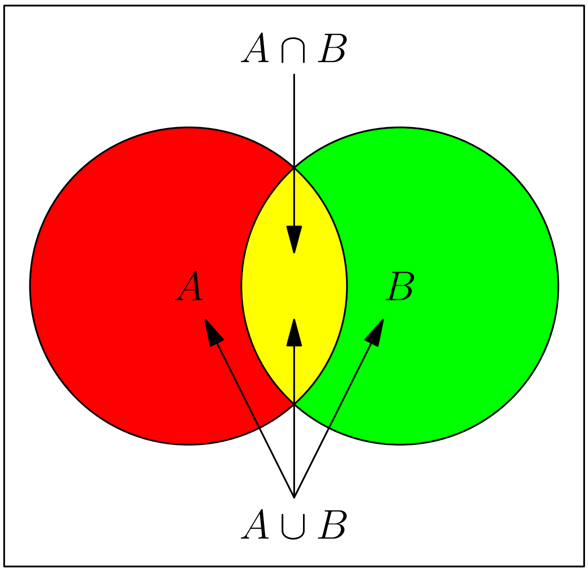


Įvykių sąjunga ir sankirta

2 apibrėžimas. *Tegu A ir B yra su tuo pačiu bandymu siejami įvykiai, t. y. jie vaizduojami tos pačios baigčių aibės poaibiais. Įvykį, kurį sudaro baigtys, palankios abiems įvykiams A, B, vadinsime jų sankirta ir žymėsime $A \cap B$.*

Įvykį, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių A, B (gali būti palankios ir abiems), vadinsime jų sąjunga ir žymėsime $A \cup B$.

Įvykių sąjunga ir sankirta



Jeigu visos baigtys, palankios įvykiui A yra palankios ir įvykiui B, tai A galime vaizduoti B poaibiu. Tokiu atveju rašysime $A \subset B$.

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Veiksmų savybės

4 teorema. Tegu A, B, C yra su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai, Ω žymime būtinąjį, $\emptyset$ – negalimąjį įvykį. Teisingi šie teiginiai:

1. $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\emptyset \cup A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\Omega \cap A = A$;
3. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = \Omega$;
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Pavyzdys

Pavyzdys.
Naudodamiesi įvykių veiksmų savybėmis galime tvarkyti reiškinius su įvykių veiksmais. Pavyzdžiui, suprastinkime įvykio $D = \overline{(\overline{A} \cup B) \cup C}$ išraišką.

▲

Įvykių algebra

Jeigu Ω yra bandymo baigčių aibė, tai kiekvieną su bandymu susijusį įvykį galime pavaizduoti poaibiu $A \subset \Omega$.
Atlikę veiksmus su šeimos $\mathscr{A}$ įvykiais, vėl gauname šios šeimos narius.
Taigi įvykių šeima $\mathscr{A}$ turi šias savybes;

$$\emptyset \in \mathscr{A}, \quad \Omega \in \mathscr{A},$$
$$\text{kiekvienam } A \in \mathscr{A} \text{ taip pat } \overline{A} \in \mathscr{A},$$
$$\text{bet kokiems } A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \text{ taip pat } \cap_i A_i, \cup_i A_i \in \mathscr{A}.$$

Įvykių σ-algebra

3 apibrėžimas. *Tegu Ω yra netuščia aibė. Jos poaibių sistemą $\mathscr{A}$ vadinsime σ-algebra, jeigu patenkintos tokios sąlygos:*

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- *jei* $A \in \mathscr{A}$, *tai ir* $\overline{A} \in \mathscr{A}$;
- *jei* $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, 2, \ldots,$ *tai*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Įvykių algebros savybės

5 teorema. Tegu $\mathscr{A}$ yra aibės Ω σ-algebra. Teisingi tokie teiginiai:

- jei $A_i, i \in I$, yra baigtinė arba skaiti aibių iš $\mathscr{A}$ šeima, tai $\cap_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$;
- jei $A, B \in \mathscr{A}$, tai $A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Čia žymime $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Įvykių šeima ir įvykių σ-algebra

Pavyzdys.
Tegu $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, o mums labai rūpi, kad į nagrinėjamų įvykių sistemą įeitų įvykiai $\{1,2,3\},\{3,4,5\}$.
Tada mažiausia σ-algebra, kuriai priklauso šie įvykiai yra tokia:

$$\mathscr{A} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{3\}, \{4,5\}, \{1,2\}, \{1,2,4,5\}, \Omega\}.$$

▲

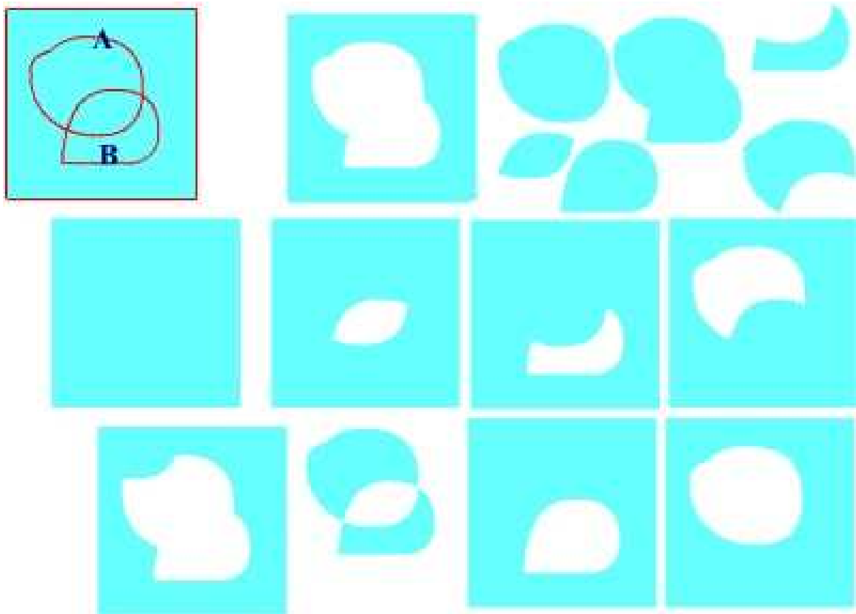
Įrodymas

Generuota σ-algebra

4 apibrėžimas. *Tegu $\mathscr{S}$ yra netuščios aibės Ω poaibių sistema. Jeigu σ-algebra $\mathscr{A}$ tenkina sąlygą $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ ir turi savybę: su bet kuria kita σ- algebra $\mathscr{A}'$, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}'$, teisinga $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$, tai σ- algebrą $\mathscr{A}$ vadinsime σ- algebra, generuota $\mathscr{S}$ ir žymėsime $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{S})$.*

Generuota σ-algebra

6 teorema. Bet kokiai poaibių sistemai $\mathscr{S}$ $\sigma(\mathscr{S})$ egzistuoja.



Svarbus pavyzdys

Pavyzdys. *Borelio σ-algebra*
Tegu $\mathscr{S}$ yra realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ intervalų $[a, b)$ sistema. Tada $\sigma(\mathscr{S})$ vadinama Borelio σ-algebra. Tiesės poaibių Borelio σ-algebrą žymėsime $\mathscr{B}$.

Analogiškai apibrėšime $\mathbb{R}^n$ Borelio σ-algebrą. Jei $\mathscr{S}$ yra visų n-mačių intervalų $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ sistema, tai $\sigma(\mathscr{S})$ vadinsime erdvės $\mathbb{R}^n$ Borelio σ-algebra. Žymėsime: $\mathscr{B}^n$.

1.6. Tikimybinis matas

Tikimybinis matas

5 apibrėžimas. *Tegu $\mathscr{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių σ-algebra. Funkciją $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ vadinsime tikimybiniu matu (dažnai – tiesiog tikimybe), jei*

- $P(\Omega) = 1$;
- *jei* $A_i \in \mathscr{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i,j = 1,2,\dots,i \neq j)$, *tai*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Įvykius, kuriems $A \cap B = \emptyset$, vadiname nesutaikomais. Tikimybės apibrėžimo antrąją sąlygą vadinsime σ- adityvumo sąlyga.

Tikimybinė erdvė

6 apibrėžimas. *Trejetą $\langle\Omega, \mathscr{A}, P\rangle$, čia $\mathscr{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių σ-algebra, P – tikimybinis matas, vadinsime tikimybine erdve.*

Diskrečioji tikimybinė erdvė

Diskrečiosios tikimybinės erdvės sudarymas

Jeigu bandymo baigčių aibė Ω yra diskreti, t.y. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, tai įvykių algebrą $\mathscr{A}$ galime sudaryti iš visų poaibių $A \subset \Omega$. Po to reikia apibrėžti baigčių tikimybes

$$P(\omega_1) = p_1,\ P(\omega_2) = p_2, \ldots \quad (0 < p_i < 1)$$
$$p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

Bet kokio kito įvykio $A \subset \Omega$ tikimybę apibrėžiame sumuodami šiam įvykiui palankių baigčių tikimybes

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Pavyzdys

Pavyzdys. *Augalo žiedai*
Pasodinome augalą ir laukiame, kol jis sukraus žiedus. Taigi bandymas – augalo augimas. Sudarėme tokią baigčių aibę:

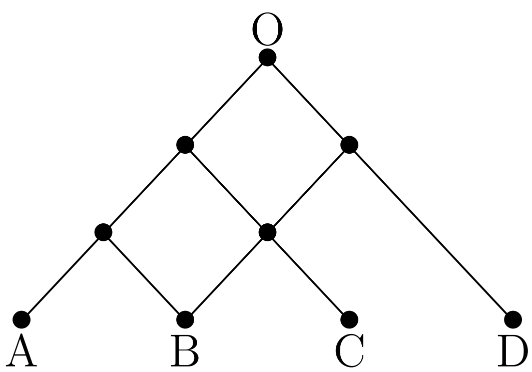
$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \{\text{augalas nepražys}\},\\
\omega_1 &= \{\text{augalas pražys vienu žiedu}\},\\
\omega_2 &= \{\text{augalas pražys dviem žiedais}\},\\
\omega_3 &= \{\text{augalas pražys trimis žiedais}\},\\
\omega_4 &= \{\text{augalas pražys ne mažiau kaip keturiais žiedais}\}.
\end{aligned}
$$

Kaip apibrėžti baigčių tikimybes?

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys.
Bandymas – kelionė iš taško O žemyn, kryžkelėse atsitiktinai renkantis kryptis.



Bandymo baigčių aibė $\Omega = \{\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D\}$, čia ω_X reiškia baigtį, kad keleivis atvyko į tašką X. Apibrėžkite baigčių tikimybes.

1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės

Kelios lygybės

Tarsime, kad tikimybinė erdvė $\langle \Omega, \mathscr{A}, P \rangle$ jau sukurta.
Įvykius, kurie negali įvykti kartu, vadiname nesutaikomais.

7 teorema. Teisingi tokie teiginiai:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. lygybė $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, teisinga bet kokiai baigtinei arba skaičiai nesutaikomų įvykių sistemai $A_i, i \in I$;
3. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$; atskiru atveju $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Įrodymas

Kelios lygybės

Tarsime, kad tikimybinė erdvė $\langle \Omega, \mathscr{A}, P \rangle$ jau sukurta.
Įvykius, kurie negali įvykti kartu, vadiname nesutaikomais.

8 teorema. Teisingi tokie teiginiai:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. lygybė $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, teisinga bet kokiai baigtinei arba skaičiai nesutaikomų įvykių sistemai $A_i, i \in I$;
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$; atskiru atveju $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Įrodymas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Kelios lygybės

Tarsime, kad tikimybinė erdvė $\langle \Omega, \mathscr{A}, P \rangle$ jau sukurta.
Įvykius, kurie negali įvykti kartu, vadiname nesutaikomais.

9 teorema. Teisingi tokie teiginiai:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. lygybė $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, teisinga bet kokiai baigtinei arba skaičiai nesutaikomų įvykių sistemai $A_i, i \in I$;
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$; atskiru atveju $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Įrodymas

Nelygybės

10 teorema. Jei A_i $(i \in I)$ yra baigtinė arba skaiti įvykių sistema, A – atsitiktinis įvykis ir $A \subset \cup_i A_i$, tai

$$P(A) \leqslant \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Atskiru atveju, kai $A = \cup_i A_i$,

$$P\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \leqslant \sum_{i \in I} P(A_i).$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Nelygybės

11 teorema. Jei A_i $(i \in I)$ yra baigtinė arba skaiti įvykių sistema, A – atsitiktinis įvykis ir $A \subset \cup_i A_i$, tai

$$P(A) \leqslant \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Atskiru atveju, kai $A = \cup_i A_i$,

$$P\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \leqslant \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Pasirinkimo uždavinys

Pavyzdys. *Pasirinkimo uždavinys*
Iš n objektų, tarp kurių nėra lygiaverčių, reikia pasirinkti vieną. Objektai pasirodo mums vienas po kito. Jeigu objekto nepasirinkome, prie jo sugrįžti nebegalima.

▲

Pasirinkimo uždavinys
Rinkimosi strategija: Prieš prasidedant „veiksmui“ pasirenkame skaičių $m, 0 \leqslant m \leqslant n$ ir nutariame nei vieno iš pirmųjų m objektų nesirinkti; juos tiesiog rikuosime į eilę pagal „kokybę".

Kai tokią eilę sudarysime, rinksime pirmą vėliau pasirodžiusį objektą, kuris yra geresnis už geriausiąjį iš pirmųjų m.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pasirinkimo uždavinys

Pavyzdys. *Pasirinkimo uždavinys*
Iš n objektų, tarp kurių nėra lygiaverčių, reikia pasirinkti vieną. Objektai pasirodo mums vienas po kito. Jeigu objekto nepasirinkome, prie jo sugrįžti nebegalima.

▲

Pasirinkimo uždavinys
Rinkimosi strategija: Prieš prasidedant „veiksmui“ pasirenkame skaičių $m, 0 \leqslant m \leqslant n$ ir nutariame nei vieno iš pirmųjų m objektų nesirinkti; juos tiesiog rikuosime į eilę pagal „kokybę".

Kai tokią eilę sudarysime, rinksime pirmą vėliau pasirodžiusį objektą, kuris yra geresnis už geriausiąjį iš pirmųjų m.

Pasirinkimo uždavinys

Pavyzdys. *Pasirinkimo uždavinys*
Iš n objektų, tarp kurių nėra lygiaverčių, reikia pasirinkti vieną. Objektai pasirodo mums vienas po kito. Jeigu objekto nepasirinkome, prie jo sugrįžti nebegalima.

▲

Pasirinkimo uždavinys
Rinkimosi strategija: Prieš prasidedant „veiksmui“ pasirenkame skaičių $m, 0 \leqslant m \leqslant n$ ir nutariame nei vieno iš pirmųjų m objektų nesirinkti; juos tiesiog rikuosime į eilę pagal „kokybę".

Kai tokią eilę sudarysime, rinksime pirmą vėliau pasirodžiusį objektą, kuris yra geresnis už geriausiąjį iš pirmųjų m.

Pasirinkimo uždavinys

Kokia tikimybė, kad šitaip rinkdamiesi pasirinksime patį geriausią iš n objektų?

Kokia tikimybė, kad pasirinksime antrąjį (trečiąjį, ketvirtąjį...) pagal gerumą?

Kokia tikimybė, kad liksime be nieko?

Pasirinkimo uždavinys

Kokia tikimybė, kad šitaip rinkdamiesi pasirinksime patį geriausią iš n objektų?

Kokia tikimybė, kad pasirinksime antrąjį (trečiąjį, ketvirtąjį...) pagal gerumą?

Kokia tikimybė, kad liksime be nieko?

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pasirinkimo uždavinys

Kokia tikimybė, kad šitaip rinkdamiesi pasirinksime patį geriausią iš n objektų?

Kokia tikimybė, kad pasirinksime antrąjį (trečiąjį, ketvirtąjį...) pagal gerumą?

Kokia tikimybė, kad liksime be nieko?

Pasirinkimo uždavinys

Pažymėkime p_m tikimybę, kad pasirinksime geriausiąjį, o $p_m(m+1), p_m(m+2), \ldots, p_m(n)$ – tikimybes, kad tas geriausias bus iš eilės $m+1$-asis, $m+2$-asis, ... , n-asis.
Taigi

$$p_m = p_m(m+1) + p_m(m+2) + \cdots + p_m(n).$$

Sprendimas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pasirinkimo uždavinys

$$\begin{aligned} p_m(m+1) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\ p_m(m+2) &= \frac{m \cdot C_{n-1}^{m+1} \cdot m! \cdot (n-m-2)!}{n!} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+1} \\ p_m(m+j) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+j-1} \end{aligned}$$

Tikimybė, kad pasirinksime patį geriausią, jeigu kriterijų susidarėme pagal m pirmųjų objektų, lygi

$$p_m = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{m}{n}\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Pasirinkimo uždavinys

$$
\begin{aligned}
p_m(m+1) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\
p_m(m+2) &= \frac{m \cdot C_{n-1}^{m+1} \cdot m! \cdot (n-m-2)!}{n!} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+1} \\
p_m(m+j) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+j-1}
\end{aligned}
$$

Tikimybė, kad pasirinksime patį geriausią, jeigu kriterijų susidarėme pagal m pirmųjų objektų, lygi

$$p_m = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{m}{n}\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Pasirinkimo uždavinys

$$
\begin{aligned}
p_m(m+1) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\
p_m(m+2) &= \frac{m \cdot C_{n-1}^{m+1} \cdot m! \cdot (n-m-2)!}{n!} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+1} \\
p_m(m+j) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+j-1}
\end{aligned}
$$

Tikimybė, kad pasirinksime patį geriausią, jeigu kriterijų susidarėme pagal m pirmųjų objektų, lygi

$$p_m = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{m}{n}\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Pasirinkimo uždavinys

$$
\begin{aligned}
p_m(m+1) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\
p_m(m+2) &= \frac{m \cdot C_{n-1}^{m+1} \cdot m! \cdot (n-m-2)!}{n!} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+1} \\
p_m(m+j) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{m+j-1}
\end{aligned}
$$

Tikimybė, kad pasirinksime patį geriausią, jeigu kriterijų susidarėme pagal m pirmųjų objektų, lygi

$$p_m = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{m}{n}\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Praktinis klausimas

Jeigu tenka rinktis, pavyzdžiui, iš $n = 10, 20$ ar kito objektų kiekio, su kokiu m tikimybė pasirinkti geriausią yra didžiausia?

Pažymėkime m_n tą m reikšmę, su kuria tikimybė p_m yra didžiausia.

$n =$	5	10	15	20	25	30
$m_n =$	2	4	5	7	9	11
$p_{m_n} =$	0,433	0,398	0,389	0,384	0,381	0,379

$$\frac{m_n}{n} \to \frac{1}{e}, \quad p_{m_n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty.$$

Praktinis klausimas

Jeigu tenka rinktis, pavyzdžiui, iš $n = 10, 20$ ar kito objektų kiekio, su kokiu m tikimybė pasirinkti geriausią yra didžiausia?

Pažymėkime m_n tą m reikšmę, su kuria tikimybė p_m yra didžiausia.

$n =$	5	10	15	20	25	30
$m_n =$	2	4	5	7	9	11
$p_{m_n} =$	0,433	0,398	0,389	0,384	0,381	0,379

$$\frac{m_n}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad p_{m_n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad n \to \infty.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Praktinis klausimas

Jeigu tenka rinktis, pavyzdžiui, iš $n = 10, 20$ ar kito objektų kiekio, su kokiu m tikimybė pasirinkti geriausią yra didžiausia?

Pažymėkime m_n tą m reikšmę, su kuria tikimybė p_m yra didžiausia.

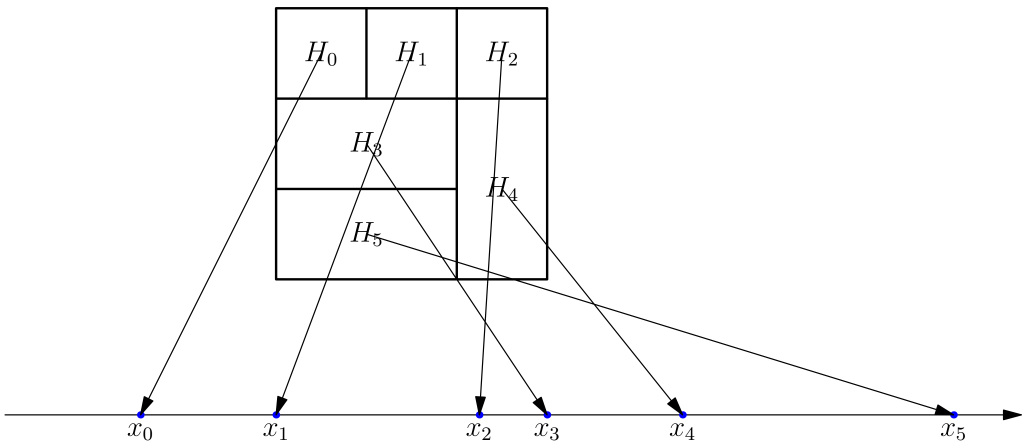
$n =$	5	10	15	20	25	30
$m_n =$	2	4	5	7	9	11
$p_{m_n} =$	0,433	0,398	0,389	0,384	0,381	0,379

$$\frac{m_n}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad p_{m_n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad n \to \infty.$$

1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimybės

Atsitiktinis dydis

Paprastieji atsitiktiniai dydžiai



7 apibrėžimas. *Funkciją $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ vadinsime paprastu atsitiktiniu dydžiu, jei ξ įgyja reikšmes iš baigtinės aibės ir kiekvienai reikšmei x*

$$\xi^{-1}(x) = \{\omega : \xi(\omega) = x\} \in \mathscr{A}.$$

Laiškai į dėžutes

Indikatoriai

Jei $A \in \mathscr{A}$ koks nors atsitiktinis įvykis, tai jo kaip poaibio indikatorius

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \omega \in A, \\ 0, & \text{jei } \omega \notin A. \end{cases}$$

yra paprastas atsitiktinis dydis.

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}, \quad I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}.$$

Jeigu ξ yra paprastas atsitiktinis dydis, x_i jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ yra atsitiktiniai įvykiai. Tada

$$\xi(\omega) = \sum_i x_i I_{H_i}(\omega).$$

Indikatoriai

Jei $A \in \mathscr{A}$ koks nors atsitiktinis įvykis, tai jo kaip poaibio indikatorius

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \omega \in A, \\ 0, & \text{jei } \omega \notin A. \end{cases}$$

yra paprastas atsitiktinis dydis.

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}, \quad I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}.$$

Jeigu ξ yra paprastas atsitiktinis dydis, x_i jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ yra atsitiktiniai įvykiai. Tada

$$\xi(\omega) = \sum_i x_i I_{H_i}(\omega).$$

Indikatoriai

Jei $A \in \mathscr{A}$ koks nors atsitiktinis įvykis, tai jo kaip poaibio indikatorius

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \omega \in A, \\ 0, & \text{jei } \omega \notin A. \end{cases}$$

yra paprastas atsitiktinis dydis.

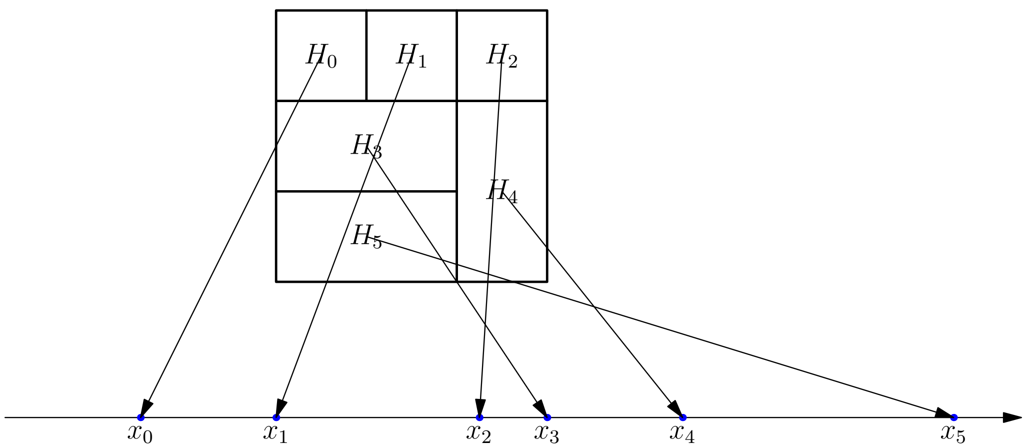
$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}, \quad I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}.$$

Jeigu ξ yra paprastas atsitiktinis dydis, x_i jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ yra atsitiktiniai įvykiai. Tada

$$\xi(\omega) = \sum_i x_i I_{H_i}(\omega).$$

Paprastieji atsitiktiniai dydžiai

Paprastieji atsitiktiniai dydžiai iš indikatorių



Dydžių suma

12 teorema. Jei ξ, η yra paprasti atsitiktiniai dydžiai, a, b – realūs skaičiai, tai $\zeta = a\xi + b\eta$ yra taip pat paprastas atsitiktinis dydis.

Teiginys yra teisingas ir bendruoju atveju: baigtinio skaičiaus paprastųjų atsitiktinių dydžių tiesinė kombinacija yra vėl paprastasis atsitiktinis dydis.

Atsitiktinio dydžio vidurkis

Atsitiktinio dydžio vidurkis

8 apibrėžimas. *Tegu ξ yra paprastasis atsitiktinis dydis, x_i – jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Atsitiktinio dydžio ξ vidurkiu vadinsime skaičių*

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(H_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i).$$

$$\mathbf{E}[I_A] = 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1) = P(A).$$

Atsitiktinio dydžio vidurkis

Atsitiktinio dydžio vidurkis

9 apibrėžimas. *Tegu ξ yra paprastasis atsitiktinis dydis, x_i – jo reikšmės, $H_i = \xi^{-1}(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.*
Atsitiktinio dydžio ξ vidurkiu vadinsime skaičių

$$\mathbf{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(H_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i).$$

$$\mathbf{E}[I_A] = 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1) = P(A).$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Vidurkio adityvumas

13 teorema. Jei ξ, η yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai, a, b – realieji skaičiai, $\zeta = a\xi + b\eta$, tai

$$\mathbf{E}[\zeta] = a\mathbf{E}[\xi] + b\mathbf{E}[\eta].$$

Įrodymas.

Vidurkio adityvumas

14 teorema. Jei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ yra paprastieji atsitiktiniai dydžiai, $a_1, \ldots, a_n$ – realieji skaičiai, tai

$$\mathbf{E}[a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n] = a_1\mathbf{E}[\xi_1] + \cdots + a_n\mathbf{E}[\xi_n].$$

Pavyzdys

Įvykių sąjungos tikimybė

Įrodymo metodas:

$$I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}.$$

Imkime vidurkius abiejose pusėse ir pasinaudokime tuo, kad $P(C) = \mathbf{E}[I_C]$ teisinga bet kokiam įvykiui C. Gausime

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

Įvykių sąjungos tikimybė

Įvykių sąjungos tikimybė

15 teorema. Bet kokiems įvykiams A_i $(i = 1, \dots, n)$ teisinga lygybė

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r,$$

čia

$$S_r = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}).$$

Kita formulė

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n})$$

Įvykių sąjungos tikimybė

Įvykių sąjungos tikimybė

16 teorema. Bet kokiems įvykiams A_i $(i = 1, \dots, n)$ teisinga lygybė

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r,$$

čia

$$S_r = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}).$$

Kita formulė

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n})$$

Lygiai k įvykių

Lygiai k įvykių

17 teorema. Tegu A_i $(i = 1, \ldots, n)$ bet kokie įvykiai, B_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta lygiai k įvykių A_i. Teisinga lygybė

$$P(B_k) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} C_r^k S_r,$$

dydžiai S_r apibrėžti ankstesnėje teoremoje.

Pavyzdys

Kortų kaladė

Pavyzdys. *Kortų kaladė*
Tegu N skirtingų kortų kaladė permaišoma. Kokia tikimybė, jog po permaišymo bent viena korta liks savo vietoje? Lygiai m $(m = 0, 1, \ldots, N)$ kortų liks savo vietoje?

▲

Pažymėkime šias tikimybes atitinkamai $q(N), p_m(N)$. Tegu A_i – įvykis, jog i-toji korta liks savo vietoje.

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = \frac{(N-r)!}{N!}, \quad S_r = \frac{C_N^r (N-r)!}{N!} = \frac{1}{r!}.$$

Tikimybių skaičiavimas

Pavyzdys

Kortų kaladė

Pavyzdys. *Kortų kaladė*
Tegu N skirtingų kortų kaladė permaišoma. Kokia tikimybė, jog po permaišymo bent viena korta liks savo vietoje? Lygiai m $(m = 0, 1, \dots, N)$ kortų liks savo vietoje?

▲

Pažymėkime šias tikimybes atitinkamai $q(N), p_m(N)$. Tegu A_i – įvykis, jog i-toji korta liks savo vietoje.

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = \frac{(N-r)!}{N!}, \qquad S_r = \frac{C_N^r (N-r)!}{N!} = \frac{1}{r!}.$$

Tikimybių skaičiavimas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

$$\begin{aligned} q(N) &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{1}{j!}, \\ p_m(N) &= \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{N-m} (-1)^n \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

$$q(N) \to 1 - \mathrm{e}^{-1}, \quad p_m(N) \to \mathrm{e}^{-1}/m!, \quad N \to \infty,$$

čia e – natūrinių logaritmų pagrindas.
Laiškai į dėžutes

◂ □ ▸ ◂ ⧉ ▸ ◂ ≡ ▸ ◂ ≡ ▸ ≡ ↶ ⚲ ↷

Didėjantys įvykiai

18 teorema. Tegu įvykiai A_i $(i = 1, \ldots)$ monotoniškai didėja:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n.$$

Tada $P(A_n) \to P(A)$, *kai* $n \to \infty$.

Mažėjantys įvykiai

19 teorema. Tegu įvykiai A_i $(i = 1, \ldots)$ monotoniškai mažėja:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n.$$

Tada $P(A_n) \to P(A)$, *kai* $n \to \infty$.

Paradoksas su rutuliais

Pavyzdys. *Įdėti ir išimti*
Begalinė rutulių, sunumeruotų skaičiais $1, 2, 3, \ldots,$ seka ir didžiulė tuščia urna. Prasideda bandymas: po 1 minutės į urną įdedami rutuliai su numeriais $1, 2$ ir vienas jų išimamas. Po $1/2$ min. įdedami rutuliai $3, 4$ ir vienas rutulys iš urnos išimamas. Po $1/4$ min. vėl pora rutulių įdedama, o vienas išimamas. Veiksmai kartojami po $1/8, 1/16, \ldots$ min. Kiek rutulių bus urnoje po $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = 2$ minučių? ▲

Jeigu visada išimamas rutulys su didžiausiu numeriu, tada urnoje po 2 minučių bus be galo daug rutulių.
Jeigu visada išimamas rutulys su mažiausiu numeriu, tai po 2 minučių urna bus tuščia.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Paradoksas su rutuliais

Pavyzdys. *Įdėti ir išimti*
Begalinė rutulių, sunumeruotų skaičiais $1, 2, 3, \ldots,$ seka ir didžiulė tuščia urna. Prasideda bandymas: po 1 minutės į urną įdedami rutuliai su numeriais $1, 2$ ir vienas jų išimamas. Po $1/2$ min. įdedami rutuliai $3, 4$ ir vienas rutulys iš urnos išimamas. Po $1/4$ min. vėl pora rutulių įdedama, o vienas išimamas. Veiksmai kartojami po $1/8, 1/16, \ldots$ min. Kiek rutulių bus urnoje po $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = 2$ minučių? ▲

Jeigu visada išimamas rutulys su didžiausiu numeriu, tada urnoje po 2 minučių bus be galo daug rutulių.
Jeigu visada išimamas rutulys su mažiausiu numeriu, tai po 2 minučių urna bus tuščia.

Paradoksas su rutuliais

Pavyzdys. *Įdėti ir išimti*
Begalinė rutulių, sunumeruotų skaičiais $1,2,3,\ldots$, seka ir didžiulė tuščia urna. Prasideda bandymas: po 1 minutės į urną įdedami rutuliai su numeriais $1,2$ ir vienas jų išimamas. Po $1/2$ min. įdedami rutuliai $3,4$ ir vienas rutulys iš urnos išimamas. Po $1/4$ min. vėl pora rutulių įdedama, o vienas išimamas. Veiksmai kartojami po $1/8, 1/16, \ldots$ min. Kiek rutulių bus urnoje po $1+1/2+1/4+\cdots=2$ minučių? ▲

Jeigu visada išimamas rutulys su didžiausiu numeriu, tada urnoje po 2 minučių bus be galo daug rutulių.
Jeigu visada išimamas rutulys su mažiausiu numeriu, tai po 2 minučių urna bus tuščia.

Paradoksas su rutuliais

Kiek urnoje bus rutulių, jeigu rutuliai išimami atsitiktinai?

$$
\begin{aligned}
E_k^m &= \{\text{po } k \text{ žingsnių urnoje bus } m\text{-asis rutulys}\},\\
&\quad E_m^m \supset E_{m+1}^m \supset \ldots,\\
E^m &= \{\text{po 2 min. urnoje bus } m\text{-asis rutulys}\} = \bigcap_{k\geqslant m} E_k^m,\\
E &= \{\text{po 2 min. urna bus netuščia}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E^m\\
P(E_k^1) &= \frac{1\cdot 2\cdots k}{2\cdot 3\cdots k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k+1} \to 0, \quad k\to\infty\\
P(E^1) &= \lim_{k\to\infty} P(E_k^1) = 0, \quad P(E)=0.
\end{aligned}
$$

Paradoksas su rutuliais

Kiek urnoje bus rutulių, jeigu rutuliai išimami atsitiktinai?

$$\begin{aligned}
E_k^m &= \{\text{po } k \text{ žingsnių urnoje bus } m\text{-asis rutulys}\}, \\
&\quad E_m^m \supset E_{m+1}^m \supset \dots, \\
E^m &= \{\text{po 2 min. urnoje bus } m\text{-asis rutulys}\} = \bigcap_{k\geqslant m} E_k^m, \\
E &= \{\text{po 2 min. urna bus netuščia}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E^m \\
P(E_k^1) &= \frac{1\cdot 2\cdots k}{2\cdot 3\cdots k\cdot (k+1)} = \frac{1}{k+1} \to 0, \quad k\to\infty \\
P(E^1) &= \lim_{k\to\infty} P(E_k^1) = 0, \quad P(E) = 0.
\end{aligned}$$

1.10. Sąlyginė tikimybė

Pavyzdys

Pavyzdys.
Įsivaizduokite, kad jums ir dar dviems draugams reikia traukti burtus. Į urną įdedami trys rutuliai: juodas, mėlynas ir baltas. Kiekvienas dalyvis trauks po vieną rutulį. Laimės tas, kuriam atiteks baltas rutulys.

Jeigu trauksite pirmasis, tai tikimybė laimėti lygi $\frac{1}{3}$. O gal verčiau traukti antruoju ar trečiuoju?

▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys.
Įsivaizduokite, kad jums ir dar dviems draugams reikia traukti burtus. Į urną įdedami trys rutuliai: juodas, mėlynas ir baltas. Kiekvienas dalyvis trauks po vieną rutulį. Laimės tas, kuriam atiteks baltas rutulys.

Jeigu trauksite pirmasis, tai tikimybė laimėti lygi $\frac{1}{3}$. O gal verčiau traukti antruoju ar trečiuoju?

▲

Pavyzdys

Pavyzdys.
Tegu urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vėl vienas po kito traukiami trys rutuliai. Kam dabar lygios įvykių $A_i = \{i\text{-asis ištrauktas rutulys baltas}\}$, $i = 1, 2, 3$, tikimybės?

▲

Tikimybės patikslinimas

O dabar tarkime, kad nusprendėte traukti rutulį antruoju ir bandymas prasidėjo. Jeigu pirmasis ištrauktas rutulys buvo baltas, jūs jau kitaip vertinsite savo galimybes laimėti. Tokiu atveju tikimybė, kad ištrauksite baltą rutulį lygi $\frac{3}{8}$.
Pirmoji tikimybė gauta prieš bandymą neturint jokių žinių apie jo eigą. Antroji – pasinaudojant žiniomis, kurias suteikė su bandymu susijęs įvykis A_1.
Pirmąją tikimybę vadinsime **besąlygine**, o antrąją – **sąlygine** tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis A_1.
Tikimybes žymėsime taip:

$$P(A_2) = \frac{4}{9}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}.$$

Tikimybės patikslinimas

O dabar tarkime, kad nusprendėte traukti rutulį antruoju ir bandymas prasidėjo. Jeigu pirmasis ištrauktas rutulys buvo baltas, jūs jau kitaip vertinsite savo galimybes laimėti. Tokiu atveju tikimybė, kad ištrauksite baltą rutulį lygi $\frac{3}{8}$.

Pirmoji tikimybė gauta prieš bandymą neturint jokių žinių apie jo eigą. Antroji – pasinaudojant žiniomis, kurias suteikė su bandymu susijęs įvykis A_1.

Pirmąją tikimybę vadinsime **besąlygine**, o antrąją – **sąlygine** tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis A_1.

Tikimybes žymėsime taip:

$$P(A_2) = \frac{4}{9}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}.$$

Sąlyginė tikimybė

10 apibrėžimas. *Tegu A, B su tuo pačiu bandymu susiję atsitiktiniai įvykiai, $P(B) > 0$. Įvykio A sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis B, vadinsime skaičių*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tie patys teiginiai

20 teorema. Tegu A, B, C yra atsitiktiniai įvykiai, $P(C) > 0$. Tada

1. $P(\Omega|C) = 1,\ P(\emptyset|C) = 0$;
2. $P(A|C) = 1 - P(\overline{A}|C)$;
3. jei A, B yra nesutaikomi įvykiai, tai

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C).$$

Pavyzdys

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Pavyzdys.
Urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vienas po kito traukiami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai bus balti? Kad bent vienas rutulys bus baltas?

▲

Rutuliai iš urnos

Pavyzdys

Pavyzdys.
Urnoje yra $n = 5$ juodi ir $m = 4$ balti rutuliai. Vienas po kito traukiami du rutuliai. Ištraukus rutulį, į urną įdedami trys tos pačios spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai bus balti? Kad bent vienas rutulys bus baltas?

▲

Rutuliai iš urnos

Tikimybių sandaugos formulė

21 teorema. Tegu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra bet kokie atsitiktiniai įvykiai, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Teisinga lygybė

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Pavyzdys

Pavyzdys.
Nagrinėkime tą patį rutulių traukimo bandymą kaip ankstesniame pavyzdyje, tačiau dabar vienas po kito traukiami trys rutuliai.
Kokia tikimybė, kad visi trys bus balti? Kad bent vienas iš jų bus baltas?

▲

Rutuliai iš urnos

Nutrauktas lošimas

Pavyzdys. *Nutrauktas lošimas*
Du lošėjai į laimėjimų banką įdėjo po 5 litus ir susitarė lošti mėtydami simetrišką monetą. Jeigu moneta atvirsta herbu (H), pirmasis gauna tašką, jeigu skaičius (S) – tašką gauna antrasis. Visą banką gauna tas, kas pirmasis surenka tris taškus.
Pažymėkime įvykį, kad pirmasis laimės A_1 ir A_2, kad laimės antrasis. Abiejų galimybės laimėti vienodos, t. y. $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

▲

Nutrauktas lošimas

Pavyzdys. *Nutrauktas lošimas*
Du lošėjai į laimėjimų banką įdėjo po 5 litus ir susitarė lošti mėtydami simetrišką monetą. Jeigu moneta atvirsta herbu (H), pirmasis gauna tašką, jeigu skaičius (S) – tašką gauna antrasis. Visą banką gauna tas, kas pirmasis surenka tris taškus.
Pažymėkime įvykį, kad pirmasis laimės A_1 ir A_2, kad laimės antrasis. Abiejų galimybės laimėti vienodos, t. y. $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. ▲

Nutrauktas lošimas

Tarkime, pirmajame metime atvirto herbas, taigi pirmasis lošėjas pirmauja rezultatu 1 : 0. Jeigu dėl kokių nors aplinkybių reiktų nutraukti lošimą, kaip teisingai pasidalyti laimėjimų banką, t. y. 10 litų?

1.11. Sąlyginių tikimybių savybės

Pavyzdžiai

Pavyzdys. *Durys ir raktai*
Reikia atrakinti duris. Vienoje iš trijų kišenių yra trys vienodi, užraktui tinkantys raktai, kitoje vienas užraktui netinkantis raktas, trečioje – du, taip pat netinkami raktai. Atsitiktinai pasirinkę kišenę, išsitraukiame raktą ir bandome atrakinti duris.
Kokia tikimybė, kad atrakinti pavyks pirmuoju bandymu?

▲

Pavyzdžiai

Pavyzdys. *Durys ir raktai*
O dabar įsivaizduokime, kad raktai į kišenes sudėti kitaip. Vienoje kišenėje yra geras raktas, kitoje – vienas geras, o kitas netinkantis užraktui raktas, trečioje – vienas tinkantis, du ne.
Kokia dabar tikimybė atrakinti duris pirmuoju bandymu?

▲

Pilnosios tikimybės formulė

22 teorema. Jeigu atsitiktiniai įvykiai $H_1, H_2, \dots$ yra nesutaikomi, jų tikimybės yra teigiamos ir

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots,$$

tai bet kokiam kitam įvykiui A teisinga lygybė

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Moneta ir kauliukai

Pavyzdys

Pavyzdys. *Egzaminas*
Egzamino bilietą sudaro keturi klausimai ir keturi atsakymai. Reikia sudaryti klausimų ir teisingų atsakymų į juos poras. Iš viso parengti 25 bilietai. Studentas pasirengė egzaminui taip: išmoko teisingai atsakyti į pirmųjų dviejų bilietų tris klausimus, sužinojo teisingus atsakymus į pirmuosius du 3-5 bilietų klausimus, surado po vieną teisingą atsakymą į 6-19 bilietų klausimus, o kaip atsakyti į likusių bilietų klausimus nesužinojo. Egzaminui išlaikyti būtina teisingai sudaryti visas keturias klausimų-atsakymų poras. Kokia tikimybė, kad studentui pavyks išlaikyti egzaminą?

Hipotezių tikrinimo formulė

23 teorema. Tegu atsitiktiniai įvykiai $H_1, H_2, \dots$ yra nesutaikomi, jų tikimybės yra teigiamos ir $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots$, o A bet koks įvykis, $P(A) > 0$. Tada su kiekvienu įvykiu H_i teisinga lygybė

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

čia
$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$

Pavyzdys

Pavyzdys.
Prieš jus – trys užklijuoti vokai. Du iš jų tušti, viename – 10 Lt banknotas. Galite pasirinkti vieną. Kai pasirenkate, žaidimo rengėjas paima ir atplėšia tuščią voką. Dabar ir jūs, ir jis turite po neatplėštą voką. Jeigu norite – galite pasikeisti vokais.
Ar verta?
Suraskite tikimybę, kad gausite voką su pinigu, jeigu nesikeisite ir – jeigu keisite. ▲

Keistis ar nesikeisti?

Pavyzdys

Pavyzdys. *Keistis ar nesikeisti?*
Prieš jus – keturi užklijuoti vokai. Trys iš jų tušti, viename – 10 Lt banknotas. Galite pasirinkti du. Kai pasirenkate, žaidimo rengėjas paima ir atplėšia tuščią voką. Dabar jūs turite du, o jis vieną neatplėštą voką. Jeigu norite – galite pakeisti vieną savo voką į jo. Suraskite tikimybę, kad vienas iš jūsų pasirinktų vokų bus vokas su pinigu, jeigu voko nekeisite ir jei keisite. ▲

Pavyzdys

Pavyzdys. *Kavos automatai*
Šalia vienas kito stovi trys kavos automatai. Žinome, kad vienas maždaug 50% atvejų praryja monetą, bet kavos neįpila, kitas taip elgiasi maždaug 25% atvejų, trečias veikia be priekaištų.
Atsitiktinai pasirenkame vieną iš jų ir bandome nusipirkti kavos. Kokia tikimybė, kad mums pavyks. Tarkime, kad pavyko. Kokia tikimybė, kad tas pats automatas įpils kavos puodelį ir antrą kartą. Jeigu abu kartai buvo sėkmingi, kokia tikimybė, kad pasirinkome visada gerai veikiantį automatą? ▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys. Kavos automatai
Šalia vienas kito stovi trys kavos automatai. Žinome, kad vienas maždaug 50% atvejų praryja monetą, bet kavos neįpila, kitas taip elgiasi maždaug 25% atvejų, trečias veikia be priekaištų.
Atsitiktinai pasirenkame vieną iš jų ir bandome nusipirkti kavos. Kokia tikimybė, kad mums pavyks. Tarkime, kad pavyko. Kokia tikimybė, kad tas pats automatas įpils kavos puodelį ir antrą kartą. Jeigu abu kartai buvo sėkmingi, kokia tikimybė, kad pasirinkome visada gerai veikiantį automatą? ▲

Kas kitoje pusėje?

Pavyzdys. *Dėžėje – m juodų skrituliukų ir n skrituliukų, kurių viena pusė juoda, kita balta. Vienas skrituliukas nukrito ant grindų, matome jo juodą pusę. Kokia tikimybė, kad kita pusė irgi juoda?*

▲

Lošimas su moneta

Pavyzdys. *Lošimas su moneta*
Du lošėjai mėto simetrišką monetą. Jei iškrinta herbas (H), pirmasis išlošia 1 Lt, antrasis - tiek pat pralošia. Jei iškrinta skaičius (S) - pirmasis pralošia, o antrasis išlošia 1 Lt. Pirmojo pradinis kapitalas lygus x, antrojo - neribotas. Pirmasis lošėjas nusiteikęs lošti, kol jo turima suma pasidarys lygi a arba - kol prasiloš iki paskutinio siūlelio. Kokia tikimybė, kad jis prasiloš?

▲

Sąlyginis vidurkis

11 apibrėžimas. *Tegu X yra paprastasis atsitiktinis dydis, o H – atsitiktinis įvykis, $P(H) > 0$. Sąlyginiu atsitiktinio dydžio X vidurkiu su sąlyga, kad įvyko įvykis H, vadinsime skaičių*

$$\mathbf{E}[X|H] = \sum_x x \cdot P(X = x|H).$$

Sąlyginis vidurkis turi visas atsitiktinio dydžio vidurkio savybes.

Adityvumo teorema

24 teorema. Tegu $H_1, H_2, \ldots$ yra nesutaikomi įvykiai, $P(H_i) > 0$, X – paprastasis atsitiktinis dydis, $H = \cup_i H_i$. Tada

$$\mathbf{E}[X|H] = \sum_i \mathbf{E}[X|H_i] \cdot \frac{P(H_i)}{P(H)}.$$

Išvada. Jei H_i tenkina teoremos sąlygas ir $H = \Omega$, tai

$$\mathbf{E}[X] = \sum_i \mathbf{E}[X|H_i] P(H_i).$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Metami du simetriški šešiasieniai lošimo kauliukai, X_1, X_2 – akučių skaičiai ant atvirtusių pirmojo bei antrojo kauliukų sienelių, $X = X_1 + X_2$. Apskaičiuokite $\mathbf{E}[X|X_1 = 2], \mathbf{E}[X|X_1 \text{ lyginis}], \mathbf{E}[X|X_2 > X_1]$.

▲

Pavyzdys.
Metamas simetriškas lošimo kauliukas, atvirtusi sienelė užklijuojama. Tada lošimo kauliukas metamas vėl, X – akučių skaičius ant atvirtusios sienelės, jei atvirto užklijuota sienelė, manome, kad akučių skaičius lygus nuliui. Raskite $\mathbf{E}[X]$.

▲

1.12. Nepriklausomi įvykiai

Pavyzdys

Pavyzdys.
Urnoje yra du balti rutuliai ir vienas juodas. Du žaidėjai vienas po kito traukia po rutulį. Jei ištraukia baltą – laimi kokį nors prizą. Įvykiai: $A_1 = \{\text{pirmasis laimėjo}\}$ ir $A_2 = \{\text{antrasis laimėjo}\}$. Prieš bandymą apskaičiuojame:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}.$$

Tarkime, įvyko įvykis A_1, tada $P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}$. ▲

Nepriklausomi įvykiai

12 apibrėžimas. *Atsitiktinius įvykius A_1, A_2 vadinsime nepriklausomais, jeigu*

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Būtinasis ir negalimas įvykiai nepriklauso nuo bet kurio kito įvykio.

Pavyzdys.
Ar įvykiai

$$\begin{aligned} A &= \{\text{šeimoje su 3 vaikais yra sūnų ir dukterų}\}, \\ B &= \{\text{šeimoje su 3 vaikais dukterų ne daugiau kaip vie} \end{aligned}$$

Nepriklausomi įvykiai

25 teorema. Jei A_1 ir A_2 yra nepriklausomi įvykiai, tai $\overline{A_1}$ ir A_2, A_1 ir $\overline{A_2}$, $\overline{A_1}$ ir $\overline{A_2}$ irgi nepriklausomų įvykių poros.

Įrodymas.

Kaip apibrėžti nepriklausomų įvykių sistemą?

Urnoje yra keturi skaičiais $0,1,2,3$ pažymėti rutuliai. Yra trys žaidėjai. Traukiamas vienas rutulys. Jeigu jo numeris 0, visi trys laimi po prizą. Jeigu numeris 1 – laimi tik pirmasis, jei 2 – tik antrasis, jei 3 – tik trečiasis. Pažymėkime įvykius $A_i = \{\text{laimėjo } i\text{-asis žaidėjas}\}$. Akivaizdu, kad

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},\ P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4},\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

jei $i \neq j$. Taigi įvykiai A_i ir A_j yra nepriklausomi. Pavyzdžiui, A_1 nepriklauso nei nuo A_2, nei nuo A_3.

O nuo abiejų sykiu?

Nepriklausomų įvykių sistema

13 apibrėžimas. *Sakysime, kad įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sudaro nepriklausomų įvykių sistemą, jeigu su visomis reikšmėmis $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$ teisinga lygybė*

$$P(A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}) = P(A_1^{i_1}) \cdot P(A_2^{i_2}) \cdots P(A_n^{i_n}),$$

čia žymima $A_i^0 = A_i, A_i^1 = \overline{A_i}$.

Nepriklausomų įvykių trejetas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys. *Du kauliukai*
Bandymas – dviejų simetriškų lošimo kauliukų metimas. Ar įvykiai

$$\begin{aligned} A &= \{\text{atvirtusių akučių suma lyginė}\}, \\ B &= \{\text{atvirtusių akučių suma didesnė už } 6\} \end{aligned}$$

yra nepriklausomi?

▲

◀ □ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≣ ▶ ◀ ≣ ▶ ≣ ⟲ ◯ ⟳

Pavyzdys

Pavyzdys.
Bandymas – dviejų simetriškų lošimo kauliukų metimas. Apibrėžkime įvykius: $A =$ $\{$1-asis kauliukas atvirto sienele su 3 arba 4 akutėmis$\}$, $B = \{$atvirtusių akučių suma mažesnė už 8$\}$.

Ar šie įvykiai yra nepriklausomi?

▲

Du kauliukai

Nepriklausomų įvykių sistema

14 apibrėžimas. *Sakysime, kad begalinę įvykių sistemą* $\mathscr{S} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *sudaro nepriklausomi įvykiai, jeigu bet kurią baigtinę šios sistemos posistemę sudaro nepriklausomi įvykiai.*

Borelio-Kantelio lema

26 teorema. Tegu seką $A_1, A_2, \ldots,$ sudaro tarpusavyje nepriklausomi įvykiai, $p_n = P(A_n)$,

$$\sum_n p_n = \infty.$$

Tada tikimybė, jog įvyks be galo daug įvykių A_n, lygi 1.
Tekstas

1.13. Nepriklausomi bandymai

Bandymas su dviem baigtimis

Nagrinėkime bandymą su dviem baigtimis, kurias žymėsime 0 (nesėkmė) ir 1 (sėkmė). Tegu sėkmės tikimybė p, o nesėkmės – $q = 1 - p$.

Sudarėme labai paprastą tikimybinę erdvę:

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad P(1) = p, \quad P(0) = q = 1 - p.$$

Nepriklausomi ir vienodi bandymai

Bandymą kartojame n kartų, be to vieno bandymo baigtys nedaro įtakos kitų bandymų baigtims, t. y. bandymai yra nepriklausomi. Kai $n = 3$, tai baigčių aibė

$$\Omega_3 = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}.$$

Baigčių tikimybės:

$$P(000) = q \cdot q \cdot q = q^3, \ P(001) = P(010) = P(100) = q \cdot q \cdot p = pq^2,$$
$$P(011) = P(101) = P(110) = p^2 q, \ P(111) = p^3,$$
$$P(\omega_1 \omega_2 \omega_3) = p^m q^{3-m}, \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

čia $m = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ yra sėkmių, gautų atlikus tris bandymus skaičius.

Bernulio schema

Atliekama n nepriklausomų vienodų bandymų su dviem baigtimis. Baigčių aibę pažymėkime Ω_n; ją sudaro n ilgio sėkmių-nesėkmių sekos:

$$\Omega_n = \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n : \omega_i = 0, 1\}.$$

Vienos sekos – bandymų sekos baigties – $\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ tikimybę apibrėšime lygybe

$$\begin{aligned} P(\omega) &= p^m q^{n-m}, \quad m = \text{sėkmių skaičius} = \omega_1 + \cdots + \\ P(A) &= \sum_{\omega\in A} P(\omega). \end{aligned}$$

Ši tikimybinė erdvė vadinama Bernulio schema.

Sėkmių skaičiaus tikimybės formulė

27 teorema. Tegu sėkmės tikimybė viename Bernulio schemos bandyme lygi p $(0 < p < 1)$, n – bandymų skaičius, o S_n – gautų sėkmių skaičius. Tada

$$P(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Įrodymas

Pavyzdžiai

Bernulio bandymai
Bernulio bandymai
Galtono bandymai
Atsitiktiniai klaidžiojimai

Tikėtiniausias sėkmių skaičius

Pažymėkime

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, \ldots, n.$$

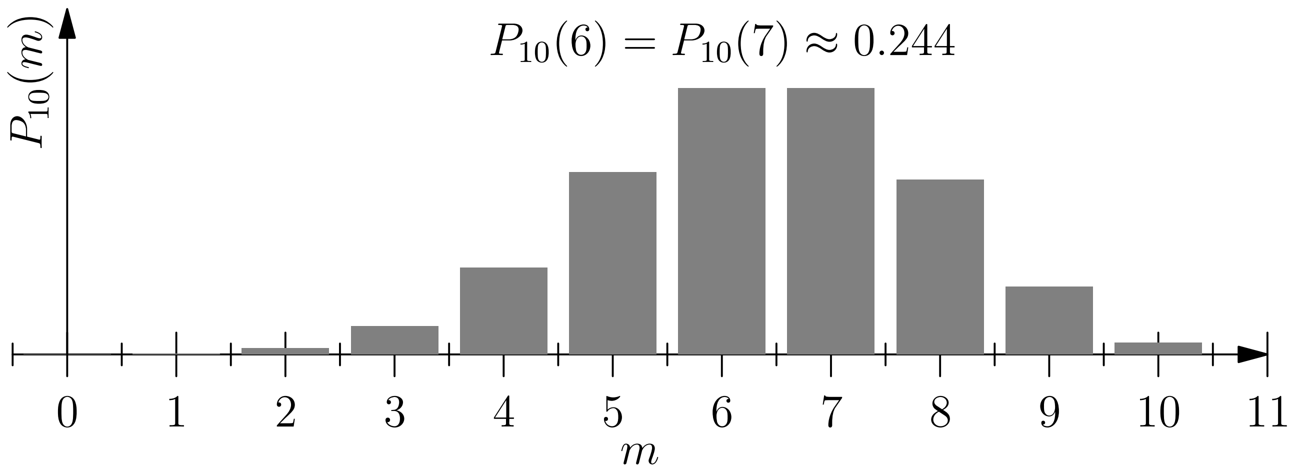
Kuri iš šių tikimybių didžiausia? Sėkmių skaičių m, kuriam $P_n(m)$ reikšmė didžiausia, vadinsime labiausiai tikėtinu sėkmių skaičiumi.

Tikėtiniausias sėkmių skaičius

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-m+1}{m}$$
$$= 1 + \frac{p(n+1)-m}{mq} = 1 + \lambda_m$$

28 teorema. Didžiausias sveikasis skaičius m, tenkinantis nelygybę $m < (n+1)p$ yra labiausiai tikėtinas sėkmių skaičius. Jeigu $(n+1)p$ yra sveikas skaičius, tai $P_n(m)$ įgyja didžiausią reikšmę su $m = (n+1)p$ ir $m = (n+1)p - 1$.

Sėkmių tikimybės



Tikimybės įvertis

Tegu $m > (n+1)p$, vertinsime $P(S_n \geqslant m)$

$$1 > 1+\lambda_{m+1} > 1+\lambda_{m+2} > \dots$$

$$P_n(m+1) = (1+\lambda_{m+1})P_n(m),$$

$$P_n(m+2) = (1+\lambda_{m+2})P_n(m+1) < (1+\lambda_{m+1})^2 P_n($$

$$P(S_n \geqslant m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots$$

$$P(S_n \geq m) < P_n(m)(1+\rho+\rho^2+\cdots),\ \rho = 1+\lambda_{m+1}$$

$$P(S_n \geqslant m) \leq P_n(m)\frac{1}{1-\rho} = P_n(m)\frac{(m+1)q}{m+1-(n+1)p}$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Tikimybės įvertis

Tegu $m > (n+1)p$, vertinsime $P(S_n \geqslant m)$

$$1 > 1+\lambda_{m+1} > 1+\lambda_{m+2} > \dots$$

$$P_n(m+1) = (1+\lambda_{m+1})P_n(m),$$

$$P_n(m+2) = (1+\lambda_{m+2})P_n(m+1) < (1+\lambda_{m+1})^2 P_n($$

$$P(S_n \geqslant m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots$$

$$P(S_n \geq m) < P_n(m)(1+\rho+\rho^2+\cdots),\ \rho = 1+\lambda_{m+1}$$

$$P(S_n \geqslant m) \leq P_n(m)\frac{1}{1-\rho} = P_n(m)\frac{(m+1)q}{m+1-(n+1)p}$$

1.14. Polinominė schema

Polinominė schema

Vieno bandymo baigčių aibę sudaro r baigčių. Baigtis žymėsime natūraliaisiais skaičiais $1, 2, \ldots, r$. Žinomos vieno bandymo baigčių tikimybės

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}, \quad p_i = P(i), \quad 0 < p_i < 1, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1.$$

Jeigu atliekame n nepriklausomų bandymų, tai tokios sekos baigčių aibė

$$\Omega_n = \{\langle \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \rangle : \omega_i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Jeigu sekoje $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ baigtys $1, 2, \ldots, r$ pasitaikė atitinkamai $m_1, \ldots, m_r$ kartų ($m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$), tai

$$P(\omega) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

Kitų su šia bandymų seka susijusių įvykių tikimybes gausime sumuodami jiems palankių baigčių tikimybes.

Polinominė schema

Vieno bandymo baigčių aibę sudaro r baigčių. Baigtis žymėsime natūraliaisiais skaičiais $1, 2, \ldots, r$. Žinomos vieno bandymo baigčių tikimybės

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}, \quad p_i = P(i), \quad 0 < p_i < 1, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1.$$

Jeigu atliekame n nepriklausomų bandymų, tai tokios sekos baigčių aibė

$$\Omega_n = \{\langle \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \rangle : \omega_i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Jeigu sekoje $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ baigtys $1, 2, \ldots, r$ pasitaikė atitinkamai $m_1, \ldots, m_r$ kartų ($m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$), tai

$$P(\omega) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

Kitų su šia bandymų seka susijusių įvykių tikimybes gausime sumuodami

jiems palankių baigčių tikimybes.

Sėkmių skaičius polinominėje schemoje

29 teorema. Jei $\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}$ yra vieno bandymo baigčių aibė, $P(i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ baigčių tikimybės, S_n^i – baigties i pasikartojimų, atlikus n nepriklausomų bandymų skaičius, o m_i yra neneigiami sveikieji skaičiai, $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$, tai

$$P(S_n^1 = m_1, S_n^2 = m_2, \ldots, S_n^r = m_r) = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Metamos dvi monetos. Viena atvirsta herbu su tikimybe $0,4$, kita – su tikimybe $0,6$. Kokia tikimybė, kad metus $n = 6$ kartus lygiai du kartus atvirs du herbai ir lygiai du kartus – du skaičiai?

▲

Pavyzdys.
Stačiakampyje $ABCD$ atsitiktinai parenkami $n = 5$ taškai. Kokia tikimybė, kad trys iš jų bus arčiau kraštinės AB negu kitų kraštinių, vienas – arčiau BC ir vienas – arčiau CD? Paprastumo

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Metamos dvi monetos. Viena atvirsta herbu su tikimybe $0,4$, kita – su tikimybe $0,6$. Kokia tikimybė, kad metus $n = 6$ kartus lygiai du kartus atvirs du herbai ir lygiai du kartus – du skaičiai?

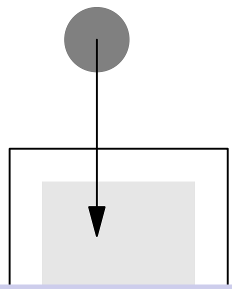
▲

Pavyzdys.
Stačiakampyje $ABCD$ atsitiktinai parenkami $n = 5$ taškai. Kokia tikimybė, kad trys iš jų bus arčiau kraštinės AB negu kitų kraštinių, vienas – arčiau BC ir vienas – arčiau CD? Paprastumo

Pavyzdys

Pavyzdys. *Maži lašeliai, stambus tinklas*
Įsivaizduokime srautą iš $n = 1000$ lašelių, krintantį į tinklą, sudarytą iš 100 cm $\times$ 100 cm dydžio kvadratėlių. Lašelis – rutuliukas su spinduliu $r = 0,1$ cm. Jeigu lašelis kliudo kvadratėlio kraštinę – subyra. Kokia tikimybė, kad subyrės lygiai $m = 5$ lašeliai? ▲

Lašelis nesubyrės!



Kitas pavyzdys

Pavyzdys. *Dideli lašai, smulkus tinklas*
O dabar įsivaizduokime kad srautą sudaro lašeliai – rutuliukai su spinduliu $r = 0,5$ cm, lašelių yra $n = 10000$, o tinklą sudaro iš 10 cm $\times$ 10 cm dydžio kvadratėliai. Dabar subyrės daug lašelių. Kokia tikimybė, kad subyrėjusių lašelių skaičius bus tarp 1900 ir 2000? ▲

Puasono teorema

30 teorema. Tegu n yra bandymų skaičius Bernulio schemoje, sėkmės tikimybė viename bandyme priklauso nuo bandymų skaičiaus, žymėsime ją p_n.
Jei n neaprėžtai didėjant p_n artėja prie nulio, tačiau egzistuoja skaičius $\lambda > 0$, kad $np_n \to \lambda$, tai bet kokiam m

$$P(S_n = m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad n \to \infty,$$

čia $\mathrm{e} \approx 2,71828$ yra natūrinių logaritmų pagrindas.

Įrodymas.

Muavro-Laplaso teorema

31 teorema. Tegu p yra sėkmės tikimybė viename Bernulio schemos bandyme, n bandymų skaičius, S_n – sėkmių skaičius gautas atlikus n bandymų, $a < b$ – bet kokie skaičiai. Jeigu p nesikeičia, o n neaprėžtai auga, tai

$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a),$$

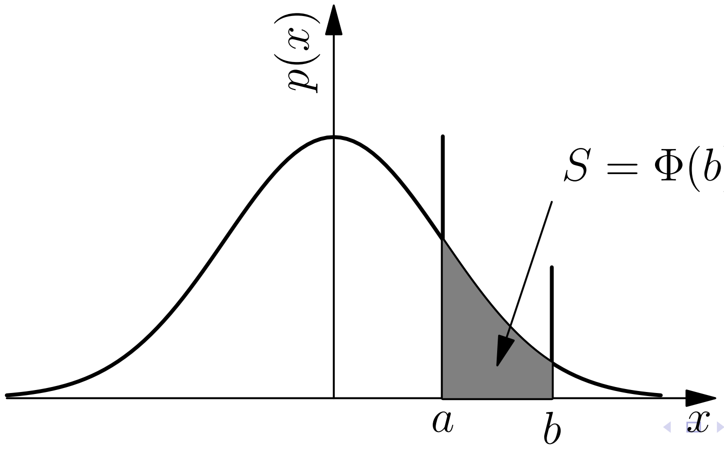
$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x.$$

Funkcija $\Phi(x)$

Skirtumo $\Phi(b) - \Phi(a)$ geometrinė prasmė – jis lygus plotui po funkcijos

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

grafiku, kurį riboja tiesės $y = 0, x = a, x = b,$.



Funkcijos skaičiavimas Excelio (OpenOffice) skaičiuoklėmis

Lašelių uždavinys

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Alaus gamykla skelbia loteriją: kas pateiks du specialiai pažymėtus alaus butelių kamštelius – laimės prizą. Gamykloje pažymima 4% visų kamštelių. Kokia tikimybė laimėti, jeigu nusipirksime $n = 100$ alaus butelių?

▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Egzamino užduotį sudaro sudaro 10 klausimų, į kiekvieną reikia atsakyti taip arba ne. Egzamino pažymys lygus teisingai atsakytų klausimų skaičiui. Studentai laiko egzaminą „tikimybiniu metodu“: į kiekvieną klausimą atsakymą renkasi atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad iš $n = 700$ šiuo metodu laikančių egzaminą studentų aštuntukais bus įvertinti trys studentai?

▲

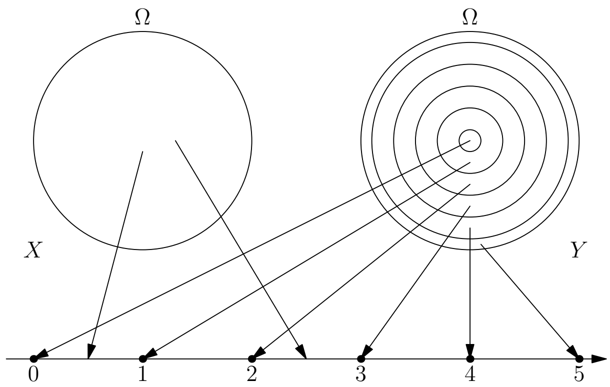
Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Tikimybė, kad į fakultetą įstojęs moksleivis užbaigs studijas, lygi $0,6$. Kiek mažiausiai reiktų priimti studentų, kad tikimybė, jog studijas sėkmingai pabaigs ne mažiau kaip 200 studentų, būtų lygi $0,8$? ▲

Pavyzdys.
Kiek mažiausiai kartų reiktų mesti simetrišką lošimo kauliuką, kad tikimybė, jog šešetukas atvirs ne mažiau kaip 100 kartų būtų didesnė už $0,7$? ▲

II. Atsitiktiniai dydžiai
2.1. Atsitiktinio dydžio sąvoka

Pavyzdžiai



$$P(X<3)=\frac{\pi\cdot 3^2}{\pi\cdot 5^2}=0,36,\quad P(Y<3)=\frac{\pi\cdot 2,5^2}{\pi\cdot 5^2}=0,25,$$

$$P(X=3)=0,\quad P(Y=3)=\frac{\pi\cdot(3,5^2-2,5^2)}{\pi\cdot 5^2}=0,24.$$

Atsitiktinis dydis

15 apibrėžimas. *Funkciją $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ vadinsime atsitiktiniu dydžiu, jei su kiekviena Borelio aibe $B\in\mathscr{B}$*

$$\{\omega:\xi(\omega)\in B\}=\xi^{-1}(B)\in\mathscr{A}.$$

Atsitiktiniai vektoriai

16 apibrėžimas. *Funkciją $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$*

$$\xi(\omega) = \langle \xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega) \rangle,$$

kur ξ_i yra atsitiktiniai dydžiai, vadinsime atsitiktiniu vektorium.

Be Borelio aibių

32 teorema. Funkcija $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ tada ir tik tada yra atsitiktinis dydis, jei kiekvienam skaičiui x

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{A}.$$

Iš vieno dydžio – daug

17 apibrėžimas. *Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinsime Borelio funkcija, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathscr{B}$*

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{B}.$$

33 teorema. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktinis dydis, o $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – Borelio funkcija. Tada $\eta = f(\xi)$ yra taip pat atsitiktinis dydis.*

Algebriniai veiksmai su dydžiais

34 teorema. Tegu $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktiniai dydžiai. Tada $\xi \pm \eta$, $\xi \cdot \eta$, ξ / η (jei $\eta \neq 0$) yra irgi atsitiktiniai dydžiai.

Analizinės operacijos su dydžiais

35 teorema. Tegu $\xi_n : \Omega \to I\!R$ $(n = 1, 2, \dots)$ yra atsitiktiniai dydžiai. Tada funkcijos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \inf_n \xi_n, \quad \eta_2 = \sup_n \xi_n, \\ \eta_3 &= \liminf_n \xi_n, \quad \eta_4 = \limsup_n \xi_n \end{aligned}$$

irgi yra atsitiktiniai dydžiai.

2.2. Pasiskirstymo funkcija

Pasiskirstymo funkcija

18 apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

19 apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ – atsitiktinis vektorius, $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle$. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_m < x_m).$$

Pasiskirstymo funkcija

20 apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

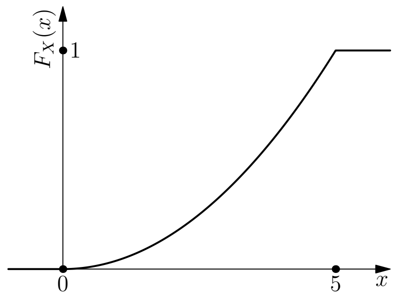
21 apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ – atsitiktinis vektorius, $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle$. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_m < x_m).$$

Pavyzdys

Tarkime, skritulyje, kurio spindulio ilgis $r = 5$, atsitiktinai parenkamas taškas. Tegu X yra pasirinktojo taško atstumas iki centro. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes iš skaičių intervalo $[0;5]$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & \text{jei } 0 < x < 5, \\ 1, & \text{jei } x \geq 5. \end{cases}$$

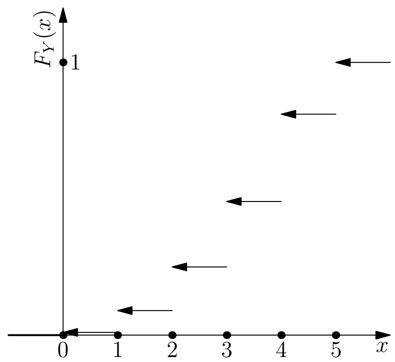


1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Kitas pavyzdys

O dabar tarkime, kad parinkę skritulio tašką ir išmatavę jo atstumą iki centro apvaliname jį iki sveikojo skaičiaus. Šitaip gausime atsitiktinį dydį Y, kuris gali įgyti šešias reikšmes.

$y =$	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y) =$	0,01	0,08	0,16	0,24	0,32	0,19



Pasiskirstymo funkcijos savybės

36 teorema. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija F_ξ turi šias savybes:

- F_ξ yra nemažėjanti funkcija;
- F_ξ yra tolydi iš kairės;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$

2.3. Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Diskretusis dydis

22 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis (vektorius) ξ įgyja reikšmes iš baigtinės arba begalinės, tačiau skaičios aibės, tai šį atsitiktinį dydį (vektorių) vadinsime diskrečiuoju.*

Jeigu atsitiktinio dydžio X reikšmių skaičius yra baigtinis, kartais jas kartu su tikimybėmis patogu susirašyti į lentelę:

$x =$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
$P(X = x) =$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$

$$p_i = P(X = x_i).$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Diskretusis dydis

23 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis (vektorius) ξ įgyja reikšmes iš baigtinės arba begalinės, tačiau skaičios aibės, tai šį atsitiktinį dydį (vektorių) vadinsime diskrečiuoju.*

Jeigu atsitiktinio dydžio X reikšmių skaičius yra baigtinis, kartais jas kartu su tikimybėmis patogu susirašyti į lentelę:

$x =$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
$P(X = x) =$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$

$$p_i = P(X = x_i).$$

Diskretusis dydis

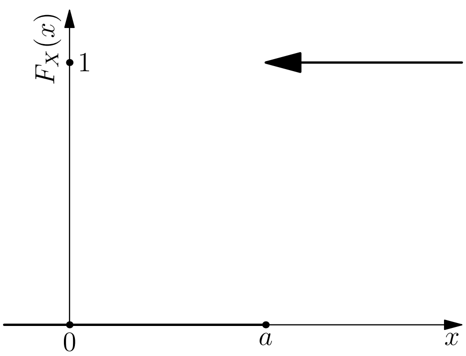
37 teorema. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija turi trūkius tuose taškuose, kurie atitinka atsitiktinio dydžio reikšmes. Jei x yra diskrečiojo atsitiktinio dydžio reikšmė, tai

$$F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = P(\xi = x).$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Išsigimęs atsitiktinis dydis

24 apibrėžimas. *Jeigu yra reikšmė a, su kuria atsitiktiniam dydžiui X teisinga lygybė $P(X = a) = 1$, tai tokį dydį vadinsime išsigimusiu atsitiktiniu dydžiu.*



Binominis dydis ir skirstinys

Tegu n – Bernulio schemos bandymų skaičius, p – sėkmės tikimybė, ξ_n – sėkmių skaičius atlikus n bandymų. Šio dydžio reikšmių aibė yra $\{0, 1, \ldots, n\}$,

$$P(\xi_n = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Žymėsime $\xi_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Binominis dydis

Su i-uoju Bernulio schemos bandymu susiekime atsitiktinį dydį taip:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme sėkmė,} \\ 0, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme nesėkmė.} \end{cases}$$

Tada

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

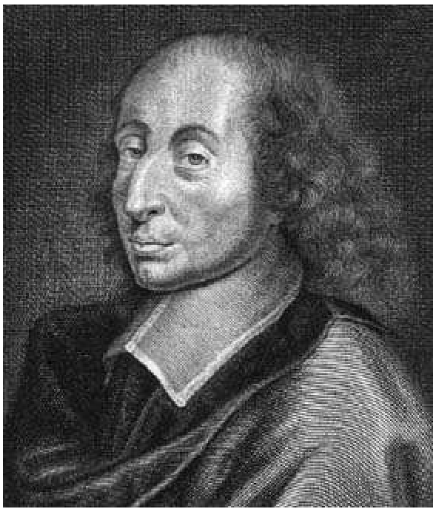
Geometrinis atsitiktinis dydis

25 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį X, įgyjantį reikšmes $m = 1, 2, \ldots$ su tikimybėmis*

$$P(X = m) = q^{m-1}p, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p,$$

vadinsime geometriniu. Žymėsime $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Paskalio skirstinys



Bernulio schemos bandymus kartokime tol, kol surinksime n sėkmių. Tegu θ_n – atliktų bandymų skaičius, o $\eta_n = \theta_n - n$. Tada η_n – patirtų nesėkmių skaičius.

Reikšmės ir tikimybės:

$$P(\eta_n = s) = C^s_{n+s-1}p^n(1-p)^s.$$

Dydžio η_n skirstinį vadinsime Paskalio skirstiniu, rašysime: $\eta_n \sim \mathscr{B}^-(n, p)$.

Puasono skirstinys

Jeigu atsitiktinis dydis ξ įgyja sveikas neneigiamas reikšmes su tikimybėmis

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

čia $\lambda > 0$, tai sakysime, kad ξ reikšmės pasiskirstę pagal Puasono dėsnį (arba Puasono skirstinį) su parametru λ. Rašysime $\xi \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Puasono teorema

38 teorema. Tegu atliekama n Bernulio schemos su sėkmės tikimybe p_n bandymų, tegu S_n – sėkmių skaičius šioje bandymų serijoje. Jeigu egzistuoja teigiamas skaičius λ, kad $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, tai su kiekvienu $m = 0, 1, \ldots$

$$P(\xi_n = m) = C_n^m p_n^m q_n^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

čia $q_n = 1 - p_n$.

Hipergeometrinis atsitiktinis dydis

Tegu urnoje yra n baltų ir m juodų rutulių, atsitiktinai traukiame $u, u < n+m$. rutulių. Pažymėkime X baltų rutulių skaičių tarp ištrauktųjų. Dydis X – diskretusis atsitiktinis dydis, jo reikšmių tikimybės

$$P(X = v) = \frac{C_n^v C_m^{u-v}}{C_{n+m}^u},$$
$$\max(u-m, 0) \leq v \leq \max(u, m).$$

Tokie atsitiktiniai dydžiai vadinami **hipergeometriniais.**

Hipergeometrinis atsitiktinis dydis

Įsivaizduokime, kad rutuliai traukiami vienas po kito. Su kiekvienu traukimu susiekime dydį

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-asis rutulys baltas,} \\ 0, & \text{jei } i\text{-asis rutulys juodas,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, u.$$

Tada

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_u.$$

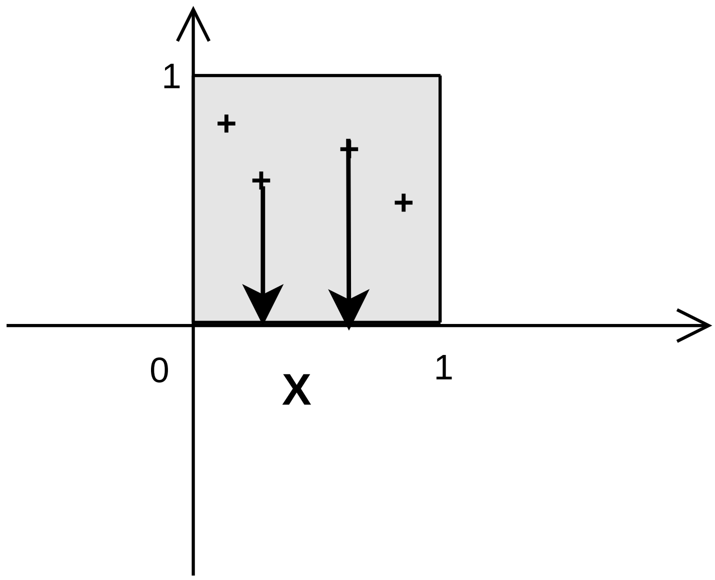
2.3. Absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

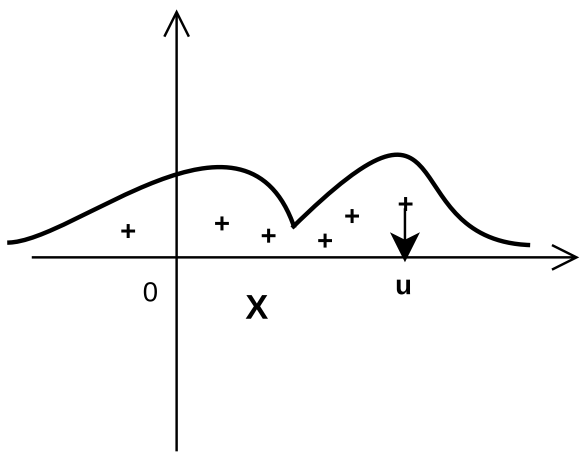
Tolydieji dydžiai

26 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinio dydžio (atsitiktinio vektoriaus) ξ pasiskirstymo funkcija F_ξ yra visur tolydi, tai jį vadinsime tolydžiu.*

Tolygiai pasiskirstęs dydis



Absoliučiai tolydūs dydžiai



$$P(X < u) = \int_{-\infty}^{u} p(x)\mathrm{d}x$$

Absoliučiai tolydūs dydžiai

27 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį ξ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s)$, kad*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(s)ds.$$

Funkciją $p_\xi(s)$ vadinsime atsitiktinio dydžio ξ tankiu.

Absoliučiai tolydūs vektoriai

28 apibrėžimas. *Atsitiktinį vektorių $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$, kad*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = \int_{\{s_1 < x_1, \ldots, s_m < x_m\}} p_\xi(s_1, \ldots, s_m) ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_m.$$

Funkciją $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$ vadinsime atsitiktinio vektoriaus ξ tankiu.

Tankio savybės

39 teorema.

- $p_\xi(x) \geq 0.$
- Beveik visuose taškuose $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$.
- $$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u)\mathrm{d}u = 1.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Tolygusis skirstinys

29 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinis dydis yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[a;b]$, jeigu jis turi tankį $p_\xi(x)$, kuris lygus nuliui, kai $x \notin [a;b]$, o visiems $x \in [a;b]$ $p_\xi(x)$ įgyja tą pačią reikšmę, $p_\xi(x) = c$.*

Tankio integralas pagal visą tiesę turi būti lygus 1,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = c\int_a^b dx = c(b-a), \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Tolygusis skirstinys

30 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinis dydis yra tolygiai pasiskirstęs intervale* $[a;b]$, *jeigu jis turi tankį* $p_\xi(x)$, *kuris lygus nuliui, kai* $x \notin [a;b]$, *o visiems* $x \in [a;b]$ $p_\xi(x)$ *įgyja tą pačią reikšmę,* $p_\xi(x) = c$.
Tankio integralas pagal visą tiesę turi būti lygus 1,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = c\int_a^b dx = c(b-a), \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Eksponentiniai dydžiai

Pavyzdys.
Įsivaizduokime, kad pro pravirą langelį į kambarį įskrido bitė ir išsigandusi pradėjo blaškytis, ieškodama kelio ištrūkti. Tegu X yra laikas, kurį bitė praleis kambaryje ieškodama atviro lango. Kokia tikimybė, kad jai prireiks ne mažiau kaip t sekundžių, t. y. kam lygi tikimybė $P(X \geq t)$?

▲

Eksponentinis dydis

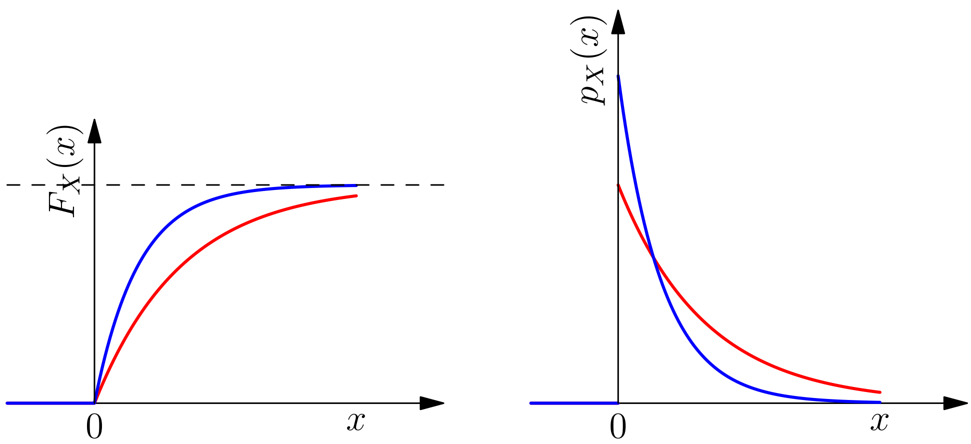
Eksponentiniai dydžiai

31 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{jei } x > 0, \end{cases}$$

čia $\lambda > 0$, tai X vadinsime eksponentiniu atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$.

Eksponentiniai dydžiai



Pavyzdys

Pavyzdys.
Muilo burbulo „gyvavimo“ trukmė – $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. Atliktas bandymas: išpūsta 1000 muilo burbulų ir nustatyta, kad 450 iš jų ištvėrė nesprogę 1 minutę. Kokia tikimybė, kad išpūstas muilo burbulas ištvers nesprogęs dvi minutes? Kiek mažiausiai reikia vienu metu išpūsti muilo burbulų, kad su tikimybe $0,9$ po trijų minučių dar būtų likę ne mažiau kaip 300 nesusprogusių?

Sprendimas ▲

Puasono procesas

Įjungėte savo mobilųjį telefoną ir laukiate pirmosios SMS žinutės. Tegu T_1 yra laukimo trukmė. Kokia tikimybės $P(T_1 \geq t)$ reikšmė, t. y. kokia tikimybė, kad teks laukti netrumpiau kaip t laiko vienetų?

Dalindami laiko intervalą $[0;t]$ į mažus intervalus, bei padarę prielaidą, kad trumpame $1/n$ ilgio intervale mūsų telefonas gali priimti tik vieną žinutę, o tikimybė, kad ji atklys lygi p_n, $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, gausime, kad

$$P(T_1 \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \text{t. y.} \quad T_1 \sim \mathscr{E}(\lambda).$$

Puasono procesas

Įjungėte savo mobilųjį telefoną ir laukiate pirmosios SMS žinutės. Tegu T_1 yra laukimo trukmė. Kokia tikimybės $P(T_1 \geq t)$ reikšmė, t. y. kokia tikimybė, kad teks laukti netrumpiau kaip t laiko vienetų?
Dalindami laiko intervalą $[0;t]$ į mažus intervalus, bei padarę prielaidą, kad trumpame $1/n$ ilgio intervale mūsų telefonas gali priimti tik vieną žinutę, o tikimybė, kad ji atklys lygi p_n, $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, gausime, kad

$$P(T_1 \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \text{t. y.} \quad T_1 \sim \mathscr{E}(\lambda).$$

Puasono procesas

Pažymėkime X_t žinučių, gautų laikotarpiu skaičių $[0;t]$ Tada X_t yra diskretusis atsitiktinis dydis, žinome tik vienos jo reikšmės tikimybę:

$$P(X_t = 0) = P(T_1 \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

$$P(X_t = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

$X_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$. Gavome begalinę Puasono dydžių šeimą, ją vadinsime Puasono procesu.

Puasono procesas

Pažymėkime X_t žinučių, gautų laikotarpiu skaičių $[0;t]$ Tada X_t yra diskretusis atsitiktinis dydis, žinome tik vienos jo reikšmės tikimybę:

$$P(X_t = 0) = P(T_1 \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

$$P(X_t = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

$X_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$. Gavome begalinę Puasono dydžių šeimą, ją vadinsime Puasono procesu.

Puasono procesas

Nagrinėjome T_1 – pirmosios žinutės gavimo momentą. Tegu dabar $k \geq 1$, o T_k – k-osios žinutės gavimo momentas.

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \ldots \leq T_{k-1} \leq T_k.$$

$$P(T_k \geq t) = P(X_t < k)$$
$$= P(X_t = 0) + \ldots + P(X_t = k-1)$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Puasono procesas

Nagrinėjome T_1 – pirmosios žinutės gavimo momentą. Tegu dabar $k \geq 1$, o T_k – k-osios žinutės gavimo momentas.

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \ldots \leq T_{k-1} \leq T_k.$$

$$\begin{aligned} P(T_k \geq t) &= P(X_t < k) \\ &= P(X_t = 0) + \ldots + P(X_t = k-1) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Puasono procesas

Taigi T_k yra atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{T_k}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \ldots - \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geq$$

Tankis

$$p_{T_k}(t) = F'_{T_k}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Puasono procesas

Taigi T_k yra atsitiktinis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{T_k}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \ldots - \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geq$$

Tankis

$$p_{T_k}(t) = F'_{T_k}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Gamma dydis

32 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{jei } t < 0, \\ \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{jei } t > 0, \end{cases}$$

čia $\lambda > 0, k \geq 1$, tai X vadinsime gamma-atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \Gamma(k, \lambda)$.

Gamma dydis

T_k yra gamma-dydis. Dydį galime išreikšti paprastesniais.
Pažymėkime $T_{0|1}$ laikotarpio nuo laukimo pradžios iki pirmos žinutės trukmę, $T_{1|2}$ – laikotarpio nuo pirmos iki antros žinutės trukmę ir t. t. Tada

$$T_k = T_{0|1} + T_{1|2} + \ldots + T_{k-1|k}.$$
$$T_{0|1} \sim \mathscr{E}(\lambda), \ \ldots, \ T_{k-1|k} \sim \mathscr{E}(\lambda).$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pareto atsitiktiniai dydžiai

33 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } x < 1, \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \textit{jei } x \geq 1, \end{cases}$$

čia $\alpha > 0$, tai X vadinsime Pareto atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \mathscr{P}ar(\alpha)$.

Standartinis normalusis dydis

34 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį* X, *kurio tankis yra*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

vadinsime standartiniu normaliuoju dydžiu, žymėsime $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

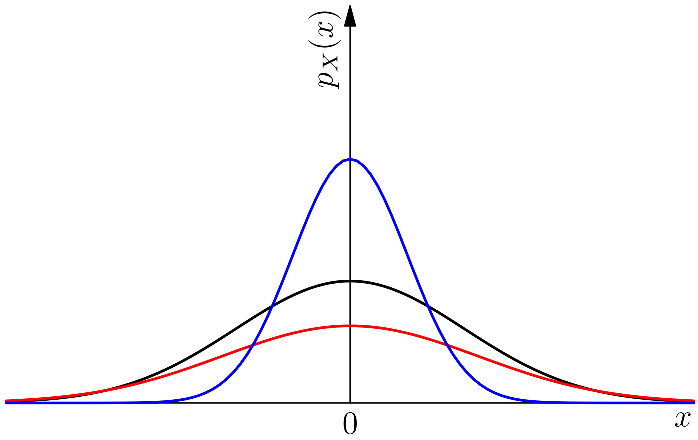
Normalieji dydžiai

35 apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį* X, *kurio tankis yra*

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

vadinsime normaliuoju dydžiu, žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Normalieji dydžiai



Muavro-Laplaso teorema

40 teorema. Tegu sėkmės tikimybė Bernulio schemoje lygi p , o S_n – sėkmių skaičius po n bandymų. Tada bet kokiam x, kai $n \to \infty$

$$P\left(\omega : \frac{S_n(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Ši teorema vadinama Muavro-Laplaso integraline teorema.

Daugiamatis normalusis skirstinys

36 apibrėžimas. *Sakysime, kad atsitiktinio vektoriaus $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ skirstinys yra standartinis normalusis, jei ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis vektorius, turintis tankį*

$$p_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Big\}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Kvantiliai ir kritinės reikšmės

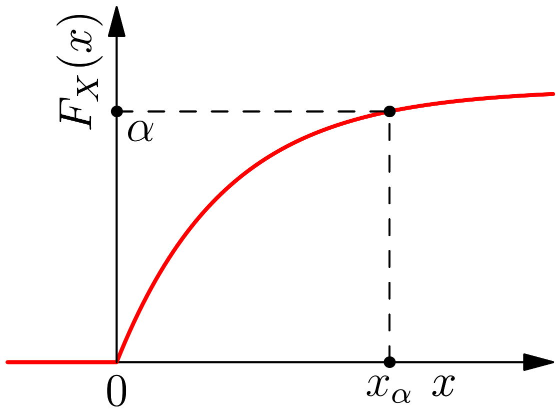
37 apibrėžimas. *Tegu atsitiktinis dydis X yra tolydus, $0 < \alpha < 1$. Dydžio X α lygio kvantiliu vadinsime mažiausiąjį lygties*

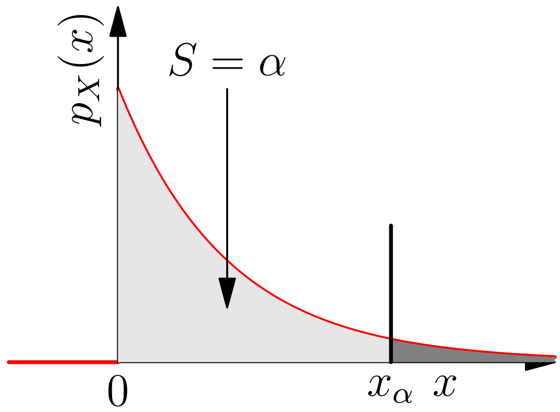
$$F_X(x) = \alpha$$

sprendinį; jį žymėsime x_α. Dydį x_α taip pat vadinsime $1-\alpha$ lygio kritine reikšme.

Kvantiliai

Jeigu dydis X turi tankį $p(x)$, o x_α yra dydžio α lygio kvantilis, tai plotas po tankio grafiku į kairę nuo tiesės $x = u_\alpha$ lygus α, o į dešinę – $1-\alpha$.





Pavyzdžiai

Pavyzdys.
Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį, $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. Jo $0,5$ lygio kvantilis lygus 3. Raskite λ reikšmę. ▲

Pavyzdys.
Raskite Pareto dydžio $X \sim \mathscr{P}ar(3)$ 0.5 lygio kvantilį ir $0,2$ lygio kritinę reikšmę. ▲

Pavyzdys.
Atsitiktinis dydis X yra standartinis normalusis, $F_X(0,5244) = \Phi(0,5244) = 0,7$. Kokia turi būti a reikšmė, kad atsitiktinio dydžio $Y = 2X + a$ $0,7$ lygio kvantilis būtų lygus 3? ▲

2.4. Tikimybės ir tankiai

Tikimybių skaičiavimas

Jei ξ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis, p_ξ – šio atsitiktinio dydžio tankis, B yra Borelio aibė, tai

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(u)du.$$

Tegu $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle, \xi : \Omega \to I\!R^m$, absoliučiai tolydus atsitiktinis vektorius, p_ξ šio atsitiktinio vektoriaus tankis, $B \in \mathscr{B}^m$ – bet kokia Borelio aibė. Tada

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m)du_1 du_2 \ldots du_m.$$

Vektoriaus tankis

41 teorema. Jeigu absoliučiai tolydaus atsitiktinio vektoriaus $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle$ tankis yra $p_\xi(u_1, \ldots u_m)$, tai atsitiktinis vektorius $\xi' = \langle \xi_1, \ldots, \xi_{m-1} \rangle$ taip pat yra absoliučiai tolydus ir jo tankis yra

$$p_{\xi'}(u_1, \ldots, u_{m-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) \mathrm{d}u_m.$$

Dydžio $\eta = f(\xi)$ tankis

42 teorema. Jei $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktinis dydis, o $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – monotoninė tolydžiai diferencijuojama funkcija, tai atsitiktinio dydžio $\eta = f(\xi)$ tankis yra

$$p_\eta(t) = p_\xi(f^{-1}(t)) \cdot |f'(\phi^{-1}(t))|^{-1}.$$

Normalusis skirstinys

Tegu $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, o $\eta = a + \sigma\xi$, $\sigma \neq 0$. Tada atsitiktinis dydis η turi tankį

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2 \Big\}.$$

Sakysime, kad η skirstinys yra normalusis su parametrais a, σ^2 ir rašysime $\eta \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

2.5. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

38 apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius ξ_1, ξ_2 vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Kaip apibrėžti bet kokią nepriklausomų dydžių sistemą?

Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

39 apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius ξ_1, ξ_2 vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Kaip apibrėžti bet kokią nepriklausomų dydžių sistemą?

Nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai

40 apibrėžimas. *Atsitiktinius vektorius $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Pasiskirstymo funkcijos

43 teorema. Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$P(\xi < u, \eta < v) = P(\xi < u)P(\eta < v).$$

44 teorema. Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atsitiktinio vektoriaus $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ pasiskirstymo funkcija reiškiama taip:

$$F_\zeta(u, v) = F_\xi(u)F_\eta(v),$$

čia $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$.

Pasiskirstymo funkcijos

45 teorema. Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$P(\xi < u, \eta < v) = P(\xi < u)P(\eta < v).$$

46 teorema. Atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atsitiktinio vektoriaus $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ pasiskirstymo funkcija reiškiama taip:

$$F_\zeta(u, v) = F_\xi(u)F_\eta(v),$$

čia $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Diskretieji dydžiai

47 teorema. Diskretūs atsitiktiniai dydžiai $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai su bet kokiais x, y

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y).$$

Absoliučiai tolydieji dydžiai

48 teorema. Jei $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ absoliučiai tolydūs ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_ξ, p_η, tai atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ irgi absoliučiai tolydus, bei

$$p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2).$$

Jei atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ yra absoliučiai tolydus, p_ζ, p_ξ, p_η yra šio vektoriaus ir jo komponenčių tankiai, be to, $p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2)$, tai atsitiktiniai dydžiai ξ, η yra nepriklausomi.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Absoliučiai tolydieji dydžiai

49 teorema. Jei $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ absoliučiai tolydūs ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_ξ, p_η, tai atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ irgi absoliučiai tolydus, bei

$$p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2).$$

Jei atsitiktinis vektorius $\zeta = \langle \xi, \eta \rangle$ yra absoliučiai tolydus, p_ζ, p_ξ, p_η yra šio vektoriaus ir jo komponenčių tankiai, be to, $p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1) p_\eta(u_2)$, tai atsitiktiniai dydžiai ξ, η yra nepriklausomi.

Nepriklausomi dydžiai ir Borelio funkcijos

50 teorema. Jei $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai, o $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yra dvi Borelio funkcijos, tai atsitiktiniai vektoriai $\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2)$ irgi nepriklausomi.

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma

51 teorema. Jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi diskretieji atsitiktiniai dydžiai, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, tai

$$P(\xi = z) = \sum_{x+y=z} P(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y) = \sum_x P(\xi_1 = x)P(\xi_2$$

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma

52 teorema. Jei ξ_1, ξ_2 absoliučiai tolydūs nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_{ξ_1}, p_{ξ_2}, tai atsitiktinis dydis $\eta = \xi_1 + \xi_2$ yra taip pat absoliučiai tolydus, o jo tankis

$$\begin{aligned} p_{\xi_1+\xi_2}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(v) p_{\xi_2}(u-v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(v) p_{\xi_1}(u-v)dv. \end{aligned}$$

2.6. Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkis

2.6. Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkis

Apibrėžimas

41 apibrėžimas. *Tegu ξ diskretus atsitiktinis dydis, be to eilutė*

$$\sum_x xP(\xi = x)$$

absoliučiai konverguoja. Tada šios eilutės sumą žymėsime $\mathbf{E}[\xi]$ ir vadinsime atsitiktinio dydžio ξ matematiniu vidurkiu.

Pastaba. *Jeigu atsitiktinis dydis ξ turi vidurkį, tai diskretaus atsitiktinio dydžio $|\xi|$ vidurkis yra taip pat apibrėžtas.*

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Apibrėžimas

42 apibrėžimas. *Tegu ξ diskretus atsitiktinis dydis, be to eilutė*

$$\sum_x xP(\xi = x)$$

absoliučiai konverguoja. Tada šios eilutės sumą žymėsime $\mathbf{E}[\xi]$ ir vadinsime atsitiktinio dydžio ξ matematiniu vidurkiu.

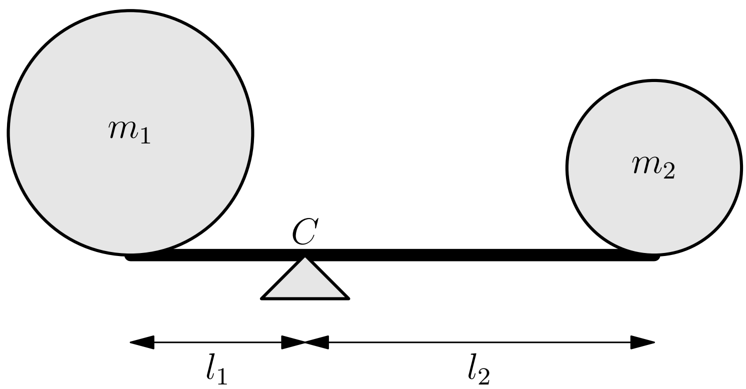
Pastaba. *Jeigu atsitiktinis dydis ξ turi vidurkį, tai diskretaus atsitiktinio dydžio $|\xi|$ vidurkis yra taip pat apibrėžtas.*

Aprėžto dydžio vidurkis

Aprėžto diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ vidurkis visada egzistuoja. Galima įrodyti:

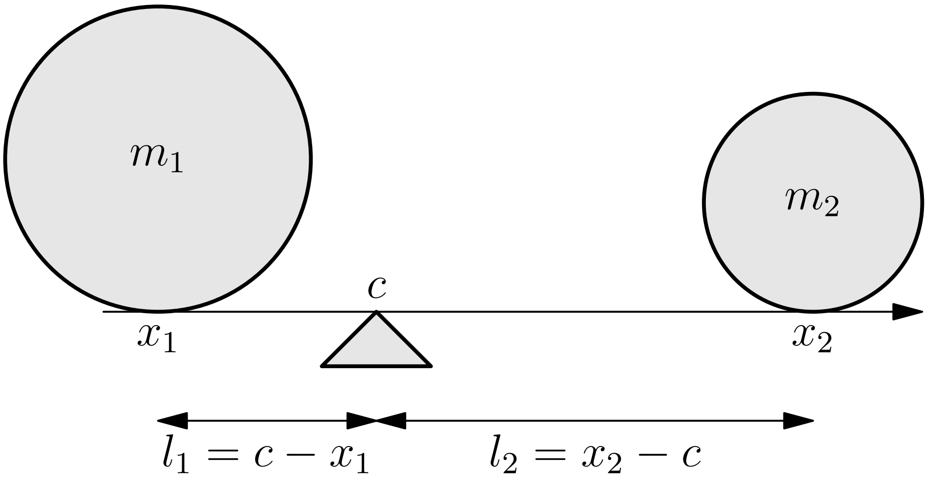
53 teorema. Jeigu ξ ir η yra du diskretieji atsitiktiniai dydžiai, $|\xi| \leq \eta$ ir atsitiktinio dydžio η vidurkis egzistuoja, tai egzistuoja ir atsitiktinio dydžio ξ vidurkis.

Vidurkis kaip svorio centras



Taškas C yra sistemos, sudarytos iš dviejų kūnų, svorio centras. O dabar tarkime šie kūnai padėti ant skaičių tiesės, taškuose, kurių koordinatės yra x_1, x_2. Tegu c yra svorio centro koordinatė.

Vidurkis kaip svorio centras



$$m_1(c - x_1) = m_2(x_2 - c), \quad (x_1 - c)m_1 + (x_2 - c)m_2 = 0,$$

$$c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Vidurkio savybės

54 teorema. Jeigu X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $x_1, x_2, \ldots$, o $Y = f(X)$ kitas atsitiktinis dydis, tai jo vidurkis (jeigu tik jis egzistuoja) lygus

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_i f(x_i) P(X = x_i).$$

55 teorema. Jei X yra diskretusis dydis, turintis vidurkį, o a bet koks skaičius, tai dydis $Y = aX$ irgi turi vidurkį:

$$\mathbf{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathbf{E}[X].$$

Vidurkio savybės

56 teorema. Jeigu X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $x_1, x_2, \ldots,$ o $Y = f(X)$ kitas atsitiktinis dydis, tai jo vidurkis (jeigu tik jis egzistuoja) lygus

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_i f(x_i) P(X = x_i).$$

57 teorema. Jei X yra diskretusis dydis, turintis vidurkį, o a bet koks skaičius, tai dydis $Y = aX$ irgi turi vidurkį:

$$\mathbf{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathbf{E}[X].$$

Vidurkio adityvumas

58 teorema. Jeigu X ir Y yra diskretieji dydžiai, turintys vidurkius, tai jų suma $X + Y$ irgi yra diskretusis dydis, turintis vidurkį:

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

59 teorema. Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai turintys vidurkius, tai

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \ldots + \mathbf{E}[X_n].$$

Vidurkio adityvumas

60 teorema. Jeigu X ir Y yra diskretieji dydžiai, turintys vidurkius, tai jų suma $X+Y$ irgi yra diskretusis dydis, turintis vidurkį:

$$\mathbf{E}[X+Y]=\mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y].$$

61 teorema. Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai turintys vidurkius, tai

$$\mathbf{E}[X_1+X_2+\ldots+X_n]=\mathbf{E}[X_1]+\mathbf{E}[X_2]+\ldots+\mathbf{E}[X_n].$$

Nepriklausomi dydžiai ir vidurkis

62 teorema. Jeigu X ir Y yra nepriklausomi diskretieji dydžiai, turintys vidurkius, tai jų sandauga $X \cdot Y$ irgi yra diskretusis dydis, turintis vidurkį:

$$\mathbf{E}[X \cdot Y]=\mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

Binominio dydžio vidurkis

Jei $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, tai $\mathbf{E}[X] = np$.

Puasono dydžio vidurkis

Jei $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, tai $\mathbf{E}[X] = \lambda$.

Geometrinio dydžio vidurkis

$$\text{Jei } X \sim \mathscr{G}(p), \text{ tai } \mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}.$$

Paskalio dydžio vidurkis

$$\text{Jei } X \sim \mathscr{B}^{-}(n,p), \text{ tai}$$

$$\begin{aligned} P(X=m) &= C_{n+m-1}^{m} p^n q^m, \\ \mathbf{E}[X] &= n\frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Hipergeometrinio dydžio vidurkis

Tegu urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių, atsitiktinai traukiame u $(u \leq m+n)$. rutulių. Atsitiktinio dydžio X reikšmė – baltų rutulių kiekis tarp ištrauktųjų. Apskaičiuosime šio dydžio vidurkį:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_v v \cdot \frac{C_m^v C_n^{u-v}}{C_{m+n}^u} = u \cdot \frac{m}{m+n}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Hipergeometrinio dydžio vidurkis

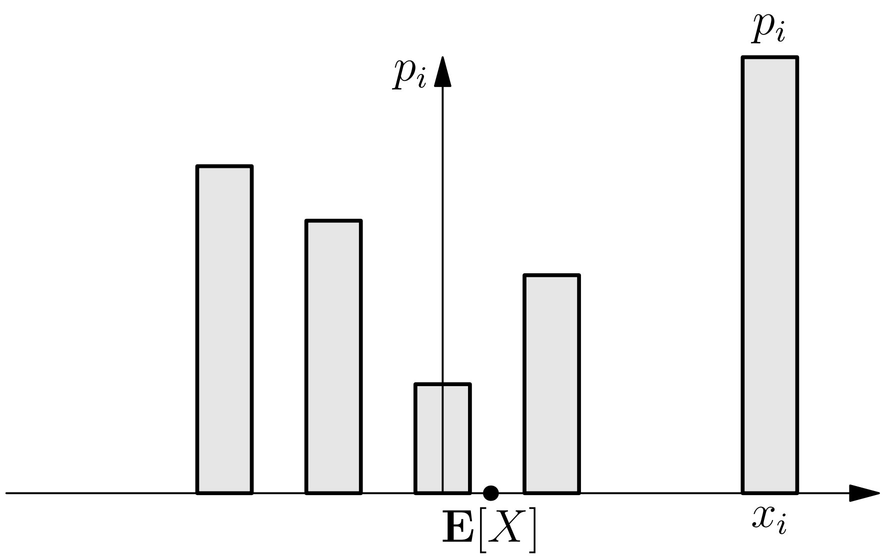
Tegu urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių, atsitiktinai traukiame u $(u \leq m+n)$. rutulių. Atsitiktinio dydžio X reikšmė – baltų rutulių kiekis tarp ištrauktųjų. Apskaičiuosime šio dydžio vidurkį:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_v v \cdot \frac{C_m^v C_n^{u-v}}{C_{m+n}^u} = u \cdot \frac{m}{m+n}.$$

2.7. Absoliučiai tolydžiųjų dydžių vidurkis

Vidurkis kaip svorio centras

Diskretaus atsitiktinio dydžio X vidurkį galime geometriškai suvokti kaip svorio centro koordinatę.



Vidurkis kaip svorio centras

Atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydus, turi tankį $p_X(x)$. Tada galime įsivaizduoti, kad ant skaičių tiesės yra patalpinti ne pavieniai svoriai, bet „uždėta“ figūra, kurią iš viršaus riboja tankio grafikas.

Kur dabar reiktų įrengti atramą, kad tiesė būtų pusiausvyroje, t.y. kaip nustatyti svorio centro koordinatę?

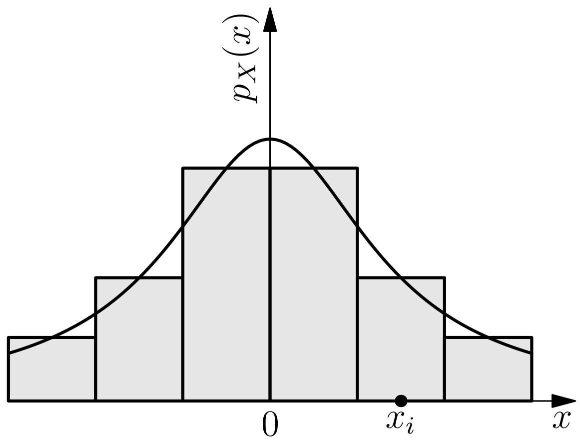
1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Vidurkis kaip svorio centras

Atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydus, turi tankį $p_X(x)$. Tada galime įsivaizduoti, kad ant skaičių tiesės yra patalpinti ne pavieniai svoriai, bet „uždėta“ figūra, kurią iš viršaus riboja tankio grafikas.

Kur dabar reiktų įrengti atramą, kad tiesė būtų pusiausvyroje, t.y. kaip nustatyti svorio centro koordinatę?

Vidurkis kaip svorio centras



$$\mathbf{E}[X] \approx \sum_i x_i p_X(x_i)(x_{i+1} - x_i) \to \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Apibrėžimas

43 apibrėžimas. *Jeigu absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio tankis yra $p_X(x)$, tai jo vidurkiu vadinsime skaičių*

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Patikslinimas: pirmiausia reikia pareikalauti, kad integralas absoliučiai konverguotų!

Tolygiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

Atsitiktinis dydis X yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[a;b]$,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{jei } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Jei $X \sim \mathscr{T}([a,b])$, tai $\mathbf{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Tolygiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

Atsitiktinis dydis X yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[a;b]$,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{jei } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Jei $X \sim \mathscr{T}([a,b])$, tai $\mathbf{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$.

Eksponentinio dydžio vidurkis

Eksponentinio atsitiktinio dydžio $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{jei } x \geq 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Jei } X \sim \mathscr{E}(\lambda), \text{ tai } \mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Eksponentinio dydžio vidurkis

Eksponentinio atsitiktinio dydžio $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{jei } x \geq 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Jei } X \sim \mathscr{E}(\lambda), \text{ tai } \mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Gamma dydis

44 apibrėžimas. *Jeigu atsitiktinis dydis X turi tankį*

$$p_X(t) = \begin{cases} 0, & jei\ t < 0, \\ \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, & jei\ t > 0, \end{cases}$$

čia $\lambda > 0, k \geq 1$, tai X vadinsime gamma-atsitiktiniu dydžiu, žymėsime $X \sim \Gamma(k, \lambda)$.

Gamma dydžio vidurkis

T_k yra gamma-dydis. Dydį galime išreikšti paprastesniais.
Pažymėkime $T_{0|1}$ laikotarpio nuo laukimo pradžios iki pirmos žinutės trukmę, $T_{1|2}$ – laikotarpio nuo pirmos iki antros žinutės trukmę ir t. t. Tada

$$T_k = T_{0|1} + T_{1|2} + \ldots + T_{k-1|k}.$$
$$T_{0|1} \sim \mathscr{E}(\lambda), \ \ldots, \ T_{k-1|k} \sim \mathscr{E}(\lambda).$$

Normaliųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai

Normaliojo standartinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ tankis ir vidurkis

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \mathbf{E}[X] = 0.$$

Jeigu $Y = \sigma X + \mu$, tai gausime vėl normalųjį dydį: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Jo vidurkis

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\sigma X + \mu] = \mathbf{E}[\sigma X] + \mathbf{E}[\mu] = \sigma \mathbf{E}[X] + \mu = \mu.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Normaliųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai

Normaliojo standartinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ tankis ir vidurkis

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \mathbf{E}[X] = 0.$$

Jeigu $Y = \sigma X + \mu$, tai gausime vėl normalųjį dydį: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Jo vidurkis

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\sigma X + \mu] = \mathbf{E}[\sigma X] + \mathbf{E}[\mu] = \sigma \mathbf{E}[X] + \mu = \mu.$$

Vidurkio skaičiavimas

63 teorema. Tegu atsitiktinio dydžio X tankis yra $p_X(x)$, o $f(x)$ – Borelio funkcija, įgyjanti realias reikšmes. Atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkis egzistuoja tada ir tik tada, kai integralas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| p_X(x) \mathrm{d}x$$

yra baigtinis. Tada

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) \mathrm{d}x.$$

Teoremos apibendrinimas

64 teorema. Tegu atsitiktinis vektorius $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_m \rangle$ turi tankį $p_X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, o $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – Borelio funkcija, įgyjanti realias reikšmes. Atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkis egzistuoja tada ir tik tada, kai integralas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2, \ldots, x_m)| p_X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m$$

yra baigtinis. Tada

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_m) p_X(x_1, \ldots, x_m) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m.$$

Pavyzdys

Pavyzdys. *Atstumo vidurkis*
Vieno žmogaus pokalbio telefonu laikas – atsitiktinis dydis $X_1 \sim \mathscr{T}([0;a])$, kito – atsitiktinis dydis $X_2 \sim \mathscr{T}([0;b].)$
Apskaičiuokime vidurkius

$$\mathbf{E}[\min(X_1, X_2)], \mathbf{E}[\max(X_1, X_2)],$$
$$\mathbf{E}[\min(X_1, X_2) \cdot \max(X_1, X_2)].$$

▲

2.8. Vidurkio apibrėžimas bendruoju atveju

Tolygus konvergavimas

45 apibrėžimas. *Tegu $\xi_n, \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktiniai dydžiai. Jei kiekvienam $\delta > 0$ egzistuoja toks $n(\delta)$, kad nelygybė*

$$|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \delta$$

teisinga, kai $n > n(\delta)$ su visais $\omega \in \Omega$, tai sakysime, kad dydžiai ξ_n tolygiai konverguoja į ξ.

Diskretūs tolygiai konverguojantys dydžiai

Tegu ξ atsitiktinis dydis, $\varepsilon > 0$. Apibrėžkime diskretųjį atsitiktinį dydį $\xi^{\varepsilon}(\omega)$:

$$\text{jei } \xi(\omega) \in [n\varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon), \quad \text{tai} \quad \xi^{\varepsilon}(\omega) = n\varepsilon.$$

Tada

$$\xi(\omega) - \varepsilon \leq \xi^{\varepsilon}(\omega) \leq \xi,$$
$$P(\xi^{\varepsilon} = n\varepsilon) = F_{\xi}(n\varepsilon + \varepsilon) - F_{\xi}(n\varepsilon).$$

Apibrėžimas

Jei diskretieji atsitiktiniai dydžiai ξ_n tolygiai konverguoja į atsitiktinį dydį ξ ir turi vidurkius, tai galima įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\xi_n]$ egzistuoja.

46 apibrėžimas. *Jei diskretieji atsitiktiniai dydžiai ξ_n turi vidurkius ir tolygiai konverguoja į atsitiktinį dydį ξ, tai šio dydžio vidurkiu vadinamas skaičius*

$$\mathbf{E}[\xi] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\xi_n.]$$

Vidurkio išraiška

Jei atsitiktinio dydžio ξ vidurkis apibrėžtas, tai

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi] &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathbf{E}[\xi^\varepsilon] = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_x xP(\xi^\varepsilon = x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} (m\varepsilon)(F_\xi(m\varepsilon+\varepsilon) - F_\xi(m\varepsilon)).\end{aligned}$$

Dažnai rašoma

$$\mathbf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}F_\xi(x).$$

Vidurkio savybės – tos pačios

65 teorema. Tegu ξ_1, ξ_2 atsitiktiniai dydžiai turi vidurkius. Tada

1. su bet kokiais skaičiais c_1, c_2
   $\mathbf{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = c_1\mathbf{E}[\xi_1] + c_2\mathbf{E}[\xi_2]$;
2. jei $\xi_1 \leq \xi_2$, tai $\mathbf{E}[\xi_1] \leq \mathbf{E}[\xi_2]$;
3. jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, tai
   $\mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] = \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2]$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

2.9. Dispersija

Trys dydžiai

$$P(X_0 = 0) = 1;$$
$$P(X_1 = x) = \frac{1}{2}, \quad x = \pm 1;$$
$$P(X_2 = x) = \frac{1}{4}, \quad x = \pm\frac{1}{2}, \pm 1;$$
$$P(X_3 = x) = \frac{1}{6}, \quad x = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1.$$

Kurio iš šių dydžių reikšmės labiausiai išsibarstę?

Apibrėžimas

47 apibrėžimas. *Tegu X – atsitiktinis dydis, turintis vidurkį. Jo dispersija vadinsime skaičių*

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

Dydį $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}[X]}$ vadinsime atsitiktinio dydžio X standartiniu nuokrypiu.

Dispersijos savybės

66 teorema. Teisingi šie teiginiai:

1. jeigu atsitiktinis dydis X turi dispersiją, ji neneigiama: $\mathbf{D}[X] \geq 0$; $\mathbf{D}[X] = 0$ tada ir tik tada, kai dydis X yra išsigimęs;
2. teisinga lygybė $\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$;
3. jei c yra skaičius, tai $\mathbf{D}[cX] = c^2\mathbf{D}[X]$;
4. jeigu nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X, Y turi dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją ir
$$\mathbf{D}[X+Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y].$$

Įrodymas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Dispersijos adityvumas

67 teorema. Jeigu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai

$$\mathbf{D}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \ldots + \mathbf{D}[X_n].$$

Binominis atsitiktinis dydis

Jei $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, tai

$$P(X=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m=0,1,\dots,n,$$
$$\mathbf{E}[X] = np, \quad \mathbf{D}[X] = np(1-p).$$

Puasono dydis

Jei $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, tai

$$P(X=m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad m=0,1,2,\dots,$$
$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{D}[X] = \lambda.$$

Įrodymas

Geometrinis dydis

Jei $X \sim \mathscr{G}(p)$, tai $P(X = m) = q^{m-1}p$, $m = 1, \dots,\ q = 1 - p$,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{p},\ \mathbf{D}[X] = \frac{q}{p^2}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Geometrinis dydis

Jeigu pirmajame bandyme pasitaikys sėkmė (tai įvyksta su tikimybe p), tai $X^2 = 1$. Jeigu pirmajame bandyme nesėkmė, tai viskas prasideda tarsi iš pradžių ir $X^2 = (1+Y)^2$, čia $Y \sim \mathscr{G}(p)$ vėl geometrinis dydis. Taigi galime manyti, kad

$$\mathbf{E}[X^2] = p \cdot 1^2 + q \cdot \mathbf{E}[(1+Y)^2].$$

Pažymėkime $a = \mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[Y^2]$, $\mathbf{E}[Y] = 1/p$:

$$a = p + q\mathbf{E}[1 + 2Y + Y^2] = p + q + 2q\mathbf{E}[Y] + q\mathbf{E}[Y^2] = 1 + \frac{2q}{p} + qa,$$

$$(1-q)a = 1 + \frac{2q}{p}, \quad a = \mathbf{E}[X^2] = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2},$$

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Paskalio dydžio dispersija

Jei $X \sim \mathscr{B}^{-}(n,p)$, tai

$$P(X=m) = C^m_{n+m-1} p^n q^m,$$

$$\mathbf{E}[X] = n\frac{q}{p}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{nq}{p^2}$$

Tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis

Jeigu $X \sim \mathscr{T}([a,b])$, tai

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a;b] \\ 0, & \text{jei } x \notin [a,b], \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Įrodymas

Eksponentinis dydis

Jei $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, tai

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{jei } x \geq 0, \end{cases},$$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Gamma dydis

Jei $X \sim \Gamma(k, \lambda)$, tai

$$p_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{jei } t < 0, \\ \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{jei } t > 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{k}{\lambda}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Normalusis dydis

Jei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, tai

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$
$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{D}[X] = \sigma^2.$$

Uždaviniai

Pavyzdys.
Yra du simetriški šešiasieniai kauliukai. Vieno sienelės pažymėtos skaičiais $1, 1, 3, 4, 5, 6$, kito – skaičiais $1, 2, 3, 4, 6, 6$. Atsitiktinių dydžių X_1, X_2 – skaičiai ant atvirtusių kauliukų sienelių. Kurio dydžio reikšmės išsibarstę labiau, t. y. kurio dydžio dispersija didesnė? ▲

Pavyzdys.
Atsitiktinio dydžio X reikšmė akučių ant įprastinio simetriško lošimo kauliuko, Y – iš intervalo $[0; a]$ atsitiktinai parinktas skaičius

2.10.Didžiųjų skaičių dėsnis

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Kodėl kartojame matavimus?

Norėdami gauti tikslesnę dydžio reikšmę, matavimus kartojame, o paskui – imame gautųjų matavimo rezultatų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidurkį

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ir manome, kad $x_n \approx a$.
Kuo pagrįsta tokia mūsų nuomonė?

Čebyšovo nelygybė

68 teorema. Tegu X yra atsitiktinis dydis, turintis vidurkį ir dispersiją. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė

$$P(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Įrodymas

Didžiųjų skaičių dėsnis

69 teorema. Tegu $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tą patį vidurkį $\mathbf{E}[X_j] = a$ ir tą pačią dispersiją. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Įrodymas

Monte-Karlo metodas

Tegu K yra kvadratas, $S \subset K$ – sudėtingos formos sritis, kurios plotą reikia apskaičiuoti. Atliekame bandymus: atsitiktinai renkame kvadrato taškus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir apibrėžiame atsitiktinius dydžius

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \in A_i \in S; \\ 0, & \text{jei } x \notin S. \end{cases}$$

Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iš konkrečių bandymų gautos dydžių X_i reikšmės. Tada

$$plotas(S) \approx (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Monte-Karlo metodas

Tegu K yra kvadratas, $S \subset K$ – sudėtingos formos sritis, kurios plotą reikia apskaičiuoti. Atliekame bandymus: atsitiktinai renkame kvadrato taškus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir apibrėžiame atsitiktinius dydžius

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \in A_i \in S; \\ 0, & \text{jei } x \notin S. \end{cases}$$

Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iš konkrečių bandymų gautos dydžių X_i reikšmės. Tada

$$plotas(S) \approx (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Bendresnė teorema

70 teorema. Tegu $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas bei tenkinantys sąlygą

$$\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n} \mathbf{D}[X_m] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Tegu

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ E_n &= (\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \ldots + \mathbf{E}[X_n])/n. \end{aligned}$$

Tada su bet kokiu $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|S_n/n - E_n\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Apibrėžimas

48 apibrėžimas. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, $k > 0$. Jeigu vidurkiai $\mathbf{E}[\xi^k], \mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistuoja, tai juos vadinsime atsitiktinio dydžio k-uoju ir k-uoju absoliučiuoju momentais.*

Pastabos. *Jeigu $\mathbf{E}[|\xi|^k]$ egzistuoja, tai egzistuoja ir $\mathbf{E}[\xi^k]$.*
Jeigu egzistuoja dydžio ξ k-osios eilės momentas, tai su bet kokiu $0 < r < k$ vidurkis $\mathbf{E}[|\xi|^r]$ irgi egzistuoja.

Centriniai momentai

49 apibrėžimas. *Tegu atsitiktinio dydžio k-osios eilės momentas egzistuoja $(k > 1)$. Tada vidurkius*

$$\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}[\xi])^k], \quad \mathbf{E}[|\xi - \mathbf{E}[\xi]|^k]$$

vadinsime atsitiktinio dydžio ξ k-osios eilės centriniu ir k-osios eilės absoliučiuoju centriniu momentais.

Pastaba. *Dispersija yra dydžio antrosios eilės centrinis momentas.*

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Mišrusis dydžių momentas

71 teorema. Tegu atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 turi antrosios eilės momentus. Tada vidurkis $\mathbf{E}[\xi_1\xi_2]$ irgi egzistuoja ir

$$\mathbf{E}[|\xi_1 \cdot \xi_2|] \leq \sqrt{\mathbf{E}[\xi_1^2] \cdot \mathbf{E}[\xi_2^2]}.$$

Įrodymas

Pastaba. Jeigu atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 turi dispersijas, tai $\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1]) \cdot (\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])]$ irgi egzistuoja, be to

$$\mathbf{E}[|(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])|] \leq \sqrt{\mathbf{D}[\xi_1]\mathbf{D}[\xi_2]}.$$

Mišrusis dydžių momentas

72 teorema. Tegu atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 turi antrosios eilės momentus. Tada vidurkis $\mathbf{E}[\xi_1\xi_2]$ irgi egzistuoja ir

$$\mathbf{E}[|\xi_1 \cdot \xi_2|] \le \sqrt{\mathbf{E}[\xi_1^2] \cdot \mathbf{E}[\xi_2^2]}.$$

Įrodymas

Pastaba. Jeigu atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 turi dispersijas, tai $\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1]) \cdot (\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])]$ irgi egzistuoja, be to

$$\mathbf{E}[|(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])|] \le \sqrt{\mathbf{D}[\xi_1]\mathbf{D}[\xi_2]}.$$

Sumos dispersija

Jeigu ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją, be to

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2].$$

O dabar tarkime, kad ξ_1, ξ_2 gali būti ir priklausomi. Pabandykime surasti sumos dispersiją:

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 - \mathbf{E}[\xi_1] - \mathbf{E}[\xi_2])^2] =$$
$$\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])^2 + 2(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2]) + (\xi_2 - \mathbf{E}$$
$$\mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2] + 2\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])].$$

Sumos dispersija

Jeigu ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, tai ir jų suma turi dispersiją, be to

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2].$$

O dabar tarkime, kad ξ_1, ξ_2 gali būti ir priklausomi. Pabandykime surasti sumos dispersiją:

$$\mathbf{D}[\xi_1 + \xi_2] = \mathbf{E}[(\xi_1 + \xi_2 - \mathbf{E}[\xi_1] - \mathbf{E}[\xi_2])^2] =$$
$$\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])^2 + 2(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2]) + (\xi_2 - \mathbf{E}$$
$$\mathbf{D}[\xi_1] + \mathbf{D}[\xi_2] + 2\mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1])(\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])].$$

Atsitiktinių dydžių kovariacija

50 apibrėžimas. *Tegu ξ_1, ξ_2 yra du atsitiktiniai dydžiai. Jų kovariacija vadinsime skaičių*

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1]) \cdot (\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])].$$

73 teorema. *Atsitiktinių dydžių X, Y kovariacijai teisinga lygybė*

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] - \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2].$$

Atsitiktinių dydžių kovariacija

51 apibrėžimas. *Tegu ξ_1, ξ_2 yra du atsitiktiniai dydžiai. Jų kovariacija vadinsime skaičių*

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[(\xi_1 - \mathbf{E}[\xi_1]) \cdot (\xi_2 - \mathbf{E}[\xi_2])].$$

74 teorema. *Atsitiktinių dydžių X, Y kovariacijai teisinga lygybė*

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] - \mathbf{E}[\xi_1] \cdot \mathbf{E}[\xi_2].$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Urnoje yra trys balti rutuliai, pažymėti skaičiais $1, 0, 0$ ir du juodi, ant kurių užrašyti skaičiai $1, 1$. Atsitiktinai be grąžinimo traukiami du rutuliai, dydis X lygus baltų rutulių skaičiui, o Y – skaičių, užrašytų ant rutulių sumai. Apskaičiuosime dydžių kovariaciją. Iš pradžių sudarykime tikimybių $P(X = x, Y = y)$ lentelę:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	
$Y = 0$	0	0	$0,1$	$0,1$
$Y = 1$	0	$0,4$	$0,2$	$0,6$
$Y = 2$	$0,1$	$0,2$	0	$0,3$
	$0,1$	$0,6$	$0,3$	

Teigiamai ir neigiamai koreliuoti dydžiai

52 apibrėžimas. *Jeigu* ξ_1, ξ_2 *yra atsitiktiniai dydžiai ir* $cov(\xi_1, \xi_2) > 0$, *tai dydžius vadinsime teigiamai koreliuotais, jeigu* $cov(\xi_1, \xi_2) < 0$, *dydžius vadinsime neigiamai koreliuotais. Jeigu* $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$, *dydžius vadinsime nekoreliuotais.*

Pastaba. *Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, yra nekoreliuoti.*
Tačiau nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, ne visada yra nepriklausomi.

Teigiamai ir neigiamai koreliuoti dydžiai

53 apibrėžimas. *Jeigu* ξ_1, ξ_2 *yra atsitiktiniai dydžiai ir* $cov(\xi_1, \xi_2) > 0$, *tai dydžius vadinsime teigiamai koreliuotais, jeigu* $cov(\xi_1, \xi_2) < 0$, *dydžius vadinsime neigiamai koreliuotais. Jeigu* $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$, *dydžius vadinsime nekoreliuotais.*

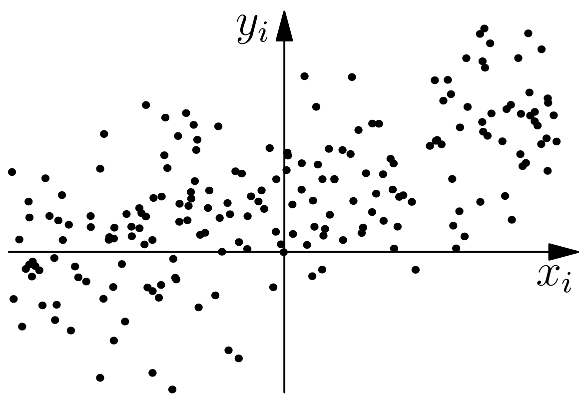
Pastaba. *Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, yra nekoreliuoti.*
Tačiau nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, ne visada yra nepriklausomi.

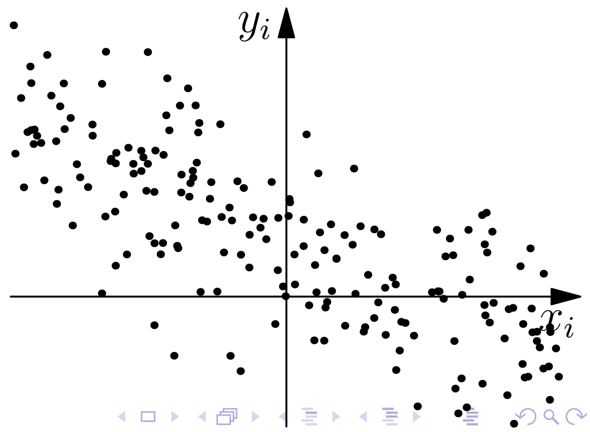
Teigiamai ir neigiamai koreliuoti dydžiai

Tarkime pakartoję bandymą n kartų, gavome atsitiktinių dydžių X, Y reikšmių poras

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

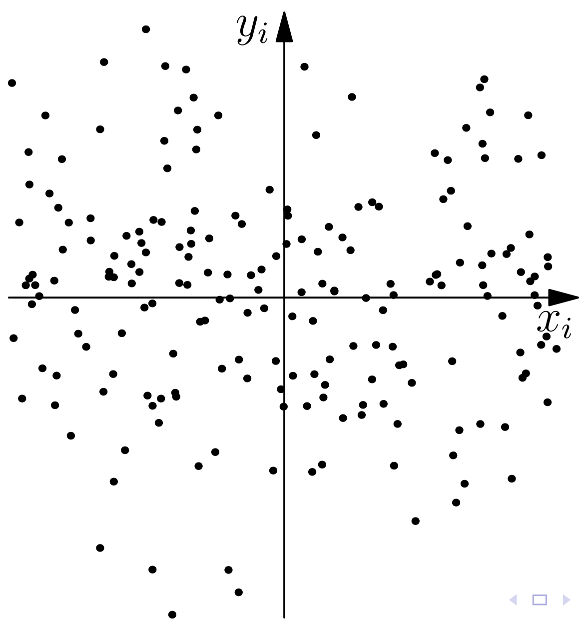
Jas galime pavaizduoti plokštumos taškais.





Nekoreliuoti dydžiai

Jeigu $cov(X, Y) = 0$, taškai sudarytų „debesį“ ir grupavimosi apie jokią tiesę negalėtume įžvelgti.



Koreliacijos koeficientas

54 apibrėžimas. *Tegu ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, turintys teigiamas dispersijas $\mathbf{D}[\xi_1] > 0, \mathbf{D}[\xi_2] > 0$. Jų koreliacijos koeficientu vadinamas skaičius*

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbf{D}[\xi_1]\mathbf{D}[\xi_2]}}$$

Jei bent vienas iš dydžių ξ_1, ξ_2 yra išsigimęs, tai sakysime, kad $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Koreliacijos koeficientas

75 teorema. Tegu ξ_1, ξ_2 yra atsitiktiniai dydžiai, turintys teigiamas dispersijas $\mathbf{D}[\xi_1] > 0, \mathbf{D}[\xi_2] > 0$, o a_1, a_2, b_1, b_2 – bet kokie skaičiai, $a_1, a_2 \neq 0$. Tada

$$\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \begin{cases} \rho(\xi_1, \xi_2), & \text{jei } a_1 a_2 > 0, \\ -\rho(\xi_1, \xi_2), & \text{jei } a_1 a_2 < 0. \end{cases}$$

Koreliacijos koeficiento savybės

76 teorema. Tegu ξ_1, ξ_2 yra neišsigimę atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas. Teisingi teiginiai

1. $-1 \le \rho(\xi_1, \xi_2) \le 1$;
2. jeigu $\xi_2 = a\xi_1 + b$, čia a, b yra skaičiai, tai $\rho(\xi_1, \xi_2) = 1$, kai $a > 0$ ir $\rho(\xi_1, \xi_2) = -1$, kai $a < 0$;
3. jeigu $\rho(\xi_1, \xi_2) = \pm 1$, tai egzistuoja tokie skaičiai $a \neq 0, b$,

$$P(\xi_2 = a\xi_1 + b) = 1.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

II dalis. Atsitiktiniai dydžiai

2.12. Atsitiktinių dydžių konvergavimas

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Konvergavimas beveik visur

55 apibrėžimas. *Tegu ξ ir $\xi_1, \xi_2, \dots$ yra toje pačioje tikimybinėje erdvėje apibrėžti atsitiktiniai dydžiai. Sakysime, kad ξ_n konverguoja beveik visur, jei*

$$P(\omega : \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)) = 1.$$

Žymėsime: $\xi_n \xrightarrow{1} \xi$.

Pavyzdys

$\Omega = [0;1]$, P – geometrinis matas,
$X_n(\omega) = 1/n$, $X(\omega) = 0$.

$$X_n \xrightarrow{1} X$$

Kitas variantas: $X^*(\omega) = 0$, jei ω – iracionalus skaičius ir $X(\omega) = \omega$, jei ω – racionalus.

$$X_n \xrightarrow{1} X^*.$$

Konvergavimas pagal tikimybę

56 apibrėžimas. *Tegu $\xi, \xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ yra atsitiktiniai dydžiai, $n = 1, 2, \ldots$. Sakysime, jog atsitiktinių dydžių seka ξ_n konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį ξ , jei kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Žymėsime: $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$.

Pavyzdys

Sukonstruosime atsitiktinių dydžių seką X_n, kad

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

bet nei viena seka $X_n(\omega)$ neturės ribos!

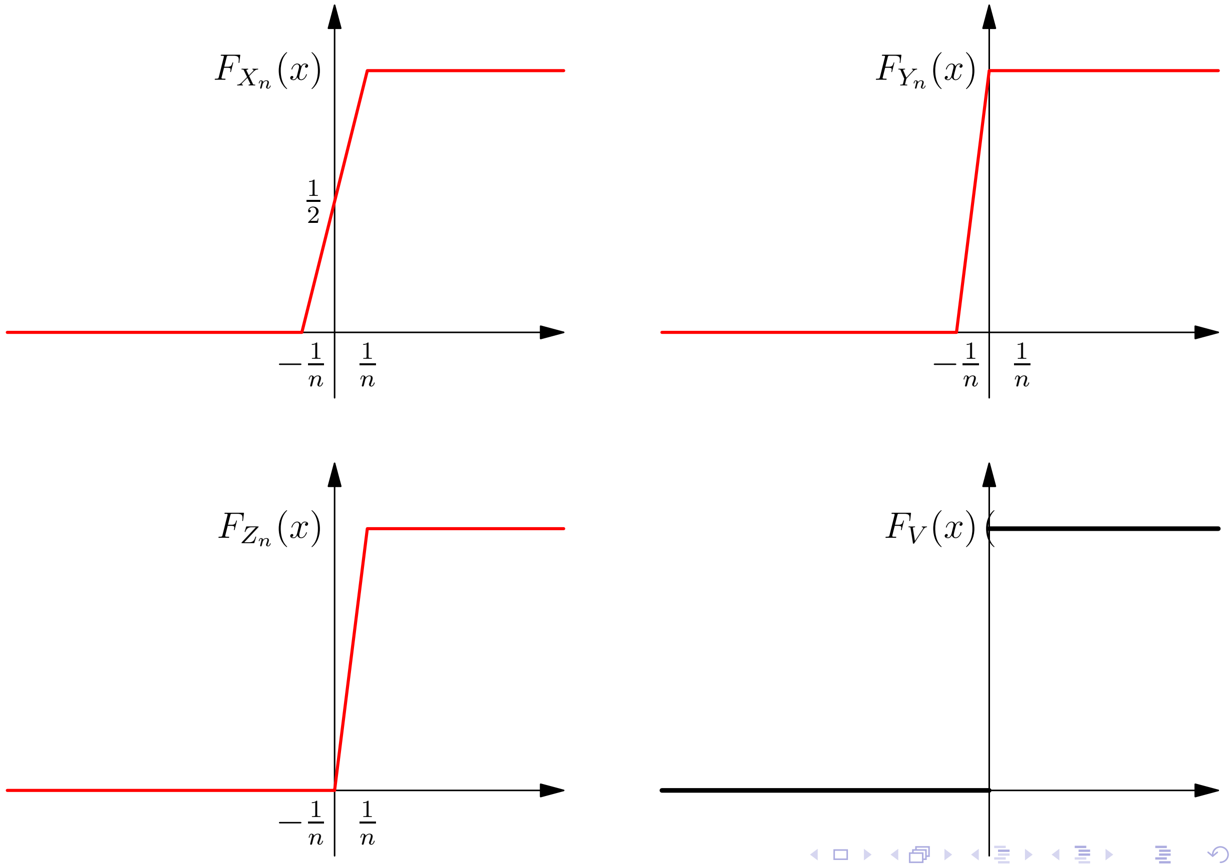
Silpnasis konvergavimas

57 apibrėžimas. *Tegu ξ_n, ξ yra atsitiktiniai dydžiai, o F_n, F jų pasiskirstymo funkcijos. Sakysime, kad atsitiktiniai dydžiai ξ_n silpnai konverguoja į ξ jeigu kiekvienam funkcijos $F(x)$ tolydumo taškui x teisinga*

$$F_n(x) \to F(x), \quad n \to \infty.$$

Silpnąjį konvergavimą žymėsime: $\xi_n \Rightarrow \xi$.

Silpnasis konvergavimas: pavyzdžiai



Konverguoja, bet nebūtinai į pasiskirstymo funkciją

77 teorema. Tegu F_n bet kokia pasiskirstymo funkcijų seka. Tada egzistuoja posekis F_{n_m} bei nemažėjanti ir tolydi iš kairės funkcija $G(x)$, kad šios funkcijos tolydumo taškuose $F_{n_m} \to G(x)$, kai $m \to \infty$.

Klausimas

Kaip tirti, ar pasiskirstymo funkcijų seka silpnai konverguoja?

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

2.13. Charakteringosios funkcijos

Kompleksiniai skaičiai

Kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai

58 apibrėžimas. *Tegu* $\langle\Omega, \mathscr{A}, P\rangle$ *yra tikimybinė erdvė,* $\mathbb{C}$ *– kompleksinių skaičių aibė. Funkciją* $\xi : \Omega \to \mathbb{C}$ *vadinsime kompleksiniu atsitiktiniu dydžiu, jei*

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2,$$

kur $\xi_1 = \operatorname{Re} \xi, \xi_2 = \operatorname{Im} \xi$ *yra realieji atsitiktiniai dydžiai.*

Nepriklausomi dydžiai

59 apibrėžimas. *Kompleksinius atsitiktinius dydžius*

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2$$

vadinsime nepriklausomais, jei bet kurią atsitiktinių dydžių porą $\{\xi_i, \eta_j\}$ *sudaro nepriklausomi dydžiai.*

Vidurkis

60 apibrėžimas. *Jeigu dydžių ξ_1, ξ_2 vidurkiai egzistuoja, tai kompleksinio atsitiktinio dydžio*

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2$$

vidurkiu vadinamas skaičius

$$\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\xi_1] + i\mathbf{E}[\xi_2].$$

Vidurkio savybės

78 teorema. Teisingi tokie teiginiai:

1. Jei ξ_1, ξ_2 yra kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, o a, b kompleksinės konstantos, tai atsitiktinis dydis $\xi = a\xi_1 + b\xi_2$ irgi turi vidurkį ir $\mathbf{E}[\xi] = a\mathbf{E}[\xi_1] + b\mathbf{E}[\xi_2]$.
2. Jei kompleksinis atsitiktinis dydis ξ turi vidurkį, tai $|\mathbf{E}[\xi]| \le \mathbf{E}[|\xi|]$.
3. Jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius, tai atsitiktinis dydis $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ irgi turi vidurkį

Charakteringoji funkcija

61 apibrėžimas. *Realiojo atsitiktinio dydžio ξ charakteringąja funkcija vadinsime realiojo argumento funkciją*

$$\phi_\xi(t) = \mathbf{E}[e^{it\xi}] = \mathbf{E}[\cos(t\xi)] + i\mathbf{E}[\sin(t\xi)].$$

Realiojo atsitiktinio vektoriaus $\xi = \langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ charakteringąja funkcija vadinsime funkciją

$$\phi_\xi(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{E}[e^{it_1\xi_1 + \ldots + it_n\xi_n}].$$

Charakteringosios funkcijos savybės

79 teorema. Teisingi šie teiginiai:

1. Atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija yra tolydi kiekviename taške.
2. Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, a, b dvi konstantos, $\eta = a\xi + b$. Tada
$$\phi_\eta(t) = e^{itb}\phi_\xi(at).$$
3. Tegu ξ_1, ξ_2 yra du nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Tada
$$\phi_\xi(t) = \phi_{\xi_1}(t)\phi_{\xi_2}(t).$$

Svarbūs pavyzdžiai

Jei $\xi \sim \mathscr{B}(n,p)$, tai $\phi_\xi(t) = \left(pe^{it}+q\right)^n$.

Jei $\xi \sim \mathscr{P}(\lambda)$, tai $\phi_\xi(t) = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$.

Jei $\xi \sim \mathscr{N}(0,1)$, tai $\phi_\xi(t) = e^{-t^2/2}$.

Binominio ir Puasono dydžių

Normaliųjų dydžių charakteringosios funkcijos

Charakteringoji funkcija ir momentai

80 teorema. Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio ξ m-asis momentas, tai bet kokiam t egzistuoja m-oji charakteringosios funkcijos $\phi_\xi(t)$ išvestinė. Be to

$$\phi_\xi(t)^{(m)} = \mathbf{E}[(i\xi)^m e^{it\xi}].$$

Charakteringajai funkcijai teisingas toks asimptotinis skleidinys:

$$\phi_\xi(t) = \sum_{l=0}^{m} \mathbf{E}[\xi^l]\frac{(it)^l}{l!} + r_m(t)\frac{(it)^m}{m!};$$

čia $r_m(t) \to 0, t \to 0$.

Pavyzdys

Vienaties teorema

81 teorema. Jeigu pasiskirstymo funkcijos yra skirtingos, tai jų charakteringosios funkcijos irgi skirtingos.

Taikymai: Nepriklausomų atsitiktinių Puasono dydžių sumos.
Nepriklausomų atsitiktinių normaliųjų dydžių sumos.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Vienaties teorema

82 teorema. Jeigu pasiskirstymo funkcijos yra skirtingos, tai jų charakteringosios funkcijos irgi skirtingos.

Taikymai: Nepriklausomų atsitiktinių Puasono dydžių sumos.
Nepriklausomų atsitiktinių normaliųjų dydžių sumos.

Tolydumo teorema

83 teorema. Pasiskirstymo funkcijų seka F_n silpnai konverguoja į tam tikrą ribinę pasiskirstymo funkciją tada ir tik tada, kai atitinkamų charakteringųjų funkcijų seka $\phi_n(t)$ kiekviename taške konverguoja į tam tikrą funkciją $\phi(t)$, kuri yra tolydi taške $t = 0$. Tokiu atveju $\phi(t)$ yra ribinę pasiskirstymo funkciją F atitinkanti charakteringoji funkcija.

2.14. Ribinės teoremos

Poissono teorema

84 teorema. Tegu ξ_n yra atsitiktiniai dydžiai, $\xi_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ ir $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, čia $\lambda > 0$. Tada ξ_n pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į Poissono dydžio $\xi \sim \mathscr{P}(\lambda)$ pasiskirstymo funkciją.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Didžiųjų skaičių dėsnis

85 teorema. Tegu $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį a. Tada bet kokiam $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Centrinė ribinė teorema

86 teorema. Tegu ξ_m yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį $\mathbf{E}[\xi_m] = a$ ir dispersiją $\mathbf{D}[\xi_m] = \sigma^2$. Tada pasiskirstymo funkcijos

$$F_n(x) = P\Big(\sum_{m=1}^{n} \frac{\xi_m - a}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big)$$

silpnai konverguoja į standartinio normalinio dėsnio $\mathcal{N}(0,1)$ pasiskirstymo funkciją $\Phi(x)$, t. y. su visais x

$$F_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} du, \quad n \to \infty.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

III. Matematinė statistika

Centrinė ribinė teorema

Pavyzdys

Pavyzdys.
Reikia pasidalyti sudrėkusius degtukus. Degtukas užsidega su tikimybe $p = 0,6$. Kiek sudrėkusių degtukų reikia atiduoti draugui, kad tikimybė, jog jam pavyks uždegti ugnį, būtų ne mažesnė už 0,9?

▲

Iš kur mes žinome tikimybės p reikšmę?

Duomenų rinkimas

Tyrimui atsitiktinai atrenkama dalis tos populiacijos objektų, jie ištiriami ir iš sukauptų duomenų daromos išvados apie visumą.

Kaip tokią praktiką aprašyti matematinėmis sąvokomis?

Populiacija

Tarkime, kad mums rūpima objektų savybė reiškiama atsitiktinio dydžio X reikšmėmis.

Dažniausiai tos reikšmės yra skaičiai, tačiau nebūtinai. Objekto atrinkimas ir reikšmės matavimas – tai bandymas, kuriam pasibaigus mes gauname vieną atsitiktinio dydžio reikšmę.

Dydį, susijusį su pirmuoju bandymu žymėkime X_1, su antruoju – X_2 ir t. t.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Populiacija

Matematinė sąvoka, atitinkanti atsitiktinai tyrimui atrinktų populiacijos objektų rinkinį yra:

nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka

$$X_1, \ldots, X_n.$$

Imtis ir jos realizacija

62 apibrėžimas. *Nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seką*

$$\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$$

vadinsime atsitiktine imtimi.

Imtis ir jos realizacija

Atlikdami matavimus ar stebėjimus, gauname šių dydžių reikšmes.

63 apibrėžimas. *Atsitiktinės imties* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *elementų reikšmių seką* $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ *vadinsime atsitiktinės imties realizacija, arba tiesiog imtimi.*

Pirmasis uždavinys

Imties duomenų tvarkymo, sisteminimo ir vaizdavimo metodai – tai aprašomoji statistika. Jos uždavinys padėti apžvelgti ir įvertinti tyrėjo sukauptus duomenis.

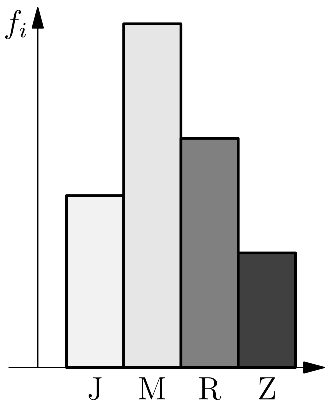
1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

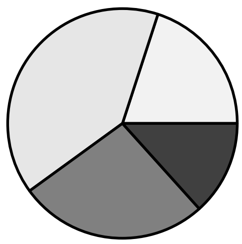
Dažniai

Duomenys	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
Dažniai n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_m
Santykiniai dažniai f_i	n_1/n	n_2/n	n_3/n	$\dots$	n_m/n
Sukauptieji dažniai $\sum_{j<i} f_j$	0	f_1	f_1+f_2	$\dots$	$f_1+\dots+f_{m-1}$

Lentelės ir diagramos

	J	M	R	Ž
n_i	3	6	4	2
f_i	3/15	6/15	4/15	2/15
$\sum_{j<i} f_j$	0	3/15	9/15	13/15



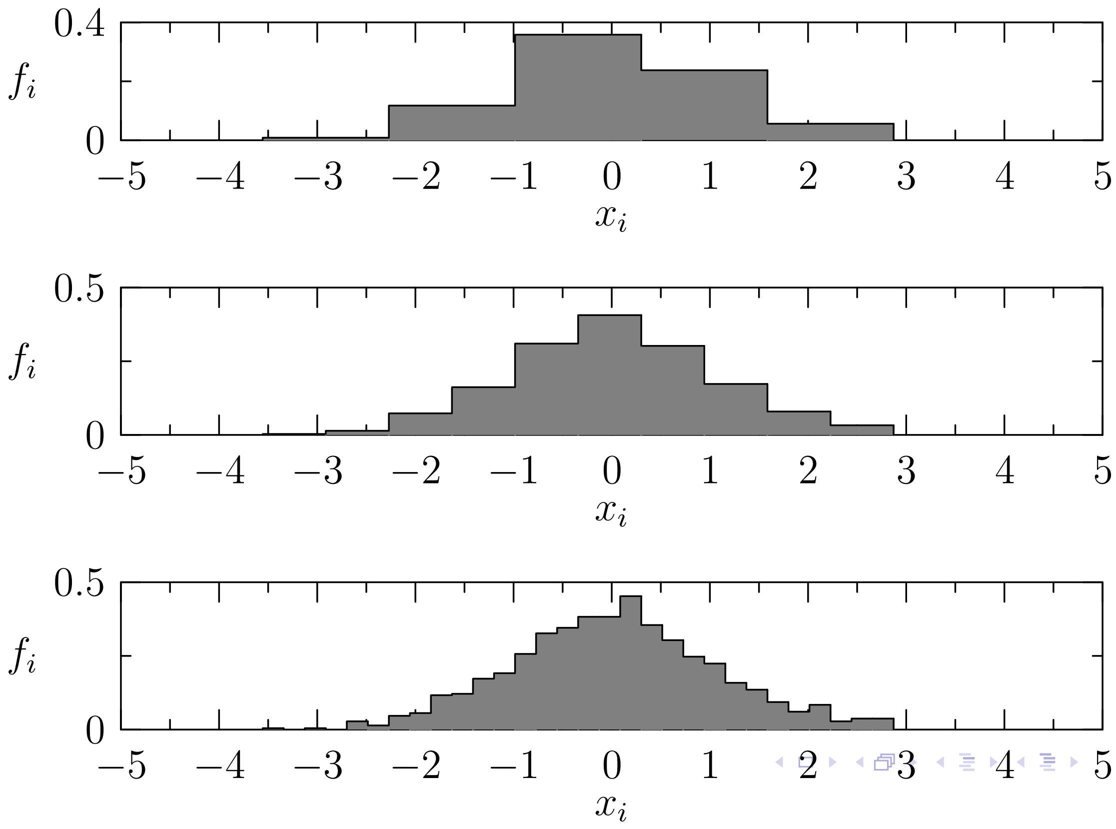


1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Sugrupuotieji dažniai ir histograma

Duomenų intervalai	I_1	I_2	I_3	$\ldots$	I_N
Duomenų intervaluose I_j kiekiai	n_1	n_1	n_2	$\ldots$	n_N
Santykiniai dažniai p_j	n_1/nd	n_2/nd	n_3/nd	$\ldots$	n_N/nd

Histogramos



Histogramos

Trys tos pačios imties iš $n = 1000$ duomenų histogramos: $N = 5, 10, 30$.

Rekomendacija: geriausiai imties savybes parodo histograma, kurios intervalų kiekis yra maždaug

$$N \approx 1 + 3,3 \lg n.$$

Variacinė imties eilutė

Jeigu imties duomenys $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra skaičiai, juos galime perrikiuoti didėjimo tvarka. Tokia didėjimo tvarka išdėstyta imties duomenų eilė

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$$

vadinama imties variacine eilute. Pavyzdžiui, imties

$$2; 1{,}5; 3, 1{,}5; 2, 3; 1{,}7; 2$$

variacinė eilutė yra 1,5; 1,5; 1,7; 2; 2; 2; 3; 3, $x_{(1)} = x_{(2)} = 1{,}5; x_{(8)} = 3.$

Empirinė pasiskirstymo funkcija

Jeigu imtis gauta stebint skaitines reikšmes įgyjantį atsitiktinį dydį X, galime pagal imtį $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sudaryti funkciją, kurią vadinsime empirine dydžio X pasiskirstymo funkcija. Pažymėkime $n(x)$ imties duomenų, mažesnių už x skaičių.

Tada empirinę pasiskirstymo funkciją apibrėšime taip:

$$F_X^*(x) = \frac{n(x)}{n}.$$

Empirinė pasiskirstymo funkcija

Imties 2; 1,5; 3, 1,5; 2,3; 1,7; 2 empirinė pasiskirstymo funkcija

$$F_X^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \le 1,5; \\ \frac{2}{8}, & \text{jei } 1,5 < x \le 1,7; \\ \frac{3}{8}, & \text{jei } 1,7 < x \le 2; \\ \frac{6}{8}, & \text{jei } 2 < x \le 3; \\ 1, & \text{jei } x > 3; \end{cases}$$

Imties kvantiliai

Pažymėkime $\underline{n}(x)$ imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ duomenų nedidesnių už x (t. y. tenkinančių nelygybę $x_i \leqslant x$) kiekį, o $\overline{n}(x)$ – nemažesnių (t. y. tokių, kuriems $x_i \geq x$). Tada $\underline{n}(x) + \overline{n}(x) \geq n$.

q-osios eilės empirinį kvantilį v_q turėtume apibrėžti taip, kad jis tenkintų sąlygas:

$$q \leqslant \frac{\underline{n}(v_q)}{n}, \qquad \frac{\overline{n}(v_q)}{n} \geqslant 1 - q.$$

Imties kvantiliai

64 apibrėžimas. *Imties* $x_1, x_2, \dots, x_n$ q*-osios eilės kvantiliu vadinsime skaičių* v_q*, apibrėžiamą taip:*

$$v_q = \begin{cases} x_{([qn]+1)}, & \textit{jei } qn \textit{ nėra sveikas skaičius,} \\ (x_{(qn)} + x_{(qn+1)})/2, & \textit{jei } qn \textit{ yra sveikas skaičius,} \end{cases}$$

čia $0 < q < 1$, *žymuo* $[qn]$ *reiškia skaičiaus sveikąją dalį, o* $x_{(i)}$ *–* i*-ąjį imties variacinės eilutės narį.*

Kvartiliai ir mediana

Dažniausiai naudojami $q = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ eilės kvantiliai. Jie taip ir vadinami – kvartiliais bei žymimi Q_1, Q_2, Q_3.

Kvartilis Q_2 dar vadinamas mediana.

Imties vidurkis ir dispersija

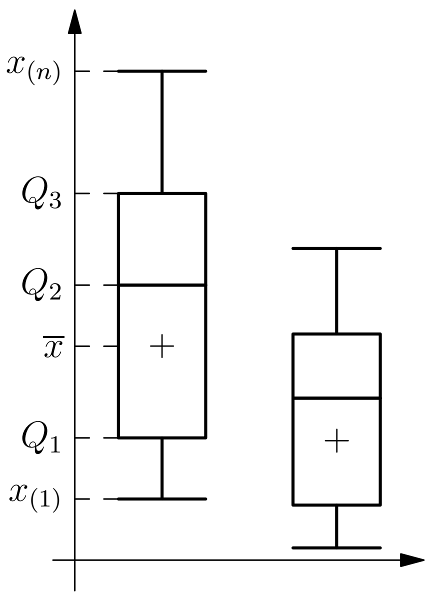
65 apibrėžimas. *Tegu $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ yra imtis, gauta stebint atsitiktinio dydžio X reikšmes. Šios imties vidurkiu vadinsime skaičių*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

o imties dispersija – skaičių

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

Imties skaitinių charakteristikų vaizdavimas



Skaitinių imties charakteristikų vaizdavimas vienoje diagramoje. Naudojant tokias diagramas patogu lyginti kelias imtis.

Uždaviniai

8. *Imties duomenys – pirkėjų, sustojusių prie kasos, išlaidos pirkiniams (litais):*

27, 20, 12, 20, 15, 20, 45, 10, , 15, 10, 15, 30, 25, 20,

Raskite šią imtį atitinkančios variacinės eilutės narius $x_{(5)}, x_{(11)}$. Raskite imties kvartilius.

Uždaviniai

9. *Trisdešimt dviejų studentų kontrolinio darbo įvertinimai pateikti dažnių lentelėje*

$x_i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_i =$	0	1	2	4	3	5	3	5	5	4

Raskite imties medianą ir kvartilius. Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

Diagramos

Pavyzdžiai

Uždaviniai

10. *Devynių studentų egzamino įvertinimai dešimties balų skalėje yra tokie*

$$7,\ 6,\ 7,\ 10,\ 6,\ 5,\ 5,\ ,9,\ 8.$$

Raskite imties medianą ir vidurkį. Kol kas nežinomas dešimtojo studento egzamino rezultatas, tačiau žinoma, kad bent vieną balą jis tikrai gaus. Kiek daugiausiai gali sumažėti imties vidurkis? Kiek daugiausiai gali padidėti? Ar gali vidurkis likti nepakitęs? Kada? Jeigu vidurkis liks nepakitęs, kaip pasikeis imties dispersija? Kaip nuo dešimtojo studento

Uždaviniai

11. *Imties duomenys – piliečio N pokalbių telefonu trukmės minutėmis:*

$$3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 4,\ 2,\ 4,\ 7.$$

Kiek trūkio taškų turi pagal šią imtį sudaryta empirinė pasiskirstymo funkcija? Kokiame taške trūkis yra didžiausias? Nubraižykite empirinės pasiskirstymo funkcijos grafiką.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

3.2. Taškiniai įverčiai

Taškiniai įverčiai

Parametrą, kuris valdo atsitiktinio dydžio reikšmių pasirodymą žymėsime graikiška raide θ (teta).
Iš kur galime sužinoti apytikslę parametro θ reikšmę?

Norėdami surasti ją iš imties duomenų, atliekame skaičiavimus, kitaip tariant skaičiuojame tam tikros funkcijos reikšmę:

$$\theta^* = h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Imties statistika

66 apibrėžimas. *Tegu* $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ *yra atsitiktinė imtis. Atsitiktinį dydį*

$$T = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

vadinsime statistika.

Nepaslinktas įvertis

67 apibrėžimas. *Sakysime, kad* $\theta^* = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *yra nepaslinktas parametro* θ *įvertis, jeigu*

$$\mathbf{E}[\theta^*] = \mathbf{E}[h(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta.$$

Vidurkis ir dispersija

87 teorema. Tegu atsitiktinis dydis X turi vidurkį a ir dispersiją σ^2, o $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ yra šio dydžio atsitiktinė imtis. Tada

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

yra nepaslinktieji nežinomų parametrų a ir σ^2 įverčiai.

Empirinis momentas

68 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio k-osios eilės momento $\alpha_k = \mathbf{E}[X^k]$ įvertį*

$$a_k = \frac{X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k}{n}$$

vadinsime atsitiktinio dydžio empiriniu k-osios eilės momentu.

Momentų metodas

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_1,\\
&\alpha_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_2,\\
&\ldots\\
&\alpha_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = a_r.
\end{aligned}$$

Pavyzdys

Pavyzdys.
Kiek metimų ir koks taiklumas?
Šaulys šaudė į n taikinių po k kartų. Žinoma, kad į taikinius pataikė $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartų. Po kiek kartų jis šaudė ir kokia taiklaus šūvio tikimybė?

▲

Pavyzdys

Pavyzdys. *Vėlavimas iš mokyklos*
Moksleiviui sugrįžti iš mokyklos pakanka 15 minučių, tačiau jis visada grįžta vėliau. Vėlavimo laikas X yra atsitiktinis dydis, sudarytas iš dviejų nepriklausomų dėmenų:

$$X = X_1 + X_2,$$

čia $X_1 \sim \mathscr{T}([0,a])$ papildomas laikas, sugaištas kelyje, o $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda)$ – laikas sugaištas kalbantis su draugu prieš atsisveikinant. Žinomi n dienų vėlavimo laikai $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Reikia gauti parametrų a ir λ įverčius. ▲

Duomenys:

$$8,07;\ 16,53;\ 12,63;\ 11,57;\ 12.16;\ 4,49;\ 7,39;\ 13,73;\ 13,78;\ 16,83.$$

3.3. Pasikliautiniai intervalai

Pasikliautiniai intervalai

69 apibrėžimas. *Tegu X yra stebimas atsitiktinis dydis, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ jo atsitiktinė imtis, θ – su dydžiu X susijęs parametras, o*

$$\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

– du taškiniai šio parametro įverčiai. Intervalą

$$I = (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

vadinsime pasikliautiniu parametro θ įverčiu su pasikliovimo lygmeniu $Q, 0 < Q < 1$, jei

$$P(\theta \in (\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \geqslant Q.$$

Sukirmiję grybai

Pavyzdys.
Tikimybė, kad miško grybas sukirmijęs lygi p ir mums nėra žinoma. Iš 1000 grybų sukirmijusių buvo 470. Reikia sudaryti pasikliautinį intervalą nežinomam parametrui p su pasikliovimo lygmeniu $Q = 0,1$.

▲

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Normalieji dydžiai

Atsitiktinis dydis X vadinamas standartiniu normaliuoju ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$), jeigu jo tankis yra

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Žinome, kad $\mathbf{E}[X] = 0, \mathbf{D}[X] = 1$. Jeigu $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tai su bet kokiais skaičiais $\sigma \neq 0, \mu$, atsitiktinis dydis $Y = \sigma X + \mu$ irgi yra normalusis,

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \mathbf{E}[Y] = \mu,\ \mathbf{D}[Y] = \sigma^2.$$

Jeigu parinkę kokius nors skaičius $a \neq 0$ ir b sudarytume atsitiktinį dydį $Z = aY + b$ jis vėl būtų normalusis. Taigi tiesinės vieno normaliojo dydžio transformacijos vėl duoda normaliuosius dydžius.

Normalieji dydžiai

88 teorema. Jeigu X_1, X_2 yra du nepriklausomi normalieji dydžiai, tai jų suma $X = X_1 + X_2$ irgi yra normalusis dydis

89 teorema. Jei $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ bet kokie skaičiai ir ne visi a_i lygūs nuliui, tai atsitiktinis dydis

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b$$

irgi yra normalusis.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Normalieji dydžiai

90 teorema. Tegu $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tada atsitiktinis dydis

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

yra standartinis normalusis, t. y. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Pasikliautinis intervalas vidurkiui

Pasikliautinis intervalas atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vidurkiui, kai σ^2 žinome

Pasikliautinis intervalas vidurkiui su pasikliovimo lygmeniu Q yra

$$\left(\overline{X} - z_{(1+Q)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{(1+Q)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

čia $0 < Q < 1$, $z_{(1+Q)/2}$ yra lygties $\Phi(z) = (1+Q)/2$ sprendinys.

Pavyzdys

Pavyzdys.
Stebint atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ reikšmes gauta tokia dešimties duomenų imtis

$$5.26,\ 4.80,\ 4.91,\ 4.98,\ 4.79,\ 4.99,\ 3.81,\ 5.29,\ 6.15,\ 4.2$$

Suskaičiavę vidurkį gautume $\overline{X} = 4.919$. Kokio ilgio pasikliautinius intervalus galime sukonstruoti naudodamiesi šiais duomenimis?

▲

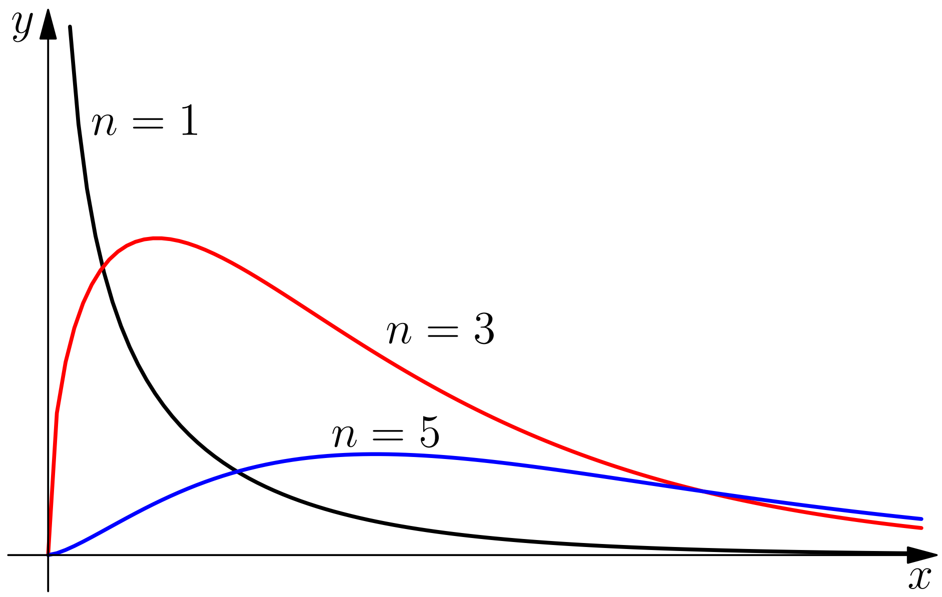
Nauji dydžiai

70 apibrėžimas. *Tegu $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi pagal standartinį normalųjį dėsnį pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime du naujus atsitiktinius dydžius*

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2, \quad T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_n^2/n}}.$$

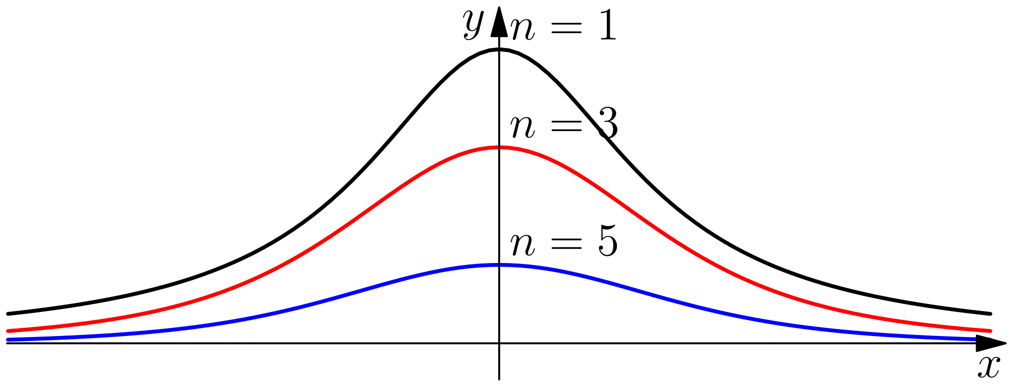
Sakysime, kad dydis χ_n^2 pasiskirstęs pagal chi-kvadrat dėsnį su n laisvės laipsnių, žymėsime $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$, o dydis T_n – pagal Studento dėsnį su n laisvės laipsnių, žymėsime $T_n \sim \mathscr{S}t(n)$.

Tankio grafikai



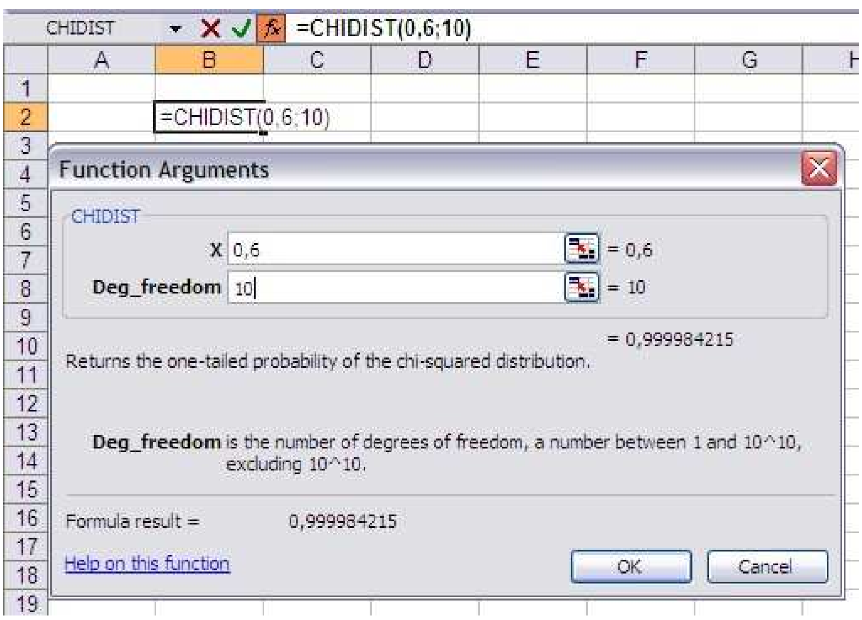
Atsitiktinių dydžių χ_n^2 tankių grafikai. Kai $n = 1$, tankis neaprėžtai didėja, artėjant prie nulio.

Tankio grafikai



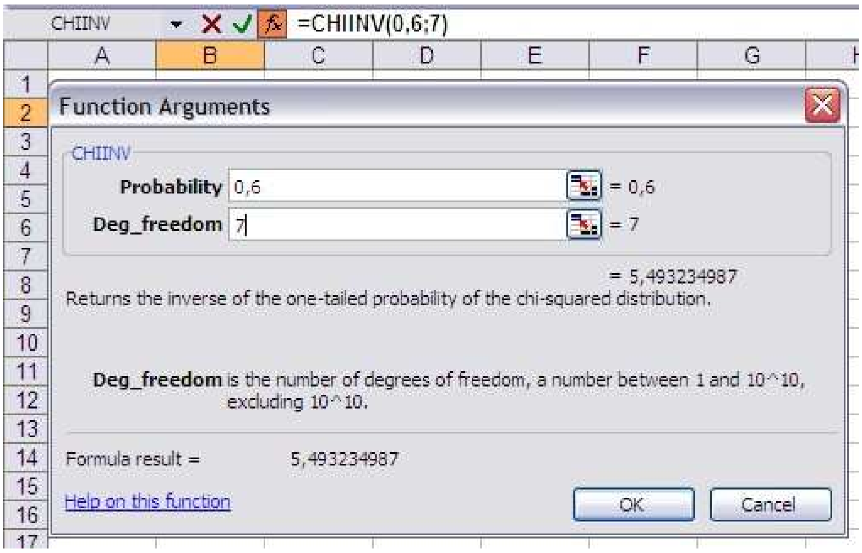
Atsitiktinių dydžių $T_n \sim \mathscr{S}t(n)$ tankių grafikai.

Funkcijos reikšmės skaičiavimas



Chi-kvadrat dydžio pasiskirstymo funkcijos reikšmės skaičiavimas Exceliu.

Kvantilių skaičiavimas



Chi-kvadrat dydžio pasiskirstymo funkcijos ir kvantilio skaičiavimas

Exceliu.

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pagrindinė teorema

91 teorema. Tegu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, o $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra šio atsitiktinio dydžio imtis. Tada

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{S}t(n-1).$$

Pasikliautinis intervalas

Pasikliautinis intervalas atsitiktinio dydžio $X \sim \mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ vidurkiui, kai σ^2 nežinome

Pasikliautinis intervalas vidurkiui su pasikliovimo lygmeniu Q yra

$$\left(\overline{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

čia $0 < Q < 1, t = t_{(1+Q)/2}(n-1)$ yra lygties $F_{T_{n-1}}(t) = (1+Q)/2, T_{n-1} \sim \mathscr{S}t(n-1)$ sprendinys,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \qquad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

Pavyzdys. *Dešimties duomenų imtis*
Stebint atsitiktinio dydžio $X \sim \mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ reikšmes gauta tokia dešimties duomenų imtis

$$4.19,\ 4.20,\ 5.12,\ 6.11,\ 4.37,\ 5.50,\ 4.81,\ 4.44,\ 4.17,\ 5.91.$$

Imties vidurkis $\overline{X} = 4.88$, dispersija ir standartinis nuokrypis $s^2 = 0.544, s = 0.738$. Pasikliautinių intervalų su pasikliovimo lygmenimis Q rėžiai pateikti lentelėje.

$Q =$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$0,95$
$z =$	0.883	1.10	1.38	1.83	2.26
$\underline{\mu} =$	4.67	4.62	4.56	4.45	4.35
$\overline{\mu} =$	5.09	5.14	5.20	5.31	5.41
ilgis $=$	0.411	0.512	0.645	0.853	1.06

▲

Pasikliautinis intervalas sėkmės tikimybei

Pavyzdys. *Sukirmiję grybai*
Iš $n = 1000$ grybų $m = 470$ buvo sukirmiję. Sudarysime pasikliautinius intervalus su įvairiomis Q reikšmėmis taikydami Čebyšovo nelygybę ir centrinę ribinę teoremą. Pasikliovimo lygmenys $Q = 0,6; 0,7; 0,8$.

▲

Pasikliautinis intervalas dispersijai

Pasikliautinis intervalas normaliojo dydžio dispersijai, kai vidurkis žinomas
Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra jo imtis, o vidurkis μ žinomas, tai pasikliautinis intervalas dispersijai σ^2 su pasikliovimo lygmeniu Q yra

$$\left(\frac{nS_0^2}{v}; \frac{nS_0^2}{u} \right)$$

čia u, v yra dydžio $\chi_n^2 \sim \chi^2(n)$ atitinkamai $(1-Q)/2$ ir $(1+Q)/2$ lygmens kvantiliai, o

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2.$$

Pasikliautinis intervalas dispersijai

Pasikliautinis intervalas normaliojo dydžio dispersijai, kai vidurkis nežinomas
Jeigu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra jo imtis, o vidurkis μ nežinomas, tai pasikliautinis intervalas dispersijai σ^2 su pasikliovimo lygmeniu Q yra

$$\Big(\frac{(n-1)S^2}{v}; \frac{(n-1)S^2}{u}\Big);$$

čia u, v yra dydžio $\chi_n^2 \sim \chi^2(n-1)$ atitinkamai $(1-Q)/2$ ir $(1+Q)/2$ lygmens kvantiliai, o

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pasikliautinis intervalas sėkmės tikimybei

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = q, \quad q = 1-p.$$

Tokio dydžio vidurkis $\mathbf{E}[X] = p$, o imtis – nulių ir vienetų seka $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Taškinis tikimybės įvertis – tai pirmasis empirinis momentas

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\text{sėkmių skaičius}}{n}.$$

Pasikliautinis intervalas sėkmės tikimybei

Centrinės ribinės teoremos esmę trumpai galime nusakyti taip: jei $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė dydžio imtis, tai su dideliais n statistika

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

pasiskirsčiusi beveik kaip standartinis normalusis dydis.

Pasikliautinis intervalas sėkmės tikimybei

Jei Q yra pasikliovimo lygmuo, o $z_{(1+Q)/2}$ standartinio normaliojo dydžio $(1+Q)/2$ lygio kvantilis, tai galime manyti, kad

$$P(-z_{\frac{1+Q}{2}} < Z < z_{\frac{1+Q}{2}}) = P\Big(-z_{\frac{1+Q}{2}} < \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_{\frac{1+Q}{2}}\Big) \approx Q.$$

Šią lygybę galime pertvarkyti taip:

$$P\Big(\overline{X} - z\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < p < \overline{X} + z\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big) \approx Q, \quad z = z_{\frac{1+Q}{2}}.$$

Statistinės hipotezės

Apie stebimą atsitiktinį dydį formuluojame dvi hipotezes: pagrindinę $\mathbf{H}_0$ ir alternatyvią $\mathbf{H}_1$. Naudodamiesi sukauptais imties duomenimis sprendžiame, kurią iš hipotezių priimti. Galimi du atvejai: $\mathbf{H}_0$ teisinga ir klaidinga, galimi du sprendimai: $\mathbf{H}_0$ priimame arba atmetame. Taigi galimos keturios padėtys:

	$\mathbf{H}_0$ teisinga	$\mathbf{H}_0$ klaidinga
$\mathbf{H}_0$ priimame	teisingas sprendimas	II rūšies klaida
$\mathbf{H}_0$ atmetame	I rūšies klaida	sprendimas teisingas

Statistinės hipotezės

Paprastai hipotezių tikrinimo uždavinys formuluojamas taip, kad pirmos rūšies klaida būtų svarbesnė, t. y. jos labiau vengiama. Pasirenkamas mažas skaičius $0 < \alpha < 1$ ir kriterijus sudaromas taip, kad būtų

$$P(\text{I rūšies klaida}) = P(\mathbf{H}_0 \text{ atmetame}|\mathbf{H}_0 \text{ teisinga}) \leq \alpha.$$

Skaičius α vadinamas kriterijaus reikšmingumo lygmeniu. Tačiau yra daug kriterijų su tuo pačiu **reikšmingumo lygmeniu**. Kriterijus, kuris reiškia, kad H_0 visada priimame, irgi tenkina šią sąlygą. Iš visų tokių kriterijų stengiamasi parinkti tą, su kuriuo tikimybė

$$P(\text{II rūšies klaida}) = P(\mathbf{H}_0 \text{ priimame}|\mathbf{H}_0 \text{ klaidinga})$$

yra kiek įmanoma mažesnė.

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį, kai dispersija žinoma

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dispersija σ^2 žinoma, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ dydžio imtis. Hipotezės:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0,$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0,$$

α – reikšmingumo lygmuo, z – lygties $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$ sprendinys, t. y. standartinio normaliojo dydžio $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Kriterijus: jei $|Z| > z$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ atmetama, jei $|Z| \leq z$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ priimama.

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį, kai dispersija nežinoma

Stebimas atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dispersija σ^2 nežinoma, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ dydžio imtis. Hipotezės:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0,$$
$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0,$$

α – reikšmingumo lygmuo, t – lygties

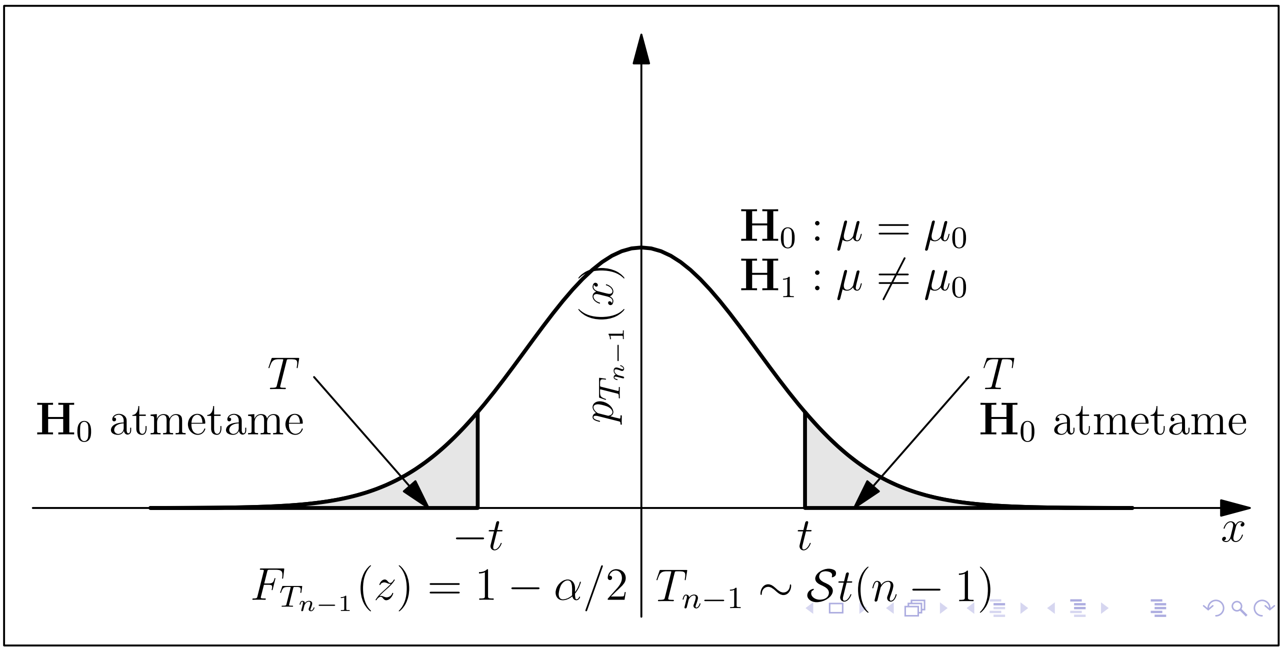
$$F_{T_{n-1}}(t) = 1 - \alpha/2, \quad T_{n-1} \sim \mathcal{S}t(n-1)$$

sprendinys, t. y. Studento dydžio su $n-1$-u laisvės laipsniu $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė,

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Hipotezė apie normaliojo dydžio vidurkį

Kriterijus: jei $|T| > t$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ atmetama, jei $|T| \leq t$, hipotezė $\mathbf{H}_0$ priimama.



Hipotezės apie sėkmės tikimybę, kai bandymų daug

Tegu stebimas atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 1, jei bandymas baigiasi sėkme ir reikšmę 0, jei baigiasi nesėkme, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė imtis, n – didelis skaičius, α – reikšmingumo lygmuo,

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p, \quad Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

Hipotezės apie sėkmės tikimybę:

$$\mathbf{H}_0 : p = p_0,$$
$$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0.$$

Jei $|Z| \geqslant z$, čia z yra standartinio normaliojo dydžio $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė, tai pagrindinė hipotezė H_0 atmetama, jei $|Z| < z$, – priimama. Kai alternatyva yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$ arba $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, kriterijui naudojama standartinio normaliojo dydžio α lygmens kritinė reikšmė. Pirmuoju atveju pagrindinė hipotezė atmetama, kai $Z \geqslant z$, antruoju – kai $Z \leqslant -z$.

Hipotezės apie sėkmės tikimybę, kai bandymų nedaug

Tegu stebimas atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 1, jei bandymas baigiasi sėkme ir reikšmę 0, jei baigiasi nesėkme, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ yra atsitiktinė imtis, n – nedidelis skaičius, α – reikšmingumo lygmuo,

$$P(X = 1) = p, \ P(X = 0) = 1 - p,$$

pagrindinė hipotezė $\mathbf{H}_0 : p = p_0$.

Hipotezės apie sėkmės tikimybę, kai bandymų nedaug

Gautoji iš imties dydžio $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ reikšmė lygi u,

$$t_1 = P(S_n \geqslant u | \mathbf{H}_0) = \sum_{i=u}^{n} C_n^i p_0^i (1 - p_0)^{n-i},$$
$$t_2 = P(S_n \leqslant u | \mathbf{H}_0) = \sum_{i=0}^{u} C_n^i p_0^i (1 - p_0)^{n-i}.$$

Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p \neq p_0$, tai ją priimame, jei viena iš tikimybių t_1, t_2 mažesnė už $\alpha/2$.
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p > p_0$, tai ją priimame, jei $t_1 < \alpha$.
Jeigu alternatyvi hipotezė yra $\mathbf{H}_1 : p < p_0$, tai ją priimame, jei $t_2 < \alpha$.

Pavyzdys

12. *Dviejose iš pažiūros visai vienoduose maišuose yra miežių grūdai su avižų priemaišomis. Viename maiše avižos sudaro* 20%*, kitame –* 30%*. Norėtume pasirinkti maišą, kuriame priemaišų mažiau. Pasirinkę vieną mašą pasėmėme iš jo dalį grūdų ir juos peržiūrėjome. Iš viso buvo pasemta* $n = 758$ *grūdai, avižų grūdų buvo* $m = 166$*. Patikrinkite hipotezę, kad atsirinkome maišą su mažesne priemaišų dalimi, jeigu reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0,2$

1.4 Geometrinės tikimybės 1.5. Įvykių algebra 1.6. Tikimybinis matas 1.7. Paprastos lygybės ir nelygybės 1.8. Paprastieji atsitiktiniai dydžiai ir tikimyb

Pavyzdys

13. *Jeigu moneta yra simetriška, kiekvienas gali atspėti maždaug pusės metimų baigtis. Fokusininkas tvirtina, kad jis gali atspėti, kad jis gali atspėti daugiau kaip pusės simetriškos monetos metimų baigčių. Norime patikrinti hipotezę, kad jo sugebėjimai tokie patys kaip ir visų žmonių su alternatyva, kad jis gali atspėti geriau. Tegu reikšmingumo lygmuo* $\alpha = 0,1$*. Jeigu monetą mestume* $n = 15$ *kartų, kiek kartų fokusininkas turėtų atspėti baigtis, kad juo patikėtume?*