Vilniaus universitetas

DOMINUOJANČIOJI AIBĖ
DOMINAVIMO SKAIČIUS

DOMINATING SET, DOMINATION NUMBER

Simonas KAZLAUSKAS

2016 m. lapkričio 10 d.

Dominuojančioji aibė

Aibė $A \subseteq V$ yra ***dominuojančioji aibė***, jei kiekviena aibės $V \setminus A$ viršūnė yra gretima viršūnei iš aibės A.
Čia V yra grafo $G = (V, E)$ viršūnių aibė.

Minimalioji ir mažiausioji dominuojančioji aibė

Minimaliąja dominuojančiąja aibe vadiname tokią dominuojančiąją aibę, kurios visi tikriniai poaibiai $(\forall A' \subset A)$ *netenkina* dominuojančiosios aibės apibrėžimo.
Mažiausiąja dominuojančiąja aibe vadiname dominuojančiąją aibę su mažiausiu viršūnių skaičiumi.

Dominavimo skaičius

$$\beta(G) = \min_{A \in T}(|A|)$$

Kitaip, elementų skaičius mažiausioje dominuojančioje aibėje.
Čia T yra aibė kurios elementai yra visos grafo G dominuojančios aibės.

Padengimo uždavinys

Turint aibę elementų $U = \{1, 2, ..., n\}$ ir rinkinį S sudarytą iš m aibių tenkinantį

$$U \subseteq \bigcup_{s \in S} s$$

reikia rasti tokį rinkinį sudarytą iš rinkinio S aibių, kuris turėtų mažiausią skaičių aibių.
Šio uždavinio sudėtingumas yra NP-complete.

Padengimo uždavinys: Pavyzdys

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$S = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$$

Akivaizdu, kad

$$\bigcup_{s \in S} s = \{1, 2, 3, 4, 5\} = U$$

Tačiau, taip pat nesunku pastebėti, kad

$$S' = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

$$\bigcup_{s \in S'} s = \{1, 2, 3, 4, 5\} = U$$

S' šiuo atveju ir yra padengimo uždavinio sprendinys.

Dominavimo skaičiaus radimas

Akivaizdu, kad radę mažiausią dominuojančiąją aibę, nesunkiai apskaičiuosime ir dominavimo skaičių.
Mažiausiosios dominuojančios aibės radimas yra specialus padengimo uždavinio atvejis. Tikslūs padengimo uždavinio sprendimo metodai neefektyvūs (uždavinys yra NP-complete), tad naudojama godaus algoritmo euristika.
Pastaba. Godžia euristika paremtas padengimo algoritmas ne visada randa mažiausiąją dominuojančiąją aibę, bet visada ras minimaliąją.
Pastaba. Jesper Nederlof, Johan M. M. van Rooij ir Thomas C. van Dijk 2009 metais aprašė algoritmą, kuris šį uždavinį sprendžia per $O\left(1.5048^n\right)$ laiką. doi:10.1007/s00453-013-9759-2

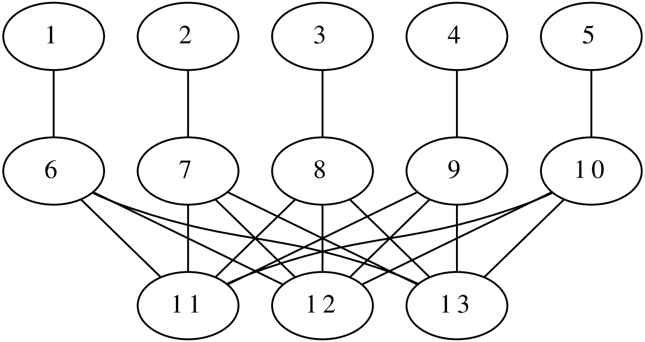
Dominavimo skaičiaus radimas

Godžia eurisitka paremtas algoritmas atrodo taip:

```
doms : Graph → {Vertex}
doms G =
  A = ∅
  (V, E) = G
  while V ≠ ∅
    a = max_{v∈V} deg(v)
    A = A ∪ {a}
    V = V \ ({a} ∪ N(a))
  return A

β : Graph → Integer
β G = length (doms G)
```

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys



Mažiausioji dominuojančioji aibė:

$$\{6, 7, 8, 9, 10\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$\deg(11) = \deg(12) = \deg(13) = 5$$

Imame viršūnę 11.

$$N(11) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{11\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 13\}$$

$$\mathsf{deg}(12) = \mathsf{deg}(...) = 0$$

Imame viršūnę 12.

$$N(12) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{11, 12\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 13\}$$

$$\deg(13) = 0$$

Imame viršūnę 13.

$$N(13) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{11, 12, 13\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathsf{deg}(1) = 0$$

Imame viršūnę 1.

$$N(1) = \{6\}$$

$$A = \{11, 12, 13, 1\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\deg(2) = 0$$

Imame viršūnę 2.

$$N(2) = \{7\}$$

$$A = \{11, 12, 13, 1, 2\}$$

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{3, 4, 5\}$$

$$\deg(3) = 0$$

Imame viršūnę 3.

$$N(3) = \{8\}$$

$$A = \{11, 12, 13, 1, 2, 3\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{4, 5\}$$

$$\deg(4) = 0$$

Imame viršūnę 4.

$$N(4) = \{9\}$$

$$A = \{11, 12, 13, 1, 2, 3, 4\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

Pritaikome algoritmą:

$$V = \{5\}$$

$$\deg(5) = 0$$

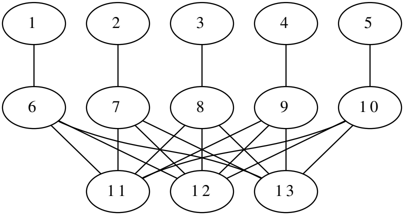
Imame viršūnę 5.

$$N(5) = \{10\}$$

$$A = \{11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Dominavimo skaičiaus radimas: Pavyzdys

$$V = \varnothing$$

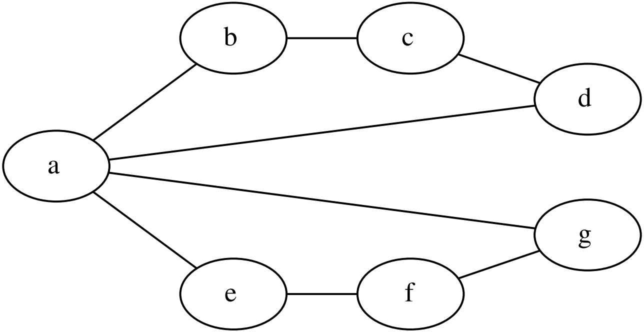


Mažiausioji dominuojančioji aibė: $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

nėra mažiausioji, bet yra minimali dominuojančioji aibė.

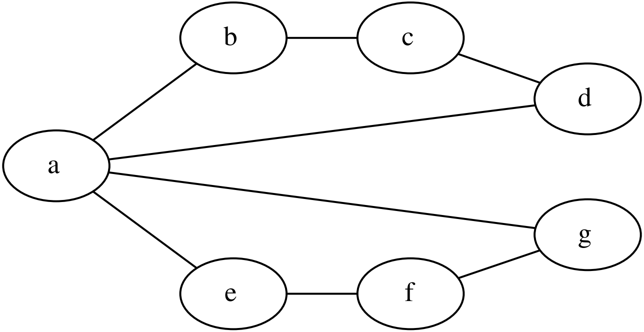
Dominavimo skaičiaus radimas: Užduotis



while $V \neq \varnothing$

1. $a = \max_{v \in V} \deg(v)$
2. $A = A \cup \{a\}$
3. $V = V \setminus (\{a\} \cup N(a))$

Dominavimo skaičiaus radimas: Užduotis



$$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{f}\}$$

Taikymai: Uždavinys apie sargybinius

Grafas G – miesto kalėjimo planas. Grafo viršūnės – kalėjimo kameros, dvi viršūnės jungiamos jei jas jungia tiesus koridorius. Reikia rasti mažiausią skaičių sargybinių ($= \beta(G)$), kad jie galėtų vienu metu sekti visų kamerų duris.

Taikymai: N valdovių uždavinys

Kiek mažiausiai (ir kur) šachmatų lentoje reikia pastatyti valdovių (arba rikių, žirgų ir t.t.) taip, kad kiekvienas lentos langelis būtų kertamas.

Sprendžiant šį uždavinį ant standartinės 8×8 lentos, nagrinėjamas 64 viršūnių (viršūnė atitinka lentos langelį) grafas G. Tada viršūnė u jungiama briauna su viršūne v jeigu su pasirinkta figūra įmanoma patekti iš langelio u į langelį v.

Mažiausiosios dominuojančiosios aibės radimas grafui G šį uždavinį ir sprendžia.

Taikymai: Būtinosios paslaugos gyvenvietėms

Gyvenvietės sujungtos kelių tinklu. Šioms gyvenvietėms yra būtinos tam tikros paslaugos (mokyklos, ligoninės ir pan.), taip, kad šios būtinosios paslaugos būtų mažesniu nei c atstumu nuo gyvenvietės. Kadangi valstiečių-žaliųjų ir LSDP koalicija nėra burtininkai (o biudžetas ne bedugnis) jiems reikia liepti pastatyti ligonines, mokyklas ir pan. taip, kad būtų pastatytas mažiausias įmanomas jų skaičius.
Uždaviniui spręsti sudarome grafą, kurio viršūnės vaizduoja gyvenvietes ir viršūnes sujungiame briauna jei atstumas tarp gyvenviečių neviršija c. Viršūnės iš mažiausios dominuojančiosios aibės tada ir bus gyvenvietės laimėjusios ligoninę ar mokyklą.

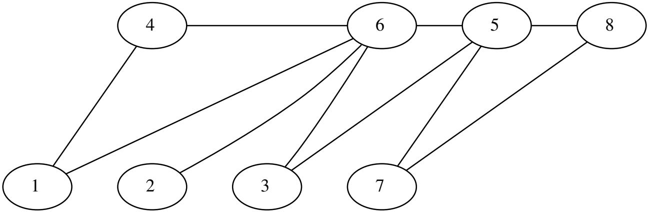
Viršūninio denginio skaičius

Grafo G viršūnių poaibį V' vadinsime *viršūniniu denginiu*, jei kiekviena grafo briauna yra incidentiška bent vienai aibės V' viršūnei.
Analogiškai dominuojančiajai aibei, viršūniniams denginiams yra apibrėžiamas *minimalusis viršūninis denginys* (joks tikrinis denginio poaibis nėra viršūninis denginys) ir *mažiausiasis viršūninis denginys* (denginys su mažiausiu elementų skaičiumi).

$$\beta_0(G) = |V'|$$

vadinsime viršūninio denginio skaičiumi, jei V' yra *mažiausiasis* viršūninis denginys.

Viršūnino denginio skaičius: Pavyzdys



Šio grafo denginiai yra $X_1 = \{4, 5, 6, 8\}$, $X_2 = \{4, 5, 6, 7\}$ ir $X_3 = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$. Matome, kad X_1 ir X_2 turi mažiausią skaičių elementų, tad

$$\beta_0(G) = |X_1| = |X_2| = 4$$

Teorema

Grafo G viršūnių poaibis A yra mažiausias denginys iff aibė $\overline{A} = V \setminus A$ didžiausioji G nepriklausomoji aibė. Vadinasi

$$\alpha(G) + \beta_0(G) = n$$

Čia $n = |V|$.

Papildomai: Nemaišyti!

Labai panašiai – dominuojančiąja viršūne (*angl.* dominator) – grafų teorijoje vadinamas visiškai kita, nesusijusi, viršūnės savybė kontrolės tėkmės grafuose (*angl.* control flow graph).
Ten sakoma, kad viršūnė a *dominuoja* viršūnę b (a yra viršūnės b dominuojančioji viršūnė), jeigu visi įmanomi keliai iš pasirinktos pradžios viršūnės s į viršūnę b eina per a.