5. Bulio algebra

Bulio algebra yra viena iš matematikos sričių, turinčių labai platų pritaikymą kompiuterių moksle, o ypač kompiuterių aparatūrinės įrangos srityje. Pradžią šiam mokslui davė anglų matematiko Džordžo Bulio (George Boole, 1815-1864) 1854 m. išleistas fundamentalus darbas “*Mąstymo dėsnių tyrimas”*. Šio mokslininko pavarde ir buvo pavadinta ši algebra.

Kompiuterinės įrangos srityje plačiausią pritaikymą turi viena iš Bulio algebros atšakų arba viena iš jos dalių – dvejetainė algebra. Šios šakos pagrindą sudaro sritis, susidedanti tik iš dviejų elementų aibės (paprastai šie elementai yra įvardijami kaip 0 ir 1). Jos svarbą praktiniame taikyme apsprendžia tai, kad absoliučios daugumos šiuo metu praktikoje naudojamų kompiuterių funkcionavimas grindžiamas dvejetaine sistema. Kompiuterių aparatūros vystymosi istorijoje būta bandymų konstruoti ir kitokiomis skaičiavimo sistemomis pagrįstus kompiuterius (pavyzdžiui, trejetaine), tačiau praktikoje šie bandymai nepasiteisino. Todėl dvejetainė skaičiavimo sistema (o tuo pačiu ir dvejetainė algebra) išliko absoliučiai dominuojanti kompiuterinės įrangos analizės ir sintezės srityje. Fizinės realizacijos aspektu tai paaiškinama labai paprastai: loginės reikšmės 0 ir 1 interpretuojamos kompiuteriuose paprastai – loginį 0 atitinka žemas įtampos lygis (artimas 0 V, “nėra įtampos”), o loginį 1 atitinka tam tikras įtampos lygis (apie +5 V, “yra įtampa”). Naudojant pavyzdžiui, trejetainę skaičiavimo sistemą jau prireiktų dviejų “nenulinės” įtampos lygių, kas reikštų būtinumą analizuoti šiuos lygius, o tuo pačiu ir kur kas sudėtingesnę techninę realizaciją.

5.1. Bulio algebra kaip algebrinė sistema

Bulio algebrą sudaro sistema

$$(B,\ \wedge,\ \vee,\ \bar{\ },\ 0,\ 1),\ \text{kur}$$

B yra aibė,

$\wedge$ ir $\vee$ yra dvivietės operacijos *konjunkcija* ir *disjunkcija* (toliau tekste vietoje simbolių $\wedge$ ir $\vee$ naudosime atitinkamai * ir +, nes toks žymėjimas yra labiau įprastas Bulio algebroje),

$\bar{\ }$ yra vienvietė operacija *neigimas*,

0 ir 1 yra atitinkamai *nulinis* ir *vienetinis* elementai.

Šioje sistemoje galioja aksiomos:

1. Egzistuoja bent du elementai $a,b \in B$, tokie, kad $a \neq b$.
2. Visiems $a,b \in B$ galioja:
   a) $a * b \in B$,

b) $a+b \in B$.

3. $\forall a, b \in B$ galioja:
   a) $a*b = b*a$ - komutatyvumo atžvilgiu operacijos * dėsnis,
   b) $a+b = b+a$ - komutatyvumo atžvilgiu operacijos + dėsnis.

4. a) $\exists 0 \in B$, toks, kad $a+0=a, \quad \forall a \in B$ – egzistuoja nulinis elementas 0, toks, kad kiekvienam *a* iš aibės B galioja $a+0=a$.
   b) $\exists 1 \in B$, toks, kad $a*1=a, \quad \forall a \in B$ – egzistuoja vienetinis elementas 1, toks, kad kiekvienam *a* iš aibės *B* galioja $a*1=a$.

5. $\forall a, b, c \in B$ galioja:
   a) $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$ - distributyvumo atžvilgiu operacijos "+" dėsnis,
   b) $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ - distributyvumo atžvilgiu operacijos "*" dėsnis.

6. $\forall a \in B \quad \exists \bar{a} \in B$ (*a* neigimas arba *a* inversija), toks, kad
   a) $a+\bar{a}=1$ - kintamojo neigimo egzistavimo dėsnis,
   b) $a*\bar{a}=0$ - kintamojo neigimo egzistavimo dėsnis.

Aukščiau pateikta aksiomų sistema yra ***suderinta*** (t.y. nei viena iš aukščiau pateiktų aksiomų rinkinio neprieštarauja kuriai nors kitai iš šio rinkinio) ir ***nepriklausoma*** (t.y. nė viena iš rinkinio aksiomų negali būti įrodoma kitų rinkinio aksiomų pagalba). Egzistuoja panašumas tarp šių aksiomų rinkinio ir įprastinės algebros aksiomų, tačiau pilnos analogijos nėra, pavyzdžiui, distributyvumo atžvilgiu operacijos "+" dėsnis, t.y. $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$ įprastinėje algebroje negalioja.

Nesunku pastebėti, kad aukščiau pateiktoje aksiomų sistemoje beveik visos aksiomos (t.y. 2 - 6) yra sugrupuotos poromis. Taip pat akivaizdu, kad kiekvienoje poroje viena aksioma gali būti gaunama iš kitos, sukeitus vietomis operacijas + ir *, bei 1 ir 0. Šis principas vadinamas ***dualumo principu***.

$$a+\bar{a}=1$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$a*\bar{a}=0$$

Pavyzdžiui,
(iš aksiomos 6 (a) gaunama jai duali 6 (b)).

Praktiniame Bulio algebros taikyme didžiulį vaidmenį vaidina Bulio išraiškų pertvarkymas. Panagrinėsime kai kurias Bulio algebros teoremas, plačiai naudojamas tokiuose pertvarkymuose.

1. $\boxed{\forall a \in B \quad a+a=a}$.

Įrodymas

$a+a=(a+a)*1$ - aksioma 4 (b)

$(a+a)*1=(a+a)*(a+\overline{a})$ - aksioma 6 (a)

$(a+a)*(a+\overline{a})=a+a*\overline{a}$ - aksioma 5 (a)

$a+a*\overline{a}=a+0$ - aksioma 6 (b)

$a+0=a$ - aksioma 4 (a).

Gavome, kad $a+a=a$.

Žemiau pateikiamos (be įrodymo) kitos plačiai pertvarkymuose naudojamos teoremos.

2. $\boxed{\forall a \in B \quad a*a=a}$ - ši teorema, o taip pat ir aukščiau pateikta 1-oji teorema, vadinamos ***vienodos galios*** (***idempotentiškumo***) dėsniu.
3. $\boxed{\forall a \in B \quad a+1=1}$ ir $\boxed{a*0=0}$ - veiksmai su nuliniu ir vienetiniu elementais.
4. $\boxed{\forall a,b \in B \quad a+a*b=a}$ ir $\boxed{a*(a+b)=a}$ - ***padengimo*** (***absorbcijos***) dėsnis.
5. $\boxed{\forall a \in B \quad \overline{\overline{a}}=a}$ - ***dvigubo neigimo*** (***involiucijos***) dėsnis.
6. $\boxed{\forall a,b \in B \quad \overline{(a+b)}=\overline{a}*\overline{b}}$ ir $\boxed{\overline{(a*b)}=\overline{a}+\overline{b}}$ - ***De Morgano teorema***.

5.2. Bulio funkcijos

Tegu $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ yra n-matis vektorius, kur kiekvienas x_i įgyja reikšmes iš aibės $\{0,1\}$. Bet kuri tokio vektoriaus X reikšmė yra vadinama ***atomu***, o visų galimų atomų aibė B_n sudaro Bulio funkcijos ***apibrėžimo sritį***. Akivaizdu, kad Bulio funkcijos apibrėžimo srities galia yra 2^n. Bulio funkcijos ***kitimo sritis*** yra aibė $\{0,1\}$. Atvaizdavimas iš atomų aibės B_n į aibę $\{0,1\}$ yra vadinamas ***Bulio funkcija***:

$$f: B_n \Rightarrow \{0,1\}.$$

Paprastai Bulio funkcija yra žymima $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, kur kintamieji $x_1,x_2,\ldots,x_n$ yra vadinami Bulio kintamaisiais. Jei Bulio funkciją atitinkantis atvaizdavimas suskaido aibę B_n į du poaibius B_n' ir B_n'', tokius, kad $f(\forall x_i \in B_n')=0$, o $f(\forall x_i \in B_n'')=1$, tai funkcija $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ yra vadinama ***pilnai apibrėžta***.

Jei atvaizdavimas suskaido aibę B_n į tris poaibius B_n', B_n'' ir B_n''', tokius, kad $f(\forall x_i \in B_n') = 0$, $f(\forall x_i \in B_n'') = 1$, o $f(\forall x_i \in B_n''') = d$, kur d – neapibrėžta reikšmė (nuo angliško žodžio ***D****on't care*), tai funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra vadinama ***nepilnai apibrėžta***.

Priklausomai nuo konkretaus praktinio pritaikymo tikslų, Bulio funkcijos (BF) yra atvaizduojamos skirtingais būdais. Plačiausiai paplitę praktikoje yra šie būdai:

a) teisingumo lentelės;
b) diagramos;
c) analitinės išraiškos;
d) grafinis būdas;
e) matricinis būdas.

Panagrinėsime detaliau kiekvieną iš šių būdų.

5.2.1. BF atvaizdavimas teisingumo lentelėmis

n kintamųjų Bulio funkcijos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ teisingumo lentelė yra sudaryta iš $(n+1)$ stulpelio ir 2^n eilučių:

- kiekvienas iš pirmųjų n stulpelių atitinka vieną pradinį kintamąjį;
- $(n+1)$ – asis stulpelis atitinka nagrinėjamos BF reikšmes;
- kiekviena eilutė atitinka vieną iš 2^n BF kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kombinacijų.

5.2.1 lentelėje pateiktos dviejų funkcijų a) $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ ir b) $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ teisingumo lentelės:

5.2.1 lentelė. BF $f_1(x_1, x_2)$ ir $f_2(x_1, x_2)$ teisingumo lentelės

a)

x_1	x_2	f_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b)

x_1	x_2	f_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jei nagrinėjamos kelios BF, priklausančios nuo tų pačių įėjimo kintamųjų, tada funkcijų užrašymo kompaktiškumo tikslu dviejų ar daugiau funkcijų teisingumo lentelių kairiosios dalys (atitinkančios įėjimo kintamuosius) yra sutapdinamos. Pavyzdžiui, BF $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ ir $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ galima užrašyti vienoje lentelėje (žr. 5.2.2 lentelė):

5.2.2 lentelė. BF $f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ ir $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ teisingumo lentelė

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Jei nagrinėjama funkcija yra nepilnai apibrėžta, tada jos teisingumo lentelėje funkcijos reikšmių stulpelyje yra ne tik reikšmės iš aibės $\{0, 1\}$ bet ir d, t.y. iš aibės $\{0, 1, d\}$.

5.2.2. BF atvaizdavimas diagramomis

Plačiausiai naudojamas diagramų, naudojamų BF atvaizdavimui, tipas yra ***Karno*** ir ***Veičo*** diagramos. Bet kuriuo iš šių dviejų būdų atvaizduojant n kintamųjų funkciją $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yra naudojama diagrama, turinti 2^n langelių. Dažniausiai naudojamas diagramų pavidalas – stačiakampės. Jei nagrinėjama BF turi n kintamųjų, tai diagrama turi turėti 2^n langelių, o pačios diagramos struktūra paprastai parenkama taip: skaičius n yra padalinamas maždaug pusiau, t.y. $n = p + q$, *čia* p ir q gali būti lygūs, bet nebūtinai. Pati diagrama yra konstruojama kaip stačiakampė struktūra, su kraštinėmis sudalintomis viena į 2^p dalių, kita į 2^q dalių. Skaičiaus n suskaidymas į dvi dalis p ir q ($n = p + q$) atitinka Bulio funkcijos kintamųjų aibės $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ suskaidymą į du poaibius $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ ir $\{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n\}$. Kiekvienas diagramos stulpelis (ir atitinkamai kiekviena eilutė) atitinka vieną kintamųjų kombinaciją. Pavyzdžiui, tegu turime 5 kintamųjų BF $f(x_1, x_2, \ldots, x_5)$. Įėjimo kintamųjų aibę $\{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$ suskaidysime į du poaibius: $\{x_1, x_2, x_3\}$ ir $\{x_4, x_5\}$. Tokiam suskaidymui atitinkanti BF atvaizduota 5.2.3 lentelėje.

5.2.3 lentelė. BF $f(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ diagrama

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
10								
11								

Tokios struktūros BF diagrama vadinama ***Karno*** diagrama. Jos (kaip ir kiekvienos kito tipo diagramos) kiekvienas langelis atitinka vieną įėjimo kintamųjų kombinaciją. Tuo pačiu tame langelyje diagramoje rašoma BF reikšmė, atitinkanti duotą įėjimo kintamųjų kombinaciją (iš aibės $\{0,1\}$ pilnai apibrėžtoms BF ir iš aibės $\{0,1,d\}$ – nepilnai apibrėžtoms BF). Pavyzdžiui, 5.2.4 lentelėje pateikta diagrama atvaizduoja penkių kintamųjų pilnai apibrėžtą BF. Stulpelio 000 ir eilutės 00 sankirtoje esantis 0 reiškia, kad prie įėjimo kintamųjų $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ kombinacijos 00000 nagrinėjamos BF reikšmė yra lygi 0. Analogiškai, stulpelio 000 ir eilutės 01 sankirtoje esantis 1 reiškia, kad prie įėjimo kintamųjų kombinacijos 00001 nagrinėjamos BF reikšmė yra lygi 1.

5.2.4 lentelė. Penkių kintamųjų BF Karno diagramos pavyzdys

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	0	0	1	1	1
01	1	0	0	1	1	1	0	0
11	0	1	0	1	0	1	1	1
10	1	1	0	0	0	0	1	0

BF ***Veičo*** diagrama skiriasi nuo aukščiau aprašytos Karno diagramos tik kintamųjų kombinacijų išsidėstymu diagramoje. Jei Veičo diagramoje stulpeliai ir eilutės žymimi dvejetainiais kodais, surašytais leksikografine tvarka, tai Karno diagramoje jie žymimi Grėjaus kodais. Pavyzdžiui, 5.2.5 lentelėje pateikta 5 kintamųjų BF Veičo diagrama, atitinkanti kintamųjų $\{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$ suskaidymą į du poaibius $\{x_1, x_2, x_3\}$ ir $\{x_4, x_5\}$:

5.2.5 lentelė. Penkių kintamųjų BF Veičo diagrama

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0	0	0	1	1	1	0	1
01	1	0	1	0	0	0	1	1
10	0	1	1	0	1	1	0	1
11	1	1	0	0	0	1	0	0

Bet kuriuo atveju (tiek Karno, tiek Veičo diagramų atveju) pusė diagramos langelių atitinka bet kurio kintamojo reikšmę, lygią 0, o kita pusė langelių - to paties kintamojo reikšmę, lygią 1. Pavyzdžiui, Karno diagramoje $\boldsymbol{x_1}$ **reikšmę 1** atitinka išryškinta diagramos dalis, pavaizduota 5.2.6 lentelėje:

5.2.6 lentelė. Karno diagrama su išryškinta sritimi, atitinkančia x_1=1

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	0	0	1	1	1
01	1	0	0	1	1	1	0	0
11	0	1	0	1	0	1	1	1
10	1	1	0	0	0	0	1	0

Atitinkamai, Karno diagramoje $\boldsymbol{x_3}$ **reikšmę 1** atitinka išryškinta diagramos dalis, pavaizduota 5.2.7 lentelėje:

5.2.7 lentelė. Karno diagrama su išryškinta sritimi, atitinkančia x_3=1

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	0	0	1	1	1
01	1	0	0	1	1	1	0	0
11	0	1	0	1	0	1	1	1
10	1	1	0	0	0	0	1	0

Veičo diagramose kintamųjų $\boldsymbol{x_1}$ **ir** $\boldsymbol{x_3}$ **reikšmes, lygias 1,** atitinka 5.2.8 a) ir 5.2.8 b) lentelėse pavaizduotos diagramų dalys.

Nesunku pastebėti, kad interpretuojant kintamųjų kombinacijas kaip dvejetainius skaičius, jų išsidėstymas diagramose yra:

1) Karno diagrama – iš eilės rašomi skaičiai atitinka Grėjaus kodo iš eilės einančias kombinacijas (pavyzdžiui, jei n = 3, tai kombinacijų reikšmės yra 0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4);
2) Veičo diagrama – kintamųjų reikšmių kombinacijos yra tiesiog iš eilės einantys skaičiai (pavyzdžiui, jei n = 3, tai kombinacijų reikšmės yra 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Toks skirtingas kombinacijų išsidėstymas yra svarbus tik tolimesniam diagramų panaudojimui BF minimizacijoje. Pačią diagramą yra paprasčiau sudaryti naudojant Veičo diagramos struktūrą, tačiau naudojant Karno diagramas yra šiek tiek patogiau atlikti BF minimizavimą.

5.2.8 lentelė. **Penkių kintamųjų BF Veičo diagramos**

a) išryškinta sritis,atitinkanti $x_1 = 1$

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0	0	0	1	1	1	0	1
01	1	0	1	0	0	0	1	1
10	0	1	1	0	1	1	0	1
11	1	1	0	0	0	1	0	0

b) išryškinta sritis, atitinkanti $x_3 = 1$

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0	0	0	1	1	1	0	1
01	1	0	1	0	0	0	1	1
10	0	1	1	0	1	1	0	1
11	1	1	0	0	0	1	0	0

Sudarant *n* kintamųjų BF Karno ir Veičo diagramas, galima vadovautis tokia procedūra:

1. *n kintamųjų aibė suskaidoma į du lygius arba apylygius poaibius* $n = p + q$
2. *Braižoma* $(2^p \times 2^q)$ *dydžio diagrama.*
3. *Naudojant Karno diagramos struktūrą, kintamųjų reikšmių kombinacijos yra išdėstomos kaip Grėjaus kodo skaičių dvejetainės išraiškos. Naudojant Veičo diagramos struktūrą, kintamųjų reikšmių kombinacijos yra išdėstomos kaip iš eilės einantys dvejetainiai skaičiai.*
4. *Atitinkamuose langeliuose įrašomos BF reikšmės.*

Galimi ir kiti Karno ir Veičo diagramų sudarymo būdai. Jau minėjome, kad bet kurioje diagramoje bet kurio kintamojo x_i atžvilgiu pusė diagramos langelių atitinka $x_i = 0$, o kita pusė - $x_i = 1$. Todėl galima traktuoti, kad bet kokio dydžio (bet kuriam kintamųjų skaičiui *n*) diagrama yra sudaroma, paimant stačiakampį ir nuosekliai jį dalinant į reikiamą skaičių dalių. Pavyzdžiui, jei turime tik vieną kintamąjį x_1, tai vieno kintamojo BF diagramą galima įsivaizduoti kaip stačiakampį, padalintą pusiau:

$x_1 = 0$	$x_1 = 1$

Įvedant dar vieną kintamąjį x_2, turimą stačiakampį (tiksliau, abi jo dalis) reikia padalinti dar į dvi dalis:

	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$x_2 = 0$		
$x_2 = 1$		

Įvedant dar vieną kintamąjį x_3, turimą diagramą reikia dar padvigubinti. Tas padvigubinimas gali būti atliktas dvejopai:

1)

		$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$		
	$x_2 = 1$		
$x_3 = 1$	$x_2 = 0$		
	$x_2 = 1$		

Šiuo atveju gavome Veičo diagramą.

2)

		$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$		
	$x_2 = 1$		
$x_3 = 1$	$x_2 = 1$		
	$x_2 = 0$		

Šiuo atveju gavome Karno diagramą.

Nesunku pastebėti, kad geometriškai dar vieno kintamojo įvedimas į Veičo diagramą reiškia esamos diagramos pakartojimą šalia kurios nors esamos diagramos kraštinės. Tuo tarpu dar vieno kintamojo įvedimas į Karno diagramą reiškia esamos diagramos pakartojimą kaip veidrodinį atspindį šalia kurios nors esamos diagramos kraštinės. Pavyzdžiui:

1) Veičo diagrama

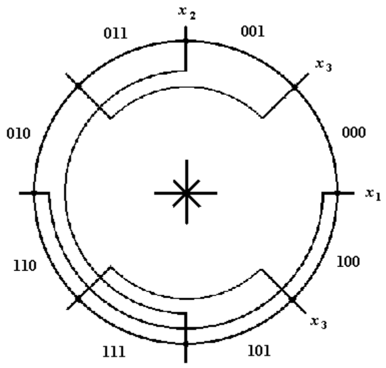
			$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
	$x_3 = 0$	$x_2 = 0$		
		$x_2 = 1$		
	$x_3 = 1$	$x_2 = 0$		
		$x_2 = 1$		

2) Karno diagrama

			$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
	$x_3 = 0$	$x_2 = 0$		
		$x_2 = 1$		
	$x_3 = 1$	$x_2 = 1$		
		$x_2 = 0$		

Dar vienas kartais naudojamas praktikoje diagramos BF atvaizdavimui tipas – apskritiminės diagramos. Kaip rodo pavadinimas, šio tipo BF vaizdavimo pagrindą sudaro apskritimas arba skritulys. Jei turime n kintamųjų BF, tai šiai BF atvaizduoti apskritimas yra padalinamas į 2^n segmentų, kiekvienas iš kurių ir atitinka vieną įėjimo kintamųjų kombinaciją. Šios kombinacijos paprastai išdėstomos tokioje diagramoje kaip nuosekliai einančios Grėjaus kodo skaičių sekos. Kaip ir bet kurioje kito tipo diagramoje, pusę iš 2^n diagramos segmentų atitinka kiekvieną kintamąjį, o likusioji pusė – to kintamojo inversiją.

Pavyzdžiui, trijų kintamųjų BF atvaizdavimui apskritiminės diagramos pagalba, gautume tokio tipo diagramą (žr. 5.2.1 pav.):



5.2.1 pav. Trijų kintamųjų BF apskritiminė diagrama

Įvairių BF atvaizdavimui naudojamų diagramų tipų palyginimui žemiau pateikiame penkių kintamųjų BF

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4} \wedge \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \vee$$
$$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \vee$$
$$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_4} \wedge x_5 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge x_5$$

atvaizdavimą Karno, Veičo ir apskritiminės diagramų pagalba:

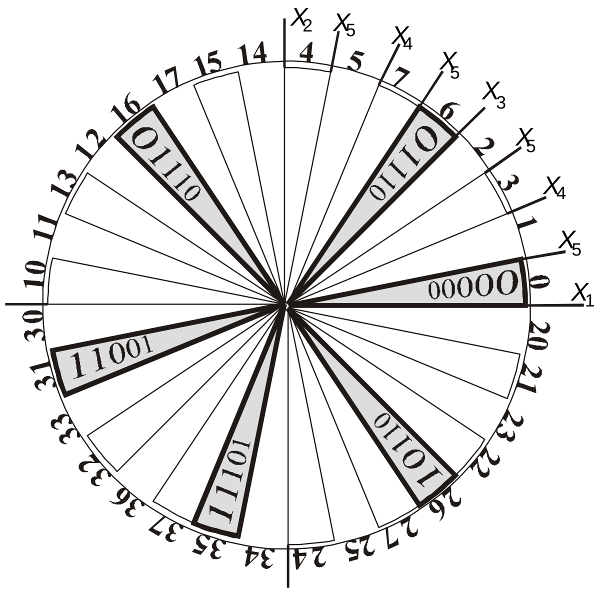
1) Karno diagrama:

$x_3x_4x_5$ \ x_1x_2	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	0	1	0	0	0
01	0	0	0	0	1	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	1	0	0	0

2) Veičo diagrama:

$x_3x_4x_5$ \ x_1x_2	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	0	0	0	0	0	1	0
01	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0
11	0	1	0	0	0	1	0	0

3) Apskritiminė diagrama (trumpumo dėlei diagramos segmentai, t.y. įėjimo kintamųjų kombinacijos yra pažymėti 8-ainiais Grėjaus kodo skaičiais):



5.2.3. Analitinis BF užrašymo būdas

Šiuo būdu Bulio funkcija yra atvaizduojama analitinės išraiškos pagalba, naudojant kintamuosius x_i bei $\wedge, \vee, \overline{\ }$ ir kitų operacijų ženklus.

Pavyzdžiui, $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_3$. BF užrašo supaprastinimui vietoje disjunkcijos ženklo toliau naudosime ženklą +, o konjunkciją vaizduosime kaip vienas šalia kito parašytus kintamuosius, t.y. pavyzdžiui, vietoje $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ naudosime $x_1\, x_2\, x_3$. Tuo būdu vietoje aukščiau užrašytos funkcijos $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_3$ naudosime paprastesnį užrašą $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\, x_2 + x_3$.

Viena ir ta pati BF analitiniu būdu gali būti atvaizduota nevienodai, todėl dažnai yra naudojami taip vadinami ***kanoniniai*** (arba standartizuoti) analitinio atvaizdavimo, kartais dar naudojama sąvoka ***normaliniai,*** būdai. Dažniausiai yra naudojami du normaliniai BF pavidalai: disjunktyvinis ir konjunktyvinis. Prieš plačiau aprašant šiuos pavidalus, apibrėšime ***termo***, ***mintermo*** ir ***makstermo*** sąvokas.

Termu yra vadinama *n* kintamųjų BF išraiška, sudaryta iš *m* ($m \leq n$) kintamųjų, apjungtų vienos iš operacijų "konjunkcija" arba "disjunkcija" ženklais.

n kintamųjų BF ***mintermu*** yra vadinamas termas, sudarytas iš *n* kintamųjų, apjungtų konjunkcijos operacijos ženklais, t.y. *n* kintamųjų konjunkcija.

n kintamųjų BF ***makstermu*** yra vadinamas termas, sudarytas iš *n* kintamųjų, apjungtų disjunkcijos operacijos ženklais, t.y. *n* kintamųjų disjunkcija.

(*Termo, mintermo ir makstermo apibrėžimuose naudojama sąvoka "kintamasis" yra suprantama kaip kintamasis tiesioginiame pavidale arba jo inversija* (*neigimas*)). *Sąvokų* ***mintermas ir makstermas*** *naudojimas yra pagrįstas tuo, kad mintermas iš visos BF įėjimo kintamųjų reikšmių erdvės išskiria tik vieną reikšmę (vieną iš visų galimų* 2^n *kintamųjų reikšmių*), *tuo tarpu makstermas iš visos n įėjimo kintamųjų reikšmių erdvės išskiria* $(2^n - 1)$ *reikšmes* (*iš visų galimų* 2^n *kintamųjų reikšmių*)

BF ***disjunktyvine normaline forma*** (***DNF***) yra vadinama nagrinėjamos BF kintamųjų konjunkcijų suma (disjunkcija).

BF ***konjunktyvine normaline forma*** (***KNF***) yra vadinama nagrinėjamos BF kintamųjų disjunkcijų loginė sandauga (konjunkcija).

BF ***tobula disjunktyvine normaline forma*** (***TDNF***) yra vadinama BF kintamųjų mintermų suma (disjunkcija).

BF ***tobula konjunktyvine normaline forma*** (***TKNF***) yra vadinama BF kintamųjų makstermų loginė sandauga (konjunkcija).

Kaip jau buvo minėta, viena ir ta pati BF gali turėti labai daug analitinių pavidalų. ***TDNF*** arba ***TKNF*** naudojimas turi tą privalumą, kad vienai ir tai pačiai funkcijai egzistuoja vienintelis ***TDNF*** arba ***TKNF*** pavidalas, tuo tarpu viena ir ta pati BF gali turėti labai įvairias ***DNF*** arba ***KNF***. Iš kitos pusės, ypač kai kalba eina apie techninę BF realizaciją, ekonomiškumo aspektu tikslinga turėti trumpiausią analitinę išraišką. ***TDNF*** arba ***TKNF*** beveik visada nėra pačios trumpiausios išraiškos. Todėl, pavyzdžiui, pradiniame BF sintezės etape, aprašant skaitmeninių įrenginių darbą ir pan., dažnai yra patogu naudoti ***TDNF*** arba ***TKNF***, o vėliau jos minimizuojamos į trumpesnes išraiškas (dažnai ***DNF*** arba ***KNF)***, kurių aparatūrinė realizacija yra pigesnė.

Pavyzdžiui, tegu turime BF

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 + \overline{x_1}\,x_2\,x_3 + x_1\,\overline{x_2}x_3 .$$

Kadangi nagrinėjamos BF DNF sudarantys termai yra mintermai, tai akivaizdu, kad turime TDNF. Ta pati nagrinėjama BF gali būti užrašyta ir taip:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_2}x_3$$

Akivaizdu, kad šis BF pavidalas yra kur kas trumpesnis už anksčiau nagrinėtą TDNF.

Kaip atskirą analitinės išraiškos modifikaciją galima taip pat nagrinėti BF užrašą, susidedantį iš ženklo $\sum$ ir po jo skliaustuose einančio nagrinėjamos funkcijos TDN formą sudarančių mintermų numerių sąrašo. Pavyzdžiui, ankstesniajame pavyzdyje pateiktos BF išraiška, užrašyta tokiame pavidale, yra:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,1,3,5) .$$

Toks BF pavidalas kartais yra vadinamas skaitmeniniu. Jis yra patogus trumpesniam BF užrašymui. Kartais, ypač kai BF kintamųjų skaičius yra didesnis, į TDNF įeinančių mintermų numeriams išreikšti yra patogu naudoti ir kitas skaičiavimo sistemas. Tuo atveju prie ženklo $\sum$ yra nurodoma, kokia skaičiavimo sistema yra naudojama mintermų numerių užrašams.

Pavyzdžiui, tegu turime BF

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2x_3\overline{x_4}$$

Šios BF ***skaitmeninis*** pavidalas gali būti pateikiamas taip (trys alternatyvūs variantai):

1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_2(0000, 0001, 0011, 0111, 1011, 1100, 1110)$;

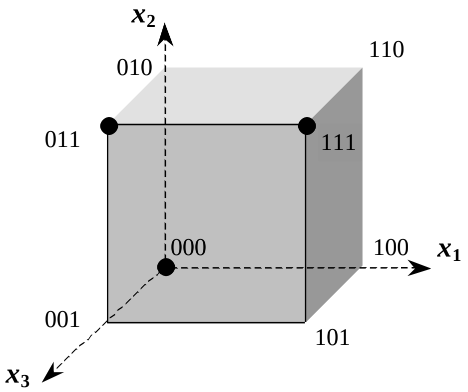
2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_8(0,1,3,7,13,14,16)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{10}(0,1,3,7,11,12,14)$.

5.2.4. Grafinis BF atvaizdavimo būdas

Šiuo būdu *n* kintamųjų Bulio funkcija yra atvaizduojama kaip *n*-mačio hiperkubo viršūnių aibės atvaizdavimas į aibę {0, 1}. Kiekviena įėjimo kintamųjų kombinacija atitinka vieną hiperkubo viršūnę. Taigi grafiniame BF atvaizdavime nagrinėjamos BF reikšmės yra pažymimos ties atitinkama hiperkubo viršūne. Pavyzdžiui, vienetinės BF reikšmės yra pažymimos taškais arba apskritimais ties atitinkamomis viršūnėmis.

Tegu turime 3 kintamųjų BF. Jos atvaizdavimui grafiniu būdu reikia panaudoti 3-matį kubą. Tegu nagrinėjama Bulio funkcija yra $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8(0,3,7)$. Jos grafinis atvaizdavimas parodytas 5.2.2 pav.:



5.2.2 pav. Grafinis $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8(0,3,7)$ atvaizdavimas

5.2.5. Matricinis BF atvaizdavimo būdas

Šiuo būdu Bulio funkcijos yra atvaizduojamos dvejetainių matricų pagalba. Jei turime *n* kintamųjų BF, tai jai atvaizduoti matriciniu būdu yra naudojama (*m x n*) matrica, kur *m* yra BF įėjimo kintamųjų kombinacijų, prie kurių nagrinėjama BF įgyja vienetines reikšmes, skaičius.

Pavyzdžiui, tegu turime BF

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

(skaitmeninis pavidalas

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_2(0000, 0001, 0011, 0111, 1011, 1100, 1110).$$

Šios funkcijos matricinis pavidalas yra: $$F = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0011 \\ 0111 \\ 1011 \\ 1100 \\ 1110 \end{pmatrix}.$$

Analogiškai matriciniu būdu galima atvaizduoti tą pačią funkciją, nurodant ne Bulio funkcijos vienetines reikšmes atitinkančių kintamųjų kombinacijų aibę, bet nulines reikšmes atitinkančių kintamųjų kombinacijų aibę. Tam, kad atskirti, kokios kombinacijos (atitinkančios 0 ar 1), yra pateikiamos matriciniame pavidale, yra naudojamos matricos, žymimos F^0 ir F^1. Aukščiau pateiktam pavyzdžiui matricos F^0 ir F^1 būtų:

$$F^1 = F = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0011 \\ 0111 \\ 1011 \\ 1100 \\ 1110 \end{pmatrix} \qquad F^0 = \begin{pmatrix} 0010 \\ 0100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1010 \\ 1101 \\ 1111 \end{pmatrix}.$$

Akivaizdu, kad turint pilnai apibrėžtą BF, abiejų matricų F^0 ir F^1 eilutės sudaro pilną galimų įėjimo kintamųjų reikšmių aibę, t.y. yra visos galimų kintamųjų reikšmių aibės suskaidymas. Kitaip tariant, matricos F^0 ir F^1 yra viena kita papildančios, o konkrečiai funkcijai apibrėžti pakanka nurodyti kurią nors vieną iš jų. Jeigu turime nepilnai apibrėžtą BF, tada šalia F^0 ir F^1 naudojama dar viena matrica F^d, kuri atitinka kintamųjų kombinacijas, prie kurių BF yra neapibrėžta. Šiuo atveju matricos F^0 ir F^1 ir F^d yra visos galimų kintamųjų reikšmių aibės suskaidymas, ir konkrečiai BF apibrėžti pakanka nurodyti kurias nors dvi iš šių trijų matricų.

Iki šiol nagrinėti visi BF atvaizdavimo būdai, lyginant juos su analitinėmis išraiškomis, atitiko BF atvaizdavimą TDNF. Kaip jau minėjome anksčiau, TDNF dažniausiai yra labai neekonomiška praktinės realizacijos prasme, todėl praktikoje dažnai yra naudojami įvairūs BF minimizacijos metodai, leidžiantys gauti kitas, trumpesnes BF išraiškas (dažnai – DNF pavidale). Šiek tiek modifikavus matricinį metodą, jo pagalba galima atvaizduoti ir BF, išreikštas DNF. Ši modifikacija susiveda į tai, kad vietoje dvejetainių matricų F^0 ir F^1 (arba F^0 ir F^1 ir F^d) yra naudojamos atitinkamos trejetainės matricos. Šiuo atveju vietoje matricos elementų 0 ir 1 yra naudojami elementai 0, 1 ir "-", kur elementas "-" reiškia, kad į nagrinėjamą termą šis kintamasis neįeina (dvejetainėse matricose F^0 ir F^1 ir F^d j-oji matricos eilutė atitinka pilną n kintamųjų konjunkciją, t.y. j-ąjį mintermą).

Pavyzdžiui, tegu turime pilnai apibrėžtą BF

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1 .$$

Šios funkcijos matricinis pavidalas yra: $F^1 = \begin{pmatrix} -00 \\ 0-1 \\ 011 \\ 110 \\ 1-- \end{pmatrix}.$

5.3. Bulio funkcijų minimizavimas

Aukščiau pateiktame pavyzdyje nagrinėtos funkcijos $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1$ išraiška gali būti pertvarkyta taip: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1 = x_1 + \overline{x_2} + x_3$.

Toks Bulio funkcijos pertvarkymo procesas, kurio pasėkoje gaunama paprastesnė BF išraiška, yra vadinamas ***Bulio funkcijų minimizavimu***. Jį galima atlikti įvairiais būdais. Vienas iš jų – Bulio funkcijos analitinės išraiškos pertvarkymas, pasinaudojant Bulio algebros dėsniais. Pavyzdžiui:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1 = \ldots$$

($\overline{x_2}\,\overline{x_3} = 1 \wedge (\overline{x_2}\,\overline{x_3}) = (\overline{x_1} + x_1) \wedge (\overline{x_2}\,\overline{x_3}) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

Panašiu būdu gauname, kad $\overline{x_1}x_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3$, bei $x_1 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$).

$$\ldots = \underbrace{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}}_{\overline{x_2}\,\overline{x_3}} + \underbrace{\overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3}_{\overline{x_1}x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 +$$

$$+ x_1x_2\overline{x_3} + \underbrace{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3}_{x_1} \ldots = \text{pasinaudojame dėsniu } a + a = a$$

$$= \overbrace{\underline{\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3}}^{m_0} + \overbrace{\underline{\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3}}^{m_1} + \overbrace{\overline{x}_1 x_2 x_3}^{m_3} + \overbrace{\underline{x_1\overline{x}_2\,\overline{x}_3}}^{m_4} + \overbrace{\underline{x_1\overline{x}_2 x_3}}^{m_5} + \overbrace{x_1 x_2\overline{x}_3}^{m_6} + \overbrace{x_1 x_2 x_3}^{m_7}\ .$$

Tokiu būdu vietoje pradinės išraiškos gavome TDNF. Tolimesnis išraiškos pertvarkymas galimas vėl įvairiais būdais. Panagrinėsime bent porą iš jų.

Pirmasis remiasi narių gautoje išraiškoje grupavimu ir bendrų dalių iškėlimu prieš skliaustus. Pavyzdžiui, sugrupavus ankstesnės išraiškos pabrauktus mintermus ir iškėlus prieš skliaustus $\overline{x}_2$, gauname:

$$\underline{\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3} + \underline{\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3} + \underline{x_1\overline{x}_2\,\overline{x}_3} + \underline{x_1\overline{x}_2 x_3} = \overline{x}_2(\overline{x}_1\,\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_3 + x_1\overline{x}_3 + x_1 x_3) = \overline{x}_2$$

nes skliaustuose esantys nariai duoda loginį vienetą (grupavimas, iškėlimas prieš skliaustus ir dėsnis $x + \overline{x} = 1$). Analogiškai paskutinių keturių mintermų $(m_4 \div m_7)$ suma duoda reikšmę x_1 (čia taip pat naudojamės dėsniu, kad $a = a + a$, tai leidžia panaudoti mintermus m_4 ir m_5 po du kartus – vieną kartą kaip įeinančius į pirmąją keturių mintermų sumą, ko pasėkoje gauname $\overline{x}_2$, o antrą kartą – kaip įeinančius į antrąją keturių mintermų sumą, ko pasėkoje gauname x_1). Mintermų m_1, m_3, m_5 ir m_7 suma duoda x_3. To rezultate ir gauname:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2\,\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2\overline{x}_3 + x_1 =$$

$$= \overbrace{\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3}^{m_0} + \overbrace{\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3}^{m_1} + \overbrace{\overline{x}_1 x_2 x_3}^{m_3} + \overbrace{x_1\overline{x}_2\,\overline{x}_3}^{m_4} + \overbrace{x_1\overline{x}_2 x_3}^{m_5} + \overbrace{x_1 x_2\overline{x}_3}^{m_6} + \overbrace{x_1 x_2 x_3}^{m_7} =$$

$$= \underbrace{m_0 + m_1 + m_4 + m_5}_{x_1} + \underbrace{m_4 + m_5 + m_6 + m_7}_{\overline{x}_2} + \underbrace{m_1 + m_3 + m_5 + m_7}_{x_3} = x_1 + \overline{x}_2 + x_3.$$

Antrasis minimizuojamos funkcijos tarpinės išraiškos (TDNF) pertvarkymo būdas remiasi tuo, kad pilnai apibrėžta funkcija yra galimos įėjimo kintamųjų reikšmių aibės suskaidymas į du poaibius: vieną, prie kurio funkcijos reikšmės yra lygios 1, ir antrą, prie kurio funkcijos reikšmės yra lygios 0. Bulio funkcijos tobulą disjunktyvinę normalinę formą sudarantys mintermai atitinka pirmąjį tokį poaibį, t.y. poaibį, prie kurio funkcijos reikšmės yra lygios 1. Jeigu disjunkcijos pagalba apjungsime mintermus, įeinančius į antrąjį poaibį, tai gausime funkciją f^p, priešingą duotajai *f*, t.y. tokią, kuri įgyja reikšmes, lygias 1, prie tų įėjimo kintamųjų kombinacijų, prie kurių pradinė funkcija lygi 0, ir atvirkščiai. Akivaizdu, kad trijų kintamųjų funkcijai visų galimų įėjimo kintamųjų reikšmių aibę nusako mintermai $M = \{m_0, m_1, \ldots, m_7\}$, t.y. m_0 atitinka įėjimo kintamųjų x_1, x_2, x_3 reikšmių kombinaciją 000; m_1 atitinka įėjimo kintamųjų x_1, x_2, x_3 reikšmių kombinaciją 001, ir t.t. Jei į funkcijos TDNF įeinantys mintermai sudaro aibę M_1, tai

$$M = M_1 \cup M_0$$

kur M_0 –poaibis mintermų, atitinkančių BF kintamųjų reikšmių kombinacijas, prie kurių funkcija lygi 0. Todėl, jei funkcijos TDNF apibrėšime kaip

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_i \in M_1} m_i$$

tai jai priešingos funkcijos $f^p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tobulą disjunktyvinę normalinę formą galima išreikšti taip:

$$f^p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_i \in M \setminus M_1} m_i$$

čia $M \setminus M_1$ - aibių M ir M_1 skirtumas.

Todėl aukščiau nagrinėto pavyzdžio funkciją galima išreikšti ir kitaip:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1 =$$

$$= \overbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}}^{m_0} + \overbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3}^{m_1} + \overbrace{\overline{x_1}x_2x_3}^{m_3} + \overbrace{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}}^{m_4} + \overbrace{x_1\overline{x_2}x_3}^{m_5} + \overbrace{x_1x_2\overline{x_3}}^{m_6} + \overbrace{x_1x_2x_3}^{m_7} =$$

$$= \overline{f^p}(x_1, x_2, x_3) = \overline{m_2} = \overline{(\overline{x_1}x_2\overline{x_3})} = x_1 + \overline{x_2} + x_3 \text{ (pagal De Morgano dėsnį).}$$

Analitinis būdas BF minimizavimui naudojamas gana retai ir tiktai kaip pagalbinis metodas, nes reikalauja gana daug darbo sąnaudų. Kur kas plačiau praktikoje yra naudojami kiti metodai. Bene efektyviausiai (bent jau rankiniu būdu) BF yra minimizuojamos naudojant diagramų metodą. Panagrinėsime BF Karno diagramų panaudojimą minimizavimui.

Tegu turime nagrinėjamos funkcijos

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1 =$$

$$+ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$$

Karno diagramą:

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Karno diagramos panaudojimas BF atvaizdavimui turi savybę, kad 2, 4, 8, …, 2^n nagrinėjamos BF mintermus atitinkantys diagramos vienetai, esantys greta, gali būti apjungti į vieną junginį ir atitinkamai funkcijos disjunktyvinėje normalinėje formoje gali būti atvaizduoti vienu termu. Pavyzdžiui, du vienetai, esantys išryškintoje diagramos srityje žemiau ir atitinkantys mintermus $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ ir $\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3$ gali būti apjungti į vieną

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	**1**	**1**	1	0
1	1	1	1	1

junginį ir atvaizduoti disjunktyvinėje normalinėje formoje kaip termas $\overline{x}_1\,\overline{x}_2$. Tuo pačiu vietoje nagrinėjamos funkcijos tobuloje disjunktyvinėje normalinėje formoje esančių dviejų mintermų $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ ir $\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3$ sumos turime atitinkantį tuos du mintermus termą $\overline{x}_1\,\overline{x}_2$:

TDNF *DNF*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ldots + \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 + \overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3) = \ldots + \overline{x}_2\,\overline{x}_3 + \ldots$$

Toks funkcijos užrašo sutrumpinimo procesas, pasinaudojant diagramoje greta esančių vienetų savybe, atitinka dviejų mintermų $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ ir $\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3$ grupavimą, bendros dalies $\overline{x}_1\,\overline{x}_2$ iškėlimą prieš skliaustus ir dėsnio $(\overline{x}_3 + x_3 = 1)$ pritaikymą.

Analogiškai galima apjungti ir keturis šalia esančius vienetus. Išryškintoje srityje

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	**1**	**1**	1	0
1	**1**	**1**	1	1

$\overline{x}_2$

esantys vienetai, atitinkantys mintermus $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3$, $\overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3$, $x_1\overline{x}_2\,\overline{x}_3$ ir $x_1\overline{x}_2 x_3$ duoda termą $\overline{x}_2$. Analogiškai:

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	**1**	**1**	**1**	**1**

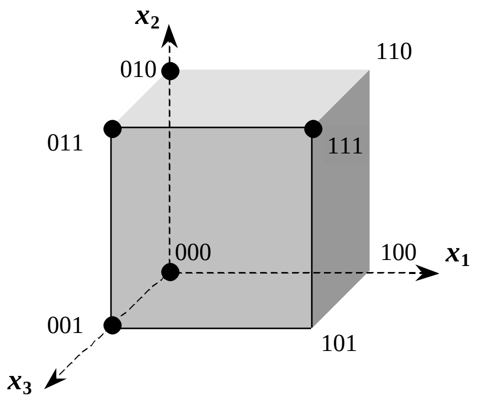
x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	**1**	**1**	0
1	1	**1**	**1**	1

ζ_3

Tokiu būdu pastarųjų trijų junginių pagalba yra padengiami visi pradinės BF vienetai ir turime minimizuotą BF pavidalą:

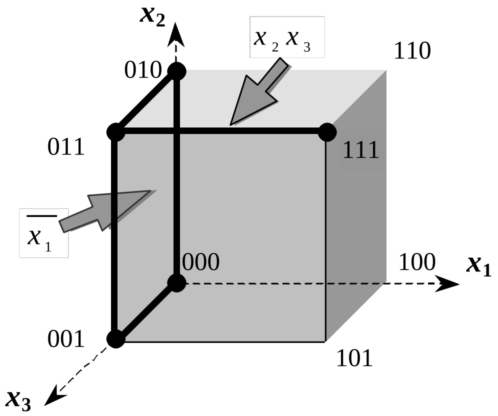
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1 =$$
$$+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3 = x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

Panagrinėsime grafinio BF atvaizdavimo panaudojimą BF minimizacijai. Tegu turime 3 kintamųjų BF $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8 (0,1,2,3,7)$. Jos grafinis atvaizdavimas yra:



5.3.1 pav. BF $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8 (0,1,2,3,7)$ grafinis atvaizdavimas

Bulio funkcijos grafiniame atvaizdavime tiesės atkarpos (arba plokštumos), apribotos hiperkubo viršūnėmis, atitinkančiomis BF reikšmes, lygias vienetui, sudaro junginius, kurie gali būti atvaizduoti vienu termu. Pavyzdžiui, tiesės atkarpa, apribota vienetiniais taškais 011 ir 111 gali būti apjungta į vieną junginį, atitinkantį termą $x_2 x_3$, o plokštumos dalis, apribota taškais 000, 001, 010 ir 011, sudaro junginį $\overline{x_1}$ (žr. 5.3.2 pav.).



5.3.2 pav. BF $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8 (0,1,2,3,7) = \overline{x_1} + x_2 x_3$ minimizavimo grafinis atvaizdavimas

Tokiu būdu, nagrinėjama funkcija minimizuotame pavidale gali būti atvaizduota kaip šių dviejų termų disjunkcija:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_8 (0,1,2,3,7) = \overline{x_1} + x_2 x_3$$

Bulio funkcijos vaidina svarbų vaidmenį skaitmeninių įrenginių analizėje ir sintezėje. Praktikoje sutinkami uždaviniai paprastai pasižymi didele apimtimi, todėl yra naudojamos automatizuotos priemonės, tame tarpe BF minimizavimas kompiuterinėmis priemonėmis. Konkrečios kompiuterinės programos šiam uždaviniui spręsti paprastai naudoja kitus BF minimizavimo metodus ir algoritmus, kurie yra orientuoti į BF atvaizdavimą kompiuteriuose, įvertina naudojamos techninės įrangos specifiką ir tuo pačiu leidžia efektyviai spręsti didelės apimties uždavinius.