

2.18. Grafo viršūnių laipsnių sekos

Paragrafe 2.2 apibrėžėme viršūnės v laipsnį $\rho(v)$ ir grafo viršūnių laipsnių seką $\rho = \rho(v_1), \rho(v_2), \dots, \rho(v_n)$. Čia plačiau panagrinėsime kokias grafo savybes nusako jo viršūnių laipsnių seka, ką bendro turi grafai, turintys vienodas viršūnių laipsnių sekas, kaip sukonstruoti grafą pagal duotą viršūnių laipsnių seką, ir turintį vienokias ar kitokias savybes.

2.18.1. Grafinės sekos

Išveskime keletą apibrėžimų.

Sveikų neneigiamų skaičių seką d_1, d_2, \dots, d_n vadinsime ***n-seka*** ir žymėsime d . Jei egzistuoja grafas su viršūnių laipsnių seka ρ , sutampančia su n -seka d , tai šią n -seką vadinsime ***grafine n-seka***, o ją atitinkantį grafą – ***sekos d realizacija***. n -seką vadinsime ***taisyklinga n-seka***, jei tenkinamos dvi sąlygos:

$$1) \quad n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n,$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^n d_i \text{ – lyginis skaičius.}$$

Grafinė n -seka yra taisyklinga.

Kartais d -seką patogiau užrašyti taip: $d = (c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_p^{k_p})$, kur c_i – tarpusavyje skirtingi skaičiai, o laipsnio rodiklis nurodo, kiek kartų skaičius c_i kartojasi sekoje d . Pavyzdžiui, $d = (5, 2^2, 1^6) = (5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Bendru atveju grafinė seka turi daug realizacijų ir nustatyti jų skaičių yra sunku. Pavyzdžiui, grafinė n -seka $d = (2^4, 1^4)$ turi penkias realizacijas (žr. 2.18.1 pav.). Čia

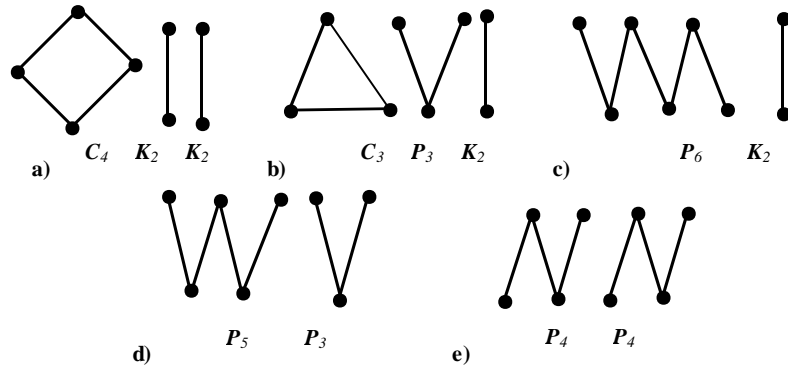
C_n – n -viršūninis paprastas ciklas,

K_n – n -viršūninis pilnas grafas,

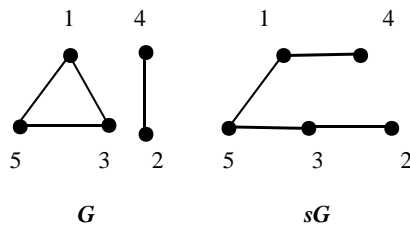
P_n – n -viršūninė paprastoji grandis.

Galime nustatyti ryšį tarp kelių tos pačios grafinės sekos realizacijų. Išveskime ***perjungimo*** sąvoką. Tegul duotas grafas $G=(V, U)$, $a, b, c, d \in V$, $(a, b), (c, d) \in U$. Viršūnės a ir c , bei b ir d tarpusavyje briaunomis nesujungtos. Tada sakome, kad grafe G galimas ***perjungimas*** $s=(ab, cd)$, kurį atlikus gaunamas grafas $sG = G-(a, b)-(c, d)+(a, c)+(b, d)$. Pavyzdžiui, 2.18.2 pav. parodyti grafai G ir sG , kur $s=((1, 3), (4, 2))$.

Akivaizdu, kad perjungimas nekeičia grafo viršūnių laipsnių sekos. Perjungimo prasmę nusako žemiau pateikta teorema.



2.18.1 pav. Penkios grafinės n -sekos $d = (2^4, 1^4)$ realizacijos



2.18.2 pav. Grafas G ir po perjungimo $s=((1,3),(4,2))$ gautas grafas sG .

Teorema. Bet kuri grafinės sekos realizacija gaunama iš bet kurios kitos tos grafinės sekos realizacijos atlikus atitinkamą perjungimų seką.

Šios teoremos įrodymas remiasi tokia lema.

Lema. Tarkime G – grafas, kurio viršūnės sunumeruotos skaičiais $1, 2, \dots, n$ taip, kad viršūnių laipsniai sudaro nedidėjančią seką $d_i, i = \overline{1, n}$, tai yra $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $\rho(i) = d_i, d_i \geq d_{i+1}, i = \overline{1, n-1}$. Tada bet kuriai grafo viršūnei i egzistuoja tokia perjungimų s_1, s_2, \dots, s_t seka, kad grafo $H = s_1, s_2, \dots, s_t G$ viršūnės i gretimų viršūnių aibė $N_H(i)$ sutampa su sekos $d_i, i = \overline{1, n}$ didžiausio laipsnio viršūnių aibe, t.y. $N_H(i) = \begin{cases} \{1, 2, \dots, d_i\}, & \text{jei } i > d_i, \\ \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, d_i+1\}, & \text{jei } i \leq d_i \end{cases}$

Kartais, nors ir retai, grafą vienareikšmiškai nusako jo viršūnių laipsnių seka. Jeigu visos grafinės sekos realizacijos yra izomorfiniai grafai, tai ši grafinė seka vadinama **unigrafine seka**, o jos realizacija – **unigrafu**. Pavyzdžiui, paprastasis ciklas C_5 yra unigrafas.

2.18.2. Grafinės sekos kriterijai

Jau minėjome, kad grafinę seką visada galima laikyti taisyklinga n -seka. Tačiau atvirkštinis teiginys nėra teisingas – n -sekos taisyklingumas yra būtina, bet nepakankama sąlyga, kad n -seka būtų grafinė. Pavyzdžiui, seka $(3^2, 1^2)$ nėra grafinė seka.

Havelo – Chakimi kriterijus. Tegul d – taisyklinga n -seka, $n > 1$. Pažymėkime c^i , $i = \overline{1, n}$ ($n-1$)-seką, gautą iš n -sekos d išbraukus i -ąjį narį:

$$c^i = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad c_k = \begin{cases} d_k, & \text{jei } k < i, \\ d_{k+1}, & \text{jei } k \geq i. \end{cases}$$

Iš sekos c^i gaukime seką d^i sumažindami vienetu pirmuosius d^i narius, t.y.

$$d^i = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1}), \quad f_k = \begin{cases} c_k - 1, & \text{jei } k \leq d_i, \\ c_k, & \text{jei } k > d_i. \end{cases}$$

Tada d^i vadinsime *išvestine seka*.

Pavyzdžiui, jeigu $d = (3, 3, 1, 1)$, tai $d^1 = d^2 = (2, 0, 0)$,
 $d^3 = d^4 = (2, 3, 1)$.

Teorema. (Havelas V. 1955 Chakimi S. 1962). Tegul d – taisyklinga n -seka ($n > 1$). Jeigu kuriam tai indeksui i , $i = \overline{1, n}$, išvestinė seka d^i yra grafinė seka, tai ir d seka yra grafinė seka. Jei seka d yra grafinė seka, tai ir kiekviena išvestinė seka d^i ($i = \overline{1, n}$) yra grafinė seka.

Erdeš – Gallai kriterijus. Šį grafinės sekos kriterijų nusako tokia teorema.

Teorema. (Erdeš P. Gallai T. 1960). Taisyklinga n -seka yra grafinė tada ir tik tada, kai kiekvienam $k = \overline{1, n-1}$ teisinga nelygybė

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}.$$

Įrodyta, kad jei ši nelygybė galioja kai $k = \overline{1, k(d)}$, čia $k(d) = \max\{i : d_i \geq i\}$, tai ji galioja ir visoms likusioms k reikšmėms. Tai supaprastina Erdeš – Gallai kriterijaus taikymą n -sekos testavimui.

2.18.3. Grafinės sekos realizacijos algoritmas

Aprašytasis Havelo –Chakimi kriterijus leidžia atpažinti, ar duotoji taisyklinga n -seka yra grafinė ir rasti vieną iš sekos realizacijų. Pavadinkime šį algoritmą *I*-procedūra.

Duota: d – taisyklinga n -seka, t.y.

$$n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n,$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m \quad \text{lyginis skaičius.}$$

Rasti: d sekos grafinę realizaciją arba įsitikinti, kad ši seka tokios realizacijos neturi.

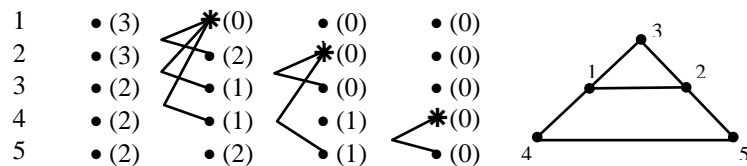
Tegul: $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – būsimo grafo viršūnių aibė, kur kiekvienai aibės viršūnei v ($v = 1, n$) skirta atitinkama $d(v)$ reikšmė,

$S(v)$ – viršūnių V poaibis, sudarytas iš tų viršūnių $u \neq v$, kurioms $d(u) > 0$ reikšmės yra maksimalios. Aibės $S(v)$ elementų skaičius yra lygus $d(v)$ ir, bendru atveju ši aibė nusakoma nevienareikšmiškai.

Taigi I -procedūros eilinis žingsnis būtų toks:

- 1) fiksuoti bet kurią viršūnę v , kuriai $d(v) > 0$ (viršūnė v vadinama vedančiąja viršūne);
- 2) sudaryti vieną iš galimų aibių $S(v)$;
- 3) vedančiąją viršūnę v sujungti briaunomis su visomis aibės $S(v)$ viršūnėmis;
- 4) pakeisti d reikšmes vedančiajai viršūnei v ir kiekvienai aibės $S(v)$ viršūnei u , nustatant $d(v) = 0$ ir $d(u) = d(u) - 1$. Jei vykdant šį žingsnį kuri nors d reikšmė tampa neigiama, reiškia seka neturi grafinės realizacijos.

Pavyzdys. Pritaikykime I -procedūrą tokiai n -secai $d = (3^2, 2^3)$. 2.18.3 pav. kiekvienas stulpelis vaizduoja vieną I -procedūros žingsnį, parenkantį vedančiąją viršūnę (pažymėta žvaigždute), jai pavaldžiųjų viršūnių aibę $S(v)$ ir kiekvienos viršūnės d reikšmės kitimą (pažymėta skliausteliuose). Čia vedančiosios viršūnės – $\{1, 2, 4\}$ ir $S(1) = \{2, 3, 4\}$, $S(2) = \{5, 3\}$, $S(4) = \{5\}$.



2.18.3 pav. Grafinė sekos $d = (3^2, 2^3)$ realizacija taikant I -procedūrą

2.18.4. Maksimaliai jungi grafinės sekos realizacija

Maksimaliai jungi grafinės sekos realizacija, yra tas grafas iš visų galimų grafinių realizacijų, kuriame briauninio jungumo skaičius $\lambda(G)$ yra maksimalus.

Tegul d – taisyklinga grafinė n -seka. Kadangi bet kuriam grafui G galioja nelygybė $\lambda(G) \leq \delta(G)$ (kur $\delta(G)$ – minimalus grafo viršūnių laipsnis), stengsimės rasti grafinę realizaciją, kurioje $\lambda(G) = d_n$.

Pradžioje stengsimės sudaryti jungiąją grafinės sekos realizaciją.

Teorema. Taisyklinga grafinė seka gali būti realizuota jungiuoju grafu

tada ir tik tada, kai $d_n > 0$ ir teisinga nelygybė $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2(n-1)$. Jeigu

tenkinamos šios sąlygos l -procedūra, kiekviename žingsnyje vedančiąja viršūne parinkdama viršūnę su minimalia teigiama d reikšme, sukonstruos jungųjį grafą.

Pastaba. Kai $d_n > 1$ teoremos nelygybė tenkinama automatiškai.

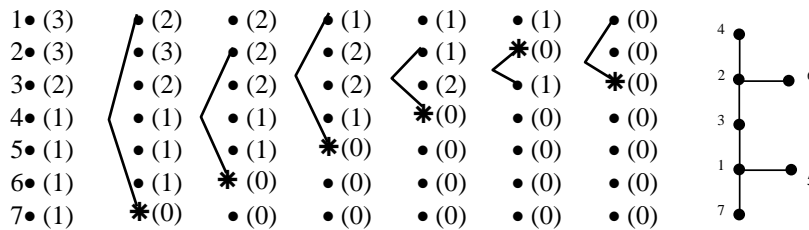
Teorema. n -seka d gali būti realizuota medžiu tada ir tik tada, kada ji

neturi nulinių reikšmių ir galioja lygybė $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$. Modifikuota l -procedūra, pavadinkime ją lm -procedūra, kiekviename žingsnyje vedančiąja viršūne parinkdama viršūnę su minimalia teigiama d reikšme, sukonstruos grafą – medį.

Pavyzdžiui, seka $d = (3^2, 2, 1^4)$ tenkina teoremoje pateiktą lygybę

$\sum_{i=1}^7 d_i = 2 \cdot (7-1)$ įstačius d reikšmes gauname $3+3+2+1+1+1+1=12$. Taigi,

seka gali būti realizuota medžiu. Tai atliekančios lm -procedūros žingsniai ir sukonstruotas medis pavaizduoti 2.18.4 pav. Čia minimalios teigiamos d reikšmės paieška vykdoma einant nuo sekos d pabaigos į jos pradžią.



2.18.4 pav. lm -procedūra konstruojanti medį iš sekos $d = (3^2, 2, 1^4)$

Pateikta teorema leidžia atpažinti, ar duotosios taisyklingos n -sekos realizacija gali būti medis ir modifikuoti I -procedūrą šio medžio konstravimui. Šį algoritmą pavadiname **lm**-procedūra.

Tegul d – taisyklinga n -seka,

$V = \{1, 2, \dots, n\}$ – būsimo grafo viršūnių aibė, kur kiekvienai aibės viršūnei v ($v = \overline{1, n}$) skirta atitinkama $d(v)$ reikšmė,

$ved_v \in V$ – vedančiųjų viršūnių aibė $|ved_v| = n-1$, t.y. algoritmo vykdymo eigoje parenkama viršūnė, turinti einamuoju momentu mažiausią d reikšmę, ir jungiama su kita viršūne (pavaldžiąja), einamuoju momentu turinčia didžiausią reikšmę sekoje d ; algoritmo eigoje d sekos reikšmės kinta: parinkus vedančiąją ir jai pavaldžiąją viršūnes jų abiejų d reikšmės sumažinamos vienetu; kadangi einamuoju momentu sekoje d gali būti kelios minimalios reikšmės, renkant vedančiąją viršūnę, ir kelios maksimalios reikšmės, renkant pavaldžiąją viršūnę, sekos grafinė realizacija – medis nėra nusakomas vienareikšmiškai;

$pav_v \in V$ – pavaldžių viršūnių aibė $|pav_v| = n-1$, kiekvienai vedančiajai viršūnei iš aibės ved_v parinkta pavaldžioji viršūnė įrašoma į aibę pav_v .

$seka$ – kintamasis, įgaunantis reikšmes *TRUE*, jei galioja teoremos sąlygos $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ ir $d_n > 0$, arba *FALSE* priešingu atveju, kas reiškia, kad

pagal duotąją seką negali būti sukonstruotas medis.

type mas = array [1..100] of integer;

procedure lm (n: integer; d: mas; var ved_v, pav_v: mas; var seka: BOOLEAN);

var i, j, sum, max, min, w: integer;

begin

sum := 0;

if d[n] <> 0 then

begin

for i := 1 to n do

sum := sum + d[i];

*if sum = 2 * (n-1)*

then

begin

seka := TRUE;

for w := 1 to n-1 do

begin

{parinksime vedančiąją viršūnę su min d[i] <> 0, (minimalios d reikšmės pradėkime ieškoti nuo sekos d pabaigos, kur ir yra mažiausios d reikšmės)}

min := n; j := 0;

```

for i:=n downto 1 do
  if(d[i]<min)and(d[i]<>0)
    then begin min:=d[i]; j:=i end;
  ved_v[w]:=j;
  d[j]:=d[j]-1;
  {parinksime pavaldžią viršūnę su max d[i]}
  max:=0; j:=0;
  for i:=1 to n do
    if d[i]>max
      then begin max:= d[i]; j:=i end;
  pav_v[w]:=j;
  d[j]:=d[j]-1;
end;
end
else seka:=FALSE
end
else seka:=FALSE;
end;

```

2.18.5. Hamiltono grafo konstravimas pagal grafinę seką

Teorema. (Tshangfeizen V. 1978) Jei egzistuoja taisyklingos n -sekos realizacija d turinti Hamiltono grandinę prasidedančią d_i laipsnio viršūnėje, tai tokį grafą realizuos taip modifikuota l -procedūra (pavadinkime ją lh -procedūra): pirmame žingsnyje vedančiąją viršūnę imama d_i laipsnio viršūnė, o kiekviename sekančiame žingsnyje viršūnė, turinti mažiausią teigiamą d reikšmę iš aibės $S(v)$, kur v -vedančioji priešbuvusio žingsnio viršūnė, o $S(v)$ -viršūnei v pavaldžių viršūnių aibė.

Teorema. (Tshangfeizen V. 1978) Kad taisyklingos n -sekos d realizacija būtų grafas, turintis Hamiltono ciklą, turi būti tenkinamos tokios dvi sąlygos:

- 1) $d_i > 1, i = \overline{1, n}$;
- 2) seka d gali būti realizuota Hamiltono grandine, prasidedančia d_1 laipsnio viršūnėje.

Paveiksle 2.18.5 pav. parodyta sekos $d = (3^2, 2^4)$ realizacija Hamiltono grafu, lh procedūroje pirmąją vedančiąją viršūnę parinkus pirmąją viršūnę. Gauta Hamiltono grandinė: 1, 4, 2, 5, 6, 3, kurią sudaro vedančiųjų viršūnių aibė $\{1, 4, 2, 5, 6\}$ ir paskutinei vedančiajai viršūnei pavaldi viršūnė $S(6)=3$. Kadangi ši viršūnė yra ir pirmajai vedančiajai viršūnei (pradinei grandies viršūnei) pavaldžių viršūnių aibėje $S(1)=\{2, 3, 4\}$, gautoji realizacija turi ir Hamiltono ciklą: 1, 4, 2, 5, 6, 3, 1.

