

Grafų teorijos egzamino užduočių pavyzdžiai

1. Vasarą Jonukas atostogavo skautų stovykloje, kur jo pamainoje iš viso atostogavo 53 skautai. Pamainos pabaigoje kai kurios skautų poros apsikeitė adresais. Pasirodė, kad kiekvienas skautas gavo ne mažiau nei 26 adresus. Po kurio laiko Jonukui prisireikė Petriuko, su kuriuo jis neapsikeitė adresais, adreso. Parodykite, kad Jonukas gali gauti Petriuko adresą, t.y. egzistuoja skautų eilė, prasidedanti Jonuku ir užsibaigianti Petriuku, kurioje kiekviena kaimynų pora apsikeitė adresais. Šią užduotį suformuluoti grafų teorijos terminais ir išspręsti. Be to, apibendrinti gautą rezultatą bet kokios eilės grafui.
2. Seimas turi 10 komitetų, posėdžiaujančių kartą per mėnesį. Posėdžiai užtrunka visą dieną. Komitetų sudėtis: $a = \{A, C, G\}$, $b = \{A, B, D\}$, $c = \{B, D, H\}$, $d = \{C, E\}$, $e = \{A, B, F, G, I\}$, $f = \{D, J\}$, $g = \{E, F\}$, $h = \{G, H, I\}$, $i = \{I, J\}$, $j = \{J, K\}$ (čia a, b, c, \dots yra komitetai, o A, B, C, \dots žymi skirtingus seimo narius). Rasti tokį posėdžių tvarkaraštį, kad kiekvienam seimo nariui per dieną tektų dalyvauti ne daugiau nei viename posėdyje, ir posėdžiai užtruktų nedidelį (artimą minimaliam) dienų skaičių. Šią užduotį išreikšti grafo viršūnių spalvinimo terminais ir išspręsti, naudojant euristinį algoritmą, paremtą principu "pirma viršūnė, o po to spalva".
3. Kam lygi grafo incidencijų matricos vienos eilutės elementų suma? Vieno stulpelio elementų suma?
4. Tegu G yra n -tos eilės grafas, turintis m briaunų, kurio visos viršūnės yra k -tojo ar $(k+1)$ -ojo laipsnio. Pažymėkime p_k k -tojo laipsnio viršūnių skaičių. Įrodyti, kad $p_k = (k+1)n - 2m$.
5. Parodyti, kad bet kuriame grafe yra kelias iš bet kurios nelyginio laipsnio viršūnės į kurią nors kitą nelyginio laipsnio viršūnę.
6. Laikykite grafą G_3 nesvoriniu grafu. Rasti kiekvienos grafo G_3 viršūnės ekscentricitetą. Rasti grafo G_3 skersmenį.
7. Rasti medžio G_5 centrus.
8. Sudaryti grafo G_4 dalinį grafą, kuris būtų dvidalis grafas. Pažingsniui parodyti algoritmo veikimo eigą.
9. Tegu G yra pilnasis grafas K_3 , o G' yra trečios eilės medis. Rasti grafų G ir G' sandaugą.
10. Rasti n -tos eilės grafo indukuotų pografių skaičių.

