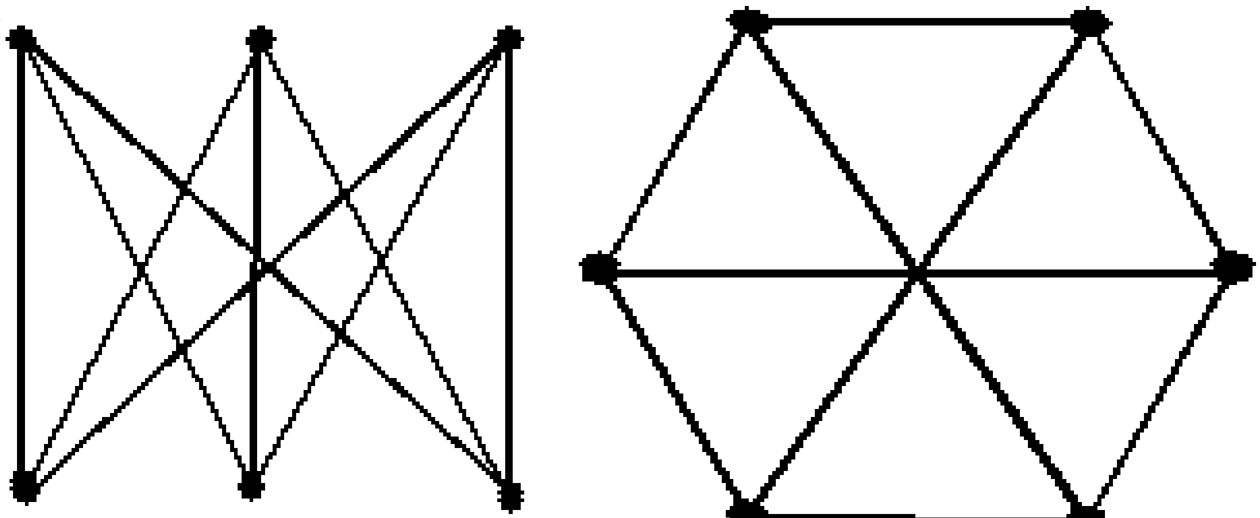
Grafų izomorfizmas

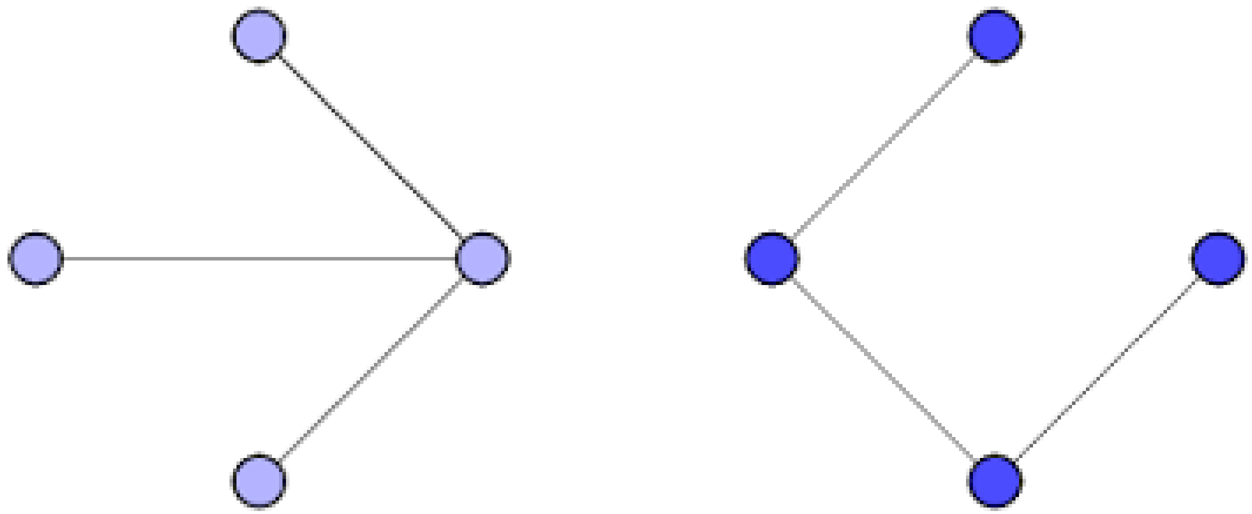
Apibrėžimas

- Du grafai $G=(V_G, U_G)$ ir $H=(V_H, U_H)$ yra vadinami ***izomorfiniais***, jeigu:
  - $|V_G|= |V_H|$
  - $|U_G|= |U_H|$
  - Galima apibrėžti bijekciją iš aibės V_G į aibę V_H ($f:V_G$ -> V_H), jeigu:
    - v_1 ir v_2 yra grafo G gretimos viršūnės
    - Tai $f(v_1)$ ir $f(v_2)$ yra gretimos grafo H viršūnės

Pavyzdžiai

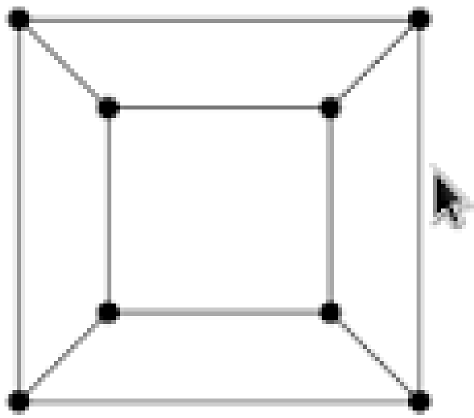


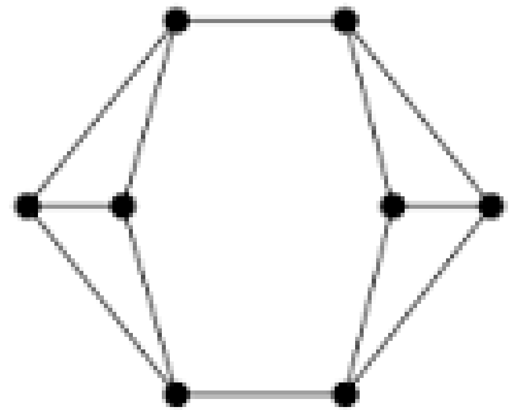
Ar šie grafai izomorfiniai?



- Ne

Ar šie grafai izomorfiniai?





- Ne

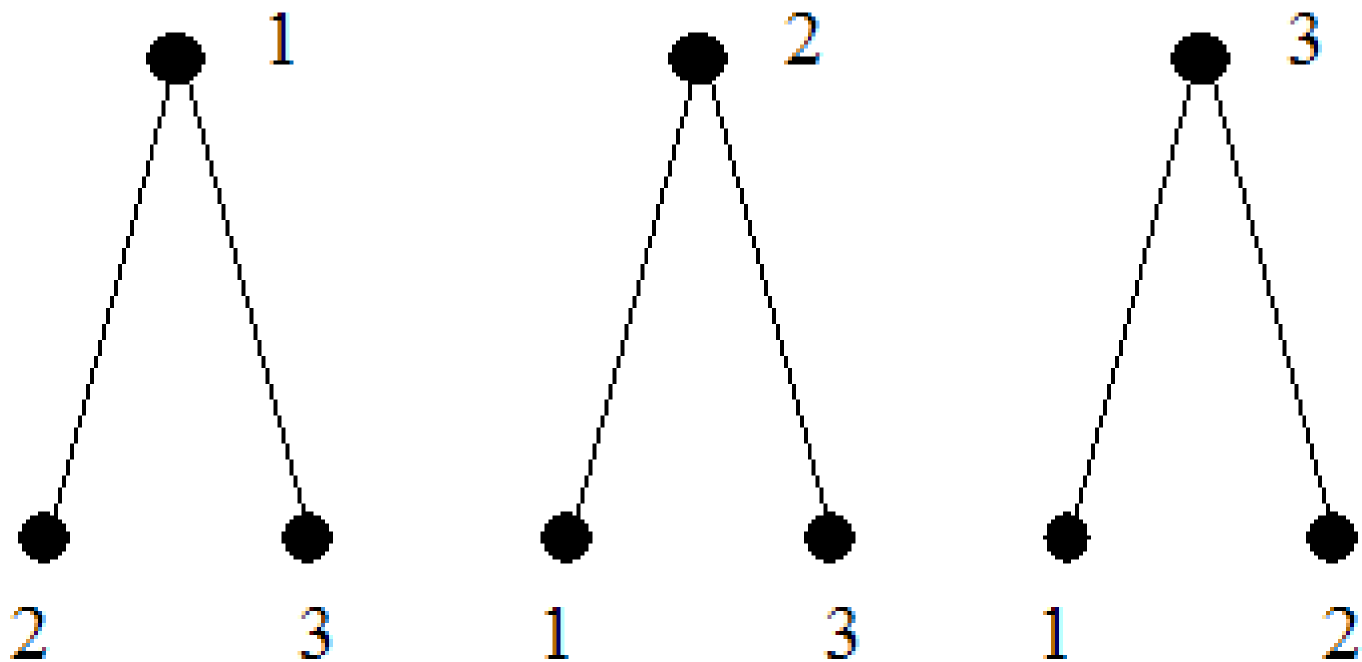
Abstraktus grafas

- Aišku, kad grafų izomofrizmas yra ekvivalentiškumas (lygiavertiškumas).
  - Izomorfizmas dalina visų grafų aibę į klases
    - Vienoje klasėje visi grafai yra izomorfiniai tarpusavyje
- Vienos klasės grafus galima pavaizduoti vienu ir tuo pačiu grafu, kuris žymi (apibendrina) visą klasę. Jis vadinamas ***<u>abstrakčiu grafu</u>***.

Žymetieji grafai

- Dažnai yra poreikis atskirti izomorfinius grafus.
- Turime priskirti kiekvienai viršūnei po žymę, pvz .
  - raidė : {a, b, c, ... , z}
  - skaičius: {1, 2, ... n}
- Toks grafas vadinamas ***žymetuoju grafu***.
  - Žymetieji grafai, turintys tą patį viršūnių skaičių:
    - Yra lygus, kai briaunų aibė sutampa
    - Yra skirtingos, jei briaunų aibės nelygios.

Pavyzdžiai



Žymėtųjų grafų skaičius

- Didžiausias *n* viršūnių grafo briaunų skaičius yra lygus
- Didžiausias *n* viršūnių grafo briaunų skaičius yra lygus
- S= $\dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2$
- S=
- Grafų, turinčių k briaunų, skačius C_S^k
- Grafų, turinčių k briaunų, skačius

$$g_n = \sum_{k=0}^{S} C_S^k = 2^S = 2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Izomorfinių grafų skaičius

- Pojos formulė: g_n asimptotiškai lygu $2^{C_n^2}/n!$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{C_n^2}/n!}{g_n}=1$$

- Žymėtųjų *n* viršūnių grafų yra *n*! daugiau negu abstrakčių *n* viršūnių grafų. (iš pirmo žvilgsnio)

Izomorfinių grafų skaičius

- Bet teiginys yra klaidingas, nes:
  - Ne iš kiekvieno abstraktaus grafo gauname n! Žymėtųjų grafų
    - Žymetieji tuštieji grafai yra lygus
    - Paprasta 3 viršūnių grandinė duoda 3, o ne 6 žymetuosius grafus
- Daugumoje atvejų, iš abstraktaus *n* viršūnių grafo gauname *n*! žymėtųjų grafų.

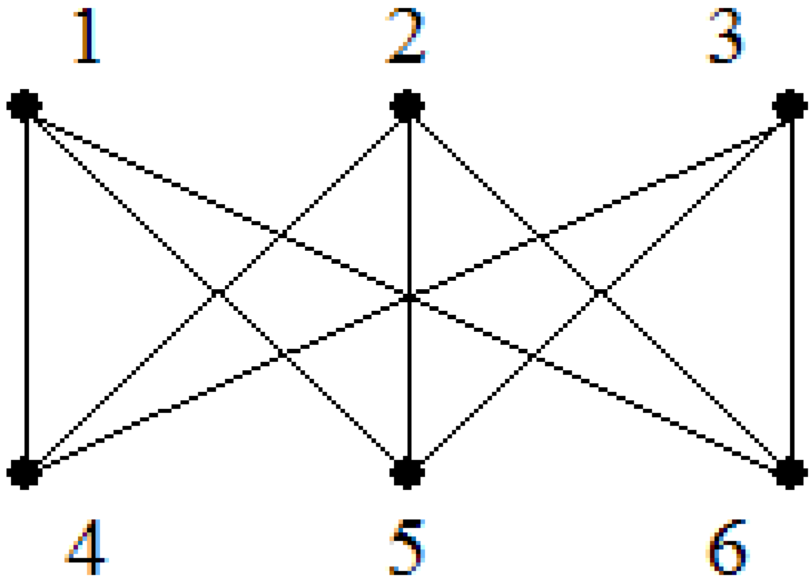
Grafų izomorfizmo nustatymo uždavinys

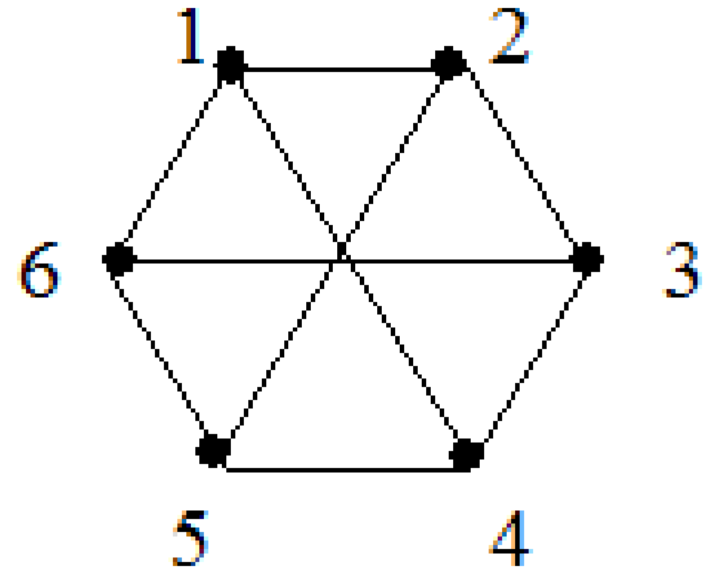
- Ar du žymėtieji grafai yra izomorfiniai?
- du žymėtieji grafai yra izomorfiniai:
  - jei galima vieno grafo viršūnes pernumeruoti taip, kad abiejų grafų briaunų aibės sutaptų.
    - Šis pernumeravimas apibrėžia aukščiau minėtą bijekciją.
- Tai NP pilnas uždavinys, neturintis efektyvaus sprendimo algoritmo.

Būtinos izomofrizmo sąlygos

- izomorfinių grafų viršūnių laipsnių, išrikiuotų mažėjimo (didėjimo) tvarka, sekos sutampa;
- izomorfinių grafų gretimumo matricos yra panašios, t.y. jų tikrinės reikšmės yra lygios

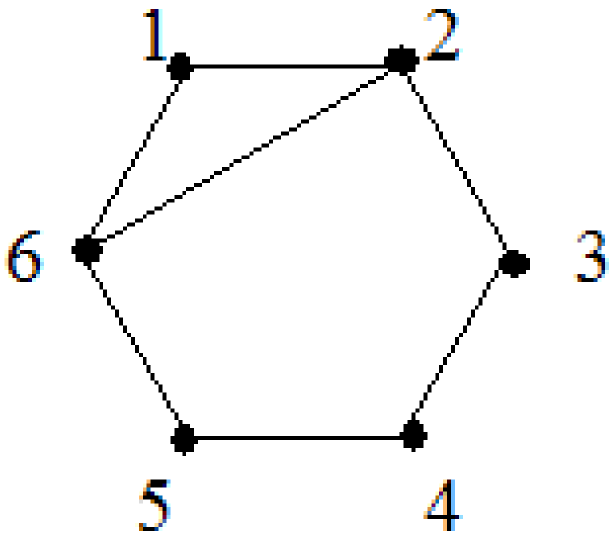
Pavyzdys



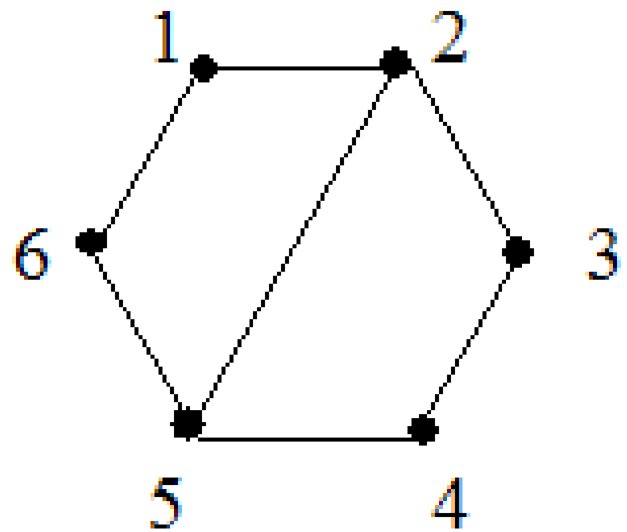


- 1 2 3 4 5 6
- 1 5 3 4 2 6

Pavyzdys



d)



e)