

Grafų teorija 36

Oilerio Maršrutai

Laimonas Beniušis
Kompiuterių Mokslas I, Ig

Apibrėžimai

- ***Oilerio maršrutas*** (Oilerio grafas) – kelias apeinantis **visas** grafo briaunas (1 kartą).
 - ***Oilerio grandinė*** – pradinė ir galinė ***Oilerio maršruto*** viršūnės **nesutampa**
 - ***Oilerio ciklas*** – pradinė ir galinė ***Oilerio maršruto*** viršūnės **sutampa**

"Beveik nėra Oilerio grafų" (R.Reidas)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{GP(n)}{G(n)} = 0$$

n – viršūnių skaičius

$G(n)$ – grafų, turinčių n viršūnių skaičius

$GP(n)$ – grafų, turinčių n viršūnių ir Oilerio maršrutą skaičius

Oilerio Teorema

Būtina ir pakankama sąlyga, kad grafas G turėtų Oilerio maršrutą:

- G yra jungus
- G viršūnės turi:
 - 1) Visos lyginį laipsnį (Oilerio ciklas)
 - 2) Tik 2 iš jų turi nelyginį laipsnį (Oilerio grandinė)

Antruoju atveju grandinė prasideda ir baigiasi nelyginio laipsnio viršūnėse

Oilerio Teorema, Būtinumas

- Oilerio ciklas, aplankydamas viršūnę, panaudoja 2 briaunas (įėjimas, išėjimas)
- Kiekviena grafo viršūnė yra incidentiška lyginiam Oilerio ciklo briaunų skaičiui
- Oilerio ciklas apima visas viršūnes, todėl grafas yra jungusis ir visų grafo viršūnių laipsniai yra lyginiai

Oilerio Teorema, Pakankamumas I

- Tarkime, G grafo visų viršūnių laipsniai lyginiai
- Atėję į viršūnę iš jos visada galėsime išvykti
- Panaudotą briauną "ištriname"
- Pradinė viršūnė v_1
- Iš viršūnės v visada galime išvykti, nes jos laipsnis yra lyginis

Oilerio Teorema, Pakankamumas II

- Jeigu negalime išvykti, vadinasi sutikome pradinę viršūnę v_1 ir kelias sudarė ciklą P_1
- Pašalinę P_1 gausime grafa G_1 , kurio visų viršūnių laipsnis yra:
 - 0 (Gavome Oilerio ciklą)
 - Lyginis (tiriam toliau)

Oilerio Teorema, Pakankamumas III

- Tiriam toliau
- Grafas G_1 ir ciklas P_1 turi bent 1 bendrą viršūnę, v_2 nes grafas G yra jungus
- Tokiu pat būdu sukonstruosime naują ciklą P_2 ir apjungsime P_1 ir P_2 ciklus tokiu būdu:
$$v_1 \rightarrow P_1(1) \rightarrow v_2 \rightarrow P_2 \rightarrow v_2 \rightarrow P_1(2) \rightarrow v_1$$

Analogiškai tiriam tol, kol gauname tuščią grafa

Oilerio maršruto konstravimas

Pasiruošimas

- Grafas G tenkina Oilerio maršruto sąlygą
- v = grafo G viršūnė (jei turi tokių 2, tai nelyginio laipsnio)
- Įdedam v į stack
 - stack - darbinis stekas
 - oiler - rezultato stekas
 - $N(v)$ - viršūnės v briaunų aibė

Oilerio maršruto konstravimas

Žingsnis

Kol stack nėra tuščias:

$v :=$ paskutinė stack viršūnė

Jeigu $|N(v)| > 0$:

$u :=$ pirmoji aibės $N(v)$ viršūnė

pridedam u į stack

pašalinam iš G briauną (v,u)

Priešingu atveju:

$v :=$ pašalinam paskutinę viršūnę iš stack

pridedam v į oiler