2. Grafų teorija

2.1. Įvadas

Pirmasis grafų teorijos uždavinys, nagrinėtas 1736 m., buvo uždavinys apie Karaliaučiaus (Kionigsbergo) tiltus. L. Oileris ne tik sėkmingai išsprendė šį uždavinį, bet ir suformulavo būtinas ir pakankamas sąlygas, kurias tenkinant grafas turi specialų maršrutą, kuris dabar vadinamas Oilerio ciklu (grandine). Tačiau maždaug 100 metų laikotarpyje šio uždavinio sprendinys buvo vienintelis grafų teorijos rezultatas. Vėliau, 19 amžiaus viduryje, inžinierius elektrikas Kirchgofas išvystė medžių teoriją ir ją taikė elektrinėms grandinėms nagrinėti. Maždaug tuo pačiu laikotarpiu matematikas A. Keli (A. Cayley) trijų tipų medžius naudojo, norėdamas apskaičiuoti organinių junginių izomerų skaičių.

Žymus impulsas vystyti grafų teoriją buvo 1852 m. A. De Morgano iškelta keturių spalvų hipotezė. Ši hipotezė grafų teorijos vystymesi suvaidino analogišką vaidmenį, kaip didžioji Ferma teorema skaičių teorijoje. Keturių spalvų hipotezė buvo įrodyta 1976 m. (žr. K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable.- Bulletin of the American Mathematical society, vol.82, №5, September, 1976, 711-712p.p.). Įdomi detalė yra ta, kad kai kurie grafų dažymo variantai buvo pilnai perrinkti ir tam sunaudota 1200 kompiuterinio laiko valandų.

Visi sutaria, kad grafų teorijos, kaip savarankiškos matematikos šakos, gimimas yra 1936 m., kai matematikas D. Kionigas išleido monografiją "Baigtinių ir begalinių grafų teorija" (žr. König D. Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.). Jis pirmasis vietoje įvairiuose moksluose naudojamų skirtingų schemų pavadinimų: sociogramos (psichologija), simpleksai (topologija), grandinės (fizika), diagramos (ekonomika), ryšių tinklai, vandentiekio tinklai, geneologiniai medžiai ir t.t., pasiūlė naudoti vieną terminą "grafas". Šis faktas rodo, kad grafai yra įvairiausios fizinės prigimties reiškinių matematiniai modeliai. Tai ir lemia grafų teorijos, kaip savarankiškos matematikos šakos, audringą vystymąsi ir plačias taikymo galimybes.

Tuo būdu, grafų teorija, prasidėjusi nuo įdomių uždavinių ir galvosūkių nagrinėjimo (uždaviniai apie šachmatų valdovę (žirgus), 15-kos mergaičių uždavinys, sargybinių uždavinys, penkių valdovių uždavinys ir kt.) šiuo metu tampa pagrindine diskrečiosios matematikos kalba, leidžiančia taikyti diskrečiosios matematikos metodus įvairiose mokslo ir technikos srityse.

2.2. Pradinės sąvokos

Kaip buvo minėta, pirmasis grafo terminą įvedė matematikas D. Kionigas 1936 m.

***Grafo apibrėžimas*.** Formaliai grafą apibrėžti galima dviem būdais.

1. ***Pirmas būdas***. (K. Beržas (C. Berge, Theory des Graphes et ses applications. Paris, 1958. Yra vertimas į rusų kalbą К. Берж. Теория графов и ее применения, И.Л.,Москва, 1962)).

Sakoma, kad grafas žinomas, jeigu:

1) duota netuščia aibė $V(V\neq\emptyset)$,
2) duotas aibės V atvaizdis Γ į aibę V.

Grafas žymimas simboliu $G=(V, \Gamma)$.

2. ***Antras būdas***. Tarkime V- netuščioji aibė, o aibė E yra aibės V visų galimų dvielemenčių poaibių aibė, t.y. $E=\{\{x,y\}:x,y\in V \wedge x\neq y\}$. Tada grafas yra pora (V,U), čia $U\subseteq E$. Žymime $G=(V,U)$.

Aibė V vadinama grafo ***viršūnių aibe***. Aibės V elementų skaičius yra lygus grafo viršūnių skaičiui ir dažnai vadinamas grafo ***eile***. Tolesniame nagrinėjime laikysime, kad $|V|=n$. Aibė U neorientuotojo grafo atveju vadinama grafo ***briaunų aibe***, o orientuotojo grafo (orgrafo) atveju – ***lankų aibe***. Tuo būdu viršūnių v_1 ir v_2 pora (v_1,v_2) sudaro arba briauną (žr. 2.2.1 pav. a) arba lanką (žr. 2.2.1 pav. b))Vadinasi lankas yra sutvarkytoji viršūnių pora (sutvarkytasis dvielementis poaibis), tuo būdu lankų aibė yra $V\times V$ poaibis, t.y. $E=V\times V$. Tolesniame nagrinėjime laikysime, kad $|U|=m$, o apie grafą G, turintį n viršūnių ir m briaunų (lankų) sakysime, kad G yra (n,m)-grafas.

2.2.1 pav. Grafo briauna ir lankas

Briauną (v_1,v_2) ribojančios viršūnės v_1 ir v_2 vadinamos briaunos galais, o lanko atveju, viršūnė v_1 yra lanko pradžia, o v_2 – lanko pabaiga (galas), arba v_1 ir v_2 yra lanko kraštinės viršūnės.

Briaunos galų viršūnės vadinamos ***gretimomis viršūnėmis***.

Dvi ***briaunos*** yra ***gretimos***, jei jos turi bendrą galą. Orientuotojo grafo viršūnės yra gretimos, jei jos yra kraštinės lanko viršūnės, o lankai yra gretimi, jei jie turi bendrą kraštinę viršūnę.

Pastaba. Užrašant grafą pav. gretimumo matrica, gretimumo struktūra ar lankų ir jų adresų masyvais (žr. 2.7. paragrafą), orientuotojo grafo gretimų viršūnių sąvoką patogiau apibrėžti taip: lanko (v_1,v_2) atveju viršūnė v_2 yra gretima viršūnei v_1.

Jei turime briauną (lanką) (v_1,v_2), tai sakome, kad ***viršūnė*** v_1(v_2) ***incidentiška briaunai*** (***lankui***) (v_1,v_2) ir atvirkščiai.

Pastaba. Apskritai, žodis ***gretimas*** naudojamas tarp tos pačios rūšies objektų, o - ***incidentiškas*** tarp skirtingos rūšies objektų.

Grafą patogu vaizduoti paveikslėliais, susidedančiais iš taškų ir linijų. Plokštumos taškai vaizduoja grafo viršūnes. Viršūnės plokštumoje išdėstomos laisvai: svarbu ne viršūnių taškų koordinatės, bet santykis tarp viršūnių. Dvi viršūnės v_1 ir v_2 jungiamos briauna arba lanku, jei jos yra gretimos.

Jei grafas turi tik ***briaunas***, tai jis vadinamas ***neorientuotuoju*** grafu. (žr. 2.2.2 a), b), e), g), h), i), j) pav.).

Jei grafas turi tik ***lankus***, tai jis vadinamas ***orientuotuoju*** grafu (***orgrafu***). (žr. 2.2.2 c) pav.).

Jei grafas turi ir briaunų ir lankų, tai jis vadinamas ***mišriuoju*** grafu. (žr. 2.2.2 k) pav.).

Jei grafas turi bent vieną viršūnių porą, kuri jungiama keliomis briaunomis, tai grafas vadinamas ***multigrafu***. (žr. 2.2.2 g) ir h) pav.).

Jei kiekviena grafo viršūnė jungiama briaunomis su visomis likusiomis viršūnėmis, tai toks grafas yra ***pilnasis*** grafas. Pilnasis n viršūninis grafas žymimas K_n. (žr. 2.2.2 d) ir e) pav.).

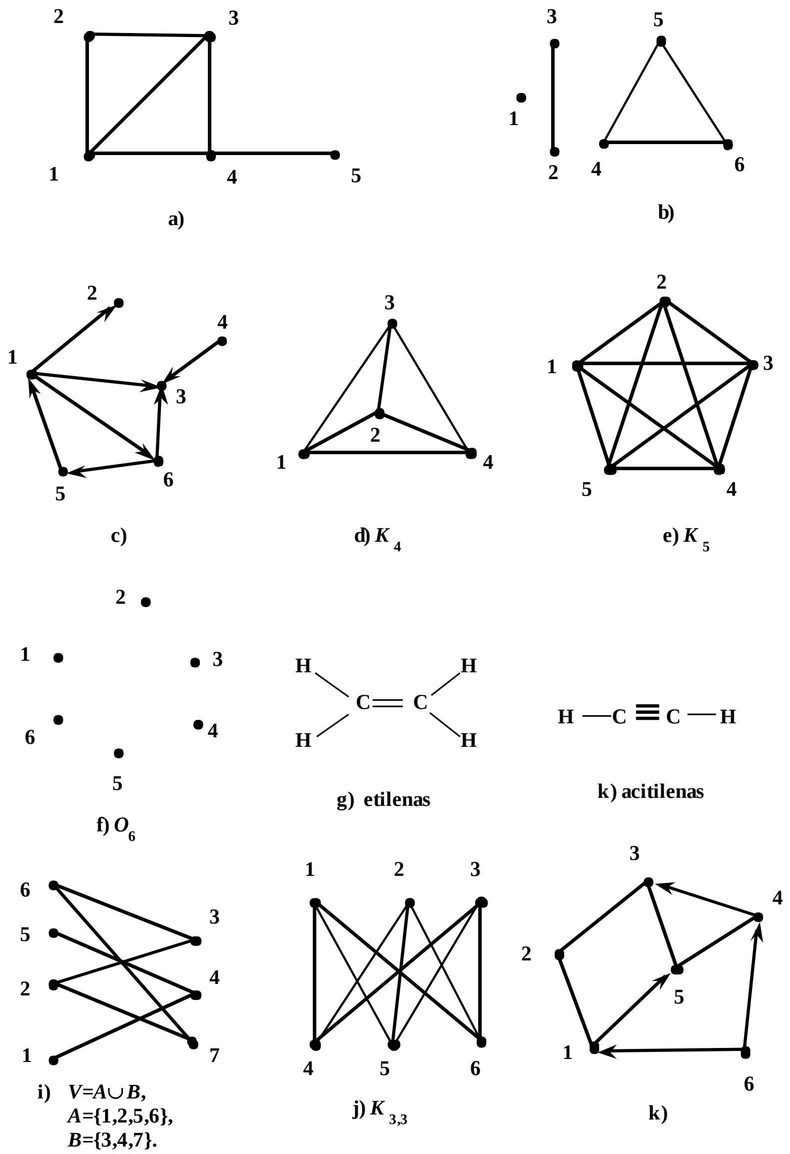
Grafas, kurio briaunų (lankų) aibė yra tuščioji aibė, vadinamas tuščiuoju grafu. Tuščiasis n viršūninis grafas žymimas O_n. (žr. 2.2.2 f) pav.).

Grafas, kurio viršūnių aibę galima išskaidyti į du poaibius A ir B taip, kad kiekvienos briaunos galai priklausytų skirtingiems poaibiams, vadinamas dvidaliu grafu. (žr. 2.2.2 i) ir j) pav.). Simboliu $K_{s,t}$ žymime pilnąjį dvidalį grafą, t.y. grafą, kai kiekviena aibės A viršūnė jungiama briauna su visomis aibės B viršūnėmis. (žr. 2.2.2 j) pav.).

Viršūnės laipsnis. Viršūnės v laipsnis, tai skaičius viršūnių gretimų viršūnei v. Viršūnės laipsnį žymėsime $\rho(v)$ arba $d(v)$.

Aibė viršūnių, gretimų viršūnei v, žymima $N(v)$ ir vadinama viršūnės aplinka. Aišku, kad $\rho(v)=|N(v)|$.

Orientuotojo grafo atveju skiriami viršūnės ***įėjimo ir išėjimo puslaipsniai***. ***Įėjimo puslaipsnis***, tai skaičius lankų, įeinančių į viršūnę, o ***išėjimo puslaipsnis***, tai skaičius lankų, išeinančių iš viršūnės.



2.2.2 pav. Grafų pavyzdžiai

Seka $\rho(v_1)$, $\rho(v_2)$, ... ,$\rho(v_n)$ vadinama ***grafo viršūnių laipsnių*** seka. Yra paprastas ryšys tarp grafo briaunų skaičiaus m ir jo viršūnių laipsnių: $m = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} \rho(v)$, t.y. grafo briaunų skaičius yra lygus visų jo viršūnių laipsnių sumos pusei. Iš čia išplaukia išvada, kad nelyginio laipsnio viršūnių skaičius yra lyginis.

Pilnojo grafo visų viršūnių laipsniai yra lygūs ir lygūs (n-1). Vadinasi, pilnojo grafo briaunų skaičius $m = \frac{n(n-1)}{2}$.

Kiekvienos viršūnės laipsnis tenkina nelygybę $0 \leq \rho(v) \leq n-1$.

Jei grafo visų viršūnių laipsniai yra lygūs, tai grafas vadinamas ***reguliariuoju grafu***.

Aptarsime ***grandinės*** ir ***ciklo*** bei ***kelio*** ir ***kontūro*** sąvokas. Pirmosios dvi sąvokos siejamos su neorientuotaisiais grafais, o kitos dvi – su orientuotaisiais grafais.

Seka briaunų (v_1,v_2) (v_2,v_3) (v_3,v_4)... (v_{k-1},v_k) t.y. gretimų briaunų seka, vadinama ***grandine***. Grandinę patogu apibrėžti viršūnių, per kurias ji eina, seka. Pavyzdžiui, μ=(v_1,v_2,v_3,v_4... v_{k-1},v_k). Jei grandinės pirmoji ir paskutinė viršūnės sutampa, tai tokia grandinė vadinama ***ciklu***. Grandinė (ciklas) vadinama ***paprastąja grandine*** (***paprastuoju ciklu***), jei visos ją sudarančios briaunos yra skirtingos.

Grandinė ciklas vadinama ***elementariąja***, jei ji eina per skirtingas viršūnes.

Neorientuotojo grafo grandinės (ciklo) sąvokoms yra analogiškos orgrafo ***kelio*** ir ***kontūro*** sąvokos. Apibrėžiant kelią (kontūrą) žodį "briauna" reikia keisti žodžiu "lankas". Tolesniame dėstyme, kur tai nesukels painiavos, mes dažniau naudosime kelio ir ciklo sąvokas, kalbėdami tiek apie neorientuotuosius, tiek apie orientuotuosius grafus.

Grandinės (ciklo) ilgis, tai skaičius briaunų, sudarančių grandinę (ciklą). Grandinės ilgį žymėsime $l(\mu)$ arba $l(v_1,v_k)$, čia v_1 ir v_k atitinkamai pradinė ir galinė grandinės viršūnės.

Tolesniame dėstyme naudosime sąvoką: "***iš viršūnės a nukeliauti į viršūnę b***". Tai reiškia, kad egzistuoja bent viena grandinė (kelias), jungianti tas viršūnes.

Aptarkime ***dalinio grafo*** ir ***pografio*** sąvokas.

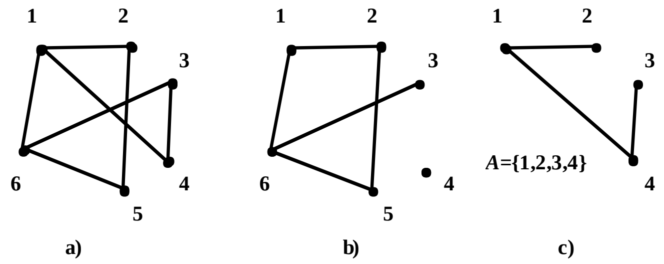
Grafo $G=(V,U)$ dalinis grafas, tai grafas, turintis tą pačią viršūnių aibę ir dalį pradinio grafo briaunų (lankų). Kalbant tiksliau, $H=(V,U_H)$ yra grafo $G=(V,U)$ dalinis grafas, jei $U_H \subseteq U$.

Tarkime A yra grafo G viršūnių aibės V poaibis. Tada grafas $P=(A,B)$ yra ***pografis***, kurį indukuoja viršūnių aibė A (***indukuotasis pografis***), jei jo viršūnių aibė sutampa su aibe A, o briaunų (lankų) aibę B sudaro tos grafo G briaunos (lankai), kurių abu galai priklauso aibei A. Indukuotojo pografio dalinis grafas vadinamas ***pografiu***.

Tolesniame dėstyme naudosime sąvoką pografis, suprasdami (jei tai nebus atskirai paaiškinta), kad tai indukuotasis pografis.

Pavyzdžiui, jei Lietuvos kelių žemėlapis yra grafas G, tai pagrindinių kelių žemėlapis yra dalinis grafas, o Žemaitijos kelių žemėlapis yra pografis.

Paveiksle 2.2.3 a) pav. pavaizduotas grafas G, paveiksle 2.2.3 b) pav. jo dalinis grafas, o paveiksle 2.2.3 c) pav. pografis, kurį indukuoja viršūnių aibė A={1,2,3,4}.



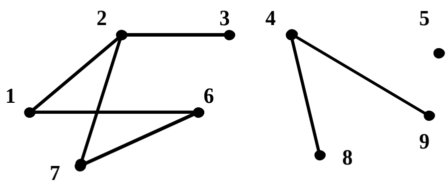
2.2.3 pav. Grafas, dalinis grafas ir pografis

Aptarkime neorientuotojo grafo ***jungiosios komponentės*** sąvoką.

Pastaba. Kadangi tolesniame nagrinėjime daugiausia kalbėsime apie neorientuotuosius grafus, tai naudodami žodį "grafas", (jei nebus pabrėžta atskirai), suprasime kaip neorientuotasis grafas.

Grafo G=(V,U) ***jungioji komponentė***, tai pografis, kurį indukuoja aibė A, sudaryta iš bet kurios grafo G viršūnės v ir visų tų viršūnių, į kurias galima nukeliauti iš viršūnės v, t.y. A={v}∪{viršūnės, įkurias galima nukeliauti iš viršūnės v}.

Pavyzdžiui, 2.2.4 pav. pavaizduotas grafas, turintis tris jungiąsias komponentes. Pirmąją komponentę sudaro pografis, kurį indukuoja viršūnių aibė {1,2,3,6,7}, antrąją – pografis, kurį indukuoja viršūnių aibė {4,8,9} ir trečiąją – pografis, indukuotas viršūnių aibės {5}.



2.2.4 pav. Jungiosios komponentės

Orientuotojo grafo atveju naudojamos sąvokos: ***stipriai jungus*** grafas (***stiprusis*** grafas), ***vienakryptiškai jungus*** grafas ir ***silpnai jungus*** grafas (***silpnasis*** grafas).

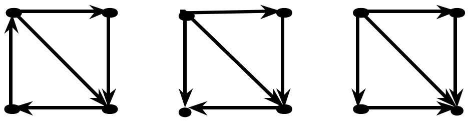
Jei orientuotame grafe yra kelias, jungiantis viršūnę *x* su viršūne *y*, tai sakome, kad viršūnė *y* yra pasiekiamoji viršūnė iš viršūnės *x*.

Orientuotasis grafas *G* yra ***stipriai jungus***, jeigu bet kokios dvi viršūnės *x* ir *y* yra pasiekiamos viena iš kitos. Kitaip tariant, iš bet kurios viršūnės *x* galime nukeliauti į bet kurią viršūnę *y* ir atvirkščiai.

Orentuotasis grafas yra ***vienakryptiškai jungus***, jeigu bet kokiai porai viršūnių *x* ir *y*, jos yra pasiekiamos bent viena kryptimi, t.y. arba *y* pasiekiama iš viršūnės *x*, arba *x* pasiekiama iš viršūnės *y*.

Orientuotasis grafas yra ***silpnai jungus***, jei yra jungus neorientuotasis grafas gautas iš orientuotojo, pakeitus lankus briaunomis.

2.2.5 a), b) ir c) pav. atitinkamai pavaizduotas stipriai jungus grafas, vienakryptiškai jungus grafas ir silpnai jungus grafas.



a) **b)** **c)**

2.2.5 pav. Orientuotojo grafo jungumas

Plačiau apie jungumą žr. 2.16 paragrafe.

Uždaviniai

1. Nupiešti, jei galima grafus, (ne multigrafus ir be kilpų), pagal duotas jų viršūnių laipsnių sekas. Jei nupiešti negalima, paaiškinti, kodėl.

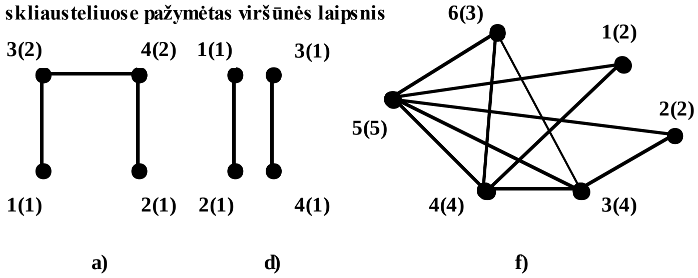
a) (1,1,2,2)	c) (4,3,2,1)	e) (3,5,5,2,2,1)
b) (2,2,1,2)	d) (1,1,1,1)	f) (2,2,4,4,5,3)

a t s a k y m a s

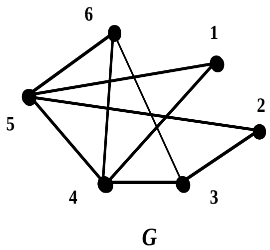
b) nupiešti negalima, nes čia $\sum_{i=1}^{n} \rho(i) = \sum_{i=1}^{4} \rho(i) = 2+2+2+1 = 7$ - nelyginis skaičius;

c) nupiešti negalima, nes čia $\rho(i) > n-1$, t.y. n=4, o $\rho(4) = 4$;

e) $\rho(2) = \rho(3) = 5$ reiškia, kad šiame 6 viršūnių grafe turėtų būti dvi viršūnės gretimos visoms grafo viršūnėms, o $\rho(6)$=1 reiškia, kad viena viršūnė turėtų būti gretima tik vienai viršūnei. Akivaizdu, tame pačiame grafe tai neįmanoma.



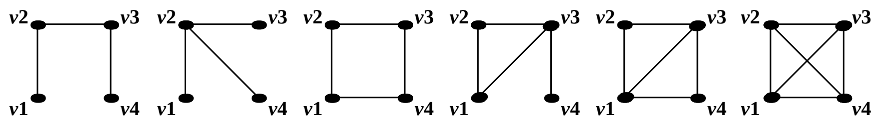
2. Duotas grafas G:



A. Nupiešti duotajam grafui G:
   a) dalinį reguliarųjį grafą G_1, kurio visų viršūnių laipsniai ρ_i=2,
   b) pografį G_2, kurį indukuoja viršūnių aibė {1,3,5}; pasakyti, kiek jungiųjų komponenčių jis turi;
   c) pografį G_3, kurį indukuoja viršūnių aibė {1,4,5,6} ; pasakyti, kiek ir kokių briaunų trūksta, kad galėtume jį pavadinti pilnuoju grafu K_4;

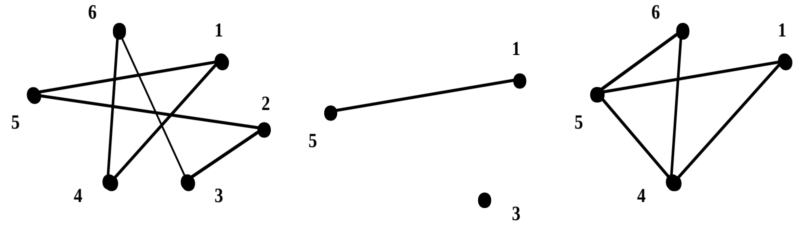
B. Nustatyti, ar duotasis grafas turi:
   d) dvidalį indukuotąjį pografį $K_{2,2}$; jei taip, pavaizduoti jį;
   e) elementariųjų paprastųjų ilgio 3,4,5 ir 6 ciklų; jei taip, užrašyti šiuos ciklus viršūnių, per kurias jie eina, sekomis;

f) pavaizduotus indukuotuosius pografius:



Jei taip, tai kokios viršūnių aibės juos indukuoja.

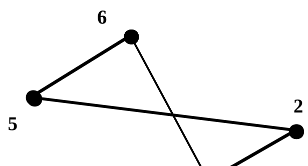
a t s a k y m a s



a) G_1 **b) G_2** **c) G_3**

b) pografis G_2 turi dvi jungiąsias komponentes, viršūnių aibė {1,5} priklauso pirmajai jungiajai komponentei, viršūnių aibė {3} – antrajai;

c) pografis G_3 būtų pilnuoju grafu K_4, jei jis turėtų dar vieną briauną (1,6);



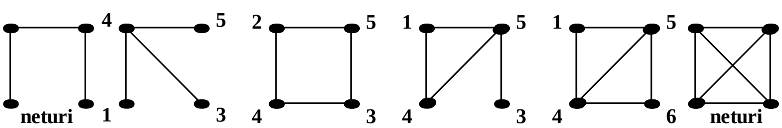
d) G_4

d) pografis G_4 yra dvidalis grafas $K_{2,2}$, kurį indukuoja viršūnių aibė $V=A\cup B$, kur A={2,6} ir B={3,5};

e) duotasis grafas turi tokius elementariuosius paprastuosius ciklus:

<u>ilgio 3</u>	<u>ilgio 4</u>	<u>ilgio 5</u>	<u>ilgio 6</u>
1,4,5,1	2,3,4,5,2	1,4,3,2,5,1	1,4,6,3,2,5,1
3,4,6,3	2,3,6,5,2	2,3,6,4,5,2	
4,5,6,4	3,4,5,6,3		

f)



2.3. Grafo jungiosios komponentės

Grafo jungiųjų komponenčių apskaičiavimas

Grafo jungiosios komponentės apibrėžimas yra konstruktyvus, t.y. iš jo išplaukia jungiųjų komponenčių apskaičiavimo algoritmas.

Suformuluokime uždavinį.

Duotas grafas $G=(V,U)$, t.y. žinome

n – grafo viršūnių skaičių,

m – grafo briaunų skaičių,

grafo viršūnių aibę V ir briaunų aibę U.

Pastaba. Konkrečius grafo nusakymo būdus nagrinėsime vėliau.

Rasti grafo jungiąsias komponentes t.y. rasti:

- p – jungiųjų komponenčių skaičių,
- masyvą $S[1..n]$; jei $S_i=k$, tai reiškia, kad viršūnė i priklauso k-tąjai jungiajai komponentei.

Pavyzdžiui, grafui, pavaizduotam 2.2.4 pav.

$$p = 3, \qquad S: \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2. \end{array}$$

Pirmasis grafo jungiųjų komponenčių apskaičiavimo algoritmas

Grafo jungiųjų komponenčių apskaičiavimo algoritmą galime užrašyti taip:

```
begin
    p:=0; for i:=1 to n do S[i]:=0;
    {Šie operatoriai reiškia, kad pradžioje jungiųjų komponenčių
    skaičius lygus nuliui. Kadangi visi S[i]=0 , i = 1,n , tai reiškia, kad
    visos viršūnės nepriklauso jokiai jungiajai komponentei}
    for i:=1 to n do
        if S[i]=0 then {radome viršūnę nepriklausančią jokiai
                            jungiajai komponentei}
            begin
                p:=p+1;{didiname jungiųjų komponenčių skaičių}
                S[i]:=p;
                Apskaičiuojame aibę A viršūnių,į kurias galima
                nukeliauti iš viršūnės i . {Tokios aibės
                apskaičiavimo metodai bus nagrinėjami vėliau (žr.
                "Paieška platyn", "Paieška gilyn")}. Tarkime, kad
                A={v1,v2,...,vt}, tada S[vj]:=p,  j = 1,t  ;
            end;
end.
```

Antrasis grafo jungiųjų komponenčių apskaičiavimo algoritmas

Aptarkime dar vieną jungiųjų komponenčių apskaičiavimo metodą, kuris paprastai reikalauja daugiau veiksmų, nei anksčiau pateiktas algoritmas.

Metodo idėja. Pradžioje tarkime, kad grafas yra tuščiasis, t.y. kiekviena jo viršūnė priklauso skirtingai jungiajai komponentei. Dabar nuosekliai, viena po kitos įveskime grafo briaunas. Aišku, kad jei įvedamų grafo briaunų galai priklauso tai pačiai jungiąjai komponentei, tai šios briaunos įvedimas nekeičia grafo jungiųjų komponenčių skaičiaus, tačiau, jei įvedamos grafo briaunos galai priklauso skirtingoms jungiosioms komponentėms, tai ši briauna vienetu sumažina grafo jungiųjų komponenčių skaičių. Šiuo atveju grafo jungiųjų komponenčių skaičių sumažiname vienetu ir perskaičiuojame jungiųjų komponenčių masyvo S komponentes: jei įvedame briauną (a,b) ir $S[a] \neq S[b]$, tai visus masyvo S elementus, lygius elementui $S[b]$, keičiame elementu $S[a]$.

Aišku, kad po paskutinės grafo briaunos įvedimo, masyvo S elementai, atitinkantys grafo viršūnėms, priklausančioms tai pačiai jungiajai komponentei, bus lygūs.

Pavyzdžiui, 2.2.4 pav. pavaizduotam grafui gausime.

Pradžioje

$$p = 9, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&2&3&4&5&6&7&8&9. \end{array}$$

Tarkime, kad grafo briaunas įvesime tokia tvarka: (2,3), (7,6), (1,2), (2,7), (1,6), (4,9), (4,8).

Įvedus briauną (2,3), gausime:

$$p = 8, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&2&2&4&5&6&7&8&9. \end{array}$$

Įvedus briauną (7,6), gausime:

$$p = 7, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&2&2&4&5&7&7&8&9. \end{array}$$

Įvedus briauną (1,2), gausime:

$$p = 6, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&1&1&4&5&7&7&8&9. \end{array}$$

Įvedus briauną (2,7), gausime:

$$p = 5, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&1&1&4&5&1&1&8&9. \end{array}$$

Įvedus briauną (1,6), p ir S turiniai nepasikeis, nes $S_1 = S_6$.

Įvedus briauną (4,9), gausime:

$$p = 4, \qquad S:\ \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 2}&{\scriptstyle 3}&{\scriptstyle 4}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 8}&{\scriptstyle 9} \\ \hline 1&1&1&4&5&1&1&8&4. \end{array}$$

Pagaliau, įvedus briauną (4,8), gausime:

$$p = 3, \qquad S: \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 9} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 4 & 4. \end{array}$$

Gautas rezultatas rodo, kad grafo jungiųjų komponenčių skaičius yra lygus 3, o viršūnės, priklausančios tai pačiai jungiąjai komponentei, masyve *S* pažymėtos tuo pačiu skaičiumi. Tam, kad masyvo *S* elementai, žymintys jungiąsias komponentes, būtų natūralieji skaičiai nuo 1 iki *p*, masyvo *S* elementus pernumeruosime.

Po pernumeravimo gausime:

$$p = 3, \qquad S: \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 9} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2. \end{array}$$

Dabar, jei $S_i=k$, tai, kaip ir anksčiau, reiškia, kad *i*-toji viršūnė priklauso *k*-tajai jungiajai komponentei.

Aptartąjį metodą realizuoja žemiau pateiktas algoritmas.

Tarkime, kad

n – grafo viršūnių skaičius,

m – grafo briaunų skaičius,

B[1..2,1..*m*] – grafo briaunų matrica; (b_{1j},b_{2j}), $j=\overline{1,m}$, - *j*-oji grafo briauna,

p – jungiųjų komponenčių skaičius,

S[1..*n*] – jungiųjų komponenčių masyvas; jei *S*[*i*]=*k*, tai *i*-toji viršūnė priklauso *k*-tajai jungiajai komponentei.

```
begin
    p:=n;
    for i:=1 to n do S[i]:=i;
    for j:=1 to m do
        begin
            k:=b[1,j]; l:=b[2,j];
            if S[k]<>S[l] then
                begin
                    p:=p-1;
                    u:=S[k]; v:=S[l];
                    for i:=1 to n do
                        if S[i]=v then S[i]:=u
                end;
        end;
```

```
{Masyvo S pernumeravimas}
t:=0; for i:=1 to n do temp[i]:=0;
for i:=1 to n do
    if temp[i]=0 then
        begin
            t:=t+1;
            k:=S[i];
            for l:=i to n do
                if S[l]=k then
                    begin
                        temp[l]:=1;  S[l]:=t
                    end;
        end;
end.
```

2.4. Metrinės grafo charakteristikos

Nagrinėkime grafą $G=(V,U)$, turintį n viršūnių ir m briaunų.

Atstumas tarp viršūnių x ir y yra trumpiausios grandinės, jungiančios tas viršūnes, ilgis. Atstumą žymėsime simboliu $d(x,y)$.

Aišku, kad taip apibrėžtas atstumas, tenkina tokias metrikos aksiomas:

1) $d(x,y) \geq 0$,
2) $d(x,y) = 0$, tada ir tiktai tada, kai $x = y$,
3) $d(x,y) = d(y,x)$,
4) $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ (trikampio nelygybė).

Įvesta atstumo sąvoka leidžia apibrėžti ***k-tąjį grafo laipsnį***. Tarkime G – jungusis grafas, o k- natūralusis skaičius. Tada k- tasis grafo laipsnis G^k yra grafas, kurio viršūnių aibė sutampa su grafo G viršūnių aibe, viršūnės u ir v ($u \neq v$) jungiamos briauna, jei $d(u,v) \leq k$. Aišku, jei $k \geq |V|-1$, tai G^k – pilnasis grafas.

Viršūnės v ekscentricitetas. Viršūnės v ekscentricitetas, tai dydis, apskaičiuojamas pagal formulę

$$e(v) = \max_{u \in V} d(v,u) ,$$

t.y. ilgiausios grandinės nuo viršūnės v iki likusių grafo viršūnių ilgis.

Grafo spindulys – tai skaičius, apibrėžiamas formule

$$r(G) = \min_{v \in V} e(v) ,$$

t.y. skaičius, lygus mažiausiam viršūnių ekscentricitetui.

Grafo skersmuo – tai skaičius, kurį nusako formulė $d(G) = \max\limits_{v \in V} e(v)$,
t.y. skaičius, lygus didžiausiam viršūnių ekscentricitetui.

Skersmens ilgio grandinė, jungianti bet kurias dvi periferines grafo viršūnes, vadinama ***skersmens grandine***. Viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus spinduliui,vadinamos ***centro*** viršūnėmis. Aibė, kurią sudaro centro viršūnės, vadinama *grafo centru*. Viršūnės, kurių ekscentricitetas lygus skersmeniui, vadinamos ***periferinėmis*** viršūnėmis.

2.4.1 pav. parodytas besvorinio grafo viršūnių ekscentricitetų, grafo skersmens ir spindulio radimas,

Analogiškos sąvokos apibrėžiamos ir ***svoriniam grafui***, t.y. grafui, kurio kiekvienai briaunai priskirtas skaičius, vadinamas ***briaunos svoriu***. Briaunos svoris gali turėti įvairias prasmes; reikšti briaunos ilgį (atstumą), keliamąją galią, pralaidumą ir pan. Kalbant apie svorinio grafo metrines charakteristikas, briaunos svorį traktuosime kaip atstumą tarp gretimų viršūnių.

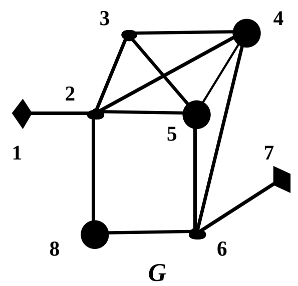
Grandinės, jungiančios ***svorinio grafo*** viršūnes x ir y ilgis, tai šią grandinę sudarančių briaunų svorių suma.

Atstumas tarp svorinio grafo viršūnių x ir y (žymėsime $d(x,y)$) yra trumpiausios grandinės, jungiančios šias viršūnes, ilgis.

Aišku, kad taip apibrėžus atstumą, jam negalioja 4-toji metrikos aksioma – trikampio nelygybė. Kitos metrinės svorinio grafo sąvokos sutampa su anksčiau apibrėžtomis besvorinio grafo metrinėmis sąvokomis.

2.4.2 pav. parodyta svorinio grafo viršūnių ekscentricitetų, jo skersmens, spindulio, centro ir periferinių viršūnių radimas.

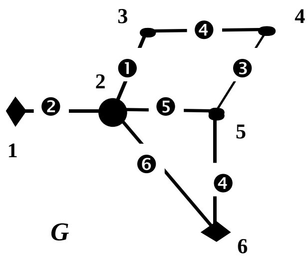
Grafo metrinių charakteristikų apskaičiavimo uždavinys turi praktinę prasmę. Tarkime, kad grafo viršūnės vaizduoja gyvenvietes, o briaunos - šias gyvenvietes jungiančius kelius. Briaunų svoriai reiškia šių kelių ilgius. Kur reikėtų statyti mokyklą, bažnyčią, ligoninę ir kt., kad atstumas nuo visų gyvenviečių iki šių objektų būtų trumpiausias. Aišku, kad juos reikėtų statyti centro viršūnėse.



e_1=max(d(1,1),d(1,2),d(1,3),d(1,4),d(1,5),d(1,6),d(1,7),d(1,8))
=max(0,1,2,2,2,3,4,2)=4
e_2=max(1,0,1,1,1,2,3,1)=3
e_3=max(2,1,0,1,1,2,3,2)=3
e_4=max(2,1,1,0,1,1,2,2)=2
e_5=max(2,1,1,1,0,1,2,2)=2
e_6=max(3,2,2,1,1,0,1,1)=3
e_7=max(4,3,3,2,2,1,0,2)=4
e_8=max(2,1,2,2,2,1,2,0)=2

Grafo skersmuo $d(G)$=4
grafo spindulys $r(G)$=2
skersmens grandinės
(1,2,5,6,7), (1,2,8,6,7),
(1,2,4,6,7)
periferinės viršūnės {1,7}
grafo centras {4,5,8}

2.4.1 pav. Besvorinio grafo metrinės charakteristikos



$e_1=\max(d(1,1),d(1,2),d(1,3),d(1,4),d(1,5),d(1,6))$
$=\max(0,2,3,7,7,8)=8$
$e_2=\max(2,0,1,5,5,6)=6$
$e_3=\max(3,1,0,4,6,7)=7$
$e_4=\max(7,5,4,0,3,7)=7$
$e_5=\max(7,5,6,3,0,4)=7$
$e_6=\max(8,6,7,7,4,0)=8$

Grafo skersmuo $d(G)=8$
grafo spindulys $r(G)=6$
skersmens grandinė
(1,2,6)
periferinės viršūnės {1,6}
grafo centras {2}

2.4.2 pav. Svorinio grafo metrinės charakteristikos

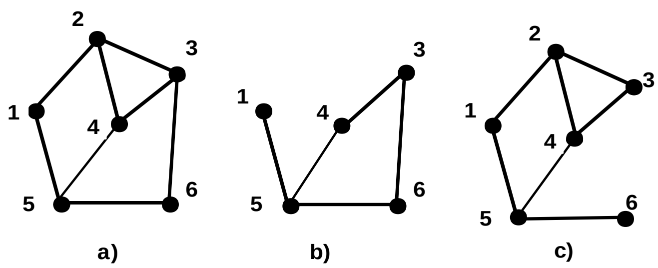
2.5. Veiksmai su grafais

Aptarkime veiksmus su grafais.

Viršūnės šalinimas. Duotas grafas $G=(V,U)$. Pašalinti viršūnę x, tai iš grafo pašalinti šią viršūnę drauge su jai incidentinėmis briaunomis. Gaunamas grafas $H=(V_1,U_1)$, čia $V_1= V\setminus\{x\}$, o $U_1 = U \setminus$ {briaunos, incidentiškos viršūnei x}.

Briaunos **(v_1,v_2)** ***šalinimas***. Iš grafo $G=(V,U)$ šalinama briauna (v_1,v_2). Gaunamas grafas , turintis tą pačią viršūnių aibę V ir briaunų aibę $U^*=U\setminus\{(v_1,v_2)\}$.

2.5.1 a) pav. pavaizduotas grafas G; 2.5.1 b) pav. pavaizduotas grafas, gautas iš grafo G pašalinus 2-ąją viršūnę; 2.5.1 c) pav. pavaizduotas grafas, gautas iš grafo G pašalinus (3,6) briauną.



2.5.1 pav. Grafo viršūnės ir briaunos šalinimas

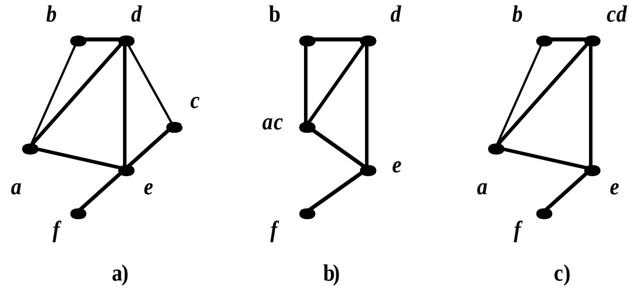
Viršūnių sutapatinimas. Tarkime, kad v_1 ir v_2 grafo $G=(V,U)$ viršūnės. Viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas atliekamas taip:

1) iš grafo G pašalinamos viršūnės $v_1$ir v_2;
2) įvedama nauja viršūnė v;

3) viršūnė v jungiama briaunomis su tomis viršūnėmis, kurios buvo gretimos arba viršūnei v_1, arba viršūnei v_2, t.y.

$$N(v)=N(v_1)\cup N(v_2).$$

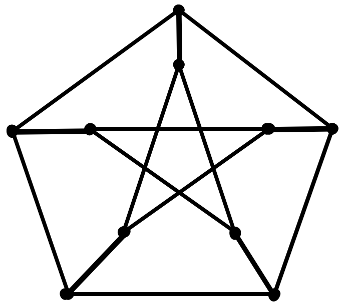
Briaunos sutraukimas. Tarkime (v_1,v_2) yra grafo $G=(V,U)$ briauna. Tada briaunos (v_1,v_2) sutraukimas, tai gretimų viršūnių v_1 ir v_2 sutapatinimas. 2.5.2 a), b) ir c) pav. atitinkamai pavaizduotas grafas $G=(V,U)$, šio grafo viršūnių a ir c sutapatinimas ir šio grafo briaunos (c,d) sutraukimas.



2.5.2 pav. Grafo viršūnių sutapatinimas ir briaunos sutraukimas

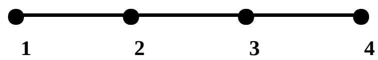
Sakoma, kad grafas G sutraukiamas į grafą H, jei egzistuoja tokia briaunų seka, kurias nuosekliai sutraukiant iš grafo G gaunamas grafas H.

2.5.3 pav. parodytas Peterseno grafas, kurį galima sutraukti į penkių viršūnių pilnąjį grafą, t.y. į grafą K_5. Briaunos, kurias reikia sutraukti, pažymėtos storiau.



2.5.3 pav. Peterseno grafas

Aišku, kad bet koks netuščiasis jungusis grafas sutraukiamas į K_2. Tačiau ne kiekvienas netuščiasis grafas sutraukiamas į K_3. Pavyzdžiui, grafas pavaizduotas 2.5.4 pav. (t.y. grandinė), nesutraukiamas į K_3.



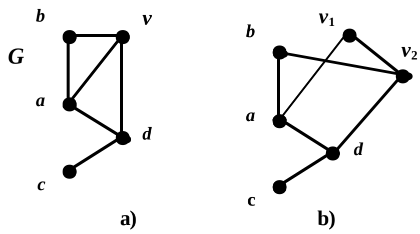
2.5.4 pav. Grafas, kurio negalima sutraukti į K_3

Tuo būdu natūraliai kyla klausymas, - į kokį didžiausios eilės pilnąjį grafą galima sutraukti duotąjį grafą G. Tokio pilnojo grafo eilė žymima $\eta(G)$ ir vadinama Hadvigerio skaičiumi. Pavyzdžiui, Peterseno grafo Hadvigerio skaičius yra 5. Hadvigerio skaičius yra susijęs su keturių spalvų hipoteze.

Viršūnės išskaidymo operacija. Operacija, dualinė briaunos sutraukimui, yra viršūnės išskaidymo operacija. Tarkime v yra viena iš grafo G viršūnių ir $N(v)=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$. Tada viršūnės išskaidymo operacija atliekama taip:

1) iš grafo G pašalinama viršūnė v;
2) įvedamos dvi naujos viršūnės v_1 ir v_2 ir jas jungiančioji briauna;
3) viršūnė v_1 jungiama briaunomis su aibės A viršūnėmis, o v_2 - su aibės B viršūnėmis.

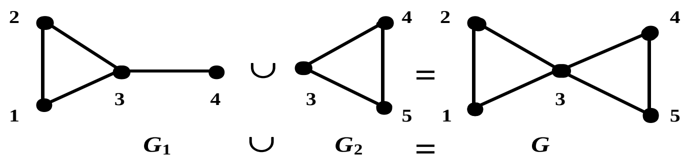
Paveiksle 2.5.5 pav. parodytas grafo G viršūnės v išskaidymas į viršūnes v_1 ir v_2. Čia $N(v)=\{a,b,d\}$, $A=\{a\}$ ir $B=\{b,d\}$.



2.5.5 pav. Grafo G viršūnės v išskaidymas į v_1 ir v_2

Grafų sąjunga. Tai viena iš svarbiausių grafų operacijų. Tarkime, kad duoti grafai $G_1=(V_1,U_1)$ ir $G_2=(V_2,U_2)$. Tada grafas $G=(V,U)$ yra šių grafų sąjunga (žymime $G=G_1 \cup G_2$), jei $V=V_1 \cup V_2$, o $U=U_1 \cup U_2$. Jei $V_1 \cap V_2=\varnothing$, tai grafų G_1 ir G_2 sąjunga vadinama ***disjunktyvine sąjunga***.

2.5.6 pav. Pavaizduota grafų G_1 ir G_2 sąjunga.



2.5.6 pav. Grafų G_1 ir G_2 sąjunga

Ši operacija apibendrinama imant daugiau nei du grafus.

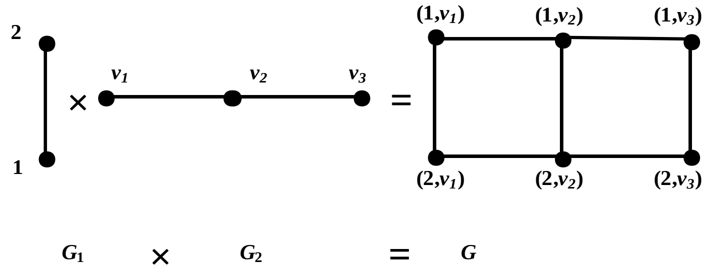
$$G(V,U)=\bigcup_{i=1}^{n} G_i(V_i,U_i),\quad V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i,\quad U=\bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Grafų sandauga. Grafų $G_1=(V_1,U_1)$ ir $G_2=(V_2,U_2)$ sandaugos grafas $G=(V,U)$ (žymime $G=G_1\times G_2$) apibrėžiamas taip:

1) $V=V_1\times V_2$ - aibių Dekarto sandauga,
2) Viršūnė (a,b) jungiama su viršūne (c,d), jeigu:
   a) $a=c$ ir $(b,d)\in U_2$ arba
   b) $b=d$ ir $(a,c)\in U_1$.

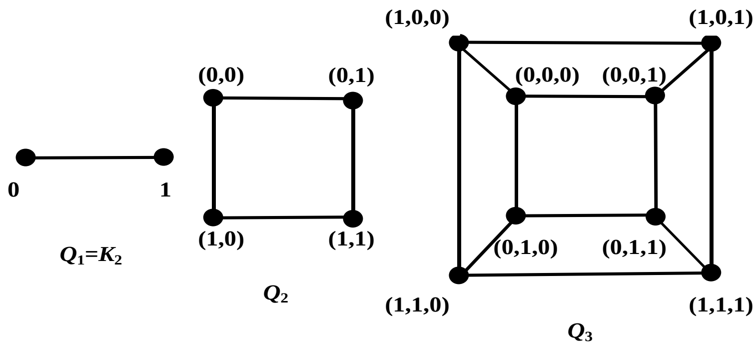
Aišku, kad grafo G viršūnių skaičius yra lygus $|V_1|\cdot|V_2|$, t.y. $|V|=|V_1|\cdot|V_2|$, o $|U|=|V_1|\cdot|U_2|+|V_2|\cdot|U_1|$.

2.5.7 pav.parodyta grafų G_1 ir G_2 sandauga.



2.5.7 pav. Grafų G_1 ir G_2 sandauga

Naudojant sandaugos operaciją, apibrėžiama svarbi grafų klasė – ***n-mačiai kubai***, kurie žymimi simboliu Q_n. Šie kubai apibrėžiami rekurentine formule: $Q_1=K_2$; $Q_n=K_2\times Q_{n-1}$, $n>1$. 2.5.8 pav. parodyti kubai Q_1, Q_2 ir Q_3.

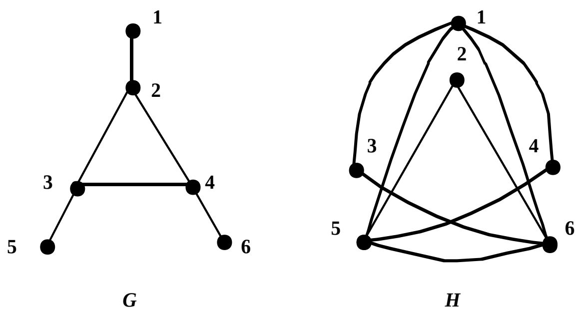


2.5.8 pav. n-mačių (n =1,2,3) kubų pavyzdžiai

Aišku, kad Q_n viršūnių skaičius lygus 2^n, nes kiekviena viršūnė yra vienmatis vektorius susidedantis iš nulių ir vienetų (dvejetainis n skilčių skaičius). Dvi viršūnės yra gretimos, jei joms atitinkantys vektoriai skiriasi tik viena komponente. Kadangi kiekviena viršūnė yra incidentiška n briaunų, tai kiekvienos viršūnės laipsnis lygus n ir bendras briaunų skaičius

$$m = \frac{1}{2} n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Papildomasis grafas. Grafas $H=(V,U_H)$ yra grafo $G=(V,U_G)$ papildomasis grafas, jei $G \cup H=K_n$, čia $n=|V|$, tai yra grafas, papildantis grafą G iki pilnojo grafo. Tuo būdu papildomasis grafas H turi tą pačią viršūnių aibę, kaip ir grafas G; grafe H viršūnės v_1 ir v_2 jungiamos briauna, jei jei šios viršūnės grafe G nėra gretimos. 2.5.9 pav. pavaizduotas grafas G ir jo papildomasis grafas.

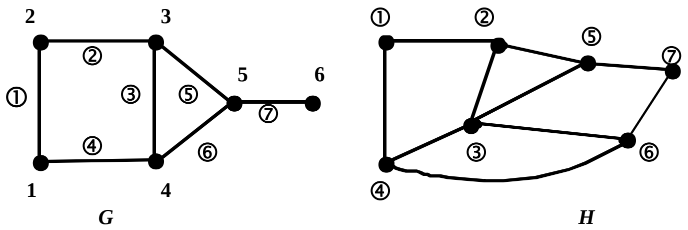


2.5.9 pav. Grafas G ir papildomasis grafas H

Briauninis grafas. Grafo $G=(V,U)$ briauninis grafas $H=(A,B)$ apibrėžiamas taip:

1) viršūnių aibės A elementų skaičius yra lygus grafo G briaunų skaičiui, t.y. kiekviena grafo viršūnė vaizduoja (atitinka) grafo G briauną;
2) viršūnės $a_1 \in A$ ir $a_2 \in A$ jungiamos briauna, jeigu toms viršūnėms atitinkančios grafo briaunos yra gretimos.

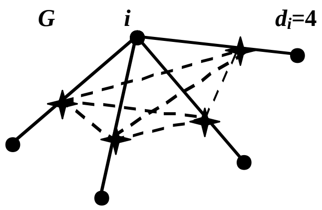
2.5.10 pav. pavaizduotas grafas G ir jį atitinkantis briauninis grafas H.



2.5.10 pav. Grafas G ir jo briauninis grafas H

Nesunku įsitikinti, kad jei d_1, d_2, ... d_n yra (n,m) – grafo G viršūnių laipsnių seka, tai jo briauninis grafas H yra (m,l) – grafas, čia $l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$.

Iš tikro, kiekviena i-oji grafo G viršūnė generuoja $C_{d_i}^2 = \frac{d_i(d_i - 1)}{2} = \frac{d_i^2 - d_i}{2}$ grafo H briaunų, (žr. 2.5.11 pav.) todėl $l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - m$.



2.5.11 pav. Briauninio grafo briaunos

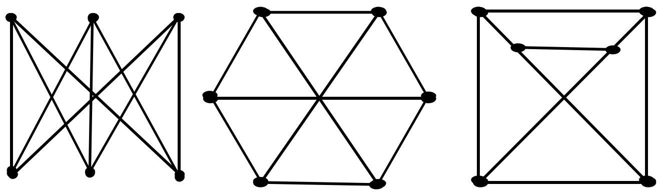
Briauninis grafas yra atskirasis ***sankirtos grafo*** atvejas. Tarkime, kad $S \neq \emptyset$, o $F=\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ jo poaibių aibė. Tada sankirtos grafo $S=(V,U)$ viršūnių skaičius yra lygus aibės F elementų skaičiui, t.y. kiekviena viršūnė v_i atitinka poaibį S_i, $i=\overline{1,n}$. Viršūnės v_i ir v_j jungiamos briauna, jei $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

2.6. Grafų izomorfizmas

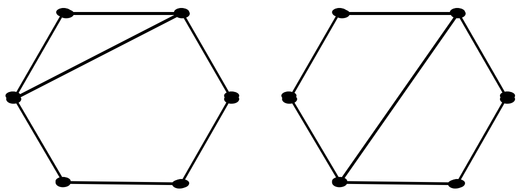
Apibrėžimas. Grafai $G=(VG,UG)$ ir $H(VH,UH)$ yra izomorfiniai , jei:

1) $|VG|=|VH|$,
2) $|UG|=|UH|$ ir
3) yra toks aibės VG atvaizdis (bijekcija) φ į aibę VH, kad, jei v_1 ir v_2 yra gretimos grafo G viršūnės, tai $\varphi(v_1)$ ir $\varphi(v_2)$ yra gretimos grafo H viršūnės.

Jei grafai yra izomorfiniai, tai rašome $G \cong H$. Pavyzdžiui, 2.6.1 pav. pavaizduoti trys izomorfiniai grafai, 2.6.2 pav. du neizomorfiniai grafai.



2.6.1 pav. Izomorfiniai grafai

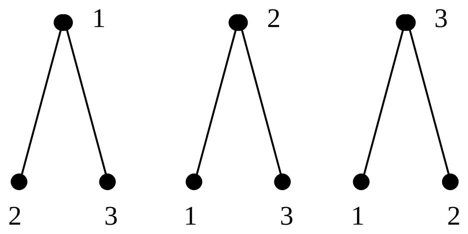


2.6.2 pav. Neizomorfiniai grafai

Aišku, kad grafų izomorfizmas yra ekvivalentiškumas, t.y. izomorfizmas visų grafų aibę išskaido į klases taip, kad vienos klasės grafai tarpusavyje yra izomorfiniai.

Todėl natūralu visus vienos klasės grafus sutapatinti, t.y. visus juos galima pavaizduoti vienu ir tuo pačiu piešiniu. Norėdami pabrėžti, kad nagrinėjami grafai skiriasi izomorfizmo tikslumu, sakome ***abstraktusis grafas***. Šis grafas žymi visą izomorfinių grafų klasę.

Žymėtieji grafai. Daugelyje situacijų reikia skirti izomorfinius grafus. Tam tikslui kiekvienai grafo viršūnei priskiriama žymė, pavyzdžiui, aibės $\{1,2,3,\ldots,n\}$ skaičius. Toks grafas vadinamas ***žymėtuoju grafu***. Du žymėtieji grafai, turintys tą patį viršūnių skaičių, yra lygūs, jei jų briaunų (lankų) aibės yra lygios ir skirtingi, jei jų briaunų (lankų) aibės yra nelygios. Pavyzdžiui, 2.6.3 pav. pavaizduoti trys skirtingi žymėtieji grafai.



2.6.3 pav. **Skirtingi žymėtieji grafai**

Iki šiol mes nagrinėjome žymėtuosius grafus. Todėl ir tolesniame nagrinėjime sakydami žodį grafas suprasime, kad tai žymėtasis grafas, o norėdami kalbėti apie izomorfinius grafus, tai atskirai pabrėšime.

Koks yra *n* viršūnių žymėtųjų ir izomorfinių grafų skaičius?

Žymėtųjų grafų skaičius. Didžiausias *n* viršūnių grafo briaunų skaičius yra lygus $S = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$. Tada grafų, turinčių *k* briaunų, skaičius yra lygus C_S^k. Vadinasi, visų *n* viršūnių žymėtųjų grafų skaičius

$$g_n = \sum_{k=0}^{S} C_S^k = 2^S = 2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Izomorfinių grafų skaičius. Yra žinoma Pojos formulė: g_n asimptotiškai lygu $2^{C_n^2}/n!$. Žodžiai "asimptotiškai lygu" reiškia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{C_n^2}/n!}{g_n} = 1.$$

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad žymėtųjų *n* viršūnių grafų yra *n*! daugiau negu abstrakčių *n* viršūnių grafų. Šis faktas atrodo intuityviai aiškus, nes egzistuoja lygiai *n*! būdų, kaip priskirti žymes viršūnėms, kurių skaičius yra *n*. Tačiau šio teiginio klaidingumą rodo tai, kad ne iš kiekvieno abstraktaus grafo gauname *n*! žymėtųjų grafų. Pavyzdžiui, visi žymėtieji tuštieji grafai yra lygūs; paprastoji trijų viršūnių grandinė duoda tris, o ne šešis žymėtuosius grafus (žr. 2.6.3 pav.). Vienok, daugumoje atvejų, iš abstraktaus *n* viršūnių grafo gauname *n*! žymėtųjų grafų.

Grafų izomorfizmo nustatymo uždavinys. Dažnai labai svarbu nustatyti faktą, ar du žymėtieji grafai yra izomorfiniai. Tai NP pilnas uždavinys [GD82], neturintis efektyvaus sprendimo algoritmo.

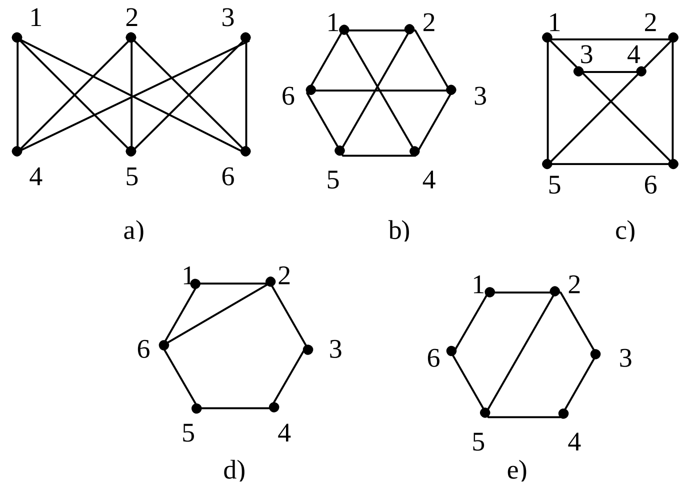
Aišku, kad du žymėtieji grafai yra izomorfiniai, jei galima vieno grafo viršūnes pernumeruoti taip, kad abiejų grafų briaunų aibės sutaptų. Šis pernumeravimas ir apibrėžia aukščiau minėtą bijekciją. Iš to išplaukia tokios būtinos izomorfizmo sąlygos:

- izomorfinių grafų viršūnių laipsnių, išrikiuotų mažėjimo (didėjimo) tvarka, sekos sutampa;
- izomorfinių grafų gretimumo matricos yra panašios, t.y. jų tikrinės reikšmės yra lygios (žr. 2.7 paragrafą).

Tačiau reikia pabrėžti, kad šios sąlygos yra būtinos, bet nepakankamos.

Pastaba. Dviejų grafų izomorfizmo nustatymo algoritmas, besiremiantis daliniu visų $n!$ variantų perrinkimu, detaliai išdėstytas literatūroje [RND80, 396 – 402 psl.].

Pavyzdys. Panagrinėkime 2.6.1 pav. ir 2.6.2 pav. pavaizduotus grafus. Pirmiausia jų viršūnėms priskirsime žymes – numerius (žr. 2.6.4 pav.).



2.6.4 pav. **Žymėtųjų grafų izomorfizmas**

Nesunku pastebėti, kad iš b) grafo gausime a) grafą, b) grafo viršūnes pernumeravę taip:

1 2 3 4 5 6 a),
1 5 3 4 2 6 b),

t.y. b) grafo 2-osios viršūnės numerį pakeisime 5-uoju numeriu ir 5-osios viršūnės numerį pakeisime 2-uoju numeriu.

Bijekcija, pevedanti c) grafą į a) grafą, yra

1 2 3 4 5 6 a),
1 4 6 2 5 3 c).

Nors grafų d) ir e) viršūnių laipsnių, išrikiuotų mažėjimo tvarka, sekos yra tos pačios, tačiau jų gretimumo matricos nėra panašios, t.y. šių gretimumo matricų tikrinės reikšmės yra nelygios. Grafo d) gretimumo matricos tikrinės reikšmės yra 2.43828 ,0.61803, -0.82025, -1.61803, -1.75660, 1.13856, o grafo e) gretimumo matricos tikrinės reikšmės yra: 0.41421, -0.41421, -1.00000, 2.41421, -2.41421, 1.00000.

2.7. Grafo vaizdavimo kompiuteryje būdai

Aišku, kad žmogui patogiausias ir suprantamiausias grafų vaizdavimo būdas, kai grafai vaizduojami plokštumoje taškų (viršūnių) ir juos jungiančių linijų (briaunų) pavidalu, yra visiškai nepriimtinas, jei mes norime spręsti grafų teorijos uždavinius kompiuteriu. Vienokios ar kitokios duomenų struktūros pasirinkimas turi esminę įtaką algoritmų efektyvumui. Todėl čia aptarsime ir įvertinsime įvairias grafo vaizdavimo kompiuteryje duomenų struktūras.

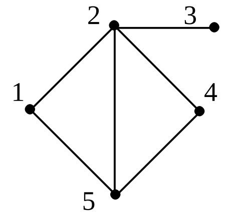
Aptarsime (n,m)-grafo $G=(V,U)$ vaizdavimo būdus (duomenų struktūras), kurias vertinsime remdamiesi tokiais kriterijais: 1) vaizdavimui reikalingos informacijos apimtis, 2) galimybė padaryti klaidą, 3) kaip sužinoti viršūnes, gretimas pasirinktai viršūnei, t.y. gretimų viršūnių išrinkimas.

Gretimumo matrica. Grafo $G=(V,U)$ gretimumo matrica yra kvadratinė n-osios eilės matrica $S=[s_{ij}],\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$, kurios elementas s_{ij} apibrėžiamas taip

$$s_{ij}=\begin{cases}1, \text{ jei viršūnės } i \text{ ir } j \text{ yra gretimos},\\ 0, \text{ priešingu atveju.}\end{cases}$$

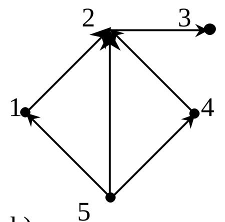
Neorientuotojo grafo gretimumo matrica yra simetrinė, o orientuotojo – nesimetrinė. Gretimumo matricos i-tojoje eilutėje vienetukų skaičius yra lygus i-tosios viršūnės laipsniui neorientuotojo grafo atveju ir išėjimo puslaipsniui – orientuotojo grafo atveju. Pavyzdžiui, 2.7.1 paveiksle pavaizduoti grafai ir juos atitinkančios gretimumo matricos.

Kap buvo minėta aukščiau, iš grafų izomorfizmo apibrėžimo išplaukia išvada, kad izomorfinių grafų gretimumo matricos gaunamos viena iš kitos nuosekliai sukeičiant vietomis eilutes ir stulpelius bijekcijoje nurodyta tvarka. Pavyzdžiui, 2.6.4 b) pav. grafo gretimumo matrica yra gaunama iš 2.6.4 a) pav. grafo gretimumo matricos nuosekliai sukeičiant 2-ąją ir 5-ąją eilutes bei 2-ąjį ir 5-ąjį stulpelius.



a)

$$S = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



b)

$$S = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2.7.1 pav. **Grafų gretimumo matricos**

$$S_a = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Sukeitus 2-ąją ir 5-ąją eilutes, gausime

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Sukeitus 2-ąjį ir 5-ąjį stulpelius, gausime 2.6.4 b) grafo gretimumo matricą

$$S_b = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Kadangi bijekciją φ nusako perstatymų matrica

$$P = [p_{ij}],\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\ p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jei } i = \varphi(j), \\ 0, \text{ priešingu atveju,} \end{cases}$$

tai tokį eilučių ir stulpelių sukeitimą vietomis gausime matricą S_a padauginus iš matricos P, t.y.

$$S_b = P \cdot S_a \cdot P,$$

čia

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Kadangi $P^{-1} = P$, tai S_b ir S_a yra panašios, o panašių matricų tikrinių reikšmių aibės yra lygios.

Įvertinkime grafo vaizdavimą gretimumo matrica pagal aukščiau minėtus kriterijus.

Informacijos apimtis. Gretimumo matrica turi n^2 elementų ir paprastai ji yra reta, t.y. vienetukų skaičius žymiai mažesnis nei nulių skaičius.

Galimybė padaryti klaidą, užrašant matricą S, yra labai didelė, esant didesniam viršūnių skaičiui.

Viršūnės, gretimos viršūnei k, randamos taip:

for j := 1 *to n do*
    if s[*k*, *j*] = 1 *then "j-oji viršūnė gretima viršūnei k".*

Pagal šiuos kriterijus gretimumo matrica turi daugiau teorinę nei praktinę reikšmę.

Incidencijų matrica. (n, m) – grafo $G = (V, U)$ incidencijų matrica yra stačiakampė $(n \times m)$ formato matrica $A = [a_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, ir jos elementas a_{ij} neorientuotojo grafo atveju apibrėžiamas taip:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jei } i\text{ - toji viršūnė incidentiška } j\text{ - ajai briaunai}, \\ 0, \text{ priešingu atveju}, \end{cases}$$

o orientuotojo grafo atveju –

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jei } i\text{ - oji viršūnė yra } j\text{ - ojo lanko pradžia}, \\ -1, \text{ jei } i\text{ - oji viršūnė yra } j\text{ - ojo lanko galas}, \\ 0, \text{ jei } i\text{ - oji viršūnė neincidentiška } j\text{ - ajam lankui}. \end{cases}$$

Pavyzdžiui, grafams, pavaizduotiems 2.7.1 paveiksle, incidencijų matricos, jei briaunos (lankai) sunumeruoti tokia tvarka (1, 2), (1, 5), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (4, 5), yra:

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{grafui 2.7.1 a) ir}$$

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{grafui 2.7.1 b).}$$

Informacijos apimtis. Kaip ir gretimumo matricos atveju, incidencijų matrica turi $n \cdot m$ elementų ir yra reta.

Galimybė padaryti klaidą yra didelė prie didesnių *n* ir *m* reikšmių.

Viršūnės, gretimos viršūnei k, neorientuotojo grafo atveju randamos taip:

```
for j := 1 to m do
    if a[k, j] = 1 then for i := 1 to n do
        if ( a[i, j] = 1) and ( i <> k ) then "viršūnė i yra gretima viršūnei k";
```

Pastaba. Orientuotojo grafo atveju sąlyga “$a[i, j] = 1$” turi būti pakeista sąlyga “$a[i, j] = -1$”.

Pagal šiuos kriterijus incidencijų matrica yra dar blogesnis grafo vaizdavimo būdas nei gretimumo matrica ir turi daugiau teorinę nei praktinę reikšmę.

Briaunų* (*lankų*) *matrica. $(2 \times m)$ formato matrica B vadinama briaunų (lankų) matrica, jei (b_{1j}, b_{2j}), $j = \overline{1, m}$ yra j-oji grafo briauna (lankas). Orientuotojo grafo atveju b_{1j} žymi j-ojo lanko pradžią, o b_{2j} – j-ojo lanko pabaigą.

Pavyzdžiui, 2.7.1 a) pav. pavaizduoto neorientotojo grafo briaunų matrica yra

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

o 2.7.1 b) pav. pavaizduoto orientotojo grafo lankų matrica yra

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Informacijos apimtis. Informacijos apimtis – minimali, matricos elementų skaičius yra $2m$.

Galimybė padaryti klaidą nėra didelė, nes grafo briaunų (lankų) išvardinimas yra natūralus ir priimtinas žmogui. Be to, briaunų išdėstymo tvarka matricoje B yra laisva.

Viršūnės, gretimos viršūnei k, neorientuotojo grafo atveju randamos taip:

```
for j := 1 to m do
   begin
      if b[1, j] = k then “viršūnė b[2, j] gretima viršūnei k”;
      if b[2, j] = k then “viršūnė b[1, j] gretima viršūnei k”;
   end;
```

o orientuotojo grafo atveju –

```
for j := 1 to m do
      if b[1, j] = k then “viršūnė b[2, j] gretima viršūnei k”;
```

Kaip matyti, briaunų (lankų) matrica yra patogus ir kompaktiškas grafo užrašas, tačiau gretimų viršūnių radimas – sudėtingas.

Gretimumo struktūra. Gretimumo struktūra – tai viršūnėms gretimų viršūnių aibių (viršūnių aplinkų) šeima.

2.7.1 a) grafo gretimumo struktūra yra:

1: {2, 5};
2: {1, 3, 4, 5};
3: {2};

4: {2, 5};
5: {1, 2, 4};
2.7.1 b) grafo gretimumo struktūra yra:
1: {2};
2: {3};
3: ∅;
4: {2};
5: {1, 2, 4};

Gretimumo struktūrą kompiuteryje galima vaizduoti įvairiomis duomenų struktūromis. Pavyzdžiui, galima vaizduoti $(n \times \max_{v \in V} d(v))$ formato matrica, čia $d(v)$ – n-tosios viršūnės laipsnis. Tada matricos k-osios eilutės nenuliniai elementai yra viršūnei k gretimos viršūnės.

Gretimumo struktūrą galima vaizduoti ir vienryšių sąrašų šeima. Kiekvienas vienryšis sąrašas nusakys gretimų viršūnių aibę.

Gretimumo struktūros ***informacijos apimtis*** yra minimali, o ***klaidos tikimybė*** užrašant struktūrą – nedidelė.

Tarkime, kad gretimumo struktūra užrašyta matrica $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, \max_{v \in V} d(v)}$ (informacijos apimties požiūriu matrica nėra optimalus gretimumo struktūros užrašymo būdas). Tada ***viršūnei k gretimos viršūnės*** gaunamos taip:

for j := 1 *to* $\max_{v \in V} d(v)$ *do*

if t [*k, j*] ≠ 0 *then "t* [*k, j*] *viršūnė gretima viršūnei k"*;

Pastaba. Tolesniame dėstyme, formaliai užrašant algoritmus, naudosime gretimumo struktūrą. Kaip minėjome aukščiau, simboliu *N*(*v*) žymėsime viršūnės *v* gretimų viršūnių aibę. Todėl, norėdami pasakyti, kad "***nagrinėjame viršūnes, gretimas viršūnei v***", rašysime:

for u ∈ *N* (*v*) *do* "*nagrinėti viršūnę u*".

Nuoseklaus peržiūrėjimo masyvas. Tai masyvas, turintis $n + 2m$ elementų neorientuotojo grafo atveju ir $n + m$ – orientuotojo grafo atveju, ir kuris sudaromas taip: iš eilės, pradedant pirmąja viršūne ir baigiant paskutiniąja, kiekvienai viršūnei rašomas viršūnės numeris su minuso ženklu, o po jo rašomos tai viršūnei gretimos viršūnės. Jei šį masyvą pažymėsime simboliu *P*, tai 2.7.1 pav. grafams gausime:

$P: -1, 2, 5, -2, 1, 3, 4, 5, -3, 2, -4, 2, 5, -5, 1, 2, 4;$

$P: -1, 2, -2, 3, -3, -4, 2, -5, 1, 2, 4.$

Norėdami rasti viršūnes, ***gretimas viršūnei k***, turėsime masyve P rasti elementą, lygų $-k$, tada po jo einantys teigiami masyvo elementai bus viršūnės, gretimos viršūnei k. Formaliai šį veiksmą galima užrašyti taip:

i := 1;
while p[*i*] ≠ –*k do i* := *i* + 1;
l := *i* + 1;
while p [*l*] > 0 *do begin "viršūnė p* [*l*] *yra gretima viršūnei k"*;
l = *l*+1
end;

Vertinant šį grafo vaizdavimo būdą pagal aukščiau minėtus kriterijus, galima pasakyti, kad ***informacija kompaktiška***, ***suklydimo galimybė*** nėra didelė, tačiau ilgas ***gretimų viršūnių išrinkimas***. Todėl žymiai efektyvesnis yra žemiau pateiktas grafo užrašas, kurį vadinsime tiesioginių nuorodų masyvais arba briaunų (lankų) ir jų adresų masyvais.

***Briaunų* (*lankų*) *ir jų adresų masyvai* (*Tiesioginių nuorodų masyvai*).** Briaunų (lankų) masyvas L turi $2m$ elementų (neorientuotiesiems grafams) ir m elementų (orientuotiesiems grafams). Jis sudaromas taip: nuosekliai pradedant pirmąja viršūne ir baigiant paskutiniąja, iš eilės kiekvienai viršūnei surašomos jai gretimos viršūnės, t.y. masyvas L gaunamas iš nuoseklaus peržiūrėjimo masyvo P pašalinus neigiamus elementus.

2.7.1 a) pav. grafui masyvas L bus toks:

$$L:\ \overset{1}{2},\ \overset{2}{5},\ \overset{3}{1},\ \overset{4}{3},\ \overset{5}{4},\ \overset{6}{5},\ \overset{7}{2},\ \overset{8}{2},\ \overset{9}{5},\ \overset{10}{1},\ \overset{11}{2},\ \overset{12}{4};$$

o 2.7.1 b) pav. grafui –

$$L:\ \overset{1}{2},\ \overset{2}{3},\ \overset{3}{2},\ \overset{4}{1},\ \overset{5}{2},\ \overset{6}{4}.$$

Skaičiai virš elementų rodo jų vietą (adresą) masyve L.

Turint tik masyvą L sužinoti viršūnes, gretimas viršūnei k, yra neįmanoma. Todėl įvedamas antras – viršūnių adresų masyvas lst, turintis $n + 1$ elementą. Šis masyvas sudaromas taip:

$lst[1] := 0;$

$lst[i + 1] := lst[i] + d[i],\ i = \overline{1, n}$,

čia $d[i]$ – i-osios viršūnės laipsnis. Aišku, kad $lst[k]$ parodo, kiek reikia praleisti masyvo L elementų, kad rastume viršūnes, gretimas viršūnei k. Vadinasi, viršūnės, gretimos viršūnei k, masyve L yra išsidėstę pradedant adresu $lst[k] + 1$ ir baigiant adresu $lst[k + 1]$.

2.7.1 a) pav. grafui masyvas lst bus:

$$lst:\ \overset{1}{0},\ \overset{2}{2},\ \overset{3}{6},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{9},\ \overset{6}{12},$$

o 2.7.1 b) pav. grafui –

$$\begin{array}{r|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline lst: & 0, & 1, & 2, & 2, & 3, & 6. \end{array}$$

Tuo būdu viršūnės, ***gretimos viršūnei k***, randamos taip:

for i := *lst*[*k*] + 1 *to lst*[*k* + 1] *do*
begin
u := *L*[*i*];
viršūnė u gretima viršūnei k;
end;

Šis grafo užrašymo būdas yra ***kompaktiškas***, o ***gretimų viršūnių išrinkimas yra efektyvus***, tačiau, rašant masyvus *L* ir *lst*, ***lengva padaryti klaidų***. Todėl paprastai informacija apie grafą įvedama briaunų masyvu, o masyvai *L* ir *lst* apskaičiuojami programiškai.

Žemiau aptarsime algoritmą, pervedantį grafo užrašą iš briaunų matricos į tiesioginės nuorodos masyvus.

Procedūra, pervedanti neorientuotojo grafo užrašą iš briaunų matricos į masyvus L ir lst

procedure ***BLlst*** (*n*, *m* : *integer*; *b* : *matr*; *var L*, *lst* : *mas*);
{ *Procedūra* ***BLlst*** *perveda neorientuotojo grafo briaunų matricą į tiesioginių nuorodų masyvus L ir lst*.
Formalūs parametrai:
n – grafo viršūnių skaičius,
m – grafo briaunų (*lankų*) *skaičius*,
b – grafo briaunų matrica;
(*b* [1, *j*], *b* [2, *j*]) *– j-toji grafo briauna*;
L, *lst – grafą nusakantys tiesioginių nuorodų masyvai*.
Vidiniai kintamieji:
d[1..*n*] *– viršūnių laipsnių masyvas*;
d[*i*] *– i-osios viršūnės laipsnis*.
fst[1..*n*] *– adresų masyvas*;
pradžioje fst [*i*] = *lst* [*i*] + 1, *i* = 1, 2, ..., *n*. *fst*[*i*] *– tai adresas masyve L*, *kur turi būti talpinamas numeris pirmos viršūnės*, *gretimos viršūnei i*. }
var i, *j*, *k* : *integer*;
fst, *d* : *mas*;
begin
{ *Viršūnių laipsnių apskaičiavimas*. }
for i := 1 *to n do d* [*i*] := 0;
for i := 1 *to* 2 *do* {*}
for j := 1 *to m do*

```
        begin
            k := b [i, j];
            d [k] := d [k] + 1;
        end;
{ Masyvo lst formavimas }
lst [1] := 0;
for i: = 1 to n do lst [i + 1] := lst [i] + d [i];
{ Masyvo L formavimas }
for i: = 1 to n do fst [i]:=lst [i] + 1;
for j := 1 to m do
    begin
        k := b[1 ,j];
        L [fst [k]] := b [2, j];
        fst [k] := fst [k] + 1;
        k := b [2, j];            {**}
        L [fst [k]] := b [1, j];     {**}
        fst [k] := fst [k] + 1;      {**}
    end;
end;
```

Norėdami pervesti orientuotojo grafo užrašą iš lankų matricos į masyvus *L* ir *lst*, aukščiau pateiktą procedūrą reikėtų truputį modifikuoti – pašalinti žvaigždute pažymėtus operatorius, t.y.:

- apskaičiuojant viršūnių laipsnius, reikia pašalinti žvaigždute (*) pažymėtą operatorių;
- formuojant masyvą *L*, reikia pašalinti dviejomis žvaigždutėmis (**) pažymėtus operatorius.

Kokį iš išvardytų grafo užrašų naudoti? Atsakymas į šį klausimą priklauso nuo sprendžiamo uždavinio. Jei uždavinio sprendimo metodas reikalauja žinoti gretimas viršūnes, tai labai patogūs *L* ir *lst* masyvai. Jei – reikalauja nagrinėti briaunas, patogu grafą vaizduoti briaunų matrica. Todėl tolesniame dėstyme, formaliai užrašant algoritmus, dažnai naudosime gretimumo struktūrą, o detaliems algoritmams naudosime arba briaunų matricą, arba masyvus *L* ir *lst*.