Grafų teorija, konspektas

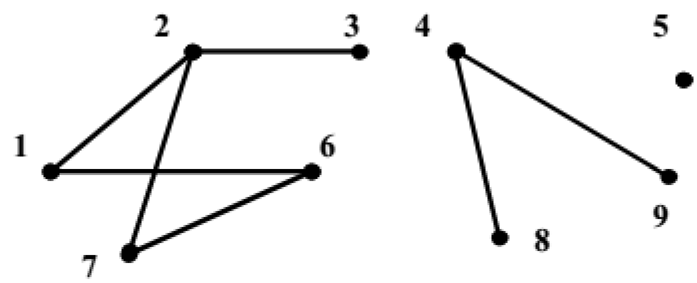
G = (V,U)
V - viršūnių aibė (Grafo eilė aibės ilgis)
U - briaunų aibė (lankų, orientuoto grafo atveju)

Gretimos viršūnės – turi bendrą briauną (naudojamas su tos pačios rūšies objektais)
Incidentiška viršūnė v yra briaunai, jei v yra briaunoje ir atvirkščiai
Neorientuotas, Orientuotas, Mišrusis grafai (tik briaunos, tik lankai, gali būti abu)
Multigrafas viršūnės jungiamos keliomis briaunomis
Pilnasis grafas – visos viršūnės jungiasi su visomis
Viršūnės laipsnis – viršūnės gretimų viršūnių skaičius
Viršūnės puslaipsnis (iėjimo/ išėjimo)

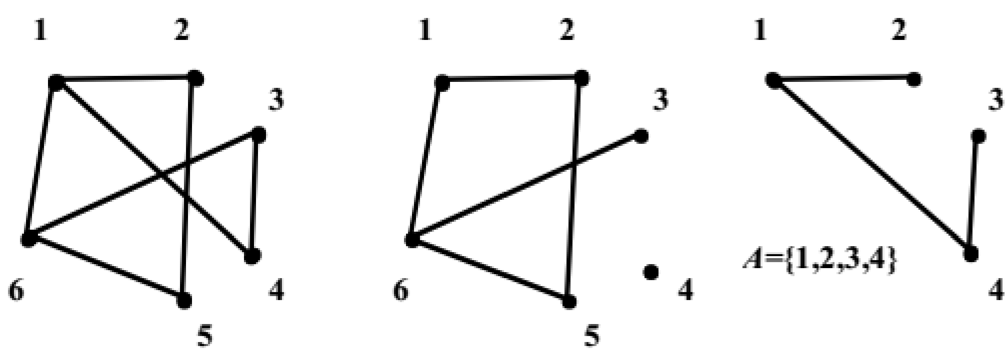
Seka $\rho(v_1)$, $\rho(v_2)$, ... ,$\rho(v_n)$ vadinama ***grafo viršūnių laipsnių*** seka. Yra paprastas ryšys tarp grafo briaunų skaičiaus m ir jo viršūnių laipsnių: $m = \frac{1}{2}\sum_{v\in V}\rho(v)$, t.y. grafo briaunų skaičius yra lygus visų jo viršūnių laipsnių sumos pusei. Iš čia išplaukia išvada, kad nelyginio laipsnio viršūnių skaičius yra lyginis.

Pilnojo grafo visų viršūnių laipsniai yra lygūs ir lygūs (n-1). Vadinasi, pilnojo grafo briaunų skaičius $m = \frac{n(n-1)}{2}$

Reguliarusis grafas – visi viršūnių laipsniai yra lygūs
Neorientuotas (Orientuotas)
Grandinė (Kelias) – gretimų briaunų seka
Ciklas (Konturas) – grandinės 1 ir paskutinė viršūnės sutampa
Rūšys:
  Elementarus – eina per skirtingas viršūnes
  Paprastas – eina per skirtingas briaunas
Dalinis grafas – ta pati viršūnių aibė, briaunų poaibis
(Indukuotasis) Pografis – viršūnių ir jų briaunų poaibis



2.2.4 pav. Jungiosios komponentės



a) b) c)

2.2.3 pav. Grafas, dalinis grafas ir pografis

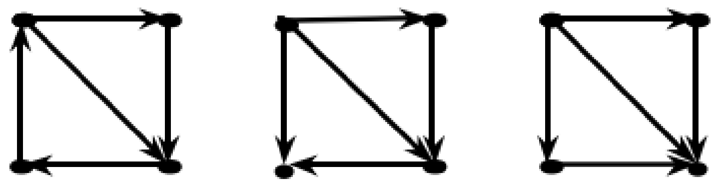
Orientuotasis stipriai, vienakryptiškai, silpnai jungus

Orientuotasis grafas G yra ***stipriai jungus***, jeigu bet kokios dvi viršūnės x ir y yra pasiekiamos viena iš kitos. Kitaip tariant, iš bet kurios viršūnės x galime nukeliauti į bet kurią viršūnę y ir atvirkščiai.

Orentuotasis grafas yra ***vienakryptiškai jungus***, jeigu bet kokiai porai viršūnių x ir y, jos yra pasiekiamos bent viena kryptimi, t.y. arba y pasiekiama iš viršūnės x, arba x pasiekiama iš viršūnės y.

Orientuotasis grafas yra ***silpnai jungus***, jei yra jungus neorientuotasis grafas gautas iš orientuotojo, pakeitus lankus briaunomis.

2.2.5 a), b) ir c) pav. atitinkamai pavaizduotas stipriai jungus grafas, vienakryptiškai jungus grafas ir silpnai jungus grafas.



a) b) c)

Atstumas – trumpiausios grandinės jungiančios viršūnes ilgis d(x,y)

k-atis grafo laipsnis

Įvesta atstumo sąvoka leidžia apibrėžti ***k-tąjį grafo laipsnį***. Tarkime G – jungusis grafas, o k- natūralusis skaičius. Tada k- tasis grafo laipsnis G^k yra grafas, kurio viršūnių aibė sutampa su grafo G viršūnių aibe, viršūnės u ir v ($u \neq v$) jungiamos briauna, jei $d(u,v) \leq k$. Aišku, jei $k \geq |V|$-1, tai G^k – pilnasis grafas.

Ekscentricitetas, Grafo spindulys, skersmuo

Viršūnės v ekscentricitetas. Viršūnės v ekscentricitetas, tai dydis, apskaičiuojamas pagal formulę

$$e(v) = \max_{u \in V} d(v,u) ,$$

t.y. ilgiausios grandinės nuo viršūnės v iki likusių grafo viršūnių ilgis.

Grafo spindulys **–** tai skaičius, apibrėžiamas formule

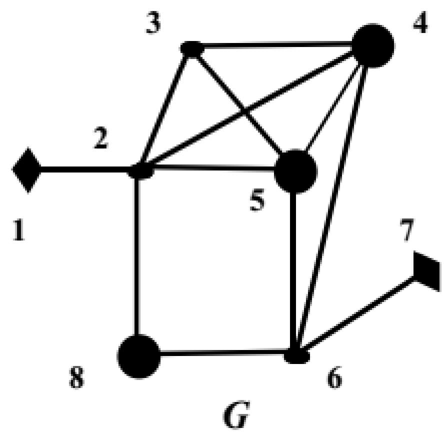
$$r(G) = \min_{v \in V} e(v) ,$$

t.y. skaičius, lygus mažiausiam viršūnių ekscentricitetui.

Grafo skersmuo **–** tai skaičius, kurį nusako formulė $d(G) = \max_{v \in V} e(v)$,

t.y. skaičius, lygus didžiausiam viršūnių ekscentricitetui.

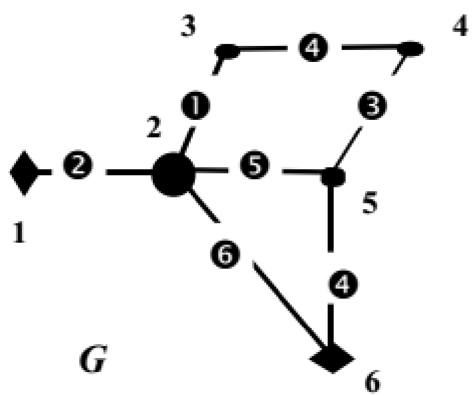
Periferinės viršūnės – ekscentritetas lygūs grafo skermeniui
Skermens grandinė – jungia 2 periferines viršūnes
Centro viršūnė – viršūnės ekscentritetas yra lygūs grafo spinduliui
Svorinis grafas – grafas, kurio briaunos turi reikšmė, kurį daro įtaką atstumui (**Briaunos svoris**)



e_1=max(d(1,1),d(1,2),d(1,3),d(1,4),d(1,5),d(1,6),d(1,7),d(1,8))
=max(0,1,2,2,2,3,4,2)=4
e_2=max(1,0,1,1,1,2,3,1)=3
e_3=max(2,1,0,1,1,2,3,2)=3
e_4=max(2,1,1,0,1,1,2,2)=2
e_5=max(2,1,1,1,0,1,2,2)=2
e_6=max(3,2,2,1,1,0,1,1)=3
e_7=max(4,3,3,2,2,1,0,2)=4
e_8=max(2,1,2,2,2,1,2,0)=2

Grafo skersmuo $d(G)$=4
grafo spindulys $r(G)$=2
skersmens grandinės
(1,2,5,6,7), (1,2,8,6,7),
(1,2,4,6,7)
periferinės viršūnės {1,7}
grafo centras {4,5,8}

2.4.1 pav. Besvorinio grafo metrinės charakteristikos



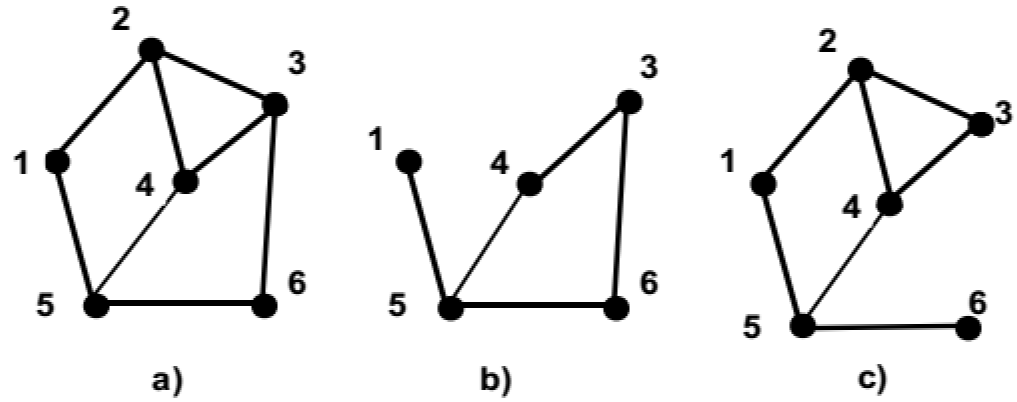
e_1=max(d(1,1),d(1,2),d(1,3),d(1,4),d(1,5),d(1,6))
=max(0,2,3,7,7,8)=8
e_2=max(2,0,1,5,5,6)=6
e_3=max(3,1,0,4,6,7)=7
e_4=max(7,5,4,0,3,7)=7
e_5=max(7,5,6,3,0,4)=7
e_6=max(8,6,7,7,4,0)=8

Grafo skersmuo $d(G)$=8
grafo spindulys $r(G)$=6
skersmens grandinė
(1,2,6)
periferinės viršūnės {1,6}
grafo centras {2}

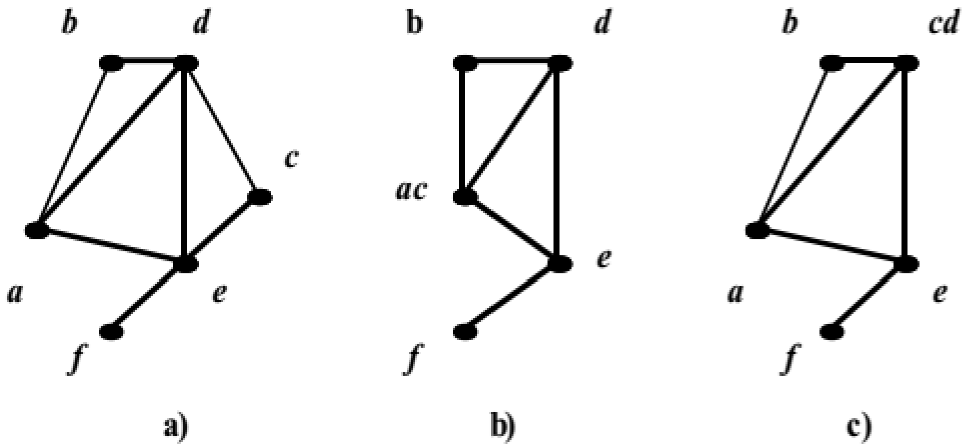
2.4.2 pav. Svorinio grafo metrinės charakteristikos

Veiksmai su grafais

Viršūnės šalinimas
Briaunos šalinimas
Viršūnių sutapatinimas
Briaunos sutraukimas



2.5.1 pav. Grafo viršūnės ir briaunos šalinimas

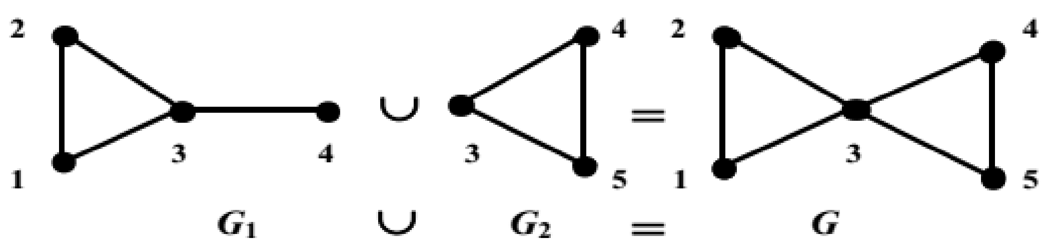


2.5.2 pav. Grafo viršūnių sutapatinimas ir briaunos sutraukimas

Viršūnės išskaidymas
Grafų sąjunga, Grafų sandauga

Grafų sąjunga. Tai viena iš svarbiausių grafų operacijų. Tarkime, kad duoti grafai $G_1=(V_1,U_1)$ ir $G_2=(V_2,U_2)$. Tada grafas $G=(V,U)$ yra šių grafų sąjunga (žymime $G=G_1 \cup G_2$), jei $V=V_1 \cup V_2$, o $U=U_1 \cup U_2$. Jei $V_1 \cap V_2=\varnothing$, tai grafų G_1 ir G_2 sąjunga vadinama ***disjunktyvine sąjunga***.

2.5.6 pav. Pavaizduota grafų G_1 ir G_2 sąjunga.

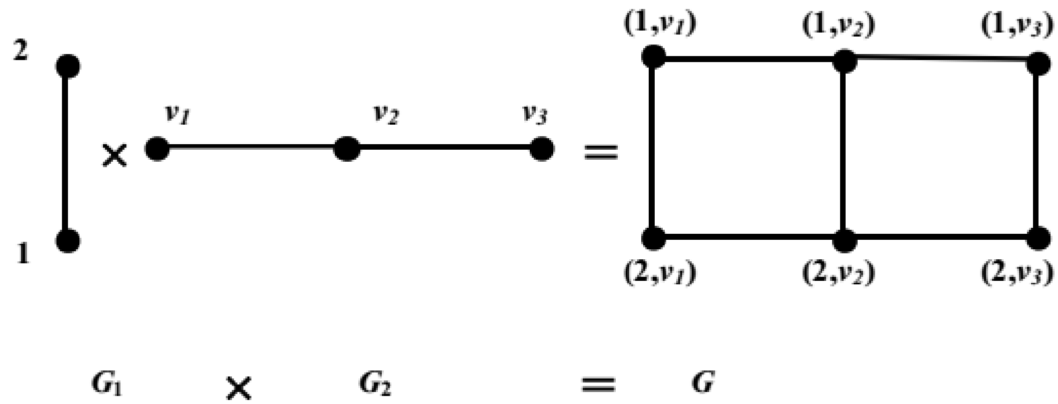


Grafų sandauga. Grafų $G_1=(V_1,U_1)$ ir $G_2=(V_2,U_2)$ sandaugos grafas $G=(V,U)$ (žymime $G=G_1\times G_2$) apibrėžiamas taip:

1) $V=V_1\times V_2$ - aibių Dekarto sandauga,
2) Viršūnė (a,b) jungiama su viršūne (c,d), jeigu:
   a) $a=c$ ir $(b,d)\in U_2$ arba
   b) $b=d$ ir $(a,c)\in U_1$.

Aišku, kad grafo G viršūnių skaičius yra lygus $|V_1|\cdot|V_2|$, t.y. $|V|=|V_1|\cdot|V_2|$, o $|U|=|V_1|\cdot|U_2|+|V_2|\cdot|U_1|$.

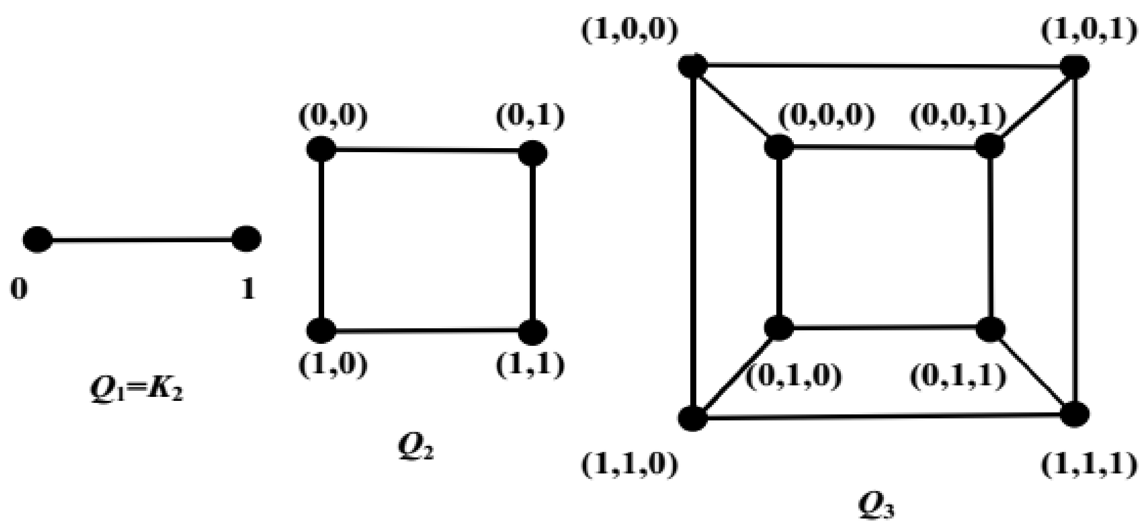
2.5.7 pav.parodyta grafų G_1 ir G_2 sandauga.



2.5.7 pav. Grafų G_1 ir G_2 sandauga

N-mačiai kubai

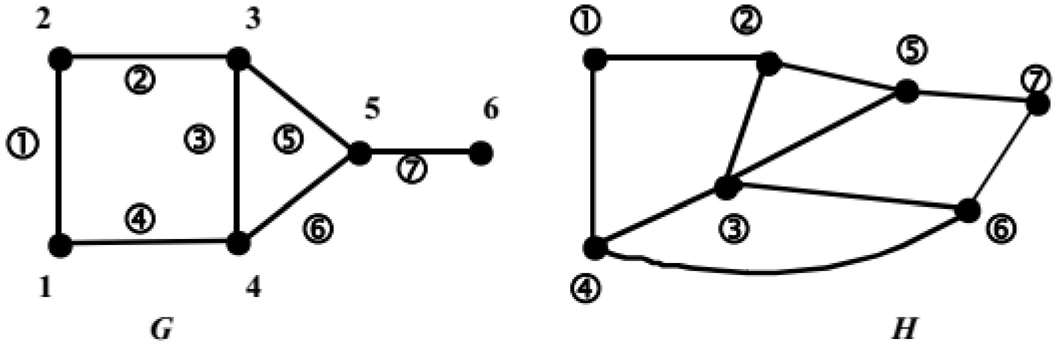
Naudojant sandaugos operaciją, apibrėžiama svarbi grafų klasė – ***n-mačiai kubai***, kurie žymimi simboliu Q_n. Šie kubai apibrėžiami rekurentine formule: $Q_1=K_2$; $Q_n=K_2\times Q_{n-1}$, $n>1$. 2.5.8 pav. parodyti kubai Q_1, Q_2 ir Q_3.



2.5.8 pav. n-mačių (n =1,2,3) kubų pavyzdžiai

Papildomasis grafas – atlikus grafų sąjungą papildo grafą iki pilnojo

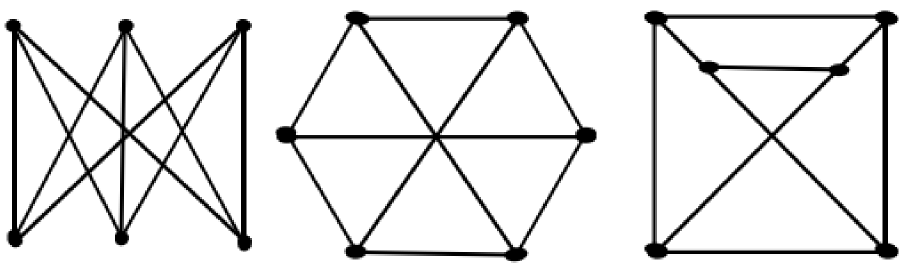
Briauninis grafas



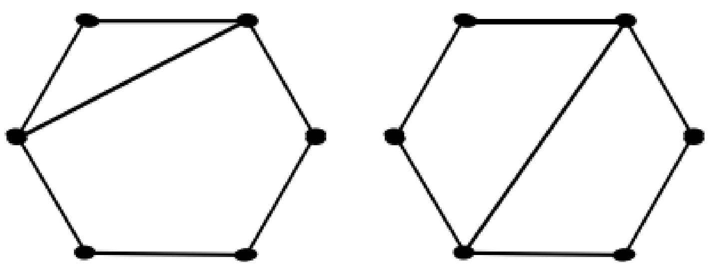
2.5.10 pav. Grafas *G* ir jo briauninis grafas *H*

Izomorfiniai grafai

Jei grafai yra izomorfiniai, tai rašome $G \cong H$. Pavyzdžiui, 2.6.1 pav. pavaizduoti trys izomorfiniai grafai, 2.6.2 pav. du neizomorfiniai grafai.



2.6.1 pav. Izomorfiniai grafai



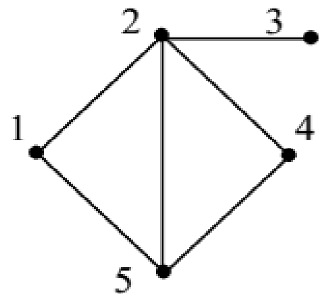
2.6.2 pav. Neizomorfiniai grafai

Abstraktus grafas – žymi visą izomorfinių grafų klasę

Žymėtasis grafas – grafas su sužymėtomis viršūnėmis

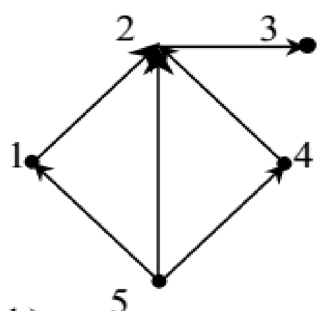
Grafo vaizdavimo kompiuteryje būdai

Gretimumo, indentacijų matrica



a)

$$S = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



b)

$$S = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

2.7.1 pav. **Grafų gretimumo matricos**

Pavyzdžiui, grafams, pavaizduotiems 2.7.1 paveiksle, incidencijų matricos, jei briaunos (lankai) sunumeruoti tokia tvarka (1, 2), (1, 5), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (4, 5), yra:

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$ grafui 2.7.1 a) ir

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$ grafui 2.7.1 b).

Briaunų (lankų) matrica

Pavyzdžiui, 2.7.1 a) pav. pavaizduoto neorientotojo grafo briaunų matrica yra

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

o 2.7.1 b) pav. pavaizduoto orientotojo grafo lankų matrica yra

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gretimumo struktūra

Gretimumo struktūra. Gretimumo struktūra – tai viršūnėms gretimų viršūnių aibių (viršūnių aplinkų) šeima.

2.7.1 a) grafo gretimumo struktūra yra:

1: {2, 5};
2: {1, 3, 4, 5};
3: {2};
4: {2, 5};
5: {1, 2, 4};

2.7.1 b) grafo gretimumo struktūra yra:

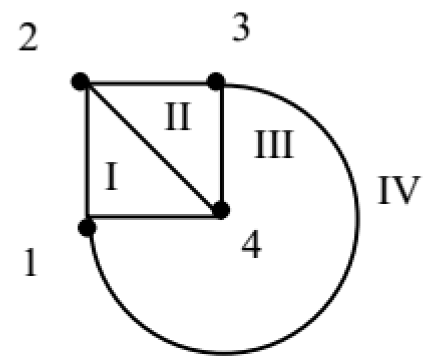
1: {2};
2: {3};
3: $\varnothing$;
4: {2};
5: {1, 2, 4};

Briaunų (lankų) ir jų adresų masyvai (Tiesioginių nuorodų masyvai)

Iš eilės surašytos viršūnių kaimynės

Iš eilės surašyti viršūnių masyve rėžiai

Dvidalis (Bipartite) grafas – grafas, kuris neturi nelyginio ilgio elementariųjų ciklų, ir išskaidžius jo viršūnių aibę į 2 dalis, visų viršūnių briaunų galai priklausys skirtingoms aibėms
pasirinkti viršūnę ir pagal atstumus (lyginis/nelyginis) ir tikrinti briaunas, jeigu briaunos viršūnės nėra vienoje aibėje, grafas nėra dvidalis
m – briaumų skaičius
n – viršūnių skaičius
p – jungiųjų komponenčių skaičius
Ciklomatinis skaičius = m – n + p
Atvirkštinė briauna – briauna, kuri nepriklauso dengiančiojo medžio briaunų aibei
Chromatinis skaičius (spalvinis) – mažiausias skaičius spalvų skaičius reikalingas nudažyti grafą
Nepriklausomoji aibė – grafo viršūnių aibė kurioje visos viršūnės nėra gretimos
Nepriklausomumo skaičius (vid. stabilumo) – didžiausios nepriklausomosios aibės elementų skaičius
Dominuojančioji aibė – visos viršūnės, iš kurių galima pasiekti kitas viršūnes per 1 žingsnį
Minimalioji dominuojančioji aibė – kuri neturi dominuojančių poaibių
Dominavimo skaičius (išorinio stabilumo) – mažiausios dominuojančiosios aibės elementų skaičius
Grafo branduolys – aibė kuri yra ir dominuojanti ir nepriklausoma
Viršūninis denginys – viršūnių aibė, ir kiekviena grafo briauna yra incidentiška viršūnei iš tos aibės
Viršūninio denginio skaičius – mažiausio viršūninio denginio elementų skaičius
Grafo siena
Minimalusis ciklas – ciklas, ribojantis grafo sieną
Oilerio formulė: sienos – briaunos + viršūnės = 2



Nepriklausomumo skaičiaus įverčiai

1. $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} (1 + d(v))^{-1}$ (Wei).
2. $\alpha(G) \geq \frac{n}{1 + \bar{d}}$ (Myers, Liu), čia $\bar{d} = \frac{2m}{n}$ – vidutinis viršūnės laipsnis.
3. $\alpha(G) \geq \left\lceil \frac{2pn - 2m}{p(p+1)} \right\rceil$, $p = 1 + \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$ (Jeršovas, Kožuchinas).
4. $\alpha(G) \leq p^0 + \min\{p^-, p^+\}$, čia p^+, p^- ir p^0 atitinkamai grafo gretimumo matricos teigiamų, neigiamų ir nulinių tikrinių reikšmių skaičius (D.Cvetkovičius, 1973).
5. $\alpha(G) \geq \frac{n}{\max_{v \in V} d(v)}$ (Brooks).

Simboliais $\delta(G)$ ir $\Delta(G)$ atitinkamai pažymėkime grafo G mažiausią ir didžiausią viršūnių laipsnį, t.y. $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$, o $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Tada jungiajam grafui G galima nurodyti tokius chromatinio skaičiaus įverčius.

1. Grafo G chromatinis skaičius tenkina nelygybę $\gamma(G) \leq 1 + \Delta(G)$.
2. ***Brukso teorema*** (1941). Jei G – jungusis ir nepilnasis grafas, kuriam $\Delta(G) \geq 3$, tai $\gamma(G) \leq \Delta(G)$.
3. $\gamma(G) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max(d(i) + 1, i)$ (Welsh, Powell).
4. $\gamma(G) \geq \frac{n}{n - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} d^2(i)}$ (Elphick).
5. ***Teorema*** (A.P.Eršovas, G.I.Kožuchinas, 1962).

$$-\left[-n \Big/ \left[\frac{n^2 - 2m}{n} \right] \cdot \left(1 - \left\{ \frac{n^2 - 2m}{n} \right\} \Big/ \left(1 + \left[\frac{n^2 - 2m}{n} \right] \right) \right) \right] \leq$$

$$\leq \gamma(G) \leq \left[\frac{3 + \sqrt{9 + 8(m - n)}}{2} \right],$$

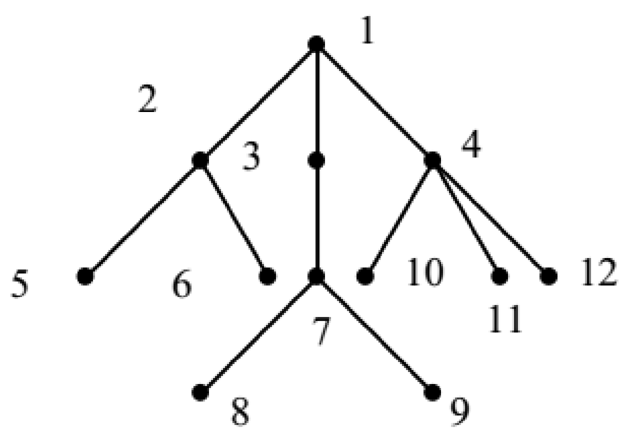
čia simbolis $[\cdot]$ žymi skaičiaus sveikąją dalį, o $\{\cdot\}$ – skaičiaus trupmeninę dalį.

Medžiai

Dengiantysis medis – aprėpia visas grafo viršūnes

Teorema. Jei (n,m)-grafas G yra medis, tai

1) G – jungusis ir neturi ciklų,
2) G – jungusis ir $m = n - 1$,
3) G – neturi ciklų ir $m = n - 1$,
4) G neturi ciklų, tačiau įvedus naują briauną, jungiančią bet kokias dvi negretimas medžio viršūnes, atsiranda vienintelis ciklas,
5) Grafas G yra jungusis, tačiau praranda šią savybę, pašalinus bet kurią briauną,
6) Bet kuri viršūnių pora sujungta grandine ir tiktai viena.

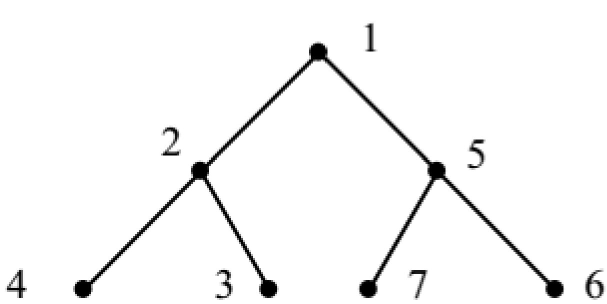


2.13.1 pav. Medis

2.13.1 pavaizduoto medžio 1-oji viršūnė vadinama ***medžio šaknimi***. Viršūnės, kurios nutolę nuo šaknies atstumu k (k – natūralusis skaičius), vadinamos ***k-tojo lygio viršūnėmis***. Medžio viršūnės, kurių laipsnis yra lygus 1, vadinamos ***kabančiomis viršūnėmis***. 2.13.1 pav. grafo 2-oji, 3-ioji ir 4-oji viršūnės yra pirmo lygio viršūnės. 5-oji, 6-oji, 8-oji, 9-oji, 10-oji, 11-oji ir 12-oji viršūnės yra kabančios viršūnės.

Medžio kodas {2,2,1,5,5} (užrašome sutrauktos briaunos likusią viršūnę)

Briaunos: (3,2) (4,2) (2,1) (1,5) (6,5) (5,7)



skirtingų Keli medžių yra n^{n-2}.

Šteinerio uždavinys – apjungti duotą aibę tokio pografiu, kad jo viršūnės būtų duotoje aibėje ir briaunų suma būtų mažiausia
Minorantas – viršūnė neturinti įeinančių lankų
Mažorantas – viršūnė neturinti išeinančių lankų
Tinklinis grafas – orientuotas grafas, be ciklų ir su 1 mažorantu ir 1 minorantu

Apibrėžimas. Orientuotojo aciklinio grafo viršūnės ***sunumeruotos teisingai***, jei kiekvienam lankui (i,j) galioja sąlyga $i<j$.

Vienas iš paprasčiausių teisingo numeravimo metodų yra rangų metodas.

Apibrėžimas. Orientuotojo aciklinio grafo viršūnės u ***rangas***, tai ilgiausias kelias (pagal lankų skaičių) nuo minorantos iki viršūnės u.

Oilerio maršrutas (Oilerio grafas) – kelias apeinantis visas grafo briaunas (1 kartą).
Oilerio grandinė – pradinė ir galinė Oilerio maršruto viršūnės nesutampa
Oilerio ciklas – pradinė ir galinė Oilerio maršruto viršūnės sutampa
Hamiltono maršrutas,ciklas,granginė – analogiškai Oileriui, apeina **viršūnes**
Viršūninio jungumo skaičius – minimalus skaičius viršūnių, kurias pašalinas grafas tampa nejungus
Briauninis jungumo skaičius – analogiškai su briaunomis
Pašalinus **sąlyčio tašką (viršūnę)** arba **tiltą (briauną)** grafas tampa nejungus