

32. Uždavinys apie stiprinimą

Grafų teorija

Vytautas Traškevičius

VU MIF, 2016 m.

Uždavinio formuluotė

- Duotas svorinis orientuotasis grafas $G=(V,U,C)$
- G neturi ciklą
- G turi vieną viršūnę, neturinčią įeinančių lankų (minorantą)
- G turi vieną viršūnę, neturinčią išeinančių lankų (mažorantą)
- Toks grafas vadinamas **tinkliniu grafu**
- Tegu lanko svoris reiškia stiprinimą
- Kelio stiprinimas – visų jo lankų stiprinimų sandauga
- Rasti kelią su didžiausiu stiprinimu tarp viršūnių s ir t
- Sprendimas panašus į uždavinio su didžiausios keliamosios galios uždaviniu

Procedūra (I variantas)

Pradžioje visos grafo viršūnės nenudažytos

~~$sum = \text{visų masyvo } c \text{ elementų suma} + 1$ (sum laikoma begalybe)~~

(pajuodintu šriftu bei perbraukimu žymimi skirtumai su didžiausios keliamosios galios uždavinu)

Užnuliname $prec$ masyvą

$prec[s] := s$ (visi keliai prasideda viršūnėje s)

Užnuliname d masyvą

$d[s] = 1$

Kol yra nenudažytų viršūnių

Nenudažytos viršūnės k , su didžiausia reikšme masyve d , paieška

Viršūnės k nagrinėjimas

Procedūra (I variantas). Viršūnės k nagrinėjimas

Nudažome viršūnę k

Kiekvienai viršūnės k kaimynei u (egzistuoja lankas (k, u) , kurio svoris yra $c(k, u)$)

~~Jei viršūnė u nenudažyta IR $d[k] * c(k, u) > d[u]$~~

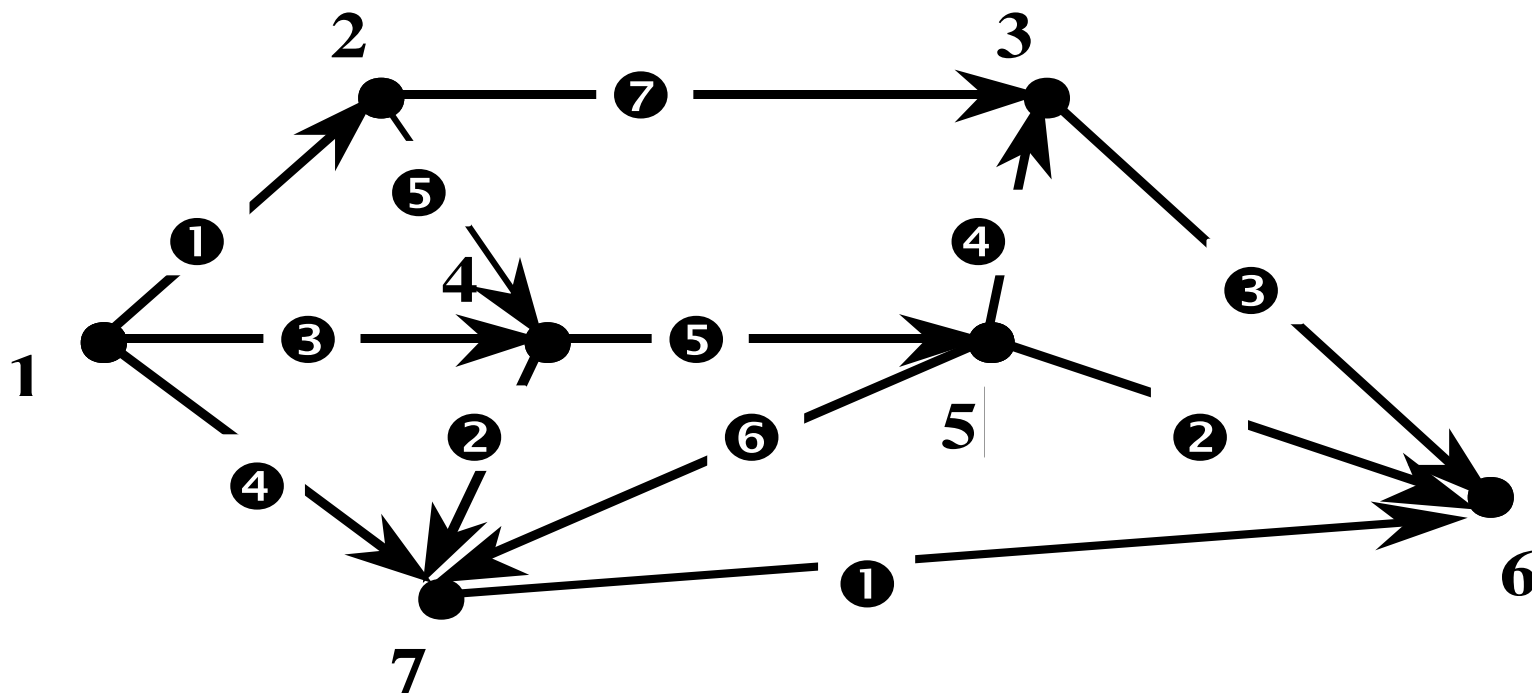
$$d[u] = d[k] * c(k, u)$$

$$prec[u] = k$$

Jei viršūnė u nudažyta

Nutriname viršūnės u spalvą (ji vėl tampa nenudažyta)

Užduotis. Grafui nuo 1-osios iki visų kitų viršūnių raskite kelius, kurių stiprinimai būtų didžiausi. Pavaizduokite pakeitimus $prec$ ir d masyvuose, viršūnių dažymą. Naudokite procedūros I variantą.

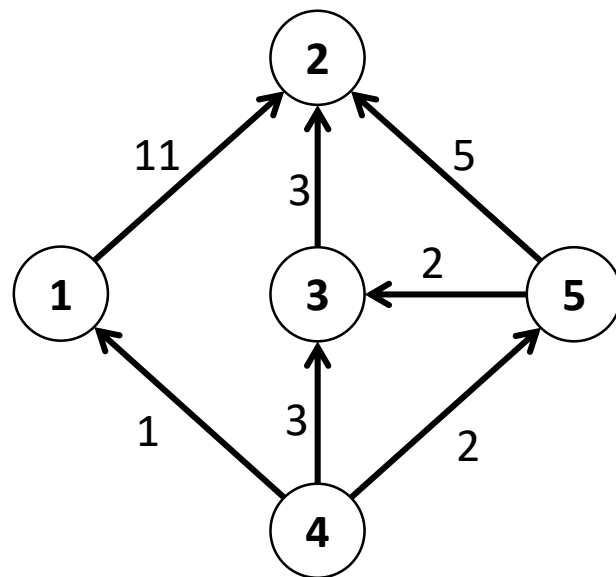


Žemiau parodyta, kaip kito masyvų d ir $prec$ turiniai. Žvaigždutės virš masyvo d elementų žymi kiek kartų šios viršūnės buvo dažytos: nubrauktos žvaigždutės žymi, kad viršūnė, kurią nusako elemento eilės numeris, pradžioje buvo nudažyta, o po to skaičiuojant jos spalva buvo nutrinta.

						\boxtimes	\boxtimes
			\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
	1	2	3	4	5	6	7
$d:$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
	1	1	60	3	15	4	4
			100	5	25	30	6
						90	90
						180	150
						300	

	1	2	3	4	5	6	7
<i>prec:</i>	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	5	1	4	7	1
			5	2	4	5	4
						7	5
						3	5
						3	

Užduotis. Grafui nuo 4-osios iki visų kitų viršūnių raskite kelius, kurių stiprinimai būtų didžiausi. Pavaizduokite pakeitimus *prec* ir *d* masyvuose, viršūnių dažymą. Naudokite procedūros I variantą.



Teisingas numeravimas

- Šis uždavinys būtų sprendžiamas žymiai paprasčiau, jei grafo viršūnės būtų sunumeruotos teisingai.
- Orientuotojo aciklinio grafo viršūnės sunumeruotos **teisingai**, jei kiekvienam lankui (i,j) galioja sąlyga $i < j$.
- Vienas iš paprasčiausių teisingo numeravimo metodų yra rangų metodas.
- Orientuotojo aciklinio grafo viršūnės u **rangas** – tai ilgiausias kelias pagal lankų skaičių nuo minorantos iki viršūnės u .

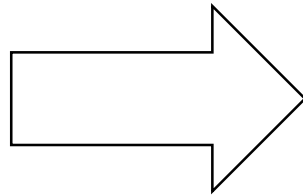
Mūsų spręsto uždavinio
viršūnių rangų lentelė

rangas	viršūnės Nr.
0	1
1	2
2	4
3	5
4	3,7
5	6

Teisingas numeravimas

- To paties rango viršūnės nėra gretimos
 - todėl jos gali būti numeruojamos laisvai.
- Vadinasi, norint teisingai sunumeruoti grafą, reikia iš eilės einančiais natūraliaisiais skaičiais numeruoti viršūnes, pradedant nulinio rango viršūne.

rangas	viršūnės Nr.
0	1
1	2
2	4
3	5
4	3,7
5	6



viršūnės Nr.	1	2	3	4	5	6	7
teisingas viršūnės Nr.	1	2	5	3	4	7	6

Procedūra (II variantas). Grafas sunumeruotas teisingai

~~Pradžioje visos grafo viršūnės nenudažytos~~

(pajuodintu šriftu bei perbraukimu žymimi skirtumai su procedūros I variantu)

Užnuliname *prec* masyvą

~~$prec[s] := s$ (visi keliai prasideda viršūnėje *s*)~~ $prec[1] = 1$

Užnuliname *d* masyvą

~~$d[s] = 1$~~ $d[1] = 1$

~~Kol yra nenudažytų viršūnių~~

~~Nenudažytos viršūnės *k*, su didžiausia reikšme masyve *d*, paieška~~

~~Viršūnės *k* nagrinėjimas~~

Pagrindiniai skaičiavimai

Procedūra (II variantas). Pagrindiniai skaičiavimai

Kiekvienai viršūnei k nuo 1 iki $n-1$

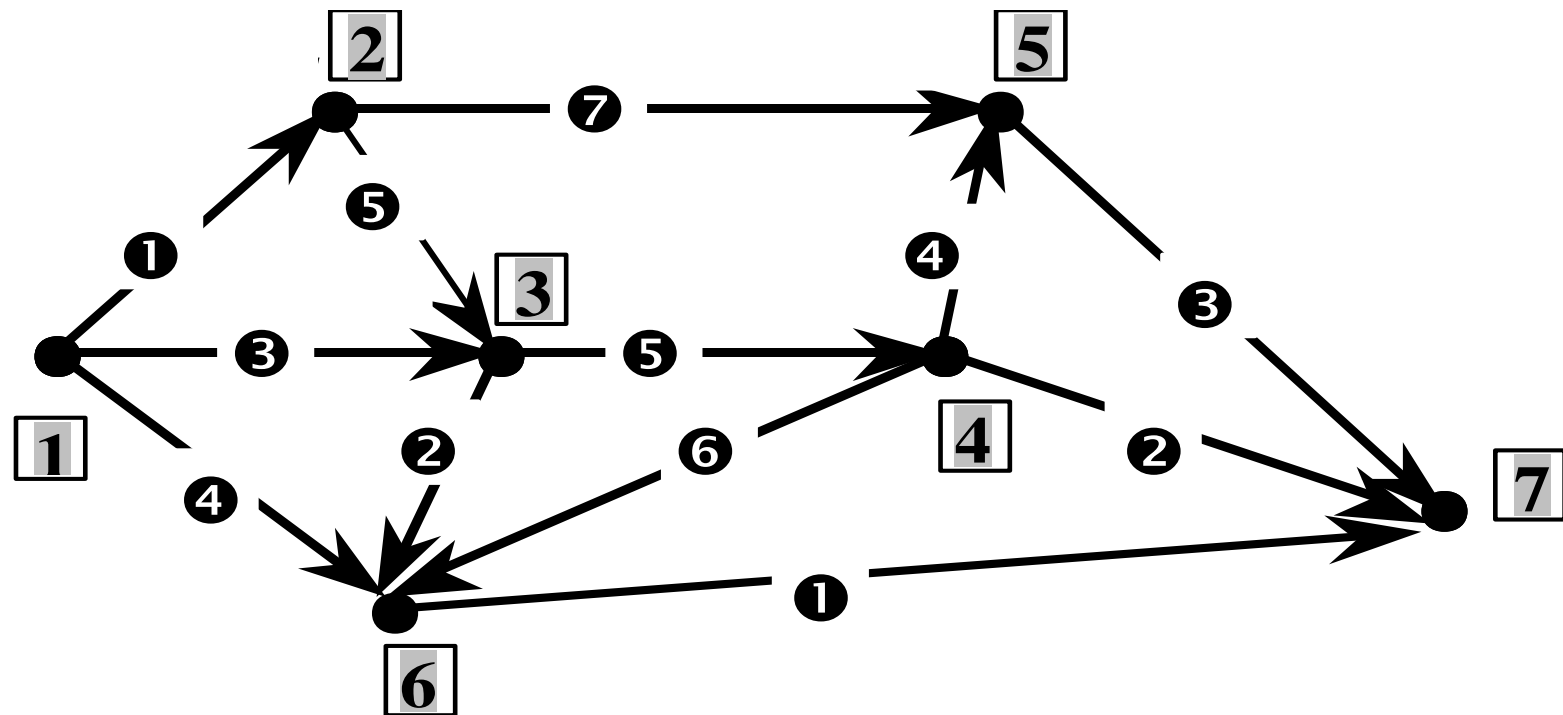
Kiekvienai k kaimynei u (egzistuoja lankas (k, u) , kurio svoris yra $c(k, u)$)

Jei $d[k] * c(k, u) > d[u]$

$d[u] = d[k] * c(k, u)$

$prec[u] = k$

Užduotis. Grafui nuo 1-osios iki visų kitų viršūnių raskite kelius, kurių stiprinimai būtų didžiausi. Pavaizduokite pakeitimus *prec* ir *d* masyvuose. Naudokite procedūros II variantą. Viršūnės jau pernumeruotos teisingai.



Žemiau parodyta, kaip kito masyvų d ir $prec$ turiniai. Žvaigždutės virš masyvo d elementų žymi kiek kartų šios viršūnės buvo nagrinėtos

	✧	✧	✧	✧	✧	✧	
	1	2	3	4	5	6	7
<i>d:</i>	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	3	25	7	4	50
			5		100	10	300
					150		

	1	2	3	4	5	6	7
<i>prec:</i>	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	3	2	1	4
			2		4	3	5
						4	

Užduotis. Grafui nuo 4-osios iki visų kitų viršūnių raskite kelius, kurių stiprinimai būtų didžiausi. Pavaizduokite pakeitimus *prec* ir *d* masyvuose. Naudokite procedūros II variantą. Jei reikia, pernumeruokite viršūnes.

