

Keliaujančio pirklio uždavinys

Vieslav Lapin

Uždavinys

- Yra n miestų
- Atstumų tarp miestų matrica $C = [c_{ij}] \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}$
- čia c_{ij} – atstumas tarp miestų i ir j .
- Pirklys, išėjęs iš 1-ojo miesto, turi apeiti visus miestus po vieną kartą ir grįžti į pirmąjį miestą.
- Koks turi būti pirklio maršrutas, kad jo ilgis būtų trumpiausias?

Metodai

- Artimiausio kaimyno metodas
- Įterpimo metodas

Artimiausio kaimyno metodas

- Pagrindinė taisyklė:
- Jei pirklys yra mieste k ,
- tai pirklys toliau keliaus į artimiausią miestui k neaplankytą miestą l ;
 - aišku, - $l \neq 1$, jei yra kita galimybė.
- Iš C pašalinama k -oji eilutė ir l -asis stulpelis.

Pavyzdys

- Apskaičiuokime pirklio maršrutą:
- Iš pirmojo miesto eisime į 5-ąjį miestą:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 0 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 0 |

Pavyzdys

- Iš 5-ojo miesto eisime į 3-ąjį:

$$C = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 10 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 8 \end{array}$$

- Iš 3-ojo miesto į 4-ąjį:

$$C = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 10 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

- Iš 4-ojo miesto į 2-ąjį:

$$C = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 2 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{array}$$

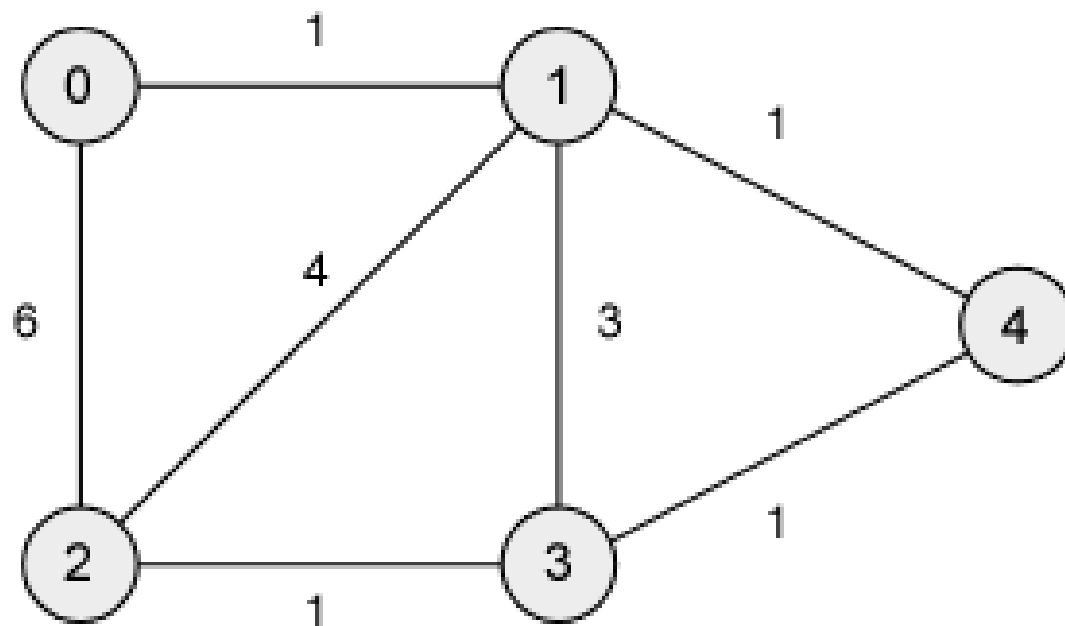
- Iš 2-ojo į 1-ąjį.

$$C = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Pavyzdys

- Artimiausio kaimyno metodu apskaičiuotas maršrutas yra: 1, 5, 3, 4, 2, 1.
- Ilgis $c_{15} + c_{53} + c_{34} + c_{42} + c_{21} = 3 + 4 + 5 + 2 + 10 = 24$

Uždavinys



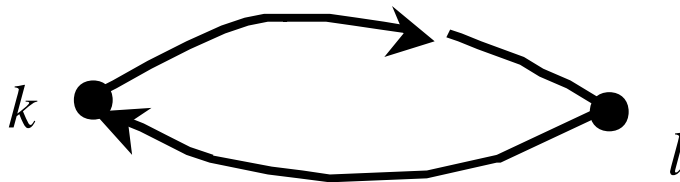
Įterpimo metodas

- Pirklio maršrutą konstruosime nuosekliai, pradėdami nuo ciklo v_1, v_2, v_1
- kiekviename žingsnyje šį ciklą praplėsime įterpdami po vieną naują miestą,
- t.y. po antrojo žingsnio turėsime ciklą, jungiantį tris miestus, po trečiojo – keturis miestus ir t.t.
- $(n-1)$ -ojo žingsnio turėsime ciklą, einantį per visus miestus.
- Įterpdami naują miestą, elgsimės taip, kad praplėsto ciklo ilgio padidėjimas būtų minimalus.

Pradinio ciklo parinkimas

$$p = \min_{1 \leq i \leq n} (c_{ij} + c_{ji})$$

- Apskaičiuojame $\min_{1 \leq j \leq n, i \neq j} c_{ij}$
- Jei atstumų matrica yra simetrinė, tai $\min_{1 \leq j \leq n, i \neq j} c_{ij}$
- Tarkime, kad $p = c_{kl} + c_{lk}$
- Pradinis ciklas k, l, k .



Ciklo praplėtimas k-tajame žingsnyje

- $v_1, v_2, v_3, \dots, i, j, \dots, v_k, v_1$
- bandysime įterpti vieną iš likusių miestų tarp dviejų gretimų ciklo miestų i ir j

$$d = \min_{\forall (i,j):(i,j) \in \text{ciklui}} \min_{t \in V - \text{ciklas}} (c_{it} + c_{tj} - c_{ij})$$

- Tarkime, kad mažiausia d reikšmė yra miestų (i,j) porai, o įterpiamas miestas - t .
- Tada gausime ciklą $v_1, v_2, \dots, i, t, j, \dots, v_k, v_1$.

Pavyzdys – 1 žingsnis

- Sukonstruokime pirklio maršrutą, naudojant įterpimo metodą:

$$C =$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 0 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 0 |

- Pradinis ciklas bus: 2,4,2

Pavyzdys – 2 žingsnis

- $d_{2,1,4} = c_{21} + c_{14} - c_{24} = 12$
- $d_{2,3,4} = c_{23} + c_{34} - c_{24} = 10$
- $d_{2,5,4} = c_{25} + c_{54} - c_{24} = 12$
- Gausime ciklą 2,3,4,2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 0 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 0 |

Pavyzdys – 3 žingsnis

- $d_{2,1,3} = c_{21} + c_{13} - c_{23} = 10$
- $d_{2,5,3} = c_{25} + c_{53} - c_{23} = 3$
- $d_{3,1,4} = c_{31} + c_{14} - c_{34} = 6$
- $D_{3,5,4} = c_{35} + c_{54} - c_{34} = 7$
- $D_{4,1,2} = c_{41} + c_{12} - c_{42} = 12$
- $D_{4,5,2} = c_{45} + c_{52} - c_{42} = 12$
- Gausime ciklą 2,5,3,4,2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 0 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 0 |

Pavyzdys – 4 žingsnis

- $d_{2,1,5} = c_{21} + c_{15} - c_{25} = 7$
- $D_{5,1,3} = c_{51} + c_{13} - c_{53} = 6$
- $D_{3,1,4} = c_{31} + c_{14} - c_{34} = 6$
- $D_{4,1,2} = c_{41} + c_{12} - c_{42} = 12$
- Gausime ciklą 2,5,1,3,4,2
- Pirklio maršrutas yra: 2,5,1,3,4,2
- Ilgis $c_{25} + c_{51} + c_{13} + c_{34} + c_{42} = 6+3+7+5+2=23$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | 7 | 4 | 3 |
| 2 | 10 | 0 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 2 | 5 | 0 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 0 |

Uždavinys

