# 39. Jungumas

Vytautas Vėgėlė

# Jungumas

**Jungumas** *(angl. Connectivity)* – grafo savybė nusakanti ar grafas yra jungus.

Jungumas apibrėžia mažiausią kiekį elementų, kuriuos reikia pašalinti, jog nebeliktų jokio kelio tarp kurių nors grafo viršūnių.

# Jungumo skaičiai

***Viršūninio jungumo skaičius** (vertex connectivity)* – mažiausias skaičius viršūnių, kurias pašalinus, grafas *G* tampa arba nejungiuoju grafu arba vienos viršūnės grafu. Žymimas κ(G) . Grafas vadinamas ***k-jungiuoju***, jeigu $\kappa(G) \geq k$

Pilnasis grafas taps nejungus tik pašalinus visas viršūnes išskyrus paskutinę!

Ciklinio grafo viršūninis jungumas $\kappa(C_n) = 2$

Pilno grafo viršūninis jungumas $\kappa(K_n) = n - 1$

***Briauninis jungumo skaičius** (edge-connectivity)* – mažiausias skaičius briaunų, kurias pašalinus, grafas *G* tampa nejungiuoju grafu. Žymimas λ(G) .
Grafas vadinamas ***briaunomis k-jungiuoju***, jei $\lambda(G) \geq k$

# Jungumas

Grafo $G$ viršūnė $v$ vadinama ***sąlyčio tašku*** *(cut vertix/articulation point)* , jei $G - v$ turi daugiau jungiųjų komponenčių nei grafas $G$.

Grafo $G$ briauna vadinama ***tiltu*** *(bridge)*, jei, ją pašalinus, gautasis grafas turi daugiau jungiųjų komponenčių nei grafas $G$.

# Jungumas

Kiekvienam grafui V galioja:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ (mažiausias viršūnės laipsnis)

**Beveik** visiems grafams ( $\lim_{n \to \infty} \frac{\phi P(n)}{\phi(n)} = 1$ ) galioja:

$$\kappa(G) = \lambda(G)$$

# Jungioji komponentė

***Grafo k-jungioji komponentė*** (k-connected component) – tai maksimalus *k*-jungusis pografis. Jis dažnai vadinamas ***k-komponente***.

***Teorema***. Dvi skirtingos grafo *G* *k*-komponentės turi ne daugiau nei $(k-1)$ bendrų viršūnių.

# Nesusikertančios grandinės

***Apibrėžimas***. Dvi (a,b) -grandinės vadinamos nesusikertančiomis (viršūnėmis nesusikertančiomis), jei jos neturi bendrų viršūnių, išskyrus *a* ir *b*.

***Teorema*** (Hassler Whitney, 1932). Grafas yra *k*-jungusis tada ir tiktai tada, kai bet kuri nesutampančių viršūnių pora  sujungta ne mažiau kaip *k* viršūnėmis nesusikertančių grandinių.

# Skiriančios viršūnės

***Apibrėžimas***. Sakoma, kad grafo $G$ viršūnių poaibis $S$ skiria viršūnes $a$ ir $b$, jei grafe $G - S$ viršūnės $a$ ir $b$ priklauso skirtingoms jungiosioms komponentėms.

***Teorema*** (Karlas Mengeras, 1927). Mažiausias skaičius viršūnių, skiriančių dvi negretimas viršūnes $a$ ir $b$, yra lygus didžiausiam skaičiui poromis nesusikertančių grandinių, jungiančių $a$ ir $b$ viršūnes.

# Skiriančios briaunos

***Apibrėžimas***. Briaunų aibė $R$ skiria grafo $G$ $a$ ir $b$ viršūnes, jei grafe $G - R$ viršūnės $a$ ir $b$ priklauso skirtingoms jungiamosioms komponentėms.

***Teorema***. Mažiausias skaičius briaunų, skiriančių grafo $G$ viršūnes $a$ ir $b$, yra lygus didžiausiam briaunomis nesusikertančių grandinių, jungiančių $a$ ir $b$ viršūnes, skaičiui.