4. Matematinė logika

4.1. Įvadas

Pradiniame kompiuterinės technikos panaudojimo kasdieniame gyvenime etape dominavo aparatūros vaidmuo. Šiuo metu šis vaidmuo taip pat yra svarbus, bet tuo pat metu žymiai didesnį vaidmenį įgavo programinė įranga. Jos (o taip pat ir daugelio kitų sričių) pagrindą sudaro algoritmai. Teorinis algoritmų bei kitų įvairių matematinių sistemų pagrindas – logikos taisyklės. Tuo pačiu matematinė logika leidžia turėti taisyklių rinkinį, kurio pagalba galima konstruoti matematinius įrodymus bei tikrinti jau turimų įrodymų teisingumą, formalizuoti įvairias logikos teorijas ir skaičiavimo metodus, išplėsti loginių tyrinėjimų sritį. Matematinės logikos pagalba taip pat sprendžiamos problemos, susijusios su bendrosiomis matematinių teorijų savybėmis (neprieštaravimas, pilnumas, išsprendžiamumas ir kt.) Kadangi logika yra pagalbinė priemonė ir bendras metodas kitiems mokslams, ji gali būti traktuojama kaip mokslinio mąstymo technika. Kaip mokslinio mąstymo technika logika leidžia formalizuoti samprotavimų teisingumo patikrinimą, laikantis dviejų pagrindinių sąlygų:

1) turi būti teisingi pradiniai samprotavimų teiginiai,
2) samprotavimų eiga turi atitikti logikos taisykles.

Žodis “logika” yra kilęs iš senosios graikų kalbos žodžio “logos”, reiškiančio “žodis”, “kalba”, “protas”, “samprotavimas”. Sąvoka ***matematinė logika*** arba kartais ***formalioji logika*** naudojama ryšium su tuo, kad šioje disciplinoje plačiai naudojami simboliai, kaip kad yra ir kitose matematikos srityse. Klasikinė logika, kurios pradininku yra laikomas Aristotelis, gali būti traktuojama kaip mokslas apie bendruosius mąstymo ir samprotavimo dėsnius, kaip menas teisingai mąstyti. Matematinės logikos ir klasikinės logikos santykį galima įvertinti (tiek panaudojimo realiame gyvenime apimtimi, tiek praktine reikšme bei formalizavimo lygiu) maždaug Paskalio programavimo kalbos bei lietuvių kalbos (kaip filologinės disciplinos) santykiu.

4.2. Teiginių logika

Teiginys. Teiginiu vadinamas bet koks prasmingas sakinys, apie kurį galima pasakyti tik vieną iš dviejų dalykų: arba jis yra teisingas, arba jis yra klaidingas. Tuo pačiu matematinėje logikoje yra nagrinėjami turintys tik dvi galimas reikšmes (teisinga / klaidinga) sakiniai, t.y. teiginiai. Bet koks šnekamosios kalbos sakinys gali būti ne tik teisingas arba klaidingas, bet gali būti ir neapibrėžtas, tikėtinas, galimas, neaiškus, liepiamasis ir t.t.

Visi teiginiai gali būti skirstomi į paprastus ir sudėtinius. ***Paprastu teiginiu*** vadinamas toks teiginys, kuris negali būti išskaidytas į du ar daugiau kitų teiginių, priešingu atveju teiginys vadinamas ***sudėtiniu teiginiu***. Paprasti teiginiai kartais dar vadinami ***propoziciniais kintamaisiais***. Toliau tekste paprastus teiginius žymėsime mažosiomis raidėmis, o sudėtingus – didžiosiomis. Dažnai teiginį atitinkanti reikšmė (teisingas / klaidingas) atitinkamai yra žymima skaičiais 1 ir 0. Paprastų teiginių pavyzdžiai:

- p: skaičius 6 yra lyginis,
- q: skaičius 6 yra mažesnis už skaičių 3.

Teiginio p reikšmė yra 1 (teisingas), o teiginio q reikšmė yra 0 (klaidingas).

Sudėtiniai teiginiai yra gaunami iš paprastųjų teiginių (propozicinių kintamųjų), apjungiant juos ***loginėmis jungtimis***. Dažniausiai naudojamos loginės jungtys parodytos 4.2.1 lentelėje.

4.2.1 lentelė. Loginės jungtys

Jungties pavadinimas	Neigimas	Konjunkcija	Disjunkcija	Implikacija	Loginis ekvivalentiškumas
Žymėjimas	$\bar{\ }$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\Leftrightarrow$

Paprastai matematinėse išraiškose, kuriose panaudotos kelios operacijos, yra nusakomas jų prioritetas, t.y. šių operacijų atlikimo eiliškumas. Aukščiau išvardintų loginių jungčių prioritetas (prioriteto mažėjimo tvarka) pavaizduotas 4.2.2 lentelėje:

4.2.2 lentelė. Loginių jungčių prioritetai

Loginė jungtis	Prioritetas
Neigimas	Pirmas
Konjunkcija	Antras
Disjunkcija	Trečias
Implikacija	Ketvirtas
Ekvivalentiškumas	Ketvirtas

Jei konkrečiame sudėtiniame teiginyje reikalinga kita jungčių taikymo tvarka, negu kad nusakyta aukščiau pateikta lentele, tai ši tvarka, kaip ir kitose matematinėse išraiškose, yra nurodoma skliaustų pagalba.

Kadangi sudėtinis teiginys irgi yra teiginys, tai aukščiau išvardintų jungčių pagalba gaunami teiginiai taip pat yra arba teisingi, arba klaidingi.

Tokiu būdu sudarytų sudėtinių teiginių (kartais jie dar vadinami ***propozicinėmis formulėmis***) teisingumą nusako 4.2.3 lentelė:

4.2.3 lentelė. Propozicinių formulių teisingumo lentelė

a	b	$\overline{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Formulė $\overline{a}$ yra skaitoma ”***ne a***”

Formulė $a \wedge b$ yra skaitoma ”***a konjunkcija b***” arba “***a ir b***”

Formulė $a \vee b$ yra skaitoma ”***a disjunkcija b***” arba “***a arba b***”

Formulė $a \rightarrow b$ yra skaitoma taip: “***iš a seka b***” arba “***jei a, tai b***”, arba “***a implikuoja b***”; čia a kartais yra vadinama ***prielaida***, ***hipoteze*** arba ***antecendentu***, o b – ***išvada*** arba ***konsekventu.***

Toliau sudėtinį teiginį (propozicinę formulę) trumpumo dėlei vadinsime tiesiog ***formule***, o propozicinį kintamąjį - tiesiog kintamuoju. Konkrečios formulės teisingumo reikšmė (0 arba 1) priklauso nuo į šią formulę įeinančių kintamųjų (teiginių) reikšmių, bei nuo loginių jungčių, kurių pagalba yra sudaroma ši formulė. Konkretus formulės kintamųjų reikšmių rinkinys, kuriam formulė įgyja vieną iš reikšmių (0 arba 1), yra vadinamas formulės ***interpretacija***. Formulė, kuri yra teisinga prie tam tikros interpretacijos, yra vadinama ***išsprendžiama***. Formulė, kuri yra teisinga prie bet kurios interpretacijos, yra vadinama ***tautologija***. Formulė, kuri yra klaidinga prie bet kurios interpretacijos, yra vadinama ***neišsprendžiama*** arba ***prieštaravimu***. Formulių pavyzdžiai:

a) $p \vee \overline{p}$ tautologija,

b) $p \wedge \overline{p}$ prieštaravimas,

c) $p \rightarrow \overline{p}$ išsprendžiama formulė, kurios reikšmė yra 1, jei $I(p)=0$, čia $I(p)$ – teiginio p interpretacija.

Su pateiktu formulių klasifikavimu į tris grupes:

- visuomet teisingos,
- visuomet klaidingos,
- kartais teisingos, kartais klaidingos

yra susijusi ***formulių išsprendžiamumo problema***. Jos esmė – pavartojus baigtinį loginių jungčių skaičių, galima nustatyti kuriai iš trijų paminėtų formulių kategorijų galima priskirti nagrinėjamą formulę. Yra keletas būdų kaip tą padaryti.

Vienas iš paprasčiausių – sudaryti nagrinėjamos formulės ***teisingumo lentelę***. Tokios lentelės eilutės – visos nagrinėjamos formulės interpretacijos kartu su kiekvienai interpretacijai atitinkančia formulės reikšme. Nesunku įsitikinti, kad tokioje lentelėje yra 2^n eilučių, kur n – į formulę įeinančių propozicinių kintamųjų skaičius. Lentelės stulpelių skaičius lygus (n+1), kur n stulpelių atitinka kintamuosius, o (n+1) – asis stulpelis atitinka pačios formulės reikšmę. Kartais, aiškumo dėlei, tokioje lentelėje yra naudojami papildomi stulpeliai, turintys formulės kai kurių dalių reikšmes.

Jei formulės teisingumo lentelėje formulės reikšmes atitinkantis stulpelis yra sudarytas tik iš 1, tai formulė yra tautologija (visuomet teisinga), jei stulpelis sudarytas tik iš 0 – formulė yra neišsprendžiama (visuomet klaidinga), jei kai kurios reikšmės yra 0, o kai kurios 1 – formulė yra išsprendžiama.

Vadovaujantis formulės teisingumo lentele, nesunku įsitikinti, kad formulės

$a \vee b$ ir $b \vee a$ yra logiškai ekvivalenčios.

Tą patį faktą galima išreikšti ir kitaip:

$$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$$

Šios formulės teisingumo lentelė parodyta 4.2.4 lentelėje.

4.2.4 lentelė. Formulės $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ teisingumo lentelė

a	b	$a \vee b$	$b \vee a$	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Kaip matome iš formulės teisingumo lentelės (žr. 4.2.4 lentelė) paskutinio stulpelio, formulė $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ yra teisinga prie bet kokių interpretacijų, t.y. ši formulė yra tautologija.

4.2.5 lentelėje pateiksime dažnai praktikoje naudojamas tautologijas. Remiantis šiomis tautologijomis, galima vienas formules pakeisti kitomis, ekvivalenčiomis, vadovaujantis įvairiais kriterijais, pavyzdžiui, tam, kad sutrumpinti formulės užrašą ir pan.

4.2.5 lentelė. Dažniausiai naudojamos tautologijos

$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$	Dvigubo neigimo dėsnis
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Komutatyvumo dėsnis
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	Asociatyvumo dėsnis
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributyvumo dėsnis
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgano dėsnis
$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotentiškumo dėsnis
$A \vee A \Leftrightarrow A$	
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	Padengimo dėsnis
$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$	Prieštaravimo dėsnis
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$	Negalimo trečiojo dėsnis
$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	
$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$	
$\overline{(A \Leftrightarrow B)} \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$	
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$	
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	Priešpastatymo dėsnis

Dualumo principas

Tegu dvi propozicinės formulės U ir U^* yra sudarytos tik loginių jungčių $\bar{\ }$ **,** $\wedge$ ir $\vee$ pagalba. Tada šios dvi formulės U ir U^* yra vadinamos ***dualiomis viena kitai***, jei formulė U^* gali būti gaunama iš formulės U (ir atvirkščiai), pakeitus joje: 1) loginę jungtį $\vee$ į $\wedge$, 2) loginę jungtį $\wedge$ į $\vee$. 4.2.5 lentelėje didesnė dalis propozicinių formulių yra sugrupuota poromis, kuriose porą sudarančios formulės yra dualios. Šiuo aspektu dvi loginės jungtys (disjunkcija ir konjunkcija) kartais irgi yra vadinamos dualiomis ir gali būti išreiškiamos viena per kitą. Tam tenka panaudoti dar ir neigimo jungtį.

Tegu propozicinė formulė yra sudaryta iš propozicinių kintamųjų, loginių jungčių: disjunkcijos, konjunkcijos ir neigimo, bei loginių konstančių 0 ir 1. Tada formulės neigimas yra formulė, kuri yra gaunama iš pradinės formulės, atlikus šiuos veiksmus:

1) propoziciniai kintamieji yra keičiami jų neigimais,
2) loginė jungtis disjunkcija keičiama į konjunkciją ir atvirkščiai,
3) konstantė 0 keičiama į konstantę 1 ir atvirkščiai.

Kaip pavyzdį panagrinėsime konjunkcijos pakeitimą disjunkcija ir neigimu.

$p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \wedge q)}}$ pritaikius dvigubo neigimo dėsnį.

$$\overline{\overline{(p \wedge q)}} \Leftrightarrow \overline{(\overline{(p \wedge q)})} \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}\,.$$

Tokiu būdu gavome, kad $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$. Analogiškai disjunkciją galime išreikšti per konjunkciją ir neigimą:

$$p \vee q \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}\,.$$

Tokie ir panašūs keitimai dažnai yra atliekami praktikoje, pavyzdžiui, siekiant gauti paprastesnes formules, įrodyti vienų formulių ekvivalentiškumą kitoms ar dėl kitų priežasčių.

Nesunku įsitikinti, kad ir kitas mūsų nagrinėtas logines jungtis galima išreikšti per disjunkciją, konjunkciją ir neigimą. Šis faktas kartais yra formuluojamas taip: disjunkcija, konjunkcija ir neigimas sudaro ***pilną loginių jungčių sistemą***. Tačiau tokia sistema yra perteklinė tuo aspektu, kad galima turėti ir mažesnį loginių jungčių rinkinį, kuris sudaro pilną sistemą, pavyzdžiui: 1) konjunkcija ir neigimas, arba 2) disjunkcija ir neigimas. Disjunkcija ir konjunkcija be neigimo nesudaro pilnos sistemos.

4.3. Įrodinėjimo metodai

Be abejo, labiausiai paplitusi matematikoje žmogiškoji veikla yra veiksmai, vadinami įrodinėjimu. Įrodymas yra procesas, turintis dažnai gana daug tikslų. Pavyzdžiui, jis padidina supratimą, pagilina žinias apie konkrečią problemą, atskleisdamas jos vidinę struktūrą ir esmę. Be to, kiekviena įrodyta teorema yra žingsnis pirmyn nagrinėjamoje tematikoje, žingsnis link naujų dar neatskleistų dalykų matematikoje. Bet koks įrodymas yra atidžiai sekamas, diskutuojamas, kritikuojamas ir t.t. Todėl įrodymas yra išgrynintos žinios apie problemą, joje nelieka vietos klaidoms, nevienareikšmiškumui, klaidingam supratimui.

Teorema yra matematinis teiginys, kuris yra teisingas.

Įrodymas yra loginė, išvedinėjimo, samprotavimo procedūra, patikrinanti ir užtikrinanti teoremos teisingumą.

Yra naudojamos dvi pagrindinės įrodinėjimo strategijos:

- ***tiesioginiai metodai***,
- ***netiesioginiai metodai***.

Kadangi įrodymas yra traktuojamas kaip tam tikro teiginio teisingumo patikrinimas, o šis teiginys turi būti visada teisingas, tai teoremą galima traktuoti kaip sudėtinį teiginį arba propozicinę formulę, kuri yra visada teisinga, t.y. kaip tautologiją. Paprastai teoremos įrodymo procese naudojami kiti teiginiai:

- ***aksiomos*** – nedalomi, niekaip kitaip neįrodomi, aprioriškai pripažįstami kaip teisingi teiginiai,
- kitos, anksčiau įrodytos ***teoremos***,
- ***hipotezės*** – teiginiai, kurie yra priimami kaip teisingi tol, kol neįrodyta priešingai.

Pats įrodymo procesas yra loginis išvedinėjimas, operuojant aukščiau išvardintais teiginiais kaip argumentais.

Sakykime, kad mums reikia įrodyti teoremą, kurios simbolinė išraiška (propozicinė formulė) yra $p \to q$. Tuo tikslu mums reikia parodyti, kad $p \to q$ yra tautologija.

Pagrindinis principas, kuriuo remiasi dauguma įrodymų, yra toks: ***jei teiginys p yra teisingas, o implikacija*** $p \to q$ ***yra pripažįstama kaip teisinga, tai privalome traktuoti, kad ir teiginys q yra teisingas***.

Simboliškai šį procesą galima užrašyti:

1) p (darome prielaidą, kad p yra teisingas);
2) $p \to q$ (parodome, kad implikacija yra teisinga);

----

3) q (darome išvadą, kad ir q yra teisingas).

Šis procesas vadinamas ***modus ponens*** taisykle, arba ***atskyrimo taisykle***, t.y. 1-asis ir 2-asis etapai (virš brūkšnio) sudaro vieną fazę (prielaidos), o žemiau brūkšnio esantis 3-asis etapas – išvada. Pastebėkime taip pat, kad pats savaime implikacijos $p \to q$ teisingumas nieko nesako nei apie p teisingumą, nei apie q teisingumą. Tačiau abiejų teiginių (p ir $p \to q$) teisingumas kartu garantuoja q teisingumą.

Iš loginės jungties $\to$ apibrėžimo akivaizdu, kad formulė $p \to q$ yra teisinga, kai p=0. Taigi įrodymo apimtį galima sumažinti iki to, kad parodyti, jei p yra teisingas, tai ir q yra teisingas. Tokia veiksmų seka yra vadinama *tiesioginiu įrodymu*. Šio metodo pagrindiniai etapai yra tokie:

1) darome prielaidą, kad p yra teisingas,
2) įrodome, kad ir q yra teisingas,
3) konstatuojame, kad teiginys $p \to q$ yra teisingas (t.y. jis yra tautologija).

Pavyzdys. Sakykime, kad sekantys teiginiai yra teisingi:

P: Jei aš šiandien gausiu atlyginimą, tai vakare pirksiu benzino savo automobiliui.

Q: Jei aš vakare pirksiu benzino savo automobiliui, tai rytoj į darbą važiuosiu automobiliu.

Tada mes galime daryti išvadą, kad yra teisingas ir teiginys:

R: Jei aš šiandien gausiu atlyginimą, tai rytoj važiuosiu į darbą automobiliu.

Toks samprotavimų (išvedimo) tipas, kurio pagalba buvo gautas paskutinis teiginys, yra vadinamas ***silogistiniu išvedimu*** (kartais ***hipotetinio silogizmo dėsniu*** arba ***tranzityvinio išvedimo taisykle***). Formalizuotas tokio išvedimo procesas yra:

$$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$$

Vadovaujantis loginių jungčių apibrėžimu, nesunku patikrinti, kad aukščiau pateikta formulė yra tautologija. Tokia formulė kartais dar yra vadinama ***silogizmu***.

Aukščiau pateiktame pavyzdyje yra tik vienas tarpinis teiginys (šiuo atveju *Q*). Jų gali būti visa grandinėlė:

$$(P \to S_1) \wedge (S_1 \to S_2) \wedge \ldots \wedge (S_n \to Q) \to (P \to Q)$$

Iš netiesioginių įrodymo metodų plačiausiai yra žinomi du:

- ***prieštaros metodas,***
- ***priešpastatymo metodas.***

Prieštaros metodas. Kartais šis metodas dar yra vadinamas privedimu prie absurdo. Jis remiasi aukščiau paminėtais *negalimo trečiojo* bei *prieštaravimo* dėsniais, t.y. $A \vee \overline{A}$ yra tautologija , bei $A \wedge \overline{A}$ yra prieštaravimas. Sakykime, kad mums reikia įrodyti, kad $P \to Q$. Kad tą padaryti, reikia rasti tokį teiginį *A*, kad galiotų

$$\overline{(P \to Q)} \to (\overline{A} \wedge A).$$

Čia teiginys $(\overline{A} \wedge A)$ yra visada klaidingas (prieštaravimo dėsnis). Tam, kad implikacijos operacijos rezultatas turėtų reikšmę teisingas, būtina, kad formulė $\overline{(P \to Q)}$ kaip ir formulė $(\overline{A} \wedge A)$ taip pat turėtų reikšmę klaidingas. Tuo pačiu priešingas teiginys $(P \to Q)$ turi būti teisingas, ką ir buvo siekiama įrodyti.

Aptarsime pagrindinius prieštaros metodo etapus.

Uždavinys: įrodyti, kad teiginys $(P \to Q)$ yra teisingas

Įrodymas *prieštaros* būdu:

1) darome prielaidą, kad *P* yra teisingas ir *Q* yra klaidingas (arba, kad teiginys $(P \to Q)$ yra klaidingas),
2) randame tokį *A*, kad yra teisinga implikacija $\overline{(P \to Q)} \to (\overline{A} \wedge A)$,
3) implikacija gali būti teisinga vieninteliu atveju – kai $\overline{(P \to Q)}$ yra klaidingas, o tuo pačiu teisingas teiginys $(P \to Q)$.

Išvada: $(P \to Q)$ yra teisingas.

Priešpastatymo metodas. Šis metodas remiasi priešpastatymo dėsniu $(A \to B) \Leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$. Taigi tam, kad įrodyti, jog $(P \to Q)$, pakanka įrodyti, kad $(\overline{Q} \to \overline{P})$.

Pagrindiniai priešpastatymo metodo etapai.

Uždavinys: įrodyti, kad teiginys $(P \to Q)$ yra teisingas

Įrodymas *priešpastatymo* būdu:

1) darome prielaidą, kad *Q* yra klaidingas,
2) parodome, kad *P* yra klaidingas.

Išvada: $(P \to Q)$ yra teisingas.

Reikia pastebėti, kad nors šis metodas yra netiesioginis, tačiau teiginio $(\overline{Q} \to \overline{P})$ teisingumui įrodyti praktikoje dažnai yra taikomas tiesioginis metodas.

4.4. Predikatų logika

4.4.1. Predikatai

Tegu turime kokį nors teiginį, kuris gali būti teisingas arba klaidingas, ir šiame teiginyje galima išskirti teiginio subjektą, bei šiam subjektui priskiriamą požymį. Formalizuojant galima sakyti, kad nagrinėjame funkciją, kurios argumentas arba argumentai įgyja reikšmes iš tam tikros elementų aibės, o pati funkcija įgyja reikšmes 0 arba 1. Ši funkcija (subjekto atžvilgiu nagrinėjamas požymis) yra vadinama ***predikatu***. Funkcijos reikšmės nagrinėjimas argumentų konkrečių reikšmių atžvilgiu vadinamas predikato ***interpretacija***.

Predikatas vadinamas vienviečiu, jei jo argumentų aibė sudaryta tik iš vieno argumento. Atitinkamai predikatas vadinamas n-viečiu, jei jo argumentų aibė yra sudaryta iš n argumentų.

Apibrėžtumo dėlei pačius predikatus toliau žymėsime didžiosiomis raidėmis, o jų argumentus – mažosiomis raidėmis.

Vienviečio predikato pavyzdžiai

1. Tegu $R(x)$ yra predikatas, kurio argumentas x įgyja reikšmes iš realiųjų skaičių aibės, o pats predikatas reiškia: “skaičius x yra sveikasis skaičius”. Pati išraiška $R(x)$ nėra teiginys, tačiau ją galima paversti teiginiu (įgyjančiu reikšmę 0 arba 1), priskiriant argumentui x konkrečią reikšmę iš skaičių aibės. Pavyzdžiui, $R(5) = 1$, o $R(0.5) = 0$. (Vėliau panagrinėsime ir kitus būdus kaip predikatą paversti teiginiu).
2. Tegu $R(x)$ yra predikatas, kurio argumentas x gali būti bet koks žmogus, o pats predikatas R reiškia “x yra studentas”. Tokiu atveju bet kurio konkretaus žmogaus x atveju galime pasakyti, kad $R(x) = 0$ arba $R(x) = 1$.
3. Tegu $R(x)$ yra predikatas, kurio argumentas x gali būti bet koks sveikasis skaičius, pats predikatas reiškia, kad “x yra toks skaičius, kad $x^2 – 4 = 0$”, t.y. $R(x) = ((x^2 – 4) = 0)$. Akivaizdu, kad $R(x) = 1$, jei $x = +2$ arba $x = -2$. Kitais atvejais $R(x) =0$.

Dviviečių predikatų pavyzdžiai

1. Tegu $R(x,y)$ yra dvivietis predikatas, kurio argumentai x ir y yra skaičiai, o pats predikatas reiškia “x yra daugiau už y”, t.y. $R(x, y) = (x > y)$. Atskirai paimtas predikatas $R(x, y) = (x > y)$ yra tik savybė, bet ne teiginys, tačiau jis virsta teiginiu, suteikiant konkrečias reikšmes argumentams x ir y. Pavyzdžiui, R (2>5) turi reikšmę “klaidingas”, o R (7>4) turi reikšmę “teisingas”, t.y. R (2>5) = 0, o R (7>4) = 1.
2. Tegu predikatas Q (x,y) aprašomas tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{t.y.} \quad Q(x,y)=\left(\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}\right).$$

$Q\,(x,y)$ interpretacija $Q\,(3,2)$, t.y. suteikus argumentams konkrečias reikšmes (šiuo atveju $x = 3$, $y = 2$), duoda $Q\,(3,2) = 1$, o bet kuri kita $Q\,(x,y)$ interpretacija duoda reikšmę $Q\,(x,y) = 0$.

Kaip ir propozicinės formulės, taip ir predikatai gali būti:

- ***tapatybiškai teisingi***, jei jie įgyja reikšmę 1 prie bet kokios interpretacijos, t.y. prie bet kokių argumentų reikšmių;
- ***tapatybiškai klaidingi***, jei jie įgyja reikšmę 0 prie bet kokios interpretacijos, t.y. prie bet kokių argumentų reikšmių;
- ***išsprendžiami***, jei yra bent viena interpretacija, prie kurios jie įgyja reikšmę 1, o prie likusių interpretacijų – reikšmę 0.

4.4.2. Kvantoriai

Kaip minėjome anksčiau, kiekviena propozicinė formulė savo ruožtu irgi yra teiginys, t.y. apie ją galime pasakyti, kad ji yra arba teisinga, arba klaidinga. Tačiau taip galima teigti tik tais atvejais, kai formulė yra 1) tautologija, 2) prieštaravimas. Jei nagrinėjama propozicinė formulė yra išsprendžiama, tai reiškia, kad jos reikšmė (teisinga ar klaidinga) priklauso nuo šios formulės interpretacijos, t.y. nuo į šią formulę įeinančių propozicinių kintamųjų reikšmių. Tam, kad bet kokiu konkrečiu atveju galėtume pasakyti, kad nagrinėjama propozicinė formulė yra tautologija, prieštaravimas arba išsprendžiama, turime nagrinėti šią formulę konkrečios interpretacijos atžvilgiu.

Tas pats pasakytina ir apie predikatus. Kiekvienas predikatas įgyja teiginio prasmę (ir atitinkamą reikšmę 0 arba 1) tik prie tam tikros interpretacijos, t.y. prie konkrečių argumentų reikšmių.

Tačiau tai nėra vienintelis būdas. Kitas kelias – ***bendrumo ir egzistavimo kvantorių*** panaudojimas. Kvantoriai žymimi:

$\forall x$ ***– bendrumo kvantorius,***

$\exists x$ ***– egzistavimo kvantorius.***

Bendrumo kvantorius $\forall x$ yra skaitomas "visiems *x* galioja …".

Egzistavimo kvantorius $\exists x$ yra skaitomas "egzistuoja toks *x*, kad galioja …".

Tegu turime vienvietį predikatą $R(x)$, kuris reiškia "*x* yra geras žmogus". Visų pirmą, šis predikatas įgyja teiginio prasmę (ir atitinkamą reikšmę), nagrinėjant jį konkretaus *x* atžvilgiu, t.y. konkrečios interpretacijos atveju. Antras būdas – bendrumo ir egzistavimo kvantorių panaudojimas. Pavyzdžiui:

1) $\forall x \quad R(x)$. Ši išraiška skaitoma “ Visų žmonių atžvilgiu (bet kurio iš jų atžvilgiu) galima pasakyti, kad jis yra geras žmogus”. Akivaizdu, kad pritaikius bendrumo kvantorių predikatui $R(x)$, turime tapatybiškai klaidingą teiginį.
2) $\exists x \quad R(x)$. Ši išraiška skaitoma “ Egzistuoja toks žmogus x apie kurį galima pasakyti, kad jis yra geras žmogus”. Akivaizdu, kad pritaikius egzistavimo kvantorių predikatui $R(x)$, turime tapatybiškai teisingą teiginį.

Jei turime n-vietį predikatą $R\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kur $n > 1$, tai bendrumo arba egzistavimo kvantoriai gali būti taikomi arba visiems argumentams arba tik jų daliai:

- visiems n argumentams, tada turime išraišką pavyzdžiui, $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; šiuo atveju išraiška $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra vadinama 0-viečiu predikatu, kuris tuo pačiu yra teiginys, turintis reikšmę 0 arba 1.
- daliai iš n argumentų, tada turime išraišką pavyzdžiui, $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kur $m<n$; šiuo atveju išraiška $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra vadinama $(n-m)$-viečiu predikatu, kurio reikšmė priklauso nuo likusių $(n\text{-}m)$ argumentų.

Tas faktas, kad 0-vietis predikatas (bendrumo ar egzistavimo kvantorių pritaikymas predikatui) yra teiginys, leidžia panaudoti kvantorius ir predikatus teiginių užrašymui. Kitaip sakant, kvantorių ir predikatų panaudojimas leidžia suskaidyti teiginius į objektus ir savybes. Pavyzdžiui:

1) tapatybiškai teisingas teiginys

   “ Lygtis $x^2 - 3x + 1 = 0$ turi bent vieną šaknį”

   gali būti išreikštas egzistavimo kvantoriaus ir predikato pagalba:

   $$\exists x R(x), \text{ kur } R(x) = (x^2 - 3x + 1 = 0);$$

2) tapatybiškai teisingas teiginys (tautologija), išreiškianti idempotentiškumo dėsnį “ $(x \wedge x = x)$ ” gali būti užrašytas taip:

   $$\forall x Q(x), \text{ kur } Q(x) = (x \wedge x = x);$$

3) tegu predikatas $Q\ (x,y)$ aprašomas tokia lygčių sistema:

   $$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \text{t.y.} \qquad Q(x, y) = \left(\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \right).$$

   Teiginys, kad aukščiau pateikta lygčių sistema turi bent vieną sprendinį, gali būti išreikštas $\exists x \exists y\ Q(x, y)$.

4.4.3. Operacijos su predikatais

Operacijos (loginės jungtys $\wedge$ ir $\vee$) su baigtiniu predikatų skaičiumi aprašomos kaip ir aukščiau paminėtos operacijos su teiginiais (propozicinėmis formulėmis). Baigtinio skaičiaus predikatų konjunkcija arba disjunkcija taip pat yra predikatas, įgyjantis teiginio reikšmes *klaidingas* arba *teisingas* prie konkrečios interpretacijos.

Pavyzdžiui, jei $P(x) = (x < 5)$, $Q(x,y) = (x > y)$, tai šių dviejų predikatų konjunkcija gali būti išreikšta:

$$R(x,y) = P(x) \wedge Q(x,y) = (x < 5) \wedge (x > y).$$

Apibendrinant, galima pasakyti, kad predikatams taikomos ne tik aukščiau paminėtos disjunkcijos ir konjunkcijos operacijos, bet taip pat ir kitos teiginių logikoje naudojamos operacijos, t.y. neigimas, implikacija, loginis ekvivalentiškumas. Šių operacijų taikymo taisyklės, taip pat, kaip ir disjunkcijos bei konjunkcijos taikymo taisyklės, yra analogiškos šių operacijų taikymui teiginių logikoje.

Panagrinėsime ryšį tarp veiksmų su predikatais ir bendrumo bei egzistavimo kvantorių.

1. Nesunkiai gali būti įrodoma, kad jei $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra n-vietis predikatas, o jo argumentai įgyja reikšmes iš aibės $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, tada ($n$-1) – vietis predikatas $\forall x R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra ekvivalentus predikatų konjunkcijai $R(a_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge R(a_2, x_2, \ldots, x_n) \wedge \ldots \wedge R(a_m, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Nesunkiai gali būti įrodoma, kad jei $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra n-vietis predikatas, o jo argumentai įgyja reikšmes iš aibės $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, tada ($n$-1) – vietis predikatas $\exists x R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra ekvivalentus predikatų disjunkcijai $R(a_1, x_2, \ldots, x_n) \vee R(a_2, x_2, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee R(a_m, x_2, \ldots, x_n)$.

Iš šių dviejų teiginių seka išvada, kad:

1. Jei $R(x)$ yra 1-vietis predikatas, o jo argumentas x įgyja reikšmes iš aibės $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, tada 0 - vietis predikatas (t.y. teiginys) $\forall x\, R(x)$) yra ekvivalentus teiginiui $R(a_1) \wedge R(a_2) \wedge \ldots \wedge R(a_m)$.
2. Jei $R(x)$ yra 1-vietis predikatas, o jo argumentas x įgyja reikšmes iš aibės $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, tada 0 - vietis predikatas (t.y. teiginys) $\exists x R(x)$) yra ekvivalentus teiginiui $R(a_1) \vee R(a_2) \vee \ldots \vee R(a_m)$.

Apibendrinant operacijas su predikatais ir kvantorių taikymą predikatams, įvesime predikatinės formulės sąvoką.

Tegu P ir Q yra predikatai, o kintamasis x – šių predikatų argumentas. ***Predikatinę formulę*** sudaro:

- predikatai P, Q,
- bendrumo ir egzistavimo kvantorių taikymas predikatams $\forall x P(x)$ ir $\exists x P(x)$,
- išraiškos, gautos apjungiant predikatus bei kvantorių taikymą predikatams loginėmis operacijomis $\bar{\ }, \vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow$.

Predikatinėse formulėse taip pat naudojami skliaustai.