15. Trumpiausi keliai

Grafų teorija

Vytautas Traškevičius

VU MIF, 2016 m.

Trumpiausių kelių besvoriame grafe ieškojimo uždavinys

Tegu besvoris grafas užrašytas briaunų (lankų) masyvu L ir jų adresų masyvu *lst*

Procedūra rasti trumpiausius kelius nuo viršūnės s iki likusių viršūnių

Parametrai:

- s – viršūnės, nuo kurios norime rasti trumpiausius kelius, numeris
- n – grafo viršūnių skaičius,
- m – grafo briaunų (lankų) skaičius,
- L [1..2m] – briaunų masyvas,
  - L [1..m] (orientuotiesiems grafams) – lankų masyvas
- *lst* [1..n+1] – briaunų (lankų) adresų masyvas

Procedūros rezultatai

Masyvas $d[1..n]$

- i-asis elementas $d[i] = d(s, i)$
- $d[i]$ yra trumpiausio kelio nuo viršūnės s iki viršūnės i ilgis (atstumas nuo s iki i)
- $d[s] = 0$

Masyvas $prec[1..n]$

- i-asis elementas $prec[i]$ nusako, iš kokios viršūnės kelias veda į viršūnę i
- $prec[i] = k$, jei kelias į viršūnę i veda iš viršūnės k
- $prec[s] = s$
- $prec[i] = 0$, jei i dar neaplankyta viršūnė

Sprendimo idėja

- Uždavinio sprendimui patogu naudoti paiešką platyn
- Paieškos platyn k-tojo žingsnio metu nagrinėjamos viršūnės, nutolusios nuo pradinės paieškos viršūnės atstumu k
- Vadinasi, jei k-tajame žingsnyje aplankome viršūnę i, tai $d(s, i) = k$ – radome trumpiausią kelią nuo s iki i, kurio ilgis k
- Masyvo d pradinės reikšmės yra begalybė.
- Kaip begalybę naudosime m+1, nes besvoriame grafe atstumas tarp dviejų viršūnių negali būti didesnis už m
- Jei viršūnė i nepriklauso viršūnės s jungiajai komponentei, tai $d[i] = m+1$
- Masyvo *naujas* i-asis elementas lygus 1, jei viršūnė i nauja, ir 0, jei nenauja (galima išsiversti ir su masyvu *prec*)
- Paieška platyn organizuojama naudojant eilės duomenų struktūrą

Eilės realizacija

- Eilė realizuota kaip užciklinta eilė
- Naudojamas masyvas *eilė*[1..n+1] (n+1, nes eilėje sutalpinti n viršūnių reikia n+1 dydžio masyvo)
- Ištuštinama eilė
  - $r := 1$; $f := 1$
- Ar eilė tuščia?
  - Tuščia, jei $r = f$
- Naujo elemento pridėjimas
  - Jei $r = n+1$, tai $r := 1$, kitaip $r := r+1$
  - Jei $r = f$, tai perpildyta eilė, baigiame darbą (taip bus tik jei parametrai nekorektiški), kitaip *eilė*[r] := *naujas elementas*
- Elemento šalinimas
  - Jei $r = f$, tai eilė tuščia, baigiame darbą (taip bus tik jei parametrai nekorektiški)
  - Jei $f = n+1$, tai $f := 1$, kitaip $f := f+1$
  - *pašalintas elementas* := *eilė*[f]

Procedūra

Visiems masyvo *naujas* elementams priskiriame 1 (visos viršūnės naujos)

Visiems masyvo *d* elementams priskiriame *m*+1 (begalybė)

Visiems masyvo *prec* elementams priskiriame 0

Pradžioje *eilė* tuščia

Į *eilė* patalpiname *s*

naujas[*s*] := 0

d[*s*] := 0

prec[*s*] := *s*

Kol *eilė* netuščia

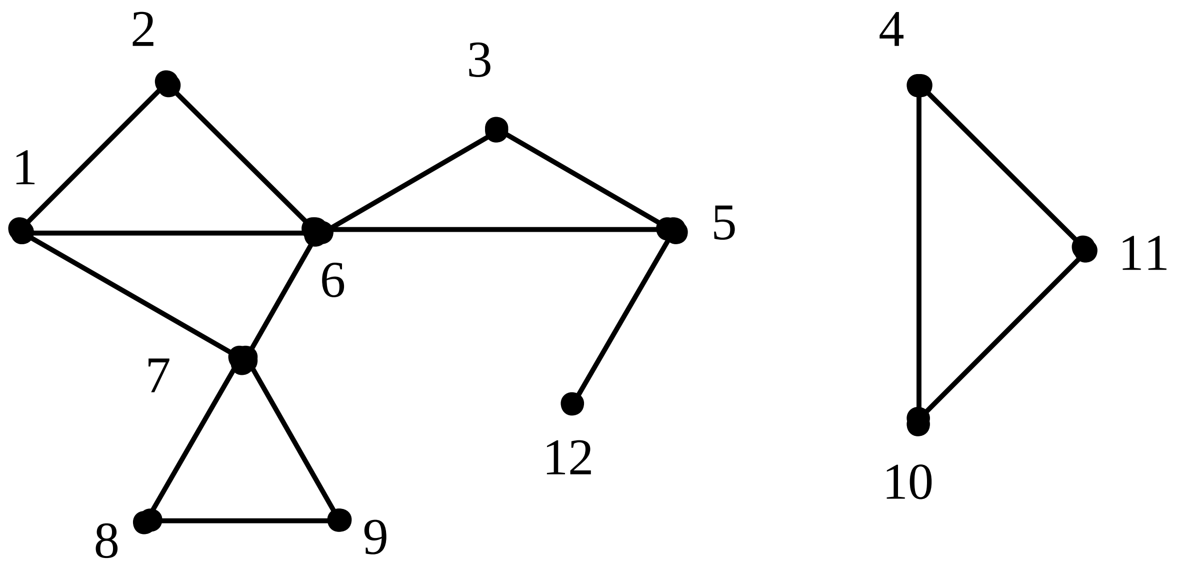
    Iš *eilė* pašalinama viršūnė *p*

    Viršūnės *p* nagrinėjimas

Procedūra. Viršūnės *p* nagrinėjimas

Iteruojame su *i* nuo *lst*[*p*] + 1 iki *lst*[*p*+1] (iteruojame per viršūnei *p* incidentiškų briaunų (lankų) adresus masyve *L*)

- *u* := *L*[*i*] (viršūnei *p* gretima viršūnė *u*)
- Jei *naujas*[*u*] = 1 (jei viršūnė *u* nauja)
  - *d*[*u*] := d[*p*] + 1 (į *u* atėjome iš *p* viena briauna (lanku), todėl *d*(*s*, *u*) yra 1 didesnis nei *d*(*s*, *p*))
  - *prec*[*u*] := *p*
  - *naujas*[*u*] := 0 (*u* tampa nebenauja)
  - Į *eilė* patalpiname *u*

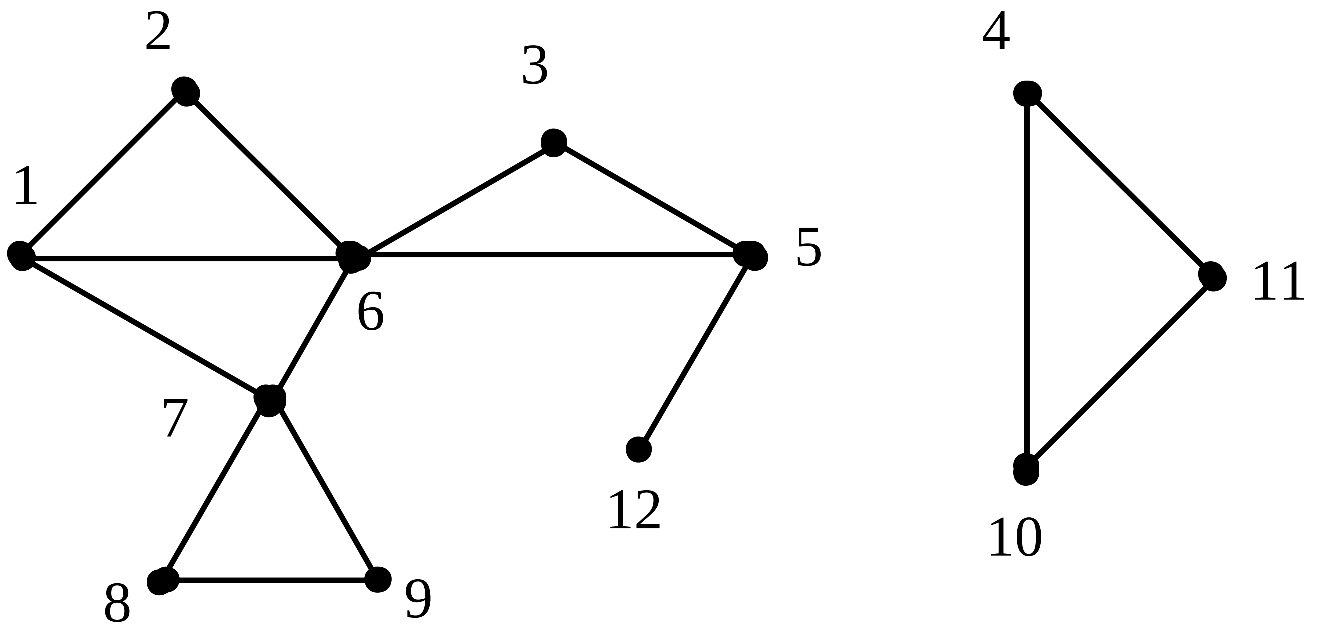


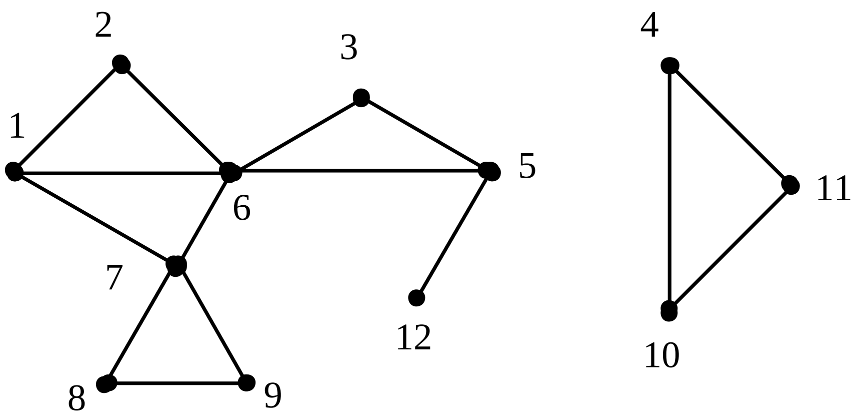
Atlikus trumpiausių kelių paiešką iš pirmos viršūnės (s = 1), gausime tokius d ir *prec* masyvus:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d :	0	1	2	16	2	1	1	2	2	16	16	3,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec :	1	1	6	0	6	1	1	7	7	0	0	5.

Užd. Raskite trumpiausius kelius nuo 9-tos viršūnės iki likusių viršūnių. Eilės tvarka pavaizduokite pakeitimus *eilė*, *d*, *prec*, masyvuose, kintamųjų *f*, *r*, *p* ir *u* pokyčius. Laikome, kad masyve L kiekvienai viršūnei gretimos viršūnės išrikiuotos didėjimo tvarka.





I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

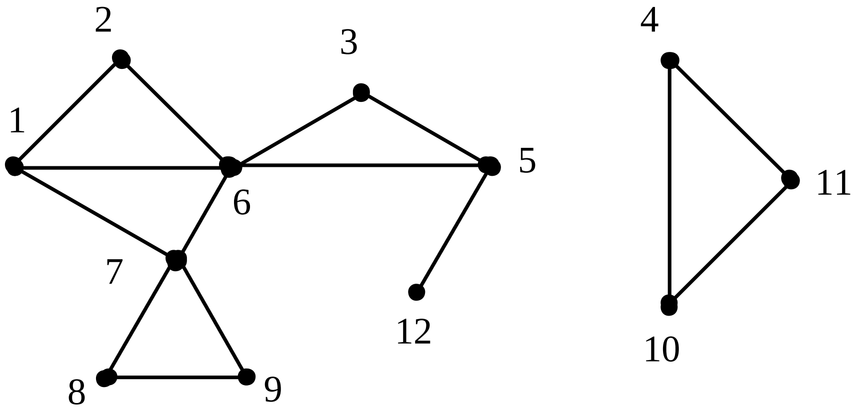
r = 1 f = 1

r = 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		**9**											

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	16	16	16	16	16	16	16	16	**0**	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	0	0	0	0	0	0	0	0	**9**	0	0	0



f = 2
p = 9
u = 7

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	16	16	16	16	16	16	**1**	16	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	0	0	0	0	0	0	**9**	0	9	0	0	0

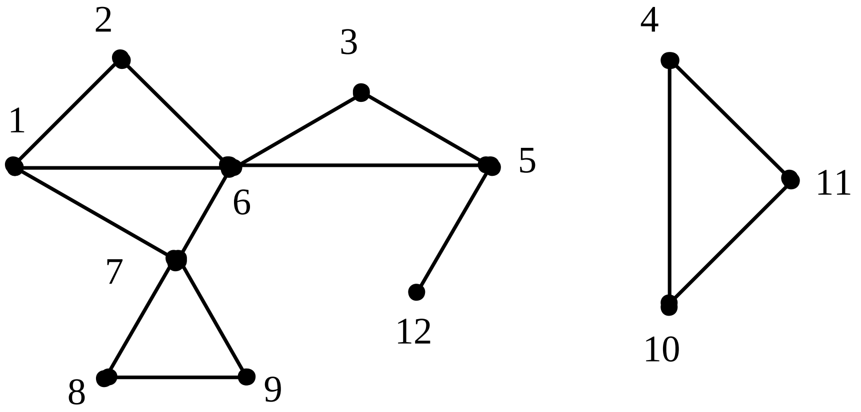
r = 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	**7**										

u = 8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	16	16	16	16	16	16	1	**1**	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	0	0	0	0	0	0	9	**9**	9	0	0	0



r = 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	**8**									

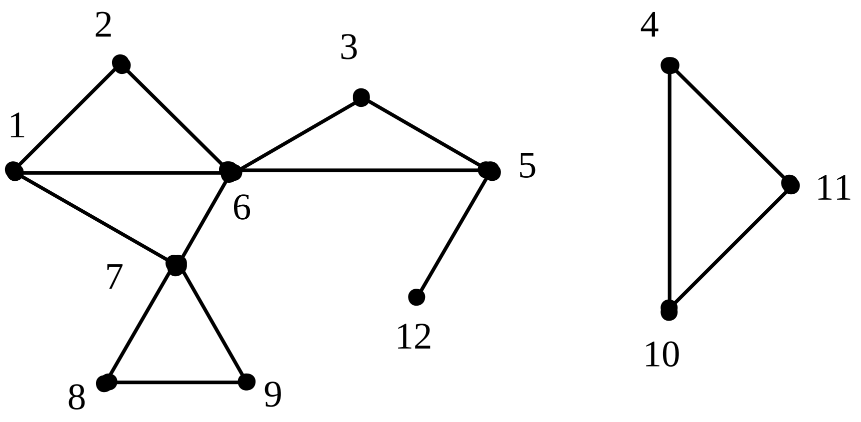
f = 3
p = 7
u = 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	**2**	16	16	16	16	16	1	1	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	**7**	0	0	0	0	0	9	9	9	0	0	0

r = 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	**1**								



u = 6

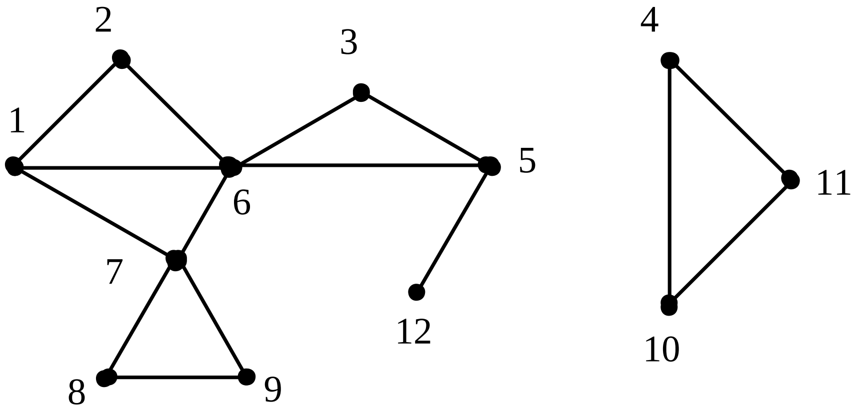
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	2	16	16	16	16	**2**	1	1	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	7	0	0	0	0	**7**	9	9	9	0	0	0

r = 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	1	**6**							

u = 8
u = 9
f = 4
p = 8
u = 7
u = 9



f = 5
p = 1
u = 2

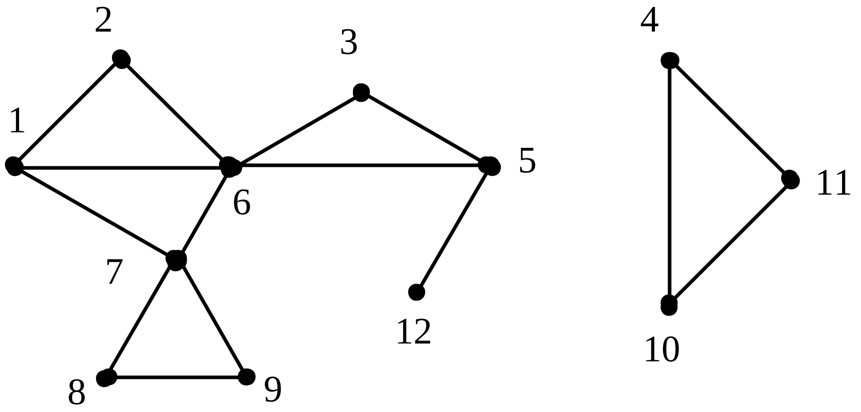
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	2	**3**	16	16	16	2	1	1	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	7	**1**	0	0	0	7	9	9	9	0	0	0

r = 7

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	1	6	**2**						

u = 6
u = 7



f = 6
p = 6
u = 1
u = 2
u = 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	2	3	**3**	16	16	2	1	1	0	16	16	16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	7	1	**6**	0	0	7	9	9	9	0	0	0

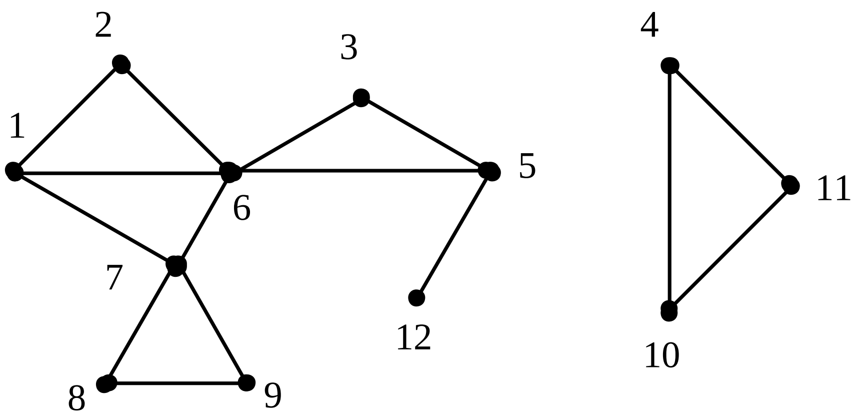
r = 8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	1	6	2	**3**					

u = 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d(*i*)	2	3	3	16	**3**	2	1	1	0	16	16	16

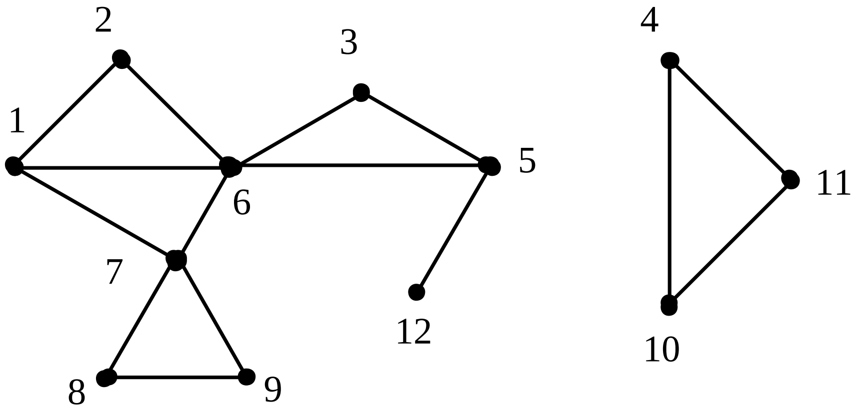
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prec(*i*)	7	1	6	0	**6**	7	9	9	9	0	0	0



r = 9

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	1	6	2	3	**5**				

u = 7
f = 7
p = 2
u = 1
u = 6
f = 8
p = 3
u = 5
u = 6



f = 9
p = 5
u = 3
u = 6
u = 12

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(i)$	2	3	3	16	3	2	1	1	0	16	16	**4**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$prec(i)$	7	1	6	0	6	7	9	9	9	0	0	**5**

r = 10

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
eilė(*i*)		9	7	8	1	6	2	3	5	**12**			

f = 10
p = 12
u = 5

Užd. Raskite trumpiausius kelius nuo 3-ios viršūnės iki likusių viršūnių. Eilės tvarka pavaizduokite pakeitimus *eilė*, *d*, *prec*, masyvuose, kintamųjų *f*, *r*, *p* ir *u* pokyčius. Laikome, kad masyve L kiekvienai viršūnei gretimos viršūnės išrikiuotos didėjimo tvarka.