

Tikimybių teorijos apžvalga

Diskrečioji tikimybinė erdvė

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Apibrėžimas. Tegu Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, $\mathcal{P}(\Omega)$ visų jos poaibių sistema, $P(\omega)$, $\omega \in \Omega$, neneigiami skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \quad (1)$$

Tikimybė vadinsime funkciją $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, kiekvienam $A \subset \Omega$ apibrėžiamą lygybe

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Porą (Ω, P) vadinsime diskrečiąja tikimybine erdve, o Ω - elementariųjų įvykių aibe.

Klasikinė tikimybė

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tai yra baigtinė tikimybinė erdvė, kurioje visi elementarieji įvykiai vienodai galimi. Taigi, jei

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

tai

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Todėl pagal apibrėžimą įvykio $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$ tikimybė bus

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n}.$$

Kitaip sakant, įvykio tikimybė yra lygi jam palankių elementariųjų baigčių skaičiaus ir visų elementariųjų baigčių skaičiaus santykiui.

Klasikinė tikimybė

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Pavyzdys. Metamos trys simetriškos monetos. Raskime įvykio $A = \{\text{atsivertė bent vienas herbas}\}$ tikimybę. Šiuo atveju galime sudaryti tokią elementariųjų įvykių aibę

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

čia $\omega_i = \{\text{atsivertė } i \text{ herbu}\}$. Tada $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.
Atrodytų, kad $P(A) = \frac{3}{4}$.

Klasikinė tikimybė

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Pavyzdys. Metamos trys simetriškos monetos. Raskime įvykio $A = \{\text{atsivertė bent vienas herbas}\}$ tikimybę. Šiuo atveju galime sudaryti tokią elementariųjų įvykių aibę

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

čia $\omega_i = \{\text{atsivertė } i \text{ herbu}\}$. Tada $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Atrodytų, kad $P(A) = \frac{3}{4}$. Tačiau iš tikrųjų ne visi įvykiai ω_i yra vienodai galimi. Todėl

$$P(\omega_0) = P(\omega_3) = \frac{1}{8}, \quad P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{3}{8}.$$

Taigi

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{7}{8}.$$

Nesuderinami įvykiai

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių sistemos

Apibrėžimas. Įvykiai A ir B vadinami nesuderinamais, kai $P(A \cap B) = 0$. Jei $A \cap B = \emptyset$, tai A ir B vadinami nesutaikomais.

Pavyzdys. Dėžėje yra k baltų ir m juodų rutulių. Atsitiktinai be grąžinimo traukiame du rutulius. Nagrinėsime įvykius $A = \{\text{pirmasis rutulys baltas}\}$ ir $B = \{\text{antrasis rutulys baltas}\}$. Tegu

$$\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bj}, \omega_{jb}, \omega_{jj}\},$$

čia elementariųjų įvykių ω indeksai žymi ištraukto rutulio spalvą. Pavyzdžiui, $\omega_{bj} = \{\text{pirmasis rutulys baltas, o antras - juodas}\}$. Tada

$$A = \{\omega_{bb}, \omega_{bj}\}, \quad B = \{\omega_{bb}, \omega_{jb}\}, \quad A \cap B = \{\omega_{bb}\} \neq \emptyset.$$

Matome, kad įvykiai A ir B yra sutaikomi. Rasime jų tikimybes.

Nesuderinami įvykiai

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Kadangi

$$P(\omega_{bb}) = \frac{k(k-1)}{(k+m)(k+m-1)}, \quad P(\omega_{jj}) = \frac{m(m-1)}{(k+m)(k+m-1)},$$

$$P(\omega_{bj}) = P(\omega_{jb}) = \frac{k \cdot m}{(k+m)(k+m-1)},$$

tai

$$P(A) = P(\omega_{bb}) + P(\omega_{bj}) = P(\omega_{bb}) + P(\omega_{jb}) = P(B) = \frac{k}{k+m}.$$

Tačiau įvykiai A ir B ne visada bus suderinami, nes

$$P(A \cap B) = P(\omega_{bb}) = \frac{k(k-1)}{(k+m)(k+m-1)} = 0,$$

kai $k \leq 1$.

Tikimybių savybės

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tegu $A, B, B_1, A_1, A_2, \dots$ yra atsitiktiniai įvykiai diskrečiojoje tikimybiniėje erdvėje (Ω, P) .

1. $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$
2. Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B).$
3. Jei A ir B nesuderinami ir $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, tai įvykiai A_1 ir B_1 taip pat bus nesuderinami.
4. Jeigu įvykiai A_1, A_2, \dots poromis nesuderinami, t.y.
 $P(A_i \cap A_j) = 0$ visiems natūraliesiems $i \neq j$, tai

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

5. Jei $A \subset B$, tai $P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Įvykių σ algebra

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Atsitiktinių įvykių aibė laikoma tik tam tikra, pakankamai "turtinga" Ω paibių sistema \mathcal{F} , turinti tokias savybes:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,
- iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$.

Paibių sistema \mathcal{F} vadinama atsitiktinių įvykių σ (sigma) algebra.

Tada tikimybė vadinama funkcija $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, jei

- i) $P(\Omega) = 1$;
- ii) jei $A_i \in \mathcal{F}$ ir $A_i \cap A_j = \emptyset$ visiems natūraliesiems $i \neq j$, tai
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Sąlyginė tikimybė

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Sąlyginė tikimybė žymima $P(A|B)$ (skaitoma "tikimybė, kad įvyks A su sąlyga, kad įvyko B " arba "įvyks A , jeigu įvyko B "). Jei $P(B) > 0$, tai

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo išplaukia vadinamoji *tikimybių daugybos teorema* :

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \quad (2)$$

Apibrėžimas. Įvykius A ir B vadinsime nepriklausomais, jeigu $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Didesnio įvykių skaičiaus nepriklausomumas apibrėžiamas sudėtingiau.

Sąlyginė tikimybė

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
[Sąlyginė tikimybė](#)
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Pavyzdžiui, įvykiai A , B ir C vadinami nepriklausomais, jei teisingos visos keturios lygybės

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B), & P(A \cap C) &= P(A)P(C), \\P(B \cap C) &= P(B)P(C), & P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

Pilnosios tikimybės formulė

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

**Pilnosios tikimybės
formulė**

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i)P(A|H_i), \quad (2)$$

čia H_i , ($i \in I$) - baigtinė arba skaiti poromis nesuderinamų įvykių šeima, tenkinanti sąlygą

$$P\left(\bigcup_{i \in I} H_i\right) = 1.$$

Pilnosios tikimybės formulė teigia, kad *apriorinę* įvykio A tikimybę galima rasti, žinant *aposteriorines* (sąlygines) A tikimybes, esant sąlygoms H_i , ir tų sąlygų susidarymo tikimybes.

Bajeso formulė

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Esant toms pačioms prielaidoms kaip ir pilnosios tikimybės formulėje, galime rasti ir hipotezių aposteriorines tikimybes $P(H_j|A)$:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i \in I} P(H_i)P(A|H_i)} . \quad (3)$$

(3) lygybė vadinama Bajeso hipotezių tikrinimo formule.

Dešifravimo uždavinys

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių sistemos

Tarkime, kad slaptas pranešimas užšifruotas raidėmis a, b, c ir žinoma, kad paprastai pusę šifruoto teksto sudaro raidės a , o raidė b sutinkama dvigubai dažniau nei c . Be to, kol pasiekia adresatą, vidutiniškai 10% raidžių b bei 5% raidžių c iškraipomos ir virsta raidėmis a . Kokia tikimybė, kad tryliktas adresato gauto šifruoto teksto simbolis bus raidė a ? Parinksime hipotezes H_1, H_2, H_3 :

$$H_1 = \{\text{tryliktas siunčiamo šifro simbolis buvo raidė } a\},$$
$$H_2 = \{\text{tryliktas siunčiamo šifro simbolis buvo raidė } b\},$$
$$H_3 = \{\text{tryliktas siunčiamo šifro simbolis buvo raidė } c\},$$
$$P(H_1) = \frac{1}{2}; P(H_2) = \frac{1}{3}; P(H_3) = \frac{1}{6}.$$

Tegul $A = \{\text{tryliktas gauto šifro simbolis yra raidė } a\}$. Tuomet, pagal uždavinio sąlygas,

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = 0,1, \quad P(A|H_3) = 0,05.$$

Dešifravimo uždavinys

Diskr.tikim.erdvė

Klasikinė tikimybė

Nesuderinami įvykiai

Tikimybių savybės

Įvykių σ algebra

Sąlyginė tikimybė

Pilnosios tikimybės
formulė

Bajeso formulė

[Dešifravimo uždavinys](#)

Bernulio eksperimentai

Atsitiktiniai dydžiai

A.d. pasiskirstymo
funkcija

Nepriklausomi a.d.

A.d. vidurkis

A.d. dispersija

Įvykių sistemos

Jungtinė įvykių sistema

Nepriklausomos įvykių
sistemos

Pritaikę pilnosios tikimybės formulę, gauname

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Galime formuluoti ir kitą, dažnai žymiai aktualesnį, klausimą.

Tarkime, kad vienaip ar kitaip adresatas sugebėjo perskaityti tą nelemtą tryliktąjį gauto šifro simbolį - tai buvo raidė a . Kokia tikimybė, kad ji nėra iškraipyta? Kitaip sakant, mus dominanti tikimybė yra $P(H_1|A)$.

Dešifravimo uždavinys

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė

Dešifravimo uždavinys

Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Ją rasime, pasinaudoję Bajeso formule. Pastebėsime, kad trupmenos vardiklis (3) lygybėje, pagal pilnosios tikimybės formulę, yra lygus $P(A)$. Todėl

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{13}{24}} = \frac{12}{13}.$$

Bernulio eksperimentai

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
[Bernulio eksperimentai](#)
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Bernulio eksperimentų schema nusakoma taip: eksperimentą atlikus vieną kartą, jo sėkmės tikimybė lygi p . Atliekame n nepriklausomų eksperimentų. Sėkmių skaičių pažymėkime S_n . Kokia tikimybė, kad eksperimentas pavyks k kartų, t.y. $S_n = k$? Atsakymas į šį klausimą toks:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Atsitiktiniai dydžiai

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
[Atsitiktiniai dydžiai](#)
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tarkime, kad (Ω, P) yra diskrečioji tikimybinė erdvė. *Atsitiktiniu dydžiu* šioje erdvėje vadinama realioji funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. *Diskretieji a.d.* dažniausiai nusakomi *reikšmių skirstiniu*, nurodant galimas reikšmes x_i ir jų tikimybes

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i} P(\omega), \quad i = 1, 2, \dots$$

Apibrėžimas. *Atsitiktinis dydis X , kurio patekimo į intervalą $[a, b]$ tikimybė skaičiuojama pagal formulę*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx, \quad p(x) \geq 0,$$

vadinamas absoliučiai tolydžiuoju dydžiu, o funkcija $p(x)$ vadinama jo tankiu.

A.d. pasiskirstymo funkcija

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
[A.d. pasiskirstymo funkcija](#)
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių sistemos

Atsitiktinio dydžio X *pasiskirstymo funkcija* $F(x)$ yra

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją ir tankį sieja lygybės:

$$F'(x) = p(x),$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du.$$

Nepriklausomi a.d.

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
[Nepriklausomi a.d.](#)
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Atsitiktinius dydžius X_1 ir X_2 vadiname nepriklausomais, kai su bet kuriais realiųjų skaičių poaibiais B_1, B_2 įvykiai $\{\omega : X_1(\omega) \in B_1\}$ ir $\{\omega : X_2(\omega) \in B_2\}$ yra nepriklausomi, kitaip sakant, jei

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2).$$

Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių atveju pakanka pareikalausiti, kad visiems realiesiems x, y būtų tenkinama lygybė

$$P(X_1 = x, X_2 = y) = P(X_1 = x)P(X_2 = y).$$

A.d. vidurkis

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo funkcija
Nepriklausomi a.d.
[A.d. vidurkis](#)
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių sistemos

X	x_1	x_2	x_3	\dots
P	p_1	p_2	p_3	\dots

Žinoma, $p_1 + p_2 + \dots = 1$, $p_i \geq 0$. Taip nusakyto atsitiktinio dydžio *vidurkiu* vadinama suma

$$\mathbf{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots$$

Jeigu X turi tankį $p(x)$, tai vidurkis apibrėžiamas integralu

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx .$$

A.d. vidurkis

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
[A.d. vidurkis](#)
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Dikrečiojo ir tolydžiojo dydžių atvejais funkcijos vidurkis atitinkamai
yra

$$\mathbf{E}f(X) = f(x_1)p_1 + f(x_2)p_2 + f(x_3)p_3 + \dots$$

ir

$$\mathbf{E}f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx .$$

A.d. vidurkis

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
[A.d. vidurkis](#)
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Savybės

Tegu X, X_1, X_2, \dots, X_n yra atsitiktiniai dydžiai, turintys baigtinius vidurkius.

1. Su bet kokiomis konstantomis c_1, c_2, \dots, c_n teisinga lygybė

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{E}X_i .$$

2. Jei $X_1 \leq X_2$, tai $\mathbf{E}X_1 \leq \mathbf{E}X_2$.
3. $|\mathbf{E}X| \leq \mathbf{E}|X|$.
4. Jei X_1, X_2 yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbf{E}(X_1) \cdot \mathbf{E}(X_2) .$$

A.d. dispersija

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
[A.d. dispersija](#)
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

A.d. sklaidą apie vidurkį aprašo *dispersija*

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 .$$

Kvadratinė šaknis iš dispersijos vadinama *standartiniu nuokrypiu*
 $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Paminėsime keletą dispersijos savybių, laikydami, kad atsitiktiniai dydžiai X, X_1, X_2, \dots, X_n turi baigtines dispersijas.

A.d. dispersija

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
[A.d. dispersija](#)
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Savybės

1. $\mathbf{D}X \geq 0$.
2. $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$.
3. $\mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + 2cov(X_1, X_2)$, čia

$$\begin{aligned} cov(X_1, X_2) &= \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2) \\ &= \mathbf{E}X_1X_2 - \mathbf{E}X_1\mathbf{E}X_2 \end{aligned}$$

yra atsitiktinių dydžių X_1 ir X_2 *kovariacija*.

4. Jei X_1, X_2, \dots, X_n yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai su bet kokiomis konstantomis c_1, c_2, \dots, c_n teisinga lygybė

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathbf{D}X_i.$$

A.d. dispersija

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
[A.d. dispersija](#)
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Pavyzdys. Rasime binominio skirstinio vidurkį ir dispersiją. Tegul $X_i = 1$, jei i -tasis Bernulio eksperimentas buvo sėkmingas, ir $X_i = 0$ - priešingu atveju. Tada sėkmių skaičius po n eksperimentų bus n nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n .$$

Todėl

$$\mathbf{E}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i = np ,$$

$$\mathbf{D}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}X_i = np(1 - p) .$$

Įvykių sistemos

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
[Įvykių sistemos](#)
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tarkime $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ yra diskrečiosios tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių šeima, I - baigtinė arba skaiti indeksų aibė.

Apibrėžimas. Jei $P(A_i \cap A_j) = 0$ visiems $i, j \in I, i \neq j$ ir

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1,$$

tai \mathcal{A} vadinsime tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių sistema.

Pastebėsime, kad poromis nesuderinamiems įvykiams A_i

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Todėl antrojoje apibrėžimo sąlygoje sąjungos tikimybę pakeitę atitinkamų tikimybių suma, gautume ekvivalentišką įvykių sistemos apibrėžimą.

Įvykių sistemos

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
[Įvykių sistemos](#)
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Apibrėžimas. Tarkime $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ir $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ yra tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių sistemos. \mathcal{A} yra sistemos \mathcal{B} apvalkalas, jei kiekvienam $j \in J$ galima rasti tokį $i \in I$, kad $P(A_i \cap B_j) = P(B_j)$. Tokiu atveju sakysime, kad sistema \mathcal{B} yra tikslesnė už sistemą \mathcal{A} .

Kitaip sakant, kiekvienai tikslesnės sistemos aibei visada atsiras ją dengianti "grubesnės" sistemos aibė

Įvykių sistemos

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
[Įvykių sistemos](#)
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Teorema. *Jei \mathcal{B} yra tikslesnė už sistemą \mathcal{A} , tai visiems $i \in I, j \in J$*

$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j) \quad \text{arba} \quad P(A_i \cap B_j) = 0.$$

Įvykių sistemos

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
[Įvykių sistemos](#)
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Irodymas. Kai $P(B_j) = 0$, šis teiginys akivaizdus. Tarkime, kad $P(B_j) \neq 0$ ir $P(A_i \cap B_j) \neq P(B_j)$. Lieka įsitikinti, kad tokiu atveju būtinai $P(A_i \cap B_j) = 0$. Pagal apvalkalo apibrėžimą, aibėje I galima rasti tokį $i_0 \neq i$, kad

$$P(A_{i_0} \cap B_j) = P(B_j).$$

Vadinasi

$$B_j = A_{i_0} \cap B_j \cup N, \quad P(N) = 0.$$

Taigi

$$\begin{aligned} P(A_i \cap B_j) &= P(A_i \cap (A_{i_0} \cap B_j) \cup (A_i \cap N)) \\ &\leq P(A_i \cap A_{i_0}) + P(N) = 0. \end{aligned}$$

□

Jungtinė įvykių sistema

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
[Jungtinė įvykių sistema](#)
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tarkime $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ir $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ yra tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių sistemos. Jų *jungtinė sistema* $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ nusakoma lygybe

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j : (i, j) \in I \times J\}.$$

Akivaizdu, kad $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ tikslesnė ir už \mathcal{A} ir už \mathcal{B} . Bet pasirodo, kad ji yra pati "grubiausia" iš visų tikslesnių už \mathcal{A} ir \mathcal{B} .

Jungtinė įvykių sistema

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
[Jungtinė įvykių sistema](#)
Nepriklausomos įvykių sistemos

Teorema. *Jei sistema \mathcal{C} yra tikslesnė už \mathcal{A} ir \mathcal{B} , tai ji tikslesnė ir už $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.*

Įrodymas. Iš tikrųjų, iš teiginio prielaidos išplaukia, kad kiekvienam $C \in \mathcal{C}$ galima rasti tokius A_i ir B_j kad
 $P(A_i \cap C) = P(B_j \cap C) = P(C)$.

Todėl

$$B_j \cap C = C \setminus N, \quad N \subset C, \quad P(N) = 0.$$

Dabar gauname

$$\begin{aligned} P(A_i \cap B_j \cap C) &= P(A_i \cap (C \setminus N)) \\ &= P((A_i \cap C) \setminus (A_i \cap N)) \\ &= P(A_i \cap C) - P(A_i \cap N) = P(C). \end{aligned}$$

□

Nepriklausomos įvykių sistemos

Diskr.tikim.erdvė
Klasikinė tikimybė
Nesuderinami įvykiai
Tikimybių savybės
Įvykių σ algebra
Sąlyginė tikimybė
Pilnosios tikimybės
formulė
Bajeso formulė
Dešifravimo uždavinys
Bernulio eksperimentai
Atsitiktiniai dydžiai
A.d. pasiskirstymo
funkcija
Nepriklausomi a.d.
A.d. vidurkis
A.d. dispersija
Įvykių sistemos
Jungtinė įvykių sistema
Nepriklausomos įvykių
sistemos

Tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių sistemos $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ir $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ vadinamos *nepriklausomomis*, jei

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$$

visiems $(i, j) \in I \times J$.

Pavyzdys. Tarkime X ir Y diskretieji atsitiktiniai dydžiai erdvėje (Ω, P) , o $\{x_i \in \mathbb{R} : i \in I\}$ ir $\{y_j \in \mathbb{R} : j \in J\}$ - jų galimų reikšmių aibės. Apibrėžkime įvykius $A_i = \{X = x_i\}$ ir $B_j = \{Y = y_j\}$. Nesunku pastebėti, kad $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ir $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ yra tikimybinės erdvės (Ω, P) įvykių sistemos. Jos bus nepriklausomos tada ir tik tada, kai nepriklausomi yra jas generuojantys atsitiktiniai dydžiai X ir Y .