Chapter 6

DAUGIAKRITERIS OPTIMIZAVIMAS

6.1 Intuityvusis išrinkimas

Daugelio kriterijų uždaviniai iškyla įvairiose sprendimų priėmimo situacijose. Panagrinėkime projektavimą. Kiekvienas projektavimo etapas baigiamas vieno arba kelių variantų išrinkimu tolesniam darbui. Pavyzdžiui, ekspertams pateikiami penki galimi preliminarūs siuvimo cecho varijantai X_i, $i = 1, ..., 5$, besiskiriantys kriterijų vektoriaus $F(X) = (f_1(X), ..., f_5(X))$ reikšmėmis. Jas palyginę, ekspertai savo išvadas dažnai formuoja, pavyzdžiui, šitaip: varijantas X_1 nepriimtinas dėl per didelės kriterijaus f_1 (kainos) reikšmės, o X_2 - dėl per mažo f_2 (patikimumo). Variantas X_3 atmetamas, nes beveik pagal visus kriterijus blogesnis už X_1 , tik pasižymi mažu f_5 (triukšmo lygiu). Rekomenduojama dirbti su variantais X_1 ir X_5 , tačiau reikia sumažinti varianto X_5 triukšmo lygį ir pagerinti kitus sanitarinius kriterijus bei sumažinti varijanto X_1 kainą.

Be abejo, ekspertai, visapusiškai išnagrinėję kelis variantus, priims racionalų sprendimą. Tačiau ar tie keli variantai atspindi visas galimybes? Kita vertus, žmogus gali neaprėpti visų galimų variantų, jei jų yra keli šimtai, ypač tuomet, kai kiekvienas varijantas apibūdinamas dešimtimis kriterijų. Euristiniais metodais vargu ar pavyktų ištirti didelę variantų aibę ir, atmetus aiškiai nepriimtinus, išrinkti ekspertizei tam tikrą potencialiai geriausių variantų skaičių. Todėl ekspertai efektyviai gali dirbti tik naudodami matematinius metodus. Minėjome, kad racionalaus išrinkimo uždavinį teoriškai galima pakeisti naudingumo funkcijos optimizavimo uždaviniu. Šiame skyriuje panagrinėsime, kaip tą padaryti praktiškai. Jei sudaryti naudingumo funkciją dėl įvairių priežasčių sunku, tai galime pasinaudoti alternatyviais metodais, kuriuos taip pat aptarsime.

6.2 Apibrėžimai

Projekuotojo keičiamų parametrų vektorius $X = (x_1, ..., x_n)$ parenkamas tam tikroje srityje $A \in R^n$, vadinamojoje leistinąja sritimi arba leistinąja aibe. Pavyzdžiui, kai kuriems kintamiesiems apibrėžiamos viršutinės, kai kuriems - apatinės, kitiems - abi ribos. Plačiau leistinosios srities sąvoka aptarta skyrelyje, skirtame optimizavimo uždavinių formulavimui. Pavyzdžiui, leistinoji sritis 6.19 paveiksle apibrėžta trimis paprastaisiais, vienu netiesiniu ir dviem tiesiniais ribojimais.

Kiekvienam vektoriui X apibrėžtas kriterijų vektorius $(f_1, ..., f_m) = F(X)$. Vektoriui X kintant aibėje A vektorius F perbėga kriterijų reikšmių aibę Φ. Jei kriterijus būtų tik vienas (tolydinis X atžvilgiu), tai Φ sutaptų su intervalu, kurio pradžią ir galą nustato kriterijaus funkcijos (vieno kriterijaus uždaviniuose vadinamos tikslo funkcija) minimumas ir maksimumas. Jei yra daug kriterijų, tai jų maksimumų taškai paprastai nesutampa. Pavyzdžiui,

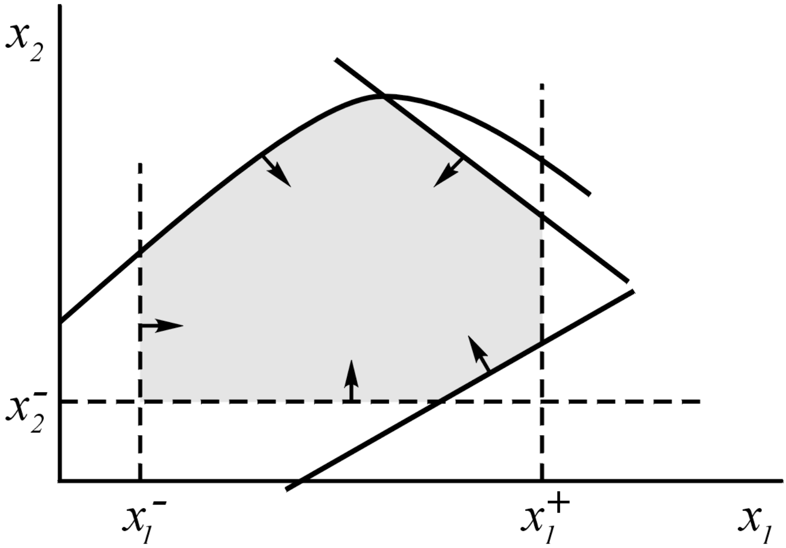

Figure 6.19: Leistinosios aibės pavyzdys

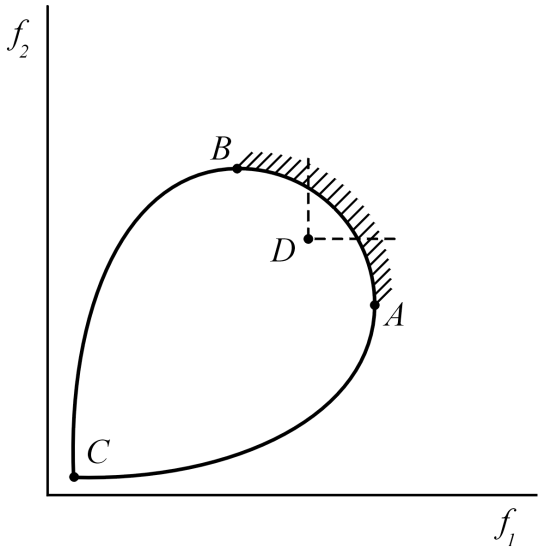

Figure 6.20: Kriterijų reikšmių aibės pavyzdys

kriterijų reikšmių aibėje, pavaizduotoje 6.20 paveiksle, pirmojo kriterijaus maksimumo taškas A nesutampa su antrojo kriterijaus maksimumo tašku B. Tačiau sutampa abiejų kriterijų minimumai taške C. Jei spręsdami šį uždavinį surastume bet kurio kriterijaus minimimą, tuomet išspręstume ir dvikriterį minimizmo uždavinį.

Daugiakriterių uždavinių teorijoje paprastai nagrinėjamas visų kriterijų **maksimizavimas**. Tokiu atveju nelygybė tarp kriterinių įverčių vektorių atrodo panašiai kaip preferencijos santykio ženklas. Toliau laikysimės šios tradicijos, nors vieno kriterijaus optimizavimo uždaviniuose tikslo funkciją minimizavome. 6.20 paveiksle iliustruojamas dvikriterio maksimizavimo uždavinys gali atrodyti prieštaringas. Jei kaip sprendinį imsime tašką A, tai gerokai nukrypsime nuo maksimalios antrojo kriterijaus riekšmės, ir atvikščiai. Todėl reikia ieškoti kompromisinio varijanto. Kita vertus, D taip pat negali būti sprendiniu, nes visi taškai pažymėtame sektoriuje yra geresni uš tašką D abiejų kriterijų atšvilgiu. Taškai, iš kurių negalima pajudėti pagerinant abu kriterijus, sudaro aibės Φ šiaurės - rytų ribą, kuri pavyzdžiui užbrūkšniuota 6.20 paveiksle. Toks Φ poaibis vadinamas **Pareto arba kompromisų aibe**. Jei abu kriterijai lygiaverčiai, tai nė vieno iš šio poaibio taškų negalime išskirti, nes kiekvieną iš jų vienodai tinkamas kaip kompromisinis variantas. Todėl bendru atveju nepagerinamą kriterijų vektorių galime apibrėšti šitaip: F nepagerinamas, jei kūgio, sudaryto iš pustiesių išeinančių iš taško F koordinačių kryptimis, sankirta su aibe Φ susideda iš veinintelio taško F. Pavyzdžiui, 6.20 paveiksle kiekvienas užbrūkšniuotas kreivės taškas nepagerinamas.

Projektuotoją domina, kaip surasti variantą, atitinkantį nepagerinamą kriterijų vektorių. Taškas X^* vadinamas **efektyviuoju sprendiniu** (optimaliu Pareto prasme), jei nelygybė $F(X) \geq F(X^*)$ ekvivalenti lygybei $X = X^*$, t.y. neegzistuoja toks $X \in A$, kuriam $f_i(X) \geq f_i(X^*)$, $i = 1, ..., m$ ir bent vienam j, $f_j(X) \geq f_j(X^*)$. Efektyvaus sprendinio kriterijų vektorius nepagerinamas, ir atvirkščiai: kiekvieną nepagerinamą kriterijų (Pareto) vektorių atitinka efektyvus sprendinys.

6.3 Kriterijų kompozicija

Praeitame skyriuje buvo parodyta, kad racionalus išrinkimas gali būti pakeistas naudingumo funkcijos maksimizavimu. Tačiau ir nežinant šio rezultato atrodo gan natūralu pakeisti daugiakriterį uždavinį vienakriteriniu, sudarytu susumavus su svoriais visus uždavinio kriterijus

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ f_i(X), \ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \, a_i \geq 0. \tag{6.1}$$

Kokiu pagrindu gautąją funkciją $f(X)$ galima laikyti pradindinio uždavinio naudingumo funkcja? Ar teoriškai pagrįstas daugiakriterio uždavinio keitimas funkcijos $f(X)$ maksimizavimo uždaviniu?

Paprastai, preferencijos santykį (psichologiniu) eksperimentu pavyksta nustatyti tik nedideliam alternatyvų skaičiui. Todėl galima tikėtis parinkti svorius (6.1) taip, kad funkcijos $f(X)$ reikšmių santykiai atitiks eksperimentinius duomenis. Kita vertus, kartais kriterijų svorius galima nustatyti atsižvelgiant į kriterijų svarbą. Panagrinėsime svertinės kriterijų sumos savybes:

16 teorema. Jei aibė A yra iškili, funkcijos $f_i(X)$- įgaubtos (iškilos į viršų) ir X^0- efektyvaus sprendinio taškas, tai egzistuoja tokie $a_i^0 \geq 0$, $\sum_{i=1}^m a_i^0 = 1$, kad

$$\max_{X \in A} \sum_{i=1}^{m} a_i^0 \ f_i(X) = \sum_{i=1}^{m} a_i^0 \ f_i(X^0). \tag{6.2}$$

Šis S.Karlin'o rezultatas teoriškai pagrindžia svertinės svorių kompozicijos taikymą.

17 teorema. Jei $a_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, bent vienas $a_j > 0$ ir

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ f_i(X^*) = \max_{X \in A} \sum_{i=1}^{m} a_i \ f_i(X) \tag{6.3}$$

tai X^* yra efektyvus sprendinys.

Iš šių teoremų matome, kad maksimizuojant svertinę kriterijų sumą visada gaunamas efektyvusis sprendinys. Atitinkamai parinkdami svorius, galime gauti bet kurį efektyvųjį sprendinį. Gali susidaryti įspūdis, kad naudodamiesi šia kriterijų kompozicija galėsime išspręsti visas daugiakriterio optimizavimo problemas. Tačiau iškilumo riekalavimas Karlin'o teoremoje susiaurina jos pritaikymo sritį, nes kriterijų iškilumas projektavimo uždaviniuose gali būti abejotinas ir tik atskirais atvejais įrodomas. Jei iškilumo sąlyga ir priimtina, tai dar lieka neaišku, kokia yra priklausomybė tarp parenkamų svorių ir juos atitinkančių Pareto aibės taškų. Jei apie kriterijus turime papildomos informcijos, tai kaip ją įvertinti parenkant svorius? Pavyzdžiui, reikia gauti N tolygiai pasiskirsčiusių Pareto aibėje taškų. Kaip parinkti svorius? Parenkant svorius asitiktinai su tolygiu pasiskirstymu, juos atitinką kriterijų vektoriai gali būti pasiskirstę Pareto aibėje labai netolygiai. (6.21) paveiksle pavaizduotas gana tipiškas pavyzdys: atskiruose Pareto aibės poaibiuose taškai išsidėstę tankiai, o kai kur jų visai nėra. Todėl lieka neaišku, kokia yra Pareto aibės forma. Naudodamiesi turimais duomenimis negalime atsakyti, ar egzistuoja tokie kriterijų vektoriai, kad $f_i > f_i^*$. Ekstrapoliuodami taip, kaip parodyta paveiksle brūkšnine linija, galėtume tikėtis, kad tinkamai parinkus svorius, gausime geresnį už (f_1^*, f_2^*) kriterijų vektorių. Tačiau gali pasirodyti, kad tikroji riba yra tokia, kokią vaizduoja ištisinė linija, ir nėra vektoriaus su komponenčių reišmėmis f_i^*.

Svertinė kriterijų kompozicija nėra panacėja, bet ji dažnai naudojama kuriant daugiakriterio optimizavimo metodus. Bendras kriterijus, gautas atlikus svertinės kriterijų sumos kompoziciją, pasižymi tuo, kad sumažėjus vienam kriterijui, tai kompensuojama, padidinus kitą. Kitu atveju, tai gali būti lyg ir atskirų pelno komponenčių suma: svarbu maksimizuoti bendrą pelną ir visai nesvarbu, kurios komponentės sąskaita jis gaunamas.

Esti uždavinių, kuriuose variantas nepriimtinas, jei bent vieno kriterijaus reikšmė lygi "nuliui". Čia nulis parašytas kabutėse todėl, kad natūraliame mastelyje nepriimtina kriterijaus reikšmė gali ir nebūti lygi nuliui. Tačiau, pakeitus skalės ataskaitos tašką, šią reikšmę galima laikyti nuline. Antra vertus, net ir labai geros kelių kriterijų reikšmės gali būti nuvertintos, kai vienas iš kriterijų artimas nuliui. Šiuo atveju variantas priimtinas tik tuomet, kai visų kriterijų reikšmės bent jau "neblogos" (anksčiau aprašytu svertinės sumos atveju variantas galėtų būti priimtinas ir tuomet, kai vieno kriterijaus reikšmė "labai bloga", t.y. nulinė). Tokias savybes turi kompozicija, išreiškiama kriterijų

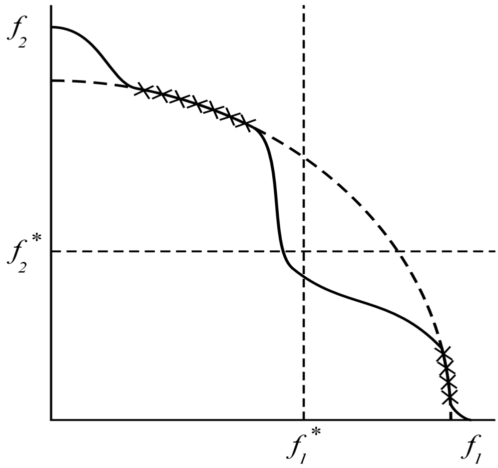

Figure 6.21: Optimizuojant svertinę svorių kompoziciją, taškai Pareto aibėje išsidėsto netolygiai

sandauga:

$$f(X) = f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot ... \cdot f_m(X). \tag{6.4}$$

Jei funkciją $f(X)$ logaritmuosime, tai gausime atskirų kriterijų logaritmų sumą. Todėl šios kompozicijos matematinės savybės yra analogiškos svertinės sumos savybėms.

Pateiksime dar vieną kriterijų kompzicijos pavyzdį

$$f(X) = \min_i a_i \cdot f_i(X), \tag{6.5}$$

kuria išreiškiamas "silpniausios grandies stiprinimo" principas. Juo dažnai naudojasi projektuotojai. Šiuo atveju, net nereikalaujant kriterijų iškilumo prielaidos, galima įrodyti teoremą, panašią į Karlin'o teoremą.

18 teorema. Jei X^* yra efektyvaus sprendinio taškas ir $f_i(X^*) > 0$ visiems $1 \leq i \leq m$, tai egzistuoja tokie $a_i^* > 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_i^* = 1$, kad

$$\max_{X \in A} \min_i a_i^* \cdot f_i(X) = \min_i a_i^* \cdot f_i(X^*). \tag{6.6}$$

Jei X nepriklauso efetyviųjų sprendinių aibei, tai esant bet kokiems $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, taške X funkcijos $\min_i a_i \cdot f_i(X)$ maksimumas nepasiekiamas.

Teoriniu požiūriu šis (J.Germejerio) rezultatas yra labai bendras. Tačiau praktiškai parinkti svorius (6.6) kompozicijai gali būti gana sudėtinga.

Kartais, sprendžiant daugiakriterį uždavinį, formuluojamas idealus tikslas, t. y. kriterijų vektorius F^0, kurio gal ir neįmanoma pasiekti, bet į kurį reikia orientuotis. Pavyzdžiui, žinome, kad gaminys, kurio parametrai F^0, rinkoje turi paklausą. Norint jį nukonkuruoti, reikia pasiūlyti gaminį, kurio parametrai būtų beveik tokie patys, bet jo gamybai reikėtų mažiau sąnaudų. Taigi, siekiame priartėti prie užsibrėžto tikslo. Todėl toks daugiakriterio uždavinio pakeitimas vienakriteriniu vadinamas tikslo programavimu. Šis terminas yra vertinys iš anglų kalbos **goal programming**. Tikslo programavimo uždavinio formulavimui be tikslo vektoriaus F^0 reikia dar apibrėšti atstumo tarp kriterijų vektorių funkciją $r(F^0, F)$. Tuomet daugiakriterį uždavinį galima pakeisti minimizavimo uždaviniu

$$\min_{X \in A} r(F^0, F(X)).$$

Kadangi atstumo funkcija dažniausiai apibrėžiama šitaip :

$$\begin{aligned} r_1(F,G) &= \sum_{i=1}^{m} c_i|f_i - g_i|, \\ r_2(F,G) &= \sum_{i=1}^{m} c_i(f_i - g_i)^2, \end{aligned}$$

tai ir vėl kyla klausimas: kaip parinkti atskirų kriterijų svorius? Dažnai neaišku, kurią atstumo formulę pasirinkti. Be to, tikslą ne visada galima apibrėžti vienareikšmiškai.

Kriterijų kompozicijos optimizavimas pagrindžiamas įvairiais euristiniais samprotavimais ir matematinėmis kompozicijos funkcijų savybėmis. Viena iš pagrindinių šio metodo problemų – kaip informaciją apie kriterijus išreikšti jų svoriais. Apibrėžus kompozicijos funkciją, uždavinys sprendžiamas įprastais optimizavimo metodais.

6.4 Nuosekli kriterijų analizė

Administracinių sprendimų, kurie priimami esant sudėtingoms situacijoms (kai yra daug kriterijų ir tikslų) tyrimai parodė, kad žmonės alternatyvas išrenka nuosekliai analizuodami atskirus kriterijus. Pirmiausia atmetamos alternatyvos, netinkančios pagal svarbiausiąjį kriterijų, po to - pagal antrąjį ir tt. Tinkamiausi variantai išrenkami nuosekliai atmetant netinkamus atskirų kriterijų požiūriu.

Panašūs rezultatai buvo gauti atliekant psichologinius eksperimentus. Pavyzdžiui, dalyviai turėjo išrinkti iš daugelio daiktų vieną, reikalingą eksperimento vedėjui. Spręsdamas šį uždavinį, eksperimento dalyvis užduodavo vedėjui klausimus apie reikalingo daikto požymius. Daugelis klausimų buvo formuojami taip, kad būtų galima atmesti visus daiktus, neturinčius reikalingo daikto požymio.

Ranžuojant (surikiuojant) kriterijus, gauname **leksikografinės optimizacijos uždavinį**: variantas X_1 geresnis už X_2 , jei $f_1(X_1) > f_1(X_2)$. Jei $f_1(X_1) = f_1(X_2)$, tai lyginama pagal antrąjį kriterijų ir t. t. Naudojant leksikografinį išrinkimą, kai kuriuose čempionatuose išaiškinami čempionai, pavyzdžiui:

- čempionu tampa komanda, surinkusi maksimalų taškų skaičių (pregalė - 1 taškas, lygiosios - 1/2 taško, pralaimėjimas - 0 taškų);

- jei kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai čempionu tampa ta komanda, kuri surinko daugiausia taškų tarpusavio susitikimuose;

- jei pagal pirmuosius du kriterijus kelios komandos yra lygiavertės, tai čempionu tampa ta, kurios įmuštų ir praleistų įvarčių santykis jų tarpusavio rungtynėse geriausias;

- jei kelios komandos lyiavertės pagal tris ankstesnius krtiterijus, tai čempionas išaiškinamas atsižvelgiant į įvarčių santykį visose čempionato rungtynėse.

Kad kelios komandos būtų lygiavertės pagal kelis kriterijus nors ir mažai tikėtina, bet pasitaiko. Pavyzdžiui, 1969 m. ledo ritulio pasaulio čempionate trys komandos (TSRS, Čekoslovakija ir Švedija) surinko veinodą taškų skaičių apskritai ir tarpusvio rungtynėse. TSRS komanda tapo čempione tik palyginus komandas pagal trečiąjį kriterijų. Dabar dvi iš šių trijų valstybių nebeegzistuoja, o geriausi įvairių tautybių žaidėjai žaidžia Šiaurės Amerikoje. Klubų vadovų vykdomas žaidėjų pasirinkimas galėtų iliustruoti kitą daugiakriterio išrinkimo uždavinį, bet jo formulavimą paliksime skaitytojui.

Leksikografinis optimizavimo uždavinys gali būti sprendžiamas nuosekliai maksimizuojant kriterijus siaurėjančiuose leistinos aibės poaibiuose $A_i \subset A$:

pirmasis poaibis:

$$A_1 = \{X : X \in A,\ f_1(X) = f_1^*\},\ \max_{X \in A} f_1(X) = f_1^*,$$

antrasis poaibis:

$$A_2 = \{X : X \in A_1, \ f_2(X) = f_2^*\}, \max_{X \in A_1} f_2(X) = f_2^*,$$

m-asis poaibis:

$$A_m = \{X : X \in A, \ f_m(X) = f_m^*\}, \max_{X \in A_{m-1}} f_m(X) = f_m^*.$$

$m-$ojo maksimizavimo uždavinio maksimumo taškas ir bus sprendiniu. Jei kuriame nors žingsnyje aibę sudaro veinintelis taškas, tai jis ir yra leksikografinio ušdavinio sprendinys. Leksikogrfiniai uždaviniai, matyt, natūraliausi tuomet, kai leistinoji (arba kriterijų reikšmių) aibė yra diskreti, nes jei A kontinuali, o $F(X)$ tolydinė, tai sudaryti poaibius A_i sudėtinga.

Aukščiau nurodytas būdas, skirtas leksikografiniam uždaviniui spręsti, susideda iš m etapų, kuriuose turi būti surastas funkcijos maksimumas aibėje, apibrėžtoje lygybiniu ribojimu. Leksikografiniai uždaviniai su begalinėmis kriterijų reikšmių aibėmis įdomūs tuo, kad ne visada egzistuoja naudingumo funkcija, atitinkanti leksikografinį preferencijos santykį. Todėl leksikografinis uždavinys ne visada gali būti pakeistas vienu optimizavimo (naudingumo funkcijos maksimizavimo) uždaviniu. Taigi, naudingumo teorijos prielaidos nėra universalios, o leksikografinis uždavinys iliustruoja atvejį, kai gali neegzistuoti uždavinį atitinkanti kriterijų kompozicija.

Praktiniuose uždaviniuose krterijų ranžavimas, ypač svarbiausiojo išrinkimas, dažnai natūraliai išplaukia iš paties uždavinio. Pavyzdžiui, kaina masinės produkcijos prekėms arba masė aviaciniams įrenginiams dažnai yra svarbesni už kitus kriterijus. Tačiau toks griežtas kriterijų ranžavimas (surikiavimas), kaip leksikografinės optimizacijos atveju, ne visada reikalingas. Surikiuotiems kriterijams lieka tam tikra tolerancija, t.y. gali būti pasirinktas variantas, kuris nežymiai blogesnis už kitą pagal svarbiausiąjį kriterijų, nes jis žymiai geresnis pagal antrąjį kriterijų.

Parinkę pagrindiniu maksimizuojamu kriterijumi, pavyzdžiui $f_1(X)$, o kitus apibrėžę kaip ribojimus, gausime įprastą matematinio programavimo uždavinį

$$\max_{X \in B} f_1(X),\ B = \{X : X \in A,\ f_i(X) \geq \phi_i,\ i = 2, ..., m\},$$

čia ribojimų lygiai ϕ_i gali būti apibrėžiami ptojektavimo tikslais, žinomų prototipų parametrais ir kt.

Nesant natūralių, uždavinio sąlygomis reglamentuojamų ribojimų lygių, juos parinkti gali būti sunku. Jei nors vienas ribojimų lygis bus per aukštas ($\phi_i > \max_{X \in A} f_i(X)$, gausime tuščią aibę B. Kita vertus, ϕ_i negali būti žemesnis negu i-ojo kriterijaus priimtina riba. Ypaš sunku parinkti ϕ_i tuomet, kai kriterijai prieštaringi, pavyzdšiui, kaina ir patikimumas. Kartais lygių parinkimą galima pagrįsti analizuojant atskirų kriterijų maksimumus ir "vidutinių" vektorių F komponenčių reikšmes. Sprendžiant daugiakriterį uždvinį šiuo metodu, tenka daug kartų spręsti optimizvimo ušdavinius, besiskiriančius tik ribojimų nelygybių dešniosiomis pusėmis.

Leksikografinio uždavinio sprendimo ir daugiakriterio uždavinio pakeitimo įprastu matematinio programavimo uždaviniu metodai gali būti tam tikra prasme apjungti į vieną. Daugelyje praktinių uždavinių kriterijai gali būti surikiuoti (nors ir ne taip griežtai kaip leksikografiniu atveju). Sakykime, kad kriterijus tuo svarbesnis, kuo mažesnis jo numeris. Kartais lengviau suformuluoti ne ribojimus kriterijų reikšmėms, o nuolaidas d_i, kurios leidžiamas nuo maksimalių kriterijų reikšmių, siekiant pagerinti mažiau svarbių kriterijų reikšmes. Tuomet apskaičiuotas maksimalias svarbiausiųjų kriterijų reikšmes galima naudoti leistinajai sričiai apibrėžti žemesniojo rango kriterijų maksimizavimo uždaviniuose. Taikant tokį metodą, reikia nuosekliai išspręsti šiuos optimizavimo uždavinius:

$$\begin{aligned}
f_1^* &= \max_{X \in A} f_1(X), \\
A_1 &= \{X : X \in A,\ f_1(X) \geq f_1^* - d_1\}, \\
f_2^* &= \max_{X \in A_1} f_2(X), \\
A_2 &= \{X : X \in A_1,\ f_2(X) \geq f_2^* - d_2\}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_m^* &= \max_{X \in A_{m-1}} f_m(X).
\end{aligned}$$

Daugiakriterio uždadvinio sprendiniu yra m-ojo maksimizavimo uždavinio maksimumo taškas. Prieš spendžiant uždavinį nustatyti nuolaidų dydžius yra nelengva. Jei visi $d_i = 0$, gaunamas leksikografinis uždavinys. Jei d_i yra tokie dideli, kad papildomi ribojimai nebesusiaurina leistinos aibės, tai gautasis sprendinys sutampa su žemiausiojo rango kriterijaus maksimumo tašku. Sprendžiant uždavinius nuolaidų metodu, tenka eksperimentuoti su įvairiais d_i nuolat konsultuojantis su ekspertais. Dažnai tam padeda grafikai, pavyzdžiui, optimalios antrojo kriterijaus maksimalios reikšmės priklausomybė nuo pirmojo kriterijaus nuolaidos pavaizduota paveiksle (6.22):

$$f_2^* = f_2^*(d_1).$$

Suprantama, kad norint sudaryti tokius grafikus, reikia daug kartų spręsti maksimizavimo uždavinius. Nuosekliųjų nuolaidų metodas lengvai suprantamas ir mėgstamas vartotojų. Jį teoriškai pagrindžia tokia teorema:

19 teorema. Kiekvienam kriterijų vektoriui F^*, priklausančiam Pareto aibei, galima parinkti tokias nuolaidas d_i, kad nuosekliųjų nuolaidų metodu gautas sprendinys $(f_1^*, f_2^*, ..., f_m^*)$ sutaps su F^*.

Bendru atveju nuosekliųjų nuolaidų metodu gautas sprendinys gali ir nepriklausyti efektyviųjų sprendinių aibei. Tačiau galima įrodyti,

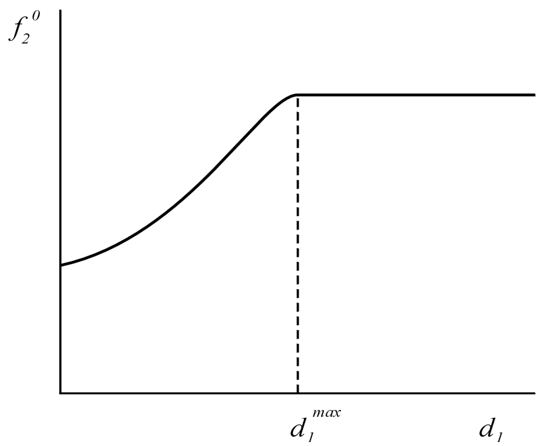

Figure 6.22: Antrojo kriterijaus maksimalios reikšmės priklausomybė nuo pirmojo kriterijaus nuolaidos

kad jei A yra aprėžta uždara aibė, o visos kriterijų funkcijos - tolydinės, tai nuosekliųjų nuolaidų metodu gaunamų sprendinių aibėje yra bent vienas efektyvus sprendinys. Nuosekliųjų nuolaidų metodą geriausia naudoti tuomet, kai sprendžiant daugiakriterius uždavinius kriterijai yra natūraliai suranžuoti pagal svarbą taip, kad analizuojant i-ąjį kriterijų reikia atsižvelgti į $i+1$-ąjį, bet nebūtinai į $i+2$-ąjį.

6.5 Pareto aibės aproksimacija

Aukščiau išdėstyti daugiakriterės optimizacijos teorijos faktai rodo, kad vienintelė sprendinio ypatybė, tiesiogiai išplaukianti iš daugiakriterio uždavinio formulavimo, yra ta, kad sprendinys priklauso Pareto aibei. Jei apie kriterijus turime papildomos informacijos, tai galima išskirti arba Pareto aibės dalį, arba rasti kurį nors vieną jos tašką. Pavyzdžiui, priskyrus kriterijams svorius ir suradus jų svertinės sumos maksimumą, gaunamas vienas iš Pareto aibės taškų. Dažnai asmenys, sprendžiantys daugiakriterius uždavinius, pvz. prjektuotojai, sutinka, kad kriterijams galima racionaliai priskirti svorius, tačiau praktiškai jie tą daro nenoriai ir tik su didelėmis išlygomis. Panašūs sunkumai kyla ir naudojant kitus kriterijų palyginimo metodus. Žmonių turimai informacijai išgauti reikalingi specialūs metodai, įvertinantys psichologinius faktorius. Kita vertus, reikia padėti uždavinio sprendėjui geriau susivokti turimoje situacijoje, geriau suprasti uždavinio ypatybes. Tam visų pirma reikia kuo daugiau informacijos apie kriterinių įverčių aibę Φ, t.y. apie galimas kriterijų reikšmes ir jų sąryšius. Tik turėdamamas tokią informaciją, sprendėjas gali racionaliai derinti išorinius (pvz., projektinius) reikalavimus, konkretaus atvejo ypatybes ir vartojamo metodo galimybes.

Jei, pavyzdžiui, bent du kriterijai prieštarauja vienas kitam, tai nepagerinamų vektorių (Pareto) aibė sutampa su aibe A. Norint kuo nuodugniau ištirti Φ, reikėtų sudaryti tolygiai pasiskirsčiusių taškų tinklelį $X_i, i = 1, ..., N$, aibėje A ir analizuoti gaunamas tuose taškuose kriterijų $f_j(X_i)$ reikšmes. Tolygaus ieškojimo metodas gerai tinka tuomet, kai reikia ne itin tiksliai įvertinti globalinius ekstremumus. Suradus kriterijų ekstremumus, galima nurodyti aibės Φ ekstremalius taškus. Atmetę dominuojamus kriterijų vektorius (t.y. tuos F_j - kuriems galime surasti $F_k \geq F_j$), gaunama Pareto aibės aproksimacija. Ji pavaizduota 6.23 paveiksle taškais, sujungtais brūkšnine linija. Juos atitinką taškai aibėje A sudaro efektyviųjų sprendinių aibės aproksimaciją.

Taškų X_i, $i = 1, ..., N$, aibėje A tolygumą galime išreikšti kriterijumi

$$d(X_i,\, i = 1, ..., N) = \max_{X \in A} \min_{1 \leq i \leq N} ||X - X_i||,$$

kuris lygus didžiausios "skylės" radiusui tinklelyje $X_i, i = 1, ..., N$.

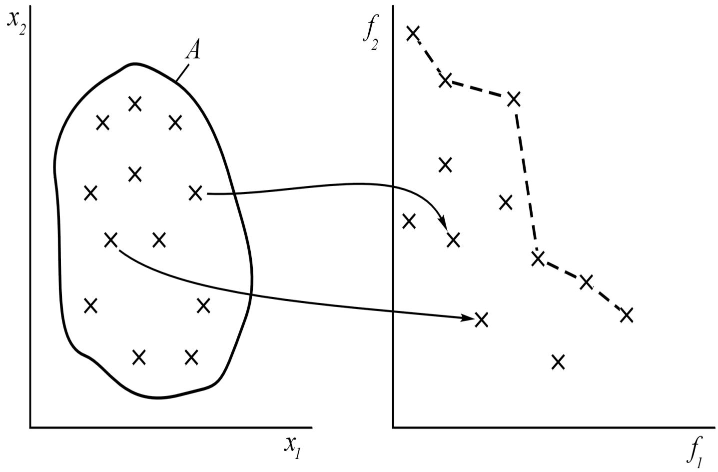

Figure 6.23: Pareto aibės aproksimacija

Bendru atveju, norint sudaryti tolygų tinklelį, reikia spręsti sudėtingą optimizavimo uždavinį:

$$\min_{X_i \in A,\ i=1,...,N} d(X_i,\, i = 1, ..., N).$$

Jei aibė A apibrėžta paprastais ribojimais (stačiakampis gretasienis daugiamatėje erdvėje), tai tolygų tinklelį pagrįstai galima pakeisti tinkleliu, kuris yra apytikriai tolygus ir paprastai sudaromas, pvz. LP_τ [22]. Kai aibė A yra sudėtinga, bet žinomas stačiakampis gretasienis $S \supset A$, kurio hipertūris nėra daug kartų didesnis už A hipertūrį, patartina naudoti tą patį metodą. Tuomet iš taškų $X_i \in S$ galima atrinkti tuos, kurie priklauso aibei A. Atrinktųjų taškų pasiskirstymas aibėje A apytiksliai tolygus, o jų dalis lygi aibių A ir S hipertūrių santykiui. Bendru atveju, sugeneruoti tolygiai pasiskirsčiusius taškus aibėje A, kai A apibrėžiama netiesiniais (ypaš lygybiniais) ribojimais, nėra paprasta.

Gana dažnai stačiakampio gretasienio taškai generuojami naudojant pseudo atsitiktinių skaičių generatorių (specialią kompiuterio paprogramę). Toks būdas paprastesnis ir greitesnis už tolygių tinklelių panaudojimą, bet taškai išsidėsto ne itin tolygiai.

Net jei kriterijai ir neprieštarauja vienas kitam, efektyviųjų sprendinių aibės E hipertūris gali sudaryti labai mažą aibės A hipertūrio dalį. Todėl tolygaus tinklelio taškai gali nepatekti į aibės E aplinką, o aibių E (efektyviųjų sprendinių) ir Φ (Pareto) aproksimacijos bus nelabai tikslios. Šiuo atveju, siekiant padidinti tikslumą, reikėtų tolygų tinklelį pakeisti netolygiu, kurio taškai labiau koncentruotųsi efektyvių sprendinių aibės aplinkoje. Tačiau tokie metodai sudėtingesni, pagrįsti kriterijų funkcijų matematinėmis svybėmis, ir jų šioje knygoje nenagrinėsime.

Analitinį būdą efektyvių sprendinių ir Pareto aibėms apskaičiuoti iliustruosime pavyzdžiu. Sakykime, kad leistinoji aibė $A \subset R^2$ yra apibrėžta paprastais ribojimais $A = \{X : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$, du kriterijai - formulėmis

$$\begin{aligned} f_1(X) &= 2 - x_1^2 - x_2^2, \\ f_2(X) &= 2 - 2(x_1 - 0.8)^2 - (x_2 - 0.7)^2. \end{aligned}$$

6.24 paveiksle kriterijų funkcijos ir yra pavaizduotos lygio linijomis. Apskaičiuoti kriterijų rekšmių aibės ribas net šiuo atveju nėra taip paprasta. Kiekvieną tašką (f_1, f_2) srityje esančioje žemiau brūkninės linijos, atitinka du taškai (x_1, x_2). Pareto aibę sudaro kriterijų reikšmių aibės riba, pažymėta kreive, jungiančia kriterijų maksimalias reikšmes atitinkančius taškus, kurie pavaizduoti žvaigšdutėmis.

Aišku, kad (x_1, x_2) plokštumoje abiejų kriterijų maksimumų taškai įeina į efektyvių sprendinių aibę. Bet kuris efektyvusis sprendinys pasižymi tuo, kad jokia kryptimi, einančia iš to taško ir nevedančia iš leistinosios srities, negalima pagerinti iš karto abiejų kriterijų. Todėl

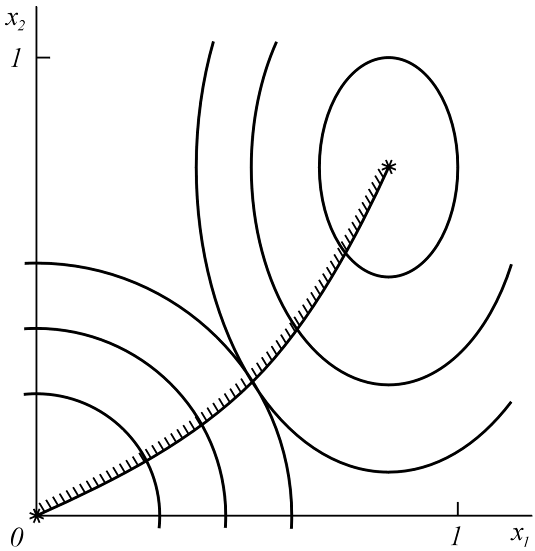

Figure 6.24: Kriterijų funkcijų lygio linijos ir efektyviųjų sprendinių aibė (pavaizduota užbrūkšniuota linija)

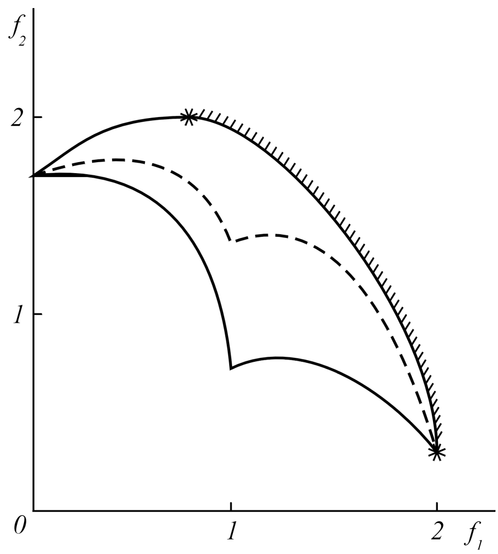

Figure 6.25: Kriterijų reikšmių aibė

būtiną efektyvaus sprendinio sąlygą galima suformuluoti šitaip: jei abi kriterijų funkcijos diferencijuojamos ir vidinis leistinosios srities taškas X yra efektyvus, tai kriterijų gradientai taške X yra priešingų krypčių

$$\lambda_1 \cdot \nabla f_1(X) + \lambda_2 \cdot \nabla f_2(X) = 0,\ \lambda_i \geq 0,$$

Apskaičiavę gradientų komponentes ir pakeitę vektorinę lygtį lygčių sistema komponentėms apskaičiuoti, gausime

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4\lambda(x_1 - 0.8) &= 0, \\ -2x_2 - 2\lambda(x_2 - 0.7) &= 0. \end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties išplaukia, kad

$$\lambda = -\frac{x_1}{2\,(x_1 - 0.8)}\ ,\ \ \lambda \geq 0.$$

Įstatę λ į antrąją lygtį ir gausime

$$-x_2 + \frac{x_1(x_2 - 0.7)}{2(x_1 - 0.8)} = 0,\ 0 \leq x_1 \leq 0.8.$$

Šia lygtimi apibrėžiama efektyvių sprendinių aibė. Ją pertvarkę gausime kreivės lygtį

$$-2x_1x_2 + 1.6x_2 + x_1x_2 - 0.7x_1 = 0,$$

$$x_2(1.6 - x_1) = 0.7x_1,$$

$$x_2 = \frac{0.7x_1}{1.6 - x_1}\ ,\ \ 0 \leq x_1 \leq 0.8.$$

Efektyvių sprendinių aibę atitinkanti kreivė prasideda taške (0, 0) ir monotoniškai auga, kol pasiekia tašką (0.8, 0.7). Tolimesnė aprašomos šia lygtimi kreivės tąsa jau nebeatitinka sąlygų, keliamų efektyvių sprendinių aibei. Kai $x_1 > 0.8$, tuomet parametro λ reikšmė yra neigiama. Todėl abiejų kriterijų gradientų kryptys sutampa. 6.24 paveiksle efektyvių sprendinių aibė pavaizduota užbrūkšniuota kreive.

6.6 Dialoginiai metodai

Keičiant daugiakriterio optimizavimo uždavinį vienkriteriu, naudojama papildoma informacija apie kriterijus, kriterijų svorius, minimalias leistinas kriterijų vertes, tikslo vektorius ir kt. Tačiau gautasis vienkriteris uždavinys gali pasirodyti neišsprendžiamas. Pavyzdžiui, keičiant daugiakriterį uždavinį vienkriteriu matematinio programavimo uždaviniu ir nustačius pernelyg dideles reikšmes ribojimų nelygybių dešiniosiose pusėse leistinoji aibė gali pasirodyti tuščia. Tas reikštų, kad pareikalauta sprendinio su pernelyg didelėmis kriterijų reikšmėmis. Kita vertus, gautasis sprendinys gali nepatenkinti vartotojo. Kai kada Pareto aibei aproksimuoti labiau naudotinas tolygus tinklelis, kai kada - netolygus. Išskirtinę reikšmę gali turėti vienas arba kitas Pareto aibės poaibis. Todėl svarbu, kad tuoj pat, gavus atsakymą, būtų galima performuluoti uždavinį ir vėl jį spręsti kitais metodais arba su kitais duomenimis. Kad vartotojui būtų lengviau vykdyti kompiuteriu daugiakriterės optimizacijos algoritmus, kuriamos specialios dialoginės programų sistemos. Daugiakriterio uždavinio sprendėjui interaktyvaus sprendimo galimybė ypaš svarbi tuomet, kai reikia įvertinti gautą kriterijų vektorių atsižvelgiant į neformalią vartotojo informaciją apie uždavinį.

Vienu iš pirmųjų dialoginių daugiakriterio optimizavimo metodų buvo gradientinis metodas naudingumo funkcijai maksimizuoti. Tačiau vietoje naudingumo funkcijos reikšmių skaičiavimo taške X_k buvo klausiama eksperto nuomonės apie kriterijų, apskaičiuotų tame taške, santykinį reikšmingumą. Sakykime, kad egzistuoja, nors ir nežinoma, naudingumo funkcija $U(f_1(X), ..., f_m(X))$. Leistinoji sritis A yra iškila aibė. Visos uždavinio funkcijos įgaubtos (iškilos į viršų) ir tolygiai diferencijuojamos. Standartinis lokalaus maksimizavimo metodas aprašomas šitaip:

1. Inicializacija: parenkamas pradinis taškas X_0, $k = 0$.

2. Leistinos krypties parinkimas: vektorius S_k apskaičiuojamas taip, kad jo projekcija į funkcijos $U(f_1(X), ..., f_m(X))$ gradiento vektorių taške X_k būtų maksimali:

$$S_k = \arg \max_{S,\ X_k+S\in A} (\nabla_X\ U(f_1(X_k), ..., f_m(X_k)),\ S).$$

3. Žingsnio prinkimas: apskaičiuojamas žingsnio ilgis

$$t_k = \arg \max_{0\leq t\leq 1}\ U(f_1(X_k + t\, S_k), ..., f_m(X_k + t\, S_k)).$$

4. Naujo sprendinio apskaičiavimas: $X_{k+1} = X_k + t\, S_k$, $k = k + 1$.

5. Sugrįžimas į **2.**

Tačiau, nežinodami funkcijos $U(\cdot)$, negalime įvykdyti nei 2, nei 3 etapo. Taigi, kyla klausimas, kaip formalią informaciją apie $U(\cdot)$ reikšmes pakeisti informacija gaunama iš vartotojo. Funkcijos $U(\cdot)$ gradientą taške X_k galima išreikšti formule

$$\nabla_X\ U(f_1(X_k), ..., f_m(X_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U_k}{\partial f_i}\ \cdot\ \nabla_X\ \ f_i(X_k),$$

čia $\frac{\partial U_k}{\partial f_i}$ - dalinė funkcijos $U(\cdot)$ išvestinė pagal f_i, apskaičiuota taške X_k. Būtent šios dalinės išvestinės ir yra nežinomos. Kadangi naudingumo funkcija yra monotoniškai didėjanti, tai visos dalinės išvestinės yra teigiamos. Todėl vektorių S_k galima apskaičiuoti šitaip:

$$S_k = \arg \max_{\substack{S\\ X_k+S\in A}}\ (\nabla_X\ U(f_1(X_k), ..., f_m(X_k))\,/\frac{\partial U_k}{\partial f_1},\ S) =$$

$$\arg \max_{\substack{S \\ X_k+S \in A}} (\sum_{i=1}^{m} a_i^k \cdot \nabla_X f_i(X_k), S),$$

čia $a_i^k = \frac{\partial U_k}{\partial f_i} / \frac{\partial U_k}{\partial f_1}$.

Koeficientu a_i^k išreiškiamas i-ojo kriterijaus santykinis reikšmingumas, t.y., kiek kartų naudingumo prieaugis bus didesnis, padidėjus kriterijui f_i, negu tiek pat padidėjus kriterijui f_1 (kriterijų prieaugiai turi būti maži). Remdamasis šia interpretacija, ekspertas dažniai gali įvertinti koeficentus a_i^k.

Koeficientus įvertinti galima ir kitaip. Sakykime, kad pajudėjus iš taško X_k, kriterijaus f_1 reikšmė padidėja Δ_1. Visi kiti kriterijai, išskyrus i-ąjį, nekinta. Koks turi būti i-ojo kriterijaus neigiamas prieaugis -Δ_i, kad naująjį tašką galėtume laikyti ekvivalenčiu X_k? Parinkę Δ_i, patenkinančius suformuluotą sąlygą, a_i^k galėsime apskaičiuoti pagal formulę $a_i^k = \Delta_1/\Delta_i$.

Nežinodami funkcijos $U(\cdot)$, formaliai negalime įvykdyti ir 3-ojo etapo. Tačiau, pateikę ekspertui visų kriterijų priklausomybės nuo t grafikus $f_i(X_k + t\, S_k)$, galime tikėtis, kad jis parinks tinkamą t_k reikšmę.

Šis metodas demonstruoja principinę interaktyvaus daugiakriterio uždavinio sprendimo galimybę, nors praktiškai ir nelabai vartojamas. Kuriant interaktyvius metodus reikia atsižvelgti į psichologinius faktorius. Pavyzdžiui, ekspertai labiau linkę duoti kokybinius dviejų alternatyvų palyginimus negu kiekybinius įvertinimus. Vartojant interaktyvią gradientinio metodo versiją sunku atsižvelgti į priimtiną ekspertui sprendimo laiką: gradientinio metodo žingsniai dažnai būna trumpi, ir todėl sprendinio ieškojimas gali pernelyg užsitęsti.

Vartotojams psichologiniu požiūriu priimtinesnis deformuojamo simplekso metodo dialoginė modifikacija, skirta daugiakriteriams uždaviniams spręsti. Aibėje A sudaromas simpleksas, kurio viršūnėse $X_1, ..., X_{k+1}$ apskaičiuojami kriterijų vektoriai $F_1, ..., F_{k+1}$. Projektuotojui siūloma palyginti jų poras. Išrenkamas blogiausias taškas ir jis atspindimas simplekso svorio centro atžvilgiu erdvėje R^n. Naująjį simpleksą sudaro senojo simplekso viršūnės išskyrus tą, kuri buvo įvertinta kaip blogiausia. Pastaroji pakeičiama jos atspindžiu. Naujojoje viršūnėje apskaičiuojamas kriterijų vektorius F, kurį reikia palyginti su kai kuriais kriterijų vektoriais, atitinkančiais senojo simplekso viršūnes. Simplekso deformacijas (tempiamą, suspaudimą ar redukciją), kaip ir originaliame vienakriteriame metode, apsprendžia preferencijos santykis tarp atitinkančių viršūnes kriterijų vektorių. Tai yra neesminis apibendrinimas lyginant su vienkriteriu deformuojamojo simplekso metodu, kuriame viršūnės palyginamos pagal jose apskaičiuotas tikslo funkcijos reikšmes. Ekspertui, sprendžiančiam šį uždavinį, tereikia palyginti kriterijų vektoruis. Aptariant deformuojamojo simplekso metodo savybes vienkriterio optimizavimo atveju, buvo pažymėta, kad jis nejautrus tikslo funkcijos nereguliarumams bei skaičiavimo paklaidoms. Todėl ir esant kriterijų gausai galima tikėtis, kad, vartotototojui nežymiai suklydus lyginant altrnatyvas, nebus nepataisomų pasekmių.

Dažnai uždavinio charakteristikų nepavyksta suklasifikuoti į ribojimus ir kriterijus. Siekiant praktinio uždavinio charakteristiką formalizuoti kaip matematinio programavimo uždavinio ribojimą, gali būti nelengva apibrėžti ribojimų dešiniąsias puses. Panašūs sunkumai gali iškilti bandant apibrėžti leistinas kriterijų nuolaidas. Tada galima rinktis patį bendriausią, taip vadinamą, parametrų erdvės zondavimo metodą, kuris panašus į pasyvų ieškojimą su tolygiu taškų išdėstymu vieno kriterijaus optimizavimo uždaviniuose. Leistinoji sritis apibrėžiama parastaisiais ribojimais ir tik neabejotinai ribojimų prasmę turinčiomis funkcijomis $g_i(X) \geq 0$. Jei funkciją $g_i(X)$ galima interpretuoti ir kaip kriterijų, ir kaip ribojimą, tai ji priskiriama prie kriterijų. Parametrų erdvės zondavimo metodas [18] susideda iš trijų toliau aprašytų dalių. Antroji ir trečioji pakaitomis kartojamos tol, kol bus pasiektas priimtinas sprendinys.

1. Sudaroma bandymų lentelė. Leistinoje srityje A (pseudo) atsitiktinai tolygiai generuojami taškai $X_1, ..., X_N$. Visuose tškuose apskaičiuojamos m kriterijų reikšmės

$$f_1(X_i), ..., f_m(X_i), i = 1, ..., N,$$

kurios išdėstomos mažėjimo tvarka (žiūr. lentelę), nurodant taško numerį:

$$f_k(X_{k1}) \geq f_k(X_{k2} \geq ... \geq f_k(X_{kN}),\ k = 1, ..., m.$$

Iš tinklelio savybių išplaukia, kad

$$f_k(X_{k1}) \rightarrow \max_{X \in A} f_k(X)\,, \quad f_k(X_{kN}) \rightarrow \min_{X \in A} f_k(X),$$

o funkcijos reikšmių intervalų empyriniai dažniai artėja prie tų intervalų tikimybių. Todėl iš lentelės duomenų galima spręsti apie minimalią ir maksimalią kriterijaus reikšmes bei kriterijų reikšmių tikimybių skirstinį.

2. Nustatomi kriterijų reikšmių slenksčiai. Bandymų lentelė pateikiama projektuotojui. Žemiau pateiktas konkretaus uždavinio sprendimo lentelės pavyzdys [18]. Išanalizavęs gautąsias kriterijų reikšmes, jis nustato kiekvieno kriterijaus slenkstį f_i^*, žemiau kurio kriterijaus reikšmės laikytinos nepriimtinomis.

3. Tikrinama, ar aibė, kurioje kriterijai viršija slenksčius, yra netuščia. Tas realizuojama parastu algoritmu: atrenkami taškai, kuriuose slenkstį viršija pirmajasis kriterijus $f_1(X_i) \geq f_1^*$, po to antrajasis ir tt. Jei nė vieno tokio taško nėra, tai galima daryti išvadą: arba aibė tuščia, arba nepavyko jos aptikti. Jei padidinus N, taško, tenkinančio ribojimus, vis tiek nepavyksta rasti, tai manoma, kad aibė tuščia arba jos hipertūtis labai mažas. Vartotojui pranešama, kad jo reikalavimai kriterijams per griežti (nesuderinami) ir siūloma sumažinti slenksčių reikšmes. Suradus priimtiną tašką, jis tikslinamas: tinklelui padengiama palyginti nedidelė rastojo taško aplinka ir apskaičiuotos kriterijų reikšmės, priklausančios Pareto aibei, pateikiamos vartotojui; iš jų išrenkamas uždavinio sprendinys.

Gali atrodyti, jog uždavinys labai paprastas. Vartotojas tik analizuoja vieną iš lentelės stulpelių. Jam nereikia ieškoti kompromiso tarp kriterijų, kaip to reikalauja nuosekliųjų nuolaidų metodas. Aišku, vartotojui norėtųsi, kad slenksčių reikšmės būtų artimos maksimalioms kriterijų reikšmėms. Todėl kompromisas tarp kriterijų pasiekiamas slenksčių nustatymu. Atkreipsime dėmesį į tai, kad parinkus pernelyg dideles slenksčių reikšmes būtų gauta tuščia aibė $\{X : X \in A,\ f_i(X) \geq f_i^*\ , i = 1, ..., m\ \}$, ir nebeliktų iš ko išrinkti sprendinį.

L e n t e l ė. Parametrų erdvės zondavimas, $N = 512$

$f_1(X_i)$	i	$f_2(X_i)$	i	...	$f_m(X_i)$	i
-1.46	416	-3.13	416		-1.31	384
-1.53	348	-3.36	348		-1.41	374
-1.54	112	-3.46	112		-1.47	260
-1.62	280	-3.52	448		-1.50	248
-1.65	448	-4.02	302		-1.54	353
...	...	...	...	...	...	...
-9.82	407	-32.8	89		-17.0	46
-10.0	71	-34.2	407		-17.5	507

Dažnai kyla klausimas, kokia konkrečiu atveju turi būti parinkta N reikšmė? Metodo autoriai nurodo, kad dauguma praktinių uždavinių buvo sėkmingai išspręsti su $N = 128$, arba $N = 256$, arba netgi $N = 30$ [18]. Jei kriterijų funkcijoms apskaičiuoti reikia labai daug kompiuterio laiko, tai pasirenkamos mažesnės N reikšmės.

Tolygiai padengti leistinąją sritį tinkleliu gan paprasta tuomet, kai aibė A - stačiakampis gretasienis; nesudėtinga, kai A yra įrašyta į stačiakampį gretasienį, kurio hipertūris artimas A hipertūriui;

labai sunku, kai A aprašoma netiesiniais lygybiniais ribojimais. Nerekomenduojama naudoti šį metodą sprendžiant uždavinius su prieštaringais kriterijais. Parametrų erdvės zondavimo metodas artimas nuosekliųjų nuolaidų metodui, kurio dialoginius variantus naudoja nemažai projektuotojų.

Sudarant daugelį dialoginių algoritmų aukščiau aprašyti matematiniai metodai naudojami arba kaip galimi sprendimo metodo variantai, arba kaip pagalbinės priemonės.

6.7 Metodų aptarimas

Skaitytojas, baigdamas skaityti skyrelį, aišku, norėtų gauti konkrečias rekomendacijas, kaip pasirinkti tinkamą metodą. Deja, daugiakriterių optimizavimo uždavinių klasifikacijos labai sąlyginės. Antra vertus, vartotojų informacija apie kriterijus labai įvairi, ir kiekvieno sudėtingo praktinio uždavinio sprendimas, galima sakyti, yra menas. Matyt, todėl net storose knygose, skirtose daugiakriterei optimizacijai, nėra vienareikšmių rekomendacijų, kaip pasirinkti metodą konkretiems uždaviniams spręsti.

Kad projektuotojas galėtų pagrįsti savo pasirinktą variantą, jis siekia sužinoti kriterijų kitimo ribas, tipines kriterijų reikšmių kombinacijas. Todėl, kai kriterijai yra neprieštaringi, pasiteisina parametrų erdvės zondavimo metodas. Jį vartoja nemažai mašinų projektuotojų.

Dažnai pasiteisina daugiakriterių uždavinių keitimas vieno kriterijaus optimizavimo uždavinių seka: tam tikras kriterijus pasirenkamas tikslo funkcija, visi kiti keičiami ribojimais. Taip buvo išspręsta nemažai įvairių sričių optimalaus projektavimo uždavinių. Nors šis metodas ir nėra labai gerai teoriškai pagrįstas, bet, remiantis sukaupta patirtimi, galima efektyviai panaudoti įprastus optimizavimo metodus. Parinkdami kriterijams leidžiamas tolerancijas, gauname nuosekliųjų nuolaidų metodą.

Jei kriterijai gali būti interpretuojami kaip pelnas arba nuostoliai, tai tikėtina surasti bendrą jų matavimo skalę, įgalinančią naudotis svertinės sumos kompozicija.

Norint pasirinkti tinkamą metodą uždaviniui spręsti, reikėtų išanalizuoti metodų ir kompiuterių programų aprašymus, praktinių uždavinių sprendimo rezultatus. Mokslinio tyrimo darbuose įdomu patyrinėti įvairius metodus, palyginti jais gaunamus rezultatus. Bet praktikoje iškylantys uždaviniai dažnai turi būti išspręsti iki griežtai nustatytų terminų. Todėl projektuotojui nebėra kada eksperimentuoti bandant įvairius metodus. Pagrindinis šios knygos tikslas – supažindinti su pagrindiniais metodais, jų racionalaus taikymo sritimis. Susipažinęs su šiame skyriuje aptartais metodais, skaitytojas galės lengviau orientuotis reklaminėse įvairių daugiakriterių uždavinių sprendimo metodų anotacijose bei objektyviau vertinti praktinių uždavinių sprendimo rezultatų publikacijas.

Pasirenkant metodą, rekomenduotume atreipti dėmesį į šiuos aspektus:

1. *Adektvatumas.* Daugiakriteriai uždaviniai paprastai sprendžiami dialoginiais metodais. Dialoge su kompiuteriu turi dalyvauti kompetentingas specialistas arba jų grupė. Svarbu užtikrinti, kad tai tikrai būtų tas dialogas, kuris numatytas metode. Reikėtų detaliai apgalvoti, ar tie klausimai, į kuriuos turės atsakyti ekspertai, yra būdingi jų veiklai, ar dialogas padės giliau suprasti uždavinį. Metodą galima vadinti tinkamu, jei jį naudodamas vartotojas dirba tikslingai, turima informacija naudojama racionaliai.

2. *Naudojimo paprastumas.* Nepatyrusiam vartotojui yra sukurti specialūs dialoginių metodų variantai. Vėliau, įgijęs patirties, vartotojas gali dirbti naudodamas efektyvesnius metodo variantus, skirtus patyrusiam vairuotojui arba "meistrui". To paties metodo variantų realizacjos skirtingoms vartotojų katrgorijoms, gali gerokai skirtis. Pasirenkant programinę įrangą reikėtų atsižvelgti į tai, kokiomis prielaidomis apie vartotojo žinias daugiakriterės optimizacijos sri-

tyje buvo vadovautasi kuriant daugiakriterės optimizacijos taikomųjų programų paketą. Nemažą reikšmę turi ir tai, per kiek laiko galima gauti programinę įrangą, kokia jos kaina.

3. *Efektyvumas.* Metodų kūrėjų požiūriu tai pati svarbiausia metodo savybė, įrodoma teoriškai arba nustatoma eksperimentiškai. Ar metodas praktiškai efektyvus, galima sužinoti tik tada, kai jis yra pakankamai plačiai vartojamas, t. y. pakankamai paprastas ir priimtinas daugeliui vartotojų. Metodas laikomas praktiškai efektyviu, jei juo randami geresni variantai, negu vartojant kitus metodus.

6.8 Užduotys ir kontroliniai klausimai

1. Ar daugiakriterio uždavinio atskirų kriterijų funkcijų maksimumų taškai priklauso efektyvių sprendinių aibei? Kodėl?

2. Ar galima svertinės kriterijų sumos kompozicijos svorius parinkti taip, kad ši kompozicija atitiktų "silpniausios grandies stiprinimo" principą?

3. Dvikriteriam uždaviniui

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x_1 + x_2, \\
f_2(x) &= 1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 0.5)^2, \\
x &= (x_1, x_2),\ 0 \le x_1, x_2 \le 1,
\end{aligned}
$$

grafiškai pavaizduokite kriterijų reikšmių, Pareto ir efektyvių sprendinių aibes.

4. Išanalizuokite trijų kriterijų leksikografinį uždavinį su kontinualia leistinąja sritimi.

5. Suformuluokite daugiakriterį uždavinį, atitinkantį savo savaitės biudžeto planavimą.

Bibliography

[1] E. Aarts and J.Korst. *Simulated Annealing and Boltzman Machines.* J.Wiley and Sons, 1989.

[2] M. Bazaraa, H.Sherali, and C.Shetti. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms.* John Wiley and Sons, 1993.

[3] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming.* Athena Scientific, 1995.

[4] J. Cea. *Optimisation Theorie et Algorithmes.* Dunod, 1971. (yra vertimas į rusų kalbą).

[5] J. Clausen. Branch and bound algorithms – principles and examples. *"http://vaidila.vdu.lt/tempus"*,, 1998.

[6] J. Clausen. Teaching duality in linear programming – the multiplier approach. *"http://vaidila.vdu.lt/tempus"*, 1998.

[7] P. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making.* J.Wiley, 1970. (yra vertimas į rusų kalbą).

[8] F. Hillier and G.Lieberman. *Introduction to Mathematical Programming.* McGraw-Hill, 1991.

[9] D. Himmelblau. *Applied Nonlinear Programming.* McGrw-Hill, 1972. (yra vertimas į rusų kalbą).

[10] R. Horst, P.Pardalos, and N.Thoai. *Introduction to Global Optimization.* Kluver, 1995.

[11] C. Kelley. *Iterative Methods for Optimization.* SIAM, 1999.

[12] J. Kubilius(red.). *Matematikos terminų žodynas.* Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1994.

[13] R. Luce and H.Raiffa. *Games and Decisions.* J.Wiley, 1957. (yra vertimas į rusų kalbą).

[14] J. Mockus. *Bayesian Approach to Global Optimization.* Kluver, 1989.

[15] J. Nocedal and S.Wright. *Numerical Optimization.* Springer, 1999.

[16] B. Poliak. *Vvedenije v optimizaciju.* Nauka, 1983. (Rusų kalba).

[17] H-P. Schwefel. *Evolution and Optimum Seeking.* J.Wiley and Sons, 1995.

[18] I. Sobol and R.Statnikov. Lp - poisk v zadačach optimalnogo konstruirovanija. *Problemy slučainogo poiska*, 1:117–135, 1972. (Rusų kalba).

[19] D. Tempelaar, F.Wiedersheim-Paul, and E.Gunnarsson. *Educational Innovations in Economics and Business II.* Kluver Academic Publishers, 1998.

[20] A. Törn and A.Žilinskas. *Global Optimization.* Springer, 1989.

[21] V. Čiočys ir R.Jasilionis. *Matematinis programavimas.* Mokslas, 1990.

[22] V. Šaltenis ir A.Žilinskas. *Techninių optimizavimo uždavinių sprendimas.* Mokslas, 1986.

[23] A. Žilinskas. *Naujieji projektavimo metodai.* Mokslas, 1990.

[24] A. Žilinskas. *Matematinis programavimas.* Kaunas, VDU leidykla, 1999.

[25] A. Žilinskas et al. Modelling of economics and business systems, s-jep 12382-97. Home page, Vytautas Magnus University: Kaunas, http://vaidila.vdu.lt/tempus, 1998.

[26] F. Vasiljev. *Čislenyje metody rešenija ekstremalnych zadač.* Nauka, 1988. (Rusų kalba).