Reachability and Observability of Discrete-time Systems

Paolo Fiorini

University of Verona

Reachability and Controllability Continuous Time

Reachability. The reachability problem is to "find the set of all the final states $x(T)$ reachable starting from a given initial state $x(t_0)$".
Controllability. The controllability problem is "to find the set of all the initial states $x(t_0)$ controllable to a given final state $x(T)$".
For continuous time systems, the two problems are equivalent.
Given the usual system

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

The state x(t) is given by

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

if we want to reach the state $x(t_1) = x_1$ starting from $x(t_0) = x_0$ the input function is

$$u(t) = B^T(t)\phi^T(t_1, t)W_r^{-1}(t_1, t_0)\left(x_1 - \phi(t_1, t_0)x_0\right)$$

where

$$W_r(t_1, t_0) := \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \eta)B(\eta)B^T(\eta)\phi^T(t_1, \eta)d\eta$$

is the reachability Gramian

Reachability and Controllability Continuous Time

For controllability, the final state is $x(t_1) = x_1$ and we want to find which initial state can reach this final state. Using the properties of the state transition matrix,

$$x_0 = \phi^{-1}(t_1, t_0)x_1 - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

which is the same problem as before, but backward in time, and the controllability Gramian is

$$W_c(t_1, t_0) := \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, \eta)B(\eta)B^T(\eta)\phi^T(t_0, \eta)d\eta$$

Reachability and Controllability Discrete Time

For discrete time systems the two problems are not equivalent, because for LTI systems, the state transition matrix A^k may not be invertible.

In summary:

- For full reachability in linear continuous systems: $\operatorname{Im} W_r(t_1, t_0) = \mathbb{R}^n$
- For full controllability in linear continuous systems: $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \phi(t_1, t_0) \subseteq \operatorname{Im} W_c(t_1, t_0)$
- For full reachability in LTI discrete systems: $\operatorname{Im} \sum_{i=0}^{k-1} A^i B = \mathbb{R}^n$
- For full controllability in LTI discrete systems: $\operatorname{Im} A^n \subseteq \operatorname{Im} \sum_{i=0}^{n-1} A^i B$

Reachability for Discrete-time Systems

For the Discrete time system $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$

Starting from $x(0) = x_0 = 0$, we can express *x(k)* as a function of the previous k values of input *u(k)*, i.e. *u(0), u(1), … u(k-1):*

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) = \underbrace{\left[B \ AB \ \ldots \ A^{k-1} B \right]}_{\mathcal{R}_k} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Where

Definizione 4.1.2 (Matrice di Raggiungibilità in k passi)
La matrice

$$\mathcal{R}_k := \left[B \ AB \ \ldots \ A^{k-1} B \right]$$

è detta matrice di raggiungibilità in k passi.

Reachable Subspace in k Steps

Definizione 4.1.3 (Sottospazio raggiungibile in k passi)
Al variare di $u(i)$, $i = 0, \ldots, k-1$, l'insieme degli stati raggiungibili in k passi $\mathcal{X}_k^R$ è definito come l'immagine della matrice $\mathcal{R}_k$

$$\mathcal{X}_k^R := \mathsf{Im}\,\{\mathcal{R}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Where

$$\mathsf{span}\,\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = \{w \in V | w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, i = 1, ..., n, \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

consists of all linear combination of the independent vectors of R_k

Lemma 4.1.1 (Stato raggiungibile in k passi)
Uno stato $x \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile in k passi, i.e. $x \in \mathcal{X}_k$, se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{R}_k$.

Reachable Subspace in k Steps

Teorema 4.1.1 (di Cayley-Hamilton)
Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *con determinante* $\Delta_A(s) = \det\{sI - A\}$ *vale* $\Delta_A(A) = 0$.

Questo implica che per $k \geq n$ la catena è sicuramente stazionaria o, in altre parole, che ogni stato raggiungibile lo è in al più n passi:

$$\mathcal{X}_1^R \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}_n^R = \mathcal{X}_{n+1}^R = \cdots := \mathcal{X}^R.$$

Definizione 4.1.4 (Sottospazio raggiungibile e Matrice di Raggiungibilità)
Il sottospazio $\mathcal{X}^R$ *è detto sottospazio raggiungibile*

$$\mathcal{X}^R := \mathsf{Im}\,\{\mathcal{R}\}$$

dove $\mathcal{R} := \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ *è la matrice di raggiungibilità della coppia* (A, B).

Dalla definizione precedente segue che

Definizione 4.1.5 (Sistema raggiungibile)
Il sistema $\Sigma = \{A, B, \cdot, \cdot\}$ *è raggiungibile se* $\mathcal{X}^R = \mathbb{R}^n$.

Se l'ingresso u è scalare, i.e. B è un vettore colonna, allora $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se il sistema è raggiungibile, allora $\mathcal{R}$ è invertibile.

Reachable Subspace in k Steps

Esempio 4.1.3 *Dato il sistema a tempo discreto il cui modello di stato è caratterizzato dalla coppia* (A, B)*, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità in $k = n = 2$ *passi è data da*

$$\mathcal{R}_2 = [B \; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che il determinante della matrice è -1, $\mathcal{R}_2$ *ha rango 2,* $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ *e dunque il sistema è completamente raggiungibile.* ◇

Per le proprietà delle matrici segue che la definizione precedente sul sottospazio immagine di $\mathcal{R}$ si può interpretare come una condizione direttamente su $\mathcal{R}$.

Proposizione 4.1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\Sigma = \{A, B, \cdot, \cdot\}$ *sia un sistema raggiungibile è che*

$$\mathsf{rank}\{\mathcal{R}\} = n.$$

Properties of Reachable Subspaces

Definizione 4.1.6 (Indice di raggiungibilità)
Dato il sistema raggiungibile $\Sigma = \{A, B, \cdot, \cdot\}$, *si definisce indice di raggiungibilità il più piccolo intero* r *per cui vale*

$$\mathsf{rank}\{\left[\, B \; AB \; \ldots \; A^{r-1}B \,\right]\} = n.$$

Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^R$ gode di due importanti proprietà richiamate nelle seguenti proposizioni.

Proposizione 4.1.2 (Caratterizzazione geometrica di $\mathcal{X}^R$)
Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^R$ *del sistema* $\Sigma = \{A, B, \cdot, \cdot\}$ *è il più piccolo sottospazio* A *invariante di* $\mathbb{R}^n$ *contenente* $\mathsf{Im}\,\{B\}$.

Proposizione 4.1.3 (Equivalenza algebrica)
Sistemi algebricamente equivalenti hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.

Summary of Reachability Properties

Teorema 4.1.2 *Le condizioni seguenti sono equivalenti.*

(i) *La coppia* (A, B) *è raggiungibile.*

(ii) *La matrice* $W_c(n-1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$W_c(n-1) := \sum_{i=0}^{n-1} A^i BB^T (A^T)^i \tag{4.3}$$

è nonsingolare.

(iii) *La matrice di raggiungibilità* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times (nm)}$

$$\mathcal{R} := \begin{bmatrix} B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

ha rango (riga) n.

(iv) *Se, inoltre, tutti gli autovalori di* A *hanno modulo minore stretto di uno, allora la soluzione dell'equazione di Lyapunov*

$$AW_cA^T - W_c = -BB^T \tag{4.4}$$

esiste, è unica e risulta definita positiva. La matrice W_c *viene detta Gramiano di raggiungibilità e può essere scritto anche come soluzione della (4.3) quando* $n \to \infty$

$$W_c = \lim_{n \to \infty} W_c(n-1) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i BB^T (A^T)^i.$$

Observability for Discrete-time Systems

For the Discrete time system

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{6.1}$$

We focus on the pair *{A,C}*

Definizione 6.1.1 (Stato non osservabile)
Dato il sistema a tempo discreto autonomo

$$x(k+1) = Ax(k), \qquad x(0) = 0$$
$$y(k) = Cx(k)$$

lo stato $\bar{x} \neq 0$ *è non osservabile se per qualunque istante di tempo* $\bar{k} \geq 0$ *finito, l'evoluzione libera dell'uscita generata da* $\bar{x}$ *risulta*

$$\bar{y}_l(k) = 0, \qquad k = 0, \ldots, \bar{k}.$$

Un sistema privo di stati non osservabili, si dice osservabile.

Definitions of Observability

Definizione 6.1.2 (Stato osservabile) *Lo stato del sistema discreto*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) \ \textit{unknown} \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{6.2}$$

è osservabile in $\bar{k}$ passi se la conoscenza di qualsiasi sequenza di input $u(k)$, $k \in [0, \bar{k}-2]$ e di output $y(k)$, $k \in [0, \bar{k}-1]$ è sufficiente per determinare univocamente qualsiasi stato iniziale $x(0)$.

From the definition of output

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i), \tag{6.3}$$

lo stato del sistema è osservabile in $\bar{k}$ passi se non esistono due condizioni iniziali distinte, $x_1(0) \neq x_2(0)$, che soddistano entrambe l'espressione precedente, i.e.

$$y(k) = CA^k x_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i),$$

$$y(k) = CA^k x_2(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i).$$

Definitions of Observability

per $k = 0, 1, \ldots, \bar{k} - 1$. Calcolando la differenza, otteniamo

$$0 = CA^k \left(x_1(0) - x_2(0) \right), \qquad k = 1, \ldots, \bar{k} - 1$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\bar{k}-1} \end{bmatrix} \left(x_1(0) - x_2(0) \right). \Rightarrow \qquad \mathcal{O}_{\bar{k}} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\bar{k}-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\bar{k}p) \times n}.$$

and the observabiioty matrix is

Definizione 6.1.3 (Sottospazio non osservabile in k passi)
Il sottospazio non osservabile in k passi $\mathcal{X}_k^{no}$ è l'insieme di tutti i vettori nel kernel della matrice di osservabilità in k passi

$$\mathcal{X}_k^{no} = \ker \mathcal{O}_k.$$

Definizione 6.1.4 (Sistema osservabile in k passi)
Un sistema $\Sigma := \{A, B, C\}$ a tempo discreto (di dimensione n) è detto osservabile in k passi se $\ker \mathcal{O}_k = \{0\}$ oppure, equivalentemente, se la matrice $\mathcal{O}_k$ ha rango massimo (cioè n).

Definitions of Observability

Definizione 6.1.5 (Sottospazio non osservabile)
Il sottospazio non osservabile $\mathcal{X}^{no}$ è l'insieme di tutti i vettori nel kernel della matrice di osservabilità

$$\mathcal{X}^{no} = \ker \mathcal{O}.$$

Definizione 6.1.6 (Sistema osservabile)
Un sistema $\Sigma := \{A, B, C\}$ a tempo discreto (di dimensione n) è detto osservabile passi se $\mathcal{X}^{no} = \{0\}$.

Proposizione 6.1.2 (Sistema osservabile) *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema Σ sia osservabile è che*

$$\mathsf{rank}\{\mathcal{O}\} = n. \tag{6.5}$$

Example

Esempio 6.1.1 *Consideriamo il sistema Σ a tempo discreto caratterizzato dal seguente modello di stato*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ \quad\; y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

dove le matrici A e C sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di osservabilità del sistema Σ è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\mathcal{O}$ è pari a 1, dunque la matrice è invertibile ed il sistema è osservabile.
$\diamond$

Summary of Observability Conditions

Teorema 6.1.1 *Le condizioni seguenti sono equivalenti.*

(i) *La coppia (A, C) è osservabile.*

(ii) *La matrice $W_o(n-1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*

$$W_o(n-1) := \sum_{i=0}^{n-1} (A^T)^i C^T C (A)^i \tag{6.6}$$

è nonsingolare.

(iii) *La matrice di osservabilità $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{(pn)\times n}$*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango (colonna) n.

(iv) *Se, inoltre, tutti gli autovalori di A hanno modulo minore stretto di uno, allora la soluzione dell'equazione di Lyapunov*

$$A^T W_o A - W_o = -C^T C$$

esiste, è unica e risulta definita positiva. La matrice W_o viene detta Gramiano di osservabilità e può essere scritto anche come soluzione della (6.6) quando $n \to \infty$

$$W_o := \lim_{n\to\infty} W_o(n-1) = \sum_{i=0}^{\infty} (A^T)^i C^T C A^i.$$