State Feedback for Discrete-time systems

Paolo Fiorini

University of Verona

Output feedback and Stae feedlback

- Classical approach versus state feedback

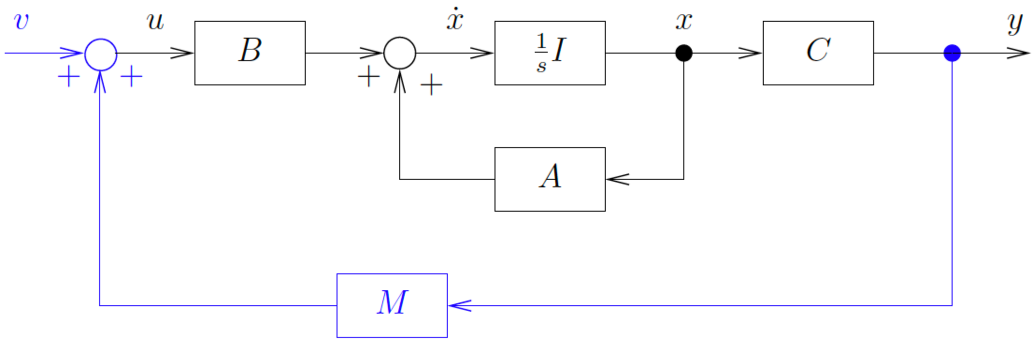

Figura 5.3. Schema a blocchi della retroazione dall'uscita

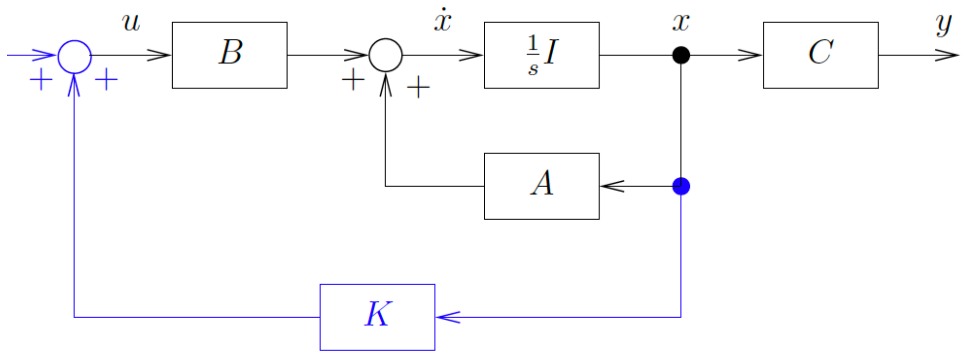

Figura 5.2. Schema a blocchi della retroazione dallo stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Controllable Canonical Form (continuous time)

$$
A_c := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad b_c := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_3 & \cdots & & a_{n-1} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \dots & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

$$
\Delta_{A_c}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0.
$$

- nelle matrici $\mathcal{R}_c$ e $\mathcal{R}_c^{-1}$ non compare il termine a_0,
- per calcolare la matrice di cambiamento di base T da $\Sigma = \{A, b, C\}$ a $\Sigma_c = \{A_c, b_c, C_c\}$ serve solo la $\mathcal{R}_c^{-1}$ (che si può costruire direttamente da $\Delta_A(s)$) e la matrice $\mathcal{R}$ calcolabile a partire dalla coppia (A, b):

$$
T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.
$$

Eigenvalue Allocation (Continuous time)

$$u(t) = k_c x_c(t) + v(t) \qquad k_c = \begin{bmatrix} k_0 \; k_1 \; \cdots \; k_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + b_c u(t).$$

La matrice $A_c + b_c k_c$ assume la forma

$$A_c + b_c k_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_0 + k_0 & -a_1 + k_1 & -a_2 + k_2 & \dots & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{A_c + b_c k_c}(s) = s^n + (-a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + \ldots + (-a_1 + k_1)s + (-a_0 + k_0).$$

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i) \in \mathbb{R}[n]$$

$$k_c = \begin{bmatrix} a_0 - d_0 & a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & \dots & a_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix};$$

Controllable Canonical Form (Discrete-time)

Teorema 2.2.1 (Forma canonica di controllo di un sistema a tempo discreto) *La realizzazione in forma canonica di controllo del sistema LTI SISO a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i), \qquad a_0 = 1, a_n \neq 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_c = \{A_c, B_c, C_c, D_c\}$ *di ordine* n

$$\begin{cases} x(k+1) = A_c x(k) + B_c u(k) \\ y(k) = C_c x(k) + D_c u(k) \end{cases}$$

in cui

$$A_c := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B_c := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c := \left[(b_n - b_0 a_n) \; (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \; \cdots \; (b_1 - b_0 a_1) \right], D_c = b_0.$$