Review of Classical Theory of Discrete-Time Linear Systems

Paolo Fiorini

University of Verona

Discrete Time Signals

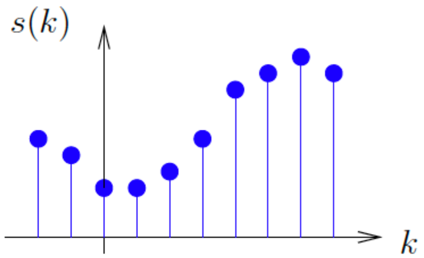


Figura 1.2. Segnale a tempo discreto

This is an example of discrete (time) signal, we will address only signals that belong to spaces that have finite norms, e.g. the one below

$\ell_p \triangleq \ell_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ è l'insieme delle sequenze (o successioni) $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \in \mathbb{C}^n$, tali che $\|x\|_p < \infty$ dove

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^p \right\}^{1/p}$$

è la norma associata.

Discrete Time Systems: Properties

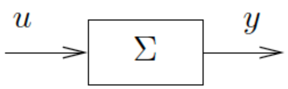


Figura 1.3. Rappresentazione di un sistema dinamico Σ

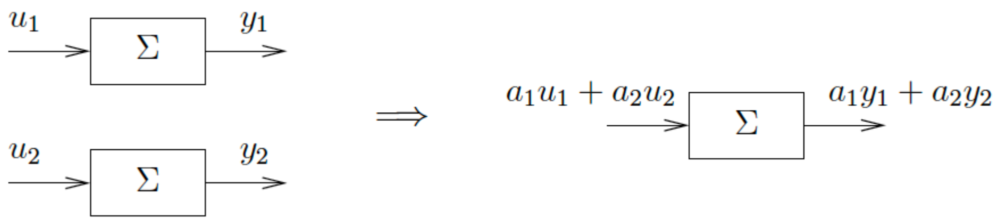


Figura 1.4. Linearità di Σ

Definizione 1.2.3 (Causalità)
Un sistema dinamico Σ è causale se l'uscita al tempo t, $y(t)$, dipende solo dall'ingresso fino al tempo t, $u(t)$.

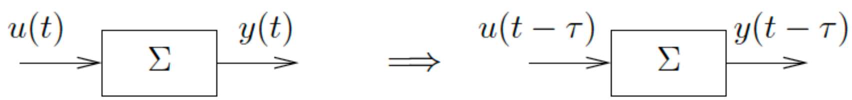


Figura 1.5. Tempo-invarianza di Σ

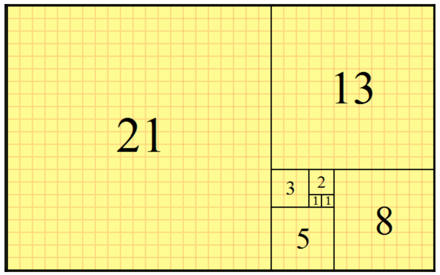
For discrete time systems, the properties become:

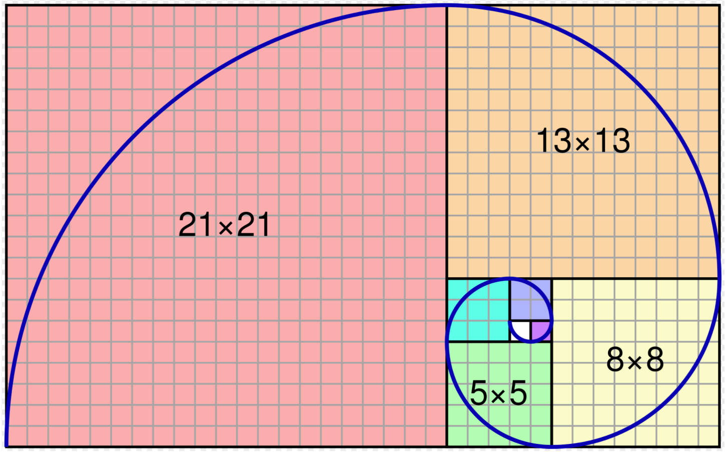
Linearity: $u_1(k) \rightarrow v_1(k)$ & $u_2(k) \rightarrow v_2(k) \Longrightarrow \alpha\, u_1(k) + \beta\, u_2(k) \rightarrow \alpha\, v_1(k) + \beta\, u_2(k)$

Time Invariance: $\forall\, (u, v)$ & $d \in Z$, then $u(k-d) \rightarrow v(k-d)$

Discrete Time Systems: Examples

- Sales Model:
  - v(k)=u(k-1) sales are equal to the previous period
  - v(k)= u(k-1) + a[u(k-1)-u(k-2)], sales are equal to previous period plus the trend a>0 growing, a<0 decresing
- Data Filtering:
  - $v(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{i=m-1} u(k-i)\ k \in Z$ moving average with window of length m
  - $v(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{i=m-1} b_i u(k-i)\ k \in Z$ weighted moving average
- Fibionacci numbers:
  - v(k+2)=v(k+1)+v(k)   v(0)=0, v(1)=1





Discrete Time Systems: Stability

Definizione 1.2.6 **(BIBO stabilità)**

Un sistema a tempo continuo Σ è BIBO stabile se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_y tale che per ogni segnale d'ingresso $u(t)$ che soddisfa

$$|u(t)| \leq M_u, \qquad t \geq t_0 \qquad (1.1)$$

la corrispondente risposta in uscita $y(t)$ soddisfa

$$|y(t)| \leq M_y, \qquad t \geq t_0 \qquad (1.2)$$

per $t \in \mathbb{R}$.

Un sistema a tempo discreto Σ è BIBO stabile se per ogni costante positiva M_u esiste una costante positiva M_y tale che per ogni segnale d'ingresso $u(k)$ che soddisfa

$$|u(k)| \leq M_u, \qquad k \geq k_0 \qquad (1.3)$$

la corrispondente risposta in uscita $y(t)$ soddisfa

$$|y(k)| \leq M_y, \qquad k \geq k_0 \qquad (1.4)$$

per $k \in \mathbb{Z}$.

Definitiona are side-by-side in the course notes

Input/Output Equation

Discrete-time Lnear Time Invariant (LTI) systems are represented by a linear difference equation (1.10)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

That can be derived by the corresponding continuos time equation by approximating the derivative as

$$\frac{du(t)}{dt} \simeq \frac{u(kT_s) - u((k-1)T_s)}{T_s}$$

and by setting T=1, where T is the sampling time (more in this later).

Il legame ingresso-uscita di un sistema a tempo discreto SISO LTI Σ di dimensione finita può essere descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j), \qquad (1.15)$$

$\mathbb{Z} \ni k \geq k_0$, *con condizioni iniziali (c.i.)*

$$y(k_0-1), y(k_0-2), ..., y(k_0-n) \qquad (1.16)$$

dove $m \leq n$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ *e tali che* $a_n \neq 0, a_0 \neq 0, b_m \neq 0$ *e* $u(k) = 0$ *per ogni* $k < k_0$.

ARMA Model

- se $n = 0$, il sistema SISO LTI a tempo discreto è descritto dalla equazione alle differenze

$$y(k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{a_0} u(k-j), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

in cui l'uscita è la media pesata dell'ingresso nella finestra mobile $[k-m, k]$. Questo modello si chiama **modello a media mobile**, **MA** dalla acronimo della traduzione

- se $m = 0$, il sistema SISO LTI è descritto da

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{b_0} y(k-i) = u(k), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1.12}$$

dato che l'unico coefficiente non nullo del termine di destra è $b_0 u(k)$. Questo modello discreto si chiama **modello autoregressivo**, in breve **AR**.

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i v(k-i) = b_0 u(k)} \xrightarrow{v(k)} \boxed{a_0 y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i v(k-i)} \longrightarrow y(k)$$

with initial conditions y(-1), y(-2), y(-3)….

Free and Forced Responses

Also for Discrete-time systems we can represent the system output as composed by a part y_l that depends only on the initial conditions and a part y_f that depends on the input signal.

La soluzione $y(k)$ dell'equazione alle differenze (1.15), con condizioni iniziali (1.16) e ingresso $u(k)$, è definita come la somma dell'evoluzione libera $y_l(k)$ e dell'evoluzione forzata $y_f(k)$, i.e.

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k), \tag{1.23}$$

per $k \geq k_0$ intero.

Data l'equazione alle differenze (1.15) con condizioni iniziali (1.16), si definisce ***evoluzione libera*** *del sistema $y_l(k)$, $k \geq k_0$, la soluzione dell'equazione omogenea associata*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_l(k-i) = 0 \tag{1.19}$$

con le stesse condizioni iniziali (1.16).

Data l'equazione alle differenze (1.15), si definisce ***evoluzione forzata*** *del sistema $y_f(k)$, $k \geq k_0$, la soluzione dell'equazione alle differenze originale*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_f(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j) \tag{1.21}$$

con condizioni iniziali poste uguali a zero.

Free Response Computation

we associate to each term y(k-i) in the homogeneous equation

$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{a_i y(k-i)} = 0$

the term z^{-i} obtaining

$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{a_i} z^{-i} = 0$

then we multiply by z^n we obtain

$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{a_i} z^{n-i} = 0$

by setting j=n-i, we obtain

Data l'equazione omogenea (1.19), l'equazione algebrica

$$d(z) := \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} z^i = 0 \qquad (1.25)$$

si definisce polinomio caratteristico.

that can be represented in factor form as

$$d(z) = \prod_{i=1}^{h} (z - p_i)^{r_i}. \qquad (1.26)$$

with r_i the multiplicity of each root

Le soluzioni elementari dell'equazione omogenea associata (1.19), espresse nella seguente forma

$$m_{i,j}(k) = \frac{k^j}{j!} p_i^k, \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad (1.28)$$

per $i = 1, \dots, h$, $j = 0, \dots, r_i$ sono dette modi del sistema.

La soluzione $y_l(k)$ dell'equazione alle differenze (1.19) è espressa come combinazione lineare dei modi del sistema, i.e.

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i - 1} c_{ij} \frac{k^j}{j!} p_i^k \qquad (1.30)$$

dove i coefficienti c_{ij} sono univocamente determinati dalle condizioni iniziali (1.16).

Example

The natural modes of the system are:

$\{p_i^k\}$, $\{kp_i^k\}$, ….. $\left\{\frac{k^{r_i-1}}{(r_i-1)!}p_i^k\right\}$ $k \in Z$

These modes are analogous to the modes of continuous time systems, in fact:

$\frac{k^l}{l!}p_i^k$=$\frac{k^l}{l!}e^{\ln p_i k}$ (remember $p = e^{\ln p}$ and $\ln p^k = k \ln p$)

if we write p_i in polar form we have $p_i = \rho_i e^{j\varphi_i}$ ad we can write

$\frac{k^l}{l!}p_i^k$=$\frac{k^l}{l!}\rho_i^k\ e^{j\varphi_i k} = \frac{k^l}{l!}\ e^{k \ln \rho_i}(cos(k\varphi_i)$+j$sin(k\varphi_i)$) which is the sampled version of the mode in continuous time.

Let's consider v(k)-v(k-1)+1/4 v(k-2) = 0 K$\geq$ 0 and initial conditions $v(-1) = v_{-1}.v(-2) = v_{-2}$

The characteristic equation is

$z^2 - z + \frac{1}{4}$=$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \ \rightarrow \ p_{1,2} = {}^1/_2$

$v_l(k) = c_1\frac{1}{2^k} + c_2 k\frac{1}{2^k} = (c_1$+k $c_2)\frac{1}{2^k}$ and the costants can be computed by

$v_{-1} = v_l(-1) = 2(c_1$- $c_2)$ and $v_{-2} = v_l(-2) = 4(c_1 - 2\ c_2)$

Therefore the solution for $v_l(k)$ is:

$v_l(k) = \left[\left(v_{-1} - \frac{v_{-2}}{4}\right) + \left(\frac{v_{-1}}{2} - \frac{v_{-2}}{4}\right)k\right]\frac{1}{2^k}$ K$\geq$ 0

Complex Roots

Tempo discreto

Per i sistemi a tempo discreto $k \in \mathbb{Z}$ l'evoluzione libera è descritta da

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{i,j} \frac{k^j}{j!} p_i^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_0^+ \tag{1.68}$$

$$\frac{k^j}{j!} p^k = \frac{k^j}{j!} \rho^k e^{\jmath \phi k} = \frac{k^j}{j!} \rho^k [\cos(\phi k) + \jmath \sin(\phi k)], \qquad k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\frac{k^j}{j!} \bar{p}^k = \frac{k^j}{j!} \rho^k e^{-\jmath \phi k} = \frac{k^j}{j!} \rho^k [\cos(\phi k) - \jmath \sin(\phi k)], \qquad k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Perciò esattamente come nel caso a tempo continuo, alla famiglia di modi complessi data da

$$\frac{k^j}{j!} p^k, \qquad \frac{k^j}{j!} \bar{p}^k, \qquad j = 0, 1, \ldots, r-1$$

si può associare la corrispondente famiglia di modi reali, data da

$$\frac{k^j}{j!} \rho^k \cos(\phi k), \qquad \frac{k^j}{j!} \rho^k \sin(\phi k), \qquad j = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{1.69}$$

Simple and Asymptotic Stability

Il modo elementare $m_{i,j}(t) = \frac{k^j}{j!} p_i^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{C}$

1. *convergente a zero se e solo se $|p_i| < 1$,*
2. *limitato in $\mathbb{Z}_+$ se e solo se $|p_i| \leq 1$ e i modi $p_i \in \partial\mathbb{D}$ sono semplici (i.e. $r_i = 1$),*
3. *divergente in tutti gli altri casi.*

Aymptotic stability implies that all modes converge to 0, i.e.

$\frac{k^l}{l!} p_i^k \to 0 \; for \; k \to \infty$ but since

$\frac{k^l}{l!} p_i^k = \frac{k^l}{l!} e^{k \ln \rho_i} (cos(k\varphi_i) + jsin(k\varphi_i))$

the mode $\to 0$ only if $e^{k \ln \rho_i}$ is decreasing, i.e. $\ln \rho_i < 0 \Longrightarrow \rho_i = |p_i| < 1 \;\; \forall i$

This is equivalent to say that the impulse response is $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$

Esempio 1.5.3 *Consideriamo un sistema LTI a tempo discreto, caratterizzato dal seguente modello IO*

$$\frac{1}{2} y(k-2) - y(k-1) + y(k) = u(k), \qquad k \geq 0.$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata, $d(z) = z^2 - z + 1/2$, presenta due radici (semplici) complesse coniugate

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \jmath \frac{1}{2}$$

il cui modulo $\rho = \sqrt{2}/2 < 1$.
I modi del sistema

$$m_1(k) = \rho^k \cos(\phi k)$$
$$m_2(k) = \rho^k \sin(\phi k)$$

dove $\phi = \angle z_1 = \frac{\pi}{4}$, sono limitati e convergenti poiché si tratta di radici appartenenti a $\mathbb{D}$, l'interno della circonferenza unitaria centrata nell'origine del semipiano complesso, dunque il sistema è asintoticamente stabile. ◇

Discrete-Time Canonical Signals: Impulse

Definizione 1.6.2 (Impulso unitario discreto)
L'Impulso di Kronecker è una successione definita da

$$\delta(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & altrimenti \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.77}$$

come mostrato nella Figura 1.10. Si tratta di una successione pari, ovvero $\delta(-k) = \delta(k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, che esattamente come nel caso continuo può essere amplificata e traslata nel tempo tramite $A\delta(k-i)$ dove $i \in \mathbb{Z}$.

Possiamo quindi rappresentare qualsiasi successione f come una combinazione lineare di impulsi discreti

$$f(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)\delta(i-k) \tag{1.78}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(i)\delta(k-i) \tag{1.79}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

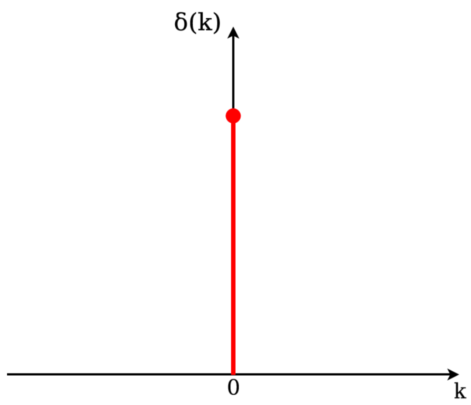


Figura 1.10. Impulso di Kronecker

Discrete-Time Canonical Signals: Step

Il gradino unitario è anche noto con il nome di *funzione di Heaviside*. Analogamente, il **gradino unitario discreto** $\delta_{-1}(k)$

Discrete unit step function

$$\delta_{-1}(k) := \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & altrimenti \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

è il segnale canonico corrispondente a tempo discreto.

$$\delta_{-1}(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(k)$$

$$\delta_{-2}(t) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}(k).$$

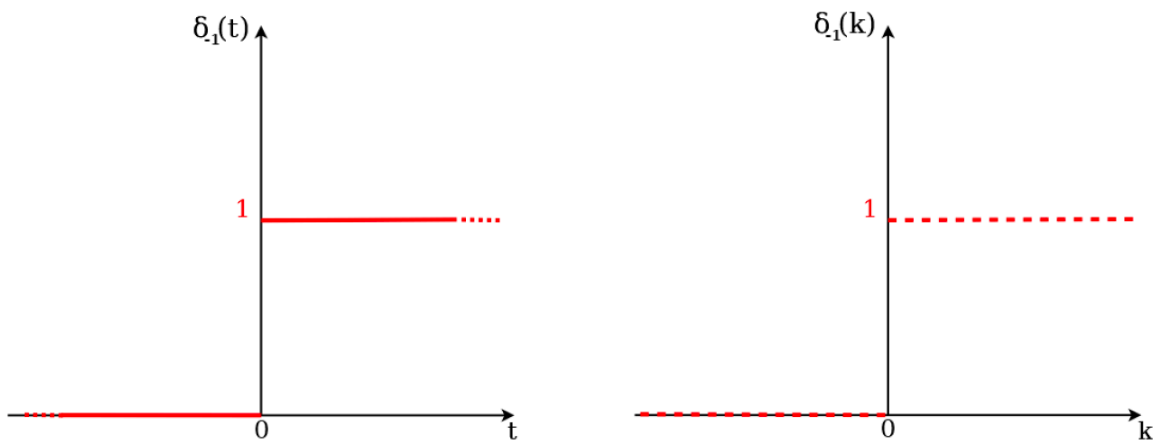


Figura 1.11. Gradino unitario a tempo continuo (sinistra) ed a tempo discreto (destra)

Impulse response

Dato un sistema Σ SISO LTI causale, descritto dall'equazione alle differenze (1.15), la risposta impulsiva $w(k)$ è data dalla soluzione dell'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i w(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i \delta(k-i) \quad (1.81)$$

$k_0 \geq 0$ *intero, con condizioni iniziali nulle*

$$\begin{aligned} w(k_0-1) &= 0 \\ w(k_0-2) &= 0 \\ &\vdots \\ w(k_0-n) &= 0. \end{aligned}$$

,

La risposta impulsiva $w(t)$ del sistema Σ SISO LTI causale a tempo discreto (1.15) assume la forma

$$w(k) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{m} b_i \delta(k-i) \quad (1.83)$$

per $n = 0$,

$$w(k) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} d_{i,j} \frac{k^j}{j!} p_i^k \delta_{-1}(k) \quad (1.84)$$

per $n \geq 1$, $n > m$, *e*

$$\begin{aligned} w(k) = &\sum_{i=0}^{m-n} d_i \delta(k-i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} d_{i,j} \frac{k^j}{j!} p_i^k \delta_{-1}(k-m+n-1) \end{aligned} \quad (1.85)$$

per $n \geq 1$, $n \leq m$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, $d_0, d_{i,j} \in \mathbb{R}$

Example

$$v(k) + v(k-1) = u(k) - u(k-1)$$

if $u(k) = \delta(k)$, then:

k=0 $h(0) + h(-1) = \delta(0) - \delta(-1) = 1$

thus $h(0) = 1$ since $\mathrm{h}(-1) = 0$ and $\delta(-1) = 0$

k=1 $h(1) + h(0) = \delta(1) - \delta(0) = -1$

thus $h(1) = -1 - h(0) = -2$

K=2 $h(2) = 2$

K=3 $h(2) = -2$

Thus $h(k) = \begin{cases} 1\ for\ k = 0 \\ -2\ for\ k \geq 0\ and\ odd \\ 2\ for\ k \geq 0\ and\ even \end{cases}$

$$h(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k) - (-1)^{k-1} \delta_{-1}(k-1) = \delta(k) + (-1)^k 2\delta_{-1}(k-1)$$

Convolution Integral and Forced Response

Il prodotto di convoluzione di due successioni $v_1(k)$ e $v_2(k)$, con $k \in \mathbb{Z}$, è dato dalla successione $[v_1 * v_2](k)$ definita attraverso la sommatoria

$$[v_1 * v_2](k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_1(i) v_2(k-i)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_1(k-i) v_2(i) \qquad (1.95)$$

se esiste.

La risposta forzata del sistema SISO LTI causale Σ (1.15) di risposta impulsiva $w(k)$, con condizioni iniziali nulle e ingresso $u(k)$ è data dal prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} y_f(k) &= [w * u](k) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{k} w(k-i) u(i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} w(i) u(k-i) \end{aligned}$$

se esiste.
Se $u(k)$ è nullo per $k < 0$, allora

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^{k} w(i) u(k-i) \qquad (1.98)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} w(k-i) u(i) \qquad (1.99)$$

che risulta essere nulla per $k < 0$.

Justification of Forced Response

We can represent any input signal as:

$u(k) = \cdots + u(-1)\delta(k+1) + u(0)\delta(k) + u(1)\,\delta(k-1) \ldots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)\delta(k-i) = [u * \delta](k)$

Since $\delta(k) \to h(k)$ the output will be

$$v_f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)h(k-i) = [u * h](k)$$

Example

Considering the previous system

$$v(k) + v(k-1) = u(k) - u(k-1)$$

with inpulse response

$$h(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k) - (-1)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) = \delta(k) + (-1)^k 2\delta_{-1}(k-1)$$

The forced response will be:

$$v_f(k) = \sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i) = \mathrm{u(k)} + 2\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1} u(i)$$

Asymptotic and BIBO Stability using *w(k)*

Il sistema LTI Σ a tempo discreto, descritto dalla risposta impulsiva $w(k)$, è BIBO stabile se e solo se $w(k)$ è una successione sommabile $w(k) \in \ell_1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |w(k)| < +\infty.$$

Proposizione 1.7.1 (BIBO stabilità)
Un sistema Σ LTI causale è BIBO stabile se e solo se i modi elementari che compaiono con coefficiente non nullo nell'espressione della risposta impulsiva sono tutti convergenti a zero.

Proposizione 1.7.2 (Stabilità asintotica)
Un sistema Σ LTI causale è asintoticamente stabile, cioè la risposta libera converge a zero per t (o k) tendente a $+\infty$ per ogni scelta delle condizioni iniziali, se e solo se tutti i modi elementari della risposta libera convergono a zero asintoticamente.

Example

Esempio 1.7.4 *Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto caratterizzato dal seguente modello IO*

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = 2u(k), \qquad k \geq 0. \tag{1.115}$$

La risposta libera

$$y_l(k) = c_{1,0}\left(\frac{1}{2}\right)^k + c_{2,0}\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k \geq 0.$$

è una combinazione lineare di modi convergenti, dato che il modulo di entrambe le radici di $d(z) = z^2 - 1/4$ *è strettamente minore di 1, il sistema risulta asintoticamente stabile dunque anche BIBO stabile.* $\diamond$

Z-Transform

Definizione 1.10.1 (Trasformata Zeta) *Dato un segnale $v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, la trasformata Zeta di $v(k)$ è definita dalla serie*

$$\mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k) z^{-k}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1.155}$$

se converge.

Se $v(k)$ assume valori non nulli solo per $k \in \mathbb{Z}_+$, la trasformata Zeta è data da

$$\mathcal{Z}[v(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k) z^{-k}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1.156}$$

se converge.

Existance of Z-Transform

Esattamente come nel caso continuo, i punti del piano complesso in cui tale serie converge formano la regione di convergenza. Essa contiene sempre il complementare di un cerchio centrato nell'origine del piano complesso, avente **raggio di convergenza** r^{ROC}. La regione di convergenza è quindi

$$\mathcal{C}^c := \{z \in \mathbb{C} | |z| > r^{ROC}\}.$$

Una rappresentzione grafica della ragione di convergenza e del raggio di convergenza è data nella Figura 1.13.

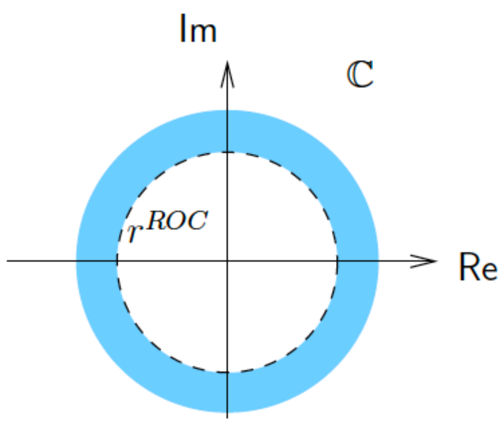


Figura 1.13. Regione di convergenza

Justification of Region of Convergence

The Z-transform exists in a region, called region of convergence (ROC), such that $|z| > r_{ROC}, \;\; r \in \mathbb{R}_+$. In fact, given

F(z)=$\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{-h} = c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots$

this is a series that converges if $\lim_{h \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_{h+1} z^{-(h+1)}}{c_h z^{-h}} \right| = L, \;\; L < 1$

therefore

$$\lim_{h \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_{h+1}}{c_h} \right| \frac{1}{z} < 1 \Rightarrow |z| > \lim_{h \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_{h+1}}{c_h} \right| = r_{ROC}$$

- r_{ROC}=0 F(z) converges everywhere
- $0 < r_{ROC} < \infty$ F(z) converges outside a circle of radius r_{ROC}
- r_{ROC}= ∞ F(z) diverges

Z-Transform Properties

1. *Linearità*:

$$\mathcal{Z}[af(k) + bg(k)] = a\mathcal{Z}[f(k)] + b\mathcal{Z}[g(k)] = aF(z) + bG(z)$$

2. *Convoluzione*:

$$\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z)G(z), \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. *Moltiplicazione per k o k^2*: per k si ha

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

mentre ricorsivamente, applicando la regola di Leibniz, per k^2

$$\mathcal{Z}[k^2 f(k)] = \mathcal{Z}[k(kf(k))] = -z \cdot \frac{d}{dz}\Big[-z\frac{dF(z)}{dz}\Big] =$$

$$= z\frac{dF(z)}{dz} + z^2\frac{d^2F(z)}{dz^2}$$

Z-Transform Properties

4. *Moltiplicazione per* λ^k:

$$\mathcal{Z}[\lambda^k f(k)] = F(z/\lambda)$$

dove λ è uno scalare.

5. *Traslazione a destra*: per $d > 0$ intero, si ha che

$$\mathcal{Z}[f(k-d)] = z^{-d}F(z) + \sum_{i=-d}^{-1} f(i)z^{-d-i}$$

dove $f(k-d)$ può essere vista come la versione ritardata di d passi della successione $f(k)$.

Example

Esempio 1.10.1 (Alcune Trasformate Zeta notevoli)
La trasformata Zeta dell'impulso Unitario discreto centrato in $i \in \mathbb{N}$, $\delta(k-i)$, *è data dalla seguente serie*

$$\mathcal{Z}[\delta(k-i)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k-i) z^{-k} = z^{-i}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

dato che tale impulso è nullo per ogni $k \neq i$ *e vale 1 altrimenti solo in* i.

La trasformata Zeta del gradino unitario discreto $\delta_{-1}(k)$ *è data dalla serie*

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

ovvero una serie la cui ragione è minore di 1 in modulo, la cui somma è pertanto

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

tenedo conto del fatto che $\delta_{-1}(k) = 1$ *se* $k \in \mathbb{Z}_+$. $\diamond$

Anti Z-Transform

Definizione 1.10.2 (Anti-trasformata Zeta)
Sia $V(z)$ un funzione complessa di variabile complessa, l'anti-trasformata Zeta di $V(z)$ è definita come segue

$$\mathcal{Z}^{-1}\{V(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} V(z)z^{k-1}dz \tag{1.157}$$

dove l'integrale di circuitazione è riferito ad una qualsiasi curva chiusa Γ che appartenga alla RdC e percorsa in senso anti-orario.

1.10.1 Teorema del valore iniziale e finale

Sia $v(k)$ una successione causale (ovvero nulla per k negativi) con trasformata Zeta $V(z)$. Il teorema del valore iniziale afferma che:

$$v(0) = \lim_{z\to\infty} V(z). \tag{1.158}$$

Se la successione $v(k)$ ammette limite finito, allora $V(z)$ è una funzione analitica all'esterno del disco di raggio unitario centrato nell'origine e il teorema del valore finale afferma che:

$$v(\infty) = \lim_{\mathbb{R}\ni z\to 1^+}\left(1-\frac{1}{z}\right)V(z). \tag{1.159}$$

Transfer Function

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)\right]$$

$$a_0 Y(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z^{-i} Y(z) + \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-i-l} \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} U(z).$$

Moltiplichiamo sia a destra che a sinistra per il termine z^n, abbiamo la relazione polinomiale in z

$$D(z)Y(z) - P(z) = N(z)U(z), \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1.160}$$

Transfer Function

$$D(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i},$$

$$P(z) := -\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{n-i-l},$$

$$N(z) := \sum_{i=0}^{m} b_i z^{m-i}.$$

$$Y(z) = \frac{P(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)} U(z), \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1.164}$$

dove possiamo riconoscere, esattamente come nel caso continuo, la definizione di *Funzione di Trasferimento* per il sistema Σ, ovvero

$$W(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}, \tag{1.165}$$

Example

Esempio 1.10.2 *Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto caratterizzato dal modello IO*

$$y(k-1) + 2y(k) = u(k), \qquad k \geq 0$$

con condizione iniziale $y(-1) = -1$ *e ingresso (causale)* $u(k) = 2^k \delta_{-1}(k)$. *I parametri per il calcolo dei polinomi (1.161), (1.162) e (1.163) sono*

$$\begin{aligned} n &= 1, & m &= 0 \\ a_0 &= 2, & b_0 &= 1 \\ a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Example

I polinomi in (1.164) risultano quindi

$$D(z) = 2z + 1,$$
$$P(z) = -z,$$
$$N(z) = 1.$$

dai quali possiamo ricavare la trasformata Zeta della risposta totale del sistema $Y(z)$

$$Y(z) = -\frac{z}{2z+1} + \frac{1}{2z+1}\frac{z}{z-2}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.166}$$

dove $U(z) = \dfrac{z}{z-2}$ *è la trasformata Zeta dell'ingresso* $u(k)$*. La risposta libera e la funzione di trasferimento sono date da*

$$Y_\ell(k) = -\frac{z}{2z+1}, \qquad W(z) = \frac{1}{2z+1}. \tag{1.167}$$

$\diamond$

Stability Analysis using the Transfer Function

Teorema 1.10.1 (BIBO stabilità e poli di $W(z)$)
Un sistema Σ SISO LTI causale a tempo discreto, avente funzione di trasferimento $W(z)$ con polinomi $N(z)$ e $D(z)$ coprimi è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $W(z)$ sono contenuti all'interno della circonferenza unitaria del piano complesso, i.e. $z_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, \dots, \deg\{D(z)\}$.

Computation of the Inverse Z-Trasform

$$W(z) = \frac{n(z)}{z^{\nu}(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\cdot \ldots \cdot (z-p_h)^{r_h}} \tag{1.171}$$

dove $\nu \geq 0$ è la molteplicità algebrica di un eventuale polo situato nell'origine, e r_i è la molteplicità algebrica del polo p_i. Si ha quindi che $\nu + \sum_{i=1}^{h} r_i = \mathsf{deg}\{D(z)\}$. Possono verificarsi le seguenti situazioni

1. se $W(z)$ ha almeno un $p_i \neq 0$, allora la ROC contiene l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \max |p_i|, i = 1, 2, \ldots, h\}$, i.e. tutti i complessi il cui modulo è maggiore di quello massimo tra i poli di $W(z)$;
2. se $W(z)$ ha solamente poli nell'origine, la ROC coincide con $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, i.e. il piano complesso privato dell'origine;
3. se $\nu = 0$ e $\sum_{i=1}^{h} r_i = 0$ allora $W(z)$ è una funzione costante e la ROC coincide con tutto il piano complesso.

Computation of the Inverse Z-Trasform

$$W_1(z) := \frac{W(z)}{z} = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{d_i}{z^{i+1}} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{d_{i,j}}{(z-p_i)^{j+1}}$$

dove $\nu + \sum_i r_i = n$ e i termini $d_{i,j}$ sono costanti da determinare. Moltiplicando per z ritorniamo alla funzione di partenza

$$W(z) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{d_i}{z^i} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{d_{i,j}\, z}{(z-p_i)^{j+1}}$$

dove adesso possiamo riconoscere le anti-trasformate notevoli (cfr Tabella 1.3)

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z^i}\right] = \delta(k-i), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-p_i)^{j+1}}\right] = \frac{k!}{j!(k-j)!} p_i^{k-j}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 1.10.5 (Anti-trasformata Zeta di $W(z)$)
Consideriamo la seguente funzione di trasferimento

$$W(z) = \frac{2z-3}{z(z+5)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Vogliamo calcolarne l'anti-trasformata per risalire alla risposta impulsiva del sistema. Sia

$$W_1(z) := \frac{W(z)}{z} = \frac{2z-3}{z^2(z+5)}$$

dalla decomposizione in fratti semplici, applicata alla funzione $W_1(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{B}{z+5} \\ &= \frac{A_1(z+5)z + A_2(z+5) + Bz^2}{z^2(z+5)} \\ &= \frac{A_1 z^2 + 5A_1 z + A_2 z + 5A_2 + Bz^2}{z^2(z+5)}. \end{aligned}$$

Confrontando il numeratore così ottenuto con il numeratore di $W_1(z)$, si ottiene il seguente sistema a tre incognite

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ 5A_1 + A_2 = 2 \\ 5A_2 = -3 \end{cases}$$

la cui soluzione è data dalla tripletta $(A_1, A_2, B) = (13/25, -3/5, -13/25)$. *Ricordando che* $W(z) = z \cdot W_1(z)$ *si ottiene*

$$W(z) = \frac{13}{25} - \frac{3}{5}\frac{1}{z} - \frac{13}{25}\frac{z}{z+5}$$

e quindi

$$w(k) = \mathcal{Z}^{-1}[W(z)] = \frac{13}{25}\delta(k) - \frac{3}{5}\delta(k-1) - \frac{13}{25}(-5)^k\delta_{-1}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\diamond$

Relation Between s and z Domains

Let's consider a differential equation

$$\dot{m}(t) + am(t) = be(t)$$

Whose Laplace Transform is

$$sM(s) + aM(s) = bE(s)$$

and the Transfer Function is

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{b}{s+a}$$

We want to know how to obtain the discrete-time approximation of these functions.

Method of Forward Differences

A possible approximation of the derivative is:

$$\dot{m}(t) \simeq \frac{m\big((h+1)T_s\big) - m(hT_s)}{T_s}$$

where h is the discrete time index, and T_s is the sampling period. The Z-transform of the left side is

$$\frac{zM(z) - M(z)}{T_s} = \frac{z-1}{T_s} M(z)$$

Therefore the discrete-time approximation of the differential equation is

$$\frac{m\big((h+1)T_s\big) - m(hT_s)}{T_s} + am(hT_s) = be(hT_s)$$

Method of Forward Differences

The Z-transform of the previous equation is

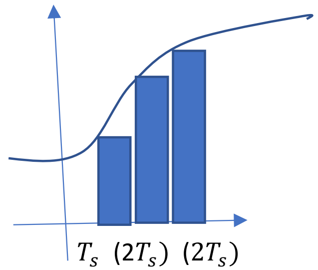
$$\frac{z-1}{T_s}\mathrm{M(z)} + \mathrm{aM(z)} = \mathrm{bE(z)}$$

from which the transfer function is

$$G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b}{\frac{z-1}{T_s} + a}$$

The G(z) could be obtained from G(s) by setting $s = \frac{z-1}{T_s}$ which is the Euler approximation, in which the integral of m(t) at step (h-1) is:

$$\int_{(h-1)T_s}^{hT_s} m(\tau)d\tau \cong m((h-1)T_s)T_s$$



Method of Forward Differences

In fact, if we use this approximation to integrate the differential equation we get:

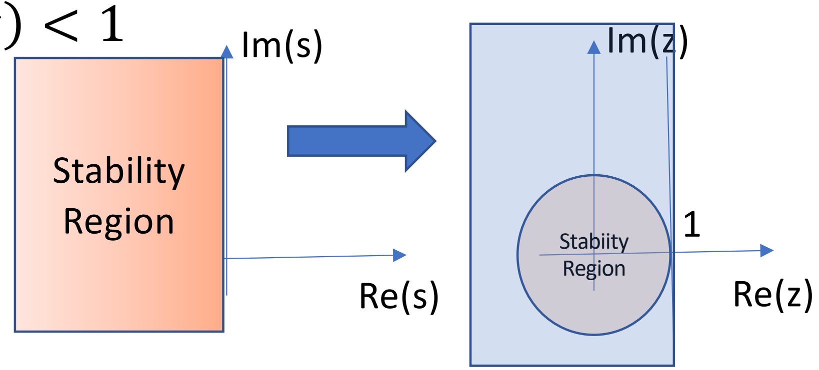
$$m(hT_s) - m\big((h-1)T_s\big) = -am\big((h-1)T_s\big)T_s + be((h-1)T_s)T_s$$

and applying the Z–transform the result is

$$M(z) - z^{-1}M(z) + az^{-1}T_sM(z) = bz^{-1}T_sE(z)$$

$$M(z)\left[\frac{z-1}{T_s} + a\right] = bE(z)$$

However, from $s = \frac{z-1}{T_s}$ we see that this approximation can introduce instability in fact $\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{T_s}\right) < 0 \Longrightarrow \mathcal{R}e(z) < 1$



Method of Backward Differences

A second approximation of the derivative is:

$$\dot{m}(t) \simeq \frac{m(hT_s) - m\big((h-1)T_s\big)}{T_s}$$

and the ZT is

$$\frac{M(z) - z^{-1}M(z)}{T_s} = \frac{z-1}{zT_s} M(z)$$

the approximation of the differential equation becomes

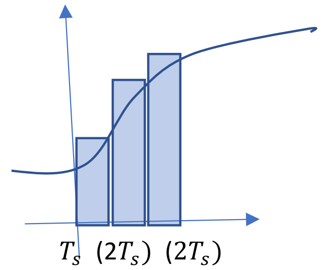
$$\frac{m(hT_s) - m((h-1)T_s)}{T_s} + am(hT_s) = be(hT_s)$$

$$\frac{z-1}{zT_s}\mathrm{M(z)} + \mathrm{aM(z)} = \mathrm{bE(z)} \Rightarrow G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b}{\frac{z-1}{zT_s} + a}$$

Method of Backward Differences

that is equivalent to $s = \frac{z-1}{zT_s}$ and the integral is

$$\int_{(h-1)T_s}^{hT_s} m(\tau)d\tau \cong m(hT_s)T_s$$



In this case, z= $\frac{1}{1-sT_s}$ and if we consider (z-1/2) we can write:

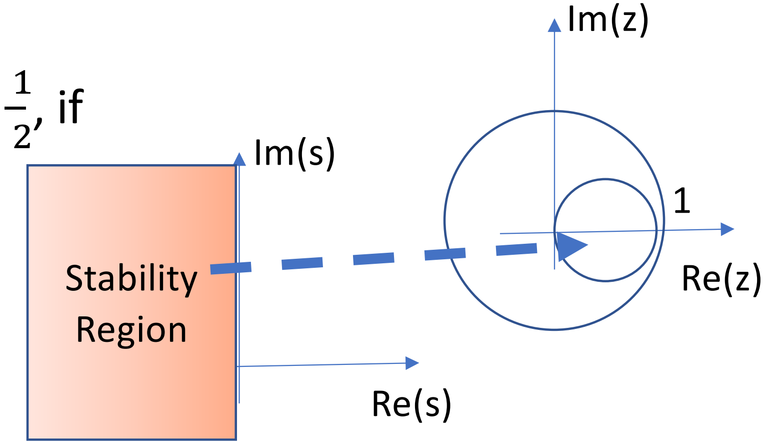
$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-sT_s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1+sT_s}{1-sT_s}$$

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+sT_s}{1-sT_s}\right| \rightarrow s = j\omega \rightarrow \left|\frac{1+sT_s}{1-sT_s}\right| = 1$$

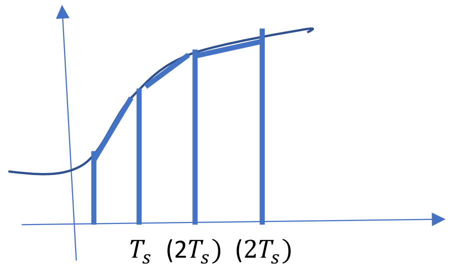
therefore the line $s = j\omega$ is mapped to the region $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, if we consider $z = \alpha + j\beta$ the previous equation becomes

$$(\alpha - \frac{1}{2})^2 + \beta^2 = (\frac{1}{2})^2$$

that preserves stability but with a big frequency distortion.



Method of Tustin (Bilinear)



The integral is approximated with

$$\int_{(h-1)T_s}^{hT_s} m(\tau)d\tau \cong \frac{1}{2}\left(m(hT_s)+m(h-1)T_s\right)T_s$$

$$m(hT_s) - \mathrm{m}\big((\mathrm{h}-1)T_s\big)$$
$$= -a\frac{T_s}{2}\left[m(hT_s) + m\big((h-1)T_s\big)\right] + b\frac{T_s}{2}\left[e(hT_s) + e\big((h-1)T_s\big)\right]$$

$$M(z)(1-z^{-1}) + a\frac{T_s}{2}(1-z^{-1})M(z) = b\frac{T_s}{2}(1-z^{-1})E(z)$$

$$M(z)\left[\frac{2(1-z^{-1})}{T_s(1+z^{-1})} + a\right] = bE(z)$$

Method of Tustin (Bilinear)

Therefore the transfer function is

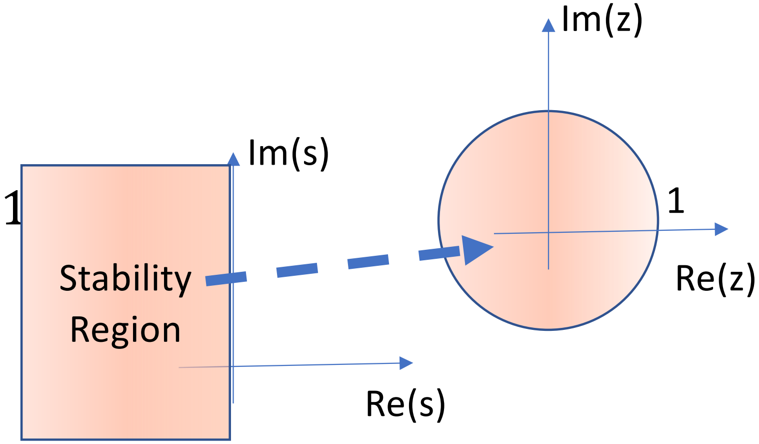
$$G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b}{\frac{2(1-z^{-1})}{T_s(1+z^{-1})} + a} \Rightarrow s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

In this case the full $\mathcal{R}e_{-}(s)$ maps intp the unity circle, in fact

$$\mathcal{R}e(s) < 0 \Rightarrow \mathcal{R}e\left(\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}\right) < 0 \rightarrow z = \alpha + j\beta$$

$$\rightarrow \mathcal{R}e\left(\frac{\alpha + j\beta - 1}{\alpha + j\beta + 1}\right) < 0$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - 1 + \beta^2}{(\alpha+1)^2 + \beta^2}\right) < 0 \rightarrow \alpha^2 - 1 + \beta^2 < 0 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 < 1$$



The frequency content is still warped and it requires a compensation filter