Controller Design and State Estimation

Paolo Fiorini

University of Verona

State Estimation for Discrete-time Systems

- Open Loop

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

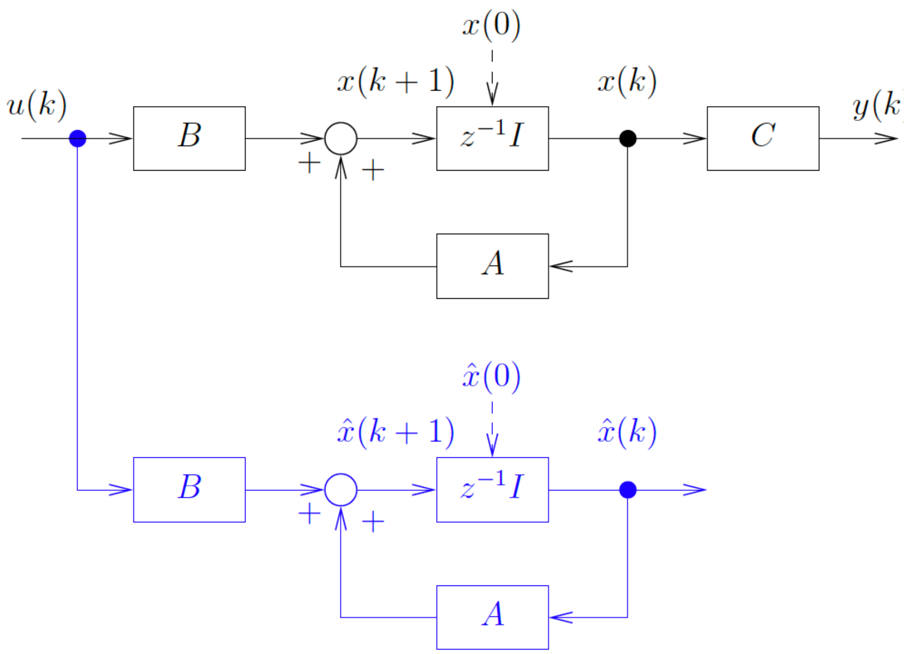

Figura 7.1. Schema a blocchi stima dello stato in anello aperto

If we assume to know A, B, C

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k), \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

we define the error as $\quad e(k) := x(k) - \hat{x}(k)$

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= Ax(k) + Bu(k) - (A\hat{x}(k) + Bu(k)) \\ &= Ae(k) \end{aligned}$$

and eventually $\quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0). \rightarrow 0$

but even if the system is stable, we have no control on the convergence to 0 governed by $\quad e(k) = A^k e(0);$

State Estimation for Discrete-time Systems

- Closed Loop: Luenberger observer

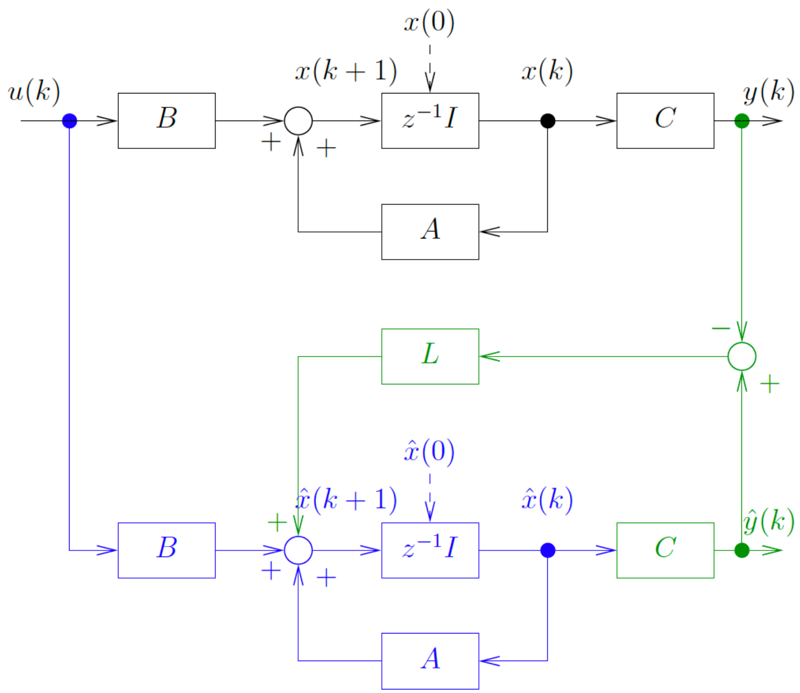

Figura 7.2. Schema a blocchi stima dello stato in anello chiuso

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\left(C\hat{x}(k) - y(k)\right)\\ &= (A+LC)\hat{x}(k) + Bu(k) - Ly(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + L\left(C\hat{x}(k) - Cx(k)\right) - [A\hat{x}(k) + Bu(k)]\\ &= (A+LC)e(k)\end{aligned}$$

Becomes a two-input system

$$\Sigma_L = \left[\begin{array}{c|c:c} A+LC & B & -L \\ \hline I & 0 & 0 \end{array}\right] : \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \mapsto \hat{x}$$

Teorema 7.2.1 *Gli autovalori di $(A+LC)$ possono essere allocati in maniera arbitraria agendo sulla matrice L se e solo se la coppia (A,C) è osservabile.*

Corollario 7.2.1 *La coppia (A,C) è osservabile se e solo se la coppia $(A+LC,C)$ è osservabile.*

Corollario 7.2.2 *Il sottospazio di non osservabilità di (A,C) coincide con quello di $(A+LC,C)$.*

Observation Canonical Form (Continuous t)

$$c_o(sI - A_o)^{-1} = c_o \frac{\mathrm{adj}(sI - A_o)}{\Delta_{A_o}(s)} = \frac{1}{\Delta_{A_c}(s)} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{n-2} & s^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_o(sI - A_o)^{-1} b_o = c_o \frac{\mathrm{adj}(sI - A_o)}{\Delta_{A_o}(s)} b_o = \frac{1}{\Delta_{A_o}(s)} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{n-2} & s^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}. \qquad (7.6)$$

Teorema 7.3.1 (Osservabilità della forma canonica di osservazione)
Il sistema single-output (SO) $\Sigma = \{A, B, c\}$ è osservabile se e solo se è algebricamente equivalente a un sistema $\Sigma_o = \{A_o, B_o, c_o\}$ in forma canonica di osservazione.

Observation Canonical Form (Discrete-time)

Teorema 2.2.3 (Forma canonica di osservazione di un sistema a tempo discreto) *La realizzazione in forma canonica di osservazione del sistema LTI SISO a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i), \qquad a_0 = 1, a_n \neq 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_o = \{A_o, B_o, C_o, D_o\}$ *di ordine* n

$$\begin{cases} x(k+1) = A_o x(k) + B_o u(k) \\ y(k) = C_o x(k) + D_o u(k) \end{cases}$$

in cui

$$A_o := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B_o := \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}$$

$$C_o := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_o = b_0.$$

Asymptotic Estimator (Continuous Time)

- Given a SO system $y(t) = cx(t)$ in canonical form, the state estimate is

$$\hat{x}(k+1) = (A_o + l_o c_o)\hat{x}(k) + B_o u(k) - l_o y(k).$$

- with

$$l_o = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{bmatrix} \qquad A_o + lc_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & -a_0 + l_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & -a_1 + l_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & -a_2 + l_2 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -a_{n-1} + l_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- and the new dynamic is defined by

$$\Delta_{A_o + lc_o}(s) = s^n + (-a_{n-1} + l_{n-1})s^{n-1} + \dots + (-a_1 + l_1)s + (-a_0 + l_0).$$

- To return to the original system: $l := Tl_o.$ $T = (\mathcal{O}_o^{-1}\mathcal{O})^{-1}$

Computation Procedure

1. calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{O}$ di (A, c) e verificare che il sistema sia osservabile (se questo non è vero, i passi seguenti non si possono applicare);
2. calcolare il polinomio caratteristico Δ_A;
3. scrivere il modello in forma canonica di osservazione;
4. determinare la matrice $\mathcal{O}_o^{-1}$ (sfruttando la dualità);
5. calcolare la matrice di cambiamento di base $T = (\mathcal{O}_o^{-1}\mathcal{O})^{-1}$ (o equivalentemente $T = \mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}_o$);
6. determinare il polinomio

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i) \in \mathbb{R}[n]$$

corrispondente agli autovalori desiderati λ_i, $i = 1, \ldots, n$ per l'osservatore asintotico (poli complessi devono comparire con il loro coniugato);

7. determinare i coefficienti del vettore di iniezione dell'uscita l_o per il sistema $\Sigma_o = \{A_o, B_o, c_o\}$ uguagliando termine a termine $d(s)$ e $\Delta_{A_o + l_o c_o}(s)$

$$\begin{aligned} -a_0 + l_0 &= -d_0 \\ -a_1 + l_1 &= -d_1 \end{aligned}$$

da cui segue

$$l_o = \begin{bmatrix} a_0 - d_0 \\ a_1 - d_1 \\ a_2 - d_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix};$$

8. ricavare la matrice di iniezione dell'uscita per il sistema originario come

$$l = T l_o.$$

Controller Design

Given The discrete-time system

$$\Sigma : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

with input from the estimator

$$u(k) = K\hat{x}(k) + v(k)$$

we get the new system equations

$$\Sigma_C : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A + LC)\hat{x}(k) + Bu(k) - Ly(k) \\ u(k) = K\hat{x}(k) + v(k). \end{cases}$$

$$\Sigma_C : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A + BK + LC)\hat{x}(k) + Bv(k) - Ly(k) \\ u(k) = K\hat{x}(k) + v(k). \end{cases}$$

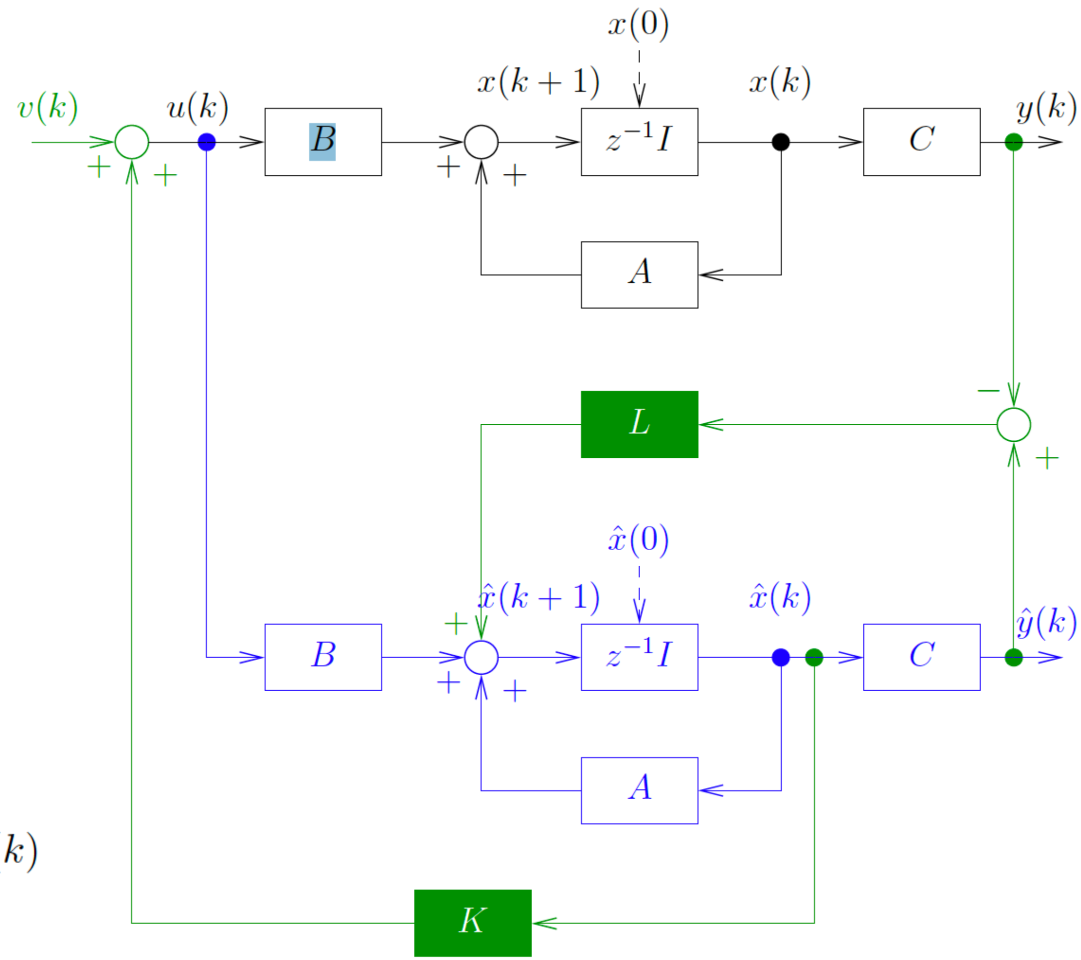

Figura 7.3. Sistema in anello chiuso

Controller Design

- The full equation: system+ estimator is

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{G} v(k) \qquad y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

- That can be re-written in terms of state and error by the equivalence:

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}.$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = T^{-1}G = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = HT = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

- that shows the principle of separation ->

and the transfer function is the same of the original system

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI-F)^{-1}G \\ &= \bar{H}(zI-\bar{F})^{-1}\bar{G} \\ &= C(zI-(A+BK))^{-1}B. \end{aligned}$$