Non Linear Systems (Discrete-time)

Paolo Fiorini

University of Verona

Definitions

Definizione 3.1.1 (Sistema dinamico autonomo e invariante)

Un sistema dinamico autonomo tempo-invariante a tempo continuo è definito dal seguente modello di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

in cui, senza perdita di generalità, possiamo considerare $t_0 = 0$.

Un sistema dinamico autonomo tempo-invariante a tempo discreto è definito dal seguente modello di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.2}$$

in cui, senza perdita di generalità, possiamo considerare $k_0 = 0$.

Definizione 3.1.5 (Stato di equilibrio per un sistema autonomo)

Uno stato x_e è di equilibrio, per il sistema descritto dal sistema continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, se soddisfa

$$0 = f(x_e).$$

Uno stato x_e è di equilibrio, per il sistema descritto dal sistema discreto $\dot{x}(k+1) = f(x(k))$, se soddisfa

$$x_e = f(x_e).$$

Example

Esempio 3.1.3 *Consideriamo il sistema non lineare a tempo discreto*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1^2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_2(k) - 2x_1(k). \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio sono i punti fissi del sistema, ovvero tutti i punti (x_1, x_2) *tali che*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_1 \\ 2x_2 - 2x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases} .$$

La prima equazione risulta verificata per $x_1 = 0$ *e* $x_1 = 1$*. Sostituendo nella seconda equazione implicano otteniamo* $x_2 = 0$ *e* $x_2 = 2$*, rispettivamente. Ne risulta quindi che ci sono due punti di equilibrio: l'origine* $x_e^{(1)} = (0, 0)$ *e* $x_e^{(2)} = (1, 2)$*.* $\diamond$

Lyapunov Function

$$\Delta V : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto V(f(x(k))) - V(x(k)).$$

$x(k+1) = f(x(k))$ e $k \in \mathbb{Z}_+$.

Definizione 3.3.5 (Funzione di Lyapunov)

Dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

una funzione definita positiva

$$V : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

continua con le sue derivate prime è una funzione di Lyapunov se

$$\dot{V}(x) \preceq 0, \qquad \forall x \in W \setminus \{0\}.$$

Dato il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = f(x(k)),$$

una funzione definita positiva

$$V : W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è una funzione di Lyapunov se

$$\Delta V(x) \preceq 0, \qquad \forall x \in W \setminus \{0\}.$$

Teorema 3.5.1 (Criterio di stabilità di Lyapunov)
Sia $x_e = 0$ stato di equilibrio per il sistema $x(k+1) = f(x(k))$ e sia W un intorno dell'origine tale per cui esiste una funzione $V : W \to \mathbb{R}$ definita positiva. Allora

(i) *se ΔV è semi-definita negativa, allora $x_e = 0$ è punto di equilibrio stabile,*

(ii) *se ΔV è definita negativa, allora $x_e = 0$ è punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Example

Esempio 3.5.2 *Consideriamo il seguente sistema non-lineare a tempo discreto*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1^3(k) - x_2^3(k) \\ x_2(k+1) = -x_2^3(k) \end{cases} .$$

I punti di equilibrio del sistema sono quelli che soddisfano

$$\begin{cases} -x_1^3 - x_2^3 = x_1 \\ \qquad\ -x_2^3 = x_2 \end{cases}$$

dove $(x_1(k), x_2(k)) = (x_1, x_2)$. *Dalla seconda equazione si ricava immediatamente* $x_2^3 + x_2 = 0$ *la cui unica soluzione reale è* $x_2 = 0$ *che sostituita nella prima, implica* $x_1 = 0$. *Segue che l'unico punto di equilibrio del sistema è l'origine* $(0, 0)$.

La candidata a funzione di Lyapunov è $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, *infatti è immediato verificare che essa è nulla nell'origine e che in tutti gli altri punti di* $\mathbb{R}^2$ *è strettamente positiva. L'incremento* $\Delta V(x_1, x_2)$ *è dato da*

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(k+1), x_2(k+1)) - V(x_1(k), x_2(k)) \\ &= (-x_1^3 - x_2^3)^2 + (-x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -x_1^2(1 - x_1^4 - 2x_1x_2^3) - x_2^2(1 - 2x_2^4) \end{aligned}$$

risulta essere strettamente negativo per x_1 *ed* x_2 *sufficientemente piccoli in modulo. Per il criterio di stabilità di Lyapunov, l'origine* $(0, 0)$ *è dunque asintoticamente stabile.* $\diamond$