Statistiques Mercredi 18

Une correction sera disponible dans 24h
N'hésitez pas à posez vos questions
Les questions en violet sont à rendre par voie numérique (mail ou casier selon ce qui fonctionne)
Dans ce document nous allons découvrir le dernier outil mathématiques utiles dans le cadre des statistiques : **l'écart-type** noté σ (on prononce cette lettre SIGMA (lien alphabet grec)

A Leçon :

A.1 Leçon en video

Lien de la leçon

A.2 Leçon M. Capietto

A.3 Leçon du livre

Bas de la page 292 et exercice résolu 3 page 293.

B Exercice

36 page 303
Rappel : Quand on a un intervalle (appelé classe) on peu utiliser la valeur centrale.
Par exemple pour la classe [0 ;5[on calcule le centre

$$\frac{0+5}{2} = 2,5$$

et on fait comme si toutes les distances de cette classe valaient 2,5. Essayer à la main puis avec la calculatrice

Pas de calculatrice ? En voici une : lien calculatrice
Correction

1. On calcule d'abord le centre de chaque classe : Pour l'intervalle $[0; 5[$ on a trouvé 2,5km.

$$\overline{x} = \frac{20 \times 2,5 + 60 \times 10 + 105 \times 22,5}{20 + 60 + 105} \approx 16,28km$$

2. On peu utiliser la calculatrice en mettant dans la liste 1 les valeurs (2,5 10 22,5) et dans la liste 2 les effectifs (20 60 105).
   Sinon on peut essayer de faire le calcul à la main en utilisant la formule :

$$\sigma = \sqrt{\frac{20 \times (2,5-16,28)^2 + 60 \times (10-16,28)^2 + 105 \times (22,5-16,28)^2}{20+60+105}} \approx 7,43km$$

3. Calculons ce que l'on nous demande : $\overline{x} - 2\sigma = 16,28 - 2 \times 7,43 \approx 1,42$
   On obtient l'intervalle suivant : $[1,42; 31,14]$
   Cette intervalle contient toutes les valeurs possible de distance. Ainsi 100% des employés ont une distance domiile/travail contenue dans cet intervalle.
   Très souvent l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$ contiendra une grande partie des valeurs.

52 page 306

1. Avec ma calculatrice j'obtiens pour la marque A : $\overline{x} = 2,6$ et $\sigma = 1,6$
   Avec ma calculatrice j'obtiens pour la marque B : $\overline{x} = 3,4$ et $\sigma = 1,9$
2. Avec ma calculatrice j'obtiens pour la marque A : $Q_1 = 1$ $Q_3 = 4$ et $Me = 3$
   Ainsi l'intervalle interquartile vaut 3
   Avec ma calculatrice j'obtiens pour la marque B : $Q_1 = 2$ $Q_3 = 5$ et $Me = 3$
   Ainsi l'intervalle interquartile vaut 3
3. En utilisant les moyennes et écart-type on observe que la marque A tombe en moyenne moins en panne et de façon beaucoup plus régulière (écart-type faible)
   En utilisant les quartiles on aboutit à la même conclusion.
4. Pour calculer le nombre moyen sur l'ensemble :
   On peut entrer dans la calculatrice l'effectif $4 + 2 = 6$ pour la valeur 0 et ainsi de suite.

46 page 304

C Aller plus loin :

Exercice 1 :

1. Prenons une série au hasard : 10,15,17,17,18,20,22,23,24,24,25
   (a) Que se passe-t-il pour la moyenne si toutes les valeurs doublent ? Nous avions observé en classe que la moyenne double. Vous pouvez le vérifier.
   (b) Que se passe-t-il pour l'écart-type si toutes les valeurs doublent ? En faisant le calcul on se rend compte que l'écart-type double aussi.
2. Prenons une série au hasard : 10,15,17,17,18,20,22,23,24,24,25
   (a) Que se passe-t-il pour la moyenne si on ajoute 3 à chaque valeur ?
   On avait observé en classe que la moyenne augmente de 3.
   (b) Que se passe-t-il pour l'écart-type si on ajoute 3 à chaque valeur ?
   ATTENTION : cette fois l'écart-type n'est pas modifié.
3. Prenons une série statistiques A avec 5 valeurs x_1, x_2,... et x_5 ayant chacune pour effectif respectif n_1, n_2,...n_5.
   (a) Soit f la fonction $f(x) = 0,2x$ Prouver que si on applique f à chaque valeur de la série nouvelle moyenne vaudra $f(\overline{x})$ où $\overline{x}$ moyenne de la série A.
   Preuve :
   Avant d'appliquer la fonction nous avons :
   $$\overline{x}_{AVANT} = \frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}}$$
   On applique la fonction f :
   $$\begin{aligned}\overline{x}_{apres} &= \frac{n_1f(x_1) + ... + n_5f(x_5)}{n_{total}} \\ &= \frac{n_12x_1 + ... + n_52x_5}{n_{total}} \\ &= \frac{2(n_1x_1 + ... + n_5x_5)}{n_{total}} \\ &= 2\frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}} \\ &= 2\overline{x}_{Avant} \\ &= f(\overline{x}_{Avant})\end{aligned}$$
   Nous avons bien prouvé ce qui est demandé.

(b) Soit g une fonction affine ($g(x) = mx+p$ avec m et p deux nombres. Prouver que si on applique la fonction g à la série A la nouvelle moyenne vaut $m\overline{x}+p$.

La preuve ressemble à la précédente :

Preuve :

Avant d'appliquer la fonction nous avons :

$$\overline{x}_{AVANT} = \frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}}$$

On applique la fonction g :

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{apres} &= \frac{n_1g(x_1) + ... + n_5g(x_5)}{n_{total}} \\
&= \frac{n_1(mx_1+p) + ... + n_5(mx_5+p)}{n_{total}} \\
&= \frac{m(n_1x_1 + ... + n_5x_5) + (n_1p + ... + n_5p)}{n_{total}} \\
&= m\frac{(n_1x_1 + ... + n_5x_5)}{n_{total}} + p\frac{(n_1 + ... + n_5)}{n_{total}} \\
&= m\overline{x}_{Avant} + p \\
&= g(\overline{x}_{Avant})
\end{aligned}$$

Nous avons bien prouvé ce qui est demandé.

(c) Soit g une fonction affine ($g(x) = mx+p$ avec m et p deux nombres. Que vaut l'écart-type si on applique la fonction g à la série A ?

En utilisant la formule du cours on obtiendra la formule suivante :

$$\sigma_{apres} = m \times \sigma_{avant}$$

Le p n'a pas d'effet sur l'écart-type. En effet on peut ajouter à toutes les valeurs le nombre p, l'écart moyen entre les valeurs n'est pas modifié.