Statistiques Mercredi 18

Une correction sera disponible dans 24h

N'hésitez pas à posez vos questions

Les questions en violet sont à rendre par voie numérique (mail ou casier selon ce qui fonctionne)

Dans ce document nous allons découvrir le dernier outil mathématiques utiles dans le cadre des statistiques : **l'écart-type** noté σ (on prononce cette lettre SIGMA (lien alphabet grec)

A Leçon :

A.1 Leçon en video

Lien de la leçon

A.2 Leçon M. Capietto

Ceci est la fin de la leçon sur les statistiques (polycopié distribué en classe) .

III.2 L'écart type σ

Une poule pond huit œufs. Voici les poids en grammes (g) des œufs :

51g 51g 56g 57g 60g 60g 69g 69g

Définition 1

*La **L'écart-type** σ est un indicateur de dispersion.*
L'écart-type est définie par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n_{total}}}$$

$\overline{x}$ désigne toujours la moyenne, n un effectif et x une valeur.

Ici : $\overline{x} = \frac{2*51+1*56+...+2*69}{8} = 59,125$

$\sigma = \sqrt{\frac{2(51-59,125)^2+1(56-59,125)^2+...+2(69-59,125)^2}{8}} \approx 6,55g$

L'écart-type est d'environ 6,55g.

Interprétation : La poule pond des oeufs qui pèsent en moyenne 59,125 avec un écart-type de 6,55g (donc plus ou moins 6,55g). C'est flou ? c'est normal. Cet outil sert juste à donner un ordre d'idée de l'écart à la moyenne.

Définir l'écart-type avec des mots :

La formule ressemble à une moyenne. C'est la moyenne des écarts au carré à la moyenne. Par exemple l'oeuf de 51g est éloigné de -8,125g par rapport à la moyenne. On met au carré pour ne pas s'embêter avec les signes moins.

En général on l'obtient à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.

A.3 Leçon du livre

Page 292 en entier.

B Exercice

29-30 page 297
Essayer à la main puis avec la calculatrice
29 p 297 Correction

1. A la main :
   (a) On calcule d'abord la moyenne :
   $$\overline{x} = \frac{125+36+...+1}{7} \approx 42,1$$
   (b) On calcule ensuite l'écart-type en utilisant la formule :
   $$\sigma = \sqrt{\frac{(125-\overline{x})^2+(36-\overline{x})^2+...+(1-\overline{x})^2}{7}} \approx 40$$
   A l'aide de la calculatrice on trouve la même chose.
2. De même on calcule d'abord la moyenne :
   $$\overline{x} = \frac{3\times(-5)+4\times(-2)+...+9\times 8)}{3+4+...+9} \approx 2,2$$
   Puis on calcule l'écart-type :
   $$\sigma = \sqrt{\frac{3(-5-\overline{x})^2+4(-2-\overline{x})^2+...+9(8-\overline{x})^2}{3+4+...+9}} \approx 4,2$$

Pas de calculatrice ? En voici une : lien calculatrice
53 page 299 Correction Les trois séries ont la même moyenne 16.
La série la plus éparpillée et la plus loin de la moyenne est celle en orange. Son écart-type est donc le plus grand.
La série la plus proche de la moyenne est la bleu. SOn écart-type est donc le plus petit. 54 page 299

C Aller plus loin :

Exercice 1 :

1. Prenons une série au hasard : 10,15,17,17,18,20,22,23,24,24,25
   (a) Que se passe-t-il pour la moyenne si toutes les valeurs doublent ? Nous avions observé en classe que la moyenne double. Vous pouvez le vérifier.
   (b) Que se passe-t-il pour l'écart-type si toutes les valeurs doublent ? En faisant le calcul on se rend compte que l'écart-type double aussi.
2. Prenons une série au hasard : 10,15,17,17,18,20,22,23,24,24,25
   (a) Que se passe-t-il pour la moyenne si on ajoute 3 à chaque valeur ?
   On avait observé en classe que la moyenne augmente de 3.
   (b) Que se passe-t-il pour l'écart-type si on ajoute 3 à chaque valeur ?
   ATTENTION : cette fois l'écart-type n'est pas modifié.
3. Prenons une série statistiques A avec 5 valeurs x_1, x_2,... et x_5 ayant chacune pour effectif respectif n_1, n_2,...n_5.

(a) Soit f la fonction $f(x) = 0,2x$ Prouver que si on applique f à chaque valeur de la série nouvelle moyenne vaudra $f(\overline{x})$ où $\overline{x}$ moyenne de la série A.

Preuve :

Avant d'appliquer la fonction nous avons :

$$\overline{x}_{AVANT} = \frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}}$$

On applique la fonction f :

$$\begin{aligned}\overline{x}_{apres} &= \frac{n_1f(x_1) + ... + n_5f(x_5)}{n_{total}}\\ &= \frac{n_12x_1 + ... + n_52x_5}{n_{total}}\\ &= \frac{2(n_1x_1 + ... + n_5x_5)}{n_{total}}\\ &= 2\frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}}\\ &= 2\overline{x}_{Avant}\\ &= f(\overline{x}_{Avant})\end{aligned}$$

Nous avons bien prouvé ce qui est demandé.

(b) Soit g une fonction affine ($g(x) = mx+p$ avec m et p deux nombres. Prouver que si on applique la fonction g à la série A la nouvelle moyenne vaut $m\overline{x} + p$.

La preuve ressemble à la précédente :

Preuve :

Avant d'appliquer la fonction nous avons :

$$\overline{x}_{AVANT} = \frac{n_1x_1 + ... + n_5x_5}{n_{total}}$$

On applique la fonction g :

$$\begin{aligned}\overline{x}_{apres} &= \frac{n_1g(x_1) + ... + n_5g(x_5)}{n_{total}}\\ &= \frac{n_1(mx_1 + p) + ... + n_5(mx_5 + p)}{n_{total}}\\ &= \frac{m(n_1x_1 + ... + n_5x_5) + (n_1p + ... + n_5p)}{n_{total}}\\ &= m\frac{(n_1x_1 + ... + n_5x_5)}{n_{total}} + p\frac{(n_1 + ... + n_5)}{n_{total}}\\ &= m\overline{x}_{Avant} + p\\ &= g(\overline{x}_{Avant})\end{aligned}$$

Nous avons bien prouvé ce qui est demandé.

(c) Soit g une fonction affine $(g(x) = mx + p$ avec m et p deux nombres. Que vaut l'écart-type si on applique la fonction g à la série A ?

En utilisant la formule du cours on obtiendra la formule suivante :

$$\sigma_{apres} = m \times \sigma_{avant}$$

Le p n'a pas d'effet sur l'écart-type. En effet on peut ajouter à toutes les valeurs le nombre p, l'écart moyen entre les valeurs n'est pas modifié.