Projektni zadatak iz Uvoda u teoriju upravljanja

Rekonstrukcija modela vođena podacima bazirana na Löwnerovim matricama

Lea Ćatipović i Matea Gregurec

Zagreb, 2024.

Sadržaj

1 Uvod

Rekonstrukcija modela vođena podacima bazirana na Löwnerovim matricama je interpolacijska metoda za redukciju sustava koja se temelji na izračunatim podacima sustava koji promatramo. Korisna je u situacijama kada model nije dostupan, nego su dostupni samo neki ulazni ili izlazni podaci, zbog čega se traži model nižeg reda koji će dati podatke najbliže stvarnima. Budući da model nije poznat, ne kažemo da ova metoda reducira model, nego stvara model nižeg reda. Sama identifikacija sustava podrazumijeva određivanje modela ili njegovih parametara iz izmjerenih vrijednosti, kao i provjeru njihove valjanosti uz greške dobivene statističkom procjenom.
Primjer koji ćemo navesti i rekonstruirati je primjer s učvršćenom gredom.

2 Teorijska analiza

Pretpostavimo da su zadani sljedeći podaci: $(\lambda_i, r_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, i = 1, \dots, k$ i $(\mu_j, l_j, v_j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^m, j = 1, \dots, q$ za koje, jednostavnosti radi, dodatno pretpostavljamo da su $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$ disjunktni. Cilj je pronaći funkciju $\tilde{G}(s) \in \mathbb{C}^{p\times m}$ za koju vrijedi:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\lambda_i) r_i &= w_i, \qquad i = 1, 2, ..., k, \\ l_j^H \tilde{G}(\mu_j) &= v_j^H, \qquad j = 1, 2, ..., q. \end{aligned}$$

Navedene *desne* podatke zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k\times k}, \\ R &:= [r_1 \quad r_2 \dots r_k] \in \mathbb{C}^{m\times k}, \\ W &:= [w_1 \quad w_2 \dots w_k] \in \mathbb{C}^{p\times k}, \end{aligned}$$

a *lijeve* u obliku:

$$\begin{aligned} M &:= \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{C}^{qq}, \\ L^H &:= [l_1 \quad l_2 \dots l_q] \in \mathbb{C}^{p\times q}, \\ V^H &:= [v_1 \quad v_2 \dots v_q] \in \mathbb{C}^{m\times q}. \end{aligned}$$

Konstruiramo *Löewnerovu matricu*

$$\mathbb{L} := \begin{bmatrix} \frac{v_1^H r_1 - l_1^H w_1}{\mu_1 - \lambda_1} & \dots & \frac{v_1^H r_k - l_1^H w_k}{\mu_1 - \lambda_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v_q^H r_1 - l_q^H w_1}{\mu_q - \lambda_1} & \dots & \frac{v_q^H r_k - l_q^H w_k}{\mu_q - \lambda_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q\times k}$$

i *pomaknutu Löewnerovu matricu*

$$\mathbb{L}_\sigma := \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 v_1^H r_1 - l_1^H w_1 \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_1 v_1^H r_k - l_1^H w_k \lambda_k}{\mu_1 - \lambda_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_q v_q^H r_1 - l_q^H w_1 \lambda_1}{\mu_q - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_q v_q^H r_k - l_q^H w_k \lambda_k}{\mu_q - \lambda_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q\times k}$$

Lako se dokaže da vrijede sljedeće dvije *Sylvesterove jednadžbe*:

$$\mathbb{L}\Lambda - M\mathbb{L} = LW - VR \tag{1}$$

$$\mathbb{L}_\sigma\Lambda - M\mathbb{L}_\sigma = LW\Lambda - MVR. \tag{2}$$

Pretpostavimo sada da su podaci dani u obliku sljedećeg linearnog sustava:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Ex(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

s funkcijom transfera $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$. Definiramo *generalizirane tangencijalne matrice upravljivosti i osmotrivosti* redom:

$$\mathcal{C}_k := [(\lambda_1 E - A)^{-1}Br_1 \dots (\lambda_k E - A)^{-1}Br_k] \in \mathbb{C}^{n\times k},$$

$$\mathcal{O}_q := \begin{bmatrix} l_1^H C(\mu_1 E - A)^{-1} \\ \vdots \\ l_q^H C(\mu_q E - A)^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q\times n}$$

Jednostavnim računom može se pokazati da za opće članove gore definiranih *Löewnerovih* matrica vrijede jednakosti

$$[\mathbb{L}]_{ij} = \frac{v_i^H r_j - l_i^H w_j}{\mu_i - \lambda_j} = \dots = -l_i^H C(\mu_i E - A)^{-1}E(\lambda_j E - A)^{-1}Br_j,$$

i

$$[\mathbb{L}_\sigma]_{ij} = \frac{\mu_i v_i^H r_j - \lambda_j l_i^H w_j}{\mu_i - \lambda_j} = \dots = -l_i^H C(\mu_i E - A)^{-1}A(\lambda_j E - A)^{-1}Br_j,$$

a odatle slijedi $\mathbb{L} = -\mathcal{O}_q E\mathcal{C}_k$ i $\mathbb{L}_\sigma = -\mathcal{O}_q A\mathcal{C}_k$.

Teorem 1. *Prepostavimo da su zadani gore definirani podaci* (Λ, R, W) *i* (M, L^H, V^H) *uz* $k = q$. *Neka je pridruženi Löewner pencil* $s\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma$ *regularan (tj.* $det(s\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma)$ *nije nulpolinom) i pretpostavimo da nijedan* $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, k$ *i* $\mu_j, j = 1, 2, \ldots, q$ *nije svojstvena vrijednost od* $s\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma$. *Tada je*

$$\tilde{E} = -\mathbb{L}, \quad \tilde{A} = -\mathbb{L}_\sigma, \quad \tilde{B} = V, \quad \tilde{C} = W$$

realizacija interpolirajućeg sustava, točnije, funkcija $\tilde{G}(s) := \tilde{C}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ *interpolira dane podatke.*

Dokaz. Množeći *Sylvesterovu jednadžbu* 1 sa s i oduzimajući je od 2 dobivamo

$$(\mathbb{L}_\sigma - s\mathbb{L})\Lambda - M(\mathbb{L}_\sigma - s\mathbb{L}) = LW(\Lambda - sI_k) - (M - sI_q)VR. \tag{3}$$

Množeći ovu jednadžbu s e_i zdesna i uvrštavajući $s = \lambda_i$, slijedi

$$(\lambda_i I_q - M)(\mathbb{L}_\sigma - \lambda_i \mathbb{L})e_i = (\lambda_i I_q - M)Vr_i,$$

što je ekivalentno

$$(\mathbb{L}_\sigma - \lambda_i \mathbb{L})e_i = Vr_i$$

i vrijedi

$$w_i = We_i = W(\mathbb{L}_\sigma - \lambda_i \mathbb{L})^{-1}Vr_i.$$

Dakle, dobivamo $w_i = \tilde{G}(\lambda_i)r_i, i = 1, \ldots, k$. Množeći 3 sa e_j^T slijeva i uvrštavajući $s = \mu_j$, slijedi

$$e_j^T(\mathbb{L}_\sigma - \mu_j \mathbb{L})(\Lambda - \mu_j I_k) = e_j^T LW(\Lambda - \mu_j I_k),$$

što je ekivalentno

$$e_j^T(\mathbb{L}_\sigma - \mu_j \mathbb{L}) = l_j^H W.$$

Sada vrijedi

$$v_j^H = e_j^T V = l_j^H W(\mathbb{L}_\sigma - \mu_j \mathbb{L})^{-1}V,$$

što konačno dovodi do $v_j^H = l_j^H \tilde{G}(\mu_j), j = 1, \ldots, q$. □

U praksi je česta situacija u kojoj je zadano previše podataka pa je u tom slučaju *Löwner pencil* $s\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma$ singularna pa funkcija transfera $\tilde{G}(s)$ ne postoji.

Teorem 2. *Neka su zadane vrijednosti* (Λ, R, W), (M, L^H, V^H) *i pripadne Löwnerove matrice. Pretpostavimo da je*

$$rank(\xi\mathbb{L} - \mathbb{L}_\sigma) = rank \begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_\sigma \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_\sigma \end{bmatrix} = r, \quad \forall \xi \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \cup \{\mu_1, \ldots, \mu_q\}.$$

Primjenom SVD-a,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_\sigma \end{bmatrix} = Y\Sigma_l \tilde{X}^H, \qquad \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_\sigma \end{bmatrix} = \tilde{Y}\Sigma_r X^H,$$

pri čemu su $\Sigma_l, \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}, X \in \mathbb{C}^{k\times r}$ *i* $Y \in \mathbb{C}^{q\times r}$. *Ako su* R *i* L^H *obje punog ranga, tada je*

$$\tilde{E} = -Y^H\mathbb{L}X, \quad \tilde{A} = -Y^H\mathbb{L}_\sigma X, \quad \tilde{B} = Y^H V, \quad \tilde{C} = WX$$

realizacija interpolirajućeg sustava, tj. funkcija $\tilde{G}(s) := \tilde{C}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ *interpolira dane podatke.*

Zaključak je da mnoge projekcije vode do iste funkcije transfera. Preciznije, pretpostavimo da su dane matreice $\Phi \in \mathbb{C}^{k\times r}$ i $\Psi \in \mathbb{C}^{q\times r}$ takve da su $X^H\Phi$ i $\Psi^H Y$ nesingularne. Tada model dan s

$$\hat{E} = -\Phi^H\mathbb{L}\Psi, \quad \hat{A} = -\Phi^H\mathbb{L}_\sigma\Psi, \quad \hat{B} = \Psi^H V, \quad \hat{C} = W\Psi$$

ima funkciju transfera $\tilde{G}(s) := \tilde{C}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$ uz notaciju iz prethodnog teorema.

3 Problem učvršćene grede

Cilj redukcije modela je pronaći aproksimaciju sustava nižeg reda koja će i dalje predstavljati ulazne i izlazne podatke. To se može napraviti Löwnerovom metodom interpolacije.
Ovako reduciran model daje nam jednostavniji prikaz problema čime je poboljšano njegovo kontroliranje i analiziranje, ali se neki podaci gube.

3.1 Ilustrativni primjer - *clamped beam*

Pokazat ćemo redukciju modela na sustavu velikog reda (n) koji predstavlja učvršćenu gredu (*clamped beam*), pri čemu nam je cilj koristeći Löwnerove matrice reducirati red sustava n do reda k koji je unaprijed zadan.
Vrijednosti koje koristimo su:

- $n = 348$: red originalnog sustava,
- $N = 60$: frekvencijski odziv sustava,
- $s_i = i\omega, \quad \omega \in [-1, -0.01] \cup [0.01, 1]$: interpolacijske točke,
- $k = 12$: željeni red problema.

Najprije konstruiramo Löwnerovu matricu dimenzija 30×30 kako bismo dobili sustav manjeg reda. Za zadane vrijednosti $\{H(s_i)\}_{i=1}^{60}$ možemo konstruirati dva disjunktna skupa točaka:

- lijevi skup: $s_1, s_2, \ldots, s_{30}$
- desni skup: $s_{31}, s_{32}, \ldots, s_{60}$.

Löwnerove matrice $\mathbb{L}$ i $\mathbb{L}_\sigma$ definirane su na sljedeći način:

$$[\mathbb{L}]_{ij} = \frac{H(s_i) - H(s_{j+30})}{s_i - s_{j+30}} \quad \text{za}\, i, j = 1, 2, \ldots, 30$$

$$[\mathbb{L}_\sigma]_{ij} = \frac{s_i H(s_i) - s_{j+30} H(s_{j+30})}{s_i - s_{j+30}} \quad \text{za}\, i, j = 1, 2, \ldots, 30$$

Sljedeći je korak SVD dekompozicija koju izvršimo nad Löwnerovim matricama $\mathbb{L}$ i $\mathbb{L}_\sigma$.

$$\mathbb{L} = U \Sigma V^T$$

$$\mathbb{L}_\sigma = U'\Sigma' V'^T$$

gdje su U, U', V, i V' ortogonalne matrice i Σ, Σ' dijagonalne matrice koje sadrže singularne vrijednosti.

Zatim radimo projekciju na model reduciranog reda. Budući da je ciljani red sustava $k = 12$, uzimamo prvih 12 singularnih vrijednosti iz SVD dekompozicije i projiciramo početni sustav na potprostor manjeg reda.

Neka su nove matrice:

- U_{12}: prvih 12 stupaca matrice U
- Σ_{12}: prvih 12 dijagonalnih elemenata Σ
- V_{12}: prvih 12 stupaca V

Sada definiramo matrice reduciranog reda:

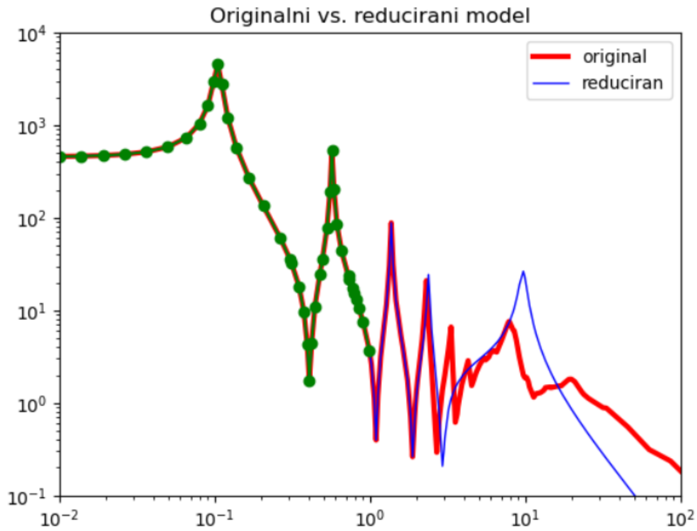
$$Y = U_{12}, \quad X = V_{12}$$

Model reduciranog reda dobijemo projiciranjem sustava na potprostor:

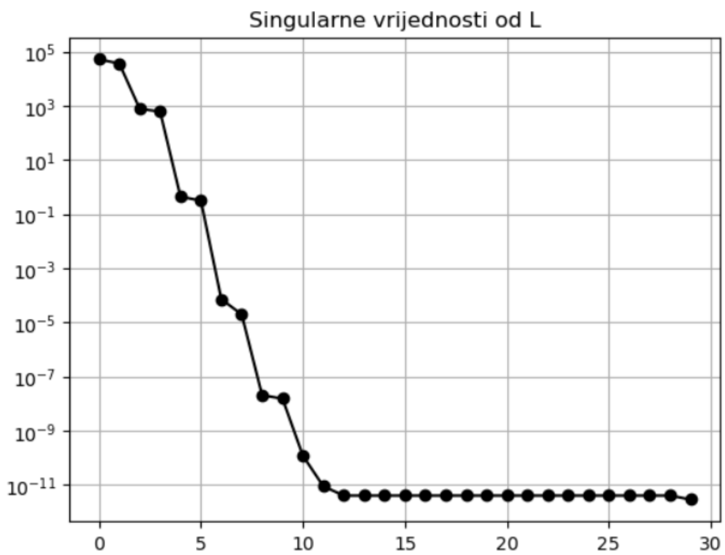
$$A_r = -Y^* L_\sigma X, \quad B_r = Y^* V, \quad C_r = WX, \quad E_r = -Y^* LX$$

gdje je A_r matrica sustava reduciranog reda, B_r je ulazna matrica, a C_r izlazna i matrice A_r, B_r, C_r, E_r nazivamo projiciranim matricama. Slijedi da je to model reduciranog reda sustava za učvršćenu gredu na red $k = 12$.

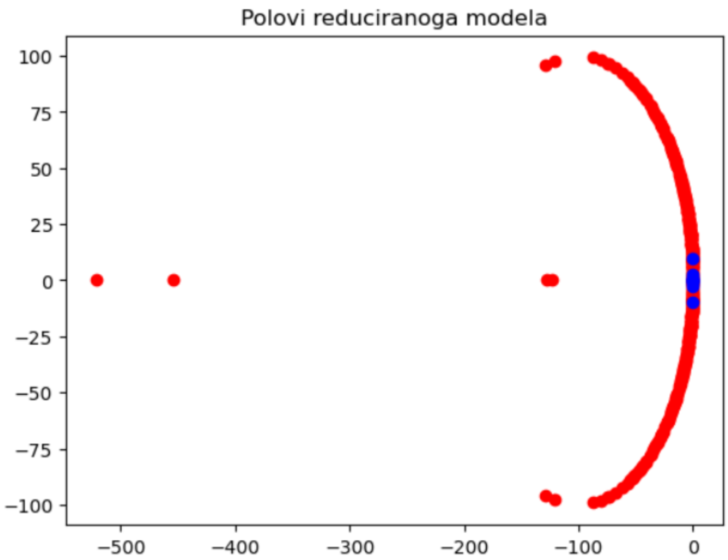
3.2 Implementacija problema u *Pythonu*



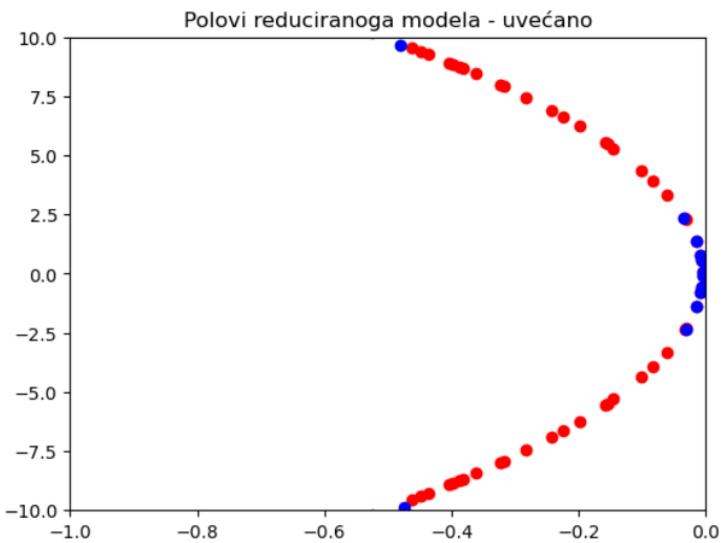
Slika 1: Usporedba originalnog modela s reduciranim



Slika 2: Prikaz singularnih vrijednosti matrice L



Slika 3: Prikaz polova reduciranog modela



Slika 4: Prikaz polova reduciranog modela - uvećano

Literatura

[1] Voight, Matthias. *Lecture notes on "Model Reduction"*. Hamburg University, 2019.

[2] Antoulas, Thanos.*A tutorial introduction to the Löewner framework for model reduction*, workshop slides. Rice University and Jacobs University, 2014.