

Rapport til laboratorium i fysikk

Raskeste vei ned

T. Bognæs, L. Folkestad, E. Strandkleiv

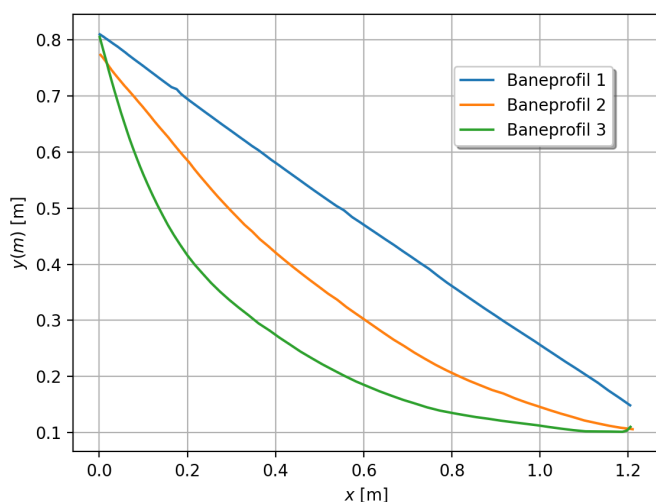
Sammendrag

Hensikten med dette forsøket er å undersøke hvilken av tre forhåndsdefinerte baneprofiler som gir kortest mulig rulletid ned en strekning med et definert start- og sluttunkt. Problemstillingen er en variant av *brakistokronproblemet*, der det antas ren rulling og hvor en neoprenkule ble benyttet. De eksperimentelle dataene viste at den sirkelbuede baneprofilen ga kortest rulletid på $(0.770 \pm 0.006 \text{ s})$. Resultatet ble underbygget av numeriske data der Newtons 2.lov for vårt fysiske system ble løst numerisk ved hjelp av Eulers metode. Det antas at den mest signifikante feilkilden tilknyttet de eksperimentelle resultatene er sluring.

1. Introduksjon

I 1692 formulerte matematikeren Johann Bernoulli *brakistokronproblemet* slik vi kjenner det i dag[1]. Bernoulli lot seg fascinere av hvordan et legeme kan bevege seg fra et punkt A til et lavereliggende punkt B på en raskest mulig måte, kun påvirket av tyngdekraften. Galileo Galilei undersøkte allerede i 1638 et liknende problem. Galilei antydte at den raskeste banen mellom A og B ville være en bratt sirkelbue, uten å kunne bevise påstanden matematisk.

Eksperimentet som er gjennomført, har forsøkt å illustrere ulike måter en kule kan bevege seg fra et punkt til et annet, kun påvirket av tyngdekraften. Ved å sammenlikne rulletider fra ulike baneprofiler i forsøket, vil man få en indikasjon på løsningen av det velkjente problemet.



Figur 1: De faktiske baneprofilene som ble brukt i eksperimentet. Plottet fra målinger i Tracker.

2. Teori

2.1. Kreftene som virker på det fysiske systemet

Den dynamiske ligningen til systemet kan beskrives som

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g \sin(\alpha(x))}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}. \quad (1)$$

Summen av kreftene som virker på systemet kan uttrykkes ved

$$\sum \vec{F} = \vec{G} + \vec{f} \quad (2)$$

der det er sett vekk i fra sentripetalakselerasjonen som virker på kula, slik at kreftene normalt på bevegelsesretningen, jf. figur 2, kansellerer hverandre. Tilpasset bevegelsesretningen til kulen i ethvert punkt i banen, kan vi uttrykke ligningen som

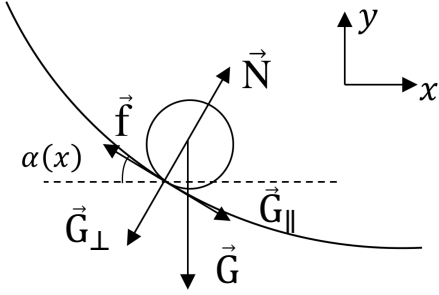
$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha(x) - f \quad (3)$$

Dersom man antar ren rulling vil følgende sammenheng kunne anvendes

$$fr = I \frac{dw}{dt} = I \frac{\frac{dv}{dt}}{r}, \text{ der} \quad (4)$$
$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Her antas det at neoprenkula benyttet i eksperimentet har uniform massetetthet. Setter man nå 4 inn i 3 for f , ender man opp med bevegelsesligningen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}g \sin \alpha(x) \quad (5)$$



Figur 2: Kreftene som virker på neoprenballen på kurven $y(x)$. I hvert punkt x , er helningen på banen definert av vinkelen $\alpha(x)$. Inspirasjon for figuren er hentet fra [3]

2.2. Usikkerhet

Enhver måling av en fysisk størrelse er tilknyttet usikkerhet. Ved å evaluere standardfeilen til en serie av tidsmålinger vil det kunne estimeres et presist anslag av tiden t .

Dette estimatet finnes ved å benytte formelen for \bar{t}

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_i \quad (6)$$

der N er antall tidsmålinger. Videre benytter man formelen for standardavviket

$$\delta t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (7)$$

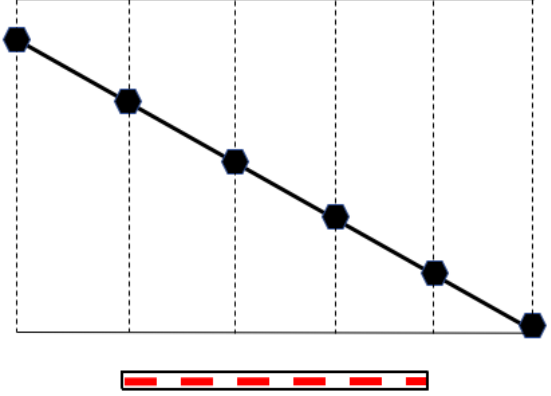
til å finne standardfeilen

$$\delta \bar{t} = \frac{\delta t}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

3. Eksperimentell metode

3.1. Utførelse

Baneprofilene brukt i eksperimentet kan finnes i figur 1. Det ble definert et felles start- og sluttunkt for alle baneprofilene ved hjelp av de justerbare knottene tilknyttet berg- og dalbanen, se figur 3. Et høyhastighetskamera av typen *Panasonic DMC-FZ200* ble satt opp vinkelrett på berg- og dalbanen, hvor innstillingene ble satt til 100 fps. En tynn stållinjal ble benyttet til å holde igjen neoprenkulen ved startpunktet før den ble sluppet ned baneprofilen. Dette ble gjentatt ti ganger for hver baneprofil. Videoene ble importert til programvaresystemet Tracker, der vi definerte referansesystem, størrelsesforhold og tidsreferanse. Videre ble *autotracker* benyttet for å generere data om neoprenkulens posisjon som funksjon av tid ned baneprofilen i det definerte referansesystemet. Intervallet mellom frame for startpunkt og frame for sluttunkt ble benyttet til å notere neoprenkulens eksperimentelle tidsbruk i de ulike baneprofilene. Videre ble det foretatt en usikkerhetsanalyse jf avsnitt 2.3.



Figur 3: Figur av utstyrsoppsett for eksperimentet. Øverste og nederste knott definerer start og sluttunkt. De øvrige knottene ble justert mellom hver baneprofil. Meterstokken ble benyttet som kalibreringsstokk i Tracker.

De genererte dataene om neoprenkulens posisjon som funksjon av tid ble eksportert til programvaresystemet Python og benyttet til numerisk beregning av rulletid.

3.2. Eulers metode

Ligning (1) ble gjort om til et sett av to førsteordens differensialligninger som ble løst numerisk ved hjelp av Eulers metode.

Eulers metode er en førsteordens numerisk metode som benyttes til å løse ordinære differensiallikninger med en gitt initialverdi. Intervallet man ønsker å approksimere en løsning på blir delt inn i mindre steg av lengde h . Ved å benytte initialverdien som startpunkt kan så de resterende punktene finnes iterativt vha. formelen for Eulers metode. [2].

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \quad (9)$$

der $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$ og h er steglengden.

I beregningene er steglengde $h = 0.001$ og initialverdier $x(0) = v(0) = 0$ benyttet. Metoden ble benyttet i eksperimentet til å reprodusere baneprofilene og dermed kunne numerisk beregne neoprenkulens totale tidsbruk.

For vårt fysiske system med tilhørende antagelser ga dette

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ v_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_n \cos \alpha(x) \\ \frac{5}{7}g \sin \alpha(x) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

der h er steglengden og $\alpha(x)$ er banevinkelen i forhold til horisontalen med hensyn til posisjon.

4. Resultater

De numeriske resultatene er beregnet ved hjelp av Eulers metode, der vinkelen α er hentet fra polynominterpolasjon av rådataene i Python. Både de eksperimentelle resultatene av rulletid og resultatene fra den numeriske analysen er

gitt i tabell 1. De eksperimentelle verdiene er angitt med standardfeil. Posisjonsgrafen i figur 4 illustrerer forskjellene i forflytning i x-retning som funksjon av tiden. Fra denne grafen er det tydelig at baneprofil 3 når enden av banen først, selv om den forflytter seg minst i x-retning de første tidelssekundene. Dette stemmer overens med figur 5 som viser den eksperimentelle posisjonen til neoprenkulen. Resultatet kommer av at baneprofil 3 har den største gjennomsnittsfarten, noe som kommer frem av figur 6. Som forventet ser man også av figur 6 at baneprofil 1 har konstant akselerasjon og lineær fart. Baneprofil 2 forflytter seg lengst i x-retning de første tidelssekundene, men blir tatt igjen av baneprofil 3 etter omtrent 0.4 sekunder, jf. figur 4. Dette kommer som en konsekvens av en mer moderat akselerasjon i startfasen, jf. figur 6. I figur 8 og figur 9 illustreres henholdsvis normalkraften og friksjonskraften som virker på neoprenkulen på hvert punkt i banen for de tre baneprofilene.

Tabell 1: Eksperimentelle resultater av banetid med utregnet standardfeil og numerisk differanse mellom dem. Baneprofiler korresponderer med profiler i figur 1.

Baneprofil	Datakilde	$t[s]$
Baneprofil 1	Eksperimentell verdi	0.943 ± 0.006
	Numerisk beregnet	0.90
	Differanse	0.05
Baneprofil 2	Eksperimentell verdi	0.820 ± 0.008
	Numerisk beregnet	0.78
	Differanse	0.04
Baneprofil 3	Eksperimentell verdi	0.770 ± 0.006
	Numerisk beregnet	0.74
	Differanse	0.03

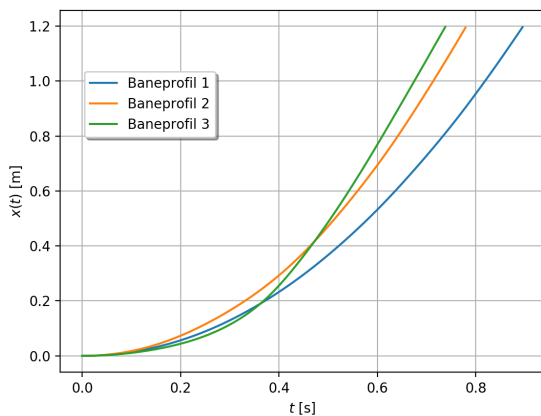


Figure 4: Numerisk posisjonsgraf som viser posisjon til neoprenkulen som funksjon av tiden.

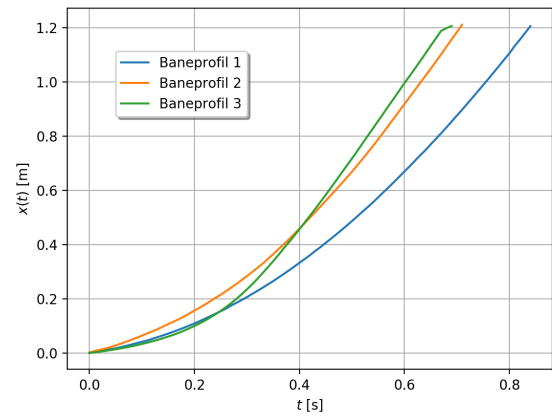


Figure 5: Eksperimentell posisjonsgraf som viser posisjon til neoprenkulen som funksjon av tiden.

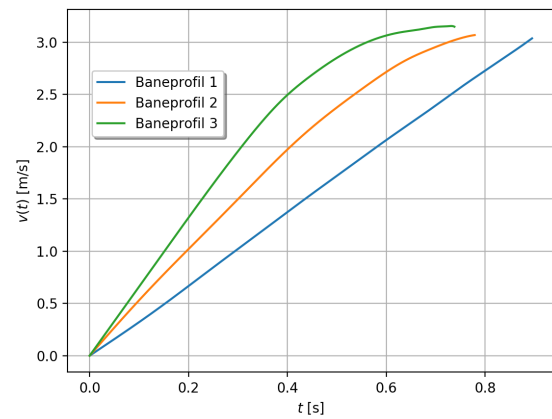


Figure 6: Numerisk fartsgraf som viser hastigheten til neoprenkulen som funksjon av tiden.

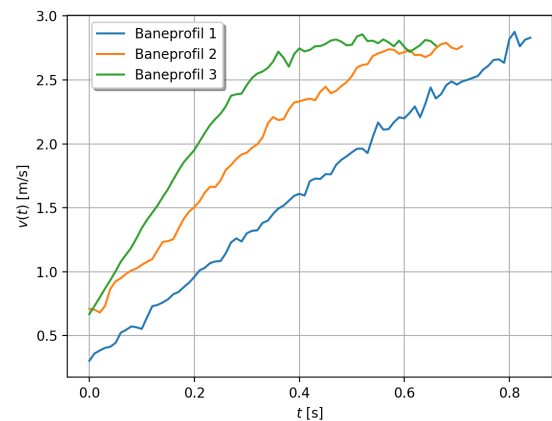
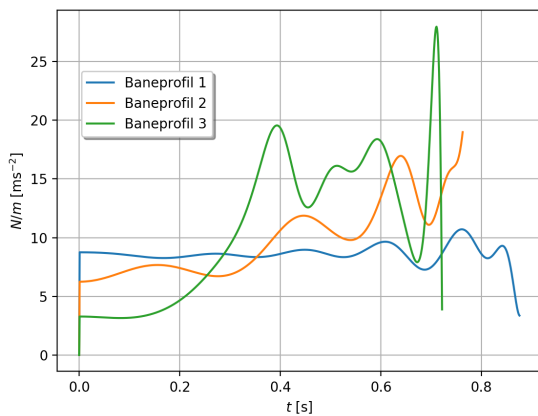
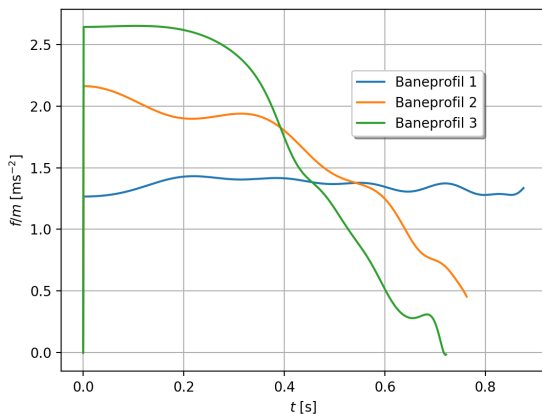


Figure 7: Eksperimentell fartsgraf som viser hastigheten til neoprenkulen som funksjon av tiden.



Figur 8: Graf som viser normalkraften fra numeriske beregninger.



Figur 9: Graf som viser friksjonskraften fra numeriske beregninger.

5. Diskusjon

Resultatene i [tabell 1](#) viser at de numeriske beregningene og de eksperimentelle beregningene samsvarer med tanke på rekkefølgen av baneprofilenes rulletider. Videre viser begge beregningene at baneprofil 3 er den raskeste baneprofilen. Dette er i tråd med intuisjonen som tilsier at høyere akselerasjon i starten av et intervall fører deg raskere frem. Av [figur 1](#) ser vi tydelig at baneprofil 3 har størst vertikal fallhøyde, noe som gir høy akselerasjon tidlig i banebevegelsen. Resultatene viser at de numeriske beregningene angir lavere rulletider enn de eksperimentelle beregningene. Dette er rimelig ettersom det blir sett vekk i fra fenomener som luftmotstand og starthastighet ved numeriske beregninger. Likevel inneholder de eksperimentelle resultatene en viss grad av sluring, der de numeriske beregningene antar ren rulling. Dette vil veie opp mot differansen mellom resultatene, ettersom sluring får eksperimentet til å gå raskere enn numerikken. Dette er tilfeldige feilkilder

som vil ha minimal individuell påvirkning for resultatet, men som totalt sett kan utgjøre forskjellene observert i [tabell 1](#). Av disse fenomenene anses sluring som den mest utslagsgivende tilfeldige feilkilden med hensyn på usikkerhetsanalysen, ettersom luftmotstanden er neglisjerbar ved lav hastighet.

Starthastigheten til kulen er en potensiell tilfeldig feilkilde med opphav i selve eksperimentutførelsen. Starthastigheten skal ideelt sett være null, men kraften som virket fra linjalen på neoprenkulen i det linjalen ble fjernet ga opphav til en starthastighet for neoprenkulen i motsatt bevegelsesretning. Dette kunne ikke observeres under utførelsen, men ble tydelig under observasjon i Tracker. Resultatmessig medførte dette at neoprenkulen ved starten av målingene hadde en minimal starthastighet i positiv bevegelsesretning, noe som kan tenkes å ha ledet til en for rask rulletid. Dessuten introduserte helningen i baneprofil 2, og særlig helningen i baneprofil 3, sluring som en signifikant tilfeldig feilkilde. Enhver forekomst av sluring vil bryte med de matematiske beregningene der det antas ren rulling.

En systematisk feilkilde for eksperimentet kan finnes i perspektivfeilen som oppstår i Tracker ettersom kalibreringsstokken ligger fysisk i forkant av kulebevegelsen, se [figur 3](#). Kameralinsen vil ha problemer med å oppfatte denne dybdeforskjellen, noe som skaper usikkerhet i avstandsmålingene for referansesystemet. Dette vil være en feilkilde som gir utslag både for de eksperimentelle resultatene og de numeriske beregningene, ettersom usikkerhet i avstand forplanter seg videre til usikkerhet i de registrerte dataene som eksperimentet bygger på. Det er i eksperimentet sett bort fra rullemotstand, noe som vil introdusere en systematisk feilkilde. Antakelsen om uniform massetetthet for neoprenkula gir også opphav til en systematisk feilkilde, det samme gjør ujevnheter i overflaten til neoprenkulen og baneunderlaget. Sistnevnte kan forklare variasjonene vi observerer i fartsmålingene i [figur 7](#). Ujevnheter i overflaten til både neoprenkulen og baneunderlaget kan også forklare variasjonene for normalkraften, observert i [figur 8](#). De store variasjonene i normalkraften observert i baneprofil 2 og 3 mot slutten av bevegelsen, kan skyldes at kulen mister kontakten med underlaget ved et punkt i banen.

Som det observeres i både [figur 8](#) og [figur 9](#) starter alle baneprofilene på 0, noe som skyldes at både normalkreftene og friksjonskreftene initialiseres til 0 i Eulers metode. Friksjonskraften avhenger av akselerasjonen, noe man kan observere når man sammenligner [figur 9](#) og [figur 6](#). Baneprofil 3 har høy akselerasjon i startfasen, og dermed også stor friksjonskraft. Videre observeres det at den tilnærmede konstante akselerasjonen til baneprofil 1 svarer til en tilnærmet konstant friksjonskraft i [figur 9](#).

6. Konklusjon

Eksperimentet tok for seg tre forhåndsdefinerte baneprofiler og undersøkte hvilken av de som ga kortest rulletid for en neoprenkule. Resultatene fra det eksperimentelle forsøket, underbygd av numeriske beregninger, viste at at

den sirkelformede banen, referert til som baneprofil 3, var den raskeste med en rulletid på $(0.770 \pm 0.006 \text{ s})$. Usikkerhetsanalysen avdekket flere potensielle feilkilder og deres påvirkning på resultatet, der sluring ble ansett for å være den mest signifikante påvirkningsfaktoren. De eksperimentelle resultatene korrelerer i stor grad med de numeriske beregningene, som vist i [tabell 1](#). Det antydes følgelig at løsningen på *brakistokronproblemet* er en sirkelformet baneprofil.

[1] Brakistokronproblemet. No.wikipedia.org. Hentet 15 mars 2018, fra <https://no.wikipedia.org/wiki/Brakistokronproblemet>

[2] Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition. John Wiley & Sons.

[3] Roller Coaster. (2018). Jupyter Numfys nbviewer. Hentet 17 mars 2018, fra <https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/rollercoaster.ipynb>