MECA512: Cinématique

Cinématique des solides indéformables

MECA3-FISA

Ludovic Charleux
ludovic.charleux@univ-smb.fr
Polytech Annecy Chambéry

Plan du cours

1 Cours

To do: MAJ du cours

2 Exercices

2.a Système à cames

Note: Existe en version QCM dans l'examen de MECA591 2022-2023

2.a.a Enoncé

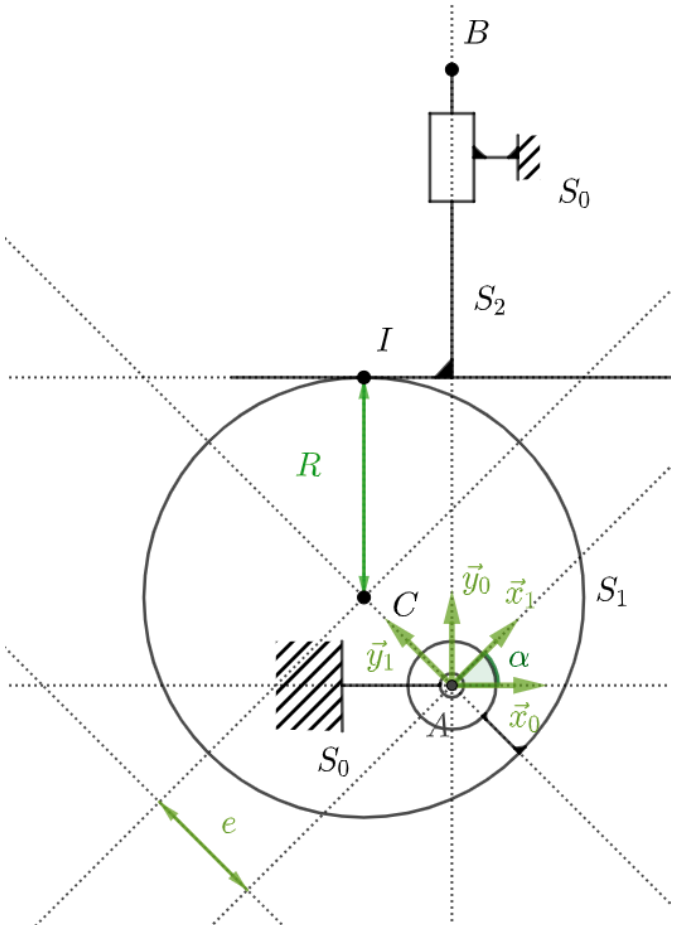


Figure 1: Système à cames.

On s'intéresse maintenant à la cinématique d'un système à came utilisé pour la distribution dans moteur à explosion. Il est constitué de 3 solides:

- Le solide (S_0) qui joue le rôle de bâti. On lui associe le repère $\mathfrak{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Le solide (S_1) qui représente l'arbre à came. Il est supposé être un disque de centre C, de rayon R, d'épaisseur h, de masse volumique ρ et de masse m_1. Il est en pivot avec (S_0) par rapport à l'axe $(A, \vec{z}_0)$. La distance $AC = e$ est l'excentricité de la came, elle conditionne l'amplitude du mouvement que le système produit. On lui associe le repère $\mathfrak{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.
- Et enfin le solide (S_2) qui représente la soupape. Le solide (S_2) est en liaison ponctuelle avec le solide (S_1) en I. Cette dernière est supposée parfaite et donc sans frottement. En pratique, cette liaison est lubrifiée en permanence pour assurer le fonctionnement du moteur. On suppose qu'il existe un dispositif qui plaque les deux solides l'un sur l'autre de sorte que cette liaison reste active. Cette fonction est généralement assuré par un ressort. Enfin, le solide (S_2) est en liaison glissière d'axe $\vec{y}_0$ par rapport à (S_0). On lui associe le repère $\mathfrak{R}_2 = (B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On note α l'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. La vitesse de rotation de (S_1) par rapport à (S_0) est $\Omega(1/0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$.

2.a.b Questions

1. Quelle est la vitesse du point C appartenant à (S_1) par rapport à (S_0) notée $\vec{V}(C \in 1/0)$?
2. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{AI}$ du point I par rapport à $\mathfrak{R}_0$.
3. Calculer la vitesse du point $I \in 1$ par rapport à (S_0) par dérivation du vecteur position.
4. Calculer la vitesse du point $I \in 1$ par rapport à (S_0) par en utilisant la règle de Varignon. Que pensez vous de ce résultat par rapport à celui de la question précédente ?
5. Quelle est la vitesse du point B appartenant à (S_2) par rapport à (S_0) notée $\vec{V}(B \in 2/0)$?

2.b Train d'engrenages

Note: Existe en version QCM dans l'examen de MECA591 2021-2022

2.b.a Enoncé

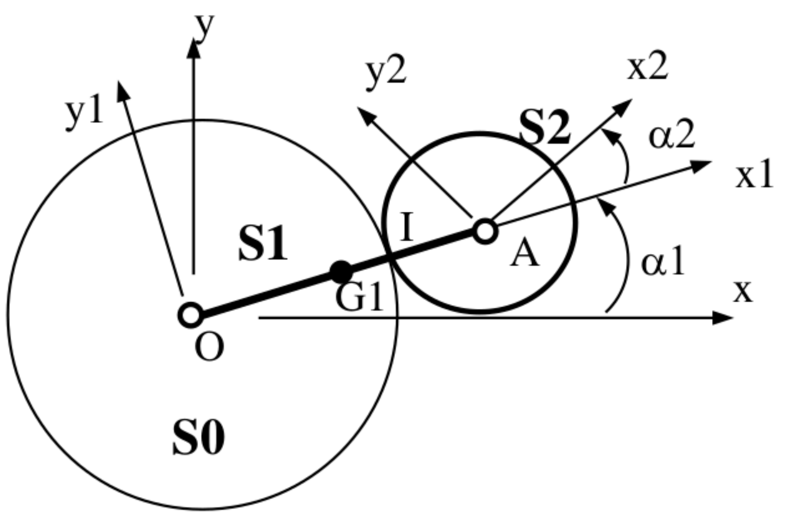


Figure 2: Train d'engrenages.

Important: $\vec{x}_0$ est noté $\vec{x}$ et $\vec{y}_0$ est noté $\vec{y}$ sur le schéma.

On s'intéresse au système représenté ci-dessus pour lequel on vous fournit les données suivantes:

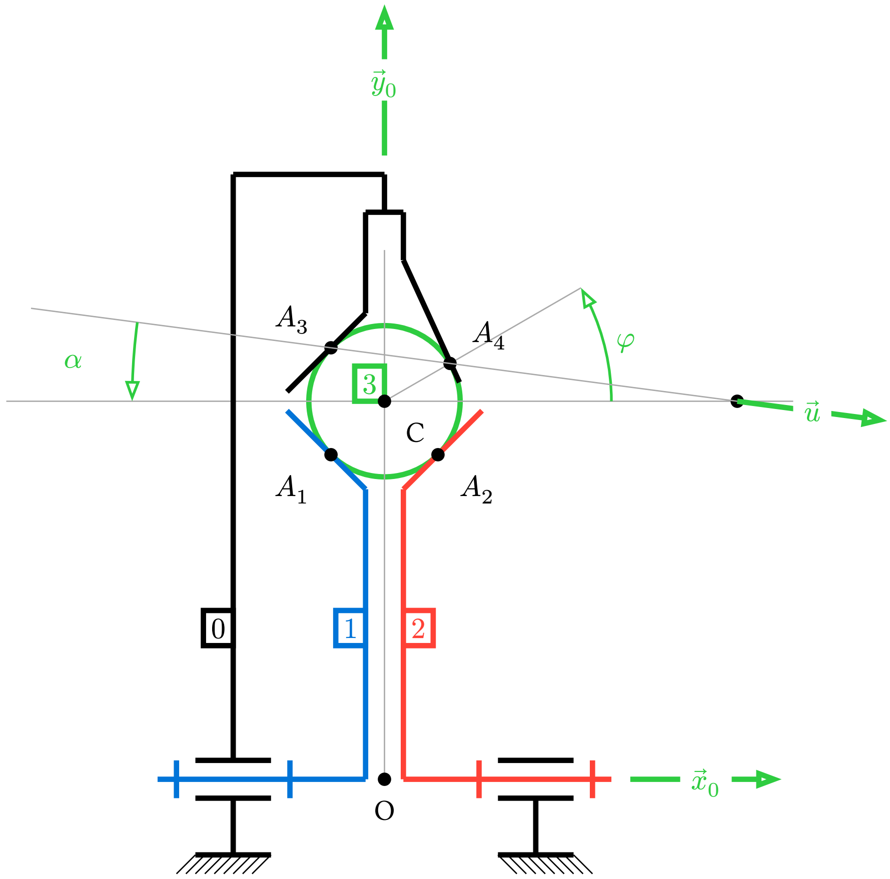
- Soit $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe lie a un disque S_0 fixe de rayon $2R$ et de centre O.
- Un solide S_1 assimilable à une tige $(OA = 3R)$, de masse m est animé d'un mouvement de rotation autour du point O.
- Un disque S_2 de rayon R, de masse m est articulé à S_1 au point A.
- Le repère $\mathfrak{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est un repère lie à S_1.
- Le repère $\mathfrak{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est un repère lie à S_2.
- α_1 est l'angle $(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.
- α_2 est l'angle $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.
- I est le point de contact entre S et S_2.

2.b.b Questions

1. Quelle est la vitesse $\vec{\Omega}(2/1)$?
2. Quelle est la vitesse $\vec{\Omega}(2/0)$?
3. Quelle est la vitesse du point A appartenant à S_1 par rapport à $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{V}(A \in 1/0)$?
4. Quelle est la vitesse du point I appartenant à S_2 par rapport à $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{V}(I \in 2/0)$?
5. Quelle est l'accélération du point G_1 appartenant à S_1 par rapport à $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{A}(G_1 \in 1/0)$?
6. Quelle est la relation entre $\dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$ pour que le roulement entre S_2 et S_0 en I soit sans glissement.

2.c Réducteur à billes

Note: Cet exercice est inspiré de [1] P. Agati, Y. Brémont, and G. Delville, "Mécanique du solide: applications industrielles, seconde édition," *Sciences sup. Dunod*, 2020. page 91.



On s'intéresse au réducteur à bille représenté ci-dessus pour lequel on vous fournit les données suivantes:

- Soit $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe lié au bâti S_0 considéré comme fixe.
- Un arbre moteur S_1 assimilable tourne à une vitesse $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1 \vec{x}_0$.
- Un arbre de sortie S_2 assimilable à un disque de rayon R tourne à une vitesse $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2 \vec{x}_0$.
- Une bille de centre C qui roule sans glisser en A_1, A_2, A_3 et A_4.
- On note $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = r\vec{y}_0$.
- Les angles $\left(\vec{y}_0, \overrightarrow{\mathrm{CA}}_3\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}_1, -\vec{y}_0\right) = \left(-\vec{y}_0, \overrightarrow{\mathrm{CA}}_2\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(\vec{x}_0, \overrightarrow{\mathrm{CA}}_4\right) = \varphi = \frac{\pi}{6}$ et enfin on note $(\vec{x}_0, \vec{u}) = \alpha$.

2.c.a Questions

1. Montrer que la bille est en rotation autout de l'axe (A_3, A_4) dans son mouvement par rapport à (S_0).
2. On pose $\vec{\Omega}(3/0) = \omega_3 \vec{u}$. Calculer les vitesses $\vec{V}(A_1 \in 3/0)$ et $\vec{V}(A_2 \in 3/0)$.
3. En déduire le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Faire une application numérique.

2.d Transformation de mouvement par galet

Note: Cet exercice vient du CC2 de MECA591 pour l'année 2023-2024. Les questions sont formulées comme elles l'étaient dans l'examen.

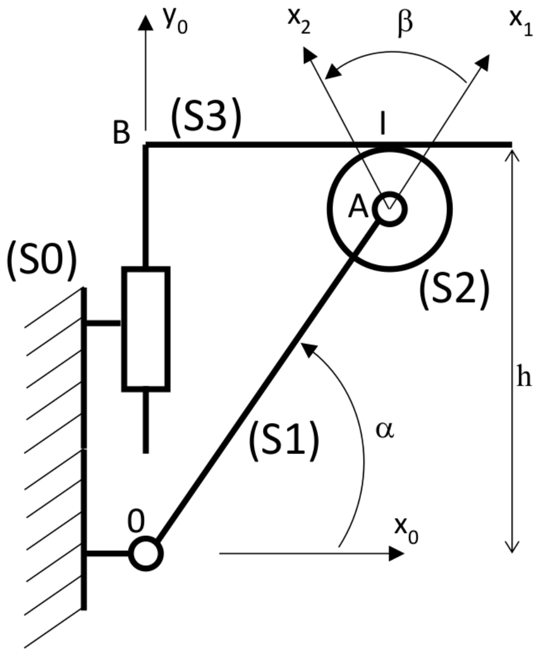


Figure 3: Transformation de mouvement par galet .

Le mécanisme schématisé ci-contre est constitué:

- d'un bâti (S_0) auquel est lié le repère $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- d'un bras (S_1) en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti. Le repère $\mathfrak{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au solide (S_1). La rotation de (S_1) par rapport à (S_0) est paramétrée par l'angle α. On note $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a\vec{x}_1$.
- d'un galet cylindrique (S_2) de rayon r, en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le bras (S_1). Le repère $\mathfrak{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est lié au solide (S_2). La rotation de (S_2) par rapport à (S_1) est paramétrée par l'angle β.
- d'une plate-forme (S3) en liaison glissière $(O, \vec{y}_0)$ avec le bâti (S_0). On note $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = h\vec{y}_0$ avec h variable. Enfin, I est le point de contact entre (S_2) et (S_3).

2.d.a Questions

1. Exprimer la vitesse de rotation entre (S_1) et (S_0) notée $\vec{\Omega}(1/0)$
2. Exprimer la vitesse de rotation entre (S_2) et (S_0) notée $\vec{\Omega}(2/0)$.
3. Exprimer la vitesse de rotation entre (S_3) et (S_0) notée $\vec{\Omega}(3/0)$.
4. Déterminer la vitesse du point I appartenant à (S_3) par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{V}(I \in 3/0)$.
5. Déterminer l'accélération du point I appartenant à (S_3) par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{A}(I \in 3/0)$.
6. Déterminer la vitesse du point A appartenant à (S_1) par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{V}(A \in 1/0)$.
7. Déterminer l'accélération du point A appartenant à (S_1) par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{A}(A \in 1/0)$.
8. Déterminer la vitesse du point I appartenant à (S_2) par rapport au repère $\mathfrak{R}_0$ notée $\vec{V}\left(I \in \frac{2}{0}\right)$.
9. En déduire la vitesse du point I appartenant à (S_3) par rapport à (S_2) notée $\vec{V}\left(I \in \frac{3}{2}\right)$.
10. On suppose maintenant que le galet (S_2) roule sans glisser sur la plate-forme (S_3). Quelle est l'équation qui en découle ?
11. Déduisez en l'expression de $\dot{\beta}$ en fonction de a, r, α et $\dot{\alpha}$
12. Déduisez en l'expression de $\dot{h}$ en fonction de a, α et $\dot{\alpha}$.

2.e Réducteur Graham

Note: Cet exercice est inspiré de [1] P. Agati, Y. Brémont, and G. Delville, "Mécanique du solide: applications industrielles, seconde édition," *Sciences sup. Dunod*, 2020. page 92.

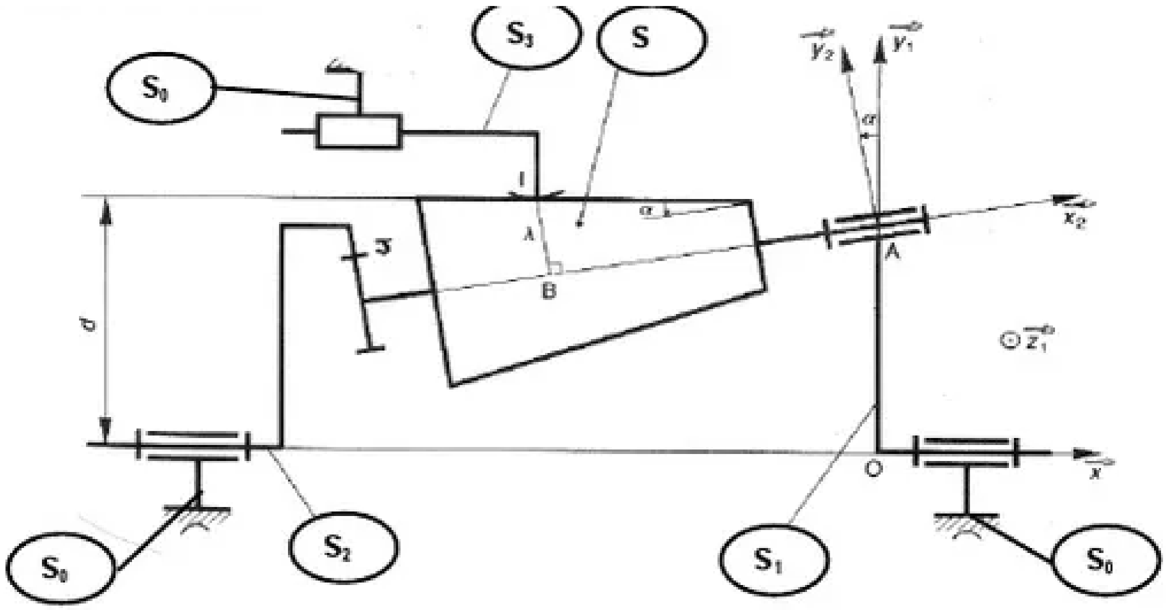


Figure 4: Réducteur Graham.

Soit le réducteur de vitesse schématisé ci-dessus pour lequel on vous fournit les données suivantes:

- Soit $\mathfrak{R}_1 = (O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathfrak{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ deux repères liés au solide S_1 tels quel $\overrightarrow{OA}$ ait même direction et sens que $\vec{y}_1$.
- On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ constant.
- On pose $\vec{\Omega}(S/S_1) = \omega \vec{x}_2$.
- A l'extrémité de (S) est fixée une roue dentée de n dents qui engrenne avec une roue dentée de n_2 dents fixée à l'extrémité de (S_2).

2.e.a Questions

1. Exprimer le roulement sans glissement de (S) sur (S_3) aun point I et déterminer ω en fonction de ω_1.
2. Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_2 et ω en utilisant la relation de roulement sans glissement entre les roues dentées ?
3. En déduire le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de λ.
4. Tacer la courbe du rapport de variation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de λ sachant que $n/n_2 = 11/38$, d = 55 mm et que λ varie entre 12 mm et 23 mm.

2.f Bille sur plateau tournant

2.f.a Enoncé

On considère un repère $\mathfrak{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à un solide S_0 considéré comme fixe et galiléen. Un repère $\mathfrak{R}_1 = (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est associé à un plateau S_1 de rayon R en rotation uniforme autour de l'axe vertical $(O_0, \vec{z}_0)$ par rapport à S_0 à une vitesse $\vec{\Omega}(1/0) = \omega \vec{z}_0$. À l'instant initial $t = 0\,\text{s}$, les deux repères sont confondus. On ajoute au problème une bille S_3 considérée comme ponctuelle située au point A qui glisse sans frottement sur le plateau S_1. À $t = 0\,\text{s}$, la bille est placée de sorte que $\overrightarrow{O_0A} = R\vec{x}_0$ avec une vitesse $\vec{V}(A \in 3/0, t = 0\,\text{s}) = -v_0 \vec{x}_0$. On considère uniquement le cas de la billes qui reste sur le plateau.

2.f.b Questions

1. Faire un schéma du système en indiquant les repères et les vecteurs vitesse.
2. Exprimer la vitesse de la bille A par rapport à S_0 notée $\vec{V}(A \in 3/0)$ à chaque instant.
3. Exprimer l'accélération de la bille A par rapport à S_0 notée $\vec{A}(A \in 3/0)$ à chaque instant.
4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_0A}$ en fonction du temps, en déduire la nature de la trajectoire de A dans S_0.
5. Quelle est la trajectoire du point A dans S_1 ?
6. Exprimer la vitesse de la bille A par rapport à S_1 notée $\vec{V}(A \in 3/1)$ à chaque instant.

7. Exprimer l'accélération de la bille A par rapport à S_1 notée $\vec{A}(A \in 3/1)$ à chaque instant.
8. Comment expliquez vous que les deux trajetoires soient différentes ?
9. Quelles applications voyez vous à ce résultat ?

3 Références

[1] P. Agati, Y. Brémont, and G. Delville, "Mécanique du solide: applications industrielles, seconde édition," *Sciences sup. Dunod*, 2020.