

# Oscillateurs

L. Charleux

## Introduction

Ce document rassemble quelques idées sur les oscillateurs non linéaires destinés à récupérer de l'énergie vibratoire. Le code Python associé est disponible sous GitHub ici : <https://github.com/lcharleux/oscillators>. Pour le moment, il est public et libre ce qui facilite nos discussions mais je peux le rendre privé.

## 1 Formulation du problème

On considère l'oscillateur représenté sur la figure 1. Celui-ci est non linéaire du fait de la raideur variable  $k(x)$ . Pour simplifier la construction de cette raideur nous choisissons de raisonner en terme d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$ . La force appliquée par la raideur sur la masse mobile est alors  $F_k(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x)$ . Le problème prend la forme suivant :

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \quad (1)$$

On réduit le problème en introduisant :

- L'amortissement massique  $a = \mu/m$ .
- L'énergie potentielle massique  $e_p(x) = \mathcal{E}_p(x)/m$

Le problème prend alors la forme suivante :

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - \frac{de_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \quad (2)$$

Enfin, on peut reformuler l'équation scalaire du second ordre en une équation vectorielle du premier ordre comme suit. On pose :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -a\dot{x} - \frac{de_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \end{bmatrix}$$

Cette formulation est nécessaire car utilisée par les solveurs dédiés aux équations différentielles.

## 2 Performance énergétique du système

L'énergie massique  $e$  de l'oscillateur à un instant donné est la somme de l'énergie potentielle massique  $e_p$  et de l'énergie cinétique massique  $e_v = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ . Dans ce qui suite on s'intéresse à un régime établi au sens énergétique, c'est-à-dire :

$$\frac{de}{dt} = 0 \quad (3)$$

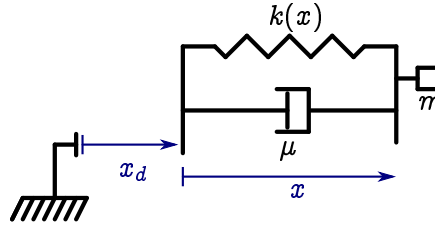


Figure 1 – Modélisation de l'oscillateur non linéaire utilisé : une masse  $m$  est excitée par un déplacement  $x_d$  au travers d'une raideur variable  $k(x)$  et d'un amortissement fixe  $\mu$ .

Dans ce cas, il y a égalité entre l'énergie prélevée par le système et celle qu'il perd au travers de l'amortissement<sup>1</sup>. On peut donc caractériser la performance du système par la puissance massique moyenne consommée par l'amortissement  $\bar{p}_a$  :

$$\bar{p}_a = \frac{a}{T} \int_0^T \dot{x}^2 dt \quad (4)$$

### 3 Oscillateur linéaire

L'oscillateur linéaire a valeur d'élément de comparaison. Il est un cas particulier du problème considéré car :

$$e_p = \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \quad (5)$$

Le problème se ramène alors à résoudre :

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - \omega_0^2 x - \ddot{x}_d \quad (6)$$

#### 3.1 Régime établi avec excitation sinusoïdale

On suppose que :

$$x_d(t) = A_d \sin(\omega_d t)$$

La solution du problème est :

$$x(t) = A \sin(\omega_d t + \phi) \quad (7)$$

Avec :

$$A = A_d \frac{\omega_d^2}{\sqrt{\omega_d^2 a^2 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)^2}} \quad (8)$$

Et :

$$\phi = \arctan \left( \frac{a\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \right) \quad (9)$$

La puissance massique moyenne en régime établi est donc :

$$\bar{p}_a = \frac{a\omega_d^2 A^2}{2} = \frac{aA_d^2 \omega_d^6}{2 \left( a^2 \omega_d^2 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 \right)} \quad (10)$$

On va s'intéresser au cas où l'accélération  $\ddot{x}_d$  est une constante, on pose donc  $A_d = C_d/\omega_d^2$ , on a alors :

1. qui représente à la fois l'amortissement physique réel du système et l'amortissement induit par la charge du générateur.

$$\bar{p}_a = \frac{aC_d^2\omega_d^2}{2\left(a^2\omega_d^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2\right)} \quad (11)$$

Les performances du système pour une accélération d'excitation constante alors données par :

$$\frac{\bar{p}_a}{C_d^2} = \frac{a\omega_d^2}{2\left(a^2\omega_d^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2\right)} \quad (12)$$