Oscillateurs

L. Charleux

Introduction

Ce document rassemble quelques idées sur les oscillateurs non linéaires destinés à récupérer de l'énergie vibratoire. Le code Python associé est disponible sous GitHub ici : `https://github.com/lcharleux/oscillators`. Pour le moment, il est public et libre ce qui facilite nos discussions mais je peux le rendre privé.

1 Formulation du problème

On considère l'oscillateur représenté sur la figure 1. Celui-ci est non linéaire du fait de la raideur variable $k(x)$. Pour simplifier la construction de cette raideur nous choisissons de raisonner en terme d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$. La force appliquée par la raideur sur la masse mobile est alors $F_k(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}(x)$. Le problème prend la forme suivant :

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \quad (1)$$

On réduit le problème en introduisant :
- L'amortissement massique $a = \mu/m$.
- L'énergie potentielle massique $e_p(x) = \mathcal{E}_p(x)/m$

Le problème prend alors la forme suivante :

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - \frac{de_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \quad (2)$$

Enfin, on peut reformuler l'équation scalaire du second ordre en une équation vectorielle du premier ordre comme suit. On pose :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -a\dot{x} - \frac{de_p}{dx}(x) - \ddot{x}_d \end{bmatrix}$$

Cette formulation est nécessaire car utilisée par les solveurs dédiés aux équations différentielles.

2 Performance énergétique du système

2.1 Bilan énergétique

Les différentes énergies massiques mises en jeu sont les suivantes :
- L'énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{x}_d)^2$.
- L'énergie potentielle $e_p(x)$.
- L'énergie mécanique de l'oscillateur $e = e_c + e_p$

Les puissances utilisées dans la suite :

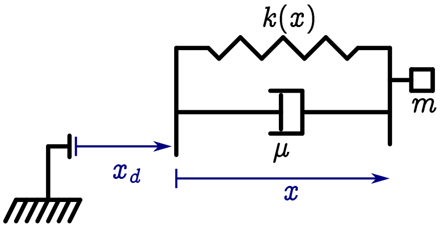

Figure 1 – Modélisation de l'oscillateur non linéaire utilisé : une masse m est excitée par un déplacement x_d au travers d'une raideur variable $k(x)$ et d'un amortissement fixe μ.

- Puissance extraite de l'oscillateur au travers de l'amortissement $p_a = a\dot{x}^2$

Dans ce qui suite on s'intéresse à un régime établi au sens énergétique, c'est-à-dire :

$$\frac{de}{dt} = 0 \tag{3}$$

Dans ce cas, il a égalité entre l'énergie prélevée par le système et celle qu'il perd au travers de l'amortissement [1]. On peut donc caractériser la performance du système par la puissance massique moyenne consommée par l'amortissement $\bar{p}_a$:

$$\bar{p}_a = \frac{a}{T}\int_0^T \dot{x}^2 dt \tag{4}$$

3 Oscillateur linéaire

L'oscillateur linéaire a valeur d'élément de comparaison. Il est un cas particulier du problème considéré car :

$$e_p = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 \tag{5}$$

Le problème se ramène alors à résoudre :

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - \omega_0^2 x - \ddot{x}_d \tag{6}$$

3.1 Régime établie avec excitation sinusoïdale

On suppose que :

$$x_d(t) = A_d \sin(\omega_d t)$$

La solution du problème est :

$$x(t) = A\sin(\omega_d t + \phi) \tag{7}$$

Avec :

$$A = A_d \frac{\omega_d^2}{\sqrt{\omega_d^2 a^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2}} \tag{8}$$

Et :

$$\phi = \arctan\left(\frac{a\omega_d}{\omega_d^2 - \omega_0^2}\right) \tag{9}$$

La puissance massique moyenne en régime établi est donc :

1. qui représente à la fois l'amortissement physique réel du système et l'amortissement induit par la charge du générateur.

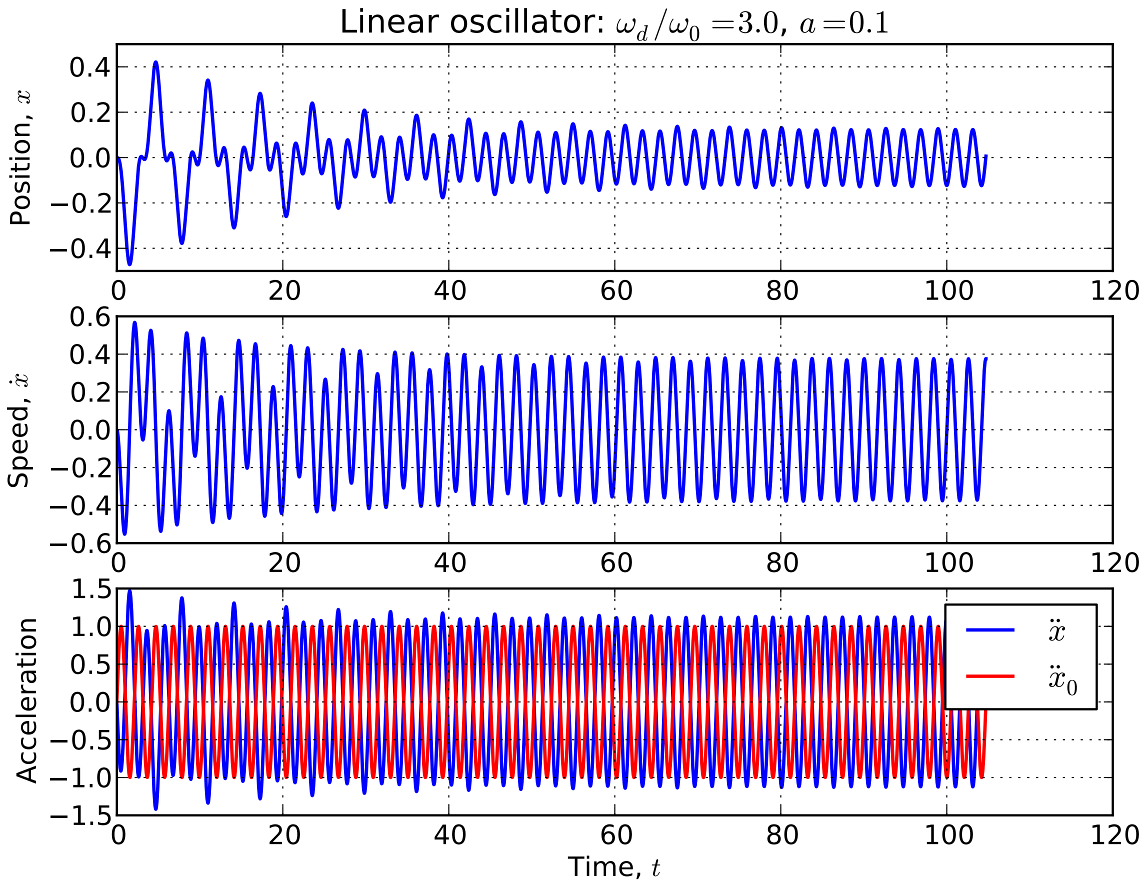

Figure 2 – Simulation du régime transitoire et de la convergence vers le régime établi dans le cas d'un oscillateur linéaire amorti (code).

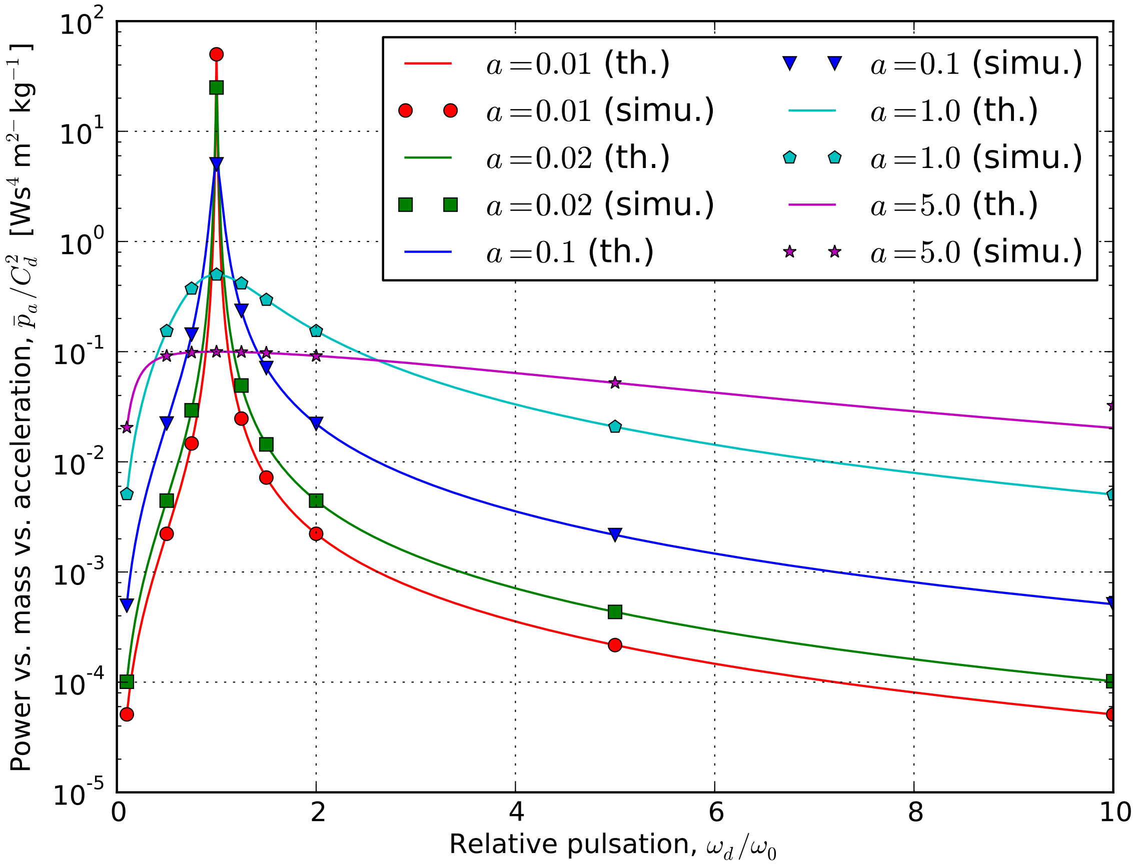

Figure 3 – Power harvesting capability of the linear oscillator : confrontation of numerical simulations with the theory (code).

$$\bar{p}_a = \frac{a\omega_d^2 A^2}{2} = \frac{aA_d^2\omega_d^6}{2\left(a^2\omega_d^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2\right)} \tag{10}$$

On va s'intéresser au cas où l'accélération $\ddot{x}_d$ est d'amplitude constante C_d en fonction de ω_d, on a alors donc $A_d = C_d/\omega_d^2$, on a alors :

$$\bar{p}_a = \frac{aC_d^2\omega_d^2}{2\left(a^2\omega_d^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2\right)} \tag{11}$$

Les performances du système pour une accélération d'excitation d'amplitude constante alors données par :

$$\frac{\bar{p}_a}{C_d^2} = \frac{a\omega_d^2}{2\left(a^2\omega_d^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2\right)} \tag{12}$$

La figure 3 montre que les résultats des simulations numériques sont en excellent accord avec la théorie.