Einige Sätze über $\mathfrak{p}$-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen.

Von

Th. Skolem in Bergen (Norwegen).

In dieser Abhandlung sollen einige Sätze bewiesen werden über Potenzreihen, deren Koeffizienten Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind. Dabei ist K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal daraus. Die Sätze beziehen sich auf die Nullstellenmannigfaltigkeiten in $K(\mathfrak{p})$ von Systemen dieser $\mathfrak{p}$-adischen Potenzreihen und auf das Verschwinden ihrer Funktionaldeterminanten auf jenen Nullstellenmannigfaltigkeiten. Ich will aber darauf aufmerksam machen, daß diese Arbeit so voraussetzungslos geschrieben ist wie nur möglich. Die hier aufgestellten Sätze über die Nullstellen dieser Potenzreihen werden nämlich vollständig bewiesen, ohne irgendwelche sonst bewiesenen Sätze dieser Art als bekannt vorauszusetzen. Vorliegende Abhandlung kann deshalb verstanden werden ohne Kenntnisse in der Idealtheorie und Eliminationstheorie der Potenzreihen.

Nachher mache ich einige Anwendungen hiervon auf gewisse exponentielle Gleichungen, woraus interessante Folgerungen über einige diophantische Gleichungen ableitbar sind. Die betrachteten exponentiellen Gleichungen haben die Gestalt

$$\sum_i a_i \alpha_{1i}^{x_1} \ldots \alpha_{ti}^{x_t} = 0\ (\mathfrak{p}),$$

wo die a_i gegebene Zahlen aus $K(\mathfrak{p})$ sind, $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{t1}$ Zahlen eines in K enthaltenen Körpers K_1 und $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ti}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ die dazu beziehungsweise konjugierten Zahlen des konjugierten, auch in K enthaltenen, Körpers K_i. Die Möglichkeit der Ableitung von Sätzen über diophantische Gleichungen beruht darauf, daß viele diophantische Gleichungen mittels der Dirichletschen Einheitstheorie als exponentielle Gleichungen der erwähnten Form oder Systeme von solchen geschrieben werden können.

In dieser Art beweise ich im folgenden, daß jede Gleichung der Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n = b$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y hat, wenn die Gleichung

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

irreduzibel ist und nicht nur reelle Wurzeln hat [1]). Außerdem beweise ich, daß jede Gleichung der Form

$$N(\alpha x + \beta y + \gamma z) = a,$$

wo α, β, γ drei linear unabhängige ganze Zahlen sind in einem Körper fünften Grades derart, daß unter allen konjugierten dazu nur ein reeller vorkommt, und N die Norm bedeutet, nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z hat [2]).

Der Ring der Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $K(\mathfrak{p})$, die ein endliches Konvergenzgebiet haben, d. h. die konvergieren, wenn alle $x_i \precsim \mathfrak{p}^c$ sind für ein gewisses c, soll $\mathfrak{P}_n$ heißen.

Satz 1. *Ist* $P(x_1, \ldots, x_{m+1})$ *ein solches Element von* $\mathfrak{P}_{m+1}$, *daß* $P(0, \ldots, 0, x_{m+1})$ *nicht identisch Null ist, so gibt es Elemente* Q *und* R *von* $\mathfrak{P}_{m+1}$ *derart, daß die Identität*

$$P = Q\,R\,(\mathfrak{p})$$

gilt, wobei Q *ein Polynom ist in bezug auf* x_{m+1}, *etwa*

$$Q = \sum_{r=0}^{l} B_r\, x_{m+1}^r,$$

während $B_l(0, \ldots, 0)$ *eine* $\mathfrak{p}$*-adische Einheit ist und* $R(0, \ldots, 0) \neq 0\,(\mathfrak{p})$ [3]).

Beweis. Es sei

$$P = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x_1, \ldots, x_m)\, x_{m+1}^r.$$

Nach der Voraussetzung sind nicht alle $A_r(0, \ldots, 0) = 0$. Außerdem ist

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r(0, \ldots, 0)\, x_{m+1}^r$$

konvergent für alle $x_{m+1} \precsim \mathfrak{p}^c$. Es sei die Zahl π aus K genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Setzt man für $i = 1, 2, \ldots, m+1$ jedes $x_i = \pi^c y_i$, so konvergiert P, wenn alle $y_i \precsim 1$ sind. Speziell konvergiert

$$\sum_{r=0}^{\infty} A'_r(0, \ldots, 0)\, y_{m+1}^r,$$

wo

$$A'_r(0, \ldots, 0) = \pi^{cr} A_r(0, \ldots, 0)$$

ist, für alle $y_{m+1} \precsim 1$. Dann ist $\lim A'_r(0, \ldots, 0) = 0$, und infolgedessen haben die A'_r ein $\mathfrak{p}$-adisches Maximum für einen oder mehrere Werte

---

[1]) Dies ist ein ziemlich großer Teil eines bekannten Satzes von A. Thue.

[2]) Dieser Satz ist wohl kaum auf Grund der Thue-Siegelschen Sätze beweisbar.

[3]) Dem Wortlaute nach ist dies der sogenannte Weierstraßsche Vorbereitungssatz; vgl. z. B. W. Rückert, Math. Annalen **107**, S. 262. Die Bestimmung des Polynoms Q ist aber hier eine andere als in den üblichen Beweisen dieses Satzes.

von r. Es sei l der größte Wert von r, für den dies Maximum eintritt. Es sei $A'_l(0, \ldots, 0) \sim \mathfrak{p}^u$. Setzt man dann für $i = 1, 2, \ldots, m$ jedes $y_i = \pi^\nu z_i$, so wird P eine nach Potenzprodukten von $z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}$ fortschreitende Reihe, die für alle $z_i \lesssim \mathfrak{p}^{-\nu}$ und $y_{m+1} \lesssim 1$ konvergiert. Zugleich wird, wenn ν hinreichend groß gewählt ist, jedes Potenzprodukt, worin mindestens ein Faktor $x_1, \ldots, x_m$ auftritt, einen Koeffizienten erhalten, der $< \mathfrak{p}^u$ ist.

Dann kann ich schreiben

$$P = \pi^u \left(f_0(y_{m+1}) + \pi f_1(z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}) + \pi^2 f_2(z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}) + \ldots\right),$$

wobei die Koeffizienten hier alle p-adisch ganz sind, und der Koeffizient von y^l_{m+1} in f_0, der höchsten Potenz von y_{m+1} darin, eine p-adische Einheit ist. Dann kann man solche Polynome $\bar{f}_i$ und g_i mit ganzen p-adischen Koeffizienten finden, daß eine Identität der Form

$$\pi^{-u} P = (f_0 + \pi \bar{f}_1 + \pi^2 \bar{f}_2 + \ldots)(1 + \pi g_1 + \pi^2 g_2 + \ldots) \ (\mathfrak{p}) \tag{1}$$

stattfindet, während zugleich alle $\bar{f}_i$ von kleinerem Grade in y_{m+1} als f_0 sind. Man erkennt nämlich, wenn man die geforderte Gleichung (1) in die unendliche Reihe von Kongruenzen nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{p}$ auflöst, daß man die $\bar{f}_i$ allmählich findet als Reste der Division mod $\mathfrak{p}$ von früher gefundenen Polynomen durch f_0, während die g_i die dabei auftretenden unvollständigen Quotienten sind. Setzt man nun

$$f_0 + \pi \bar{f}_1 + \pi^2 \bar{f}_2 + \ldots = Q = B_0 + B_1 y_{m+1} + \ldots + B_l y^l_{m+1},$$
$$\pi^u (1 + \pi g_1 + \pi^2 g_2 + \ldots) = R,$$

so sind Q und R p-adische Potenzreihen in $z_1, \ldots, z_m, y_{m+1}$, die jedenfalls konvergieren, wenn alle z_i und $y_{m+1} \lesssim 1$ sind. Außerdem ist

$$B_l(0, \ldots, 0) \sim \mathfrak{p}^{-u} A'_l(0, \ldots, 0)$$

eine p-adische Einheit und $R(0, \ldots, 0) \neq 0$, nämlich $\sim \mathfrak{p}^u$. Werden wieder in Q und R die ursprünglichen Variablen x_i eingeführt, so gehen sie in Reihen über, die für alle $x_1, \ldots, x_m \lesssim \mathfrak{p}^{c+\nu}$ und $x_{m+1} \lesssim \mathfrak{p}^c$ konvergieren. Der Satz ist hierdurch vollständig bewiesen.

Der Kürze halber nenne ich im folgenden eine Menge von unendlich vielen p-adischen Wertsystemen $(x_1, x_2, \ldots)$, die den Anfangspunkt $(0, 0, \ldots)$ als Häufungsstelle haben, eine h-Menge.

Satz 2. *Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ p-adische Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_{m+1}$, die für alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_1}$ konvergieren und also Elemente von $\mathfrak{P}_{m+1}$ sind. Es sei M eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen der P_i. Dann gibt es Elemente Q_i, S_j, R_{ij} von $\mathfrak{P}_{m+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß die Identitäten*

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i R_{ij} (\mathfrak{p}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

gelten, wobei alle $Q_i = 0$ *und alle* $S_j \neq 0$ *sind für eine h-Untermenge* M_0 *von* M.

Anmerkung. Herr B. L. v. d. Waerden hat mir mitgeteilt, daß Satz 2 vom Standpunkte der allgemeinen Ideal- und Eliminationstheorie aus betrachtet eigentlich folgendes bedeutet: Da der Anfangspunkt $(0, \ldots, 0)$ nicht isolierter Punkt der Nullstellenmannigfaltigkeit M ist, so enthält diese eine mindestens eindimensionale Teilmannigfaltigkeit M_0. Eine solche kann durch höchstens m unabhängige Gleichungen $Q_1 = 0, \ldots, Q_m = 0$ als Partialschnitt derart dargestellt werden, daß das Ideal $(Q_1, \ldots, Q_m)$ eine nicht-eingebettete Primärkomponente besitzt, welche prim ist und zur Mannigfaltigkeit M_0 gehört.

Ich bin aber zu dem Satze dadurch geführt worden, daß ich zuerst den Fall $m = 1$ betrachtete. In diesem Falle fand ich sehr leicht, daß wenn zwei oder mehrere Polynome — ich betrachtete zuerst Polynome — von x_1 und x_2, $P_1, \ldots, P_n$, unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben, ein gemeinsamer Teiler Q vorhanden sein muß, d. h. man hat $P_i = Q R_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und die gemeinsamen Nullstellen mit eventuell endlich vielen Ausnahmen der P_i sind die Nullstellen von Q. Dann lag der Gedanke nahe, daß für $m = 2$ die P_i in der Form $Q_1 R_{i1} + Q_2 R_{i2}$ ausdrückbar sein müßten usw., und wegen des Satzes 1 müssen die Potenzreihen sich analog verhalten. Allerdings konnte ich nicht mehr beweisen, daß die P_i selbst so ausdrückbar waren, sondern erst gewisse Produkte $S_i P_i$.

Beweis. Der Satz ist richtig für $m = 0$, weil die P_i dann identisch $= 0$ sein müssen. Ich nehme deshalb seine Gültigkeit für m Variablen an und beweise sie für $m + 1$ Variablen. Dabei nehme ich zuerst an, daß die P_i bloß Polynome sind in bezug auf x_{m+1}. Danach beweise ich, daß der Satz auch gültig bleibt, wenn die P_i beliebige Elemente von $\mathfrak{P}_{m+1}$ sind.

Um den Satz für die Polynome P_i von x_{m+1} zu beweisen, benutze ich wieder vollständige Induktion und zwar in bezug auf die Summe der Grade π_i von P_i. Der Satz ist ja richtig, wenn $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 0$ ist, so daß die P_i Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_m$ sind; denn nach der Voraussetzung gibt es ja dann Elemente Q_i, S_j, R_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m-1;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{P}_m$ derart, daß die Identitäten gelten

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^{m-1} Q_i R_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei alle $Q_i = 0$ und alle $S_j \neq 0$ sind für eine h-Untermenge von M. Ich nehme deshalb an, daß der Satz wahr ist für kleinere Werte von

$\sum_{i=1}^{n} \pi_i$ als ϱ, und betrachte Polynome P_i von x_{m+1} mit der Gradsumme ϱ. Ich setze

$$P_i = A_{i,0} + A_{i,1}\, x_{m+1} + \ldots + A_{i,\pi_i}\, x_{m+1}^{\pi_i}.$$

Es ist klar, daß der Satz gilt, wenn bloß ein $\pi_i > 0$ ist, etwa π_1. Denn da $P_2, \ldots, P_n$ nur die Variablen $x_1, \ldots, x_m$ enthalten, so gibt es nach der Annahme für $i = 2, 3, \ldots, m$ und $j = 2, 3, \ldots, n$ Elemente Q_i, S_j und R_{ij} von $\mathfrak{P}_m$ derart, daß die Identitäten

$$S_j\, P_j = \sum_{i=2}^{m} Q_i\, R_{ij}(\mathfrak{p}), \quad j = 2, \ldots, n,$$

gelten, und dabei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ sind für eine h-Untermenge von M. Setzt man dann $Q_1 = P_1$, $S_1 = 1$, $R_{1,1} = 1$ und alle $R_{ij} = 0$, wo $i = 1$, $j > 1$ oder $i > 1$, $j = 1$, so hat man die Identitäten (2) und alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ für dieselbe h-Untermenge von M. Es bleibt also nur der Fall, wo mindestens zwei Indizes i vorhanden sind derart, daß $\pi_i > 0$ ist.

Erstens kann es dann sein, daß für einen solchen Index a die Potenzreihe $A_{a,\pi_a} = 0$ ist für eine h-Untermenge $\overline{M}$ von M. Dann setze ich

$$\overline{P}_a = P_a - A_{a,\pi_a}\, x_{m+1}^{\pi_a}, \qquad P_{n+1} = A_{a,\pi_a}. \tag{3}$$

Für die Polynome

$$P_1, \ldots, P_{a-1}, \overline{P}_a, P_{a+1}, \ldots, P_{n+1}$$

ist die Gradsumme dann $< \varrho$; denn P_{n+1} ist ja vom Grade 0, und $\overline{P}_a$ hat höchstens den Grad $\pi_a - 1$. Außerdem ist $\overline{M}$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen aller dieser Polynome. Also gibt es nach der Annahme Elemente

$$Q_i, S_j, R_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\, j = 1, 2, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n+1)$$
$$\text{und} \quad \overline{S}_a, \overline{R}_{ia}$$

derart, daß die Identitäten gelten

$$S_1\, P_1 = Q_1\, R_{1,1} + \ldots + Q_m\, R_{m1}, \ldots, \overline{S}_a\, \overline{P}_a = Q_1\, \overline{R}_{1a} + \ldots + Q_m\, \overline{R}_{ma}, \ldots$$
$$S_{n+1}\, P_{n+1} = Q_1\, R_{1,n+1} + \ldots + Q_m\, R_{m,n+1},$$

wobei alle $Q_i = 0$ und alle S_j und $\overline{S}_a \neq 0$ sind für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Aus (3) folgt aber

$$S_a\, P_a = Q_1\, R_{1a} + \ldots + Q_m\, R_{ma},$$

wenn allgemein

$$S_{n+1}\, \overline{R}_{ia} + \overline{S}_a\, R_{i,n+1}\, x_{m+1}^{\pi_a} = R_{ia} \quad \text{und} \quad S_{n+1}\, \overline{S}_a = S_a$$

gesetzt ist. Da M_0 h-Untermenge von M ist, so hat man wieder (2).

Zweitens hat man den Fall, daß für alle i, für welche $\pi_i > 0$ ist, $A_{i,\pi_i} \neq 0$ ist für alle Elemente von M derart, daß alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_2}$ sind. Es sei $\overline{M}$ die h-Untermenge von M, die alle Elemente davon enthält, für welche alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_2}$ sind. Jetzt wähle ich zwei Indizes a und b derart, daß $\pi_a \geqq \pi_b > 0$. Weiter setze ich

$$\overline{P}_a = A_{b,\pi_b} P_a - A_{a,\pi_a} P_b \, x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b}. \tag{4}$$

Dann ist die Gradsumme wieder $< \varrho$ für die Polynome

$$P_1, \ldots, P_{a-1}, \overline{P}_a, P_{a+1}, \ldots, P_n.$$

Außerdem sind diese alle $= 0$ für die Elemente der h-Menge $\overline{M}$. Also gibt es nach der Annahme Elemente $S_1, \ldots, S_{a-1}, \overline{S}_a, S_{a+1}, \ldots, S_n$; Q_i und R_{ij} für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n$ und endlich $\overline{R}_{ia}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ von $\mathfrak{P}_{m+1}$ derart, daß

$$S_1 P_1 = Q_1 R_{1,1} + \ldots + Q_m R_{m1}, \ldots, \overline{S}_a \overline{P}_a = Q_1 \overline{R}_{1a} + \ldots + Q_m \overline{R}_{ma}, \ldots$$
$$S_b P_b = Q_1 R_{1b} + \ldots + Q_m R_{mb}, \ldots, S_n P_n = Q_1 R_{1n} + \ldots + Q_m R_{mn},$$

wobei die $Q_i = 0$ und

$$S_1, \ldots, S_{a-1}, \overline{S}_a, S_{a+1}, \ldots, S_n \quad \text{alle} \quad \neq 0$$

sind für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Nun bekommt man aber nach (4)

$$\overline{S}_a S_b A_{b,\pi_b} P_a = Q_1 (S_b \overline{R}_{1a} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{1b}) + \ldots$$
$$+ Q_m (S_b \overline{R}_{ma} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{mb}),$$

und setzt man

$$\overline{S}_a S_b A_{b,\pi_b} = S_a, \quad S_b \overline{R}_{ia} + \overline{S}_a A_{a,\pi_a} x_{m+1}^{\pi_a - \pi_b} R_{ib} = R_{ia},$$

so bekommt man wieder die Identitäten der Form (2), wobei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ sind für alle Elemente von M_0. Hierdurch ist die Allgemeingültigkeit des Satzes bewiesen für Polynome von x_{m+1} mit Koeffizienten, die Elemente von $\mathfrak{P}_m$ sind.

Danach sollen Potenzreihen $P_1, \ldots, P_n$ in $x_1, \ldots, x_{m+1}$ betrachtet werden. Es ist klar, daß man von identisch verschwindenden Reihen absehen kann, d. h. ich kann annehmen, daß kein P_i identisch verschwindet. Erstens kann es sein, daß jedes $P_i(0, \ldots, 0, x_{m+1})$ nicht identisch verschwindet. Dann kann man nach Satz 1 für jedes i ein Polynom $\overline{P}_i$ von x_{m+1} mit Koeffizienten, die Elemente von $\mathfrak{P}_m$ sind, und eine Potenzreihe K_i finden derart, daß $P_i = \overline{P}_i K_i$ identisch $(\mathfrak{p})$ ist und $K_i(0, \ldots, 0) \neq 0$, so daß immer $K_i(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ ist, wenn alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_3}$ sind. Es sei M eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen der P_i und $\overline{M}$ ihre h-Untermenge, die alle Elemente von M enthält, für welche alle $x_i \lesssim \mathfrak{p}^{c_3}$ sind. Dann ist offenbar $\overline{M}$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen aller $\overline{P}_i$. Deshalb gibt es nach dem eben bewiesenen Elemente Q_i, S_j und $\overline{R}_{ij}$ von $\mathfrak{P}_{m+1}$ derart, daß die Identitäten

$$S_j \overline{P}_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i \overline{R}_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten, wobei alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ für eine h-Untermenge M_0 von $\overline{M}$. Setzt man dann $R_{ij} = \overline{R}_{ij} K_j$, so bekommt man wieder die Identitäten (2), und die Q_i sind $= 0$ und die $S_j \neq 0$ für die h-Untermenge M_0 von M.

Um die Allgemeingültigkeit des Satzes zu zeigen, genügt es deshalb durch eine Variablentransformation, welche den Punkt $(0, \ldots, 0)$ invariant läßt, zu bewerkstelligen, daß wenn $y_1, \ldots, y_{m+1}$ die neuen Variablen sind, nicht alle $P_i(0, \ldots, 0, y_{m+1})$ identisch $= 0$ sind. In der Tat kann man dies schon mittels einer linearen homogenen Transformation machen, wie ich jetzt zeigen will.

Wie schon bemerkt, ist $\prod_{i=1}^{n} P_i$ nicht identisch $= 0$. Infolgedessen gibt es Wertsysteme der Variablen derart, daß alle $P_i \neq 0$ werden; es sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ ein solches. Da alle $P_i(0, \ldots, 0) = 0$ sind, so ist mindestens ein $\alpha_i \neq 0$, und da es auf die Numerierung der Variablen nicht ankommt, kann ich $\alpha_{m+1} \neq 0$ annehmen. Setzt man dann

$$\alpha_{m+1} x_1 - \alpha_1 x_{m+1} = y_1, \ldots, \alpha_{m+1} x_m - \alpha_m x_{m+1} = y_m, \; x_{m+1} = y_{m+1},$$

so gehen die P_i in Potenzreihen P_i' der neuen Variablen $y_1, \ldots, y_{m+1}$ über, während eine h-Menge M' gemeinsamer Nullstellen existiert. Außerdem ist kein $P_i'(0, \ldots, 0, y_{m+1})$ identisch $= 0$; denn es ist ja

$$P_i'(0, \ldots, 0, \alpha_{m+1}) = P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) \neq 0.$$

Hierdurch ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. *Für jedes Element $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ der im Satz 2 erwähnten Untermenge M_0 von M, worin alle $Q_i = 0$ und $S_j \neq 0$ sind, ist die Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})} = 0,$$

wo $P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)}$ beliebige $m+1$ der Potenzreihen P_i sind.

Anmerkung: Daß die Funktionaldeterminante $= 0$ sein muß in einem nichtisolierten Punkte π der Nullstellenmannigfaltigkeit des Ideals $(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})$, erkennt man äußerst leicht so: Ist

$$\frac{\partial(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})} \neq 0,$$

so haben offenbar die Tangentialhyperebenen der Hyperflächen $P^{(i)} = 0$ in π nur den Punkt π gemein, der deshalb eine isolierte gemeinsame Nullstelle sein muß. Da der Anfangspunkt $(0, \ldots, 0)$ eine Häufungsstelle der gemeinsamen Nullstellen der $P^{(i)}$ ist, so folgt hieraus sofort, daß die Funktionaldeterminante $= 0$ ist für $(0, \ldots, 0)$. Für die übrigen Punkte in M_0 folgt dasselbe in dieser Weise aber erst, wenn man zeigt, daß auch diese Punkte nicht isoliert sind. Setzt man übrigens den Satz als bekannt voraus, daß die Nullstellenmannigfaltigkeit der $P^{(i)}$ einen mindestens eindimensionalen Bestandteil enthalten muß, und daß die Punkte eines solchen Teiles alle nichtisoliert sind, so folgt allerdings, daß die Funktionaldeterminante $= 0$ sein muß in allen Punkten dieser Teilmannigfaltigkeit. Statt derartiges vorauszusetzen (vgl. die Bemerkung in der Einleitung) gebe ich hier den folgenden Beweis des Satzes 3.

Beweis. Die Potenzreihen P_j, Q_i, R_{ij}, S_j im Satz 2 haben einen gemeinsamen Konvergenzbereich um den Nullpunkt. Aus den Gleichungen

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^{m} Q_i R_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

folgen dann in jedem Punkte des gemeinschaftlichen Konvergenzbereiches, der zu der h-Menge M_0 gehört, die Gleichungen

$$(5)\qquad S_j \frac{\partial P_j}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q_i}{\partial x_1} R_{ij}, \ldots, S_j \frac{\partial P_j}{\partial x_{m+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q_i}{\partial x_{m+1}} R_{ij}(\mathfrak{p}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus $m+1$ beliebig gewählten der Gleichungen (5) folgt aber in bekannter Weise, daß die Determinante

$$\left| \frac{\partial P^{(h)}}{\partial x_i} \right| = 0\,(\mathfrak{p}) \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, m+1)$$

ist. Hierdurch ist Satz 3 bewiesen.

Nun ist jede solche Funktionaldeterminante wieder ein Element von $\mathfrak{P}_{m+1}$. Da sie alle ebenso wie die gegebenen P_j eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen haben, so gilt dies also auch wieder für alle diese Reihen mit den Reihen zusammengenommen, welche als Funktionaldeterminanten daraus ableitbar sind usw. endlich oft wiederholt. Also gilt folgender Satz:

Satz 4. *Haben die Reihen $P_1, \ldots, P_n$ eine h-Menge gemeinsamer Nullstellen, so gilt dies auch* (vielleicht nicht gerade für dieselbe h-Menge, sondern bloß für eine h-Untermenge davon) *für alle Reihen $P_1, \ldots, P_N$, die aus $P_1, \ldots, P_n$ abgeleitet werden können durch endlich oft wiederholte Bildung von Funktionaldeterminanten der Form*

$$\frac{\partial(P^{(1)}, \ldots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+1})}.$$

Unter einer zu $(a_1, \ldots, a_{m+1})$ gehörigen h-Menge verstehe ich eine Menge von unendlich vielen Punkten $(x_1, \ldots, x_{m+1})$, für welche $(a_1, \ldots, a_{m+1})$

eine Häufungsstelle ist. Es ist dann klar, daß Satz 4 gültig bleibt, wenn man allgemein statt h-Menge sagt: h-Menge in bezug auf $(a_1, \ldots, a_{m+1})$. Denn man kann die Transformation

$$x_i - a_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

machen.

Jetzt sollen einige Anwendungen der bisher bewiesenen Sätze gemacht werden. In diesen Anwendungen soll K ein algebraischer Zahlkörper sein, der die Körper $K_1, \ldots, K_m$ enthält, wobei der Grad von $K_1 \geqq m$ ist, und $K_1, \ldots, K_m$ alle konjugiert zu K_1 sind. Es sollen $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{t1}$ immer t Zahlen aus K_1 bedeuten, während die dazu konjugierten Zahlen aus K_i als $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ti}$ bezeichnet werden.

Satz 5. *Es seien die $m-1$ linear unabhängigen* $\mathfrak{p}$*-adischen Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)}\, \xi_i = 0\,(\mathfrak{p}), \quad \xi_i = \alpha_{1i}^{x_1} \ldots \alpha_{ti}^{x_t}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m-1,$$

gegeben, wobei die $a_i^{(\lambda)}$ Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind und $\mathfrak{p}$ ein Primidealfaktor in K der natürlichen Primzahl p, die prim ist zu $N(\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,1} \ldots \alpha_{t1})$, $N =$ Norm. Gibt es mindestens zwei ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so muß ein Potenzprodukt

$$\alpha_{1i}^{l_1}\,\alpha_{2i}^{l_2} \ldots \alpha_{ti}^{l_t}$$

mit ganzen Exponenten $l_1, \ldots, l_t$, die nicht alle 0 sind, für alle i denselben Wert haben. Kommen alle ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ wirklich vor, und ist K_1 vom Grade m, so muß dieser Wert rational sein.

Beweis. Die $m-1$ Gleichungen können bei passender Numerierung in bezug auf $\xi_2, \ldots, \xi_m$ aufgelöst werden, so daß man bekommt:

$$\xi_i = b_i\, \xi_1\,(\mathfrak{p}), \quad i = 2, 3, \ldots, m,$$

wo $b_i \neq 0\,(\mathfrak{p})$ sein muß, nämlich eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit, da ja die ξ prim zu $\mathfrak{p}$ sind. Hat man nun zwei verschiedene Lösungen

$$x_1', \ldots, x_t' \quad \text{und} \quad x_1'', \ldots, x_t''$$

oder mit anderen Worten

$$\alpha_{1i}^{x_1'} \ldots \alpha_{ti}^{x_t'} = b_i \alpha_{1,1}^{x_1'} \ldots \alpha_{t,1}^{x_t'}, \quad \alpha_{1i}^{x_1''} \ldots \alpha_{ti}^{x_t''} = b_i \alpha_{1,1}^{x_1''} \ldots \alpha_{t1}^{x_t''}\,(\mathfrak{p}), \quad i = 2, 3, \ldots, m,$$

so bekommt man

$$\alpha_{1i}^{l_1} \ldots \alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1} \ldots \alpha_{t1}^{l_t}\,(\mathfrak{p}), \qquad i = 2, 3, \ldots, m, \tag{6}$$

wenn

$$x_1' - x_1'' = l_1, \ldots, x_t' - x_t'' = l_t$$

gesetzt werden. Da aber die beiden Seiten der Gleichungen (6) Zahlen aus K sind, so folgt aus ihrer Gleichheit nach $\mathfrak{p}$, daß sie gleich sind im gewöhnlichen Sinne. Daraus folgt, daß der gemeinsame Wert aller

$\alpha_{1i}^{l_1} \ldots \alpha_{ti}^{l_t}$ rational sein muß, falls $\xi_1, \ldots, \xi_m$ eine volle Reihe konjugierter Zahlen sind. Der Satz ist hierdurch bewiesen.

Man erkennt übrigens, daß, wenn die Gleichungen (6) stattfinden, unendlich viele ganzzahlige Lösungen existieren, falls es überhaupt solche gibt; denn ist $x_1, \ldots, x_t$ eine solche, so ist auch $x_1 + l_1 u, \ldots, x_t + l_t u$ eine solche für beliebige ganze u.

Satz 6. *Es seien bloß $m-2$ linear unabhängige Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0\,(\mathfrak{p}), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, m-2, \tag{7}$$

gegeben, wobei $m - 2 \geqq t$ ist. Gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so gibt es Potenzprodukte

$$\alpha_{1,1}^{l_1} \alpha_{2,1}^{l_2} \ldots \alpha_{t1}^{l_t},$$

$l_1, \ldots, l_t$ ganz und nicht alle 0, die zu einem echten Unterkörper von K_1 gehören.

Beweis. Es genügt, den Satz in dem Falle zu beweisen, daß in jeder Hyperebene mit rationalen Koeffizienten des $(x_1, \ldots, x_t)$-Raumes nur endlich viele Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ vorkommen. Gibt es nämlich unendlich viele, die alle der Gleichung

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_t x_t = h, \quad \text{etwa} \quad h_1 \neq 0,$$

genügen, so kann ich setzen

$$x_2 = h_1 y_2 + r_2, \ldots, x_t = h_1 y_t + r_t, \quad \text{alle} \quad r_i \geqq 0 \text{ und } < h_1,$$

wodurch

$$x_1 = -h_2 y_2 - h_3 y_3 - \ldots + \bar{h},$$

wo

$$\bar{h} = \frac{-h_2 r_2 - h_3 r_3 - \ldots + h}{h_1},$$

also ganz sein muß für gewisse r_i. Dadurch erhält man

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i^{(\lambda)} (\alpha_{1i}^{-h_2} \alpha_{2i}^{h_1})^{y_2} \ldots (\alpha_{1i}^{-h_t} \alpha_{ti}^{h_1})^{y_t} = 0, \quad \bar{a}_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} \alpha_{1i}^{\bar{h}} \alpha_{2i}^{r_2} \ldots \alpha_{ti}^{r_t}.$$

Es gibt nur endlich viele mögliche Systeme dieser Form nach den Werten von $r_2, \ldots, r_t$. Infolgedessen muß mindestens eines dieser Systeme unendlich viele ganzzahlige Lösungen $y_2, \ldots, y_t$ haben. Nimmt man also an, daß der Satz schon für die kleinere Variablenzahl $t-1$ bewiesen ist, so weiß man, daß ganze Exponenten $l_2, \ldots, l_t$, nicht alle 0, existieren derart, daß

$$(\alpha_{1,1}^{-h_2} \alpha_{2,1}^{h_1})^{l_2} \ldots (\alpha_{1,1}^{-h_t} \alpha_{t,1}^{h_1})^{l_t}$$

zu einem echten Unterkörper von K_1 gehört, d. h.

$$\alpha_{1,1}^{-h_2 l_2 - \cdots - h_t l_t} \alpha_{2,1}^{h_1 l_2} \cdots \alpha_{t,1}^{h_1 l_t}$$

gehört dazu. Offenbar ist der Satz dadurch sofort für die jetzige Variablenzahl t bewiesen. Also kann ich annehmen, daß für beliebige Wahl der rationalen Koeffizienten $h_1, \ldots, h_t, h$, so daß sie nicht alle 0 sind, nur endlich viele (eventuell keine) der Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ die Gleichung $h_1 x_1 + \ldots + h_t x_t = h$ befriedigen.

Weiter genügt es, den Satz in dem Falle zu beweisen, daß alle $\alpha_{ij} \equiv 1 \pmod{p}$ bzw. (mod 4) sind. Denn sonst gibt es jedenfalls ganze positive Exponenten e_i derart, daß alle $\alpha_{ij}^{e_i} \equiv 1 \pmod{p}$ sind, und durch die Aufspaltung mittels der Gleichungen

$$x_1 = e_1 y_1 + r_1, \ldots, x_t = e_t y_t + r_t$$

von $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0\,(\mathfrak{p})$ in endlich viele Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i^{(\lambda)} \bar{\xi}_i = 0\,(\mathfrak{p}), \quad \bar{\xi}_i = (\alpha_{1i}^{e_1})^{y_1} \ldots (\alpha_{ti}^{e_t})^{y_t}, \quad \bar{a}_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} \alpha_{1i}^{r_1} \ldots \alpha_{ti}^{r_t}$$

sieht man ein, daß es genügt, die Richtigkeit des Satzes für jedes dieser letzten Gleichungssysteme zu beweisen. Also kann ich annehmen, daß schon in den gegebenen Gleichungen alle $\alpha_{ij} \equiv 1 \pmod{p}$ sind.

Nun kann ich allgemein annehmen, daß die Gleichungen gelten (l bedeutet den $\mathfrak{p}$-adischen Logarithmus)

$$l\frac{\alpha_{si}}{\alpha_{s1}} = \eta_{s1}\, l\frac{\alpha_{r+1,i}}{\alpha_{r+1,1}} + \ldots + \eta_{s,t-r}\, l\frac{\alpha_{ti}}{\alpha_{t1}}(\mathfrak{p}) \quad (s = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei die η Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind, während es nicht möglich ist, dieselben Gleichungen für $s = 1, 2, \ldots, r$ und $r+1$ oder $r+2$ usw. aufzustellen; es mag natürlich auch sein, daß $r = 0$ ist. Dann ist also

$$\frac{\alpha_{si}}{\alpha_{s1}} = \left(\frac{\alpha_{r+1,i}}{\alpha_{r+1,1}}\right)^{\eta_{s1}} \left(\frac{\alpha_{r+2,i}}{\alpha_{r+2,1}}\right)^{\eta_{s2}} \cdots \left(\frac{\alpha_{ti}}{\alpha_{t1}}\right)^{\eta_{s,t-r}} (\mathfrak{p}),$$

und wird dies in die gegebenen Gleichungen eingesetzt, so bekommt man das System

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \beta_{1i}^{\zeta_1} \beta_{2i}^{\zeta_2} \ldots \beta_{t-r,i}^{\zeta_{t-r}} = 0\ (\mathfrak{p}), \tag{8}$$

wo

$$\zeta_1 = \eta_{1,1} x_1 + \ldots + \eta_{r1} x_r + x_{r+1}, \quad \zeta_2 = \eta_{1,2} x_1 + \ldots + \eta_{r2} x_r + x_{r+2}, \ldots,$$
$$\zeta_{t-r} = \eta_{1,t-r} x_1 + \ldots + \eta_{r,t-r} x_r + x_t$$

und

$$\beta_{1i} = \alpha_{r+1,i}, \quad \beta_{2i} = \alpha_{r+2,i}, \ldots, \beta_{t-r,i} = \alpha_{ti}.$$

Zuerst werde ich zeigen, daß aus den unendlich vielen Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ von (7) auch unendlich viele verschiedene Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) entstehen müssen. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann müßte $r > 0$ sein, und unendlich viele Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ müßten zu demselben Wertsystem $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ Anlaß geben. Nun seien $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ für $j = 1, 2, \ldots$ solche Lösungen. Dann bekäme man

$$(9) \qquad \eta_{1s}(x_1^{(j)} - x_1^{(1)}+) \ldots + \eta_{rs}(x_r^{(j)} - x_r^{(1)}) + x_{r+s}^{(j)} - x_{r+s}^{(1)} = 0\,(\mathfrak{p}),$$
$$s = 1, 2, \ldots, t-r; \quad j = 2, 3, \ldots.$$

Zuerst ist es nicht möglich, daß z. B. $x_1^{(j)} - x_1^{(1)} = 0$ sein könnte für alle j; denn dann befriedigten ja alle Lösungen $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Es sei deshalb j_1 ein solcher Index, etwa der kleinste, daß $x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} \neq 0$ ist. Dann ist es weiter nicht möglich, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(j)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j)} - x_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

sein könnte für alle Indizes j; denn wäre das der Fall, so befriedigten ja alle Lösungen $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ wieder eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten, nämlich

$$(x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)})(x_2^{(j)} - x_2^{(1)}) = (x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)})(x_1^{(j)} - x_1^{(1)}).$$

Deshalb sei j_2 ein solcher Index, daß

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(j_2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_2)} - x_2^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Augenscheinlich gibt es dann wieder ein solches j_3, daß die analoge 3-reihige Determinante $\neq 0$ ist usw. Nach r Schritten gelangt man zu dem Ergebnis, daß es Indizes $j_1, \ldots, j_r$ gibt derart, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_1)} - x_r^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(j_r)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_r)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_r)} - x_r^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Schreibt man nun die Gleichungen (9) für $j_1, j_2, \ldots, j_r$ und dazu noch ein beliebiges j auf, wobei man s z. B. $= 1$ setzt, so bekommt man durch Elimination von $\eta_{1,1}, \eta_{2,1}, \ldots, \eta_{r1}$ offenbar

$$\begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_1)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_1)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j_1)} - x_{r+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(j_r)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j_r)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j_r)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j_r)} - x_{r+1}^{(1)} \\ x_1^{(j)} - x_1^{(1)} & x_2^{(j)} - x_2^{(1)} & \ldots & x_r^{(j)} - x_r^{(1)} & x_{r+1}^{(j)} - x_{r+1}^{(1)} \end{vmatrix} = 0,$$

so daß die unendlich vielen Wertsysteme $x_1^{(j)}, \ldots, x_t^{(j)}$ wieder eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten, nicht alle 0, befriedigen würden.

Hierdurch ist also bewiesen, daß die unendlich vielen Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ auch zu unendlich vielen Wertsystemen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ Anlaß geben müssen. Da alle ζ_i p-adisch $\lesssim \max(\eta_{1,1}, \ldots, \eta_{r,t-r}, 1)$ sind, so müssen Häufungsstellen für die Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) existieren. Ist $c_1, \ldots, c_{t-r}$ eine solche, so bilden also die Lösungen eine zu diesem Punkte gehörige h-Menge M im früher erklärten Sinne. Da die linken Seiten unserer Gleichungen jetzt p-adische und also auch p-adische Potenzreihenentwicklungen haben, die für alle ganzen p-adischen Werte der x konvergieren — denn alle α_{ij} waren ja $\equiv 1 \mod p$ bzw. mod 4 —, so gibt es deshalb nach Satz 4 eine h-Untermenge von M derart, daß für alle ihre Elemente nicht nur die Gleichungen (8) stattfinden, sondern auch die in bezug auf $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ gebildeten Funktionaldeterminanten $= 0\,(\mathfrak{p})$ sind. Die Gleichungen (8) kann ich bei passender Numerierung in bezug auf $\xi_3, \ldots, \xi_m$ auflösen, so daß ich bekomme

$$g_i = \xi_i - a_{i1}\xi_1 - a_{i2}\xi_2 = 0\,(\mathfrak{p}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, m). \tag{10}$$

Sollte es für ein i eintreten, daß etwa $a_{i2} = 0\,(\mathfrak{p})$ wird, so ist die Sache bald erledigt[4]). Denn sind $x_1^{(1)}, \ldots, x_t^{(1)}$ und $x_1^{(2)}, \ldots, x_t^{(2)}$ zwei verschiedene der Lösungen $x_1, \ldots, x_t$, so bekommt man, wenn man die ξ wieder mit Hilfe der α_{ij} schreibt,

$$\alpha_{1i}^{l_1}\alpha_{2i}^{l_2}\ldots\alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1}\alpha_{2,1}^{l_2}\ldots\alpha_{t1}^{l_t},$$

wobei $l_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$, so daß die l_j ganz und nicht alle 0 sind. Dann gehört also $\alpha_{1,1}^{l_1}\ldots\alpha_{t1}^{l_t}$ zu einem echten Unterkörper von K_1. Deshalb kann ich weiter annehmen, daß alle a_{i1} und $a_{i2} \neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind. Infolgedessen kann ich die ξ_i, wo $i \neq 1, j$, auch durch ξ_1, ξ_j ausdrücken, was unten benutzt wird. Mittels einer kleinen Rechnung findet man, daß für diejenigen Werte der ξ, für welche die Gleichungen (10) erfüllt sind, die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(g_i, g_j, g_h, \ldots)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)}$$

in der Form

$$D_{i,j,h,\ldots} = \begin{vmatrix} a_{i1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} + a_{i2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,2}} & a_{j1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,1}} + a_{j2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,2}} & \ldots \\ a_{i1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,1}} + a_{i2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,2}} & a_{j1}\xi_1 l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,1}} + a_{j2}\xi_2 l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,2}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

[4]) Eigentlich folgt in diesem Falle die Richtigkeit des Satzes 6 aus Satz 5.

geschrieben werden können. Die Indizes $i, j, h, \ldots$ kommen dabei in der Anzahl $t-r$ vor. Wir haben also auch die Gleichungen

$$D_{i,j,h,\ldots} = 0\,(\mathfrak{p}). \tag{11}$$

Der Koeffizient von ξ_1^{t-r} in $D_{i,j,h,\ldots}$ ist $a_{i1}\,a_{j1}\,a_{h1}\ldots d_{i,j,h,\ldots}$, wo

$$d_{i,j,h,\ldots} = \begin{vmatrix} l\dfrac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} & l\dfrac{\beta_{1j}}{\beta_{1,1}} & \ldots \\ l\dfrac{\beta_{2i}}{\beta_{2,1}} & l\dfrac{\beta_{2j}}{\beta_{2,1}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Es ist nicht möglich, daß diese Determinante $d_{i,j,h,\ldots} = 0\,(\mathfrak{p})$ ist für alle Wahlen von $i, j, h, \ldots$ sowohl für (10) wie für die analogen Gleichungen, die man erhält, wenn alle ξ durch ξ_1 und ξ_3 bzw. ξ_1 und $\xi_4, \ldots$ bzw. ξ_1 und ξ_m ausgedrückt werden. Denn wäre das der Fall, so könnte man Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_{t-r}$ finden, die nicht alle 0 sind derart, daß die Gleichungen

$$\tau_1\, l\frac{\beta_{1i}}{\beta_{1,1}} + \ldots + \tau_{t-r}\, l\frac{\beta_{t-r,i}}{\beta_{t-r,1}} = 0\,(\mathfrak{p})$$

alle stattfänden. Dann wäre aber die Zahl r Seite 409 nicht maximal, wie vorausgesetzt. Ich kann deshalb annehmen, daß $d_{i,j,h,\ldots} \neq 0\,(\mathfrak{p})$ ist in (12).

Dann ist die Gleichung (11) nicht identisch erfüllt in bezug auf ξ_1/ξ_2. Infolgedessen hat sie in bezug auf ξ_1/ξ_2 nur endlich viele Lösungen im Körper $K(\mathfrak{p})$. Gibt es keine solche Lösung, so ist der hier betrachtete Fall unendlich vieler Lösungen $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-r}$ von (8) überhaupt nicht möglich. Sonst muß das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen (10) und einer Gleichung der Form

$$\xi_1 = b\,\xi_2$$

besteht, wo b eine Wurzel von $D_{i,j,h,\ldots}(\xi_1/\xi_2) = 0$ ist, unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ haben. Da aber dies System aus $m-1$ unabhängigen linearen Gleichungen in den ξ besteht, so folgt aus Satz 5, daß es ganze rationale Exponenten $l_1, \ldots, l_t$, nicht alle Null, gibt derart, daß für alle i

$$\alpha_{1i}^{l_1}\ldots\alpha_{ti}^{l_t} = \alpha_{1,1}^{l_1}\ldots\alpha_{t1}^{l_t}$$

ist. Hierdurch ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Anmerkung zu Satz 6. Man erkennt leicht, wenn man den Beweis des Satzes 6 durchliest, daß, wenn K_1 vom Grade m ist, und in (10) und allen dazu analogen Gleichungen alle Koeffizienten $\neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind, oder mit anderen Worten wenn zwischen drei beliebigen der ξ eine lineare homogene Gleichung besteht, deren Koeffizienten alle $\neq 0\,(\mathfrak{p})$ sind, unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, \ldots, x_t$ nur dann existieren können, wenn für gewisse ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_t$, die nicht alle $= 0$ sind, $\alpha_{1,1}^{l_1} \ldots \alpha_{t1}^{l_t}$ eine rationale Zahl ist.

Satz 7. *Eine Gleichung der Form*

$$(13) \qquad f_m(x, y) = a, \quad f_m \text{ homogen vom Grade } m,$$

wobei a und die Koeffizienten in f_m ganz rational sind, während das Polynom f_m irreduzibel ist, und $f_m(t, 1) = 0$ nicht ausschließlich reelle Wurzeln hat, besitzt nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y.

Beweis. Es sei

$$f_m(x, y) = a_0 x^m + \ldots + a_m y^m.$$

Wird $a_0 x = x_1$ gesetzt, so bekommt man

$$(14) \qquad x_1^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_0^{m-1} a_m y^m = a_0^{m-1} a = b.$$

Es sei ϑ_1 eine Wurzel der Gleichung

$$(15) \qquad \vartheta^m + a_1 \vartheta^{m-1} + \ldots + a_0^{m-1} a_m = 0.$$

Dann geht (14) über in

$$N(x_1 - \vartheta_1 y) = b.$$

Nun sei $\varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ ein vollständiges System nicht-assoziierter Zahlen mit der Norm b in dem von ϑ_1 herrührenden Körper $k(\vartheta_1)$. Dann hat man also

$$x_1 - \vartheta_1 y = \varkappa_1 \xi_1,$$

wo $\varkappa_1$ eine der Zahlen $\varkappa^{(1)}, \ldots, \varkappa^{(l)}$ ist und ξ_1 eine Einheit. Bilden $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ein System von Grundeinheiten in $k(\vartheta_1)$, so ist

$$\xi_1 = \pm \varepsilon_1^{z_1} \ldots \varepsilon_n^{z_n},$$

da wir von dem trivialen Fall absehen können, wo alle Wurzeln von (15) imaginär sind, so daß in $k(\vartheta_1)$ keine anderen Einheitswurzeln als ± 1 vorkommen. Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ die Wurzeln von (15), und ebenso $\xi_2, \xi_3, \ldots$ die zu ξ_1 konjugierten Einheiten aus den Körpern $k(\vartheta_2)$, $k(\vartheta_3), \ldots$, so hat man weiter

$$x_1 - \vartheta_2 y = \varkappa_2 \xi_2, \qquad x_1 - \vartheta_3 y = \varkappa_3 \xi_3, \ldots.$$

Aus den 3 Gleichungen

$$x_1 - \vartheta_i y = \varkappa_i \xi_i, \qquad x_1 - \vartheta_j y = \varkappa_j \xi_j, \qquad x_1 - \vartheta_h y = \varkappa_h \xi_h$$

bekommt man aber

$$(16) \qquad (\vartheta_j - \vartheta_h) \varkappa_i \xi_i + (\vartheta_h - \vartheta_i) \varkappa_j \xi_j + (\vartheta_i - \vartheta_j) \varkappa_h \xi_h = 0.$$

Da alle ϑ_r verschieden sind, so sind hier immer alle Koeffizienten $\neq 0$. Da nicht alle ϑ_r reell sind, so ist $n \leqq m - 2$. Aus der Anmerkung zu Satz 6 folgt deshalb, daß nur endlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichungen (16) in $z_1, \ldots, z_n$ und also nur endlich viele Lösungen von (13) in ganzen Zahlen x und y existieren können, da nämlich $\varepsilon_1^{l_1} \ldots \varepsilon_n^{l_n}$ nur für $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$ einen rationalen Wert annimmt. Hierdurch ist Satz 7 bewiesen.

Satz 8. *Ein System von $m - 3$ linear-unabhängigen Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \xi_i = 0 \ (\mathfrak{p}) \tag{17}$$

mit Koeffizienten aus $K(\mathfrak{p})$ sei gegeben und $m \geqq 5$. Dabei ist hier $\xi_i = \alpha_i^x \beta_i^y$, indem α_1 und β_1 zwei ganze Zahlen aus K_1 sind und α_i, β_i die dazu konjugierten aus K_i. Gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y), so gibt es ganze Exponenten l_1 und l_2, nicht beide 0, derart, daß $\alpha_1^{l_1} \beta_1^{l_2}$ zu einem echten Unterkörper von K_1 gehört.

Beweis. Wie früher genügt es anzunehmen, daß $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1$ (mod p) bzw. (mod 4) ist, wenn $N\mathfrak{p} = p$ ist. Natürlich kann ich auch annehmen, daß die Logarithmen $l\,\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$, $l\,\frac{\beta_j}{\beta_i}$, $i \neq j$, alle $\neq 0$ sind; denn sonst wäre ja nichts zu beweisen.

Man kann (17) in bezug auf $m - 3$ der ξ auflösen. Bei passender Numerierung kann man annehmen, daß die dabei erhaltenen Gleichungen sind:

$$\xi_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 \, (\mathfrak{p}), \quad i = 4, 5, \ldots, m. \tag{18}$$

Wenn für irgendein i zwei der Koeffizienten $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} = 0$ sind, so ist die Richtigkeit des Satzes 8 sofort klar nach Satz 5. Tritt es für zwei Indizes i und j ein, daß a_{ih} und $a_{jh} = 0$ sind, wo $h = 1, 2$ oder 3 ist, so ist die Richtigkeit klar nach Satz 6; denn man bekommt ja dann zwei Gleichungen in vier der ξ, und es gibt bloß zwei unbekannte Exponenten. Also kann ich annehmen, daß $a_{i1} = 0$ bzw. $a_{i2} = 0$ bzw. $a_{i3} = 0$ höchstens für einen Index i_1 bzw. i_2 bzw. i_3 eintritt, während zugleich i_1, i_2, i_3 verschieden sind.

Nach Satz 4 müssen nun, wenn unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y) vorhanden sind, für unendlich viele darunter auch die Gleichungen

$$g_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial y} - \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial f_j}{\partial x} = 0 \, (\mathfrak{p})$$

erfüllt sein, wobei

$$f_i = \xi_i - a_{i1}\xi_1 - a_{i2}\xi_2 - a_{i3}\xi_3$$

gesetzt ist. Nun wird, wenn $f_i = 0$ berücksichtigt wird,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = a_{i1}\xi_1 l\frac{\alpha_i}{\alpha_1} + a_{i2}\xi_2 l\frac{\alpha_i}{\alpha_2} + a_{i3}\xi_3 l\frac{\alpha_i}{\alpha_3},$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = a_{i1}\xi_1 l\frac{\beta_i}{\beta_1} + a_{i2}\xi_2 l\frac{\beta_i}{\beta_2} + a_{i3}\xi_3 l\frac{\beta_i}{\beta_3},$$
$$\frac{\partial f_j}{\partial x} = a_{j1}\xi_1 l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} + a_{j2}\xi_2 l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} + a_{j3}\xi_3 l\frac{\alpha_j}{\alpha_3},$$
$$\frac{\partial f_j}{\partial y} = a_{j1}\xi_1 l\frac{\beta_j}{\beta_1} + a_{j2}\xi_2 l\frac{\beta_j}{\beta_2} + a_{j3}\xi_3 l\frac{\beta_j}{\beta_3},$$

und deshalb wird

$$\begin{aligned} g_{ij} = {} & a_{i1}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\xi_1^2 + \left(a_{i1}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\right. \\ & \left. + a_{i2}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\right)\xi_1\xi_2 + a_{i2}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_i}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\xi_2^2 \\ & + \left(a_{i1}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right) + a_{i3}a_{j1}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)\right)\xi_1\xi_3 \\ & + \left(a_{i2}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right) + a_{i3}a_{j2}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2}\right)\right)\xi_2\xi_3 \\ & + a_{i3}a_{j3}\left(l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3}\right)\xi_3^2. \end{aligned}$$

Zuerst ist die Möglichkeit denkbar, daß alle $g_{ij} = 0\,(\mathfrak{p})$ identisch in ξ_1, ξ_2, ξ_3 erfüllt sind. Dann hat man für alle Paare i, j aus der Reihe $4, 5, \ldots, m$

$$(19)\qquad l\frac{\alpha_i}{\alpha_1}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_1}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0,\quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0,$$
$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0\,(\mathfrak{p}).$$

Das ist sofort ersichtlich, wenn alle a_{ih} und $a_{jh} \neq 0$ sind. Aber die Gleichungen (19) bleiben auch sonst gültig. Nimmt man erstens für ein Indexpaar i, j an, daß $a_{i1} = 0$, die übrigen fünf a dagegen $\neq 0$, so bekommt man, wenn g_{ij} identisch $= 0\,(\mathfrak{p})$ ist,

$$(20)\qquad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0,\quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_j}{\beta_2} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0,$$
$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0,\quad l\frac{\alpha_i}{\alpha_3}l\frac{\beta_j}{\beta_3} - l\frac{\beta_i}{\beta_3}l\frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0\,(\mathfrak{p}).$$

Die zweite und die dritte Gleichung in (19) kommen also schon in (20) vor. Subtrahiert man die zweite Gleichung in (20) von der ersten darin, so bekommt man

$$l\frac{\alpha_i}{\alpha_2}l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_i}{\beta_2}l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,$$

woraus

$$l \frac{\alpha_i}{\alpha_2} l \frac{\beta_i}{\beta_1} - l \frac{\beta_i}{\beta_2} l \frac{\alpha_i}{\alpha_1} = 0,$$

was in Verbindung mit der ersten Gleichung in (20) die erste Gleichung in (19) gibt.

Nimmt man zweitens an, daß $a_{i1} = a_{j2} = 0$ ist, die übrigen vier a dagegen $\neq 0$, so hat man

$$(21) \qquad l \frac{\alpha_i}{\alpha_2} l \frac{\beta_j}{\beta_1} - l \frac{\beta_i}{\beta_2} l \frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0, \quad l \frac{\alpha_i}{\alpha_3} l \frac{\beta_j}{\beta_1} - l \frac{\beta_i}{\beta_3} l \frac{\alpha_j}{\alpha_1} = 0,$$

$$l \frac{\alpha_i}{\alpha_2} l \frac{\beta_j}{\beta_3} - l \frac{\beta_i}{\beta_2} l \frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0, \quad l \frac{\alpha_i}{\alpha_3} l \frac{\beta_j}{\beta_3} - l \frac{\beta_i}{\beta_3} l \frac{\alpha_j}{\alpha_3} = 0\,(\mathfrak{p}).$$

Aus der dritten und vierten Gleichung in (21) bekommt man durch ähnliche Schlüsse wie eben, daß

$$l \frac{\alpha_i}{\alpha_2} l \frac{\beta_j}{\beta_2} - l \frac{\beta_i}{\beta_2} l \frac{\alpha_j}{\alpha_2} = 0$$

stattfindet. Aber dann gilt nach dem eben bewiesenen auch die erste Gleichung in (19). Also bleiben die Gleichungen (19) stets gültig.

Wird nun

$$l \frac{\beta_4}{\beta_1} = \eta \, l \frac{\alpha_4}{\alpha_1}$$

gesetzt, so bekommt man aus der ersten Gleichung in (19) für $j = 5, \ldots, m$

$$l \frac{\beta_j}{\beta_1} = \eta \, l \frac{\alpha_j}{\alpha_1},$$

woraus auch $l \frac{\beta_j}{\beta_i} = \eta \, l \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ für alle Paare i, j aus der Reihe $4, \ldots, m$. Die Gleichungen (19) können aber auch in der Form

$$l \frac{\alpha_i}{\alpha_1} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_i}{\beta_1} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0, \quad l \frac{\alpha_i}{\alpha_2} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_i}{\beta_2} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0,$$

$$l \frac{\alpha_i}{\alpha_3} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_i}{\beta_3} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0$$

geschrieben werden, woraus durch Subtraktion folgt

$$l \frac{\alpha_2}{\alpha_1} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_2}{\beta_1} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0, \quad l \frac{\alpha_3}{\alpha_1} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_3}{\beta_1} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0,$$

$$l \frac{\alpha_3}{\alpha_2} l \frac{\beta_j}{\beta_i} - l \frac{\beta_3}{\beta_2} l \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = 0$$

und deshalb bekommt man auch $l \frac{\beta_2}{\beta_1} = \eta \, l \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $l \frac{\beta_3}{\beta_1} = \eta \, l \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, d. h. man hat überhaupt für alle i

$$\frac{\beta_i}{\beta_1} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^{\eta}.$$

Dadurch nimmt eine beliebige der Gleichungen (17) die Form an

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(\lambda)} \alpha_i^{x+\eta y} = 0.$$

Wird $x + \eta y = \zeta$ gesetzt, so ist für ganze x und y in p-adischem Sinne $\zeta \precsim \max(\eta, 1)$. Ist nun die Gleichung $\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{\zeta} = 0$ erfüllt für unendlich viele solche ζ, so gibt es eine Häufungsstelle ζ_0. Wird dann $\zeta = \zeta_0 + \zeta'$ gesetzt und $\bar{a}_i = a_i \alpha_i^{\zeta_0}$, so hat die Gleichung $\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i \alpha_i^{\zeta'} = 0$ unendlich viele Lösungen ζ', die gegen 0 konvergieren und also eine h-Menge bilden. Nach Satz 4 gelten dann alle Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i (l\alpha_i)^r \alpha_i^{\zeta'} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1$$

für eine h-Untermenge davon. Speziell bekommt man die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i (l\alpha_i)^r = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Da die a_i nicht alle 0 sind, so sind die $\bar{a}_i$ nicht alle 0. Also folgt

$$\prod_{i \neq j} (l\alpha_i - l\alpha_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

d. h. für ein Paar i, j gilt $\alpha_i = \alpha_j$ und also wegen der Beziehung

$$\frac{\beta_h}{\beta_1} = \left(\frac{\alpha_h}{\alpha_1}\right)^{\eta}, \quad h = 1, \ldots, m,$$

auch $\beta_i = \beta_j$.

Sonst gibt es nur endlich viele Lösungen ζ. Hat trotzdem (17) unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y), so muß für zwei Paare x_1, y_1 und x_2, y_2 die Gleichung $x_1 + \eta y_1 = x_2 + \eta y_2$ stattfinden, woraus

$$x_1 - x_2 = \eta(y_2 - y_1),$$

d. h. η ist rational. Ist $\eta = -\frac{l_1}{l_2}$, so bekommt man für alle i $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^{l_1} = \left(\frac{\beta_i}{\beta_1}\right)^{-l_2}$ oder mit anderen Worten $\alpha_1^{l_1} \beta_1^{l_2} = \alpha_i^{l_1} \beta_i^{l_2}$.

Weiter muß der Fall betrachtet werden, daß ein g_{ij} nicht identisch verschwindet. Es sei $g_{4,5}$ nicht identisch $= 0\,(\mathfrak{p})$. Ich setze

$$g_{4,5} = b_{1,1}\xi_1^2 + b_{1,2}\xi_1\xi_2 + b_{2,2}\xi_2^2 + b_{1,3}\xi_1\xi_3 + b_{2,3}\xi_2\xi_3 + b_{3,3}\xi_3^2,$$

wo also

$$b_{1,1} = a_{4,1} a_{5,1} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_5}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\right),$$

$$b_{1,2} = a_{4,1} a_{5,2} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_5}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\right) + a_{4,2} a_{5,1} \left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_5}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\right),$$

usw.

Nun muß nach Satz 4 für unendlich viele der Lösungen (x, y) nicht nur $g_{4,5} = 0\,(\mathfrak{p})$, sondern auch $g_{4,4,5} = 0$ und $g_{4,5,5} = 0\,(\mathfrak{p})$ stattfinden, wobei

$$g_{4,4,5} = \frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial y} - \frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial x}, \quad g_{4,5,5} = \frac{\partial f_5}{\partial x}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial y} - \frac{\partial f_5}{\partial y}\frac{\partial g_{4,5}}{\partial x}.$$

Nach einigen Rechnungen findet man

$$g_{4,4,5} = c_{1,1,1}\xi_1^3 + c_{1,1,2}\xi_1^2\xi_2 + c_{1,2,2}\xi_1\xi_2^2 + c_{2,2,2}\xi_2^3 + c_{1,1,3}\xi_1^2\xi_3 + \cdots + c_{3,3,3}\xi_3^3 + c_{1,2,3}\xi_1\xi_2\xi_3,$$

wo

(22)
$$\begin{aligned}
c_{1,1,1} &= a_{4,1}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{2,2,2} &= a_{4,2}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2^2\right),\\
c_{3,3,3} &= a_{4,3}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_3^2\right),\\
c_{1,1,2} &= a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_2\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{1,2,2} &= a_{4,1}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_2^2\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1\alpha_2\right),\\
c_{1,1,3} &= a_{4,1}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1^2\right),\\
c_{1,3,3} &= a_{4,1}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_3^2\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1\alpha_3\right),\\
c_{2,2,3} &= a_{4,2}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{2,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_2^2\right),\\
c_{2,3,3} &= a_{4,2}b_{3,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_3^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2^2\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_2\alpha_3\right),\\
c_{1,2,3} &= a_{4,1}b_{2,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_2\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_2\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,2}b_{1,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1\beta_3 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1\alpha_3\right)\\
&\quad + a_{4,3}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\alpha_1\alpha_2\right).
\end{aligned}$$

Tritt es nun ein, daß $g_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_2, ξ_3 reduzibel ist im Körper $K(\mathfrak{p})$, so ist die Richtigkeit des Satzes 8 klar nach Satz 6; denn dann bekommt man ja bei der Zerlegung von $g_{4,5}$ in seine Linearfaktoren außer den $m-3$ Gleichungen (18) noch eine weitere lineare Gleichung in ξ_1, ξ_2, ξ_3, die offenbar von den ersten $m-3$ linear unabhängig ist. Ist $g_{4,5}$ dagegen wohl irreduzibel, aber kein Teiler von $g_{4,4,5}$ oder $g_{4,5,5}$, so muß Satz 8 richtig sein nach Satz 5; denn geht $g_{4,5}$ z. B. nicht in $g_{4,4,5}$ auf, so sind die Gleichungen

$$g_{4,5} = 0, \quad g_{4,4,5} = 0\,(\mathfrak{p})$$

nur von endlich vielen Werten von ξ_1/ξ_3 und ξ_2/ξ_3 erfüllt, d. h. man bekommt die Disjunktion zwischen einer endlichen Anzahl von Gleichungen der Form

$$\xi_1 = b\,\xi_3, \quad \xi_2 = c\,\xi_3,$$

welche mit (18) zusammen ein System von $m-1$ linear-unabhängigen Gleichungen in den ξ geben. Also bleibt nur übrig zu untersuchen, wie die Sache steht, wenn das quadratische Polynom $g_{4,5}$ sowohl in dem kubischen Polynom $g_{4,4,5}$ wie in $g_{4,5,5}$ aufgeht.

Dann muß

$$c_{1,1,1}\xi_1^3 + c_{1,1,2}\xi_1^2\xi_2 + \ldots + c_{3,3,3}\xi_3^3 + c_{1,2,3}\xi_1\xi_2\xi_3$$
$$= (b_{1,1}\xi_1^2 + b_{1,2}\xi_1\xi_2 + \ldots + b_{3,3}\xi_3^2)\left(\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}}\xi_1 + \frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}}\xi_2 + \frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}}\xi_3\right)$$

sein, wodurch man bekommt

$$(23)\quad \begin{aligned}
&b_{1,1}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{1,2}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,1,2}, \qquad b_{1,2}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{2,2}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,2,2},\\
&b_{1,1}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{1,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,1,3}, \qquad b_{1,3}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{3,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,3,3},\\
&b_{2,2}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{2,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} = c_{2,2,3}, \qquad b_{2,3}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{3,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} = c_{2,3,3},\\
&b_{1,2}\frac{c_{3,3,3}}{b_{3,3}} + b_{1,3}\frac{c_{2,2,2}}{b_{2,2}} + b_{2,3}\frac{c_{1,1,1}}{b_{1,1}} = c_{1,2,3}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung in (23) nimmt durch Einsetzung der Werte der c nach (22) die Form an

$$a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_2^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_2^2\right) + a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1^2\right)$$
$$= a_{4,1}b_{1,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\beta_1\beta_2 - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\alpha_1\alpha_2\right) + a_{4,2}b_{1,1}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\beta_1^2 - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\alpha_1^2\right),$$

oder

$$(2\,a_{4,2}b_{1,1} - a_{4,1}b_{1,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0.$$

Durch ähnliche Rechnungen bekommt man aus (23) das System

$$(24)\quad \begin{gathered}
(2\,a_{4,\,2}\,b_{1,\,1} - a_{4,\,1}\,b_{1,\,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \doteq 0,\\
(2\,a_{4,\,1}\,b_{2,\,2} - a_{4,\,2}\,b_{1,\,2})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0,\\
(2\,a_{4,\,3}\,b_{1,\,1} - a_{4,\,1}\,b_{1,\,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) = 0,\\
(2\,a_{4,\,1}\,b_{3,\,3} - a_{4,\,3}\,b_{1,\,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) = 0,\\
(2\,a_{4,\,3}\,b_{2,\,2} - a_{4,\,2}\,b_{2,\,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = 0,\\
(2\,a_{4,\,2}\,b_{3,\,3} - a_{4,\,3}\,b_{2,\,3})\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = 0,\\
a_{4,\,1}\,b_{2,\,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_1^2}{\beta_2\,\beta_3} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2\,\alpha_3}\right) + a_{4,\,2}\,b_{1,\,3}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2^2}{\beta_1\,\beta_3} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1\,\alpha_3}\right)\\
+ a_{4,\,3}\,b_{1,\,2}\left(l\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\,l\frac{\beta_3^2}{\beta_1\,\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_3}\,l\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1\,\alpha_2}\right) = 0.
\end{gathered}$$

Ebenso bekommt man natürlich, da $g_{4,\,5}$ in $g_{4,\,5,\,5}$ aufgeht, auch die analogen Gleichungen, die aus (24) entstehen, wenn der Index 4 überall durch 5 ersetzt wird.

Zuerst betrachte ich die folgende Annahme:

1. Sowohl einer der Ausdrücke

$$2\,a_{4s}\,b_{rr} - a_{4r}\,b_{rs}, \quad 2\,a_{4r}\,b_{ss} - a_{4s}\,b_{rs},$$

wie auch einer der Ausdrücke

$$2\,a_{5s}\,b_{rr} - a_{5r}\,b_{rs}, \quad 2\,a_{5r}\,b_{ss} - a_{5s}\,b_{rs}$$

ist $\neq 0$, wobei r, s $(r \neq s)$ zwei der Indizes 1, 2, 3 sind. Z. B. für $r = 1$, $s = 2$ bekommt man dann sowohl

$$(25)\quad l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$$

wie

$$(26)\quad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0.$$

Aus (25) und (26) folgt aber

$$(27)\quad l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\frac{\beta_5}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_1} = 0.$$

Da (25) und (26) ebensogut in der Form

$$l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$$

geschrieben werden können, so bekommt man auch

$$(28)\quad l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\frac{\beta_5}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 0$$

und augenscheinlich auch

$$(29)\qquad l\,\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\,l\,\frac{\beta_5}{\beta_2}-l\,\frac{\beta_4}{\beta_1}\,l\,\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=0,\quad l\,\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\,l\,\frac{\beta_5}{\beta_1}-l\,\frac{\beta_4}{\beta_2}\,l\,\frac{\alpha_5}{\alpha_1}=0.$$

Aus (27), (28) und (29) folgt aber $b_{1,1}=b_{1,2}=b_{2,2}=0$, und das streitet gegen die gemachte Annahme.

Ich kann also weiter annehmen, für jedes Paar r, s, $r \neq s$, der Zahlen 1, 2, 3 gälten entweder die Gleichungen

$$2\,a_{4s}\,b_{rr}-a_{4r}\,b_{rs}=0 \quad\text{und}\quad 2\,a_{4r}\,b_{ss}-a_{4s}\,b_{rs}=0$$

oder

$$2\,a_{5s}\,b_{rr}-a_{5r}\,b_{rs}=0 \quad\text{und}\quad 2\,a_{5r}\,b_{ss}-a_{5s}\,b_{rs}=0.$$

Da entweder a_{4r} oder $a_{4s} \neq 0$ ist, folgt hieraus $b_{rs}^2-4\,b_{rr}\,b_{ss}=0$, d. h. man hat

$$(30)\quad b_{1,2}^2-4\,b_{1,1}\,b_{2,2}=0,\quad b_{1,3}^2-b_{1,1}\,b_{3,3}=0,\quad b_{2,3}^2-4\,b_{2,2}\,b_{3,3}=0\ (\mathfrak{p}).$$

Sind die drei Zahlen $b_{1,1}$, $b_{2,2}$, $b_{3,3}=0$, so folgt aus (30) auch $b_{1,2}=b_{1,3}=b_{2,3}=0$, woraus $g_{4,5}=0$ identisch. Ist $b_{1,1}=0$, dagegen $b_{2,2}\neq 0$, so folgt aus (30), daß auch $b_{1,2}=b_{1,3}=0$ sein muß, und dann ist

$$4\,b_{2,2}\,g_{4,5}=(2\,b_{2,2}\,\xi_2+b_{2,3}\,\xi_3)^2.$$

Also kann ich weiter annehmen, daß alle $b \neq 0$ sind. Man bekommt nun, von Indizesvertauschungen abgesehen, zwei weitere Fälle.

2.
$$\begin{aligned}
&2\,a_{4,2}\,b_{1,1}-a_{4,1}\,b_{1,2}=0,\quad 2\,a_{4,1}\,b_{2,2}-a_{4,2}\,b_{1,2}=0,\\
&2\,a_{4,3}\,b_{1,1}-a_{4,1}\,b_{1,3}=0,\quad 2\,a_{4,1}\,b_{3,3}-a_{4,3}\,b_{1,3}=0,\\
&2\,a_{4,3}\,b_{2,2}-a_{4,2}\,b_{2,3}=0,\quad 2\,a_{4,2}\,b_{3,3}-a_{4,3}\,b_{2,3}=0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, da $a_{4,1}$, $a_{4,2}$, $a_{4,3} \neq 0$ sein müssen, z. B.

$$b_{1,1}\,b_{2,3}=\frac{a_{4,1}}{2\,a_{4,2}}\,b_{1,2}\cdot\frac{2\,a_{4,2}}{a_{4,3}}\,b_{3,3}=\frac{a_{4,1}}{a_{4,3}}\,b_{1,2}\cdot\frac{a_{4,3}}{2\,a_{4,1}}\,b_{1,3}=\frac{b_{1,2}\,b_{1,3}}{2},$$

und deshalb wird

$$4\,b_{1,1}\,g_{4,5}=(2\,b_{1,1}\,\xi_1+b_{1,2}\,\xi_2+b_{1,3}\,\xi_3)^2.$$

3.
$$(31)\qquad\begin{aligned}
&2\,a_{4,2}\,b_{1,1}-a_{4,1}\,b_{1,2}=0,\quad 2\,a_{4,1}\,b_{2,2}-a_{4,2}\,b_{1,2}=0,\\
&2\,a_{4,3}\,b_{1,1}-a_{4,1}\,b_{1,3}=0,\quad 2\,a_{4,1}\,b_{3,3}-a_{4,3}\,b_{1,3}=0,\\
&2\,a_{5,3}\,b_{2,2}-a_{5,2}\,b_{2,3}=0,\quad 2\,a_{5,2}\,b_{3,3}-a_{5,3}\,b_{2,3}=0.
\end{aligned}$$

Hier muß die Determinante $a_{4,2}\,a_{5,3}-a_{4,3}\,a_{5,2}\neq 0$ sein; denn sonst würde man auch $2\,a_{4,3}\,b_{2,2}-a_{4,2}\,b_{2,3}=0$ und $2\,a_{4,2}\,b_{3,3}-a_{4,3}\,b_{2,3}=0$ erhalten, so daß man wieder den Fall 2. hatte. Was die beiden anderen Koeffizientendeterminanten

$$a_{4,1}\,a_{5,2}-a_{4,2}\,a_{5,1}\quad\text{und}\quad a_{4,1}\,a_{5,3}-a_{4,3}\,a_{5,1}$$

betrifft, so kann höchstens eine von ihnen $=0\,(\mathfrak{p})$ sein. Ich unterscheide deshalb wieder zwei Fälle.

3 a. Alle drei Determinanten sind $\neq 0$. Dann gelten außer den Gleichungen (31) auch

$$(32) \qquad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0, \quad l\frac{\alpha_5}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_5}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0,$$
$$l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0,$$

da z. B. $2\,a_{5,2}\,b_{1,1} - a_{5,1}\,b_{1,2} \neq 0$ sein muß (vgl. (24)). Aus der ersten und zweiten Gleichung in (32) folgt $l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_3}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$, woraus $l\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_3}{\beta_2} - l\frac{\beta_3}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 0$ und daraus in Verbindung mit der dritten Gleichung in (32) offenbar $l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_3}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0$ und auch $l\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_2}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$ oder mit anderen Worten $l\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\, l\frac{\beta_2}{\beta_1} - l\frac{\beta_4}{\beta_1}\, l\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$. Also hat man wieder (25) und (26) mit demselben Ergebnis wie früher.

Jetzt ist also überhaupt bewiesen, daß, wenn $g_{4,5}$ in $g_{4,4,5}$ und $g_{4,5,5}$ aufgeht, während die drei Koeffizientendeterminanten aus g_4 und $g_5 \neq 0$ sind, $g_{4,5}$ reduzibel sein muß, und Satz 8 folgt aus Satz 6.

3 b. Es ist

$$a_{4,1}\,a_{5,2} - a_{4,2}\,a_{5,1} = 0.$$

Wegen der Möglichkeit einer Indizesvertauschung genügt diese Annahme. Dann gelten auch die Gleichungen

$$2\,a_{5,2}\,b_{1,1} - a_{5,1}\,b_{1,2} = 0, \quad 2\,a_{5,1}\,b_{2,2} - a_{5,2}\,b_{1,2} = 0.$$

Man erkennt, daß jetzt alle $a \neq 0$ sein müssen. Setzt man

$$\bar{f}_4 = -\frac{1}{a_{4,2}} f_4 = \xi_2 + \frac{a_{4,1}}{a_{4,2}}\,\xi_1 + \frac{a_{4,3}}{a_{4,2}}\,\xi_3 - \frac{1}{a_{4,2}}\,\xi_4,$$

$$\bar{f}_5 = f_5 - \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}} f_4 = \xi_5 - \frac{a_{4,1}\,a_{5,3} - a_{4,3}\,a_{5,1}}{a_{4,1}}\,\xi_3 - \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}}\,\xi_4,$$

so wird

$$\bar{g}_{4,5} = \frac{\partial \bar{f}_4}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{f}_5}{\partial y} - \frac{\partial \bar{f}_4}{\partial y}\,\frac{\partial \bar{f}_5}{\partial x} = -\frac{1}{a_{4,2}}\,g_{4,5}.$$

Da $g_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_2, ξ_3 nicht identisch verschwindet, so kann $\bar{g}_{4,5}$ als Polynom in ξ_1, ξ_3, ξ_4 nicht identisch verschwinden. Außerdem sind die drei Koeffizientendeterminanten der linearen Ausdrücke

$$-\frac{a_{4,1}}{a_{4,2}}\,\xi_1 - \frac{a_{4,3}}{a_{4,2}}\,\xi_3 + \frac{1}{a_{4,2}}\,\xi_4, \quad \frac{a_{4,1}\,a_{5,3} - a_{4,3}\,a_{5,1}}{a_{4,1}}\,\xi_3 + \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}}\,\xi_4$$

$\neq 0\,(\mathfrak{p})$; denn auch

$$-\frac{a_{4,3}}{a_{4,2}} \cdot \frac{a_{5,1}}{a_{4,1}} - \frac{1}{a_{4,2}} \cdot \frac{a_{4,1}\,a_{5,3} - a_{4,3}\,a_{5,1}}{a_{4,1}} = -\frac{a_{5,3}}{a_{4,2}}$$

ist $\neq 0$. Geht nun $\bar{g}_{4,5}$ nicht in $\bar{g}_{4,4,5} = \frac{\partial(\bar{g}_4, \bar{g}_{4,5})}{\partial(x,y)}$ oder nicht in $\bar{g}_{4,5,5} = \frac{\partial(\bar{g}_5, \bar{g}_{4,5})}{\partial(x,y)}$ auf, so folgt wie früher die Richtigkeit des Satzes 8. Geht $\bar{g}_{4,5}$ aber auf sowohl in $\bar{g}_{4,4,5}$ wie in $\bar{g}_{4,5,5}$, so muß zufolge des bisher bewiesenen $\bar{g}_{4,5}$ reduzibel sein, und Satz 8 folgt aus Satz 6.

Hierdurch ist Satz 8 vollständig bewiesen.

Satz 9. *Es sei K_1 ein solcher Körper fünften Grades, daß in der Reihe der konjugierten Körper $K_1, \ldots, K_5$ nur ein reeller vorkommt. Weiter seien α, β, γ ganze Zahlen aus K_1, welche linear-unabhängig in bezug auf den absoluten Rationalitätsbereich sind. Ist dann*

$$f(x, y, z) = N(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad N = Norm,$$

so hat die Gleichung

$$f(x, y, z) = a,$$

wo a eine ganze rationale Zahl ist, nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x, y, z.

Beweis. Es gibt in K_1 nur endlich viele nicht-assoziierte Zahlen, deren Norm $= a$ ist. Es sei $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(u)}$ ein vollständiges Repräsentantensystem dieser Zahlen. Dann muß

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \xi$$

sein, wo δ eine der Zahlen $\delta^{(i)}$ ist und ξ eine Einheit. Ich setze $\alpha = \alpha_1, \ldots, \xi = \xi_1$ und bezeichne die konjugierten Zahlen aus K_i $(i = 2, 3, 4, 5)$ mit $\alpha_i, \ldots, \xi_i$. Dann gelten also die Gleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = \delta_i \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Hieraus bekommt man

$$(33) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \xi_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \xi_3 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 \xi_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \xi_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 \xi_5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \xi_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 \xi_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \xi_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \xi_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 \xi_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Das sind lineare Gleichungen in den ξ mit Koeffizienten aus dem Normalkörper K, der von den Zahlen in $K_1, \ldots, K_5$ erzeugt wird. Zwei der Gleichungen müssen auch linear-unabhängig sein; denn da α, β, γ linear unabhängig relativ zum absoluten Körper sind, so können nicht alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}$$

$= 0$ sein. Ist aber z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so sind die erste und zweite der Gleichungen (33) linear unabhängig, da ja die erste ξ_4, aber nicht ξ_5 enthält, die zweite ξ_5, aber nicht ξ_4 enthält.

Weiter ist $\xi_1 = \varepsilon_1^u \varepsilon_2^v$, wenn ε_1 und ε_2 zwei Grundeinheiten in K_1 sind. Nach Satz 8 könnten dann unendlich viele ganzzahlige Lösungen u, v unserer Gleichungen in den ξ nur existieren, wenn ganze Exponenten l_1 und l_2, nicht beide 0, vorhanden wären derart, daß $\varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2}$ zu einem Unterkörper von K_1 gehörte, d. h. $\varepsilon_1^{l_1} \varepsilon_2^{l_2} =$ einer rationalen Zahl wäre. Da das nicht der Fall ist, so ist Satz 9 hierdurch bewiesen.

Die in dieser Abhandlung bewiesenen Sätze über die exponentiellen Gleichungen können weitgehend verallgemeinert werden. Bei einer späteren Gelegenheit werde ich auf diese Verallgemeinerungen eingehen.

Natürlich ist es auch wünschenswert, die Sätze derart zu verschärfen, daß man nicht bloß die Endlichkeit der Anzahl der ganzzahligen Lösungen unter den angegebenen Bedingungen beweist, sondern auch eine obere Schranke für diese Lösungszahl wirklich angibt. In meinen früheren Arbeiten[5]) über die Anwendung der p-adischen Methode auf exponentielle Gleichungen habe ich tatsächlich eine solche obere Schranke angeben können, aber dort war freilich nur von spezielleren Anwendungen die Rede. Auch auf die Möglichkeit einer solchen Verschärfung hoffe ich später zurückzukommen.

---

[5]) Diese sind: 1. Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. (Oslo Vid. Akad. Skrifter, I. Mat. Naturv. Kl. 1933. Nr. 6). 2. En metode til behandling av ubestemte ligninger. (Chr. Michelsens Institutts beretninger IV, 6, Bergen 1934). 3. Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen. 8-e skandinaviske matematikerkongres, Stockholm 1934).

(Eingegangen am 1. 1. 1935).