

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. D. Bruno, A. Soleev, Local uniformization of the branches of a space curve, and Newton polyhedra, *Algebra i Analiz*, 1991, Volume 3, Issue 1, 67–101

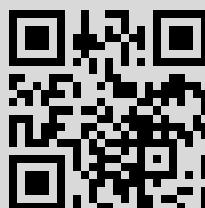
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 89.70.153.61

November 26, 2022, 11:51:06



© 1991 г.

## ЛОКАЛЬНАЯ УНИФОРМИЗАЦИЯ ВЕТВЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ И МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА

А. Д. Брюно, А. Солеев

Рассматривается кривая, заданная системой неявных уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

где  $f_i$  — многочлены или аналитические функции. Излагается алгоритм, позволяющий получать локальные униформизации для всех ветвей кривой (1) в малой окрестности особой точки  $X^0$ . Алгоритм использует многогранники Ньютона, для которых предложен способ их вычисления, и степенные преобразования.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (0.1)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — вещественные или комплексные переменные и  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  соответственно вещественные или комплексные функции, аналитические в окрестности некоторой точки  $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , являющейся корнем системы (0.1), т.е. все  $f_i(X^0) = 0$ .

Пусть  $X^0$  — простой корень системы (0.1), т.е. в этой точке ранг матрицы  $A = (\partial f_i / \partial x_j)$  равен  $n-1$ . Тогда по теореме о неявной функции систему (0.1) в малой окрестности точки  $X^0$  можно разрешить относительно  $n-1$  координат, и ее решения образуют одну кривую линию, проходящую через  $X^0$ . Например, если левый минор порядка  $n-1$  матрицы  $A$  отличен от нуля, то решения системы (0.1) можно найти в виде  $x_i = \varphi_i(x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Если же  $X^0$  — особая точка (т.е. в ней ранг матрицы  $A$  меньше, чем  $n-1$ ), то через эту точку могут проходить несколько ветвей, образованных решениями системы (0.1). Для каждой из них имеется своя локальная униформизация

$$x_i - x_i^0 = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tau^{p_{ij}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.2)$$

---

*Ключевые слова:* многогранник Ньютона, степенные преобразования, локальная униформизация, ветви алгебраических кривых.

где  $b_{ij}$  — комплексные коэффициенты, целые  $p_{ij}$  отрицательны,  $p_{ij} > p_{i,j+1}$  и параметр  $\tau \rightarrow \infty$ . Легко показать, что разным ветвям кривой (0.1) соответствуют разные разложения (0.2). Поэтому ветвь (0.2) считаем отделенной, если для нее вычислен начальный отрезок разложения (0.2) и доказано, что нет других ветвей с таким же начальным отрезком разложения.

В настоящей работе излагается процедура, позволяющая различать все ветви кривой (0.1) вблизи особой точки  $X^0$  и вычислять их униформизации (0.2) с любой степенью точности. Эта же процедура пригодна для нахождения тех ветвей алгебраической кривой, у которых некоторые (или все) координаты стремятся к бесконечности.

Дадим краткий обзор методов нахождения ветвей кривой вблизи особой точки  $X^0 = 0$ .

Для случая  $n = 2$  Ньютон [25] предложил геометрический прием, получивший название „многоугольник (или ломаная) Ньютона“ [34, 40]. Этот прием позволяет все малые решения уравнения

$$f(x, y) \triangleq \sum_{p, q} f_{pq} x^p y^q = 0 \quad (0.3)$$

получить в виде нескольких „рядов Пюизо“

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^{p_j}, \quad 0 < p_1 < p_2 < \dots \quad (0.4)$$

с рациональными  $p_j$ . Для этого ряду  $f$  из (0.3) на плоскости  $p, q$  ставится в соответствие множество  $D$  точек  $(p, q)$  с  $f_{pq} \neq 0$  и затем выделяется граница выпуклой оболочки множества  $D$  (ломаная Ньютона). Сумма членов  $\sum' f_{pq} x^p y^q \triangleq \hat{f}$ , точки которых лежат на одном ребре ломаной Ньютона, дает „укороченное уравнение“  $\hat{f} = 0$ , из которого находится первый член ряда (0.4). После замены  $y = b_1 x^{p_1} + z$  аналогично находится второй член разложения (0.4) и т.д. Но разложения (0.4) не дают локальной униформизации ветвей: одной ветви (0.2) соответствует несколько разных разложений (0.4). Поэтому Вейерштрасс [52] (см. также [12], гл. I, § 2) предложил процедуру разрешения особенности, которая сохраняет целочисленность показателей и приводит к локальной униформизации ветвей. Эта процедура аналогична сигма-процессу [34] и может быть выполнена с помощью степенных преобразований.

Для систем (0.1) с  $n \geq 3$  было предложено несколько обобщений этих методов.

Метод последовательного исключения координат из системы (0.1) и сведение ее к одному уравнению (0.3) был предложен Лефшецем ([46, 23], гл. VIII, § 8) и детально разработан Айзенгендлером, Вайнбергом и Треногиным [2, 15, 16]. Этот метод дает системы уравнений вида  $g_1(X) = \dots = g_l(X) = 0$  с  $l < n - 1$  для  $(n - l)$ -мерных компонент решений системы (0.1) и разложения по дробным степеням одной из координат для одномерных компонент. Метод исключения удобен для теоретического обоснования вопросов нелинейного ветвления. Так, этим методом можно доказать существование униформизаций (0.2) для всех одномерных компонент решений системы

(0.1). Но этот метод не всегда удобен для практического использования, ибо требует громоздких вычислений со степенными рядами.

Метод ломаных Ньютона, предложенный Мак-Милланом [48], состоит в следующем. Каждый ряд  $f_i$  записывается в виде

$$f_i = \sum_{p,q} f_{iq}^{(p)} x_n^q, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (0.5)$$

где  $f_{iq}^{(p)}$  — однородный многочлен от  $x_1, \dots, x_{n-1}$  степени  $p$ . Каждому ряду  $f_i$  на плоскости  $p, q$  ставится в соответствие свое множество  $\tilde{D}_i$  точек  $(p, q)$  с  $f_{iq}^{(p)} \neq 0$  и своя ломаная Ньютона. Затем выделяются ребра и вершины этих ломаных, лежащие на опорных прямых с одинаковым наклоном. По точкам множеств  $\tilde{D}_i$ , лежащим на выделенных ребрах и вершинах, строится укороченная система

$$\hat{f}_1 = \dots = \hat{f}_{n-1} = 0 \quad (0.5')$$

решение которой дает первые члены однородных разложений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} x_n^{p_j}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (0.6)$$

где  $p_j$  — рациональные числа,  $0 < p_j < p_{j+1}$ . Макмиллан указывает, что не все решения системы (0.1) имеют однородный вид (0.6) и могут быть найдены с помощью ломаных Ньютона. Поэтому он предлагает дополнительные приемы для отыскания решений, у которых  $x_1, \dots, x_{n-1}$  имеют разные порядки малости по  $x_n$ . Видимо не зная этой работы, Грейвс [43] предложил рассматривать систему (0.1) в виде одного векторного уравнения

$$F \triangleq \sum_{p,q} F_q^{(p)} x_n^q = 0$$

с одной ломаной Ньютона на плоскости  $p, q$ . Недостаток этого подхода в том, что у Грейвса в укороченном векторном уравнении  $\hat{F} = 0$  некоторые компоненты вектора  $\hat{F}$  могут быть тождественными нулями. В то время как у Мак-Миллана в укороченной системе (0.5') каждое  $\hat{f}_i$  содержит какие-то члены  $f_{iq}^{(p)} x_n^q$  и не является тождественным нулем. Поэтому у Грейвса множества решений укороченного векторного уравнения могут иметь большую размерность, что затрудняет нахождение даже ветвей с однородными разложениями (0.6). Конструкцию Грейвса с одной ломаной Ньютона развивал Боташев [4].

Метод многогранников Ньютона заключается в том, что каждому

$$f_i \triangleq \sum_Q f_{iQ} X^Q, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (0.7)$$

где  $Q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$ ,  $f_{iQ}$  — числовые коэффициенты, в  $\mathbb{R}^n$  ставятся в соответствие носитель  $D(f_i) = \{Q : f_{iQ} \neq 0\}$  и его выпуклая

оболочка  $M(f_i)$ , называемая многогранником Ньютона ряда  $f_i$ . По граням многогранников  $M(f_1), \dots, M(f_{n-1})$  составляется "укороченная система"

$$\hat{f}_1 = \dots = \hat{f}_{n-1} = 0 \quad (0.8)$$

таким образом, что первое приближение решения (0.2) является решением системы (0.8). При этом укороченная система (0.8) квазиоднородна и степенным преобразованием  $y_i = X^{Q_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , сводится к системе от меньшего числа переменных. Соответствующая геометрия показателей степеней сначала была предложена [6] и развита [7-9] для исследования решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. В частности, в [6] был определен многогранник Ньютона. В [10, 12] на основе этого подхода был предложен локальный метод, применение которого демонстрируется в гл. I на решении аналитического уравнения (0.3). Применение многогранников Ньютона для отделения ветвей пространственной алгебраической кривой (0.1) было намечено в ([11, 12], гл. IV, § 2), а для аналитической — в [29]. Этот подход подробно излагается в настоящей работе. Бернштейн [3] применил этот подход для подсчета числа ветвей алгебраической кривой специального вида, но вопрос о вычислении асимптотических разложений не рассматривал (см. также [38, 45]).

К методу многогранников Ньютона примыкают работы Бугаева [14] и Синцова [27]. Бугаев рассматривал случай конечных сумм (0.7) и для выделения укороченных систем (0.8) предложил перебор всех возможных вариантов. Синцов предложил геометрический прием, который соответствует построению конусов, двойственных граням многогранников Ньютона  $M(f_i)$  (подробности см. в § 7).

Кроме этих общих методов, было предложено много специальных приемов для решения отдельных задач ветвления (см. обзор [51]); например, метод Назарова [21]. В обзоре Боташева [5] искажены как существо методов анализа многомерного ветвления, так и история их развития. Перечисленные выше методы (кроме метода Вейерштрасса для  $n = 2$  и метода многогранников Ньютона для произвольного  $n$ ) дают решения системы (0.1) в виде рядов по дробным степеням одной из координат, т.е. не дают локальной униформизации ветвей.

После 1962 г., когда в [6] был сконструирован многогранник Ньютона, его использовали во многих работах: для оценки числа решений системы  $n$  уравнений от  $n$  неизвестных, для нахождения асимптотик осциллирующих интегралов, для вычисления топологических характеристик алгебраических многообразий, для разрешения особенностей, для дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных, а также в других задачах (см. обзоры в [12], гл. IV; [38, 1] и статьи [3, 17, 18, 20, 22, 24, 30-33, 37-39, 45, 50]). При этом обычно рассматривали задачи общего положения с заданными многогранниками Ньютона, а исследования носили скорее теоретический характер. Попытки решения конкретных задач потребовали создания алгоритма для вычисления многогранников Ньютона. Такой алгоритм излагается в § 5, он запрограммирован на ЭВМ и проверен на многомерных примерах [32].

В отличие от работ Бернштейна [3], Хованского [38, 45] и других в настоящей статье не предполагается, что система (0.1) находится в общем положении. Для упрощения изложения предполагается лишь, что система (0.1) не относится к исключительному множеству бесконечной коразмерности в пространстве систем (0.1). А именно накладывается

*Основное ограничение.* Вблизи точки  $X = X^0$  множество решений системы (0.1) одномерно.

Для понимания статьи не требуется специальных знаний, она доступна любым математикам, включая студентов-старшекурсников. Ее методы авторы [13, 31] применили для исследования сложных бифуркаций периодических решений дифференциальных уравнений.

## § 1. Многогранник Ньютона и нормальные конусы

Рассмотрим многочлен Лорана

$$f(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{j=1}^l a_j X^{Q_j}, \quad (1.1)$$

подобные члены которого уже приведены. При этом  $Q_j = (q_{j1}, \dots, q_{jn})$ ,  $x^{Q_j} = x_1^{q_{j1}} \dots x_n^{q_{jn}}$ . Здесь показатели степени  $q_{ji}$  — целые, коэффициенты  $a_j$  — вещественные или комплексные числа. Если в многочлене (1.1) сделаем подстановку  $x_i = \tau^{p_i}$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $\Sigma p_i^2 \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то

$$f(\tau^{p_1}, \dots, \tau^{p_n}) = \sum_{j=1}^l a_j \tau^{\langle P, Q_j \rangle},$$

где  $P = (p_1, \dots, p_n)$  и  $\langle P, Q \rangle$  — скалярное произведение. При  $\tau \rightarrow \infty$  выделим в этой сумме те слагаемые, которые имеют наибольшую степень по  $\tau$ . Пусть для упрощения обозначений, это будут первые  $k$  слагаемых ( $1 \leq k \leq l$ ), т.е.

$$\langle P, Q_1 \rangle = \dots = \langle P, Q_k \rangle, \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q_j \rangle, k < j < l+1. \quad (1.2)$$

Тогда сумма

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k a_j X^{Q_j} \quad (1.3)$$

называется *укорочением функции*  $f$  по векторному порядку  $P = (p_1, \dots, p_n)$  [7]. При подстановках вида

$$x_i = b_i \tau^{p_i} (1 + o(1)), \Sigma p_i^2 \neq 0, i = 1, \dots, n, (\tau \rightarrow \infty), \quad (1.4)$$

имеем

$$f(X) = \tau^r \hat{f}(B) + o(\tau^r), \text{ где } r = \langle P, Q_1 \rangle.$$

Множество  $K = K(f, \hat{f})$  всех тех и только тех порядков  $P$ , по которым  $\hat{f}$  является укорочением функции  $f$ , называется *нормальным конусом* или

просто *конусом укорочения* (1.3). В конус  $K$  укорочения (1.3) входят те и только те векторы  $P$ , которые удовлетворяют системе (1.2).

Дадим геометрическую интерпретацию укорочений и конусов. Каждому одночлену  $a_j X^{Q_j}$  поставим в соответствии точку  $Q_j$  в  $n$ -мерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Совокупность всех таких точек  $D(f) = \{Q : a_j \neq 0\} = \{Q_j\}$  называется *носителем* многочлена Лорана  $f$ . Пусть  $\bar{\mathbb{R}}^n$  — пространство, сопряженное к пространству  $\mathbb{R}^n$  и  $P \in \bar{\mathbb{R}}^n$ . Укорочение по порядку  $P$  характеризуется тем, что для тех слагаемых  $a_j X^{Q_j}$ , которые входят в укорочение,  $\langle P, Q_j \rangle = r$ , а для тех членов, которые не входят в укорочение,  $\langle P, Q_j \rangle < r$ . При фиксированном векторе  $P$  уравнение  $\langle P, Q \rangle = r$  определяет в  $\mathbb{R}^n$  гиперплоскость  $L$ , которая делит пространство  $\mathbb{R}^n$  на два полупространства: положительное  $L^+ = \{\langle P, Q \rangle > r\}$  и отрицательное  $L^- = \{\langle P, Q \rangle \leq r\}$ . Гиперплоскость  $L$  называется *опорной* для множества  $D$  если в ее положительном полупространстве нет точек из  $D$ , и у любой гиперплоскости  $\langle P, Q \rangle = s < r$  в положительном полупространстве есть точки из  $D$ . Обозначим через  $L_P$  опорную к  $D$  гиперплоскость, соответствующую вектору  $P$ , через  $D_P$  обозначим  $L_P \cap D$ , через  $M$  — пересечение всех отрицательных полупространств  $L_P^-$  опорных гиперплоскостей множества  $D$ . Пересечение множества  $M$  с опорной гиперплоскостью  $L_P$  назовем *гранью*. Граница замкнутого множества  $M$  состоит из граней различной размерности (вершина — нульмерная грань, ребро — одномерная грань и т.д.). Будем обозначать грани через  $\Gamma_k^{(d)}$ , где  $k$  — номер грани,  $d$  — ее *размерность*. Обозначим  $D_k^{(d)} = D \cap \Gamma_k^{(d)}$ . Если  $\Gamma_k^{(d)} = L_P \cap M$ , то очевидно,  $D_P = D_k^{(d)}$ ; т.е. все граничные подмножества  $D_P$  суть множества  $D_j^{(d)}$ , расположенные на гранях. Зафиксируем грань  $\Gamma_k^{(d)}$ , и множество  $K_k^{(d)}$  векторов  $P \in \bar{\mathbb{R}}^n$ , для которых  $\Gamma_k^{(d)} = L_P \cap M$ , назовем *нормальным конусом* грани  $\Gamma_k^{(d)}$ . Очевидно,

$$K_k^{(d)} = \left\{ P : \begin{array}{l} \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle; Q', Q'' \in \Gamma_k^{(d)} \\ \langle P, Q' \rangle > \langle P, Q \rangle; Q \in M \setminus \Gamma_k^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Поскольку множество  $D$  состоит из конечного числа точек, то множество  $M$  является *многогранником* и его граница состоит из конечного числа граней  $\Gamma_k^{(d)}$  [19]. Пусть размерность самого многогранника  $M$  равна  $n$ . Тогда нормальный конус  $K_k^{(n-1)}$  гиперграни  $\Gamma_k^{(n-1)}$  является лучом, ортогональным грани  $\Gamma_k^{(n-1)}$  и направленным во вне многогранника  $M$ . Нормальный конус  $K_k^{(n-2)}$  является двумерным сектором, расположенным на плоскости, ортогональной к грани  $\Gamma_k^{(n-2)}$  и т.д. Нормальный конус  $K_k^{(0)}$  вершины  $\Gamma_k^{(0)}$  это  $n$ -мерный многогранный конус. Поскольку размерность грани  $\Gamma_k^{(d)}$  равна  $d$ , то размерность нормального конуса  $K_k^{(d)}$  будет  $n - d$ . Нормальные конусы разных граней не пересекаются, и их объединение  $K$  в случае конечного множества  $D$  точек  $Q_j$  составляет все пространство  $\mathbb{R}^n$ .

Заметим, что каждая грань  $\Gamma_k^{(d)}$  является выпуклой оболочкой своих вершин. Поэтому грани  $\Gamma_k^{(d)}$  и их нормальные конусы  $K_k^{(d)}$  можно задавать посредством только вершин многогранника  $M$ . При этом всякая вершина  $\Gamma_i^{(0)}$  является точкой из  $D$ .

Если  $D = D(f)$  — носитель многочлена Лорана  $f$ , то  $M = M(f)$  называется *многогранником Ньютона* для  $f$ , и каждой грани  $\Gamma_k^{(d)}$  соответствует укорочение вида (1.3) по порядку  $P \in K_k^{(d)}$ . Размерностью укорочения  $\hat{f}$  назовем размерность соответствующей грани  $\Gamma_k^{(d)}$ .

**Пример.** Для многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_2^2$$

носитель —  $D(f) = \{Q_1 = (1, 1, 1), Q_2 = (4, 0, 0), Q_3 = (0, 4, 0), Q_4 = (0, 0, 4), Q_5 = (2, 0, 2)\}$ .

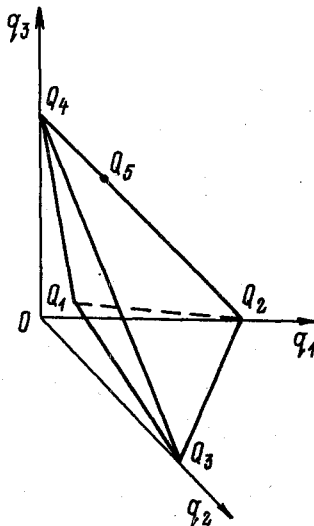


Рис. 1.

Многогранник Ньютона  $M(f)$  (рис.1) состоит из четырех вершин, шести ребер и четырех обычных граней, т.е.  $M$  — тетраэдр. Каждой из его граней  $\Gamma_k^{(d)}$  соответствует свой нормальный конус. Например, вершина  $\Gamma_1^{(0)} = \{Q_1\}$  имеет нормальный конус  $K_1^{(0)} = \{P : 3p_1 < p_2 + p_3, 3p_2 < p_1 + p_3, 3p_3 < p_1 + p_2\}$ ; ребро  $\Gamma_4^{(1)} \supset \{Q_2, Q_3\}$  имеет нормальный конус  $K_4^{(1)} = \{P : p_1 = p_2 > p_3, p_2 + p_3 < 3p_1\}$ ; грань  $\Gamma_2^{(2)} \supset \{Q_1, Q_2, Q_4, Q_5\}$  имеет нормальный конус  $K_2^{(2)} = \{P : 4p_1 = 4p_3 = p_1 + p_2 + p_3, p_1 > p_2\}$ .



## § 2. УКОРОЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$f_i(X) \triangleq \sum_{j=1}^{l_i} a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.1)$$

Предположим, что подобные члены в каждом многочлене Лорана  $f_i$  введены. Каждому  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ставятся в соответствие свой носитель  $D_i = D(f_i)$ , свой многогранник Ньютона  $M_i = M(f_i)$ , свои укорочения  $\hat{f}_i$ , их нормальные конусы  $K(f_i, \hat{f}_i)$  и другие объекты, определенные в § 1; при этом первый нижний индекс  $i$  будет указывать на принадлежность объекта к  $f_i$ . Система

$$\hat{f}_i(X) \triangleq \sum_j a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad Q_j^i \in D_{ik_i}^{(d_i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

называется *укорочением системы* (2.1) по порядку  $P = (p_1, \dots, p_n)$  (или *укороченной системой*), если для каждого  $i$  многочлен  $\hat{f}_i$  является укорочением многочлена  $f_i$  по порядку  $P$ .

*Конусом укороченной системы* (2.2) называется множество  $\Pi$  всех таких векторов  $P$ , что укорочение системы (2.1) по порядку  $P$  есть (2.2). Очевидно,  $\Pi = K(f_1, \hat{f}_1) \cap \dots \cap K(f_m, \hat{f}_m)$ . Пусть  $d_i$  — размерность укорочения  $\hat{f}_i$  в смысле § 1. *Размерность  $d$  укороченной системы* (2.2) — это коразмерность конуса  $\Pi$  этой системы, т.е.  $d = n - \dim \Pi \leq d_1 + d_2 + \dots + d_m$ .

**Теорема 2.1.** Пусть решение полной системы (2.1) имеет вид (1.4) и  $P$  лежит в конусе  $\Pi$  укороченной системы (2.2), тогда

$$x_i = b_i \tau^{P_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

есть решение укороченной системы (2.2).

**Доказательство.** использует свойства укорочений из [7], § 1. По свойству 3)

$$f_i(b_1 \tau^{P_1} (1 + o(1)), \dots, b_n \tau^{P_n} (1 + o(1))) = \hat{f}_i(b_1, \dots, b_n) \tau^{P_i} + o(1) \tau^{P_i} = 0$$

и по свойству 1)

$$\hat{f}_i(b_1 \tau^{P_1}, \dots, b_n \tau^{P_n}) = \hat{f}_i(b_1, \dots, b_n) \tau^{P_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, (2.3) есть решение укороченной системы (2.2). Теорема доказана. Аналогичное утверждение имеется у Бернштейна [3].

Предположим, что в  $\mathbb{R}^n$  задан выпуклый конус  $\mathcal{K}$  и из множеств  $D(f_i)$  нужно выделить только те множества  $D_{ik}^{(d)}$ , для которых нормальные конусы  $K_{ik}^{(d)}$  пересекаются с конусом  $\mathcal{K}$ . Тогда  $\mathcal{K}$  является *конусом задачи*. Для исследования окрестности какой-либо точки  $X^0$  можно заранее задавать конус задачи  $\mathcal{K}$ . Например, при исследовании окрестности точки  $X^0 = 0$  конус задачи  $\mathcal{K} = \{P : p_1 < 0, \dots, p_n < 0\}$ , а если точка  $X^0$  такая, что  $x_1^0 = \infty$ ,  $x_i^0 = 0, i = 2, \dots, n$ , то конус задачи  $\mathcal{K} = \{P : p_1 > 0, p_2 < 0, \dots, p_n < 0\}$ .

**Пример.** Пусть имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_3^2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_{21} x_2 x_3 + a_{22} x_1^2 x_3 + a_{23} x_1^3 x_2 + a_{24} x_1^2 x_2 x_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В примере § 1 построен многогранник  $M(f)$ . Находим носитель

$$D(f_2) = \{Q_1^2 = (0, 1, 1), Q_2^2 = (2, 0, 1), Q_3^2 = (3, 1, 0), Q_4^2 = (2, 1, 1)\}.$$

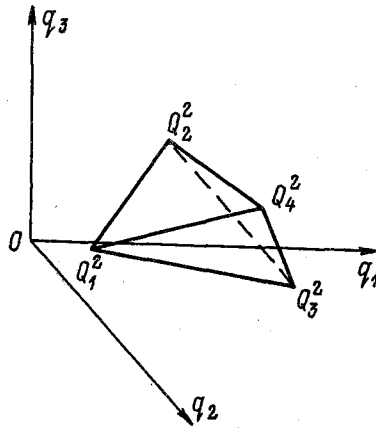


Рис. 2.

Выделим все вершины, ребра и грани многогранника  $M(f_2)$  (рис. 2). Нас интересует поведение решений системы (2.4) только вблизи точки  $X = 0$ , т.е. конус задачи  $K = \{P < 0\}$ . Непосредственно из рис. 1 и 2 видно, что для  $M(f_2)$  опорные плоскости с  $P < 0$  проходят только через элементы треугольника  $\Gamma_{21}^{(2)}$  с вершинами  $Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2$ , а для  $M(f)$  — через элементы треугольников  $\Gamma_1^{(2)} \supset \{Q_1, Q_2, Q_3\}, \Gamma_2^{(2)} \supset \{Q_1, Q_2, Q_4, Q_5\}, \Gamma_3^{(2)} \supset \{Q_1, Q_3, Q_4\}$ . Напишем линейные соотношения (1.2) на плоскости  $S = \{p_1 + p_2 + p_3 = -1\}$  в координатах  $p_2, p_3$  для тех конусов граней  $K_{ij}^{(2)}$  и тех конусов ребер  $K_{ij}^{(1)}$ , которые пересекаются с конусом задачи. Поскольку  $f_1 \equiv f$ , то индекс  $i = 1$  будем опускать. Для граней  $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \Gamma_3^{(2)}$  и  $\Gamma_{21}^{(2)}$  получим точки  $S \cap K_1^{(2)} = \{4p_2 = 2p_3 = -1\}, S \cap K_2^{(2)} = \{2p_2 = 4p_3 = -1\}, S \cap K_3^{(2)} = \{4p_2 = 4p_3 = -1\}$  и  $S \cap K_{21}^{(2)} = \{2p_2 = 3p_3 = -1\}$ . Для ребер  $\Gamma_1^{(1)} \supset \{Q_1, Q_2\}, \Gamma_2^{(1)} \supset \{Q_1, Q_3\},$

$\Gamma_3^{(1)} \supset \{Q_1, Q_4\}$ ,  $\Gamma_4^{(1)} \supset \{Q_2, Q_3\}$ ,  $\Gamma_5^{(1)} \supset \{Q_2, Q_4, Q_5\}$ ,  $\Gamma_6^{(1)} \supset \{Q_3, Q_4\}$  получим отрезки и полупрямые  $S \cap K_1^{(1)} = \{4p_2 + 4p_3 = -3, 4p_2 < -1, 4p_3 < -1\}$ ,  $S \cap K_2^{(1)} = \{4p_2 = -1 > 4p_3 > -2\}$ ,  $S \cap K_3^{(1)} = \{4p_3 = -1 > 4p_2 > -2\}$ ,  $S \cap K_4^{(1)} = \{2p_2 + p_3 = -1 < 4p_2\}$ ,  $S \cap K_5^{(1)} = \{p_2 + 2p_3 = -1 < 4p_3\}$ ,  $S \cap K_6^{(1)} = \{p_2 = p_3 > -\frac{1}{4}\}$ . Для ребер  $\Gamma_{21}^{(1)} \supset \{Q_1^2, Q_2^2\}$ ,  $\Gamma_{22}^{(1)} \supset \{Q_1^2, Q_3^2\}$ ,  $\Gamma_{23}^{(1)} \supset \{Q_2^2, Q_3^2\}$  получим полупрямые  $S \cap K_{21}^{(1)} = \{3p_2 + 2p_3 = -2 < 4p_3\}$ ,  $S \cap K_{22}^{(1)} = \{3p_2 + 4p_3 = -3 > 6p_3\}$ ,  $S \cap K_{23}^{(1)} = \{2p_3 = -1 > 3p_2\}$ . Изображая эти линии на плоскости  $S$ , получим картину сечения  $S$  пространства  $\mathbb{R}^3$  (рис.3). Жирными и тонкими линиями на рис. 3 изображены

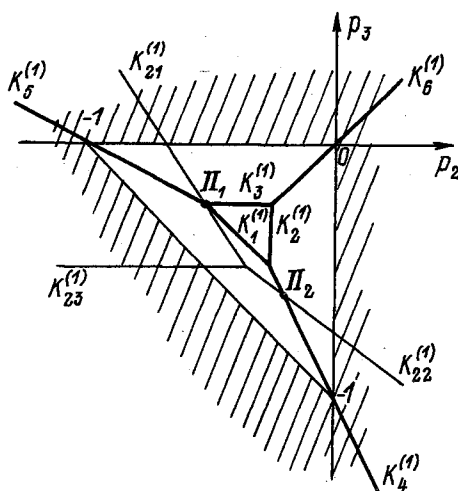


Рис.3.

сечения нормальных конусов  $K_j^{(1)}$  и  $K_{2j}^{(1)}$  ребер многогранников  $M(f)$  и  $M(f_2)$  соответственно. Там же выделено пересечение  $K \cap S$ . Из рис.3 видно, что в  $K \cap S$  имеются только два пересечения конусов ребер и граней  $S \cap \Pi_1 \triangleq$

$S \cap K_2^{(2)} \cap K_{21}^{(1)} = \{p_2 = 2p_3 = -2\}$  и  $S \cap \Pi_2 \triangleq S \cap K_4^{(1)} \cap K_{22}^{(1)} = \{3p_2 = p_3 = -3\}$ .  
Конусу  $\Pi_1$  соответствует укороченная система

$$\begin{aligned}\hat{f}(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1^4 + a_4 x_3^4 + a_5 x_1^2 x_3^2 = 0, \\ \hat{f}_2(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_{21} x_1 x_3 + a_{22} x_1^2 x_3 = 0;\end{aligned}\quad (2.5)$$

а конусу  $\Pi_2$  — укороченная система

$$\begin{aligned}\hat{f}(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_2 x_1^4 + a_3 x_2^4 = 0, \\ \hat{f}(x_1, x_2, x_3) &\triangleq a_{21} x_2 x_3 + a_{23} x_1^3 x_2 = 0.\end{aligned}\quad (2.6)$$

### § 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТЕПЕНЕЙ

Здесь рассмотрим преобразования системы (2.1), которым в пространстве  $\mathbb{R}^n$  показателей степеней  $Q$  соответствуют параллельные переносы (для каждого  $f_i$  свой) и аффинные преобразования (одно для всех  $f_i$ ). Эти преобразования делают геометрию показателей степеней более содержательной и дают способ для решения укороченных систем.

Отыскание тех решений системы (2.1), у которых одна из координат тождественно равна нулю, будем считать решенной задачей, так как она приводится к задаче аналогичной исходной, но с меньшей размерностью. Поэтому будем искать решения системы (2.1), для которых ни одна координата не равна нулю тождественно. Для таких решений в каждом из уравнений системы (2.1) можно производить сокращение на любое произведение степеней координат. Если в  $i$ -м уравнении сделать сокращение на  $X^{\bar{Q}^i}$ , то в нем векторные показатели степени станут равными  $\bar{Q} = Q - \bar{Q}^i$ , т.е.  $D_i$  параллельно переносится на вектор  $-\bar{Q}^i$ .

Пусть  $\alpha = (\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , — квадратная матрица с вещественными элементами  $\alpha_{ij}$ ,  $\det \alpha \neq 0$ . Преобразование

$$y_i = x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \dots x_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

называется *степенным преобразованием* с матрицей  $\alpha$ . Обратное преобразование

$$x_j = y_1^{\beta_{j1}} y_2^{\beta_{j2}} \dots y_n^{\beta_{jn}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

так же является степенным с матрицей  $\beta = (\beta_{ij}) = \alpha^{-1}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Отметим некоторые свойства степенного преобразования (3.1).

1. При преобразовании (3.1),  $X^Q = Y^{Q'}$ , где

$$Q' = \beta^* Q \quad (3.3)$$

и  $\beta^*$  — транспонированная матрица  $\beta$ . Итак, при степенном преобразовании (3.1) векторные показатели испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad Q \in D, \quad (3.4)$$

которая при преобразовании (3.2) перейдет в сумму

$$f(X) = f'(Y) = \sum a_{Q'} Y^{Q'}, \quad (3.5)$$

где  $Q' = \beta^* Q$ ,  $D' = \beta^* D$ ,  $a_{Q'} = a_Q$ . Геометрические конструкции множеств  $D$  и  $D'$  также связаны тем же линейным преобразованием (3.3). Поэтому при преобразовании (3.1) укорочение переходит в укорочение, т.е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

2. При преобразовании (3.1) кривая (1.4) с векторным порядком  $P = (p_1, \dots, p_n)$  перейдет в кривую

$$y_i = b'_i \tau^{p'_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n,$$

с векторным порядком

$$P' = \alpha P. \quad (3.6)$$

Следовательно, в пространстве  $\mathbb{R}^n$  порядков  $P$  степенное преобразование (3.1) индуцирует линейное преобразование (3.6). Это преобразование сопряжено преобразованию (3.3). Поэтому пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\bar{\mathbb{R}}^n$  оказываются сопряженными, и скалярное произведение  $\langle P, Q \rangle$  сохраняется при степенном преобразовании (3.1). В частности, конусы укорочений  $K_k^{(d)}$  суммы (3.4) переходят в конусы укорочений  $K_k^{(d')}$  суммы (3.5). Вообще, все геометрические объекты сопряженных пространств  $\mathbb{R}^n$  и  $\bar{\mathbb{R}}^n$  испытывают линейные преобразования (3.3) и (3.6) и сохраняют все свои линейные свойства.

3. Преобразование (3.1) взаимно однозначно отображает множество  $\{X : 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$  на множество  $\{Y : 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$  тогда и только тогда, когда матрица  $\alpha$  унимодулярна, т.е. все  $\alpha_{ij}$  целые,  $\det \alpha = \pm 1$ . Здесь используются только такие степенные преобразования.

4. Пусть, кроме (3.1), имеется степенное преобразование

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \dots y_n^{\gamma_{in}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

с матрицей  $\gamma$ . Тогда  $Z$  связано с  $X$  степенным преобразованием с матрицей  $\gamma\alpha$ , т.е. степенные преобразования образуют группу, а степенные преобразования с унимодулярной матрицей образуют подгруппу.

Пусть  $f(X)$  — произвольный многочлен Лорана и  $d$  — размерность его многогранника Ньютона  $M = M(f)$ , будем называть  $d$  *размерностью многочлена*  $f(X)$ . В  $\bar{\mathbb{R}}^n$  рассмотрим линейное пространство  $N(f)$ , нормальное к  $M(f)$ . Очевидно,  $\dim M + \dim N = n$ . Аналогично для системы многочленов Лорана  $f_i(X)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , рассматриваем многогранники  $M(f_i)$  и их нормальные пространства  $N(f_i)$ . Обозначим  $N = N(f_1) \cap \dots \cap N(f_m)$  и  $d = n - \dim N$ . Величину  $d$  назовем *размерностью указанной системы многочленов*. Для укороченной системы это определение размерности совпадает с данным ранее.

**Теорема 3.1.** Если размерность системы (2.2) равна  $d$ , то существует унимодулярная матрица  $\alpha$  такая, что степенным преобразованием (3.1) с матрицей  $\alpha$  и подходящими сокращениями эта система приводится к системе  $m$  уравнений относительно  $d$  переменных.

**Доказательство.** Пусть  $L$  — линейное пространство в  $\mathbb{R}^n$ , нормальное к  $N$ . Очевидно,  $\dim L = d$ . В каждом многочлене Лорана  $\hat{f}_i$  сделаем сокращение на  $X^{\bar{Q}^i}$  так, чтобы  $D(\hat{f}_i X^{-\bar{Q}^i}) \subset L$ . В качестве  $\bar{Q}^i$  можно взять любой из векторов  $Q \in D(\hat{f}_i)$ . Будем считать, что сокращения уже сделаны и все  $D(\hat{f}_i) \subset L$ . Пусть  $S_1, \dots, S_d$  — базис в  $L$  и векторы  $S_{d+1}, \dots, S_n$  дополняют его до базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Степенное преобразование

$$y_i = X^{S_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

переводит  $\hat{f}_i(X)$  в  $\hat{g}_i(y_1, \dots, y_d) \triangleq \hat{g}_i(Y)$ . Действительно, для  $Q \in L$  имеем однозначное разложение  $Q = r_1 S_1 + \dots + r_d S_d$ , т.е.  $X^Q = y_1^{r_1} \dots y_d^{r_d}$ . Для преобразования (3.1), (3.7) имеем  $\alpha = (S_1 \dots S_n)^*$ .

Если все  $Q \in D_i$  целочисленны, то можно найти унимодулярную матрицу  $\alpha$  следующим образом [7]. Пусть  $S_1, \dots, S_d$  — некоторый целочисленный базис в  $L$ . Образом квадратную матрицу  $\beta$  так, что ее  $i$ -я строка есть  $S_i$  для  $i \leq d$  и состоит из нулей для  $d < i \leq n$ . Как известно, всякая квадратная матрица  $\beta$  приводится к диагональной матрице  $\delta$  при помощи элементарных операций над столбцами и строками, т.е. квадратная матрица  $\beta$  с целыми элементами представима в виде  $\beta = \gamma_1 \delta \gamma$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma$  — унимодулярные, а  $\delta$  — диагональная матрица с целыми элементами. За матрицу  $\alpha$  можно взять унимодулярную матрицу  $\gamma$ . Доказательство окончено.

При  $n = 2$  матрицу  $\alpha$  можно вычислить с помощью цепных дробей (см. [12]), а при  $n = 3$  — с помощью алгоритма Эйлера [44] (см. [30]).

Обозначим через  $d(i)$  размерность подсистемы из первых  $i$  уравнений системы (2.2). Очевидно,  $d(i) \leq d(i+1)$ . Обозначим  $d(m) = d$ . Выделим те значения  $i$ , для которых  $d(i) < d(i+1)$ . Пусть это будут  $i_1, \dots, i_l$ . Из теоремы 3.1 вытекает

**Теорема 3.2.** Существует степенное преобразование (3.1) с унимодулярной матрицей  $\alpha$  и сокращения такие, что система (2.2) размерности  $d$  с подсистемами из  $i_1, \dots, i_l$  уравнений приводится к системе  $m$  уравнений относительно  $d$  переменных, имеющей квазипреугольный вид: подсистема из первых  $j$  уравнений зависит от  $d(i_j)$  переменных ( $j = 1, \dots, l$ ).

Действительно, по теореме 3.1 всю систему (2.2) приведем к системе от  $d$  переменных. Затем, также делая степенное преобразование для этих  $d$  переменных, подсистему из первых  $i_l$  уравнений приведем к подсистеме от  $d(i_l)$  переменных и т.д. по убыванию  $j$  от  $l$  до 1.

**Следствие 1.** Предположим, что в системе (2.2)  $d(i) = i$  для  $i < n$  и, если  $m > n - 1$ , то  $d(j) = n - 1$  для  $n \leq j \leq m$ . Тогда существует унимодулярная матрица  $\alpha$  такая, что степенным преобразованием (3.1) и подходящими сокращениями эта система приводится к треугольному виду

$$\begin{aligned} \hat{g}_i(y_1, \dots, y_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, \min(n-1, m), \\ \hat{g}_j(y_1, \dots, y_{n-1}) &= 0, \quad j = n, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Следствие 2.** Рассмотрим такую систему (2.2), у которой размерность каждого многочлена  $\hat{f}_i$  равна единице. Тогда степенным преобразованием и сокращениями система приводится к виду (3.8), где каждая из функций  $\hat{g}_i$  является многочленом от одного монома  $Y^{R_i}$ :  $\hat{g}_i \equiv h_i(Y^{R_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $R_i = (r_{i1}, \dots, r_{in}, 0, \dots, 0)$ , для  $i < n$ . Если найти все корни  $z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(l_i)}$  каждого уравнения  $h_i(z_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то система (3.8) приводится к  $l_1 l_2 \dots l_m$  системам  $Y^{R_i} = z_i^{(j)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $j = 1, \dots, l_i$ .

Пусть сокращения уже произведены (т.е.  $0 \in D(\hat{f}_i)$ ) и  $T_i$  — базисный вектор линейной оболочки носителя  $D(\hat{f}_i)$ . Тогда  $r_{11} \dots r_{ii} = \pm \text{НОД главных миноров матрицы } (T_1, \dots, T_i), i \leq \min(m, n-1)$ ; т.е. всегда  $r_{11} = 1$ . Если все  $r_{ii} = \pm 1$ , то дополнительным степенным преобразованием можно добиться того, что  $r_{ij} = \delta_{ij}$  (символ Кронекера). Тогда  $Y^{R_i} = y_i$  для  $i \leq \min(m, n-1)$ .

Изменением порядка нумерации многочленов  $\hat{f}_i$  в системе (2.2) можно получить дополнительные упрощения в преобразованной системе

$$\hat{g}_i(y_1, \dots, y_d) \triangleq X^{-\bar{Q}^i} \hat{f}_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

полученной по теореме 3.2. Для небольших размерностей ( $n \leq 6$ ) нужные перестановки можно увидеть непосредственно из преобразованной системы (3.9). В общем случае выбор наилучшей нумерации требует перебора различных вариантов. На этом здесь не будем останавливаться.

**Пример.** Рассмотрим укороченную систему (2.5). Для нее имеем  $\bar{Q}_1^1 = Q_1 - Q_2 = (-3, 1, 1)$ ,  $\bar{Q}_2^2 = Q_2^2 - Q_1^2 = (2, -1, 0)$ . Поэтому унимодулярная матрица  $\alpha$  будет

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Степенное преобразование с матрицей  $\alpha$  и его обратное суть

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{-3} x_2 x_3, \\ y_2 = x_1^2 x_2^{-1}, \\ y_3 = x_1^{-1} x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 y_3, \\ x_2 = y_2 y_3^2, \\ x_3 = y_1 y_2^2 y_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

После степенного преобразования (3.10) и сокращения первого уравнения укороченной системы (2.5) на  $y_2^4 y_3^4$ , а второго — на  $y_1 y_2 y_3^3$  получим систему

$$\begin{aligned} \hat{g}(y_1, y_2) &\triangleq a_1 y_1 + a_2 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0, \\ \hat{g}_2(y_2) &\triangleq a_{21} + a_{22} y_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом сама система (2.4) переходит в систему

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &\triangleq a_1 y_1 + a_2 + a_3 y_3^4 + a_4 y_1^4 y_2^4 + a_5 y_1^2 y_2^2 = 0, \\ y_1 g_2(y_1, y_2, y_3) &\triangleq a_{21} y_1 + a_{22} y_1 y_2 + a_{23} y_2 y_3^2 + a_{24} y_1 y_2^2 y_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Укороченная система (2.6) после соответствующего степенного преобразования переходит в систему

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(y_1) &\triangleq a_2 + a_3 y_1^4 = 0, \\ \hat{g}_2(y_2) &\triangleq a_{21} y_2 + a_{23} = 0.\end{aligned}\quad (3.13)$$

#### § 4. ВЫДЕЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим основную задачу: Пусть дана система

$$f_i \triangleq \sum a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad Q_j^i \in D_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \geq n - 1, \quad (4.1)$$

где  $f_i$  — многочлены Лорана, и выпуклый конус  $\mathcal{K}$  в  $\bar{\mathbb{R}}^n$ ; требуется найти все те решения системы (4.1), у которых в разложении (0.2) вектор  $P = (p_{11}, \dots, p_{n1}) \in \mathcal{K}$ ,  $P \neq 0$ . Конус  $\mathcal{K}$  называется *конусом задачи*.

Основную задачу назовем *приведенной*, если ищутся ветви, у которых ни одна из координат не равна тождественно нулю (или бесконечности). Очевидно, основная задача распадается на конечное число приведенных задач, в которых те или иные координаты  $x_i$  положены нулями (или бесконечностями), т.е. постоянны, и конус задачи  $\tilde{\mathcal{K}}$  является пересечением конуса основной задачи  $\mathcal{K}$  с множеством  $\{P : p_i = -\infty, \text{ если } x_i \equiv 0; p_j = +\infty, \text{ если } x_j = \infty\}$ .

Для решения приведенной задачи по каждому  $f_i$  образуем многогранник Ньютона  $M_i$  и выделим его грани  $\Gamma_{ik}^{(d)}$  с нормальными конусами  $K_{ik}^{(d)}$ . При этом достаточно выделить все те грани  $\Gamma_{ik}^{(d)}$ , для которых пересечение  $K_{ik}^{(d)} \cap \tilde{\mathcal{K}}$  отлично от нуля. Обозначим  $\mathcal{K}_{ik}^{(d)} = \tilde{\mathcal{K}} \cap K_{ik}^{(d)}$  и рассмотрим всевозможные непустые пересечения  $\mathcal{K}_{1k_1}^{(d_1)} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{mk_m}^{(d_m)} \triangleq \Pi_\lambda, \lambda = 1, \dots, l$ .

Пусть  $\Pi_\lambda$  одно из таких пересечений и ему соответствует укороченная система

$$\hat{f}_i(X) \triangleq \sum a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad Q_j^i \in D_{ik_i}^{d_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

Если  $d_i = 0$ , то  $\hat{f}_i = aX^{Q_i}$ . У решений уравнения  $aX^{Q_i} = 0$  одна из координат тождественно равна нулю (или бесконечности), и они не могут быть решениями приведенной задачи. Поэтому надо рассматривать лишь укороченные системы (4.2), у которых все  $d_i > 0$ . По укороченной системе (4.2) сделаем степенное преобразование и сокращения, указанные в теореме 3.1. Тогда система (4.1) перейдет в систему

$$g_i(y_1, \dots, y_n) \triangleq X^{-Q^i} f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

и укороченная система (4.2) перейдет в систему

$$\hat{g}_i(y_1, \dots, y_d) \triangleq X^{-Q^i} \hat{f}_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

где  $d$  — размерность укороченной системы (4.2). Будем считать, что в  $g_i$  координаты  $y_1, \dots, y_d$  входят в неотрицательных степенях. Этого всегда



можно добиться, умножая  $g_i$  на некоторые степени этих координат, ибо  $g_i$  — конечные суммы. При этом система (4.4) является укорочением системы (4.3) с конусом укорочения  $\Pi'_\lambda = \alpha \Pi_\lambda \subset \{P: p_1 = \dots = p_d = 0\}$ . Теперь надо найти такие решения

$$y_i = c_i \tau^{p_i} (1 + o(1)), i = 1, \dots, n,$$

полной системы (4.3), у которых векторный порядок  $P \in \Pi'_\lambda$ . По теореме 2.1 у таких решений значения  $y_i = c_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , удовлетворяют укороченной системе (4.4). При этом все  $c_1, \dots, c_d$  отличны от нуля и бесконечности. В укороченной системе (4.4) число уравнений  $m \geq d$  (число неизвестных). Поэтому в случае общего положения эта система или не имеет решений (при  $m > d$ ), или имеет решениями только конечное число точек  $y_1^0, \dots, y_d^0$  (при  $m = n - 1 = d$ ).

Найдем все такие решения  $y_i = y_i^0$ ,  $i = 1, \dots, d$ , укороченной системы (4.4), у которых все  $y_i^0 \neq 0$  или  $\infty$ . Если таких решений нет, то приведенная задача не имеет решений (0.2) с  $P \in \Pi_\lambda$ . Если они есть, то будем различать два случая:

- 1) точка  $y_1^0, \dots, y_d^0$  является изолированным решением системы (4.4);
- 2) эта точка лежит на некотором непрерывном множестве решений системы (4.4), которое является алгебраическим множеством положительной размерности.

Рассмотрим по отдельности оба случая.

**Случай 1.** Если в уравнения (4.3) координаты  $y_{d+1}, \dots, y_n$  входят в неотрицательных степенях, то укороченная система (4.4) имеет вид

$$\hat{g}_i(y_1, \dots, y_d) \triangleq g_i(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0), 0, i = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

и ее конус  $\Pi'_\lambda \subset \{P: p_1 = \dots = p_d = 0, p_{d+1} < 0, \dots, p_n < 0\}$ . Пусть  $y_1^0, \dots, y_d^0$  — решение системы (4.5), тогда, согласно (4.5),  $Y^0 = (y_1^0, \dots, y_d^0, 0, \dots, 0)$  — корень системы (4.3). Предположим, что  $Y^0$  — простой корень системы (4.3), т.е. в  $Y^0$  ранг матрицы  $B = (\partial \hat{g}_i / \partial y_j)$  не меньше  $n - 1$ . Если  $m = n - 1$ , то простому корню  $Y^0$  соответствует одна ветвь, которую можно найти по теореме о неявной функции. Вернувшись к исходным переменным с помощью степенного преобразования, получим искомое разложение (0.2). В этом случае ветвь отделена. Если  $m > n - 1$  и ранг матрицы  $B$  равен  $n$ , то  $Y^0$  — изолированный корень системы (4.3), и ему не соответствует никакая ветвь решений исходной системы (4.1). Если  $m > n - 1$  и ранг матрицы  $B$  равен  $n - 1$ , то из системы (4.3) можно выделить подсистему из  $n - 1$  уравнения, для которой  $Y^0$  — простая точка. Применяя к этой подсистеме теорему о неявной функции, найдем разложения для единственной ветви ее решений. Если это разложение удовлетворяет всем остальным уравнениям системы (4.3), то оно дает ветвь решений исходной системы (4.1); в противном случае корню  $Y^0$  не соответствует никакая ветвь решений системы (4.1).

Если же  $Y = Y^0$  — особая точка системы (4.3) или если в уравнения (4.3) координаты  $y_{d+1}, \dots, y_n$  входят в отрицательных степенях, то сделаем

подстановку  $y_i = y_i^0 + z_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,  $y_j = z_j$ ,  $j = d+1, \dots, n$  в системе (4.3) и получим систему

$$h_i(z_1, \dots, z_n) \triangleq g_i(y_1, \dots, y_n) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

с конусом задачи  $\Pi_\lambda^n = \{P : p_1 < 0, \dots, p_d < 0, p_{d+1} = \dots = p_n = 0\} + \Pi'_\lambda$ , где сумма означает выпуклую оболочку слагаемых конусов, и конус  $\Pi'_\lambda$  по координатам  $p_{d+1}, \dots, p_n$  может быть любым. Для системы (4.6) имеем основную задачу, но для более узкого множества решений.

Пусть  $d = n-1 \leq m$  и  $y_1^0, \dots, y_{n-1}^0$  — простой корень укороченной системы (4.4), т.е. в нем ранг матрицы  $(\partial g_i / \partial y_j)$  не меньше  $n-1$ . Тогда точка  $Y^0$  является простой в полной системе (4.3), и ветвь отделена уже по укороченной системе (4.4), если в ней ровно  $n-1$  независимых уравнений. Параметром для разложения (0.2) могут служить  $\tau = y_n^{-1}$ , если  $y_n$  входит в (4.3) в положительных степенях, и  $\tau = y_n$ , если — в отрицательных. В остальных случаях укороченной системы не достаточно для отделения ветви.

**Случай 2** можно считать вырожденным. В этом случае решения системы (4.4) не исчерпываются дискретным множеством точек, а содержат непрерывное множество. Поэтому к разделению ветвей надо привлечь не только первое приближение системы (т.е. укороченную систему), но и следующие приближения. Для произвольной укороченной системы (4.4) множество решений распадается на конечное число неприводимых алгебраических многообразий [53], и дальнейшую редукцию можно производить отдельно для каждого из них. Пусть  $\mathcal{G}$  — такое многообразие размерности  $l$ . Если оно линейно, то обратимой линейной заменой координат  $y_1, \dots, y_d \rightarrow z_1, \dots, z_d$  переведем  $\mathcal{G}$  в координатное подпространство  $z_{l+1} = \dots = z_d = 0$  и будем искать решения системы (4.3) вблизи этого подпространства, т.е. приходим к основной задаче с конусом задачи  $\mathcal{K} = \{P : p_{l+1} < 0, \dots, p_d < 0, p_{d+1} = \dots = p_n = 0\} + \Pi'_\lambda$ .

Если многообразие  $\mathcal{G}$  не переводится в координатное подпространство, то в „невырожденном случае“ по системе (4.3) можно составить дополнительное уравнение, первое приближение которого не обращается на  $\mathcal{G}$  в тождественный ноль, а в „вырожденном случае“ — ввести дополнительные координаты, которые позволяют получить другую укороченную систему. Здесь кратко наметим эти приемы, их подробное изложение будет опубликовано отдельно.

Предположим сначала, что  $d = n-1$ ,  $p_n < 0$  в  $\Pi'_\lambda$  и будем обозначать  $\tilde{Y} = (y_1, \dots, y_d)$ ,  $z = y_n$ . Пусть  $g(\tilde{Y}, z)$  — степенной ряд от  $\tilde{Y}, z$ . Будем писать

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\tilde{Y}, z),$$

где  $g^{(k)}$  содержит все члены степени  $k$  по  $z$ . Пусть  $\mathcal{J}$  — идеал многообразия  $\mathcal{G}$ , т.е. множество всех полиномов от  $\tilde{Y}$ , тождественно равных нулю на  $\mathcal{G}$ . Очевидно,  $g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)} \in \mathcal{J}$ . Будем говорить, что они содержат рациональный базис в  $\mathcal{J}$ , если всякий многочлен  $\varphi \in \mathcal{J}$  представляется в виде

$$\varphi = \Delta^{-1}(G^{(0)}, \Psi) \triangleq \Delta^{-1} \sum_{j=1}^m g_j^{(0)} \psi_j,$$

где  $\Delta$  — фиксированный многочлен от  $\tilde{Y}$ , не лежащий в  $\mathcal{J}$ , и все  $\psi_j \in \mathbb{C}[\tilde{Y}]$ . Пусть многочлены  $g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)}$  содержат рациональный базис в  $\mathcal{J}$ ; будем искать ряд, первое приближение которого не лежит в  $\mathcal{J}$ . Поскольку  $\dim \mathcal{G} = l \geq 1$  и  $m \geq n-1 \geq d$ , то между  $g_j^{(0)}$  существует  $m+l-d$  независимых соотношений вида  $\zeta^{(0)}(G^{(0)}) = 0$ , где  $\zeta^{(0)}(W)$  — полином с коэффициентами из  $\mathbb{C}[\tilde{Y}]$ . Для простоты изложения ограничимся случаем  $m = n-1$ . Тогда существует по крайней мере одно такое соотношение  $\zeta^{(0)}(G^{(0)}) = 0$ . Рассмотрим  $\varphi_0 = \zeta^{(0)}(G)$ . Очевидно,  $\varphi_0^{(0)} = 0$ . Если  $\varphi_0^{(1)}$  не лежит в  $\mathcal{J}[z]$ , то  $\varphi_0$  — искомый ряд. В противном случае  $\varphi_0^{(1)} = \Delta^{-1} \langle G^{(0)}, \psi^{(1)} \rangle$ , где  $\psi^{(1)} z^{-1}$  — вектор многочленов от  $Y$ . Рассмотрим  $\varphi_1 = \Delta \zeta^{(0)}(G) - \langle G, \Psi^{(1)} \rangle$ . Очевидно,  $\varphi_1^{(0)} = \varphi_1^{(1)} = 0$ . Если  $\varphi_1^{(2)}$  не лежит в  $\mathcal{J}[z]$ , то  $\varphi_1$  — искомый ряд. В противном случае  $\varphi_1^{(2)} = \Delta^{-1} \langle G^{(0)}, \psi^{(2)} \rangle$ . Положим  $\varphi_2 = \Delta \varphi_1 - \langle G, \psi^{(2)} \rangle$  и т.д. В результате этих итераций получаем последовательность рядов  $\varphi_0 = \zeta^{(0)}(G), \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , которая либо (а) заканчивается на некотором  $\varphi_k = \Delta \varphi_{k-1} - \langle G, \psi^{(k)} \rangle$ , либо (б) неограниченно продолжается при  $k \rightarrow \infty$ .

В подслучае (а)  $\varphi_k$  — искомый ряд, первое приближение которого  $\varphi_k^{(k+1)}$  не лежит в  $\mathcal{J}[z]$ . В подслучае (б)

$$\zeta^{(0)}(G) = \langle G, \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{-k} \Psi^{(k)} \rangle \triangleq \langle G, \Xi \rangle. \quad (4.7)$$

Легко видеть, что  $\Xi$  есть векторный степенной ряд от  $z\Delta^{-1}$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}[\tilde{Y}]$ .

Если  $n-d > 1$ , то  $g^{(k)}$  обозначает сумму всех членов  $aY^Q$  ряда  $g(Y)$  с  $q_{d+1}r_{d+1} + \dots + q_n r_n = k$ , где целочисленный вектор  $-R = (0, \dots, 0, -r_{d+1}, \dots, -r_n) \in \Pi'_\lambda$ . Тогда в подслучае (б) получим уравнение (4.7), где вектор  $\Xi$  есть ряд от  $\Delta^{-r_j} y_j, j = 1, \dots, n$ . Полученный таким образом ряд  $\Xi$  является формальным, но при аналитических  $g_j$  он также будет сходящимся (ср. Артин [42]). Уравнение (4.7) дает связь между функциями  $g_1, \dots, g_{n-1}$ . Если для каких-нибудь натуральных  $j, k$

$$\partial^k \zeta^{(0)}(G^{(0)}) / \partial^k g_j^{(0)} \text{ не лежит в } \mathcal{J}, \quad (4.8)$$

то вблизи  $\mathcal{G}$  множество решений системы  $G = 0$  совпадает с множеством решений подсистемы

$$g_i = 0, 1 \leq i \leq n-1, i \neq j.$$

Следовательно, это множество имеет меньшую коразмерность, чем число исходных уравнений. Но по основному ограничению этой работы (см. Введение) система из  $n-1$  уравнения имеет только одномерные множества решений, т.е. ситуация подслучая (б) исключается. Поэтому предложенная выше процедура вычисления  $\varphi_k$  всегда приводит к подслучаю (а).

Если  $G^{(0)}$  не содержат рациональный базис в  $\mathcal{J}$  или не выполнено условие (4.8), то указанная процедура либо может оказаться непродолжаемой либо не дает новой связи между  $g_i$  вблизи  $\mathcal{G}$ . В этих случаях координаты  $Y$  надо пополнить координатами  $y_{n+1}, \dots, y_{n+s}$ , а систему уравнений

$g_1 = \dots = g_m = 0$  — уравнениями  $y_{n+1} - \alpha_1 = \dots = y_{n+s} - \alpha_s = 0$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  — рациональный базис в  $\mathcal{J}$ . Для малых  $y_{n+i}$  надо решать основную задачу с помощью многогранников Ньютона по  $y_{n+1}, \dots, y_{n+s}$ . Это дает новые укороченные системы, к которым применима общая процедура. Использование рационального базиса вместо обычного регулярного позволяет охватить многообразия  $\mathcal{G}$ , не являющиеся полными пересечениями [53, 36].

Итак, здесь был описан один шаг процедуры решения основной задачи. В результате этого шага первичная основная задача распадается на конечное число вторичных основных задач, каждая из которых в некотором смысле проще, чем исходная. Некоторые из них имеют единственное решение-ветвь либо не имеют ни одного такого решения; для них процедуру выделения ветвей можно считать законченной. Для остальных вторичных основных задач процедуру надо продолжить. Через конечное число таких шагов можно отделить все одномерные ветви, хотя число шагов априори не известно. Это выводится методом исключения из соответствующих теорем для двумерного случая ([40, 12], гл. I).

Назовем *сложностью укороченной системы* (4.2)  $(n-1)$ -мерный смешанный объем Минковского [3] соответствующих параллельно перенесенных граней  $\Gamma_{ik}^{(d_i)} - \bar{Q}^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  (см. начало § 3); а *сложностью приведенной задачи* — сумму сложностей всех укороченных систем, нормальные конусы которых пересекаются с конусом задачи. Согласно [3], в случае общего положения число комплексных ветвей приведенной задачи равно ее сложности. Для системы не общего положения такого рода оценка числа ветвей при  $n > 2$  не известна (ср. [47] и [12], гл. I, § 3).

**Пример.** При значениях  $a_1 = 40, a_2 = -a_3 = 25, a_4 = -1, a_5 = 16, a_{2i} = -1, i = 1, 2, 3, 4$  рассмотрим систему (2.4). Тогда укороченные системы (3.11) и (3.13) имеют по два вещественных и по два комплексных простых решения. Так, система (3.11) имеет решения  $y_{11}^0 = -1, y_2^0 = -1$  и  $y_{12}^0 = 5, y_2^0 = -1$  и два комплексных  $y_{13,4}^0 = -2 \pm i, y_2^0 = -1$ . Так как все корни простые и  $d = n - 1$ , то ветви отделены, т.е. применима теорема о неявной функции. Делая подстановку  $y_1 = -1 + z_1, y_2 = -1 + z_2$  и  $y_1 = 5 + z_1, y_2 = -1 + z_2$  в систему (3.12), применяя теорему о неявных функциях к полученному выражению и возвращаясь к исходным переменным по (3.10), находим вещественные ветви  $\mathcal{F}_{1,2}$

$$\begin{aligned}x_1 &= -y_3 + b'_j y_3^3 + o(y_3^3), \\x_2 &= -y_3^2 + b'_j y_3^4 + o(y_3^4), \\x_3 &= b_j y_3 + c_j y_3^3 + o(y_3^3), \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

где  $b'_1 = -2, b_1 = -1, c_1 = -26/3; b'_2 = -4/5, b_2 = 5, c_2 = 52/15$ . Комплексные корни системы (3.11) дают комплексные ветви  $\mathcal{F}_{5,6}$

$$\begin{aligned}x_1 &= -y_3 - \frac{1}{5}(7 \pm i)y_3^3 + o(y_3^3), \\x_2 &= -y_3^2 - \frac{1}{5}(7 \pm i)y_3^4 + o(y_3^4), \\x_3 &= (-2 \pm i)y_3 + \frac{6}{53}(3 \mp 16i)y_3^3 + o(y_3^3).\end{aligned}$$

Укороченная система (3.13) имеет два вещественных простых решения  $y_{1,2}^0 = \pm 1$ ,  $y_2^0 = -1$  и два комплексных простых решения  $y_{1,3,4}^0 = \pm i$ ,  $y_2^0 = -1$ . Для этих решений соответственно находим вещественные ветви  $\mathcal{F}_{3,4}$

$$\begin{aligned}x_2 &= \pm x_1 - \frac{7}{5}x_1^2 + o(x_1^2), \\x_3 &= -x_1^3 \pm x_1^4 + o(x_1^4)\end{aligned}$$

и комплексные ветви  $\mathcal{F}_{7,8}$

$$\begin{aligned}x_2 &= \pm ix_1 + \frac{7}{5}x_1^2 + o(x_1^2), \\x_3 &= -x_1^3 \mp ix_1^4 + o(x_1^4).\end{aligned}$$

Для найденных ветвей роль параметра  $\tau$  играют  $y_3^{-1}$  и  $x_1^{-1}$  соответственно. На рис. 4 показано примерное расположение вещественных полуветвей  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  для  $y_3 > 0$ ,  $\mathcal{F}_3$  и  $\mathcal{F}_4$  для  $x_1 > 0$  в малой окрестности точки  $X = 0$ . Штриховыми линиями нарисованы кривые с  $x_2 < 0$ .

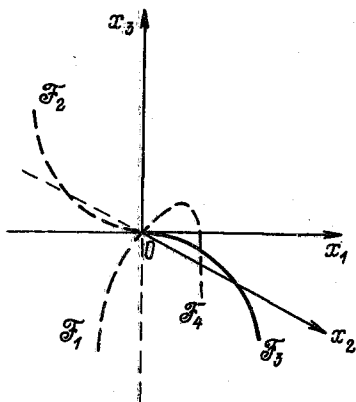


Рис. 4.

## § 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОГРАННИКА НЬЮТОНА

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задано множество  $D$ , состоящее из конечного числа точек  $Q_1, \dots, Q_s$ . Тогда их выпуклая оболочка  $M$  является многогранником, и его поверхность  $\partial M$  состоит из конечного числа граней  $\Gamma_j^{(d)}$  разных размерностей  $d$ . В сопряженном к  $\mathbb{R}^n$  пространстве  $\mathbb{R}^n$  каждой грани  $\Gamma_j^{(d)}$  соответствует нормальный конус  $K_j^{(d)}$ . В настоящем параграфе излагается анонсированный в [28] алгоритм, позволяющий по множеству  $D$  вычислять все множества  $D_j^{(d)} = D \cap \Gamma_j^{(d)}$  и все нормальные конусы  $K_j^{(d)}$ . Потребность в таком алгоритме имеется в различных областях математики, использующих многогранники Ньютона (см. Введение).

Пусть  $D'$  — некоторое подмножество множества  $D$ . Определим конус  $\bar{K}(D') = \{P : \langle P, Q_i \rangle = \langle P, Q_j \rangle \geq \langle P, Q_k \rangle \text{ по всем } Q_i, Q_j \in D', Q_k \in D \setminus D'\}$ . Обозначим через  $\bar{K}_l^{(d)}$  замыкание нормального конуса  $K_l^{(d)}$ . Очевидно,  $\bar{K}_l^{(d)} = \bar{K}(D_l^{(d)})$ .

**Лемма 5.1.** Пусть  $D'$  и  $D''$  — подмножества множества  $D$ . Тогда

$$\bar{K}(D' \cup D'') = \bar{K}(D') \cap \bar{K}(D'').$$

**Доказательство.** Пусть  $Q_i, Q_j$  пробегают  $D'$ ,  $Q_k, Q_l$  — пробегают  $D''$  и  $Q_m$  — пробегает  $D \setminus (D' \cup D'')$ . Тогда  $\bar{K}(D')$  задается соотношениями  $\langle P, Q_i \rangle = \langle P, Q_j \rangle$ ,  $\langle P, Q_i \rangle \geq \langle P, Q_k \rangle$ ,  $\langle P, Q_i \rangle \geq \langle P, Q_m \rangle$ ,  $\bar{K}(D'')$  — соотношениями  $\langle P, Q_k \rangle = \langle P, Q_l \rangle$ ,  $\langle P, Q_k \rangle \geq \langle P, Q_i \rangle$ ,  $\langle P, Q_k \rangle \geq \langle P, Q_m \rangle$ . Для пересечения  $\bar{K}(D') \cap \bar{K}(D'')$  эти две системы выполнены одновременно, т.е. средние неравенства обращаются в равенства. Получаются соотношения

$$\langle P, Q_i \rangle = \langle P, Q_j \rangle = \langle P, Q_k \rangle = \langle P, Q_l \rangle, \langle P, Q_i \rangle \geq \langle P, Q_m \rangle,$$

которые определяют конус  $\bar{K}(D' \cup D'')$ . Лемма доказана.

**Теорема 5.1.** Пусть  $D'$  — некоторое подмножество множества  $D$ . Тогда

а)  $\bar{K}(D') = \bar{K}_l^{(d)}$ , где  $\Gamma_l^{(d)}$  — наименьшая грань, содержащая все точки из  $D'$ .

б) Если  $D'$  не лежит целиком ни в какой грани, то  $\bar{K}(D') = \{0\}$ .

**Доказательство.** а) Пусть  $\Gamma_l^{(d)}$  — наименьшая грань, содержащая все точки из  $D'$ . Тогда  $D' \subset D_l^{(d)}$ , поэтому  $\bar{K}(D') \supset \bar{K}(D_l^{(d)}) = \bar{K}_l^{(d)}$ . Если  $D' = D_l^{(d)}$ , то  $\bar{K}(D') = \bar{K}_l^{(d)}$ . Рассмотрим случай, когда  $D' \neq D_l^{(d)}$ , и предположим, что в этом случае утверждение теоремы неверно; т.е. существует такой вектор  $P_0 \in \bar{K}(D')$ , что  $P_0 \notin \bar{K}_l^{(d)}$ . Тогда опорная гиперплоскость  $\langle P_0, Q \rangle = \text{const}$  содержит  $D'$  и не содержит хотя бы одну точку из  $D_l^{(d)} \setminus D$ . Но опорные гиперплоскости пересекаются с  $M$  только по граням, и указанная опорная гиперплоскость пересекается с  $M$  по некоторой грани  $\Gamma_{l_1}^{(d_1)}$ , содержащей  $D'$ . При этом  $\Gamma_{l_1}^{(d_1)} \supset D'$  и  $\Gamma_{l_1}^{(d_1)} \not\supset \Gamma_l^{(d)}$ . Поэтому пересечение  $\Gamma_{l_1}^{(d_1)} \cap \Gamma_l^{(d)}$  является

гранью, которая меньше, чем  $\Gamma_l^{(d)}$ , и содержит  $D'$ , а это противоречит предположению, что грань  $\Gamma_l^{(d)}$  — наименьшая, содержащая  $D'$ .

б) Пусть  $D'$  не лежит ни в какой грани. Предположим, что  $\bar{K}(D')$  содержит вектор  $P \neq 0$ . Тогда  $D'$  лежит на опорной гиперплоскости  $L_P$ , соответствующей вектору  $P$ . Но всякая опорная гиперплоскость пересекается с  $M$  по некоторой грани. В частности,  $D'$  лежит в грани  $L_P \cap M$ , что противоречит исходному предположению. Доказательство окончено.

Грани  $\Gamma_j^{(d)}$  многогранника  $M$  образуют структуру [9], если под  $\Gamma_j^{(d)} \cap \Gamma_k^{(l)}$  понимать теоретико-множественное пересечение, под  $\Gamma_j^{(d)} \cup \Gamma_k^{(l)}$  — наименьшую грань, содержащую  $\Gamma_j^{(d)}$  и  $\Gamma_k^{(l)}$ , а под соотношением порядка — включение  $\Gamma_j^{(d)} \supset \Gamma_k^{(l)}$ . Единицей в структуре служит многогранник  $M$ , а нулем — пустое множество  $\emptyset$ . Пусть  $k_d$  — число граней размерности  $d$ ,  $l = \dim M$ . По теореме Эйлера–Пуанкаре [26]:

$$\sum_{d=-1}^l (-1)^d k_d = 0, \quad k_{-1} = k_l = 1, \quad l \geq 0. \quad (5.1)$$

Можно нарисовать структурную диаграмму граней вида

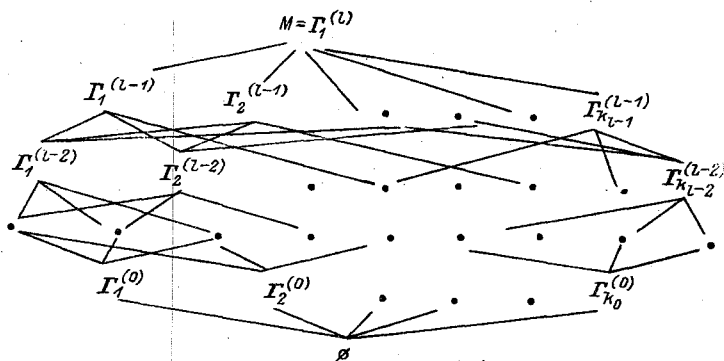


ДИАГРАММА.

На этой диаграмме  $\Gamma_i^{(d)}$  соединяется с  $\Gamma_j^{(d+1)}$ , если  $\Gamma_j^{(d+1)} \supset \Gamma_i^{(d)}$ . Каждая грань  $\Gamma_i^{(d)}$  — пересечение по крайней мере  $l - d$  граней  $\Gamma_j^{(d+1)}$ , и на каждой грани  $\Gamma_j^{(d+1)}$  лежит не менее  $d + 2$  граней размерности  $d$ .

Замыкания  $\overline{K}_j^{(d)}$  нормальных конусов  $K_j^{(d)}$  также образуют структуру, которая двойственна структуре граней.

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  заданы векторы  $V_1, \dots, V_r$ , их коническая оболочка

$$K = \{P : P = \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j, \lambda_j > 0\} \quad (5.2)$$

является выпуклым конусом. Если никакой из векторов  $V_k$  не может быть представлен в виде

$$V_k = \sum_{j=1, j \neq k}^r \lambda_j V_j, \lambda_j \geq 0,$$

то векторы  $V_1, \dots, V_r$  образуют *остов* конуса  $K$ . Замкнутый конус  $K$  также можно задавать в виде (5.2) с  $\lambda_j \geq 0$ , тогда векторы  $V_1, \dots, V_r$  образуют его остов, если они обладают указанным свойством.

Среди точек множества  $D$  особую роль играют вершины: любая грань  $\Gamma_j^{(d)}$  является выпуклой оболочкой своих вершин. Если

$$\dim M = n, \quad (5.3)$$

то в сопряженном пространстве  $\mathbb{R}^n$  аналогичную роль играют нормали  $V_i$  к гиперграням  $\Gamma_i^{(n-1)}$ . А именно остов всякого нормального конуса состоит из векторов  $V_i$ . При этом если  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  — остов нормального конуса  $K_j^{(d)}$ , то ранг матрицы  $T = (V_{i_1} \dots V_{i_k})$  равен  $n - d$ . Если  $\Gamma_i^{(d)} \supset \Gamma_j^{(d')}$ , то  $\overline{K}_i^{(d)} \subset \overline{K}_j^{(d')}$  и остов конуса  $K_i^{(d)}$  составляет часть остова конуса  $K_j^{(d')}$ . Пусть  $r$  — число гиперграней  $\Gamma_i^{(n-1)}$ . На основе теоремы 5.1 с  $D = \{Q_j\}$  можно составить следующую таблицу соответствий между точками  $Q_j \in D$  и нормальными  $V_i$  к гиперграням  $\Gamma_i^{(n-1)}$ .

Положим  $\theta_{ij} = +1$ , если  $V_i$  входит в остов конуса  $\overline{K}(Q_j)$ , и  $\theta_{ij} = -1$ , в противном случае, и распишем значения  $\theta_{ij}$  в таблице с  $r$  строками (соответствующими  $V_i$ ) и  $s$  столбцами (соответствующими  $Q_j$ ). Таблицу значений  $\theta_{ij}$  назовем *таблицей соответствий* (см. табл. 1 примера). Совокупность значений  $\theta_{ij}$  для  $i = i_1, \dots, i_k$  и  $j = j_1, \dots, j_l$  назовем *минором* и обозначим  $M_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$ . Такой минор назовем *положительным*, если все его  $\theta_{ij} = +1$ . Наконец, положительный минор назовем *максимальным*, если при всяком фиксированном  $i \neq i_1, \dots, i_k$  среди чисел  $\theta_{i j_1}, \dots, \theta_{i j_l}$  есть -1 и при всяком фиксированном  $j \neq j_1, \dots, j_l$  среди чисел  $\theta_{i_1 j}, \dots, \theta_{i_k j}$  есть -1.

**Теорема 5.2.** а) Пусть  $D_i^{(d)} = D \cap \Gamma_i^{(d)} = \{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}\}$  и  $u$  нормального конуса  $K_i^{(d)}$  грани  $\Gamma_i^{(d)}$  остов состоит из векторов  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ . Тогда минор  $M_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$  — максимальный положительный.

б) Обратно, если  $M_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$  — максимальный положительный минор, то множество  $\{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}\} = D \cap \Gamma_i^{(d)} = D_i^{(d)}$ , где  $\Gamma_i^{(d)}$  — некоторая грань, и векторы  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  образуют остов ее нормального конуса  $K_i^{(d)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma_j^{(d')}$  — наименьшая грань, содержащая точку  $Q_{j_1}$ . Очевидно,  $\Gamma_j^{(d')} \subset \Gamma_i^{(d)}$ . По теореме 5.1  $\overline{K}(Q_{j_1}) = \overline{K}_j^{(d')} \supset K_i^{(d)}$ . Поэтому



все векторы  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  входят в остов конуса  $\bar{K}(Q_{j_1})$ , т.е. все  $\theta_{i_1 j_1}, \dots, \theta_{i_k j_2}$  равны +1. Аналогично доказывается, что  $\theta_{i_1 j_2}, \dots, \theta_{i_k j_2}$  равны +1, и т.д. Таким образом, двигаясь по  $j = j_2, \dots, j_l$ , получаем, что минор  $M_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$  положительный. Докажем теперь, что он максимальный. Пусть для некоторого  $j' \neq j_1, \dots, j_l$  все числа  $\theta_{i_1 j'}, \dots, \theta_{i_k j'}$  равны +1, т.е. векторы  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  входят в остов конуса  $\bar{K}(Q_{j'})$ . Но тогда  $Q_{j'}$  лежит в пересечении опорных гиперплоскостей для этих векторов; поскольку их пересечение с многогранником  $M$  есть грань  $\Gamma_i^{(d)}$ , то  $Q_{j'} \in \Gamma_i^{(d)}$ . Но это противоречит условию, что  $D \cap \Gamma_i^{(d)} = \{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}\} \not\ni Q_{j'}$ . Следовательно, для каждого  $j' \neq j_1, \dots, j_l$  среди чисел  $\theta_{i_1 j'}, \dots, \theta_{i_k j'}$  есть -1. Пусть теперь для некоторого  $i' \neq i_1, \dots, i_k$  все числа  $\theta_{i' j_1}, \dots, \theta_{i' j_l}$  равны +1. Тогда вектор  $V_{i'}$  входит в остов конуса  $K_i^{(d)}$ , что противоречит предположению, что этот остов состоит из векторов  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ . Утверждение а) доказано.

б) Поскольку минор  $M_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$  положителен, то  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  входят в остов каждого из конусов  $\bar{K}(Q_{j_1}), \dots, \bar{K}(Q_{j_l})$ , т.е. в остов конуса  $\bar{K}(D')$ , где  $D' = \{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}\}$ . Следовательно,  $\bar{K}(D') \supset \bar{C}$ , где  $\bar{C}$  — выпуклая замкнутая коническая оболочка векторов  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ . По теореме 5.1  $\bar{K}(D') = \bar{K}(D_i^{(d)})$ , где  $\Gamma_j^{(d)}$  — наименьшая грань, содержащая  $D'$ . Из максимальности нашего минора следует, что  $D_i^{(d)} = D'$  и что конус  $\bar{C}$  исчерпывает конус  $\bar{K}_i^{(d)}$ . Доказательство окончено.

**Замечание.** Если в таблице соответствий оставить только столбцы, соответствующие вершинам, то теорема 5.2 будет верна и для такой модифицированной таблицы.

**Следствия** теоремы 5.2 для таблицы соответствий:

1.  $i$ -й строке отвечает гипергрань  $\Gamma_i^{(n-1)}$ ; на ней лежат те и только те точки  $Q_j$ , для которых имеются плюсы в  $i$ -й строке.  $V_i$  — остов ее нормального конуса.

2.  $j$ -му столбцу соответствует точка  $Q_j$ , она лежит на тех и только тех гипергранях  $\Gamma_i^{(n-1)}$ , для которых  $\theta_{ij} = +1$ ; следовательно, она лежит в пересечении этих гиперграней.

3. Точка  $Q_j$  является вершиной, если и только если нет другого столбца, имеющего +1 во всех тех строках, где есть +1 в  $j$ -м столбце.

4. Пусть  $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_{d+1}}$  — различные вершины. Если только в  $k$  строках с номерами  $i_1, \dots, i_k$  (где  $k \geq n - d$ ) имеются +1 в пересечении со столбцами номеров  $j_1, \dots, j_{d+1}$  и матрица  $(V_{i_1} \dots V_{i_k})$  имеет ранг  $n - d$ , то линейная оболочка точек  $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_{d+1}}$  содержит грань  $\Gamma_l^{(d)}$ , остов нормального конуса которой образован векторами  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ .

5. В ситуации предыдущего следствия, если для некоторого  $j'$  все величины  $\theta_{i_1 j'}, \dots, \theta_{i_k j'}$  равны +1, то точка  $Q_{j'} \in \Gamma_l^{(d)}$ .

Пусть фиксирована нумерация векторов  $Q_1, \dots, Q_s$  и векторов нормалей  $V_1, \dots, V_r$ . Тогда носители  $D_i^{(d)} = \{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_l}\}$  и нормальные конусы  $K_i^{(d)} = \{\lambda_1 V_{i_1} + \dots + \lambda_k V_{i_k}\}$  можно задавать наборами индексов  $[j_1, \dots, j_l]$  и  $[i_1, \dots, i_k]$ . Ответом на задачу выделения всех укорочений и их нормальных

конусов будет перечень всех пар

$$D_i^{(d)} = [j_1, \dots, j_l], \quad K_i^{(d)} = [i_1, \dots, i_k]. \quad (5.4)$$

Перейдем к описанию алгоритма, дающего такое решение. Этот алгоритм состоит из следующих этапов: 1) составление линейных неравенств, определяющих конусы  $\bar{K}(Q_j)$ ; 2) решение этих неравенств; 3) составление таблицы соответствий; 4) построение структурной диаграммы граней и двойственной структурной диаграммы.

Для системы, определяющей конус  $\bar{K}(Q_j)$ ,

$$\langle P, Q_k - Q_j \rangle \leq 0, \quad k = 1, \dots, s \quad (5.5)$$

можно получить решение в виде конической оболочки векторов  $V_i$  с помощью алгоритма Моцкина-Бургера (см. [41, 49]). Находим остов конуса  $\bar{K}(Q_1)$ , т.е. получаем список векторов нормалей  $V_1, \dots, V_l$  и заполняем первый столбец таблицы соответствий. Затем находим остов конуса  $\bar{K}(Q_2)$ , т.е. к нормальям  $V_1, \dots, V_l$  добавляем нормали  $V_{l+1}, \dots, V_{l+k}$  и заполняем второй столбец таблицы соответствий. Так, последовательно по  $j$  находим остовы конусов  $\bar{K}(Q_j)$  и заполняем  $j$ -й столбец таблицы соответствий. На  $s$ -м шаге получаем перечень всех нормалей  $V_1, \dots, V_r$  и заканчиваем составление таблицы соответствий.

Из полученной таблицы соответствий сначала по следствию 1 выделим все гиперграни  $\Gamma_i^{(n-1)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-1}$ ) с остовами  $V_i$  конусов  $K_i^{(n-1)}$ ; написав их в виде (5.4), заполним вторую строчку структурной диаграммы. Попарное пересечение граней  $\Gamma_i^{(n-1)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-1}$ ) в структурной диаграмме даст все грани  $\Gamma_i^{(n-2)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-2}$ ). Таким образом находим все грани  $\Gamma_i^{(n-2)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-2}$ ) и заполняем третью строчку структурной диаграммы. С помощью каждого пересечения не менее трех граней  $\Gamma_i^{(n-2)}$  находим грани  $\Gamma_i^{(n-3)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-3}$ ) с их нормальными конусами  $K_i^{(n-3)}$  ( $i = 1, \dots, k_{n-3}$ ) и заполняем четвертую строчку структурной диаграммы граней и т.д. На  $l$ -м шаге ранг матрицы  $T$ , составленной из векторов нормалей, входящих в остов нормального конуса  $K_i^{(n-l)}$ , должен быть равен  $l$ .

Пусть найдены все грани  $\Gamma_i^{(d+1)}$  с их нормальными конусами  $K_i^{(d+1)}$ . Находим все грани  $\Gamma_i^{(d)}$  ( $i = 1, \dots, k_d$ ) по пересечению  $k$  ( $k \geq n - d$ ) граней  $\Gamma_i^{(d+1)}$  ( $i = 1, \dots, k_{d+1}$ ). При этом остов нормального конуса  $K_i^{(d)}$  является объединением остовов  $k$  ( $k \geq n - d$ ) нормальных конусов  $K_i^{(d+1)}$ , и конус  $K_i^{(d)}$  имеет размерность  $n - d$ ; т.е. ранг матрицы, составленной из векторов, входящих в остов нормального конуса  $K_i^{(d)}$ , равен  $n - d$ . Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не выделим все вершины  $\Gamma_i^{(0)}$  ( $i = 1, \dots, k_0$ ) с нормальными конусами  $K_i^{(0)}$  ( $i = 1, \dots, k_0$ ) и заполним предпоследнюю строчку структурной диаграммы. Написав в первую строчку  $M$ , а в последнюю — символ пустого множества  $\emptyset$ , получим полную структурную диаграмму граней. Для проверки правильности выделения граней применим теорему

Эйлера-Пуанкаре (5.1) о многогранниках. На этом заканчиваем выделение всех носителей  $D_j^{(d)}$  и остовов их нормальных конусов  $K_j^{(d)}$ .

Если в полученной структурной диаграмме граней вместо граней  $\Gamma_i^{(d)}$  соответственно напишем их нормальные конусы  $K_i^{(d)}$ , заданные посредством остовов, то в результате получим двойственную структурную диаграмму (см. диаграмму 2 примера).

Если (5.3) не выполнено, и  $\dim M = l < n$ , то в  $\mathbb{R}^n$  имеется линейное подпространство  $N$ , нормальное к  $M$ ,  $\dim N = n - l$ . Пусть  $U_1, \dots, U_{n-l}$  — базис в  $N$ . Всякий нормальный конус  $K_j^{(d)}$  может быть задан в виде

$$K_j^{(d)} = \{P : P = \sum \lambda_i V_i + \sum_{k=1}^{n-l} \mu_k U_k, \lambda_i > 0\},$$

где  $\mu_k$  — произвольные вещественные числа, и  $V_i$  определены с точностью до слагаемых вида  $\sum \mu_k U_k$ . Чтобы устранить эту неоднозначность, рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  линейное подпространство  $N_1$ , трансверсальное к  $N$  (для определенности можно взять  $N_1$ , ортогональным к  $N$ ). Если потребовать, чтобы все  $V_i \subset N_1$ , то они определяются однозначно. Тогда сохраняются и свойства таблицы соответствий (между  $V_i$  и  $Q_j$ ), если под гипергранью понимать грань размерности  $l - 1$ .

Алгоритм выглядит так. Вычисляем  $\bar{K}(Q_1)$  по методу Мощкина-Бургера. Получаем некоторый базис  $U_1, \dots, U_{n-l}$  в  $N$  и векторы остова  $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_l$ . Будем искать векторы

$$V_j = \tilde{V}_j + \sum_{k=1}^{n-l} \sigma_{jk} U_k, j = 1, \dots, l,$$

удовлетворяющие условию  $V_j \subset N_1$ , т.е.  $0 = \langle U_i, V_j \rangle = \langle U_i, \tilde{V}_j \rangle + \sum_{k=1}^{n-l} \sigma_{jk} \langle U_k, U_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n - l$ ;  $j = 1, \dots, l$ . Для каждого  $j$  получаем систему линейных уравнений относительно  $\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jn-l}$ , из которой они однозначно определяются. При вычислении  $\bar{K}(Q_2)$  по методу Мощкина-Бургера для  $N$  можно взять базис  $U_1, \dots, U_{n-l}$ , найденный ранее, а вектора  $\tilde{V}_{l+1}, \dots, \tilde{V}_m$  поправить так, чтобы получать остов  $V_{l+1}, \dots, V_m$  на  $N_1$  и т.д. Таким образом заполняется таблица соответствий и по ней составляются структурные диаграммы.

Предложенный в этом параграфе алгоритм вычисления многогранника Ньютона основан на вычислении всех  $\bar{K}(Q_j)$ . Можно вычисление многогранника Ньютона организовать иначе. Например, если  $\dim M = n$ , то можно вычислять  $\bar{K}(Q_{j_1}, \dots, Q_{j_n})$  для всех наборов  $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_n}$ , у которых ранг матрицы  $(Q_{j_2} - Q_{j_1} \dots Q_{j_n} - Q_{j_1})$  равен  $n - 1$ . Для таких наборов вектор нормали  $\tilde{V}$  определяется однозначно, как решение системы линейных уравнений. Остается только вычислить значения  $\langle \tilde{V}, Q_l \rangle$  по всем  $l \neq j_1, \dots, j_n$  и сравнить их с  $\langle \tilde{V}, Q_{j_1} \rangle$ . Если  $\langle \tilde{V}, Q_{j_1} \rangle \geq \langle \tilde{V}, Q_l \rangle$ , то  $\tilde{V}$  — нормаль к некоторой гиперграну  $\Gamma_l^{(n-1)}$ . На ней лежат  $Q_{j_1}, \dots, Q_{j_n}$  и те из  $Q_l$  для которых  $\langle \tilde{V}, Q_{j_1} \rangle = \langle \tilde{V}, Q_l \rangle$ . Если  $\langle \tilde{V}, Q_{j_1} \rangle < \langle \tilde{V}, Q_l \rangle$  для некоторого  $l$ , то точки

$Q_{j_1}, \dots, Q_{j_n}$  не лежат на одной гиперграни. Таким образом, по теореме 5.1 можно сразу определить все векторы  $V_j$  и соответствующие гиперграни  $\Gamma_j^{(n-1)}$ . Затем, двигаясь по структурной диаграмме граней вниз, можно определить остальные  $\Gamma_j^{(d)}$ . При этом придется в основном решать системы линейных уравнений. Но алгоритм, основанный на вычислении  $\bar{K}(Q_j)$ , является более стандартизированным (содержит меньше исключительных случаев, требующих отдельных программ) и требует меньшего перебора ( $s$  точек вместо  $\frac{s!}{n!(s-n)!}$  сочетаний).

Алгоритмом, предложенным в этом параграфе, решаются следующие более общие задачи:

1) Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задан открытый выпуклый конус  $\mathcal{K}$  (конус задачи). Из множества  $D$  нужно выделить только те множества  $D_j^{(d)}$ , для которых нормальные конусы  $K_j^{(d)}$  пересекаются с конусом  $\mathcal{K}$ .

2) Метод нахождения всех нормальных конусов укороченных систем  $\Pi_\lambda$ .

Например, укажем один из способов нахождения конусов укороченных систем  $\Pi_\lambda$ . Предположим, что для многочлена  $f_1$  построена двойственная структурная диаграмма. Каждую систему линейных неравенств, определяющую конус  $\bar{K}(Q_j^2)$ ,  $j = 1, \dots, l_2$ , решим в каждом нормальном конусе  $K_{1i}^{(0)}$ , заданном остовом. Вместо  $K_{1i}^{(0)}$  в предпоследней строчке двойственной структурной диаграммы напомним пересечение  $\bar{K}(Q_j^2) \cap K_{1i}^{(0)}$  (для каждого фиксированного  $j$  отдельно). Далее, основываясь на следующих строках и соединительных черточках двойственной структурной диаграммы для  $f_2$ , восстановим всю двойственную структурную диаграмму пересечений для каждого  $j = 1, \dots, l_2$ . Из диаграммы выделим все непустые конусы пересечений  $\mathcal{K}_{2\gamma}^{(d_2)}$ . На следующем шаге каждую систему линейных неравенств, определяющую конус  $\bar{K}(Q_j^3)$ ,  $j = 1, \dots, l_3$ , решим в каждом непустом конусе пересечений  $\bar{K}(Q_j^2) \cap K_{1i}^{(0)}$  с уже найденным остовом. Точно так же как на предыдущем шаге, восстановим структурные диаграммы пересечений  $\mathcal{K}_{3\delta}^{(d_3)}$ . Так, продолжая этот процесс, на  $m$ -м шаге получим все конусы  $\mathcal{K}_{m\omega}^{(d'_m)} = \Pi_\lambda$  укороченных систем.

**Пример.** Пусть  $D(f) = \{Q_1 = (1, 1, 1), Q_2 = (4, 0, 0), Q_3 = (0, 4, 0), Q_4 = (0, 0, 4), Q_5 = (2, 0, 2)\}$ , (см. пример § 1). Выделим все множества и конусы  $K_j^{(d)}$ . Для  $Q_1$  построим систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle P, Q_2 - Q_1 \rangle &\triangleq 3p_1 - p_2 - p_3 \leq 0, \\ \langle P, Q_3 - Q_1 \rangle &\triangleq -p_1 + 3p_2 - p_3 \leq 0, \\ \langle P, Q_4 - Q_1 \rangle &\triangleq -p_1 - p_2 + 3p_3 \leq 0, \\ \langle P, Q_5 - Q_1 \rangle &\triangleq p_1 - p_2 + p_3 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эту систему будем решать точно по алгоритму Моцкина-Бургера, указанному в § 1, гл. III, кн. Черникова [41]. В результате вычисления получим остов  $V_1 = (-1, -2, -1)$ ,  $V_2 = (-1, -1, -2)$ ,  $V_3 = (-2, -1, -1)$  конуса  $\bar{K}(Q_1)$ .

Таким же образом построим системы линейных неравенств (5.5) для точек  $Q_2, \dots, Q_5$  и найдем для каждого  $\bar{K}(Q_i)$  свой осто. Результаты этих вычислений представлены в таблице.

	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$
$V_1 = (-1, -2, -1)$	+	+	-	+	+
$V_2 = (-1, -1, -2)$	+	+	+	-	-
$V_3 = (-2, -1, -1)$	+	-	+	+	-
$V_4 = (1, 1, 1)$	-	+	+	+	+

По таблице находим: вершинам многогранника  $M(f)$  (рис.1) соответствуют:  $D_1^{(0)} = [1]$ ,  $(K_1^{(0)} = [1, 2, 3])$ ;  $D_2^{(0)} = [2]$ ,  $(K_2^{(0)} = [1, 2, 4])$ ;  $D_3^{(0)} = [3]$ ,  $(K_3^{(0)} = [2, 3, 4])$ ;  $D_4^{(0)} = [4]$ ,  $(K_4^{(0)} = [1, 3, 4])$ . Ребрам многогранника  $M(f)$  соответствуют:  $D_1^{(1)} = [1, 2]$ ,  $(K_1^{(1)} = [1, 2])$ ;  $D_2^{(1)} = [1, 3]$ ,  $(K_2^{(1)} = [2, 3])$ ;  $D_3^{(1)} = [1, 4]$ ,  $(K_3^{(1)} = [1, 3])$ ;  $D_4^{(1)} = [2, 3]$ ,  $(K_4^{(1)} = [2, 4])$ ;  $D_5^{(1)} = [2, 4, 5]$ ,  $(K_5^{(1)} = [1, 4])$ ;  $D_6^{(1)} = [3, 4]$ ,  $(K_6^{(1)} = [3, 4])$ . Двумерным граням многогранника  $M(f)$  соответствуют:  $D_2^{(2)} = [1, 2, 4, 5]$ ,  $(K_2^{(2)} = [2])$ ;  $D_1^{(2)} = [1, 2, 3]$ ,  $(K_1^{(2)} = [1])$ ;  $D_3^{(2)} = [1, 3, 4]$ ,  $(K_3^{(2)} = [3])$ ;  $D_4^{(2)} = [2, 3, 4, 5]$ ,  $(K_4^{(2)} = [4])$ .

Полной структурной диаграммой граней многогранника  $M(f)$  будет диаграмма 1.

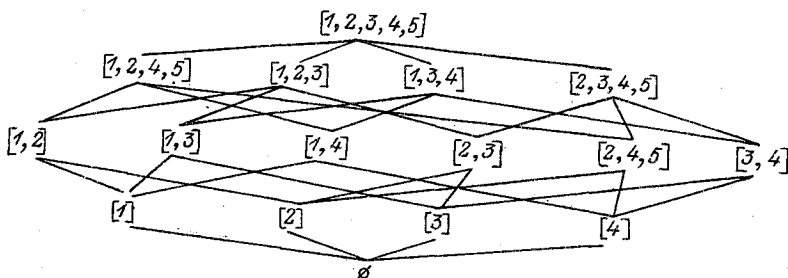


ДИАГРАММА 1.

Подставляя в диаграмму 1 вместо граней остовы их нормальных конусов, получим двойственную ей структурную диаграмму нормальных конусов (диаграмма 2).

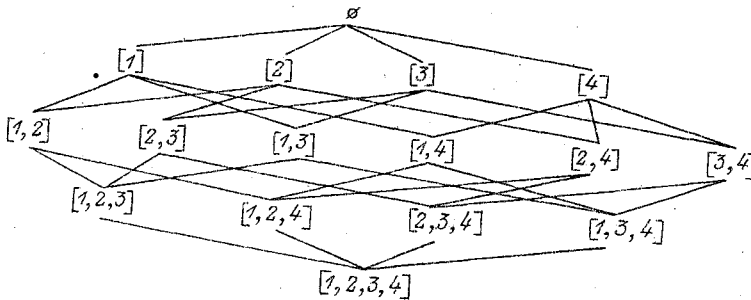


ДИАГРАММА 2.

С помощью алгоритма выделения укороченных систем из системы (2.4) получим укороченные системы (2.5) и (2.6), соответствующие конусам укорочений  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

#### § 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Пусть  $D$  — множество точек  $Q \in \mathbb{R}^n$ . Так же как в § 1, обозначим через  $L_P$  опорную к  $D$  гиперплоскость с нормальным вектором  $P$ , а через  $L_P^-$  — ее отрицательное полупространство. Для произвольного множества  $D$  может случиться, что  $L_P^-$  совпадает со всем пространством. Пересечение всех отрицательных полупространств опорных гиперплоскостей множества  $D$  обозначим через  $M$ . Пусть  $\Delta$  — выпуклая оболочка множества  $D$ ; ее замыкание  $\bar{\Delta}$  совпадает с  $M$ . Поверхность  $\partial M$  множества  $M$  состоит из граней  $\Gamma_j^{(d)} = L_P \cap M$  разных размерностей  $d$ , и им в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , сопряженном к  $\mathbb{R}^n$ , соответствуют нормальные конусы  $K_j^{(d)}$ . Пусть  $K$  — объединение всех  $K_j^{(d)}$  с  $d \geq 0$ . Для всякого  $P \in K$  существует опорная к  $D$  гиперплоскость  $L_P$  с непустым  $L_P^+$ . Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задан выпуклый конус

$$C = \{P : P = \sum_{i=1}^t \lambda_i V_i, \quad \lambda_i \geq 0\}.$$

Его назовем *целым*, если все векторы  $V_1, \dots, V_t$  целочисленны. Конус  $C$  называют *выступающим*, если он не содержит ни одной прямой. Обозначим через  $\partial C$  его границу и  $\tilde{C} = C \setminus \partial C$  — множество его внутренних точек. Обозначим через  $\partial_C M$  ту часть границы множества  $M$ , которая лежит на опорных плоскостях  $L_P$  с  $P \in C$ .

**Теорема 6.1.** Пусть множество  $D \subset \mathbb{Z}^n$  и его конус нормалей  $K$  содержит целый выступающий конус  $C$ . Тогда  $\partial_C M$  состоит из конечного числа граней и  $\partial_C M$  содержит конечное число целочисленных точек (следовательно, конечное число точек из  $D$ ).

**Доказательство** этой теоремы довольно громоздко и будет опубликовано в отдельной работе.

Многогранную поверхность  $\partial_C M$  будем называть *опорным многогранником* множества  $D$ .

Обозначим  $C^*$  — конус в  $\mathbb{R}^n$ , двойственный конусу  $C$ , т.е.  $C^* = \{Q : \langle V_i, Q \rangle \leq 0, i = 1, \dots, t\}$ . Пусть  $Q_1, \dots, Q_l$  — произвольные точки из  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим выпуклое множество

$$C^*(Q_1, \dots, Q_l) = \{Q : Q = \sum_{i=1}^l \lambda_i Q_i + T, T \in C^*, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1\}.$$

Здесь  $\sum \lambda_i Q_i$  пробегает выпуклый многогранник, а  $T$  пробегает многогранный конус  $C$  [26, 19]. Граница множества  $C^*(Q_1, \dots, Q_l)$  состоит из конечного множества граней. В частности, она имеет конечное множество ребер. Пусть  $S_1, \dots, S_k$  — все ее ребра, параллельные ребрам конуса  $C^*$ .

Если для любого  $P \in \tilde{C}$  выполняется неравенство

$$\max_{Q \in M} \langle P, Q \rangle \geq \max_{W \in H} \langle P, W \rangle,$$

где  $M$  и  $H$  — подмножества в  $C^*(Q_1, \dots, Q_l)$ , то будем говорить, что множество  $M$  ограничено сверху множеством  $H$ .

**Лемма 6.1.** Пусть  $D \subset C^*(Q_1, \dots, Q_l)$  и  $S_1, \dots, S_k$  — все ребра множества  $C^*(Q_1, \dots, Q_l)$ , параллельные ребрам конуса  $C^*$ . Если  $G_i \in S_i \cap D, i = 1, \dots, k$ , то опорный многогранник  $\partial_C M$  ограничен сверху многогранником

$$H = \{Q : Q = \lambda_1 G_1 + \dots + \lambda_k G_k, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}.$$

**Доказательство.** Все точки  $G_1, \dots, G_k$  являются вершинами многогранника  $H$ . Поэтому можно написать уравнения опорных гиперплоскостей многогранника  $H$ , соответствующих нормальным векторам  $P \in \tilde{C}$ . Пусть эти уравнения будут

$$\langle P, Q \rangle = \max \langle P, G_i \rangle, 1 \leq i \leq k.$$

Так как  $G_i \in D, D \subset C^*(Q_1, \dots, Q_l)$ , то для  $P \in \tilde{C}$  справедливы соотношения  $\langle P, G_i \rangle \leq \max_{1 \leq j \leq l} \langle P, Q_j \rangle = \max_{Q \in M_D} \langle P, Q \rangle$ . Следовательно,  $\max_{1 \leq i \leq k} \langle P, G_i \rangle \leq \max_{Q \in \partial_C M} \langle P, Q \rangle$ . Лемма доказана.

Итак, для построения опорного многогранника  $\partial_C M$  надо найти все ребра конуса  $C^*$ , затем у множества  $C^*(D)$  найти все ребра  $S_i$ , параллельные ребрам конуса  $C^*$ , и на каждом ребре  $S_i$  — крайнюю точку  $G_i \in D$ . После этого надо выделить все точки из  $D$ , которые ограничены сверху выпуклой

оболочкой точек  $G_i$ . К полученному конечному множеству  $D'$  можно применять обычную процедуру вычисления многогранника  $M'$ , являющегося выпуклой оболочкой множества  $D'$ . Если  $D$  — носитель ряда Лорана  $f$ , то  $\partial_{\mathbb{C}} M$  назовем *опорным многогранником Ньютона* для  $f$ .

Рассмотрим теперь основную задачу, где носители  $D(f_i)$  бесконечны, целочисленны и лежат в множествах вида  $(C^*(Q_1^i, \dots, Q_{l_i}^i))$ , (разных для разных  $i$ ), а конус задачи  $K$  лежит внутри целого конуса  $C$ .

Для решения такой основной задачи применима процедура, описанная в § 4 для случая конечных носителей  $D(f_i)$ . Отличие только в том, что при подстановках вида  $y_j = y_j^0 + z_j$  (с  $y_j^0 \neq 0$ ) получаются ряды по неотрицательным степеням  $z_j$  (вместо многочленов).

В частности, если функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , аналитичны в окрестности точки  $X = 0$ , то они разлагаются в ряды Маклорена

$$f_i = \sum a_{iQ} X^Q, \quad Q \geq 0.$$

Система (0.1) определяет аналитическую кривую [35]. Здесь  $C = \{P : P \leq 0\}$ ,  $K = \{P : P < 0\}$  и  $Q \geq 0$  для всех  $D(f_i)$ . После выделения укороченной системы и степенного преобразования исходные конусы  $C$  и  $K$  преобразуются в некоторые конусы  $C'$  и  $K'$  более общей природы. Поэтому основная задача сразу была сформулирована в форме, инвариантной относительно степенных преобразований. О замене аналитических уравнений алгебраическими см. [47].

## § 7. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

Для отыскания решений системы (0.1), где  $f_i$  — многочлены, Бугаев [14] предложил „начало наибольших и наименьших показателей“. Он показал, что при  $n = 2$  его метод аналогичен методу многоугольника Ньютона, и подробно описал свой метод для  $n = 3$ . В наших обозначениях и с уточнениями Синцова [27] метод Бугаева выглядит так. Пусть система (0.1) записывается в виде (2.1). Решения этой системы при всех  $x_i \rightarrow 0$  ищутся в виде

$$x_i = b_i x_n^{r_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (7.1)$$

Для нахождения показателей  $r_1, \dots, r_{n-1}$  из каждого множества  $D_i$  сначала выделяется подмножество крайних точек

$$D_i^* = \{Q = (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n^*) : q_n^* = \min q_n' \text{ по } Q = (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n') \in D_i\}.$$

Пусть точки  $Q \in D_i^*$  как-то занумерованы:  $D_i^* = \{Q_1^i, \dots, Q_{l_i}^i\}$ . Каждой паре точек  $Q_j^i$  и  $Q_k^i$  из  $D_i^*$  ставится в соответствие уравнение

$$\langle R, Q_j^i \rangle = \langle R, Q_k^i \rangle \quad (7.2)$$

относительно  $R = (r_1, \dots, r_{n-1}, 1)$ . Рассматривается система таких уравнений для  $i = 1, \dots, n-1$ , где  $j = j(i)$  и  $k = k(i)$ . Пусть  $R$  — решение этой системы, тогда для каждого  $i$  проверяются соотношения

$$\langle R, Q_j^i \rangle \leq \langle R, Q_s^i \rangle, 0 < s < t_i, s \neq j, k. \quad (7.3)$$



Если все они выполнены, то  $R$  — требуемое значение показателей в (7.1). Если хоть одно не выполнено, то такое  $R$  не подходит. После того как найдено  $R$ , выделяются те  $Q \in D_i$ , для которых скалярное произведение  $\langle R, Q \rangle$  минимально. Соответствующие члены дают укороченную систему, из которой определяются коэффициенты  $b_i$  в (7.1). Если они определены, то в исходную систему (0.1) делается подстановка

$$x_i = b_i x_n^{r_i} + y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (7.4)$$

и процедура продолжается, только уже ищутся решения

$$y_i = c_i x_n^{s_i} (1 + o(1)) \quad \text{с} \quad s_i > r_i \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

В случае  $n = 3$  Синцов [27] для нахождения  $R$  предложил геометрический способ. На плоскости  $r_1, r_2$  решения уравнения (7.2) образуют прямую  $S_{jk}^i$ . Неравенства (7.3) на каждой прямой  $S_{jk}^i$  выделяют множества  $L_{jk}^i$ . Точка  $R^* = (r_1^*, r_2^*, 1)$ , соответствующая решению (7.2), должна лежать и на некотором  $L_{jk}^1$ , и на некотором  $L_{lm}^2$ , т.е. является точкой пересечения множества  $\{L_{jk}^1\}$  с множеством  $\{L_{lm}^2\}$ . Следовательно, надо на плоскости  $r_1, r_2$  начертить множества  $L_{jk}^1$  и  $L_{lm}^2$  и найти все точки их пересечений. Синцов предлагает на плоскости  $r_1, r_2$  провести все прямые  $S_{jk}^i$  своим цветом для каждого  $i$  и определить все точки пересечений прямых разных цветов. Затем для каждой такой точки пересечения  $S_{jk}^1$  и  $S_{lm}^2$  надо выяснить, лежит ли она в соответствующих множествах  $L_{jk}^1$  и  $L_{lm}^2$ , т.е. выполнены ли в ней неравенства (7.3), что легко увидеть по расположению точки относительно других прямых  $S_{jg}^1$  и  $S_{lh}^2$ .

Эта конструкция легко интерпретируется с позиции локального метода. Вследствие принятой здесь параметризации  $\tau \rightarrow \infty$  можно считать, что  $x_3 = \tau^{-1}$ , поэтому наши  $P = -R$ , и объектам на гиперплоскости  $r_1, \dots, r_{n-1}$  соответствуют объекты на гиперплоскости  $p_i = -r_i, i = 1, \dots, n-1, p_n = -1$ . Рассмотрим эти объекты подробнее. Из точек  $Q \in D_i$  на  $\partial_{\{P < 0\}} M_i$  попадают только крайние точки из  $D_i^*$  (и то не все). Пусть  $i$  фиксировано, возьмем две точки  $Q_j^i$  и  $Q_k^i \in D_i^*$ . Тогда  $L_{jk}^i = -\bar{K}(Q_j^i, Q_k^i) \cap \{p_n = -1\}$ . По теореме 5.1  $\bar{K}(Q_j^i, Q_k^i) = \bar{K}_{il}^{(d)}$  с некоторыми  $d > 0$  и  $l$ . Причем все  $\bar{K}_{il}^{(1)}$  представляются таким образом. Все остальные  $\bar{K}_{il}^{(d)}$  с  $d > 1$  входят в конусы  $\bar{K}_{il}^{(1)}$  и являются пересечениями таких конусов. Поэтому точки пересечения множеств  $L_{jk}^i, i = 1, \dots, n-1$ , дают пересечения конусов  $K_{il}^{(d_i)} (i = 1, \dots, n-1)$  с гиперплоскостью  $\{p_n = -1\}$  при  $d_i \geq 1$ .

Метод Бугаева-Синцова имеет следующие недостатки: а) он применим только для конечных сумм; б) не разобран случай, когда система уравнений (7.2) для  $i = 1, \dots, n-1$  имеет неединственное решение; в) объем вычислений излишне велик, ибо рассматривается перебор всевозможных пар точек и не выделяются множества  $D_{is}^{(d)} = \Gamma_{is}^{(d)} \cap D_i$ ; г) показатели  $r_i$  являются рациональными числами, но могут не быть целыми. Поэтому после подстановки (7.4) можно получить уравнения с нецелыми показателями степеней.

На рис.5 показан результат процедуры Синцова для системы (2.4) на плоскости  $\{p_3 = -1\}$  (соответствующей  $x_3 \rightarrow 0$ ). Из сравнения рис.3 и 5

видно, что вычисления укорочений упрощаются, если их проводить с использованием многогранников Ньютона. Синцов указывает, что распространение его метода на большее число переменных привело бы к чертежам в многомерных пространствах.

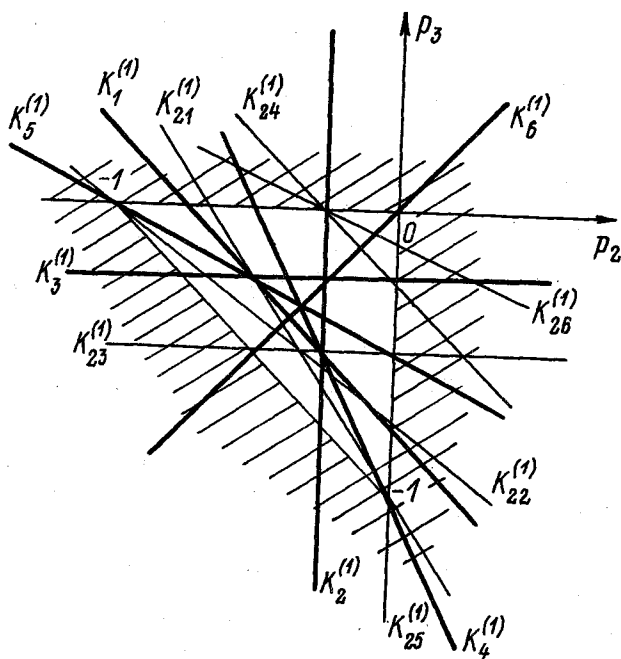


Рис. 5.

*Замечание при корректуре.* Теорему 3.2 можно усилить: существует преобразование (3.1) и сокращения такие, что выполнены свойства укороченной системы (2.2), указанные в теореме 3.2, и кроме того, преобразованная полная система (2.1) содержит только неотрицательные степени всех  $y_i$  (точную формулировку и доказательство см. в [54]). Использование таких преобразований упрощает процедуру выделения ветвей, описанную в § 4.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., *Особенности дифференцируемых отображений, Монодромия и асимптотики интегралов*, Наука, М., 1984.
- [2] Айзендгендлер П. Г., *Некоторые вопросы ветвления решений нелинейных уравнений*, Успехи мат. наук **21**, вып. 1 (1966), 182-183.
- [3] Бернштейн Д. Н., *Число корней системы уравнений*, Функцион. анализ и его прил. **9**, вып. 3 (1975), 1-4.
- [4] Боташев А. И., *Конечные методы в теории многомерного ветвления*, Илим, Фрунзе, 1976.

- [5] Боташев А. И., *Аналитические методы в теории ветвления*, Успехи мат. наук. 40, вып. 4 (1985), 147-148.
- [6] Брюно А. Д., *Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений*, ДАН СССР 143, вып. 4 (1962), 763-766.
- [7] Брюно А. Д., *Степенные асимптотики решений нелинейных систем*, Изв. АН СССР, Сер.мат. 29, вып. 2 (1965), 329-364.
- [8] Брюно А. Д., *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Тр. Моск. мат. об-ва 25 (1971), 119-262; 26 (1972), 199-239.
- [9] Брюно А. Д., *О степенных асимптотиках решений нелинейных систем*, Препринт ИПМ, 54, Ин-т прикл. мат. АН СССР, М., 1973.
- [10] Брюно А. Д., *Элементы нелинейного анализа*, СамГУ, Самарканд, 1973.
- [11] Брюно А. Д., *Локальные методы в нелинейном анализе*, Функциональный анализ и некоторые вопросы КТДУ, Мордов. ун-т, Саранск, 1976, с. 77-80.
- [12] Брюно А. Д., *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [13] Брюно А. Д., *Бифуркации периодических решений в симметричном случае кратной пары мнимых собственных значений*, Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, Ин-т прикл. мат. АН СССР, М., 1988, с. 161-176.
- [14] Бугаев Н. В., *Различные применения начала наибольших и наименьших показателей в теории алгебраических функций*, Мат. сб. 14 (1988), 553-590.
- [15] Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г., *Методы исследования в теории разветвления решений*, Итоги науки. Математический анализ, ВИНТИ, М., 1966, с. 7-69.
- [16] Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [17] Варченко А. Н., Хованский А. Г., *Асимптотика интегралов по исчезающим циклам и многогранник Ньютона*, ДАН СССР 283, вып. 3 (1985), 521-525.
- [18] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г., *Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в частных производных*, Тр. Моск. мат. об-ва 48 (1985), 211-262.
- [19] Голдман А., Таккер А., *Многогранные выпуклые конусы, Линейные неравенства*, ИЛ, М., 1959.
- [20] Данилов В. И., Хованский А. Г., *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа-Делиня*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 50, вып. 5 (1986), 925-945.
- [21] Забрейко П. П., Кац Б. П., *О методе Некрасова-Назарова решения нелинейных операторных уравнений*, Сиб. мат. журн. 12, вып. 5 (1971), 1026-1040.
- [22] Казарновский В. Я., *Многогранники Ньютона и корни систем экспоненциальных сумм*, Функцион. анализ и его прил. 18, вып. 4 (1984), 40-49.
- [23] Лефшец С., *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1961.
- [24] Михайлов В. П., *О поведении на бесконечности одного класса многочленов*, Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР 91 (1967), 59-80.
- [25] Ньютон Исаак, *Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых*, Математические работы, ОНТИ, М.; Л., 1937, с. 33-44.
- [26] Пшеничный В. И., *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980.
- [27] Синцов Д. М. *Рациональные интегралы линейных уравнений*, Учен. зап. Казан. ун-та, Казань (1898).
- [28] Солеев А., *Алгоритм вычисления многогранников Ньютона*, ДАН УзССР, вып. 5 (1982), 14-16.
- [29] Солеев А., *Выделение ветвей аналитической кривой и многогранники Ньютона*, ДАН СССР 268, вып. 6 (1983), 1305-1307.
- [30] Солеев А., *Нахождение ветвей трехмерной алгебраической кривой*, Изв. АН УзССР. Сер.физ.-мат.наук., вып. 6 (1983), 21-27.
- [31] Солеев А., *Алгебраические аспекты расположения периодических решений системы Гамильтона*, Качественные и аналитические методы в динамике систем, Сам. гос. ун-т, Самарканд, 1987, с. 55-60.
- [32] Солеев А., Муясаров А., *Вычислительная схема определения граней опорного многогранника Ньютона*, Вопр. геометрии., Сам.гос. ун-т, Самарканд, 1984, с. 52-55.

- [33] Суяршаев А. М., *Многогранник Ньютона для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Исследования по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Сам. гос. ун-т, Самарканд, 1982, с. 51–61.
- [34] Уокер Р., *Алгебраические кривые*, ИЛ, М., 1952.
- [35] Фукс Б. Р., *Введение в теорию аналитических функций многих переменных*, Физматгиз, М., 1962.
- [36] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [37] Хованский А. Г., *Об оценке числа вещественных корней малочленов*, Успехи мат. наук. 37, вып. 1 (1982), 165.
- [38] Хованский А. Г., *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 22, ВИНТИ АН СССР, М., 1983, с. 207–239.
- [39] Хованский А. Г., *Многогранники Ньютона и индекс векторного поля*, Успехи мат. наук. 36, вып. 4 (1984), 234.
- [40] Чеботарев Н. Г., *„Многоугольник Ньютона“ и его роль в современном развитии математики*, Собр. соч., т. 3, Изд-во АН СССР, М.; Л., 1950, с. 47–80.
- [41] Черников С. Н., *Линейные неравенства*, Наука, М., 1968.
- [42] Artin M., *On the solutions of analytic equations*, Inv. Math. 5 no. 4 (1968), 277–291.
- [43] Graves L. M., *Remarks on singular points of functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), 150–157.
- [44] Euler L., *De relation tres pluresve quantitates instituenda*, Commentations arithmeticae (1849), 99–104.
- [45] Khovanskii A. G., *Algebra and mixed volumes*, Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Geometric Inequalities., Springer, Berlin, 1988, pp. 182–207.
- [46] Lefschetz S., *Complete families of periodic solutions of differential equations*, Comm. Helv. 28 (1954), 341–345.
- [47] MacMillan W., *A reduction of a system of power series to an equivalent system of polynomials*, Math. Ann. 72 (1912), 157–179.
- [48] MacMillan W., *A method for determining the solutions of a system of analytic functions in the neighborhood of a branch point*, Math. Ann. 72 (1912), 180–202.
- [49] Motzkin T. S., Schoenberg G. J., *The relaxation method for linear inequalities*, Canad. J. Math. 6 (1954), 393–404.
- [50] Saito M., *Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities*, Ann.Inst. Fourier, Grenoble 33 (1983), 1–10.
- [51] Sather D., *Branching of solutions of nonlinear equations*, Rocky Mountain J. Math. 3 no. 2 (1973), 203–250.
- [52] Weierstrass K., *Theorie der Abelshen Transcendenten, I. Absch., I. Kap.*, Math. Werke. Bd 4, Mayer und Muller, Berlin, 1902, pp. 11–45.
- [53] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1972.
- [54] Bruno A. D., Soleev A., *The local uniformization of branches of an algebraic curve*, Preprint I.H.E.S. /M/90/34 (1990), Paris.

Институт прикладной математики АН СССР,  
Москва, 125047, Миусская пл. 4

Поступило 11 сентября 1989 г.

Самаркандский государственный университет,  
математический факультет,  
Самарканд, 703004, Университетский бульвар 15