Arch. math. Logik **25** (1985), 75–89

EIN IN DER REINEN ZAHLENTHEORIE UNBEWEISBARER SATZ ÜBER ENDLICHE FOLGEN VON NATÜRLICHEN ZAHLEN *

Kurt Schütte und Stephen G. Simpson

In [9] wurden mehrere Beweise für die Unbeweisbarkeit von kombinatorischen Sätzen in gewissen formalen Systemen ausgeführt. Hierbei handelt es sich u.a. um einen in Erweiterung des Kruskalschen Satzes von Friedman [5] bewiesenen Satz über markierte endliche Bäume, der in einem formalen System $\Pi_1^1-\mathrm{CA}_0$ mit Π_1^1-Komprehension nicht beweisbar ist. Sowohl der ursprüngliche Beweis von Friedman als auch der in [9] durchgeführte Beweis für die Unbeweisbarkeit dieses Satzes beruht auf einer Einbettung von Ordinalzahlen eines von Buchholz [1] oder [2] entwickelten Bezeichnungssystems in die betreffenden Bäume. Entsprechend läßt sich für den Spezialfall dieses Satzes, der anstatt von endlichen Bäumen nur von endlichen Folgen natürlicher Zahlen handelt, eine Unbeweisbarkeit mit Hilfe eines eingeschränkten Ordinalzahlensystems nachweisen.
Wir schränken das Bezeichnungssystem von Buchholz [2], dem gewisse Kollabierungsfunktionen ψ_i zugrunde liegen, in der Weise ein, daß wir die Addition und die Bildung von ω^α als Grundoperationen fortlassen und das System nur mit einstelligen Funktionen π_i aufbauen, die analog zu den Funktionen ψ_i definiert werden. In dieser Weise ergibt sich ein Ordinalzahlensystem $\pi(\omega)$, das in Abschnitt 1 eingeführt wird und von dem in Abschnitt 2 gezeigt wird, daß es den Abschnitt aller Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$ enthält. Hiermit wird in den Abschnitten 3 und 4 entsprechend wie in [9] bewiesen, daß der Spezialfall des Satzes von Friedman und eine endliche Miniaturisierung dieses Satzes in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar sind. Diese Sätze haben die Gestalt $\forall n W(f, n)$ und $\forall n A(n)$, wobei f eine freie Funktionsvariable oder eine freie Prädikatenvariable ist und in $A(n)$ eine solche Variable nicht auftritt. Wir zeigen schließlich in Abschnitt 5, daß $W(f, n)$ und $A(n)$ für jede einzelne natürliche Zahl n in der reinen Zahlentheorie beweisbar sind, so daß die Unbeweisbarkeit der Allsätze nur auf der ω-Unvollständigkeit der reinen Zahlentheorie beruht.

1. Das Ordinalzahlensystem $\pi(\omega)$

Die kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ bezeichnen im folgenden immer Ordinalzahlen. Mit i, j, k, m, n bezeichnen wir natürliche Zahlen (einschließlich 0).

---

* Eingegangen am 10. 7. 1984.

Wir setzen $\Omega_0 := 0$. Für $i > 0$ sei Ω_i die i-te reguläre Ordinalzahl $> \omega$, und es sei $\Omega_\omega := \sup\{\Omega_i : i < \omega\}$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmengen $B_i^m(\alpha)$ und $B_i(\alpha)$ und der Ordinalzahl $\pi_i\alpha$ (durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach m).
(B1) Ist $\gamma = 0$ oder $\gamma < \Omega_i$, so sei $\gamma \in B_1^m(\alpha)$.
(B2) Ist $i \leqq j$, $\beta < \alpha$, $\beta \in B_j(\beta)$ und $\beta \in B_i^m(\alpha)$, so sei $\pi_j\beta \in B_i^{m+1}(\alpha)$.
(B3) $B_i(\alpha) := \cup\{B_i^m(\alpha) : m < \omega\}$
(B4) $\pi_i\alpha := \min\{\eta : \eta \notin B_i(\alpha)\}$.

Folgerung. $k < m \Rightarrow B_i^k(\alpha) \subseteqq B_i^m(\alpha)$.

Lemma 1.1. $i \leqq j,\ \alpha \leqq \beta \Rightarrow B_i(\alpha) \subseteqq B_j(\beta),\ \pi_i\alpha \leqq \pi_j\beta$.

Beweis unmittelbar aufgrund der Definitionen.

Lemma 1.2.
a) $\Omega_i \leqq \pi_i\alpha < \Omega_{i+1}$,
b) $\pi_0 0 = 1,\ \pi_i 0 = \Omega_i$ *für* $i > 0$.

Beweis. a) $\Omega_i \leqq \pi_i\alpha$ folgt unmittelbar aus den Definitionen. Durch Induktion nach m ergibt sich, daß $B_i^m(\alpha)$ eine Mächtigkeit $< \Omega_{i+1}$ hat. Dann hat auch $B_i(\alpha)$ eine Mächtigkeit $< \Omega_{i+1}$. Nach (B4) folgt $\pi_i\alpha < \Omega_{i+1}$.
b) Man hat $1 = \min\{\eta : \eta \notin B_0(0)\}$ und $\Omega_i = \min\{\eta : \eta \notin B_i(0)\}$ für $i > 0$.

Lemma 1.3. $\gamma \in B_i(\alpha),\ \gamma < \Omega_{i+1} \Rightarrow \gamma < \pi_i\alpha$.

Beweis. Gilt $\gamma \in B_i(\alpha)$ nach (B1), so folgt die Behauptung aus Lemma 1.2a). Andernfalls hat man $\gamma = \pi_j\beta$ mit $\beta < \alpha$. Aus $\gamma < \Omega_{i+1}$ folgt dann nach Lemma 1.2a) $j \leqq i$. Nach Lemma 1.1 folgt $\gamma \leqq \pi_i\alpha$. Aufgrund von $\pi_i\alpha \notin B_i(\alpha)$ folgt $\gamma < \pi_i\alpha$.

Lemma 1.4.
a) $\alpha \in B_i(\alpha),\ \alpha < \beta \Rightarrow \pi_i\alpha < \pi_i\beta$.
b) $\alpha \in B_i(\alpha),\ \beta \in B_i(\beta),\ \pi_i\alpha = \pi_i\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Beweis. a) Aus den Voraussetzungen folgt nach Lemma 1.1 $\alpha \in B_i(\beta)$ und nach (B2) $\pi_i\alpha \in B_i(\beta)$. Nach den Lemmata 1.2a) und 1.3 folgt $\pi_i\alpha < \pi_i\beta$.
b) Wäre $\alpha \neq \beta$, so würde aus den Voraussetzungen nach a) entweder $\pi_i\alpha < \pi_i\beta$ oder $\pi_i\beta < \pi_i\alpha$ folgen im Widerspruch zur Voraussetzung $\pi_i\alpha = \pi_i\beta$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmenge $\pi(\omega)$ und des *Grades* $\mathrm{gr}(\gamma)$ einer Ordinalzahl $\gamma \in \pi(\omega)$.
1. $0 \in \pi(\omega)$, $\mathrm{gr}(0) := 0$.
2. Ist $\alpha \in \pi(\omega)$ und $\alpha \in B_i(\alpha)$, so sei $\pi_i\alpha \in \pi(\omega)$ und $\mathrm{gr}(\pi_i\alpha) := \mathrm{gr}(\alpha) + 1$.

Anmerkung. Man kann jedes Element von $\pi(\omega)$ als einen Term auffassen, der gemäß der induktiven Definition von $\pi(\omega)$ aus den Symbolen 0 und $\pi_i (i<\omega)$ zusammengesetzt ist. Diese Terme nennen wir *Ordinalterme*. Sie bezeichnen im Sinne der obigen Definitionen Ordinalzahlen. Nach den Lemmata 1.2a) und 1.4b) bezeichnen je zwei verschiedene Ordinalterme verschiedene Ordinalzahlen. Daher ist der Grad $\mathrm{gr}(\gamma)$ einer Ordinalzahl $\gamma \in \pi(\omega)$ eindeutig bestimmt. Wie sich leicht feststellen läßt, ist entscheidbar, ob ein aus den Symbolen von $\pi(\omega)$ zusammengesetzter Term ein Ordinalterm ist und ob für zwei verschiedene Ordinalterme α und β $\alpha<\beta$ oder $\beta<\alpha$ gilt.

Lemma 1.5. $\pi(\omega)=B_0(\Omega_\omega)$.

Beweis. Durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$ ergibt sich:

$$\gamma \in \pi(\omega) \Rightarrow \gamma \in B_0(\Omega_\omega).$$

Durch Induktion nach m ergibt sich:

$$\gamma \in B_0^m(\Omega_\omega) \Rightarrow \gamma \in \pi(\omega).$$

Lemma 1.6. *Die Menge $\pi_0(\omega)$ derjenigen Ordinalzahlen aus $\pi(\omega)$, die $<\Omega_1$ sind, ist gleich dem Abschnitt aller Ordinalzahlen $<\pi_0\Omega_\omega$.*

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 1.3 und 1.5.

Induktive Definition einer Teilmenge $\pi(n)$ von $\pi(\omega)$.
1. $0 \in \pi(n)$.
2. $i<n$, $\alpha \in \pi(n)$, $\alpha \in B_i(\alpha) \Rightarrow \pi_i\alpha \in \pi(n)$.

Lemma 1.7. *Die Menge $\pi_0(n)$ derjenigen Ordinalzahlen aus $\pi(n)$, die $<\Omega_1$ sind, ist gleich dem Abschnitt aller Ordinalzahlen $<\pi_0\Omega_n$.*

Beweis. Die Behauptung gilt für $n=0$, da $\pi(0)=\{0\}$ und $\pi_0\Omega_0=1$ ist. Für $n>0$ ergibt sich durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$:

$$\gamma \in \pi(n) \Rightarrow \gamma \in B_0(\Omega_n), \quad \gamma<\Omega_n.$$

Durch Induktion nach m ergibt sich:

$$\gamma \in B_0^m(\Omega_n), \quad \gamma<\Omega_n \Rightarrow \gamma \in \pi(n).$$

Nach Lemma 1.3 folgt die Behauptung.

Induktive Definition der *i-Subterme* eines Ordinalterms β.
1. β ist ein i-Subterm von β.
2. Ist $\pi_j\gamma$ ein i-Subterm von β und $i \leq j$, so ist auch γ ein i-Subterm von β.

Lemma 1.8. *Für jeden i-Subterm γ eines Ordinalterms β gilt:*
a) $\beta \in B_i(\alpha) \Rightarrow \gamma \in B_i(\alpha)$.
b) $\pi_i\alpha \leqq \gamma < \Omega_{i+1} \Rightarrow \pi_i\alpha \leqq \beta$.

Beweis von a) durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\beta) - \mathrm{gr}(\gamma)$. Ist $\gamma = \beta$, so gilt die Behauptung nach Voraussetzung. Andernfalls hat man einen i-Subterm $\pi_j\gamma$ mit $i \leqq j$, für den nach Induktionsvoraussetzung $\pi_j\gamma \in B_i(\alpha)$ gilt. Da dies nur nach (B2) gelten kann, folgt $\gamma \in B_i(\alpha)$.
b) Aus $\pi_i\alpha \leqq \gamma < \Omega_{i+1}$ folgt nach Lemma 1.3 $\gamma \notin B_i(\alpha)$. Nach a) folgt $\beta \notin B_i(\alpha)$. Dann ist $\pi_i\alpha \leqq \beta$.

2. Berechnung der Ordinalterme aus $\pi_0(\omega)$

Im folgenden bezeichnen die Buchstaben α, β, γ, δ, η (auch mit Indizes) immer Ordinalterme des Systems $\pi(\omega)$.
Unter einem *Funktional* verstehen wir im folgenden eine Zeichenreihe z mit der Eigenschaft, daß $z0$ ein Ordinalterm des Systems $\pi(\omega)$ ist.

Induktive Definition eines Funktionals $\bar{\alpha}$ für $\alpha > 0$.
1. Ist α ein Ordinalterm $\pi_i 0$, so sei $\bar{\alpha} := \pi_{i+1}$.
2. Ist α ein Ordinalterm $\pi_i\beta$ *mit* $\beta > 0$, so sei $\bar{\alpha} := \pi_{i+1}\bar{\beta}$.

Lemma 2.1. *Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < \Omega_1$ und $\delta < \Omega_1$ gilt:*
a) *$\bar{\alpha}\gamma$ ist ein Ordinalterm $\geqq \Omega_1$.*
b) *$\bar{\alpha}\gamma < \bar{\beta}\delta$ genau dann, wenn entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$, $\gamma < \delta$ ist.*
c) *$\bar{\alpha}\gamma \in B_{i+1}(\bar{\beta}\gamma)$ genau dann, wenn $\alpha \in B_i(\beta)$ ist.*
d) *$\bar{\alpha}\gamma < \Omega_{n+2}$ genau dann, wenn $\alpha < \Omega_{n+1}$ ist.*

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\alpha)$.

Lemma 2.2. *Zu $\gamma \geqq \Omega_1$ gibt es eindeutig $\alpha > 0$ und $\delta < \Omega_1$ mit $\gamma = \bar{\alpha}\delta$.*

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\gamma)$. Man hat folgende zwei Fälle.
1. $\gamma = \pi_{i+1}\delta$ mit $\delta < \Omega_1$. Dann ist $\gamma = \bar{\alpha}\delta$ für $\alpha = \pi_i 0$.
2. $\gamma = \pi_{i+1}\eta$ mit $\eta \in B_{i+1}(\eta)$ und $\eta \geqq \Omega_1$. Dann hat man nach Induktionsvoraussetzung $\beta > 0$ und $\delta < \Omega_1$ mit $\eta = \bar{\beta}\delta$. Aus $\eta \in B_{i+1}(\eta)$ folgt nach Lemma 2.1c) $\beta \in B_i(\beta)$. Daher hat man einen Ordinalterm $\alpha = \pi_i\beta$ mit $\gamma = \pi_{i+1}\bar{\beta}\delta = \bar{\alpha}\delta$.
Die Eindeutigkeit von α und δ folgt aus Lemma 2.1b).

Lemma 2.3. *Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\delta < \Omega_1$ gilt:*

$$\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta) \Rightarrow \alpha \in B_0(\beta).$$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\alpha)$. Man hat folgende zwei Fälle.
1. $\alpha = \pi_i 0$. Dann gilt $\alpha \in B_0(\beta)$ aufgrund von $\beta > 0$.
2. $\alpha = \pi_i \eta$ mit $\eta > 0$, $\bar{\alpha}\delta = \pi_{i+1}\bar{\eta}\delta$. Aus $\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$ folgt dann $\bar{\eta}\delta < \bar{\beta}\delta$ und $\bar{\eta}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$. Es folgt $\eta < \beta$ und nach Induktionsvoraussetzung $\eta \in B_0(\beta)$. Hiermit ergibt sich $\alpha = \pi_i \eta \in B_0(\beta)$.

Lemma 2.4. *Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ mit $\alpha \in B_0(\beta)$ und $\delta < \Omega_1$ gilt:*

$$\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta) \Leftrightarrow \delta < \pi_0 \bar{\beta}\delta .$$

Beweis. 1. Aus $\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$ folgt $\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$ und nach Lemma 1.3 $\delta < \pi_0 \bar{\beta}\delta$.
2. Sei nun $\delta < \pi_0 \bar{\beta}\delta$, also $\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$. Wir beweisen $\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$ durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\alpha)$. Man hat folgende zwei Fälle.
2.1. $\alpha = \pi_i 0$, $\bar{\alpha}\delta = \pi_{i+1}\delta$. Dann folgt $\bar{\alpha}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$ aus der Voraussetzung $\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$, da $\delta < \bar{\beta}\delta$ ist.
2.2. $\alpha = \pi_i \eta$ mit $\eta > 0$, $\bar{\alpha}\delta = \pi_{i+1}\bar{\eta}\delta$. Aus $\alpha \in B_0(\beta)$ folgt dann $\eta < \beta$ und $\eta \in B_0(\beta)$. Es folgt $\bar{\eta}\delta < \bar{\beta}\delta$ und nach Induktionsvoraussetzung $\bar{\eta}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$. Hiermit ergibt sich $\bar{\alpha}\delta = \pi_{i+1}\bar{\eta}\delta \in B_0(\bar{\beta}\delta)$.

Definition eines Funktionals $[\alpha]$ für $\alpha < \Omega_1$.
1. $[0] := \pi_0$.
2. Ist $0 < \alpha < \pi_0 \Omega_1$, so sei $[\alpha] := \pi_0 \bar{\alpha}$.
3. Ist $\alpha = \pi_0 \beta$ mit $\beta \geqq \Omega_1$, so sei $[\alpha] := \pi_0 \bar{\beta}$.

Lemma 2.5. *Für $\alpha < \Omega_1$ und $\delta < \Omega_1$ ist $[\alpha]\delta$ genau dann ein Ordinalterm, wenn $\delta < [\alpha]\delta$ ist.*

Beweis. Man hat folgende zwei Fälle.
1. $\alpha = 0$, $[\alpha]\delta = \pi_0 \delta$. In diesem Fall ist $[\alpha]\delta$ genau dann ein Ordinalterm, wenn $\delta \in B_0(\delta)$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\delta < \pi_0 \delta = [\alpha]\delta$ ist.
2. $\alpha = \pi_0 \beta$ mit $\beta \in B_0(\beta)$, $[\alpha]\delta = \pi_0 \bar{\gamma}\delta$, wobei $\gamma = \alpha$ im Fall $\beta < \Omega_1$ und $\gamma = \beta$ im Fall $\beta \geqq \Omega_1$ ist. Im ersten Fall ist nach Lemma 1.3 $\beta < \pi_0 \beta = \alpha$, folglich $\beta \in B_0(\alpha)$ und $\alpha \in B_0(\alpha)$. Somit ist in jedem Fall $\gamma \in B_0(\gamma)$. Nach Lemma 2.1a) ist $\bar{\gamma}\delta$ ein Ordinalterm. Daher ist $[\alpha]\delta$ genau dann ein Ordinalterm, wenn $\bar{\gamma}\delta \in B_0(\bar{\gamma}\delta)$ ist. Das ist nach Lemma 2.4 genau dann der Fall, wenn $\delta < \pi_0 \bar{\gamma}\delta = [\alpha]\delta$ ist.

Lemma 2.6. *Sind α, β, γ, δ, $[\alpha]\gamma$ und $[\beta]\delta$ Ordinalterme $< \Omega_1$, so ist $[\alpha]\gamma < [\beta]\delta$ genau dann, wenn entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$, $\gamma < \delta$ ist.*

Beweis trivial.

Lemma 2.7. *Zu γ mit $0 < \gamma < \Omega_1$ gibt es eindeutig $\alpha < \Omega_1$ und $\delta < \Omega_1$ mit $\gamma = [\alpha]\delta$, wobei $\delta < \gamma$ ist.*

Beweis. Man hat folgende zwei Fälle.
1. $\gamma=\pi_0\delta$, $\delta\in B_0(\delta)$, $\delta<\Omega_1$. Dann ist $\gamma=[0]\delta$ und $\delta<\pi_0\delta=\gamma$.
2. $\gamma=\pi_0\beta$, $\beta\in B_0(\beta)$, $\beta\geqq\Omega_1$. Dann gibt es nach Lemma 2.2 $\alpha_1>0$ und $\delta<\Omega_1$ mit $\beta=\overline{\alpha_1}\delta$. Aus $\beta\in B_0(\beta)$ folgt $\delta\in B_0(\beta)$ und $\delta<\pi_0\beta=\gamma$. Aus $\beta\in B_0(\beta)$ folgt nach Lemma 2.3 auch $\alpha_1\in B_0(\alpha_1)$. Daher hat man einen Ordinalterm $\alpha_2=\pi_0\alpha_1$. Ist $\beta<\Omega_2$, so ist $\alpha_1<\Omega_1$ und $\gamma=\pi_0\overline{\alpha_1}\delta=[\alpha_1]\delta$. Ist $\beta\geqq\Omega_2$, so ist $\alpha_1\geqq\Omega_1$ und $\gamma=\pi_0\overline{\alpha_1}\delta=[\alpha_2]\delta$.
Nach Lemma 2.5 ist $[\alpha]\delta$ ein Ordinalterm. Die Eindeutigkeit von α und δ folgt aus Lemma 2.6.
Auf Lemma 2.7 beruht die folgende

Definition der *Zerlegung* eines Ordinalterms. Für $0<\alpha<\Omega_1$ definieren wir:
1. $\alpha=[(\alpha)_0]\delta_0$ mit $(\alpha)_0,\ \delta_0<\Omega_1$.
2. Ist $\delta_i>0$, so sei $\delta_i=[(\alpha)_{i+1}]\delta_{i+1}$ mit $(\alpha)_{i+1},\ \delta_{i+1}<\Omega_1$.
3. Ist $\delta_i=0$, so sei $N(\alpha):=i$.

Folgerung. *Für $i\leqq N(\alpha)$ ist $[(\alpha)_i]\delta_i$ nach den Lemmata 2.5 und 2.7 ein Ordinalterm mit $\delta_i<[(\alpha)_i]\delta_i$.*

Lemma 2.8. *Für $0<\alpha<\Omega_1$ gilt bezüglich der vorstehenden Definition:*
a) $i<N(\alpha)\Rightarrow(\alpha)_{i+1}\leqq(\alpha)_i$.
b) $\alpha<\pi_0\Omega_{n+1}\Rightarrow(\alpha)_0<\pi_0\Omega_n$.

Beweis. a) Man hat $[(\alpha)_{i+1}]\delta_{i+1}=\delta_i<[(\alpha)_i]\delta_i$. Nach Lemma 2.6 folgt $(\alpha)_{i+1}\leqq(\alpha)_i$.
b) gilt aufgrund von $\alpha=[(\alpha)_0]\delta_0$.

Lemma 2.9. *Für $0<\alpha<\Omega_1$ und $0<\beta<\Omega_1$ gilt:*

$$\alpha<\beta\Leftrightarrow\omega^{(\alpha)_0}+\ldots+\omega^{(\alpha)_{N(\alpha)}}<\omega^{(\beta)_0}+\ldots+\omega^{(\beta)_{N(\beta)}}.$$

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 2.6 und 2.8.

Definition der *Zusammensetzung* von Ordinaltermen. Für eine Folge $(\alpha_0,\ldots,\alpha_m)$ von Ordinaltermen mit $\Omega_1>\alpha_0\geqq\ldots\geqq\alpha_m$ definieren wir:
1. $\delta_m:=0$.
2. Für $i<m$ sei $\delta_i:=[\alpha_{i+1}]\delta_{i+1}$.
3. $\gamma:=[\alpha_0]\delta_0$.

Lemma 2.10. *Für die vorstehend definierten Ordinalzahlen gilt:*
a) *Für $i\leqq m$ ist $[\alpha_i]\delta_i$ ein Ordinalterm.*
b) $\alpha_0<\pi_0\Omega_n\Rightarrow\gamma<\pi_0\Omega_{n+1}$.

Folgerung. *γ ist ein Ordinalterm mit $0<\gamma<\Omega_1$, $N(\gamma)=m$ und $(\gamma)_i=\alpha_i$ für alle $i\leqq m$.*

Beweis von a) durch Induktion nach $m-i$. Man hat $\delta_m=0<[\alpha_m]\delta_m$. Folglich ist $[\alpha_m]\delta_m$ nach Lemma 2.5 ein Ordinalterm. Die Behauptung gilt also für $i=m$. Sei nun $i<m$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $[\alpha_{i+1}]\delta_{i+1}$ ein Ordinalterm. Nach Lemma 2.5 folgt $\delta_{i+1}<[\alpha_{i+1}]\delta_{i+1}=\delta_i$. Da $\alpha_{i+1}\leqq\alpha_i$ ist, folgt nach Lemma 2.6 $\delta_i=[\alpha_{i+1}]\delta_{i+1}<[\alpha_i]\delta_i$. Dann ist $[\alpha_i]\delta_i$ nach Lemma 2.5 ein Ordinalterm. b) gilt aufgrund von $\gamma=[\alpha_0]\delta_0$.

Induktive Definition von $\omega_n(\alpha)$.

$$\omega_0(\alpha):=\alpha, \qquad \omega_{n+1}(\alpha):=\omega^{\omega_n(\alpha)}.$$

Lemma 2.11.
a) $\pi_0\Omega_n=\omega_n(1)$
b) *Für* $0<\alpha<\Omega_1$ *gilt:*

$$\alpha=\omega^{(\alpha)_0}+\ldots+\omega^{(\alpha)_{N(\alpha)}}.$$

c) $\pi_0\Omega_\omega=\varepsilon_0$.

Beweis von a) und b) durch Induktion nach n. a) gilt für $n=0$, da $\pi_0\Omega_0=\pi_0 0=1$ $=\omega_0(1)$ ist. Gilt a) für n, so folgt aus den Lemmata 2.8 und 2.9, daß die Abbildung $0\mapsto 0$ und

$$\alpha\mapsto\omega^{(\alpha)_0}+\ldots+\omega^{(\alpha)_{N(\alpha)}}$$

für $0<\alpha<\pi_0\Omega_{n+1}$ eine ordnungstreue Abbildung von der Menge aller Ordinalterme $<\pi_0\Omega_{n+1}$ in die Menge der Ordinalzahlen $<\omega^{\omega_n(1)}=\omega_{n+1}(1)$ ist. Nach Lemma 2.10 ist diese Abbildung surjektiv. Es folgt $\pi_0\Omega_{n+1}=\omega_{n+1}(1)$. Hiermit ergibt sich a) und auch b) durch vollständige Induktion.
c) folgt aus a), da $\pi_0\Omega_\omega=\sup\{\pi_0\Omega_n : n<\omega\}$ und $\varepsilon_0=\sup\{\omega_n(1) : n<\omega\}$ ist.

3. Nachweis der Unbeweisbarkeit

Eine *Quasiordnung* $(S, \leqq)$ ist eine nichtleere Menge S mit einer auf S definierten reflexiven und transitiven Relation $\leqq$. Sie heißt *wohlgeordnet*, wenn es für jede unendliche Folge $s_0, s_1, \ldots$ von Elementen aus S Indizes $i<j$ mit $s_i\leqq s_j$ gibt.

Definition *von* $(S_{n+1}, \leqq)$ *und* $(S_{n+1}, \leqq^*)$.

S_{n+1} sei die Menge aller endlichen Folgen von natürlichen Zahlen $\leqq n$. Ist s_1 $=(a_0,\ldots,a_k)\in S_{n+1}$ und $s_2=(b_0,\ldots,b_m)\in S_{n+1}$, so verstehen wir unter einer *Einbettungsfunktion* für s_1 in s_2 eine streng monotone Abbildung f von $\{0,\ldots,k\}$ in $\{0,\ldots,m\}$ mit den Eigenschaften:

$$i\leqq k \Rightarrow a_i=b_{f(i)}, \tag{1}$$

$$i<k, \quad f(i)<j<f(i+1)\Rightarrow b_j\geqq b_{f(i+1)} \quad \text{(Lückenbedingung)} \tag{2}$$

f heiße eine *strenge* Einbettungsfunktion für s_1 in s_2, wenn außerdem gilt:

$$i<f(0)\Rightarrow b_i\geqq b_{f(0)} \tag{3}$$

$s_1 \leqq s_2$ gelte genau dann, wenn es eine Einbettungsfunktion für s_1 in s_2 gibt. $s_1 \leqq^* s_2$ gelte genau dann, wenn es eine strenge Einbettungsfunktion für s_1 in s_2 gibt.

Folgerung. *$(S_{n+1}, \leqq)$ und $(S_{n+1}, \leqq^*)$ sind Quasiordnungen.*

Der hier betrachtete Spezialfall des Satzes von Friedman [5] lautet:

Satz I. *Für jede natürliche Zahl n ist die Quasiordnung $(S_{n+1}, \leqq)$ wohlgeordnet.*

Ein Beweis für den allgemeinen Satz von Friedman ist in [9] ausgeführt, aus dem ein Beweis für den spezielleren Satz I zu entnehmen ist. Wir geben hier auch in Abschnitt 5 einen Beweis für Satz I, der zwar aufwendiger als der aus [9] zu entnehmende Beweis ist, aber nur wesentlich elementarere Mittel verwendet.
Zum Nachweis der Unbeweisbarkeit von Satz I in der reinen Zahlentheorie verwenden wir eine Einbettung von $\pi_0(n+1)$ in S_{n+1}.

Definition *von $s(\alpha) \in S_{n+1}$ für jeden Ordinalterm $\alpha \in \pi(n+1)$.*

$$s(0) := (0), \qquad s(\pi_{i_0} \ldots \pi_{i_m} 0) := (i_0, \ldots, i_m, 0).$$

Lemma 3.1. *Für Ordinalterme $\alpha, \beta \in \pi(n+1)$ gilt:*

$$s(\alpha) \leqq^* s(\beta) \Rightarrow \alpha \leqq \beta.$$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{gr}(\alpha)$. Sei $s(\alpha) = (a_0, \ldots, a_k)$, $s(\beta) = (b_0, \ldots, b_m)$ und f eine strenge Einbettungsfunktion für $s(\alpha)$ in $s(\beta)$. Wir können $\alpha > 0$ annehmen, weil die Behauptung sonst trivial ist. Dann hat man $\alpha = \pi_i \alpha_1$, $i = a_0 = b_{f(0)}$ und $s(\pi_i \gamma) = (b_{f(0)}, \ldots, b_m)$ mit $s(\alpha_1) \leqq^* s(\gamma)$, wobei $\pi_i \gamma$ ein i-Subterm von β ist. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_1 \leqq \gamma$. Es folgt $\alpha = \pi_i \alpha_1 \leqq \pi_i \gamma$ und nach Lemma 1.8b) $\alpha \leqq \beta$.

Lemma 3.2. *Aus der Wohlordnungseigenschaft der Quasiordnung $(S_{n+1}, \leqq)$ folgt die Wohlordnung der Ordinalzahlenmenge $\pi_0(n+1)$.*

Beweis. Sei $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eine unendliche Folge von Ordinaltermen aus $\pi_0(n+1)$. Dann ist $s(\alpha_0), s(\alpha_1), \ldots$ eine unendliche Folge von Folgen aus S_{n+1}, von denen jede mit 0 beginnt. Aus der Wohlordnungseigenschaft von $(S_{n+1}, \leqq)$ folgt, daß es $i < j$ mit $s(\alpha_i) \leqq s(\alpha_j)$ gibt. Dann gilt, da $s(\alpha_i)$ mit 0 beginnt, $s(\alpha_i) \leqq^* s(\alpha_j)$, folglich nach Lemma 3.1 $\alpha_i \leqq \alpha_j$. Es folgt also, daß es keine unendliche absteigende Folge von Ordinalzahlen aus $\pi_0(n+1)$ gibt, d.h. daß $\pi_0(n+1)$ wohlgeordnet ist.

Satz II. *Der allgemeine Satz I ist in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar.*

Beweis. Nach den Lemmata 1.7 und 2.11a) ist $\pi_0(n+1)$ die Menge aller Ordinalzahlen $< \omega_{n+1}(1)$. Nach Lemma 3.2 folgt die Behauptung, da ε_0

$=\sup\{\omega_n(1): n<\omega\}$ ist und die Wohlordnung der Ordinalzahlen bis ε_0 in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar ist.

(Um die Wohlordnungseigenschaft ausdrücken zu können, hat man in der reinen Zahlentheorie freie Funktionsvariablen oder freie Prädikatenvariablen zuzulassen.)

4. Eine endliche Miniaturisierung

Der Satz I gehört nicht zum Gebiet der reinen endlichen Kombinatorik, weil sich die Wohlordnungseigenschaft nicht ohne Funktionsvariablen oder Prädikatenvariablen ausdrücken läßt. Wir führen in diesem Abschnitt eine rein endliche Aussage ein, die in einem engen Zusammenhang mit Satz I steht, und zeigen, daß auch diese *endliche Miniaturisierung* von Satz I in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar ist.
Ist s eine endliche Folge, so bezeichnen wir mit $|s|$ die Länge von s, d.h. die Anzahl der Glieder der Folge s. Eine unendliche Folge $s_0, s_1, \ldots$ von endlichen Folgen heiße *langsam*, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so daß $|s_i| \leqq m\cdot(i+1)$ für alle s_i gilt. $LW(S_{n+1})$ bedeute, daß $(S_{n+1}, \leqq)$ *langsam wohlgeordnet* ist, d.h. daß es für jede langsame unendliche Folge $s_0, s_1, \ldots$ von Elementen aus S_{n+1} Indizes $i<j$ mit $s_i \leqq s_j$ gibt. Nach dem Lemma von König ist $LW(S_{n+1})$ äquivalent mit der rein endlichen kombinatorischen Aussage
$A(n)$: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine so große Zahl k, daß es für jede Folge $s_0, \ldots, s_k$ von Elementen aus S_{n+1}, in der $|s_i| \leqq m\cdot(i+1)$ für alle $i \leqq k$ gilt, Indizes $i<j \leqq k$ mit $s_i \leqq s_j$ gibt.
(Hiermit haben wir das Miniaturisierungsverfahren von Friedman [4] entsprechend wie in [9] Abschnitt 3 benutzt.) $A(n)$ ist eine Π^0_2-Aussage, da sie hinter den Quantoren $\forall m \exists k$ nur beschränkte Quantoren enthält. Aufgrund von Satz I und dem Lemma von König ist $\forall n A(n)$ ein wahrer Satz.

Satz III. *Der wahre Π^0_2-Satz $\forall n A(n)$ ist in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar.*

Beweis. Wir benutzen das übliche Cantorsche Bezeichnungssystem für die Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$. $PRW(\varepsilon_0)$ bedeute, daß dieses System keine primitiv-rekursive unendliche absteigende Folge hat. Für $\beta<\varepsilon_0$ sei $|\beta|$ die Anzahl der in β auftretenden Symbole, d.h. $|0|=1$ und

$$|\omega^{\beta_0}+\ldots+\omega^{\beta_n}|=2n+1+|\beta_0|+\ldots+|\beta_n|,$$

falls $\beta_0 \geqq \ldots \geqq \beta_n$ ist. Eine unendliche Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ von Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$ heiße *langsam*, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so daß $|\alpha_i| \leqq m\cdot(i+1)$ für alle i gilt. $LW(\varepsilon_0)$ bedeute, daß es keine langsame unendliche absteigende Folge von Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$ gibt.
Aus der Gentzenschen Beweistheorie ist zu entnehmen, daß $PRW(\varepsilon_0)$ in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar ist. Hieraus folgt nach [9] Lemma 3.7, daß auch

$LW(\varepsilon_0)$ in der reinen Zahlentheorie nicht beweisbar ist. Sei nun $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eine langsame unendliche absteigende Folge von Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$. Wählen wir n so groß, daß $\alpha_0 < \omega_{n+1}(1)$ ist, so erhalten wir eine unendliche Folge $s(\alpha_0), s(\alpha_1), \ldots$ von Elementen aus S_{n+1}. Wie aus Lemma 2.11 zu entnehmen ist, gilt $|s(\alpha_i)| \leqq |\alpha_i|$ für alle i. Daher ist auch $s(\alpha_0), s(\alpha_1), \ldots$ eine langsame Folge. Somit folgt aus $A(n)$, daß es $i<j$ mit $s(\alpha_i) \leqq s(\alpha_j)$ gibt, woraus wie im Beweis von Lemma 3.2 $\alpha_i \leqq \alpha_j$ folgt, d.h. es folgt, daß es keine langsame unendliche absteigende Folge von Ordinalzahlen $<\varepsilon_0$ gibt. Somit folgt $LW(\varepsilon_0)$ aus $\forall n A(n)$. Daher folgt aus der Unbeweisbarkeit von $LW(\varepsilon_0)$ die Unbeweisbarkeit von $\forall n A(n)$ in der reinen Zahlentheorie.

5. Wohlordnungsbeweis für $(S_{n+1}, \leqq^*)$ in der reinen Zahlentheorie

Wir beweisen in diesem Abschnitt, daß für jede einzelne natürliche Zahl n die Wohlordungseigenschaft von $(S_{n+1}, \leqq^*)$ und somit auch von $(S_{n+1}, \leqq)$ sowie $A(n)$ in der reinen Zahlentheorie beweisbar ist. Hierzu brauchen wir die folgenden Definitionen.

Definition der *disjunkten Vereinigung* $Q_1 \cup Q_2$ und des *Cartesischen Produktes* $Q_1 \times Q_2$ von Quasiordnungen Q_1, Q_2.

Für $i=1,2$ sei Q_i eine Quasiordnung bezüglich einer Relation $\leqq_i$. Dann sei $Q_1 \cup Q_2$ die Quasiordnung mit den Elementen (a_i, i), wobei $i \in \{1,2\}$ und $a_i \in Q_i$ ist, und der Ordnungsrelation: Für $(a_i, i), (b_j, j) \in Q_1 \cup Q_2$ gelte $(a_i, i) \leqq (b_j, j)$ genau dann, wenn $i=j$ ist und $a_i \leqq_i b_i$ gilt.
$Q_1 \times Q_2$ sei die Quasiordnung mit den Elementen (a_1, a_2), wobei $a_1 \in Q_1$ und $a_2 \in Q_2$ ist, und der Ordnungsrelation: Für $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in Q_1 \times Q_2$ gelte $(a_1, a_2) \leqq (b_1, b_2)$ genau dann, wenn $a_1 \leqq_1 b_1$ und $a_2 \leqq_2 b_2$ gilt.

Folgerung. *Indem wir isomorphe Quasiordnungen miteinander identifizieren, erhalten wir für Quasiordnungen* Q_1, Q_2, Q_3 *die Gesetze:*

$$Q_1 \cup Q_2 = Q_2 \cup Q_1, \quad Q_1 \cup (Q_2 \cup Q_3) = (Q_1 \cup Q_2) \cup Q_3,$$
$$Q_1 \times Q_2 = Q_2 \times Q_1, \quad Q_1 \times (Q_2 \times Q_3) = (Q_1 \times Q_2) \times Q_3$$

und

$$Q_1 \times (Q_2 \cup Q_3) = (Q_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times Q_3).$$

Definition *von* $Q^{<\omega}$. *Ist* Q *eine Quasiordnung bezüglich einer Relation* $\leqq$, *so sei* $Q^{<\omega}$ *die Quasiordnung der Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus* Q *mit der Ordnungsrelation: Für* $(a_0, \ldots, a_k), (b_0, \ldots, b_m) \in Q^{<\omega}$ *gelte* $(a_0, \ldots, a_k) \leqq (b_0, \ldots, b_m)$ *genau dann, wenn es eine streng monotone Abbildung* f *von* $\{0, \ldots, k\}$ *in* $\{0, \ldots, m\}$ *gibt, so daß* $a_i \leqq b_{f(i)}$ *für alle* $i \leqq k$ *gilt.*

Definition *von* $\mathrm{Bad}(Q)$ *und* Q_s *für* $s \in \mathrm{Bad}(Q)$.

Ist Q eine Quasiordnung bezüglich einer Relation $\leqq$, so verstehen wir unter einer *schlechten* endlichen Folge von Q eine Folge $(a_0, \ldots, a_k)$ von Elementen aus Q mit der Eigenschaft, daß es keine Indizes $i<j \leqq k$ mit $a_i \leqq a_j$ gibt. (Insbesondere ist jede eingliedrige Folge (a_0) eine schlechte Folge.) $\mathrm{Bad}(Q)$ sei die Menge aller schlechten endlichen Folgen von Q einschließlich der leeren Folge $(\ )$. Für $s \in \mathrm{Bad}(Q)$ sei Q_s die Menge derjenigen $a \in Q$, für die auch $s \frown (a) \in \mathrm{Bad}(Q)$ ist, Q_s ist entweder leer oder eine Quasiordnung bezüglich der auf Q_s beschränkten Relation $\leqq$. Ist $a \in Q_s$, so sei $Q_s(a) = Q_{s \frown (a)}$. Offenbar ist $Q_{(\,)} = Q$.

Definitionen *bezüglich einer linearen Ordnung.*

Unter einer *linearen Ordnung* verstehen wir eine Menge σ, für deren Elemente eine lineare Ordnungsrelation $<$ definiert ist. $\sigma + 1$ sei dann die lineare Ordnung $\sigma \cup \{\sigma\}$ mit $\xi < \sigma$ für alle $\xi \in \sigma$. Eine lineare Ordnung σ heiße *gut*, wenn sie primitiv-rekursiv ist und es eine primitiv-rekursive Operation N auf σ gibt, die jedem $\xi \in \sigma$ ein kleinstes $N\xi \in \sigma + 1$ mit $\xi < N\xi$ zuordnet. Wir schreiben dann $\xi + 1$ für $N\xi$.
Zu jeder primitiv-rekursiven linearen Ordnung σ gibt es eine primitiv-rekursive lineare Ordnung ω^σ, deren Elemente die formalen Summen $\omega^{\xi_1} + \ldots + \omega^{\xi_n}$ mit $\xi_1 \geqq \ldots \geqq \xi_n$ aus σ sind. Hierfür wird die natürliche Addition in üblicher Weise definiert. Auf ω^{ω^σ} werden sowohl die primitiv-rekursive Ordnungsrelation als auch die primitiv-rekursiven Operationen der natürlichen Addition und der natürlichen Multiplikation in üblicher Weise definiert. Hierfür gelten die kommutativen und assoziativen Gesetze und das distributive Gesetz. ω^ξ ist additiv unzerlegbar, und ω^{ω^ξ} ist multiplikativ unzerlegbar.

Lemma 5.1. *Ist σ eine primitiv-rekursive lineare Ordnung, die in der reinen Zahlentheorie als wohlgeordnet beweisbar ist, so ist auch ω^σ in der reinen Zahlentheorie als wohlgeordnet beweisbar.*

Beweis entsprechend wie für die Lemmata 1 und 2 in [8] auf Seite 180.

Definition. Unter einer *Einordnung* einer Quasiordnung Q durch eine lineare Ordnung σ verstehen wir eine Abbildung $f: \mathrm{Bad}(Q) \to \sigma + 1$ mit der Eigenschaft, daß $f(s \frown (u)) < f(s)$ für alle $s \frown (u) \in \mathrm{Bad}(Q)$ gilt.

Folgerung. *Eine Quasiordnung Q ist genau dann wohlgeordnet, wenn es eine Einordnung von Q durch eine lineare Wohlordnung gibt.*

Wir benutzen im folgenden eine effektive Version eines Satzes von Higman [6]. Der Satz von Higman besagt, daß für jede wohlgeordnete Quasiordnung Q auch die Quasiordnung $Q^{<\omega}$ wohlgeordnet ist. Unsere effektive Version dieses Satzes lautet:

Lemma 5.2. *In der reinen Zahlentheorie ist beweisbar: Ist Q eine primitiv-rekursive Quasiordnung und f eine primitiv-rekursive Einordnung von Q durch eine gute* *lineare Ordnung σ, so läßt sich eine primitiv-rekursive Einordnung g von $Q^{<\omega}$ durch $\omega^{\omega^{\sigma+1}}$ effektiv definieren.*

Beweis. Gegeben seien Q, f und σ gemäß den Voraussetzungen des Lemmas. Als *Cartesische Zusammensetzungen* bezeichnen wir die formalen Ausdrücke, die in der folgenden induktiven Weise definiert sind.

1. Ist $s \in \mathrm{Bad}(Q)$, so seien Q_s und $(Q_s)^{<\omega}$ Cartesische Zusammensetzungen. Eine solche Cartesische Zusammensetzung heiße *atomar*. Sie ist entweder leer oder eine Quasiordnung.
2. Sind R und S Cartesische Zusammensetzungen, so seien auch das Cartesische Produkt $R \times S$ und die disjunkte Vereinigung $R \cup S$ Cartesische Zusammensetzungen. ($R \times S$ ist genau dann leer, wenn R leer oder S leer ist. $R \cup S$ ist genau dann leer, wenn R und S leer sind.)

Jede nichtleere Cartesische Zusammensetzung ist eine Quasiordnung.
Der *Wert* $|C|$ einer Cartesischen Zusammensetzung C wird folgendermaßen induktiv definiert.
1. Für $s \in \mathrm{Bad}(Q)$ sei $|Q_s| = \omega^{\omega^{f(s)}}$ und $|(Q_s)^{<\omega}| = \omega^{\omega^{f(s)+1}}$.
2. Für Cartesische Zusammensetzungen R und S sei

$$|R \times S| = |R| \times |S| \quad \text{(natürliches Produkt)}$$

und

$$|R \cup S| = |R| \# |S| \quad \text{(natürliche Summe)}.$$

Um die Einordnung g zu bestimmen, definieren wir zunächst für jedes $t \in \mathrm{Bad}(Q^{<\omega})$ durch Induktion nach der Länge von t eine primitiv-rekursive Einbettung h_t von $(Q^{<\omega})_t$ in eine gewisse Cartesische Zusammensetzung C_t, so daß

$$u \leqq v \Leftrightarrow h_t(u) \leqq h_t(v)$$

für alle $u, v \in (Q^{<\omega})_t$ gilt. Wir setzen dann $g(t) = |C_t|$.
Als Anfangsschritt nehmen wir für $h_{()}$ die Identitätseinbettung von $(Q^{<\omega})_{()} = Q^{<\omega}$ in $C_{()} = (Q_{()})^{<\omega} = Q^{<\omega}$. Dann ist

$$g(()) = |C_{()}| = |(Q_{()})^{<\omega}| = \omega^{\omega^{f(())+1}} \leqq \omega^{\omega^{\sigma+1}}.$$

Sei nun $t' = t \frown (u) \in \mathrm{Bad}(Q^{<\omega})$ und $h_t: (Q^{<\omega})_t \to C_t$ mit $g(t) = |C_t|$ bereits definiert. Wir haben dann $h_{t'}$ zu definieren. Aufgrund des distributiven Gesetzes hat C_t eine Normalform

$$C_t = \cup_{i=0}^{n} \times_{j=0}^{n_i} R_{ij},$$

wobei jedes R_{ij} eine atomare Cartesische Zusammensetzung ist. Da $u \in (Q^{<\omega})_t$ ist, hat man $h_t(u) \in C_t$, folglich $h_t(u) \in \times_{j=0}^{n_i} R_{ij}$ für ein $i \leqq n$. Wir können $i = 0$ annehmen, also $h_t(u) = (r_0, \ldots, r_{n_0})$ mit $r_j \in R_{0j}$ für alle $j \leqq n_0$. Für jedes

$$(s_0, \ldots, s_{n_0}) \in S = (\times_{j=0}^{n_0} R_{0j})(r_0, \ldots, r_{n_0})$$

hat man $s_j \in R_{0j}$ für alle $j \leqq n_0$ und $s_j \in R_{0j}(r_j)$ für mindestens ein $j \leqq n_0$. Man hat daher eine Einbettung von S in

$$\cup_{j=0}^{n_0} \times_{k=0}^{n_0} R'_{jk},$$

wobei $R'_{jk} = R_{0k}$ für $j \neq k$ und $R'_{jj} = R_{0j}(r_j)$ ist. Wir betten nun R'_{jk} in eine Cartesische Zusammensetzung R''_{jk} ein. Hierbei sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.
1. Fall: $j \neq k$. Dann sei $R''_{jk} = R'_{jk} = R_{0k}$ mit der Identitätseinbettung.
2. Fall: $j = k$, $R_{0j} = Q_s$ mit $s \in \mathrm{Bad}(Q)$. Dann hat man $r_j = a \in Q_s$, so daß $Q_s(a)$ eine atomare Cartesische Zusammensetzung ist. In diesem Fall sei $R''_{jj} = R'_{jj} = R_{0j}(r_j) = Q_s(a)$ mit der Identitätseinbettung.
3. Fall: $j = k$, $R_{0j} = (Q_s)^{<\omega}$ mit $s \in \mathrm{Bad}(Q)$. Dann hat man $r_j = (a_0, \ldots, a_m) \in (Q_s)^{<\omega}$. Für jedes $w \in R_{0j}(r_j)$ gibt es eine kleinste Zahl $l \leqq m$ mit $(a_0, \ldots, a_l) \nleqq w$. Dann hat w die Gestalt

$$w = w_0 \frown (b_0) \ldots w_{l-1} \frown (b_{l-1}) \frown w_l ,$$

wobei w_i leer oder $w_i \in Q_s(a_i)^{<\omega}$ und $b_i \in Q_s$ ist. Man hat daher eine Einbettung von $R'_{jj} = R_{0j}(r_j)$ in

$$R''_{jj} = \cup_{l=0}^{m}((S_0 \times \ldots \times S_{l-1}) \cup (S_0 \times \ldots \times S_{l-1} \times Q_s(a_l)^{<\omega})) ,$$

wobei $S_i = Q_s \cup (Q_s(a_i)^{<\omega} \times Q_s)$ ist.
Wir haben $|Q_s| = \omega^{\omega f(s)} < \omega^{\omega f(s)+1}$ und $|Q_s(a_i)^{<\omega}| = \omega^{\omega f(s \frown a_i))+1} < \omega^{\omega f(s)+1}$. Aufgrund der additiven und multiplikativen Unzerlegbarkeit von $\omega^{\omega f(s)+1}$ folgt $|R''_{jj}| < \omega^{\omega f(s)+1} = |R_{0j}|$.
$C_{t'}$ sei nun diejenige Cartesische Zusammensetzung, die sich ergibt, wenn in $C_t = \cup_{i=0}^{n} \times_{j=0}^{n_i} R_{ij}$ die Komponente $\times_{j=0}^{n_0} R_{0j}$ durch $\cup_{j=0}^{n_0} \times_{k=0}^{n_0} R''_{jk}$ ersetzt wird. $h_{t'}$ wird definiert als eine Zusammensetzung aus h_t und den oben definierten Einbettungen.
Wir rechnen nun aus:

$$|\cup_{j=0}^{n_0} \times_{k=0}^{n_0} R''_{jk}| = \textstyle\sum_{j=0}^{n_0} \prod_{k=0}^{n_0} |R''_{jk}| ,$$

wobei $\sum$ die natürliche Summe und $\prod$ das natürliche Produkt bezeichnet. Für alle j und k ist $|R''_{jk}| \leqq |R_{0k}|$ und $|R''_{jj}| < |R_{0j}|$. Es folgt

$$\textstyle\prod_{k=0}^{n_0} |R''_{jk}| < \prod_{j=0}^{n_0} |R_{0j}| .$$

Aufgrund der additiven Unzerlegbarkeit von $\prod_{j=0}^{n_0} |R_{0j}|$ folgt

$$\textstyle\sum_{j=0}^{n_0} \prod_{k=0}^{n_0} |R''_{jk}| < \prod_{j=0}^{n_0} |R_{oj}| .$$

Hiermit ergibt sich

$$g(t') = |C_{t'}| < |C_t| = g(t) .$$

Dies beendet den Beweis von Lemma 5.2.

Anmerkung. Die Ideen zum vorstehenden Beweis stammen zum Teil von De Jongh und Parikh [3] und Schmidt [7].

Satz 5.3. *In der reinen Zahlentheorie ist beweisbar, daß für jede wohlgeordnete Quasiordnung Q auch die Quasiordnung $Q^{<\omega}$ wohlgeordnet ist.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Relativierung der Lemmata 5.1 und 5.2 zu einer freien Funktionsvariablen.

Lemma 5.4. *In der reinen Zahlentheorie ist beweisbar: Ist Q eine primitiv-rekursive Quasiordnung und f eine primitiv-rekursive Einordnung von Q durch eine gute lineare Ordnung σ, so läßt sich eine primitiv-rekursive Einordnung g von $Q \times Q^{<\omega}$ durch $\omega^{\omega^{\sigma+2}}$ effektiv definieren.*

Beweis. Entsprechend wie im Beweis von Lemma 5.2 definieren wir für jedes $t \in \mathrm{Bad}(Q \times Q^{<\omega})$ durch Induktion nach der Länge von t eine primitiv-rekursive Einbettung h_t von $(Q \times Q^{<\omega})_t$ in eine gewisse Cartesische Zusammensetzung C_t und setzen $g(t) = |C_t|$.
$h_{()}$ sei die Identitätseinbettung von $(Q \times Q^{<\omega})_{()} = Q \times Q^{<\omega}$ in $C_{()} = Q_{()} \times (Q_{()})^{<\omega}$ $= Q \times Q^{<\omega}$. Dann ist

$$g(()) = |C_{()}| = \omega^{\omega^{f(())}} \times \omega^{\omega^{f(())+1}} < \omega^{\omega^{\sigma+2}}.$$

Ist $t' = t \frown (u) \in \mathrm{Bad}(Q \times Q^{<\omega})$ und $h_t : (Q \times Q^{<\omega})_t \to C_t$ mit $g(t) = |C_t|$ bereits definiert, so definieren wir $C_{t'}$ und $h_{t'}$ entsprechend wie im Beweis von Lemma 5.2, so daß sich $g(t') < g(t)$ ergibt, womit Lemma 5.4 bewiesen ist.
Wir fassen nun jede Ordinalzahl α als die Menge aller Ordinalzahlen $< \alpha$ auf, so daß jede Ordinalzahl > 0 eine lineare Wohlordnung bezeichnet.

Lemma 5.5. *Für jede einzelne natürliche Zahl n ist in der reinen Zahlentheorie beweisbar, daß es eine primitiv-rekursive Einordnung f_n von $(S_{n+1}, \leqq^*)$ durch α_n gibt, wobei $\alpha_0 = \omega$ und $\alpha_{n+1} = \omega^{\omega^{\alpha_n+2}}$ ist.*

Beweis durch Induktion nach n. Wir setzen $Q_n = (S_{n+1}, \leqq^*)$. Jedes Element aus S_1 ist eine endliche Folge von Nullen. Bezeichnet $|a|$ die Länge einer Folge $a \in S_1$ und ist $s = (a_0, \ldots, a_m) \in \mathrm{Bad}(Q_0)$, so ist $|a_0| > \ldots > |a_m| > 0$. Dann sei $f_0(s) = |a_m| - 1$. Hiermit und mit $f_0(()) = \omega$ erhalten wir eine primitiv-rekursive Einordnung f_0 von Q_0 durch ω. Die Behauptung gilt also für $n = 0$.
Wir beweisen nun die Behauptung für $n+1$ unter der Voraussetzung, daß sie für n gilt. A_n sei die Menge derjenigen Folgen aus S_{n+2}, in denen 0 nicht auftritt. B_n sei die Menge derjenigen Folgen aus S_{n+2}, die mit 0 beginnen und an keiner anderen Stelle 0 enthalten. Jedes $a \in S_{n+2}$ hat die Gestalt

$$a = a_0 \ldots a_m,$$

wobei im Fall $m = 0$ $a_0 \in A_n$ ist und im Fall $m > 0$ a_0 leer oder $a_0 \in A_n$ ist und $a_1, \ldots, a_m \in B_n$ sind. Wir setzen dann

$$h_n(a) = ((0)a'_0, ((0), a'_1, \ldots, a'_m)),$$

wobei a'_i aus a_i dadurch entstehen soll, daß jede darin auftretende Zahl $k > 0$ durch $k-1$ ersetzt wird. Man erhält $h_n(a) \in Q_n \times (Q_n)^{<\omega}$. Wie sich leicht feststellen läßt, gilt

$$a \leqq^* b \Leftrightarrow h_n(a) \leqq h_n(b)$$

für alle $a, b \in S_{n+2}$. Somit ist h_n eine ordnungstreue Einbettung von Q_{n+1} in $Q_n \times (Q_n)^{<\omega}$. Für $s = (a_0, \ldots, a_m) \in \mathrm{Bad}(Q_{n+1})$ sei $h'_n(s) = (h_n(a_0), \ldots, h_n(a_m))$. Hiermit

und mit $h'_n(()) = ()$ erhalten wir eine primitiv-rekursive Einbettung h'_n von $\mathrm{Bad}(Q_{n+1})$ in $\mathrm{Bad}(Q_n \times (Q_n)^{<\omega})$.
Nach Voraussetzung hat man eine primitiv-rekursive Einordnung f_n von Q_n durch α_n. Dann hat man nach Lemma 5.4 auch eine primitiv-rekursive Einordnung g_n von $Q_n \times (Q_n)^{<\omega}$ durch $\alpha_{n+1} = \omega^{\omega^{\alpha_n+2}}$. Setzen wir nun $f_{n+1}(s) = g_n(h'_n(s))$ für $s \in \mathrm{Bad}(Q_{n+1})$, so erhalten wir eine primitiv-rekursive Einordnung f_{n+1} von Q_{n+1} durch α_{n+1}, womit Lemma 5.5 bewiesen ist.

Satz IV. *Für jede einzelne natürliche Zahl n ist in der reinen Zahlentheorie beweisbar, daß die Quasiordnung* $(S_{n+1}, \leqq^*)$ *wohlgeordnet ist.*

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 5.1 und 5.5.

LITERATUR

[1] Buchholz, W.: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. Proof Theory Symposion Kiel 1974. Springer Lecture Notes in Math. **500**, 4–25 (1975).
[2] Buchholz, W.: A new system of proof-theoretical ordinal functions. In Vorbereitung.
[3] De Jongh, D., Parikh, R.: Well-partial-orderings and hierarchies. Indig. Math. **39**, 195–207 (1977).
[4] Friedman, H.: Independence results in finite graph theory. Nicht veröffentlichte Manuskripte. Ohio State University 1981.
[5] Friedman, H.: Beyond Kruskal's theorem. Nicht veröffentlichte Manuskripte. Ohio State University 1982.
[6] Higman, G.: Ordering by divisibility in abstract algebras. Proc. London Math. Soc. **2**, 326–336 (1952).
[7] Schmidt, D.: Well-partial-orderings and their maximal order types. Habilitationsschrift Heidelberg 1979.
[8] Schütte, K.: Proof Theory. Berlin, Heidelberg, New York 1977.
[9] Simpson, S.G.: Nichtbeweisbarkeit von gewissen kombinatorischen Eigenschaften endlicher Bäume. Arch. math. Logik **25**, 45–65 (1985).

Kurt Schütte
Am Brombeerschlag 34
D-8000 München 70
Federal Republic of Germany

Stephen G. Simpson
Dept. of Math., Pennsylvania State
Univ., McAllister Bdg.
University Park
PA 16802
USA