

Une combinatoire sous-jacente au théorème des fonctions implicites

GILBERT LABELLE

*Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal, C.P. 8888,
Succ. A, Montréal, Québec H3C3P8, Canada*

Communicated by the Managing Editors

Received February 1, 1984

Using his theory of combinatorial species, André Joyal proved in *Advan. in Math.* **42** (1981), 1-82 a combinatorial form of the classical multidimensional implicit function theorem. His theorem asserts the existence and (strong) unicity of species satisfying systems of combinatorial equations of a very general type. We present an explicit construction of these species by using a suitable combinatorial version of the Lie Series in the sense of W. Gröbner ("Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen," D. Verlag d. Wiss., Berlin, 1967; "Contributions to the theory of Lie Series," Bibliographisches Institut - Mannheim, Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967). The approach constitutes a generalization of the method of "éclosions" (bloomings) which was used by the author in (*J. Combin. Theory Ser. A* **39**, No. 1 (1985), 52-82), to study multidimensional power series reversion. Remarks concerning the applicability of the method to solve certain combinatorial differential equations are also made at the end of the work. © 1985 Academic Press, Inc.

1. INTRODUCTION

Dans sa forme la plus simple, le théorème classique des fonctions implicites (TFI) s'énonce habituellement comme suit:

THÉORÈME 1.1 (TFI, version classique). *Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dont le domaine Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenant le point (x_0, y_0) . Si*

$$f(x_0, y_0) = c \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad (1.1)$$

alors il existe un voisinage ouvert $U \times V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de (x_0, y_0) et une unique fonction $a: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant

$$(\forall x \in U) (\forall y \in V) \quad [f(x, y) = c \Leftrightarrow y = a(x)]. \quad (1.2)$$

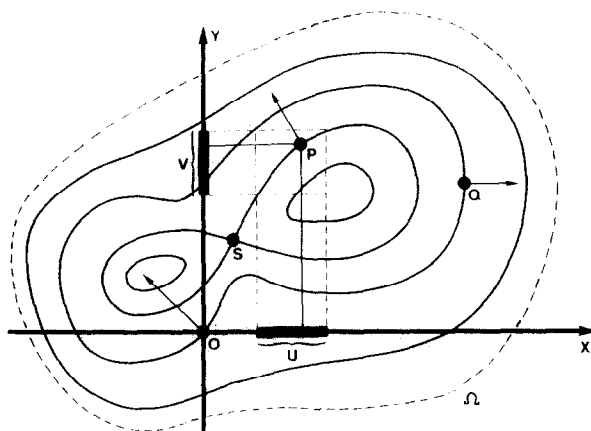


FIGURE 0

La condition (1.1) signifie géométriquement que le vecteur gradient ∇f au point $P = (x_0, y_0)$ n'est pas horizontal (voir Fig. 0). La condition (1.2) affirme que la f -courbe de niveau qui passe par P est identique, au voisinage de P , au graphe d'une certaine fonction $a(x)$, dite implicitement définie. Il est clair et bien connu que les points où ∇f est horizontal (parmi lesquels se trouvent les points singuliers de f) ne donnent localement pas lieu, en général, à une telle relation fonctionnelle (voir par exemple les points Q et S de la fig. 0).

Il existe une version élégante du TFI (voir théorème 1.2 plus bas) qui consiste à ramener le problème de l'existence de la fonction $a(x)$ à celui de la recherche d'un point fixe d'une certaine contraction définie sur un espace fonctionnel bien choisi. Cette version "point fixe" du TFI possède le grand avantage de permettre de calculer des approximations successives de la fonction $a(x)$ et renferme toute une combinatoire intéressante que nous étudierons dans la prochaine section.

Situons nous, sans perte de généralité, dans le cas où

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{et} \quad c = 0 \quad (1.3)$$

et définissons une fonction auxiliaire $m = m(x, y)$ par

$$m(x, y) = y - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right]^{-1} f(x, y). \quad (1.4)$$

On remarque que

$$m(0, 0) = \frac{\partial m}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad (1.5)$$

et

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = m(x, y). \quad (1.6)$$

On en conclut que la version classique du TFI est équivalente à la suivante.

THÉORÈME 1.2 (TFI, version point fixe). *Soit $m = m(x, y)$ une fonction de classe C^1 définie au voisinage du point $(0, 0)$ et satisfaisant (1, 5). Alors il existe une unique fonction $a = a(x)$, de classe C^1 sur un ouvert U assez petit contenant l'origine, satisfaisant*

$$a(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in U)[a(x) = m(x, a(x))]. \quad (1.7)$$

La démonstration du théorème se résume comme suit. Pour un intervalle fermé J assez petit dont l'intérieur contient l'origine, la transformation $h \mapsto Kh$ définie par

$$(Kh)(x) = m(x, h(x)) \quad (1.8)$$

donne lieu à une contraction $K: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ où \mathbb{B} est une boule fermée assez petite, centrée à l'origine dans l'espace de Banach

$$\mathbb{V} = \{h: J \rightarrow \mathbb{R} \mid h(0) = 0, h \text{ continue}\} \quad (1.9)$$

muni de la norme uniforme. Comme \mathbb{B} est un espace métrique complet, le principe des contractions de Banach s'applique et $a = a(x) \in \mathbb{B}$ est l'unique point fixe de K , i.e., $a = Ka$. De ce fait, un court calcul montre que a n'est pas seulement continue mais est aussi nécessairement de classe C^1 dans $U = J$.

Il est à noter que lorsque $m(x, y)$ est analytique autour de $(0, 0)$ alors $a(x)$ est aussi analytique autour de 0. Un peu plus généralement, si $m(x, y)$ est une série formelle, il en est de même pour $a(x)$.

C'est la signification combinatoire des coefficients de $a(x)$ en rapport avec ceux de $m(x, y)$ que nous nous proposons maintenant d'étudier et d'expliquer.

2. LA COMBINATOIRE SOUS-JACENTE

Pour analyser combinatoirement le TFI il faut nous situer dans le contexte de la théorie des espèces de structures au sens de Joyal [3]. En utilisant une terminologie suggestive de Labelle [5], considérons, à cette fin, deux sortes de points: ceux de la sorte X , appelés "feuilles" et ceux de la sorte Y appelés "bourgeons." Donnons-nous aussi une espèce $M = M(X, Y)$

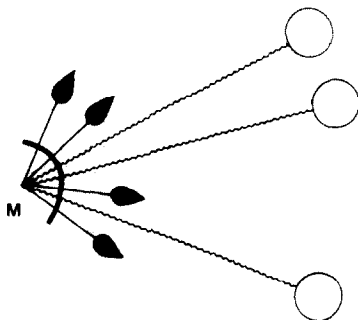


FIGURE 1

portée par ces deux sortes de points et satisfaisant les conditions (voir (1.5))

$$M[\phi, \phi] = \phi \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial Y} [\phi, \phi] = \phi \quad (2.1)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de M -structure portée par le vide ni par un simple bourgeon. Enfin, pour faciliter la visualisation de ce qui va suivre, convenons de représenter une M -structure, placée sur un ensemble fini quelconque de feuilles et de bourgeons, par un schéma du type de la fig. 1.

Dans cette figure, la M -structure est symbolisée par un arc de cercle, centré en un point d'où partent des "tiges" *courtes* (droites) et *longues* (ondulées) attachées respectivement à des feuilles et des bourgeons. Dans l'exemple, la M -structure est portée par un ensemble de 7 éléments formé par 4 feuilles et 3 bourgeons (ou, ce qui revient canoniquement au même, par 4 tiges courtes et 3 tiges longues). Noter que les feuilles dans les figures seront toujours considérées comme distinguables les unes des autres bien qu'elles soient représentées graphiquement par le même symbole. Même remarque pour les bourgeons (et mini-bourgeons, voir plus bas) apparaissant dans toutes les figures.

Notre but est d'analyser la nature d'une espèce $A = A(X)$ portant uniquement sur des ensembles non-vides de feuilles (i.e., $A[\phi] = \phi$) et qui soit solution d'une équation combinatoire de la forme

$$A = M(X, A). \quad (2.2)$$

A strictement parler, une telle solution consiste en un isomorphisme naturel (sous-jacent) permettant de décomposer, de façon canonique, toute A -structure en une M -assemblée de feuilles et de A -structures (voir fig. 2). En fait, les bourgeons de la fig. 1 ont simplement été remplacés par des A -structures.

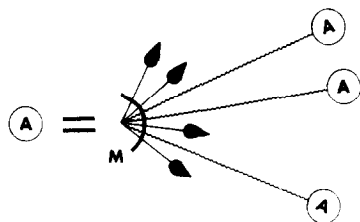


FIGURE 2

En itérant cette décomposition canonique on obtient éventuellement une arborescence d'un type très particulier (voir fig. 3) que nous appellerons, pour simplifier, une M -arborescence.

On remarquera que les conditions (2.1) constituent, en quelque sorte, des "conditions d'arrêt" qui empêchent un déploiement illimité de décompositions canoniques emboîtées.

Nous avons donc établi un contexte purement géométrique pour la version combinatoire suivante, due à Joyal [3], du théorème des fonctions implicites.

THÉORÈME 2.1. (TFI, version combinatoire). *Étant donnée une espèce $M = M(X, Y)$ satisfaisant les conditions (2.1) alors l'équation combinatoire*

$$A = M(X, A)$$

caractérise, à isomorphisme près, une unique espèce $A = A(X)$ pour laquelle $A[\phi] = \phi$.

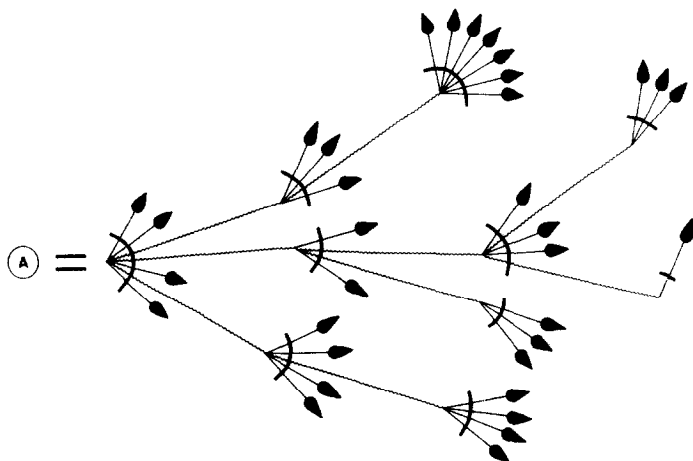


FIGURE 3

La démonstration de Joyal est assez algébrique et se situe, en fait, dans un contexte multidimensionnel. De plus, il a établi une unicité forte au sens suivant: étant données deux solutions

$$A_1 \stackrel{x_1}{=} M(X, A_1) \quad \text{et} \quad A_2 \stackrel{x_2}{=} M(X, A_2) \quad (2.3)$$

(α_1, α_2 iso) alors il existe un *unique* isomorphisme σ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{x_1} & M(X, A_1) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow M(X, \sigma) \\ A_2 & \xrightarrow{x_2} & M(X, A_2) \end{array} \quad (2.4)$$

Nous renvoyons le lecteur à [3] pour les détails.

Pour des raisons pratiques évidentes, la solution que nous conviendrons de choisir est l'espèce $A = A(X)$ des M -arborescences (fig. 3) munie de son isomorphisme naturel sous-jacent (fig. 2).

Nous nous proposons maintenant d'établir combinatoirement une *formule explicite* pour l'espèce A .

Cette formule sera du type Lie-Gröbner [1, 2] puisqu'elle fera appel à l'exponentiation d'un opérateur différentiel bien choisi (voir Théorème 2.6 plus bas). Il en résultera, en particulier, une expression explicite, facilement calculable sur ordinateur, pour les coefficients a_n de la série génératrice

$$a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!} \quad (2.5)$$

de l'espèce A . La combinatoire sous-jacente à ces développements requiert une généralisation des notions de *gerbe* et d'*éclosion* déjà introduites par G. Labelle [5] lors d'un traitement combinatoire de l'inversion des séries formelles.

DEFINITION 2.2 (M -gerbe). De façon générique, une M -gerbe est une structure qui se définit géométriquement par la fig. 4 et qui est portée par trois sortes de points: les feuilles (de sorte X), les bourgeons (de sorte Y) et les mini-bourgeons (de sorte T). Une M -gerbe est de "longueur" arbitraire et contient toujours une unique feuille qui est située dans son "bouquet terminal."

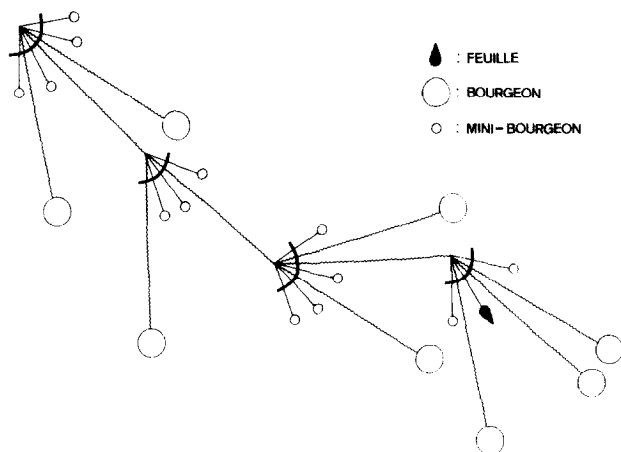


FIGURE 4

LEMME 2.3. Les M -gerbes constituent une espèce décrite par la formule

$$XM_1(T, Y)L(M_2(T, Y)) \quad (2.6)$$

où $M_1(T, Y) = \partial M(T, Y)/\partial T$, $M_2(T, Y) = \partial M(T, Y)/\partial Y$ et $L(X) = 1/(1 - X)$ désigne l'espèce des ordres linéaires.

Démonstration. Par découpage (voir fig. 5) on constate qu'une M -gerbe consiste en une suite finie de $M_2(T, Y)$ -structures mises bout-à-bout (d'où le L) suivie d'une $M_1(T, Y)$ -structure, elle-même suivie d'une X -structure (l'unique feuille du bouquet terminal). ■

DÉFINITION 2.4 (M -éclosion). Soit $\Psi = \Psi(X, T, Y)$ une espèce donnée. On dit qu'une Ψ -structure s a subi une M -éclosion si l'on a appliqué à s l'une ou l'autre des deux opérations suivantes:

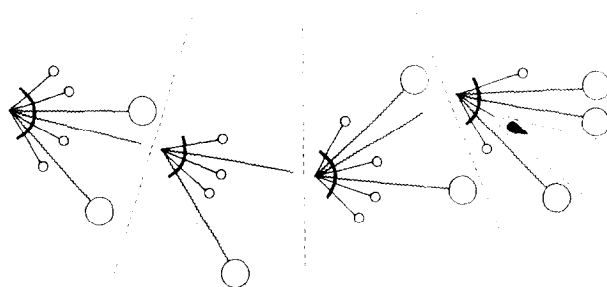


FIGURE 5

- (I) Choisir un mini-bourgeon et le remplacer par une feuille ou
- (II) Choisir un bourgeon et le remplacer par une gerbe.

Selon le cas, on dira que l'éclosion est de type (I) ou de type (II).

Il est à noter que dans cette définition, l'on doit garder une trace de l'endroit où était situé le mini-bourgeon (resp. bourgeon) avant sa disparition.

LEMME 2.5. Les Ψ -structures ayant subi une M -éclosion constituent une espèce $\Gamma\Psi$. L'opérateur Γ se décrit par la formule

$$\Gamma = X\mathcal{D} \quad (2.7)$$

où \mathcal{D} est l'opérateur différentiel combinatoire

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial T} + M_1(T, Y) L(M_2(T, Y)) \frac{\partial}{\partial Y}. \quad (2.8)$$

De plus, l'opérateur Γ possède combinatoirement des puissances divisées

$$\frac{1}{n!} \Gamma^n = \frac{1}{n!} (X\mathcal{D})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

ainsi qu'une exponentielle

$$e^\Gamma = e^{X\mathcal{D}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (X\mathcal{D})^n. \quad (2.10)$$

Démonstration. Pour montrer qu'une $\Gamma\Psi$ -structure s'identifie canoniquement à une $(X\mathcal{D})\Psi$ -structure, on n'a qu'à utiliser la définition com-

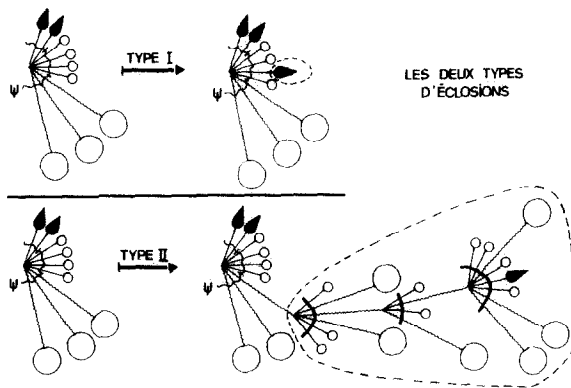


FIG. 6. Les deux types d'éclosions.

binatoire des opérateurs $\partial/\partial Y$, $\partial/\partial T$ et appliquer le lemme 2.3 (voir fig. 6 dans laquelle l'arc ondulé représente la Ψ -structure en jeu).

Pour établir l'existence combinatoire des puissances divisées (2.9) on procède comme suit. Considérons une $(X\mathcal{D})^n\Psi$ -structure σ obtenue d'une Ψ -structure s à l'aide de n éclosions *successives*. La structure σ possède donc exactement n feuilles qu'il suffit de numéroté de 1 à n pour connaître l'ordre (et l'endroit, cf. [5]) des éclosions qui leur ont donné naissance (voir fig. 7). En oubliant cette numérotation, on obtient une structure que nous appellerons $\hat{\sigma}$. En faisant agir le groupe symétrique S_n sur la numérotation de σ on obtient exactement les $n!$ structures distinctes

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n!} \quad (2.11)$$

toutes d'espèce $(X\mathcal{D})^n\Psi$, qui donnent lieu, par oubli, à ce $\hat{\sigma}$ (rappelons ici que, dans toute figure, deux feuilles, bourgeons ou mini-bourgeons sont toujours supposés distinguables entre eux). Les orbites de cette action, pour σ variable, constituent l'espèce notée $1/n!(X\mathcal{D})^n\Psi$. La série (2.10) est sommable puisqu'une $e^{X\mathcal{D}}\Psi$ -structure doit obligatoirement consister en une Ψ -structure ayant subi un nombre indéterminé (mais fini: n) d'éclosions dont l'ordre est oublié. ■

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat central.

THÉORÈME 2.6 (TFI, version combinatoire par éclosions). *L'espèce $A = A(X)$ des M -arborescences, caractérisée implicitement par l'équation*

$$A = M(X, A)$$

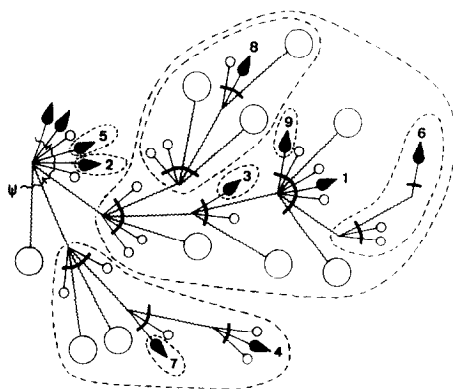


FIGURE 7

possède la représentation combinatoire explicite

$$A(X) = e^{\Gamma} Y|_{T=0, Y=0} \quad (2.12)$$

où $\Gamma = X\mathcal{D}$ représente l'opérateur d'éclosion (donné par (2.7) et (2.8)). Plus généralement, la formule suivante

$$\Phi(X, A(X)) = e^{\Gamma} \Phi(X, Y)|_{T=0, Y=0} \quad (2.13)$$

est combinatoirement valide pour toute espèce $\Phi = \Phi(X, Y)$.

Démonstration. Définissons une espèce auxiliaire $K = K(X, T, Y)$, à trois sortes, par la formule

$$K(X, T, Y) = e^{\Gamma} Y. \quad (2.14)$$

Ainsi, une K -structure s'obtient d'un simple bourgeon par un nombre indéterminé d'éclosions dont l'ordre est oublié. Pour des raisons évidentes (voir fig. 8), on pourrait appeler une K -structure, une M -arborescence "bourgeonnante."

Lorsqu'aucun bourgeon, ni mini-bourgeon, n'est présent dans la K -structure, on obtient précisément une M -arborescence ordinaire (portant uniquement sur des feuilles) au sens de la fig. 3. C'est donc dire que l'on peut effectuer la substitution $T=0, Y=0$ (où 0 désigne l'espèce vide) et écrire l'équation combinatoire

$$A(X) = K(X, 0, 0) = e^{\Gamma} Y|_{T=0, Y=0} \quad (2.15)$$

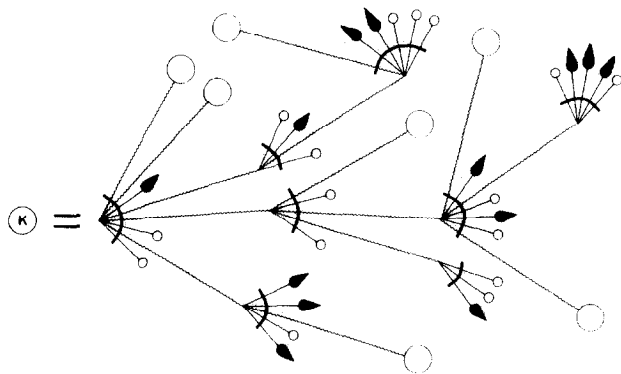


FIGURE 8

La formule (2.13) se démontre de façon similaire en remarquant d'abord que

$$e^{\Gamma} \Phi(X, Y) = \Phi(X, K(X, T, Y)) \quad (2.16)$$

et en faisant ensuite $T=0$, $Y=0$ (faire $\Psi = \Phi$ dans la figure 7, oublier l'ordre des éclosions et enlever les bourgeons et mini-bourgeons). ■

COROLLAIRE 2.7 (Calcul des coefficients). *Les coefficients a_n de la série génératrice (exponentielle)*

$$a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

de l'espèce $A = A(X)$ sont donnés explicitement par

a_n = nombre de M -structures portée par n feuilles

$$= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t}(t, y) \left[1 - \frac{\partial m}{\partial y}(t, y) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right\}^n y \Big|_{t=y=0} \quad (2.17)$$

où $m(x, y)$ désigne la série génératrice (bi-exponentielle)

$$\sum_{\mu, \nu \geq 0} m_{\mu, \nu} \frac{x^\mu y^\nu}{\mu! \nu!}$$

de l'espèce $M = M(X, Y)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'espèce des M -arborescences portée par n feuilles est donnée par la formule

$$\frac{1}{n!} (X \mathcal{D})^n Y \Big|_{T=0, Y=0} \quad (2.18)$$

et de passer aux séries génératrices sous-jacentes (ici, la série génératrice de l'espèce T des mini-bourgeons est réduite à la variable t). ■

Remarques. Plus généralement, (2.13) fournit une écriture explicite pour la série $\varphi(x, a(x))$ où $\varphi = \varphi(x, y)$ est la série génératrice d'une espèce quelconque donnée à deux variables. Evidemment, à cause de leur caractère polynômial (en les $m_{\mu, \nu}$), les formules obtenues demeurent valables lorsque les coefficients des séries impliquées appartiennent à un corps (commutatif) quelconque de caractéristique zéro. Les cas particuliers où

$$m(x, y) = xR(y), \quad R(0) \neq 0 \quad (2.19)$$

et

$$m(x, y) = x + G(y), \quad G(0) = G'(0) = 0 \quad (2.20)$$

correspondent respectivement aux problèmes de l'inversion des séries formelles $y/R(y)$ et $y - G(y)$ sous l'opération de substitution tels que traités combinatoirement dans [4, 5].

Pour continuer, disons quelques mots du cas multidimensionnel. Considérons une famille d'espèces

$$M_i(X_1, \dots, X_k; Y_1, \dots, Y_p), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.21)$$

portant chacune sur $k + p$ sortes de points $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_p$. Joyal [3] a montré que si

$$M_i[\phi, \dots, \phi; \phi, \dots, \phi] = \phi, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.22)$$

et que si la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial Y_j} [\phi, \dots, \phi; \phi, \dots, \phi] \right)_{1 \leq i, j \leq p} \quad (2.23)$$

est nilpotente (ϕ = ensemble vide) alors le système d'équations combinatoire

$$A_i = M_i(X_1, \dots, X_k; A_1, \dots, A_p), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.24)$$

définit implicitement (à unique isomorphisme de solutions près) une unique famille d'espèces

$$A_i = A_i(X_1, \dots, X_k), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.25)$$

portant chacune sur les k premières sortes de points X_1, \dots, X_k .

Pour obtenir géométriquement une représentation explicite des espèces A_i , on doit d'abord considérer k sortes de feuilles (les X_i , $i = 1, \dots, k$), p sortes de bourgeons (les Y_j , $j = 1, \dots, p$) et k sortes de mini-bourgeons (les T_i , $i = 1, \dots, k$). Le lecteur vérifiera sans peine que l'on peut alors visualiser une A_i -structure comme étant une arborescence du genre de celle de la figure 3 mais dans laquelle, cette fois-ci, chaque sommet (i.e., point de branchement ou feuille) est affecté d'un indice, représentant une *sorte*, tout en suivant les conventions suivantes:

(1) La racine est affectée de l'indice i .

(2) Si un point de branchement est affecté de l'indice j alors l'arc de cercle placé à ce point représente une M_j -structure.

(3) L'indice d'une feuille représente sa sorte.

Il ne faut *pas confondre* la présente numérotation avec celle de la fig. 7 qui représentait plutôt un *ordre temporel* d'éclosions. A cause de cette représentation géométrique, une A_i -structure peut aussi être appelée une M -arborescence de la sorte i (où $i = 1, \dots, p$ et où M désigne la famille $(M_j)_{1 \leq j \leq p}$).

En utilisant des affectations d'indices analogues (touchant aussi les bourgeons et les mini-bourgeons), on peut définir p sortes de M -gerbes à partir de la fig. 4. Une M -gerbe est déclarée de la sorte j si sa racine est affectée de l'indice j ($j = 1, \dots, p$). Le concept de M -éclosion se généralise, dans le présent contexte, en remplaçant les deux types d'éclosions de la définition 2.4 par les suivants:

(Type I) Choisir un mini-bourgeon et le remplacer par une feuille *de sa propre sorte*.

(Type II) Choisir un bourgeon et le remplacer par une M -gerbe *de sa propre sorte*.

Si $\Psi = \Psi(X_1, \dots, X_k; T_1, \dots, T_k; Y_1, \dots, Y_p)$ est une espèce (multisorte) alors on désigne par $\Gamma\Psi$ l'espèce des Ψ -structures ayant subi une éclosion. Par une argumentation semblable à celle utilisée dans le lemme 2.5, on voit facilement que les puissances divisées $\Gamma^n/n!$ sont encore définissables combinatoirement en termes d'éclosions successives dont l'ordre est ensuite oublié. On obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2.8 (TFI version combinatoire multidimensionnelle par éclosions). Soit $M = (M_j)_{1 \leq j \leq p} = (M_j(X_1, \dots, X_k; Y_1, \dots, Y_p))_{1 \leq j \leq p}$ une famille d'espèces satisfaisant (2.22) et (2.23). La famille $A = (A_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'espèces qui est caractérisée implicitement par le système d'équations

$$\begin{aligned} A_1 &= M_1(X_1, \dots, X_k; A_1, \dots, A_p), \\ A_2 &= M_2(X_1, \dots, X_k; A_1, \dots, A_p), \\ &\vdots \\ A_p &= M_p(X_1, \dots, X_k; A_1, \dots, A_p), \end{aligned} \quad (2.26)$$

possède la représentation explicite suivante. Pour $i = 1, \dots, p$ on a

$$A_i(X_1, \dots, X_k) = e^{\Gamma} Y_i \Big|_{\substack{T_1 = \dots = T_k = 0 \\ Y_1 = \dots = Y_p = 0}} \quad (2.27)$$

où Γ est l'opérateur différentiel (de M -éclosion)

$$\Gamma = \sum_{1 \leq \alpha \leq k} X_\alpha \frac{\partial}{\partial T_\alpha} + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq p}} X_\alpha C_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial Y_\beta} \quad (2.28)$$

et où

$$C = (C_{\alpha\beta})_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq p}} = (C_{\alpha\beta}(T_1, \dots, T_k; Y_1, \dots, Y_p))_{\substack{1 \leq \alpha \leq k \\ 1 \leq \beta \leq p}}$$

est la matrice d'espèces

$$C = \left[\left(I - \frac{\partial M}{\partial Y} \right)^{-1} \frac{\partial M}{\partial T} \right]^t. \quad (2.29)$$

Dans (2.29), I désigne la matrice identité de dimension p , $\partial M / \partial Y$ désigne la matrice jacobienne $(\partial M_i / \partial Y_j)$ de dimensions $p \times p$, $\partial M / \partial T$ désigne la matrice jacobienne $(\partial M_i / \partial T_j)$ de dimensions $p \times k$ et t désigne l'opérateur matriciel de transposition.

Démonstration. En définitive, il reste à vérifier que l'opérateur d'éclosion multidimensionnel introduit plus haut est canoniquement identifiable à l'opérateur différentiel (2.28). S'il s'agit d'une éclosion du type I alors, pour un certain indice α , un mini-bourgeon de la sorte α a été remplacé par une feuille de la sorte α . Ceci correspond bien à l'effet du terme général $X_\alpha(\partial / \partial T_\alpha)$ de la somme de gauche dans (2.28). D'autre part, s'il s'agit d'une éclosion du type II alors, pour un certain indice β , un bourgeon de la sorte β a été remplacé par une gerbe de la sorte β . Soit α la sorte de l'unique feuille de cette gerbe et $r \geq 0$ la longueur de sa tige.

La fig. 9 est typique de la situation (ici pour $k=8$, $p=9$) et montre qu'une telle gerbe est, pour certaines valeurs de j_1, \dots, j_r , une structure appartenant à l'espèce suivante

$$X_\alpha \frac{\partial M_{j_1}}{\partial T_\alpha} \left[\frac{\partial M_{j_2}}{\partial Y_{j_1}} \cdot \frac{\partial M_{j_3}}{\partial Y_{j_2}} \dots \frac{\partial M_{j_r}}{\partial Y_{j_{r-1}}} \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial Y_{j_r}} \right]. \quad (2.30)$$

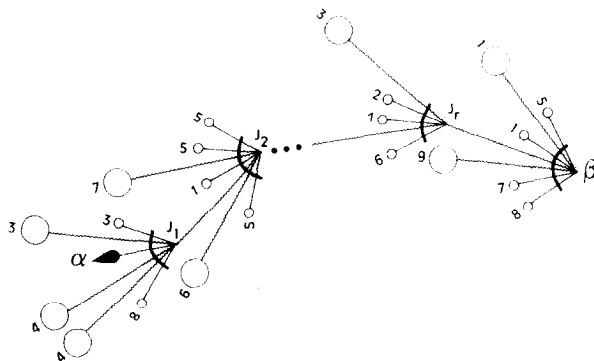


FIGURE 9

En regard de la somme de droite dans (2.28), il suffit donc de vérifier que la somme, pour r, j_1, j_2, \dots, j_r variables, des espèces (2.30) est, en fait, isomorphe à l'espèce $X_\alpha C_{\alpha, \beta}$. Ceci se voit directement puisque l'on a, par définition de C

$$C = (\partial M / \partial T)' [I + (\partial M / \partial Y) + \dots + (\partial M / \partial Y)^r + \dots]' \quad (2.31)$$

et que la série géométrique est sommable à cause de l'hypothèse que la matrice jacobienne $(\partial M / \partial Y)$ est nilpotente à l'origine. ■

Bien entendu, la formule plus générale suivante

$$\Phi(X_1, \dots, X_k; A_1, \dots, A_p) = e^r \Phi(X_1, \dots, X_k; Y_1, \dots, Y_p) \Big|_{\substack{Y_1 = \dots = Y_k = 0 \\ Y_1 = \dots = Y_p = 0}} \quad (2.32)$$

(où Φ est une espèce à $k + p$ sortes) se démontre de façon semblable. Le théorème 2.8 demeure aussi valable dans le contexte, plus restreint, des séries formelles. Il s'agit alors, à quelques notations près, du résultat classique de Gröbner [1].

Nous concluons par quelques remarques concernant les équations différentielles. On sait [2] que la méthode des séries de Lie permet aussi de résoudre des systèmes d'équations différentielles (non-autonomes) aux conditions initiales

$$\begin{aligned} y'_i(x) &= f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p), \\ y_i(x_0) &= y_{i,0}, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2.33)$$

où les f_i sont des fonctions analytiques autour du point $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{p,0}) \in \mathbb{R}^{p+1}$. La solution $y_i = a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, peut s'écrire sous la forme explicite

$$a_i(x) = e^{(x-x_0)\mathcal{D}} y_i \Big|_{\substack{t=x_0 \\ y_1=y_{1,0}, y_2=y_{2,0}, \dots, y_p=y_{p,0}}} \quad (2.34)$$

où

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^p f_j(t, y_1, \dots, y_p) \frac{\partial}{\partial y_j}. \quad (2.35)$$

Quitte à modifier les f_i nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que

$$0 = x_0 = y_{1,0} = y_{2,0} = \dots = y_{p,0}. \quad (2.36)$$

Nous sommes ainsi amenés à poser le problème *combinatoire* suivant:

Trouver une famille d'espèces $(A_i(X))_{1 \leq i \leq p}$ satisfaisant le système d'équations différentielles combinatoires, aux conditions initiales

$$\begin{aligned} Y'_i &= F_i(X, Y_1, \dots, Y_p), \\ Y_i[\phi] &= \phi, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.37)$$

où les F_i sont des espèces *données* à $p+1$ sortes.

On peut alors espérer obtenir une solution de la forme

$$A_i(X) = e^{X\mathcal{D}} Y_i \Big|_{\substack{T=0 \\ Y_1=\dots=Y_p=0}} \quad (2.38)$$

où

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial T} + \sum_{j=1}^p F_j(T, Y_1, \dots, Y_p) \frac{\partial}{\partial Y_j} \quad (2.39)$$

est l'opérateur différentiel combinatoire correspondant à (2.35). On se heurte cependant à l'*obstacle* suivant:

Les puissances divisées $(X\mathcal{D})^n/n!$ de l'opérateur $X\mathcal{D}$ ne sont pas toujours définissables combinatoirement (au sens de la preuve du lemme 2.5).

Ceci est dû au fait qu'un système de la forme (2.37) *ne possède pas toujours de solution combinatoire au sens des espèces de structures* (bien que dans le cas plus restreint des séries formelles, on a toujours l'existence et l'unicité de la solution). Il peut même exister plusieurs solutions combinatoires non isomorphes. Par exemple, si $P_{2,2}$ et L désignent respectivement l'espèce des partitions en deux paires et l'espèce des ordres linéaires alors on peut montrer (voir [6]) que

$$\begin{aligned} Y' &= P_{2,2}(X), \\ Y[\phi] &= \phi \end{aligned} \quad (2.40)$$

ne possède pas de solution combinatoire $Y = A(X)$, tandis que

$$\begin{aligned} Y' &= L(X), \\ Y[\phi] &= \phi \end{aligned} \quad (2.41)$$

possède une infinité (non dénombrable) de solutions non-isomorphes! Cependant, lorsque l'opérateur $X\mathcal{D}$ possède combinatoirement des puissances divisées alors la formule (2.38) peut fournir une solution de (2.37). Par exemple, l'opérateur \mathcal{D} associé à

$$\begin{aligned} Y' &= 1 + Y, \\ Y[\phi] &= \phi \end{aligned} \quad (2.42)$$

(où 1 désigne l'espèce de l'ensemble vide) prend la forme

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial}{\partial T} + (1 + Y) \frac{\partial}{\partial Y} \right) \quad (2.43)$$

et $X\mathcal{D}$ possède combinatoirement des puissances divisées. Il fournit la solution

$$A(X) = e^{X\mathcal{D}} Y|_{T=0, Y=0} = E^*(X) \quad (2.44)$$

qui est l'espèce des ensembles non vides.

Dans le cas général, il serait donc intéressant d'étudier les relations exactes entre l'ensemble (possiblement vide) des solutions combinatoires du système (2.37) et l'existence combinatoire des puissances divisées de l'opérateur différentiel $X\mathcal{D}$ qui lui est associé. Sous quelles conditions (nécessaires et suffisantes) de telles puissances divisées existent-elles?

L'auteur désire remercier les membres suivants de l'équipe de combinatoire de l'UQAM: Pierre Leroux, Jacques Labelle, Volker Strehl et, en particulier, François Bergeron et Hélène Décoste pour leurs suggestions concernant la rédaction finale du présent travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. GRÖBNER, "Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen," D. Verlag d. Wiss., Berlin, 1967.
2. W. GRÖBNER AND H. KNAPP, "Contributions to the Theory of Lie Series," Bibliographisches Institut-Mannheim, Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim, 1967.
3. A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advan. in Math.* **42** (1981), 1-82.
4. G. LABELLE, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Advan. in Math.* **42** (1981), 217-247.
5. G. LABELLE, Eclotions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles, *J. Comb. Theory Ser. A* **39**, No. 1 (1985), 52-82.
6. G. LABELLE, A propos des équations différentielles combinatoires, *J. Math. Analysis and Applications*, in press.