WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

INSTYTUT INFORMATYKI
ul. Joliot-Curie 15
50-383 Wrocław

tel. +48 71 375 78 00 | +48 71 325 12 71
fax +48 71 375 78 01

sekretariat.ii@uwr.edu.pl | www.ii.uni.wroc.pl

dr hab. Emanuel Kieroński
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 13 października 2017

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Szczepana Hummla pt. *Topological Complexity of Sets Defined by Automata and Formulas*

1 Wstęp

Niniejsza recenzja została sporządzona na zlecenie prof. dr. hab. Pawła Strzeleckiego, Dziekana Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego z dnia 26.05.2017, w związku z prowadzonym przewodem doktorskim mgr. Szczepana Hummla.

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Szczepan Hummel zajmuje się złożonością topologiczną klas języków nieskończonych słów lub nieskończonych drzew definiowanych przez pewne automaty lub logiki. Na wstępie czuję się zobowiązany zaznaczyć, że tematyka ta nie jest mi bliska, a zagadnienia złożoności topologicznej niemal zupełnie nie były mi znane przed przystąpieniem do czytania rozprawy. Dlatego też moja opinia powinna być traktowana jako opinia nie-specjalisty.

Rozprawa zawiera wyniki z trzech wcześniejszych prac (z których druga jest rozszerzoną wersją pierwszej): *On the topological complexity of MSO+U and related automata models* (praca z konferencji MFCS 2010; współautorzy: Michał Skrzypczak i Szymon Toruńczyk), *The topological complexity of MSO+U and related automata models* (Fundamenta Informaticae 2012; współautor: Michał Skrzypczak) oraz *Unambiguous tree languages are topologically harder than deterministic* *ones* (konferencja GandALF 2012; praca samodzielna). Miejsca ich publikacji są przyzwoite. Przedstawione są również informacje o wkładzie mgr. Hummla w ich powstanie. Nie pozostawiają one wątpliwości, że jego rola była bardzo znacząca. Warto też wspomnieć, że rozprawa zawiera szereg nowych, nieopublikowanych jeszcze wyników (dotyczy to głównie rozdziału o językach drzew), a prezentacja wielu opublikowanych wcześniej została ulepszona. W szczególności, niektóre dowody są zmienione, pojawia się wiele dodatkowych komentarzy, a także wspomina się o istotnych wynikach innych autorów, które ukazały się już po publikacji wymienionych prac.

2 Zawartość rozprawy

Rozprawa składa się ze wstępu oraz trzech rozdziałów, z których pierwszy jest rozdziałem wprowadzającym, drugi zawiera wyniki dotyczące języków słów, a trzeci — dotyczące języków drzew.

W rozdziale pierwszym wprowadzone są niezbędne pojęcia i przytoczone podstawowe fakty z dziedziny złożoności topologicznej oraz przedstawiona jest koncepcja definiowania języków słów i drzew przez automaty i formuły logiczne. Pojawia się także podrozdział motywujący prowadzone badania poprzez naszkicowanie zastosowań wyników dotyczących złożoności topologicznej w teorii języków.

Rozdział drugi jest oparty na pracy z Fundamenta Informaticae. Jego głównym tematem jest zaproponowane przez Mikołaja Bojańczyka w 2004 roku rozszerzenie monadycznej logiki drugiego rzędu, MSO, o kwantyfikator U (*unbounding quantifier*), MSO+U, a konkretnie złożoność topologiczna tego formalizmu na słowach nieskończonych. Kwantyfikator U pozwala wyrażać pewne asymptotyczne własności słów nieskończonych, np. *długość spójnych bloków liter* a *w słowie jest nieograniczona*.

Sama logika MSO na słowach jest od dawna dość dobrze rozumiana — klasyczne wyniki Büchi'ego pokazują, że problem spełnialności jest dla niej rozstrzygalny oraz że jej formuły definiują dokładnie języki ω-regularne. Wiadomo, że złożoność topologiczna języków ω-regularnych jest stosunkowo niska — leżą one w klasie $\mathcal{BC}_2^0$ hierarchii borelowskiej.

Analiza rozszerzenia MSO+U okazuje się być dużo trudniejsza. Autorowi udaje się wykazać, że jego złożoność topologiczna wykracza poza hierarchę borelowską. Dokładniej mówiąc, pokazuje on indukcyjną konstrukcję ciągu formuł ϕ_i takiego, że język definiowany przez ϕ_i jest trudny dla poziomu Σ_i^1 hierarchii rzutowej. Wraz z prostą obserwacją, że każdy język definiowany w MSO+U należy do pewnego Σ_i^1 ustala to złożoność topologiczną logiki.

W dalszej części rozdziału drugiego mgr Hummel bada złożoność topologiczną pewnych automatów o rozstrzygalnym problemie niepustości, odpowiadających interesującym fragmentom MSO+U. Ich definicja pochodzi z pracy Bojańczyka i Colcombeta z roku 2006. Okazuje się, że ich złożoność topologiczna jest znacznie znacznie niższa od złożoności całego MSO+U: definiowane przez nie języki leżą na kilku początkowych poziomach hierarchii borelowskiej. Konkretnie, tzw. ωB-automaty definiują języki z Σ^0_3, ωS-automaty — z Π^0_3, a ωBS-automaty — z Σ^0_4.

Na koniec autor rozważa alternującą wersję ωBS-automatów. Pokazuje, że istnieją języki trudne dla wszystkich skończonych poziomów hierarchii borelowskiej (pozostaje luka w stosunku do granicy górnej, którą jest Σ^1_2). Wynik ten pozwala wywnioskować, że alternujące ωBS-automaty mają większą siłę wyrazu niż boolowskie kombinacje niedeterministycznych ωBS-automatów, co jest odpowiedzią na jedno z pytań ze wspomnianej pracy Bojańczyka i Colcombeta. Warto może zaznaczyć, że związek alternujących ωBS-automatów i logiki MSO+U nie jest w tej chwili do końca jasny. W szczególności nie wiadomo, czy wszystkie języki rozpoznawane przez takie automaty są definiowalne w MSO+U. Otwarta jest także rozstrzygalność problemu niepustości tych automatów.

Głównym tematem rozdziału trzeciego są podwójnie jednoznaczne języki drzew. Język jest podwójnie jednoznaczny jeśli zarówno on jak i jego dopełnienie są rozpoznawane przez jednoznaczny automat parzystości (czyli taki, który ma na każdym wejściu najwyżej jeden przebieg akceptujący). Klasa języków podwójnie jednoznacznych stanowi naturalne i ścisłe rozszerzenie klasy języków deterministycznych. Punktem wyjścia tej części pracy jest wspomniana praca z konferencji Gandalf 2012, z której pochodzi przykład podwójnie jednoznacznego języka drzew nieskończonych o złożoności Σ^1_1. Następnie autor przedstawia operację σ na językach drzew, która, przy pewnych założeniach, podnosi złożoność topologiczną języka (w sensie redukcji Wadge'a) i, co więcej, dla języków podwójnie jednoznacznych produkuje języki podwójnie jednoznaczne. Na koniec wprowadzona jest operacja σ^ω, która umożliwia wykonanie kroku granicznego (tj. taka, że $\sigma^\omega(L)$ jest bardziej złożony od $\sigma^n(L)$ dla dowolnego n naturalnego) . W efekcie otrzymujemy hierarchię języków podwójnie jednoznacznych, z których każdy kolejny jest bardziej złożony topologicznie od poprzedniego, długości ω^2.

3 Ocena rozprawy

Zacznę od tego, że uważam, że rozprawa przygotowana jest znakomicie, zarówno jeśli chodzi o dobór materiału, jego układ, stronę językową, jak i stronę techniczną oraz ogólną kulturę matematyczną. Jak wspomniałem na początku nie czuję się ekspertem w tematyce złożoności topologicznej. Mimo tego, czytając rozprawę mogłem dość szybko zorientować się co się w niej dzieje i zrozumieć jej wyniki, właściwie nie sięgając do innych źródeł. Było tak dzięki tamu, że mgr Hummel nie tylko zaprezentował swoje osiągnięcia, ale też osadził je w nieco szerszym kontekście, wielokrotnie (i to nie tylko w rozdziale wprowadzającym) przedstawiając i komentując istotne wyniki innych autorów. Wykazał się tu niewątpliwie szeroką znajomością tematyki, zarówno jeśli chodzi o jej klasykę, jak i najświeższe publikacje.

Podoba mi się też pomysł przemyślanego nazewnictwa twierdzeń (objaśniony na stronie 16), który w dużej liczbie przedstawianych faktów pozwala łatwo zidentyfikować te, które zostały udowodnione przez autora.

Jeśli chodzi o same wyniki to należą one do ciekawego, trudnego i aktywnego obszaru badań i z pewnością są interesujące dla wielu badaczy. Najważniejszy z nich wydaje mi się być ten dotyczący trudności topologicznej logiki MSO+U na słowach nieskończonych. Konstrukcja ciągu formuł ϕ_i, z których i-ta jest trudna dla i-tego poziomu hierarchii rzutowej jest elegancka i pomysłowa. Wynik ten okazał się być istotnym krokiem w badaniach, które doprowadziły później do pokazania nierozstrzygalności logiki MSO+U na słowach — choć ostatecznie, w 2016 roku, Bojańczyk, Parys i Toruńczyk pokazali wspomnianą nierozstrzygalność bez użycia aparatu topologicznego, to wcześniejsza, pośrednia, praca Bojańczyka, Gogacza, Michalewskiego i Skrzypaczaka, wykorzystywała wynik mgr. Hummla. Praca z Fundamenta Informaticae, w której ten wynik ukazał się po raz pierwszy zyskała już całkiem sporą liczbę cytowań. Wyniki dotyczące złożoności automatów Bojańczyka i Colcombeta są również ładne, choć ich znaczenie jest chyba nieco mniejsze. Konstrukcja ciągu coraz trudniejszych podwójnie jednoznacznych języków drzew z rozdziału 3 jest dość techniczna i była dla mnie trudna do prześledzenia. Podobnie jak w innych miejscach rozprawy autor niewątpliwie zademonstrował tutaj dobry warsztat i pomysłowość, a sam wynik jest dość efektowny.

4 Konkluzja

Mgr. Hummel wykazuje się sporą dojrzałością naukową. Stawia sobie i rozwiązuje niełatwe i interesujące zadania, podchodząc do nich z dużą dociekliwością. Bardzo sprawnie porusza się w trudnej tematyce. Nie mam wątpliwości że przedstawiona praca *Topological Complexity of Sets Defined by Automata and Formulas.* prezentuje wysoki naukowy. Uważam, że spełnia ona zwyczajowe i formalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Szczepana Hummla do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Emanuel Kieroński

Emanuel Kieroński