BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE REUTENAUER

Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 225-232
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__D225_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 225-232.

SUR LES ÉLÉMENTS INVERSIBLES DE L'ALGÈBRE DE HADAMARD DES SÉRIES RATIONNELLES

PAR CHRISTOPHE REUTENAUER (*)

RÉSUMÉ. — On caractérise les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles en une variable. On étudie ensuite les diviseurs de zéro dans cette algèbre.

ABSTRACT. — We characterize the invertible elements of the algebra of rational power series in one variable. Then we study the divisors of zero in this algebra.

1. Introduction

L'ensemble des séries rationnelles (i.e. des séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ qui sont quotients de deux polynômes) est clos pour le *produit de Hadamard*, noté $\odot$:

$$(\sum a_n x^n)\odot(\sum b_n x^n)=\sum a_n b_n x^n.$$

Muni de ce produit, cet ensemble devient une algèbre, appelée *algèbre de Hadamard des séries rationnelles*, dont l'élément neutre est la série :

$$\frac{1}{1-x}=\sum x^n$$

L'objet de cette Note est de caractériser les éléments inversibles de cette algèbre. On remarque tout d'abord qu'une *série géométrique*, i.e. une série de la forme :

$$a\sum \lambda^n x^n \qquad (a,\, \lambda\in K,\, \lambda\neq 0)$$

est inversible si elle n'est pas nulle; en effet son inverse est :

$$a^{-1}\sum \lambda^{-n} x^n.$$

(*) Texte reçu le 14 mai 1981, révisé le 28 septembre 1981.

C. REUTENAUER, Université de Paris-VI, Tour 55/65, Institut de Programmation, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/225/$ 5.00

Par ailleurs, étant données p séries :

$$S_i(x)=\sum_{n\geqslant 0} a_{i,n}x^n, \qquad 0\leqslant i\leqslant p,$$

appelons *emboîtement* de ces séries la série :

$$\sum a_n x^n=\sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} x^i S_i(x^p)$$

(autrement dit, pour $0\leqslant i\leqslant p-1$ et $n\geqslant 0$, $a_{i+np}=a_{i,n}$).

Il n'est pas difficile de voir que si les séries rationnelles $S_i(x)$ sont toutes Hadamard inversibles, alors la série $S(x)$ l'est aussi. Nous démontrons ici la réciproque :

Si une série rationnelle est Hadamard-inversible, elle est égale à un emboîtement de séries géométriques.

Ce théorème avait déjà été démontré par BENZAGHOU [1] (th. 2, p. 229) dans le cas de la caractéristique nulle, par des méthodes d'analyse complexe. Nous le démontrons ici par une méthode algébrique (et élémentaire), ce qui nous permet de l'établir en caractéristique quelconque. La même méthode nous permet de caractériser les diviseurs de 0 de l'algèbre de Hadamard et met en évidence le rôle particulier joué par les séries rationnelles dont les pôles engendrent (multiplicativement) un groupe abélien libre.

Remarquons encore que ce théorème est en quelque sorte dual du problème du quotient de Hadamard de deux séries rationnelles : il s'agit de montrer que si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries rationnelles telles que les a_n/b_n soient dans $\mathbb{Z}$, alors la série $\sum (a_n/b_n)\,x^n$ est rationnelle. Citons à ce sujet les travaux de PÓLYA [4], PISOT [3], BENZAGHOU [1], BERSTEL [2] et enfin POURCHET [5], où il annonce la solution définitive de ce problème.

2. Préliminaires

Soit K un corps commutatif. Une *série rationnelle* est une série formelle :

$$S=\sum a_n x^n\in K[[x]]$$

telle qu'il existe des polynômes $Q\neq 0$ et $P\in K[x]$ vérifiant :

$$PS=Q. \tag{1}$$

Sans restreindre la généralité de ce qui suit, on peut toujours supposer :

$$\deg(P)<\deg(Q), \tag{1'}$$

ce que nous ferons dans la suite.

La rationalité de la série S est alors équivalente à chacune des conditions suivantes :

(2) Il existe $k\geqslant 0$ et des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de K, $\alpha_k \neq 0$, tels que :

$$\forall n\geqslant 0, \quad a_{n+k}=\alpha_1 a_{n+k-1}+\ldots+\alpha_k a_n,$$

(3) Il existe une matrice inversible $A\in \mathrm{GL}_k(K)$ et une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_k(K)$ telles que :

$$\forall n\geqslant 0, \quad a_n=\varphi(A^n).$$

Cette dernière condition met bien en évidence le fait que la somme et le produit de Hadamard de deux séries rationnelles est une série rationnelle; en effet si :

$$a_n=\varphi(A^n), \qquad b_n=\psi(B^n),$$

alors :

$$a_n b_n=(\varphi\otimes\psi)((A\otimes B)^n)$$

et $A\otimes B$ est une matrice inversible si A et B le sont. Pour la somme, on considère la matrice somme directe de A et de B.

Lorsque K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, il est bien connu que la rationalité de S est encore équivalente à la condition :

(4) Il existe $r\geqslant 0$, des éléments non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de K, des polynômes $P_1, \ldots, P_r\in K[t]$ tels que :

$$\forall n\geqslant 0, \quad a_n=\textstyle\sum_{1\leqslant i\leqslant r} P_i(n)\lambda_i^n.$$

Il est bien connu que l'expression ci-dessus, qu'on appelle un *polynôme exponentiel*, est unique si S est donnée.

Ceci peut se formaliser de la manière suivante : considérons le groupe multiplicatif $\Lambda=K^*=K\setminus O$ et l'anneau $K[t]$; nous construisons la $K[t]$-algèbre de Λ, notée $K[t][\Lambda]$, i. e. l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$E=\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(t)\lambda, \qquad P_\lambda\in K[t].$$

Un élément de $K[t][\Lambda]$ sera appelée un *polynôme exponentiel*. Si $F=\sum Q_\lambda(t)\lambda$ est un autre polynôme exponentiel, on définit comme d'habitude, la somme $E+F$ et le produit EF par :

$$E+F=\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(P_\lambda(t)+Q_\lambda(t))\lambda,$$

$$EF=\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\sum_{\mu\nu=\lambda} P_\mu Q_\nu)\lambda.$$

PROPOSITION 1. — *Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle l'application :*

$$\varphi: \quad \textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \lambda \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

définie par :

$$\forall n\geqslant 0, \quad a_n = \textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(n)\lambda^n$$

(*où la somme est effectuée dans K*) *réalise un isomorphisme de K-algèbres de $K[t][\Lambda]$ dans l'algèbre des séries rationnelles.*

Preuve. — Que φ est une bijection découle de l'existence et de l'unité du polynôme exponentiel, comme rappelées ci-dessus.

Soient $E=\sum P_\lambda(t)\lambda$, $F=\sum Q_\lambda(t)\lambda$ des éléments de $K[t][\Lambda]$

$$\text{et} \qquad G=E+F=\textstyle\sum R_\lambda(t)\lambda, \qquad H=EF=\sum S_\lambda(t)\lambda.$$

Alors :

$$R_\lambda = P_\lambda + Q_\lambda, \qquad S_\lambda = \textstyle\sum_{\lambda=\mu\nu} P_\mu Q_\nu.$$

Notons $\varphi(E)_n$ le coefficient de x^n dans $\varphi(E)$. Alors :

$$\varphi(G)_n = \textstyle\sum R_\lambda(n)\lambda^n = \sum P_\lambda(n)\lambda^n + \sum Q_\lambda(n)\lambda^n = \varphi(E)_n + \varphi(F)_n,$$

$$\begin{aligned}\varphi(H)_n &= \textstyle\sum S_\lambda(n)\lambda^n = \sum_\lambda \lambda^n \sum_{\lambda=\mu\nu} P_\mu(n) Q_\nu(n)\\ &= \textstyle\sum_{\mu,\nu} P_\mu(n)\mu^n Q_\nu(n)\nu^n = \varphi(E)_n\,\varphi(F)_n.\end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(E+F)=\varphi(E)+\varphi(F) \qquad \text{et} \qquad \varphi(EF)=\varphi(E)\odot\varphi(F). \quad \square$$

Lorsque K est un corps de caractéristique non nulle (même algébriquement clos) il n'y a pas en général existence et unicité du polynôme exponentiel. Pour y pallier, nous utilisons la notion de *série géométrique* : c'est une série de la forme :

$$S = q\textstyle\sum_{n\geq 0} b^n x^n (a\in K,\ b\in K\setminus O).$$

Nous appellerons *série semi-simple* une série qui est somme de séries génométriques. Désignons encore par Λ le groupe multiplicatif K^*. On a alors la proposition suivante (simple application de la formule de van der Monde) :

PROPOSITION 2. — *L'application :*

$$\varphi: \quad \textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda \lambda \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda \lambda^n,$$

réalise un isomorphisme de K-algèbres de $K[\Lambda]$ *dans l'algèbre de Hadamard des séries semi-simples.*

Preuve. — Que φ soit un homomorphisme résulte des mêmes calculs que ceux de la preuve précédente. La surjectivité est aussi évidente. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des éléments de Λ distincts deux à deux et $p_1, \ldots, p_m \in K$ tels que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} p_i \lambda_i^n = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned} p_1 + \ldots + p_m &= 0 \\ p_1 \lambda_1 + \ldots + p_m \lambda_m &= 0 \\ p_1 \lambda_1^{m-1} + \ldots + p_m \lambda_m^{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est un système de Cramer en les p_i, qui sont donc tous nuls. Donc φ est injective. □

L'intérêt en caractéristique p de ce résultat est illustré par les considérations suivantes : étant données q séries $S_i = \sum_{n \geqslant 0} a_{i,n} x^n$ $(0 \leqslant i \leqslant q-1)$, *l'emboîtement des séries* $S_0, \ldots, S_{q-1}$ est la série $S = \sum a_n x^n$ avec $a_{i+qn} = a_{i+qn} = a_{i,n}$ si $0 \leqslant i \leqslant q-1$ et $n \geqslant 0$. Autrement dit $a_m = a_{i,n}$ si $m = i + qn$ (division euclidienne de m par q).

PROPOSITION 3. — *On suppose que K est de caractéristique p non nulle et algébriquement clos. Toute série rationnelle est égale à un emboîtement de séries semi-simples.*

Preuve. — Soit $S = P/Q$ une série rationnelle où P et Q sont des polynômes dans $K[x]$ tels que $\deg(P) < \deg(Q)$. Décomposons cette fraction rationnelle en éléments simples : S est donc combinaison linéaire de séries de la forme :

$$T = \frac{1}{(1-\lambda x)^r}, \qquad (r \geqslant 1).$$

Soit s et k des entiers naturels tels que $r + s = p^k$. Alors :

$$T = \frac{(1-\lambda x)^s}{(1-\lambda x)^{p^k}} = \frac{(1-\lambda x)^s}{1-\lambda^{p^k} x^{p^k}} = (1-\lambda x)^s \sum_{n \geqslant 0} \lambda^{np^k} x^{np^k},$$

ce qui montre (puisque $s<p^k$) que T est égal à un emboîtement de séries géométriques, donc semi-simples. Cette propriété étant préservée par passage à une combinaison linéaire, il en est de même pour S. □

3. Résultats

THÉORÈME 1. — *Si une série rationnelle est Hadamard-inversible, elle est égale à un emboîtement de séries géométriques.*

Remarque. — Les séries qui sont emboîtement de séries géométriques sont déjà apparues dans un autre contexte; en effet un théorème de PÓLYA affirme qu'une telle série est caractérisée (dans le cas de coefficients rationnels) par le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de facteurs premiers qui interviennent dans la décomposition de ses coefficients [4].

Preuve. — (i) Soient i et q des entiers naturels et $\psi : K[t][\Lambda] \to K[t][\Lambda]$ l'application K-linéaire définie sur les monômes par :

$$\psi(P(t)\lambda)=Q(t)\mu$$

avec $P(t)\in K[t]$, λ, $\mu\in\Lambda$ et $Q(t)=\lambda^i P(i+qt)$, $\mu=\lambda^q$.

ψ est un homomorphisme de K-algèbres comme on le vérifie aisément (il suffit de la faire sur les monômes).

(ii) Soit maintenant E et $F\in K[t][\Lambda]$ et Λ_1 le sous-groupe de Λ engendré par les éléments de $\operatorname{supp}(E)\cup\operatorname{supp}(F)$ (où $\operatorname{supp}(\sum P_\lambda(t)\lambda)$ désigne l'ensemble des λ tels que $P_\lambda\neq 0$). Λ_1 est un groupe abélien de type fini, donc isomorphe au produit d'un groupe fini (disons de cardinal q) et d'un groupe abélien libre de type fini. Par conséquent le sous-groupe Λ_2 de Λ_1 engendré par les $\lambda^q (\lambda\in\Lambda_1)$ est libre. Par suite, les supports de $\psi(E)$ et $\psi(F)$ sont contenus dans Λ_2 et $\psi(E)$, $\psi(F)\in K[t][\Lambda_2]$.

Si l'on suppose $EF=1$, alors $\psi(E)\psi(F)=1$ et comme Λ_2 est libre, les seuls éléments inversibles de $K[t][\Lambda_2]$ sont de la forme $a\lambda$, $a\in K$, $\lambda\in\Lambda$. On a donc $\psi(E)=a\lambda$.

(iii) Soient S et T deux séries rationnelles telles que $S\odot T=\sum_{n\geq 0}x^n$. On peut toujours supposer que K est algébriquement clos.

Supposons d'abord que K soit de caractéristique nulle. Soient E et $F\in K[t][\Lambda]$ tels que $\varphi(E)=S$, $\varphi(F)=T$ (notations de la proposition 1). Alors $EF=1$.

Soient $S=\sum a_n x^n$. Alors la série $S_i=\sum a_{i+qn}x^n$ est égale à $\varphi(\psi(E))$ comme on le vérifie immédiatement. Or $\psi(E)=a\lambda$, donc S_i est une série géométrique et le théorème est démontré dans ce cas. Lorsque la caractéristique n'est pas nulle, la proposition 3 montre qu'on peut se ramener au cas où S et T sont semi-simples. Mais alors, on raisonne comme ci-dessus, moyennant la proposition 2. $\square$

Nous caractérisons maintenant les séries rationnelles S, T telles que $S \odot T = 0$.

THÉORÈME 2. — *Soient* $S = \sum a_n x^n$, $T = \sum b_n x^n$ *deux séries rationnelles telles que* $S \odot T = 0$. *Il existe alors un entier* $q \geqslant 1$ *et une partition* $\{0, \ldots, q-1\} = I \cup J$ *tel que :*

$$\{n \mid a_n \neq 0\} \subset I + q\mathbb{N},$$
$$\{n \mid b_n \neq 0\} \subset J + q\mathbb{N}.$$

Preuve. — Nous ne le démontrons qu'en caractéristique non nulle (*voir* la remarque ci-après). On peut, d'après la proposition 3, supposer que S et T sont des séries semi-simples. Reprenons les notations de (i) et (ii) dans la preuve du théorème 1. On a alors $\psi(E)\psi(F) = 0$. Comme Λ_2 est libre, $K[\Lambda_2]$ n'a pas de diviseurs de zéro et l'on en déduit $\psi(E) = 0$ ou $\psi(F) = 0$. Ceci prouve le théorème. $\square$

Le théorème ci-dessus est, en caractéristique nulle, conséquence immédiate du théorème de SKOLEM-MAHLER-LECH (*cf.* [6]) affirmant que pour une série rationnelle $\sum a_n x^n$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est réunion finie de progressions arithmétiques de même raison. Ce résultat n'est plus vraie en caractéristique p, comme le montre l'exemple suivant (*ibid.*) :

$$S = \sum_{n \geqslant 0} ((\theta+1)^n - \theta^n - 1)\, x^n,$$

où θ est transcendant sur le corps à p éléments. On a cependant le corollaire suivant au théorème 2 (qui ne dépend pas de la caractéristique).

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathbb{N} = A \cup B$ *une partition telle que* $A = \{n \mid a_r \neq 0\}$, $B = \{n \mid b_n \neq 0\}$ *pour des séries rationnelles* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$. *Alors A et B sont réunion finie de progressions arithmétiques de même raison.*

Remarque. — Considérons la famille des séries rationnelles définies de la manière suivante : une série S est dans cette famille si les pôles de la fraction rationnelle associée à S engendrent un groupe (multiplicatif) abélien libre et si de plus, lorsque la caractéristique est non nulle, S est semi-simple (en d'autres termes, si ses pôles sont simples). Les techniques employées ici suggèrent que cette famille joue un rôle particulier dans l'étude des coefficients des séries rationnelles. Il découle en effet de ce qui précède que toute série rationnelle est égale à un emboîtement de telles séries. En fait, J. P. Bezivin a montré qu'on peut (en caractéristique nulle) se ramener au cas où le polynôme exponentiel est lui-même un polynôme en n et en les λ_i (et où ils sont multiplicativement indépendants). Par ailleurs il obtient d'autres résultats sur la structure multiplicative de l'algèbre de Hadamard (communication personnelle).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (B.). — Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math France*, vol. 98, 1970, p. 209-252.

[2] BERSTEL (J.). — Sur les pôles et le quotient de Hadamard de séries N-rationnelles, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 272, série A, 1971, p. 1079-1081.

[3] PISOT (C.). — Conférences données à l'Institut Fourier de Grenoble, 1959.

[4] PÓLYA (G.). — Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwichlungen rationaler Funktionen, *Crelle J. Reine Angewandte Math.*, vol. 151, 1921, p. 1-31.

[5] POURCHET (Y.). — Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 288, série A, 1979, p. 1055-1057.

[6] LECH (C.). — A note on recurring series, *Ark. Math.*, vol. 2, 1952, p. 417-421.