

## Schnelle Multiplikation großer Zahlen

Von

A. Schönhage, Konstanz  
und

V. Strassen, Zürich<sup>1</sup>

(Eingegangen am 8. Juli 1970)

### Zusammenfassung — Summary

**Schnelle Multiplikation großer Zahlen.** Es wird ein Algorithmus zur Berechnung des Produktes von zwei  $N$ -stelligen Dualzahlen angegeben. Zwei Arten der Realisierung werden betrachtet: Turingmaschinen mit mehreren Bändern und logische Netze (aus zweistelligen logischen Elementen aufgebaut).

**Fast Multiplication of Large Numbers.** An algorithm is given for computing the product of two  $N$ -digit binary numbers by  $O(N \lg N \lg \lg N)$  steps. Two ways of implementing the algorithm are considered: multitape Turing machines and logical nets (with step = binary logical element.)

### 1. Einleitung

Die Schulmethode zur Multiplikation zweier Dezimalzahlen läßt sich ohne weiteres für die Multiplikation  $N$ -stelliger Dualzahlen auf einer Turingmaschine mit mehreren Bändern oder in einem (aus zweistelligen logischen Elementen aufgebauten) logischen Netz verwenden. In beiden Fällen ergibt sich ein Aufwand der Größenordnung  $N^2$ . Dabei verstehen wir unter dem Aufwand eines Netzes die Anzahl seiner Elemente.

Bei einer Turingmaschine, die die Multiplikation von Zahlen beliebiger Länge leistet, definiert man den Aufwand der Multiplikation  $N$ -stelliger Zahlen als das Maximum der Anzahl der Bewegungen der Köpfe, gebildet über alle Inputzahlenpaare der Länge  $N$ .

Die herrschende und intuitiv einleuchtende Auffassung, daß sich der bei der Schulmethode erforderliche Aufwand nicht wesentlich verkleinern läßt, wurde 1962 von A. KARACUBA [4] durch Konstruktion eines Netzes mit

$$O(N^{2 \lg 3})$$

Elementen widerlegt ( $2 \lg 3 \approx 1,58$ ). Die Methode überträgt sich ohne Schwierigkeiten auf Turingmaschinen.

---

<sup>1</sup> Part of the research of the second author was done at the Department of Statistics, University of California, Berkeley. He wishes to thank the National Science Foundation for their support (NSF GP-7454).

Eine weitere Überraschung enthielt die im folgenden Jahr erschienene Note von TOOM [7], in der ein Netz zur Multiplikation  $N$ -stelliger Dualzahlen mit

$$O(N 2^{\text{const} \sqrt{\lg N}})$$

logischen Elementen angegeben wurde.

Unabhängig von TOOM und mit einer ganz anderen Methode zeigte SCHÖNHAGE [6] 1966, daß sich  $N$ -stellige Zahlen auf einer Turingmaschine mit einem Aufwand von

$$O(N 2^{\sqrt{2 \lg N}} (\lg N)^{3/2})$$

multiplizieren lassen.

In der Folge wurde auch der TOOMSche Algorithmus auf Turingmaschinen übertragen (COOK [1]), und zwar mit einem zu

$$O(N 2^{\sqrt{2 \lg N}} \lg N)$$

verschärften Aufwand (COOK [1] und KNUTH [5], Seite 273). Die wesentlich verschiedenen Methoden von TOOM und SCHÖNHAGE liefern also praktisch den gleichen Aufwand, was zu Spekulationen über dessen ungefähre Optimalität geführt hat.

Dem interessierten Leser sei das 4. Kapitel von KNUTHs brillanter Ein-Mann-Enzyklopädie „The Art of Computer Programming“ empfohlen, in dem die hier nur aufgezählten Ergebnisse ausführlich dargestellt und bewiesen werden.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Verfahren zur Multiplikation  $N$ -stelliger Dualzahlen angegeben, die sich mit logischen Netzen ebenso wie mit Turingmaschinen realisieren lassen. Der Aufwand des einen ist

$$O(N \lg N (\lg \lg N)^{1+\epsilon}),$$

der des andern

$$O(N \lg N \lg \lg N).$$

Beide Verfahren verwenden die schnelle FOURIERtransformation (COOLEY und TUKEY [3]; unabhängig von uns hat auch D. KNUTH die Idee gehabt, die schnelle FOURIERtransformation bei der Multiplikation großer Zahlen auszunutzen). Ihre Verwendung wird dadurch nahegelegt, daß die Multiplikation zweier Zahlen bis auf das Ausführen der Überträge eine Konvolution ist. Spaltet man also die beiden zu multiplizierenden Dualzahlen in Stücke geeigneter Länge auf und interpretiert diese Stücke als Elemente eines Rings  $R$ , der die (eigentlich im Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen zu vollziehenden) Rechnungen mit den Stücken treu wiederzugeben gestattet und außerdem die nötigen Einheitswurzeln enthält, so kann man die gewünschte „große“ Multiplikation zerlegen in die FOURIERtransformation der beiden Stückfolgen, komponentenweise Multiplikation der transformierten Folgen, Rücktransformation und Ausführen der Überträge. Die dabei auftretenden „kleinen“ Multiplikationen werden analog behandelt. Es entsteht so eine rekursive Schachtelung von Routinen der gerade beschriebenen Art.

Bei unserem ersten Verfahren ist  $R = \mathbb{C}$  der Körper der komplexen Zahlen, die Stücklänge ist  $\approx \lg N$ , und man erhält den Aufwand  $O(N \lg N (\lg \lg N)^{1+\epsilon})$  schon, wenn man dreimal schachtelt.

Bei unserem zweiten Verfahren verwenden wir für  $R$  den Restklassenring  $\mathbb{Z}_{F_n}$  von  $\mathbb{Z}$  nach einer FERMATZahl  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , eine Stücklänge von  $\approx \sqrt[n]{N}$ , und wir schachteln ungefähr  $\lg \lg N$ -mal. Der entscheidende Vorteil der FERMATZahlen  $F_n$  besteht darin, daß 2 eine primitive  $2^{n+1}$ -te Einheitswurzel mod  $F_n$  ist, deren Potenzreste extrem einfache Dualdarstellungen besitzen, so daß das Multiplizieren mit diesen Einheitswurzeln nicht ins Gewicht fällt.

Die Realisierung des zweiten Verfahrens durch ein logisches Netz kann so geschehen, daß die Tiefe des Netzes (die den Zeitaufwand bestimmt)  $O(\lg N)$  ist. Wir führen das allerdings nicht genauer aus. Die Größenordnung  $\lg N$  für die Tiefe ist natürlich die bestmögliche.

Wir glauben nicht, daß die Größenordnung  $N \lg N \lg \lg N$  für den Aufwand optimal ist, sondern vermuten dies für die Größenordnung  $N \lg N$  (vgl. hierzu das tiefliegende Resultat von COOK und ANDERAA [2]; leider ist die on-line Einschränkung für logische Netze unannehmbar und für die Berechnung auf Turingmaschinen jedenfalls zu streng, da z. B. außer der Schulmethode keines der erwähnten Verfahren on-line verläuft).

Im nächsten Abschnitt bringen wir die schnelle FOURIERtransformation in der Form, wie wir sie später brauchen. Im dritten Abschnitt skizzieren wir das einfachere mit  $R = \mathbb{C}$  arbeitende Verfahren und im vierten Abschnitt schließlich besprechen wir ausführlich das Verfahren mit  $R = \mathbb{Z}_{F_n}$ .

## 2. Schnelle Fouriertransformation

$R$  sei kommutativer Ring mit 1,  $w_n \in R$  sei  $2^n$ -te Einheitswurzel mit  $w_n^{2^{n-1}} = -1$ , und  $2 = 1 + 1$  sei Einheit in  $R$ .

Dann läßt sich die Transformation

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j w_n^{jk} \quad (0 \leq k < 2^n), \quad (2.1)$$

die jedem Vektor  $a \in R^{2^n}$  die FOURIERtransformierte  $\hat{a}$  zuordnet, nach folgendem Schema in Einzelschritten auflösen.

Für  $k$  und  $j$  werden die Dualdarstellungen

$$k = \sum_{v=0}^{n-1} k_v 2^v, \quad j = \sum_{v=0}^{n-1} j_v 2^{n-1-v} \quad (k_v, j_v = 0 \text{ oder } = 1) \quad (2.2)$$

benutzt. Ausgehend von

$$A_0(j_0, \dots, j_{n-1}) = a_j \quad (0 \leq j < 2^n) \quad (2.3)$$

definiert man  $A_1, \dots, A_n$  rekursiv durch

$$\begin{aligned}
 & A_{v+1}(k_0, \dots, k_v, j_{v+1}, \dots, j_{n-1}) = \\
 & = \sum_{j_v=0}^1 A_v(k_0, \dots, k_{v-1}, j_v, \dots, j_{n-1}) w_n^{j_v 2^{n-1-v} (k_v 2^v + \dots + k_0 2^0)} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung von  $w_n^{2^{n-1}} = -1$  ausführlicher

$$\left. \begin{aligned}
 & A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) = \\
 & = A_v(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) + A_v(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots) w_n^{\kappa}, \\
 & A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots) = \\
 & = A_v(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) - A_v(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots) w_n^{\kappa}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

mit  $\kappa = 2^{n-1-v} (k_{v-1} 2^{v-1} + \dots + k_0 2^0)$ .

Aus (2.3) und (2.4) erhält man bei Beachtung von

$$w_n^{(j_0 2^{n-1} + \dots + j_{v-1} 2^{n-v}) k_v 2^v} = 1$$

mittels Induktion die geschlossene Darstellung

$$\begin{aligned}
 & A_{v+1}(k_0, \dots, k_v, j_{v+1}, \dots, j_{n-1}) = \\
 & = \sum_{j_v=0}^1 \dots \sum_{j_0=0}^1 a_j w_n^{(j_0 2^{n-1} + \dots + j_v 2^{n-1-v}) (k_v 2^v + \dots + k_0 2^0)}.
 \end{aligned}$$

Gemäß (2.1) und (2.2) folgt so insbesondere

$$A_n(k_0, \dots, k_{n-1}) = \hat{a}_k. \quad (2.6)$$

Für die Umkehrtransformation  $\hat{a} \mapsto a$  ergibt sich durch Auflösung von (2.5) die Vorschrift

$$\left. \begin{aligned}
 & A_v(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) = \\
 & = 2^{-1} (A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) + A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots)), \\
 & A_v(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots) = \\
 & = 2^{-1} \cdot w_n^{-\kappa} (A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 0, j_{v+1}, \dots) - A_{v+1}(\dots, k_{v-1}, 1, j_{v+1}, \dots))
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

mit  $\kappa = 2^{n-1-v} (k_{v-1} 2^{v-1} + \dots + k_0 2^0)$ .

An späterer Stelle ist noch folgender Umstand wesentlich:

Nach (2.3), (2.4) gilt speziell für  $0 \leq j < 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 A_1(1, j_1, \dots, j_{n-1}) &= A_0(0, j_1, \dots, j_{n-1}) - A_0(1, j_1, \dots, j_{n-1}) = \\
 &= a_j - a_{j+2^{n-1}}, \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

und die weiteren Schritte der auf  $k_0 = 1$  eingeschränkten Rekursion (2.5) führen von diesen Differenzen zu den  $\hat{a}_k$  mit ungeradem  $k$ ; entsprechend lassen sich die Differenzen (2.8) mittels (2.7) (eingeschränkt auf  $k_0 = 1$ ) allein aus den  $2^{n-1}$  vielen  $\hat{a}_k$  mit ungeradem  $k$  zurückgewinnen.

### 3. Multiplikation mit Hilfe komplexer Zahlen

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Methode zur Konstruktion schneller Multiplikationsverfahren, bei der die schnelle FOURIERtransformation im Ring  $R = \mathbb{C}$  der komplexen Zahlen benutzt wird. Beginnend mit dem elementaren Verfahren  $V_0$  nach der Schulmethode erhalten wir mittels dieser Konstruktion sukzessiv schnellere Verfahren  $V_1, V_2, \dots$ . Unter Voraussetzung von  $V_m$  ist also anzugeben, wie beim Verfahren  $V_{m+1}$  zu ganzen Zahlen  $a \geq 0, b \geq 0$  in  $N$ -stelliger Dualdarstellung das  $2N$ -stellige Produkt  $c = a \cdot b$  berechnet wird.

Ausgehend von natürlichen Zahlen  $l$  und  $n$ , die unter Einhaltung der Bedingung

$$l \cdot 2^n \geq 2N \quad (3.1)$$

später in Abhängigkeit von  $N$  noch geeignet zu wählen sein werden, zerlegt man die Faktoren  $a$  und  $b$  gemäß

$$a = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j 2^{jl}, \quad b = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j 2^{jl} \quad (3.2)$$

mit  $0 \leq a_j < 2^l, 0 \leq b_j < 2^l$  und  $a_j = b_j = 0$  für  $j \geq 2^{n-1}$

in Abschnitte der Länge  $l$ . Dann ergibt sich das Produkt in der Form

$$c = a \cdot b = \sum_{\tau=0}^{2^n-1} c_\tau 2^{\tau l} \quad (3.3)$$

$$\text{mit } c_\tau = \sum_{\varrho + \sigma = \tau} a_\varrho b_\sigma = \sum_{\varrho + \sigma \equiv \tau \pmod{2^n}} a_\varrho b_\sigma,$$

d. h. die  $c_\tau$  entstehen durch Faltung der  $a_\varrho$  mit den  $b_\sigma$ . Die in 2. beschriebene FOURIERtransformation mit  $w_n = e^{2\pi i \cdot 2^{-n}}$  überführt diese Faltung in  $2^n$  viele Multiplikationen, nämlich

$$\hat{a}_k \hat{b}_k = \left( \sum_{\varrho=0}^{2^n-1} a_\varrho w_n^{\varrho k} \right) \left( \sum_{\sigma=0}^{2^n-1} b_\sigma w_n^{\sigma k} \right) = \sum_{\tau=0}^{2^n-1} c_\tau w_n^{\tau k} = \hat{c}_k \quad (0 \leq k < 2^n). \quad (3.4)$$

Damit läßt sich das Verfahren  $V_{m+1}$  in groben Zügen umreißen:

- (3.5) Übergang von den  $a_\varrho$  zu den  $\hat{a}_k$  und entsprechend von den  $b_\sigma$  zu den  $\hat{b}_k$  gemäß (2.5);
- (3.6) Ausführung der  $2^n$  Multiplikationen  $\hat{a}_k \hat{b}_k = \hat{c}_k$ ;
- (3.7) Übergang von den  $\hat{c}_k$  zu den  $c_\tau$  gemäß (2.7);
- (3.8) stellengerechte Addition der  $c_\tau$  gemäß (3.3).

Um diesen Plan finit zu realisieren, ist es erforderlich, die in den Schritten (3.5) bis (3.7) vorkommenden komplexen Zahlen durch hin-

reichend genaue numerische *Näherungswerte* zu ersetzen. Dabei sind die Rundungsfehler so klein zu halten, daß die ganzzahligen  $c_\tau$  bis auf Fehler  $< \frac{1}{2}$  berechnet werden und so durch Rundung exakt bestimmt werden können. Neben den  $A_\nu(\dots)$  aus 2. treten beim Übergang von den  $b_j$  zu den  $\hat{b}_k$  und von den  $\hat{c}_k$  zu den  $c_j$  entsprechende Größen  $B_\nu(\dots)$  und  $C_\nu(\dots)$  auf. Aus  $a_j < 2^l$ ,  $b_j < 2^l$  folgt nach (2.5) und (2.7)

$$|A_\nu(\dots)| < 2^{l+\nu}, |B_\nu(\dots)| < 2^{l+\nu}, |\hat{a}_k| < 2^{l+n}, |\hat{b}_k| < 2^{l+n}, \\ |\hat{c}_k| < 2^{2l+2n}, |C_\nu(\dots)| < 2^{2l+2n}.$$

Damit bei der numerischen Näherung die Rechnung in komplexer Festkommaarithmetik mit einer Stelle vor dem Komma und einer geeigneten Zahl  $s$  von Stellen nach dem Komma ausgeführt werden kann, verwendet man neben  $s$ -stelligen

$$\omega_{n,\kappa} \text{ mit } |\omega_{n,\kappa} - w_n^*| < 2^{-s} \text{ für } |\kappa| < 2^{n-1}$$

skalierte Näherungswerte

$$\alpha_\nu(\dots) \approx 2^{-l-\nu} A_\nu(\dots), \beta_\nu(\dots) \approx 2^{-l-\nu} B_\nu(\dots), \\ \gamma_\nu(\dots) \approx 2^{-2l-2n} C_\nu(\dots).$$

Aus (2.5), (3.6) und (2.7) ist ersichtlich, wie die Berechnung der  $\alpha_\nu$ ,  $\beta_\nu$ ,  $\gamma_\nu$  unter Berücksichtigung dieser Skalierungen zu erfolgen hat. Die dabei auftretenden komplexen Multiplikationen werden durch jeweils 4 Multiplikationen reeller  $s$ -stelliger Zahlen nach dem Verfahren  $V_m$  und zusätzliche Additionen mit Rundung auf  $s$  Stellen nach dem Komma realisiert. Die Abschätzung der Rundungsfehler liefert

$$|2^{2l+2n} \gamma_0(j_0, \dots, j_{n-1}) - c_j| \leq \text{const} \cdot n \cdot 2^{2l+2n-s} < \frac{1}{2},$$

sofern wir

$$s \geq 2l + 2n + \lg n + \text{const} \quad (3.9)$$

wählen.

Nunmehr können wir den Aufwand  $M_{m+1}(N)$  des Verfahrens  $V_{m+1}$  abschätzen, indem wir auf  $M_m(s)$  zurückgreifen und für die Addition  $s$ -stelliger Zahlen die Schranke  $O(s)$  benutzen. Die  $\omega_{n,\kappa}$  können bei Verwendung logischer Netze fest eingebaut werden. Bei Verwendung mehrbändiger Turingmaschinen sind sie vorher zu berechnen. Das ist wegen

$$w_1 = -1, w_2 = i, w_{\nu+1} = \frac{1 + w_\nu}{|1 + w_\nu|} \text{ für } \nu \geq 2, \\ w_{\nu+1}^{2\kappa} = w_\nu^{2\kappa}, w_{\nu+1}^{2\kappa+1} = w_{\nu+1} \cdot w_\nu^{2\kappa}$$

mittels  $O(2^n)$  Operationen wie Addition, Multiplikation, Division, Wurzelziehen möglich, und diese erfordern bei Genauigkeit auf  $s$  Stellen nach elementaren Verfahren höchstens  $O(2^n \cdot s^2)$  Schritte.

Die Schritte (3.5) und (3.7) verursachen in der zuvor beschriebenen Realisierung einen Aufwand  $O(2^n \cdot n(M_m(s) + s))$ , (3.6) kostet

$O(2^n (M_m(s) + s))$  und (3.8) schließlich noch  $O(2^n (2l + n))$ . So folgt

$$M_{m+1}(N) = O(2^n (s^2 + n M_m(s) + n s + 2l + n))$$

und bei Wahl von möglichst kleinem  $s$  unter der Bedingung (3.9)

$$M_{m+1}(N) = O(2^n ((l + n)^2 + n M_m(3(l + n)))). \quad (3.10)$$

Für die Schulmethode  $V_0$  gilt  $M_0(s) = O(s^2)$ , also

$$M_1(N) = O(2^n \cdot n (l + n)^2).$$

Wählen wir unter Einhaltung von (3.1)

$$l = \lceil \lg N \rceil, \quad n = \left\lceil \lg \left( \frac{2N}{l} \right) \right\rceil,$$

dann erhalten wir für das Verfahren  $V_1$  den Aufwand

$$M_1(N) = O(N (\lg N)^2). \quad (3.11)$$

Jetzt benutzen wir dieses Ergebnis in (3.10) für  $m = 1$ ; das führt bei gleicher Wahl von  $l$  und  $n$  zu

$$M_2(N) = O(N \lg N (\lg \lg N)^2).$$

So weiterschließend gelangt man zu

$$M_3(N) = O(N \lg N \lg \lg N (\lg \lg \lg N)^2)$$

usw. Wir verzichten darauf, den Schachtelungsgrad  $m$  in Abhängigkeit von  $N$  zu wählen, weil wir ohnehin im nächsten Abschnitt ein noch etwas schnelleres Verfahren beschreiben.

#### 4. Verwendung von Fermatzahlen

Statt der komplexen Zahlen benutzen wir jetzt die Restklassenringe  $\mathbf{Z}_{F_n}$  zu den FERMATZahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Weil die Multiplikation  $N$ -stelliger Dualzahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  ( $a, b \geq 0$ ) ohne Verfälschung auch als Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  aufgefaßt werden kann, sofern

$$2N \leq 2^n \quad (4.1)$$

gilt und damit  $c = ab$  durch

$$c \equiv ab \pmod{F_n} \text{ und } 0 \leq c < F_n \quad (4.2)$$

eindeutig bestimmt ist, können wir uns im weiteren auf die Betrachtung der Multiplikation in diesen Restklassenringen beschränken.

Die Elemente von  $\mathbf{Z}_{F_n}$  werden zweckmäßigerweise durch Dualzahlen der festen Länge  $2^{n+1}$ , d. h. durch ganze Zahlen  $x$  der Form

$$x = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} x_j 2^j \quad (x_j = 0 \text{ oder } = 1) \quad (4.3)$$

repräsentiert. Diese Art der Darstellung ist zwar nicht eindeutig; sie besitzt aber andere Vorteile, die auf der Kongruenz

$$2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{F_n} \quad (4.4)$$

beruhen.

Wegen  $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_n}$  erfüllt  $R = \mathbf{Z}_{F_n}$  die Voraussetzungen in 2., hier mit  $n+1$  statt  $n$  und  $w_{n+1} = 2$  bzw. mit  $w_n = 4$ . Die bei FOURIERtransformation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  notwendigen Multiplikationen mit  $w_{n+1}^\kappa = 2^\kappa$  lassen sich wegen (4.4) einfach durch zyklischen Schift um  $\kappa$  Stellen realisieren:

$$2^\kappa \cdot x = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} x_j \cdot 2^{j+\kappa} \equiv \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} y_k 2^k \pmod{F_n}$$

$$\text{mit } x_j = y_k \text{ für } j + \kappa \equiv k \pmod{2^{n+1}}.$$

Die Addition mod  $F_n$  von Zahlen der Form (4.3) erfolgt ebenfalls zyklisch, d. h. ein Überlauf  $2^{2^{n+1}}$  ist als  $+1$  in der 0-ten Stelle zu berücksichtigen. Die Subtraktion kann wegen  $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_n}$  durch zyklischen Schift des Subtrahenden um  $2^n$  Stellen auf die Addition zurückgeführt werden. Diese Operationen erfordern jeweils höchstens einen Aufwand  $O(2^n)$ . Außerdem benötigen wir im weiteren noch die Lösung der folgenden Teilaufgaben: Die Reduktion von

$$x = u + v \cdot 2^{2^n}, \quad 0 \leq u < 2^{2^n}, \quad 0 \leq v < 2^{2^n} \quad (4.5)$$

auf die Darstellung durch minimalen nicht negativen Rest

$$\xi \equiv x \pmod{F_n}, \quad 0 \leq \xi \leq 2^{2^n}$$

wird nach der Vorschrift

$$\xi := \begin{cases} u - v, & \text{falls } v \leq u, \\ 2^{2^n} + 1 + u - v, & \text{falls } v > u \end{cases} \quad (4.6)$$

mit Aufwand  $O(2^n)$  realisiert.

Die Aufgabe, bei vorgegebenem  $\xi$  und  $\eta$  die durch

$$\begin{cases} z \equiv \xi \pmod{F_n}, & 0 \leq \xi \leq 2^{2^n}, \\ z \equiv \eta \pmod{2^{n+2}}, & 0 \leq \eta < 2^{n+2}, \\ 0 \leq z < 2^{n+2} F_n \end{cases} \quad (4.7)$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl  $z$  zu berechnen, läßt sich ebenfalls mit Aufwand  $O(2^n)$  lösen, indem zuerst

$$\delta \equiv \eta - \xi \pmod{2^{n+2}} \text{ mit } 0 \leq \delta < 2^{n+2}$$

und dann

$$z = \xi + \delta (2^{2^n} + 1)$$

berechnet wird.



Nach diesen Vorbereitungen beschreiben wir jetzt eine Methode, die Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_m}$  auf Multiplikationen in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  zurückzuführen, wobei die Fälle

$$m = 2n - 1 \quad \text{oder} \quad m = 2n - 2 \quad (4.8)$$

zu unterscheiden sind. Damit  $n < m$  gilt, sei  $m \geq 3$ .

Zuerst behandeln wir den Fall  $m = 2n - 1$ .

Die zu multiplizierenden Elemente aus  $\mathbf{Z}_{F_m}$  sind in der Form (4.3) als  $2^{m+1}$ -stellige Zahlen  $a$  und  $b$  gegeben. Bei Zerlegung

$$a = \sum_{\varrho=0}^{2^{n+1}-1} a_{\varrho} 2^{\varrho \cdot 2^{n-1}}, \quad b = \sum_{\sigma=0}^{2^{n+1}-1} b_{\sigma} 2^{\sigma \cdot 2^{n-1}}, \quad 0 \leq a_{\varrho}, b_{\sigma} < 2^{2^{n-1}} \quad (4.9)$$

in jeweils  $2^{n+1}$  viele Abschnitte der Länge  $2^{n-1}$  ergibt sich das Produkt in der Form

$$ab \equiv \sum_{\tau=0}^{2^{n+1}-1} c_{\tau} 2^{\tau 2^{n-1}} \pmod{F_m}$$

mit

$$c_{\tau} = \sum_{\substack{\varrho + \sigma \equiv \tau \pmod{2^{n+1}} \\ 0 \leq \varrho, \sigma < 2^{n+1}}} a_{\varrho} b_{\sigma} < 2^{n+1+2^n}. \quad (4.10)$$

Wegen

$$2^{2^n} \cdot 2^{n-1} = 2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_m}$$

gilt aber auch

$$ab \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} (c_j - c_{j+2^n} + 2^{n+1+2^n}) 2^j \cdot 2^{n-1} + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} 2^{n+1+2^n} \cdot 2^j \cdot 2^{n-1} \pmod{F_m},$$

mit

$$z_j = \begin{cases} c_j - c_{j+2^n} + 2^{n+1+2^n} & \text{für } 0 \leq j < 2^n \\ 2^{n+1+2^n} & \text{für } 2^n \leq j < 2^{n+1} \end{cases} \quad (4.11)$$

also

$$ab \equiv \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} z_j 2^j \cdot 2^{n-1} \pmod{F_m}. \quad (4.12)$$

Der Summand  $2^{n+1+2^n}$  wurde im Hinblick auf (4.10) hinzugefügt, so daß  $0 \leq z_j < 2^{n+2} F_n$  gilt.

Weil  $2^{n+2}$  und  $F_n$  teilerfremd sind, genügt es, die  $z_j \pmod{2^{n+2}}$  und  $\pmod{F_n}$  zu berechnen. Die Berechnung der  $z_j \pmod{2^{n+2}}$  gelingt auf einfache Weise durch folgenden Kunstgriff: Mit den durch

$$\alpha_j \equiv a_j, \quad \beta_j \equiv b_j \pmod{2^{n+2}}, \quad 0 \leq \alpha_j, \beta_j < 2^{n+2}$$

bestimmten  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  bildet man die Zahlen

$$u = \sum_{\varrho=0}^{2^n+1-1} \alpha_{\varrho} 2^{\varrho(3n+5)}, \quad v = \sum_{\sigma=0}^{2^n+1-1} \beta_{\sigma} 2^{\sigma(3n+5)}, \quad (4.13)$$

$$u, v < 2^{2^n+1(3n+5)}.$$

Deren Produkt enthält als disjunkte Teilstücke der Länge  $3n+5$  die Summen

$$\gamma_{\tau} = \sum_{\varrho+\sigma=\tau} \alpha_{\varrho} \beta_{\sigma} < 2^{n+1} \cdot (2^{n+2})^2, \quad 0 \leq \tau < 2^{n+2}.$$

Nach (4.10) gilt für  $0 \leq \tau < 2^{n+1}$

$$c_{\tau} \equiv \gamma_{\tau} + \gamma_{\tau+2^{n+1}} \pmod{2^{n+2}},$$

nach (4.11) also

$$z_j \equiv \eta_j \pmod{2^{n+2}} \quad \text{für } 0 \leq j < 2^n, \quad (4.14)$$

wobei

$$\eta_j \equiv \gamma_j - \gamma_{j+2^n} + \gamma_{j+2} \cdot 2^n - \gamma_{j+3} \cdot 2^n \pmod{2^{n+2}} \quad \text{und } 0 \leq \eta_j < 2^{n+2}.$$

Die Berechnung der  $\eta_j$  kostet so höchstens den Aufwand  $O(2^{2n})$  und eine Multiplikation  $u \cdot v$  von Zahlen der Länge  $\leq 2^{n+1}(3n+5)$ , deren Aufwand nach (3.11) durch

$$M_1(2^{n+1}(3n+5)) = O(2^n \cdot n^3) \leq O(2^{2n})$$

abgeschätzt werden kann. (Wir haben hier (3.11) nur aus Gründen der Bequemlichkeit benutzt; es würde an dieser Stelle auch jede Schranke  $O(N^{2-\epsilon})$  ausreichen, z. B. die von KARACUBA, siehe KNUTH [5], Seite 258–259).

Die Berechnung der  $z_j \bmod F_n$  führen wir mit der FOURIERTRANSFORMATION in  $\mathbf{Z}_{F_n}$ , wobei  $w_{n+1} = 2$  benutzt wird, auf Multiplikationen in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  zurück, indem wir wie in den Schritten (3.5) bis (3.7) vorgehen. Wichtig ist jedoch, daß jetzt statt der  $c_j$  im Hinblick auf (4.11) nur die  $2^n$  vielen Differenzen  $c_j - c_{j+2^n} \pmod{F_n}$  berechnet werden müssen. In Analogie zu (2.8) sind das die  $2^{n+1}$ -stelligen

$$C_1(1, j_1, \dots, j_n) \equiv c_j - c_{j+2^n} \pmod{F_n} \quad \text{mit } j = j_1 \cdot 2^{n-1} + \dots + j_n \cdot 2^0,$$

und nach den Bemerkungen am Schluß von 2. sind für deren Berechnung im Unterschied zu (3.6) nur die  $2^n$  Multiplikationen

$$\hat{a}_k \hat{b}_k \equiv \hat{c}_k \pmod{F_n} \quad \text{für ungerades } k < 2^{n+1}$$

erforderlich. Die FOURIERTRANSFORMATIONEN in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  benötigen  $O(n \cdot 2^n)$  Schritte jeweils vom Aufwand  $O(2^n)$  und kosten so  $O(n \cdot 2^{2n})$ . Addition von  $2^{n+1+2n}$  und Reduktion mod  $F_n$  gemäß (4.6) liefert mit einem Aufwand  $O(2^{2n})$  für  $0 \leq j < 2^n$  die Reste

$$\xi_j \equiv C_1(1, j_1, \dots, j_n) + 2^{n+1+2n} \equiv z_j \pmod{F_n}, \quad 0 \leq \xi_j \leq 2^{2n}.$$

Zusammen mit (4.14) hat man so Kongruenzen der Form (4.7), aus denen sich die  $2^n$  vielen  $z_j$  ( $j < 2^n$ ) mit einem Aufwand  $O(2^{2n})$  berechnen lassen. Schließlich erfordert die stellengerechte Addition der  $z_j$  in (4.12) nochmals den Aufwand  $O(2^{2n})$ .

Insgesamt haben wir gezeigt, daß sich die Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_{2n-1}}$  mit  $2^n$  Multiplikationen in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  und zusätzlichem Aufwand  $O(n \cdot 2^{2n})$  realisieren läßt.

Der gerade Fall  $m = 2n - 2$  läßt sich analog behandeln: Die Faktoren  $a$  und  $b$  werden in  $2^n$  Abschnitte der Länge  $2^{n-1}$  zerlegt. Deren Faltung wird durch FOURIERtransformation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  — jetzt mit  $w_n = 4$  — auf Multiplikationen in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  zurückgeführt. Wieder benötigt man nur die Multiplikationen für ungerades  $k$ , und das sind in diesem Falle  $2^{n-1}$  Stück.

Deshalb läßt sich die Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_{2n-2}}$  mit  $2^{n-1}$  Multiplikationen in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  und zusätzlichem Aufwand  $O(n \cdot 2^{2n})$  realisieren.

Jetzt wollen wir den Aufwand unseres Verfahrens in geschlossener Form abschätzen. Bezeichnet  $M(n)$  die Mindestgröße logischer Netze für die Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  (bei Verwendung der Darstellung (4.3)), dann gilt nach dem Vorangehenden mit hinreichend großem  $\gamma_0$

$$\begin{cases} M(2n-2) \leq 2^{n-1} M(n) + \gamma_0 (n-1) 2^{2n-1} \\ M(2n-1) \leq 2^n M(n) + \gamma_0 (n-1) 2^{2n} \end{cases} \quad \text{für } n \geq 3. \quad (4.15)$$

Andererseits lassen sich diese Ungleichungen aber auch ebenso als Zeitabschätzung einer geeignet organisierten mehrbändigen Turingmaschine interpretieren, die nach der zuvor beschriebenen Methode rekursiv arbeitet, sofern  $M(n)$  die von ihr maximal benötigte Schrittzahl für Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  bezeichnet.

Mit

$$\gamma = \max \{M(1), M(2), M(3), \gamma_0\}$$

ergibt sich nach (4.15) durch Induktion über  $k$

$$M(n) \leq \gamma k \cdot 2^{k+n} \quad \text{für } n \leq 2^k + 1,$$

also

$$M(n) = O(2^n n \lg n).$$

Bei Anwendung auf die Multiplikation  $N$ -stelliger Dualzahlen wählen wir unter Einhaltung von (4.1)

$$n = \lceil 2 \lg(2N) \rceil.$$

Die im Hinblick auf (4.2) nach der Multiplikation in  $\mathbf{Z}_{F_n}$  notwendige Reduktion mod  $F_n$  kostet nach (4.6) nur  $O(2^n) = O(N)$ . Die Multiplikation  $N$ -stelliger Zahlen läßt sich also mit einem Aufwand

$$O(N \lg N \lg \lg N)$$

bewerkstelligen.

## Literatur

- [1] COOK, S. A.: On the Minimum Computation Time of Functions. Dissertation, Harvard Universität (1966).
- [2] COOK, S. A., and S. O. AANDERAA: On the Minimum Computation Time of Functions. Trans. AMS **142**, 291—314 (1969).
- [3] COOLEY, J. W., and J. W. TUKEY: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex FOURIER Series. Math. Comp. **19**, 297—301 (1965).
- [4] KARACUBA, A., (und J. OFMAN): Multiplikation vielstelliger Zahlen mit Rechenautomaten (russisch). Dokl. Akad. Nauk SSSR **145**, 293—294 (1962).
- [5] KNUTH, D. E.: The Art of Computer Programming. Vol. 2: Seminumerical Algorithms, Chapter 4: Arithmetic. Addison-Wesley. 1969.
- [6] SCHÖNHAGE, A.: Multiplikation großer Zahlen. Computing **1**, 182—196 (1966).
- [7] TOOM, A. L.: Die Komplexität eines logischen Netzes, das die Multiplikation ganzer Zahlen realisiert. Dokl. Akad. Nauk SSSR **150**, 496—498 (1963).

*Doz. Dr. A. Schönhage*  
*Universität Konstanz*  
*Fachbereich Mathematik*  
*Postfach 733, BRD-775 Konstanz*  
*Deutschland*

*V. Strassen*  
*Universität Zürich*  
*Seminar für Angewandte Mathematik*  
*Freiestraße 36, CH-8000 Zürich*  
*Schweiz*