Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Gilles Christol

Diagonales de fractions rationnelles et équations de Picard-Fuchs

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 13, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 13, 12 p.
25 février 1985

DIAGONALES DE FRACTIONS RATIONNELLES ET ÉQUATIONS DE PICARD-FUCHS

par Gilles CHRISTOL (*)

Introduites à l'origine pour étudier le produit de Hadamard de deux séries entières ([2] et [16]), les diagonales de fractions rationnelles interviennent naturellement dans plusieurs domaines. Il en est ainsi en analyse combinatoire où de nombreuses fonctions génératrices s'obtiennent comme diagonale d'une fraction rationnelle. Mais il semble que ce soit dans les travaux d'APÉRY sur $\zeta(3)$ et dans les nombreuses recherches qui ont suivi ([17], [1], [23] ...) que leur emploi soit le plus prometteur. Ici nous voulons expliquer ce dernier point, et montrer pourquoi la notion de diagonale de fraction rationnelle, qui généralise celle de fonction algébrique, est particulièrement adaptée aux équations différentielles linéaires à coefficients polynômes.

1. Définitions et propriétés.

1.1. - Dans ce paragraphe k est un anneau local intègre d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. Nous définissons une application Δ_μ de $k((x_0, \ldots, x_\mu))$ dans $k((\lambda))$ en posant

$$\Delta_\mu(\sum a_{n_0,\ldots,n_\mu} x_0^{n_0} \ldots x_\mu^{n_\mu}) = \sum a_{n,\ldots,n} \lambda^n , \tag{1.1.1}$$

et nous nous intéressons aux diagonales de fractions rationnelles à $\mu + 1$ variables c'est-à-dire aux éléments de l'ensemble

$$R_\mu = \Delta_\mu(k[x]_{\mu,(x)}) \tag{1.1.2}$$

où $k[x]_{\mu,(x)} = \{P/Q ; P , Q \in k[x_0, \ldots, x_\mu] \text{ et } Q(0, \ldots, 0) \in k^*\}$ désigne le localisé de l'anneau $k[x_0, \ldots, x_\mu]$ en l'idéal maximal $(\mathfrak{M}, x_0, \ldots, x_\mu)$, c'est-à-dire aussi l'ensemble des fractions rationnelles qui sont développables en séries entières dans $k[x_0, \ldots, x_\mu]$.

Pour cela, nous aurons aussi à considérer l'ensemble des diagonales de fonctions algébriques à $\mu + 1$ variables

$$A_\mu = \Delta_\mu(k\{x\}_\mu) , \tag{1.1.3}$$

où $k\{x\}_\mu$ désigne l'ensemble des séries de $k[[x_0, \ldots, x_\mu]]$ qui sont algébriques sur l'anneau $k[x_0, \ldots, x_\mu]$. Dans le cas où k est un corps, $k\{x\}_\mu$ est aussi le localisé en $(x_0, \ldots, x_\mu)$ de la clôture intégrale de l'anneau $k[x_0, \ldots, x_\mu]$ dans l'anneau $k[[x_0, \ldots, x_\mu]]$.

(*) Gilles CHRISTOL, 5 allée des Gradins, 91350 GRIGNY.

D'après RAYNAUD [22], c'est donc l'henselisé de l'anneau $k[x_0 , \dots , x_\mu]$ en l'idéal $(x_0 , \dots , x_\mu)$. Cette construction se généralise au cas où l'anneau k est excellent (voir 1.2.5).

Remarque. - Les éléments de $R_0 = k[\lambda]_{(\lambda)}$ et de $A_0 = k\{\lambda\}$ sont respectivement les fractions rationnelles et les fonctions algébriques développables en séries de Taylor près de l'origine, c'est-à-dire celles pour lesquelles 0 n'est ni un pôle ni un point de ramification.

(1.2) Nous donnons maintenant, en respectant l'ordre chronologique, les principales inclusions entre les ensembles que nous venons de définir.

(1.2.1) Les inclusions $A_\mu \supset R_\mu$; $R_\mu \supset R_\nu$ et $A_\mu \supset A_\nu$ si $\mu \geqslant \nu$ sont évidentes.

(1.2.2) Si k est un corps parfait de caractéristique non nulle, alors, pour tout $\mu \geqslant 1$, on a $R_\mu = A_0$ [16].

(1.2.3) Si k est un corps **de caractéristique** nulle , **on a encore** $R_1 = A_0$, mais $R_\mu \neq A_0$ pour $\mu \geqslant 2$ ([3], [15]).

(1.2.4) Si k est un corps de caractéristique non nulle, alors, pour tout μ on a $A_\mu = A_0$ ([8] où une méthode géométrique est utilisée, mais aussi (1.2.5) + (1.2.2) pour une démonstration purement algébrique).

(1.2.5) Si k est un anneau local excellent, alors $A_\mu \subset R_{2\mu+1}$ [10].

(1.2.6) Si k est l'anneau des entiers d'un corps ultramétrique d'inégales caractéristiques, alors R_μ et A_0 ont même complété pour la norme ([4], [7])

$$\|\Sigma\, a_n \lambda^n\| = \sup |a_n| \ .$$

2. Lien avec la cohomologie de De Rham.

Dans ce paragraphe, k est un corps de caractéristique nulle, et Q est un polynôme de l'anneau $k[x_0 , \dots , x_\mu]$ tel que $Q(0 , \dots , 0) \neq 0$. Nous noterons X le $k(\lambda)$-schéma affine $\{\operatorname{spec} k(\lambda)[x_0 , \dots , x_\mu]/(x_0 \dots x_\mu - \lambda)\}$, et Z le fermé de X défini par l'équation $Q(x_0 , \dots , x_\mu) = 0$.

PROPOSITION 2.1. - La formule

$$\text{(2.1.1)} \qquad I\Big(\frac{P}{Q^r}\,\frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu}\Big) = \Delta_\mu(P/Q^r) \ ,$$

où P est un polynôme de $k[x_0 , \dots , x_\mu , 1/x_0 \dots x_\mu]$, et où r est un entier (positif), définit une application $k(\lambda)$-linéaire I de l'espace de cohomologie de De Rham $H^\mu(X - Z)$ dans $k((\lambda))$. Si on fait agir la dérivation $(d/d\lambda)$ sur H^μ à l'aide de la connexion de Gauss-Manin, cette application est horizontale (c'est-à-dire qu'elle commute avec la dérivation $d/d\lambda$).

Si $k = \underset{\sim}{C}$, cette proposition est une conséquence immédiate de la formule d'intégration sur le cycle évanescent [8] :

$$\Delta_\mu(P/Q^r) = (2i\pi)^{-\mu} \int_{\substack{|x_1|=\dots=|x_\mu|=\varepsilon \\ x_0\dots x_\mu=\lambda}} \frac{P}{Q^r} \frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu} ,$$

où ε et $|\lambda|$ ont été choisis suffisamment petits pour que Q ne s'annule pas sur ce cycle.

Toutefois une démonstration algébrique directe n'est pas difficile. On part de la formule

$$\Delta_\mu(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\lambda d}{d\lambda} \Delta_\mu(f) ,$$

et on remarque que, dans $\Omega^1_{X/k(\lambda)}$, on a :

$$dx_0/x_0 + \dots + dx_\mu/x_\mu = 0$$

(cette formule montre aussi que le rôle particulier que nous avons fait jouer à x_0 dans la formule (2.1.1) n'est qu'apparent). Il vient alors :

$$I[d(f \frac{dx_2 \dots dx_\mu}{x_2 \dots x_\mu})] = I[(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0}) \frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu}] = 0 .$$

Autrement dit, $I(\omega)$ ne dépend que de la classe de ω modulo les différentielles exactes. Ceci permet de conclure car , $X - Z$ étant affine, on a

$$H^\mu(X - Z) = \Omega^\mu_{X-Z/k(\lambda)}/d(\Omega^{\mu-1}_{X-Z/k(\lambda)}) .$$

Pour montrer que l'application I est horizontale, on calcule dans $H^\mu(X - Z)$, en supposant $x_1 , \dots , x_\mu$ constants, et on obtient :

$$\frac{\lambda d}{d\lambda} f = \frac{\lambda}{x_1 \dots x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{x_0 \partial f}{\partial x_0} ,$$

c'est-à-dire

$$I[\frac{\lambda d}{d\lambda} (f \frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu})] = \Delta_\mu(x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0}) = \frac{\lambda d}{d\lambda} \Delta_\mu(f) = \frac{\lambda d}{d\lambda} I(f \frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu}) .$$

COROLLAIRE 2.2. - <u>Toute diagonale de fraction rationnelle</u> $\Delta_\mu(P/Q)$ <u>est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans</u> $k[\lambda]$.

Soit P/Q une fraction rationnelle de $k[x]_{\mu,(x)}$. D'après le théorème de finitude de Grothendieck ([18], § II.6), on sait que $H^\mu(X - Z)$ est un $k(\lambda)$ espace vectoriel de dimension finie. Donc l'élément

$$\omega = \frac{P}{Q} \, \frac{dx_1 \ldots dx_\mu}{x_1 \ldots x_\mu} \quad \text{de} \quad H^\mu(X - Z)$$

vérifie une relation du type

$$(d/d\lambda)^\nu \, (\omega) = \sum_{i=0}^{\nu-1} a_i \, (d/d\lambda)^i \, (\omega) \quad \text{avec} \quad a_i \in k(\lambda) \; .$$

Le corollaire s'obtient alors en appliquant I à cette égalité.

Remarque.

(2.3.1) Le point crucial de la démonstration est la finitude de l'espace $H^\mu(X - Z)$. Lorsque la variété Z n'a pas de singularité (y compris à l'infini), on peut donner une démonstration élémentaire [5]. Dans le cas général, la démonstration classique repose sur la résolution des singularités. Une méthode alternative due à DWORK [14] consiste à considérer le cas singulier comme une spécialisation d'un cas régulier avec un paramètre supplémentaire. En fait, DWORK travaille avec un "module exponentiel" qui est isomorphe à $H^\mu(X - Z)$ par l'isomorphisme de Katz.

(2.3.2) Il existe des démonstrations élémentaires directes du corollaire 2.2. On les trouvera dans [23], [17] et [21]. Il semble que les deux premières soient incomplètes. Par ailleurs, ces démonstrations ne sauraient donner les propriétés que nous allons exposer dans le paragraphe 2.4.

2.4. - Notons L l'équation différentielle construite dans le corollaire 2.2. D'après la manière même dont cette équation a été obtenue elle vient de la géométrie (voir [13] pour plus de détails sur cette question). Nous allons donner les conséquences de cette situation. Pour simplifier, nous supposerons que $k = \mathbb{Q}$. Pour les définitions relatives aux équations différentielles, nous renvoyons à [6].

(2.4.1) Pour presque tout nombre premier p , l'équation différentielle L possède une structure de Frobenius forte. On trouvera une démonstration complète de ce résultat dans [5] ou dans [14].

(2.4.2) Pour presque tout nombre premier p , le rayon de convergence des solutions de L dans le disque générique vaut 1 . En particulier, si $f = \sum a_n \lambda^n$, $a_n \in \mathbb{Q}$ est solution de L , alors on a, pour presque tout p , $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p^{1/n} = 1$.
Ce résultat est une conséquence immédiate de 2.4.1.

(2.4.3) L'équation différentielle L n'a que des points singuliers réguliers avec exposants rationnels. L'implication (2.4.2) entraîne (2.4.3) est démontrée dans [20]

(2.4.4) Remarque. - Dans le corollaire 2.2, rien ne prouve que l'équation L que nous avons construite soit l'équation différentielle minimum L' satisfaite par $\Delta_\mu(P/Q)$. En général, on aura $L = L'' L'$ avec $L'' \neq 1$. On sait démontrer actuellement, que L' satisfait (2.4.1) uniquement dans le cas $\mu = 1$ ([7], § 7) c'est-à-dire pour les fonctions algébriques, cependant il est facile de démontrer que L' satisfait (2.4.2) et donc aussi (2.4.3).

(2.4.5) Parmi les solutions de L , la diagonale $\Delta_\mu(P/Q) = \sum b_n \lambda^n$ satisfait à une condition très particulière.

Pour presque tout nombre premier p , il existe une constante M_p telle que $|b_n|_p \leq M_p$ (les nombres premiers en question sont ceux pour lesquels on a $|Q(0\ ,\ \dots\ ,\ 0)|_p = 1$. En particulier, on peut prendre $M_p = 1$).

Nous dirons d'une série qui vérifie cette condition qu'elle est bornée pour presque tout p . L'exemple fondamental est celui des séries à coefficients entiers.

3. Passage au complémentaire.

Nous donnons dans ce paragraphe un certain nombre de résultats qui faciliteront l'étude des exemples.

PROPOSITION 3.1 (résidus composés). - *Soit X une variété affine lisse de dimension μ sur un corps K , et soit $Z_i (i = 1\ ,\ \dots\ ,\ s)$ des fermés de X tels que pour $1 \leq k \leq s$, les fermés $\bigcap_{i=1}^k Z_i$ soient lisses de dimension $\mu - k$. On a alors la suite exacte*

$$\bigoplus_{i=1}^s H^\mu(X - \textstyle\bigcup_{j\neq i} Z_j) \longrightarrow H^\mu(X - \bigcup Z_i) \xrightarrow{\mathcal{R}_s} H^{\mu-s}(\bigcap Z_i) \longrightarrow 0 .$$

La démonstration se fait par récurrence sur s . Le cas $s = 1$ est classique [19]. On part de la suite exacte d'un fermé ([18], II, 3.3)

$$H_\mu^{DR}(X) \longrightarrow H_\mu^{DR}(X - Z) \longrightarrow H_{\mu-1}^{DR}(Z) \longrightarrow H_{\mu-1}^{DR}(X) .$$

Les variétés étant toutes lisses, on obtient en fait la suite exacte

$$H^\mu(X) \longrightarrow H^\mu(X - Z) \xrightarrow{\mathcal{R}_1} H^{\mu-1}(Z) \longrightarrow H^{\mu+1}(X) .$$

Enfin, X étant affine de dimension μ , on a $H^{\mu+1}(X) = 0$.

Supposons donc la proposition démontrée pour $s - 1$. Nous posons

$$Y = \bigcup Z_i\ ,\quad Y_i = \textstyle\bigcup_{j\neq i} Z_j\ ,\quad Y_{i,j} = \bigcup_{k\neq i,j} Z_k\ ,\ \dots$$

et nous considérons le fermé lisse $Z_1 - Z_1 \cap Y_{1,i} = Z_1 \cap (X - Y_{1,i})$ dans la variété affine lisse $X - Y_{1,i}$. On a alors les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
H^\mu(X - Y_1) \longrightarrow & H^\mu(X - Y) & \xrightarrow{\mathcal{R}_1'} & H^{\mu-1}(Z_1 - Z_1 \cap Y_1) & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow p_i & & \uparrow p_i & \\
H^\mu(X - Y_{1,i}) \longrightarrow & H^\mu(X - Y_i) & \xrightarrow{\mathcal{R}_1''} & H^{\mu-1}(Z_1 - Z_1 \cap Y_{1,i}) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

analogues à celle du cas $s = 1$. La compatibilité de la suite exacte d'un fermé avec la contravariance de H_{μ}^{DR} pour les immersions ouvertes montre que le diagramme ci-dessus est commutatif.

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence appliquées aux fermés $Z_1 \cap Z_i$ $(i=2,\cdots,s)$ de la variété Z_1 donne la suite exacte

$$\bigoplus_{i=2}^{s} H^{\mu-1}(Z_1 - Z_1 \cap Y_{1,i})^{\oplus} \xrightarrow{p_i} H^{\mu-1}(Z_1 - Z_1 \cap Y_1) \xrightarrow{\mathcal{R}_{s-1}} H^{\mu-s}(\cap Z_i) \longrightarrow 0 .$$

On pose alors $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}'_1$. Il est facile de constater, à l'aide de la commutativité du diagramme donné plus haut, que

$$\ker(\mathcal{R}_s) = \bigoplus_{i=1}^{s} p_i(H^{\mu}(X - Y_i)) .$$

3.2. Remarques.

(3.2.1) Soit D une dérivation du corps K. Alors l'application $\mathcal{R}_s$ de la proposition 3.1 est une application horizontale de $K[D]$-modules. Nous allons considérer dans la suite le cas $K = k(\lambda)$ et $D = d/d\lambda$.

(3.2.2) Supposons choisies des coordonnées $x_1 , \ldots$ et supposons que les fermés Z_i soient définis par des équations $Q_i = 0$. Comme $\bigcap Z_i$ est non singulière, les ouverts

$$\frac{D(Q_1 , \ldots , Q_s)}{D(x_{i_1} , \ldots , x_{i_s})} = J \neq 0$$

forment un recouvrement de cette variété. Sur un tel ouvert on a

$$\mathcal{R}_s(\omega \frac{dx_{i_1} \ldots dx_{i_s}}{Q_1 \ldots Q_s}) = \omega/J ,$$

où ω est une forme différentielle de $\Omega^{\mu-s}_{X/K(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})}$.

Cette formule permet donc de calculer $\mathcal{R}_s$ explicitement.

(3.2.3) Nous reprenons maintenant les notations du paragraphe 2, et nous supposons que le polynôme Q est de la forme $Q_1 \ldots Q_s$ où les polynômes Q_i définissent des fermés Z_i de la variété X qui satisfont les hypothèses de la proposition 3.1. Posons $Z = \bigcap Z_i$.

En appliquant I à la suite exacte de la proposition 3.1, on obtient une application horizontale de $H^{\mu-s}(Z)$ dans $k((\lambda))/I(\ker \mathcal{R}_s)$. Par conséquent, si L est l'équation différentielle satisfaite, dans $H^{\mu-s}(Z)$, par la forme différentielle

$$\mathcal{R}_s \left(\frac{P\, dx_1 \ldots dx_{\mu}}{Q\, x_1 \ldots x_{\mu}}\right) ,$$

la série $L(\Delta_{\mu}(P/Q))$ appartient à $I(\ker \mathcal{R}_s)$. On aura donc

$$L(\Delta_\mu(P/Q)) = \sum_{i=1}^{s} \Delta_\mu(P_i/Q_{\hat{i}}) \quad \text{avec} \quad Q_{\hat{i}} = Q/Q_i \ .$$

Le second membre étant une somme de diagonales de fractions rationnelles dont les dénominateurs n'ont que $s - 1$ facteurs.

(3.2.4) Dans le cas particulier où $s = 1$, l'espace vectoriel $H^\mu(X) = H^\mu((k(\lambda)^*)^\mu)$ est de dimension 1 . Plus précisément, il est isomorphe à

$$k(\lambda) \frac{dx_1 \dots dx_\mu}{x_1 \dots x_\mu} \ .$$

Son image par l'application I est $k(\lambda)$. Cette situation correspond aux diagonales de fractions rationnelles "triviales" $\Delta_\mu(\frac{P}{Q}(x_0 \dots x_\mu)) = \frac{P}{Q}(\lambda)$.

Si, de plus, la variété Z (d'équation $Q = 0$) est la partie affine d'une variété projective régulière $\overline{Z}$, de degré d , KATZ [19] a montré que l'on avait

$$\dim(H^\mu(X - Z)) = \dim(H^{\mu-1}(Z)) + 1 = d^\mu + \mu \ .$$

Dans le cas où μ est impair, la contravariance de H_μ^{DR} pour les immersions ouvertes, permet d'obtenir le diagramme commutatif suivant, où les lignes et les colonnes sont exactes, et où 0 désigne l'application nulle

$$\begin{tikzcd}
H^\mu(X) \arrow[r] & H^\mu(X - Z) \arrow[r, "\mathcal{R}_1"] & H^{\mu-1}(Z) \arrow[r] & 0 & \\
H^\mu(\underset{\sim}{P}^\mu) \arrow[r] \arrow[u, "0"] & H^\mu(\underset{\sim}{P}^\mu - \overline{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{\mu-1}(\overline{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{\mu+1}(\underset{\sim}{P}^\mu) = 0 \ . \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que la suite exacte de la première ligne se scinde. L'application $\mathcal{R}_1$ donne alors un isomorphisme entre l'image de $H^\mu(\underset{\sim}{P}^\mu - \overline{Z})$ dans $H^\mu(X - Z)$ et $H^{\mu-1}(Z)$. Il serait intéressant de généraliser cette situation.

(3.2.5) Reprenons les hypothèses de la proposition 3.1 avec $K = k(\lambda)$, X variété de $\underset{\sim}{A}^{\mu+1}_{k(\lambda)}$ définie par une équation $\mathbf{H}(\lambda , x_0 , x_1 , x_3 , \dots , x_\mu) = x_2$, et Z fermé de X défini par une équation $Q(x_1 , \dots , x_\mu) = 0$ avec $\partial Q/\partial x_1 \neq 0$. Dans ces conditions, tout élément de $H^{\mu-1}(Z)$ peut être représenté (au moins localement sur l'ouvert $\partial Q/\partial x_1 \neq 0$) par une forme différentielle de la forme

$$\omega = f\, dx_2 \dots dx_\mu \quad \text{avec} \quad f \in k(\lambda , x_0 , x_3 , \dots , x_\mu)[x_1] \quad \deg f \leqslant \deg Q \ ,$$

où deg désigne le degré en x_1 . Pour une forme différentielle donnée, cette représentation est unique. Nous définissons alors une application α de $\Omega^{\mu-1}_{Z/k(\lambda)}$ dans $\Omega^{\mu}_{X/k(\lambda)}$ en posant

$$\alpha(\omega) = f\, dx_2 \dots dx_\mu\, dQ/Q \ .$$

La relation $d(\omega dQ/Q) = d\omega dQ/Q$ montre que α est aussi une application de

$H^{\mu-1}(Z)$ dans $H^{\mu}(X - Z)$. Si on calcule $d/d\lambda$ dans $H^{\mu-1}(Z)$ (resp. $H^{\mu}(X - Z)$ en supposant $x_2 , \ldots , x_\mu$ (resp. $x_1 , \ldots , x_\mu$) constants, et donc x_1 constant, il est facile de constater que $\alpha(d\omega/d\lambda) = d(\alpha(\omega))/d\lambda$. Autrement dit α est une application horizontale qui scinde la suite exacte (de $k(\lambda)[d/d\lambda]$-module) de la proposition 3.1.

On rencontre cette situation lorsque le polynôme Q ne fait pas intervenir toutes les variables. Il est facile de constater qu'alors $\Delta_\mu(P/Q)$ est un polynôme en λ et $1/\lambda$.

4. Exemples.

4.1. - Le cas $\mu = 1$.

Nous pouvons appliquer la proposition 3.1 avec $s = 1$. A une fonction algébrique f de $k((\lambda))$, satisfaisant l'équation $R(f , \lambda) = 0$, nous associons la variété, Z définie par les équations $xy = \lambda$, $R(x , xy) = 0$. Posons $Q(x , y) = R(x , xy)$. L'élément $\omega = 1$ de $H^0(Z)$ est alors l'image par $\mathcal{R}_1$ de

$$dQ/Q = \frac{y\, R'_y}{R}(y , xy)\,\frac{dy}{y} .$$

Par suite, si L est l'équation différentielle minimale dont la fonction f est solution la diagonale

$$\Delta_1\left(\frac{y\, R'_y}{R}(y , xy)\right)$$

est aussi solution de L . Un calcul simple montre que cette diagonale est la somme des conjugués de f qui s'annulent en 0 . En particulier, elle est égale à f lorsque $R(0 , 0) = 0$ et $R'_y(0 , 0) \neq 0$, c'est le théorème de Furstenberg.

4.2. - Un cas $\mu = 2$, $s = 1$.

Pour étudier la diagonale

$$f = \Delta_2(4/(4 - (x + y)(1 + z))) = \sum 4^{-2n}\binom{2n}{n}^2 \lambda^n = F(1/2 , 1/2 , 1 ; \lambda) ,$$ on est amené à considérer la variété $X : xyz = \lambda$ et son fermé

$$Z : Q = 4xy - (x + y)(xy + \lambda) = 0 .$$

La forme différentielle correspondante $\Omega = \frac{4dxdy}{Q}$ a pour image par $\mathcal{R}_1$ la forme définie, sur l'ouvert $Q'_y \neq 0$, par $4dx/Q'_y$. On constate alors que $\bar{Z}$ est une courbe elliptique, et que $\mathcal{R}_1(\Omega)$ est une forme de première espèce.

Il est facile de constater que Ω est en fait une forme sur $P^2 - \bar{Z}$. La remarque (3.2.4) permet donc de conclure que f est solution de l'équation de Picard-Fuchs de la courbe elliptique $\bar{Z}$. Par ailleurs on sait que f est aussi solution de l'équation de Picard-Fuchs de la courbe elliptique $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ cela suggère que les deux courbes sont isogènes, ce qui est bien le cas dans une isogénie de degré 4 .

4.3. - Un cas $\mu = 3$, $s = 1$.

Une discussion analogue à la précédente peut se faire pour la diagonale

$$f = \Delta_3(4/(4 - t(1 + x^4 + y^4 + z^4)) = \sum 4^{-4n} \frac{(4n)!}{n!\,n!\,n!\,n!} \lambda^{4n} = F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4} ; \lambda^4)$$

associée à la forme différentielle $\Omega = 4dxdydz/(4xyz - \lambda(1 + x^4 + y^4 + z^4))$, dont l'image par l'application $\mathcal{R}_1$ est une forme différentielle de première espèce sur la surface K_3 : $4XYZT - \lambda(T^4 + X^4 + Y^4 + Z^4) = 0$. Comme ici, μ est impair notre argument (3.2.4) ne fonctionne pas, cependant sa conclusion semble encore correcte : voir la discussion complète de la situation dans [11], page 73 et suivantes.

4.4. - Un cas $\mu = 3$, $s = 2$.

Pour étudier la diagonale

$$f = \Delta_3[4/(2 - x - y)(2 - z - t)] = F(1/2 , 1/2 , 1 ; \lambda) ,$$

on considère la variété X ; $xyzt = \lambda$ et ses fermés Z_1 : $y = 2 - x$ et Z_2 : $t = 2 - z$. La forme différentielle $\Omega = 4dxdydz/xyz(2 - x - y)(2 - z - t)$ correspondant à cette diagonale, a pour image par $\mathcal{R}_2$ la forme différentielle

$$\frac{2x(2 - x)}{\lambda(1 - x)} dz = \omega \quad \text{de} \quad H^1(Z_1 \cap Z_2) .$$

Nous appliquons la remarque (3.2.5) à la forme ω avec $x_0 = x$, $x_1 = t$, $x_2 = z$, $R = \lambda/tx(2 - x)$, $Q = z + t - 2$. On trouve

$$\alpha(\omega) = 2x(2 - x)\, dzdt/\lambda(1 - x)(z + t - 2) = 4tdzdx/\lambda(z + t - 2) .$$

Nous réappliquons la remarque (3.2.5) avec $x_0 = t$, $x_1 = y$, $x_2 = x$, $R = \lambda/yzt$, $Q = y + t - 2$, et il vient : $\alpha' \circ \alpha(\omega) = 4tdzdxdy/\lambda(z + t - 2)(x + y - 2)$. Il résulte alors de cette remarque (3.2.5) que la fonction f est solution de l'équation de Picard-Fuchs de la forme de première espèce ω de la courbe elliptique $z(2 - z)\, x(2 - x) = \lambda$. Comme dans l'exemple 4.1, cette dernière est isogène à la courbe $Y^2 = X(X - 1)(\lambda - X)$ par une isogénie de degré 2 (donnée par $X = z(2 - z)$, $Y = X(x - 1)(z - 1)$).

4.5. - Un cas $\mu = 4$, $s = 2$.

Nous étudions la diagonale (liée à la démonstration d'APÉRY de l'irrationalité de $\zeta(3)$)

$$f = \Delta_4[1/(1 - x_1 x_2 x_3 x_4)((1 - x_3)(1 - x_4) - x_0 (1 + x_1)(1 + x_2))]$$
$$= \sum_n \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \lambda^n .$$

A cette diagonale on associe une forme différentielle Ω telle que $\mathcal{R}_2(\Omega)$: $dx_3\, dx_4/x_3\, x_4\, \lambda(x_2 - x_1)$ sur la variété Z d'équations $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$, $(1 - x_3)(1 - x_4) = \lambda(1 + x_1)(1 + x_2)$. Il serait intéressant de comparer cette situation aux résultats de [1], où la fonction f est associée à une différentielle de première espèce d'une surface K_3 .

5. Le cas des courbes.

Nous considérons une famille de courbes $C \xrightarrow{p} \mathrm{spec}(k(\lambda))$ et une différentielle de première espèce ω de $H^1(C)$. Nous supposons en outre que p est lisse et que C_0 présente en un point x un point double ordinaire à tangentes rationnelles. Dans cette situation nous avons la proposition suivante ([9] page 168).

PROPOSITION 5.1. - L'henselisé $C^h_{(x)}$ de C en x est $k\{\lambda\}$ isomorphe à l'henselisé de $X = \mathrm{spec}(k[\lambda , u , v]/(uv - t))$ en $(0 , 0)$ pour un élément t convenablement choisi dans $k\{\lambda\}$.

Notons Ω l'image de ω par l'isomorphisme défini dans la proposition 5.1. Nous avons $\Omega = f(\lambda , u , v)\, du/u$ avec f élément de l'henselisé $k\{\lambda , u , v\}$. La formule

$$J(u^i\ v^j\ du/u) = \delta_{ij}\ t^j$$

définit une application $k\{\lambda\}$-linéaire de $H^1(C^h_{(x)}) \approx H^1(X^h_{(0,0)})$ dans $k((\lambda))$. En faisant le calcul, à u constant, on a

$$J(\frac{d}{d\lambda}\ (u^i\ v^j\ du/u)) = J(ju^{i-1}\ v^{j-1}\ \frac{dt}{d\lambda}\ du/u) = \delta_{ij}\ j\ t^{j-1}\ dt/d\lambda = \frac{d}{d\lambda}(J(u^i\ v^j\ du/u)) \ .$$

Autrement dit, J est une application horizontale. Donc $J(\Omega)$ est une solution de l'équation de Picard-Fuchs de la différentielle ω . Si on a choisit ω de telle sorte que ω_0 ait un résidu non nul en (x) , on a en outre $f(0 , 0 , 0) \neq 0$ et donc $J(\Omega) \neq 0$.

PROPOSITION 5.2. - La fonction $J(\Omega)$ est la diagonale d'une fraction rationnelle.

D'après les résultats de FURSTENBERG (voir [3] ou [10]), comme la série t est algébrique sur $k(\lambda)$, il existe des fractions rationnelles à deux variables F et G telles que, pour tout entier i , on ait $t^i = \Delta_1(F(x , y)\ G^i(x , y))$. Un calcul simple permet alors de vérifier que

$$J(\Omega) = \Delta_3[\frac{f(xy\ ,\ zG(xy)\ ,\ u)}{1 - zu}\ F(x , y)] \ .$$

Comme f est une fonction algébrique, on voit que $J(\Omega)$ est la diagonale d'une fonction algébrique de 4 variables. D'après le théorème de Denef-Lipshitz (voir 1. 2.5), on en conclut que $J(\Omega)$ est la diagonale d'une fraction rationnelle à 8 variables.

5. 3. Exemple. - Nous considérons la courbe elliptique

$$C :\ \ y^2 = x(1 - x)(x - \lambda)$$

et la forme différentielle $\omega = dx/2y$. Le changement de variable

$$u = \frac{y + x\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x(1 - x)}} \quad , \quad v = \frac{-y + x\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

définit un isomorphisme de la courbe $C^h_{(0,0)}$ avec l'henselisé de la courbe $uv=\lambda$ en $(0 , 0)$. Nous sommes donc dans la situation décrite ci-dessus avec $t = \lambda$. On obtient facilement

$$\Omega = [1 - (\frac{u + v}{2})^2]^{-1/2}\, du/u \ .$$

Il résulte donc des remarques que nous avons faites que la fonction

$$J(\Omega) = \Delta_1[1/\sqrt{1 - (\frac{u + v}{2})^2}] = F(1/2 \ , \ 1/2 \ , \ 1 \ ; \ \lambda)$$

est solution de l'équation de Picard-Fuchs de ω.

6. Quelques conjectures.

Si L est une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(\lambda)$, nous notons $r_p(L)$ le rayon de convergence de ses solutions dans le disque générique.

Conjecture 6.1 (BOMBIERI). - Si, pour presque tout nombre premier p, $r_p(L) > p^{-1/(p-1)}$, alors $r_p(L) = 1$ pour presque tout p.

Conjecture 6.2 (DWORK [13]). - Si $r_p(L) = 1$ pour presque tout p, alors l'équation L vient de la géométrie.

En particulier, cette conjecture montrerait que la condition (2.4.2) entraîne la condition (2.4.1).

Conjecture 6.3. - Si $r_p(L) = 1$ pour presque tout p, alors toute solution bornée pour presque tout p de l'équation différentielle L est une diagonale de fraction rationnelle.

6.4. Remarque. - Considérons une dernière fois l'exemple 5.3. Supposons que l'équation différentielle de Picard-Fuchs de la forme ω (qui est l'équation hypergéométrique bien étudiée dans [11]) ait, au voisinage d'un point algébrique λ_0, une solution bornée pour presque tout p. Alors pour ces nombres premiers, l'invariant de Hasse de la courbe $\bar{C}_{\lambda_0}$ est non nul. D'après une conjecture classique de Serre, ceci ne devrait se produire que pour $\lambda_0 = 0$, 1 ou ∞. Autrement dit, pour les courbes elliptiques, la situation étudiée dans 5.3 est essentiellement la seule où la conjecture 6.3 puisse se vérifier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEUKERS (F.) and PETERS (C. A. M.). - A family of K_3 surfaces and $\zeta(3)$, J. für reine und angew. Math., t. 351, 1984, p. 42-54.

[2] CAMERON (R. H.) and MARTIN (W. T.). - Analytic continuations of diagonals and Hadamard compositions of multiple power series, Trans. Amer. math. Soc., t. 44, 1938, p. 1-7.

[3] CHRISTOL (G.). - Sur une opération analogue à l'opération de Cartier en caractéristique nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, série A, p. 1-3.

[4] CHRISTOL (G.). - Limites uniformes p-adiques de fonctions algébriques, Thèse Paris VI, 1977.

[5] CHRISTOL (G.). - Diagonales de fractions rationnelles et équations différentielles, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 18, 10 p.

[6] CHRISTOL (G.). - Modules différentiels et équations différentielles p-adiques. - Kingston, Queen's University, 1983 (Queen's Papers in pure and applied Mathematics, 66).

[7] CHRISTOL (G.). - Fonctions et éléments algébriques (à paraître).

[8] DELIGNE (P.). - Intégration sur un cycle évanescent, Invent. Math., Berlin, t. 76, 1984, p. 129-143.

[9] DELIGNE (P.) et RAPOPPORT (M.). - Les schémas de modules de courbes elliptiques, "Modular functions on variables" 1972, p. 143-316. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 349).

[10] DENEF (J.) and LIPSHITZ (L.). - Algebraic power series and diagonals (preprint).

[11] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-115).

[12] DWORK (B.). - Arithmetic theory of differential equations, "Symposia Mathematica", vol. 24, p. 225-243. - London, New York, Academic Press, 1981 (Istituto nazionale di alta Matematica).

[13] DWORK (B.). - Differential equations which come from geometry, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 9, 6 p.

[14] DWORK (B.). - Differential systems associated with families of singular hypersurfaces (preprint).

[15] FLIESS (M.). - Sur divers produits de séries formelles, Bull. Soc. math. France, t. 102, 1974, p. 181-191.

[16] FURSTENBERG (H.). - Algebraic functions over finite field, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.

[17] GESSEL (I.). - Two theorems on rational power series, Utilitas Math., t. 19, 1981, p. 247-254.

[18] HARSTORNE (R.). - On the De Rham cohomology of algebraic varieties. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, t. 45, p. 5-99).

[19] KATZ (N.). - On the differential equations satisfied by period matrices. - Paris, Presses universitaires de France, 1968 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 35, p. 71-106).

[20] KATZ (N.). - Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 39, p. 175-232).

[21] LIPSHITZ (L.). - The diagonal of a D-finite power series is D-finite (preprint).

[22] RAYNAUD (M.). - Anneaux locaux henseliens. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 169).

[23] ZEILBERGER (D.). - Sister Celine's technique and its generalisations, J. of math. Anal. and its Appl., t. 85, 1982, p. 114-145.