ADVANCES IN MATHEMATICS **42**, 1–82 (1981)

Une théorie combinatoire des séries formelles

ANDRÉ JOYAL*

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montreal, Quebec H3C 3P8, Canada

This paper presents a combinatorial theory of formal power series. The combinatorial interpretation of formal power series is based on the concept of species of structures. A categorical approach is used to formulate it. A new proof of Cayley's formula for the number of labelled trees is given as well as a new combinatorial proof (due to G. Labelle) of Lagrange's inversion formula. Polya's enumeration theory of isomorphism classes of structures is entirely renewed. Recursive methods for computing cycle index polynomials are described. A combinatorial version of the implicit function theorem is stated and proved. The paper ends with general considerations on the use of coalgebras in combinatorics.

Table des matières.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est à la fois d'exposer, de clarifier et d'unifier le sujet. L'utilité des séries formelles dans les calculs combinatoires est bien établie. L'interprétation combinatoire de l'opération de *substitution* a fait l'objet de travaux assez récents (Bender et Goldman [1], Doubilet *et al.* [8], Foata et Schützenberger [12], Garsia et Joni [13], Gessel [14]). La première interprétation (probabiliste) de la substitution des séries de puissances remonte à Watson (Kendall [18]) (dans la théorie de processus en cascade).

La caractéristique principale de la théorie présentée ici est son degré de généralité et sa simplicité. Dans cette théorie, les objets combinatoires correspondant aux séries formelles sont les *espèces de structures*. L'accent est mis sur le *transport* des structures plutôt que sur leurs propriétés. Ce point de vue n'est pas sans évoquer celui d'Ehresmann [9] et contraste avec celui de Bourbaki [2]. Aux opérations combinatoires sur les séries formelles

* L'auteur est reconnaissant pour l'appui financier de l'"Australian Research Grants Committee" et du "Ministère de l'Education du gouvernement du Québec, FCAC, Eq 1608."

0001-8708/81/100001–82$05.00/0

Copyright © 1981 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

correspondent des opérations sur les espèces de structures. Aux identités algébriques entre expressions formelles correspondent souvent des identités combinatoires. L'intuition et le calcul peuvent alors jouer sur deux plans dans un dialogue qui ressemble à celui qu'entretiennent l'algèbre et la géométrie. Il en résulte une sorte d'algèbre combinatoire analogue à l'algèbre géométrique de Grassman (et de Leibniz). La simplicité de la théorie est en grande partie due à l'usage qu'elle fait des *concepts* de la théorie des catégories [23] (les théories antérieures utilisant surtout la théorie des ensembles ordonnés et des partitions). De plus, elle met en évidence le fait fondamental qu'un très grand nombre de bijections construites sont *naturelles*, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas d'un système de coordonnées introduit au moyen d'une énumération arbitraire.

Le travail contient quelques innnovations combinatoires comme le concept de *vertébré* et une nouvelle démonstration du résultat de Cayley sur le nombre d'arbres. On y trouve aussi une nouvelle démonstration combinatoire du théorème d'inversion de Lagrange. La théorie de Pólya est entièrement refaite et il en résulte une méthode permettant souvent de calculer par *récurrence* les coefficients des polynômes indicateurs des cycles.

La théorie présenté ici est partielle. Plusieurs aspects fondamentaux n'ont pas été abordés. Ainsi, il existe une théorie catégorique très générale de l'opération de substitution (Kelly [17]). Des développements ultérieurs nécessiteront sans doute un tel degré de généralité. Nous nous sommes limités aux aspects les plus aptes (dans l'opinion de l'auteur) à capter l'attention d'un lecteur non familier avec les concepts de la théorie des catégories.

Je suis surtout reconnaissant à G. Labelle d'avoir manifesté de l'intérêt pour les questions de l'auteur et à qui je dois la démonstration du théorème d'Inversion de Lagrange présentée ici. Je dois aussi à J. Beck, F. W. Lawvere, P. Leroux, J. Labelle et S. Schanuel d'avoir eu des conversations stimulantes sur les relations possibles entre la combinatoire et la théorie des catégories. Je remercie G.-C. Rota pour m'avoir encouragé à rédiger ce travail. Je remercie aussi Cathy Kicinski pour son travail de dactylographie. Finalement, ce travail, rédigé sous le soleil du printemps australien, n'aurait jamais vu le jour sans l'hospitalité de Max Kelly, de l'université de Sydney.

1. Espèces de structures

1.0. Il existe déjà un concept précis d'*espèce* de structures (Bourbaki [2]). La description d'une espèce particulière se fait souvent en spécifiant les *conditions* que doit satisfaire une structure pour appartenir à cette espèce. Cette description peut prendre la forme d'une *théorie* axiomatique de l'espèce considérée. Un aspect essentiel du concept est le *transport de structures*.

Nous allons abstraire le concept d'espèce en considérant que le transport de structures en est l'*aspect principal*. De plus, comme nous ne traiterons que des problèmes de comptage et d'énumération finis, nous allons nous borner aux espèces *finitaires*, sauf mention du contraire.

1.1. *Espèces et cardinalité*

DÉFINITION 1. Une espèce (finitaire) est un endo-foncteur M: $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$ du groupoïde $\mathbf{B}$ des ensembles finis et bijections.

Si E est un ensemble fini, $M[E]$ est l'ensemble de toutes les *structures* d'espèce M sur E. Nous dirons que E est l'ensemble *sous-jacent* à une structure $s \in M[E]$ ou encore que celle-ci est *portée* par E. Nous dirons aussi, par abus de langage, que s est un *élément* de $M (s \in M)$ et que c'est une *M-structure.*

Si $u: E \to F$ est une bijection, l'élément $t = M[u](s)$ est la structure sur F obtenue en *transportant s le long de u*. La bijection u est un *isomorphisme* entre s et t:

$$u: s \to t.$$

Nous noterons $\mathrm{el}(M)$ la catégorie dont les objets sont les M-structures et dont les morphismes sont les isomorphismes de M-structures; c'est le groupoïde des *éléments* de M. On a un foncteur *oubliant* U: $\mathrm{el}(M) \to \mathbf{B}$ dont la valeur en $s \in M$ est l'ensemble *sous-jacent* à la structure s. Le concept d'isomorphisme de structures définit une relation d'équivalence dont les classes sont les *types* de structures d'espèce M; ces classes sont les *composantes connexes* du groupoïde $\mathrm{el}(M)$. Nous utiliserons la notation $\pi_0(M)$ pour désigner l'ensemble des types (de structures) d'espèce M. Si $s \in M$, nous désignerons le *type* de s par la notation $|s| \in \pi_0(M)$.

EXEMPLE 1. Rappelons qu'une structure de *schéma simplicial* sur E est un ensemble $\mathscr{S}$ de parties non vides de E tel que (i) toute partie non vide contenue dans un élément de $\mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{S}$, (ii) les singletons $\{x\}$ pour $x \in E$ appartiennent à $\mathscr{S}$. Les éléments de $\mathscr{S}$ sont les *simplexes*. La dimension d'un simplexe est sa cardinalité moins un. Un *graphe* est un schéma simplicial dont les simplexes sont de dimension $\leqslant 1$. Si u: $E \to F$ est une bijection, il est clair que $u(\mathscr{S}) = \{u(S) | S \in \mathscr{S}\}$ est aussi une structure de schéma simplicial sur F. On peut donc considérer l'*espèce* des schémas simpliciaux. Il est aussi clair que si $\mathscr{S}$ est un graphe alors $u(\mathscr{S})$ en est un; on obtient l'espèce des graphes, c'est une *sous-espèce* de l'espèce des schémas simpliciaux. Plus généralement, toute propriété P, s'appliquant aux schémas simpliciaux, et dont la satisfaction est invariante par isomorphisme, détermine une sous-espèce de l'espèce des schémas simpliciaux. Ainsi la *connexité* est une propriété invariante. L'espèce des *forêts* est celle des graphes *sans cycles*, l'espèce des *arbres* est celle des forêts connexes, etc.

EXEMPLE 2. Le transport d'une *endofonction* ϕ: $E \to E$ le long d'une bijection $u: E \simeq F$ se fait par *conjugaison*: $\phi \mapsto u\phi u^{-1}$. L'espèce des *permutations* est une sous-espèce de celle des endofonctions. Si on exige que le graphe d'une endofonction soit connexe, on obtient la sous-espèce des *endofonctions connexes* et aussi celle des *permutations circulaires*. Un concept important est celui de *contraction*: une endofonction $\phi: E \to E$ est une contraction s'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\phi^n(x) = x_0$ dès que n est assez grand. Autrement dit, une contraction est une endofonction ultimement constante.

EXEMPLE 3. Soit S l'espèce des permutations. Considérons le groupoïde $\mathrm{el}(S)$ des éléments de S. Les objets de $\mathrm{el}(S)$ sont les ensembles $E \in \mathbf{B}$ munis d'une permutation $\sigma_E \in S[E]$. Les morphimes $(E, \sigma_E) \to (F, \sigma_F)$ sont les bijections $u: E \to F$ telles que $u\sigma_E = \sigma_F u$. Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite illimitée d'indéterminées. Posons $I(\sigma_E) = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$, où $n = \operatorname{Card} E$ et où d_i est le nombre de cycles de longueur i de σ_E. Deux objets (E, σ_E) et (F, σ_E) de $\mathrm{el}(S)$ sont isomorphes si et seulement si $I(\sigma_E) = I(\sigma_F)$. L'ensemble $\pi_0(S)$ des composantes connexes du groupoïde $\mathrm{el}(S)$ s'identifie donc naturellement à l'ensemble $\mathrm{Mon}(x)$ de tous les monômes en les indéterminées $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

1.1.1. Le groupe $E!$ des permutations de E agit sur $M[E]$ par transport de structures. L'ensemble $\pi_0(M[E])$ des *orbites* s'identifie à l'ensemble des types de M-structures portées par les ensembles équipotents à E. Nous identifierons l'orbite de $s \in M[E]$ à son type $|s|$. Le sous-groupe *stabilisateur* d'un élément $s \in M[E]$ est le groupe $\mathrm{Aut}(s)$ des *automorphismes* de s. On a la formule bien connue

$$\operatorname{Card}|s| = \frac{n!}{\operatorname{Card}\mathrm{Aut}(s)}.$$

Un des problèmes fondamentaux de la combinatoire énumérative est d'évaluer les deux suites infinies de nombres

$$\operatorname{Card} M[n], \qquad n \geqslant 0 \; ([n] = \{1, 2, \ldots, n\}), \tag{1}$$

$$\operatorname{Card} \pi_0(M[n]), \qquad n \geqslant 0. \tag{2}$$

On définit deux séries génératrices, la première est une série de Hurwitz (Comtet [6]):

$$M(x) = \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Card} M[n] \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

la seconde est une série de puissances à coefficients entiers (sans factoriel):

$$\tilde{M}(x) = \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Card} \pi_0(M[n])\, x^n. \tag{2}$$

Nous dirons que $M(x)$ est la *cardinalité* de M. Voyons immédiatement que le calcul de $\tilde{M}(x)$ se ramène au calcul de la cardinalité d'une espèce *associée* $\tilde{M}$.

DÉFINITION 2. Une structure d'espèce $\tilde{M}$ est un couple (σ, s) où σ est un *automorphisme* de $s \in M$.

PROPOSITION 1. *On a*

$$\tilde{M}(x) = \operatorname{Card} \tilde{M}.$$

Preuve. On utilise le lemme de Burnside: si un groupe fini G agit sur un ensemble fini X, alors la cardinalité de l'ensemble $\pi_0(X)$ des orbites de X est égale à celle de l'ensemble $\{(\sigma, x) | \sigma \in G, x \in X, \sigma \cdot x = x\}$ *divisée* par $\operatorname{Card} G$. (Voir Burnside [3].)

1.2. *Catégorie des espèces*

Les espèces se constituent en catégorie: ce sont des foncteurs, on peut prendre comme *morphismes* les transformations naturelles. Comme il est désirable d'avoir une classe de morphismes plus large que celle des isomorphismes, il vaut mieux considérer qu'une espèce est un foncteur $M: \mathbf{B} \to E$ vers la catégorie $\mathbf{E}$ des ensembles finis et *fonctions* (en composant avec l'inclusion $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{E}$).

DÉFINITION 3. Un *morphisme* $\alpha: M \to N$ est une transformation naturelle de M vers N considérés comme des foncteurs de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{E}$.

On peut interpréter α comme suit: on dispose d'une *construction* α permettant de produire une structure d'espèce N (output) à partir d'une structure d'espèce M (input), et pour toute bijection $u: E \to F$ le rectangle

$$\begin{array}{ccc} M[E] & \xrightarrow{\alpha_E} & N[E] \\ \downarrow{\scriptstyle M[u]} & & \downarrow{\scriptstyle N[u]} \\ M[F] & \xrightarrow{\alpha_F} & N[F] \end{array}$$

est commutatif; ce qui signifie que la construction est *équivariante* (ou invariante): elle ne change pas si on transporte *simultanément* l'input et l'output le long de la même bijection; la très grande majorité des constructions mathématiques ont cette propriété.

Si σ_E est inversible quel que soit E, le morphisme α est un *isomorphisme* entre M et N. Dans ce cas, nous écrirons $M \overset{\alpha}{=} N$ ou plus simplement (par abus de notation) $M = N$. Si M et N satisfont à la condition plus faible $\operatorname{Card} M = \operatorname{Card} N$, nous dirons que M et N sont des espèces *équipotentes* et nous écrirons $M \equiv N$.

EXEMPLE 4. La construction de la fermeture transitive d'un graphe détermine un *morphisme* de l'espèce des graphes vers l'espèce des partitions.

EXEMPLE 5. Une *arborescence* est un arbre muni d'une *racine* (c'est un sommet arbitraire de l'ensemble sous-jacent). On oriente habituellement les arêtes d'une arborescence dans la direction de la racine. Si on adjoint une boucle à la racine on obtient le graphe d'une *contraction* (Ex. 2). Il y a *isomorphisme* entre l'espèce des arborescences et celle des contractions.

EXEMPLE 6. Les espèces des ordres linéaires, des permutations, des permutations munies d'un point fixe, des permutations circulaires munies d'un automorphisme sont *équipotentes* entre elles, sans être isomorphes.

1.2.1. Un morphisme d'espèces $M \to N$ détermine un foncteur $\operatorname{el}(M) \to \operatorname{el}(N)$ entre les groupoïdes correspondants. Remarquer que ce foncteur commute avec les foncteurs oubliants

$$\begin{tikzcd} \operatorname{el}(M) \arrow[rr] \arrow[dr, "U"'] & & \operatorname{el}(N) \arrow[dl, "U"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Il n'est pas vrai qu'un foncteur $\operatorname{el}(M) \to \operatorname{el}(N)$ soit toujours induit par un morphisme d'espèces $M \to N$. Par exemple, si M est l'espèce des pré-ordres et N l'espèce des ordres, la construction habituelle d'une relation d'ordre à partir d'un pré-ordre (sur un quotient de l'ensemble sous-jacent au pré-ordre) détermine un foncteur $\operatorname{el}(M) \to \operatorname{el}(N)$ qui *ne provient pas* d'un morphisme d'espèce $M \to N$. Cependant, on vérifie aisément que tout foncteur $\operatorname{el}(M) \to \operatorname{el}(N)$ commutant avec les foncteurs oubliants U, est induit par un et un seul morphisme d'espèce $M \to N$.

1.3. *Espèces relatives*

Nous voulons examiner le concept d'espèce *relative*. Commençons par un exemple. Soit G l'espèce des *graphes*. Le concept d'*orientation* nous donne un foncteur $O\colon \mathrm{el}(G) \to \mathbf{E}$, car on peut transporter une orientation de graphe le long d'un isomorphisme de graphes. L'espèce des *orientations* (de graphe) est *relative* à celle des graphes. D'autre part, l'espèce GO des *graphes orientés* est munie d'une projection $GO \to G$.

DÉFINITION 4. Soit M une espèce. Un espèce *relative* à M est un foncteur $T_M\colon \mathrm{el}(M) \to \mathbf{E}$.

Étant donné T_M on peut construire une espèce T munie d'un morphisme $T \to^p M$: on pose $T[E] = \{(s, \alpha) \mid s \in M[E], \alpha \in T_M[s]\}$. Pour transporter $(s, \alpha) \in T[E]$ le long d'une bijection $u\colon E \to F$, on commence par transporter s pour obtenir $t = M[u](s)$, ce qui donne d'abord un isomorphisme $s \to^u t \in \mathrm{el}(M)$, et ensuite $\beta = T_M[u](\alpha)$; on pose $T[u](s, \alpha) = (t, \beta)$. Le morphisme $p\colon T \to M$ est la projection $p(s, \alpha) = s$. *Inversement*, si on se donne un morphisme $T \to^p M$, on peut construire T_M: si $s \in M[E]$, on a $p_E\colon T[E] \to M[E]$ et on pose $T_M[s] = p_E^{-1}\{s\} \subseteq T[E]$. La naturalité de p nous permet de vérifier que si $u\colon E \to F$ est un isomorphisme entre $s \in M[E]$ et $t \in M[F]$ alors $T[u]$ transforme $p_E^{-1}\{s\}$ dans $p_F^{-1}\{t\}$, ce qui donne $T_M[u]\colon T_M[s] \to T_M[t]$. On a, en fait, une proposition précise: une *espèce au-dessus de M* est une espèce T munie d'un morphisme $T \to^p M$. Un morphisme $(T, p) \to (T', p')$ entre espèces au-dessus de M est une flèche $T \to^u T'$ telle que $p'u = p$.

PROPOSITION 2. *Les constructions décrites ci-haut définissent une équivalence entre la catégorie des espèces relatives à M et la catégorie* $E\|X\|/_M$ *des espèces au-dessus de M.* (Voir 2.0. pour la natation $E\|X\|$.)

Supposons que $T_M\colon \mathrm{el}(M) \to E$ soit donné. Nous dirons souvent que $(s, \alpha) \in T[E]$ est une M-structure s *munie* d'un élément $\alpha \in T_M[s]$. Par exemple, un graphe orienté est un graphe *muni* d'une orientation. Une structure d'espèce $\tilde{M}$ (déf. 2) est une M-structure *munie* d'un automorphisme. Etc.

Nous utiliserons quelques fois le terme "enrichi" plutôt que "muni." Ainsi, soit R une espèce quelconque, nous dirons qu'une endofonction $\phi\colon E \to E$ est *R-enrichie* si chacune des ses *fibres* $\phi^{-1}\{x\}$, $x \in E$, est munie d'une R-structure. De même, soit a une arborescence sur E. La *fibre* $a^{-1}\{x\}$ d'un sommet $x \in E$ est l'ensemble des sommets de a reliés à x par une arête aboutissant à x (pour l'orientation d'une arborescence telle que décrite dans l'exemple 5). Nous dirons que a est *R-enrichie* si chacune de ses fibres est munie d'une R-structure. (En n'oubliant pas les fibres vides.)

Dans les représentations graphiques des endofonctions ou des arborescences R-enrichies il est souvent commode de penser que les R-structures sur les fibres sont situées sur l'ensemble des *arêtes* de ces fibres. Par exemple, une arborescence R-enrichie peut se représenter comme sur la

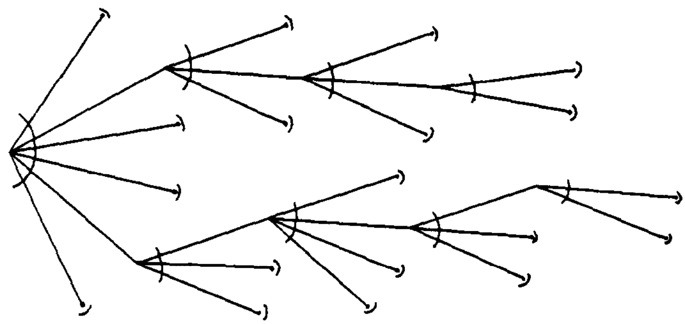


FIGURE 0

figure 0 où un arc de cercle coupant transversalement les arêtes d'une fibre désigne une R-structure. Il ne faut pas oublier les feuilles.

2. LES OPÉRATIONS COMBINATOIRES

2.0. La catégorie des espèces est riche en opérations diverses. Dans cette section, nous allons décrire plusieurs opérations dont trois sont binaires. Les deux premières sont la *somme* (disjointe) et le *produit*. Avec ces deux opérations, la catégorie des espèces devient une sorte de semi-anneau. De facon plus précise, soit R un anneau commutatif, désignons par $R\|x\|$ l'anneau des séries de Hurwitz à coefficients dans R: ce sont les séries formelles

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{où} \quad n \geqslant 0,\ a_n \in R.$$

L'analogie poursuivie ici est que la catégorie des espèces serait le semi-anneau $\mathbf{E}\|X\|$ des séries de Hurwitz, mais à *coefficients dans la catégorie* $\mathbf{E}$ *des ensembles finis*. Le concept de cardinalité induit un *homomorphisme*

$$\text{Card}\colon \mathbf{E}\|X\| \to \mathbf{Z}\|x\|.$$

De plus, l'évaluation $M \mapsto M[0]$ est un *foncteur* préservant la somme et le produit

$$\mathbf{E}\|X\| \to \mathbf{E}$$

dont le noyau J est un idéal sur lequel nous allons décrire des opérations de *puissances divisées* (Cartan [4])

$$\gamma_n : J \to \mathbf{E}\|X\| \qquad (n \geqslant 0)$$

de sorte que l'on a

$$\operatorname{Card} \gamma_n(M) = \frac{M(x)^n}{n!} \qquad (n \geqslant 0).$$

Utilisant ces opérations de puissances divisées nous décrirons ensuite l'opération de *substitution* d'une espèce dans une autre. Nous terminerons ce chapitre en introduisant le *calcul différentiel* des espèces et en donnant une démonstration *combinatoire* de la formule d'Inversion de Lagrange.

2.1. *Somme et produit*

La somme disjointe de deux espèces M et N est le *coproduit* dans la catégorie des espèces:

$$(M + N)[E] = M[E] + N[E].$$

Plus généralement, une famille arbitraire d'espèces $(M_i)_{i \in I}$ est *sommable* si pour tout ensemble fini E, l'ensemble des indices $i \in I$ pour lesquels $M_i[E] \neq \varnothing$, est fini. On pose

$$\left(\sum_{i \in I} M_i\right)[E] = \sum_{i \in I} M_i[E].$$

Il est évident que Card préserve la somme. Passons à la définition du *produit* $M \cdot N$ de deux espèces M et N. Disons d'abord qu'un *partage* d'un ensemble E en deux *morceaux* est un couple (E_1, E_2) tel que $E_1 \cup E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. On définit de même le concept de partage de E, en n morceaux ($n \in \mathbf{N}$): nous écrirons $E = E_1 + \cdots + E_n$ pour indiquer que $(E_1, \ldots, E_n)$ est un partage de E en n morceaux.

DÉFINITION 5. Une structure d'espèce $M \cdot N$ sur $E \in \mathbf{B}$ est un quadruplet (E_1, E_2, s, t), où $E = E_1 + E_2$ et $(s, t) \in M[E_1] \times N[E_2]$.

PROPOSITION 3. *On a*

$$\operatorname{Card}(M \cdot N) = \operatorname{Card}(M) \cdot \operatorname{Card}(N).$$

Preuve. On a par définition

$$(M \cdot N)[E] = \sum_{E_1 + E_2 = E} M[E_1] \times N[E_2].$$

Si Card $E = n$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ on a $\binom{n}{k}$ partages $E = E_1 + E_2$ avec Card $E_1 = k$. Ce qui entraîne

$$\operatorname{Card}(M \cdot N)[n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Card} M[k] \operatorname{Card} N[n-k].$$

L'espèce *uniforme* est une espèce n'ayant qu'une seule structure sur chaque ensemble; on peut s'en donner des représentations diverses: les structures de graphes complets, de topologies chaotiques et d'applications identiques déterminent des espèces uniformes.

EXEMPLE 7. Soient S l'espèce des *permutations*, S_0 celle des permutations sans *point fixe* et U l'espèce uniforme, on a: $S = S_0 \cdot U$ (Fig. 1); prenant les cardinalités, on obtient:

$$\frac{1}{1-x} = S_0(x)\, e^x$$

et donc

$$S_0(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

EXEMPLE 8. Soient D l'espèce des endofonctions, D_0 l'espèce des endofonctions munies d'un *point fixe* et A l'espèce des arborescences, on a

$$D_0 = A \cdot D.$$

En effet, on peut partager le domaine E d'une endofonction ϕ munie d'un point fixe x_0 en deux morceaux $E = E_1 + E_2$. Le premier E_1 est constitué de tous les points ultimement transformés en x_0 par ϕ. Sur E_1, ϕ induit une contraction (Chap. 1, Ex. 2), ce qui équivaut à une arborescence. Sur le second morceau E_2, ϕ induit une endofonction arbitraire (Fig. 2).

Le *produit* $M = \prod_{i=1}^n M_i$ d'une suite finie d'espèces s'explicite comme suit: une structure d'espèce M sur E est un *partage* $E = E_1 + \cdots + E_n$ dont chaque *morceau* E_i (possiblement vide) est *muni* d'une structure d'espèce M_i.

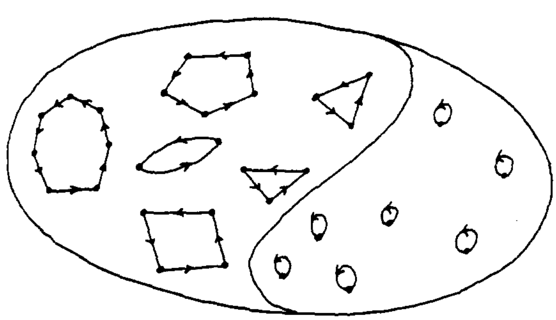


FIGURE 1

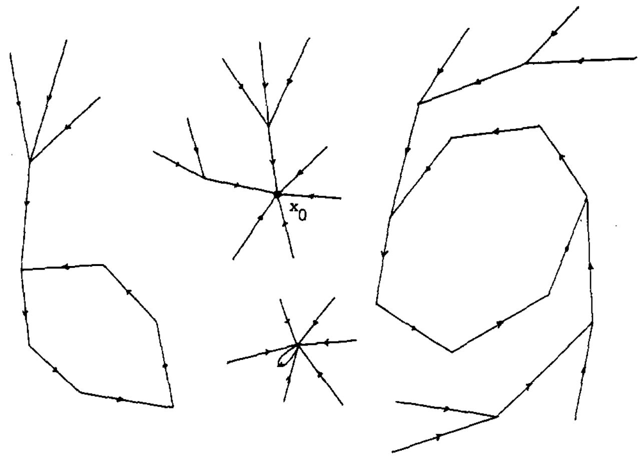


FIGURE 2

On peut aussi décrire la *puissance* N^S d'une espèce N par un ensemble fini S: une structure d'espèce N^S sur E est une fonction $\chi: E \to S$ dont chaque fibre est *munie* d'une structure d'espèce N; autrement dit, c'est une fonction *N-enrichie.*

EXEMPLE 9. (Joyal). Un *vertébré* est un arbre *bipointé* par un couple (p_0, p_1) de sommets. Nous dirons que p_0 est le *sommet de queue* et p_1 le *sommet de tête.* Le plus court chemin du sommet de queue au sommet de tête est la *colonne vertébrale.* Les sommets en ordre linéaire sur la colonne vertébrale sont les *vertèbres.* Pour chaque sommet p soit $v(p)$ la vertèbre la plus proche de p. La fonction v est idempotente et il y une structure d'arborescence sur chaque fibre de v. Les racines de ces arborescences sont les vertèbres. Ainsi, un vertébré sur E détermine un partage de longueur variable $E = E_1 + \cdots E_n$, dont chaque morceau E_i est muni d'une structure d'arborescence, et inversement. On a donc l'identité:

$$V = A + A^2 + A^3 + \cdots,$$

où V est l'espèce des vertébrés et A celle des arborescences (Fig. 3).

EXEMPLE 10. Soient L l'espèce des ordres linéaires et S un ensemble fini. Une structure d'espèce L^S sur E est une fonction $E \to S$ dont chaque fibre est munie d'un ordre linéaire. Le nombre $l(n, s)$ de ces objets (si $n = \text{Card } E$ et $s = \text{Card } S$) est donc le coefficient de $x^n/n!$ dans la série $(1-x)^{-s}$. Ce qui montre que

$$l(n, s) = s(s+1) \cdots (s+n-1).$$

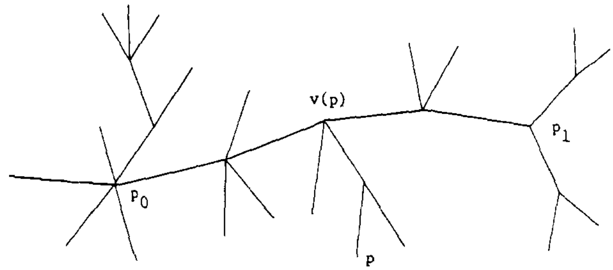


FIGURE 3

Par la suite, nous allons souvent considérer qu'un ensemble fini A détermine une espèce en posant

$$\begin{aligned} A[E] &= A \qquad \text{si} \quad E = \varnothing \\ &= \varnothing \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Avec cette convention la catégorie **E** agit comme un anneau de coefficients pour $\mathbf{E}\|X\|$ car la somme disjointe et le produit cartésien d'ensembles se confondent alors avec la somme et le produit des espèces tels que décrits plus tôt.

2.2. *Puissances divisées et substitution*

DÉFINITION 6. Soit N une espèce telle que $N[0] = \varnothing$ et soit E un ensemble fini. Une *assemblée* de structures d'espèce N sur E est une partition de E dont chaque classe est munie d'une structure d'espèce N. Un *membre* d'une assemblée est une classe munie de la N-structure correspondante. La *puissance divisée* $\gamma_n(N)$ est l'espèce des assemblées de N-structures ayant exactement n membres. L'*exponentielle* $\exp(N)$ est l'espèce de toutes les assemblées de N-structures.

PROPOSITION 4. *On a*

$$\operatorname{Card} \gamma_n(N) = \frac{N(x)^n}{n!},$$

$$\operatorname{Card} \exp(N) = \exp(N(x)).$$

Preuve. Il suffit évidemment de démontrer la première identité. Remarquons d'abord qu'une structure d'espèce N^n sur E détermine un partage $E = E_1 + \cdots + E_n$ en morceaux *non vides* (et distincts): en effet, E_i est muni d'une N-structure et par hypothèse $N[0] = \varnothing$. Si on oublie l'ordre linéaire entre les morceaux on a une partition $\{E_1,..., E_n\}$ dont chaque classe est munie d'une N structure. On a montré qu'une N^n-structure n'est rien d'autre qu'une N-assemblée dont les membres ont été placés en *ordre linéaire*:

$$\operatorname{Card} N^n = n! \operatorname{Card} \gamma_n(N).$$

Pour un grand nombre d'espèces, on peut indiquer un concept de *connexité* et démontrer qu'une structure quelconque se *compose* d'une partition dont chaque classe est munie d'une structure connexe. Dans ces conditions, une espèce M sera isomorphe à l'espèce des assemblées de structures connexes: $M = \exp(M_C)$.

EXEMPLE 11. Les *forêts* sont de assemblées d'arbres. Les forêts d'arborescences sont des assemblées d'arborescences. Les permutations sont des assemblées de permutations circulaires. Les partitions sont des assemblées de partitions à une seule classe, etc.

L'opération de *substitution* d'une espèce dans une autre est la plus riche en possibilités.

DÉFINITION 7. Soient R et N des espèces et supposons que $N[0] = \varnothing$. L'espèce $R(N)$ est celle des couples (a, ρ), où a est une assemblée de R-structures et ρ est une R-structure sur l'ensemble des membres de a.

Nous dirons que $R(N)$ est le résultat de la *substitution* de N dans R. Nous dirons qu'un élément de $R(N)$ est une R-assemblée (de N-structures). Notons immédiatement que $\exp(N)$ est le résultat de la substitution de N dans l'espèce *uniforme* (Ex. 7).

THÉORÈME 1. *Supposant que* $N[0] = \varnothing$ *on a*

$$\operatorname{Card} R(N) = R(N(x)).$$

Preuve. Pour chaque entier $n \geqslant 0$ soit R_n l'espèce des R-structures dont l'ensemble sous-jacent est de cardinalité n. On a une décomposition en somme disjointe

$$R = \sum_{n \geqslant 0} R_n,$$

induisant une décomposition des R-assemblées en fonction du nombre de membres:

$$R(N) = \sum_{n \geqslant 0} R_n(N).$$

Un élément de $R_n(N)$ est une assemblée de n membres *munie* d'une R-structure. On a donc

$$\text{Card}\, R_n(N) = \text{Card}\, \gamma_n(N) \times \text{Card}\, R[n],$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\text{Card}\, R(N) &= \sum_{n\geqslant 0} \text{Card}\, R[n] \frac{N(x)^n}{n!} \\ &= R(N(x)).\end{aligned} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarques. Pour pouvoir *penser* combinatoirement il est nécessaire de se donner des représentations visuelles. Saisir la nature d'une espèce c'est être capable de se représenter la forme générale de ses structures. La *forme* d'une structure est invariante par *iso*-morphisme. Ce qu'il faut arriver à se représenter d'abord c'est le *type* général des structures d'une espèce donnée. Ce type est indépendant d'un étiquetage ou d'une énumération des sommets de l'ensemble sous-jacent. Par exemple, supposons que l'on veuille se représenter le type général des structures d'espèce $R(N)$ sachant que l'on a déjà une représentation pour R et N. Ce qu'on peut faire, c'est véritablement *substituer* au lieu et à la place de chaque sommet d'une R-structure, des N-structures arbitrairement choisies. Pour cela, on peut imaginer que les sommets de la R-structure se gonflent en cellules abritant des N-structures. L'ensemble sous-jacent d'une configuration cellulaire est la *somme* des ensembles sous-jacents des structures contenues dans les cellules. Ainsi, si on substitue l'espèce des permutations circulaires dans l'espèce des arbres, on obtient une espèce dont le type général peut se représenter comme sur la figure 4.

Cette représentation n'est pas la seule et il est commode de l'adapter aux particularités d'une espèce. Par exemple, supposons que l'espèce N soit *pointée*, c'est-à-dire munie d'une morphisme $N \to^p B$ ou B est l'espèce des "sommets" ($B[E] = E$ pour $E \in B$). Chaque structure $s \in N[E]$ possède alors un *point de base* $p(s) \in E$. On peut utiliser les points de base pour se donner une autre représentation des $R(N)$-structures: pour chaque sommet d'une R-structure on choisit une N-structure et on fait *coïncider* ce sommet avec le point de base de la N-structure choisie. Par exemple, le point de base d'une arborescence est la racine; si on substitue l'espèce A des arborescences dans celle des ordres linéaires (non vides) on obtient l'espèce des vertébrés (Ex. 9). Quand N est pointée on peut définir comme suit la substitution: une $R(N)$-structure sur E est un triplet (v, α, β), où

(1) v est une fonction indempotente $E \to E$,

(2) α est une fonction qui choisit pour chaque $x \in \text{Im}(v)$ une structure

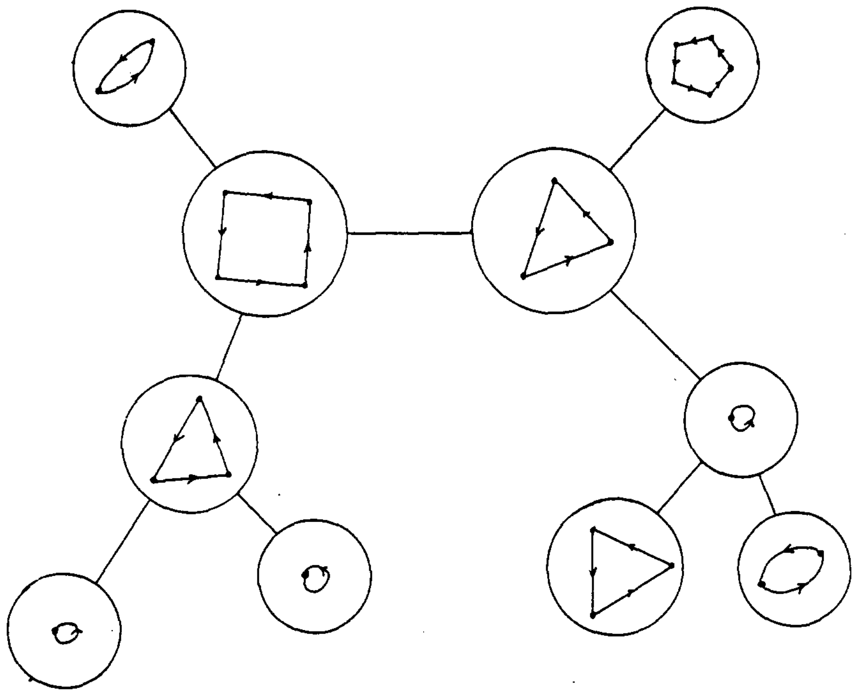


FIGURE 4

$\alpha(x) \in N[v^{-1}\{x\}]$ de sorte que le point de base de $\alpha(x)$ *coïncide* avec $x \in v^{-1}\{x\}$,

(3) β est une R-structure sur $\mathrm{Im}(v)$.

EXEMPLE 12. Soient D l'espèce des endofonctions, S celle des permutations et A celle des arborescences. On a la décomposition

$$D = S(A).$$

En effet, soit $\phi \in D[E]$. Un point $x \in E$ est *périodique* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\phi^n(x) = x$. La fonction ϕ *permute* entre eux les points périodiques. Pour chaque $x \in E$ soit $v(x)$ le premier point périodique dans la suite x, $\phi(x)$, $\phi^2(x)$,.... La fonction v est idempotente et son image est l'ensemble des points périodiques. Pour chaque $x \in \mathrm{Im}(v)$ la fibre $v^{-1}\{x\}$ est munie d'une structure d'arborescence dont x est la racine. *Inversement*, si on se donne une assemblée d'arborescences et une permutation de l'ensemble des racines, il est clair que l'on peut construire une endofonction correspondante ϕ (Fig. 5).

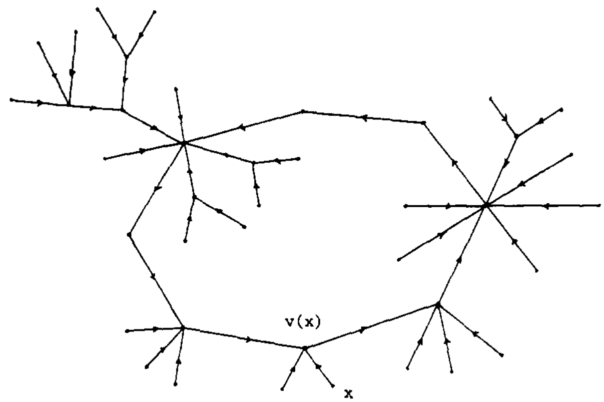


FIGURE 5

Les exemples 9 et 12 nous donnent une démonstration simple du théorème de Cayley: le nombre a_n d'arbres sur un ensemble de cardinalité $n \geqslant 1$ est n^{n-2}. En effet, le nombre de vertébrés (arbre bipointé) est égal à $n^2 a_n$. L'exemple 9 montre que les vertévrés sont des assemblées *linéaires* d'arborescences. L'exemple 10 montre que les endofonctions sont des assemblées *permutées* d'arborescences. Comme le nombre d'ordre linéaires coïncide avec le nombre de permutations, on obtient $n^2 a_n = n^n$ $(n \geqslant 1)$.

Le Théorème 1 suggère d'adopter la notation $M(X)$ pour désigner une espèce M. La variable X s'interprète comme l'espèce *singleton*: il y a une seule structure d'espèce X (à isomorphisme près) et elle est portée par les singletons. Le résultat $M(X)$ de la substitution de X dans M est isomorphe à M. Pour certaines espèces nous adopterons une notation franchement algébrique si cela ne crée pas d'ambiguité. Ainsi, $\exp(X)$ ou e^X désignera l'espèce uniforme, Xe^X l'espèce des ensembles pointés, $e^X - 1$ l'espèce uniforme non vide, $\cosh(X)$ et $\sinh(X)$ les espèces uniformes paires et impaires, $1/1 - X$ l'espèce des ordres linéaires, etc. Cependant, nous conserverons la notation $S(X)$ pour désigner l'espèce des permutations afin d'éviter de la confondre avec $1/1 - X$. De même, nous utiliserons le notation $C(X)$ plutôt que $\log 1/1 - X$ pour désigner l'espèce des permutations circulaires, etc.

EXEMPLE 13. Une relation de préordre $\leqslant$ sur E détermine une relation d'équivalence: $x \equiv y$ si et seulement si on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. La relation de préordre induite sur le quotient $E/\equiv$ est une relation d'ordre. *Inversement.* Cela montre que l'espèce des préordres s'obtient en substituant l'espèce $e^X - 1$ dans l'espèce des relations d'ordres. En particulier, l'espèce des préordres totaux est

$$\frac{1}{1-(e^X-1)} = \frac{1}{2-e^X}.$$

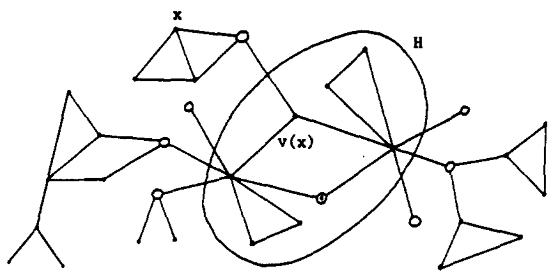


FIGURE 6

EXEMPLE 14. Dand un graphe, deux sommets sont *doublement connectés* si on peut les relier par un chemin évitant n'importe laquelle arête choisie d'avance. Les sommets d'un graphe se partagent en composantes doublement connexes. Soient $G_c^\bullet$ l'espèce des graphes connexes pointés et $G_{cc}^\bullet$ celle des graphes doublement connexe pointés. On a la relation

$$G_c^\bullet = G_{cc}^\bullet(Xe^{G_c^\bullet(X)}).$$

En effet, dans un graphe connexe pointé considérons la composante doublement connexe H du point de base; pour chaque sommet x soit $v(x)$ le sommet le plus près situé dans la composante H. On vérifie aisément que v est bien définie. C'est une fonction idempotente dont les fibres sont munies d'une structure d'espèce $X \cdot e^{G_c^\bullet(X)}$; l'image de v coïncide avec le graphe doublement connexe pointé H (Fig. 6).

EXEMPLE 15 (Pólya [26]). Considérons l'espèce A des arborescences. On a l'identité (Fig. 7)

$$A = X \cdot \exp(A).$$

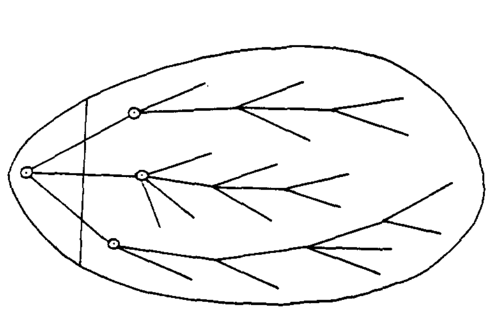


FIGURE 7

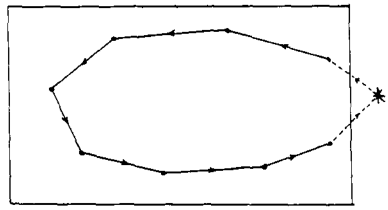


FIGURE 8

Plus généralement, l'espèce A_R des arborescences R-enrichies satisfait à l'équation (voir 1.3, Fig. 0)

$$A_R = X \cdot R(A_R).$$

2.3. *Calcul différentiel*

Pour tout ensemble fini E, soit E^+ l'ensemble obtenue par adjonction à E d'un point supplémentaire $*$:

$$E^+ = E + \{*\}.$$

DÉFINITION 8. L'espèce *dérivée* M' d'une espèce M est définie comme suit:

$$M'[E] = M[E^+].$$

EXEMPLE 16. La dérivée de l'espèce $C(X)$ des permutations circulaires est l'espèce des ordres linéaires (Fig. 8):

$$C'(X) = \frac{1}{1-X}$$

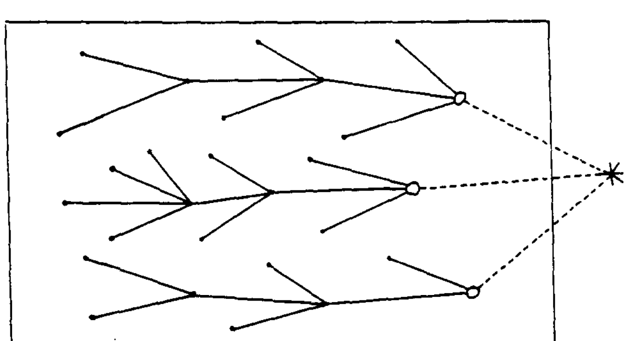


FIGURE 9

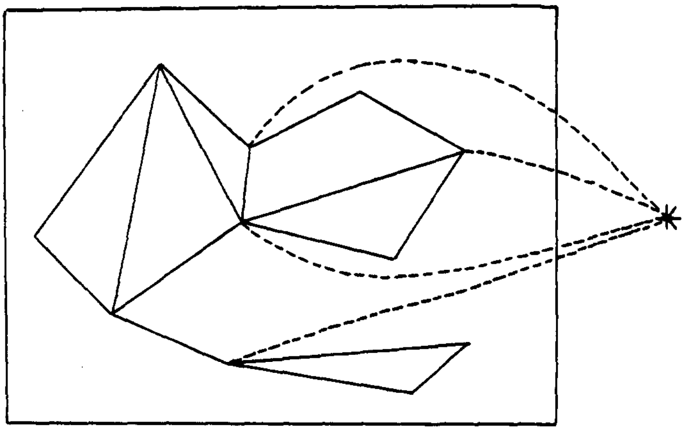


FIGURE 10

EXEMPLE 17. La dérivée de l'espèce des arbres est celle des forêts d'arborescences (Fig. 9).

EXEMPLE 18. Rappelons qu'un graphe est *pair* si le nombre d'arêtes joignant chaque sommet est pair. La dérivée de l'espèce des graphes pairs est l'espèce des graphes (Fig. 10). (Harary et Palmer [15].)

EXEMPLE 19. La dérivée de l'espèce des ordres linéaires $1/(1-X)$ est égale à $(1/(1-X)) \cdot (1/(1-X))$.

Rappelons qu'une structure *pointée* d'espèce M sur E est un élément de $E \times M[E]$. Nous noterons $M^{\bullet}$ l'espèce des M-structures pointées.

PROPOSITION 5. *On a les relations*

$$\begin{aligned} M^{\bullet} &= X \cdot M', \\ (M+N)' &= M' + N', \\ (M \cdot N)' &= M' \cdot N + M \cdot N', \\ M(N)' &= M'(N) \cdot N'. \end{aligned}$$

Ces identités ne sont pas seulement des relations entre quantités numériques mais de véritables identités *combinatoires*. Nous laissons au lecteur le plaisir de les démontrer.

EXEMPLE 20. Pour illustrer le calcul différentiel combinatoire considérons l'équation satisfaite par l'espèce A des arborescences:

$$A = X \cdot e^A.$$

L'opération de "pointage" est une dérivation:

$$A^\bullet = X^\bullet \cdot e^A + X \cdot e^A A^\bullet,$$

Les arborescences pointées sont les vertébrés:

$$\begin{aligned} V = A^\bullet &= X \cdot e^A + X \cdot e^A V \\ &= A + A \cdot V \\ &= A + A^2 + A^3 + \cdots . \end{aligned}$$

On a montré que les vertébrés sont des assemblées linéaires (non vides) d'arborescences. (Voir 2.1, Ex. 9.)

2.4. *La formule d'Inversion de Lagrange*

2.4.1. Les méthodes de l'analyse laissent quelquefois des traces dans l'univers restreint des séries formelles. Un exemple est la théorie du *résidu* (au point 0) d'une série formelle méromorphe. La propriété d'invariance du résidu par changement inversible $x = w(t)$ de paramètre est une *identité algébrique* fondamentale:

$$\text{Rés}\, f(x)\, dx = \text{Rés}\, f(u(t))\, u'(t)\, dt.$$

Cette identité est *équivalente* à la *formule d'inversion de Lagrange.* Cette formule donne le coefficient c_n de x^n dans la série $g(v(x))$ lorsque $v(x)$ satisfait l'équation $v(x) = xR(v(x))$:

$$c_n = \frac{1}{n} \times \text{coeff de } t^{n-1} \text{ dans } g'(t)\, R(t)^n.$$

Pour la démontrer, il suffit de remarquer que ce coefficient est égal au résidu à l'origine de $g(v(x))/x^{n+1}$. Remarquer de plus que $u(t) = t/R(t)$ est la série inverse de v. Effectuant le changement de paramètre $x = u(t)$ et utilisant la propriété d'invariance, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \text{Rés}\; g(t)\, \frac{u'(t)}{u(t)^{n+1}}\, dt \\ &= \text{Rés}\left[\frac{g'(t)}{nu(t)^n} - \left(\frac{g(t)}{nu(t)^n}\right)'\right] dt \end{aligned}$$

$$= \text{Rés}\, \frac{g'(t)}{nu(t)^n}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\, \text{Rés}\, \frac{g'(t)\, R(t)^n}{t^n}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \times \text{coeff de } t^{n-1} \text{ dans } g'(t)\, R(t)^n.$$

Comme les calculs sont réversibles, l'équivalence entre la formule d'inversion et la propriété d'invariance est claire.

2.4.2. Depuis Pólya [26], la formule d'inversion est souvent utilisée en combinatoire pour calculer les coefficients de certaines séries génératrices (l'exemple canonique est celui de l'espèce A des arborescences qui satisfait l'équation $A = X \cdot \exp(A)$, voir Moon [24]).

Il existe déjà une démonstration purement combinatoire de la formule d'inversion (Raney [27]). Cette démonstration repose sur des concepts différents de ceux qui seront utilisés dans la démonstration qui suit. Au chapitre 4, nous donnerons une autre démonstration de la formule d'inversion.

THÉORÈME 2 (Inversion de Lagrange). *Soient R et F des espèces et soit A_R l'espèce des arborescences R-enrichies. On a pour $n \geqslant 1$:*

$$F(A_R)[n] \equiv F'R^n[n-1]$$

(le signe $\equiv$ signifie équipotence).

Preuve. Rappelons (Ex. 15) que A_R satisfait l'équation

$$A_R = X \cdot R(A_R).$$

Ce qui entraîne par dérivation

$$\begin{aligned} A'_R &= R(A_R) + X \cdot R'(A_R)\, A'_R \\ &= R(A_R) + C_R A'_R \end{aligned}$$

et par itération $(C_R = X \cdot R'(A_R))$

$$\begin{aligned} &= R(A_R)(1 + C_R + C_R^2 + \cdots) \\ &= R(A_R)\, \frac{1}{1 - C_R}. \end{aligned}$$

A ce point, nous désirons remplacer $1/(1 - C_R)$ par $S(C_R)$, où S est l'espèce des permutations. Nous avons besoin d'interpréter combinatoirement le résultat de ce remplacement.

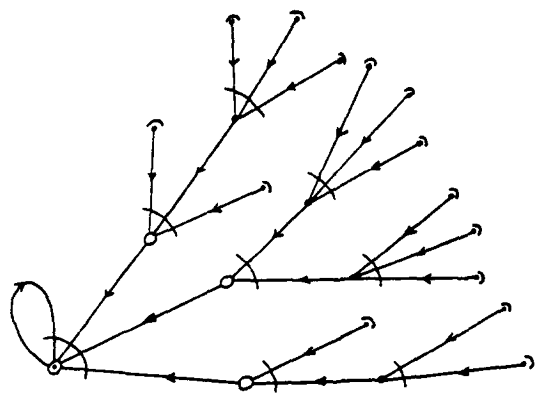


FIGURE 11

LEMME 1 (G. Labelle [20]). *L'espèce $C_R = X \cdot R'(A_R)$ coïncide avec celle des contractions R-enrichies.* (*Voir* 1.3 *et Ex.* 5.)

En effet, considérons une contraction R-enrichie $\phi: E \to E$. Soit x_0 le point de convergence de ϕ. On peut partager E en deux morceaux: $E = \{x_0\} + E - \{x_0\}$. Sur le second morceau, il y a une structure de R'-assemblée de A_R-structure comme on le voit sur la figure 11 (c'est la boucle qui explique la présence de la dérivée dans la formule $C_R = X \cdot R'(A_R)$). *Inversement.*

LEMME 2 (G. Labelle). *Le résultat de la substitution de C_R dans l'espèce S des permutations coïncide avec l'espèce D_R des endofonctions R-enrichies.*

Preuve. Le lemme affirme que l'on a $S(C_R) = D_R$. Utilisons la décomposition d'une endofonction en permutations et arborescences telle que

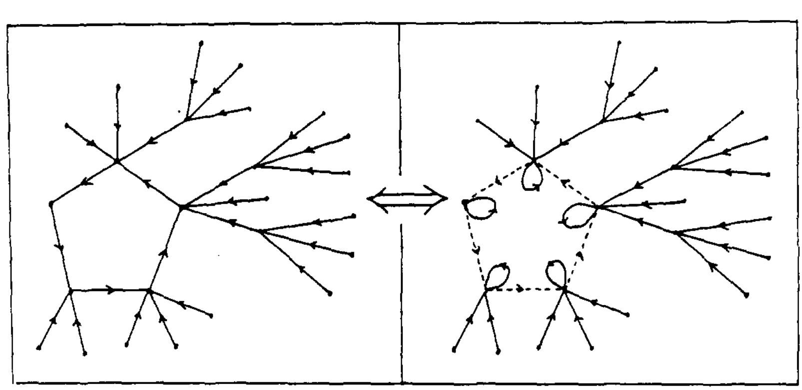


FIGURE 12

décrite dans l'exemple 12. Remplaçons les arborescences de cette décomposition par des contractions. Si on compare, en chaque point, la fibre de l'endofonction avec la fibre de la contraction "contenant" ce point, on se rend compte qu'elles sont en bijection (elles coïncident si le point n'est pas périodique). On peut transporter ensuite les R-structures le long de ces bijections. Cela montre que les endofonctions R-enrichies sont en bijection canonique avec les assemblées permutées de contractions R-enrichies.

On poursuit le démonstration du théorème en prenant la *dérivée* de $F(A_R)$:

$$\begin{aligned} F(A_R)' &= F'(A_R)\,A_R' \\ &= F'(A_R)\,R(A_R)\,\frac{1}{1-C_R} \\ &\equiv F'(A_R)\,R(A_R)\,D_R. \end{aligned}$$

LEMME 3 (G. Labelle) (Lemme du repartage). *Soit G une espèce quelconque. Une structure d'espèce $G(A_R)\,D_R$ sur un ensemble E peut s'interpréter comme la donnée d'un partage $E=E_1+E_2$ dont le premier morceau E_1 est muni d'une G-structure γ et le second morceau E_2 est muni d'une fonction R-enrichie $\lambda\colon E_2\to E$.*

Preuve. Soit (F_1, F_2, g, f) une structure d'espèce $G(A_R)\cdot D_R$ sur E. On a $E=F_1+F_2$. On peut décrire g comme une forêt d'arborescences R-enrichies dont l'ensemble des racines est muni d'une G-structure γ. Soit E_1 l'ensemble de ces racines et soit E_2 le complémentaire. Cette forêt d'arborescences, réunie à l'endofonction f, définit une fonction R-enrichie $\lambda\colon E_2\to E$. (Voir Fig. 13.) Inversement, partant de $(E_1, E_2, \gamma, \lambda)$, on retrouve d'abord F_1 comme l'ensemble de tous les points de E qui sont ultimement transformés dans E_1 par λ. On complète la démonstration en méditant sur la figure 13.

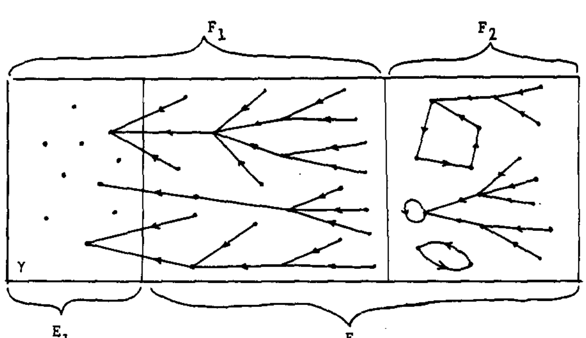


FIGURE 13

Nous utiliserons maintenant ce lemme pour calculer la cardinalité de $(G(A_R)R_R)[n]$. En effet, les fonctions R-enrichies $\lambda: E_2 \to E$ *coïncident* avec les fonctions R-enrichies $\lambda: E_2 \to [n]$ dans le cas où $E = [n]$ (voir la remarque précédant l'exemple 9). On a donc

$$(G(A_R)D_R)[n] = (G \cdot R^n)[n].$$

Pour terminer, remarquons que nous désirons calculer $F(A_R)[n]$ et si $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} F(A_R)[n] &= F(A_R)[n-1] \\ &\equiv F'(A_R)\, R(A_R)\, D_R[n-1] \\ &\equiv (F'R)\, R^{n-1}[n-1] \\ &= F'R^n[n-1]. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

3. Dénombrements des types de structures

3.0. Dans ce chapitre, nous chercherons à résoudre le problème du dénombrement des *types* de structures d'une espèce donnée M. Il nous suffira de calculer, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la cardinalité de l'ensemble $\pi_0(M[n])$ des orbites de $M[n]$ sons l'action de $[n]!$. Autrement dit, nous voulons identifier la série génératrice

$$\tilde{M}(x) = \sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Card} \pi_0(M[n])\, x^n.$$

Il est souvent impossible de décrire $\tilde{M}(x)$ explicitement. Cependant, si on dispose d'une équation fonctionnelle, on pourra calculer les coefficients de $\tilde{M}(x)$ par récurrence. La technique courante pour calculer le nombre de classes d'isomorphismes est due à Pólya. Elle fait usage d'un certain polynôme indicateur des *cycles* (Pólya [26]). Nous calculerons plutôt une *série indicatrice* Z_M. Nous obtiendrons un théorème de *substitution* pour les séries indicatrices. Ce résultat nous permettra souvent de calculer les coefficients de Z_M par *récurrence.* Nous suivrons une voie moins algébrique et plus combinatoire que celle de Pólya. De cette facon, nous espérons montrer le lien direct entre le problème du dénombrement des structures et celui du dénombrement des *types* de structures.

Rappelons que calculer $\tilde{M}(x)$ revient à calculer la cardinalité d'une *espèce associée* $\tilde{M}$ (Prop. 1):

$$\tilde{M}(x) = \operatorname{Card} \tilde{M}.$$

Les éléments de $\tilde{M}[E]$ sont les couples (σ, s), où $s \in M[E]$ et $\sigma \in E!$ est un automorphisme de s. On constate aisément que la relation $P = M + N$ entraîne $\tilde{P} = \tilde{M} + \tilde{N}$ et aussi que $P = M \cdot N$ entraîne $\tilde{P} = \tilde{M}\tilde{N}$. Supposons maintenant que $P = M(N)$, que peut-on dire de $\tilde{P}$? Par exemple, on a le résultat suivant qui est évident:

PROPOSITION 6. *Si* $P = 1/(1-N)$ *alors*

$$\tilde{P} = \frac{1}{1-\tilde{N}}.$$

On a aussi un résultat bien connu (Harary et Palmer [15]):

PROPOSITION 7. *Si* $P = \exp(N)$ *alors*

$$\tilde{P}(x) = \exp\left[\sum_{n \geqslant 1} \frac{\tilde{N}(x^n)}{n}\right].$$

Nous démontrerons que:

PROPOSITION 8. *Soit S l'espèce des permutations. Si* $P = S(N)$ *alors*

$$\tilde{P}(x) = \prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - \tilde{N}(x^n)}.$$

La difficulté réside dans le fait que la relation $\widetilde{M(N)}(x) = \tilde{M}(\tilde{N}(x))$ est fausse. Les exemples montrent que la nature de la réponse dépend fortement de la structure interne du substituant et très peu de sa cardinalité. Nous allons développer un concept plus fin de cardinalité:

$$Z\colon \mathbf{E}\,\|X\| \to \mathbf{Z}\{\{x\}\}$$

à valeur dans un anneau $\mathbf{Z}\{\{x\}\}$ de séries formelles en une infinité d'indéterminées $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Cet anneau est muni d'une opération de substitution: si $f = f(x_1, \ldots)$ et $g = g(x_1, \ldots)$ alors

$$f(g) = f(g_1, g_2, \ldots),$$

où

$$g_i = g(x_i, x_{2i}, \ldots).$$

Nous démontrerons un théorème de substitution:

$$Z_{M(N)} = Z_M(Z_N).$$

De plus, on aura

$$M(x) = Z_M(x, 0, 0, \ldots),$$
$$\tilde{M}(x) = Z_M(x, x^2, x^3, \ldots)$$

et nous obtiendrons le résultat suivant:

PROPOSITION 9. *Si $P = M(N)$ alors*

$$\tilde{P}(x) = Z_M(\tilde{N}(x), \tilde{N}(x^2), \ldots).$$

Nous pourrions donner des démonstrations combinatoires complètes des résultats de ce chapitre, mais au coût d'une artillerie catégorique lourde. Nous avons choisi une approche intermédiaire qui utilisera un peu d'algèbre comme le principe du prolongement des identités algébriques. Cela donne un texte de lecture plus facile.

3.2. Le problème est de calculer la cardinalité de $\widetilde{M(\tilde{N})}$. Pour cela, nous chercherons à comprendre sa structure combinatoire. Un élément de $\widetilde{M(\tilde{N})}[E]$ est un couple (σ, h), où h est un élément de $M(N)[E]$ et σ est un automorphisme de h. L'assemblée h détermine une relation d'équivalence R sur E. σ est un automorphisme de R, ce qui signifie que σ est *compatible* avec R. Le quotient E/R est donc muni d'une permutation induite σ/R. Cette permutation se décompose en cycles. Nous commencerons par supposer que σ/R est circulaire.

DÉFINITION 9. Une *couronne* de N-structures est une assemblée $h \in \exp(N)$ *munie* d'un automorphisme σ permutant ciculairement ses membres. La *longueur* d'une couronne est le nombre des membres de l'assemblée. Notons $C_n(N)$ l'espèce des couronnes (de N-structures) dont la longueur est n.

PROPOSITION 10.

$$\operatorname{Card} C_n(N) = \tilde{N}(x^n)/n.$$

Preuve. Montrons d'abord comment, à partir d'un élément de $\tilde{N}(X^n)$, on peut fabriquer une couronne. Un élément l de $\tilde{N}(X^n)[E]$ est une $\tilde{N}$-assemblée d'ordres linéaires de cardinalité n. Cet élément l définit une partition P de E; l'ensemble E/P des classes est muni d'une $\tilde{N}$-structure (τ, t) et chaque classe est un ordre linéaire de cardinalité n. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ soit C_i l'ensemble de tous les éléments de rang i dans ces ordres linéaires. Si on envoie chaque

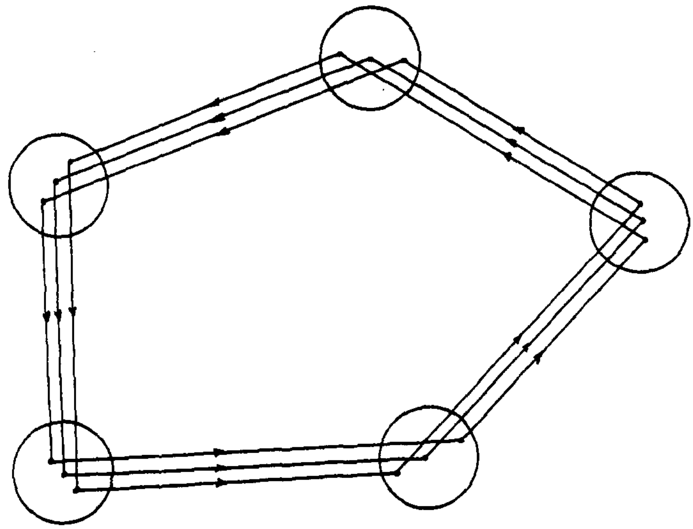


FIGURE 14

élément dans son successeur, on obtient des bijections $\sigma_i: C_i \to C_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. On a une chaîne

$$C_1 \to C_2 \to C_3 \cdots \to C_n.$$

Comme chaque C_i est un système de représentants de la partition P, on a une structure t_i sur C_i par transport de la N-structure t de l'assemblée. On a aussi un automorphisme τ_1 de t_1 en transportant τ sur C_1. Nous allons fermer circulairement la chaîne d'isomorphismes de N-structures

$$(C_1, t_1) \xrightarrow{\sigma_1} (C_2, t_2) \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} (C_n, t_n)$$

en définissant un isomorphisme $\sigma_n: (C_n, t_n) \to (C_1, t_1)$. Il suffit de prendre $\sigma_n = \tau_1(\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^{-1}$. On a obtenu une *couronne* (σ, h) de longueur n sur E. De plus, dans cette couronne, il y a une N-structure *initiale* (C_1, t_1). Inversement, supposons que l'on ait une couronne $(\sigma, h) \in C_n(N)[E]$ *marquée* d'une N-structure initiale (C_1, t_1). Prenant les images successives de (C_1, t_1) par σ on obtient une chaîne

$$(C_1, t_1) \xrightarrow{\sigma_1} (C_2, t_2) \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} (C_n, t_n).$$

Chaque élément $x_1 \in C_1$ est le premier élément d'un ordre linéaire $\{x_1 < \sigma x_1 < \cdots < \sigma^{n-1} x_1\}$. Ce qui nous donne une partition P dont les classes sont des ordres linéaires de grandeur n. L'ensemble E/P des classes est muni d'une N-structure t isomorphe à t_1 (ou à t_i). Pour obtenir un automorphisme τ de t, il suffit de transporter sur E/P l'automorphisme τ_1 de C_1 obtenu en faisant un tour complet de la couronne:

$$\tau_1 = \sigma^n \mid C_1.$$

On a donc montré qu'une $\tilde{N}(X^n)$ structure est équivalente à une couronne de longueur n *marquée* d'un membre initial. Comme il y a n choix possibles pour ce membre initial, on a

$$n \times \operatorname{Card} C_n(N) = \tilde{N}(x^n).$$

COROLLAIRE 1. *Supposons que $N[0] = \varnothing$. L'espèce des couronnes de N-structures a pour cardinalité*

$$\sum\nolimits_{n \geqslant 1} \frac{\tilde{N}(x^n)}{n}.$$

Considérons maintenant un élément $(\sigma, h) \in \widetilde{\exp(N)}[E]$. L'élément h est une assemblée de N-structures; elle induit une relation d'équivalence R sur E. L'automorphisme σ induit une permutation σ/R de E/R. Cette permutation σ/R décompose E en une *assemblée* de couronnes de N-structures. On a donc

COROLLAIRE 2. *Supposons que $N[0] = \varnothing$. On a*

$$\operatorname{Card} \widetilde{\exp(N)} = \exp\left[\sum_{n \geqslant 1} \frac{\tilde{N}(x^n)}{n}\right].$$

Remarquer que ce corollaire entraîne le proposition 7. Soit maintenant S l'espèce des permutations. Considérons la catégorie $\mathrm{el}(S)$ des éléments de S. Le objets de $\mathrm{el}(S)$ sont les couples (E, σ_E), où $\sigma_E \in S[E]$. On a déjà décrit (Ex. 3) le monôme indicateur des cycles $I(\sigma_E) = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$. L'ensemble $\pi_0(S)$ des composantes connexes du groupoïde $\mathrm{el}(S)$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Mon}(x)$ des monômes en les indéterminées $x_1, x_2, x_3, \ldots$. De plus, si $I(\sigma_E) = \mathbf{x} = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$, la cardinalité du groupe des automorphismes de l'objet (E, σ_E) est égale à

$$\operatorname{aut}(\mathbf{x}) = 1^{d_1} 2^{d_2} \cdots n^{d_n} d_1! \cdots d_n!.$$

Considérons maintenant un élément $(\sigma, h) \in \widetilde{\exp(N)}[E]$. On sait que h détermine une relation d'équivalence R sur E compatible avec σ. Nous dirons que (σ, h) est de *classe* $\mathbf{x} = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ si on a $I(\sigma/R) = \mathbf{x}$, où σ/R est la permutation induite par σ sur le quotient E/R. En particulier (σ, h) est de classe x_n si et seulement si c'est une couronne le longueur n. Avec ces conventions, on a:

PROPOSITION 11. *L'espèce des* assemblées de couronnes *(de N-structures) de classe* $\mathbf{x} = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ *a pour cardinalité*

$$\frac{1}{\operatorname{aut}(\mathbf{x})} \tilde{N}(x)^{d_1} \tilde{N}(x^2)^{d_2} \cdots \tilde{N}(x^n)^{d_n}.$$

Preuve. En effet cette espèce s'exprime comme le produit des puissances divisées

$$\gamma_{d_1}(C_1(N))\, \gamma_{d_2}(C_2(N)) \cdots \gamma_{d_n}(C_n(N)).$$

Sa cardinalité est donc

$$\frac{1}{d_1!} \tilde{N}(x)^{d_1} \frac{1}{d_2!} \left(\frac{\tilde{N}(x^2)}{2}\right)^{d_1} \cdots \frac{1}{d_n!} \left(\frac{\tilde{N}(x^n)}{n}\right)^{d_n}.$$

3.2.1. Soulignons maintenant que $\tilde{M}$ est une espèce munie d'une projection $M \to S$. Ce qui entraîne que $\tilde{M}$ définit un foncteur M^P : el$(S) \to$ E (voir 1.3). La valeur de M^P en (E, σ_E) est l'ensemble des éléments $t \in M[E]$ laissés *inchangés* par σ_E. Considérons maintenant un foncteur arbitraire W: el$(S) \to E$. Il est clair que l'expression Card $W[\mathbf{x}]$ a un sens pour $\mathbf{x} \in \operatorname{Mon}(x)$. Posons

$$Z_W = \sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Mon}(x)} \operatorname{Card} W[\mathbf{x}] \frac{\mathbf{x}}{\operatorname{aut}(\mathbf{x})}.$$

$Z_W = Z_W(x_1, x_2, \ldots)$ est une série formelle. Pour toute espèce N telle que $N[0] = \varnothing$, nous allons définir une *substitution* $W\{N\}$ de sorte que si $W = M^P$, on ait

$$\widetilde{M(N)} = M^P \{N\}.$$

DEFINITION 10. Une structure d'espèce $W\{N\}$ sur E est la donnée de

(1) une assemblée h de N-structures sur E,

(2) un automorphisme σ de h,

(3) une W-structure sur (P, σ_P), où P est l'ensemble des membres de h et σ_P est la permutation de P induite par σ.

Il est clair que l'on a

$$M^P \{N\} = \widetilde{M(N)}$$

car si $W = M^P$, la W-structure sur (P, σ_P), dans la définition ci-haut, est une M-structure laissée invariante par σ_P.

PROPOSITION 12. *Avec les hypothèses précédentes, on a*

$$\operatorname{Card} W\{N\} = Z_W(\tilde{N}(x), \tilde{N}(x^2), \ldots).$$

Preuve. On a une décomposition

$$W = \sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Mon}(x)} W_{\mathbf{x}},$$

où $W_{\mathbf{x}}$ est l'espèce des W-structures portées par les objets (E, σ_E) de type $\mathbf{x}$. Cette décomposition induit des décompositions

$$W\{N\} = \sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Mon}(x)} W_{\mathbf{x}}\{N\},$$

$$Z_W = \sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Mon}(x)} Z_{W_{\mathbf{x}}}.$$

Il suffira donc de montrer que $\operatorname{Card} W_{\mathbf{x}}\{N\} = Z_{W_{\mathbf{x}}}(\tilde{N}(x), \tilde{N}(x^2), \ldots)$. Mais la proposition 11 montre que si $\mathbf{x} = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$, alors

$$\operatorname{Card} W_{\mathbf{x}} = \operatorname{Card} W[\mathbf{x}] \times \frac{1}{\operatorname{aut}(\mathbf{x})} N(x)^{d_1} \cdots N(x^n)^{d_n}$$

ce qui achève la démonstration puisque l'on a par définition

$$Z_{W_{\mathbf{x}}} = \operatorname{Card} W[\mathbf{x}] \frac{x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}}{\operatorname{aut}(\mathbf{x})}.$$

COROLLAIRE. $\operatorname{Card} \widetilde{M(N)} = Z_{M^{\wp}}(\tilde{N}(x), \tilde{N}(x^2), \ldots)$.

Preuve. On a successivement

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} \widetilde{M(N)} &= \operatorname{Card} M^{\wp}\{N\} \\ &= Z_{M^{\wp}}(\tilde{N}(x), \tilde{N}(x^2), \ldots). \end{aligned}$$

Pour rendre ce corollaire *effectif* (Prop. 9) il faut pouvoir calculer $Z_{M^{\wp}}$. Nous donnerons trois formules permettant de calculer $Z_{M^{\wp}}$. Comme cela ne crée pas d'ambiguités, nous écrirons Z_M plutôt que $Z_{M^{\wp}}$.

Pour chaque $\sigma \in [n]!$, soit $p_M(\sigma)$ le nombre de M-structures laissées fixes par σ. Ce nombre ne dépend que de la classe d'isomorphisme $\mathbf{x} = I(\sigma)$. On peut donc écrire $p_M(\mathbf{x})$ sans ambiguité. D'autre part, soit $\pi_0(M)$ l'ensemble des *types* de structures d'espèce M. Pour chaque $t \in \pi_0(M)$, soit G_t le groupe des automorphismes d'une structure de type t (n'importe laquelle, elles sont toutes isomorphes!).

PROPOSITION 13. *La série formelle $Z_M = Z_{\mathscr{M}}$ possède les trois expressions suivantes*:

$$Z_M = \sum_{x \in \mathrm{Mon}(x)} P_M(x) \frac{\mathbf{x}}{\mathrm{aut}(\mathbf{x})}, \tag{1}$$

$$Z_M = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in [n]!} p_M(\sigma) I(\sigma), \tag{2}$$

$$Z_M = \sum_{t \in \pi_0(M)} \frac{1}{\mathrm{Card}\, G_t} \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma). \tag{3}$$

Cette proposition est conséquence d'un lemme bien connu qui suit. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour chaque $x \in X$, soit G_x le sous-groupe stabilisateur de x. Pour chaque $\sigma \in G$ soit $p_X(\sigma)$ le nombre de points de X laissés inchangés par σ. Soit $f: X \to \mathbf{R}$ une fonction invariante sous l'action de G et $u: G \to \mathbf{R}$ une fonction invariante par conjugaison.

LEMME. *On a les identités*

$$\frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{x \in X} f(x) = \sum_{x \in X/G} \frac{f(x)}{\mathrm{Card}\, G_x}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{\sigma \in G} u(\sigma)\, p_X(\sigma) = \sum_{x \in X/G} \frac{1}{\mathrm{Card}\, G_x} \sum_{\sigma \in G_x} u(\sigma),$$

où la sommation dans les seconds membres s'effectue sur un système complet de représentants de l'ensemble X/G des orbites de X.

Preuve de la proposition. L'expression (1) est par définition égale à $Z_{\mathscr{M}}$. Si on applique la première identité du lemme au cas $G = [n]!$, $X = [n]!$ (l'action étant par conjugaison) et $f(\sigma) = p_M(\sigma) I(\sigma)$, on obtient l'équivalence entre les expressions (1) et (2). Finalement, si on applique la seconde identité du lemme au cas $G = [n]!$, $X = M[n]$ et $u(\sigma) = I(\sigma)$, on voit que les expressions (2) et (3) coïncident.

Toute espèce M est évidemment la somme de ses composantes connexes:

$$M = \sum_{t \in \pi_0(M)} M_t.$$

La proposition précédente montre que l'on a

$$Z_{M_t} = \frac{1}{\mathrm{Card}\, G_t} \sum_{\sigma \in G_t} I(\sigma).$$

Nous prendrons souvent la notation Z_t pour désigner ce polynôme. C'est le polynôme *indicateur des cycles* du type t.

EXEMPLE 21. Si $M = \exp(X)$ on a $\pi_0(\exp) = \mathbf{N}$ et

$$Z_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in [n]!} I(\sigma)$$

ce qui entraîne (voir Chap. 6, Ex. 36)

$$Z_{\exp} = \exp\left[\sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{n}\right].$$

EXEMPLE 22. Soit C l'espèce des permutations circulaires. On a $\pi_0(C) = \mathbf{N} - \{0\}$

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \phi(d)\, x_d^{n/d},$$

où ϕ est la fonction d'Euler. Par suite,

$$Z_C = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln \frac{1}{1 - x_n}.$$

EXEMPLE 23. Si S est l'espèce des permutations, la formule (1) nous donne

$$Z_S = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Mon}(x)} p_S(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\mathrm{aut}(\mathbf{x})}.$$

Comme on a de plus

$$p_S(\mathbf{x}) = \mathrm{aut}(\mathbf{x})$$

cela entraîne que

$$Z_S = \prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - x_n}.$$

3.2.2. Nous allons montrer comment, dans certains cas, on peut établir une équation fonctionnelle permettant de calculer les coefficients de Z_M par *récurrence.* Considérons l'anneau $\mathbf{Z}\{\{x\}\}$ des séries formelles

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Mon}(x)} f[\mathbf{x}] \frac{\mathbf{x}}{\mathrm{aut}(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

où les coefficients $f[\mathbf{x}] \in \mathbf{Z}$. Posons $f(0) = f(0, 0, 0, \ldots)$. Nous allons définir la *substitution* $g(f)$ de $g, f \in \mathbf{Z}\{\{x\}\}$ dans le cas où $f(0) = 0$. Posons

$$f_i = f(x_i, x_{2i}, \ldots).$$

DÉFINITION 11. Le résultat $g(f)$ de la substitution de f dans g est la série formelle $g(f) = g(f_1, f_2, \ldots)$.

Cette opération de substitution a beaucoup des propriétés de la substitution ordinaire des séries formelles à *une* variable; elle est associative et la substitution de f définit un endomorphisme $g \mapsto g(f)$ de l'anneau $\mathbf{Z}\{\{x\}\}$. De plus, si l'on pose

$$f' = \frac{\partial}{\partial x_1} f$$

on a

$$g(f)' = g'(f) f'.$$

THÉORÈME 3. *La transformation* $Z\colon \mathbf{E}\,\|X\| \to \mathbf{Z}\{\{x\}\}$ *a les propriétés suivantes*:

$$Z_M(x, 0, 0, \ldots) = M(x), \tag{1}$$

$$Z_M(x, x^2, \ldots) = \tilde{M}(x), \tag{2}$$

$$Z_{M+N} = Z_M + Z_N, \tag{3}$$

$$Z_{M \cdot N} = Z_M \cdot Z_N, \tag{4}$$

$$Z_{M(N)} = Z_M(Z_N), \tag{5}$$

$$Z_{M'} = Z'_M, \tag{6}$$

$$Z_X = x_1, \tag{7}$$

$$Z_{M \times N} = Z_M \times Z_N. \tag{8}$$

Dans la dernière ligne (8) nous avons inclus le produit cartésien $M \times N$ (cet ami oublié). Le membre de droite de (8) doit être interprété comme le produit des deux séries *coefficient par coefficient*. Toutes ces identités sont soit triviales, soit déjà démontrées à l'exception de (5):

PROPOSITION 14. *Si* $P = M(N)$ *alors*

$$Z_P = Z_M(t_1, t_2, \ldots),$$

où

$$t_i = Z_N(x_i, x_{2i}, \ldots).$$

Nous donnerons une démonstration utilisant le principe du prolongement des identités algébriques. Soit R une espèce arbitraire ($R[0] = \varnothing$). Calculons $\widetilde{P(R)}$. On a, en vertu du corollaire de la proposition 11, les égalités

$$\widetilde{P(R)}(x) = Z_P(\tilde{R}(x), \tilde{R}(x^2), \ldots)$$

et aussi

$$\widetilde{M(N(R))}(x) = Z_M(\widetilde{N(R)}(x), \widetilde{N(R)}(x^2), \ldots).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{N(R)}(x^n) &= Z_N(\tilde{R}(x^n), \tilde{R}(x^{2n}), \ldots)\\ &= t_n(\tilde{R}(x), \tilde{R}(x^2), \ldots).\end{aligned}$$

Ce qui entraîne, par substitution

$$\widetilde{P(R)}(x) = Z_M(t_1(\tilde{R}(x), \ldots), t_2(\tilde{R}(x), \ldots), \ldots).$$

Comme les variables $\tilde{R}(x^n)$ ($n \geqslant 1$) sont suffisament générales, le résultat est démontré.

Remarque. Nous dirons que Z_M est la série *indicatrice* de M.

EXEMPLE 24. Soit R une espèce. Supposons que l'on veuille calculer la série indicatrice Z_A de l'espèce A des arborescences R-enrichies. On a

$$A = X \cdot R(A)$$

ce qui entraîne

$$Z_A = x_1 Z_R(Z_A).$$

Nous verrons en 3.3 que cette équation est suffisante pour déterminer entièrement Z_A si on connaît déjà les coefficients de Z_R. Si on cherche seulement à calculer $\tilde{A}(x)$, on trouve

$$\tilde{A}(x) = xZ_R(\tilde{A}(x), \tilde{A}(x^2), \ldots).$$

EXEMPLE 25. Supposons que B satisfasse à l'équation

$$B = X + T(B),$$

où

$$T[0] = T[1] = \varnothing.$$

On obtient

$$Z_B = x_1 + Z_T(Z_B),$$
$$\tilde{B}(x) = x + Z_T(\tilde{B}(x), \tilde{B}(x^2),\ldots)$$

ce qui est encore suffisant pour déterminer Z_B et $\tilde{B}(x)$ si l'on connaît Z_T explicitement.

EXEMPLE 26. Cette fois, un exemple particulier: déterminons la série indicatrice Z_P de l'espèce des parenthésages commutatifs. On a

$$P(X) = X + \frac{1}{2!} P(X)^2$$
$$Z_{X^2/2!} = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2).$$

Ce qui donne l'équation

$$Z_P(x_1, x_2,\ldots) = x_1 + \tfrac{1}{2}(Z_P(x_1,\ldots)^2 + Z_P(x_2,\ldots)).$$

On vérifie que la série

$$Z_P(x_1, x_2, 0,\ldots, 0, x_{2^i}, 0,\ldots, x_{2^{i+1}}, 0, \ldots)$$

satisfait *aussi* à cette équation. Comme la solution est unique (Théorème 4), cela montre que Z_P ne dépend que des variables x_{2^i} $(i \geqslant 0)$ (les groupes d'automorphismes des P-structures sont des 2-groupes). Posons $y_i = x_{2^i}$ $(i \geqslant 0)$.

$$Z_P = z(y_0, y_1,\ldots),$$
$$z_n = z(y_0, y_1,\ldots, y_n, 0, 0,\ldots).$$

On a

$$z_n^2 - 2z_n + 2y_0 + z_{n-1}(y_1, y_2,\ldots, y_n) = 0.$$

Soit $z = \psi(x)$ la solution de l'équation

$$z^2 - 2z + 2x = 0.$$

On a le développement en série

$$\psi(x) = x + \sum_{k \geqslant 2} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3) \frac{x^k}{k!}$$

et la récurrence

$$z_n = \psi(y_0 + \tfrac{1}{2} z_{n-1}(y_1, \ldots, y_n)).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
z_0 &= \psi(y_0), \\
z_1 &= \psi(y_0 + \tfrac{1}{2}\psi(y_1)), \\
z_2 &= \psi(y_0 + \tfrac{1}{2}\psi(y_1 + \tfrac{1}{2}\psi(y_2))), \\
&\vdots \\
Z_P &= \psi(x_1 + \tfrac{1}{2}\psi(x_2 + \tfrac{1}{2}\psi(x_4 + \cdots))).
\end{aligned}$$

On aura évidemment

$$\tilde{P}(x) = \psi(x + \tfrac{1}{2}\psi(x^2 + \tfrac{1}{2}\psi(x^4 + \cdots))).$$

3.2.3. Le *théorème des fonctions implicites pour les séries indicatrices.*

Pour calculer une série indicatrice on peut souvent utiliser une équation fonctionnelle et le *théorème des fonctions implicites.* Nous voulons maintenant énoncer et démontrer ce théorème des fonctions implicites. Pour ne pas accroître inutilement la complexité de l'énoncé et de la démonstration, nous nous restreindrons au cas de deux variables seulement.

Soit $\mathbf{R}\{\{x, y\}\}$ l'anneau des séries formelles en la double infinité d'indéterminées $\{x_1 . y_1, x_2, y_2, \ldots\}$. Soit $f \in \mathbf{R}\{\{x, y\}\}$ on a

$$\begin{aligned}
f &= f(x, y) \\
&= f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
f(0, 0) &= f(0, 0, 0, \ldots), \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y_1}, \\
f_i &= f(x_i, y_i, x_{2i}, y_{2i}, \ldots).
\end{aligned}$$

Soit maintenant $u, v \in \mathbf{R}\{\{x, y\}\}$. Si $u(0,0) = v(0,0) = 0$, on définit la *substitution* $f(u, v)$ comme suit:

$$f(u, v) = f(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots).$$

Supposons que f, $g \in \mathbf{R}\{\{x, y\}\}$ satisfont aux conditions

$$f(0,0) = g(0,0) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (0,0) \neq 0 \tag{2}$$

THÉORÈME 4. *Si les conditions précédentes sont satisfaites, alors il y a un et un seul couple* (u, v) *d'éléments de* $\mathbf{R}\{\{x, y\}\}$ *tel que* $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 0$ *et*

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v).$$

(Il faut interpréter l'égalité $x = f(u, v)$ *comme signifiant* $x_1 = f(u, v)$; *elle entraîne que* $x_i = f(u_i, v_i)$ *pour tout* $i \geqslant 1$.)

Pour démontrer le résultat nous adopterons des notations vectorielles:

$$z_i = (x_i, y_i),$$
$$h = (f, g),$$
$$w_i = (u_i, v_i).$$

On a

$$h = h(z) = h(z_1, z_2, \dots),$$
$$w = w(z) = w(z_1, z_2, \dots),$$
$$w_i = w(z_i, z_{2i}, \dots)$$

et le système à résoudre s'écrit

$$z_1 = h(w_1, w_2, \dots). \tag{I}$$

Supposons le système déjà résolu et substituons $z_2 = 0$, $z_3 = 0, \dots$. On obtient:

$$z_1 = h(w_1(z_1, 0, 0, \dots), 0, 0, \dots).$$

Etant donné l'hypothèse sur le déterminant du jacobien, cela montre que $w_1(z_1, 0, 0,...)$ est uniquement déterminé.

Plus généralement, posons

$$\begin{aligned} w^n &= w(z_1,..., z_n, 0, 0,...) \\ &= w^n(z_1,..., z_n). \end{aligned}$$

Si on effectue les substitutions $z_{n+1} = 0$, $z_{n+2} = 0$,... l'équation (I) devient

$$z_1 = h(w^n(z_1,..., z_n), a_2,..., a_n, 0, 0,...),$$

où

$$a_i = w^{[n/i]}(z_i, z_{2i},..., z_{[n/i]i}).$$

Supposant que les w^r sont connus pour $1 \leqslant r < n$, on voit que cette dernière équation prend la forme

$$z_1 = k(w^n, z_2,..., z_n)$$

ce qui entraîne l'existence d'une seule solution $w^n = w^n(z_1,..., z_n)$ car le jacobien de $k(z_1, z_2,..., z_n)$ par rapport à z_1 coïncide avec le jacobien de h par rapport à z_1 (à l'origine $z_1 = 0$). L'unicité de w^{n-1} entraîne que

$$w^n(z_1,..., z_{n-1}, 0) = w^{n-1}.$$

Le prolongement $w = \lim_{n\to\infty} w^n$ est solution unique du système (I).

4. Espèces linéaires

4.0. Dans ce chapitre, nous étudierons l'une des variations possibles du concept d'espèce: le concept d'espèce *linéaire*. Nous avons poursuivi précédemment une *analogie* entre la catégorie des espèces et l'anneau des séries formelles de Hurwitz. Pour ce faire, nous avons utilisé la notation $\mathbf{E}\,\|X\|$. L'analogie que nous poursuivrons maintenant sera entre l'anneau des séries formelles *ordinaires* et la catégorie des espèces *linéaires*; nous désignerons celle-ci par la notation $\mathbf{E}[\![X]\!]$. Nous verrons que $\mathbf{E}[\![X]\!]$ est en un sens un sous-anneau de $\mathbf{E}\,\|X\|$. Après un parcours rapide des propriétés élémentaires de $\mathbf{E}[\![X]\!]$, nous démontrerons, dans ce contexte, la formule d'Inversion de Lagrange. Cette démonstration est une variation de celle déjà donnée en 2.4; la bijection non canonique entre l'espèce des ordres linéaires et celle des permutations ne joue plus, dans celle-ci, aucun rôle.

4.1. *Définitions, propriétés élémentaires, exemples.*

Désignons par $\mathbf{L}$ la catégorie des ordres linéaires finis et bijections croissantes.

DÉFINITION 12. Une *espèce linéaire* est un foncteur $F: \mathbf{L} \to \mathbf{E}$.

Tout ordre linéaire fini est isomorphe de *manière unique* à un intervalle $[n]$ et un seul. La catégorie $\mathbf{L}$ est donc équivalente à la catégorie *discrète* $\mathbf{N}$: la donnée d'une espèce F est équivalente à la donnée d'une *suite* d'ensembles $(n \mapsto F[n])$. Cette réduction est quelquefois utile, mais nous préférons penser que $F[L]$ est l'ensemble des structures d'espèce F *sur* $L \in \mathbf{L}$: cette façon de voir est plus réaliste, comme le lecteur aura l'occasion de s'en convaincre.

EXEMPLE 27. Une partie $A \subset L \in \mathbf{L}$ est *éparse* si elle ne contient aucune paire de sommets successifs. L'ensemble des parties éparses est une espèce linéaire.

EXEMPLE 28. Une *promenade* (sur $\mathbf{Z}$) est une fonction $\varepsilon: L \to \{-1, +1\}$. Une *boucle* est une promenade telle que

$$\sum_{x \in L} \varepsilon(x) = 0.$$

L'ensemble des promenades (resp. des boucles) est une espèce linéaire.

La *cardinalité* d'une espèce linéaire F est la série

$$F(x) = \operatorname{Card} F = \sum_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Card}(F[n])x^n.$$

Nous adopterons souvent la notation $F(X)$ pour désigner une espèce F et aussi la notation $\mathbf{E}[\![X]\!]$ pour désigner la catégorie des espèces linéaires.

4.2. *Opérations combinatoires*

Dans cette partie, nous décrirons des opérations combinatoires sur les espèces linéaires.

Une *coupure* de $L \in \mathbf{L}$ est un partage $L = L_1 + L_2$ dont le premier morceau L_1 est un *segment inférieur* de L et le second morceau L_2 est un *segment supérieur* de L. On dira aussi *initial* et *terminal* plutôt que inférieur et supérieur.

Le *produit* $F \cdot G$ de deux espèces se définit comme suit:

DÉFINITION 13. Une structure d'espèce $F \cdot G$ sur $L \in \mathbf{L}$ est un quadruplet (L_1, L_2, f, g), où (L_1, L_2) est une coupure $L = L_1 + L_2$ et où $(f, g) \in F[L_1] \times G[L_2]$.

PROPOSITION 15. *Pour* $F, G \in \mathbf{E}[\![X]\!]$ *on a*: $\operatorname{Card} F \cdot G = \operatorname{Card} F \operatorname{Card} G$.

EXEMPLE 29. Soit P l'espèce des promenades, B l'espèce des boucles et R celle des promenades *sans retour* ($\varepsilon : L \to \{-1, 1\}$ est sans retour si $L \neq \varnothing$ et si $\sum_{x \leqslant l} \varepsilon(x) \neq 0$ pour tout $l \in L$). On a une décomposition $P = B \cdot R$.

EXEMPLE 30. Soit $f: L \to L$ une endofonction. Nous dirons que f est *ordonnée* si $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \leqslant f(y)$. Nous dirons que f est *montante* (resp. *descendante*) si on a $x \leqslant f(x)$ (resp. $f(x) \leqslant x$) pour tout $x \in L$. Désignons par C l'espèce des *contractions ordonnées* (voir Ex. 2) et par C^+ (resp. C^-) celle des contractions ordonnées *montantes* (resp. *descendantes*). On a une décomposition $X \cdot C = C^+ \cdot C^-$ (Fig. 15).

Définissons la *substitution* $F(G)$ dans le cas où $G[0] = \varnothing$.

DÉFINITION 14. Une structure d'espèce $F(G)$ sur $L \in \mathbf{L}$ est la donnée: (1) d'un partage $L = L_1 + \cdots + L_r$ en segments non vides, chacun d'eux étant muni d'une G-structure; (2) d'une structure d'espèce F sur l'ensemble ordonné des segments $\{L_1 < L_2 < \cdots < L_r\}$.

PROPOSITION 16. $\operatorname{Card} F(G) = F(G(x))$.

Remarque. Dans la description de la substitution $F(G)$, il est souvent commode d'adapter le choix du support de la F-structure aux conditions particulières d'une situation: ainsi, nous aurions pu "placer" la structure d'espèce F sur l'ensemble des *premiers éléments* des segments du partage. Etc...

EXEMPLE 31. Le domaine d'une endofonction ordonnée f: $L \to L$ se partage de facon unique $L = L_1 + \cdots + L_r$ en segments L_i sur chacun desquels f induit une contraction ordonnée (Fig. 16). On a un partage analogue des endofonctions ordonnées montantes.

EXEMPLE 32. L'exemple précédent se généralise. Soit R une espèce linéaire. Nous dirons qu'une fonction croissante $f: L \to L'$ est R-*enrichie* si chacun des segments fibres $f^{-1}\{l'\}$ ($l' \in L'$) est muni d'une R-structure.

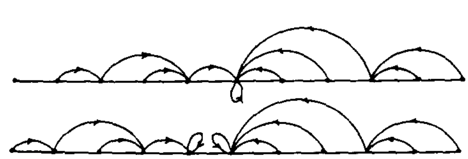


FIGURE 15

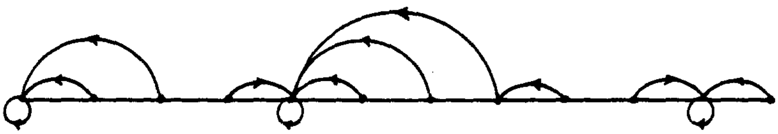


FIGURE 16

Notons F_R l'espèce des endofonctions ordonnées R-enrichies. Notons de plus C_R l'espèce des contractions ordonnées R-enrichies. On a

$$F_R = \frac{1}{1 - C_R}.$$

EXEMPLE 33. L'espèce C^+ des contractions ordonnées montantes satisfait à l'équation

$$C^+ = \frac{1}{1 - C^+} \cdot X.$$

En effet, soit $f: L \to L$ un élément de C^+. Soit $m \in L$ le point de convergence de f (c'est aussi l'élément maximum de L). Considérons le segment (Fig. 17)

$$f^{-1}\{m\} - \{m\} = \{l_1, \ldots, l_r\}.$$

Déplaçons l_i à l'extrémité terminale du segment

$$S_i = \bigcup_{n \geqslant 1} f^{-n}\{l_i\}$$

f "induit" une structure de contraction montante sur $L_i = S_i + \{l_i\}$.

EXEMPLE 34. On peut généraliser l'exemple précédent au cas *enrichi*. Cependant, il faut pour cela remplacer le concept de contraction par celui

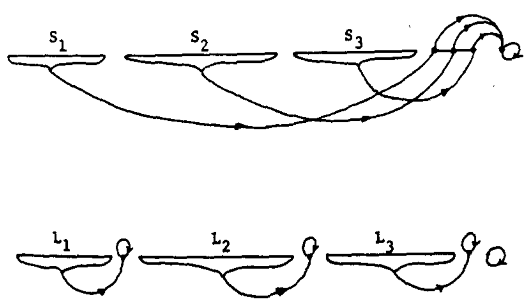


FIGURE 17

d'*arborescence* (1.2, Ex. 5). Pour obtenir une arborescence d'une contraction, il suffit d'éliminer la boucle du point de convergence. Les concepts d'arborescences ordonnées, montantes et descendantes correspondent tout à fait à ceux de contractions ordonnées, montantes et descendantes. Les concepts enrichies *diffèrent* étant donné l'absence de la boucle à la racine de l'arborescence. Soit A_R^+ l'espèce des arborescences ordonnées montantes R-enrichies. On a

$$A_R^+ = R(A_R^+) \cdot X.$$

Si on veut *ajouter* un point supplémentaire $*$ à un ordre linéaire L, il faut indiquer la position relative de $*$ dans L, ce qui se fait par une *coupure* $L = L^- + L^+$ en segments inférieur et supérieur:

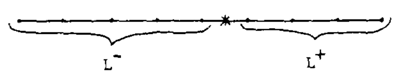


FIGURE 18

Nous dirons que l'ordre linéaire $L^- + \{*\} + L^+$ est une *augmentation* de L. Nous sommes maintenant en position de décrire l'espèce *dérivée* M' d'une espèce linéaire M.

DÉFINITION 15. Un élément de $M'[L]$ est une augmentaion $L^- + \{*\} + L^+$ de L *munie* d'une structure d'espèce M.

On peut aussi *pointer* une espèce linéaire M. Un structure d'espèce $M^\bullet$ sur L est un élément de $L \times M[L]$. On a un isomorphisme $M^\bullet = X \cdot M'$.

PROPOSITION 17. *On a*

$$\operatorname{Card} M' = M(x)'.$$

Toutes les opérations définies jusqu'à maintenant sont *fonctorielles*. Les relations usuelles entre ces opérations se vérifient. Elles ont un sens *combinatoire.*

4.3. *Inversion de Lagrange*

Il s'agit de calculer $F(A(X))$ en sachant que A est solution de l'équation $A(X) = X \cdot R(A(X))$.

THÉORÈME 5 (Inversion de Lagrange pour les espèces linéaires). *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *on a une bijection*

$$[n] \times F(A)[n] \simeq F'R^n[n-1].$$

Preuve. Remarquons que l'espèce A s'identifie à l'espèce A_R^+ des arborescences ordonnées montantes R-enrichies (voir Ex 34). Un peu de calcul différentiel (comme en 2.4) nous montre que

$$F(A)' = F'(A)\,R(A)\,\frac{1}{1 - XR'(A)}.$$

LEMME 1. *L'espèce $X \cdot R'(A)$ coïncide avec l'espèce C_R des contractions ordonnées R-enrichies.*

Preuve. Il suffira d'examiner attentivement les trois figures suivantes. La première illustre une contraction ordonnée R-enrichie et la dernière une structure d'espèce $X \cdot R'(A)$ (Fig. 19).

On sait que $1/(1 - C_R)$ coïncide avec l'espèce F_R des endofonctions ordonnées R-enrichies (voir Ex. 31 et 32).

LEMME 2 (Lemme du repartage). *Soit G une espèce linéaire quelconque. Une structure d'espèce $F_R \cdot G(A)$ sur L s'identifie à un partage $L = L_1 + L_2$, le premier segment L_1 étant muni d'une fonction croissante R-enrichie $f\colon L_1 \to L$, le second segment L_2 étant muni d'une structure d'espèce G.*

La démonstration de ce lemme est une version "linéaire" de celle du lemme 3 en 2.4.

On termine la démonstration du théorème comme en 2.4.

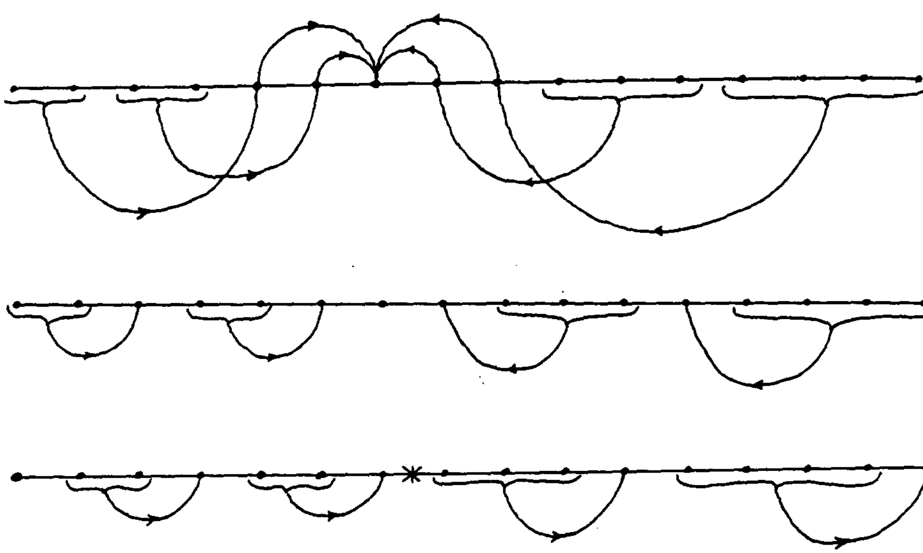


FIGURE 19

4.4. Pour terminer ce chapitre sur les espèces linéaires, nous allons décrire un homomorphisme

$$h\colon \mathbf{E}[\![X]\!] \to \mathbf{E}\,\|X\|.$$

Soit $\mathscr{L} \in \mathbf{E}\,\|X\|$ l'espèce des ordres linéaires. La catégorie $\mathrm{el}(\mathscr{L})$ des éléments de $\mathscr{L}$ (voir 1.1) coïncide avec la catégorie $\mathbf{L}$. Les espèces linéaires sont des foncteurs $\mathrm{el}(\mathscr{L}) \to \mathbf{E}$, ce sont des espèces *relatives* (voir 1.3). Il y a donc équivalence i entre la catégorie $\mathbf{E}[\![X]\!]$ et la catégorie $\mathbf{E}\,\|X\|/\mathscr{L}$. De façon plus explicite, soit F une espèce linéaire. Une structure d'espèce $i(F)$ sur un ensemble E est un couple (l, s), où $l \in \mathscr{L}[E]$ et $s \in F[l]$. On a donc

$$\mathrm{Card}\, i(F)[n] = n!\, \mathrm{Card}\, F[n]$$

et en conséquence

$$\mathrm{Card}\, i(F) = \mathrm{Card}\, F.$$

Le foncteur h est obtenu par composition de i avec le foncteur oubliant $\mathbf{E}\,\|X\|/\mathscr{L} \to \mathbf{E}\,\|X\|$.

PROPOSITION 18. *Le foncteur h préserve la somme, le produit et la substitution.*

5. ESPÈCES SUR PLUSIEURS VARIABLES

5.0. Dans ce chapitre, nous examinerons l'extension, au cas de plusieurs variables, des concepts et résultats des chapitres précédents. Cette extension nous permettra de développer les rudiments de la théorie des équations combinatoires. Nous énoncerons et démontrerons un théorème des espèces implicites analogue au théorème des fonctions implicites.

5.1. *Espèces et opérations*

Soit un entier $d \geqslant 0$. Notons $\mathbf{B}^d$ le produit d fois par lui-même du groupoïde $\mathbf{B}$ des ensembles finis et bijections:

$$\mathbf{B}^d = \mathbf{B} \times \cdots \times \mathbf{B} \qquad (d \text{ fois}).$$

DÉFINITION 16. *Une espèce sur d sortes* est un foncteur $M\colon \mathbf{B}^d \to \mathbf{E}$.

Nous écrirons $M[E]$ ou $M[E_1,..., E_d]$ pour désigner l'ensemble des structures d'espèces M portées par $E = (E_1,..., E_d) \in \mathbf{B}^d$. Les concepts de transport de structures, d'isomorphismes, d'automorphismes sont évidents. Le groupe $E! = E_1! \times \cdots \times E_d!$ agit sur $M[E]$; l'ensemble $\pi_0 M[E]$ des orbites est l'ensemble des types de structures d'espèce M sur E. Soit $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbf{N}^d$, on pose $n! = n_1! \cdots n_d!$; $[n] = ([n_1], \ldots, [n_d])$ et $M[n] = M[n_1, \ldots, n_d] = M[[n_1], \ldots, [n_d]]$. On définit deux séries

$$M(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{n \in \mathbf{N}^d} \operatorname{Card} M[n] \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

$$\tilde{M}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{n \in \mathbf{N}^d} \operatorname{Card}(\pi_0 M[n])\, x^n, \tag{2}$$

où $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}$.

La première est la *cardinalité* de M. La seconde série $\tilde{M}(x)$ peut s'interpréter comme la cardinalité d'une espèce *associée* $\tilde{M}$ (voir 1.1, déf. 2). Un *morphisme* entre deux espèces est une transformation naturelle. On définit aisément la *somme disjointe* d'une famille sommable d'espèces. Passons maintenant à la définition du *produit* $M \cdot N$ de deux espèces. Si $E, F, G \in \mathbf{B}^d$, nous écrirons $E = F + G$ pour exprimer que $E_i = F_i + G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ et nous dirons que (F, G) est un *partage* de E en deux *morceaux*.

DÉFINITION 17. Une structure d'espèce $M \cdot N$ sur $E \in \mathbf{B}^d$ est un quadruplet (F, G, u, v) tel que $E = F + G$ et $(u, v) \in M[F] \times N[G]$.

PROPOSITION 19. *On a*

$$\operatorname{Card} M \cdot N = \operatorname{Card} M \cdot \operatorname{Card} N.$$

Une *partition* P de $E \in \mathbf{B}^d$ est une partition de l'*ensemble total* $E_1 + \cdots + E_d$. Chaque classe $C \in P$ peut être vue comme un multi-ensemble:

$$C = (C \cap E_1, \ldots, C \cap E_d) \in \mathbf{B}^d.$$

Soit N une espèce sur d sortes telle que $N[0] = \varnothing$.

DÉFINITION 18. Une *assemblée* de structures d'espèce N sur $E \in \mathbf{B}^d$ est une partition P de E dont chaque classe C est munie d'une structure d'espèce N. Un *membre* d'une assemblée est une classe $C \in P$ munie de la N-structure correspondante. La *puissance divisée* $\gamma_n(N)$ est l'espèce des assemblées de n membres. L'*exponentielle* $\exp(N)$ est l'espèce de toutes les assemblées de N-structures.

PROPOSITION 20. *On a*

$$\operatorname{Card} \gamma_n(N) = \frac{1}{n!} N(x_1, \ldots, x_d)^n,$$

$$\operatorname{Card} \exp(N) = \exp N(x_1, \ldots, x_n).$$

Passons maintenant à la description de la *substitution*. Soient $N_1, ..., N_r$ des espèces sur d sortes telles que $N_i[0] = \varnothing$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, et soit R une espèce sur r sortes.

DÉFINITION 19. Une structure d'espèce $R(N_1, ..., N_r)$ sur $E \in \mathbf{B}^d$ est un quadruplet (P, χ, α, β), où

(1) P est une partition de E.

(2) χ est une fonction $P \to [r]$ attribuant à chaque classe une sorte.

(3) α est une fonction qui choisit sur chaque classe $C \in P$ une structure d'espèce N_i, où $i = \chi(C)$.

(4) β est une structure d'espèce R sur P considéré comme multi-ensemble: $P = (\chi^{-1}\{1\}, ..., \chi^{-1}\{r\})$.

PROPOSITION 21. *On a*

$$\operatorname{Card} R(N_1, ..., N_r) = R(N_1(x), ..., N_r(x))$$

où

$$x = (x_1, ..., x_d).$$

Remarques. Nous allons éclaircir le sens géométrique ou visuel de l'opération de substitution. Il nous faut comprendre le type général des structures d'espèce $R(N_1, ..., N_r)$. Remarquons d'abord qu'il n'est pas nécessaire que l'ensemble des sortes soit un intervalle. Si l'ensemble des sortes est $\{\circ, \bullet\}$, on peut représenter comme suit un ensemble sur ces deux sortes

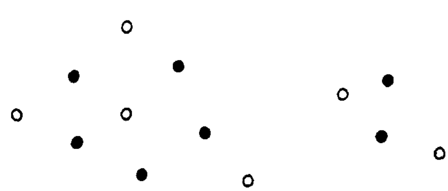


FIGURE 20

Soit M l'espèce des endofonctions (de l'ensemble total) transformant les points noirs en points noirs. On a la représentation

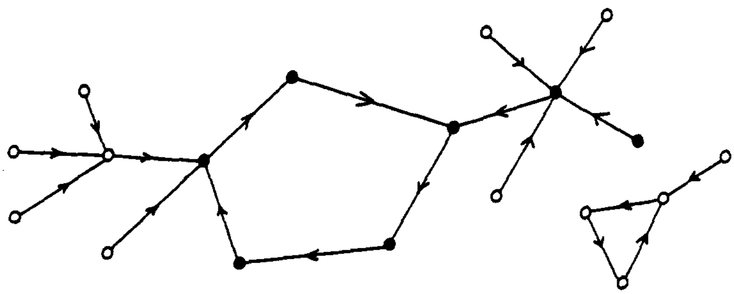


FIGURE 21

et pour cardinalité

$$\operatorname{Card} M = \sum_{i,j \geqslant 0} i^i (i+j)^j \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!},$$

où la variable x est associée aux points noirs et la variable y est associée aux points blancs. Les règles de substitution données dans les remarques suivant le théorème 1 du no 2.2 s'appliquent, avec la restriction que la substitution ne se fait plus de façon homogène: aux sommets de sorte i (gonflés un cellules) il faut substituer des structures d'espèce N_i. De plus (dans la représentation cellulaire) il faut que chaque cellule ait la mémoire de la *sorte* du sommet original. Les remarques du no 2.2 sur la substitution des espèces *pointées* s'appliquent également.

EXEMPLE 35 (Leroux [22] et Labelle [21]). Le concept de vertébré, utilisé dans la démonstration du théorème de Cayley (suivant l'exemple 12) peut aussi être utilisé pour obtenir d'autres résultats sur le dénombrement des arbres. Un arbre *bicoloré* est un arbre sur un ensemble à deux sortes $\{\circ, \bullet\}$ dont les arêtes joignent des sommets de sortes distinctes. Le nombre d'arbres bicolorés sur $E = (E_\bullet, E_\circ)$ est égal à $n^{m-1} m^{n-1}$ (où $n = \operatorname{Card} E_\bullet$ et $m = \operatorname{Card} E_\circ$). Pour démontrer ce résultat, on définit le concept de *vertébré bicoloré*: c'est un arbre bicoloré muni d'un couple $(x_\bullet, x_\circ)$ de sommets, le premier étant de sorte $\bullet$ et le second de sorte $\circ$. Il suffira de démontrer que le nombre de vertébrés bicolorés est égal à $n^m m^n$. Pour cela, nous allons décomposer les vertébrés bicolorés comme dans l'exemple 9.

Notons $A_\bullet(X, Y)$ (resp. $A_\circ(X, Y)$) l'espèce des arborescences bicolorées dont la racine est de sorte $\bullet$ (resp. de sorte $\circ$) (supposant $X \Leftrightarrow \bullet$, $Y \Leftrightarrow \circ$). Soit $V(X, Y)$ l'espèce des vertébrés bicolorés, on a l'identité (Fig. 22)

$$1 + V = \frac{1}{1 - A_\bullet A_\circ}.$$

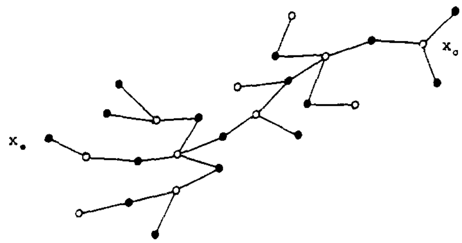


FIGURE 22

D'autre part, disons qu'une endofonction d'un ensemble sur deux sortes $\{\bullet, \circ\}$ est *oscillante* si elle transforme les points d'une sorte dans les points de l'autre sorte.
Soit $(F(X, Y))$ l'espèce des endofonctions oscillantes et S l'espèce des permutations, on a l'identité (Fig. 23)

$$F(X, Y) = S(A_\bullet A_\circ).$$

On conclut que

$$1 + V(x, y) = F(x, y)$$

ce qui donne le rèsultat.

On peut *pointer* une espèce $M(X_1,..., X_d)$ au *niveau* i $(1 \leqslant i \leqslant d)$: une M-structure pointée au niveau i (ou X_i) sur $(E_1,..., E_d)$ est un élément du produit cartésien $E_i \times M[E_1,..., E_d]$. On peut aussi prendre la dérivée partielle:

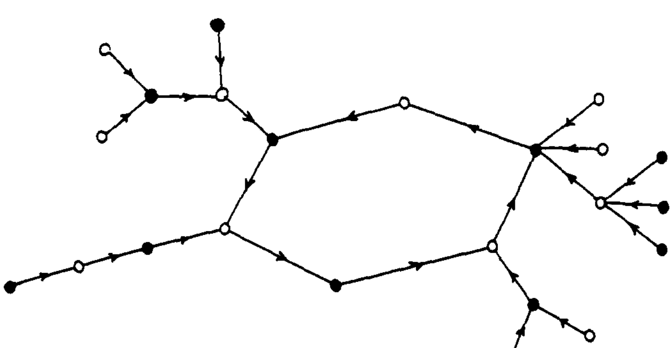


FIGURE 23

Définition 20. Une structure d'espèce $\partial M/\partial X_i$ sur $(E_1,\ldots,E_d)$ est une structure d'espèce M sur $(E_1,\ldots,E_i^+,\ldots,E_n)$, où $E_i^+ = E_i + \{*\}$.

Proposition 22. *On a*

$$\operatorname{Card}\frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Card} M.$$

De plus, l'espèce des M-structures pointées au niveau X_i coïncide avec $X_i(\partial M/\partial X_i)$.

Les règles habituelles de calcul, gouvernant les opérations définies plus haut, sont toujours valables. Par exemple, on a

$$\frac{\partial}{\partial X_i} R(N_i,\ldots,N_r) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial Y_j}(N_1,\ldots,N_r)\frac{\partial N_j}{\partial X_i}$$

pour des espèces $R = R(Y_1,\ldots,Y_r)$ et $N_i = N_i(X_1,\ldots,X_d)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

5.2. *Le théorème des espèces implicites*

Les espèces de structure satisfont souvent des équations qui les caractérisent. L'exemple le plus connu est sans doute l'espèce A des arborescences. On a $A = X\cdot\exp(A)$. Il y a aussi l'espèce des arborescences à fibres linéairement ordonnées:

$$A_L = X\cdot\frac{1}{1-A_L}$$

$A_L = X \cdot A_L^*$

$\mu A \cdot X \cdot (\mu B . 1+A\cdot B)$

mais cette équation entraîne

$$\begin{aligned} A_L &= X\cdot\left(1+\frac{A_L}{1-A_L}\right) \\ &= X + \frac{X}{1-A_L}A_L \\ &= X + A_L^2. \end{aligned}$$

$\mu A \cdot X + A^2$

Cette dernière équation est exactement celle satisfaite par l'espèce des *parenthésages* (un parenthésage sur E est un ordre linéaire muni d'un système bien formé de parenthèses). Il serait intéressant de pouvoir conclure *sans plus de calcul* que l'espèce A_L et celle des parenthésages sont naturellement isomorphes. C'est le problème de l'*unicité* des solutions combinatoires. L'objet de cette partie est de démontrer un théorème d'*existence* et d'*unicité* des solutions combinatoires d'un système d'équations convenables.

Soient $X=(X_1,\ldots,X_d)$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_r)$ et $F(X,Y)=(F_1(X,Y),\ldots,F_r(X,Y))$. Supposons que $F(0,0)=0$. Nous dirons que $N(X)=(N_1,\ldots,N_r)$ est une solution du système d'équations

$$Y=F(X,Y) \tag{I}$$

si l'on a $N(0)=0$ et

$$N(X)=F(X,N(X)).$$

Plus précisement, une *solution* est un couple (N,α), où α est un isomorphisme

$$N \overset{\alpha}{\cong} F(X,N).$$

Un *isomorphisme de solutions* u: $(N,\alpha)\to(P,\beta)$ est un isomorphisme d'espèces $u\colon N\to P$ tel que le rectangle

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & F(X,N) \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle F(X,u)} \\ P & \xrightarrow{\beta} & F(X,P) \end{array}$$

soit commutatif.

THÉORÈME 6. *Si la matrice jacobienne* $(\partial F/\partial Y)(0,0)$ *est nilpotente, alors le système d'équations* (I) *possède au moins une solution*; *de plus, il y a un et un seul isomorphisme entre deux solutions.*

Disons d'abord que le *cardinalité totale* d'un multi-ensemble $E=(E_1,\ldots,E_d)$ est la somme $\operatorname{Card} E=\operatorname{Card} E_1+\cdots+\operatorname{Card} E_d$. Soient $A,B\in \mathbf{E}\,\|X_1,\ldots,X_d\|$. Un morphisme $\psi\colon A\to B$ est un *contact d'ordre* $\geqslant n$ si $\psi_E\colon A[E]\to B[E]$ est un isomorphisme lorsque $\operatorname{Card} E\leqslant n$.

Soient $\psi_i\colon U_i\to V_i$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ des morphismes de la catégorie $\mathbf{E}\,\|X_1,\ldots,X_d\|$, et soit $R\in\mathbf{E}\,\|Y_1,\ldots,Y_s\|$. Supposons que $U_i(0)=V_i(0)=\varnothing$, pour $1\leqslant i\leqslant s$.

• LEMME I. *Si tous les morphismes* ψ_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ *sont des contacts d'ordre* $\geqslant n$ *alors le morphisme*

$$\psi=R(\psi_1,\ldots,\psi_s)\colon R(U_1,\ldots,U_s)\to R(V_1,\ldots,V_s)$$

est un contact d'ordre $\geqslant n$. *Si de plus, pour un entier* $1\leqslant k\leqslant s$, ψ_i *est un contact d'ordre* $\geqslant n+1$ *pour tout* $1\leqslant i<k$ *et si*

$$\frac{\partial R}{\partial Y_k}(0)=\cdots=\frac{\partial R}{\partial Y_s}(0)=\varnothing$$

alors ψ *est un contact d'ordre* $\geqslant n+1$.

Preuve. Soit $E \in \boldsymbol{B}^d$ avec $\mathrm{Card}(E) \leqslant n$. Il faut montrer que l'application

$$\psi_E : R(U_1,..., U_r)[E] \to R(V_1,..., V_r)[E]$$

est bijective. Soit $s \in R(U_1,..., U_r)[E]$. On a $s = (P, \chi, \alpha, \beta)$. Les classes de la partition P de E sont des multi-ensembles de cardinalité totale $\leqslant n$. Les fonctions $(\psi_i)_C$ pour $C \in P$ sont bijectives. La structure $\psi_E(s)$ est le résultat du *remplacement*, au moyen des $(\psi_i)_C$, des U_i-structures sur ces classes, par des V_i-structures. Ce qui montre que ψ_E est bien bijective. Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de considérer le cas où $\mathrm{Card}(E) = n + 1$. Avec les mêmes notations, soit $C \in P$. Si $\mathrm{Card}(C) \leqslant n$, $(\psi_i)_C$ est bijectif. Supposons donc que $\mathrm{Card}(C) = n + 1$. On a alors $P = \{C\}$ ce qui entraîne que le multi-ensemble $P = (\chi^{-1}\{1\},..., \chi^{-1}\{r\})$ est isomorphe à $([0], [0],..., [1]$ (position i),..., $[0])$. Comme β est un élément de $R[P]$, on voit que $R[0, 0,..., 1$ (position i),..., $0]$ est non vide. L'hypothèse sur les dérivées partielles entraîne que $i < k$; comme alors ψ_i est un contact d'ordre $\geqslant n + 1$, on voit encore que $(\psi_i)_C$ est bijectif. C.Q.F.D.

Soit maintenant $\mathscr{I} \subset \mathbf{E}\|X_1,..., X_d\|$ la sous catégorie pleine des espèces $A \in \mathbf{E}\|X_1,..., X_d\|$ telles que $A[0,..., 0] = \varnothing$. Notons $\mathscr{I}^r$ la catégorie produit $\mathscr{I} \times \cdots \times \mathscr{I}$ (r facteurs). Nous dirons qu'un morphisme $(\psi_1,..., \psi_r)$: $(A_1,..., A_r) \to (B_1,..., B_r)$ est un *contact d'ordre* $\geqslant n$ si ψ_i est un contact d'ordre $\geqslant n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. Nous allons maintenant définir un foncteur F: $\mathscr{I}^r \to \mathscr{I}^r$. On pose

$$F(A_1,..., A_r) = (A'_1,..., A'_r),$$

où

$$\begin{aligned} A'_i &= F_i(X, A_1,..., A_r) \\ &= F_i(X_1,..., X_d, A_1,..., A_r). \end{aligned}$$

LEMME 2. *Si $A \to^{\psi} B \in \mathscr{I}^r$ est un contact d'ordre $\geqslant n$ alors $FA \to^{F\psi} FB$ est un contact d'ordre $\geqslant n$. De plus, $F^r(\psi) = (F \circ \cdots \circ F)(\psi)$ (itération d'ordre r) est un contact d'ordre $\geqslant n + 1$.*

Preuve. La première assertion résulte immédiatement de la première partie du lemme 1. Pour la seconde, il suffit de remarquer que la valeur du jacobien de F^r à l'origine est nulle, $\{(\partial F/\partial Y)(0, 0)\}^r = \varnothing$, vue l'hypothèse de nilpotence. On applique ensuite la seconde partie du lemme I avec $s = d + r$, $k = d + 1$, $U_i = X_i = V_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$, $U_i = A_i$ et $V_i = B_i$ pour $d + 1 \leqslant i \leqslant s$.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Theorem 6.

(I) *Existence d'une solution*

Posons $A_0 = \varnothing$ et $A_{n+1} = F(A_n)$. On a la fonction vide $A_0 \to^{i_0} A_1$, c'est un contact d'ordre 0. On définit par récurrence des morphismes

$$i_n = F(i_{n-1}) \qquad (n \geqslant 1).$$

Il en résulte une suite illimitée

$$A_0 \xrightarrow{i_0} A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_3} \cdots . \tag{1}$$

La limite directe de cette suite est *finitaire*. En effet, le lemme 2 montre que i_n est un contact d'ordre $\geqslant [n/r]$. Ce qui entraîne que pour tout $E \in \mathbf{B}^d$ l'application $(i_n)_E$ est un isomorphisme dès que n est assez grand. Soit A_∞ la limite directe de la suite (1). On a des triangles commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[drrr, "j_0"'] & A_1 \arrow[r, "i1"] \arrow[drr, "j_1"] & A_2 \arrow[r, "i2"] \arrow[dr, "j_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "j_3"] & \cdots \\
 & & & A_\infty . &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Vérifions que A_∞ est une solution de l'équation (1). En effet, l'opération fonctorielle F préserve les limites directes. $F(A_\infty)$ est donc limite directe de la suite

$$F(A_0) \xrightarrow{F(i_0)} F(A_1) \xrightarrow{F(i_1)} F(A_2) \longrightarrow \cdots$$

c'est-à-dire de la suite

$$A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} A_3 \longrightarrow \cdots .$$

Il y a donc un et un seul isomorphisme i: $A_\infty \to F(A_\infty)$ tel que tous les triangles

$$\begin{tikzcd}
 & A_{n+1} \arrow[dl, "j_{n+1}"'] \arrow[dr, "F(j_n)"] & \\
A_\infty \arrow[rr, "i"] & & F(A_\infty)
\end{tikzcd} \tag{3}$$

soient commutatifs.

(II) *Unicité des solutions*

Supposons que l'on ait une autre solution $\beta: B \to F(B)$. Remarquons d'abord l'existence d'une et d'une seule suite de morphismes $A_n \to^{u_n} B$ $(n \geqslant 0)$ telle que les triangles

$$\begin{tikzcd} A_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[dr, "F(u_n)"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & F(B) \end{tikzcd} \tag{4}$$

soient tous commutatifs. L'unicité est évidente car u_0 a un domaine de définition vide, et comme β est un isomorphisme on a $u_{n+1} = \beta^{-1}F(u_n)$. L'existence suit du même coup. Voyons que les triangles

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[drr, "u_0"'] & A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "u_1"] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "u_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[dl, "u_3"] & \cdots \\ & & B & \cdots \end{tikzcd} \tag{5}$$

sont tous commutatifs. C'est évident pour le premier ($n = 0$). Pour passer de n à $n + 1$, on applique F pour obtenir

$$\begin{tikzcd} A_{n+1} \arrow[rr, "i_{n+1}"] \arrow[dr, "F(u_n)"'] & & A_{n+2} \arrow[dl, "F(u_{n+1})"] \\ & F(B) \end{tikzcd} \tag{6}$$

on compose ensuite avec $\beta^{-1}: F(B) \to B$ et on utilise (4). On est maintenant en position de passage à la limite: on a un morphisme unique $u: A_\infty \to B$ tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "u_n"] \\ A_\infty \arrow[rr, "u"] & & B \end{tikzcd} \tag{7}$$

soient tous commutatifs. Voyons que u est un *isomorphisme de solution*. En effet u_0 est un contact d'ordre 0 et le lemme montre que u_n est un contact d'ordre $\geqslant [n/r]$. On conclut que u est un contact d'ordre ∞, c'est-à-dire un isomorphisme. Il faut encore vérifier la compatibilité:

$$\begin{tikzcd} A_\infty \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ F(A_\infty) \arrow[r, "F(u)"] & F(B). \end{tikzcd} \tag{8}$$

Pour cela on compose l'extrémité supérieure gauche de ce rectangle avec $j_{n+1}: A_{n+1} \to A_\infty$ et on obtient (par 7 et par 3)

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & B \\ {\scriptstyle F(j_n)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ F(A_\infty) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \end{array} \tag{9}$$

c'est-à-dire (par 7) le triangle

$$\begin{tikzcd} A_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[dr, "F(u_n)"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & F(B) \end{tikzcd} \tag{10}$$

qui est bien commutatif (par 4). Comme les morphismes $j_{n+1}: A_{n+1} \to A_\infty$ recouvrent A_∞ on a bien démontré la commutativité de (8).

Il reste à montrer que u est *unique*. Supposant que (8) est commutatif, on compose u avec $j_n: A_n \to A_\infty$ et on obtient une suite $u_n: A_n \to B$. Comme les morphismes $j_n: A_n \to A$ $(n \geqslant 0)$ recouvrent A, il suffira de vérifier que la suite (u_n) satisfait (4), ce qui entraînera le résultat. Composant le rectangle (8) avec $j_{n+1}: A_{n+1} \to A_\infty$, on obtient (9) et ensuite (10), c'est-à-dire (4).

C.Q.F.D.

6. Espèces pondérées

6.0. Si l'analogie entre espèces et séries de Hurwitz à coefficients entiers est exacte, on doit pouvoir effectuer des modifications par changements de *coefficients*. Pour tout monoïde commutatif à factorisations finies P, nous allons introduire une catégorie $\mathbf{E}_P$ d'*ensembles P-gradués*. Cette catégorie nous servira de coefficients dans la construction d'une catégorie d'espèces à valeur dans $\mathbf{E}_P$. De plus, si $\mathbf{Z}_P$ dénote l'anneau des combinaisons linéaires formelles des éléments de P, la *cardinalité* d'une espèce de $\mathbf{E}_P \|X\|$ prendra sa valeur dans $\mathbf{Z}_P \|X\|$.

6.1. Soit P un monoïde. Nous dirons qu'un ensemble A muni d'une fonction $A \to^p P$ est *P-gradué* ou *P-pondéré*; la fonction p est la *graduation* ou la *pondération*; le *degré* ou le *poids* de $a \in A$ est l'élément $p(a) \in P$. Un *morphisme* $A \to^f B$ d'ensembles pondérés est une fonction préservant le poids. La *somme* $A + B$ d'ensembles pondérés est la somme disjointe munie de la pondération induite par celle des facteurs. Le *produit* $A \cdot B$ est le produit cartésien $A \times B$ muni de la pondération $p(a, b) = p(a) \cdot p(b)$. Supposons maintenant que p soit à factorisations finies (pour tout $z \in P$ l'ensemble $\{(x, y) \mid xy = z\}$ est fini). On peut alors considérer l'anneau $\mathbf{Z}_P = \mathbf{Z}[[P]]$ des combinaisons linéaires formelles d'éléments de P: un élément $f \in \mathbf{Z}_P$ est une fonction $f: P \to \mathbf{Z}$; la somme et le produit sont définis comme suit:

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(fg)(z) = \sum_{xy=z} f(x)\, g(y).$$

On peut écrire

$$f = \sum_{x \in P} f(x) \cdot x.$$

Disons qu'un ensemble gradué $A \to^p P$ est *finitaire* si pour tout $x \in P$ l'ensemble $p^{-1}\{x\}$ est fini; la *cardinalité* de $A \to^p P$ est la fonction $x \mapsto \operatorname{Card} p^{-1}\{x\}$. Nous dirons aussi que $\mathbf{Card}\, A$ est le *poids total* de A. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{Card}\, A &= \sum_{x \in P} (\operatorname{Card} p^{-1}\{x\}) \cdot x \\ &= \sum_{a \in A} p(a).\end{aligned}$$

Nous désignerons par $\mathbf{E}_P$ la catégorie des ensembles P-gradués finitaires. $\mathbf{E}_P$ est close pour le produit des ensembles P-gradués.

PROPOSITION 23. *Pour $A, B \in \mathbf{E}_P$ on a*

$$\mathbf{Card}\, A + B = \mathbf{Card}\, A + \mathbf{Card}\, B$$

$$\mathbf{Card}\, A \cdot B = (\mathbf{Card}\, A) \cdot (\mathbf{Card}\, B).$$

DÉFINITION 21. Une espèce P-graduée (ou P-pondérée) est un foncteur

$$M: \mathbf{B} \to \mathbf{E}_P.$$

La *cardinalité* (ou le poids) de M est la série de Hurwitz

$$M(x) = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{Card}\, M[n]) \frac{x^n}{n!}.$$

Si $\mathbf{E}_P \|X\|$ dénote la catégorie des espèces p-pondérées, on a un homomorphisme

$$\mathbf{Card}: \mathbf{E}_P \|X\| \to \mathbf{Z}_P \|X\|.$$

Le produit et la somme de $M, N \in \mathbf{E}_P \|X\|$ sont définis comme suit:

$$(M+N)[E] = M[E] + N[E],$$

$$(M \cdot N)[E] = \sum_{A+B=E} M[A] \cdot N[B].$$

Supposons maintenant que P soit *commutatif*. On peut alors définir la *substitution* $R(N)$ dans le cas où $N[0] = \varnothing$. La définition de cette opération est absolument identique à celle donnée en 2.2. sauf qu'il faut préciser le poids d'une R-assemblée de N-structures: c'est le produit des poids des N-structures membres multiplié par le poids de la R-structure sur l'assemblée.

PROPOSITION 24. *On a*

$$\mathbf{Card}\, R(N) = R(N(x)).$$

La théorie des espèces pondérées est identique à celle des espèces tout court nonobstant l'attention qu'il faut accorder au poids. Par exemple, supposons que l'on cherche à exprimer une espèce M sous une forme exponentielle $M = \exp(N)$. On procède comme d'habitude: on identifie un concept de connexité. Sachant que $M = \exp(M_C)$, où M_C est l'espèce (ordinaire) des structures connexes, il faut ensuite vérifier que le poids d'une M-structure est bien égal au *produit* des poids de ses composantes: dans ce cas, nous dirons que la pondération de M est *multiplicative*; cette condition entraîne finalement que l'espèce pondérée M est bien l'exponentielle de l'espèce pondérée M_C. Cette analyse se généralise au cas où l'on cherche une décomposition $M = R(N)$, le concept correspondant de multiplicativité de la pondération étant clair.

EXEMPLE 36. Soit $s_1, s_2, s_3,\ldots$ une suite dénombrable d'indéterminées. On peut pondérer l'espèce S des permutations en définissant comme suit le poids d'une permutation $\sigma \in S[E]$:

$$P(\sigma) = s_1^{d_1(\sigma)} \cdots s_n^{d_n(\sigma)},$$

où $n = \operatorname{Card} E$ et où $d_i(\sigma)$ est le nombre de cycles de longueur i dans σ. On a alors

$$\mathbf{Card}\, S = \sum_{n \geqslant 0} Z_n x^n,$$

où Z_n est le polynôme indicateur des cycles du groupe $[n]!$

$$Z_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in [n]!} p(\sigma).$$

Les structures connexes sont ici les permutations circulaires. Comme la pondération est évidemment multiplicative on a $S = \exp(C)$. Le poids d'une permutation circulaire $\sigma \in C[E]$ est égal à s_n si $\operatorname{Card} E = n$. On a donc

$$\begin{aligned} \textbf{Card}\, C &= \sum_{n \geqslant 1} (n-1)!\, x_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} s_n \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'identité bien connue:

$$\sum_{n \geqslant 0} Z_n x^n = \exp\left[\sum_{n \geqslant 1} s_n \frac{x^n}{n}\right].$$

Exemple 37 (Formule de Mehler). Nous allons suivre de près la démonstration de Foata [11]. Si on modifie l'exemple précédent en ne considérant que les *involutions*, on obtient

$$\sum_{n \geqslant 0} h_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left(s_1 x + s_2 \frac{x^2}{2}\right),$$

$$h_n(s_1, s_2) = \sum_{\substack{\sigma \in [n]! \\ \sigma^2 = I}} p(\sigma)$$

les polynômes h_n sont étroitement reliés aux polynômes d'Hermite. La formule de Mehler est

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geqslant 0} h_n(s_1, s_2)\, h_n(t_1, t_2) \frac{x^n}{n!} \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{1 - s_2 t_2 x^2}} \exp\left[\frac{(s_1 t_1)\, x + (s_1^2 t_2 + t_1^2 s_2)\, x^2/2}{1 - s_2 t_2 x^2}\right]. \end{aligned}$$

Pour la démontrer, on interprète combinatoirement le premier membre: soit M l'espèce des *couples* d'involutions (σ, τ), avec la pondération

$$p(\sigma, \tau) = s_1^{a_1} s_2^{a_2} t_1^{b_1} t_2^{b_2}$$

si $p(\sigma) = s_1^{a_1} s_2^{a_2}$ et $p(\tau) = s_1^{b_1} s_2^{b_2}$. On a évidemment

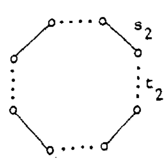
$$\mathbf{Card}\, M = \sum_{n \geqslant 0} h_n(s_1, s_2)\, h_n(t_1, t_2) \frac{x^n}{n!}.$$

Il suffit maintenant d'exprimer M sous forme exponentielle. En effet, un couple $(\sigma, \tau) \in M[E]$ induit une représentation du groupe dihédral D_∞ (deux générateurs involutifs) sur l'ensemble E. Cette représentation se décompose en représentations *connexes*. La pondération est évidemment multiplicative. On a donc $M = \exp(M_C)$. On classifie les représentations connexes en quatre sous-espèces:

$$M_C = A + B + C + D.$$

Nous allons décrire ces sous-espèces par des graphes: on relie deux sommets par un trait plein (pointillé) s'ils s'échangent par σ (resp. par τ). Nous indiquerons aussi le poids des transpositions correspondantes (et des boucles!).

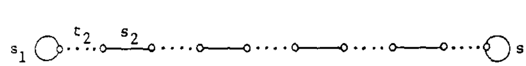
Sous-espèce A:



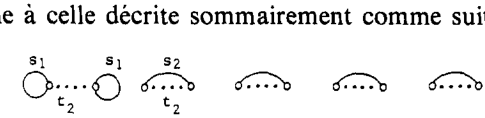
Ce sont les graphes cycliques de longueurs paires avec des arêtes alternativement pleines et pointillées. On a

$$A(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - s_2 t_2 x^2}$$

Sous-espèce B:



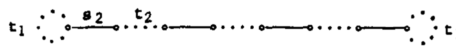
Si on oriente cette chaîne en choisissant l'une des boucles, on obtient une espèce isomorphe à celle décrite sommairement comme suit:



On a donc

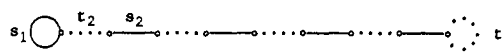
$$2B(x) = s_1^2 t_2 x^2 \frac{1}{1 - s_2 t_2 x^2}.$$

Sous-espèce C:

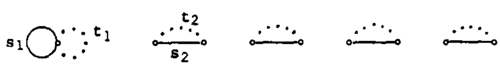


$$2C(x) = t_1^2 s_2 x^2 \frac{1}{1 - s_2 t_2 x^2}.$$

Sous-espèce D:



D est isomorphe à l'espèce décrite sommairement par



On a donc

$$D(x) = s_1 t_1 x \frac{1}{1 - s_2 t_2 x^2}.$$

EXEMPLE 38 (Polynômes exponentiels). On peut pondérer comme suit l'espèce P des partitions. Soient $x_1, x_2, \ldots$ des indéterminées. Posons

$$p(Q) = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n},$$

où n est la cardinalité de l'ensemble sous-jacent à Q et où d_i est le nombre de classes ayant pour cardinalité i. Les polynômes *exponentiels* sont les polynômes

$$Y_n = \sum_Q p(Q),$$

où la sommation a lieu sur toutes les partitions de $[n]$. La fonction p est multiplicative, on a donc l'identité

$$\sum_{n \geqslant 0} Y_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left[\sum_{n \geqslant 0} x_n \frac{x^n}{n!}\right].$$

EXEMPLE 39 (Suite binômiale). Soit N une espèce telle que $N[0] = \varnothing$. On peut définir le poids d'une assemblée $h \in \exp(N)$ en posant $p(h) = t^n$, où n est le nombre de membres de h. Considérons les polynômes

$$P_n(t) = \sum_{h \in \exp(N)[n]} p(h).$$

La fonction p est multiplicative, on a

$$\mathbf{Card}\,\exp(N)=\exp(\mathbf{Card}\,N)$$

plus explicitement

$$\sum_{n\geqslant 0} P_n(t)\frac{x^n}{n!}=\exp(tN(x)).$$

Les polynômes $P_n(t)$ ont une interprétation combinatoire (Mullin et Rota [25]): si T est un ensemble de cardinalité t alors $p_n(t)$ est le nombre de fonctions $f\colon [n]\to T$ dont chaque fibre est *munie* d'une assemblée de N-structures. On a l'identité du binôme:

$$P_n(t_1+t_2)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(t_1)\,P_{n-k}(t_2).$$

7. Quelques aspects généraux

7.0. Dans les chapitres précédents nous avons fait un rapprochement entre des concepts purement combinatoires d'une part et des concepts purement algébriques d'autre part. Ce rapprochement se fit surtout sur le mode analogique. La question se pose de savoir s'il est possible de dépasser l'analogie en développant une *théorie générale*. Il semble encore trop tôt pour énoncer une telle théorie. Trop de directions possibles s'offrent sur la voie de la généralisation et seule la *pratique mathématique* pourra nous indiquer l'importance ou l'insignifiance d'un concept. La théorie présentée dans ce chapitre est minimale. Elle se situe dans le prolongement des travaux de Rota [28], Joni et Rota [16], sur l'interprétation combinatoire des cogèbres.

7.1. *Monoïdes*

Rappelons qu'une catégorie *monoïdale* est une catégorie $\mathbf{A}$ munie d'une opération binaire fonctorielle

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}\xrightarrow{-\otimes-}\mathbf{A},$$

d'un objet unité $I\in\mathbf{A}$ et d'isomorphismes naturels

$$A\otimes(B\otimes C)\simeq(A\otimes B)\otimes C,$$

$$(A\otimes I)\simeq A,$$

$$I\otimes A\simeq A.$$

Ces isomorphismes naturels sont assujettis à des conditions de *cohérence* (voir "Coherence in Categories," Réf. [32]). Il est en général *impossible* d'éliminer totalement les questions de cohérence. Cependant, nous exclurons autant que possible de ce travail les aspects de cohérence en supposant que les conditions de cohérence sont satisfaites. Cela ne présente pas trop de risques si l'on a dans l'esprit des exemples concrets, naturels.

Une catégorie monoïdale $(\mathbf{A}, \otimes, I)$ est *symétrique* si elle est munie d'un isomorphisme (cohérent) de commutation $A \otimes B \simeq B \otimes A$.

Un *monoïde* dans une catégorie monoïdale $\mathbf{A}$ est un triplet $(M, M \otimes M \to^{c} M,\ I \to^{e} M)$ où $M \in \mathbf{A}$ et où c et e satisfont aux axiomes d'associativité et d'unité:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \otimes M \arrow[r, "M\otimes c"] \arrow[d, "c\otimes M"] & M \otimes M \arrow[d, "c"] \\
M \otimes M \arrow[r, "c"] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "e\otimes M"] \arrow[dr, "\sim"'] & M \otimes M \arrow[d, "c"] & M \otimes I \arrow[l, "M\otimes e"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& M &
\end{tikzcd}.$$

Si la catégorie monoïdale $\mathbf{A}$ est symmétrique on peut définir le *produit* $M_1 \otimes M_2$ de deux monoïdes M_1 et M_2. La multiplication de $M_1 \otimes M_2$ s'obtient par composition

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes M_2 \otimes M_1 \otimes M_2 \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & M_1 \otimes M_1 \otimes M_2 \otimes M_2 \arrow[d, "c_1\otimes c_2"] \\
& M_1 \otimes M_2.
\end{tikzcd}$$

On peut aussi définir le concept de *monoïde commutatif*: le composé de $M \otimes M \to^{c} M$ avec l'isomorphisme de commutation $M \otimes M \simeq M \otimes M$ doit coïncider avec m.

EXEMPLE 40. La catégorie $\mathbf{E}\,\|X\|$ munie du produit des espèces est monoïdale symétrique.

EXEMPLE 41. La substitution est une opération monoïdale sur l'idéal $\mathscr{T}$ des espèces telles que $N[0] = \varnothing$. La substitution n'est pas symétrique.

EXEMPLE 42. Si $N[0] = \varnothing$, l'espèce $1/(1-N)$ est un monoïde. La multiplication est la *concaténation* des assemblées linéaires de N-structures:

$$\frac{1}{1-N} \bullet \frac{1}{1-N} \to \frac{1}{1-N}.$$

L'unité $1 \to 1/(1-N)$ est l'assemblée vide. Ce monoïde est *libre* sur l'espèce N. Il n'est pas commutatif. Cependant, comme tous les monoïdes libres (dans une catégorie monoïdale symétrique), il est muni d'un (unique) anti-automorphisme involutif induisant l'identité sur N: c'est le renversement de l'ordre d'une assemblée linéaire.

EXEMPLE 43. L'exponentielle $\exp(N)$ est un monoïde *commutatif* pour l'opération de réunion de deux assemblées juxtaposées:

$$\exp(N) \cdot \exp(N) \to \exp(N).$$

On vérifie que c'est le monoïde commutatif *libre* sur N ($N[0] = \varnothing$).

EXEMPLE 44. L'espèce $X/1-X$ des ordres linéaires non vide est un monoïde de l'idéal $\mathscr{T}$ (pour l'opération de substitution).

EXEMPLE 45. Si $S \in \mathscr{T}$ et si $S[1] = \varnothing$, on peut démontrer l'existence d'un monoïde N *libre* sur S (pour l'opération de substitution). Pour le construire, on prend la solution N de l'équation

$$N = X + S(N)$$

ce qui donne un morphisme

$$S \circ N \overset{\alpha}{\hookrightarrow} N.$$

L'opération de multiplication $N(N) \to^{m} N$ est l'unique flèche m rendant commutatif le rectangle

$$\begin{tikzcd} S \circ N \circ N \arrow[r, "S \circ m"] \arrow[d, "\alpha \circ N"] & S \circ N \arrow[d, "\alpha"] \\ N \circ N \arrow[r, "m"] & N. \end{tikzcd}$$

Plus particulièrement, si $S = X^2/2!$ alors la solution N de l'équation

$$N = X + N^2/2!$$

est l'espèce des parenthésages *commutatifs*. L'opération $N(N) \to N$ ne fait qu'exprimer la substitution habituelle de parenthésages dans un parenthésage.

7.2. *Loi de décomposition numérique*

Dans ce qui suit, nous noterons souvent comme une *addition* la multiplication $A \times A \to A$ d'une monoïde commutatif (ordinaire). Nous dirons alors que A est un monoïde *additif*. Une fonction $f: A \to B$ préservant la *somme* et l'élément *nul* est une fonction *additive*. Une fonction $f: A \times B \to C$ additive en chaque variable est une fonction *bi-additive*. Le *produit tensoriel* $A \otimes B$ de deux monoïdes additifs s'obtient en construisant la fonction bi-additive universelle $A \times B \to A \otimes B$. La catégorie Ad des monoïdes additifs, munie de ce produit tensoriel, est une catégorie symétrique monoïdale. L'*objet unité* pour le produit tensoriel est le monoïde additif des nombres naturels:

$$A \otimes \mathbf{N} \simeq \mathbf{N} \otimes A \simeq A.$$

Pour tout ensemble I, soit $\mathbf{N}(I)$ le monoïde abélien libre sur I. On a des isomorphismes

$$\mathbf{N}(I \times J) = \mathbf{N}(I) \otimes \mathbf{N}(J),$$
$$\mathbf{N}(1) = \mathbf{N}.$$

Une *cogèbre* est un objet $A \in Ad$ muni d'une structure de monoïde dans la catégorie opposée Ad^{opp}. On a une co-multiplication

$$A \xrightarrow{d} A \otimes A$$

et une co-unité

$$A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{N}$$

devant satisfaire aux axiomes d'associativité

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"'] & A \otimes A \arrow[d, "d \otimes A"] \\ A \otimes A \arrow[r] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

et d'unité

$$\begin{tikzcd} \mathbf{N} \otimes A & A \otimes A \arrow[l, leftarrow, "\varepsilon \otimes A"'] \arrow[r, "A \otimes \varepsilon"] & A \otimes \mathbf{N} \\ & A. \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "d"] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

DÉFINITION 22. Une *loi de décomposition* (numérique) sur un ensemble I est la donnée d'une structure de cogèbre (d, ε) sur $\mathbf{N}(I)$.

La co-multiplication d: $\mathbf{N}(I) \to \mathbf{N}(I) \otimes \mathbf{N}(I)$ équivaut à une fonction

$$d: I \to \mathbf{N}(I \times I)$$

et nous dirons souvent que celle-ci est la loi de décomposition. On a de expressions

$$d(i) = \sum_{(j,k)\in I\times I} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} (j,k),$$

où $[{}_j{}^i{}_k] \in \mathbf{N}$ est le nombre de façon de *décomposer* i en deux *morceaux*, le premier étant j et le second k. Si $[{}_j{}^i{}_k] > 0$ nous dirons que (j,k) est une *décomposition* de i (en deux morceaux). L'associativité de la loi de décomposition s'exprime par l'identité

$$\sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ j & & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \alpha & \\ k & & r \end{bmatrix} = \sum_\alpha \begin{bmatrix} & \alpha & \\ j & & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & i & \\ \alpha & & r \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

La valeur commune des deux membres de cette égalité est le nombre $[{}_j \, {}^i_k \, {}_r]$ de façon de décomposer i en (j,k,r). Plus généralement, on définit pour chaque $n \geqslant 2$ des applications

$$d_n : I \to \mathbf{N}(I^n),$$

$$d_n(i) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in I^n} \begin{bmatrix} i \\ j_1,\dots,j_n \end{bmatrix} (j_1,\dots,j_n).$$

Si $[{}^{\;\;i}_{j_1,\dots,j_n}] > 0$ nous dirons que $(j_1,\dots,j_n)$ est une *décomposition* de i (en n morceaux). L'axiome d'*unité* de la structure de cogèbre signifie que

$$\sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ j & & \alpha \end{bmatrix} \varepsilon(\alpha) = \sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ \alpha & & j \end{bmatrix} \varepsilon(\alpha) = \delta^i_j. \qquad (**)$$

DÉFINITION 23. Un élément $u \in I$ est *neutre* si $\varepsilon(u) = 1$. Un élément $v \in I$ est *primitif* si $d(v) = (v, v)$.

(Si v est primitif, il est aussi neutre.) Pour tout $i \in I$ on a (par $(**)$):

$$\sum_{\alpha\in I} \begin{bmatrix} & i & \\ i & & \alpha \end{bmatrix} \varepsilon(\alpha) = 1.$$

Ce qui montre qu'il existe un et un seul élément $u \in I$ tel que

$$\begin{bmatrix} & i & \\ i & & u \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(u) = 1.$$

Posons $\partial_1(i) = u$. On définit aussi un élément neutre $\partial_0(i)$ en exigeant que $[{}_{\partial_0(i)}{}^i{}_i] = 1$.

PROPOSITION 25. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *i est neutre*,

(ii) $\varepsilon(i)>0$,

(iii) $\partial_0(i)=i$ (*resp.* $\partial_1(i)=i$).

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii), trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons $\varepsilon(i)>0$. On a

$$\delta^i_{\partial_0(i)}=\sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ \partial_0(i) & & \alpha \end{bmatrix}\varepsilon(\alpha)\geqslant \begin{bmatrix} & i & \\ \partial_0(i) & & i \end{bmatrix}\varepsilon(i)>0$$

ce qui entraîne que $i=\partial_0(i)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i), trivial.

PROPOSITION 26. *Si (j,k) est une décomposition de i, on a les égalités*

(i) $\partial_0(i)=\partial_0(j)$,

(ii) $\partial_1(i)=\partial_1(k)$,

(iii) $\partial_1(j)=\partial_0(k)$.

De plus, si k (resp. j) est neutre on a $i=j$ et $k=\partial_1(i)$ (resp. $i=k$ et $j=\partial_0(i)$).

Preuve. Démontrons d'abord la dernière assertion. Par hypothèse, on a $[{}_j{}^i{}_k]>0$ et $\varepsilon(k)=1$. Utilisant l'identité (**) on a

$$\delta^i_j=\sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ j & & \alpha \end{bmatrix}\varepsilon(\alpha)\geqslant \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix}\varepsilon(k)>0,$$

et donc $i=j$ et $k=\partial_1(i)$. Pour démontrer le reste, supposons seulement que $[{}_j{}^i{}_k]>0$. On a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} & i & \\ j & k & \partial_1(k) \end{bmatrix}&=\sum_\alpha \begin{bmatrix} & i & \\ j & & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \alpha & \\ k & & \partial_1(k) \end{bmatrix}\\ &\geqslant \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & k & \\ k & & \partial_1(k) \end{bmatrix}>0\end{aligned}$$

et donc (par (*))

$$\begin{bmatrix} & i & \\ j & k & \partial_1(k) \end{bmatrix}=\sum_\alpha \begin{bmatrix} & \alpha & \\ j & & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & i & \\ \alpha & & \partial_1(k) \end{bmatrix}>0$$

ce qui entraîne l'existence de $\alpha\in I$ tel que $[{}_\alpha{}^i{}_{\partial_1(k)}]>0$. Comme $\partial_1(k)$ est neutre, on conclut que $\partial_i(i) = \partial_1(k)$. Pour terminer, on utilise que $\left[\begin{smallmatrix} & i & \\ j & & k \end{smallmatrix}\right] \times \left[\begin{smallmatrix} & k & & \\ \partial_0(k) & & i & k \end{smallmatrix}\right] > 0$ et par suite que $\left[\begin{smallmatrix} & i & \\ j & \partial_0(k) & k \end{smallmatrix}\right] > 0$ ce qui entraîne l'existence de $\alpha \in I$ tel que

$$\begin{bmatrix} & \alpha \\ j & \partial_0(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & i & \\ \alpha & & k \end{bmatrix} > 0$$

et finalement que $\alpha = j$ et $\partial_1(\alpha) = \partial_0(k)$. C.Q.F.D.

EXEMPLE 46 (Leroux [22]). Une catégorie C est à *décomposition finie* si pour tout morphisme $f \in C$ l'ensemble $\{(f_1, f_2) \mid f_1 f_2 = f\}$ est fini. Soit $\mathbf{N}(C)$ le monoïde additif libre sur l'ensemble des morphismes de C. On a une loi de décomposition $d\colon C \to \mathbf{N}(C \otimes C)$

$$d(f) = \sum_{f_1 f_2 = f} (f_1, f_2)$$

la co-unité $\varepsilon\colon C \to \mathbf{N}$ est la fonction

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) &= 1 \qquad \text{si } f \text{ est une identité} \\ &= 0 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, les éléments neutres, les éléments primitifs et les morphismes identités coïncident.

7.2.1. Soit B un semi-anneau. Une loi de décomposition (d, ε) sur I nous permet de définir une structure de semi-anneau sur l'ensemble B^I des fonctions de I vers B:

$$\begin{aligned} (f + g)(i) &= f(i) + g(i), \\ (f \cdot g)(i) &= \sum_{j,k} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} f(i)\, g(k). \end{aligned}$$

Dans le cas où B est un anneau, B^I est un anneau. Un problème fréquent est celui de la détermination des éléments *inversibles* de l'anneau B^I ainsi que du calcul explicite des inverses. Notons I_0 l'ensemble des *éléments neutres* de I. Notons B^{I_0} l'anneau des fonctions de I_0 vers B (la multiplication de f, $g \in B^{I_0}$ est $(fg)(u) = f(u)\, g(u)$).

PROPOSITION 27. *L'inclusion $B^{I_0} \hookrightarrow B^I$ (extension par 0) est un homomorphisme d'anneau. De plus, si tout élément neutre est primitif, la projection $B^I \to B^{I_0}$ est aussi un homomorphisme d'anneau.*

Preuve. Soient f, $g \in B^I$, des fonctions appartenant à l'image $B^{I_0} \hookrightarrow B^I$. On a pour tout $i \in I$

$$(f \cdot g)(i) = \sum_{(j,k) \in I \times I} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} f(j)\, g(k).$$

Comme on a $f(j) = g(j) = 0$ pour $j \in I - I_0$ on peut écrire

$$(f \cdot g)(i) = \sum_{(j,k) \in I_0 \times I_0} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} f(j)\, g(k).$$

D'autre part, si $[{}_j{}^i{}_k] > 0$ et $(j,k) \in I_0 \times I_0$ on a $i = j = k$ (Prop. 26). Cela entraîne que

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(i) &= f(i)\, g(i) && \text{si} \quad i \in I_0 \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

La seconde assertion de la proposition est immédiate.

Disons maintenant que $(j_1, ..., j_n) \in I^n$ est une *décomposition stricte* de $i \in I$ si $[{}_{j_1} \overset{i}{\cdots} {}_{j_n}] > 0$ et s'il n'y aucun élément primitif parmi $\{j_1, ..., j_n\}$.

DÉFINITION 24. Une loi de décomposition $d: I \to \mathbf{N}(I \times I)$ est *héréditairement finie* si pour chaque $i \in I$, l'ensemble des décompositions strictes est fini.

THÉORÈME 7 [7, 22, 29]. *Supposons que $d: I \to \mathbf{N}(I \times I)$ soit une loi héréditairement finie. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in B^I$ (B est un anneau) soit inversible est que $f(i)$ soit inversible pour tout élément primitif $i \in I$.*

Preuve. Remarquons d'abord qu'avec les hypothèses de la proposition, les éléments neutres et primitifs coïncident. En effet, si i est neutre on a

$$\begin{bmatrix} & i & \\ i & & i \end{bmatrix} = 1$$

ce qui entraîne que

$$\begin{bmatrix} & i & \\ i & i \cdots & i \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} & i & \\ i & & i \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} & i & \\ i & & i \end{bmatrix} > 0.$$

Si i n'était pas primitif, on aurait une infinité de décompositions strictes de i, ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition précédente montre alors que l'anneau B^{I_0} est un *rétracte* de l'anneau B^I. On peut donc écrire

$$f = f_0 + f_1,$$

où $f_0 \in B^{I_0}$ et $f_1 \in \operatorname{Ker}(B^I \to B^{I_0})$. Si f est inversible alors f_0 est inversible puisque la projection $B^I \to B^{I_0}$ est un homomorphisme d'anneau. Ce qui montre que la condition est nécessaire. Inversement, supposons que f_0 soit inversible. Montrons que

$$\begin{aligned}(f_0)^{-1} f &= \varepsilon + (f_0)^{-1} f \\ &= \varepsilon + \delta\end{aligned}$$

est inversible. La série géométrique

$$(\varepsilon + \delta)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \delta^n$$

converge car

$$\begin{aligned}\delta^n(i) &= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in I^n} \begin{bmatrix} & i & \\ j_1, & \ldots, & j_n \end{bmatrix} \delta(j_1) \cdots \delta(j_n) \\ &= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in (I - I_0)^n} \begin{bmatrix} & i & \\ j_1 & \cdots & j_n \end{bmatrix} \delta(j_1) \cdots \delta(j_n)\end{aligned}$$

et les coefficients $\left[\begin{smallmatrix} & i & \\ j_1 & \ldots & j_n \end{smallmatrix}\right]$ dans cette dernière somme s'annulent tous dès que n est suffisamment grand. C.Q.F.D.

Remarque 1. Si l'anneau B contient les nombres rationnels, on peut définir pour tout $\alpha \in B$ la *puissance* $(\varepsilon + \delta)^\alpha$ en utilisant le développement de Newton:

$$(\varepsilon + \delta)^\alpha = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} \delta^n$$

où

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Remarque 2. La fonction *zeta* $\zeta: I \to B$ est la fonction telle que $\zeta(i) = 1$ pour tout $i \in I$. La fonction de *Möbius* $\mu: I \to B$ est l'inverse $\zeta^{-1} = \mu$. Les égalités

$$g(i) = \sum_{j,k} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} f(k),$$

$$f(i) = \sum_{j,k} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} \mu(j)\, g(k)$$

sont donc équivalentes. La démonstration de la proposition précédente nous fait voir que

$$\mu(i) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in(I-I_0)^n} (-1)^n \begin{bmatrix} & i & \\ j_1, & \ldots, & j_n \end{bmatrix}$$

autrement dit que

$$\mu(i) = D_0(i) - D_1(i),$$

où $D_0(i)$ (resp. $D_1(i)$) est le nombre total de décompositions strictes de i, dont la longueur est paire (resp. impaire).

7.2.2. Une structure de monoïde

$$I \times I \xrightarrow{\cdot} I, \qquad e \in I$$

peut s'étendre additivement en une structure de semi-anneau:

$$\mathbf{N}(I) \times \mathbf{N}(I) \to \mathbf{N}(I), \qquad e \in \mathbf{N}(I).$$

Il se peut qu'une loi de décomposition (d, ε) définisse des *homomorphismes* de semi-anneaux:

$$\mathbf{N}(I) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathrm{I}) \otimes \mathbf{N}(I),$$

$$\mathbf{N}(I) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{N}.$$

(Pour la structure de semi-anneau induite sur $\mathbf{N}(I) \otimes \mathbf{N}(I)$.) Dans ce cas nous dirons que (d, ε) et $(\cdot, e)$ sont *compatibles* et que $\mathbf{N}(I)$ est une *bigèbre* (Sweedler [31]). Cela équivaut à dire que l'on a des égalités

$$\text{(i)} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \cdot i_2 \\ j \quad k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{j_1 j_2 = j \\ k_1 k_2 = k}} \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \quad k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \quad k_2 \end{bmatrix},$$

$$d(e) = (e, e),$$

$$\text{(ii)} \qquad \varepsilon(i_1 \cdot i_2) = \varepsilon(i_1) \cdot \varepsilon(i_2),$$

$$\varepsilon(e) = 1.$$

Notons I_0 l'ensemble des éléments neutres de I (Prop. 25).

PROPOSITION 28. Pour tout $(i_1, i_2) \in I \times I$ on a $i_1 \cdot i_2 \in I_0$ ssi $i_1 \in I_0$ et $i_2 \in I_0$. De plus, on a les égalités

$$\partial_0(i_1 \cdot i_2) = \partial_0(i_1) \cdot \partial_0(i_2),$$

$$\partial_1(i_1 \cdot i_2) = \partial_1(i_1) \cdot \partial_1(i_2).$$

Preuve. La première assertion résulte de l'égalité (ii). Pour obtenir la seconde, on utilise (i): si $j = i_1 \cdot i_2$ et $k = \partial_1(i_1 \cdot i_2)$ on a

$$1 = \sum_{\substack{j_1 \cdot j_2 = j \\ k_1 \cdot k_2 = k}} \begin{bmatrix} & i_1 & \\ j_1 & & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & i_2 & \\ j_2 & & k_2 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne l'existence d'un quadruplet (j_1, k_1, j_2, k_2) tel que

$$\begin{bmatrix} & i_1 & \\ j_1 & & k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & i_2 & \\ j_2 & & k_2 \end{bmatrix} = 1.$$

Comme $k_1 \cdot k_2 = k$ on voit que k_1 et k_2 sont neutres. La dernière assertion de la proposition 26 nous permet de conclure que

$$k_1 = \partial_1(i_1) \qquad \text{et} \qquad k_2 = \partial_1(i_2)$$

et donc que

$$\partial_1(i_1) \cdot \partial_1(i_2) = \partial_1(i_1 \cdot i_2). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Disons qu'une fonction $f: I \to B$ est *multiplicative* si $f(i \cdot j) = f(i) \cdot f(j)$ et $f(e) = 1$.

PROPOSITION 29. *Soit B un anneau* commutatif. *Si $f, g \in B^I$ sont des fonctions multiplicatives alors $f \cdot g \in B^I$ est multiplicative.* De plus, si f^{-1} *existe, c'est une fonction multiplicative.*

Pour tout $i \in I$ et pour tout $f \in B^I$ soit $\underline{i}\rfloor f \in B^I$ la fonction $j \mapsto f(i \cdot j)$. (On définit aussi $f \lfloor \underline{i} \in B^I$.)

LEMME. *On a la formule*

$$\underline{i}\rfloor (fg) = \sum_{(j,k) \in I \times I} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} (\underline{j}\rfloor f)(\underline{k}\rfloor g).$$

Preuve. On a successivement

$$\begin{aligned} \underline{i}\rfloor (fg)(i') &= (fg)(i \cdot i') \\ &= \sum_{u,v} \begin{bmatrix} & ii' & \\ u & & v \end{bmatrix} f(u)\, g(v) \\ &= \sum_{j,k,j',k'} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & i' & \\ j' & & k' \end{bmatrix} f(j \cdot j')\, g(k \cdot k') \\ &= \sum_{j,k} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} ((\underline{j}\rfloor f) \cdot (\underline{k}\rfloor g))(i'). \end{aligned}$$

Démontrons maintenant la dernière assertion de la proposition: si f est multiplicative et si $fg=\varepsilon$ alors g est multiplicative. Il faut montrer que $g\,\lfloor\underline{r} = g\cdot(g(r))$ pour tout $r\in I$. (B^I est une B-algèbre.) On a

$$\begin{aligned}\underline{i}\rfloor\varepsilon=\underline{i}\rfloor fg &= \sum_{j,k}\begin{bmatrix} & i & \\ j & & k\end{bmatrix}(\underline{j}\rfloor f)(\underline{k}\rfloor g)\\ &= \sum_{j,k}\begin{bmatrix} & i & \\ j & & k\end{bmatrix}(f(j)f)\,\underline{k}\rfloor g\\ &= f\cdot\sum_{j,k}\begin{bmatrix} & i & \\ j & & k\end{bmatrix}f(j)(\underline{k}\rfloor g).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\underline{i}\rfloor\varepsilon=\varepsilon(i)\,\varepsilon=\varepsilon(i)\,f\cdot g=f\cdot(\varepsilon(i)\,g).$$

Comme f est inversible il suit que

$$\varepsilon(i)\,g=\sum_{j,k}\begin{bmatrix} & i & \\ j & & k\end{bmatrix}f(j)(\underline{k}\rfloor g).$$

Autrement dit, que pour tout $r\in I$

$$\varepsilon\cdot(g(r))=f\cdot(g\,\lfloor\underline{r}).$$

Multipliant par g les deux membres de cette dernière égalité, on trouve

$$g\cdot(g(r))=g\,\lfloor\underline{r}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

La proposition précédente nous permet de conclure en particulier que la fonction de Möbius $\mu=\zeta^{-1}$ est *multiplicative.* Si $B=\mathbf{Z}(I)$, on peut chercher à inverser l'inclusion $I\hookrightarrow\mathbf{Z}(I)$. Si c'est possible, on obtient *l'antipode* $\theta\colon I\to\mathbf{Z}(I)$. Si la multiplication $I\times I\to I$ est commutative, l'antipode est une fonction multiplicative. Dans le cas où la loi de décomposition est héréditairement finie, on a la formule

$$\theta(i)=\sum_{(j_1,\dots,j_n)\,\text{stricte}}\begin{bmatrix} & i & \\ j_1 & \cdots & j_n\end{bmatrix}(-1)^n j_1\cdot\ \cdots\ \cdot j_n.$$

7.3. *Catégorie additive*

Nous utiliserons le terme *catégorie additive* dans un sens différent du sens habituel, faute d'avoir pu trouver une meilleure terminologie. Il s'agit plus ou moins de refaire l'algèbre linéaire en remplacant le concept d'ensemble par celui de catégorie et le concept de fonction par celui de foncteur.

Une *catégorie additive* $(\mathscr{A}, +, 0)$ est une catégorie monoïdale symétrique où le produit $\otimes$ est noté additivement $(+)$. L'object unité est baptisé objet *nul.* Un foncteur *additif* $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre catégories additives est un foncteur préservant la *somme* et l'objet nul (à isomorphisme cohérent près):

$$F(A+B) \simeq F(A) + F(B),$$
$$F(0) \simeq 0.$$

Nous noterons $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ la catégorie des foncteurs additifs de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$. C'est une catégorie additive, la somme $F+G$ de deux foncteurs étant définie comme d'habitude:

$$(F+G)(A) = F(A) + G(A),$$
$$0(A) = 0.$$

On définit aussi le concept de foncteur *bi-additif* $F: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ c'est un foncteur additif en chaque variable (et cohérence):

$$F(A_1 + A_2, B) \simeq F(A_1, B) + F(A_2, B),$$
$$F(A, B_1 + B_2) \simeq F(A, B_1) + F(A, B_2),$$
$$F(A, 0) \simeq F(0, B) \simeq 0.$$

Un (semi) *anneau* est une catégorie additive $\mathscr{A}$ munie d'un produit bi-additif $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \xrightarrow{\bullet} \mathscr{A}$ et d'un objet unité $I \in \mathscr{A}$ satisfaisant aux axiomes d'associativité et d'unité (et cohérence).

Le produit *tensoriel* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ de deux catégories additives s'obtient en construisant le foncteur bi-additif *universel*: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

La catégorie additive *libre* $L(\mathbf{C})$ sur une catégorie $\mathbf{C}$ se construit de la façon suivante: les *objets* de $L(\mathbf{C})$ sont les familles finies $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{C}$; les *morphismes* $(A_i)_{i\in I} \to (B_j)_{j\in J}$ sont les couples (u, ϕ), où $u: I \to J$ est une bijection et où $\phi = (\phi_i)_{i\in I}$ est une famille de morphismes $\phi_i: A_i \to B_{u(i)}$ $(i \in I)$. La composition est définie par la formule $(v, \psi)(u, \phi) = (vu, \psi_u \phi)$, où $\psi_u \phi = (\psi_{u(i)} \phi_i)_{i \in I}$. Nous utiliserons la notation $\sum_{i\in I} A_i$ pour désigner la famille $(A_i)_{i\in I}$. Avec cette notation on a la formule

$$\sum_{i\in I_1} A_i + \sum_{i\in I_2} A_i = \sum_{i\in I_1+I_2} A_i.$$

La catégorie additive *unité* est le groupoïde $\mathbf{B}$ des ensembles finis et bijections (muni de la somme disjointe). On a des *équivalences* de catégories:

$$\mathscr{A} \otimes \mathbf{B} \simeq \mathbf{B} \otimes \mathscr{A} \simeq \mathscr{A}$$

et aussi

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{B}, \mathscr{A}) \simeq \mathscr{A}.$$

On a les sorites habituelles: un foncteur additif $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ est équivalent à un foncteur additif $\mathscr{A} \to \mathrm{Hom}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, etc.

Soit $\mathbf{1}$ la catégorie constituée d'un seul object et d'une seul morphisme. La catégorie $L(\mathbf{1})$ coïncide avec le groupoïde $\mathbf{B}$ des ensembles finis et bijections. On a aussi la formule

$$L(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2) \simeq L(\mathbf{C}_1) \otimes L(\mathbf{C}_2).$$

7.4. *Lois de décomposition combinatoire*

Nous allons maintenant examiner le concept de co-multiplication sur un groupoïde additif:

$$d\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}.$$

Nous supposerons toujours que d est associative et que l'on a une co-unité

$$\mathscr{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{B}.$$

Nous nous limiterons au cas où $\mathscr{A}$ est *libre* sur un groupoïde $\mathbf{A}$. Nous dirons alors que d est une *loi de décomposition* sur $\mathbf{A}$. Vu l'identité $L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}) \simeq L(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$, une loi de décomposition sur $\mathbf{A}$ est un foncteur additif

$$L(\mathbf{A}) \to L(\mathbf{A} \times \mathbf{A}).$$

ou plus simplement un foncteur

$$\mathbf{A} \xrightarrow{d} L(\mathbf{A} \times \mathbf{A}).$$

De même, la co-unité ε est un foncteur

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{B}.$$

Strictement parlant, d est une loi de décomposition *binaire*. On peut aussi considérer une décomposition *ternaire* en composant

$$\begin{tikzcd} L(\mathbf{A}) \arrow[r, "d"] \arrow[dr] & L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}) \arrow[d, "L(\mathbf{A}) \otimes d"] \\ & L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}). \end{tikzcd}$$

L'associativité d'une loi de décomposition exprime le fait que cette loi ternaire peut aussi s'obtenir (à isomorphisme cohérent près) en composant

$$\begin{tikzcd} L(\mathbf{A}) \arrow[r, "d"] \arrow[dr] & L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}) \arrow[d, "d \otimes L(\mathbf{A})"] \\ & L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}) \otimes L(\mathbf{A}). \end{tikzcd}$$

Nous écrirons, pour $A \in \mathbf{A}$

$$d(A) = \sum_{i \in D(A)} (d_i^1(A), d_i^2(A)).$$

Nous dirons que $D(A)$ est l'ensemble des *décompositions* (*binaires*) de A. Nous dirons aussi que $d_i^1(A)$ (resp. $d_i^2(A)$) est le *premier morceau* (resp. le *second morceau*) de la décomposition $i \in D(A)$.

Une loi d est *symmétrique* si l'on a une transformation naturelle involutive $\tau: d \to d$ et pour chaque $i \in D(A)$ des isomorphismes (cohérents) $d_i^1(A) \simeq d_{\tau(i)}^2(A)$.

Considérons maintenant une catégorie $\mathscr{B}$ munie d'une structure de semi-anneau. Une loi de décomposition sur le groupoïde $\mathbf{A}$ nous permettra de définir une structure de semi-anneau sur le catégorie $[\mathbf{A}, \mathscr{B}]$ des foncteurs de $\mathbf{A}$ vers $\mathscr{B}$ (7.2.1). Le produit $F \cdot G$ de deux foncteurs $F: \mathbf{A} \to \mathscr{B}$, $G: \mathbf{A} \to \mathscr{B}$ est un foncteur dont la valeur en $A \in \mathbf{A}$ est égale à

$$(F \cdot G)(A) = \sum_{i \in D(A)} (F(d_i^1(A)) \cdot G(d_i^2(A)))$$

Supposons de plus que $\mathbf{A}$ soit muni d'une structure monoïdale $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \xrightarrow{\cdot} \mathbf{A}$, $I \in \mathbf{A}$, *compatible* avec la loi de décomposition d (7.2.2). Cette compatibilité s'exprime par des isomorphismes (cohérents)

$$\begin{aligned} &\rho: D(A \cdot B) \simeq D(A) \times D(B), \\ &\left.\begin{aligned} d_k^1(A \cdot B) \simeq d_i^1(A) \cdot d_j^1(B), \\ d_k^2(A \cdot B) \simeq d_i^2(A) \cdot d_j^2(B), \end{aligned}\right\} \quad \text{si} \quad \rho(k) = (i, j) \\ &\quad d(I) \simeq (I, I), \\ &\varepsilon(A \cdot B) \simeq \varepsilon(A) \times \varepsilon(B), \\ &\quad \varepsilon(I) \simeq 1. \end{aligned}$$

Si le semi-anneau $\mathscr{B}$ est *commutatif* (i.e., symmétrique) on peut démontrer que le produit $F \cdot G$ de deux foncteurs multiplicatifs $F, G: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un foncteur multiplicatif.

EXEMPLE 47. Le groupoïde $\mathbf{B}$ est muni d'un loi de décomposition symétrique

$$d\colon \mathbf{B} \to L(\mathbf{B} \times \mathbf{B})$$

dont la valeur en $E \in \mathbf{B}$ est égale à

$$d(E) = \sum_{A+B=E} (A, B)$$

où la sommation a lieu sur l'ensemble de tous le partages de E en deux morceaux. La co-unité $\varepsilon\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ est le foncteur

$$\begin{aligned} \varepsilon(E) &= \varnothing \qquad \text{si} \quad E \neq \varnothing \\ &= 1 \qquad \text{si} \quad E = \varnothing. \end{aligned}$$

On vérifie aussi que la somme $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \to^{+} \mathbf{B}$ est une structure monoïdale *compatible* avec la loi de décomposition d. Soit $\mathscr{R}$ un semi-anneau commutatif. Le semi-anneau $[\mathbf{B}, \mathscr{R}]$ est le semi-anneau des *séries de Hurwitz à coefficients dans* $\mathscr{R}$. Les foncteurs $F\colon \mathbf{B} \to \mathscr{R}$ préservant les structures multiplicatives sont les séries exponentielles $F = \exp(BX)$ $(B \in \mathscr{R})$.

EXEMPLE 48. Soit $\mathbf{O}$ le groupoïde des ensembles ordonnés finis et isomorphismes. Une *section inférieure* S_{-} de $E \in \mathscr{R}$ est une partie $S_{-} \subseteq E$ telle que $x \leqslant y \in S_{-}$ entraîne $x \in S_{-}$. On définit aussi le concept de *section supérieure*. Une *décomposition* de $E \in \mathbf{O}$ est un couple (S_{-}, S_{+}) de sections inférieure et supérieure tel que $S_{-} \cap S_{+} = \varnothing$ et $S_{-} \cup S_{+} = E$. On a une loi de décomposition

$$d\colon \mathbf{O} \to L(\mathbf{O} \times \mathbf{O})$$

dont la valeur en $E \in \mathbf{O}$ est égale à

$$d(E) = \sum_{(S_{-}, S_{+}) \in D(E)} (S_{-}, S_{+}).$$

Cette loi n'est pas symétrique. La *somme disjointe* d'ensembles ordonnés nous donne une structure multiplicative $\mathbf{O} \times \mathbf{O} \to^{+} \mathbf{O}$ *compatible* avec la loi de décomposition.

EXEMPLE 49 (Fàa di Bruno). Considérons le groupoïde $\mathbf{F}$ dont les objets sont les *surjections* $A \twoheadrightarrow A'$ d'ensembles finis et les morphismes sont les rectangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \end{tikzcd}$$

où u et u' sont des isomorphismes.

On a une loi de décomposition

$$d(A \twoheadrightarrow A') = \sum_R (A \twoheadrightarrow A/R, A/R \twoheadrightarrow A')$$

où la sommation a lieu sur l'ensemble des relations d'équivalence R sur A induisant une *factorisation* $A \twoheadrightarrow A/R \twoheadrightarrow A'$ de $A \twoheadrightarrow A'$. La co-unité $\varepsilon: \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ se définit comme suit

$$\begin{aligned} \varepsilon(A \twoheadrightarrow A') &= 1 \text{ si } A \twoheadrightarrow A' \text{ est un isomorphisme} \\ &= \varnothing \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

L'opération de *somme disjointe* $A + B \twoheadrightarrow A' + B'$ (de deux surjections) permet de définir une structure monoïdale

$$\mathbf{F} \times \mathbf{F} \xrightarrow{+} \mathbf{F}$$

compatible avec la loi de décomposition. Si $\mathscr{B}$ est un semi-anneau commutatif, un foncteur multiplicatif $N: \mathbf{F} \to \mathscr{B}$ est entièrement déterminé si l'on connaît sa restriction au sous-groupoïde de surjections $A \twoheadrightarrow 1$. Comme ce dernier groupoïde est équivalent au groupoïde $\mathbf{B}^*$ des ensembles finis non vides, on peut identifier un foncteur multiplicatif $N: \mathbf{F} \to \mathscr{B}$ à un foncteur $N: \mathbf{B}^* \to \mathscr{B}$ c'est-à-dire à une espèce $N: \mathbf{B} \to \mathscr{B}$ telle que $N[0] = 0$. De cette façon la structure monoïdale sur la catégorie des foncteurs multiplicatifs s'identifie à la *substitution* des espèces de l'idéal $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}\,\|X\|$ (Chap. 2).

Exemple 50. Soit $\mathbf{A}$ le groupoïde des groupes abéliens finis et isomorphismes. On a une loi de décomposition

$$d: \mathbf{A} \to L(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$$

dont la valeur en $A \in \mathbf{A}$ est égale à

$$d(A) = \sum_{S \subseteq A} (S, A/S)$$

où la sommation a lieu sur tout les sous-groupes S de A.

Exemple 51 (Joni et Rota [16], Lawvere). Un *intervalle fini* est un ensemble ordonné fini ayant un plus petit et plus grand élément. Soit $\mathbf{I}$ le groupoïde des intervalles finis et isomorphismes. Pour $U \in \mathbf{I}$ et $x \in U$ soit U_x (resp. U^x) l'intervalle $\{y \mid y \in U, y \leqslant x\}$ (resp. l'intervalle $\{y \mid y \in U, y \geqslant x\}$) On a une loi de décomposition

$$d : \mathbf{I} \to L(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$$

dont la valeur en $U \in I$ est la somme

$$d(U) = \sum_{x \in U} (U_x, U^x).$$

De plus, le produit (cartésien) $U \times V$ de deux intervalles est un intervalle. Ce qui donne une structure monoïdale

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I} \xrightarrow{\times} \mathbf{I}$$

compatible avec la loi de décomposition.

7.4.1. Plusieurs lois de décomposition proviennent d'une loi de *composition*. Par exemple, soit $\mathbf{A}$ un groupoïde muni d'une structure monoïdale $(\mathbf{A}, \otimes, I)$. Une *décomposition* d'un objet $E \in \mathbf{A}$ est un triplet (A, B, α), où α est un isomorphisme

$$\alpha : A \otimes B \to E.$$

Un *isomorphisme* de décompositions $(\mathbf{A}, B, \alpha) \to (A', B', \alpha')$ est un couple $(A \to^u A', B \to^v B')$ d'isomorphismes tel que le triangle

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[dd, "u \otimes v"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& E \\
A' \otimes B' \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Supposons maintenant que le foncteur $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to^{\otimes} \mathbf{A}$ soit *fidèle* et que pour tout $E \in \mathbf{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des décompositions de E soit *fini*. On peut alors définir une loi de décomposition

$$d : \mathbf{A} \to L(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$$

dont la valeur en $E \in \mathbf{A}$ est

$$d(E) = \sum_{A \otimes B = E} (A, B)$$

où la sommation a lieu sur un système complet de représentants des classes d'isomorphismes des décompositions de E.

EXEMPLE 52 (Dirichlet). Le groupoïde $\mathbf{B}^*$ des ensembles finis non vides (et bijections) muni du produit cartésien. Un couple (R, S) de relations d'équivalence sur $E \in \mathbf{B}^*$ est *orthogonal* si l'application canonique

$$E \to E/R \times E/S$$

est une bijection. On a la loi de décomposition

$$d(E) = \sum_{(R,S)} (E/R, E/S)$$

où la sommation a lieu sur tous les couples orthogonaux de relations d'équivalence sur E.

La composition des morphismes d'une catégorie nous permet souvent de définir une loi de décomposition. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une ***décomposition*** d'une morphisme $f \in \mathbf{C}$ est un triangle $f_2 f_1 = f$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & B \\
& C. \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Deux décompositions $f_1 f_2 = f$, $g_1 g_1 = f$ sont *isomorphes* s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dr, "g_2"] \arrow[dd, "u"] & \\
A \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

où u est un isomorphisme. Supposons que:

(1) il y a au plus un isomorphisme entre deux décompositions,

(2) l'ensemble des classes d'isomorphismes des décompositions d'un morphisme est fini.

Si ces deux conditions sont satisfaites, on peut définir une loi de décomposition sur le groupoïde $\vec{\mathbf{C}}$ dont les objects sont les flèches de $\mathbf{C}$ et les isomorphismes sont les rectangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xrightarrow{\sim} & B'. \end{array}$$

On a

$$d(f) = \sum_{(f_1, f_2) \in D(f)} (f_1, f_2),$$

où $D(f)$ est un système complet de représentants des classes d'isomorphismes des décompositions de f.

EXEMPLE 53. Si la catégorie $\mathbf{C}$ est celle des ensembles finis et surjections on obtient l'exemple 49 (Faà di Bruno).

EXEMPLE 54. On obtient un autre exemple en prenant pour $\mathbf{C}$ la catégorie des ordre linéaires finis et surjections croissantes. Il y a sur $\mathbf{C}$ une structure multiplicative compatible avec la loi de décomposition: c'est la somme ordinale $f_1 + f_2 \colon L_1 + L_2 \to L_1' + L_2'$ de deux surjections croissantes $f_1 \colon L_1 \to L_1'$, $f_2 \colon L_2 \to L_2'$. Si $\mathscr{B}$ est un semi-anneau commutatif, les foncteurs multiplicatifs $F \colon \vec{\mathbf{C}} \to \mathscr{B}$ s'identifient aux espèces linéaires sans terme constant. Le produit de foncteurs multiplicatifs s'identifie à la *substitution* de ces espèces linéaires.

EXEMPLE 55. On peut prendre pour $\mathbf{C}$ la catégorie dont les objets sont les couples (E, σ), où σ est une permutation de l'ensemble fini E. Les morphismes $(E, \sigma) \to^{\phi} (E', \sigma')$ sont les surjections $\phi \colon E \twoheadrightarrow E'$ telles que $\phi\sigma = \sigma'\phi$. Il y a sur $\vec{\mathbf{C}}$ une structure multiplicative évidente. Cet exemple est en rapport étroit avec la substitution de *séries indicatrices* vues au chapitre 3.

7.5. *Aspects numériques*

Soit $\mathbf{A}$ un groupoïde muni d'une loi de décomposition

$$d \colon \mathbf{A} \to L(\mathbf{A} \times \mathbf{A}).$$

Nous allons décrire une loi de décomposition numérique *induite* sur l'ensemble $\pi_0(\mathbf{A})$ des composantes connexes de $\mathbf{A}$:

$$d \colon \pi_0(\mathbf{A}) \to \mathbf{N}(\pi_0(\mathbf{A}) \times \pi_0(\mathbf{A})).$$

Désignons par $|s|$ la composante connexe contenant $s \in \mathbf{A}$. L'élément

$$\sum_{i \in D(s)} (|d_i^1(s)|, |d_i^2(s)|)$$

de $\mathbf{N}(\pi_0(\mathbf{A}) \times \pi_0(\mathbf{A}))$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme $|s|$ de s. On a donc une application

$$d\colon \pi_0(\mathbf{A}) \to \mathbf{N}(\pi_0(\mathbf{A}) \times \pi_0(\mathbf{A}))$$

telle que

$$d(|s|) = \sum_{i \in D(s)} (|d_i^1(s)|, |d_i^2(s)|).$$

On définit aussi

$$\varepsilon\colon \pi_0(\mathbf{A}) \to \mathbf{N}$$

par

$$\varepsilon(|s|) = \operatorname{Card} \varepsilon(s).$$

PROPOSITION 30. *Les application (d, ε) définissent une loi de décomposition numérique sur l'ensemble $\pi_0(\mathbf{A})$.*

Si $(i, j, k) \in \pi_0(\mathbf{A})$, l'entier naturel $[{}_j{}^i{}_k]$ a la signification suivante: si $i = |s|$, c'est le nombre de décompositions $r \in D(s)$ telles que $|d_r^1(s)| = j$ et $|d_r^2(s)| = k$. Dans le cas où d provient d'une structure monoïdale $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to^{\otimes} \mathbf{A}$ (7.4.1) on a un résultat plus précis. Supposons que pour tout $s \in \mathbf{A}$ le groupe $\operatorname{aut}(s)$ des automorphismes de s soit fini. Posons pour $i \in \pi_0(\mathbf{A})$

$$\operatorname{aut}(i) = \operatorname{Card}(\operatorname{aut}(s))$$

où $i = |s|$. Notons $\pi_0(A) \times \pi_0(A) \to^{\cdot} \pi_0(A)$ la structure de monoïde induite par la structure monoïdale de $\mathbf{A}$. On a la formule

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} & i & \\ j & & k \end{bmatrix} &= \frac{\operatorname{aut}(i)}{\operatorname{aut}(j)\operatorname{aut}(k)} \qquad && \text{si} \quad j \cdot k = i \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

EXEMPLE 56. La plupart des exemples donnés en 7.4 sont des lois de décompositions *héréditairement* finies (déf. 24). On peut donc appliquer le théorème 7 pour calculer les inverses. En particulier, si on utilise la bigèbre de Faà di Bruno (Ex. 49), cela montre que les séries de Hurwitz f, à *coefficients entiers*, telles que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, sont closes pour l'*inversion* *fonctionnelle*. On voit aussi que si f est à coefficients rationnels et si $\alpha \in \mathbf{Q}$, on peut définir *l'itération fractionnaire* f^{α}. Des résultats semblables sont valides pour les séries à plusieurs variables. Etc.

8. Références

1. E. A. Bender et J. R. Goldman, Enumerative uses of generating functions, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971), 753–765.
2. N. Bourbaki, "Eléments de mathématiques. Théorie des ensembles," Chap. 4, "Structures," Hermann, Paris, 1968.
3. W. Burnside, "Theory of Groups of Finite Order," 2nd ed. p. 191, Theorem VII, Dover, New York, 1955.
4. H. Cartan, "Séminaire Henri Cartan" (7e année 1954–1955).
5. P. Cartier et D. Foata, "Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements," Lecture Notes in Mathematics No. 85, Springer–Verlag, 1969.
6. L. Comtet, "Advanced Combinatorics," Reidel, Dordrecht-Holland/Boston, 1974.
7. M. Content, F. Lemay, et P. Leroux, Catégories de Möbius et fonctorialités: Un cadre général pour l'inversion de Möbius, *J. Combin. Theory Ser. A* **28** (1980), 169–190.
8. P. Doubilet, G.-C. Rota, et R. P. Stanley, The idea of generating function, *dans* "Finite Operator Calculus" (G.-C. Rota, Ed.), pp. 83–134, Academic Press, New York, 1975.
9. C. Ehresmann, "Catégories et structures," Dunod, Paris, 1965.
10. D. Foata, "La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumérations," Les Presses de l'Université de Montréal, 1974.
11. D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler Formula, *J. Combin. Theory Ser. A* **24** (1978), 367–376.
12. D. Foata, et M.-P. Schützenberger, "Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens," Lecture Notes in Mathematics No. 138, Springer–Verlag, New York/Berlin, 1970.
13. A. M. Garsia et S. A. Joni, "Lecture Notes in Combinatorics, U.C.S.D.," Department of Mathematics, La Jolla, 1976.
14. I. M. Gessel, "Generating Functions and Enumeration of Sequences," Ph. D. Thesis, 1977.
15. F. Harary et E. M. Palmer, "Graphical Enumeration," Academic Press, New York/London, 1973.
16. S. A. Joni et G.-C. Rota, Coalgebras and bialgebras in combinatorics, *Stud. Appl. Math.* **61** (1979), 93–139.
17. G. M. Kelly, On clubs and doctrinies, *dans* "Category Seminar" (G. M. Kelly, Ed.), Lecture Notes in Mathematics No. 420, Springer–Verlag, New York/Berlin, 1974.
18. D. G. Kendall, Branching processes since 1873, *J. London Math. Soc.* **41**, 385–406.
19. D. E. Knuth, Subspaces, subsets, and partitions, *J. Combin. Theory* **10** (1971), 178–180.
20. G. Labelle, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversions de Lagrange, *Advances in Math.*, in press.
21. J. Labelle, Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures. *Ann. Sci. Math. Québec*, à paraître.
22. P. Leroux, Les catégories de Möbius, *Cahiers Topologie Géom. Differentielle* **16**(3) (1975), 280–283.
23. S. MacLane, "Categories for the Working Mathematician," Springer–Verlag, New York, 1971.
24. J. W. Moon, Counting labelled trees, Canadian Mathematical monographs, 1970.

25. R. MULLIN ET G.-C. ROTA, On the foundations of combinatoriel theory III. Theory of binamial enumeration, *dans* "Graph Theory and Its Applications," (B. Harris, Ed.), Academic Press, New York, 1970.
26. G. PÓLYA, Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.* **68** (1937), 145–254.
27. G. RANEY, Functional composition patterns and power series reversion, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 441–451.
28. G.-C. ROTA, Hopf algebra in combinatorics, *dans* "Problèmes combinatoires et théorie des graphes," Colloques internationaux CNRS, No. 260, pp. 363–365, CNRS, Paris.
29. G.-C. ROTA, On the foundations of combinatorial theory, I. Theory of Möbius functions, *Z. Wahrsch.* Band 2, Heft 4 (1964), 340–368.
30. R. P. STANLEY, Generating functions, *dans* "M.A.A. Studies in Combinatorics" (G.-C. Rota, Ed.), Mathematical Association of America, 1978.
31. S. SWEEDLER, "Hopf Algebras," Benjamin, New York, 1969.
32. S. MACLANE (Ed.), "Coherence in Categories," Lecture Notes in Mathematics No. 281, Springer–Verlag, New York/Berlin, 1972.

(Remarque: cette liste contient quelques références en plus de celles directement citées dans le texte.)