Automates à piles de piles $\cdots$ de piles

Severine Fratani

LaBRI

Équipe L3A (Logique Algorithmes Automates et Applications)

Université Bordeaux 1, France.

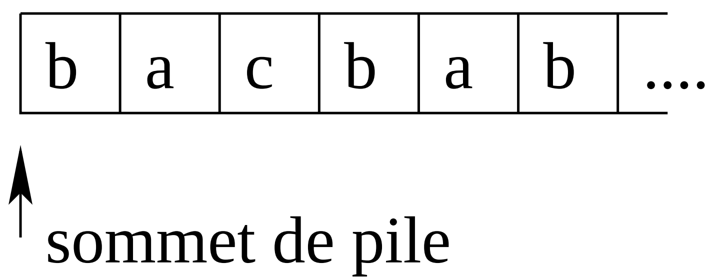
URL:http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~fratani

PLAN

- Piles itérées
- Automates à piles itérées
- Logique du Second Ordre Monadique sur les piles
- Des classes d'automates équivalentes
- Suites d'entiers reconnues par automates
  - ➜ Arithmétique faible
  - ➜ Suites de rationnels et automates
- Perspectives

Piles itérées

PILES CLASSIQUES (1-PILES)



Trois instructions sont généralement applicables:

$\omega = bacbab$

- ➜ lecture du symbole de tête : $\mathrm{top}(\omega) = b$
- ➜ suppression du sommet de pile : $\mathrm{pop}(\omega) = acbab$
- ➜ ajout d'un symbole en sommet de pile: $\mathrm{push}_a(\omega) = abacbab$

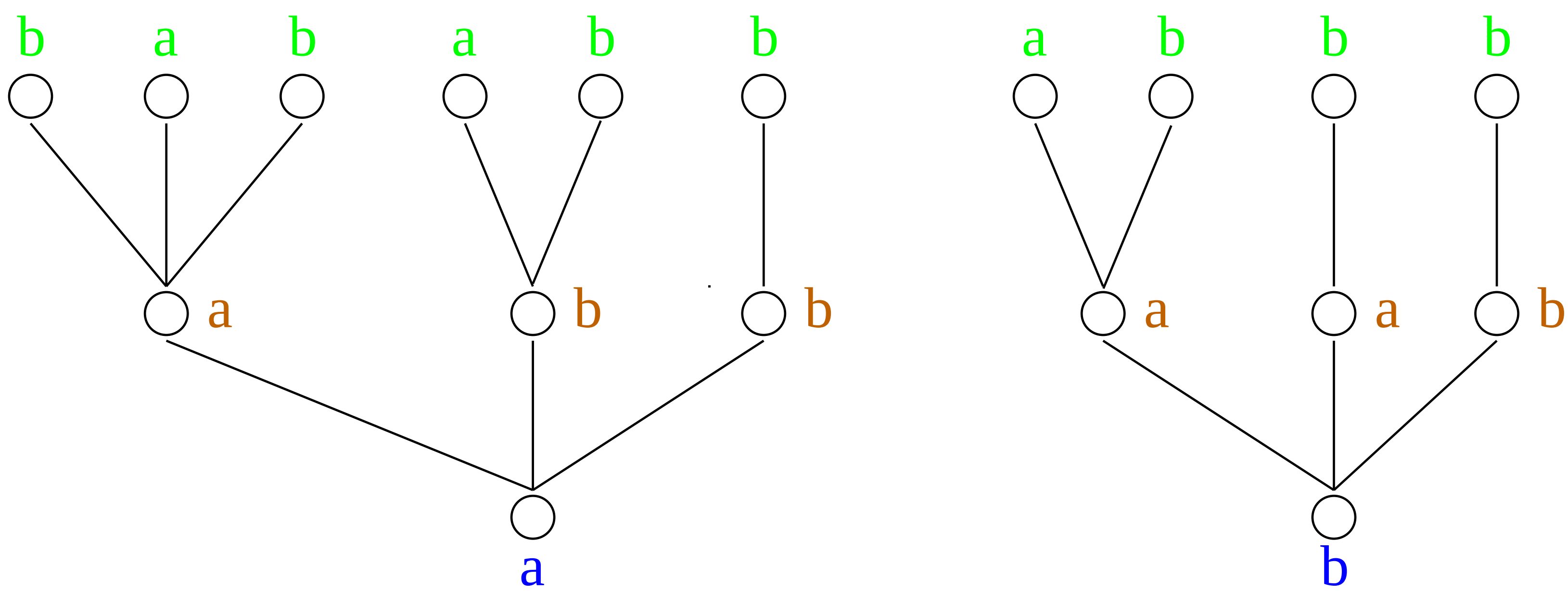
PILES k-ITÉRÉES (k-PILES)

- $1\text{-Pile}(A) = A^*$
- $(k+1)\text{-Pile}(A) = (A \cdot [k\text{-Pile}(A)])^*$

Exemples:

- $\omega_2 = a[ab]\, b[a]\, a[cab] \in 2\text{-Pile}$
- $\omega_3 = a[a[ab]\, b[a]\, a[cab]]\, b[a[ab]\, b[a]\, a[cab]] \in 3\text{-Pile}$

Représentation planaire des piles itérées



$$\omega = a[a[bab]\ b[ab]\ b[b]]\ b[a[ab]\ a[b]\ b[b]]$$

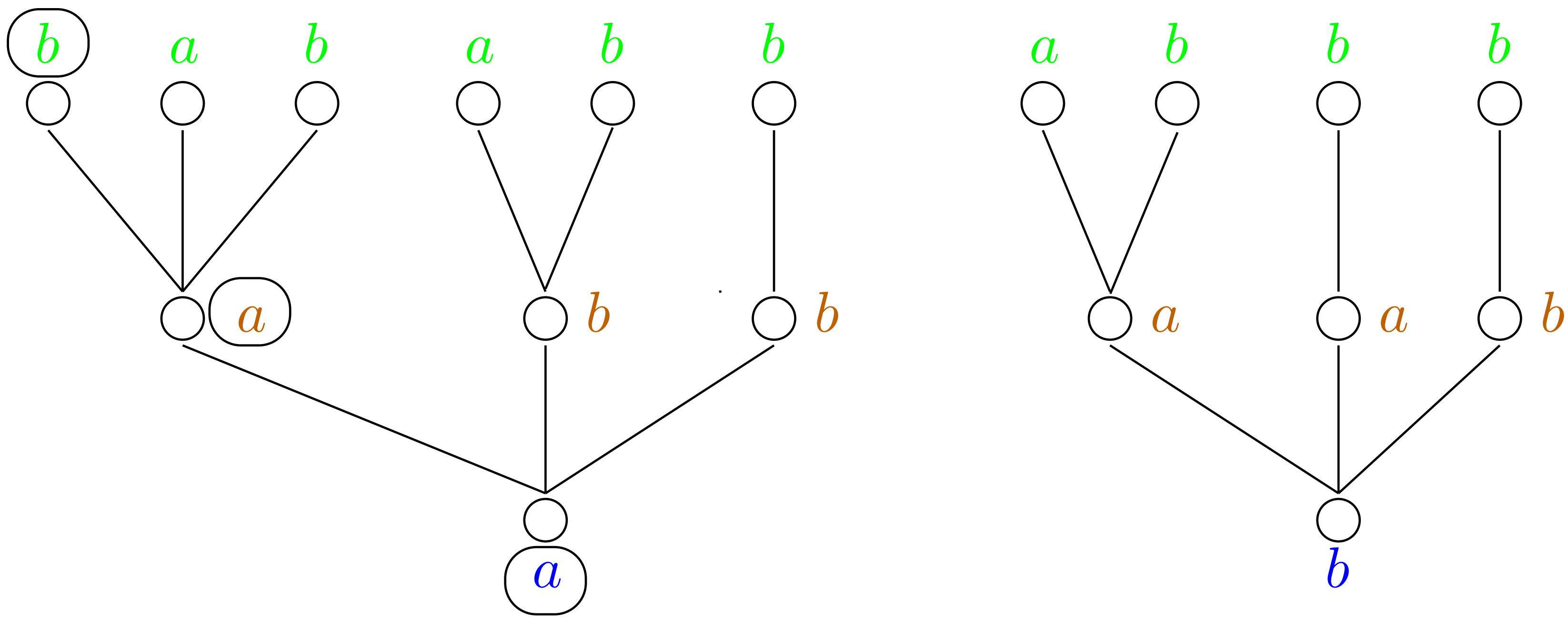
INSTRUCTIONS DE PILES

Trois types d'instructions sont applicables à une k-pile:

- ➜ lecture des k symboles de sommet de pile: top
- ➜ suppression du sommet de niveau i, $i \in [1, k]$: pop_i
- ➜ ajout de a au niveau i, $i \in [1, k]$ (avec copie des sous arbres de niveau $i - 1$): $\mathrm{push}_{a,i}$

INSTRUCTIONS

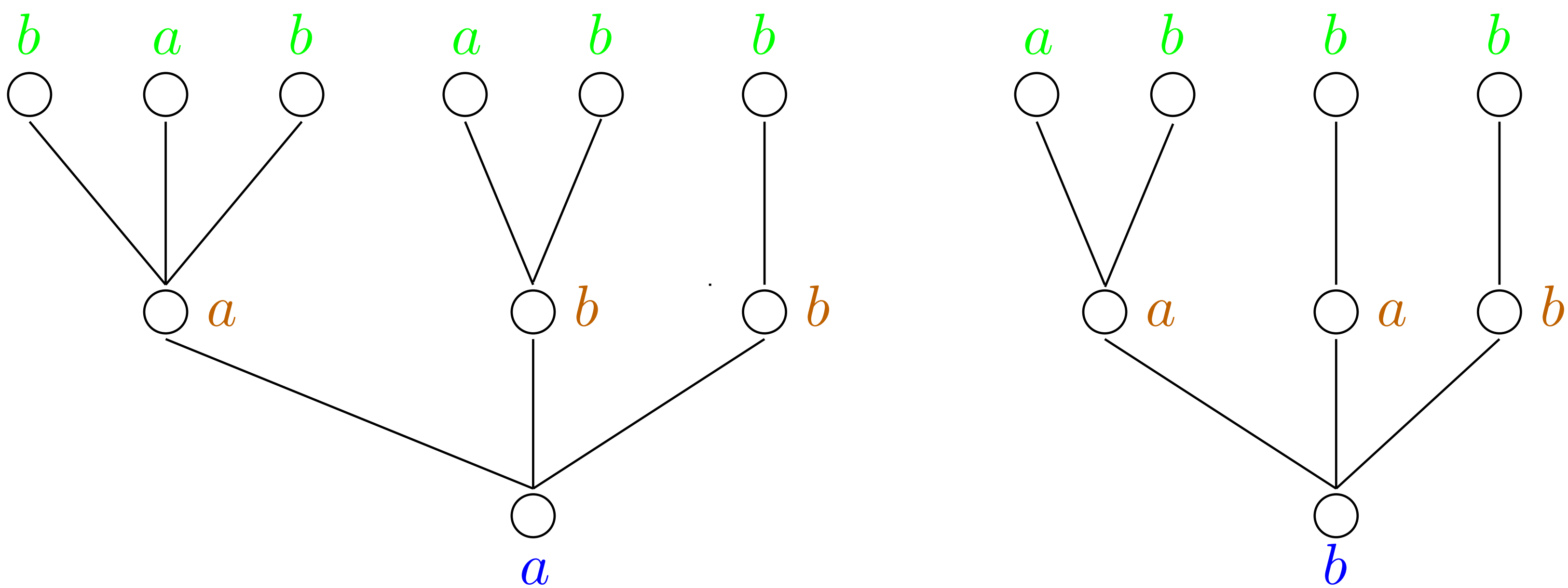
Lecture des symboles de sommet de pile:



$$\mathrm{top}(\omega) = aab$$

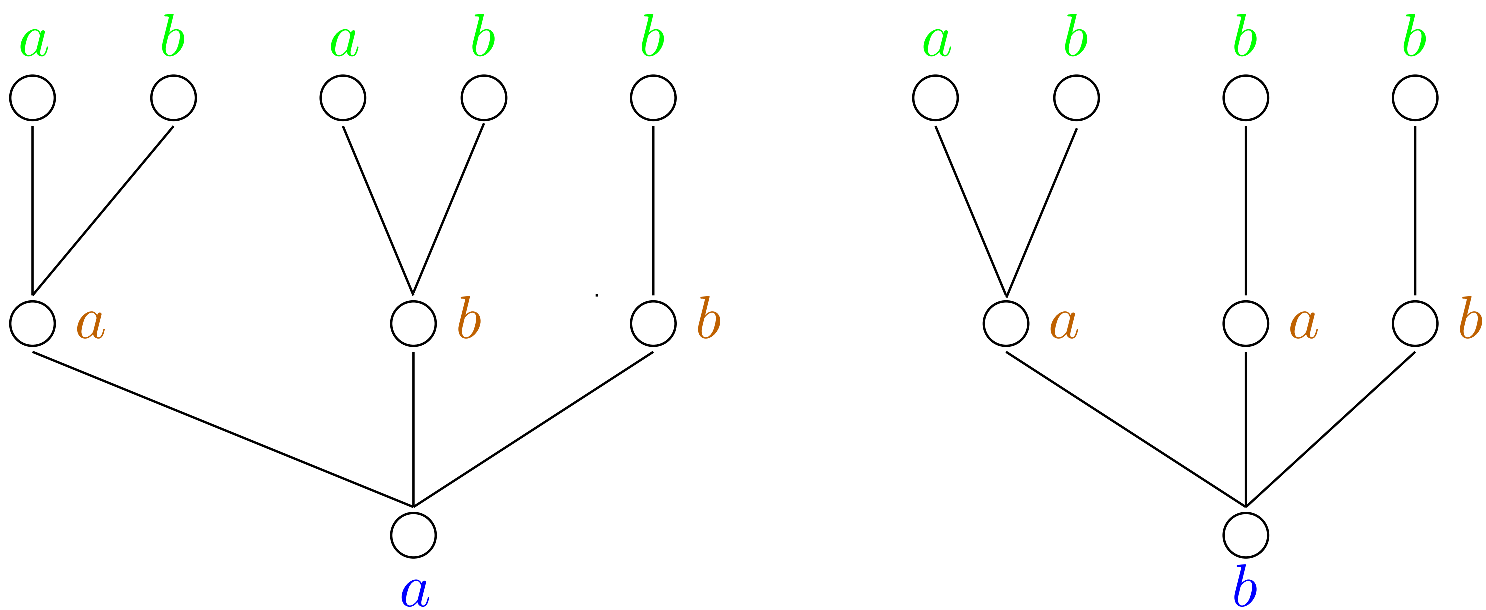
Instructions

Suppression du sommet de pile de niveau i: pop_i



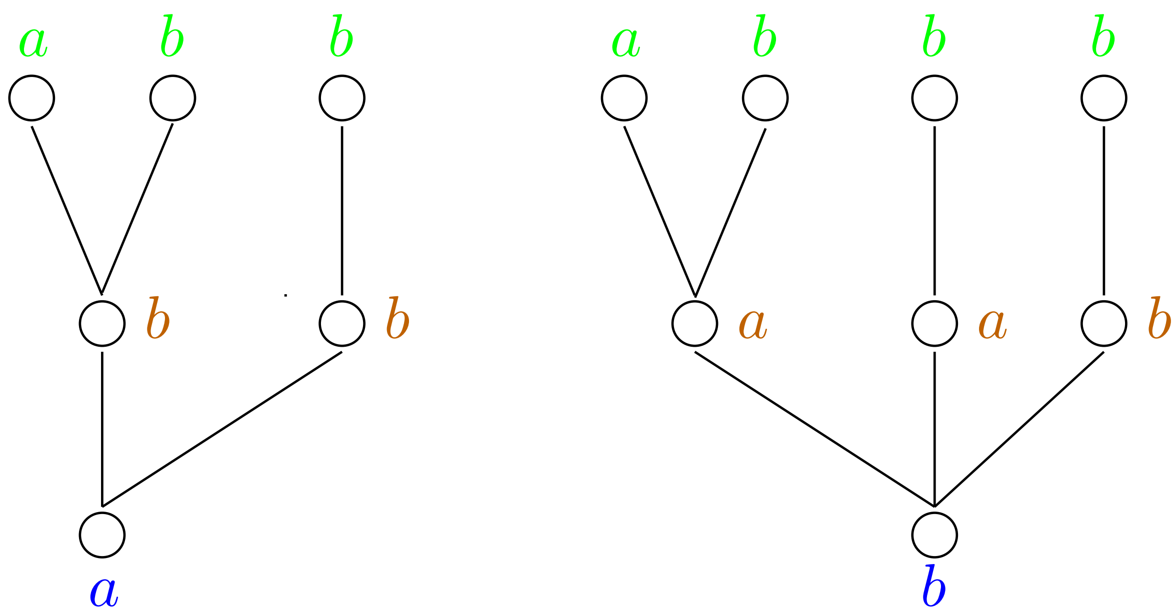
INSTRUCTIONS

Suppression du sommet de pile de niveau 1: pop_1



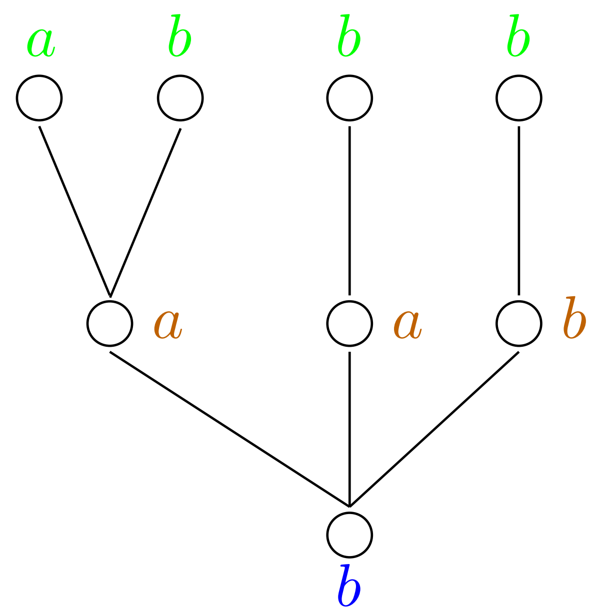
INSTRUCTIONS

Suppression du sommet de pile de niveau 2: pop_2



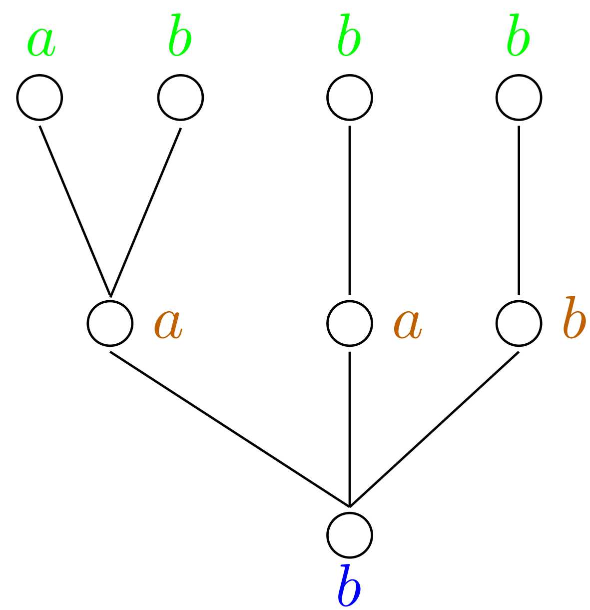
Instructions

Suppression du sommet de pile de niveau 3: pop_3



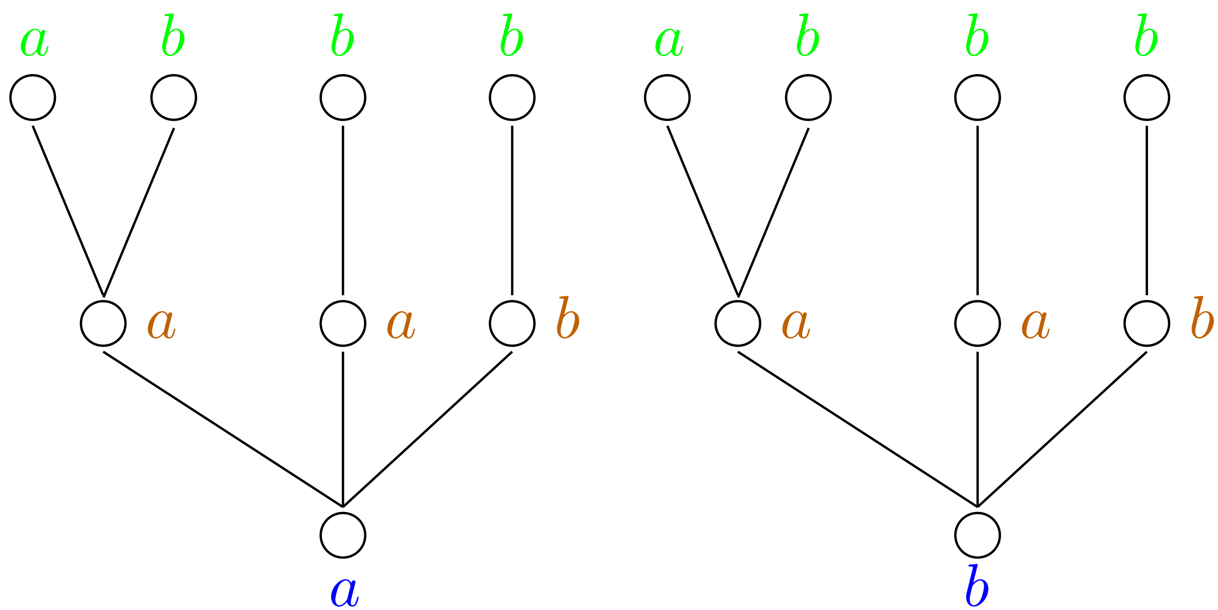
Instructions

Ajout de l'élément a au niveau i: $\mathrm{push}_{a,i}$



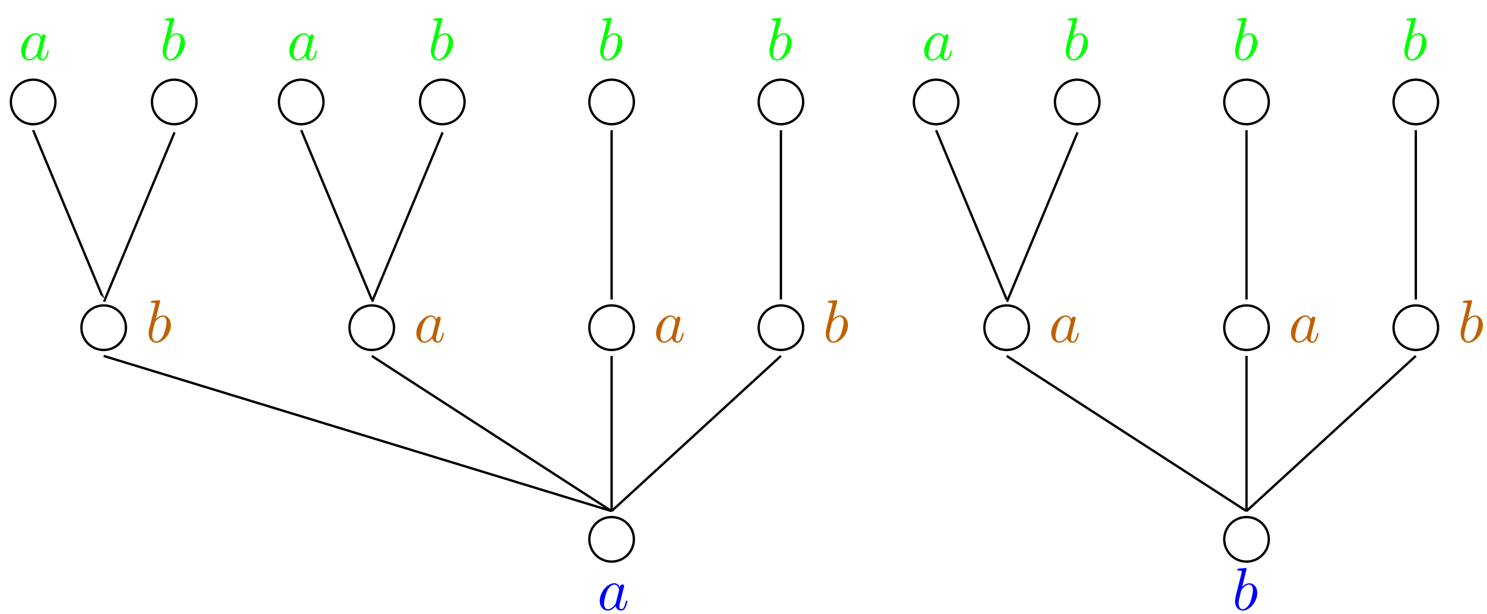
Instructions

Ajout de l'élément a au niveau 3: $\mathrm{push}_{a,3}$



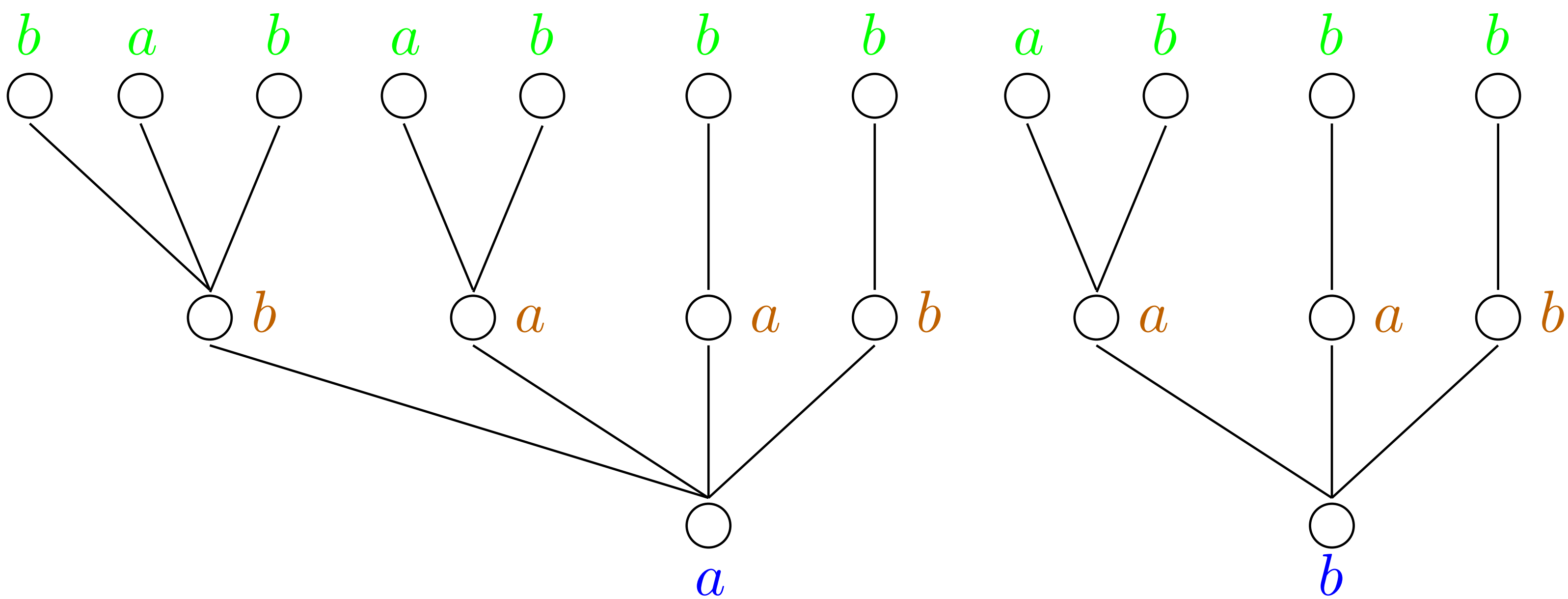
INSTRUCTIONS

Ajout de l'élément b au niveau 2: $\mathrm{push}_{b,2}$:



Instructions

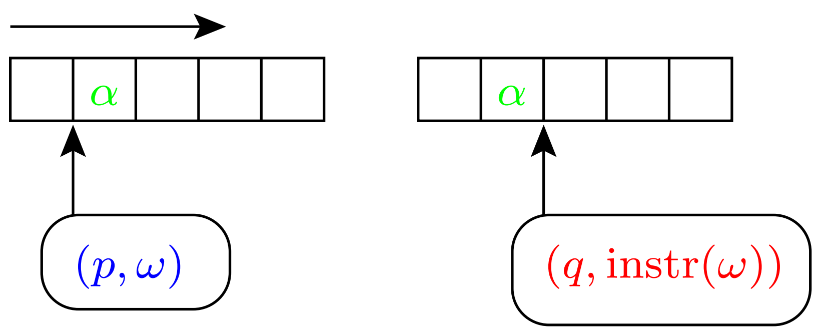
Ajout de l'élément b au niveau 1: $\mathrm{push}_{b,1}$



AUTOMATES À PILES ITÉRÉES (GREIBACH 70, MASLOV 74)

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, A, \Delta, q_0, F) \in k$-AP

- ➜ Q, Σ, A, Δ finis
- ➜ $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$
- ➜ $(p, \alpha, a_k \cdots a_1, \mathrm{instr}, q) \in \Delta$



avec $\mathrm{top}(\omega) = a_k \cdots a_1$

LANGAGES DE NIVEAU SUPÉRIEUR

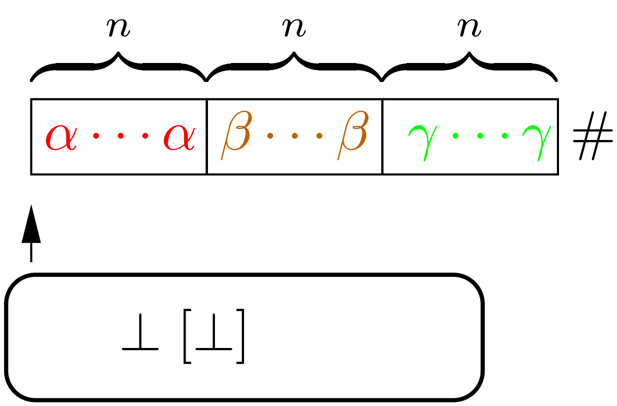
LANG_k classe des langages reconnus par automate à k-piles.

$\text{LANG}_0 \subsetneq \text{LANG}_1 \subsetneq \text{LANG}_2 \subsetneq \cdots$

- ➜ $\text{LANG}_0 =$ les langages réguliers
- ➜ $\text{LANG}_1 =$ les langages algébriques
- ➜ $\text{LANG}_2 =$ les langages indexés (Aho68)

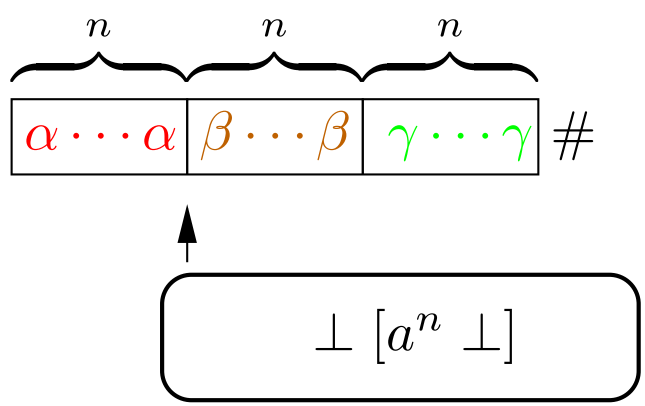
EXEMPLE: UN LANGAGE DE NIVEAU 2

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$



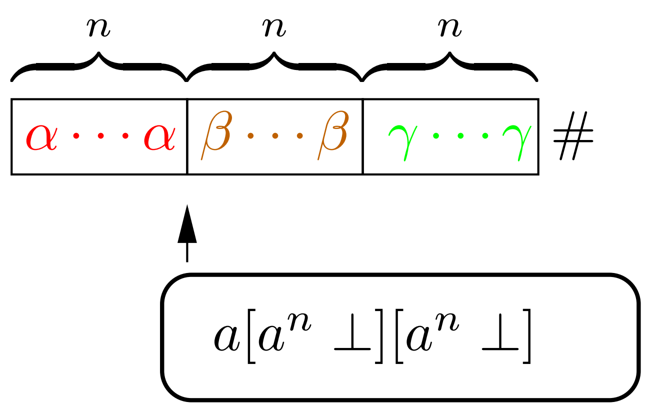
Exemple: un langage de niveau 2

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$



Exemple: un langage de niveau 2

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$



Exemple de langage de niveau 2

$$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$$

$$\overbrace{\boxed{\alpha \cdots \alpha}}^{n}\overbrace{\boxed{\beta \cdots \beta}}^{n}\overbrace{\boxed{\gamma \cdots \gamma}}^{n}\ \#$$

$$\boxed{a[\perp] \perp [a^n \perp]}$$

Exemple: un langage de niveau 2

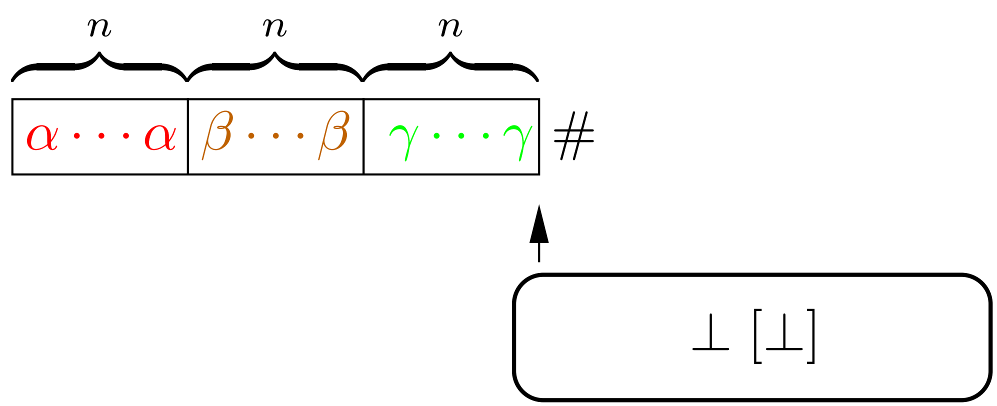
$L = \{\alpha^n\beta^n\gamma^n \mid n \geq 0\}$

$$\overbrace{\alpha\cdots\alpha}^{n}\,\overbrace{\beta\cdots\beta}^{n}\,\overbrace{\gamma\cdots\gamma}^{n}\;\#$$

$$\bot\;[a^n\;\bot]$$

Exemple: un langage de niveau 2

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$



Automates contrôlés

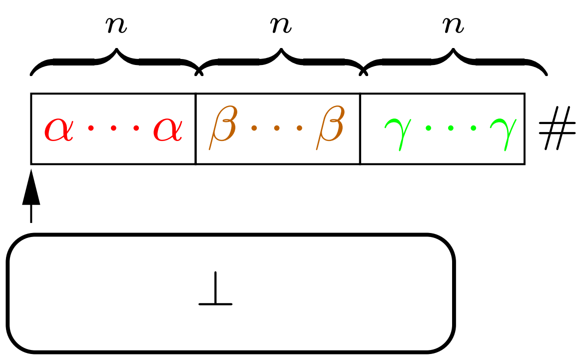
$\mathcal{A} \in k$-AP$^{\vec{C}}$ avec $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_m)$, $C_i \subseteq k$-Pile

➜ $(p, \alpha, a_k \cdots a_1, \vec{o}, \mathrm{instr}, q)$ avec $\vec{o} \in \{0,1\}^m$ applicable à (p, ω) si

$$\vec{o} = (\text{“}\omega \in C_1\text{“}, \ldots, \text{“}\omega \in C_m\text{“})$$

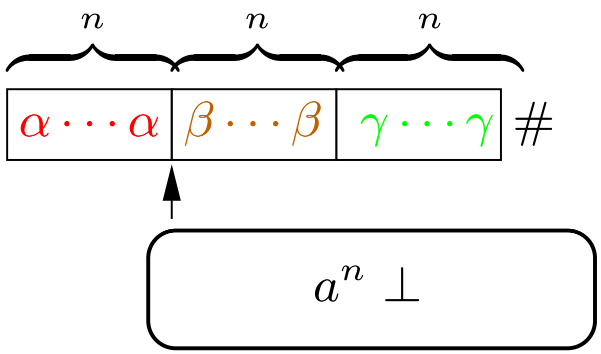
AUTOMATE DE NIVEAU 1 CONTRÔLÉ

$L = \{\alpha^n\beta^n\gamma^n \mid n \geq 0\}$ reconnu par automate dans 1-AP^C où
$C = \{b^n a^n \perp \mid n \geq 0\}$



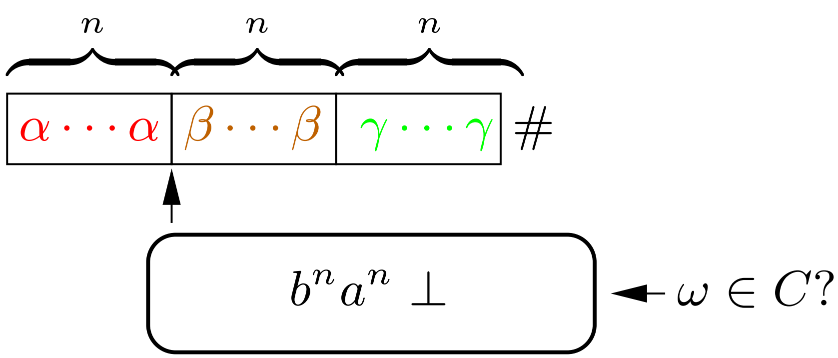
Automate de niveau 1 contrôlé

$L = \{\alpha^n\beta^n\gamma^n \mid n \geq 0\}$ reconnu par automate dans 1-AP^C où
$C = \{b^n a^n \perp \mid n \geq 0\}$



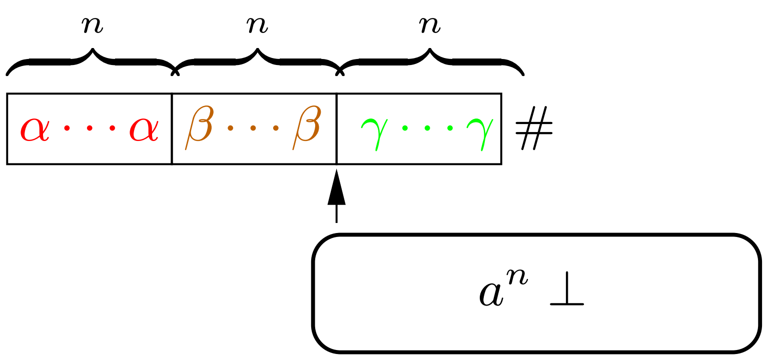
AUTOMATE DE NIVEAU 1 CONTRÔLÉ

$L = \{\alpha^n\beta^n\gamma^n \mid n \geq 0\}$ reconnu par automate dans 1-AP^C où
$C = \{b^n a^n \perp \mid n \geq 0\}$



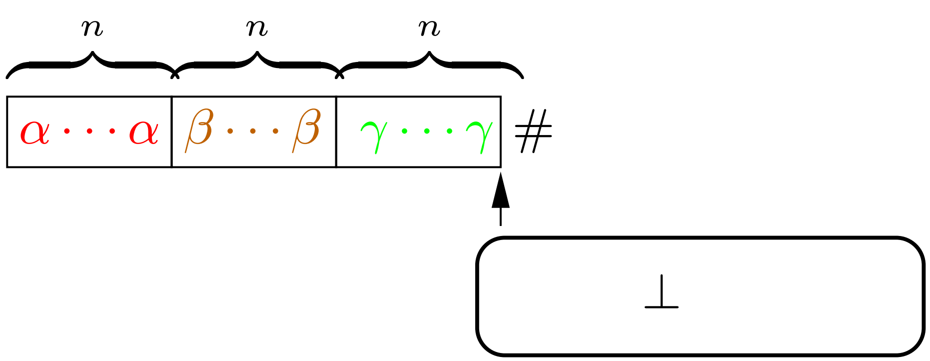
Automate de niveau 1 contrôlé

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$ reconnu par automate dans 1-AP^C où
$C = \{b^n a^n \perp \mid n \geq 0\}$



Automate de niveau 1 contrôlé

$L = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$ reconnu par automate dans 1-AP^C où
$C = \{b^n a^n \perp \mid n \geq 0\}$



Logique du Second Ordre Monadique

sur les piles itérées

Logique du Second Ordre Monadique

➜ Structure: $\mathbf{Pile_k} = \langle k\text{-Pile}, (\mathsf{POP}_i, \mathsf{PUSH}_{a,i})_{1\leq i\leq k,\, a\in A}\rangle$

- $\mathsf{POP}_i = \{(\omega, \mathrm{pop}_i(\omega)) \mid \omega \in k\text{-Pile}\}$
- $\mathsf{PUSH}_{a,i} = \{(\omega, \mathrm{pop}_i(\omega)) \mid \omega \in k\text{-Pile}\}$

➜ Formules:

- relations: $\mathsf{POP}_i(x,y)$, $\mathsf{PUSH}_{i,a}(x,y)$, $x \in X$, $X \subseteq Y$
- opérateurs booléens: $\neg$, $\wedge$, $\vee$
- quantificateurs: $\exists x.\phi$, $\exists X.\phi$, $\forall x.\phi$, $\forall X.\phi$

Exemple: $\varphi(X) := \forall x \in X \bigwedge_{1\leq i\leq k,\, a\in A} \neg(\exists y \cdot \mathsf{PUSH}_{i,a}(y,x))$.

Remarque: $\mathbf{Pile_1} \equiv T(A) = \langle A^*, (\mathsf{SUCC}_a)_{a\in A}\rangle$ où $\mathsf{SUCC}_a = \{(u, ua) \mid u \in A^*\}$.

Problèmes

- ➜ Décidabilité de la théorie SOM de $\mathbf{Pile_k}$.
  (i.e., décision de la valeur d'une formule close)

- ➜ Caractérisation des ensembles définissables (en LSOM) de $\mathbf{Pile_k}$.
  ($D \subseteq k$-Pile définissable si il existe une formule $\phi(X)$ dont l'unique solution dans $\mathbf{Pile_k}$ est D)

Au niveau 1

Théorème(Rabin69,Greibach67)

- ➜ $\mathbf{Pile_1}$ admet une théorie SOM décidable
- ➜ $\mathbf{Pile_1}$ satisfait la propriété du "Modèle Définissable" (MD), i.e., toute formule satisfiable admet une solution définissable.
- ➜ les définissables (en LSOM) de $\mathbf{Pile_1}$ sont les ensembles de 1-piles générés par 1-AP
- ➜ les définissables (en LSOM) de $\mathbf{Pile_1}$ sont les langages reconnus par automates finis (à isomorphisme près)
- ➜ les définissables (en LSOM) de $\mathbf{Pile_1}$ sont les langages exprimables par une expression rationnelle (à isomorphisme près)

Cas général?

Théorème

- $\mathbf{Pile_k}$ admet une théorie SOM décidable (thm 6.2.1)
- $\mathbf{Pile_k}$ satisfait la propriété du "Modèle Définissable" (MD), i.e., toute formule satisfiable admet une solution définissable (thm 6.2.1)
- les définissables (en SOML) de $\mathbf{Pile_k}$ sont les ensembles de k-piles générés par k-AP contrôlés au niveau $k-1$ par des ensembles définissables (thm 6.2.7)
- ?
- ?

Stratégie

- coder des k-piles par des mots
- définir des extensions des automates finis pour reconnaitre des langages de k-piles (via codage)
  $\longrightarrow$ automates finis à oracles
- définir des lemmes de transfert de propriétés de $\mathbf{Pile_k}$ vers $\mathbf{Pile_{k+1}}$ (décidabilité, MD, reconnaisabilité)
  $\longrightarrow$ Outils: les jeux de parité.

Codage

Codage de chaque k-pile par un mot dans le groupe libre

$$F(A) = (A \cup \bar{A})^* /_{\equiv}$$

où

- ➜ $\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$
- ➜ $\equiv$ est la congruence engendrée par les relations

$$a\bar{a} \equiv \varepsilon,\ \bar{a}a \equiv \varepsilon,\ a \in A$$

Codage des piles dans le groupe libre

Codage

$$\varphi : k\text{-Pile}(A) \to F(A_1 \cup \cdots A_k)$$

Chaque k-pile ω est codée par la plus courte sequence d'instructions $\mathrm{push}_{i,a}$ et $\overline{\mathrm{push}_{i,a}}$ (l'inverse de $\mathrm{push}_{i,a}$) générant ω à partir de la pile vide.

$\mathrm{push}_{a,i} \to a_i$ et $\overline{push_{a,i}} \to \overline{a_i}$.

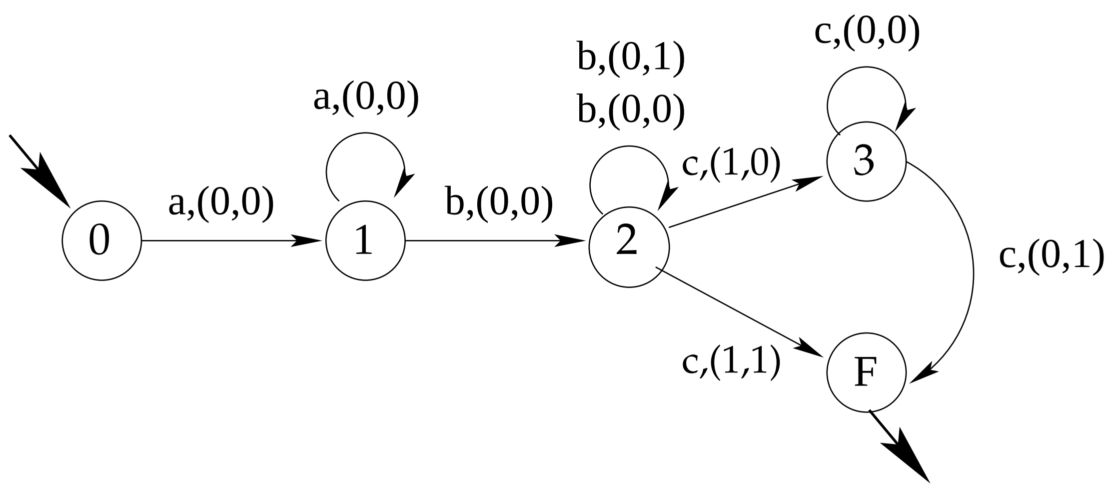
Codage des piles dans le groupe libre

Exemple : codage de $a[\perp\ [b\ \perp]]\ \perp\ [a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]]$.

$\perp\ [\perp\ [\perp]] \xrightarrow{b_1} \perp[\perp\ [b\ \perp]] \xrightarrow{a_1} \perp[\perp\ [ab\ \perp]] \xrightarrow{a_2} \perp[a[ab\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]] \xrightarrow{\bar{a_1}}$
$\perp[a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]] \xrightarrow{a_3} a[a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]]\perp[a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]] \xrightarrow{a_1}$
$a[a[ab\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]]\perp[a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]] \xrightarrow{\bar{a_2}} a[\perp\ [b\ \perp]]\ \perp\ [a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp$
$]]$.

$\varphi(a[\perp\ [b\ \perp]]\ \perp\ [a[b\ \perp]\ \perp\ [ab\ \perp]]) = b_1a_1a_2\bar{a_1}a_3a_1\bar{a_2}$.

Automates finis à oracles



$O_1 = \{a^n b^n,\ n \geq 1\}$, $O_2 = \{a^m b^n c^{n-1},\ n, m \geq 1\}$.
$L(\mathcal{A}) = \{a^n b^n c^n,\ n \geq 1\}$

$$
\begin{array}{rl}
 & (q_0, {}_\uparrow aabbcc),\ \varepsilon \notin O_1, \notin O_2 \rightarrow (q_1, a_\uparrow abbcc),\ a \notin O_1, \notin O_2 \\
\rightarrow & (q_1, aa_\uparrow bbcc),\ aa \notin O_1, \notin O_2 \rightarrow (q_2, aab_\uparrow bcc),\ aab \notin O_1, \in O_2 \\
\rightarrow & (q_2, aabb_\uparrow cc),\ aabb \in O_1, \notin O_2 \rightarrow (q_3, aabbc_\uparrow c),\ aabbc \notin O_1, \in O_2 \\
\rightarrow & (q_F, aabbcc_\uparrow)
\end{array}
$$

Cas général

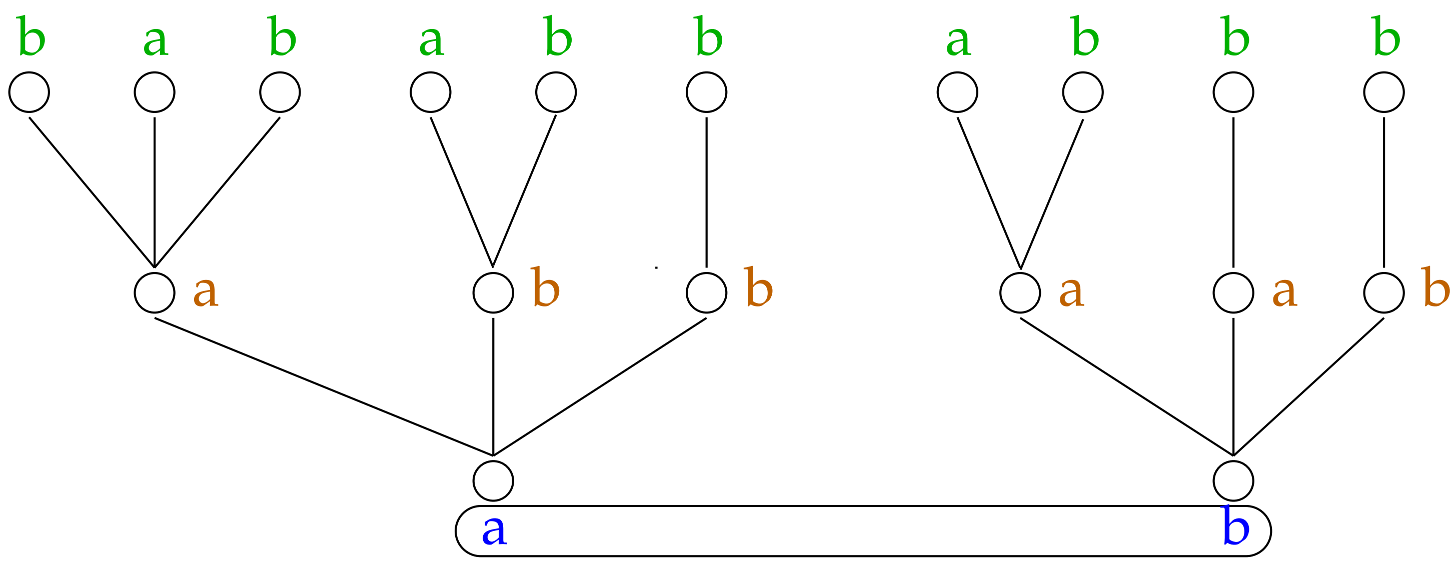
Théorème

- $\mathbf{Pile_k}$ admet une théorie SOM décidable (thm 6.2.1)
- $\mathbf{Pile_k}$ satisfait la propriété du "Modèle Définissable" (MD) (thm 6.2.1)
- les définissables (en SOML) de $\mathbf{Pile_k}$ sont les ensembles de k-piles générés par k-AP contrôlés au niveau $k-1$ par des ensembles définissables (thm 6.2.7)
- les définissables (en SOML) de $\mathbf{Pile_k}$ sont les langages reconnus par automates à oracles définissables au niveau $k-1$ (à codage près) (thm 6.2.7)
- les définissables (en SOML) de $\mathbf{Pile_k}$ sont les ensembles dont le codage est exprimable par une expression rationnelle (Carayol 05)

Caractérisation des langages de niveau k

Théorème 10.1.3:

$$\text{LANG}_k(A_{k+1}) \quad = \quad racines(\text{DEF}(\mathbf{Pile_k}))$$



CARACTÉRISATION DES LANGAGES DE NIVEAU k

$$\mathsf{LANG}_k(A_{k+1}) \quad = \quad racines(\mathsf{DEF}(\mathbf{Pile_k}))$$

$\mathsf{DEF}(\mathbf{Pile_k})$ forme une algèbre de boole.

Théorème(Guessarian):

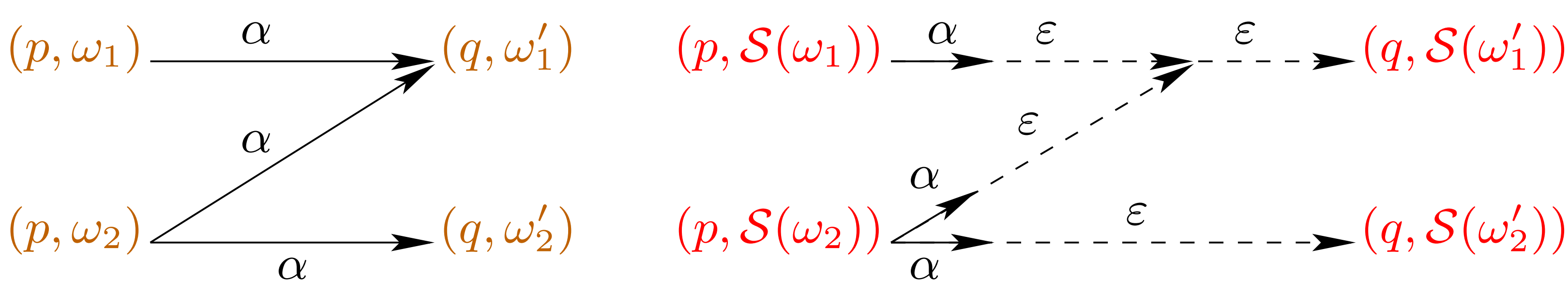
$L \in \mathsf{LANG}_{k+1}$ ssi L est la frontière d'une forêt k-algébrique.

Des classes d'automates équivalentes

SIMULATION DÉTERMINISTE

Deux automates: $\mathcal{A}_1$ sur k-AP(A_1) et $\mathcal{A}_2$ sur ℓ-AP(A_2)

$$\mathcal{S} : k\text{-AP}(A_1) \to \ell\text{-AP}(A_2) \text{ injective}$$



graphe de $\mathcal{A}_1$ graphe de $\mathcal{A}_2$

SIMULATION DÉTERMINISTE

Propriétés Soit $\mathcal{S}$ une simulation déterministe de $\mathcal{A}_1$ par $\mathcal{A}_2$

- ➜ $\mathrm{L}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{L}(\mathcal{A}_2)$
- ➜ $\mathcal{A}_1$ est déterministe ssi $\mathcal{A}_2$ est déterministe
- ➜ Les ε-clôtures des graphes de calculs de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont isomorphes

Contrôle par des propriétés définissables

Théorème 9.3.7: Pour tout $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_m)$, C_i définissables en LSOM dans $\mathbf{Pile_k}$, les classes k-AP et k-AP$^{\vec{C}}$ sont équivalentes par simulation déterministe.

Contrôle par des propriétés définissables: corollaires

Théorème 9.3.7: Les classes k-AP et $\overline{k\text{-AP}}$ (automates utilisant les instructions $\mathrm{push}_{a,i}$ et $\overline{\mathrm{push}}_{a,i}$) sont équivalentes par simulation déterministe.

Proposition 10.1.7: Tout automate dans k-AP est équivalent (par simulation déterministe) à un automate "émondé" (i.e., tout calcul commencé abouti à un calcul acceptant).

Contrôle par un langage de niveau k

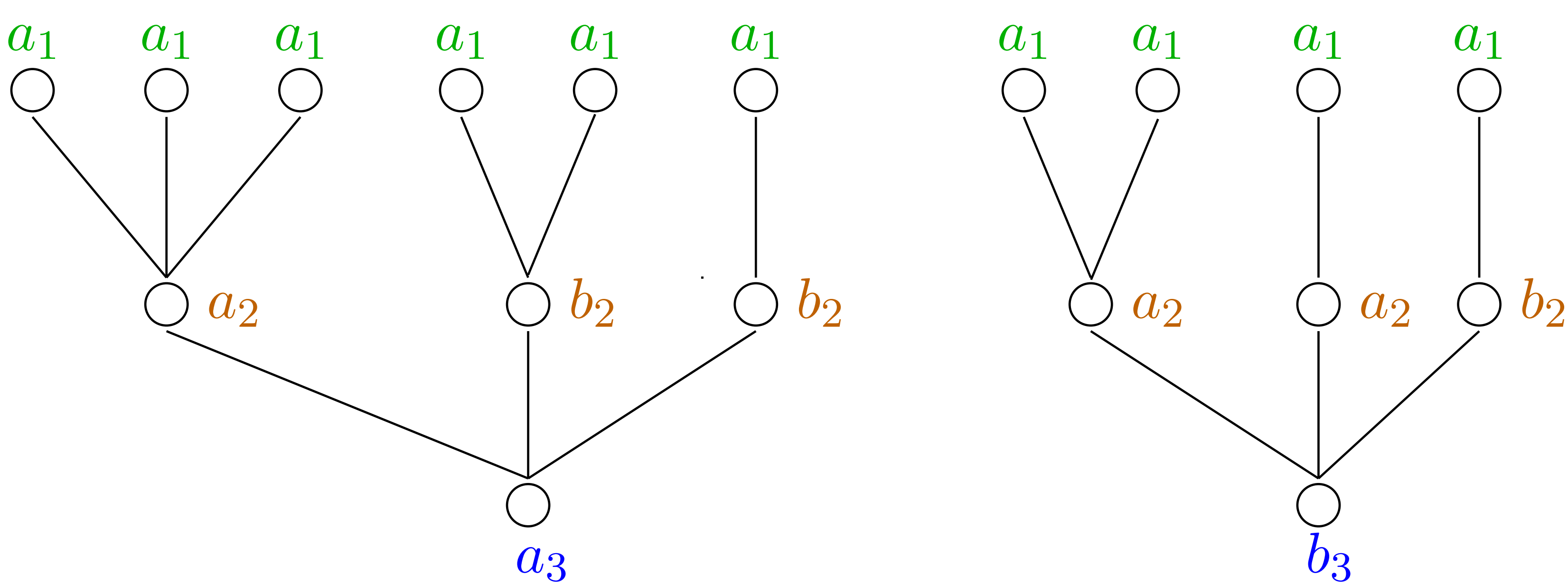
$\overrightarrow{\text{DLANG}_k}$ = les vecteurs $\vec{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ tels que les L_i sont reconnus par un même k-AP déterministe (pour des états finaux différents).

Théorème 9.3.11: Les classes $k+1$-AP et $\{1\text{-AP}^{\vec{L}} \mid \vec{L} \in \overrightarrow{\text{DLANG}_k}\}$ sont équivalentes par simulation déterministe.

Suites d'entiers et automates de niveau supérieur

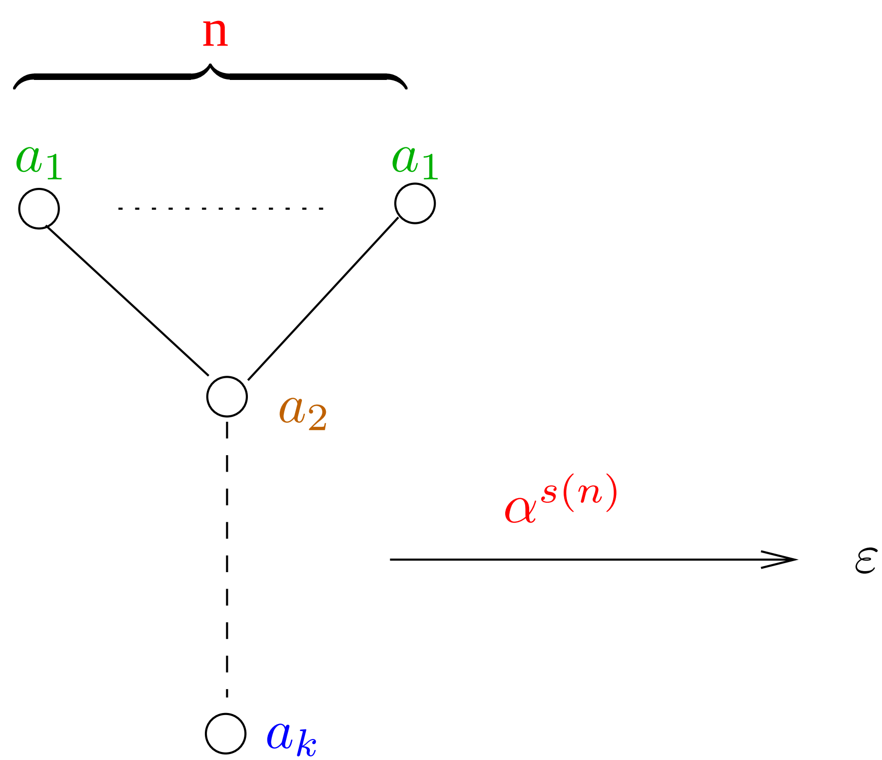
SUITES k-CALCULABLES

Automates à compteur: k-AC Le niveau 1 de la pile ne contient que la lettre a_1.



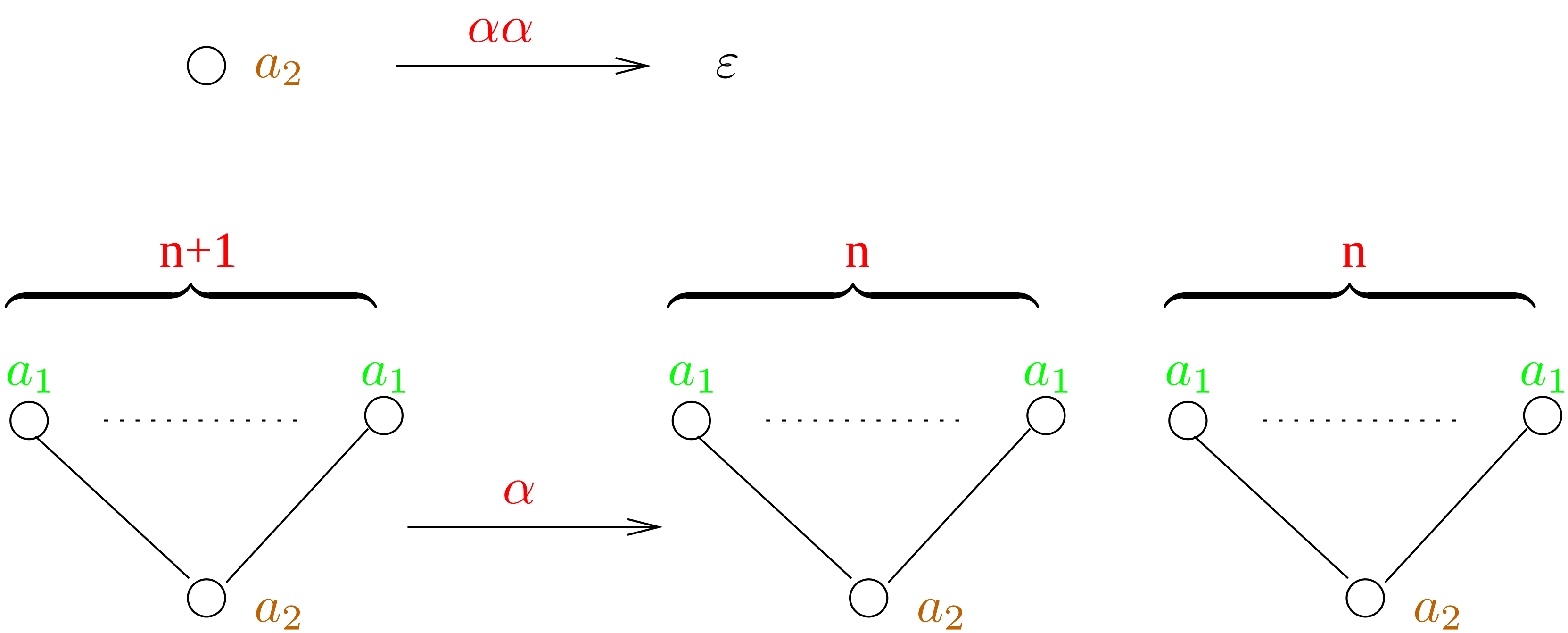
SUITES k-CALCULABLES

Une suite $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est k-calculable si il existe un k-AP à compteur déterministe tel que



Exemple: récurrence linéaire

$s(0) = 2$ et $\forall n \geq 0$, $s(n+1) = 2s(n) + 1$.

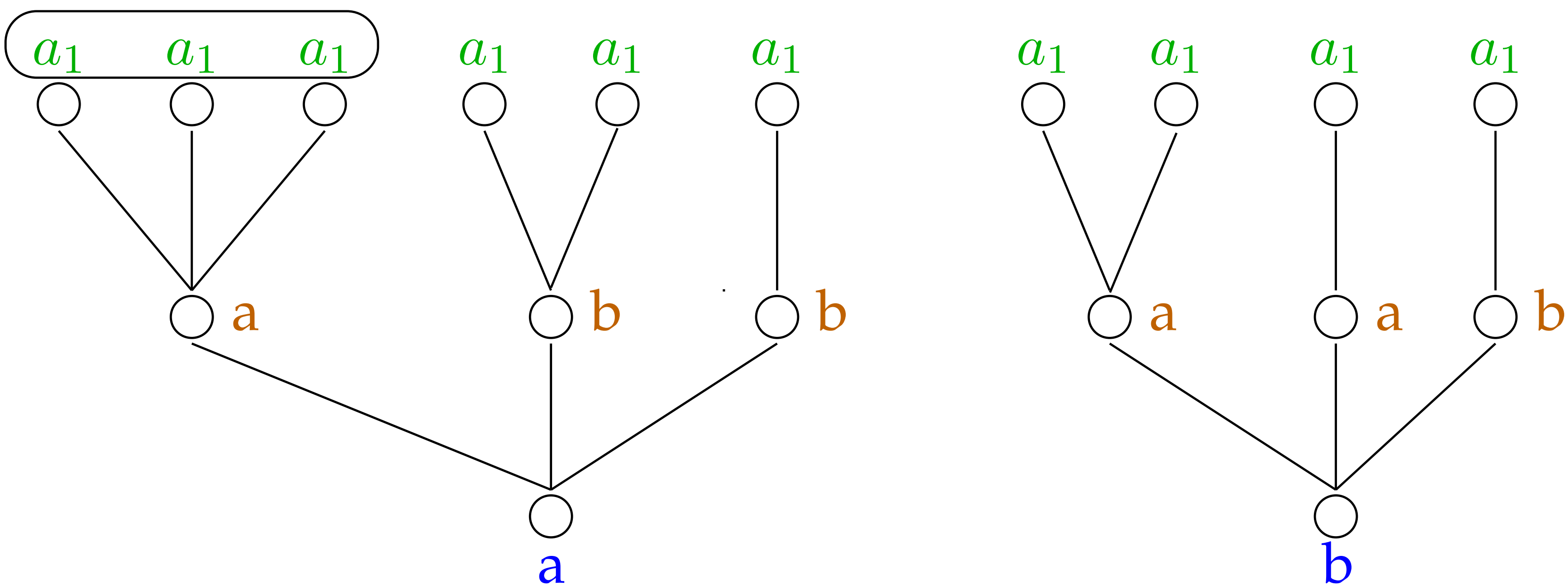


SUITES (k, N)-CALCULABLES, $N \subseteq \mathbb{N}$

Suites calculables par un k-AP déterministe contrôlé.

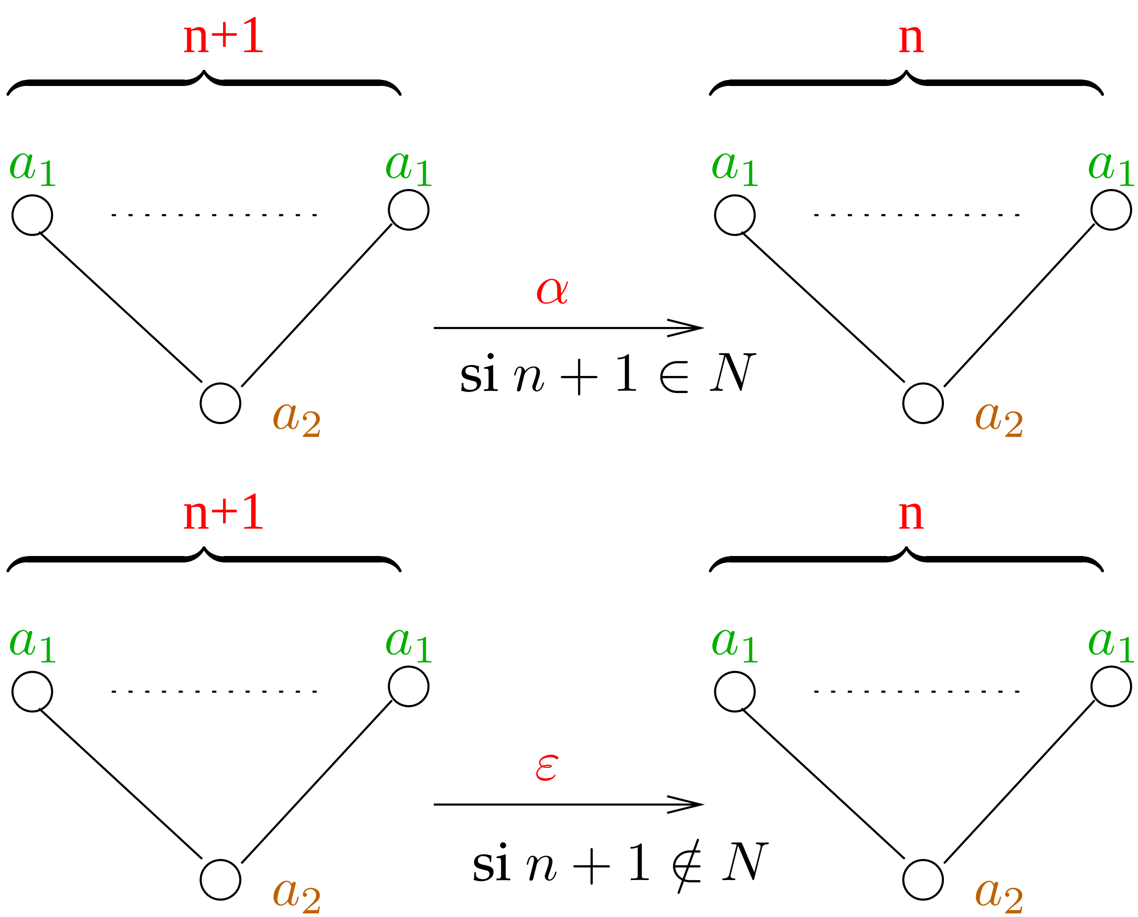
Test: le compteur de sommet de pile appartient-il à N?

$3 \in N$?



Suites (k, N)-calculables

Exemple: $s(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est $(2, N)$-calculable, $N = \{n^2 \mid n \geq 0\}$



Quelques suites (k, N)-calculables

Propositions 11.4.3, 11.4.6:

- ➜ les suites solutions de systèmes d'équations linéaires recurrentes ($\mathbb{N}$-rationnelles) sont 2-calculables

- ➜ les suites solutions de systèmes d'équations polynomiales recurrentes sont 3-calculables

Propriétés de clôture

Théorème 11.5.19:

- si $s, t \in \mathbb{S}_k^{\vec{N}}$, $k \geq 2$, la suite $f + g \in \mathbb{S}_k^{\vec{N}}$.
- si $s, t \in \mathbb{S}_k^{\vec{N}}$, $k \geq 3$, alors $s \odot t \in \mathbb{S}_k^{\vec{N}}$ (le produit ordinaire), et si $u \in \mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$, alors $u^t \in \mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$.
- si $s \in \mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$ et $t \in \mathbb{S}_k$, pour $k \geq 2$, alors $s \times t \in \mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$ (le produit de convolution) et $s \bullet t \in \mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$ (la substitution de séries).
- si $t \in \mathbb{S}_k$, avec $k \geq 2$, la suite s définie par: $s(0) = 1$ et $s(n+1) = \sum_{m=0}^{n} s(m) \cdot t(n-m)$ (l'inverse de convolution de $1 - X \times f$) appartient à $\mathbb{S}_{k+1}$.

Propriétés de clôture

Théorème 11.5.19 (suite)

- si $s \in \mathbb{S}_k$ et $t \in \mathbb{S}_\ell^{\vec{N}}$, pour $k, l \geq 2$, la suite $s \circ t$ (la composition) appartient à $\mathbb{S}_{k+\ell-1}^{\vec{N}}$.
- pour tout $k \geq 2$ et pour tout système d'équations récurrentes exprimées par des polynômes dans $\mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}[X_1, \ldots, X_p]$, avec conditions initiales dans $\mathbb{N}$, toute solution appartient à $\mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$.
- pour tout $k \geq 2$ et pour tout système d'équations récurrentes exprimées par des polynômes à indéterminées $X_1, \ldots, X_p$, coefficients dans $\mathbb{S}_{k+2}^{\vec{N}}$, exposants dans $\mathbb{S}_{k+1}^{\vec{N}}$ et conditions initiales dans $\mathbb{N}$, toute solution appartient à $\mathbb{S}_{k+2}^{\vec{N}}$.

Suites (k, N)-calculables

Proposition:

Si s est une suite (k, N)-calculable, alors

- ➜ $\{\alpha^{s(n)} \mid n \geq 0\}$ est reconnu par un k-APC^N
- ➜ Soit Σs la suite définie pour tout $n \geq 0$ $\Sigma s(n) = \Sigma_{m=0}^{m=n} s(m)$.
  $\{\alpha^{\Sigma s(n)} \mid n \geq 0\}$ est reconnu par un k-APC^N déterministe
- ➜ $\{\alpha^{s(0)}\beta\alpha^{s(1)}\beta \cdots \alpha^{s(n)}\beta \mid n \geq 0\}$ est reconnu par un k-APC^N déterministe

Application aux extensions de la logique de Büchi

Question :

Pour quels relations unaires P la théorie SOM de $\langle \mathbb{N}, +1, P \rangle$ est-elle décidable ?

- (Büchi 66)
  SOM-Th$\langle \mathbb{N}, +1 \rangle$ est décidable.
- (Elgot & Rabin 66)
- (Siefkes 70)
- (Carton & Thomas 00)

Application à l'arithmétique

Graphe de $\mathcal{A} \in k\text{-AC}^{\vec{N}}$:

$$\overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{\alpha^{s(0)}} \xrightarrow{\beta} \overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{\alpha^{s(1)}} \xrightarrow{\beta} \overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{\alpha^{s(2)}} \xrightarrow{\beta} \cdots$$

Graphe de $\langle \mathbb{N}, +1, \Sigma s(\mathbb{N}) \rangle$:

$$\overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{s(0)} \overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{s(1)} \overbrace{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ \cdots}^{s(2)} \cdots$$

- La structure $\langle \mathbb{N}, +1, \Sigma s(\mathbb{N}) \rangle$ est SOM-interpétable dans le graphe de $\mathcal{A}$
- Si $\langle \mathbb{N}, +1, N \rangle$ admet une théorie SOM décidable, alors le graphe de $\mathcal{A}$ admet une théorie SOM décidable.

Application à l'arithmétique

Théorème 13.1.4: Si $\langle \mathbb{N}, +1, N \rangle$ admet une théorie SOM décidable, alors pour toute suite (k, N)-calculable s, la théorie SOM de $\langle \mathbb{N}, +1, \Sigma s(\mathbb{N}) \rangle$ est décidable.

Corollaire 13.1.5:

- $\langle \mathbb{N}, +1, \{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor\}_{n \geq 0} \rangle$
- $\langle \mathbb{N}, +1, \{\lfloor n \log n \rfloor\}_{n \geq 0} \rangle$

Généralisation à plusieurs prédicats

Théorème 13.1.6: Si $\langle \mathbb{N}, +1, N_1, \ldots, N_m \rangle$ a une théorie SOM décidable, alors pour toute suite $(k, \vec{N})$-calculable s (avec $\vec{N} = (N_1, \ldots, N_m)$), alors

$$\langle \mathbb{N}, +1, \Sigma s(\mathbb{N}),\ \Sigma s(N_1), \ldots,\ \Sigma s(N_m) \rangle$$

a une théorie SOM décidable.

Corollaire 13.1.7:

Pour tous $k_1, \ldots, k_m \geq 0$, la théorie SOM de la structure

$$\langle \mathbb{N}, +1, \{n^{k_m}\}_{n \geq 0}, \{n^{k_m k_{m-1}}\}_{n \geq 0}, \ldots, \{n^{k_1 \cdots k_m}\}_{n \geq 0} \rangle$$

est décidable.

Suites de nombres rationnels

Soit S un ensembles de suites de nombres rationnels.
On s'intéresse au problème algorithmique de l'égalité de deux suites de S.

Ce problème est défini de la façon suivante :

ENTRÉE: deux suites $u, v \in S$,
QUESTION: $u = v?$

i.e. est-ce que , $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n?$

SUITES DE NOMBRES

Posons $\mathcal{F}(\mathbb{S}_k^{\vec{N}})$ l'ensemble des suites $(w_n)_{n\geq 0}$ de la forme

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{u'_n - v'_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0, \text{ avec } u, v, u', v' \in \mathbb{S}_k^{\vec{N}}.$$

Corollaire 14.0.17

Le problème de l'égalité de deux suites de $\mathcal{F}(\mathbb{S}_k^{\vec{N}})$, $k \geq 3$ se réduit au problème de l'équivalence de deux automates de niveau k déterministes.

Remarque : $\mathcal{F}(\mathbb{S}_k^{\vec{N}})$ est un anneau.

Perspectives

- Largeur arborence des graphes de calculs
- Suites multiples calculables
- Décidabilité de la droite augmentée de prédicats non emboités
  Exemple: $\langle \mathbb{N}, +1, \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}, \{n^3 \in \mathbb{N}\}\rangle$
- Problème de l'equivalence des automates déterministes (dans le cas d'un graphe filaire)