UNE EXTENSION DE L'INTERPRETATION DE GÖDEL A L'ANALYSE, ET SON APPLICATION A L'ELIMINATION DES COUPURES DANS L'ANALYSE ET LA THEORIE DES TYPES

Jean-Yves GIRARD

(8, Rue du Moulin d'Amboile, 94-Sucy en Brie, France)

Ce travail comprend (Ch. 1–5) une interprétation de l'Analyse, exprimée dans la logique intuitionniste, dans un système de fonctionnelles Y, décrit Ch. 1, et qui est une extension du système connu de Gödel [Gd]. En gros, le système est obtenu par l'adjonction de deux sortes de types (respectivement existentiels et universels, si les types construits avec $\rightarrow$ sont considérés comme implicationnels) et de quatre schémas de construction de fonctionelles correspondant à l'introduction et à l'élimination de chacun de ces types, ainsi que par la donnée des règles de calcul (réductions) correspondantes.

Le système diffère de celui de Spector [Sp] en ce que la signification constructive des termes introduits dans le système considéré ici n'est pour le moins pas familière alors même que les règles de calcul sont relativement simples. Les schémas de Spector admettent une interprétation *extensionnelle* qui est naturelle à partir de la notion de fonctionnelle continue, ce qui n'est pas possible ici, alors que par contre l'interprétation dans le calcul des réductions est simple (il s'agit d'introduction et d'élimination de types) pour le système considéré, mais ne semble pas l'être pour celui de Spector (voir commentaires de Kreisel).

Le point crucial pour la cohérence (relative) du système, et sa signification en tant que calcul est d'après Tait [Tt2] la possibilité de donner une preuve de *réductibilité* univoque des termes. Une telle démonstration de réductibilité, utilisant la notion de "*candidat de réductibilité*" est traitée Ch. 2. Schématiquement, un candidat de réductibilité est une réductibilité *abstraite*, et permet de briser le caractère apparemment circulaire des définitions touchant au système.

D'autre part en utilisant cette notion, et suivant une conjecture de Martin-Löf et Prawitz (formulée aussi par Kreisel), il s'est avéré que l'élimination des coupures dans la logique *intuitionniste* du second ordre G^1LC (d'après la notation de [Tk]) pouvait être démontrée directement (Ch. 6). Cette démonstration est étendue (Ch. 7) à la théorie des types d'ordre fini quelconque dans la déduction intuitionniste $G^\omega LC$, exprimée en vue de concision dans un langage ne comportant que des prédicats monadiques, la généralisation étant évidente.

Ce résultat diffère des travaux précédents sur la question ([Tt1], [Th], [Pr2])

1. Quant à la méthode utilisée qui est ici *syntaxique* et non sémantique.
2. Quant au résultat lui-même: il est montré ici qu'un *processus formel effectif de reconstitution d'une démonstration sans coupure se termine tourjours* et non pas simplement un théorème d'existence d'une telle démonstration. (Théorème de *normalisation* par opposition à Hauptsatz existentiel; voir SPT II de Kreisel dans ce volume.)
3. En conséquence, la démonstration n'utilise pas le tiers-exclu c'est à dire se place (localement) dans l'analyse (resp. la théorie des types) non-prédicative construite sur la déduction intuitionniste(*).

Je remercie M.Reznikoff pour les chaleureux encouragements et l'attention critique qu'il a portée à ce travail dès le début, ainsi que pour l'avoir présente au 2è Symposium Scandinave de Logique Mathématique à Oslo. Je remercie aussi le Professeur Kreisel qui par ses critiques d'une première version de ce travail m'a orienté vers la recherche d'une demonstration de réductibilité des termes du système, exprimable localement dans l'analyse (Ch. 2). D'un autre côté les remarques de M.Martin-Löf sur la possibilité d'une démonstration de normalisation de l'Analyse (Ch. 6) on été déterminantes pour la suite de ce travail; Martin-Löf et Prawitz ont d'ailleurs trouvé une démonstration indépendante du résultat principal, en partant de la notion de candidat de réductibilité du Ch. 2. Je tiens à remercier finalement M.Vidal-Madjar dont les exposés sur les travaux de Howard et Tait au séminaire de théorie de la démonstration de Paris m'ont été très utiles.

(*) En fait, les démonstrations précédentes donnaient aussi un procédé de normalisation, car Kreisel a démontré (Buffalo Conference, pp. 135–136, Technical Note II) que tout énoncé Π^0_2 démontrable à l'aide du tiers-exclu dans l'analyse, est démontrable sans le tiers-exclu; néanmoins, il serait très difficile, pour des raisons techniques évidentes de transformer les théorèmes de *forme normale* cités plus haut en *théorèmes de normalisation*, et d'ailleurs, vraisemblablement on n'obtiendrait pas ainsi un processus "naturel" de normalisation.

1. Description du système Y

Le système Y est un système *intentionnel*; ses éléments sont des assemblages finis, construits récursivement, de manière purement combinatoire. Ces assemblages sont appéles *termes*.

Y est essentiellement une extension du système T de Gödel; cette extension est obtenue par l'adjonction de nouveaux types au système T, et de schémas de formation de termes, correspondant à l'introduction et à l'élimination de ces nouveaux types (voir l'introduction).

Les types de Y contiennent en général des variables; ces variables sont appelées *indéterminées*, par opposition aux *variables* de Y. Un terme de Y dont la construction ne nécessite pas d'indéterminée, peut, à peu de choses près, s'identifier à un terme de T.

Nous conviendrons qu'il n'y a pas de variable ou d'indéterminée muette, ceci, en supposant que la notation de Bourbaki est utilisée systématiquement. Toutes les apparitions d'une même variable, rendues muettes simultanément, sont donc en principe remplacées par des carrés, tous reliés par un trait au symbole mutifiant. Nous supposerons aussi que tous les termes sont écrits en notation "polonaise". Bien entendu, la notation polonaise et les carrés seront abandonnés dans ce qui va suivre, pour un système d'écriture certainement ambigu, mais plus praticable.

La notion spécifique qui permet les constructions de Y est celle d'*indice*. Un symbole A indexé est une expression de la forme $\mathrm{Id}A_r$, où r est un type de Y; une telle expression est abrégée en A_r; r est alors appelé l'indice de l'expression. Si b est un terme dans lequel une expression de la forme A_r apparaît, et si α est une indéterminée qui apparaît dans r, on dit que *α apparaît en indice dans b*, plus précidément, que *α apparaît en indice de A dans b*.

Ce qui est caractéristique de Y, c'est que des indéterminées puissent apparaître en indice de ses termes.

Enfin, une notation pour la substitution: si q est une expression (terme ou type) de Y, si p est une autre expression, on note par $q[p]$, l'expression q_x^p si p est un terme, q_α^p si p est un type, les variables x et α étant sous-entendues.

§ 1. Notion de type.

Les types sont des objets extérieurs au système; ils se comportent, outre leur rôle habituel, qui est de classifier les termes, en opérateurs par rapport à Y; à ce titre, le rapport types/système Y rappelle le rapport corps de base/espace vectoriel.

Définition 1.
1. o est un type.
2. les indéterminées $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, ... sont des types.
3. si r et s sont des types, $r \to s$ est un type.
4. si r et s sont des types, $r \times s$ est un type.
5. si r est un type, α une indéterminée, $\delta\alpha r$ est un type.
6. si r est un type, α une indéterminée, $\sigma\alpha r$ est un type.
7. les seuls types sont donnés par 1–6.

Interprétation des types. Contrairement au système T de Gödel, il n'a a aucun cadre extensionnel qui convienne au système Y; néanmoins, on peut donner une description intuitive de la signification de chaque type:
1. o est le type des entiers.
3. un terme (ou une fonctionnelle) de type $r \to s$ se comprend comme la donnée d'une application qui, à toute fonctionnelle de type r, associe une fonctionnelle de type s.
4. une fonctionnelle de type $r \times s$ se comprend comme la donnée du couple ordonné d'une fonctionnelle de type r et d'une fonctionnelle de type s.
5. une fonctionnelle de type $\delta\alpha r$ se comprend comme la donnée, pour chaque type s, d'une fonctionnelle de type $r[s]$. (Cette donnée s'effectuant "uniformément", dans un sens intuitif qui sera précisé plus tard; en gros celà veut dire que les fonctionnelles en question ont des significations similaires quand s varie: par example le terme $\mathrm{DT}\alpha\lambda x_\alpha x_\alpha$ correspond à la donnée pour chaque type s, de $\lambda x_s x_s$, c'est à dire de toutes les fonctionnelles identiques.)
6. une fonctionnelle de type $\sigma\alpha r$ se comprend comme la donnée d'un type s et d'une fonctionnelle de type $r[s]$.

Calcul des prédicats K1 *correspondant à la construction des types.*
1. o est une formule atomique.
2. les indéterminées α, β, ... sont des variables de formules atomiques.
3–6. $\to, \times, \delta, \sigma$, se comprennent respectivement comme l'implication, la conjonction, les quantifications universelle et existentielle.

Axiome: $$r \vdash r$$

Règles logiques

$$\frac{\Delta, r \vdash s}{\Delta \vdash r \to s} \qquad \frac{\Delta, s \vdash t \quad \Gamma \vdash r}{\Delta, \Gamma, r \to s \vdash t}$$

$$\frac{\Delta \vdash r \quad \Gamma \vdash s}{\Delta, \Gamma \vdash r \times s} \qquad \frac{\Delta, r_i \vdash t}{\Delta, r_1 \times r_2 \vdash t}$$

$$\frac{\Delta \vdash r}{\Delta \vdash \delta\alpha r}\,(*) \qquad \frac{\Delta, r[s] \vdash t}{\Delta, \delta\alpha r \vdash t}$$

$$\frac{\Delta \vdash r[s]}{\Delta \vdash \sigma\alpha r} \qquad \frac{\Delta, r \vdash t}{\Delta, \sigma\alpha r \vdash t}\,(*)$$

Règles structurales

$$\frac{\Delta \vdash r \quad \Gamma, r \vdash t}{\Delta, \Gamma \vdash t} \qquad \frac{\Delta \vdash s}{\Delta, r \vdash s}$$

$$\frac{\Delta, r, r \vdash s}{\Delta, r \vdash s} \qquad \frac{\Delta, r, s, \Gamma \vdash t}{\Delta, s, r, \Gamma \vdash t}$$

Remarquons que les sequents sont des sequents intuitionnistes de types; que le type $\delta\alpha\alpha$ peut jouer le rôle de type du faux; enfin, que ce système est équivalent à la formulation intuitionniste de G^1LC ([Tk]), sans variable du premier ordre, les variables du second ordre étant à zéro place. Il est naturel (d'après Howard) de construire Y comme le système de termes attaché à K1.

§ 2. **Définition de** Y.

1. *Schemas faibles.* (Ces schemas sont appeles faibles, car ils ne font pas partie due "systeme de Howard" de K1.)

(i) Pour chaque type r, la constant nulle de type r, 0_r. 0_o est abrégé en $\bar{o}$, et correspond au zéro de l'arithmétique.

(ii) La constante S, de type $o \to o$.

(iii) Pour chaque type r, la constante de récursion de type $(r,(r,o\to r) \to (o\to r))$ notée REC_r.

2. *Schémas forts.*

(i) Une constante, une variable de type r, est un terme de type r.

(ii) Pour chaque type r, les variables de type r: x_r, y_r, z_r ...

(iii) *Abstraction*: si a est un terme de type s, x une variable de type r, λxa est un terme de type $r \to s$ ($\to$ *introd.*).

(iv) *Application*: si b est un terme de type r, a un terme de type $r \to s$, APab est un terme de type s ($\to$ *élim.*). APab est abrégé en $a(b)$.

(v) *Tensorisation*: pour tous types r et s, $\otimes_{rs}$ est une constante de type $(r,s\to r\times s)$ ($\times$ *introd.*).

(*) α n'apparaît pas dans la conclusion.

(vi) *Projection*: Pour tous types r et s, Π^1_{rs} et Π^2_{rs} sont des constantes de types respectifs $(r\times s\to r)$ et $(r\times s\to s)$ ($\times$ *élim.*).
(vii) *Stratification universelle*: soient a un terme de type r, α une indéterminé qui n'apparaît pas en indice d'une variable de a; alors $\mathrm{DT}\alpha a$ est une constante de type $\delta\alpha r$ (δ *introd.*).
(viii) *Extraction*: si a est un terme de type $\delta\alpha r$, si s est un type, $\mathrm{EXT}as$ est un terme de type $r[s]$ (δ *élim.*). $\mathrm{EXT}as$ est abrégé en $a\{s\}$.
(ix) *Injection*: pour tous types $\sigma\alpha r$ et s, $I_{\sigma\alpha rs}$ est une constante de type $(r[s]\to\sigma\alpha r)$ (σ *introd.*).
(x) *Stratification existentielle*: soit a un terme de type $(r\to s)$, α une indéterminée qui n'apparaît pas dans s, et qui n'apparaît pas en indice d'une variable de a; $\mathrm{ST}\alpha a$ est alors une constante de type $(\sigma\alpha r\to s)$ (σ *élim.*).
3. Les seuls termes de Y sont ceux donnés par 1–2.

Exemples. 1. Puisque x_α est un terme de type α, on peut former le terme $\lambda x_\alpha x_\alpha$, de types $\alpha\to\alpha$. Ce terme ne contenant pas de variable, on peut former $\mathrm{DT}\alpha\lambda x_\alpha x_\alpha$, qui est donc de type $\delta\alpha(\alpha\to\alpha)$. Si s est un type quelconque, $\mathrm{DT}\alpha\lambda x_\alpha x_\alpha\{s\}$ est un terme de type $s\to s$.

2. Considérons la variable $x_{\alpha\to\alpha}$, et formons $I_{\sigma\alpha\alpha\to\alpha\ \alpha}(x_{\alpha\to\alpha})$; on peut former alors successivement $\lambda x_{\alpha\to\alpha} I_{\sigma\alpha\alpha\to\alpha\ \alpha}(x_{\alpha\to\alpha})$, et le terme $\mathrm{ST}\alpha\lambda x_{\alpha\to\alpha} I_{\sigma\alpha\alpha\to\alpha\ \alpha}(x_{\alpha\to\alpha})$. Ce dernier terme est de type $(\sigma\alpha\alpha\to\alpha)\to(\sigma\alpha\alpha\to\alpha)$

Définition 2. On désigne par F le sous-système de Y formé des termes ne contenant ni variable, ni indéterminée; il est facile de vérifier que le type d'un terme de F ne contient pas d'indéterminée.

Calcul des prédicats K2 *correspondant à la construction des termes*. K2 est le "système de Howard" de K1; ses séquents sont des séquents intuitionnistes de termes, et on suppose que la partie gauche de chaque séquent est formée de variables distinctes deux à deux. Toutes les règles sont écrites sous réserve que les variables du séquent conclusion à gauche de $\vdash$ soient toutes distinctes.

Axiome: $$x_p \vdash x_p$$

Règles logiques

$$\frac{\Delta, x_r \vdash a}{\Delta \vdash \lambda x_r a} \qquad \frac{\Delta, x_s \vdash a[x_s] \quad \Gamma \vdash b}{\Delta, \Gamma, x_{r\to s} \vdash a[x_{r\to s}(b)]}$$

$$\frac{\Delta \vdash a \quad \Gamma \vdash b}{\Delta, \Gamma \vdash a \otimes b} \qquad \frac{\Delta, x_r \vdash a[x_r]}{\Delta, x_{r\times s} \vdash a[\Pi^1(x_{r\times s})]} \ \cdots$$

$$\frac{\Delta \vdash a}{\Delta \vdash \mathrm{DT}\alpha a}\,(*) \qquad \frac{\Delta, x_{r[s]} \vdash a[x_{r[s]}]}{\Delta, x_{\delta\alpha r} \vdash a[x_{\delta\alpha r}\{s\}]}$$

$$\frac{\Delta \vdash a}{\Delta \vdash \mathrm{I}_{\sigma\alpha r s}(a)} \qquad \frac{\Delta, x_r \vdash a[x_r]}{\Delta, x_{\sigma\alpha r} \vdash (\mathrm{ST}\alpha\lambda x_r a[x_r])(x_{\sigma\alpha r})}\,(*)$$

Règles structurales

$$\frac{\Delta \vdash a \quad \Gamma, x_r \vdash b[x_r]}{\Delta, \Gamma \vdash b[a]} \qquad \frac{\Delta \vdash a}{\Delta, x_r \vdash a}$$

$$\frac{\Delta, x_r, y_r \vdash a[x_r, y_r]}{\Delta, x_r \vdash a[x_r, x_r]} \qquad \frac{\Delta, x_r, y_s, \Gamma \vdash a}{\Delta, y_s, x_r, \Gamma \vdash a}\,.$$

Nous verrons plus loin qu'un séquent de K2 $\Delta \vdash a$, peut se comprendre comme l'énoncé "a est réductible"; if ne restera plus qu'a vérifier qu'un arbre de K2 est effectivement une démonstration de réductibilite.

Il est facile de vérifier par induction sur les arbres de K2 que, si $\Delta \vdash a$ est démontrable dans K2, toutes les variables de a sont dans Δ.

§ 3. **Définitions.**

1. *Sous-termes.*

(i) Si a est une constante ou une variable, le seul sous-terme de a est a.

(ii) Si a est $b(c)$, les sous-termes de a sont exactement ceux de b et de c, sans oublier a.

(iii) Si a est $b\{s\}$, les seuls sous-termes de a autres que a lui-même sont exactement ceux de b.

2. *Numéraux*. Le n-ième numéral, noté $\bar{n}$, est le terme de Y écrit avec exactement n signes AP, n signes S, et un signe $\bar{o}$, à l'exclusion de tout autre signe.

3. *Substitutions.* Par substitution, on entend l'opération qui consiste, soit à remplacer une indéterminée par un type, soit celle qui consiste à remplacer une variable par un terme du même type.

4. *Translations.* Par translation, on entend plusieurs substitutions itérées. Par exemple, soit a le terme x_α; si b est un terme de type s, on peut translater s pour α et ensuite b pour x_s; le résultat qui est b est noté $a[b]$.

(*) α n'apparaît pas en indice d'une des variables de Δ.

2. Définition de l'égalité intentionelle dans F

Sauf mention expresse du contraire, toutes les notions et théorèmes de ce chapitre s'appliquent au système F (voir Def. 2, § 2, Ch. 1).

§ 1. Notion de réduction.

1. *Axiomes de la reduction immediate.*

$$0_{r\to s}(a) \Rightarrow 0_s$$

$$\pi^i(0_{r_1}\times r_2) \Rightarrow 0_{r_i} \qquad i = 1, 2$$

$$0_{\delta\alpha r}\{s\} \Rightarrow 0_{r[s]}$$

$$\mathrm{ST}\alpha u(0_{\sigma\alpha r}) \Rightarrow u(0_r)^o_\alpha \tag{1}$$

$$\mathrm{REC}(u,v,\bar{o}) \Rightarrow u$$

$$\mathrm{REC}(u,v,\overline{n+1}) \Rightarrow v(\mathrm{REC}(u,v,\bar{n}),\bar{n}) \tag{2}$$

$$\lambda xa(b) \Rightarrow a[b] \tag{3}$$

$$\pi^i(a_1 \otimes a_2) \Rightarrow a_i \qquad i = 1, 2 \tag{4}$$

$$\mathrm{DT}\alpha u\{r\} \Rightarrow u[r] \tag{5}$$

$$\mathrm{ST}\alpha u(I_{\sigma\alpha rs}(b)) \Rightarrow u^s_\alpha(b) \tag{6}$$

Définition 3. On dit que le terme u de F se *réduit immédiatement* dans le terme v si $u \Rightarrow v$ est un exemple des schémas 1–6.

Par exemple, $\mathrm{DT}\alpha\lambda x_\alpha x_\alpha\{s\}$ se réduit immédiatement en $\lambda x_s x_s$.

Définition 4. Soit a un terme, b un sous-terme de a; on dit que b est *minimal* dans a si il existe un terme c tel que b se réduise immédiatement en c, et si aucun sous-terme de b ne possède la même propriété.

2. *Définition de la réduction.*

Définition 5. On dit que a se *réduit atomiquement* en b, si b résulte de la substitution dans a d'une apparition d'un sous-terme minimal u par un terme v tel que u se réduise immédiatement en v.

Définition 6. On dit que a se *réduit* en b si l'on peut passer de a à b par une suite de réductions atomiques. Celà se note aRb. Remarquons que l'on a toujours aRa.

Définition 7. Un terme qui n'admet pas de sous-terme minimal est dit *réduit*. (L'adjectif normal étant à éviter, puisqu'une forme réduite n'est pas toujours sans coupure.)

Il s'agit, pour la cohérence (relative) du système de montrer, d'après Tait [Tt2], que tout terme admet une forme réduite et une seule.

3. *Théorème de monovalence.*

Lemme 1. *Des apparitions distinctes de sous-termes minimaux b et c dans a ne se recontrent pas, c'est à dire n'ont pas d'apparition commune d'un sous-terme de a. Si* $u \Rightarrow v$ *et* $u \Rightarrow v'$ *sont des réductions immédiates, alors* v *et* v' *sont identiques.*

Vérification immédiate.

Theoreme 1. *Si* aRb *et* aRb', *où* b *et* b' *sont réduits, alors* b *et* b' *sont identiques. On dit alors que* b *est la forme réduite de* a.

Demonstration. Voir la démonstration de Tait ([Tt2]). En effet, les seules hypothèses sous lesquelles cette démonstration est valable sont celle du lemme 1.

§2. **Définition de la réductibilité.**

En ayant en tête la notion habituelle de réductibilité pour le système T, ([Sh], [Tt2]) on voit clairement comment définir la réductibilité pour les types sans signes δ ni σ. Prenons maintenant l'exemple d'un type $\delta\alpha r$: on voudrait dire que a de type $\delta\alpha r$ est réductible si pour tout types s, $a\{s\}$ est reductible. Prenons l'exemple de $\delta\alpha\alpha \rightarrow \alpha$, et soit a le terme $\mathrm{DT}\alpha\lambda x_\alpha x_\alpha$; supposons que $\theta(b)$ exprime le fait que b est reductible de type r. Alors $\lambda x_s x_s$ est réductible, car tous les prédicats θ qui définissent la réductibilité vérifient $[bRa \wedge \theta(a)] \Rightarrow \theta(b)$. Donc a est réductible, puisque $a\{s\}$ se réduit en $\lambda x_s x_s$. Malheureusement, il est clair que nous ne disposons d'aucun procédé pour éliminer le cercle vicieux qui est à la base d'une telle définition de la réductibilité. Remarquons cependant que la "démonstration" qui vient d'être donnée utilisé relativement peu d'informations sur la réductibilité de type r: en fait n'importe quel prédicat θ qui vérifie la condition de stabilité par reduction pourrait faire l'affire. En d'autres termes, pour démontrer que l'identité est réductible, il n'est pas du tout nécessaire de définir la réductibilité pour chaque type. Ceci justifie les définitions suivantes:

1. *Candidats de réductibilité*

Définition 8. Un candidat de réductibilité de type r (en abrégé un c.r.) est un prédicat θ qui vérifie les conditions suivantes:
(i) $\theta(a) \Rightarrow$ "a est de type r"
(ii) $\theta(0_r)$
(iii) $[\theta(b) \wedge aRb] \Rightarrow \theta(a)$
(iv) $\theta(a) \Rightarrow$ "a admet une forme réduite".
Ces conditions sont abrégées en $Z_r(\theta)$.

Un c.r. est une réductibilité abstraite, dans le sens que les propriétés énoncées plus haut sont intuitivement vérifiées par toute définition "convenable" de la réductibilité.

Exemples de c.r. Soit $G \subset F$, tel que: $0_r \in G$ et tel que tous les elements de G soient des termes réduits de type r. Alors le prédicat θ défini par $\theta(a) \Leftrightarrow$ "il existe $b \in G$, aRb" est un c.r. de type r. Ceci montre clairement que la quantification sur les c.r. est une vraie quantification du second ordre, puisque l'ensemble des c.r. de chaque type a en général la puissance du continu.

2. *La quasi-réductibilité, our réductibilité avec paramètres.* Soit $r[\boldsymbol{\alpha}]$ un type de Y, où $\boldsymbol{\alpha}$ est une suite de n indéterminées contenant toutes celles de r, S une suite de n types sans indéterminée $s_1 \dots s_n$, $\boldsymbol{\theta}$ une suite de prédicats $\theta_1 \dots \theta_n$ telle que θ_i soit de type s_i.

On définit alors la $\mathbf{S}; \boldsymbol{\theta}/r[\boldsymbol{\alpha}]$ - réductibilité, qui exprime une proprieté des termes de type $r[\mathbf{S}]$. Les éléments de $\boldsymbol{\theta}$ sont appelés paramètres. Le seul cas intéressant est celui où les paramèteres sont des c.r. Bien que ce prédicat dépende de $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\theta}$, on dira que a est *quasi-réductible* de type $r[\mathbf{S}]$ si a est $\mathbf{S}$; $\boldsymbol{\theta}/r[\alpha]$ - réductible. La quasi-réductibilité de type $r[\mathbf{S}]$ (en abrégé q.r.) sera notée $\mathbf{S}; \boldsymbol{\theta}/N(r,\square)$, où l'on ne marque pas les variables de la suite $\boldsymbol{\alpha}$.

Définition 9.

$$\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(o,a) \qquad \Leftrightarrow \exists n \; aR\bar{n}$$

$$\mathbf{S},s;\boldsymbol{\theta},\theta/N(\alpha,a) \qquad \Leftrightarrow \theta(a)$$

$$\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(r\times s,\alpha) \qquad \Leftrightarrow \mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(r,\Pi^1(a)) \wedge \mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(s,\Pi^2(a))$$

$$\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(r\to s,a) \Leftrightarrow \forall b(S;\boldsymbol{\theta}/N(r,b) \Rightarrow \mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(s,a(b)))$$

$$\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(\delta\alpha r,a) \Leftrightarrow \forall s\forall\theta(Z_s(\theta) \Rightarrow \mathbf{S},s;\boldsymbol{\theta},\theta/N(r,a\{s\}))$$

$$\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(\sigma\alpha r,a) \Leftrightarrow (\exists s\exists b\exists\theta(Z_s(\theta)\wedge aRI_{\sigma\alpha r[\mathbf{S}],r[\mathbf{S}]}(b)$$

$$\wedge\, \mathbf{S},s;\boldsymbol{\theta},\theta/N(r,b)))\vee(aR0_{\sigma\alpha r[\mathbf{S}]}) .$$

A titre d'exemple, écrivons la $\phi;\phi/N(\delta\alpha\alpha,a) \Leftrightarrow \forall s\forall\theta(Z_s(\theta) \Rightarrow \theta(a\{s\}))$. Pour s fixé, $a\{s\}$ doit être dans tous les c.r. de type s, soit dans le plus petit de tous, c.a.d. doit se réduire en 0_s: a est donc intentionnellement nul.

3. *La réductibilité.*

(i) Dans le système F (sans variable, ni indéterminée): a est *réductible* si $\phi;\phi/N(r,a)$, où r est le type de a.
(ii) Dans le système YF (dont les termes sont ceux de Y qui ne contiennent pas de variable, mais peuvent contenir des indéterminées): soit a un terme de YF, r son type, $\boldsymbol{\alpha}$ l'ensemble des indéterminées qui apparaissent dans a; a est *réductible* (en abrégé red.) si pour toute suite $\mathbf{S}$ de types sans indéterminée de même longueur que $\boldsymbol{\alpha}$, et toute suite $\boldsymbol{\theta}$ de c.r., $a[\mathbf{S}]$ est $\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/r[\boldsymbol{\alpha}]$ - réductible.
(iii) Dans le système Y: soit a un terme de Y, r sont type; $\mathbf{X}$ la suite des variables qui apparaissent dans a; a est red. si pour toute suite B termes de YF réductibles, $a[\mathbf{B}]$ est un terme de YF réductible.

§ 3. Théorème de réductibilité.

Lemme 2. $\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/N(r)$ *est un* c.r. *de type* $r[\mathbf{S}]$, *sous réserve que la suite* $\boldsymbol{\theta}$ *soit formée de* c.r.

Démonstration. Par induction sur la construction des prédicats de q.r.
$+\, r = o,\ r = \alpha$: évident.
$+\, r = s \times t$:
(i) Si $\Pi^1(a)$ admet une forme réduite, ce ne paur être que parce que a en admet une.
(ii) Si aRb et si b est q.r., $\Pi^i(a)$ se réduit en $\Pi^i(b)$, et est donc q.r., d'après l'hypothèse d'induction; a est alors q.r.
(iii) $\Pi^i(0)$ se réduit en 0; or $0_{s[\mathbf{S}]}$ et $0_{t[\mathbf{S}]}$ sont q.r. ...
$+\, r = s \to t$
(i) Par hyp. d'induction, $0_{s[\mathbf{S}]}$ est q.r.; si a est q.r., $a(0)$ l'est aussi, donc admet une forme réduite par hypothèse; a en admet alors nécessairement une.
(ii) Si aRa', on a $a(b)Ra'(b)$; si a' et b sont red., il s'ensuit, grâce à l'hypothèse d'induction, que $a(b)$ est red.

(iii) $0(b)$ se réduit en 0 si b est réductible, car alors b admet une forme réduite.

$+ \; r = \delta\alpha s$

(i) Si $a\{t\}$ est q.r., il admet une forme réduite; donc a en admet une.

(ii) Si aRa', $a\{t\}R\,a'\{t\}$; si a' est q.r., $a'\{t\}$ l'est, donc il en est de même de $a\{t\}$, pour tout t... (et pour tout c.r. θ).

(iii) 0 est q.r., car $0\{t\}$ l'est, puisque $0\{t\}R0$ ...

$+ \; r = \sigma\alpha s$

(i) 0 est une forme réduite; d'autre part, si $aRI(b)$, où b est q.r., et admet donc une forme réduite, il est clair que a en admet alors une, ...

(ii) Si aRb et $(bR\,I(c) \vee bR0)$, on a $(aR\,I(c) \vee aR0)$...

(iii) On a $0R0$.

C.Q.F.D.

Dorénavant, les lemmes seront énoncés pour Y, mais démontrés en général seulement pour F, la généralisation $F \to YF \to Y$ étant évidente.

Lemme 3. (*Réductibilité des schémas faibles.*)
1. 0_r *est réductible.*
2. S *est réductible.*
3. REC *est réductible.*

Lemme 4. (*Réductibilité des axiomes.*)
x_r *est réductible.*

Lemme 5. (*Réductibilité de* $\times$.)
1. $\otimes$ *est réductible.*
2. Π^1 *et* Π^2 *sont réductibles.*

Lemme 6. (*Réductibilité de* $\to$.)
1. *Si a est réductible, λxa est réductible.*
2. *a et b réductibles $\Rightarrow a(b)$ réductible.*

Démonstration. 1. par le lemme 2 et l'axiome $\lambda xa(b)\,Ra[b]$. 2. Par définition.

Lemme 7. (*Substitution.*)
$\mathbf{S};s[\mathbf{T}];\boldsymbol{\theta},(\mathbf{T};\boldsymbol{\theta}'/N(s[\alpha']))/N(r[\boldsymbol{\alpha},\alpha],a) \Leftrightarrow \mathbf{S},\mathbf{T};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}'/N(r[\boldsymbol{\alpha},s[\alpha']],a)$.

En d'autres termes, la q.r. est stable par substitution. La démonstration est complètement évidente.

Lemme 8. (*Réductibilité de* δ.)
1. *a réductible* $\Rightarrow$ DTαa *réductible.*
2. *a réductible* $\Rightarrow a\{t\}$ *réductible.*

Démonstration. 1. Par définition de la réductibilité pour YF, par le lemme 2 et l'axiome pour DT.
2. Par définition et par les lemmes 2 et 7: si a est red., $a\{t\}$ est q.r. pour tout c.r. θ et tout t; mais la réductibilité de type t est elle-même un c.r., et le resultat de la substitution de $N(t)$ pour θ dans $t;\theta/N(r[\alpha])$ est équivalent à $N(r[t])$. (N abrège $\phi;\phi/N$.)

Lemme 9.
1. $I(b)$ *est réductible.*
2. *a réductible* $\Rightarrow$ STαa *réductible.*

Démonstration. 1. La q.r. est un c.r.; si b est réductible, en appliquant le lemme 7, il s'ensuit donc que $I(b)$ est réductible.
2. Il faut montrer que ST$\alpha a(I(b))$ et ST$\alpha a(0)$ sont réductibles, si $I(b)$ l'est. Alors, b est $s;\theta/r[\alpha]$-réductible pour un certain s et un certain c.r. θ; ST$\alpha a(I(b))$ se réduit en $a[s](b)$; mais $a[s']$ est $s';\theta'/r[\alpha] \to t$-réductible pour tous s et θ'; en particulier $a[s]$ est $s';\theta/r[\alpha] \to t$-red. Donc $a[s](b)$ est $s;\theta/t$-red., soit $\phi;\phi/t$-red., puisque α n'apparaît pas dans t. Le même argument montre que $a[o](0)$ est red.

Théorème 2.
1. Tous les termes de F sont réductibles.
2. Tous les termes de F admettent une forme réduite et une seule.

§ 4. **Définition de l'égalité intentionnelle.**
Dans F, $\vdash a = b$ est une abreviation pour "a et b ont la meme forme reduite". On verifie le
Lemme 10. *L'égalité est réflexive, symétrique, transitive. L'égalité est stable pour* AP *et* EXT. *Si* $\vdash a = b$, *alors* $\vdash u[a] = u[b]$.

Si on introduit l'abreviation $\vdash a \neq b$ pour "a et b ont des formes reduites distinctes", on peut demontrer le lemme:

Lemme 11.
$\vdash a = b \vee \vdash a \neq b$.
$\neg(\vdash a=b \wedge \vdash a\neq b)$.

§ 5. **Interprétation de la réductibilité dans l'analyse.**
La reductibilite n'est pas globalement interpretable dans l'analyse; on peut cependant interpreter des formes locales du theoreme 2.

1. *Profondeur d'un type.* On definite PF(r) et PF(r,α) par induction sur la construction de r:

PF(o) = PF(α) = PF(α,α) = o
PF(o,α) = PF(β,α) = $-\infty$ (β et α distincts)
PF($r \to s$) = PF($r \times s$) = sup(PF(r),PF(s))
PF($r \to s,\alpha$) = PF($r \times s,\alpha$) = sup(PF(r,α), PF(s,α))
PF($\delta\beta r,\alpha$) = PF($\sigma\beta r,\alpha$) = sup(PF(r,α) + 1) (α et β distincts)
PF($\delta\beta r$) = PF($\sigma\beta r$) = sup(PF(r), PF(r,β)+1)) .
On apelle profondeur de r l'entier PF(r).

2. *Système F_n.* Les systèmes F_n, YF_n, Y_n, sont définis comme F, YF et Y, mais avec la restriction suivante: dans EXTas et $I_{\sigma\alpha rs}$, PF(s) $\leqslant n$. Il est clair que F est la réunion des F_n, et que F_n est stable par réduction.

3. *Réductibilité pour F_n.* La $\mathbf{S};\boldsymbol{\theta}/r$-réductibilité se définit comme en § 2-2, sauf que les quantifications sur les types sont bornées par la PF égale a n, et que les définitions pour les types $\delta\alpha r$ et $\sigma\alpha r$ de PF $> n$ sont remplacées par: $N(\delta\alpha r,a) \Leftrightarrow \forall s N(r[s],a\{s\})$; $N(\sigma\alpha r,a) \Leftrightarrow (\exists s \exists b N(r[s],b) \wedge aR\, I(b)) \vee aR0)$ les quantifications sur les types étant toujours bornées par la PF égale a n. Ces définitions ne sont pas vicieuses, puisque PF($r[s]$) $\leqslant$ sup(PF(r),PF(s)). Il est inutile de définir la q.r. dans ce cas. On peut définir la red. pour YF_n, comme pour YF, à la différence que si PF(r) $> n$, et si a est de type n on dira que a est red. si $a[\mathbf{S}]$ est red. pour toute suite $\mathbf{S}$. (On peut même borner les PF des types de $\mathbf{S}$ par n.) On définit la red. pour Y_n comme pour Y.

Il est alors clair que la red. pour Y_n peut s'exprimer par un prédicat hyperarithmétique en Π^1_n, soit Δ^1_{n+1}.

On peut alors démontrer le théorème 2 comme pour F; la différence principale est que le lemme 7 n'est plus valide pour des PF $> n$; mais les seuls cas où le lemme 7 est utilisé dans la démonstration est celui de EXT et de I; si la PF du type $\delta\alpha r$ ou $\sigma\alpha r$ utilisé est $> n$, on peut se servir des nouvelles définitions de la réductibilité, et on n'a pas besoin du lemme 7; si cette PF est $\leqslant$ à n, les PF des autres types sont alors bornées par n, par définition de F_n. Dans ce cas, le lemme 7 est toujours valide.

La démonstration de réductibilité ne met d'ailleurs en oeuvre que des schémas de compréhension utilisés dans les applications du lemme 7, soit sur des prédicats de q.r. de PF $\leqslant n$. *La réductibilité pour F_n est donc formalisable dans l'analyse Δ^1_{n+1}.* Réciproquement, on peut vérifier facilement que la réductibilité pour F_n entraine la non-contradiction de l'analyse Π^1_n, en regardant de plus près l'interprétation de Gödel de l'analyse dans F (voir plus loin).

Soit f un terme de F, de type $o \to o$; il est dans un des F_n:

Théorème 3. *Les fonctions de F sont récursives-prouvables (au sens de* [Sp] *) dans l'analyse.*

§ 6. Une extension de F non réductible.

On ajoute a Y et F le schema J_{sr}, pour tous types r et s, de type $r \to s$, avec les axiomes de reduction immediate:

$J_{sr}(a) \Rightarrow a$ si $r = s$

$J_{sr}(a) \Rightarrow 0$ sinon.

Il est facile de montrer, avec nos définitions, que J n'est pas réductible; aussi, dans le lemme suivant, "réductible" signifiera essentiellement : 1) stabilité par réduction, par application des schémas de F. 2) qu'un terme réductible admet une forme normale.

Lemme 12.

1. *J_{rs} est reductible pour tous types sans variables r et s.*
2. *J_{rs} n'est pas reductible.*

Démonstration. 1. évident. 2. On considère le terme:

$c = \mathrm{DT}\beta J_{\rho\delta\alpha\alpha\to\delta\alpha\alpha}(\lambda z_{\delta\alpha\alpha}(z_{\delta\alpha\alpha}\{\delta\alpha\alpha\to\delta\alpha\alpha\}(z)))$

alors $c\{\delta\alpha\alpha\to\delta\alpha\alpha\}(c)$ se réduit, en plusieurs étapes, ... en lui-même, et il n'y a pas d'autre réduction possible. *C.Q.F.D.*

Si on considère que J est l'exemple-même de ce que l'on pourrait appeler une "définition par cas sur les types", il est clair qu'une telle définition n'est pas possible(*).

Pourtant, en regardant la démonstration de réductibilité pour le système F, on est frappé par le fait que les seuls schémas de compréhension utilisés portent sur des variétés exprimant la q.r.; le schéma de compréhension restreint aux variétés de q.r. est certainement cohérent, si l'analyse l'est. Cependant, il n'y a aucun modèle du second ordre dans lequel les ensembles sont exactement les variétés de q.r. sans paramètre: dans un tel modèle, vérifier la réductibilité de J reviendrait à vérifier celle de J_{sr}, pour r et s sans indéterminée, et donc J serait réductible: la restriction aux variétés de q.r. n'autorise pas l'adjonction du schéma: $\forall\theta F \Leftrightarrow \bigwedge_V F[V]$, ceci, bien que la q.r. soit stable par substitution. (Bien entendu, la conjonction doit porter sur les variétés de q.r. qui ne contiennent pas de variables n'apparaissant pas dans $\forall\theta F$.) La différence

(*) Je dois la décourerte de cet exemple à une remarque de G.Kreisel sur le "paradoxe de Curry".

est flagrante avec le calcul du premier ordre (on remplace "variété" par "terme");

3. Notion de validité dans Y

Une équation de Y est une expression de la forme $a = \bar{o}$, où a est un terme de Y de type o. En général, la partie $= \bar{o}$ de l'équation sera sous-entendue, ce qui fait qu'une équation sera identifiée avec la donnée de a de type o. On dit que a est *valide* si pour toute translation de types sans indéterminée pour toutes ses indéterminées et de termes de F pour toutes ses variables, on a $\vdash a[U] = \bar{o}$.

On introduit dans F les constantes suivantes:

Ad:	$\mathrm{REC}\lambda x_o x_o \lambda x_1 x_o y_o S(x_1(y_o))$	*Addition*
$\cdot$:	$\mathrm{REC}\lambda x_o \bar{o} \lambda x_1 x_o y_o \mathrm{Ad}(x_1(y_o), y_o)$	*Produit*
P :	$\mathrm{REC}\bar{o}\lambda x_o y_o y_o$	*Prédecesseur*
N :	$\mathrm{REC}S(\bar{o})\lambda x_o y_o \bar{o}$	*Antisigne*
L :	$\mathrm{REC}\lambda x_o x_o \lambda x_1 x_o y_o P(x_1(y_o))$	*Différence*
E :	$\lambda x_o y_o \mathrm{Ad}(L(x_o, y_o), L(y_o, x_o))$	*Distance*

où 1 est une abréviation pour le type $(o \to o)$.

On introduit dans Y les abréviations $\neg$ et $\vee$.
Si A est une abréviation pour a, $\neg A$ est une abréviation pour $N(a)$; Si A et B sont des abréviations pour a et b respectivement, $A \vee B$ est une abréviation pour $a.b$.

Le sens intuitif de $\neg$ et $\vee$ est évident; on peut définir facilement la notion de tautologie, par le biais des valeurs de vérité, par exemple.

Lemme 1. *Si $B_1 \ldots B_n$ sont des équations de Y (écrites avec $\neg$ et $\vee$), si A est conséquence tautologique de $B_1 \ldots B_n$, si enfin $B_1 \ldots B_n$ sont valides, A est valide.*

Démonstration. Par les théorèmes 1 et 2, ...

En particulier, $\neg A \vee A$ est valide; on peut introduire les connecteurs $\Rightarrow$, $\wedge$, de la manière habituelle.

Lemme 2. *Si $A[\bar{o}]$ et $A[x] \Rightarrow A[S(x)]$ sont valides alors $A[x]$ est valide.*

Lemme 3. *Si A est valide, et si b est un terme de Y, $A[b]$ est valide; de même, si s est un type, $A[s]$ est valide si A l'est.*

Quelques abréviations

Par abus de notation, on écrira:

$\mathrm{DT}\alpha\beta a$	pour	$\mathrm{DT}\alpha(\mathrm{DT}\beta a)$
$\mathrm{ST}\alpha\beta a$	pour	$\mathrm{ST}\alpha(\mathrm{ST}\beta a)$
$a\{r,s\}$	pour	$(a\{r\})\{s\}$
$\mathrm{I}_{\sigma\alpha\beta rst}(a)$	pour	$\mathrm{I}_{\sigma\alpha(\sigma\beta r)s}(\mathrm{I}_{\sigma\beta r[s]\,t}(a))$

avec des conventions similaires pour σ et δ.

Formules généralisées

Une formule généralisée est une expression de la forme $\exists x\forall yA[x,y,\mathbf{Z}]$, où x et y sont des variables de Y, $\mathbf{Z}$ est une suite de variables de Y telle que toutes les autres "variables" de A soient des indéterminées.

On dit qu'une formule généralisée est valide s'il existe un terme b du type de x, *ne contenant pas* y, et tel que $A[b,y,\mathbf{Z}]$ soit valide.

On peut envisager des formules généralisées à un nombre positif quelconque de quantificateurs, sous réserve que les $\exists$ précèdent les $\forall$; on supposera alors qu'il s'agit d'une abréviation pour une formule de la forme de celles que nous avons décrites: $\exists x\forall y\forall y'A[x,y,y',\mathbf{Z}]$ est ainsi une abréviation pour $\exists x\forall YA[x,\Pi^1(Y),\Pi^2(Y),\mathbf{Z}]$ ...

4. Formalisation de l'analyse et de la théorie des types

Il s'agit de présenter rapidement la formalisation de Takeuti ([Tk]): divers systèmes sont possibles, suivant le résultat que l'on souhaite démontrer (la déduction est ici intuitionniste).

1. **Le langage**

(i) les variables du premier ordre: w, w'...

(ii) les lettres de fonctions à n places ($n \geqslant o$): f^n, f'^n..., par exemple $\bar{o}$ à 0 places, S à une place.

(iii) les variables de prédicat a n places ($n > o$): θ, θ'...

(iv) les lettres de prédicat à n places ($n>o$): le signe =, à deux places, par exemple.

Termes
(i) une variable du premier ordre est un terme.
(ii) si $d_1...d_n$ sont des termes, et si f^n est une lettre de fonction à n places, $f^n d_1...d_n$ est un terme.

Formules atomiques
(i) soit R une lettre de prédicat à n places, $d_1...d_n$ des termes; alors $Rd_1...d_n$ est une formule atomique.
(ii) soit θ une variable de prédicat à n places, $d_1...d_n$ des termes; alors $\theta d_1...d_n$ est une formule atomique.

Formules
(i) une formule atomique est une formule.
(ii) si A et B sont des formules, w une variable du premier ordre, θ une variable de prédicat, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $\neg A$, $\forall wA$, $\exists wA$, $\forall \theta A$, $\exists \theta A$, sont des formules. (l'emploi du signe $\neg$ est facultatif; on peut traduire $\neg A$ par $A \Rightarrow \bar{o} = \bar{1}$, par exemple, ou encore plus simplement par $A \Rightarrow \forall\theta\forall w\theta w$, si l'on veut rester dans le calcul des prédicats).

Variétés

Soit A une formule, $w_1...w_n$ des variables du premier ordre distinctes deux à deux; alors $\{w_1...w_n\}A$ est une variété à n places. ($n>o$, et $w_1...w_n$ sont muets dans la variété).

Substitution d'une variété à n places pour une variable de prédicat à n places: si V est la variété $\{w_1...w_n\}A$, si θ est à n places, si B est une formule, on note B_θ^V (par abus de notation: $B[V]$), la formule obtenue à partir de B en remplaçant les formules atomiques $\theta d_1...d_n$ par $A[d_1...d_n]$.

Exemple. Si B est $\forall w(\theta w \Leftrightarrow A[w])$, et si V est $\{w\}A$, $B[V]$ est $\forall w(A[w] \Leftrightarrow A[w])$.

2. **Calcul des prédicats du second ordre**

(dans le cas où le signe $\neg$ ne fait pas partie du langage).
Les séquents sont alors de la forme $\Gamma \vdash A$, ou Γ est une suite de formules, et A est une formule.

On écrit alors les règles et axiomes habituels du calcul des prédicats *intuitionniste* du premier ordre pour $\vee, \wedge, \Rightarrow, \forall, \exists$, et on rajoute les schémas du second ordre:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall\theta A}(*) \qquad \frac{\Gamma, B[V] \vdash A}{\Gamma, \forall\theta B \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[V]}{\Gamma \vdash \exists\theta A} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma, \exists\theta B \vdash A}(*)$$

3. **L'analyse**

(i) formalisation avec le signe =.(En vue du Ch. 5: interpretation de Gödel.) On suppose que les constantes logiques sont =, S, $\bar{o}$. On écrit alors les axiomes et schémas:

$$w = w$$

$$w = w' \wedge w'' = w' \rightarrow w = w''$$

$$w = w' \rightarrow Sw = Sw'$$

$$w = w' \wedge \theta w \rightarrow \theta w'$$

$$\frac{A[\bar{o}] \quad A[w] \rightarrow A[Sw]}{A[w]}$$

$$A \rightarrow A \qquad \frac{B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \qquad \frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$A \vee B \rightarrow A \qquad B \vee A \rightarrow A \qquad \frac{C \rightarrow A \quad C \rightarrow B}{C \rightarrow A \wedge B} \qquad \frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \qquad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}$$

$$A \rightarrow A \vee B \qquad A \rightarrow B \vee A \qquad \frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C}$$

$$Sw = \bar{o} \rightarrow A \ .$$

Pour la quantification du premier ordre, soient w une variable qui n'apparaît pas dans B, et d un terme.

(*) θ n'apparaît pas dans la conclusion (rappelons qu'il n'y a pas de variable muette). On peut démontrer alors le schéma de compréhension sous la forme $\exists\theta\forall w(\theta w \leftrightarrow A)$ en utilisant l'exemple du § précédent.

$$\frac{B \to A}{B \to \forall w A} \qquad \forall x A \to A[d]$$

$$A[d] \to \exists w A \qquad \frac{A \to B}{\exists w A \to B}$$

Pour la quantification du second ordre, soit θ une variable de prédicat à n places qui n'apparaît pas dans B, et soit V une variété à n places.

$$\frac{B \to A}{B \to \forall \theta A} \qquad \forall \theta A \to A[V]$$

$$A[V] \to \exists \theta A \qquad \frac{A \to B}{\exists \theta A \to B}$$

$\neg A$ est interprété comme $A \to \bar{o} = S\bar{o}$; au premier ordre, ce formalisme est exactement celui de Spector ([Sp]).

(ii) formalisation non-égalitaire (en vue du Ch. 6: Elimination des coupures). On suppose que les constantes sont S et $\bar{o}$.

On écrit alors les règles et axiomes due calcul des prédicats du second ordre pour le système dont les seules constantes sont S et $\bar{o}$. Dans quelle mesure peut-on interpréter le système de l'analyse (formalisé comme précedemment) dans G^1LC.

La premiere chose est de choisir un type du faux; on prend $\forall \theta \forall w \theta w$, qui joue ce rôle à merveille, modulo le schéma de compréhension. Tous les axiomes purement logiques de l'analyse (aux deux ordres) se trouvent alors immédiatement interprétés. Il reste cependant à interpreter l'egalite, et le schema d'induction.

On convient que $d = d'$ est une abréviation pour: $\forall \theta(\theta d \to \theta d')$. Visiblement $\forall \theta(\theta d \to \theta d)$; $\forall \theta(\theta d \to \theta d') \wedge \forall \theta(\theta d' \to \theta d'') \to \forall \theta(\theta d \to \theta d'')$; $\forall \theta(\theta d \to \theta d') \wedge \theta' d \to \theta' d'$. De même, en considérant la variété $\{w\} \forall \theta(\theta w \to \theta d)$, de $\forall \theta(\theta d \to \theta d') \to (\forall \theta(\theta d \to \theta d) \to \forall \theta(\theta d' \to \theta d))$, on obtient $d = d' \to d' = d$. En considérant la variété $\{w\} \theta S w$, et le théorème $\forall \theta(\theta d \to \theta d') \to (\theta S d \to \theta S d')$, on obtient $d = d' \to Sd = Sd'$.

On convient que $N(d)$ est une abréviation pour $\forall \theta(\theta \bar{o} \wedge \forall w(\theta w \to \theta S w) \to \theta d)$. On a clairement $N(\bar{n})$ pour tout n; en convenant que toutes les quantifications du premier ordre sont restreintes à N, on peut alors dériver le schéma d'induction.

Les deux formules qui restent à établir sont $\forall w \forall w'(\forall\theta(\theta Sw \to \theta Sw') \to \forall\theta(\theta w \to \theta w'))$ et $\forall w'(\forall\theta(\theta\bar{o} \to \theta Sw) \to \forall\theta\forall w\theta w)$. Notons les par A_1 et A_2. On peut alors rajouter les deux schémas

$$\frac{\Gamma, A_1 \vdash B}{\Gamma \vdash B} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma, A_2 \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

pour pouvoir interpréter tous les schémas de l'analyse.

4. La théorie des types

On se restreint aux conecteurs $\to$ et $\forall$, qui sont suffisants, comme l'a montré Prawitz [Pr1].

Pour plus de simplicité, nous dirons qu'un "type"-nous dirons de préférence "*ordre*", pour ne pas créer de confusion- est un entier n. Pour chaque ordre n, nous supposerons l'existence de variables d'ordre n, appelées *n-indéterminées,* ou en abrégé n-ind. Les n-ind. sont notées θ_n, θ'_n... Nous supposerons aussi l'existence de lettres de fonction $f, g, \ldots$, susceptibles de se combiner entre elles et avec les o-ind. pour former les *o-termes*, dont l'un au moins dont être sans indéterminée.

Les formules et les termes sont définies par induction, comme suit:

(i) Si T est un n-terme, si θ est une n+1-ind., θT est une *formule,* qui est dite atomique.

(ii) Si A et B sont des formules, si θ_n est une indéterminée, $A \to B$ et $\forall\theta_n A$ sont des formules.

(iii) Si A est une formule, θ_n une indéterminée, $\{\theta_n\}A$ est un *n+1-terme.*

Substituer le n+1-terme T pour θ_{n+1} dans l'expression (terme ou formule) D, c'est dans un premier temps procéder à la substitution *combinatoire* de T pour θ_{n+1} dans D, puis, en commençant par les plus petites sous-formules, remplacer les expressions *formelles* TU par $A[U]$, où A est tel que T soit $\{\theta_n\}A$, la substitution étant supposée définie à l'ordre n. (A l'ordre o, la substitution est bien entendu uniquement combinatoire.)

On peut alors écrire le système séquentiel de déduction, en considérant des séquents intuitionnistes de formules, et les règles habituelles pour le seul connecteur $\to$, les règles pour $\forall$ étant:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall\theta_n A}(*) \qquad \frac{\Gamma, A[T] \vdash B}{\Gamma, \forall\theta_n A \vdash B}(**)$$

(*) θ_n n'apparaît pas dans Γ.

(**) T est un n-terme.

Indiquons rapidement comment retrouver les notions habituelles de la théorie des types à partir du calcul des prédicats d'ordre fini que nous venons de décrire:
On introduit le signe =, relation entre o-termes. Comme axiomes, on considère les clôtures par coupures des séquents:

$$T = T,\quad T = U \vdash U = T,\quad T = U,\quad U = V \vdash T = V,\quad ST = SU \vdash T = U\,,$$

$$ST = o \vdash \theta_1 U\,.$$

Si l'élimination des coupures est possible sans le signe =, elle l'est certainement encore après son adjonction et après celle des nouveaux schémas que nous avons pris.

On peut adjoindre l'axiome d'extensionalité de manière cohérente [Tk], par exemple en posant:
$\mathrm{Ext}_o(\theta_o) \Leftrightarrow \theta_o = \theta_o,\ \theta_o =_o \theta_o \Leftrightarrow \theta_o = \theta_o.$

$$\mathrm{Ext}_{n+1}(\theta_{n+1}) \Leftrightarrow \forall\theta_n \forall\theta'_n(\mathrm{Ext}_n(\theta_n) \wedge \mathrm{Ext}_n(\theta'_n) \wedge \theta_n =_n \theta'_n \wedge \theta_{n+1}\theta_n \Rightarrow \theta_{n+1}\theta'_n)$$

$$\theta_{n+1} =_{n+1} \theta'_{n+1} \Leftrightarrow \forall\theta_n(\mathrm{Ext}_n(\theta_n) \wedge \theta_{n+1}\theta_n \Rightarrow \theta'_{n+1}\theta_n)$$

et en restreignant toutes les ind. à Ext.

5. Interprétation de l'analyse dans Y

(Dans ce qui suit, on désigne par 1_n le type défini par $1_0 = o$, et $1_{n+1} = o \to 1_n$; n'étant sous-entendu, on abrègera 1_n en 1.)

A chaque formule A de l'analyse, on associe une formule généralisée de Y, notée A^*.

(i) Si A est $d = d'$, A^* est $\exists x \forall y E(d,d')$, où x et y sont des variables de type o qui n'apparaissent pas dans d et d'.

(ii) Si A est $\theta d_1 \ldots d_n$, A^* est $\exists x_\alpha \forall y_\beta\, G(x,y,d_1 \ldots d_n)$, où α et β sont des indéterminées distinctes, et G est une variable de type $(\alpha,\beta \to 1_n)$. On suppose α, β et G attachées injectivement à θ par un procédé quelconque. L'interprétation des connecteurs propositionnels et des quantificateurs du premier ordre se fait exactement comme dans [Sp].

Pour définir l'interprétation du second ordre, supposons que A^* est $\exists x \forall y\, B[x,y,G,\mathbf{Z}]$, où α, β, G sont associés à θ. (x de type r, y de type s) $(\exists\theta A)^*$ peut se noter symboliquement $(\exists\alpha\exists\beta)\exists G \exists x \forall y\, B[x,y,G,\mathbf{Z}]$. Ou, d'une manière équivalente, $(\exists\alpha\exists\beta)\ \exists x'\forall y\ B[\Pi^1 x', y, \Pi^2 x', Z]$. On affaiblit cette formule en proposant

$$(\exists\alpha\exists\beta)\ \exists x'\forall y'\ B[\Pi^1 x, y'(x'), \Pi^2 x', Z]\ .$$

Cette dernière formule est équivalente à:

$$(\exists\alpha\exists\beta)\ \exists x'\forall Y\ B[\Pi^1 x', Y\{\alpha,\beta\}(x'), \Pi^2 x', Z]\ .$$

(Y est de type $\delta\alpha\beta(rx(\alpha,\beta\to 1))\to$).

Or, se donner α, β et x' dont le type r' dépend de α et β, c'est se donner X de type $\sigma\alpha\beta r'$. En utilisant l'axiome de réduction pour ST, on aboutit à la formulation suivante:

$$(\exists\theta A)^* : \exists X\forall Y(\mathrm{ST}\alpha\beta(\lambda z \mathrm{B}[\Pi^1 z, Y\{\alpha,\beta\}(z), \Pi^2 z, Z]))\,(X)\ .$$

On aboutirait par un raisonnement similaire à:

$$(\forall\theta A)^* : \exists X\forall Y(\mathrm{ST}\alpha\beta(\lambda z \mathrm{B}[X\{\alpha,\beta\}(\Pi^2 z), \Pi^1 z, \Pi^2 z, Z]))\,(Y)\ .$$

Interprétation d'une variété.

Soit $V : \{w_1 \ldots w_n\}A$ une variété; on suppose que A^* est $\exists x\forall y \mathrm{A}'[x,y,Z]$. On désigne par V^* le terme $\lambda xyw_1\ldots w_n \mathrm{A}'$.

Lemme. *La translation $A^*[V^*]$ est valide en même temps que $(A[V])^*$; plus précisément, on peut choisir les mêmes fonctionnelles pour réaliser l'une et l'autre.*

Démonstration évidente.

Théorème 4. *Si A est un théorème de l'analyse, A^* est valide.*

Corollaire. 1. La cohérence de l'analyse se ramène à celle du système Y (pour lequel on a le théorème de réductibilité).
2. Les fonctions représentables dans F sont exactement les récursives prouvables de l'analyse.
3. F est équivalent au système de Spector, dans le sens que les mêmes fonctions de type $o \to o$ sont représentables dans les deux systèmes.
4. Il n'y a pas de démonstration de réductibilité pour F globalement formalisable dans l'analyse.

Démonstration. 3. Car les fonctionnelles de Spector sont exactement les récursives-prouvables de l'analyse ([Sp], [H,K]).
4. Par le 1. et le deuxième théorème d'incomplétude, ou par le 2 et le fait que les récursives-prouvables n'ont pas d'énumération récursive-prouvable.

Démonstration du théorème. La plus grande partie de l'interprétation se traitant exactement comme dans [Sp], nous nous bornerons au cas des schémas du second ordre.

$\forall\theta A \to A[V]$
Il faut trouver x et Y tels que $\mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z A\,[X\{\alpha,\beta\}(\Pi^2 z),\Pi^1 z,\Pi^2 z]\,(Y(X,y)) \to$ $A\,[x(X),y,V^*]$ soit valide. Pour Y, on prend $\lambda Xy\mathrm{I}(y\otimes V^*)$, et pour x : $\lambda XX\{r,s\}(V^*)$ (r et s sont tels que V^* est de type $r,s\to 1$).

$A[V] \to \exists\theta A$
Il faut interpréter $A\,[x,y(x,Y),V^*] \to \mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z A\,[\Pi^1 z, Y\{\alpha,\beta\}(z),\Pi^2 z]\,(X(x))$, en trouvant y et X; on suppose que V^* est de type $(r,s\to 1)$. Il suffit de prendre pour X : $\lambda x\mathrm{I}(x\otimes V^*)$, et pour y, $\lambda xYY\{r,s\}(X)$.

$A \to B \vdash \exists\theta A \to B$
Par hypothèse, il existe a et b tels que $A\,[x,a(x,y'),G] \to B\,[b(x),y']$ soit valide, et il faut trouver Y et x' tels que $\mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z A\,[\Pi^1 z, Y(X,y')\{\alpha,\beta\}(z),\Pi^2 z]\,(X) \to$ $B[x'(X),y']$ soit valide. On peut clairement supposer que α et β n'apparaissent pas en indice d'une variable autre que G dans a; car une autre variable qui aurait cette propriété serait inessentielle à l'interprétation, et pourrait donc être remplacée par le 0 du même type. On peut faire une supposition similaire pour b. Pour x', on peut prendre $\mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z b(\Pi^1 z)[\Pi^2 z]$; pour Y, on peut prendre $\lambda Xy'\mathrm{DT}\alpha\beta\lambda z a(\Pi^1 z,y')[\Pi^2 z]$.

$B \to A \vdash B \to \forall\theta A$
Par hypothèse, il existe a et b tels que $B[x',y)] \to A\,[a(x'),y,G]$ soit valide, et il faut trouver X et y' tels que: $B[x',y'(x',Y)] \to$ $\mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z A\,[X(x')\{\alpha,\beta\}(\Pi^2 z),\Pi^1 z,\Pi^2 z]\,(Y)$ soit valide. On peut toujours supposer que α et β n'apparaissent pas en indice d'une variable autre que G dans a et b. Pour y', on peut prendre $\lambda x'\mathrm{ST}\alpha\beta\lambda z b(x',\Pi^1 z)[\Pi^2 z]$; pour X, on peut prendre $\lambda x'\mathrm{DT}\alpha\beta\lambda G a(x')$. *C.Q.F.D.*

Remarque: On pourrait donner une interpretation de l'analyse classique (avec le tiers-exclu) dans le système Y, d'une façon analogue à celle de Shoenfield [Sh].

6. Théorème de normalisation pour G^1LC

Dans ce qui suit, il s'agit, à l'aide de la méthode de Howard, de démontrer un théorème d'élimination des coupures pour G^1LC (voir Ch. 4).

Pour plus de simplicité, toutes les variables de prédicat seront supposées monadiques. Pour pouvoir préparer la généralisation du chapitre 7, nous noterons θ... les variables des deux ordres, θ_0 représentant plus particulièrement une variable du premier ordre, et θ_1 une variable du second ordre. Les variables seront appelées *indéterminées* (*ind.*). De même, par le vocable de *terme*, nous entendrons soit un terme (du 1er ordre) soit une variété de G^1LC. Par *type*, nous entendrons une formule de G^1LC, supposé écrit avec les seuls signes $\rightarrow$ et $\forall$, les autres symboles étant dérivables comme l'a montré Prawitz [Pr], et les corollaires standard pour v et E etant toujours derivables(*).

Un élément du système fonctionnel HY sera appelé *fonctionnelle* (en abrégé: *fcl*), pour ne pas créer de confusion.

§ 1. Description de HY

(i) Pour chaque type A, les variables de type A, x_A, y_A sont des *fcl*.

(ii) Si a est une *fcl* de type A, si x est une variable de type B, λxa est une *fcl* de type $B \rightarrow A$.

(iii) Si a et b sont des *fcl* de types respectifs $A \rightarrow B$ et A, APab (en abrégé $a(b)$) est une *fcl* de type B.

(iv) Si a est une *fcl* de type A, si θ_i (i=0,1) est une i-ind. qui n'apparaît pas en indice d'une variable de a, $\mathrm{DQ}_i\theta_i a$ est une *fcl* de type $\forall\theta_i A$.

(v) Si a est une *fcl* de type $\forall\theta_i A$, si T est un i-terme (i=0,1) $\mathrm{EXT}_i aT$ (abrégé en $a\{T\}$) est une *fcl* de type $A[T]$.

§ 2. Notion de réduction

1. *Sous-fcl*

On dit que b est une *sous-fcl* de a si b est anterieur a a dans sa construction.

2. *Réduction immédiate*

$$\lambda xa(b) \Rightarrow a[b] \tag{1}$$

$$\mathrm{DQ}_i\theta_i a\{T\} \Rightarrow a[T] \qquad (i=0,1) \tag{2}$$

On dit que u se réduit immédiatement à v si $u \Rightarrow v$ est un exemple de (1)-(2).

(*) Je dois cette simplification a Martin-Löf.

Remarque. Pour des raisons techniques, il est commode d'introduire le schéma 0_A pour tout type A; les axiomes de la réduction immédiate pour 0 sont les suivants:

$$0(b) \Rightarrow 0\,, \qquad\qquad 0\{T\} \Rightarrow 0\,. \tag{3}$$

Suivant le contexte, HY comportera, ou ne comportera pas le schéma 0, et il est bien entendu que 0 n'est utile que le temps d'une démonstration de réductibilité.

3. *Réduction*

Une *sous-fcl minimale b* de a est une *sous-fcl* telle qu'il existe une *fcl c* telle que b se réduise immédiatement à c, et telle qu'aucune *sous-fcl* stricte de b n'ait la même propriété.

On dit que a se réduit atomiquement à b si l'on peut passer de a à b par substitution, pour une apparition d'une *sous-fcl* minimale c de a, d'une *fcl d* telle que c se réduise immédiatement à d.

Une *réduction* est une suite de *réductions* atomiques.

On abrège en aRb l'énoncé "a se réduit en b".

Une *fcl* est normale si elle n'a aucune *sous-fcl* minimale. Une *forme normale* de a est une *fcl*. b normale telle que aRb.

§3. Formes normales et démonstrations sans coupures

La construction de HY paraphrase exactement (du moins sans le 0) un système de déduction naturelle de Prawitz [Pr] ; une *fcl* normale correspond à une démonstration sans coupure au sens de Prawitz. Prawitz a montré [Pr] l'équivalence entre sa notion de démonstration sans coupure et la notion séquentielle. Pour démontrer le

Théorème 6. G^1 LC *vérifie le principe de normalisation.*

Il suffit de montrer que toute *fcl* admet une forme normale, d'après ce qui précède.

§ 4. Notion de réductibilité

Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, nous nous plaçons dans le sous-système HF, formé des *fcl* sans variables et indéterminées; par terme, nous entendrons terme *clos*; rappelons qu'il y a un i-terme clos.

1. *Candidats de réductibilité* (en abrégé: c.r.)

(CR0) (i) Si T est un 0-terme, un c.r..de hauteur T est T lui-même.
(ii) Si T est un 1-terme, un c.r. de hauteur T est un prédicat φ à deux arguments, qui vérifie:

(CR1) $\varphi(U,a) \Rightarrow U$ est un 0-terme et a est de type TU
(CR2) $\varphi(U,0)$
(CR3) $aRb \Rightarrow (\varphi(U,a) \Leftrightarrow \varphi(U,b))$
(CR4) $\varphi(U,a) \Rightarrow a$ admet une forme normale.
On abrège en $Z_T(\varphi)$ l'énoncé "φ est un c.r. de hauteur T".

2. *La quasi-réductibilité* (en abrégé: q.r.)

Soit A un type (resp. T un terme), soit $\boldsymbol{\theta}$ une suite d'indéterminées qui contient toutes celles de A (resp. de T), soit $\mathbf{T}$ une suite de termes de même longueur que $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\varphi}$ une suite de c.r. de hauteurs respectives $\mathbf{T}$; on définit la $\mathbf{T}$; $\boldsymbol{\varphi}/A$-réductibilité, qui exprime une propriété des *fcl* de type $A[\mathbf{T}]$ (resp. $(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/T)^*$ que nous montrerons être un c.r. de hauteur $T[\mathbf{T}]$).

(QR1) $\mathbf{T},T;\boldsymbol{\varphi},\varphi/N(\theta_1 U,a) \Leftrightarrow \varphi(TU[\mathbf{T}],a)$
(QR2) $\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/N(A\to B,a) \quad \Leftrightarrow \forall b(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/N(A,b) \Rightarrow \mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/N(B,a(b)))$
(QR3) $\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/N(\forall\theta_i A,a) \quad \Leftrightarrow \forall\varphi\forall T(Z_T(\varphi) \quad \Rightarrow \mathbf{T},T;\boldsymbol{\varphi},\varphi/N(A,a\{T\}))$
(QR4) $(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/T)^* = T[\mathbf{T}]$ si T est un 0-terme.
(QR5) $(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/T)^* = \{U,a\}(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/N(TU,a))$ si T est un 1-terme.

3. *La réductibilité*

On la définit à partir de la q.r. exactement comme au ch. 2.

§ 5. **Théorème de réductibilité**

Lemme 1. *Une fcl a au plus une forme normale.*

Lemme 2. $(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/T)^*$ *est un c.r. de hauteur* $T[\mathbf{T}]$, *sous réserve que* $\boldsymbol{\varphi}$ *soit une suite de c.r.*

Démonstration. Comme au ch. 2.

Lemme 3. (Substitution).

$$\mathbf{T},T[\mathbf{T}'];\boldsymbol{\varphi},(\mathbf{T}';\boldsymbol{\psi}/T)^*/N(A,a) \Leftrightarrow \mathbf{T},\mathbf{T}';\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}/N(A[T],a).$$

Ce lemme se démontre simplement (voir ch. 7).

Lemme 4.
1. x_A *est red.*
2. *si a et b sont red., $a(b)$ est red.*
3. *si a est red., $a\{T\}$ est red.*

Démonstration. 1, 2, 3 sont des conséquences évidentes des définitions; remarquons l'usage du lemme de substitution (et donc du schéma de compréhension) pour 3.

Lemme 5.
1. *si a est red.,* $DQ\theta_i a$ *est red.*
2. *si a est red.,* λxa *est red.*

Démonstration. 1. si $a[T]$ est q.r. pour tout T (il existe un i-terme clos), $a[T]$ admet une forme normale, et il alors rapidement vérifié que a en admet une, disons a'; $DQ\theta_i a\{T\}$ se réduit donc en $a'[T]$ qui est la forme normale de $a[T]$; par CR3 et QR3, $DQ\theta_i a$ est donc réductible.
2. si $a[b]$ est red. pour tout b red., $a[0]$ est red., et il est rapidement vérifié que si $a[0]$ admet une forme normale, a en admet une, disons a'. Si b a la forme normale b', $\lambda xa(b)$ se réduit en $a[b']$, qui a la même forme normale que $a[b]$, comme on le vérifie. Par CR3 et QR2, λxa est donc réductible.

Théorème 7. *Toutes les fcl de* HY *sont réductibles.*

Donc toute *fcl* a une forme normale, ce qui donne le théorème 6.

7. Théorème de normalization pour $G^\omega LC$

Pour obtenir l'analogue du théorème 6 pour $G^\omega LC$, il suffit de considérer un système fonctionnel $H^\omega Y$, donné comme suit:

1. *Description de* $H^\omega Y$

Comme au ch. 6, mais on ne suppose pas que $i = 0, 1$: on se permet i entier quelconque.

2. *Notion de réduction*

Comme au ch. 6, avec i quelconque.

3. *Formes normales et démonstrations sans coupure*

Comme au ch. 6, on montrerait que si toute *fcl* de $H^\omega Y$ admet une forme normale, le

Théorème 8. $G^\omega LC$ *vérifie le principe d'élimination des coupures.*

Est vérifié.

4. *Notion de réductibilité*

(i) Un candidat de réductibilité de hauteur T est défini par les clauses:
Si T est un 0-terme, par CRO.
Si T est un n+1-terme par (CR2), (CR3), (CR4), et (C'R1):
(C'R1) $\varphi(\psi,a) \Leftrightarrow$ il existe un n-terme U tel que ψ soit un c.r. de hauteur U, et a est de type TU (ce qui correspond à (CR1) pour $n = 0$).
(ii) La quasi réductibilité est définie par (QR2), (QR3), (QR4), ainsi que par
(Q'R1) $\mathbf{T}, T'; \varphi, \varphi/N(\theta_{n+1} U,a) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{T},T';\boldsymbol{\varphi},\varphi/U)^*,a)$
(Q'R5) $(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/T)^* = \{\psi,a\}(\exists U(Z_U(\psi) \wedge \mathbf{T},U;\boldsymbol{\varphi},\psi/N(T\theta_n,a))$ si T est un n+1-terme.
(iii) La réductibilité se définit comme d'habitude à partir de la q.r.

5. *Théorème de réductibilité*

On peut reprendre les lemmes 1–5 dans leur formalution exacte. Celà donne le théorème de réductibilité, et du coup le théorème 8. Par exemple, démontrons l'analogue du lemme 3:

$$\mathbf{T},T[\mathbf{T}'] ; \varphi, (\mathbf{T}';\psi/T)^*/N(A,a) \Leftrightarrow \mathbf{T},\mathbf{T}'; \varphi,\psi/N(A[T],a) .$$

Par induction sur longueur (A) + longueur (T). Si A n'est pas de la forme θU, le lemme est consequence evidente de l'hypothese d'induction. Nous supposons dans ce qui suit que $A = \theta U$ et que T est substitué pour θ'.
(i) θ' est distinct de θ; on peut se ramener au cas où θ' apparaît dans U. Si U est un 0-terme, θ' est une 0-ind., et $(\mathbf{T}';\boldsymbol{\psi}/T)^*$ est $T[\mathbf{T}']$, puisque T est alors un 0-terme.

Si U est le n+1-terme $\{\theta_n''\}B$, il nous suffit de prouver l'équivalence $\varphi((\mathbf{T},T[\mathbf{T}'];\boldsymbol{\varphi},(\mathbf{T}';\boldsymbol{\psi}/T)^*/U)^*,a) \Leftrightarrow \varphi((\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi};\mathbf{T},\mathbf{T}'/U[T])^*,a)$, et il est suffisant de montrer que $\mathbf{T},T[\mathbf{T}'],T'';\boldsymbol{\varphi},(\mathbf{T}';\boldsymbol{\psi}/T)^*, \varphi'/N(B,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{T},\mathbf{T}',T'';\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi},\varphi'/N(B[T],b)$, pour tous φ',T'' et tout b, ce qui fait partie de l'hypothèse d'induction.
(ii) θ' est θ; et θ' n'apparaît pas dans T. Puisque T n'est pas un 0-terme, il est de la forme $\{\theta_n''\}B$; il faudrait démontrer: $(\mathbf{T}';\boldsymbol{\psi}/T)^*((\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/U)^*,a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{T},\mathbf{T}';\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}/N(B[U],a)$ et il suffit de prouver $\mathbf{T}',U[\mathbf{T}];\boldsymbol{\psi},(\mathbf{T};\boldsymbol{\varphi}/U)^*/N(B,a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{T}',\mathbf{T};\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\varphi}/N(B[U],a)$. Cette dernière équivalence fait partie de l'hypothèse d'induction.
(iii) θ' est θ et θ apparait dans T: en combinant (i) et (ii) C.Q.F.D.

Références

[Gd] K.Gödel, Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12 (1958).

[H,K] W.A.Howard et G.Kreisel, Transfinite induction and Bar induction of types 0 and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis, JSL 31 (1966) 3.

[Pr1] D.Prawitz, Natural deduction (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1965).

[Pr2] D.Prawitz, Some results for intuitionistic logic with second order quantification rules, in: Intuitionism and Proof Theory, eds. A.Kino, J.Myhill and R.E.Vesley (North-Holland, Amsterdam, 1970).

[Sh] J.R.Shoenfield, Mathematical Logic (Addison-Wesley, 1967) Ch. 8.

[Sp] C.Spector, Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, Recursive function theory, Proc. Symp..Pure Math., Vol. V (AMS, Providence, 1962).

[Th] M.Takahashi, A proof of cut-elimination theorem in simple type theory, J. Math. Soc. Jap. 19 (1967).

[Tk] G.Takeuti, On a generalised logical calculus, Jap. J. Math. 23 (1953).

[Tt1] W.W.Tait, A non-constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate calculus, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966).

[Tt2] W.W.Tait, Intentional interpretation of functionals of finite type, JSL 32 (1967).