KRUSKALERIES

JJL 15 octobre 81

<u>Définition 1</u>: $(D, \leq)$ <u>prébelordre</u> (<u>pbo</u> en court) ssi pour toute suite $\{t_i\}_i$ infinie de D, il existe une sous-suite infinie $\{u_i\}_i$ telle que : $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \cdots$
(On exige aussi que $\leq$ est un préordre)

<u>Remarque 1</u>: La définition précédente est équivalente à :
$(D, \leq)$ est un pbo ssi pour toute suite $\{t_i\}_i$ infinie de D, il existe i et j tels que : $i < j$ et $t_i \leq t_j$.

<u>Démonstration</u>: Def 1 $\Rightarrow$ Def 2 : trivial. Réciproquement : soit $\{t_i\}_i$ une suite infinie. Appelons éléments maximaux de cette suite les t_i tels que, pour tout $j > i$, on n'a pas $t_i \leq t_j$. On peut remarquer que ces éléments maximaux sont en nombre fi Sinon la sous-suite de ces éléments maximaux contredirait la definition 2. Donc, soit n l'indice après lequel $\{t_i\}_i$ ne contient plus d'éléments maximaux, on a $t_n \leq t_{n_1} \leq t_{n_2} \cdots$ pour $n < n_1 < n_2 \cdots$ et donc Def 2 $\Rightarrow$ Def 1. $\square$

Cas du monoïde :

Soit $(D,\leq)$ un préordre. La relation de sous-mot associée sur D^* notée $\hookrightarrow_{\leq}$ (ou $\hookrightarrow$ en court) est définie par :

$u = a_1 a_2 \cdots a_m \hookrightarrow v = b_1 b_2 \cdots b_n$ ssi

$a_1 \leq b_{i_1}, a_2 \leq b_{i_2}, \cdots a_m \leq b_{i_n}$ pour $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$.

Théorème (Higmann) : Si $(D,\leq)$ est un prébelordre, alors $(D^*, \hookrightarrow)$ est un prébelordre.

Démonstration : Supposons le contraire. Il existe un contrexemple, i.e. une suite infinie $\{t_i\}_i$ où il n'existe pas i et j vérifiant $i<j$ et $t_i \hookrightarrow t_j$. Notons $\|t\|$ la longueur de $t \in D^*$. On peut construire un contrexemple minimal comme suit : $\|t_1\|$ est minimal pour tous les contrexemples, $\|t_2\|$ minimal pour tous les contrexemples commençant par t_1, $\|t_3\|$ minimal pour tous les contrexemples commençant par t_1, t_2, etc... Dans ce contrexemple (minimal), en considérant la suite $\{a_i\}$ des premières lettres des t_i, il existe une sous-suite infinie reliée par $\leq$. (Remarque bon marché ; la suite $\{a_i\}$ est infinie car sinon on n'aurait plus que des mots vides et donc ce serait pas un contrexample). Soit $\{u_i\}_i$ la sous-suite des t_i correspondante, et $\{u'_i\}_i$ la suite des u_i où on a enlevé la première lettre. Remarque : cette dernière suite n'est pas un contrexemple, car sinon la suite $\{t_1, t_2, \cdots t_{n-1}, u'_1, u'_2, u'_3 \ldots\}$ serait un contrexemple plus minimal que $\{t_i\}_i$, (En posant : n = indice de $\{t_i\}$ correspondant à u_1), puisque $\|u'_1\| < \|t_n\|$.

Donc il existe i et j vérifiant $i<j$ et $u'_i \hookrightarrow u'_j$.
D'où $u_i \hookrightarrow u_j$. Contredisant $\{t_i\}_i$ est un contrexample

$\square$

<u>Cas des arbres:</u>

Soit $(T, \leq)$ un préordre. La relation de plongement associée notée $\hookrightarrow$ est définie inductivement par: $t = f\vec{t} \hookrightarrow u = g\vec{u}$ si

(1) $t \hookrightarrow u_i$ pour un i,

ou (2) $t \leq u$ et $t_1 \hookrightarrow u_{i_1}, t_2 \hookrightarrow u_{i_2}, \ldots t_n \hookrightarrow u_{i_n}$ pour $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$.

<u>Théorème (Kruskal)</u>: Si $(T, \leq)$ est un pbo, alors $(T, \hookrightarrow)$ est un pbo.

<u>Démonstration</u>: Comme pour Higmann. On reprend $\{t_i\}_i$ contrexample minimal. Soit $\{u_i\}_i$ la sous-suite infinie telle que $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$. Soit $D = \{v \mid t_i = f(\cdots v \cdots)$. <u>Ori</u> $(D, \hookrightarrow)$ est un pbo. Sinon il existe une suite infinie $\{v_i\}_i$ qui est un contrexample. Il y aurait deux cas: <u>soit</u> $\{v_i\}_i$ ne prend des éléments que dans un ensemble fini. Alors $v_i = v_j$ pour un i et j tel que $i<j$ et donc $v_i \hookrightarrow v_j$. <u>Soit</u> on peut extraire une sous-suite $\{w_i\}_i$ de $\{v_i\}_i$ telle que, pour tout i et j tels que $i<j$, w_i et w_j sont sous-expressions de t_k et t_l vérifiant $k<l$. Alors $\{w_i\}_i$ serait un contrexample, contredisant la minimalité de $\{t_i\}_i$, puisque $\{t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, w_1, w_2 \ldots\}$ serait encore plus minimal (où n est l'indice des t_i

<u>Lemme 1</u> : Soit $\trianglelefteq$ un prébel ordre et $\leqslant$ une préordre sur les termes vérifiant :

(1) $t \leqslant f(\cdots t \cdots)$ (sous-expression)

(2) $(t = f\vec{t} \trianglelefteq u = g\vec{u}\,,\ t_1 \leqslant u_{i_1}, t_2 \leqslant u_{i_2}, \cdots t_n \leqslant u_{i_n}$ pour $i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ implique $t \leqslant u$

Alors $>$ est un ordre bien fondé.

<u>Démonstration</u> : Si $\hookrightarrow$ est le plongement associé à $\trianglelefteq$, on a donc $\hookrightarrow \subset \leqslant$. Donc $\leqslant$ est un pbo. Et donc $>$ est bien fondé. □

<u>Cas particulier</u> : Tout ordre $\geqslant$ vérifiant :

(1) $f(\cdots t \cdots) \geqslant t$

(2) $t \geqslant u \Rightarrow f(\cdots t \cdots) \geqslant f(\cdots u \cdots)$

(3) $f(\cdots t \cdots) \geqslant f(\cdots\cdots)$

est bien fondé (quand l'ensemble des symboles de fonc est fini)

<u>Démonstration</u> ! Prendre $t = f\vec{t} \trianglelefteq u = g\vec{u}$ ssi $f = g$. □

contenant w_1). Donc $(D, \hookrightarrow)$ est un pbo. D'après le théorème de Higmann, $(D^*, \sqsubseteq_{\hookrightarrow})$ est un pbo. Donc, en posant $u_1 = f_1^{\bullet} \vec{u_1}$, $u_2 = f_2^{\bullet} \vec{u_2}$, ..., il existe $i < j$ tel que : $\vec{u_i} \sqsubseteq_{\hookrightarrow} \vec{u_j}$, i.e $u_i^1 \hookrightarrow u_j^{i_1}$, $u_i^2 \hookrightarrow u_j^{i_2}$, ... $u_i^k \hookrightarrow u_j^{i_k}$. Comme $u_i \leqslant u_j$, on a donc $u_i \hookrightarrow u_j$. Et donc $\{t_i\}_i$ n'est pas un contrexample. $\square$