Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes.

Von E. SPERNER in Hamburg.

LEBESGUE hat gezeigt, daß man die Invarianz der Dimensionszahl und gleichfalls die des Gebietes in einfacher Weise auf einen grundlegenden Satz der Topologie (siehe 1.) zurückführen kann[1]). Dieser Satz wurde von BROUWER[2]) und LEBESGUE[3]) auch bereits bewiesen. Aber beide Beweise setzen dem Verständnis des mit der Materie wenig vertrauten Lesers nicht unerhebliche Schwierigkeiten entgegen. Es handelt sich in dieser Arbeit in erster Linie um einen neuen, einfachen Beweis dieses wichtigen Satzes, der in den §§ 1 bis 3 gegeben wird. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, statt des n-dimensionalen Würfels das n-dimensionale Simplex in den Mittelpunkt der Betrachtung zu rücken. Dann bringen die §§ 4 bis 7 in ebenfalls neuer und vereinfachter Form die Anwendungen des LEBESGUEschen Satzes auf die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Der Nachweis der Gebietsinvarianz enthielt überdies bei LEBESGUE (Fund. Math. 2, S. 269) eine wesentliche Lücke, die dort zu einem Fehlschluß geführt hat. Das wird bei dieser Gelegenheit auch richtig gestellt[4]).

Es sei noch auf die Bedeutung des LEBESGUEschen Satzes für die MENGERsche Dimensionstheorie hingewiesen, wo er einen wichtigen Bestandteil des sogenannten Rechtfertigungstheorems darstellt, d. h. des Nachweises, daß die MENGERsche Definition der Dimension dem Zahlenraum R_n wirklich die Dimension n zuordnet[5]).

1.

Der fragliche Satz lautet:

Gegeben sei eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{G}$ im n-dimensionalen Zahlenraume, die innere Punkte enthält. Die Punkte von $\mathfrak{G}$ seien auf endlich viele, abgeschlossene Mengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, s)$ verteilt, so daß jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ wenigstens in einer der Mengen $\mathfrak{M}_i$ vorkommt. Dann

[1]) Vgl. LEBESGUE, Math. Annalen 70, S. 166, und Fund. Math. 2, S. 256 und 265. Die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes wurde bekanntlich zuerst von BROUWER bewiesen; vgl. Math. Annalen 70, S. 161 und 71, S. 305.

[2]) Journ. f. Math. 142, S. 149.

[3]) Fund. Math. 2, S. 259.

[4]) Die Anregung zur Beschäftigung mit diesen Fragen gab mir Herr O. SCHREIER in Hamburg, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

[5]) Vgl. MENGER, Monatshefte f. Math. und Phys. 34, S. 153, und HUREWICZ, Math. Annalen 98, S. 84.

gibt es mindestens einen Punkt in $\mathfrak{G}$, der in wenigstens $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ liegt, wofern nur die $\mathfrak{M}_i$ hinreichend klein gewählt waren.

Wir wollen einen solchen Punkt von $\mathfrak{G}$, der in wenigstens $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ vorkommt, einen ausgezeichneten nennen. Da $\mathfrak{G}$ innere Punkte enthält, gibt es auch ein n-dimensionales Simplex Σ, das ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört. E_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)$ seien seine Ecken, s_i die entsprechenden Gegenseiten[6]). Die Punkte des (als abgeschlossene Menge betrachteten) Simplex Σ sind auf gewisse der Mengen $\mathfrak{M}_i$ verteilt, etwa auf $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \cdots, \mathfrak{M}_r$, wo also $r \leqq s$ ist. Waren die Mengen $\mathfrak{M}_i$ hinreichend klein gewählt, dann wird

1. nie eine Ecke E_i und ein Punkt ihrer Gegenseite s_i in derselben Menge $\mathfrak{M}_k$ vorkommen,

und darüber hinaus

2. keine der Mengen $\mathfrak{M}_k$ Punkte von allen Seiten s_i enthalten[7]).

Man numeriere die $\mathfrak{M}_i$ so, daß E_i in $\mathfrak{M}_i$ liegt für $i = 1, 2, 3, \cdots, n+1$. (E_i kann außer in $\mathfrak{M}_i$ natürlich auch noch in anderen Mengen $\mathfrak{M}_k$ vorkommen, wo dann $k > n+1$ ist.) Gibt es eine Menge $\mathfrak{M}_k$, wo $n+1 < k \leqq r$ ist, dann gibt es jedenfalls auch eine Seite s_i, von der kein Punkt zu $\mathfrak{M}_k$ gehört. Dann vereinigen wir $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}_k$ zu einer neuen Menge $\mathfrak{M}_i'$ und ersetzen $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}_k$ durch die eine Menge $\mathfrak{M}_i'$. $\mathfrak{M}_i'$ ist abgeschlossen und enthält E_i, aber keinen Punkt von s_i. Durch die Vereinigung von $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}_k$ entsteht auch kein neuer ausgezeichneter Punkt in Σ; denn jeder Punkt von Σ liegt ja entweder in derselben Anzahl von Mengen wie vorher oder in einer weniger. So verfahren wir mit jeder Menge $\mathfrak{M}_k$, für die $n+1 < k \leqq r$ ist und erhalten, wenn wir wieder $\mathfrak{M}_i$ für $\mathfrak{M}_i'$ schreiben, das Resultat:

Die Punkte von Σ sind auf die $n+1$ abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3. \cdots, n+1)$ verteilt, so daß

1. jeder Punkt von Σ in einer der Mengen $\mathfrak{M}_i$ liegt,
2. E_i in $\mathfrak{M}_i$ liegt,
3. $\mathfrak{M}_i$ keinen Punkt von s_i enthält.

Wenn man zeigen kann, daß Σ jetzt noch einen Punkt enthält, der in allen $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ liegt, dann muß es also offenbar auch einen ausgezeichneten Punkt in $\mathfrak{G}$ geben, da ja durch unseren Prozeß die Anzahl der ausgezeichneten Punkte in Σ nicht vermehrt worden ist.

2.

Wir betrachten jetzt nur noch das Simplex Σ, dessen Punkte auf die $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ verteilt waren, so daß die Verteilung den eben

---

[6]) Gegenseite von E_1 heißt das $(n-1)$-dimensionale Simplex $E_2 E_3 E_4 \cdots E_{n+1}$.

[7]) 2. folgt z. B. aus der Tatsache, daß zu hinreichend kleinem ε kein Punkt von Σ existiert, so daß seine Abstände von den Seiten s_i sämtlich kleiner als ε sind.

genannten Bedingungen 1. bis 3. genügte. Man nehme eine simpliziale Zerlegung von Σ[5]). Wir werden im § 3 beweisen, daß bei einer solchen Zerlegung von Σ in Teilsimplizes es immer ein Teilsimplex gibt, von dem sich Punkte in jeder der $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ finden. Ein solches Teilsimplex wollen wir ebenfalls ausgezeichnet nennen. Nehmen wir für den Augenblick die Existenz eines ausgezeichneten Teilsimplex als bewiesen an. Dann sei uns ferner eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$, gegeben. Es läßt sich dann jedenfalls zu jedem ε_k eine simpliziale Zerlegung $\mathfrak{T}_k$ von Σ angeben, so daß die Kanten eines jeden Teilsimplex von $\mathfrak{T}_k$ sämtlich kleiner als ε_k sind. Dann gibt es also bei $\mathfrak{T}_k$ ein ausgezeichnetes Teilsimplex σ_k. Die σ_k bilden eine Folge von Simplizes, so daß immer die Kanten von σ_k sämtlich kleiner sind als ε_k. Es gibt daher einen Punkt P in Σ, so daß in einer beliebig kleinen Umgebung von P immer noch unendlich viele σ_k liegen. Da aber jedes σ_k ausgezeichnet ist, finden sich in einer beliebig kleinen Umgebung von P also auch stets noch Punkte von jeder der Mengen $\mathfrak{M}_i$. Wegen der Abgeschlossenheit der $\mathfrak{M}_i$ muß also P selbst zu allen $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ gehören.

3.

Es bleibt noch die Existenz der σ_k zu erweisen.

Gegeben sei eine simpliziale Zerlegung von Σ in die Teilsimplizes $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p$. Ein Eckpunkt eines τ_k kommt dann in gewissen $\mathfrak{M}_i$ vor, etwa in $\mathfrak{M}_{\nu_1}, \mathfrak{M}_{\nu_2}, \cdots, \mathfrak{M}_{\nu_q}$, wo $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_q$ sein soll. Dann ordnen wir diesem Eckpunkt die Koordinate ν_1 zu und verfahren so mit allen Eckpunkten der Teilsimplizes. Jedem Teilsimplex τ_k ist auf diese Weise ein System von $n+1$ Koordinaten zugeordnet und jeder Seite eines Teilsimplex ein System von n Koordinaten. Dann behaupten wir:

Die Anzahl der τ_k, denen das System $(1, 2, 3, \cdots, n+1)$, d. h. das mit lauter verschiedenen Ziffern, zugeordnet ist, ist ungerade.

Diese Aussage setzt offenbar die Existenz eines ausgezeichneten τ_k in Evidenz.

Trivial ist die Behauptung im Falle der Dimension $n = 0$. Man setze sie also für $n-1$ als bewiesen voraus, um Induktion anzuwenden.

Das System $(1, 2, 3, \cdots, n)$ komme bei den Seiten von τ_k etwa t_k-mal vor. Dann bilden wir $\sum_{k=1}^{p} t_k$. Ist $t_k > 0$, dann ist das zu τ_k gehörige System von $n+1$ Koordinaten von der Form

$$(1, 2, 3, \cdots, n, a),$$

[5]) Es ist gemeint eine simpliziale Zerlegung im Sinne der kombinatorischen Topologie, also eine Zerlegung von Σ in endlich viele Teilsimplizes, so daß die gemeinsame Punktmenge zweier benachbarter Teilsimplizes stets ein ganzes Randstück beider ist, also entweder ein Punkt, oder eine ganze Kante, oder ein ganzes Seitendreieck usw.

wo $1 \leqq a \leqq n+1$. Ist $a = n+1$, dann ist offenbar $t_k = 1$. Ist aber a eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots, n$, dann sieht man sofort, daß $t_k = 2$ sein muß[9]). Ist also e die Anzahl der τ_k, denen das System $(1, 2, 3, \cdots, n+1)$ zugeordnet ist, und f die Anzahl der τ_k, bei denen $t_k = 2$ ist, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{p} t_k = e + 2f.$$

Wir wollen die Summe noch auf eine zweite Weise bestimmen. Ist einer Teilsimplexseite, die im Innern des Simplex Σ liegt, das System $(1, 2, 3, \cdots, n)$ zugeordnet, dann ist es in unserer Summe genau zweimal gezählt, da ja gemäß der Art der Zerlegung des Simplex Σ jede Seite im Innern von Σ zu genau zwei τ_k gehört. Sei die Anzahl dieser Seiten im Innern von Σ gleich g. Am Rande von Σ kann das System $(1, 2, 3, \cdots, n)$ jedenfalls nur an der Seite $E_1 E_2 E_3 \cdots E_n$ auftreten. Die Seite $E_1 E_2 E_3 \cdots E_n$ ist aber ein $(n-1)$-dimensionales Simplex, dessen Punkte auf die n abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_n$ verteilt sind, und zwar genügt, wie man sofort sieht, diese Verteilung ebenfalls den am Schluß von § 1 formulierten Bedingungen 1. bis 3. Also tritt laut Induktionsvoraussetzung an der Seite $E_1 E_2 E_3 \cdots E_n$ das System $(1, 2, 3, \cdots, n)$ eine ungerade Anzahl von Malen auf, etwa h-mal. Unsere Summe ist daher auch

$$\sum_{k=1}^{p} t_k = 2g + h.$$

Wegen $e + 2f = 2g + h$ muß also auch e ungerade sein, womit alles bewiesen ist.

4.

Als erste Anwendung des Lebesgueschen Satzes zeigen wir die Invarianz der Dimensionszahl[10]).

Man beachte hierzu zuerst folgendes:

Die Punkte eines n-dimensionalen Simplex Σ lassen sich stets so auf $n+1$ abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)$ verteilen, daß jeder Punkt von Σ in wenigstens einer Menge $\mathfrak{M}_i$ vorkommt und daß jede Menge $\mathfrak{M}_i$ genau einen Eckpunkt von Σ, aber keinen Punkt von dessen Gegenseite enthält.

Eine solche Verteilung erhält man z. B. so: Man nehme einen Punkt P im Innern von Σ, der von den Seiten s_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)$ des Simplex der Reihe nach die Abstände d_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)$ haben

---

[9]) Man erhält nämlich aus $(1, 2, 3, \cdots, n, a)$ die Systeme der $n+1$ Seiten indem man der Reihe nach je $1, 2, 3, \cdots, n, a$ streicht. Nur beim Streichen des zweimal auftretenden a erhält man aber das System $(1, 2, 3, \cdots, n)$. Also ist $t_k = 2$.

[10]) Vgl. Lebesgue, Fund. Math. 2, S. 265.

möge. Dann soll $\mathfrak{M}_i$ bestehen aus allen Punkten, die von s_i einen Abstand $\geqq d_i$ haben[11]).

Wir wollen ferner noch beweisen:

Die Punkte des n-dimensionalen Zahlenraumes R_n lassen sich so auf beliebig kleine, abgeschlossene Mengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3 \dots)$ verteilen, daß jeder Punkt des R_n in wenigstens einer Menge $\mathfrak{M}_i$ vorkommt, aber kein Punkt in mehr als $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ liegt, und daß überdies jeder beschränkte Teil des R_n nur auf endlich viele Mengen $\mathfrak{M}_i$ verteilt ist.

Zu dem Zweck nehmen wir eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine simpliziale Zerlegung des ganzen R_n, so daß die Kanten eines jeden Simplex sämtlich $<\varepsilon$ sind. Wir zerlegen dann jedes Simplex in $n+1$ abgeschlossene Teilmengen, so daß in dem betrachteten Simplex jede Teilmenge genau einen Eckpunkt, aber keinen Punkt von dessen Gegenseite enthält.

Der Eckpunkt A_k, der etwa den Simplizes Σ_i $(i = 1, 2, \cdots, h)$ angehöre, kommt also auch in je einer der Teilmengen von Σ_i $(i = 1, 2, \cdots, h)$ vor, im ganzen also in h Teilmengen, etwa den Mengen $\mathfrak{N}_i < \Sigma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$. Wir bilden die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \cdots + \mathfrak{N}_h.$$

Auf diese Weise ist jedem Eckpunkt A_k der simplizialen Zerlegung eine und nur eine Menge $\mathfrak{M}_k$ zugeordnet, deren Durchmesser offenbar $< 2\varepsilon$ ist[12]). Man sieht sofort, daß jeder Punkt des R_n wenigstens einer Menge $\mathfrak{M}_k$ angehört und jeder beschränkte Teil des R_n nur auf endlich viele $\mathfrak{M}_k$ verteilt ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß kein Punkt mehr als $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_k$ angehört. Ein Punkt im Innern eines Simplex kann aber nur in höchstens $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_k$ vorkommen, da die Innenpunkte des Simplex überhaupt nur auf $n+1$ Mengen verteilt sind. Ein Punkt auf einer Seite eines Simplex aber kann nur in solchen Mengen $\mathfrak{M}_k$ vorkommen, die zu einem der Eckpunkte dieser Seite gehören (wegen der besonderen Art der Zerlegung im einzelnen Simplex), also jedenfalls nur in höchstens n Mengen $\mathfrak{M}_k$ liegen[13]).

5.

Sei nun im n-dimensionalen Zahlenraum R_n eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben und im R_{n+h} $(h > 0)$ eine zu

---

[11]) Man überzeuge sich auch, daß man diese Verteilung leicht so modifizieren kann, daß P der einzige ausgezeichnete Punkt von Σ ist, etwa indem man in die Menge $\mathfrak{M}_i$ alle Punkte gibt, die für $k < i$ von s_k einen Abstand $\leqq d_k$, von s_i aber einen Abstand $\geqq d_i$ haben. Hiervon werden wir im § 7 Gebrauch machen. Dasselbe leisten übrigens noch mannigfache andere Verteilungen.

[12]) Der Durchmesser von $\mathfrak{M}_k$ ist $< 2\varepsilon$, heißt: irgend zwei Punkte von $\mathfrak{M}_k$ haben stets einen Abstand $< 2\varepsilon$.

[13]) Man kann übrigens die obige Verteilung so einrichten, daß man die zur simplizialen Zerlegung des R_n duale Verteilung erhält.

$\mathfrak{M}$ homöomorphe Punktmenge $\mathfrak{M}'$, die folglich auch beschränkt und abgeschlossen ist. Aus dem in § 4 Bewiesenen folgt jetzt sofort, daß man $\mathfrak{M}$ so auf beliebig kleine, endlich viele, abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, \cdots, s$) verteilen kann, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ in wenigstens einer, aber in höchstens $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}_i$ liegt. Wegen der Homöomorphie lassen sich also auch die Punkte von $\mathfrak{M}'$ so auf beliebig kleine, endlich viele, abgeschlossene Mengen $\mathfrak{M}'_i$ ($i = 1, 2, \cdots, s$) verteilen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}'$ in wenigstens einer, aber in höchstens $n+1$ Mengen $\mathfrak{M}'_i$ liegt. Der Lebesguesche Satz aber besagt, daß das bei $h > 0$ unmöglich ist, wenn $\mathfrak{M}'$ innere Punkte enthält. Daher kann es in $\mathfrak{M}'$ keine inneren Punkte geben.

Hat man andererseits eine Punktmenge des R_{n+h} mit inneren Punkten gegeben, dann enthält diese doch jedenfalls einen beschränkten, abgeschlossenen Teil mit inneren Punkten und aus dem eben Gesagten folgt daher unmittelbar:

Eine Punktmenge des R_{n+h} ($h > 0$), die innere Punkte enthält, kann nicht homöomorph sein zu irgendeiner Punktmenge des R_n.

Damit ist die Invarianz der Dimensionszahl bewiesen.

6.

Um den Nachweis der Gebietsinvarianz vorzubereiten, beweisen wir erst noch folgenden Satz:

Eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R_n sei auf endlich viele, abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, \cdots, s$) verteilt. $\mathfrak{M}$ enthalte einen einzigen ausgezeichneten Punkt P. Dann gilt:

Wenn P Randpunkt von $\mathfrak{M}$ ist, dann ist die Auszeichnung von P hebbar, d. h. durch Abändern der Verteilung von $\mathfrak{M}$ lediglich in einer beliebig kleinen Umgebung von P kann man stets erreichen, daß $\mathfrak{M}$ frei wird von ausgezeichneten Punkten[14]).

Um das zu zeigen, nehmen wir ein beliebig kleines n-dimensionales Simplex Σ, das P in seinem Inneren enthält. Die Oberfläche von Σ sei $\mathfrak{O}$; $\mathfrak{D}$ sei der Durchschnitt $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{M}$. $\mathfrak{D}$ enthält keinen ausgezeichneten Punkt. Also gibt es zu jedem Punkt von $\mathfrak{O}$ eine Umgebung, so daß der Durchschnitt dieser Umgebung mit $\mathfrak{M}$ auf nur höchstens n der Mengen $\mathfrak{M}_i$ verteilt ist. Aus dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz folgt daher nach einer bekannten Schlußweise, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß die ε-Umgebung eines jeden Punktes von $\mathfrak{O}$ Punkte aus nur höchstens n der Mengen $\mathfrak{M}_i$ enthält[15]). Nunmehr verteilen wir $\mathfrak{O}$ auf

---

[14]) Es gilt allgemeiner ohne die Voraussetzung, daß P der einzige ausgezeichnete Punkt sei, in etwas modifizierter, aber leicht verständlicher Terminologie: Jede isolierte ausgezeichnete Stelle am Rande von $\mathfrak{M}$ ist hebbar.

[15]) Man könnte auch sonst, wenn das nicht der Fall wäre, genau wie im § 2 auf die Existenz eines ausgezeichneten Punktes von $\mathfrak{O}$ schließen, der ja aber nicht vorhanden ist.

endlich viele, abgeschlossene Mengen $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1, 2, 3, \cdots, r$), deren Durchmesser $<\varepsilon$ ist, und zwar so, daß jeder Punkt von $\mathfrak{O}$ in wenigstens einer, aber in höchstens n der Mengen $\mathfrak{N}_i$ vorkommt. Um einzusehen, daß das möglich ist, braucht man nur die Ausführungen von § 4 fast wörtlich zu übertragen. Sodann verteilen wir die Mengen $\mathfrak{N}_i$ als Ganzes auf die Mengen $\mathfrak{M}_i$ nach folgender Vorschrift:

1. enthält $\mathfrak{N}_k$ keinen Punkt von $\mathfrak{D}$, dann geben wir $\mathfrak{N}_k$ zu irgendeiner der Mengen $\mathfrak{M}_i$,
2. enthält $\mathfrak{N}_k$ Punkte von $\mathfrak{D}$, dann geben wir $\mathfrak{N}_k$ zu einer der (höchstens n) Mengen $\mathfrak{M}_i$, denen diese Punkte angehören.

Wir behaupten: Auch jetzt gibt es wie vorher keinen Punkt von $\mathfrak{O}$, der bezüglich der Mengen $\mathfrak{M}_i$ ausgezeichnet ist. Ein Punkt von $\mathfrak{O}$ nämlich, der nicht zu $\mathfrak{D}$ gehört, findet sich in nur höchstens n Mengen $\mathfrak{N}_i$, also auch nur in höchstens n Mengen $\mathfrak{M}_i$. Sei aber Q ein Punkt von $\mathfrak{D}$. Dann liegt Q vor unserem Prozeß etwa in den Mengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_f$, wo gewiß $f \leqq n$ ist. Q gehört nun weiter auch gewissen Mengen $\mathfrak{N}_i$ an, etwa den Mengen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \cdots, \mathfrak{N}_g$, wo aber auch $g \leqq n$ ist. Diese $\mathfrak{N}_i$ ($i \leqq g$) liegen in der ε-Umgebung von Q. Es gab aber vor unserem Prozeß nur höchstens n Mengen $\mathfrak{M}_i$, die Punkte aus der ε-Umgebung von Q besitzen, etwa die Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_h$, wo $f \leqq h \leqq n$ ist, da ja $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_f$, die Q enthalten, notwendig darunter sein müssen. Jeder Durchschnitt $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{N}_i$ für $i \leqq g$ enthält Q, ist also nicht leer. Nach der Vorschrift 2. ist also jedes dieser $\mathfrak{N}_i$ ($i \leqq g$) zu einer der Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_h$ gekommen. Q kann also nur höchstens in diesen h Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_h$ liegen, was zu zeigen war.

Da P Randpunkt von $\mathfrak{M}$ ist, gibt es im Innern von Σ sicher einen Punkt S, der nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wir nehmen nun die Punkte im Inneren von Σ, die zu $\mathfrak{M}$ gehören und deren Menge etwa $\mathfrak{K}$ heißen möge, aus den $\mathfrak{M}_i$, denen sie zugeteilt waren, wieder heraus und verteilen das Innere von Σ, also auch $\mathfrak{K}$, neu auf die Mengen $\mathfrak{M}_i$ nach der Vorschrift: Wenn der Punkt R von $\mathfrak{O}$ den Mengen $\mathfrak{M}_{\nu_1}, \mathfrak{M}_{\nu_2}, \cdots, \mathfrak{M}_{\nu_k}$ ($k \leqq n$) angehört, dann soll auch die ganze Strecke SR den Mengen $\mathfrak{M}_{\nu_1}, \mathfrak{M}_{\nu_2}, \cdots, \mathfrak{M}_{\nu_k}$ und nur diesen angehören.

Man sieht unmittelbar, daß bei dieser Neuverteilung S der einzige ausgezeichnete Punkt von Σ ist. S gehört aber nicht zu $\mathfrak{M}$. Also enthält $\mathfrak{M}$ nunmehr keinen ausgezeichneten Punkt mehr, was zu erreichen und zu beweisen war[16]).

---

[16]) Beim Beweis der Gebietsinvarianz modifiziert LEBESGUE, Fund. Math. 2, S. 270, entsprechend auch eine Umgebung Σ eines ausgezeichneten Punktes P, wenn er auch freilich Σ nicht als Simplex wählt. Er übersieht aber ganz, daß man die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von Σ erst neu verteilen muß, ehe man die Projektion von S und die darauf folgenden Schlüsse anwenden kann.

7.

Ein n-dimensionales Simplex Σ (als abgeschlossene Punktmenge betrachtet) und eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R_n seien homöomorph. *Dann kann bei dieser Homöomorphie einem inneren Punkte von Σ stets nur wieder ein innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ entsprechen.*

Denn ist etwa der Punkt P von $\mathfrak{M}$ Bildpunkt des inneren Punktes Π von Σ. Dann verteilen wir (siehe § 4, Fußnote 11) die Punkte von Σ so auf $n+1$ abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$, daß jedes $\mathfrak{M}_i$ genau einen Eckpunkt von Σ, aber keinen Punkt von dessen Gegenseite enthält, und daß Π der einzige ausgezeichnete Punkt von Σ ist. Aus dem in den §§ 2 und 3 Bewiesenen folgt nun, daß die Auszeichnung von Π nicht hebbar ist. Vermöge der Homöomorphie ist auch $\mathfrak{M}$ auf $n+1$ abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{M}'_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ verteilt und P hier der einzige ausgezeichnete Punkt. Wäre P Randpunkt von $\mathfrak{M}$, dann wäre nach § 6 die Auszeichnung von P hebbar, also vermöge der Homöomorphie auch die von Π, was nicht der Fall ist. Also muß P innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ sein.

Nunmehr sind wir in der Lage, die Gebietsinvarianz sofort in Evidenz zu setzen durch den Satz:

Sind die Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ des R_n homöomorph, dann entspricht bei dieser Homöomorphie einem inneren Punkte der einen stets ein innerer Punkt der anderen.

Wir können annehmen, daß wenigstens eine der beiden Mengen innere Punkte enthält, da sonst nichts zu beweisen ist. Sei dies $\mathfrak{M}$ und P ein innerer Punkt von $\mathfrak{M}$. Es gibt ein Simplex Σ, das ganz in $\mathfrak{M}$ liegt und P als Innenpunkt enthält. Bild von Σ in $\mathfrak{M}'$ sei die Punktmenge $\mathfrak{S}' < \mathfrak{M}'$, und Bild von P in $\mathfrak{S}'$ sei P'. Dann muß P' Innenpunkt von $\mathfrak{S}'$ sein und also erst recht von $\mathfrak{M}'$. Da dasselbe nun natürlich auch umgekehrt gilt, ist unser Satz bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß hieraus oder auch aus § 6 wiederum die Invarianz der Dimensionszahl folgt. Denn sei die Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R_{n+h} $(h > 0)$, die innere Punkte enthält, homöomorph zur Punktmenge $\mathfrak{M}'$ des R_n. Dann betten wir den R_n in einen $(n+h)$-dimensionalen Raum $R'_{n+h} > R_n$ ein. In diesem besteht $\mathfrak{M}'$ gewiß nur aus Randpunkten. Also entsprächen den inneren Punkten von $\mathfrak{M}$ Randpunkte von $\mathfrak{M}'$, was nach dem eben Bewiesenen unmöglich ist.

Hamburg, Mathematisches Seminar, im Juni 1928.