Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 22, S. 413–418 (1976)

NATÜRLICHE KOMPLIZIERTHEITSMASZE UND ERHALTUNGSSÄTZE I

von GERHARD LISCHKE in Jena (DDR)[1])

1. Einleitung

Durch die beiden von M. BLUM in [1] formulierten Axiome für *abstrakte Kompliziertheitsmaße* wurde ein theoretisches Fundament für die Kompliziertheitstheorie gegeben. Die diesen Axiomen genügenden Funktionen spiegeln wesentliche Eigenschaften natürlicher Kompliziertheitsmaße, wie etwa Zeitkompliziertheit (Zahl der Takte), Kapazität (Raumkompliziertheit oder Länge der aktiven Zone) und Schwankung bei Turing-Maschinen, wider. Andererseits lassen diese Axiome aber auch sehr viele pathologische, höchst unnatürliche Kompliziertheitsmaße zu, und es ergibt sich das Problem, durch die Forderung zusätzlicher Eigenschaften eine größere „*Natürlichkeit*" dieser Maße zu erzwingen (vgl. [2, 3]). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer solchen Forderung, nämlich der der Erfüllung sogenannter *Erhaltungssätze*, und ist als umfassende Ergänzung zu [3] gedacht. Gegenüber [3] werden wir hier Erhaltungssätze in einer weit allgemeineren Form definieren und zunächst zeigen, daß diese Erhaltungssätze gut als Natürlichkeitsaxiom geeignet zu sein scheinen: Es ist klar, daß ein solches Axiom durch die Standardmaße Zeitkompliziertheit, Kapazität und Schwankung erfüllt werden muß, jedoch nicht durch alle Kompliziertheitsmaße. Nach [2] darf ein solches Axiom auch nicht zugleich für ein Kompliziertheitsmaß und alle seine Untermaße gelten. Die Forderung nach der Erfüllung von Erhaltungssätzen besitzt diese Eigenschaften. In einem zweiten Teil werden wir Beziehungen zwischen den durch Erhaltungssätze definierten Kompliziertheitsmaßen und Natürlichkeitsforderungen, wie sie in [2] formuliert sind, untersuchen.

Für viele Hinweise zu diesen beiden Arbeiten danke ich wieder Herrn Doz. Dr. G. WECHSUNG in Jena.

2. Definition der Erhaltungsmaße

Es sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine feste Gödelisierung aller einstelligen partiell-rekursiven Funktionen. In [3] wurden für ein Kompliziertheitsmaß Φ ausschließlich *Erhaltungssätze* der Form

$$\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(\varphi_j(x)), \Phi_j(x)) \tag{1'}$$

betrachtet, deren Gültigkeit für alle $i, j, x \in \mathsf{N}$ gefordert wurde, und für die $\varphi_{h(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j$ galt. In Verallgemeinerung dessen wollen wir die Gültigkeit eines Erhaltungssatzes bei festem i und j nur für fast alle $x \in \mathsf{N}$ (d. h. mit Ausnahme von endlich vielen) fordern und dies durch den Zusatz „f. ü." (*fast überall*) kenntlich machen. Außerdem

---

[1]) Die in zwei Teilen erscheinende Arbeit gibt in modifizierter Form Auszüge aus der Dissertation des Autors wieder.

lassen wir insgesamt folgende fünf Typen von Erhaltungssätzen zu:

(1) $\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(\varphi_j(x)), \Phi_j(x))$ f. ü.,

(2) $\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(\varphi_j(x)), \Phi_j(x), \varphi_j(x))$ f. ü.,

(3) $\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(x), \Phi_j(x))$ f. ü.,

(4) $\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(x), \Phi_j(x), \varphi_i(x))$ f. ü.,

(5) $\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(x), \Phi_j(x), \varphi_i(x), \varphi_j(x))$ f. ü.

σ sei dabei jeweils eine $\mathfrak{R}$-*Funktion* der entsprechenden Stellenzahl (d. h. eine rekursive Funktion, bei der für jede natürliche Zahl das volle Urbild eine endliche Menge ist, und für die ein nur von σ abhängiger Algorithmus existiert, nach dem dieses Urbild für jede Zahl berechnet werden kann; vgl. [3]) und h eine zweistellige rekursive Funktion mit der Eigenschaft $\forall i \, \forall j \, \forall x (x \in D_{h(i,j)} \leftrightarrow x \in D_j \wedge \varphi_j(x) \in D_i)$ bzw. $D_{h(i,j)} = D_i \cap D_j$.[1]) P mit $P(\varphi_i, \varphi_j) =_{\mathrm{Df}} \varphi_{h(i,j)}$ ist dann eine zweistellige effektive Operation über der Menge aller einstelligen partiell-rekursiven Funktionen, und h heiße die zu P gehörige *Iterationsfunktion*. (Die in [3] vorkommenden Iterationsfunktionen gehören demzufolge zur effektiven Operation der Hintereinanderausführung.)

Außer den Funktionalgleichungen (1) bis (5) und den dazu dualen Formen, die durch Vertauschen von Indizes auf der rechten Seite und der Argumente von σ aus diesen hervorgehen, sowie Kombinationen dieser Gleichungen haben keine anderen ähnlich aussehenden Gleichungen Lösungen durch BLUMsche Kompliziertheitsmaße. So stehen z. B. die Gleichungen

$$\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(\varphi_j(x)), \Phi_j(x), \varphi_i(x)) \quad \text{f. ü.}$$

und

$$\Phi_{h(i,j)}(x) = \sigma(\Phi_i(\varphi_j(x)), \Phi_j(\varphi_i(x))) \quad \text{f. ü.},$$

im Widerspruch zum zweiten BLUMschen Axiom.

Definition. Ein (BLUMsches) Kompliziertheitsmaß Φ heißt *σ-Erhaltungsmaß bezüglich h* (wobei σ eine geeignete $\mathfrak{R}$-Funktion und h eine Iterationsfunktion seien), falls für alle $i, j \in \mathsf{N}$ eine der Gleichungen (1) bis (5) gilt. Φ heißt *Erhaltungsmaß*, falls es eine geeignete $\mathfrak{R}$-Funktion σ und Iterationsfunktion h gibt, so daß Φ ein σ-Erhaltungsmaß bezüglich h ist.

Analog zu Satz 2 aus [3] zeigt man, daß es zu jeder effektiven Operation P mit entsprechender Einschränkung an die zugehörigen Iterationsfunktionen unendlich viele Iterationsfunktionen h gibt derart, daß für beliebige $\mathfrak{R}$-Funktionen σ entsprechender Stellenzahl jeweils unendlich viele σ-Erhaltungsmaße bezüglich h existieren. Ähnlich zeigt man auch, daß es Kompliziertheitsmaße gibt, die gleichzeitig unendlich viele Erhaltungssätze verschiedener Typen erfüllen.

Satz 1. *Die Standardmaße Zeitkompliziertheit t, Kapazität s und Schwankung w für Turing-Maschinen sind Erhaltungsmaße.*

Beweis (vgl. [3]). Wird die Funktion φ_i durch die Turing-Maschine T_i, die Funktion φ_j durch die Turing-Maschine T_j berechnet, und ist $T_{h(i,j)}$ diejenige Turing-Maschine, die durch einfache Komposition der Maschinen T_j und T_i entsteht (diese berechnet die Funktion $\varphi_{h(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j$), so gilt

$$t_{h(i,j)}(x) = t_i(\varphi_j(x)) + t_j(x) \quad \text{und} \quad w_{h(i,j)}(x) = w_i(\varphi_j(x)) + w_j(x).$$

[1]) D_n ist der *Definitionsbereich* der Funktion φ_n.

Arbeitet die Maschine $T_{h'(i,j)}$ zunächst so wie T_j, markiert dabei die aktive Zone und arbeitet anschließend wie T_i, indem sie die markierte Zone nur dann jeweils um ein Feld vergrößert, wenn auch schon eine vorherige Verschiebung der Bandinschrift aus dieser Zone führen würde, so gilt $s_{h'(i,j)}(x) = \max(s_j(x) + 1, s_i(\varphi_j(x)))$.

3. Kompliziertheitsmaße, die keinen Erhaltungssatz erfüllen

Satz 2. *Es gibt Kompliziertheitsmaße, die mit keiner Iterationsfunktion h einen Erhaltungssatz erfüllen können.*

Beweis. Es seien Φ' ein beliebiges Kompliziertheitsmaß und $a, b, c \in \mathsf{N}$ so gewählt, daß gilt:

$$\varphi_a(x) = \varphi_b(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathsf{N},\ a \neq b,$$

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 6|x \ (6 \text{ Teiler von } x), \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Φ sei dann wie folgt konstruiert:

$$\Phi_i(x) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} 0, & \text{falls } (i = a \wedge 2|x) \vee (i = b \wedge 3|x) \vee (i = c \wedge 2|x), \\ \Phi_i'(x) + x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß Φ wieder ein Kompliziertheitsmaß ist.

Würde Φ einen Erhaltungssatz vom Typ (3), (4) oder (5) mit einer Iterationsfunktion h erfüllen, so wäre $\Phi_{h(a,b)}(x) = const$ für fast alle durch 6 teilbaren x, während dieser Wert für die durch 2 oder 3 aber nicht durch 6 teilbaren x beliebig groß wird. Das ist aber nach Definition von Φ nicht möglich. Für die Typen (1) und (2) folgt der gleiche Widerspruch aus $\Phi_{h(b,c)}(x)$, womit der Satz bewiesen ist.

4. Erhaltungssätze gelten nicht für alle Untermaße

Es sei zunächst die Definition des Untermaßes eines Kompliziertheitsmaßes nach [2] und [6] angegeben.

Definition. Es seien Φ ein Kompliziertheitsmaß zur Gödelisierung φ und f eine einstellige rekursive Funktion. Die zweistellige partiell-rekursive Funktion Ψ heißt *f-Untermaß* von Φ, falls gilt:

(a) $\Psi(i, x) = \Phi(f(i), x)$ für alle i und x bzw. in anderer Schreibweise $\Psi_i = \Phi_{f(i)}$ für alle i,

(b) ψ mit $\psi_i =_{\mathrm{Df}} \varphi_{f(i)}$ ist wieder eine Gödelisierung aller einstelligen partiell-rekursiven Funktionen.

Ψ heißt *Untermaß* von Φ, wenn es eine rekursive Funktion f gibt, so daß Ψ f-Untermaß von Φ ist.

Der Beweis des folgenden Satzes benutzt wesentliche Gedanken von G. WECHSUNG [6].

Satz 3. *Kein Erhaltungssatz kann gleichzeitig für ein Kompliziertheitsmaß und alle seine Untermaße gelten.*

Beweis. Das Kompliziertheitsmaß Φ zur Gödelisierung φ erfülle irgendeinen Erhaltungssatz, z. B. vom Typ (1). Wir konstruieren ein Untermaß Ψ von Φ, das diesen

Erhaltungssatz nicht erfüllt. Für die Typen (2) bis (5) erfolgt der Beweis in ähnlicher Form und sei hier nicht ausgeführt.

Zunächst müssen wir klären, was es heißt, daß ein Erhaltungssatz von einem Untermaß erfüllt bzw. nicht erfüllt wird. Ist Ψ ein f-Untermaß von Φ, so ist nach Definition ψ mit $\psi_i =_{\mathrm{Df}} \varphi_{f(i)}$ eine Gödelisierung. Folglich existiert eine rekursive Funktion g mit $\varphi_n = \psi_{g(n)}$ für alle n. Der Erhaltungssatz (1) würde dann für Ψ wie folgt aussehen:

$$\Psi_{h'(i,j)}(x) = \sigma(\Psi_i(\psi_j(x)), \Psi_j(x)) \quad \text{f. ü.},$$

wobei

$$\psi_{h'(i,j)} = P(\psi_i, \psi_j) = P(\varphi_{f(i)}, \varphi_{f(j)}) = \varphi_{h(f(i),f(j))} = \psi_{g(h(f(i),f(j)))} \text{ und } \Psi_{h'(i,j)} = \Psi_{g(h(f(i),f(j)))}$$

gilt. Das f-Untermaß Ψ von Φ erfüllt also den Erhaltungssatz (1) genau dann, wenn eine rekursive Funktion g existiert mit $\varphi_n = \psi_{g(n)}$ und $\Psi_{g(h(f(i),f(j)))}(x) = \sigma(\Psi_i(\psi_j(x)), \Psi_j(x))$ f. ü. für alle $n, i, j \in \mathsf{N}$ (vgl. [6]).

Es seien nun i_0 und i_1 natürliche Zahlen und f' eine rekursive Funktion mit

(a) ψ' mit $\psi'_n =_{\mathrm{Df}} \varphi_{f'(n)}$ ist eine Gödelisierung,

(b) $\varphi_{f'(i_0)}$ ist allgemein-rekursiv,

(c) $\varphi_{f'(i_1)}$ ist partiell-rekursiv mit unendlichem, rekursivem Definitionsbereich $D_{f'(i_1)} \neq \mathsf{N}$

(d) $\Phi_{f'(i_1)}(x) \neq \Phi_{h(f'(i_0),f'(i_1))}(x)$ für fast alle $x \in D_{f'(i_1)}$.

(Wir beweisen anschließend, daß derartige i_0, i_1 und f' stets existieren.)

Es seien weiterhin $k =_{\mathrm{Df}} h(f'(i_0), f'(i_1))$ und

$$p(i, l, x) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} 1 + \varphi_i(x), & \text{falls } x \in D_k \text{ und } \Phi_i(x) \leqq \Phi_k(x), \\ \varphi_l(x), & \text{falls } x \notin D_k \text{ oder } \Phi_i(x) > \Phi_k(x). \end{cases}$$

(In $\Phi_i(x) > \Phi_k(x)$ sei auch eingeschlossen, daß $\Phi_k(x)$ definiert und $\Phi_i(x)$ nicht definiert ist.) Wegen (b), (c) und (1) ist φ_k partiell-rekursiv mit unendlichem, rekursivem Definitionsbereich $D_k = D_{f'(i_1)}$, und demzufolge die Bedingung „$x \in D_k$ und $\Phi_i(x) \leqq \Phi_k(x)$" entscheidbar (unter Benutzung des zweiten Blumschen Axioms), also die Funktion p partiell-rekursiv. Nach dem Iterationssatz oder s-m-n-Theorem [5] existiert dann eine rekursive Funktion ϱ mit $\varphi_{\varrho(i,l)}(x) = p(i, l, x)$ und nach dem Kleeneschen Fixpunktsatz [5] eine weitere rekursive Funktion λ mit $\varphi_{\lambda(l)} = \varphi_{\varrho(\lambda(l),l)}$. Insgesamt gilt dann

$$\varphi_{\lambda(l)}(x) = \begin{cases} 1 + \varphi_{\lambda(l)}(x), & \text{falls } x \in D_k \text{ und } \Phi_{\lambda(l)}(x) \leqq \Phi_k(x), \\ \varphi_l(x), & \text{falls } x \notin D_k \text{ oder } \Phi_{\lambda(l)}(x) > \Phi_k(x). \end{cases}$$

Wäre nun $\Phi_{\lambda(l)}(x) \leqq \Phi_k(x)$ für irgendein $x \in D_k$ und ein $l \in \mathsf{N}$, so wäre $x \in D_{\lambda(l)}$ und $\varphi_{\lambda(l)}(x) = 1 + \varphi_{\lambda(l)}(x)$, was nicht möglich ist. Folglich gilt

$$\Phi_{\lambda(l)}(x) > \Phi_k(x) \quad \text{und} \quad \varphi_{\lambda(l)} = \varphi_l \quad \text{für alle } l \in \mathsf{N} \text{ und } x \in D_k.$$

Wir definieren nun

$$f(n) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \lambda(f'(n)), & \text{falls } n \notin \{i_0, i_1\}, \\ f'(n), & \text{falls } n \in \{i_0, i_1\}, \end{cases}$$

und $\psi_n =_{\mathrm{Df}} \varphi_{f(n)}$.

ψ ist dann wieder eine Gödelisierung, denn ist g' rekursiv mit $i_0, i_1 \notin R_{g'}$[1]) und

[1]) $R_{g'}$ ist der *Wertebereich* der Funktion g'.

$\varphi_n = \psi'_{g'(n)}$ (solches g' existiert, siehe anschließend), so ist $\varphi_n = \psi_{g(n)}$ mit

$$g(n) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} i_0, & \text{falls } n = f(i_0), \\ i_1, & \text{falls } n = f(i_1), \\ g'(n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist Ψ mit $\Psi_i =_{\mathrm{Df}} \Phi_{f(i)}$ ein Untermaß von Φ. Würde nun dieses Untermaß Ψ den Erhaltungssatz (1) erfüllen, so müßte insbesondere mit geeignetem g gelten:

$$\Psi_{g(h(f(i_0),f(i_1)))}(x) = \sigma(\Psi_{i_0}(\psi_{i_1}(x)), \Psi_{i_1}(x)) \quad \text{f. ü.}$$

Es ist aber einerseits $\Psi_{g(h(f(i_0),f(i_1)))}(x) = \Psi_{g(h(f'(i_0),f'(i_1)))}(x) = \Psi_{g(k)}(x) = \Phi_{f(g(k))}(x)$ und andererseits ist $\sigma(\Psi_{i_0}(\psi_{i_1}(x)), \Psi_{i_1}(x)) = \sigma(\Phi_{f(i_0)}(\varphi_{f(i_1)}(x)), \Phi_{f(i_1)}(x)) = \Phi_{h(f(i_0),f(i_1))}(x) = \Phi_{h(f'(i_0),f'(i_1))}(x) = \Phi_k(x)$ f. ü., und $\Phi_{f(n)}(x) = \Phi_k(x)$ f. ü. kann für kein $n \in \mathrm{N}$ gelten.

Beweis. 1. $n = i_0$. Dann ist $f(n) = f'(i_0)$ und wegen (b) und $D_k \neq \mathrm{N}$ die Behauptung richtig. 2. $n = i_1$. Dann ist $f(n) = f'(i_1)$, und die Behauptung folgt aus (d). 3. $n \notin \{i_0, i_1\}$. Dann ist $f(n) = \lambda(f'(n))$ und damit $\Phi_{f(n)}(x) > \Phi_k(x)$ für alle $x \in D_k$. Damit erfüllt das konstruierte Untermaß Ψ von Φ nicht den Erhaltungssatz (1).

Wir zeigen nun noch, daß es Zahlen $i_0, i_1 \in \mathrm{N}$ und rekursive Funktionen f' mit den Eigenschaften (a) bis (d) gibt. Dazu seien i_0 und i_1 zwei beliebige, voneinander verschiedene natürliche Zahlen, A eine unendliche rekursive Menge mit $A \neq \mathrm{N}$ und a und b solche Nummern, für die gilt: φ_b ist allgemein-rekursiv,

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in A, \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in A$ sei weiterhin $S_x =_{\mathrm{Df}} \{y\colon \sigma(y, \Phi_a(x)) = \Phi_a(x)\}$. Da σ eine $\mathfrak{K}$-Funktion ist, ist für jedes $x \in A$ die Menge S_x endlich und nach einem einheitlichen Algorithmus bestimmbar. Damit ist die folgende Funktion τ allgemein-rekursiv:

$$\tau(x) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \max S_x, & \text{falls } x \in A \text{ und } S_x \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei nun

$$q(i, x) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} 1 + \varphi_i(x), & \text{falls } \Phi_i(x) \leqq \tau(x), \\ \varphi_b(x), & \text{falls } \Phi_i(x) > \tau(x). \end{cases}$$

Wieder existiert nach dem Iterationssatz eine rekursive Funktion δ mit $\varphi_{\delta(i)}(x) = q(i, x)$ und nach dem Kleeneschen Fixpunktsatz ein $c \in \mathrm{N}$ mit $\varphi_{\delta(c)} = \varphi_c$. Für diese Funktion φ_c gilt

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} 1 + \varphi_c(x), & \text{falls } \Phi_c(x) \leqq \tau(x), \\ \varphi_b(x), & \text{falls } \Phi_c(x) > \tau(x). \end{cases}$$

Wie vorhin erhalten wir $\Phi_c(x) > \tau(x)$ für alle x und $\varphi_c = \varphi_b$. Wir definieren nun:

$$f'(n) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} c, & \text{falls } n = i_0 \\ a, & \text{falls } n = i_1 \\ n, & \text{falls } n \notin \{i_0, i_1\}. \end{cases}$$

f' erfüllt die Bedingungen (a) bis (d):

(a) ψ' mit $\psi'_n =_{\mathrm{Df}} \varphi_{f'(n)}$ ist eine Gödelisierung, denn es gilt $\varphi_n = \psi'_{g'(n)}$ mit

$$g'(n) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} n, & \text{falls } n \notin \{i_0, i_1\}, \\ d, & \text{falls } n = i_0, \\ e, & \text{falls } n = i_1, \end{cases}$$

wobei $\varphi_d = \varphi_{i_0}$, $\varphi_e = \varphi_{i_1}$ und $d, e \notin \{i_0, i_1\}$ seien (solche d und e existieren nach den Eigenschaften einer Gödelisierung φ), und die Funktion g' ist rekursiv.

(b), (c) gilt wegen der Voraussetzungen an a und b.

(d) $\Phi_{f'(i_1)}(x) = \Phi_{h(f'(i_0), f'(i_1))}(x)$ für fast alle $x \in D_{f'(i_1)} = A$ würde bedeuten:

$$\Phi_a(x) = \Phi_{h(c,a)}(x) = \sigma(\Phi_c(\varphi_a(x)), \Phi_a(x)) = \sigma(\Phi_c(x), \Phi_a(x)) \quad \text{f. ü.}$$

Andererseits ist aber für alle $x \in A$

$$\Phi_c(x) > \tau(x) = \max\{y \colon \sigma(y, \Phi_a(x)) = \Phi_a(x)\}$$

— falls überhaupt solche y existieren — im Widerspruch zu dieser Gleichung.

Damit ist der Satz bewiesen.

Da die Konstruktion des Untermaßes Ψ von Φ im Beweis dieses Satzes letztlich u. a. von beliebigen Zahlen $i_0, i_1 \in \mathsf{N}$ mit $i_0 \neq i_1$ ausgeht, existieren sogar stets unendlich viele Untermaße eines Erhaltungsmaßes, die den entsprechenden Erhaltungssatz nicht erfüllen.

Für ein Kompliziertheitsmaß Φ bezeichnet man die Mengen

$$C_t^{\Phi} =_{\mathrm{Df}} \{\varphi_i \colon \varphi_i \text{ rekursiv} \wedge \Phi_i \leqq t \text{ f. ü.}\}$$

für rekursive Funktionen t als die *Kompliziertheitsklassen* von Φ (vgl. [2]). Von vielen Autoren wird die rekursive Aufzählbarkeit aller Kompliziertheitsklassen eines Maßes als eine spezielle Natürlichkeitseigenschaft angesehen. Nach J. Hartmanis [2] besitzt jedes Kompliziertheitsmaß Untermaße mit nichtaufzählbaren Kompliziertheitsklassen. Außerdem kann jedes (also auch pathologische) Kompliziertheitsmaß als Untermaß geeigneter *Flußbildmaße* aufgefaßt werden, welche ihrerseits als besonders natürlich erscheinen (siehe [2, 4]). Demzufolge dürfte eine sinnvolle Natürlichkeitseigenschaft nicht gleichzeitig für ein Kompliziertheitsmaß und alle seine Untermaße zutreffen. Wie wir sahen, ist die Erfüllung eines Erhaltungssatzes eine derartige Eigenschaft.

Literatur

[1] Blum, M., A machine-independent theory of the complexity of recursive functions. JACM **14** (1967), 322–336.

[2] Hartmanis, J., On the problem of finding natural computational complexity measures. Proceedings of an International Symposium and Summer School on Mathematical Foundations of Computer Science, High Tatras, September 1973, p. 95–103.

[3] Lischke, G., Über die Erfüllung gewisser Erhaltungssätze durch Kompliziertheitsmaße. Diese Zeitschr. **21** (1975), 159–166.

[4] Lischke, G., Flußbildmaße — Ein Versuch zur Definition natürlicher Kompliziertheitsmaße. EIK **11** (1975), 423–436.

[5] Rogers, H., Jr., Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill, New York 1967.

[6] Wechsung, G., Zulässige Untermaße von Kompliziertheitsmaßen. Tagungsberichte des Symposiums „Algorithmische Kompliziertheit von Lern- und Erkennungsprozessen" in Jena (1973).

(Eingegangen am 23. Juli 1975)