



WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

INSTYTUT INFORMATYKI

ul. Joliot-Curie 15
50-383 Wrocław

tel. +48 71 375 78 00 | +48 71 325 12 71
fax +48 71 375 78 01

sekretariat.ii@uwr.edu.pl | www.ii.uni.wroc.pl

dr hab. Emanuel Kieroński
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 14 kwietnia 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Vincenta Michieliniego pt. *Uniformisation and choice questions for regular languages*

1 Wstęp

Niniejsza recenzja została sporządzona na zlecenie prof. dr. hab. Andrzeja Tarleckiego, Przewodniczącego Rady Naukowej Dyscyplin Matematyka i Informatyka na Uniwersytecie Warszawskim z dnia 2.02.2022 r., w związku z prowadzonym postępowaniem w sprawie nadania mgr. Vincentemu Michieliniemu stopnia doktora.

W swojej rozprawie mgr Vincent Michielini zajmuje się problemem uniformizacji relacji na słowach definiowanych w monadycznej logice drugiego rzędu lub jej fragmentach. Rozprawa oparta jest w dużej mierze na zawartości trzech wcześniej opublikowanych prac, które ukazały się na konferencjach DLT 18 (samodzielna praca doktoranta), MFCS 19 (praca wspólna z promotorem i promotorem pomocniczym) i MFCS 20 (praca wspólna z promotorem). Warto jednak zaznaczyć, że rozprawa nie jest po prostu kompilacją wspomnianych prac konferencyjnych, ale ich rozszerzoną wersją, w której prezentacja wyników jest znacząco zmieniona oraz pojawia się wiele nowych rezultatów i komentarzy. W efekcie całość jest bardzo rozbudowana i liczy blisko 200 stron.

2 Zawartość rozprawy

Aksjomat wyboru, mówiący, że dla dowolnej rodziny zbiorów istnieje funkcja wskazująca jeden element w każdym ze zbiorów tej rodziny, pozwala dowodzić istnienia pewnych matematycznych obiektów nie konstruując ich jawnie. Z aksjomatem wyboru ściśle wiąże się pojęcie *uniformizacji* relacji: funkcja częściowa $f : X \rightarrow Y$ *uniformizuje* relację $R \subseteq X \times Y$ gdy $f(x)$ jest zdefiniowane dokładnie dla tych x , dla których istnieje y taki, że $\langle x, y \rangle \in R$ oraz gdy wtedy $\langle x, f(x) \rangle \in R$. Nietrudno pokazać, że aksjomat wyboru jest

prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy każda relacja ma uniformizację. Aksjomat wyboru wydaje się być zupełnie intuicyjny, jednak jego niekonstruktywność prowadzi do wielu nieintuicyjnych wniosków.

W tym kontekście naturalne wydaje się pytanie kiedy funkcję wyboru dla rodziny zbiorów lub uniformizację relacji można podać konstrukcyjnie. W recenzowanej rozprawie bada się to zagadnienie w świecie języków słów skończonych i słów nieskończonych definiowanych w monadycznej logice drugiego rzędu (MSO). Na relacje pomiędzy słowami nad alfabetem A i słowami nad alfabetem B patrzy się jak na języki słów nad alfabetem produktowym $A \times B$. Ich potencjalne uniformizacje to wtedy również relacje nad takim alfabetem. Relacje definiowalne w MSO nazywamy *regularnymi*. Punktem startowym badań są znane twierdzenia mówiące, że każda relacja regularna na słowach skończonych lub na ω -słowach (słowach nad porządkiem izomorficznym z $(\mathbb{N}, <)$) ma *regularną* uniformizację. Inaczej mówiąc, dla każdej formuły MSO definiującej relację R istnieje formuła MSO definiująca pewną jej uniformizację. Będziemy mówić, że MSO *potrafi zuniformizować każdą swoją relację*.

Oprócz wstępu, preliminariów i rozdziału podsumowującego rozprawa składa się z czterech głównych części. W pierwszej z nich (Chapter 2) autor bada, czy pewne naturalne warianty logiki pierwszego rzędu (FO) na słowach skończonych potrafią zuniformizować swoje relacje. Ta część oparta jest w większości na publikacji

- Vincent Michielini: *Uniformization Problem for Variants of First Order Logic over Finite Words*. DLT 2018.

Rozważane są tutaj sygnatury Σ będące podzbiorami $\{<, s\}$, gdzie $<$ jest relacją porządku na pozycjach słowa, a s relacją następnika, oraz logiki $\text{FO}[\Sigma]$ i $\text{FO}^k[\Sigma]$ nad takimi sygnaturami (FO^k to wariant logiki pierwszego rzędu, w którym używa się tylko zmiennych x_1, \dots, x_k). Wyniki są negatywne: żadna z logik $\text{FO}[\Sigma]$ i $\text{FO}^k[\Sigma]$ nie potrafi zuniformizować swoich relacji. Autor pokazuje tak naprawdę nieco mocniejsze fakty, mianowicie, że pewne z rozważanych logik nie potrafią zuniformizować relacji definiowanych w pewnych logikach słabszych od siebie.

W tej części pracy pojawia się także jeden wynik pozytywny (jak dotąd nie opublikowany), mianowicie, że logika $\text{FO}[<]$ potrafi zuniformizować relacje definiowalne w słabszej logice $\text{FO}[\perp]$, w której nie można odwoływać się do relacji porządku. Pojawia się także następująca ciekawa obserwacja (również nieopublikowana) nieco innego rodzaju: dla danej regularnej relacji R na słowach skończonych rozstrzygalne jest, czy ma ona uniformizację w logice $\text{FO}[\perp]$.

Druga część rozprawy (Chapter 3) jest oparta na publikacji:

- Nathan Lhote, Vincent Michielini, Michał Skrzypczak: *Uniformisation Gives the Full Strength of Regular Languages*. MFCS 2019.

W pewnym sensie uogólnione są w niej wyniki z części pierwszej. Okazuje się bowiem, że jeśli ograniczymy się do fragmentów MSO spełniających pewne naturalne warunki zamkniętości, to na słowach skończonych żaden fragment MSO, nie będący całą MSO,

nie potrafi uniformizować swoich relacji. Fragmenty „spełniające naturalne warunki zamkniętości” to tutaj te, które odpowiadają różnościom pólgrup skończonych.

Kolejna część rozprawy (Chapter 4) bazuje na publikacji:

- Vincent Michielini, Michał Skrzypczak: *Regular Choice Functions and Uniformisations for Countable Domains*. MFCS 2020.

Rozważa się tu nieskończone, ale *finitarne* porządki liniowe, tj. porządki przeliczalne, które można uzyskać z singletonów za pomocą skończonej liczby operacji konkatenacji i pewnych wariantów operacji „potęgowania”. Główny wynik tej części mówi, że finitarny porządek liniowy ma własność regularnej uniformizacji (czyli, że wszystkie regularne relacje nad tym porządkiem mają regularne uniformizacje) wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma on nietrywialnych automorfizmów. Podana jest także lista kilku innych równoważnych warunków.

W ostatniej z głównych części rozprawy (Chapter 5) autor sprawdza, które implikacje pomiędzy wspomnianymi przed chwilą równoważnymi warunkami dla porządków finitarnych zachowują się dla dowolnych (niekoniecznie finitarnych) porządków przeliczalnych, a które nie. Wyniki nie są tu jeszcze kompletne, ale sporo wiadomo. W szczególności własność regularnej uniformizacji wymaga braku nietrywialnych automorfizmów, ale nie mamy tym razem równoważności, tj. można skonstruować przykład porządku bez nietrywialnych automorfizmów, który nie ma własności regularnej uniformizacji.

3 Ocena rozprawy

Na początek zaznaczę, że nie jestem specjalistą w tematyce rozprawy i wiele używanych w niej pojęć i narzędzi jest dla mnie nowych. Mimo tego nie miałem dużych problemów ze zrozumieniem uzyskanych wyników. Duża w tym zasługa (i) bardzo dobrego wstępu (Introduction), w którym jasno przedstawione są motywacje, istniejący stan wiedzy i wyniki uzyskane w ramach rozprawy, (ii) wyczerpującego rozdziału *Preliminaries* (Chapter 1, 40 stron (!)), który precyzyjnie wprowadza pojęcia, znane twierdzenia, a także dowodzi pewnych wstępnych faktów oraz (iii) wstępów do poszczególnych głównych rozdziałów, które dobrze opisują, co się w nich będzie działo. Pracę dobrze się czyta, napisana jest starannie, precyzyjnym matematycznym językiem; oprócz kilku drobiazgów nie widzę większych problemów redakcyjnych i językowych. Widać, że doktorant posiada bardzo dobry matematyczny warsztat pisarski.

Szeroko pojęta tematyka rozprawy jest dość żywa w środowisku informatyki teoretycznej, o czym świadczy znacząca liczba dotyczących jej prac publikowanych w ostatnich kilkunastu latach w dobrych miejscach. Konkretnie pytania stawiane w rozprawie są bardzo ciekawe. Składają się one na spójny i ambitny program badawczy, którego realizacja wymaga od doktoranta bardzo dobrego przygotowania teoretycznego, dużej wiedzy i sprawności technicznej. Choć dowody twierdzeń, przeprowadzane głównie metodami algebraicznymi, nie są zazwyczaj bardzo skomplikowane, to wymagają sporej pomysłowości i dobrego warsztatu. Na większość postawionych pytań udaje się znaleźć odpowiedzi i z

tych odpowiedzi wyłania się szeroki obraz. Mimo, że ten obraz jest dość kompletny, w każdym z rozdziałów autor umieszcza sekcję podsumowującą, w której m.in. nakreśla dalsze potencjalne kierunki badań oraz stawia pewne nowe hipotezy. Bardzo podobają mi się te dyskusje. Uzyskane rezultaty są z pewnością znaczące, o czym świadczy m.in. przyjęcie wyników rozprawy na dobre konferencje DLT i MFCS (2x), co oznacza uznanie środowiska naukowego. Mi osobiście podobają się szczególnie wyniki z Rozdziału 2 (dotyczące fragmentów FO), ze względu na swoją naturalność i prostotę oraz Rozdziału 3 (o unikalności MSO jako eleganckiego formalizmu potrafiącego uniformizować swoje relacje) ze względu na swój fundamentalny charakter. Wyniki z Rozdziałów 4 i 5 (dotyczące porządków nieskończonych) są nieco bardziej specjalistyczne, ale są one również bardzo eleganckie, a jeśli chodzi o trudność, to może nawet trudniejsze do pokazania od tych wcześniejszych; z pewnością są wartościowe.

4 Konkluzja

Podsumowując, uważam, że przedstawiona przez mgr. Vincenta Michieliniego rozprawa *Uniformisation and choice questions for regular languages* prezentuje solidny poziom naukowy i bez problemów spełnia zwyczajowe i formalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgra Vincenta Michieliniego do dalszych etapów postępowania.

Emanuel Kieroński

Emanuel Kieroński