Acta Informatica 13, 287 – 298 (1980)

Acta Informatica

Automaten in planaren Graphen

H.A. Rollik

Abteilung für Informatik, Universität Dortmund, D-4600 Dortmund, Germany (Fed. Rep.)

Automata in Planar Graphs

Summary. For any finite set of automata there is a planar graph which the automata together cannot search.

1. Einleitung

Wir untersuchen in dieser Arbeit das Verhalten von endlichen Automaten in planaren Graphen. Eine endliche Menge von endlichen Automaten durchsucht einen Graphen, wenn jeder Punkt von einem Automaten der Menge mindestens einmal betreten wird. H. Müller konnte in [4] zeigen, daß man zu jedem endlichen Automaten einen planaren Graphen angeben kann, den der Automat nicht durchsuchen kann. L. Budach hat in [3] bewiesen, daß man zu jedem endlichen Automaten einen endlichen Teilgraphen des 2-dimensionalen Gitternetzes konstruieren kann, den der Automat von einem vorgegebenen Ausgangspunkt nicht bewältigen kann. M. Blum und D. Kozen haben in [1] einen Automaten mit 2 Marken angegeben, der jeden endlichen Teilgraphen des 2-dimensionalen Gitternetzes durchsuchen kann. Diese Arbeit zeigt, daß ein ähnliches Resultat für das hier untersuchte Labyrinthmodell nicht gilt. Das hier verwendete Labyrinthmodell unterscheidet sich von dem in [1] betrachteten dadurch, daß die Bewegung der endlichen Automaten unabhängig ist von der Einbettung der planaren Graphen in die Ebene. Der angegebene Beweis läßt sich nicht auf das Labyrinthmodell aus [1] übertragen.

2. Definitionen

$\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$. Für endliche Mengen A bezeichne $/A/$ die Anzahl der Elemente von A. Ein *abzählbarer Graph* G ist eine höchstens abzählbare Menge $V(G)$ von Punkten zusammen mit

0001-5903/80/0013/0287/$02.40

einer Menge $E(G)$ von ungeordneten Paaren verschiedener Punkte aus $V(G)$. Die Elemente aus $E(G)$ heißen Kanten. Ein Punkt P *inzidiert* mit einer *Kante* k, wenn P in k enthalten ist. Jeder Punkt inzidiert nur mit endlich vielen Kanten. *2 Kanten inzidieren*, wenn sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Eine *1-Kantenfärbung* von G ist eine Abbildung f von $E(G)$ nach $\{1, 2, \ldots, 1\}$, so daß für inzidierende Kanten k und k' mit $/k \cap k'/ = 1$ die Bilder $f(k)$ und $f(k')$ verschieden sind. Der *Grad* eines Punktes P sei die Anzahl der Kanten, mit denen er inzidiert. Der *Grad eines abzählbaren Graphen* sei definiert als das Supremum über die Grade der Punkte. Für jeden 1-gefärbten Graphen G definieren wir *die Valenz eines Punktes P* durch $\mathrm{val}(P) = \{j \in \{1, 2, \ldots, 1\}$/es existiert eine Kante $\{P, Q\}$ $E(G)$, die j-gefärbt ist.$\}$

2 1-kantengefärbte Graphen G und H heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $g: V(G) \to V(H)$ gibt mit $\{P, Q\} \in E(G)$ genau dann, wenn $\{g(P), g(Q)\} \in E(H)$ und beide Kanten dieselbe Farbe haben. Eine endliche oder unendliche Folge von Punkten aus G heißt *Pfad*, wenn je zwei aufeinanderfolgende Punkte durch eine Kante verbunden sind. Sei $q = P_0, P_1, \ldots, P_t$ ein endlicher Pfad in G. q heißt geschlossen wenn $P_0 = P_t$ gilt. t heißt die Länge von q und wird mit $1(q)$ bezeichnet. $1(q)$ is gleich der Anzahl der Kanten, die zu q gehören, wobei mehrfach auftretende Kanten mehrfach gezählt werden. Für unendliche Pfade ist $1(q)$ nicht definiert. Die Länge des kürzesten Pfades zwischen zwei Punkten P und Q in einem Graphen G bezeichnen wir als den Abstand von P und Q in G.

Sei G ein planarer Graph, der so in die Ebene eingebettet ist, daß sich zwei Kanten nur in Punkten schneiden, mit denen sie gemeinsam inzidieren und $q = \{P_i\}_{i \geqq 0}^{t \geqq 2}$ sei ein geschlossener Pfad in G mit den Eigenschaften:

1) $\{P_i, P_{i+1}\} \neq \{P_j, P_{j+1}\}$ für $i \neq j$ und
2) $P_i \neq P_j$ für $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ und $i \neq j$

q heißt *Kreis*. Durch jeden Kreis wird die Ebene in zwei zudammenhängende Komponenten eingeteilt. q wird mit zum Äußeren gerechnet. Für eine feste Einbettung von G sei I die Menge aller Punkte, die im Innern eines Kreises q liegen. Ein Punkt von G aus dem Komplement von I heißt *Randpunkt*.

Wir betrachten endliche Automaten, die sich in kantengefärbten Graphen bewegen. Diese Automaten haben eine endliche Menge von Zuständen zusammen mit einer partiellen Übergangsfunktion δ. In jedem Punkt P eines kantengefärbten Graphen stellt ein solcher Automat fest, wie die Kanten gefärbt sind, die mit P inzidieren und in welchem Zustand die anderen Automaten sind, die sich auch in P befinden. Diese Informationen bilden die Eingabe für den Automaten. In Abhängigkeit von seinem Zustand und der Eingabe gibt δ an, in welchen Zustand der Automat übergeht und bestimmt die Kante, über die der Automat den Punkt verläßt. Alle diese Aktionen bilden einen Schritt des Automaten. Formal werden *k endliche Automaten* mit n Zuständen, die sich zusammen in einem Graphen bewegen, spezifiziert durch ein $(k+2)$-Tupel $(S, X, \delta_1, \ldots, \delta_k)$. Hierbei bezeichnet S die Zustandsmenge der Automaten und X das Ausgabealphabet. X enthält die Zeichen $1, 2, 3$ und '$+$'. $P(X)$ bezeichnet die Potenzmenge von X. Sei S_1 gleich $S \cup \{+\}$. Die Funktionen $\delta_i: S_1^k \times P(X) \to S \times X$ sind partielle Funktionen und heißen *Übergangsfunktionen*. δ_i bezeichnet die Übergangsfunktion des i-ten Automaten. $\delta_i(s_1, \ldots, s_k, X')$ ist nur für $s_i \neq \perp$ und nichtleere Mengen X', die das Zeichen ‚+' nicht enthalten, definiert.

$\delta_i(s_1, \ldots, s_k, X') = (s_i', r)$ bedeutet: Wenn der i-te Automat im Zustand s_i einen Punkt P mit $\mathrm{val}(P) = X'$ betritt und in $P g$ Automaten, $g \leqq k-1$, trifft, die sich in den Zuständen $s_{i_1}, \ldots, s_{i_g}$ befinden, wobei $s_{i_j} = \perp$ bedeutet, daß der Automat A_{i_j} nicht in P ist, so geht der i-te Automat in den Zustand s_i' über und verläßt P über die mit r gefärbte Kante. Im Fall $r = +$ bleibt der i-te Automat in P.

3. Konstruktion von Fallen für einzelne Automaten

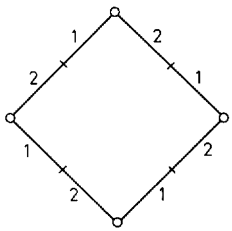

Fig. 1

H sei der Graph aus Fig. 1. Die Zahlen geben die Färbung der Kanten an. Sei T' ein abzählbar unendlicher Baum, in dem jeder Punkt Grad 4 hat. Wir konstruieren einen neuen Graphen T, indem wir alle Punkte in T' durch einen Kreis H ersetzen wie in Fig. 2 angegeben.

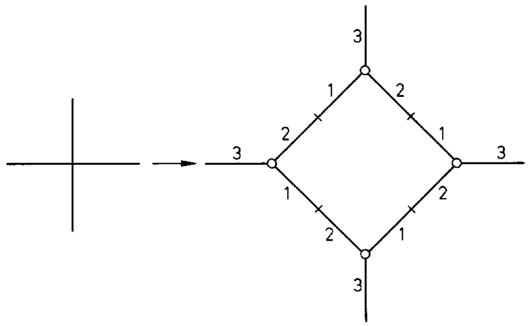

Fig. 2

Wir beschreiben zwei Methoden aus 2 3-kantengefärbten Graphen neue 3-kantengefärbte Graphen zu gewinnen. G und G' seien 2 3-kantengefärbte Graphen und G' habe zwei ausgezeichnete Punkte P und Q mit $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(Q) = \{1, 2\}$. Wir sagen $G'' = (G', P, Q, G)$ entsteht durch Einsetzung von G' in G über P und Q, wenn G'' aus G hervorgeht, indem jede Kante $e = \{R, S\}$ in G mit Farbe 3 durch G' wie im Beispiel in Fig. 3 ersetzt wird. Für jede Kante $e = \{R, S\}$ aus $E(G)$ mit Farbe 3 führen wir einen zu G' isomorphen Graphen G_e mit zu $V(G')$ disjunkter Punktmenge ein. g_e sei ein Isomorphismus von G' auf G_e. Mit P_e und Q_e bezeichnen wir die Bilder der ausgezeichneten Punkte P und Q unter dem Isomorphismus g_e. G'' wird dann folgendermaßen definiert:

E_3 sei die Menge aller Kanten aus $E(G)$ mit Farbe 3.

$$V(G'') = V(G) \cup \bigcup_{e \in E_3} V(G_e),$$

$$E(G'') = (E(G) - E_3) \cup \bigcup_{e \in E_3} E(G_e) \cup \bigcup_{\substack{e \in E_3 \\ e = \{R, S\}}} \{\{R, P_e\}, \{Q_e, S\}\}.$$

Bemerkung. Es ist im folgenden unwichtig, welcher der Punkte P_e und Q_e jeweils mit den Punkten R oder S der Kante e verbunden wird. Fig. 3 zeigt ein Beispiel für die erste Methode.

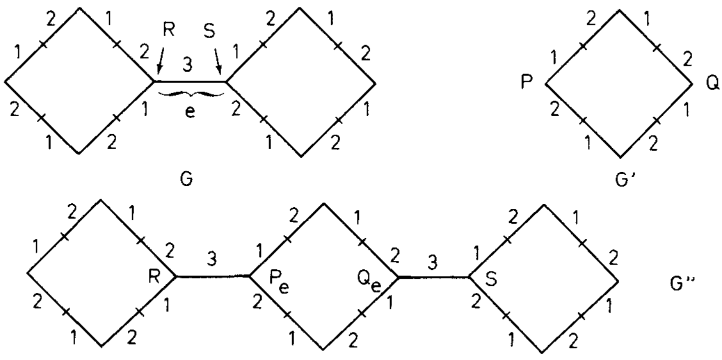

Fig. 3

Sei G ein 3-kantengefärbter Graph mit ausgezeichneten Punkten P und Q mit $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(Q) = \{1, 2\}$. G_1 sei ein zu G isomorpher Graph mit zu $V(G)$ disjunkter Punktmenge. P_1 und Q_1 seien die Bilder von P und Q unter einem Isomorphismus von G auf G_1. Die zweite Methode besteht darin einen Graphen G_{pp_1} zu konstruieren, indem man die Punkte P und P_1 (oder Q und Q_1) durch eine Kante mit Farbe 3 verbindet. Der Graph G_{PP_1} sei folgendermaßen definiert:

$$V(G_{PP_1}) = V(G) \cup V(G_1)$$

$$E(G_{PP_1}) = E(G) \cup E(G_1) \cup \{\{P, P_1\}\}.$$

Figur 4 zeigt ein Beispiel für die zweite Methode.

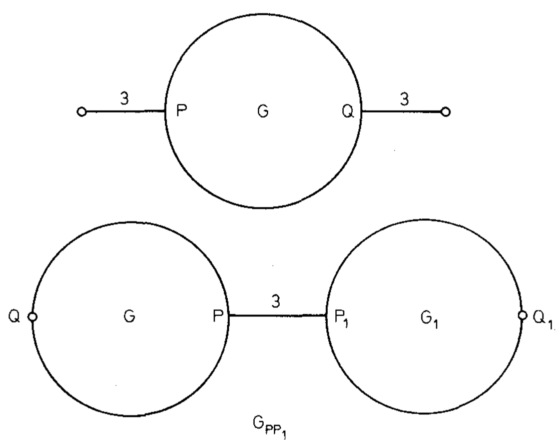

Fig. 4

Zu allen endlichen 3-kantengefärbten planaren Graphen G, die mindestens zwei Punkte mit Valenz $\{1,2\}$ haben, bilden wir die Graphen G_{PP_1} für alle Punkte P mit Valenz $\{1,2\}$. Die Graphen G_{PP_1} setzen wir nach der ersten Methode über Q und Q_1 in den Graphen T ein. Die Menge aller Graphen, die wir so erhalten, nennen wir $\mathfrak{T}$. Der Graph T soll auch zu $\mathfrak{T}$ gehören. Sei P ein Punkt aus irgendeinem der Graphen $G \in \mathfrak{T}$. Hat P Grad 3 und gehört nicht zu den eingesetzten Graphen, so nennen wir P einen *H-Punkt*. H-Punkte desselben Kreises H' sind in H' nur durch Pfade verbunden, die aus 1- und 2-gefärbten Kanten bestehen. Alle Pfade in Graphen aus $\mathfrak{T}$ lassen sich durch Farbfolgen beschreiben, indem den Kanten des jeweiligen Pfades ihre Farbe zugeordnet wird. Ist der Anfangspunkt eines Pfades gegeben, so ist der Pfad durch die zugeordnete Farbfolge eindeutig bestimmt.

Definition. $\{1,2,3\}^+$ bezeichne die Menge aller Folgen aus den Zeichen $1,2,3$. Sei $F = f_1 f_2 \dots f_s \in \{1,2,3\}^+$. Die Folge $FFF\dots$ bezeichnen wir mit F^*. $\bar{F}$ ist durch $f_s \dots f_2 f_1$ definiert.

Definition. Sei $q = \{P_t\}_{t \geqq 0}$ ein Pfad in einem Graphen aus $\mathfrak{T}$ und $q_f = \{f_i\}_{i \geqq 1}$, f_i sei die Farbe der Kante $\{P_{i-1}, P_i\}$, die zugehörige Farbfolge. q_f heißt *periodisch*, wenn es ein t_1 gibt mit $f_t = f_{t+t_1}$ für alle $t \geqq 1$, d.h. $q_f = FFF\dots$ mit $F = f_1 \dots f_{t_1}$.

Der Pfad q heißt *punktendlich*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß es für jeden Punkt des Pfades q höchstens k Zahlen $t_1, \dots, t_k$ gibt mit $P = P_{t_i}$ für alle $i = 1 \dots k$.

Definition. Sei P ein Punkt eines punktendlichen Pfades $q = \{P_t\}_{t \geqq 0}$ und $t_1, \dots, t_k$ seien die k Zahlen mit $P = P_{t_1}, \dots, P = P_{t_k}$. P heißt ein *D-Punkt* des Pfades q, wenn gilt:

i) $\{P_{t_1 - 1}, P_{t_1}\}$ hat Farbe ungleich 3 und

ii) $\{P_{t_k}, P_{t_k + 1}\}$ hat Farbe 3.

Lemma 1. Sei $q = \{P_t\}_{t \geq 0}$ ein periodischer punktendlicher Pfad in einem Graphen aus $\mathfrak{T}$. $q_f = F^* = FFF\dots$ sei die zu q gehörende Farbfolge. Dann gilt:

Der Pfad $\bar{q}$, der zu $\bar{F}^*$ gehört und auch in P_0 beginnt, hat unendlich viele Punkte, aber q und $\bar{q}$ haben nur endlich viele Punkte gemeinsam.

Beweis. q ist punktendlich, daher hat der Pfad unendlich viele Punkte, insbesondere unendlich viele H-Punkte. Unter diesen befinden sich wiederum unendlich viele D-Punkte. Sei P_{t_1} der erste D-Punkt auf dem Pfad q. Es genügt, die Behauptung für den Pfad $q' = \{P_{t_1 + t}\}_{t \geqq 0}$ zu zeigen. Sei $q'_f = F'F'\dots$ die zu q' gehörende Farbfolge. F' sei so gewählt, daß der in P_{t_1} beginnende zu F' gehörende endliche Pfad in einem D-Punkt von q' endet.

$F' = G_1 H_1 \dots G_s H_s$, $G_i, H_i \in \{1,2,3\}^+$, sei eine Dekomposition von F', so daß die zu den G_i gehörenden Pfade zwischen zwei H-Punkten verlaufen, die durch genau einen Graphen G_{pp_1} getrennt sind. Die zu den H_i gehörenden Pfade verlaufen bis auf Exkursionen in die 4 benachbarten Graphen G_{PP_1} im gleichen Kreis H'. Es folgt, daß $\bar{F}' = \bar{H}_s \bar{G}_s \dots \bar{H}_1 \bar{G}_1$ eine ebensolche Dekomposition ist.

F'' entsteht wie folgt aus F':

i) Alle G_i werden durch 3 ersetzt und

ii) aus allen H_i werden Exkursionen in Graphen G_{PP_1} gestrichen. Ebenso entstehe $\bar{F}''$ aus $\bar{F}'$.

F'' und $\bar{F}''$ definieren in naheliegenderweise Pfade in T. F^0 entstehe aus F'', indem solange wie möglich Farbfolgen, die zu Pfaden gehören, die zum gleichen Punkt zurückführen, gestrichen werden. Ebenso entstehe $\bar{F}^0$ aus $\bar{F}''$.

$(F^0)^*$ berührt unendlich viele Punkte; berührt $(\bar{F}^0)^*$ unendlich viele Punkte so auch $(\bar{F}')^*$; haben $(F^0)^*$ und $(\bar{F}^0)^*$ nur endlich viele Punkte gemeinsam, so auch $(F')^*$ und $(\bar{F}')^*$.

Nach Konstruktion von F^0 und $\bar{F}^0$ berührt keiner der zugehörigen Pfade einen Punkt zwischen Startpunkt und Endpunkt zweimal. Wäre der Startpunkt gleich dem Endpunkt, so würde $(F')^*$ nur endlich viele Punkte berühren. Weil F' in D-Punkten beginnt und endet, beginnt F^0 mit Farbe 3 und $\bar{F}^0$ mit Farbe $\neq 3$. Es folgt, daß $(F^0)^*$ und $(\bar{F}^0)^*$ nur P_{t_1} gemeinsam haben. Würde $(\bar{F}^0)^*$ nur endlich viele Punkte berühren, so auch $(F^0)^*$ und damit $(F')^*$.

Definition. Sei B eine endliche Menge von Automaten. Eine *B-Falle* ist ein 4-Tupel (G, P_0, P, Q), wobei gilt:

(3.1) G ist ein planarer 3-kantengefärbter Graph.

(3.2) P_0, P und Q sind paarweise verschiedene Randpunkte von G mit Valenz $\{1, 2\}$. Kein Automat findet von P_0 nach P oder Q.

(3.3) Sämtliche Kanten mit Farbe $\neq 3$ liegen auf Kopien des Kreises H. Kopien des Kreises H sind mit Kanten der Farbe 3 verbunden.

Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Menge aller Automaten mit n Zuständen, wobei wir Automaten, die durch Umbenennung von Zuständen auseinander hervorgehen identifizieren.

Lemma 2. Für jede Menge $V \subseteq A(n)$ gibt es B-Fallen.

Beweis durch Induktion über $/B/$.

Der Kreis H ist eine $\emptyset$-Falle. $/B/ \geqq 1$. Sei $A \in B$ und (G, P_0, P, Q) eine $(B - \{A\})$-Falle. T_1 entstehe durch Einsetzen von $G_{P_0 P_{01}}$ in T. Figur 5 zeigt einen Ausschnitt aus T_1.

Fall 1. Auf dem Weg von A in T_1 liegen nur endlich viele Punkte, wenn A in P_0 startet. M sei eine Zahl, die größer ist als die Anzahl der Punkte in $G_{p_0 p_{01}}$.

U sei die Menge aller Punkte aus T_1, die zu mindestens einem Punkt auf dem Weg von A einen Abstand kleiner gleich M haben. Wir definieren einen Graphen L, dessen Punktmenge die Menge U ist und in dem zwei Punkte genau dann durch eine f-gefärbte Kante verbunden sind, wenn sie auch in T_1 durch eine f-gefärbte Kante verbunden sind. Durch die Wahl von M haben wir erreicht, daß der Graph $G_{p_0 p_{01}}$ in L enthalten ist. Wenn der Automat A in P_0 startet, erreicht er keine Punkte, die er vorher nicht betreten hat. Es ist klar, daß es Randpunkte S und S' gibt, die A nicht findet und daß L eine B-Falle ist.

Fall 2. Auf dem Weg von A liegen unendlich viele Punkte. $A \in A(n)$ kann jeden Punkt höchstens n-mal betreten. Unter den unendlich vielen Punkten, die A besucht, sind unendlich viele H-Punkte. Unter diesen gibt es unendlich viele, die

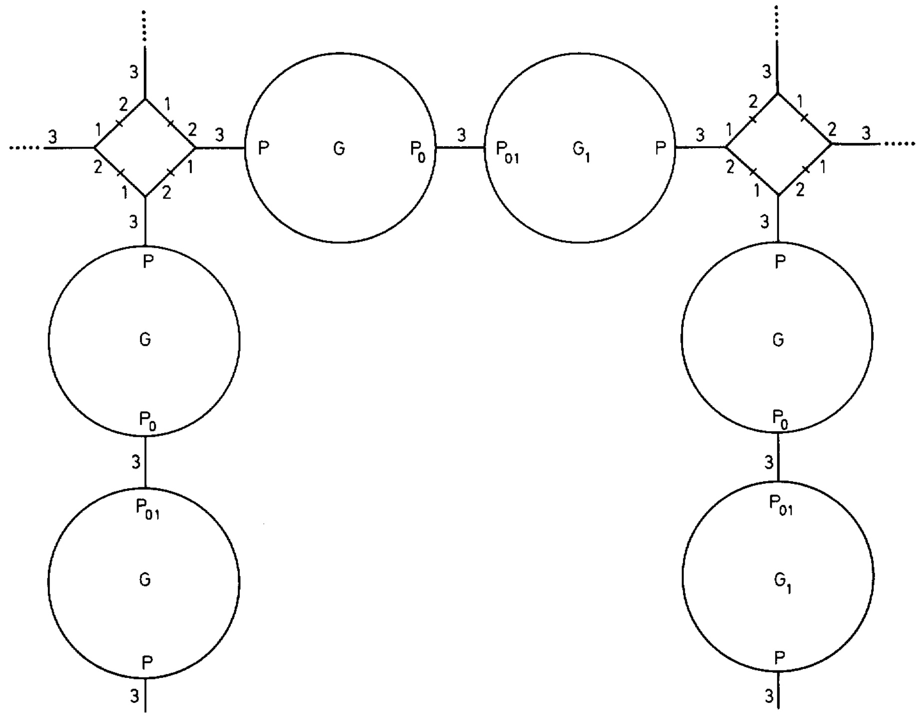

Fig. 5

der Automat zuerst über eine Kante mit Farbe $\neq 3$ erreicht und zuletzt über eine Kante mit Farbe 3 verläßt. Dies sind D-Punkte des Weges von A. Aus den Symmetrien der Graphen aus $\mathfrak{T}$ folgt: spätestens beim Erreichen des $(n+1)$-ten D-Punktes wiederholt sich ein Zustand, der früher beim Erreichen eines D-Punktes angenommen wurde. Sei P_t der Punkt, den A nach t Schritten erreicht. P_{t_0} bezeichne den ersten der beiden D-Punkte, in denen sich ein Zustand wiederholt, $P_{t_0+t_1}$ den zweiten, F die Farbfolge des Pfades zwischen P_{t_0} und $P_{t_0+t_1}$. Q_{t_1} sei der Punkt, der von P_{t_0} aus über die Farbfolge $\bar{F}$ erreicht wird. Wegen Lemma 1 können wir annehmen, daß Q_{t_1} von allen Punkten verschieden ist, die man von P_{t_0} über die Farbfolge F erreicht. Q_{t_1-1} sei der Punkt, den man von Q_{t_1} über die Kante mit Farbe 3 betritt. Diese existiert, denn die Farbfolge F endet mit 3. T_1' bezeichne den Graphen, den man erhält, wenn man aus T_1 die von $P_{t_0+t_1}$ und Q_{t_1-1} ausgehenden Kanten mit Farbe 3 entfernt und $P_{t_0+t_1}$ und Q_{t_1-1} mit einer Kante der Farbe 3 verbindet. Der Graph T_1' ist planar und der Automat A bewegt sich nach t_0 Schritten nur noch auf dem Zyklus $P_{t_0}, \ldots, P_{t_0+t_1}, Q_{t_1-1}, \ldots, P_{t_0}$.

Figur 6 zeigt die Konstruktion an einem Beispiel ($t_0=6$, $t_1=5$).

Entfernen aller Punkte in einem genügend großen Abstand von diesem Zyklus liefert einen endlichen Graphen T_2 mit den gewünschten Eigenschaften. Wenn P_0 nicht mehr Randpunkt ist, so drehe man den Graphen $G_{P_0P_{01}}$, in dem

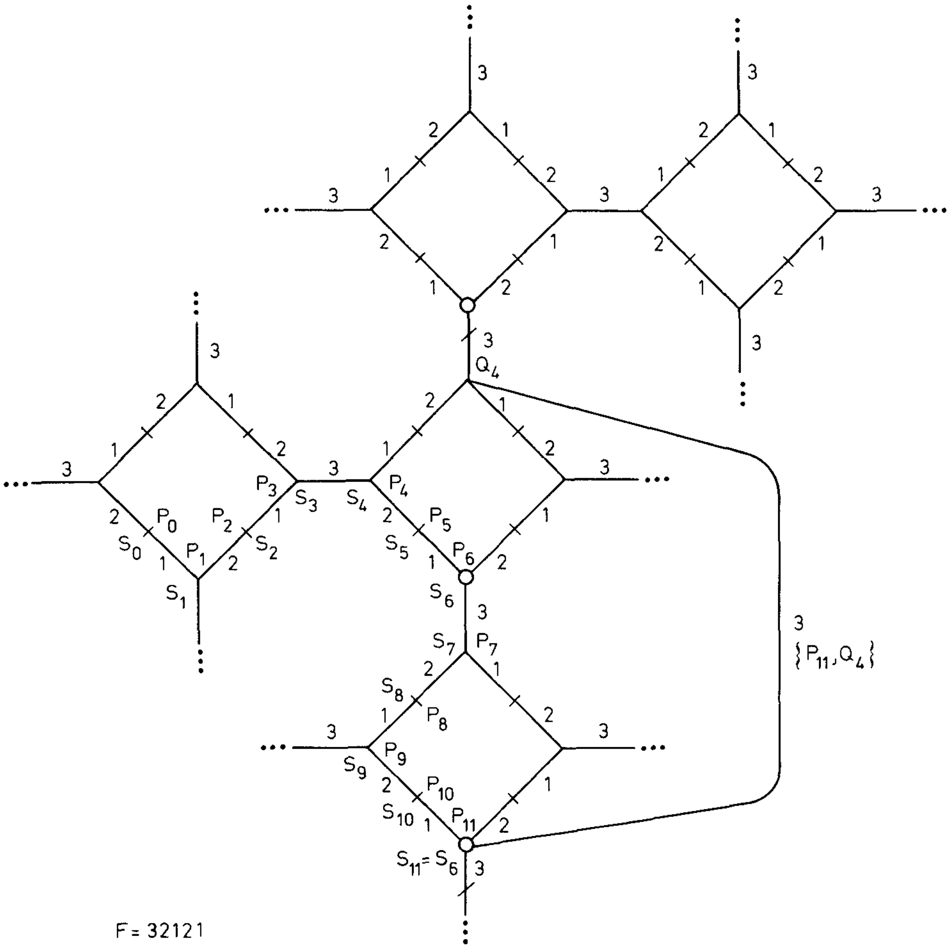

Fig. 6

der Automat startet, um die 3-gefärbte Kante, die die beiden Exemplare von (G, P_0, P, Q) verbindet, um 180°. Der Graph, den man so erhalten hat ist eine *B*-Falle.

Wir bemerken, daß in den oben konstruierten Fallen alle Kanten mit Farbe $\neq 3$ auf Kreisen H liegen.

4. Konstruktion von Fallen für Automaten, die sich gleichzeitig in einem Graphen bewegen

Definition. Ein (n,k)-*Labyrinth* ist ein Graph G, für den gilt:

(4.1) Es gibt einen planaren 3-kantengefärbten Graphen G' mit 2 ausgezeichneten Punkten P und Q, die Valenz $\{1,2\}$ haben, so daß $G = G'_{PP_1}$ oder $G = G'_{QQ_1}$.

(4.2) Ist J ein 3-kantengefärbter planarer Graph, der wie in Figur 7 mit G verbunden ist und starten $g \leqq k$ Automaten mit n Zuständen in Knoten aus J, so gibt es kein t mit der Eigenschaft, daß ein Automat im Schritt t von $P(P_1)$ aus dem Punkt $P_1(P)$ betritt.

(4.3) Jede Kante von G mit Farbe $\neq 3$ liegt auf einer Kopie des Kreises H. Kopien von H sind durch Kanten mit Farbe 3 verbunden.

Definition. Eine *1-Konfiguration* von *k Automaten* $A_1, \dots, A_k$ bezüglich eines Automaten A_1 in einem 3-kantengefärbten Graphen ist ein $2k$-Tupel $(s_1, \dots, s_k, \mathrm{val}(P), N_2, \dots, N_k)$, wobei gilt:

– s_i ist der Zustand des Automaten A_i.

– P ist der Punkt, in dem sich der Automat A_1 befindet.

– $N_i, i \geqq 2$, ist die Menge aller Farbfolgen, die zu Pfaden von Automat A_i nach P gehören, deren Länge kleiner oder gleich 1 ist. N_i ist leer falls alle Pfade von A_i nach P länger als 1 sind.

Definition. Die Menge der Standpunkte der Automaten $A_1, \dots, A_k$ zum Zeitpunkt t im Graphen G ist gleich der Menge derjenigen Punkte aus G, in denen sich zum Zeitpunkt t mindestens ein Automat A_i befindet.

Definition. Sei G ein Graph mit Knotenmenge V. $V' \subseteq V$, $M \subseteq V$. V' heißt *M-getrennt, wenn* V' zu M disjunkt ist und es eine Partition von V' in nichtleere Mengen V_1 und V_2 gibt, so daß jeder Pfad zwischen V_1 und V_2 durch Punkte der Menge M führt.

Eine Menge von Automaten in G heißt M-getrennt in G zum Zeitpunkt t, wenn die Menge der Standpunkte der Automaten zum Zeitpunkt t M-getrennt ist.

Unser Hauptergebnis ist der folgende,

Satz. Es gibt (n,k)-Labyrinthe für alle n und k.

Der Beweis wird durch Induktion über k geführt. Mit der gleichen Technik läßt sich ein ähnliches in [2] angekündigtes Ergebnis über Automaten in 3-dimensionalen Gitternetzen beweisen.

Wählt man $G' = H$, so kann man leicht ein $(n,0)$-Labyrinth bauen. Der Satz sei richtig für $1, \dots, k-1$ und alle n.

Sei L_1 ein $(n, k-1)$-Labyrinth. L_1 bestehe aus 2 Kopien eines Graphen L'_1. P_1 und P_2 seien die ausgezeichneten Punkte von L_1. L_2 bestehe aus einer Kette von k Kopien von L_1 wie in Fig. 8 angegeben.

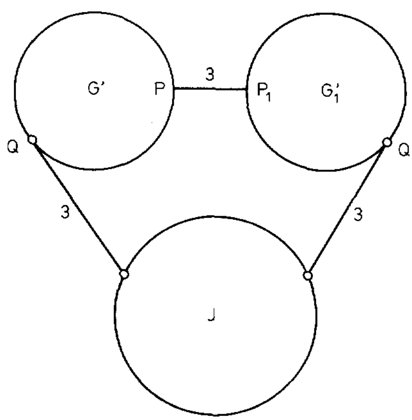

Fig. 7

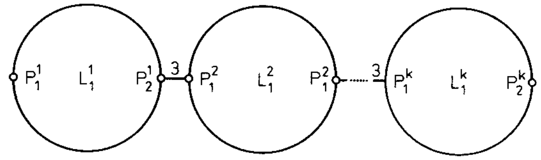

Fig. 8

$L_3=(G_3, P_3, P_4, P_5)$ sei eine $A(m)$-Falle, wobei m später bestimmt wird.
L_4 entstehe durch Einsetzen von L_2 in L_3.
L_5 bestehe aus 2 Kopien von L_4 wie in Fig. 9 angegeben.

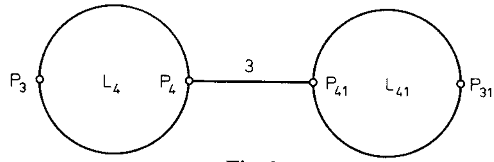

Fig. 9

Wir zeigen, daß L_5 für große m ein (n, k)-Labyrinth ist.

Sei G die Menge aller Graphen, die man durch Einsetzen von L_2 über P_1^1 und P_2^k in Graphen, die (3.3) bzw. (4.3) erfüllen, erhält. Sei $l(k)$ das Supremum über den Abstand (=Länge des kürzesten Pfades) zwischen Punkten in Mengen V' der Mächtigkeit k, die die Eigenschaft haben, daß es keine Kopie K von L_1 gibt, so daß V' $V(K)$-getrennt ist. Wegen (3.3) bzw. (4.3) ist $l(k)$ endlich. K_1 sei die Anzahl der Punkte in L_1. Der Abstand zwischen Punkten einer Kopie von L_1 ist kleiner als K_1. Sei $q=\{P_t\}_{t=0}^{l}$ ein Pfad, der die Punkte P_0 und P_1 aus V' verbindet. Wenn ein Punkt einer Kopie K von L_1 zu q gehört, so muß ein Punkt dieser Kopie zu V' gehören, andernfalls wäre V' wegen der Konstruktion der Graphen aus $\underline{G}$ $V(K)$-getrennt. Daraus folgt, daß $l(k)$ kleiner als $(k+1)K_1$ ist

Die Bedeutung der Abschätzung von $l(k)$ liegt darin, daß sie es ermöglicht aus der Tatsache, daß die Standpunkte von k Automaten in einem Zeitpunkt t nicht $V(K)$-getrennt sind für eine Kopie K von L_1, auf den Abstand der Standpunkte im Zeitpunkt t zu schließen. Sei m' die Anzahl von $l(k)$-Konfigurationen von Mengen von k Automaten in Graphen aus $\underline{G}$, für die es keine Kopie von L_1 gibt, so daß ihre Standpunkte $V(K)$-getrennt sind.

Wir nehmen an L_5 sei für alle $m \geqq m'+1$ kein (n, k)-Labyrinth. Dann gibt es einen Graphen J und eine Menge von k Automaten $A_1, \ldots, A_k$, so daß gilt: Wird L_5 wie in Fig. 7 mit J verbunden, so kann man k Automaten mit n Zuständen so in J starten, daß einer in irgendeinem Schritt t von $P_4(P_{41})$ nach $P_{41}(P_4)$ gelangt.

O.B.d.A. sei dies der Automat A_1. Dann muß sich A_1 in einer Kopie von L_4 von P_3 nach P_4 bewegen.

Lemma 3. Sind die Standpunkte der Automaten in irgendeinem Zeitpunkt t durch die Punkte einer Kopie K von L_1 $V(K)$-getrennt, so durchkreuzt nach t kein Automat mehr eine Kopie von L_1, in der zum Zeitpunkt t kein Automat war.

Beweis. Zum Zeitpunkt t gibt es eine Menge S von Kopien von L_1 und eine Partition der Menge der Automaten in B_1 und B_2, so daß jeder Weg von einem

Automaten in $B_1(B_2)$ zu einem Automaten in $B_2(B_1)$ durch einen Graphen aus S verläuft. Wir zeigen zuerst, daß Automaten aus B_1 nach t keine Automaten aus B_2 treffen und umgekehrt. Geschieht dies doch, so gibt es einen ersten Zeitpunkt t_1 nach t, wo ein Automat in einem Graphen L_1 aus S von einem der beiden Punkte, über die die beiden Kopien von L_1 durch eine Kante verbunden sind, in einem Schritt in den anderen Punkt überwechselt.

O.B.d.A. sei dieser Automat aus B_1. Bis zum Zeitpunkt t_1 kann die Existenz der Automaten aus B_2 für die Automaten aus B_1 ignoriert werden. Da L_1 aber ein $(n, k-1)$-Labyrinth ist und B_1 höchstens aus $k-1$ Automaten besteht, kann kein Automat aus B_1 ohne Hilfe von Automaten aus B_2 in einem Schritt von einem der Verbindungspunkte in den anderen gelangen.

Aus dem oben Gesagten folgt, daß nach t der Effekt von Automaten aus B_1 auf Automaten aus B_2 ignoriert werden kann. Daraus folgt - wieder weil L_1 ein $(n, k-1)$-Labyrinth ist - die Behauptung des Lemmas.

Sei t' nun der letzte Zeitpunkt, zu dem A_1 eine Kopie von P_3 in Fig. 8 trifft, bevor A_1 eine der Kopien von P_4 in Fig. 8 erreicht. Nach Lemma 3 ist zur Zeit t' die Menge der Automaten nicht $V(K)$-getrennt, wenn $V(K)$ die Punktmenge irgendeiner Kopie K von L_1 ist. Wir geben einen Automaten A mit Zustandsmenge Z und Übergangsfunktion δ an.

$Z' = \{C/C$ ist eine $l(k)$-Konfiguration von $A_1, \dots, A_k$ bezüglich A_1 in $L\}$ und $Z = Z' \cup \{0\}$.

Für $z \in Z'$ wird $\delta(z, K) = (z', r)$ nur für solche z erklärt, wo sich A_1 auf einem Knoten v von einem der Kreise H außerhalb von Kopien von L_2 befindet und $K = \mathrm{val}(v)$ gilt. In diesem Fall wird (z', r) wie folgt bestimmt:

Man starte $A_1, \dots, A_k$ in Konfiguration z in J. Sei t_2 der erste Zeitpunkt, zu dem A_1 einen von v verschiedenen Punkt v' auf einem Kreis H außerhalb einer Kopie von L_2 betritt und sei z' die $l(k)$-Konfiguration der Automaten zur Zeit t_2. Sind v und v' durch eine Kante mit Farbe $f \in \{1, 2\}$ verbunden, so sei $r = f$, andernfalls sind v und v' durch eine Kopie von L_2 getrennt und wir setzen $r = 3$.

Sei z_0 die $l(k)$-Konfiguration von $A_1, \dots, A_k$ zur Zeit t'. Aus Lemma 3 und der Annahme folgt, daß der Automat A, gestartet im Zustand z_0 im Punkt P_3 des Graphen aus Fig. 10, den Punkt P_4 erreicht, ohne vorher P_3 wieder zu betreten.

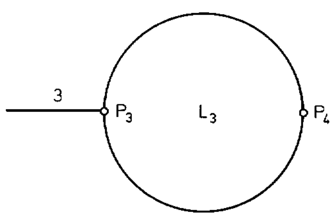

Fig. 10

Setzt man noch $\delta(0, \{1, 2\}) = \delta(z_0, \{1, 2, 3\})$, so findet A in L_3 von P_3 nach P_4. Aber L_3 ist eine $A(m)$-Falle für $m \geqq /Z/$. Widerspruch!

Korollar. Zu jeder Menge von k Automaten mit n Zuständen gibt es einen planaren 3-kantengefärbten Graphen L und einen Startpunkt P für die Automaten, so daß die Automaten, wenn sie in P starten, nicht alle Punkte in L besuchen.

Beweis. G sei ein (n, k)-Labyrinth, das aus zwei Kopien eines Graphen G' besteht. G' sei wie in Fig. 7 mit einem planaren 3-kantengefärbten Graphen verbunden. Ersetzt man die Kante zwischen den beiden Kopien von G' durch

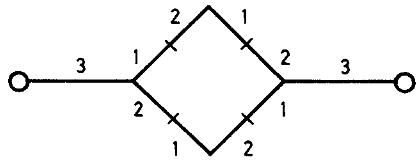

Fig. 11

so hat der Graph, den man damit erhält, die gewünschte Eigenschaft.

5. Literatur

1. Blum, M., Kozen, D.: On the power of the compass. 19th IEEE FOCS 1978
2. Blum, M., Sakoda, W.: On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space. Proc. 17th IEEE Conf., 147-161, 1977
3. Budach, L.: Automata and labyrinths. Unveröffentlichtes Manuskript, 1974
4. Müller, H.: Endliche Automaten und Labyrinthe. EIK 7, **4**, 261-274 (1971)

Eingegangen am 9. September 1978/4. Oktober 1979