Sur la division pragmatique
Author(s): H. Steinhaus
Source: *Econometrica*, Vol. 17, Supplement: Report of the Washington Meeting (Jul., 1949), pp. 315-319
Published by: The Econometric Society
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/1907319

CONTRIBUTED PAPERS: II

Wednesday, September 17, at 9:30 a.m.

CHAIRMAN:

Herman O. A. Wold

Director, Institute of Statistics, University of Uppsala (Sweden)

SUR LA DIVISION PRAGMATIQUE

par H. Steinhaus

Professeur a l'Université de Wroclaw (Pologne)

Le principe de division en deux moitiés, que l'on peut désigner par la règle "l'un divise, l'autre choisit," est bien connu; on prétend même qu'il existe dans la tradition juridique anglaise. Je me suis demandé si l'on peut étendre ce principe à n partenaires, pour $n > 2$. Ayant résolu ce problème pour $n = 3$, je crus d'abord qu'il n'y a pas de solution pour n dépassant 3 et je communiquai cette question à S. B a n a c h par l'intermédiaire de M. B. K n a s t e r; ces deux mathématiciens l'ont résolue pour un n quelconque.

La division pragmatique peut être considérée comme un jeu; or, dans la théorie d'un jeu il faut distinguer les règles et les méthodes. Le problème de la division en deux moitiés est un jeu dont la règle a été donnée par: "l'un divise, l'autre choisit." La méthode, qui montre que ce jeu peut servir à une division équitable est, pour le premier, de diviser en deux parties qu'il considère égales en valeur, pour le second, de choisir entre ces deux parties, celle-là qu'il considère comme la plus grande en valeur ou, du moins, comme égale à l'autre. Ainsi, chacun des deux partenaires devient indépendant de l'autre, parce qu'il est sûr d'obtenir au moins ce qu'il considère être la moitié de l'objet à diviser sans se soucier de l'autre: il n'a qu'à suivre la méthode qui vient d'être décrite.

La solution du problème pour n partenaires, donnée par Banach et Knaster, est la suivante: en désignant les partenaires par $A, B, C, \ldots, N$, on laisse A choisir ce qu'il considère comme la $1/n$-ième partie qui lui est due; il découpe donc de l'objet, que' l'on peut s'imaginer être un gâteau, une partie quelconque. B a maintenant le droit de diminuer cette partie, en découpant un morceau et en le restituant au gâteau; C peut, à son tour, diminuer encore la partie découpée par A et diminuée (ou non) par B; ainsi tous les partenaires peuvent, l'un après l'autre, exercer leur droit de diminution, sans y être contraints. La règle force le dernier qui a exercé ce droit, d'accepter le morceau restant, comme la partie qui lui revient. Ce partenaire sort du jeu, qui recommence de la même manière alors avec les n—1 partenaires restants. Il est facile à voir que la méthode qui consiste à diminuer toujours un morceau que l'on considère comme plus grand que le $1/n$-ième du total, en le réduisant au $1/n$-ième, a pour résultat que chacun reçoit un lot qui est au moins égal à la partie à laquelle il a droit, suivant sa propre estimation des valeurs; l'ignorance, la malice, ou l'avarice des autres partenaires ne peut empêcher cela, même s'ils forment un complot dans le seul but de le désavantager.

La méthode décrite ici peut servir pour une division d'objets tels que champs, jardins, en général tous les objets pour lesquels on peut considérer la valeur comme égale à la somme de la valeur des parties et tels qu'une partie quelconque de valeur v contient toujours, pour tout v' moindre que v, une partie de valeur v'. Elle peut servir aussi quand il s'agit de diviser un total entre plusieurs partenaires qui y participent en vertu de droits exprimés par des fractions inégales.

L'importance pratique de la méthode pragmatique consiste en ce que l'acte de la division dispense d'une appréciation objective de la valeur des différentes parties de l'objet considéré; ainsi une expertise imposée par le juge aux parties devient superflue. La méthode pragmatique permet à chaque partenaire de s'assurer une partie du total dont la valeur, appréciée par lui-même, est au moins égale à la fraction de la valeur du total (qui est aussi définie par lui seul), qui lui est due *a priori*, en vertu d'un testament ou d'un autre acte légal qui précède la division physique et qui sert comme point de départ au problème. Cette méthode est donc en accord parfait avec les théories proposées au XIX siècle par les Gossen, K. Menger, Stanley Jevons et Léon Walras, économistes éminents qui considèrent la valeur subjective comme une notion fondamentale pour la théorie des prix.

La division pragmatique ne garantit pas que le partenaire, qui est sûr d'acquérir au moins ce qui lui est dû, considère les parties acquises par les autres partenaires comme étant égales entre elles et égales à la sienne. Or on peut démontrer, en se servant d'une méthode exposée par MM. A. H. Stone et J. W. Tukey (*Duke Mathematical Journal*, Vol.. 9, 1942, pp. 356-359), basée sur un théorème de Borsuk, qu'il existe une division d'un objet T en n parties P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ correspondant a n nombres q_i $(0 \leqslant q_i \leqslant 1)$ telle que P_i ait une valeur égale à $q_i \times$ valeur de T et que ces n équations subsistent pour les estimations de tous les partenaires : $E_j\ (P_i) = q_i\, E_j\ (T)\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

E_j signifie la valeur attribuée à X par le j-ième partenaire. On peut doncr réaliser une division équitable du point de vue de tous intéressés, en respectant en même temps leurs estimations subjectives.

M. B ç c z k o w ș k i m'a demandé d'appliquer la division pragmatique au problème pratique suivant: il y a quatre secteurs qu'il faut distribuer entre quatre équipes; il y a une somme fixe (p.e. 20 millions) devant servir à l'ensemble du travail à accomplir. La solution est la suivante: chaque équipe nomme un montant quil lui semble suffisant pour exécuter les travaux du secteur I; on attribue le secteur à l'équipe qui a nommé le chiffre minimum; elle doit se charger du secteur I; le procédé recommence avec le secteur II et les trois équipes libres, après qu'on a attribué de la même manière le secteur III, il reste encore une équipe libre et un certain montant disponible; l'équipe est obligée de se charger du secteur IV pour ce montant. La méthode est donc, pour chaque équipe, de fixer des chiffres qui correspondent autant que possible aux frais relatifs des travaux à exécuter; en supposant que le total de 20 millions suffise pour la totalité du travail, cette méthode garantit à chaque équipe de n'être pas chargée d'un travail dont les frais, suivant sa propre appréciation, sont plus éléves que le montant qui lui sera adjugé.

M. Knaster a donné la méthode suivante pour la division d'héritages composés d'entités telles que maisons, objets d'art, etc., qui ne peuvent être divisés; cette méthode est d'une grande importance pour la pratique. La règle est la suivante: supposons qu'il y ait n héritiers participant à l'héritage, leurs droits respectifs étant représentés par les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$, avec $\Sigma p_i = 1$. Il y a plusieurs objets U, V, W, ..., qui constituent la masse à diviser. Chaque héritier donne son évaluation de chaque objet. On obtient ainsi un tableau dont les lignes correspondent aux objets et les colonnes aux héritiers. Sur chaque ligne on enregistre la côte maxima; l'objet sera adjugé à la personne qui a donné cette côte. Pour évaluer les droits de chaque héritier, on multiplie la somme de tous les nombres de cette colonne par le p_i correspondant. La différence entre ce produit et valeur des objets adjugés à l'héritier en question doit lui être payée en argent comptant. Or, ces différences seront positives pour certains héritiers, négatives pour les autres; leur somme sera positive ou zéro; le cas de nullité ne se présente qui si toutes les évaluations sont identiques pour tous les objets. Il y aura donc, en général une somme positive qui constitue un bonus; on repartit ce bonus entre les héritiers proportionnellement aux nombres p_i, en réalisant ainsi ce que les économistes appellent "consumers' surplus." L'arbitre, qui n'a que la tâche formelle d'enregistrer les côtes et de faire les calculs pour déterminer les payements à verser par certains héritiers aux autres, pourra donc garantir à chaque héritier qu'il obtiendra la partie à laquelle il a droit, soit en objets, soit en argent comptant, la valeur de la masse étant celle de sa propre évaluation, et la valeur des objets qui lui seront adjugés étant aussi appreciée d'après sa propre évaluation; l'arbitre pourra même lui promettre un bonus. La même méthode peut être appliquée au cas où les nombres p_i dépendent des objets. Il n'est pas nécessaire d'adjuger les objets aux personnes dont l'estimation est la plus élevée; il suffit de les distribuer de manière que le "surplus" résultant soit positif; entre toutes les distributions obéissant à cette condition, on choisit celle-là qui rend minimum la somme de paiements mutuels en valeur absolue.

Quand on applique ce procédé pour la répartition entre n personnes, dont chacune participe en $1/n$-ième part, dans le cas qu'il y ait quelques objets identiques, p.e. des coupons du même tissu ne différant ni par la grandeur ni par le dessin, on peut attribuer ces objets à des personnes différentes, en choisissant sur chaque ligne du tableau k côtes maxima, k étant le nombre de pièces identiques. Cette remarque est à M. Bęczkowski. Elle n'est pas applicable quand les droits des partenaires sont inégaux.

Une étude sur le même sujet, plus complète au point de vue mathématique, sera présentée par M. Knaster à la Société des Sciences et des Lettres de Wroclaw.

Résumé

There is an old custom of dividing an object fairly between two partners by letting one partner divide it into two parts and letting the other partner choose his part.

This procedure is a *fair game*, and has its *rules* and its *methods*. The rule for the first partner allows him to cut the object as he pleases; the rule for the second partner gives him a free choice of the two parts. The methods are: (1) for the first partner to cut in such a manner as to give the parts equal value in his own estimation, and (2) for the second partner to choose the part that he considers more valuable.

Having found during the war a solution for three partners, I proposed the problem of n partners to B. K n a s t e r and S. B a n a c h. Their solution is as follows:

The partners being ranged $A, B, C, \ldots, N$, A cuts from the object, say a cake, an arbitrary slice. B now has the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off. Whatever he does, C has the right (without

obligation) to diminish the already diminished (or not diminished) slice, and so forth up to N. The rule obliges the last diminisher to take as his share the slice he was last to touch. The remaining $n-1$ persons continue in the same way with the remainder of the cake.

The above procedure applies to continuous objects that can be divided in any ratio. The method can be extended to a collection of individual objects, by having each partner write down his estimate of the value of each object, and in effect awarding objects to the highest bidders, with differences between the values of objects awarded and the receivers' proportional claims adjusted in cash.

Mr. Steinhaus' paper was discussed by Mr. Tjalling C. Koopmans and the speaker.