UN OUTIL ALGEBRIQUE : LES SERIES FORMELLES NON COMMUTATIVES

Michel Fliess *
Université Paris VIII
et
IRIA - LABORIA

Table des matières :

----

* Adresse Postale : 38, rue Godefroy Cavaignac 75011 PARIS, France

G. Marchesini et al. (eds.), *Mathematical Systems Theory*

Introduction

La transformation de Laplace permet, par l'introduction des fonctions de transfert, un calcul symbolique pour les asservissements linéaires et stationnaires, dont l'utilité n'est plus à défendre. On a recherché des moyens analogues dans les cas non linéaires et non stationnaires. A la suite de Wiener |41|, on a introduit les séries de Volterra (cf. Barrett |3|) de la forme :

$$(1) \quad y(t) = h_0(t) + \int_0^t h_1(t,\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t\int_0^t h_2(t,\tau_2,\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots,$$

où $u,y : [0,\infty[\to \underline{R}$ sont l'entrée et la sortie. En dépit de nombreux travaux, la faiblesse de cette approche réside dans la détermination effective des noyaux h_0, h_1, $h_2,\ldots$.

Lorsque ces noyaux sont des fonctions analytiques, on montre que (1) peut être représenté par une série formelle en indéterminées non commutatives. Si celle-ci est rationnelle, le système peut recevoir la représentation par espace d'état suivante :

$$(2) \quad \left|\begin{array}{l} \dot{q}(t) = (A_0 + u(t)A_1)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \ , \end{array}\right. \qquad (t \in [0,\infty[\ )$$

où le vecteur d'état q appartient à un espace vectoriel Q de dimension finie, A_0, $A_1 : Q \to Q$, $\lambda : Q \to \underline{R}$ sont des applications linéaires. Ces systèmes, appelés dans la littérature "bilinéaires", ont, en raison d'une terminologie due à Volterra (cf. |29|, |39|), reçu le nom de "réguliers". Dans un domaine compact donné, tout asservissement continu peut être uniformément approché par des sytèmes de type (2), qui devraient ainsi satisfaire à un grand nombre de problèmes en physique, mécanique et ingéniérie. Ce d'autant plus que la réalisation de (2) et, en temps discret, de

$$\left|\begin{array}{l} q(t+1) = (A_0 + u(t)A_1)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t), \end{array}\right. \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

est justifiable des méthodes de calcul des séries rationnelles, comme les matrices de Hankel (cf. |19|).

L'emploi des séries formelles non commutatives en rapport avec des équations différentielles linéaires, ne doit pas surprendre si l'on rappelle qu'elles ont été définies en 1906 par F. Hausdorff pour la démonstration de la formule dite de Baker-Hausdorff. Notre outil privilégié, les séries rationnelles non commutatives, a été introduit en 1959 par Schützenberger (cf. |11|) en liaison avec la théorie des automates et des langages formels. Il y a là un lien entre asservissements et automates, qui nous semble bien plus convaincant que ceux recherchés par d'autres auteurs (Kalman, Falb, Arbib |27| , Brockett, Willsky |6|,...). D'ailleurs, notre méthodologie permet une théorie complète des asservissements réguliers, non autonomes, à temps discret, qui s'applique au cas linéaire, et qui est l'analogue strict du traitement des automates finis variables (cf. Dauscha, Nürnberg, Starke, Winkler |12|).

L'intrusion de méthodes nées en informatique et linguistique mathématiques peut être mise en parallèle avec le développement, dû notamment à Thom |35|,|36|, de la topologie différentielle comme moyen d'explication en biologie, linguistique, ... Au-delà de toute question de validité, ces deux démarches sont difficilement comparables, car

car l'une, la topologique, est globale et qualitative, alors que la nôtre est locale et quantitative. Nous donnons approximativement à "global" et "local" les sens qu'ils ont en Analyse. Nous ne savons en effet tenir compte de possibles singularités, qui sont à la base de la théorie des "catastrophes" de Thom. Par opposition à une description qualitative (|35|, p. 20), nous entendons par quantitatif le fait que l'ingénieur doit pouvoir construire un appareillage modélisé par un asservissement régulier. Pour conclure cette disgression, nous suggérons un rapprochement de global et local avec les concepts dégagés par F. de Saussure dans son *Cours de Linguistique Générale*, de "diachronie" et de "synchronie". En effet, Chomsky |10|, dont le formalisme est, grâce aux travaux de Schützenberger (cf. |11|), à la base de nos méthodes, dit explicitement viser un modèle synchronique, tandis que le but de Thom |36|, chap. XIII, est la compréhension de l'évolution diachronique.

La plupart des résultats de cet article-ci ont été présentés dans quatres Notes |16, 17, 20, 21| à l'Académie des Sciences de Paris.

Remerciements : Nous exprimons notre plus vive reconnaissance au Professeur R. E. Kalman qui, en nous invitant au Center for Mathematical System Theory de l'Université de Floride à Gainesville, nous a fait découvrir la théorie mathématique des asservissements et nous a suggéré un possible lien avec automates et langages.

I. - Rappels sur les séries formelles non commutatives

a) Définitions et premières propriétés

Soient X un ensemble non vide supposé, dans ce travail, fini, appelé alphabet, X^* le monoïde libre qu'il engendre, dont les éléments sont les mots, et où l'élément neutre, le mot vide, est noté "1". K étant un semi-anneau (1) commutatif unitaire, soient $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ les semi- anneaux des polynômes et des séries formels, à coefficients dans K, en les indéterminées associatives (non commutatives si card $X\geq 2$) $x\in X$. Une série $s\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est notée

$$s = \sum\{(s,w)w \mid w\in X^*\}\quad , \text{ où } (s,w)\in K.$$

s est quasi-inversible (ou propre) ssi son terme constant $(s,1)$ est nul. Le quasi-inverse

$$\tilde{s} = \sum\{s^n \mid n>1\}$$

est déterminé univoquement par la relation

$$s + s\tilde{s} = \tilde{s} = s + \tilde{s}s.$$

---

(1) Un semi-anneau K est un ensemble muni de deux lois de composition, l'addition et la multiplication satisfaisant aux axiomes : (i) pour l'addition, K est un monoïde commutatif ; (ii) la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition ; (iii) 0 désignant l'élément neutre de l'addition, pour tout $a\in K$, on a : $a0 = 0a = 0$.

Un sous-semi-anneau R de K<<X>>est dit rationnellement clos ssi le quasi-inverse de tout élément quasi-inversible de R, appartient encore à R [(1)]. Le semi-anneau K<(X)> des séries rationnelles (Schützenberger |34|) est le plus petit sous-semi-anneau rationnellement clos de K<<X>> qui contienne K<X>.

Soit $K^{N\times M}$ l'ensemble des matrices, à coefficients dans K, à N lignes et M colonnes. Une représentation (linéaire) $\mu: X^{*} \to K^{N\times N}$ est un homomorphisme de X^{*} dans le monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre N. Le résultat suivant est connu sous le nom de théorème de Kleene-Schützenberger (cf. |34|).

Théorème 1.1. - *Une série* $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *est rationnelle si et seulement s'il existe un entier* $N \geq 1$, *une représentation* $\mu: X^{*} \to K^{N\times N}$, *une matrice* $p \in K^{N\times N}$ *tels que*

$$r = \sum\{(\mathrm{Tr}p\ \mu w)w \mid w \in X^{*}\} ,$$

où $\mathrm{Tr}p\ \mu w$ *désigne la trace de la matrice* $p\mu w$.

Corollaire 1.2. (cf. |19|) - *Une série* $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *est rationnelle si et seulement s'il existe un entier* $N \geq 1$, *une représentation* $\mu: X^{*} \to K^{N\times N}$, *des matrices ligne* $\lambda \in K^{1\times N}$ *et colonne* $\gamma \in K^{N\times 1}$ *tels que*

(I.1) $$r = \sum\{(\lambda\mu w\gamma)w \mid w \in X^{*}\} .$$

Remarques.- (i) Lorsque K est un corps et lorsque X est réduit à une seule lettre x, les séries rationnelles ne sont que le développement de Taylor à l'origine des fonctions rationnelles P/Q, où $P,Q \in K[x]$, $Q(0) \neq 0$.

(ii) Lorsque K est le semi-anneau de Boole $B = \{0,1\}$, où $1+1=1$, les séries de B<<X>> correspondent aux langages formels habituels, c'est-à-dire aux parties de X^{*}, et les séries rationnelles aux langages de même nom (cf. |19|). Alors le théorème de Kleene-Schützenberger exprime, avec la formule (I.1), qu'un langage est rationnel ss'il est accepté par un automate fini : c'est le théorème de Kleene habituel.

b) Matrices de Hankel et modules sériels

Dans ce paragraphe, K est un corps.

A toute série $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, on associe un tableau infini, appelé matrice de Hankel, et noté $H(s)$, dont lignes et colonnes sont indexés par X^{*} et tel que le coefficient d'indice $(w_1,w_2) \in X^{*} \times X^{*}$ soit $(s,w_1 w_2)$. Le rang de $H(s)$, qui, par définition, est celui de s, est immédiat à introduire. On peut énoncer (cf. |19|) :

Théorème 1.3. - K *étant un corps, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série* $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ *soit rationnelle est qu'elle soit de rang fini* $\bar{N}$. *Il existe alors une représentation* $\bar{\mu}: X^{*} \to K^{\bar{N}\times\bar{N}}$, *des matrices ligne* $\bar{\lambda} \in K^{1\times\bar{N}}$ *et colonne* $\bar{\gamma} \in K^{\bar{N}\times 1}$, *telles que*

$$r = \sum\{(\bar{\lambda}\ \bar{\mu}\ w\ \bar{\gamma})w \mid w \in X^{*}\} .$$

---

(1) Lorsque K est un anneau, on peut remplacer la quasi-inversion par l'inversion. s est inversible ss'il existe s^{-1} telle que $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$; elle l'est ssi (s,1) est inversible dans K.

On peut déterminer :

- *deux ensembles de* $\overline{N}$ *mots* $\{d_j\}_{j=1}^{\overline{N}}$, $\{g_i\}_{i=1}^{\overline{N}}$;

- *une application* $\chi : X^{*} \to K^{\overline{N}\times\overline{N}}$ *définie, pour tout* $w \in X^{*}$, *par* $(\chi w)_{ij} = (r, g_i w d_j)$ $(i,j = 1, \ldots, \overline{N})$, *telle que* $\chi 1$ *soit inversible et vérifiant* $\chi w = \chi 1 \overline{\mu} w$;

- $\overline{N}^2$ *matrices* $m_{ij} \in K^{\overline{N}\times\overline{N}}$ $(i,j = 1, \ldots, \overline{N})$ *vérifiant, pour tout* $w \in X^{*}$, $\overline{\mu} w = \sum_{ij} (r, g_i w d_j) m_{ij}$

Soit un entier $N \geq 1$,*une représentation* $\mu : X^{*} \to K^{N\times N}$, *des matrices lignes* $\lambda \in K^{1\times N}$ *et colonne* $\gamma \in K^{N\times 1}$ *tels que* $r = \sum \{(\lambda \mu w \gamma) w \mid w \in X^{*}\}$

Alors, $N \geq \overline{N}$. *Si* $N = \overline{N}$, *il existe une matrice inversible* $P \in K^{\overline{N}\times\overline{N}}$ *telle que* $P \mu w P^{-1} = \overline{\mu} w$, $\overline{\lambda} P = \lambda$, $P\gamma = \overline{\gamma}$ *(les représentations* $\overline{\mu}$ *et* μ *sont donc semblables).*

La démonstration se fait de manière synthétique à partir de la notion de K<X> -module sériel droit ou gauche, empruntée à A. Heller, et qui généralise les modules de Kalman |27|, chap. 10. Un K<X>-module sériel gauche est un triple (E,c,f) où E est un K<X>-module gauche, c un élément de E, f : $E \to K$ une application K-linéaire. A cet objet correspond la série $s = \sum \{(fwc) w \mid w \in X^{*}\}$.
Réciproquement, à une série $s \in K\langle\langle X \rangle\rangle$, correspond un module sériel gauche (E,c,f) où E n'est autre que K<X> considéré comme K<X>-module gauche, c le polynôme unité, f l'application qui à $p \in K\langle X \rangle$ associe $\sum \{(p,w)(s,w) \mid w \in X^{*}\}$. Un morphisme $\phi : (E,c,f) \to (E',c',f')$ de K<X>-modules sériels gauches est un morphisme du K<X>-module E dans le K<X>-module E', tel que $\phi c = c'$, ${}^{t}\phi f' = f$ (${}^{t}\phi$ désigne l'application duale de ϕ, considéré comme morphisme de K-espaces vectoriels). On a isomorphisme si ϕ est un isomorphisme entre E et E'.
(E,c,f) est dit <u>réduit</u> (ou <u>minimal</u>) ssi $E = K\langle X \rangle c$ et $\{n \mid n \in E, f(K\langle X \rangle n) = 0\} = \{0\}$.
Soient $N = \{n \mid n \in K\langle X \rangle c,\ f(K\langle X \rangle n) = 0\}$ un sous-K<X>-module de K<X>c, $R = K\langle X \rangle c / N$, $\alpha : K\langle X \rangle c \to R$ l'épimorphisme canonique. Il existe une application K-linéaire $f_0 : R \to K$ telle que la restriction de f à K<X>c soit égale à $f_0 \alpha$. (R, c_0, f_0), où $c_0 = \alpha c$ est clairement un module sériel réduit. Il est d'autre part évident que deux modules sériels réduits, associés à la même série, sont isomorphes.
On peut doter le K-espace vectoriel engendré par les colonnes de $H(s)$ d'une structure de K<X>-module gauche de la manière suivante : tout mot $w \in X^{*}$ opérant sur la colonne d'indice $u \in X^{*}$ lui fait correspondre la colonne d'indice wu. R est isomorphe à ce module, ce qui en donne une interprétaion remarquable.
Définitions et propriétés analogues pour les modules sériels droits et les lignes de la matrice de Hankel.
Soit $r \in K\langle(X)\rangle$ donnée comme en (I.1). A μ, λ, γ, on peut associer le module sériel gauche (E,c,f) où :
- $E = K^{N\times 1}$, K-espace vectoriel sur lequel opèrent canoniquement les matrices μw et que l'on peut considérer comme un K<X>-module gauche ;
- $c = \gamma$;

- f est l'application repérée par λ, c'est-à-dire telle que $fwc = \lambda\mu w\gamma$.
Les assertions du théorème concernant les liens entre $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\gamma}$, et μ, λ, γ apparaissent alors comme la traduction en langage matriciel des propriétés des modules sériels réduits.
La représentation $\bar{\mu}$, qui est définie à une similitude près, est appelée représentation (linéaire) réduite (ou minimale).
Remarques. - (i) Schützenberger |34| et Isidori |25| donnent des approches plus constructives.
(ii) Le résultat précédent généralise celui, bien connu (cf. Gantmacher |23|, p.201), sur les matrices de Hankel des fonctions rationnelles en une indéterminée.
(iii) La réduction de l'automate fini acceptant un langage rationnel donné est analogue (cf. Eilenberg |13|, chap. III), dans son principe, à celle des représentations.

c) Polynômes

Une représentation $\mu : X^* \to K^{N \times N}$ est dite nilpotente ssi, pour tout mot non vide w, la matrice μw l'est. D'après un résultat dû à Levitzki (cf. Kaplansky |28|, p. 135), la représentation peut être triangularisée, en ce sens que toutes les matrices μw peuvent l'être simultanément.
Proposition 1.4. (cf. |15|) - *Une série rationnelle de* K<<X>> *, où* K *est un corps, est un polynôme si et seulement si elle peut être produite par une représentation nilpotente. Alors, la représentation réduite est nilpotente.*
Preuve. - D'après le théorème de Levitski, la condition de nilpotence est suffisante. La formule $\bar{\mu}w = \sum m_{ij}(r, g_i w d_j)$ du théorème (1.3.) montre la nécessité et ce pour la représentation réduite.

II. - Asservissements réguliers à temps discret

a) Description interne et indiscernabilité

K étant un corps commutatif, un asservissement régulier (ou bilinéaire) à temps discret (ou échantillonné)peut être décrit par

$$\text{(II.1)} \qquad \left| \begin{array}{l} q\,(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i) q(t) \\ \\ y(t) \;=\; \lambda q(t) \end{array} \right. \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ )$$

où q(t) appartient à l'espace vectoriel d'état Q (q(0) est donné), A_0, A_1, ..., A_n : $Q \to Q$, $\lambda : Q \to K$ sont des applications K-linéaires, $u_1, \ldots, u_n : \underline{N} \to K$ sont les entrées (ou commandes, ou gouvernes, ou contrôles), $y : \underline{N} \to K$ la sortie.
Deux asservissements sont dits indiscernables ssi, pour les mêmes entrées, on obtient les mêmes sorties.

Proposition 2.1. - *Un asservissement de la forme*

$$\begin{cases} q(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)b_i + b_0 \\ y(t) = \lambda q(t) + y_0 \end{cases}$$

($b_0, b_1, \ldots, b_n \varepsilon Q$, $y_0 \varepsilon K$) *est indiscernable d'un asservissement régulier.*

Preuve. - Elle est inspirée de Brockett |5|.

(i) Soit d'abord $\begin{cases} q(t+1) = (A_0 + \sum u_i(t)A_i)q(t) + \sum u_i(t)b_i + b_0 \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}$.

Posons $Q' = Q \oplus K$, $A'_j : Q' \to Q'$ ($j = 0, 1, \ldots, n$), $\lambda' : Q' \to K$ applications K-linéaires définies par :

$A'_0|Q = A_0$, $A'_0|K(1) = (b_0, 1)$; $A'_i|Q = A_i$, $A'_i|K(1) = (b_i, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$;

$\lambda'|Q = \lambda$, $\lambda'|K = 0$ (la barre | indique la restriction de l'application).

Il y a indiscernabilité avec l'asservissement régulier d'espace d'état Q' défini par $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, \lambda'$, de vecteur d'état initial $(q(0), 1)$.

(ii) Soit maintenant $\begin{cases} q(t+1) = A_0 + \sum u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) + y_0 \end{cases}$

Posons $Q'' = Q \oplus K$, $A''_j : Q'' \to Q''$, $\lambda'' : Q'' \to K$ applications K-linéaires définies par :

$A''_0|Q = A_0$, $A''_0|K(1) = (0, 1)$; $A''_i|Q = A''_i$, $A''_i|K = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; $\lambda''|Q = \lambda$

$\lambda''|K(1) = y_0$.

Il y a indiscernabilité avec l'asservissement régulier défini par Q'', $A''_0, A''_1, \ldots, A''_n$, λ'', où $q''(0) = (q(0), 1)$

Corollaire 2.2. - *La famille des asservissements réguliers contient strictement celle des asservissements linéaires de la forme*

$$\begin{cases} \eta(t+1) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i \\ y(t) = H\eta(t) \end{cases}$$

d'espace d'état N $[\eta(0) = 0]$, *où* $g_1, \ldots, g_n \varepsilon N$, *et où* $F : N \to N$, $H : N \to K$ *sont des applications K-linéaires.*

Remarque.- Il n'y aurait, bien entendu, aucune difficulté à généraliser à des sorties multidimensionnelles, c'est à dire prises dans des espaces vectoriels de dimension finie.

b) Séries formelles génératrices

(i) Entrées homogènes

Un asservissement régulier est dit à entrée homogène (1) ss' il est de la forme

---

(1) On dit aussi *homogeneous in the state.*

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} q(t+1) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i\right)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}.$$

Associons-lui l'alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, où la lettre x_i correspond à l'entrée u_i. A tout mot non vide $x_{i_\nu} \ldots x_{i_1} x_{i_0} \in XX^*$ correspond la sortie $y(\nu+1)$ pour les entrées ainsi définies :

$$u_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i_t = i \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Prenant cette sortie pour coefficient du mot, celui du mot vide étant $\lambda q(0)$, on définit une série $\underline{G} \varepsilon K\langle\langle X\rangle\rangle$, dite <u>série génératrice</u> de (II.2). Il est évident que deux asservissements indiscernables ont même série génératrice.

Réciproquement, soit $\underline{G} \varepsilon K\langle\langle X\rangle\rangle$. D'après le paragraphe I.b, il lui correspond un $K\langle X\rangle$-module sériel gauche (E,c,f) et l'asservissement (II.2) d'espace d'état $Q=E$ $[q(0)=c]$, où $\lambda=f$ et où A_i $(i=1,\ldots,n)$ est l'opérateur induit par x_i.

<u>Théorème 2.3.</u>- *Il y a bijection canonique entre les asservissements réguliers à entrées homogènes, définis à une indiscernabilité près, et les séries formelles non commutatives.*

(ii) Cas général

A (II.1) associons l'asservissement à entrée homogène

$$\text{(II.3)} \qquad \begin{cases} q(t+1) = \left(\sum_{j=0}^{n} u_j(t)A_j\right)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t), \end{cases}$$

où $u_0 : \underline{N} \to K$ est une nouvelle entrée. Soient $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\underline{G} \varepsilon K\langle\langle X\rangle\rangle$ la série génératrice de (II.3). Par définition, $\underline{G}$ est la série génératrice de (II.1).

La sortie $y(\nu+1)$ se calcule ainsi : on ne garde dans $\underline{G}$ que les monômes de degré $\nu+1$, on remplace dans chacun d'eux x_{k_1} par 1 si $x_{k_1}=x_0$, par $u_i(1)$ si $x_{k_1}=x_i$ $(i=1\ldots1)$, $y(\nu+1)$ est la somme ainsi obtenue.

<u>Théorème 2.4.</u> - *Il y a bijection canonique entre les asservissements réguliers à entrées non homogènes, définis à une indiscernabilité près, et les séries formelles non commutatives.*

<u>Remarque.</u> - Si les sorties des asservissements étaient multidimensionnelles, il faudrait prendre un vecteur de séries génératrices.

c) Réalisabilité et réduction

Un asservissement régulier est <u>réalisable</u> ss'il est indiscernable d'un asservissement régulier d'espace d'état de dimension finie. Le théorème 1.1. de Kleene-Schützenberger permet d'énoncer :

<u>Théorème 2.5.</u> - *Un asservissement régulier est réalisable si et seulement si sa série génératrice est rationnelle.*

La matrice de Hankel de la série génératrice et son rang sont, par définition, ceux du système. Le théorème 1.3 peut être réénoncé en termes de réduction du système.

Théorème 2.6. - *L'asservissement régulier* (Σ)

$$\begin{cases} q(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases}$$

est réalisable si et seulement s'il est de rang fini $\overline{N}$. *Il est alors indiscernable de* $(\overline{\Sigma})$

$$\begin{cases} \overline{q}(t+1) = (\overline{A}_0 + \sum u_i(t)\overline{A}_i)\overline{q}(t) \\ y(t) = \overline{\lambda}\overline{q}(t) \end{cases},$$

d'espace d'état Q *de dimension* $\overline{N}$. *Tout asservissement* (Σ')

$$\begin{cases} q'(t+1) = A'_0 + \sum u_i(t)A'_i)q'(t) \\ y(t) = \lambda' q'(t) \end{cases},$$

indiscernable de (Σ), *a un espace d'état* Q' *de dimension* $N' \geq \overline{N}$. *Si* $N'=N$, *il existe un isomorphisme* $P:Q' \to \overline{Q}$, *tel que :*

$$PA'_jP^{-1} = \overline{A}_j \quad (j = 0,\ldots,n), \quad \overline{\lambda}P = \lambda', \quad Pq'(0) = \overline{q}(0).$$

$(\overline{\Sigma})$ est dit réduit (ou minimal): il est défini à un isomorphisme près.

Remarque. - Afin de ne pas allonger par trop cet article, nous ne ferons que mentionner les problèmes de commandabilité et d'observabilité. Les propriétés du module sériel réduit (cf. par. I.b) montre qu'un asservissement régulier est réduit ss'il est observable et si son espace d'état est sous-tendu par l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de l'état initial. On ne peut exiger la propriété plus forte dont jouissent les systèmes linéaires, à savoir la commandabilité complète (cf. Kalman, Falb, Arbib |27|, chap. 10). Cela est prouvé par l'exemple suivant : $y(t+1) = u(t)y(t)$ $[y(0) = 1]$ a un espace d'état isomorphe à K où aucun élément non nul n'est accessible à partir de zéro.

Nous sommes maintenant en mesure de consacrer quelques lignes aux liens avec automates et langages. Un automate déterministe $\underline{A} = (X,Q,q_0,Q_F,\delta)$ est un quintuple où :

- X est l'alphabet d'entrée,
- Q est l'ensemble des états, non nécessairement fini, où q_0 est l'état initial et Q_F l'ensemble des états finals,
- $\delta:Q \times X^* \to Q$ est la fonction de transition définie par récurrence sur la longueur des mots :

$$\forall_Q q \qquad \delta(q,1) = q$$
$$\forall_{X^*} w \quad \forall_X x \qquad \delta(q,wx) = \delta(\delta(q,w),x).$$

Le langage (formel), c'est-à-dire la partie de X^*, acceptée (ou reconnue) par $\underline{A}$ est, par définition,

$$L_{\underline{A}} = \{w \mid \delta(q_0,w) \in Q_F\}.$$

Un tel automate peut être considéré comme lié à l'action du monoïde libre X^* sur Q. On a ainsi une structure algébrique tout à fait semblable aux K<X>-modules, et qu'Eilenberg |13| a utilisée pour la minimisation des automates sous le nom de

X-modules. Le langage accepté et la série génératrice jouent des rôles analogues.

Remarque. - Les liens entre asservissements et automates ont déjà été soupçonnés par de nombreux auteurs (cf. Kalman, Falb, Arbib |27|, Brockett, Willsky |6|,etc)

d) Asservissements réguliers non autonomes

Un asservissement régulier

$$\text{(II.4)} \qquad \left| \begin{array}{l} q(t+1) = (A_0(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i(t))q(t) \\ \\ y(t) = \lambda(t)q(t) \end{array} \right.$$

est dit non autonome ssi l'un au moins des opérateurs A_0, A_1, ... , A_n, λ dépend du temps t. Sinon, il est dit autonome.

Comme précédemment, on associe à (II.4) l'asservissement à entrée homogène

$$\text{(II.5)} \qquad \left| \begin{array}{l} q(t+1) = (\sum_{j=0}^{n} u_j(t)A_j(t))q(t) \\ \\ y(t) = \lambda(t)q(t) \end{array} \right.$$

où u_0 est une nouvelle entrée. Soient $X = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ et $\underline{G}\varepsilon K\langle\langle X\rangle\rangle$ la série génératrice de (II.4) et (II.5), où le coefficient de tout mot est défini comme au paragraphe II.b.

Les théorèmes 2.3 et 2.4 conduisent à énoncer :

Proposition 2.7. - *Il existe une bijection canonique entre les asservissements réguliers non autonomes (à entrées homogènes ou non), définis à une indiscenabilité près, et les séries formelles non commutatives. Par conséquent, tout asservissement régulier non autonome est indiscernable d'un asservissement régulier autonome.*

Exemple.- Soit le système $y(t+1) = \binom{2t}{t} u(t)y(t) \quad [y(0)=1]$. Il a pour série génératrice

$$\underline{G} = \sum_{t>0} \binom{2t}{t} x^t$$

qui est algébrique car développement de Taylor à l'origine de la fonction algébrique $1/\sqrt{1-4x}$. On peut aussi donner la représentation autonome suivante

$$\left| \begin{array}{l} q(t+1) = Au(t)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{array} \right.$$

où l'espace vectoriel d'état Q est de dimension infinie dénombrable, avec une base indexée par l'ensemble $\underline{Z}$ des entiers relatifs, de sorte que :

$$A = B^2 \text{ ou } B_{ij} = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } i=j+1 \text{ ou } j=i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. , \quad q(0)_j = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } j=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. , \quad \lambda_i = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } i=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Un asservissement régulier est dit réalisable de manière non nécessairement autonome ss'il est indiscernable d'un asservissement non nécessairement autonome d'espace d'état de dimension finie.

Soit ρ_k la dimension du K-espace vectoriel sous-tendu par les colonnes d'indices les mots de longueur k de la matrice de Hankel $H(s)$ d'une série $s\varepsilon K\langle\langle X\rangle\rangle$.

$\rho = \sup_k \rho_k$ est, par définition, le <u>rang colonne homogène</u> de $H(s)$, de s et de tout asservissement ayant s pour série génératrice. Il est évidemment inférieur ou égal au rang.

<u>Théorème 2.8.</u> - *Un asservissement* $(\sum)$ *régulier non nécessairement autonome est réalisable en tant que tel si et seulement si son rang colonne homogène est fini, égal à* $\overline{N}$. *Il est alors indiscernable d'un asservissement régulier non nécessairement autonome d'espace d'état de dimension* $\overline{N}$. *Tout asservissement régulier indiscernable de* $(\sum)$ *a un espace d'état de dimension supérieure ou égale à* $\overline{N}$.

<u>Preuve.</u> - (i) Lorsque $(\sum)$ est réalisable de manière non nécessairement autonome, la finitude du rang colonne homogène se montre comme celle du rang d'une série rationnelle (cf. |19|).

(ii) Supposons $(\sum)$, de série génératrice $\underline{G}$, de rang colonne homogène fini $\overline{N}$. Soient $\overline{Q}$ un K-espace vectoriel de dimension $\overline{N}$, C (resp. C_t) le K-espace vectoriel sous-tendu par les colonnes d'indices les mots de longueur t) de la matrice de Hankel $H(\sum)$ de $(\sum)$, $\phi_t : C_t \to \overline{Q}$ une injection K-linéaire, $\overline{q}(0)$ l'image par ϕ_0 de la colonne d'indice 1, $\psi_{t,j} : C_t \to C_{t+1}$ l'application K-linéaire induite par x_j $(j=0,1,\ldots,n)$, $f : C \to K$ l'application K-linéaire qui, à la colonne d'indice $w \in X^*$, associe le coefficient d'indice 1, c'est-à-dire $(\underline{G}, w)$. Il existe des applications K-linéaires $\overline{A}_j(t) : \overline{Q} \to \overline{Q}$ $(j = 0,1,\ldots,n)$ telles que $\overline{A}_j(t)\phi_t = \phi_{t+1}\psi_{t,j}$, $\overline{\lambda}(t) : \overline{Q} \to K$ telle que la restriction $f|C_t$ soit égale à $\lambda(t)\phi_t$. L'asservissement défini par $\overline{Q}$, $\overline{q}(0)$, $\overline{A}_j(t)$, $\overline{\lambda}(t)$ répond au problème.

(iii) Un raisonnement trivial d'algèbre linéaire prouve que la dimension de l'espace d'état est nécessairement supérieure ou égale au rang colonne homogène.

<u>Application.</u> - Tout système à entrée homogène scalaire

$$\left| \begin{array}{l} q(t+1) = u(t)A(t)q(t) \\ y(t) = \lambda(t)q(t) \end{array} \right.$$

est de rang colonne homogène 1. Si $\sum_{t>0} a_t x^t$ est sa série génératrice, il est indiscernable de

$$\left| \begin{array}{l} \overline{q}(t+1) = u(t)\overline{q}(t) \\ y(t) = a_t\overline{q}(t), \end{array} \right.$$

d'espace d'état de dimension 1 $[\overline{q}(0) = 1]$.

<u>Remarques.</u> - (i) A l'opposé du cas autonome (par. II.c), il n'y a pas en général ici unicité de l'asservissement minimal à une similitude près. Cela est dû à l'arbitraire du choix, dans la preuve, de $\overline{Q}$, $\overline{A}_j(t)$, $\overline{\lambda}(t)$.

(ii) Les résultats de ce paragraphe sont tout à faits semblables à ceux obtenus pour les automates finis variables avec le temps. Le théorème 2.8 correspond à la caractérisation par congruences des langages acceptés par de tels automates, caractérisation due à Agasandjan |1| . L'application et la proposition 2.7 sont analogues à des résultats de Dauscha, Nürnberg, Starke et Winkler |12|, article contenant une revue assez complète des automates finis variables.

e) Asservissements réguliers linéaires

Au paragraphe II.a, nous avons vu que la famille des asservissements réguliers contient celle des linéaires de la forme

$$\begin{cases} \eta(t+1) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i \\ y(t) = H\eta(t) \end{cases}$$

Plus généralement, un asservissement régulier est dit linéaire ssi la sortie dépend linéairement de l'entrée, ou, en d'autres termes, si le principe de superposition s'applique. La définition même des séries génératrices permet d'écrire :

Proposition 2.9 - *Un asservissement régulier de série génératrice dans* $K\langle\langle X\rangle\rangle$, *où* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, *est linéaire si et seulement si tout mot de* X^* *de coefficient non nul, contient une et une seule occurence de l'une des lettres* $x_1, \ldots, x_n$.

Remarque. - Le support de la série génératrice $\underline{G}$ est, par définition, la partie de X^* supp $\underline{G} = \{ w \mid (\underline{G},w) \neq 0 \}$. Le résultat précédent s'énonce ainsi : il y a linéarité ssi

$$\text{supp } \underline{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_0\}^* x_i \{x_0\}^* .$$

Corollaire 2.10. - *Il existe un algorithme à un nombre fini de pas permettant de décider si l'asservissement régulier*

$$\begin{cases} q(t+1) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t), \end{cases}$$

d'espace d'état de dimension finie N, *est linéaire ou non.*

Preuve.- Il existe (cf. |19|) un algorithme à un nombre fini de pas pour mettre l'asservissement sous forme réduite, définie par $(\overline{q}(0), \overline{A}_j, \overline{\lambda})$. Un argument simple d'algèbre linéaire montre que, si $i,i' = 1,\ldots,n$, $k = 0,1,\ldots$, on doit avoir $\overline{A}_i \overline{A}_0^k \overline{A}_i = 0$.

Vérifications effectuables en un nombre fini de pas.

Proposition 2.11. *Lorsqu'un asservissement régulier est linéaire, il peut être réalisé par un asservissement linéaire, non nécessairement autonome, de la forme*

$$\text{(II.4)} \quad \begin{cases} \eta(t+1) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} G_i F^t n u_i(t) \\ y(t) = H\eta(t) , \end{cases}$$

où $\eta(t)$ *appartient à l'espace d'état* $N\,[\eta(0) = 0]$, $F: N \to N$, $G_i: N \to N$ $(i=1,\ldots,n)$, $H: N \to K$ *sont des applications* K-*linéaires.*

Preuve. - Supposons l'asservissement régulier sous forme (II.1). Il est clair que l'on peut prendre $F = A_0$, $G_i = A_i$, $n = q(0)$, $H = \lambda$.

Remarques. - (i) (II.4) est stationnaire si $Fn = n$.

(ii) La série génératrice d'un asservissement régulier linéaire est de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_0) x_i a_i(x_0) ,$$

où a_i, b_i sont des séries formelles en l'indéterminée x_0. Il y a stationnarité ssi, pour tout i, $a_i(x_0) = \sum_{k \geq 0} x_0^k = (1-x_0)^{-1}$. Le n-uple $(b_1(x_0), \ldots, b_n(x_0))$ est alors

le vecteur de fonctions de transfert du système linéaire stationnaire (à condition, pour respecter les conventions habituelles, de changer x_0^k en $1/z^{k+1}$).
La réalisation des asservissements réguliers non autonomes (cf. par. II.d) conduit à celle des linéaires non autonomes.

Proposition 2.12. - *Un asservissement linéaire*

$$\text{(II.6)}\qquad \left|\begin{array}{l} \eta(t+1) = F(t)\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)g_i(t) \\ y(t) = H(t)\eta(t) \end{array}\right.$$

est indiscernable d'un asservissement linéaire non nécessairement autonome d'espace d'état de dimension finie N *si et seulement s'il est indiscernable d'un asservissement régulier non nécessairement autonome d'espace d'état de dimension* N.

Preuve. - Supposons (II.6) d'espace d'état de dimension N. De même que pour la proposition 1.1,(II.6) est indiscernable de (II.5), d'espace d'état de dimension N+1, où :

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & g_i(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (i=1,\dots,n)$$

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \lambda(t) = (H(t),0).$$

Comme la dernière composante de q(t) est toujours égale à 1, le rang colonne homogène est au plus N, d'où la possibilité de prendre un espace d'état de dimension N (cf. par. II.d).

Réciproquement,soit un asservissement régulier non autonome (II.4) d'espace d'état de dimension N. Il est indiscernable d'un asservissement linéaire (II.6) où :
$F(t) = A_0(t)$, $g_i(0) = q(0)$, $g_i(t) = A_i(t)A_0(t-1) \dots A_0(0)q(0) \quad (t\geqslant 1,\ i=1,\dots,n)$,
$H(t) = \lambda(t)$.

Un système linéaire non autonome est dit réalisable en tant que tel ss'il est indiscernable d'un système linéaire non nécessairement autonome d'espace d'état de dimension finie. Le rang colonne homogène d'un système linéaire non nécessairement autonome est celui qu'on obtient en le considérant comme asservissement régulier. Les propositions 2.8 et 2.9 permettent d'énoncer :

Proposition 2.13. - *Un asservissement linéaire non autonome* (Λ) *est réalisable en tant que tel si et seulement s'il est de rang colonne homogène fini* $\overline{N}$. *Il peut alors être mis sous la forme :*

$$\left|\begin{array}{l} \eta(t+1) = F(t)\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)g_i(t) \\ y(t) = H(t)\eta(t), \end{array}\right.$$

où l'espace d'état est de dimension $\overline{N}$. *L'espace d'état de tout asservissement linéaire indiscernable de* (Λ) *est de dimension supérieure ou égale à* $\overline{N}$.

Remarque. - Weiss |40| étudie l'observabilité et la commandabilité des systèmes des systèmes linéaires non autonomes.

III. - Asservissements réguliers à temps continu

Désormais, et ce jusqu'à la fin, K est soit le corps $\underline{R}$ des réels, soit celui $\underline{C}$ des complexes.

a) Description interne et indiscernabilité

Un asservissement régulier (ou bilinéaire), à temps continu, réalisable et autonome, est décrit par

$$\text{(III.1)} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{q}(t) = (dq/dt) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{array} \right.$$

où $q(t)$ ($t \in \underline{R}_+ = [0,\infty[$) appartient à l'espace d'état Q, qui est un K-espace vectoriel de dimension finie $[q(0)$ est donné$]$, $u_1,\ldots,u_n : \underline{R}_+ \to K$ sont les entrées (ou commandes, ou gouvernes, ou contrôles) que l'on suppose localement intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue, $A_0,\ldots,A_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to K$ sont des applications K-linéaires.

Deux asservissements sont dits indiscernables ssi, pour les mêmes entrées, on obtient les mêmes sorties. Le résultat suivant est dû à Brockett |5|.

Proposition 3.1. - *Tout asservissement de la forme*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)b_i + b_0 \\ y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 q(t) + \lambda_2 q(t)\otimes q(t) + \ldots + \lambda_k q(t)\otimes\ldots\otimes q(t), \end{array} \right.$$

où $b_0,b_1,\ldots b_n$ *appartiennent au* K*-espace vectoriel d'état* Q*, de dimension finie,* $\lambda_0 \in K$ *et* $\lambda_1 : Q \to K, \lambda_2 : Q\otimes Q \to K, \ldots, \lambda_k : \underbrace{Q\otimes\ldots\ldots\otimes Q}_{k\text{ fois}} \to K$ *sont des applications* K*-linéaires du produit tensoriel de copies de* Q*, est indiscernable d'un asservissement régulier réalisable.*

Preuve. - Le fait que

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum u_i(t)A_i)q(t) + \sum u_i(t)b_i + b_0 \\ y(t) = \lambda_0 + \lambda_1 q(t) \end{array} \right.$$

soit indiscernable d'un asservissement régulier réalisable se démontre à peu près comme en temps discret (cf. proposition 2.1).

Considérons donc

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda_2 q(t)\otimes q(t). \end{array} \right.$$

Or $d(q(t)\otimes q(t)/dt = dq(t)/dt\otimes q(t) + q(t)\otimes dq(t)/dt =$

$$= ((A_0\otimes 1_Q + 1_Q\otimes A_0) + \sum u_i(t)(A_i\otimes 1_Q + 1_Q\otimes A_i))q(t)\otimes q(t)$$

où $1_Q : Q \to Q$ désigne l'application identité. Ce qui prouve l'indiscernabilité demandée.

Généralisation immédiate aux produits tensoriels quelconques.

Corollaire 3.2. - *La famille des asservissements réguliers contient strictement celle des asservissements linéaires de la forme*

$$\left|\begin{array}{l}\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i \\ \\ y(t) = H\eta(t) \quad ,\end{array}\right.$$

d'espace d'état N $\eta(0)=0$ *, où* $g_1,\ldots,g_n \in N$*, et où* $F: N \to N$, $H: N \to K$ *sont des applications* K-*linéaires*.

Remarques. - (i) il n'y aurait, bien entendu, aucune difficulté à généraliser à des sorties multidimensionnelles.

(ii) On vérifie aisément que la généralisation aux sorties non linéaires de la proposition 3.1 n'est pas valable en temps discret (cf. par. II.a).

b) Séries formelles génératrices

(i) Entrées homogènes

Un asservissement régulier réalisable est dit à entrée homogène ss'il est de la forme

$$\text{(III.2)} \qquad \left|\begin{array}{l}\dot{q}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i\right) q(t) \\ \\ y(t) = \lambda q(t)\end{array}\right.$$

où l'espace d'état est de dimension finie N.

La série génératrice de (III.2) est par définition la série rationnelle $\underline{G}$ de $K\langle\langle X\rangle\rangle$, où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (x_i correspond à l'entrée u_i), ainsi obtenue : $\mu: X^* \to K^{N\times N}$ est la représentation donnée par $\mu x_i = A_i$, de sorte que

$$\underline{G} = \sum \{ (\lambda \mu w q(0)) w \mid w \in X^* \} .$$

Réciproquement, à $\underline{G} \in K\langle(X)\rangle$, définie par $\mu: X^* \to K^{N\times N}$, $\lambda \in K^{1\times N}$, $\gamma \in K^{N\times 1}$, on associe l'asservissement

$$\left|\begin{array}{l}\dot{q}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \mu x_i\right) q(t) \\ \\ y(t) = \lambda q(t) \quad ,\end{array}\right.$$

d'espace d'état $K^{N\times 1}$ $[q(0) = \gamma]$.

La formule de Peano-Baker (cf. Gantmacher |23|, p. 121) permet d'écrire la sortie sous forme d'une série infinie, liée à la série génératrice

$$\text{(III.3)} \qquad y(t) = \lambda\Big[1 + \sum_i A_i \int_0^t u_i(\tau)d\tau + \sum_{i_1,i_2} A_{i_2} A_{i_1} \int_0^t u_{i_2}(\tau_2)d\tau_2 \int_0^{\tau_2} u_{i_1}(\tau_1)d\tau_1 + \ldots\Big] q(0).$$

Il reste à prouver que deux asservissements sont indiscernables ss'ils ont même série génératrice. Soient donc $\underline{G}_1$, $\underline{G}_2 \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ séries génératrices de deux systèmes indiscernables. Nécessairement, leurs termes constants $(G_k, 1)$ sont égaux . En vertu de (III.3), il vient, si l'on suppose les entrées continues :

$$dy_k/dt = \lambda\Big[\sum_i u_i(t) A_i^k (1 + \sum_j A_j^k \int_0^t u_j(\tau)d\tau + \ldots\Big] q(0) \qquad (k = 1,2)$$

où, nécessairement,

$$\lambda A_i^k \left[1 + \sum A_j^k \int_0^t u_j(\tau)d\tau + \ldots \right] q(0)$$

sont égaux pour tout choix des entrées. D'où

$$\lambda A_i^1 q(0) = \lambda A_i^2 q(0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ce qui prouve l'identité des monômes du premier degré dans $\underline{G}_1$ et $\underline{G}_2$. Pour les termes de degré supérieur, on opère pas à pas de manière identique.

Théorème 3.3. - *Il y a bijection canonique entre les asservissements réalisables, à entrées homogènes, définis à une indiscernabilité près, et les séries formelles rationnelles non commutatives.*

(ii) Cas général

A (III.1), associons l'asservissement à entrée homogène

$$\text{(III.4)} \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = \left(\sum_{j=0}^{n} u_j(t) A_j \right) q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) , \end{cases}$$

où $u_0 : \underline{R}_+ \to K$ est une nouvelle entrée. Soient $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\underline{G} \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ la série génératrice de (III.4). Par définition, $\underline{G}$ est la série génératrice de (III.1). Une démonstration analogue à la précédente permet d'énoncer :

Théorème 3.4. - *Il y a bijection canonique entre les asservissements réguliers réalisables, à entrées non homogènes, définis à une indiscernabilité près, et les séries formelles rationnelles non commutatives.*

Remarque. - Si les sorties des asservissements étaient multidimensionnelles, il faudrait prendre un vecteur de séries génératrices.

c) Réduction

La matrice de Hankel de la série génératrice et son rang sont, par définition, ceux de l'asservissement. Les théorèmes 3.3 et 3.4 permettent d'appliquer le théorème 1.3 pour obtenir la forme réduite d'un asservissement régulier réalisable, résultat également obtenu, à l'aide d'autres moyens par Brockett |5| (algèbres de Lie), Bruni, Di Pillo, Koch |7| et d'Alessandro, Isidori, Ruberti |2| (séries de Volterra).

Théorème 3.5. - *Soit un asservissement régulier réalisable* $(\sum)$ *de rang fini* $\overline{N}$. *Il est indiscernable de* $(\overline{\sum})$.

$$\begin{cases} \dot{\overline{q}}(t) = \left(\overline{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \overline{A}_i \right) \overline{q}(t) \\ y(t) = \overline{\lambda}\,\overline{q}(t) , \end{cases}$$

d'espace d'état $\overline{Q}$ *de dimension* $\overline{N}$. *Tout asservissement réalisable*

$$\begin{cases} \dot{q}'(t) = \left(A_0' + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i' \right) q'(t) \\ y(t) = \lambda' q'(t) , \end{cases}$$

indiscernable de $(\sum)$, *a un espace d'état* Q' *de dimension* $N' \geq \overline{N}$. *Si* $N' = \overline{N}$, *il existe un isomorphisme* $P : Q' \to \overline{Q}$, *tel que :*

$$PA_j' P^{-1} = \overline{A}_j \quad (j = 0, \ldots, n) \qquad , \quad \overline{\lambda} P = \lambda' \quad , \quad Pq'(0) = \overline{q}(0) .$$

$(\overline{\sum})$ est dit réduit (ou minimal) : il est défini à un isomorphisme près.

Remarque. - La commandabilité et l'observabilité, examinées par d'Alessandro, Isidori, Ruberti |2|, donnent des résultats identiques à ceux du temps discret: un asservissement est réduit ss'il est observable et si l'espace d'état est sous-tendu par l'ensemble des vecteurs d'état accessibles à partir de l'état initial. Une étude plus poussée exige l'emploi des groupes de Lie.

d) Asservissements réguliers complètement intégrables

En |19|, nous avons suggéré un parallèle entre langages et séries rationnels, parallèle que nous avons illustré par l'examen des séries et langages échangeables. Il est tentant d'examiner si à des classes particulières de séries rationnelles correspondent des asservissements réguliers aux propriétés remarquables. Cette démarche est justifiée pour les séries génératrices échangeables.

Soit $\alpha : X^* \to X^+$ l'épimorphisme canonique de X^* sur le monoïde commutatif libre X^+, engendré par X. Une série $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite échangeable ssi deux mots w, w' de X^* ayant même image commutative, c'est-à-dire tels que $\alpha w = \alpha w'$, ont même coefficient : $(s,w) = (s,w')$. De même, un langage $L \subseteq X^*$ est dit échangeable ssi $L = \alpha^{-1}\alpha L$. La structure des séries et langages rationnels échangeables est donnée en |19|.

A l'asservissement (III.1), associons le système aux différentielles totales

$$\left|\begin{array}{l} dq = \left(\sum_{j=0}^{n} A_j d\xi_j\right) q \\ y = \lambda q \quad , \end{array}\right.$$

où $\xi_0 = t$, $d\xi_i = u_i(t)dt$, $\xi_i(t) = \int_0^t u_i d\tau$ $(i=1,\ldots,n)$. Le système et l'asservissement sont dits complètement intégrables ssi $y(t)$ peut s'exprimer comme fonction de t, $\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)$.

Proposition 3.6. - *Un asservissement régulier réalisable est complètement intégrable si et seulement si sa série génératrice, qui est rationnelle, est échangeable.*

Preuve. - (i) Supposons la série génératrice échangeable. D'après |19|, il existe une réalisation (III.1) où les opérateurs $A_0, A_1,\ldots,A_n$ commutent deux à deux. Il vient alors

$$y(t) = \lambda\left[\exp A_0 t + \sum_i A_i \xi_i(t)\right] q(0)$$

(ii) Supposons l'asservissement complètement intégrable. Une intégration par parties conduit à :

$$\int_0^t d\xi_{j_k} \int_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int_0^{\tau_2} d\xi_{j_2} \int_0^{\tau_1} d\xi_{j_1} = \xi_{j_k}(t) \cdots \xi_{j_1}(t) - \sum_{\sigma \in \underline{S}_k^+} \int_0^t d\xi_{j_{\sigma k}} \cdots \int_0^{\tau_1} d\xi_{j_{\sigma 1}}$$

où $\underline{S}^+_k$ désigne le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, k\}$, privé de l'identité. Cette formule jointe à celle (III.3) de Peano-Baker donne le résultat cherché.

Remarque. - Les asservissements réguliers complètement intégrables ont, sous une terminologie différente et pour le filtrage statistique, été aussi rencontrés par Lo et Willsky |30|.

e) Asservissements réguliers nilpotents

Un asservissement régulier est dit nilpotent ssi sa série génératrice est un polynôme. En vertu de la proposition 1.4, il vient :

Proposition 3.7. - *Un asservissement régulier est nilpotent si et seulement s'il est indiscernable de l'asservissement*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \quad , \end{array} \right.$$

où le semi-groupe engendré par les matrices $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *est nilpotent.*

Par conséquent, en vertu du théorème de Levitzki, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ peuvent être simultanément triangularisées.

Remarque. - De même, le monoïde syntactique (cf. Eilenberg |13|, p. 62) d'un langage fini est nilpotent.

f) Asservissements réguliers linéaires

Au paragraphe III.a, nous avons vu que la famille des asservissements réguliers réalisables contient celle des linéaires de la forme

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\eta}(t) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i \\ y(t) = H\eta(t) \quad , \end{array} \right.$$

d'espace d'état de dimension finie.

Plus généralement, un asservissement régulier est dit linéaire ssi la sortie dépend linéairement de l'entrée.

Proposition. - *Un asservissement régulier réalisable de série génératrice dans* $K\langle\langle X\rangle\rangle$, *où* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, *est linéaire si et seulement si tout mot de* X^* *de coefficient non nul, contient une et une seule occurence de l'une des lettres* $x_1, \ldots, x_n$.

Preuve. - La condition étant évidemment suffisante, montrons en la nécessité. Soient $\underline{G} \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ la série génératrice et $k \geqslant 0$ l'entier maximal tel que tout mot $w \in X^*$ du support de $\underline{G}$ soit tel que $w = x_0^k w'$, où $w' \in X^*$. Il existe donc au moins un mot $w_0 \in \mathrm{supp}\, \underline{G}$ tel que $w_0 = x_0^k x_i w_1$, où $i \in \{1, \ldots, n\}$, $w_1 \in X^*$. Il vient :

$$\underline{G} = x_0^k \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{G}_i + \underline{G}' \right)$$

($\underline{G}_i$, $\underline{G}' \in K\langle\langle X\rangle\rangle$). Si l'on montre l'absence d'occurence de $x_1, \ldots, x_n$ dans les $\underline{G}_i$, il serait aisé, suivant la même technique, de prouver la condition pour $\underline{G}'$, ce qui achèverait la démonstration. Soit $y_i(t)$ la sortie de l'asservissement ayant pour série génératrice $x_0^k x_i \underline{G}_i \cdot dy_i^{k+1}/dt^{k+1}$ est égal au produit de $u_i(t)$ par la sortie de l'asservissement ayant pour série génératrice $\underline{G}_i$. Il est clair qu'il y a linéarité ssi aucune occurence de $x_1, \ldots, x_n$ n'apparaît dans les mots de supp $\underline{G}_i$.

Remarques. - (i) Il y a linéarité ssi supp $\underline{G} \subseteq \bigcup_i \{x_0\}^* x_i \{x_0\}^*$.

(ii) Le corollaire 2.10 reste valable sans modification de la démonstration.

Proposition 3.9.- *Lorsqu'un asservissement régulier réalisable est linéaire, il peut être réalisé par un asservissement linéaire, non nécessairement autonome, de la forme*

$$\text{(III.5)}\qquad \begin{cases} \dot{\eta}(t) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} G_i(\exp Ft)\eta u_i(t) \\ y(t) = H\eta(t), \end{cases}$$

où $\eta(t)$ *appartient à l'espace d'état* $N[\eta(0)=0]$, *de dimension finie,* $F:N\to N, G_i:N\to N$ $(i=1,\dots,n), H:N\to K$ *sont des applications* K-*linéaires.*

Preuve. - Supposons l'asservissement régulier sous forme (III.1). Il est clair que l'on peut prendre $F=A_0$, $G_i = A_i$, $n=q(0)$, $H=\lambda$.

Remarque. - Il y a stationnarité ssi supp $\underline{G} \subseteq \bigcup_i \{x_0\}^* x_i$. Alors, si $\underline{G} = \sum_i a_i(x_0)x_i$, le n-uple $(a_1(x_0),\dots,a_n(x_0))$ est le vecteur de fonctions de transfert (à condition, pour respecter les conditions habituelles, de changer x_0^k en $1/z^{k+1}$). Comparer avec le paragraphe II.e.

IV. - Fonctionnelles et séries formelles non commutatives

a) Fonctionnelles représentées par séries formelles non commutatives

Soit un espace affine sur K, de dimension n, où chaque point est repéré par ses coordonnées $(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Un chemin (C) consiste en la donnée de n fonctions continues $\{\xi_i(\sigma) \mid 0\leqslant\sigma\leqslant s\}$. Toute série formelle $s\in K\langle\langle X\rangle\rangle$, où $X = \{x_1,\dots,x_n\}$, conduit,par analogie avec la formule de Peano-Baker (cf. Gantmacher |23|,p.121), à attacher à (C) une valeur numérique donnée par *(1)*

$$\text{(IV.1)}\qquad (s,1) + \sum_i (s,x_i)\int_0^s d\xi_i(\sigma) + \sum_{i_1 i_2} (s,x_{i_1}x_{i_2})\int_0^s d\xi_{i_2} d\xi_{i_1} + \dots ,$$

où
$$\int_0^s d\xi_i(\sigma) = \xi_i(s)-\xi_i(0),\dots,\int_0^s d\xi_{i_k}\dots d\xi_{i_1} = \int_0^s d\xi_{i_k}(\sigma)\int_0^\sigma d\xi_{i_{k-1}}\dots d\xi_{i_1} .$$

Cette valeur est intrinsèque en ce sens qu'elle est, comme on le vérifie aisément, indépendante du choix du paramétrage de (C). Deux chemins ne diffèrant que par une translation donnent la même valeur. Une fonctionnelle, ou, selon l'heureuse expression originale de Volterra |38|, une fonction de lignes, est dite analytique ssi dans un domaine donné elle peut être, d'après (IV.1), représentée par une série non commutative, qui, ici aussi, sera dite série génératrice. Une fonctionnelle analytique est dite rationnelle ou polynômiale ssi sa série génératrice l'est. Pour la consistance de ces définitions, il reste à prouver un résultat d'unicité.

---

(1) Pour alléger l'exposé, nous ne nous occuperons pas ici de questions de convergence. Cependant, lorsque la série est rationnelle, on voit, en se ramenant à une équation différentielle linéaire, (IV,1) est toujours définie.

Proposition 4.1.- *Deux fonctionnelles analytiques sont égales si et seulement si elles ont même série génératrice.*

Preuve. - Elle est identique à celle du paragraphe III.b donnant l'unicité des séries génératrices des asservissements réguliers réalisables.

Remarques. - (i) La qualification d'analytique pour les fonctionnelles a déjà été employée avec d'autres significations (cf. Volterra et Pérès |39|,p.68, F.Pellegrino in |29|, 4ème partie).

(ii) Notre définition des fonctionnelles analytiques est à rapprocher des travaux de Chen |9|, où, au chemin (C), on associe la série de K<<X>>donnée par

$$1 + \sum_{i}\left(\int_0^s d\xi_i\right)x_i + \sum_{i_1 i_2}\left(\int_0^s d\xi_{i_2} d\xi_{i_1}\right)x_{i_2}x_{i_1} + \dots .$$

b) Multiplication des fonctionnelles

La multiplication de deux fonctionnelles donne la fonctionnelle qui, à un chemin, fait correspondre le produit des valeurs prises par les deux fonctionnelles.

Proposition 4.2. - *La fonctionnelle multiple de deux fonctionnelles analytiques, est aussi analytique, de série génératrice le produit de Hurwitz* (1) *des deux séries génératrices.*

Preuve.- Elle est identique à celle, fort simple, donnée par Ree 33 à propos de travaux de K.-T. Chen. Une intégration par parties conduit à écrire

$$\left(\int_0^s d\xi_{i_k}\dots d\xi_{i_1}\right)\left(\int_0^s d\xi_{i'_{k'}}\dots d\xi_{i'_1}\right)=\int_0^s d\xi_{i_k}\left[\int_0^{} d\xi_{i_{k-1}}\dots d\xi_{i_1}\right)\left(\int_0^s d\xi_{i'_{k'}}\dots d\xi_{i'_1}\right)\Big]$$
$$+ \left[\left(\int_0^s d\xi_{i_k}\dots d\xi_{i_1}\right)\left(\int_0^s d\xi_{i'_{k'-1}}\dots d\xi_{i'_1}\right)\right]\int_0^t d\xi_{i'_k} .$$

Ce qui redonne la définition par récurrence du produit de Hurwitz.

Corollaire 4.3. - *La fonctionnelle multiple de deux fonctionnelles analytiques rationnelles (resp. polynômiales) est de même nature.*

c) Approximations des fonctionnelles

Soit C l'espace des chemins continus muni de la topologie de la convergence compacte : une suite de chemins est dite converger vers un chemin ssi elle le fait dans tout domaine compact de l'espace affine. Compte tenu de la clôture par addition et multiplication,il faut, pour appliquer le théorème d'approximations de Weierstrass-Stone (cf. Bourbaki |4|), vérifier la propriété de séparabilité suivante : il existe une fonctionnelle (polynômiale) prenant des valeurs distinctes pour deux chemins

----

(1) Le produit de Hurwitz (*shuffle product* dans la littérature américaine) associe à deux mots un polunôme homogène, défini par récurrence sur la longueur : $1 ш 1=1$, $\forall_X x$ $1 ш x=x ш 1=x$, $\forall_X x,y$ $\forall_{X^*} u,v$ $ux ш vy=(u ш vy)x + (ux ш v)y$.
Par linéarité, on prolonge à K<<X>>:$s ш s'=\sum\{(s,u)(s',v)u ш v \mid u,v \in X^*\}$. On montre (cf. |18|) que le produit de Hurwitz de deux séries rationnelles est une série rationnelle.

distincts C et C' (c'est-à-dire non déductibles l'un de l'autre par translation) de $\mathcal{C}$. Or, d'après un résultat dû à Chen |8|, il existe au moins un mot $w_0 = x_{i_k}\ldots x_{i_1} \in X^*$ tel que :

$$\int_C d\xi_{i_k}\ldots d\xi_{i_1} \neq \int_{C'} d\xi_{i_k}\ldots d\xi_{i_1}$$

Théorème 4.4. - *Dans tout domaine compact de l'espace des chemins continus, toute fonctionnelle continue peut être uniformément approchée par des fonctionnelles analytiques, que l'on peut choisir rationnelles ou polynômiales.*

d) Séries de Volterra et séries formelles non commutatives

Utilisant les travaux de Volterra (cf. Volterra et Pérès |39|, Lévy |29|), Wiener, en 1942, a introduit (cf. Wiener |41|, Barrett|3|), pour représenter les asservissements non linéaires, ce qu'on appelle aujourd'hui séries de Volterra et qui a la forme suivante :

$$\text{(IV.2)}\quad y(t)=h_0(t)+\int_0^t h_1(t,\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1+\int_0^t\int_0^t h_2(t,\tau_2,\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1+\ldots\quad ,$$

où, pour simplifier, on suppose l'entrée $u:\underline{R}_+\to K$ scalaire.
Parallèlement à nos considérations sur les fonctionnelles, un asservissement, ici encore à entrée et sortie scalaires, est dit analytique ss'il admet une série génératrice $\underline{G}\in K\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$ de sorte que (cf. par. III.3)

$$\text{(IV.3)}\qquad y(t) = (\underline{G},1) + \sum_{j=0,1}(\underline{G},x_j)\int_0^t d\xi_j + \sum_{j_1 j_2}(\underline{G},x_{j_2}x_{j_1})\int_0^t d\xi_{j_2}d\xi_{j_1}+\ldots$$

où $\xi_0 = t$, $\quad \xi_1(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$.

Théorème 4.5. - *Un asservissement donné par une série de Volterra est analytique si et seulement si l'on peut prendre pour les noyaux des fonctions analytiques.*(1)

Preuve. - La formule (IV.2) peut être précisée en "triangularisant" les noyaux: pour tout $n\geqslant 1$, on peut remplacer $h_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1)$ par $h'_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1)$ qui est nul si l'on n'a pas $t>\tau_n>\ldots>\tau_1$. On égale (IV.2) et (IV.3) :

$$h_0(t) = \sum_{k>0}(\underline{G},x_0^k)t^k/k!$$

....

$$h'_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1) = \sum_{k_0,\ldots k_n\geqslant 0}\frac{1}{k_0!\ldots k_n!}(\underline{G},x_0^{k_n}x_1\ldots x_1 x_0^{k_0})(t-\tau_n)^{k_n}\ldots(\tau_2-\tau_1)^{k_1}\tau_1^{k_0}.$$

Remarques. - (i) Pour les asservissements analytiques rationnels, en vertu de résultats dus à Bruni, Di Pillo, Koch |7| et d'Alessandro, Isidori, Ruberti |2|, il vient :

$$h'_n(t,\tau_n,\ldots,\tau_1) = \lambda[e^{A_0(t-\tau_n)}A_1\ldots e^{A_0(\tau_2-\tau_1)}A_1 e^{A_0\tau_1}]q(0)$$

----

(1) Comme nous ignorons les questions de convergence, nous entendons par analytique le fait pour les noyaux $h_0,h_1,h_2,\ldots$ d'être représentés par des séries entières en les variables.

où A_0, A_1, ,q(0) ont même signification qu'en (III.1).

(ii) Comme pour la remarque finale du paragraphe III.f, il y a stationnarité ssi le support de la série génératrice $\underline{G}$ vérifie :

$$\mathrm{supp}\ \underline{G} \subseteq \{x_0, x_1\}^* x_1$$

(iii) Une représentation par un asservissement régulier autonome de la forme (III.1) d'un asservissement analytique irrationnel exigerait un espace d'état de dimention infinie. Question que nous n'aborderons pas, d'autant plus qu'elle est loin d'être éclaircie dans le cas classique des systèmes linéaires stationnaires à fonctions de transfert irrationnelles.

(iv) On dispose ainsi d'un outil algébrique pour les asservissements non linéaires et (ou) non stationnaires, qui devrait jouer, du moins nous l'espérons, un rôle d'une importance égale à celui des fonctions de transfert dans le cas linéaire et stationnaire.

La multiplication de deux asservissements d'entrée u et de sortie y_1, y_2 donne l'asservissement d'entrée u, ayant pour sortie, à l'instant t, $y_1(t)y_2(t)$. D'après proposition et corollaire 4.2. et 4.3., il vient :

Proposition 4.6. - *L'asservissement multiple de deux asservissements analytiques est aussi analytique, de série génératrice le produit de Hurwitz des deux séries génératrices.*

Corollaire 4.7. - *L'asservissement multiple de deux asservissements analytiques rationnels (resp. polynômiaux) est de même nature.*

Remarque. - Deux asservissements analytiques en parallèle donnent un asservissement analytique de série génératrice la somme des deux séries génératrices.

e) Approximations des asservissements.

Pour les fonctionnelles, nous sommes restés dans le champ des fonctions continues, bien trop restreint ici, ne serait-ce que pour les applications comme le filtrage statistique. Soit donc $L^\alpha(\alpha \geq 1)$ l'espace des fonctions de $\underline{R}_+$ dans K de puissance α localement intégrable et muni de la topologie de la convergence sur tout compact. L^∞ est l'ensemble des fonctions continues.

Un asservissement à entrée et sortie scalaire peut être considéré comme une application de $\underline{R}_+ \times L^\alpha$ dans K, qui obéit au principe de causalité : la sortie y(t) ne dépend de l'entrée $u(\tau)$ que pour $0 \leq \tau \leq t$. Il est dit continu si c'est une application continue de $\underline{R}_+ \times L^\alpha$ dans K .

Théorème 4.8.- *Dans tout domaine compact de $\underline{R}_+ \times L^\alpha$ tout asservissement continu peut être uniformément approché par des asservissements analytiques, que l'on peut choisir rationnels ou polynômiaux.*

Preuve. - Compte tenu de la cloture par addition et multiplication, il faut, pour appliquer le théorème de Weierstrass-Stone, vérifier la propriété de séparabilité suivante : il existe un asservissement (polynômial) prenant des valeurs distinctes

pour des entrées distinctes $u_i : [0,t_i] \to K \qquad (i = 1,2)$
Si $t_1 \neq t_2$, il suffit de prendre l'asservissement de série génératrice x_0.
Si $t_1 = t_2 = t$, il existe, en vertu de la densité des polynômes, au moins un entier k tel que :

$$\int_0^t u_1(\tau)\tau^k d\tau \neq \int_0^t u_2(\tau)\tau^k d\tau_k$$

On prend l'asservissement de série génératrice $x_1 x_0^k$.

Corollaire 4.9. - *Dans tout domaine compact de* $\underline{R}_+ \times L^\alpha$, *tout asservissement continu peut être uniformément approché par des asservissements réguliers réalisables, que l'on peut choisir nilpotents.*

Remarques. - (i) Ce résultat nous paraît fournir un cadre du plus grand intérêt pour l'étude effective, c'est-à-dire algorithmique et numérique, des systèmes non linéaires et non stationnaires. On sait, en effet, que c'est la généralisation, due à Fréchet (cf. Volterra et Pérès |39|, p. 61, Lévy |29|,p.78) du théorème de Weiertrass aux fonctionnelles, qui a justifié l'introduction des séries de Volterra (cf. Barrett |3|). Le calcul des noyaux des séries de Volterra, même tronquées, a toujours posé un redoutable problème, même si, dans le cas stationnaire, la transformation de Laplace multidimensionnelle a constitué un outil d'une certaine efficacité (cf. George |24|, Lubbock, Bansal |31|). Qu'il y ait ou non stationnarité des séries formelles non commutatives permettent un calcul beaucoup plus simple qui, en |22|, sera appliqué aux équations différentielles non linéaires.

(ii) L'approximation dans L^2 conduit à considérer les problèmes de filtrage statistique non linéaire. Les travaux de Marcus |44| montrent, en substance, que le filtrage des asservissements polynômiaux nilpotents est relativement aisé, ce qui fournit un cadre nouveau, peut être de la plus haute importance.

(iii) Le théorème d'approximation a été publié en |21| pour la topologie compacte des fonctions continues. Peu après, et indépendamment, il a été retrouvé par Sussmann |42| pour la topologie de la convergence vague des fonctions continues, ce qui implique le résultat de |21|. La méthode de Sussmann différente de la nôtre s'inspire de la théorie de la représentation des groupes de Lie, et plus précisément du théorème classique de Peter-Weyl. Krener |43| montre que tout système de la forme

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\ B_i(q) \\ y(t) = C(q(t)) \end{cases}$$

où la commande apparaît linéairement, peut être approximé par des asservissements réguliers réalisables *(1)*.

----

(1) L'auteur a eu connaissance des résultats de Sussmann et Krener lors du présent symposium.

Terminons en justifiant notre remplacement par le terme "régulier" de ce qui par ailleurs est appelé asservissement "bilinéaire". Ce dernier adjectif, qui veut caractériser le produit du vecteur d'état et de l'entrée, nous semble mal venu car l'application entrée-sortie définie par le système n'est pas nécessairement bilinéaire. De plus, l'appellation de système "bilinéaire" a été employée par divers auteurs (R.E. Kalman, M.A. Arbib, G. Marchesini) lorsque cette application est précisément bilinéaire. Volterra (cf. Volterra et Pérès |39|, chap. III) appelle "régulières" les fonctionnelles homogènes intervenant dans la formule (IV.2). Le terme "régulier" a aussi l'avantage d'insister sur l'absence de singularités.

V. - Remarques sur la notion d'espace d'état

Nous ne consacrerons à ces remarques que quelques lignes, car le faire de manière approfondie nous mènerait par trop loin.

C'est Kalman |26| qui, à partir de 1960, a surtout contribué à populariser la notion d'espace d'état pour les systèmes linéaires, et les concepts y afférents de commandabilité et d'observabilité. Il faut constater que les propriétés très remarquables du cas linéaire, notamment stationnaire, ont induit bien des gens à essayer de les généraliser sans examen à d'autres cas. Ainsi, on a souvent voulu définir le fait pour un espace d'état d'être réduit (ou minimal) par la propriété d'être complètement commandable et observable. C'est faux pour les asservissements réguliers. On utilise souvent de manière indistincte les termes de "non stationnaire" et "non autonome" (ou *time-varying*) . Il n'y a pas de mal dans le cas linéaire, mais, comme le montre la proposition 2.7., c'est inexact en général. Seule la stationnarité peut être définie de manière intrinsèque comme invariance par translation temporelle.

Il nous semble anormal que les discussions sur l'espace d'état, parues dans la littérature américaine, ne fassent, à notre connaissance, aucune allusion aux polémiques fort vives qui ont eu lieu au début du siècle à propos des phénomènes héréditaires *(1)* et dont on trouve un écho dans un livre |37| récent de Vogel, avec qui nous citerons le passage suivant de Picard |32| :

"... Dans cette étude, les lois exprimant nos idées sur le mouvement se sont trouvées condensées dans les équations différentielles, c'est-à-dire des relations entre les variables et leurs dérivées. Il ne faut pas oublier que nous avons en définitive formulé un principe de non-hérédité, en supposant que l'avenir d'un système ne dépend à un moment donné que de son état actuel, ou d'une manière plus générale (si on regarde les forces comme pouvant aussi dépendre des vitesses) que

----

(1) C'est pour étudier mathématiquement ces phénomènes que V. Volterra a introduit son calcul fonctionnel (voir, en particulier, le dernier chapitre du livre |38|)

que cet avenir dépend de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui précède. C'est une hypothèse restrictive et que, en apparence du moins, bien des faits contredisent. Les exemples sont nombreux, où l'avenir d'un système semble dépendre des états antérieurs : il y a hérédité. Dans des cas aussi complexes, on se dit qu'il faudra peut-être abandonner les équations différentielles, et envisager les équations fonctionnelles, où figureront des intégrales prises depuis un temps très long jusqu'au temps actuel, intégrales qui seront la part de cette hérédité. Les tenants de la mécanique classique pourront cependant prétendre que l'hérédité n'est qu'apparente et qu'elle tient à ce que nous portons notre attention sur un trop petit nombre de variables ...".
Comme l'écrivent Volterra et Pérès |39|,p. 165, la notion d'équation fonctionnelle "représente ... une extension, pour l'ordre infini, de la notion d'équation différentielle d'ordre fini" (voir aussi Vogel |37|, Fargue |14|. En terme philosophique, l'espace d'état (ou de phase) doit être introduit pour soi (*für sich*) et non considéré en soi (*an sich*).

Bibliographie

1 . - AGASANDJAN (G.A.) - Automata with a variable structure (en russe avec résumé en anglais). Dokl. Akad Nauk. SSSR, 1974, 1967, p.529-530.

2 . - ALESSANDRO (P. d'), ISIDORI (A.) et RUBERTI (A.) - Realization and structure theory of bilinear dynamical systems. SIAM J. Control,15,1963, p.567-615.

3 . - BARRETT(J.F.) - The use of functionnals in the analysis of non-linear physical models. J. Electronics Control, 15,1963, p. 567-615.

4 . - BOURBAKI (N.) - Topologie Générale (chap. 5 à 10). Hermann, Paris, 1974.

5 . - BROCKETT (R.W.) - On the algebraic structure of bilinear systems, in "Theory and Applications of Variable Structure Systems" (R.R. Mohler et A. Ruberti,éd.),p. 153-168. Academic Press, New York, 1972.

6 . - BROCKETT (R.W.) et WILLSKY (A.S.) - Some structural properties of automata defined on groups, in"Category Theory Applied to Computation and Control" (E.G. Manes, éd.) p.112-118. Lect. Notes Comput. Sci. 25 Springer-Verlag, Berlin, 1975.

7 . - BRUNI (C.), DI PILLO (G.) et KOCH (G.) - Bilinear systems : an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications. IEEE Trans. Autom. Contr., 19, 1974, p. 334-348.

8 . - CHEN (K.T.) - Integration of paths, a faithful representation of paths by non-commutative formal power series. Trans. Amer. Math. Soc. 89, 1958, p. 395-407.

9 . - CHEN (K.T.) - Algebraic paths, J. Algebra, 10, 1968, p. 8-36.

10 . - CHOMSKY (N.) - Aspects of the theory of syntax. M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1965.

11 . - CHOMSKY (N.) et SCHÜTZENBERGER (M.P.) - The algebraic theory of context-free languages, in "Computer Programming and Formal Systems" (P. Braffort et D. Hirschberg, éd.), p. 118-161. North-Holland. Amsterdam. 1963.

12 . - DAUSCHA (W.), NÜRNBERG (G.), STARKE (P.H.) et WINKLER (K.D.) - Theorie der determinierten zeitvariabeln Automaten. Elektron. Informationsverarbeit. Kybern., 9, 1973, p. 455-511.

13 . - EILENBERG (S.)- Automata, languages and machines, vol. A. Academic Press, New York, 1974.

14 . - FARGUE (D.) - Réductibilité des systèmes héréditaires. Internat. J. Non-Linear Mechanics, 9 , 1974, p. 331-338.

15 . - FLIESS (M.) - Deux applications de la représentation matricielle d'une série rationnelle non commutative. J. Algebra, 19, 1971, p. 344-353.

16 . - FLIESS (M.) - Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires. C.R. Acad. Sc. Paris, A-277, 1973, p. 923-926.

17 . - FLIESS (M.) - Sur les systèmes dynamiques bilinéaires qui sont linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, A-278, 1974, p. 1147-1149.

18 . - FLIESS (M.) - Sur divers produits de séries formelles. Bull. Soc. Math. France, 102, 1974, p. 181-191.

19 . - FLIESS (M.) - Matrices de Hankel. J. Math. Pures Appl., 53, 1974, p. 197-222.

20 . - FLIESS (M.) Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires, non autonomes, à temps discret ; application aux systèmes linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, A-279, 1974, p. 243-246.

21 . - FLIESS (M.) - Séries de Volterra et séries formelles non commutatives. C. R. Acad. Sc. Paris, A-280, 1975, p. 965-967.

22 . - FLIESS (M.) - Un calcul symbolique non commutatif pour les asservissements non linéaires et non stationnaires. 7e Conf. IFIP Techn. Optim., Nice (1975) à paraître aux Lect. Notes Comput. Sci., Springer-Verlag. Berlin.

23 . - GANTMACHER (F.R.) - Théorie des matrices (traduit du russe), t. 2. Dunod, Paris, 1966.

24 . - GEORGE (D.A.) - Continuous non-linear systems. Techn. Rep., Research Lab. Electronics, M.I.T. , Cambridge (Mass.),1959.

25 . - ISIDORI (A.) - Direct contruction of minimal bilinear realizations from nonlinear input/output maps. IEEE Trans.Autom. Contr., 18, 1973,p.626-631.

26 . - KALMAN (R.E.) - On the general theory of control systems. Proc. Ist IFAC Congress, Moscow(1960), p. 481-492, Butterworths,London, 1960.

27 . - KALMAN (R.E.), FALB (P.L.) et ARBIB (M.A.) - Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill, New-York, 1969.

28 . - KAPLANSKY (I.) - Fields and rings. University of Chicago Press, Chicago, 1969.

29 . - LÉVY (P.) - Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris, 1951.

30 . - LO (J.T.H.) et WILLSKY (A.S.) - Estimation for rotational processes with one degree of freedom-Part I : Introduction and continuous-time processes. IEEE Trans. Contr., 20, 1975, p. 10-21

31 . - LUBBOCK (J.K.) et BANSAL (U.S.) - Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equations. Proc. IEE, 116, 1969, p. 2075-2082.

32 . - PICARD (E.)-La mécanique classique et ses approximations successives. Rivista Scienza, 1, 1907, p. 4-15

33 . - REE (R.) - Lie elements and an algebra associated with shuffles. Annals Math., 68, 1958, p. 210-220.

34 . - SCHÜTZENBERGER (M.P.)-On the definition of a family of automata. Inform. Contr., 4, 1961, p. 245-270.

35 . - THOM (R.) - Stabilité structurelle et morphogénèse. Benjamin, Reading (Mass.) 1972.

36 . - THOM (R.) - Modèles mathématiques de la morphogénèse.Union Générale d'Editions, Paris, 1974.

37 . - VOGEL (T.) - Pour une théorie mécaniste renouvelée. Gauthier-Villars, Paris, 1973.

38 . - VOLTERRA (V.) - Leçons sur les fonctions de lignes. Gauthier-Villars, Paris, 1913.

39 . - VOLTERRA (V.) et PÉRÈS (J.) - Théorie générale des fonctionnelles. t.1, Gauthier-Villars, Paris, 1936.

40 . - WEISS (L.) - Controllability, realization and stability of discrets-time systems. SIAM J. Contr., 10, 1972, p. 230-251.

41 . - WIENER (N.) - Nonlinear problems in random theory. M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1958.

42 . - SUSSMANN (H.J.)-Semigroup representation, bilinear approximation of input/ output maps, and generalized inputs. Dans ce volume.

43 . - KRENER (A.J.) - Bilinear and nonlinear realizations of input/output maps. SIAM J. Contr., 13, 1975, p. 827-834.

44 . - MARCUS (S.I.) - Estimation and analysis of nonlinear stochastic systems. Ph. D. Thesis, Dpt. of Electrical Engineering, M.I.T., Cambridge (Mass.), 1975. Voir aussi l'article de S.I. MARCUS et A.S. WILLSKY (Algebraic structure and finite dimensional nonlinear estimation) dans ce volume.