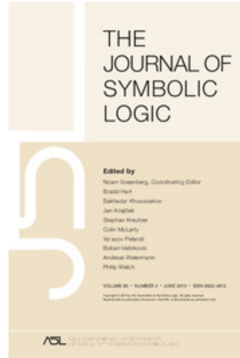

Théories instables

Bruno Poizat

The Journal of Symbolic Logic / Volume 46 / Issue 03 / September 1981, pp 513 - 522
DOI: 10.2307/2273753, Published online: 12 March 2014

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 46, Number 3, Sept. 1981

THÉORIES INSTABLES

BRUNO POIZAT

L'absence ou la présence de la propriété d'indépendance, introduite par Shelah, est sans aucun doute une mesure significative de la complexité, du point de vue de la théorie des modèles, d'une théorie instable. Il importe donc de distinguer les théories qui ont cette propriété de celles qui ne l'ont pas; le critère de Keisler [1] et de Shelah [5], qui consiste à compter le nombre de types qu'on peut obtenir sur un ensemble de paramètres de cardinal λ, n'emporte la décision que si l'on nie assez brutalement l'hypothèse du continu généralisée. Je propose ici de compter, étant donnée une partie X, de cardinal λ, d'un espace de types $S_1(M)$, quel peut être le cardinal de l'adhérence de X; ce point de vue équivaut au précédent si la théorie T est stable (voir la remarque après le Théorème 7); et si T n'a pas la propriété d'indépendance ce cardinal est au plus 2^λ, tandis que si T a la propriété d'indépendance il peut atteindre 2^{2^λ} (Théorème 7). Cela donne, indépendamment d'hypothèses de théorie des ensembles, une mesure quantitative de la plus grande complexité des espaces de types s'il y a propriété d'indépendance; et sous la forme du Théorème 8, cela devient un test très maniable dans les situations concrètes, car l'expérience m'a prouvé que les cohéritiers d'un type sont toujours faciles à déterminer.

Dans une première section, je considère un type complet p au dessus d'un modèle M d'une théorie complète T, et parmi les fils de p sur une extension élémentaire de M j'en distingue certains que j'appelle fils spéciaux de p: cette notion est naturelle et utile pour la suite, car le critère que j'ai décrit revient à prouver l'abondance de certains fils spéciaux d'un même type; on notera au passage le Théorème 3.

Le théorème de caractérisation de la propriété d'indépendance est prouvé dans une deuxième section, grâce à un résultat de combinatoire (Théorème 6); j'y montre aussi, à titre d'illustration, qu'un ordre total n'a jamais la propriété d'indépendance.

Enfin, dans une troisième partie j'étudie les suites indicernables et leur rapport avec les fils spéciaux; je prouve par exemple que si T est instable, sans propriété d'indépendance, il existe une suite infinie formée d'éléments (et non de uples) indicernable dans l'ordre et non totalement (Lemme 8).

La lecture de cet article ne demande pas de connaissances approfondies en stabilité; j'estime qu'au contraire il peut servir d'initiation à ce domaine: il suffit de savoir ce qu'est un type et une suite indicernable. Il est à peu près auto-contenant, comme disent les Anglais, si ce n'est que je me suis abstenu de répéter les

Received June 18, 1979.

propriétés élémentaires des héritiers, cohéritiers, types stables, etc., qui n'interviennent pas dans la démonstration du résultat principal, et qu'on trouve dans les premières pages de [2], [3], [4]; en cas d'obscurité dans les définitions ou de lacunes dans les démonstrations, on se reportera à ces ouvrages; dans les cas désespérés on pourra consulter [5].

Un dernier mot avant d'entrer dans le vif du sujet: le lecteur pourra s'étonner de ce que je privilégie les types complets au dessus des modèles; c'est que dans le cas des théories stables leurs propriétés relativement à la déviation ("forking" de Shelah) sont beaucoup plus faciles à établir que pour les types complets au-dessus d'un ensemble quelconque de paramètres; et ici ce n'est même plus une question de facilité, mais de possibilité; celui qui voudra construire une théorie générale quelque peu semblable à celle de la déviation des types stables devra, selon moi, franchir les deux obstacles suivant:

La relation "il existe un modèle M tel que a et b aient même type sur M" n'est pas en général une relation d'équivalence (alors que dans le cas stable elle ne signifie rien d'autre que a et b ont même type fort sur $\emptyset$, au sens de Shelah); par exemple si T est la théorie des algèbres de Boole atomiques infinies, et si a et b sont infinis et co-infinis, cette relation signifie qu'il y a une infinité d'atomes dans l'intersection de a et de b, ou bien dans celle de leurs compléments.

Il existe une théorie T (algèbre de Boole atomique infinie), avec un type $p \in S_1(\emptyset)$ ("x est un atome"), ayant des modèles sur lesquels tout fils de p a autant de conjugués qu'on veut: une propriété analogue à celle du Théorème 4 ne peut servir à distinguer des fils spéciaux de p.

§**1. Types au dessus des modèles.** Dans ce qui suit, T désigne une théorie complète, sans modèles finis; $M, N, \ldots$ seront des modèles de T; $S_1(M)$ désigne l'ensemble des types complets en une variable, notée systématiquement x, avec paramètres dans M, muni de la topologie induite par les formules à paramètres dans M. Si $M \prec N$, $q \in S_1(N)$, et si p est la restriction de q à M—ensemble des formules à paramètres dans M satisfaites par q—je dirai que q est un fils de p. Sauf avis contraire, "type" signifiera "type complet".

DÉFINITION 1. Soient $M \prec N$, q dans $S_1(N)$, de restriction p à M; q est dit M-spécial, ou encore fils spécial de p, s'il existe une extension élémentaire P de N réalisant tous les n-types sur M, et un fils r de q dans $S_1(P)$, tels que si $\bar{a}$, $\bar{b}$ sont dans P, ont même type sur M et si $r \vdash f(x, \bar{a})$, alors $r \vdash f(x, \bar{b})$. (Dans le langage de Shelah: r does not split over M.)

On appellera M-définition (infinitaire) de r la correspondance qui à toute formule $f(x, \bar{y})$ associe l'ensemble des types sur M des $\bar{b}$ tels que $r \vdash f(x, \bar{b})$.

LEMME 1. *p est fils spécial de lui-même.*

$\triangleright$ Il suffit de montrer que si $p \in S_1(M)$ et $M \prec N$, il existe un fils q de p sur N tel que le fait que $q \vdash f(x, \bar{a})$ ne dépende que du type de $\bar{a}$ sur M, soit encore que la théorie comprenant p, le diagramme de N, et les axiomes $f(x, \bar{a}) \leftrightarrow f(x, \bar{b})$ chaque fois que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur M, est consistante: or un fragment fini de cette théorie ne fait intervenir qu'un fragment fini de p, qui, comme M est un modèle, est satisfait par un x dans M, qui manifestement satisfait les autres axiomes. $\triangleleft$

LEMME 2. *Si r est fils de q, q fils de p et r fils spécial de p, alors q est fils spécial de p.*

$\triangleright$ Evident. $\triangleleft$

LEMME 3. *Soient $M \prec N \prec P, p \in S_1(M), q \in S_1(N)$, fils spécial de p; alors q a un fils r sur P qui est M-spécial.*

$\triangleright$ Soient P' et r' le modèle et le fils de q donnés par la définition des fils spéciaux: le type r obtenu en utilisant sur P la définition infinitaire de r' est consistant, puisque tous les cas possibles de types de paramètres sont prévus dans P', et est spécial. $\triangleleft$

LEMME 4. *Si dans les hypothèses du Lemme 3 le modèle N réalise tous les n-types sur M, alors le fils spécial de q sur P est unique.*

$\triangleright$ Evident. $\triangleleft$

Si donc $p \in S_1(M)$ et N est une extension élémentaire de M assez saturée, on obtient tous les fils spéciaux de p sur N: augmenter N n'en fait pas apparaître de nouveaux; et lorsque je parlerai du nombre de fils spéciaux de p, j'aurai en vue cette famille de fils spéciaux définitifs, c'est-à-dire ceux qu'on obtient sur une extension assez saturée de M. Le nombre de fils spéciaux est majoré par le nombre de définitions possibles, qui est, si $|M| = \lambda \geq |T|$, 2^{2^λ}.

Convention. Si $M \subset A \subset N$, et si $q \in S_1(N)$ est M-spécial, je dirai que sa restriction à A est M-spéciale, même si A n'est pas un modèle.

DÉFINITION 2. Si $M \prec N$, N réalise tous les n-types sur M, et $q \in S_1(N)$ est M-spécial, la suite de Morley de (q, M) est par définition la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ainsi construite: on réalise q en a_0, puis on réalise en a_1 l'unique fils M-spécial de q sur $N \cup \{a_0\}$, et ainsi de suite. Cette suite est évidemment indicernable dans l'ordre au dessus de N.

DÉFINITION 3. Si $M \prec N$, $q \in S_1(N)$ est dit cohéritier de sa restriction à M si tout fragment fini de q est satisfait par un élément de M; ce qui signifie que q, dans $S_1(N)$, appartient à l'adhérence de l'ensemble des types des éléments de M.

En utilisant d'une part la compacité des espaces de types, d'autre part le fait que les types réalisés sont denses dans $S_1(M)$, on montre facilement les analogues des Lemmes 1, 2, 3, pour les cohéritiers (si un détail vous échappe, voir [2], [3], [4]); remarquons que le fils spécial que met en évidence le Lemme 1 est un cohéritier. Et:

THÉORÈME 1. *Un cohéritier est spécial.*

$\triangleright$ Comme on peut toujours étendre un cohéritier en un cohéritier sur un modèle assez saturé, il suffit de voir que si q est cohéritier de sa restriction à M, $q \vdash f(x, \bar{a})$ ne dépend que du type de $\bar{a}$ sur M: or si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur M, $f(x, \bar{a}) \wedge \neg f(x, \bar{b})$ n'est satisfait par aucun élément de M. $\triangleleft$

DÉFINITION 4. 1°. Si $M \prec N$, $q \in S_1(N)$ est dit héritier de sa restriction p à M si chaque fois que $q \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$, alors il existe $\bar{b}'$ dans M tel que $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$.

2°. $p \in S_1(M)$ est dit définissable (Gaifman, Shelah) si pour toute formule $f(x, \bar{y})$, il existe une formule $df(\bar{y})$ avec paramètres dans M, telle que pour tout $\bar{a}$ dans M $p \vdash f(x, \bar{a})$ ssi $M \vdash df(\bar{a})$.

La notion d'héritier est duale de celle de cohéritier: le type de x sur N hérite de sa restriction à M ssi le type de N sur $M \cup \{x\}$ cohérite de sa restriction à M (le cohéritier d'un type en plusieurs variables étant défini de façon analogue à celui du type en une seule variable). Et dire que p est définissable signifie que, sur toute extension de M, p n'a qu'un seul héritier, qui est le type obtenu en utilisant sa définition (voir [2], [3], [4]); l'unique héritier d'un type définissable est évidemment spécial; par contre, si p n'est pas définissable, il existe un modèle sur lequel il a autant d'héritiers qu'on veut, et il y en a donc de non-spéciaux.

DÉFINITION 5. $p \in S_1(M)$ est stable si tous ses fils sont définissables; T est stable si pour tout M et tout $p \in S_1(M)$ p est définissable.

Pour la caractérisation des théories stables par le nombre de types que peut produire un ensemble de paramètres de cardinal λ, voir [2], [3], [4], [5]; on montre sans peine que si T est stable les n-types sont aussi définissables, si bien que la stabilité équivaut à la propriété suivante: pour tout modèle M de T, tout $\bar{a}$ dans une extension élémentaire de M, et toute formule $f(\bar{x}, \bar{y})$ l'ensemble des $\bar{x}$ de M^n qui satisfont $f(\bar{x}, \bar{a})$ est défini par une formule à paramètres dans M.

Un héritier d'un type instable est instable.

LEMME 5. *Soient $M \prec N$, tels que si $\bar{a} \in N$, N réalise tous les types sur $N \cup \{\bar{a}\}$; soient p dans $S_1(M)$, q dans $S_1(N)$, q étant fils spécial de p; si q est définissable, p est définissable et q est son héritier.*

$\rhd$ Pour toute formule $f(x, \bar{y})$, le fait que $\bar{y}$ satisfasse la définition $df(\bar{y})$ de q ne dépend que du type de $\bar{y}$ sur M; par conséquent $df(\bar{y})$ équivaut à une formule à paramètres dans M. (En effet les deux compacts de $S(N)$ définis par $df(\bar{y})$ et $\neg df(\bar{y})$ se projettent dans $S(M)$ en deux fermés disjoints, qui sont donc ouverts et fermés.) $\lhd$

THÉORÈME 2. *Un type stable qu'un seul n'a fils spécial, son héritier; en particulier son seul héritier est aussi son seul cohéritier ("forking symmetry", de Shelah); un fils spécial d'un type instable est instable.*

$\rhd$ Si p est stable, tout fils q de p est définissable: d'après le lemme, si q est spécial, c'est l'héritier de p. Si p a un fils spécial q stable, sur un modèle assez saturé, q est définissable et c'est l'héritier de p, qui est donc stable. $\lhd$

LEMME 6. *Soient $M \prec N$, $|M| < \lambda$, N étant λ-saturé et λ-fortement-homogène (i.e. deux μ-suites, où $\mu < \lambda$, d'éléments de N de même type se correspondent par un automorphisme de N); soient A, $M \subset A \subset N$, $|A| < \lambda$, p et q dans $S_1(A)$, distincts, mais de même restriction à M, p étant M-spécial; soit X une partie de N contenant toutes les réalisations de p et aucune de q, et soit Y une partie de N contenant toutes les réalisations de q et aucune de p. Alors X et Y ont chacun au moins λ conjugués distincts par les M-automorphismes de N.*

$\rhd$ Choisissons une M-définition infinitaire d d'un fils M-spécial de p sur un modèle assez saturé; nous construisons par récurrence sur $\mu < \lambda$ une suite a_μ d'éléments de N, et une suite A_μ de parties de N de la manière suivante: $A_0 = A$, a_0 est une réalisation de q; a_μ réalise sur $\bigcup_{\nu<\mu} A_\nu$ le type obtenu par l'usage de la définition d, et comme le type de a_μ sur M est la restriction de q à M, il existe A_μ, de même type sur M que A, tel que le type de a_μ sur A_μ soit le type correspondant à q. Comme N est saturé cette construction se fait bien dans N, et comme il est homogène il existe un M-automorphisme σ_μ transportant A sur A_μ; si $\nu < \mu$, $a_\mu \in \sigma_\nu X$, $a_\mu \notin \sigma_\mu X$, $a_\mu \in \sigma_\mu Y$, $a_\mu \notin \sigma_\nu Y$. $\lhd$

THÉORÈME 3. *Soient $M \prec N$, $|M| < \lambda$, N étant λ-saturé et λ-fortement-homogène; si $X \subset N$ peut être déplacé par M-automorphisme de N, il a au moins λ conjugués distincts par ces automorphismes.*

$\triangleright$ *1er cas.* Il existe un ensemble A, $M \subset A$, $|A| < \lambda$, tel que l'appartenance à X ne dépend que du type sur A; si X n'est pas fixe par M-automorphisme, cette appartenance ne dépend pas que du type sur M, et il existe p et q dans $S_1(A)$, de même restriction à M, tels que X contienne toutes les réalisations de p et aucune de celles de q; on peut évidemment supposer que l'un des deux est spécial, et utiliser le Lemme 6.

2nd cas. Sinon on peut construire deux suites a_μ, b_μ, $\mu < \lambda$, a_μ et b_μ ayant même type sur $M \cup \{\dots, a_\nu, \dots\}_{\mu<\mu}$, $a_\mu \in X$, $b_\mu \notin X$. Par homogénéité, il existe un automorphisme σ_μ de N, fixant M et les a_ν pour $\nu < \mu$, et envoyant b_μ sur a_μ; et pour $\nu < \mu$, $a_\nu \notin \sigma_\nu X$, $a_\nu \in \sigma_\mu X$. $\triangleleft$

Cela permet de caractériser les fils spéciaux:

THÉORÈME 4. *Soient $M \prec N$, $|M| < \lambda$, N étant λ-saturé et λ-fortement-homogène, et $q \in S_1(N)$. Si q est M-spécial, il est invariant par tout M-automorphisme de N; si q n'est pas M-spécial, il a au moins λ conjugués distincts par ces M-automorphismes.*

$\triangleright$ Par généralisation du Théorème 3 aux sous-ensembles X de N^n. $\triangleleft$

§2. La propriété d'indépendance.

DÉFINITION 6 (SHELAH). Une formule $f(\bar{x}, \bar{y})$ est dite avoir la propriété d'indépendance si pour tout n l'axiome suivant, où les $\bar{x}$ sont indexés par n, les $\bar{y}$ par 2^n, est vérifié:

$$(\exists \bar{x}_0) \cdots (\exists \bar{x}_{n-1})(\exists \bar{y}_\varnothing) \cdots (\exists \bar{y}_w) \cdots (\exists \bar{y}_n) \bigwedge_{i \in w} f(\bar{x}_i, \bar{y}_w) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \neg f(\bar{x}_i, \bar{y}_w).$$

On dit que T a la propriété d'indépendance si une formule $f(x, \bar{y})$, où x est de longueur 1, l'a.

THÉORÈME 5. *La propriété d'indépendance est symétrique en $\bar{x}$ et $\bar{y}$: si $f(\bar{x}, \bar{y})$ a cette propriété, pour tout n l'axiome suivant, où les $\bar{x}$ sont indexés par 2^n et les $\bar{y}$ par n, est vérifié:*

$$(\exists \bar{x}_\varnothing) \cdots (\exists \bar{x}_w) \cdots (\exists \bar{x}_n)(\exists \bar{y}_0) \cdots (\exists \bar{y}_{n-1}) \bigwedge_{i \in w} f(\bar{x}_w, \bar{y}_i) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \neg f(\bar{x}_w, \bar{y}_i).$$

$\triangleright$Indexons des $\bar{x}$ par des w dans 2^n et des $\bar{y}$ par des W dans 2^{2^n}; on a donc: $\cdots (\exists \bar{x}_w) \cdots (\exists \bar{y}_W) \cdots \bigwedge_{w \in W} f(\bar{x}_w, \bar{y}_W) \wedge \bigwedge_{w \notin W} \neg f(\bar{x}_w, \bar{y}_W)$, et il suffit de ne garder que les W qui sont des ultrafiltres. $\triangleleft$

DÉFINITION 7. Soit I un ensemble, P un ensemble de parties de I; un ultrafiltre sur P est par définition la trace sur P d'un ultrafiltre de parties de I, c'est-à-dire le choix, pour tout X de P, de X ou de son complément, de sorte qu'une intersection finie d'ensembles choisis soit toujours non vide.

THÉORÈME 6. *Si $P \subset 2^I$, $|I| = \lambda$, et s'il y a strictement plus de 2^λ ultrafiltres sur P, alors pour tout nombre entier n:*

(i) *il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans I, tels que pour tout $w \subset n$, il existe X_w dans P tel que $a_i \in X_w$ si $i \in w$, $a_i \notin X_w$ si $i \notin w$.*

(ii) *il existe $X_0, \dots, X_{n-1}$ dans P dont toutes les combinaisons booléennes consistantes sont non vides.*

$\triangleright$ Démontrons d'abord (i) par induction sur n; pour $n = 1$, c'est évident: on demande que P ait au moins deux éléments. Montrons maintenant le passage de n à $n + 1$; pour cela, nous nions la conclusion et nous cherchons à prouver qu'il n'y a pas plus de 2^λ ultrafiltres. A toute fonction ε de $n+1$ dans 2, on associe une relation $(n+1)$-aire r^ε entre les ultrafiltres sur P: $U_0, \ldots U_n$ satisfait r^ε s'il n'existe pas de X dans P tel que $X \in U_i$ si $\varepsilon(i) = 1$, $X \notin U_i$ si $\varepsilon(i) = 0$. Remarquons que notre hypothèse nous impose que tout $(n+1)$-uple d'ultrafiltres satisfasse au moins une de ces relations r^ε.

Un ultrafiltre principal sera l'ensemble des éléments de P contenant un point donné: il y en a au plus λ; supposons que nous connaissions le type sans quanteurs de U par rapport aux r^ε, avec comme paramètres les ultrafiltres principaux, et cherchons dans quelle mesure ce type détermine U. Pour tout n-uple $a_0, \ldots, a_{n-1}$ d'éléments de I, que nous assimilons aux ultrafiltres principaux qui leur sont associés, choisissons une fonction η de n dans 2, telle que pour au moins un des prolongements ε de η à $n+1$ le uple $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, U$ satisfasse r^ε; soit maintenant X dans P: si pour tout i compris entre 0 et $n-1$ $a_i \in X$ si $\eta(i) = 1$, $a_i \notin X$ si $\eta(i) = 0$, alors nous savons, suivant la valeur de ε en n, si c'est X ou son complément qui est dans l'ultrafiltre. Nous pouvons enlever de P tous les X dont la place dans l'ultrafiltre est ainsi déterminée par un n-uple de points de I; il nous reste un ensemble P' qui nie visiblement la conclusion du théorème à l'étape n: par hypothèse de récurrence, on ne fait pas plus de 2^λ ultrafiltres avec P'.

Et comme il y a au plus 2^λ types possibles pour U, on ne fait pas plus de 2^λ ultrafiltres sur P.

On passe de (i) à (ii) par une preuve semblable à celle du Théorème 5. $\lhd$

Question. Les conclusions du Théorème 6 restent-elles valables si on fait seulement l'hypothèse qu'il y a au moins $\mathrm{Ded}(\lambda)$ ultrafiltres, c'est-à-dire plus que le nombre de coupures d'un ordre total de cardinal λ?

THÉORÈME 7. *Soient M un modèle de T, $X \subset S_1(M)$, $|X| = \lambda \geq |T|$; alors:*

(i) *si T n'a pas la propriété d'indépendance, l'adhérence de X dans $S_1(M)$ est de cardinal au plus 2^λ;*

(ii) *si T a la propriété d'indépendance, on peut trouver un tel X dont le cardinal de l'adhérence est 2^{2^λ}.*

$\rhd$ (i) Considérons une formule $f(x, \bar{y})$, et l'ensemble P des traces sur X des ouverts-fermés définis par des formules $f(x, \bar{a})$, où $\bar{a}$ est dans M: comme $f(x, \bar{y})$ n'a pas la propriété d'indépendance le Théorème 6 nous interdit de faire plus de 2^λ ultrafiltres avec ces ensembles. Si p est adhérent à X, il y a donc au plus $(2^\lambda)^{|T|} = 2^{\lambda \times |T|} = 2^\lambda$ choix possibles pour le filtre des traces sur X des voisinages de p, c'est-à-dire pour p lui-même.

(ii) Si $f(x, \bar{y})$ a la propriété d'indépendance, par compacité il existe un ensemble I, $|I| = \lambda$, des élément a_i indexés par I, des uples $\bar{b}_w$ indexés par 2^I, tels que $\vdash f(a_i, \bar{b}_w)$ ssi $i \in w$; soit M un modèle de T contenant tous les $\bar{b}_w$, et soit X l'ensemble des types des a_i sur M. A tout ultrafiltre U de parties de I, associons le type incomplet p_U formés des formules $f(x, \bar{b}_w)$ où $w \in U$, et $\neg f(x, b_w)$ où $w \notin U$; chaque fragment fini de p_U est satisfait par un a_i, donc, par compacité, p_U se complète en un type q_U dans l'adhérence de X. Si $U \neq V$, p_U et p_V sont contradictoires, donc q_U et q_V sont distincts; le résultat suit de ce qu'il y a 2^{2^λ} ultrafiltres sur λ. $\lhd$

REMARQUE. Si T est stable, l'adhérence de X est de cardinal au plus $\lambda^{|T|}$; en effet, par compacité, on peut supposer que les éléments de X sont réalisés dans un modèle M de cardinalité λ (voir ci-après): il s'agit donc de compter les types qui cohéritent de leur restriction à M; mais vu l'unicité du cohéritier, c'est la même chose que de compter les types sur M!

THÉORÈME 8. (i) *Si T n'a pas la propriété d'indépendance*, et $p \in S_1(M)$, $|M| = \lambda \geq |T|$, *p n'a pas plus de 2^λ cohéritiers.*

(ii) *Si T a la propriété d'indépendance, pour tout $\lambda \geq |T|$, il existe M, $|M| = \lambda$, et $p \in S_1(M)$, tel que p ait 2^{2^λ} cohéritiers.*

$\triangleright$ (i) est conséquence directe du Théorème 7. Pour (ii), on considère $X \subset S_1(M)$, $|X| = \lambda$, $|\bar{X}| = 2^{2^\lambda}$; réalisons chaque type de X par un élément a d'une extension élémentaire N de M, et soit A l'ensemble des types des a sur N; l'image du compact $\bar{A}$ par l'application restriction de $S_1(N)$ à $S_1(M)$ doit être fermée, donc contient $\bar{X}$: par conséquent $|A| = \lambda$, $|\bar{A}| = 2^{2^\lambda}$. Si M' est un modèle de cardinal λ contenant tous les a, il y a 2^{2^λ} types (sur N!) qui cohéritent de leur restriction à M'; comme $|S_1(M')| \leq 2^\lambda$ (en fait $|S_1(M')| = 2^\lambda$), 2^{2^λ} d'entre eux ont même restriction p à M'. $\triangleleft$

Rappelons qu'une chaîne colorée est la structure formée d'un ordre total et d'un certain nombre de relations unaires; à titre d'illustration, montrons le:

THÉORÈME 9. *La théorie complète d'une chaîne colorée n'a jamais la propriété d'indépendance.*

REMARQUE. Keisler énonce un théorème analogue, mais en apparence seulement, car il ne considère que des formules sans quanteurs.

$\triangleright$ On montre facilement, par exemple par un va-et-vient de Fraïssé, que tout énoncé de la forme $x_1 < \cdots < x_n \wedge f(x_1, \ldots, x_n)$ équivaut à une disjonction d'énoncés de même rang de quantification que f de la forme $f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge f_{n-1}(x_{n-1}, x_n)$. On en déduit que si M est un modèle de notre théorie, N une extension élémentaire de M, c une coupure de M, alors la chaîne N' formée de M et des éléments de N qui sont dans c est aussi extension élémentaire de M. On en déduit que si $p \in S_1(M)$, et si c est la coupure que définit p sur M, il est possible de réaliser p dans une extension élémentaire de M qui n'ajoute à M qu'un infinité dénombrable de points qui sont tous dans la coupure c; qu'il y a au plus 2^ω types distincts correspondant à une même coupure; que $p \in S_1(M)$ n'a qu'au plus 2^ω cohéritiers sur toute extension élémentaire N, car, comme on doit adhérer à M, il n'y a qu'au plus deux possibilités pour la coupure du cohéritier. $\triangleleft$

Questions. 1° Une chaîne peut-elle être "multi-order" dans la classification de Keisler?

2°. Un groupe abélien ordonné peut-il avoir la propriété d'indépendance?

§3. Suites indicernables.

DÉFINITION 8. 1°. Soit s une suite d'éléments a_i d'un modèle M de T, indexée par un ensemble totalement ordonné I; s est dite sécable s'il existe $\bar{b}$ dans une extension élémentaire de M, et une formule $f(x, \bar{y})$, tels que $f(x, \bar{b})$, ainsi que sa négation, soient satisfaites par des éléments arbitrairement grands dans s.

2°. Si s est insécable, et si A est un ensemble de paramètres, le type moyen de s sur A est par définition l'ensemble, consistant et complet, des formules à paramètres dans A cofinalement vraies dans s.

THÉORÈME 10. *T a la propriété d'indépendance si et seulement si il existe une suite indicernable dans l'ordre (sur $\emptyset$) sécable.*

$\rhd$ Si T a la propriété d'indépendance, il existe $x_0, \ldots, x_n, \ldots, n \in \omega$, avec des $\bar{y}_w$, $w \in 2^\omega$, tels que $\vdash f(x_n, \bar{y}_w)$ ssi $n \in w$; en utilisant le théorème de Ramsey et la compacité, on fabrique une telle suite x_n indicernable, qui est donc sécable.

Supposons qu'il existe une suite indicernable sécable; il existe alors une suite indicernable a_n, $n \in \omega$, et $f(x, \bar{b})$, telle que $\vdash f(a_n, \bar{b})$ ssi n est pair. Je dis alors que pour tout $w \subset \omega$ l'ensemble des formules $f(a_n, \bar{y})$ si $n \in w$, $\neg f(a_n, \bar{y})$ si $n \notin w$, est consistant: pour le voir, il suffit d'en prendre un fragment fini, qui ne fait intervenir que les m premiers a_n, et de les remplacer, ce qui est légitime puisque la suite est indicernable, par une suite $a_{i_0}, \ldots, a_{i_{m-1}}$, où $i_0 < \cdots < i_{m-1}$, i_n étant pair si $n \in w$, impair si $n \notin w$, et d'interpréter $\bar{y}$ par $\bar{b}$. On obtient donc la propriété d'indépendance. $\lhd$

Si s est insécable, infinie et totalement indicernable, son type moyen ne dépend pas de l'ordre choisi pour énumérer ses éléments: il s'agit des formules qui sont vraies pour tous les éléments de s sauf un nombre fini; et:

LEMME 7. *Si s est infinie, insécable et totalement indicernable, et si $s \subset A$, le type moyen de s sur A est définissable.*

$\rhd$ A cause de la totale indicernabilité, pour toute formule $f(x, \bar{y})$ il existe n tel que pour tout $\bar{b}$, tous les éléments de s sauf au plus n satisfont $f(x, \bar{b})$, ou bien tous les éléments de s sauf au plus n satisfont $\neg f(x, \bar{b})$; on peut donc prendre pour $df(\bar{y})$ la formule avec paramètres $a_0, \ldots, a_{2n}$:

$$\bigvee_{0 \leq i_0 < \cdots < i_n \leq 2n} f(a_{i_0}, \bar{y}) \wedge \cdots \wedge f(a_{i_n}, \bar{y}). \quad \lhd$$

THÉORÈME 11. *Soient $p \in S_1(M)$, $M \prec N$, N réalisant tous les n-types sur M, et soit q un fils spécial de p sur N; si la suite de Morley de (q, M) est totalement indicernable (sur $\varnothing$) et insécable, alors p est définissable, et q est son héritier.*

$\rhd$ On réalise q en a_0 dans une extension N_0 de N réalisant tous les types sur N; puis on réalise en a_1, dans une extension N_1 de N_0 réalisant tous les types sur N_0, l'unique fils M-spécial de q sur N_0, etc. ...: la suite $s = a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ est (isomorphe à) la suite de Morley de (q, M). Sur le modèle N' réunion des N_n, l'unique fils M-spécial q' de q est le type moyen de s; comme il est définissable, la conclusion suit du Lemme 5. $\lhd$

THÉORÈME 12. *Si T est instable sans avoir la propriété d'indépendance, il existe une suite infinie d'éléments (et non de uples) indicernable dans l'ordre sur $\varnothing$ et non totalement indicernable; il existe une formule avec paramètres $f(x, y)$ qui ordonne un ensemble d'éléments infini.*

$\rhd$ Comme T est instable, il existe $p \in S_1(M)$ non définissable; d'après le Lemme 7, la suite de Morley d'un fils spécial de p, qui est insécable puisque T n'a pas la propriété d'indépendance, ne peut être totalement indicernable.

Prolongeons cette suite jusqu'à l'ordinal $\omega + \omega$; comme les transpositions d'éléments consécutifs engendrent le groupe des substitutions sur un nombre fini d'éléments, il doit exister une formule $f(x_0, \ldots x_n)$ vraie pour $a_0, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n$, et fausse pour $a_0, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n$; et la formule $f(a_0, \ldots, a_{i-1}, x, y, a_\omega, \ldots, a_{\omega+n-i-2})$ ordonne un ensemble infini. $\lhd$

REMARQUES. 1°. Dans la situation du Théorème 11, qui se présente en particulier lorsque p est stable, le type moyen de la suite de Morley de (q, M) est l'unique fils M-spécial de q; en général ce type moyen n'est pas M-spécial.

2°. Si $f(x, \bar{y})$ a la propriété d'indépendance, il est clair que la formule $g(x_1 {}^\frown \bar{y}_1, x_2 {}^\frown \bar{y}_2) = f(x_1, \bar{y}_2)$ ordonne un ensemble de uples infini; donc si T est instable, on peut toujours trouver pour n assez grand une suite infinie de n-uples indicernable dans l'ordre et non totalement; mais il existe des théories instables pour lesquelles aucun ensemble infini d'éléments ne peut être ordonné par une formule, dans lesquelles toute suite infinie d'éléments indicernable l'est totalement (voir [5, Théorème 4–8, p. 71]): ces théories ont donc la propriété d'indépendance.

LEMME 8. *Si T est instable, il existe M et $p \in S_1(M)$, p ayant au moins deux cohéritiers.*

$\triangleright$ D'après le Théorème 8, c'est vrai si T a la propriété d'indépendance. Supposons donc que T ne l'ait pas: il existe donc une formule avec paramètres $f(x, y)$ qui ordonne un ensemble infini; il est alors facile de construire un modèle M de T de cardinal λ, contenant un ensemble I de cardinal λ, ordonné par f suivant un type d'ordre ayant au moins λ^+ coupures, et indicernable suivant cet ordre.

Soient c une coupure de I, A sa classe inférieure, B sa classe supérieure; soient p^- le type moyen de A sur M, et p^+ le type moyen sur M de B ordonné dans l'autre sens (i.e. les énoncés à paramètres dans M vrais pour les éléments de B assez petits): je dis qu'il n'y a que λ coupures pour lesquelles p^- est différent de p^+; en effet, pour une telle coupure il doit exister $g(x)$ à paramètres dans M, et i, j dans I, tels que A soit formé des $k \leq i$, et des k compris entre i et j satisfaisant g.

Soit donc une coupure telle que $p^- = p^+ = p$; considérons une extension élémentaire N de M contenant un élément b réalisant p: $p \wedge f(x, b)$ est finiement satisfaisable dans A, $p \wedge \neg f(x, b)$ est finiement satisfaisable dans B, si bien que chacun de ces types se complète en un cohéritier de p. $\triangleleft$

THÉORÈME 13. *Les quatres conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T est stable (i.e. pour tout M, tout $p \in S_1(M)$ n'a qu'un seul héritier)*,

(ii) *pour tout modèle M de T, tout $p \in S_1(M)$ n'a qu'un seul cohéritier*,

(iii) *pour tout modèle M de T, tout $p \in S_1(M)$ n'a qu'un seul fils spécial*,

(iv) *toute suite d'éléments infinie et indicernable dans l'ordre est totalement indicernable et insécable.*

$\triangleright$ Simple combinaison des résultats précédents. $\triangleleft$

On remarquera que pour obtenir la stabilité il suffit d'imposer l'unicité du cohéritier pour les 1-types, alors qu'a priori, pour obtenir l'unicité de l'héritier pour les 1-types, il semble qu'il faille supposer l'unicité du cohéritier pour tous les n-types.

En guise de conclusion:

THÉORÈME 14. *Aucun des* 14 *théorèmes de cet article n'est contenu dans le livre de Shelah.*

$\triangleright$ Left to the reader. $\triangleleft$

RÉFÉRENCES

[1] H.J. KEISLER, *The stability function of a theory*, this JOURNAL, vol. 43 (1978), pp. 481–486.

[2] D. LASCAR and B. POIZAT, *An introduction to forking*, this JOURNAL, vol. 44 (1979), pp. 178–198.

[3] B. POIZAT, *Déviation des types*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1977.

[4] ——— (ÉDITEUR), *Théories stables*, ***Publications de l'Institut Henri Poincaré,*** Paris, 1° année 1978, 2° année 1979.

[5] S. SHELAH, ***Classification theory and the number of non-isomorphic models,*** North-Holland, Amsterdam, 1978.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
PARIS, FRANCE