Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel

Emanuel Sperner zum 60. Geburtstag gewidmet

Von Gerhard Ringel in Berlin

Unter einer Landkarte auf der Kugel verstehen wir eine Zerlegung der Kugel in Flächenstücke (Länder), Kanten und Eckpunkte mit den üblichen Inzidenzeigenschaften. Wir betrachten hier nur Landkarten, bei denen jedes Land topologisches Bild einer Kreisscheibe ist. Zwei Länder heißen *benachbart*, wenn sie eine gemeinsame Kante (Grenze) haben. Auch zwei Eckpunkte in einer Landkarte oder in einem Graphen, die durch eine Kante verbunden sind, nennen wir *benachbart.*

Wir stellen die folgende Frage: *Es soll die kleinste Anzahl* k_0 *von Farben gesucht werden, für die gilt: In jeder Landkarte auf der Kugel lassen sich die Länder und die Eckpunkte derart mit* k_0 *Farben färben, daß sowohl jedes Land als auch jeder Eckpunkt genau eine der* k_0 *Farben erhält, daß je zwei benachbarte Länder und auch je zwei benachbarte Eckpunkte verschiedene Farben haben und daß außerdem die Farbe jedes Landes verschieden ist von der Farbe jedes mit ihm inzidierenden Eckpunkts.* Eine solche Färbung wollen wir eine *zulässige Färbung der Länder und Eckpunkte* nennen. Eine Färbung nur der Länder (der Eckpunkte) allein heißt *zulässig*, wenn benachbarte Länder (Eckpunkte) verschiedene Farben erhalten haben.

Um zunächst festzustellen, daß die Zahl k_0 überhaupt existiert, benutzen wir den bekannten Fünffarbensatz. Danach sind die Länder einer Landkarte auf der Kugel stets mit fünf Farben zulässig färbbar. In der dualen Formulierung lautet er: Die Eckpunkte irgend eines auf der Kugel ohne Überschneidung der Kanten gezeichneten Graphen lassen sich mit fünf Farben zulässig färben. Wir können also in einer beliebigen Landkarte auf der Kugel zunächst die Länder mit fünf Farben zulässig färben und dann außerdem die Eckpunkte mit fünf *anderen* Farben zulässig färben. Man erhält eine zulässige Färbung der Länder und Eckpunkte mit 10 Farben. Also ist $k_0 \leqq 10$ und existiert somit.

Aus der unbewiesenen Vierfarbenvermutung würde entsprechend $k_0 \leqq 8$ folgen. Man kann jedoch erwarten, daß k_0 noch kleiner ist, denn bei den soeben benützten Färbungen ist die Farbe jedes Landes verschieden von der Farbe jedes Eckpunkts, was bei einer zulässigen Färbung der Länder und Eckpunkte gar nicht gefordert war. Wir werden die Ungleichung $k_0 \leqq 7$ aus der folgenden allgemeineren und auch für sich interessanten Aussage folgern, die in § 2 bewiesen wird:

Satz 1. *In jedem Graph, der sich auf der Kugel derart zeichnen läßt, daß jede Kante von höchstens einer anderen Kante überkreuzt wird, lassen sich die Knotenpunkte mit 7 Farben zulässig färben.*

Beim Vierfarbenproblem sind die sogenannten *normalen* Landkarten hauptsächlich von Interesse. Das sind solche, in denen jeder Eckpunkt mit genau drei Ländern und genau drei Kanten inzidiert. In § 3 beweisen wir den

Satz 2. *In jeder normalen Landkarte lassen sich die Länder und Eckpunkte mit sechs Farben zulässig färben, mit weniger als sechs Farben kommt man nicht immer aus.*

Für die normalen Landkarten ist die Frage somit vollständig gelöst. Beim Vierfarbenproblem kann man aus der Färbbarkeit der normalen Landkarten sofort auf die Färbbarkeit aller Landkarten schließen. Hier ist dies leider nicht möglich, so daß wir nur die Ungleichung $6 \leqq k_0 \leqq 7$ wissen. Eine Vermutung möchte der Verfasser hier nicht äußern.

Wir bemerken noch, daß durch Übergang von den normalen Landkarten auf die dualen Zerlegungen der Kugel aus Satz 2 folgt: *In jeder Landkarte auf der Kugel, in der jedes Land ein Dreieck ist, ist eine zulässige Färbung der Länder und Eckpunkte mit sechs Farben stets möglich.*

§ 1

Es sei L eine Landkarte auf der Kugel mit den Ländern λ_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$. K_1 sei die Menge aller Kanten in L. Wir wählen im Inneren jedes Landes λ_i einen Punkt, der als Knotenpunkt P_i dieses Land λ_i (etwa als Landeshauptstadt) vertritt. Nun verbinden wir den Knotenpunkt P_i mit jedem Eckpunkt von λ_i durch eine Kante $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Die Menge der so entstehenden Kanten werde mit K_2 bezeichnet. Man kann es so einrichten, daß die Kanten K_1 und K_2 sich untereinander nicht kreuzen, d.h. bis auf Endpunkte sind je zwei Kanten aus der Menge $K_1 \cup K_2$ punktfremd. Die Kantenmenge $K_1 \cup K_2$ zerlegt die Kugel in lauter Dreiecke. Es seien λ_i und λ_k zwei benachbarte Länder von L. Sie haben also eine gemeinsame Kante CD aus K_1. Innerhalb der beiden Dreiecke P_iCD und P_kDC verbinden wir nun P_i mit P_k durch eine weitere Kante P_iP_k derart, daß die Kanten P_iP_k und CD sich genau einmal überkreuzen (einen inneren Punkt gemeinsam haben). Wird das für alle benachbarten Länderpaare durchgeführt, so erhalten wir die Kantenmenge K_3. Es gilt dann: Jede Kante von K_3 wird von genau einer Kante von K_1 gekreuzt und umgekehrt, während die Kanten K_2 ganz kreuzungsfrei geblieben sind.

Der Graph, der als Knotenpunkte die Eckpunkte von L und die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_h$ und als Kanten die Kanten $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ hat, sei mit $G(L)$ bezeichnet. Der Graph $G(L)$ läßt sich also auf der Kugel derart zeichnen, daß jede Kante höchstens von einer andern gekreuzt wird. Der nur aus den Kanten K_2 bestehende Teilgraph von $G(L)$ ist ein paarer Graph, d.h. seine Knotenpunkte lassen sich mit zwei Farben zulässig färben. Man färbe nämlich alle Knotenpunkte, die Eckpunkte von L sind, blau, und alle Knotenpunkte, die Länder vertreten, rot.

Eine zulässige Färbung der Länder und Eckpunkte von L bedeutet eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von $G(L)$ und umgekehrt. Daher folgt aus dem in § 2 zu beweisenden Satz 1 sofort $k_0 \leqq 7$. Jedoch ist Satz 1 allgemeiner als die Aussage $k_0 \leqq 7$, denn es gibt Graphen, die zwar auf der Kugel so gezeichnet werden können, daß jede Kante höchstens von einer anderen gekreuzt wird, die aber nicht als Graph $G(L)$ aus einer Landkarte L gewonnen werden können. Der Graph von Abb. 1 (vollständiger Graph mit 6 Knotenpunkten) ist ein solcher, weil der Teilgraph, der aus allen kreuzungsfreien Kanten besteht, kein paarer Graph ist.

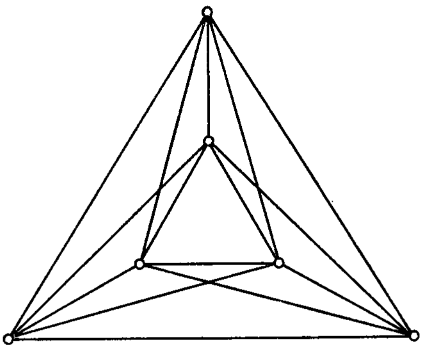

Abb. 1

In einer Landkarte L auf der Kugel mit α_0 Eckpunkten, α_1 Kanten und α_2 Ländern gilt die Eulersche Polyederformel

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \tag{1}$$

Es sei e_i die Anzahl derjenigen Eckpunkte, die mit genau i Kanten (i-kantige Eckpunkte) inzidieren und f_i die Anzahl der Länder, die genau i Kanten haben (i-Ecke). Es sei $f_2 = 0$; dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= e_3 + e_4 + e_5 + \cdots \\
\alpha_2 &= f_3 + f_4 + f_5 + \cdots \\
2\alpha_1 &= 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \cdots \\
2\alpha_1 &= 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in geeigneter Weise in die Formel (1) ein, so erhalten wir

$$4\alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_1 = 8,$$

$$e_3 - e_5 - 2e_6 - 3e_7 - \cdots + f_3 - f_5 - 2f_6 - 3f_7 - \cdots = 8,$$

$$e_3 + f_3 = 8 + e_5 + f_5 + 2e_6 + 2f_6 + \cdots \tag{2}$$

Dies werden wir später benützen.

§ 2

Es sei G ein Graph ohne Schlingen und ohne Zweiecke, der sich auf der Kugel so zeichnen läßt, daß jede Kante höchstens von einer andern gekreuzt wird. Diese Einbettung $E(G)$ von G in die Kugel sei noch so, daß möglichst wenig Kreuzungspunkte vorkommen. Außerdem sei G gesättigt, d.h. falls man irgend zwei in G nicht benachbarte Knotenpunkte durch eine neue Kante verbindet, entsteht ein Graph, der nicht mehr auf der Kugel so gezeichnet werden kann, daß jede Kante von höchstens einer anderen gekreuzt wird.

Zwei Kanten mit einem gemeinsamen Knotenpunkt kreuzen sich nicht. Sonst könnte man eine Einbettung von G in die Kugel finden mit einem Kreuzungspunkt weniger (Abb. 2 links). Wenn AB und CD

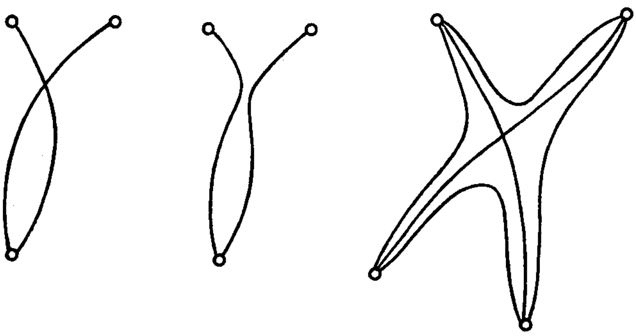

Abb. 2

zwei sich kreuzende Kanten von $E(G)$ sind, so gibt es in G auch die vier Kanten AC, BD, AD, BC, die überdies in $E(G)$ kreuzungsfrei sind, denn diese könnte man sonst kreuzungsfrei hinzufügen (Abb. 2 rechts).

Es sei Z diejenige Zerlegung (Landkarte) der Kugel, die nur durch die kreuzungsfreien Kanten von $E(G)$ hervorgerufen wird. Z zerlegt die Kugel in Länder, die Dreiecke oder Vierecke sind. Käme in Z etwa ein Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$ vor, so gibt es sicher mindestens eine „Diagonalkante", etwa A_1A_3 in G, weil G gesättigt ist. Da A_1A_3 nicht kreuzungsfrei ist, gibt es auch die Kante A_2A_4 (oder A_2A_5). Jetzt folgt aber, daß die Kante A_1A_4 kreuzungsfrei in $E(G)$ vorhanden ist, d.h. ein Fünfeck tritt in Z nicht auf, sondern ist zerlegt in ein Viereck und ein Dreieck. Wenn $ABCD$ ein Viereck von Z ist, so sind die beiden Diagonalkanten AC und BD in G vorhanden, weil G gesättigt ist.

Fügt man zu den Kanten von Z die Diagonalkanten aller Vierecke hinzu, erhält man wieder den Graphen G bzw. seine Einbettung $E(G)$. Um Satz 1 von S. 108 zu beweisen, genügt es, ihn nur für gesättigte Graphen G zu zeigen. Eine zulässige Färbung der Eckpunkte von G ist eine Färbung der Eckpunkte in Z derart, daß je zwei durch eine (kreuzungsfreie) Kante verbundene Eckpunkte und auch je zwei zu einem Viereck gehörenden Eckpunkt verschieden gefärbt sind. Daher folgt aus dem nun zu beweisenden Satz 3 sofort der Satz 1 von S. 108.

Satz 3. *Es sei L eine Landkarte auf der Kugel, in der jedes Land ein Dreieck oder ein Viereck ist und die drei bzw. vier Eckpunkte jedes Dreiecks bzw. Vierecks stets paarweise verschieden sind. Dann lassen sich die Eckpunkte von L derart mit sieben Farben färben, daß je zwei Eckpunkte eines Landes stets verschiedene Farben haben.*

Wir wollen bei den Landkarten von Satz 3 auch zweikantige Eckpunkte zulassen und es darf auch vorkommen, daß zwei Eckpunkte durch mehr als eine Kante verbunden sind. Natürlich darf kein Flächenstück auftreten, das ein Zweieck ist. Um Satz 3 zu beweisen, nehmen wir an, er sei falsch. Dann gibt es eine Landkarte L_0 mit möglichst wenig Kanten, für die Satz 3 nicht richtig ist.

a) *Die Landkarte L_0 hat mindestens* 8 *Eckpunkte,* sonst könnte man jeden Eckpunkt mit einer anderen Farbe, also in gewünschter Weise, färben.

b) *Die Landkarte L_0 besitzt keinen zweikantigen Eckpunkt.* Wir nehmen an, es gäbe doch einen Eckpunkt P von L_0, der zu genau zwei Eckpunkten A, B benachbart ist. (Es muß $A \neq B$ sein, sonst gäbe es ein Dreieck oder Viereck, dessen Eckpunkte nicht alle verschieden sind.) Es gibt folgende Möglichkeiten: 1. L_0 hat nur drei Eckpunkte A, P, B und die drei Kanten AP, PB, BA. 2. L_0 hat nur die vier Eckpunkte A, P, B, C und die vier Kanten AP, PB, BC, CA. 3. Es gibt in L_0 zwei Dreiecke mit den drei Eckpunkten A, P, B. 4. In L_0 gibt es ein Dreieck APB und ein Viereck $BPAC$. 5. In L_0 gibt es ein Viereck $APBC$ und ein Viereck $BPAD$ mit $C \neq D$. 6. Es gibt in L_0 zwei Vierecke $APBC$.

Die Fälle 1. und 2. scheiden wegen a) aus. Im Falle 3. entfernen wir die drei Kanten AB, AP, BP. Im Falle 4. oder 5. entfernen wir die beiden Kanten AP, BP. Im Falle 6. ersetzen wir die beiden Kanten

AP, PB durch die eine neue Kante AB. In allen Fällen erhalten wir eine neue Landkarte L', deren Länder wieder Dreiecke oder Vierecke sind, jedoch mit weniger Kanten als in L_0. In L' lassen sich daher die Eckpunkte in gewünschter Weise mit 7 Farben färben. Nun können wir aber auch L_0 richtig färben, indem wir die Färbung von L' in allen Eckpunkten übernehmen und dann dem Eckpunkt P eine passende Farbe zuordnen. Das ist ein Widerspruch.

c) *Zwei zueinander benachbarte Dreiecke kommen in L_0 nicht vor.* Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an. Wir entfernen die gemeinsame Kante der beiden benachbarten Dreiecke und erhalten eine Landkarte L', deren Länder Dreiecke oder Vierecke sind; aus den beiden Dreiecken ist ein Viereck geworden. Weil L' weniger Kanten hat als L_0, sind die

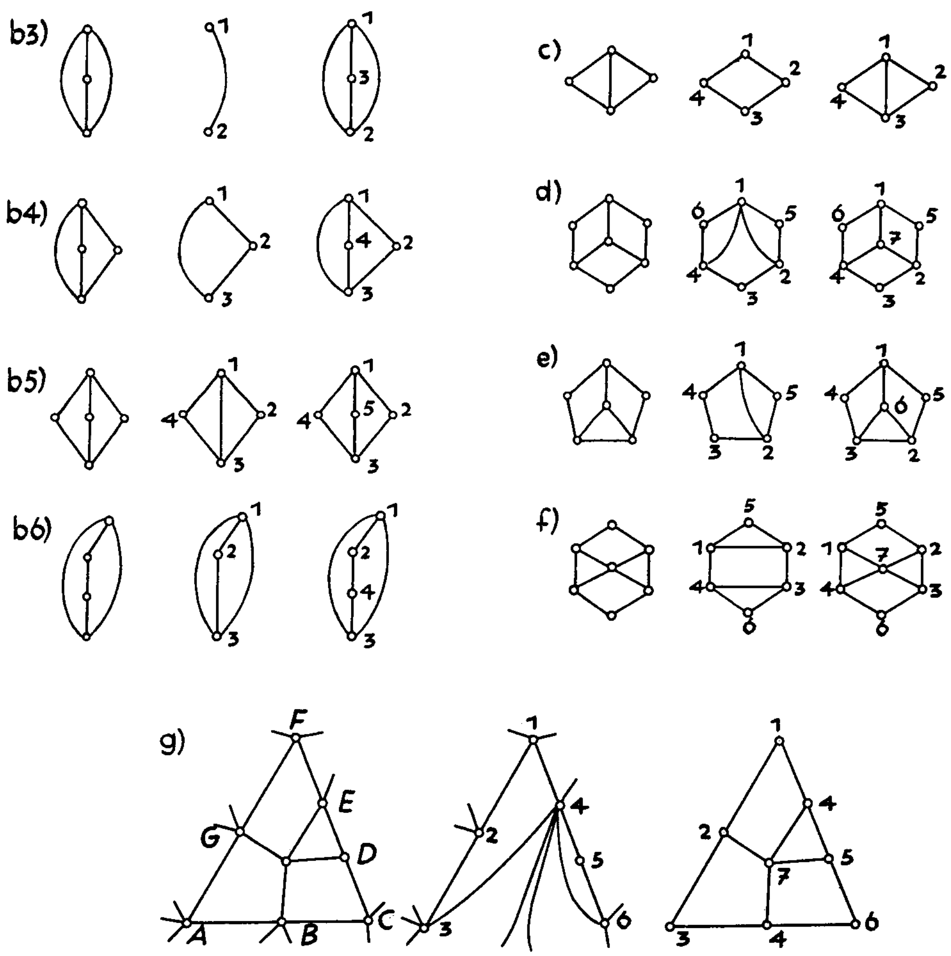

Abb. 3

Eckpunkte von L' in gewünschter Weise färbbar. Damit ist bereits eine gewünschte Färbung auch für L_0 gegeben. Das ist ein Widerspruch.

d) *In* L_0 *gibt es keinen dreikantigen Eckpunkt, der mit drei Vierecken inzidiert.* Zum Beweis sei in L_0 doch ein dreikantiger Eckpunkt P mit drei inzidierenden Vierecken gegeben. Wir ersetzen die drei mit P inzidierenden Kanten gemäß Abb. 3d durch zwei andere. Die Eckpunkte der entstandenen Landkarte L' sind nach Voraussetzung in verlangter Weise färbbar. Nun färben wir auch L_0, indem wir die Farben aller Eckpunkte von L' übernehmen. Der einzige hierdurch noch nicht gefärbte Eckpunkt P kann nun noch eine Farbe bekommen, die ja nur verschieden sein muß von den Farben der sechs beteiligten Eckpunkte. Da uns 7 Farben zur Verfügung stehen, kann P richtig gefärbt werden. Das ist ein Widerspruch.

e) *In* L_0 *gibt es keinen dreikantigen Eckpunkt.* Wegen c) und d) kann ein etwa vorhandener dreikantiger Eckpunkt P nur mit einem Dreieck und zwei Vierecken inzidieren. Wir entfernen P und die drei mit P inzidierenden Kanten und fügen eine neue Kante gemäß Abb. 3e ein. So entsteht eine Landkarte L', deren Eckpunkte nach Voraussetzung mit 7 Farben gemäß Satz 3 färbbar sind. Jetzt läßt sich aber auch L_0 färben, indem man die Eckpunkte wie in L' färbt und dann P eine Farbe gibt, die verschieden von den Farben der fünf in Frage kommenden Eckpunkte ist. Somit ist e) bewiesen.

f) *In* L_0 *kommt es nicht vor, daß ein Eckpunkt mit genau zwei Dreiecken und genau zwei Vierecken inzidiert.* Wir nehmen im Gegenteil an, es gäbe doch so einen Eckpunkt P. Wegen c) sind die beiden mit P inzidierenden Dreiecke ohne gemeinsame Kante. Wir ersetzen die vier mit P inzidierenden Kanten durch zwei neue Kanten gemäß Abb. 3f. Die entstandene Landkarte läßt nach Voraussetzung eine gesuchte Eckpunktfärbung mit 7 Farben zu. Diese läßt sich wieder zu einer Färbung von L_0 fortsetzen. Somit ist f) bewiesen.

g) *In* L_0 *kommt es nicht vor, daß ein Eckpunkt mit genau drei Vierecken und genau einem Dreieck inzidiert.* Wir nehmen an, es gäbe doch so einen Eckpunkt P. Die umliegenden Eckpunkte seien wie in Abb. 3g bezeichnet.

Falls in L_0 eine Kante GD vorkommt, so existiert keine Kante EB (weil sich die beiden Kanten schneiden würden), aber auch kein Viereck mit den Eckpunkten E, B. Man könnte sonst eine Diagonale EB neu einzeichnen, andererseits würde sich EB mit GD schneiden.

Falls in L_0 ein Viereck mit den Eckpunkten G, D vorkommt, so gibt es ebenso keine Kante EB und kein Viereck $EXBY$.

Wir können daher annehmen, daß keine Kante EB und kein Viereck $EXBY$ existiert. Sonst betrachten wir anstelle von E, B die Eckpunkte D, G.

Wir konstruieren eine neue Landkarte L', indem wir P und die vier mit P inzidierenden Kanten entfernen und dann die Eckpunkte E und B identifizieren (zusammenrücken lassen) gemäß Abb. 3g. L' setzt sich wieder nur aus Dreiecken und Vierecken zusammen, die stets drei bzw. vier verschiedene Eckpunkte haben. L_0 enthielt nämlich kein Dreieck EBX und kein Viereck $EXBY$ oder $EBXY$. Somit ist eine Färbung von L' vorhanden, die wieder leicht zu einer Färbung von L_0 fortgesetzt werden kann. Hiermit ist g) bewiesen.

Nun werden wir leicht zeigen können, daß L_0 überhaupt nicht existiert. Wegen b) und e) inzidiert jeder Eckpunkt von L_0 mindestens mit vier Kanten. Die Gleichung (2) lautet daher speziell für L_0:

$$f_3 = 8 + e_5 + 2e_6 + 3e_7 + \cdots \tag{3}$$

Wegen f) und g) inzidiert jeder Eckpunkt eines Dreiecks mit mindestens 5 Kanten. Wegen c) inzidiert jeder 5-kantige Eckpunkt mit höchstens 2 Dreiecken, allgemein jeder h-kantige Eckpunkt mit höchstens $\left[\frac{h}{2}\right]$ Dreiecken. Daraus folgt

$$3f_3 \leqq 2e_5 + 3e_6 + 3e_7 + 4e_8 + 4e_9 + \cdots$$

Wenn man in (3) einsetzt, erhält man den Widerspruch

$$24 + e_5 + 3e_6 + 6e_7 + \cdots \leqq 0,$$

womit Satz 3 bewiesen ist.

§ 3

Jetzt wollen wir Satz 2 von S. 108 beweisen, wonach die Eckpunkte und Länder in jeder normalen Landkarte auf der Kugel mit 6 Farben zulässig färbbar sind. Wir nehmen an, er sei falsch; so gibt es eine normale Landkarte L_0 mit möglichst wenig Ländern, für die Satz 2 nicht gilt.

a) In L_0 sei ein Zweieck α mit den beiden Eckpunkten P, Q. Es sei PT bzw. QS diejenige mit P bzw. Q inzidierende Kante, die nicht zu α gehört. Dann ist $P \neq S$ und $Q \neq T$, sonst hätte L_0 nur drei Länder und zwei Eckpunkte, wäre somit zulässig färbbar. Außerdem ist $T \neq S$, sonst gäbe es in L_0 einen Eckpunkt $T = S$,, der zwar mit drei Kanten, aber nur mit zwei Ländern inzidiert, L_0 wäre also nicht normal. Nun löschen wir eine Kante PQ und degradieren die Eckpunkte P, Q zu gewöhnlichen inneren Punkten der einen Kante TS. Die Knotenpunkte und Länder der entstandenen Landkarte L' sind nach Voraussetzung mit 6 Farben zulässig färbbar. Diese Färbung läßt sich leicht erweitern zu einer gesuchten Färbung von L_0. *Daher kann es in* L_0 *kein Zweieck geben.*

b) Es sei in L_0 ein Dreieck α. Weil kein Zweieck existiert, sind die drei an α stoßenden Kanten verschieden. Wir lassen das Dreieck zu einem Eckpunkt P_0 zusammenschrumpfen (oder entfernen eine Kante des Dreiecks). So entsteht eine normale Landkarte L', die wieder färbbar ist. Hierbei erhalten P_0 und die drei mit P_0 inzidierenden Länder vier verschiedene Farben, etwa 4, 1, 2, 3. Die andern zwei noch zur Verfügung stehenden Farben mögen mit 5, 6 bezeichnet sein. Wir benützen

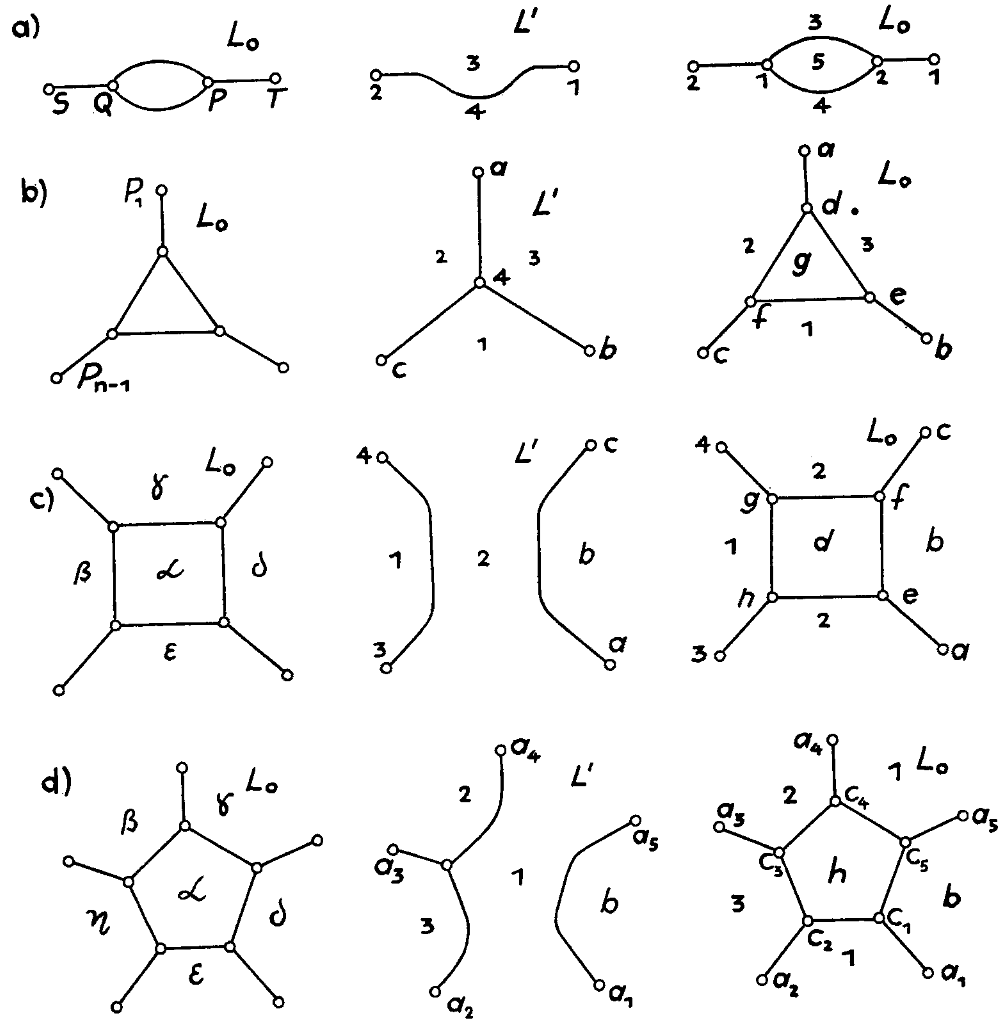

Abb. 4

jetzt die Bezeichnung in Abb. 4b., wobei a, b, c usw. gewisse noch nicht näher bestimmte Farben sein sollen. Es sind einige Fälle zu unterscheiden:

1. Es sei $a \neq 1$ und c, b beliebig. Für eine Färbung von L_0 wählen wir dann $d = 1, g = 4, f \neq 1, 2, 4, c$ und $e \neq 1, 4, 3, b, f$. Die Ungleichungen sind stets lösbar, da 6 Farben zur Verfügung stehen.

2. Die beiden Fälle „$b \neq 2$; a, c beliebig" und „$c \neq 3$; a, b beliebig" gehen durch Drehung in den Fall 1. über.

3. Im Falle $a = 1, b = 2, c = 3$, ist es nicht möglich, aus der Färbung von L' sofort eine Färbung von L_0 zu gewinnen. Es muß zuerst eine Umfärbung[1]) in L' vorgenommen werden. Es sei $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ die Reihenfolge der Eckpunkte des mit P_0 inzidierenden Landes, das die Farbe 2 erhalten hat. Wir löschen alle Farben der P_i aus und definieren für die P_i neue Farben h_i wie folgt:

Zunächst hat P_1 vier gefärbte und zwei ungefärbte Nachbarn (Eckpunkte oder Länder, mit denen P_1 inzidiert oder benachbart ist). Es läßt sich also noch eine Farbe $h_1 \neq 1$ wählen. Dann ist P_1 gefärbt und P_2 hat fünf gefärbte Nachbarn. Selbst wenn diese fünf Farben verschieden sind, gibt es immer noch eine sechste, die wir P_2 geben können. Sodann läßt sich P_3 usw. färben, bis auch P_{n-1} mit der Farbe h_{n-1} gefärbt ist. Nun hat P_0 sechs gefärbte Nachbarn, aber zwei von ihnen haben die gleiche Farbe $2 = b$. Für die sechs Nachbarn sind also höchstens 5 verschiedene Farben verbraucht worden; es bleibt bestimmt noch eine übrig für P_0. Somit ist L' in neuer Weise gefärbt mit $a = h_1 \neq 1$, womit wir auf den Fall 1. zurückgeführt sind. Da in allen Fällen die Länder und Eckpunkte von L_0 zulässig färbbar sind, erhalten wir einen Widerspruch und L_0 *besitzt somit kein Dreieck.*

c) In L_0 sei ein Viereck α mit den benachbarten Ländern $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Wir können annehmen, daß ε und γ verschieden und nicht zueinander benachbart sind; sonst wären β und δ verschieden und nicht benachbart. Wir löschen die Kante zwischen α und γ. Die erhaltene normale Landkarte ist in gewünschter Weise färbbar. Wir benützen die Bezeichnung in Abb. 4c. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $b \neq 4$ voraussetzen. Wir erhalten eine Färbung von L_0, indem wir der Reihe nach wählen: $d = 4$; $f \neq 2, 4, b, c$; $e \neq 2, 4, b, a, f$; $h \neq 2, 4, 3, 1, e$ und $g \neq 2, 4, 1, h, f$. Dies ist ein Widerspruch, *es gibt also kein Viereck in* L_0.

d) In der Landkarte L_0 sei ein Fünfeck α mit den benachbarten Ländern $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Unter diesen fünf gibt es sicher zwei, die ver-

[1]) Hier handelt es sich nicht um die bei Färbungsproblemen oft angewandte Umfärbung längs alternierender Wege. Letztere kann man bei vorliegendem Problem nicht anwenden.

schieden und nicht zueinander benachbart sind, etwa γ und ε (wäre das nicht so, so sind sicher β und δ verschieden und nicht benachbart). Wenn wir die Kante zwischen α und ε und die Kante zwischen α und γ entfernen, erhalten wir eine normale Landkarte L', deren Länder und Eckpunkte nach Voraussetzung zulässig färbbar sind. Die auftretenden Farben seien wie in Abb. 4d bezeichnet. Um eine Färbung von L_0 zu erhalten, stellen wir zunächst eine Färbung aller Eckpunkte und Länder bis auf α und seine 5 Eckpunkte her, indem wir die Farben wie in L' verwenden. Sodann wählen wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_5,\\
&h \neq 1, 2, 3, b, a_5,\\
&c_2 \neq h, 1, 3, a_2, a_5,\\
&c_3 \neq h, 3, 2, a_3, c_2,\\
&c_4 \neq h, 2, 1, a_4, c_3,\\
&c_5 \neq h, 1, b, a_5, c_4.
\end{aligned}$$

Damit ist L_0 in gesuchter Weise gefärbt. Wegen dieses Widerspruchs *gibt es in* L_0 *kein Fünfeck.*

Jetzt können wir in bekannter Weise schließen, daß L_0 überhaupt nicht existiert: Die Anzahl der Länder, Kanten und Eckpunkte in L_0 sei gleich α_2, α_1 und α_0. Weil L_0 normal ist, inzidiert jede Kante mit genau zwei Eckpunkten und jeder Eckpunkt mit genau drei Kanten. Daher ist

$$3\alpha_0 = 2\alpha_1. \tag{3}$$

Weil jede Kante zu genau zwei Ländern gehört und jedes Land, wie eben bewiesen, mindestens 6 Kanten hat, gilt

$$2\alpha_1 \geqq 6\alpha_2. \tag{4}$$

Ziehen wir von der mit 6 multiplizierten Eulerschen Formel (1) die mit 2 multiplizierte Gleichung (3) ab, so erhalten wir

$$6\alpha_2 = 2\alpha_1 + 12,$$

und das ist ein Widerspruch zu (4). Also existiert L_0 gar nicht und Satz 2 ist bewiesen. Mit weniger als sechs Farben kann man nicht immer auskommen; bereits die normale Landkarte, die man erhält, wenn man in Abb. 1 die 6 nicht kreuzungsfreien Kanten entfernt, erfordert wirklich sechs Farben.

Eingegangen am 11. 2. 1965