D. N. Bernshtein, The number of roots of a system of equations, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1975, Volume 9, Issue 3, 1–4

Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 3, 1975, 1—4.

ЧИСЛО КОРНЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Д. Н. Бернштейн

Многочленом Лорана называется $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$. Многочлены Лорана рассматриваются как функции на многообразии $T = (\mathbf{C}^*)^n$. Каждый многочлен Лорана есть линейная комбинация мономов $x^q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$. Множество всех мономов образует решетку $M = \mathbf{Z}^n$. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ многочлена $f(x) = \sum c_q x^q$ называется множество тех q, для которых $c_q \neq 0$. Пусть задана система уравнений F: $f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Мы хотим оценить общее число корней системы через носители $\operatorname{supp} f_i$. Более точно, пусть $\mathfrak{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ — набор n конечных подмножеств решетки M. Рассмотрим всевозможные системы F с условием $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$. Тогда для систем общего положения (т. е. для всех систем, за исключением некоторого алгебраического подмногообразия в пространстве коэффициентов) корни системы F изолированы, и их число с учетом кратностей $L(F)$ одно и то же, т. е. зависит только от $\mathfrak{S}$. Обозначим это число через $L(\mathfrak{S})$. Ставятся две задачи: вычисление $L(\mathfrak{S})$ в терминах набора $\mathfrak{S}$ и нахождение дискриминантных условий, при которых нарушается равенство $L(F) = L(\mathfrak{S})$.

Приведем эвристические соображения о функции $L(\mathfrak{S})$. Прежде всего, ясно, что $L(\mathfrak{S})$ симметрична; кроме того, сдвиг любого из множеств S_i не меняет числа $L(\mathfrak{S})$, поскольку он соответствует умножению функции f_i на обратимый моном. Далее, $L(\mathfrak{S})$ инвариантно относительно автоморфизмов T. Точнее, пусть $U = (u_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — целочисленная матрица с $\det U = \pm 1$. Рассмотрим замену переменных $x_j = \prod y_i^{u_{ij}}$, короче, $x = y^U$. Это преобразование индуцирует изоморфизм U^*: $\mathbf{C}[x, x^{-1}] \to \mathbf{C}[y, y^{-1}]$, переводящий моном x^q в моном y^{Uq}. Тогда $\operatorname{supp}(U^* f) = U(\operatorname{supp} f)$, а так как $L(F) = L(U^* F)$, то $L(\mathfrak{S}) = L(U\mathfrak{S})$, $U\mathfrak{S} = (US_1, \ldots, US_n)$. Для формулировки следующего свойства $L(\mathfrak{S})$ введем на подмножествах решетки операцию сложения, полагая $S_1 + S_2 = \{q_1 + q_2 \mid q_1 \in S_1, q_2 \in S_2\}$; ясно, что умножению функций соответствует сложение носителей. Так как

$$L(f_1 \cdot f_1', f_2, \ldots, f_n) = L(f_1, \ldots, f_n) + L(f_1', \ldots, f_n),$$

то естественно ожидать, что функция $L(\mathfrak{S})$ полилинейна, т. е.

$$L(S_1 + S_1', S_2, \ldots, S_n) = L(S_1, \ldots, S_n) + L(S_1', \ldots, S_n).$$

Оказывается, что функция, удовлетворяющая всем этим условиям, существует — это так называемый *смешанный объем Минковского*. Через $V_n(S)$ обозначим объем выпуклой оболочки множества S в $\mathbf{R}^n$, считая объем единичного параллелепипеда решетки равным единице. Тогда смешанным объемом набора $\mathfrak{S}$ называется число

$$V(\mathfrak{S}) = (-1)^{n-1} \sum V_n(S_i) + (-1)^{n-2} \sum_{i<j} V_n(S_i + S_j) + \ldots + V_n(S_1 + \ldots + S_n) \quad (*)$$

(эта формула отличается от классической множителем $n!$). Смешанный объем полилинеен (см. [1]), это также будет видно из нашего доказательства. Кроме того, $V(S, S, \ldots, S) = n!\, V_n(S)$. Отсюда видно, что формула (*) — стандартная поляризация, восстанавливающая значения симметричной полилинейной формы по ее диагональной части (значениям на наборах совпадающих переменных). После вышесказанного не будет звучать неожиданно

Теорема A. $L(S_1, S_2, \ldots, S_n) = V(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

Опишем дискриминантные условия. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — ненулевая рациональная линейная форма на решетке M, S — конечное подмножество решетки. Положим $m(\alpha, S) = \min\{\langle\alpha, q\rangle, q \in S\}$, $S_\alpha = \{q \in S \mid \langle\alpha, q\rangle = m(\alpha, S)\}$ — пересечение S с опорной плоскостью в направлении α. Если $f = \sum c_q x^q$ — такая функция, что $\operatorname{supp} f \subset S$, то положим $f_\alpha = \sum c_q x^q$, где суммирование ведется только по $q \in S_\alpha$. Если $F = (f_1, \ldots, f_n)$ — система с условием $\operatorname{supp} f_i \in S_i$, положим $F_\alpha = (f_{1\alpha}, \ldots, f_{n\alpha})$. Ясно, что система F_α по существу зависит от меньшего числа переменных. Действительно, сделаем замену $x = y^U$ так, чтобы вектор $\beta = U^T\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (U^T — транспонированная матрица) имел ненулевой только первую координату. Тогда система $U^*F_\alpha = (U^*F)_\beta$ фактически не зависит от y_1. Таким образом, F_α — система n уравнений от $n - 1$ переменных и в общем случае не имеет корней.

Теорема B. а) *Если F_α не имеет корней на T ни при каком $\alpha \neq 0$, то все корни системы F изолированы и $L(F) = L(\mathfrak{S})$.*

б) *Если F_α имеет корень для некоторого $\alpha \neq 0$, то $L'(F)$ — число изолированных корней системы с учетом кратностей — меньше $L(\mathfrak{S})$ при $L(\mathfrak{S}) \neq 0$ и равно нулю при $L(\mathfrak{S}) = 0$.*

Заметим, что из теоремы B вытекает полилинейность функции $L(\mathfrak{S})$. Ясно также, что условие а) надо проверять лишь для конечного числа векторов α, дающих различные наборы $S_{i\alpha}$, а именно, достаточно брать по одному вектору α на каждую грань выпуклой оболочки $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. При этом необходимо проверять грани всех размерностей, а не только размерности $n - 1$.

Докажем сначала теорему B. а) Если корни не изолированы, выберем на многообразии корней кривую и рассмотрим ее как алгебраическую вектор-функцию параметра t. Разложим ее в дробно-степенной ряд Пюизо $x_i(t) = a_i t^{\alpha_i} + o(t^{\alpha_i})$ $(a_i \neq 0)$, коротко, $x = at^\alpha(1 + o(1))$ $(a \in T)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — рациональный вектор. Если в качестве t взять одну из координат, получим $\alpha \neq 0$. Подставляя x в f_i и приравнивая к нулю коэффициент при младшей степени t (эта степень равна $\min\{\langle\alpha, q\rangle, q \in S_i\} = m(\alpha, S_i)$), получим $f_{i\alpha}(a) = 0$. Таким образом, a — корень системы F_α. Если корни изолированы, но число их меньше $L(\mathfrak{S})$, рассмотрим возмущенную систему F^t, зависящую от параметра t; $f_i^t = f_i + tP_i$, где система $P = (P_1, \ldots, P_n)$ общего положения. Корни этой системы F^t образуют алгебраическую функцию от t, число ее ветвей равно $L(\mathfrak{S})$. Разложим каждую ветвь в ряд Пюизо $x(t) = a\, t^\alpha(1 + o(1))$. Если бы для каждой ветви α равнялось нулю, т. е. $x = a + o(1)$, то точки a, соответствующие $L(\mathfrak{S})$ ветвям, давали бы с учетом кратностей $L(\mathfrak{S})$ корней системы F. А значит, для одной из ветвей $\alpha \neq 0$, и a — корень системы F_α.

б) Пусть a — корень системы F_α. Сделав замену переменных и разделив уравнения на подходящие мономы, можно считать, что $\alpha = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)$ $(\alpha_1 > 0)$ и $m(\alpha, S_i) = 0$. Положим $a' = (0, a_2, \ldots, a_n)$, тогда $f_i(a') = f_{i\alpha}(a) = 0$. Ограничимся случаем $L(\mathfrak{S}) > 0$. Тогда можно выбрать систему P ($\operatorname{supp} P_i \subset S_i$) общего положения и корень b этой системы так, что $P_i(a') \neq 0$, $f_i(b) \neq 0$ при любом i. Соединим точки a' и b прямой $z(t)$ так, что $z(0) = a'$, $z(1) = b$, и рассмотрим систему F^t: $f_i^t(x) = f_i(x) P_i(z(t)) - P_i(x) f_i(z(t))$. При $t = 1$, а значит, при почти всех t F^t удовлетворяет дискриминантным неравенствам и, следовательно, имеет $L(\mathfrak{S})$ изолированных корней. При $t \to 0$ F^t стремится к F, при этом $L'(F)$ корней системы F^t стремятся к изолированным корням системы F, а по меньшей мере один корень системы F^t, а именно $z(t)$, уходит в бесконечность. Поэтому $L'(F) < L(\mathfrak{S})$. Случай $L(\mathfrak{S}) = 0$ доказывается аналогично. Теорема B доказана.

Докажем теорему A. Мы выведем ее из приводимой ниже рекуррентной формулы (**), связывающей $L(\mathfrak{S})$ с числом корней в пространстве меньшего числа измерений. Зафиксируем в S_1 точку r. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — ненулевой рациональный ковектор. Через M_α обозначим ортогональную к α подрешетку решетки M: $M_\alpha = \{q \mid \langle \alpha, q \rangle = 0\}$. Параллельно сдвигая множества S_i, можно считать грани $S_{i\alpha}$ лежащими в M_α. Через $L_\alpha(\mathfrak{S})$ обозначим число $L(S_{2\alpha}, \ldots, S_{n\alpha})$, вычисляемое как функция L от $n - 1$ подмножеств M_α. Рассмотрим одномерную фактор-решетку $M' = M/M_\alpha$. Выберем образующую $e \in M'$, для которой $\langle \alpha, e \rangle > 0$. Пусть φ: $M \to M'$ — естественная проекция. Определим неотрицательное число H_α из формулы $H_\alpha e = \varphi(r) - \varphi(S_{1\alpha})$. Ясно, что H_α и $L_\alpha(\mathfrak{S})$ зависят только от ориентированного направления вектора α и инвариантны относительно автоморфизмов решетки M. Далее мы покажем, что $L_\alpha(\mathfrak{S}) \neq 0$ лишь для конечного числа направлений α, и докажем следующую рекуррентную формулу:

$$L(\mathfrak{S}) = \sum H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S}), \tag{**}$$

где суммирование ведется по всем ориентированным направлениям α. Покажем, как из этой формулы вытекает теорема A. H_α, а значит, и $L(\mathfrak{S})$ линейно по S_1, и в силу симметричности $L(\mathfrak{S})$ полилинейно. Поэтому достаточно рассмотреть случай $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S$. Докажем, что каждое слагаемое $H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S})$ в $n!$ раз больше, чем объем пирамиды Π_α, натянутой на S_α и точку r. Сделав замену, можно считать, что $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда H_α — высота пирамиды и, по индукции, $L_\alpha(\mathfrak{S}) = (n-1)!\, V_{n-1}(S_\alpha)$ (V_{n-1} — $(n-1)$-мерный объем), а так как замена сохраняет объем, то $H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S}) = n!\, V_n(\Pi_\alpha)$. Суммируя по всем направлениям, получим $n!\, V_n(S)$. Из поляризационной формулы следует, что $L(\mathfrak{S}) = V(\mathfrak{S})$.

Перейдем к доказательству формулы (**). Пусть F — система общего положения. Рассмотрим семейство возмущенных систем

$$F^t\colon f_1^t = f_1 + t^{-1} x^r, \quad f_i^t = f_i \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Корни системы F образуют вектор-функцию от t с $L(\mathfrak{S})$ ветвями. Каждая ветвь имеет вид $x(t) = a t^\alpha (1 + o(1))$ ($a \in T$). Ясно, что $\alpha \neq 0$, иначе $f_1^t(x) = a^r t^{-1} + O(1)$. Покажем, что для каждого ориентированного направления β число ветвей вида $x \sim a t^\alpha$ (α положительно пропорционально β) совпадает с числом $H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S})$. Отсюда сразу следует (**).

Сделав замену переменных и разделив уравнения на подходящие мономы, можно считать, что $\beta = (1, 0, \ldots, 0)$, $m(\alpha, S_i) = 0$, $r = (H, 0, \ldots, 0)$, $H = H_\alpha$. Пусть $x = a t^\alpha (1 + o(1))$, тогда $a' = (a_2, \ldots, a_n)$ — корень системы $F'_\alpha = (f_{i\alpha})$, $i = 2, \ldots, n$). Так как F общего положения, можно считать, что все точки a' — простые корни системы F'_α, число их равно $L_\alpha(\mathfrak{S})$ и $f_{1\alpha}(a') \neq 0$. Подставим x в f_1^t. Получим $0 = t^{-1+H\alpha_1} a_1^H +$

$+ f_{1\alpha}(a') + o(1)$. Так как ненулевая константа $f_{1\alpha}(a')$ может сократиться только с $a_1^H t^{-1+H\alpha_1}$, получаем $-1 + H\alpha_1 = 0$ (т. е. $\alpha_1 = 1/H$) и $a_1^H + f_{1\alpha}(a') = 0$. Таким образом, для каждого β существует не более одного вектора α, для которого могут быть ветви с асимптотикой α, и число асимптот вида at^α равно $H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S})$ (если $H_\alpha = 0$, то число таких асимптот также равно нулю). Чтобы доказать, что каждой асимптоте соответствует одна и только одна ветвь, сделаем замену $y_1 = x_1 t^{-\alpha_1}$, $y_i = x_i$ $(i > 1)$. Тогда система F^t примет вид $y_1^H + f_{1\alpha}(y') + P_1^t(y) = 0$, $f_{i\alpha}(y') + P_i^t(y) = 0$ $(i > 1)$, где $P_1^t(y)$ — многочлены, все коэффициенты которых суть $o(1)$. При $t = 0$ система имеет $H_\alpha L_\alpha(\mathfrak{S})$ простых корней вида (a_1, a'). По теореме о неявной функции эти корни продолжаются в окрестность точки $t = 0$. Теорема А доказана.

Все рассуждения, использующие разложения функций в ряды Пюизо, можно интерпретировать следующим образом. Поле констант расширяется до алгебраически замкнутого поля дробно-степенных рядов, выбирается система общего положения над этим полем (F^t в теоремах А и В) и считается число ее корней.

Эта работа является обобщением одного из результатов А. Г. Кушниренко, разобравшего иным методом случай совпадающих многогранников [2], [3]. Из этого результата и теоремы В нетрудно вывести теорему А. А. Г. Хованский указал автору на связь эмпирически найденной формулы (*) с теорией смешанных объемов Минковского и дал доказательство в двумерном случае при помощи разрешения особенностей. Автор благодарен И. М. Гельфанду, который поручил ему разобраться в результате А. Г. Кушниренко, итогом чего явилась формулировка теоремы А и новое доказательство результата А. Г. Кушниренко, а также Б. Я. Казарновскому и А. Г. Хованскому за сотрудничество.

Институт проблем управления
АН СССР

Поступила в редакцию
7 апреля 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Буземан Г., Выпуклые поверхности, М., «Наука», 1964.
2. Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и числа Милнора, Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 74—75.
3. Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными, УМН XXX, вып 2 (1975), 266—267.