



ELSEVIER

Discrete Mathematics 256 (2002) 671–676

DISCRETE  
MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/disc

# Interprétation bijective d'une récurrence des nombres de Motzkin

Serge Dulucq\*, Jean-Guy Penaud

*LaBRI, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France*

Received 10 October 2000; received in revised form 13 April 2001; accepted 28 May 2001

---

## Abstract

The purpose of this note is to give a combinatorial proof of the three-term linear recurrence for Motzkin numbers. The present work is inspired by Rémy's combinatorial proof of the linear recurrence for Catalan numbers (RAIRO Inform. Theor. 19(2) (1985) 179) and the more recent proof given by Foata and Zeilberger (J. Combin. Theory Ser. A 80(2) (1997) 380) for Schröder numbers (Z. Math. Phys. 15 (1870) 361).

## Résumé

Cette note a pour objectif de donner une preuve combinatoire d'une formule de récurrence à trois termes vérifiée par les nombres de Motzkin. Elle suit le même cheminement que la preuve bijective de Rémy (RAIRO Inform. Theor. 19(2) (1985) 179) pour la récurrence des nombres de Catalan, et que la preuve beaucoup plus récente donnée par Foata et Zeilberger (J. Combin. Theory Ser. A 80(2) (1997) 380) pour la récurrence des nombres de Schröder (Z. Math. Phys. 15 (1870) 361). © 2002 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

---

## 1. Dyck, Catalan, Motzkin et Schröder

Rémy [3] a le premier donné une interprétation combinatoire de la formule de récurrence pour les nombres de Catalan,

$$\begin{aligned} 2(2n+1)C_n &= (n+2)C_{n+1}, \quad n \geq 1, \\ C_0 &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

---

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [dulucq@labri.u-bordeaux.fr](mailto:dulucq@labri.u-bordeaux.fr) (S. Dulucq), [penaud@labri.u-bordeaux.fr](mailto:penaud@labri.u-bordeaux.fr) (J.-G. Penaud).

nombre qui comptent les mots ou chemins de Dyck. C'est en choisissant, parmi la longue liste des objets énumérés par ces nombres, la classe des *arbres binaires complets*, encore appelés par D. Knuth, les arbres binaires *étendus*, (c'est-à-dire des arbres binaires où tout sommet a exactement 0 ou 2 fils), qu'il a pu interpréter bijectivement cette formule.

Lorsqu'on insère dans les chemins de Dyck des paliers horizontaux, on obtient, en énumérant ces chemins selon la longueur, soit les nombres de Motzkin [1] soit les nombres de Schröder [4], selon qu'on attribue au palier horizontal élémentaire la longueur 1 ou 2. Les nombres de Motzkin vérifient la récurrence à 3 termes suivante,

$$(n+2)m_n = (2n+1)m_{n-1} + 3(n-1)m_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$m_0 = m_1 = 1, \tag{2}$$

et les nombres de Schröder (simples) cette dernière,

$$3(2n-1)s_n = (n+1)s_{n+1} + (n-2)s_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$s_1 = s_2 = 1. \tag{3}$$

Récemment, Foata et Zeilberger [2] ont établi bijectivement la formule de récurrence des nombres de Schröder [4], en introduisant une nouvelle classe d'arbres binaires, dont les sommets sont judicieusement bicoloriés.

Dans le même esprit nous donnons dans cet article une interprétation combinatoire de la récurrence à 3 termes des nombres de Motzkin. Cette interprétation procède en deux étapes,

1. interprétation des deux membres de l'égalité comme les cardinaux de deux ensembles d'objets combinatoires,
2. définition d'une opération sur ces objets prouvant l'égalité.

### 1.1. La bijection de Rémy

Nous rappelons cette bijection car, outre son élégance, elle constitue un outil important pour l'interprétation que nous présentons.

Le membre gauche de l'égalité (1) énumère les couples constitués d'un arbre binaire complet à  $n$  sommets internes, soit  $2n+1$  sommets en tout, pointé sur un sommet (interne ou feuille), et d'une direction choisie entre droite et gauche.

Le membre droit énumère les arbres binaires complets à  $n+1$  sommets internes (soit  $n+2$  feuilles) pointés sur une feuille.

L'opération bijective définie par Rémy permet de construire un objet du membre droit à partir d'un objet du membre gauche; elle consiste à séparer en deux parties le sommet pointé  $s$ . La partie haute  $s_h$  reste associée à la partie supérieure de l'arbre, la partie basse devenant un sous arbre de racine  $s_b$ , et si le côté choisi pour la transformation est le côté gauche, alors une feuille  $f$  est ajoutée comme fils gauche de  $s_h$  et  $s_b$  devient fils droit de  $s_h$  (opération que nous appellerons *Rémy-gauche*), tandis que si le côté

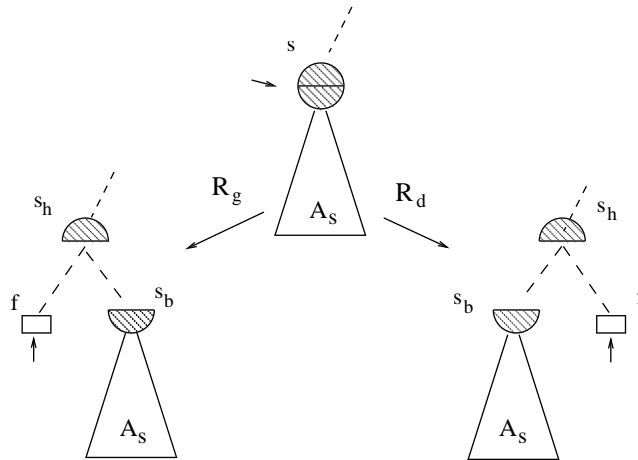


Fig. 1. La bijection de Rémy.

droit est choisi on fait l'opération identique en inversant gauche et droite, opération que nous appellerons *Rémy-droite*. Dans les deux cas, la feuille ajoutée est la feuille pointée dans l'arbre binaire complet ainsi obtenu.

Cette opération est décrite dans la Fig. 1. C'est clairement une bijection.

## 2. Arbres binaires penchés

Il est classique d'associer aux nombres de Motzkin  $m_n$ , les arbres 1–2, c'est-à-dire des arbres dessinés plantés dont les sommets ont 0, 1, ou 2 fils, à  $n$  arcs, ou  $n + 1$  sommets (on ne représente pas le *tronc*, mais le qualificatif *planté* permet de rompre l'ordre circulaire et de préciser que la racine a un *premier* fils, contrairement aux arbres planaires). Le mot de Motzkin associé s'obtient par un parcours préfixe, en codant un point double par la lettre  $x$ , un point simple par la lettre  $a$  et une feuille (sauf la dernière) par la lettre  $y$ .

Ces arbres sont de façon évidente en correspondance avec la famille dite des arbres binaires *penchés* c'est-à-dire des arbres binaires dont tous les fils uniques sont fils gauches, à  $n + 1$  sommets, et également avec la famille des arbres binaires complétés associés, c'est-à-dire à  $n + 1$  sommets internes et  $n + 2$  feuilles, donc  $2n + 3$  sommets en tout, que nous noterons en abrégé *abpc*. Il s'agit clairement d'un codage bijectif.

La Fig. 2 montre un arbre 1–2 ayant 10 sommets ( $n = 9$ ), le mot de Motzkin qui le code, ainsi que l'arbre binaire penché et son complété (avec les 11 feuilles ajoutées mises en évidence par des petits rectangles) qui lui correspondent.

Le membre gauche de l'identité (2) compte le nombre d'*abpc* de taille  $n$  pointés sur une feuille, ensemble que nous appellerons  $M_n^f$ , le premier terme du membre droit compte les *abpc* de taille  $n - 1$  pointés sur un sommet quelconque (interne ou feuille),

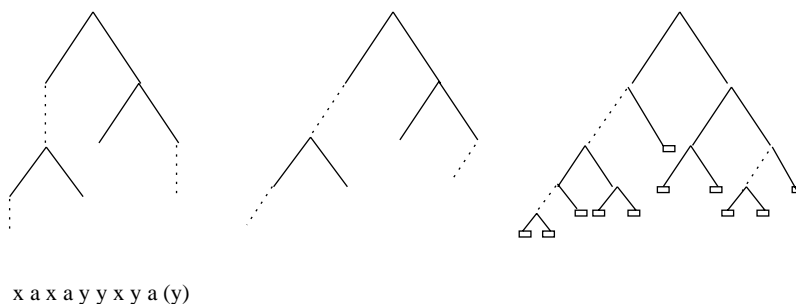


Fig. 2. Un arbre 1–2, son code, et les deux arbres binaires associés.

ensemble noté  $M_{n-1}^s$ , et le second terme est égal à 3 fois le nombre des *abpc* de taille  $n - 2$  pointés sur un sommet interne, ensemble noté  $M_{n-2}^i$ .

Pour prouver de façon bijective la formule (2), il suffit de trouver une bijection entre les ensembles comptés par les deux membres, c'est-à-dire, en suivant la méthode de Rémy, une construction bijective permettant de construire un objet de  $M_n^f$  de façon non ambiguë, soit à partir d'un objet de  $M_{n-1}^s$ , et cela d'une façon, soit à partir d'un objet de  $M_{n-2}^i$ , et cela de trois façons.

### 2.1. Les sept motifs de $M_n^f$

Dans les *abpc*, il ne peut y avoir, après complétion, de feuille isolée gauche, puisque par définition, les seuls fils uniques de l'arbre binaire penché sous-jacent sont des fils à gauche. Parmi les *abpc* pointés sur une feuille, c'est-à-dire éléments de  $M_n^f$ , on distingue sept sous-ensembles disjoints, illustrés dans la colonne de gauche de la Fig. 4. Ces sept sous-ensembles sont définis (et nommés) selon la nature de la feuille pointée (feuille isolée ou feuille jumelle), et cette distinction est raffinée selon la nature de l'*oncle* (c'est-à-dire le sommet frère du père) de la feuille pointée. On obtient ainsi 7 situations caractéristiques:

**cas *fid***: la feuille pointée est isolée, c'est alors une **feuille isolée droite**;

**cas *ffd***: la feuille pointée est une feuille jumelle droite; en fait ce cas est subdivisé en 3 sous-cas, selon que l'oncle est un fils droit, feuille ou sommet interne, sous-cas notés *ffdOdf*, et *ffdOdi* ou un fils gauche, nécessairement interne, sous-cas noté *ffdOgi*;

**cas *ffg***: la feuille pointée est une feuille jumelle gauche, avec de façon identique la subdivision en trois sous-cas *ffgOdf*, *ffgOdi* et *ffgOgi*.

Pour l'ensemble  $M_{n-1}^s$ , on distingue 4 sous-ensembles selon que le sommet pointé est un sommet interne, cas noté *si*, une feuille jumelle gauche ou droite, cas *ffg* et *ffd*, ou une feuille isolée droite, cas *fid*. Ces 4 cas constituent la colonne centrale de la Fig. 4 ci-après.

Il n'y a qu'un seul cas pour l'ensemble  $M_{n-2}^i$ .

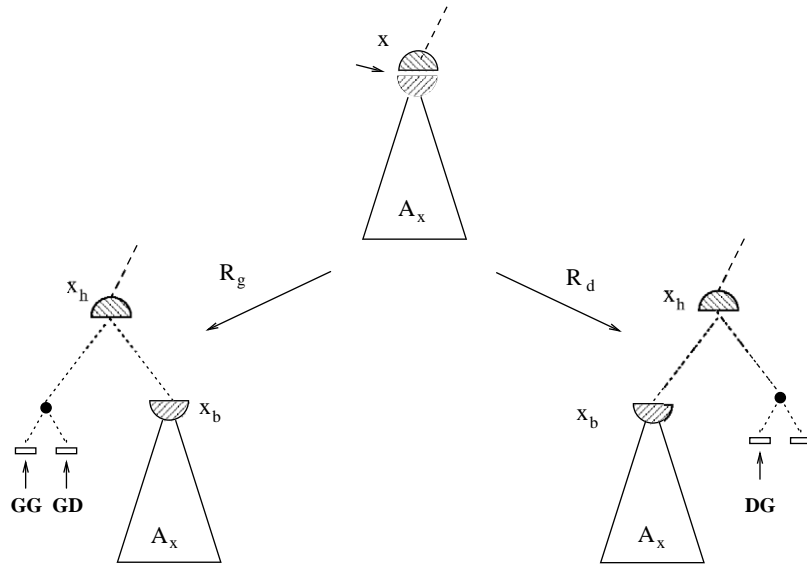


Fig. 3. Les 3 cas de Super-Rémy.

## 2.2. Construction de $M_n^f$ à partir de $M_{n-1}^s$

On applique systématiquement la demi-construction de Rémy, appelée ci-dessus Rémy-droite, sur un élément de  $M_{n-1}^s$ , c'est-à-dire un arbre pointé soit sur un sommet interne, soit une feuille de l'un des trois types *fjg*, *fid* et *fjd*, et l'on obtient un arbre de type respectivement *fid*, *fjdOdf*, *fjdOgi*; pour le dernier cas (cas noté *fjd*), l'application directe de Rémy-droite engendrerait le cas *fjdOgf*, qui est interdit dans cette famille d'arbres; on procède alors à une symétrie verticale de l'arbre entier, qui transforme ce motif en le motif *fjgOdf*, impossible à obtenir directement par la construction (on obtient un résultat équivalent par une symétrie verticale limitée au sous-arbre de racine le grand père de la feuille pointée).

## 2.3. Construction de $M_n^f$ à partir de $M_{n-2}^i$

Pour augmenter de 2 le nombre de sommets internes, on utilise la construction de Rémy complète, c'est-à-dire bilatère, mais on la modifie en ajoutant non pas une feuille mais un triplet de sommets sous la forme d'un sous-arbre composé d'un sommet interne et ses deux fils qui constituent deux feuilles jumelles. En combinant le choix du côté où l'on place le triplet et le choix de la feuille jumelle pointée (gauche ou droite) sur ce triplet, on obtiendrait 4 cas différents. Cependant le cas où les deux feuilles jumelles ajoutées sont à droite, et où l'on pointe la plus à droite de ces deux feuilles redonne le même arbre que celui obtenu à partir du motif *fid* dans l'ensemble  $M_{n-1}^s$ . En supprimant cette possibilité redondante, on obtient exactement 3 arbres pointés distincts de  $M_n^f$  pour chaque arbre de  $M_{n-2}^i$ . La Fig. 3 montre les 3 arbres pointés que

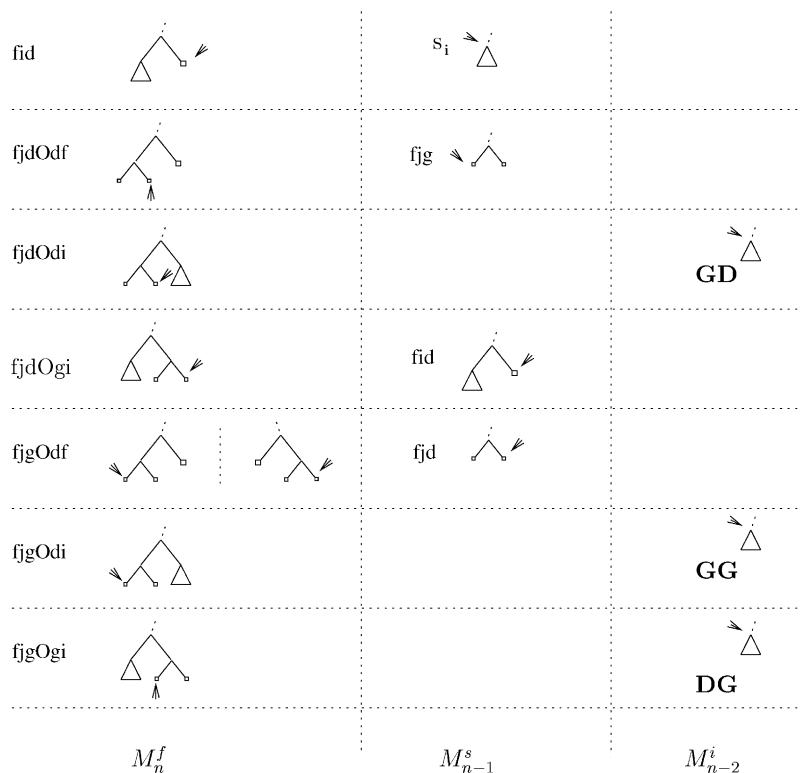


Fig. 4. Les 7 cas de construction.

l'on peut obtenir par cette construction, appelée un peu cavalièrement Super-Rémy, en notant **GG** l'ajout d'un triplet à gauche pointé sur la feuille gauche, **GD** l'ajout d'un triplet à gauche pointé sur une feuille droite et **DG** l'ajout d'un triplet à droite pointé sur la feuille gauche.

La preuve s'achève en vérifiant que les 7 types d'arbres pointés obtenus en appliquant l'ensemble de ces deux constructions sont bien distincts. La Fig. 4 récapitule les sept cas de cette double construction.

## References

- [1] R. Donaghey, L.W. Shapiro, Motzkin numbers, J. Combin. Theory Ser. A 23 (1977) 291–301.
- [2] D. Foata, D. Zeilberger, A classic proof of a recurrence for a very classical sequence, J. Combin. Theory Ser. A 80(2) (1997) 380–384.
- [3] J.L. Rémy, Un procédé itératif de dénombrement d'arbres binaires et son application à leur génération aléatoire, RAIRO Inform. Théor. 19(2) (1985) 179–195.
- [4] E. Schröder, Vier combinatorische Probleme, Z. Math. Phys. 15 (1870) 361–370.