A. Malcev, Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1936, Volume 1(43), Number 3, 323–336

1936 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 1 (43), N. 3
RECUEIL MATHÉMATIQUE

# Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik

**A. Malcev** (Moskau)

Die vorliegende Untersuchung ist der Verallgemeinerung zweier Sätze aus dem Aussagenkalkül und dem engeren Funktionenkalkül gewidmet.

Der erste Satz stammt von Gödel [1] und wird, wie folgt, formuliert:

Für die Widerspruchslosigkeit [2] irgendeines abzählbaren Systems von Formeln des Aussagenkalküls ist es hinreichend, dass jeder endliche Teil des Systems widerspruchsfrei sei.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass der angeführte Satz nicht nur für abzählbare Systeme, sondern überhaupt für Systeme beliebiger Mächtigkeit, richtig ist.

Der zweite Satz wurde bisher in allgemeinster Form von Skolem [3] erhalten. Er zeigt, dass man sogar kein unendliches System von Formeln des engeren Funktionenkalküls konstruieren kann, das die natürliche Zahlenreihe vollständig charakterisieren würde.

Im § 6 beweisen wir die folgende allgemeinere Behauptung:

Jedes unendliche Feld [4] eines beliebigen Systems von Formeln des engeren Funktionenkalküls kann erweitert [5] werden.

Daraus folgt, z. B., dass irgendein System von Formeln, das ein unendliches Feld besitzt, auch Felder beliebiger Mächtigkeit besitzt, dass jeder unendliche algebraische Körper Erweiterungen hat, usw.

Die § 2—5 der vorliegenden Arbeit sind der Erläuterung von Hilfsbegriffen und Sätzen gewidmet. Insbesondere werden hier einige bekannte Resultate von Löwenheim, Skolem und Gödel [6] wiedererhalten.

## § 1

Betrachten wir eine (im allgemeinen unendliche) Menge $\mathfrak{M}$ von Formeln des Aussagenkalküls. Wir werden sagen, die Menge $\mathfrak{M}$ sei widerspruchsfrei, wenn für alle elementaren Aussagen, aus denen die einzelnen Formeln des Systems $\mathfrak{M}$ zusammenge-

---

[1] K. Gödel, Die Vollst. d. Axiome des sog. Funktionenkalküls, „Monatsh. f. Math. u. Physik“, Bd. XXXVII, 1930.

[2] Die Widerspruchsfreiheit eines unendlichen Systems wird z. B. in § 1 definiert.

[3] Th. Skolem, Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe etc., „Fund. Math.“, T. XXIII, S. 934.

[4] Siehe z. B. § 2.

[5] Siehe daselbst die Mitteilung über Resultate von Tarski: „Fund. Math.“, T. XXIII, S. 161, 1934.

[6] Th. Skolem, Logisch-komb. Unters. etc., „Oslo Vid. akademis skrifter“, 1, Nr. 4, 1920. K. Gödel — siehe die Fussnote [1].

setzt sind, die Werte „wahr" und „falsch" so verteilt werden können, dass alle Formeln aus $\mathfrak{M}$ (nach den Regeln des Aussagenkalküls) den Wert „wahr" erhalten.

Satz. *Dafür, dass irgendein System $\mathfrak{M}$ von Formeln widerspruchsfrei sei, ist notwendig und hinreichend, dass jedes endliche Untersystem von $\mathfrak{M}$ widerspruchsftei sei.*

Beweis. Die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$ sei $\aleph_\alpha$. Da für endliche $\mathfrak{M}$ der Satz trivial ist, genügt es, unter Anwendung der Induktion zu beweisen, dass aus der Richtigkeit des Satzes für alle Systeme der Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\alpha$ seine Richtigkeit für Systeme $\mathfrak{M}$ der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ folgt.

Ordnen wir die Formeln des Systems $\mathfrak{M}$ in eine transfinite Folge des kleinsten Typus $\Omega_\alpha$ an:

$$\mathfrak{M} = \{A_1(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}), \ A_2(a_2^1, \ldots, a_2^{n_2}), \ldots, A_\omega(a_\omega^1, \ldots, a_\omega^{n_\omega}), \ldots\}. \quad (1)$$

(Die $a_i^k$ sind Elementaraussagen, aus denen die Formel $A_i$ gebildet ist.) Betrachten wir alle möglichen Anfangsabschnitte der Folge $\mathfrak{M}$. Da der Typus der Folge der kleinste ist, so haben alle Abschnitte eine Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\alpha$ und sind folglich, nach Voraussetzung, widerspruchsfrei. Folglich kann man für jeden beliebigen Abschnitt

$$\mathfrak{M}^\lambda = \sum_{i<\lambda} A_i$$

für alle $a_i^k$ die Werte „wahr" und „falsch" so verteilen, dass alle Formeln aus $\mathfrak{M}^\lambda$ wahr werden.

Als Modell bezeichnen wir jede Verteilung der Werte „wahr" und „falsch" für Elementaraussagen. Somit existiert für jeden Abschnitt $\mathfrak{M}^\lambda$ mindestens ein Modell $M^\lambda$, für das $\mathfrak{M}^\lambda$ wahr ist.

Betrachten wir die Folge von Modellen

$$M^1, M^2, \ldots, M^\omega, M^{\omega+1}, \ldots, \quad (2)$$

die allen möglichen Anfangsabschnitten der Folge $\mathfrak{M}$ entsprechen. Die Elementaraussagen $a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}$ der ersten Aussage $A_1$ haben für jedes Modell $M^\lambda$ ihr Wertesystem. Da für die Elemente $a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wertesysteme existiert, sô existiert ein solches Wertesystem dieser Elemente, das bei $\aleph_\alpha$ Modellen der Folge (2) vorkommt. Bilden wir nun die Formel $A_1^*$. Zu diesem Zwecke werden wir bei denjenigen Elementen, welche im gewählten Wertesystem den Wert „falsch" besitzen, das Negationszeichen anbringen und darauf sämtliche Elemente mit &-Zeichen verbinden. $A_1^*$ wird daher die Form haben:

$$A_1^* = b_1^1 \,\&\, b_1^2 \,\&\, \ldots \,\&\, b_1^{n_1},$$

wo $b_1^k$ gleich $a_1^k$ oder $\overline{a}_1^k$ ist.

Betrachten wir die Folge $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_2 = A_1^*, \ A_2, \ A_3, \ldots, A_\omega, \ldots$$

Jeder beliebige Anfangsabschnitt $\mathfrak{M}_2^\lambda$ dieser Folge ist widerspruchsfrei, da wir als gesuchtes Modell das alte Modell $M^\mu$ annehmen können, für welches $\mu > \lambda$ ist, und die Elemente $a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}$ die von der Formel $A_1^*$ geforderten Werte besitzen. Indem wir die Abschnitte der Folge $\mathfrak{M}_2$ und deren Modelle betrachten, können wir in analoger Weise $A_2^*$ bestimmen und die Folge $\mathfrak{M}_3$:

$$\mathfrak{M}_3 = A_1^*,\ A_2^*,\ A_3, \ldots, A_\omega, \ldots$$

Angenommen, wir hätten schon für alle $\alpha < \lambda$ die Folgen $\mathfrak{M}_\alpha$:

$$\mathfrak{M}_\alpha = \sum_{i<\alpha} A_i^* + A_\alpha + A_{\alpha+1} + \ldots,$$

konstruiert. Dabei sei jeder beliebige Anfangsabschnitt $\mathfrak{M}_\alpha^\mu$ widerspruchsfrei. Es sei zunächst $\lambda = \lambda' + 1$. Dann ist

$$\mathfrak{M}_{\lambda'} = \sum_{i<\lambda'} A_i^* + A_{\lambda'} + \ldots$$

Wir finden $A_{\lambda'}^*$ und schliessen analog, wie bei der Bestimmung von $\mathfrak{M}_2$, dass jeder Abschnitt der Folge

$$\mathfrak{M}_\lambda = \sum_{i<\lambda'} A_i^* + A_{\lambda'}^* + A_\lambda + \ldots$$

widerspruchsfrei sein wird.

Es sei nun $\lambda$ eine Zahl zweiter Art. Wir setzen

$$\mathfrak{M}_\lambda = \sum_{i<\lambda} A_i^* + A_\lambda + \ldots$$

Wir haben zu beweisen, dass jedes beliebige endliche Aussagensystem aus $\mathfrak{M}_\lambda$ widerspruchsfrei ist. Nehmen wir irgendein endliches System $S$ von Aussagen aus $\mathfrak{M}_\lambda$:

$$S = A_{\lambda_1}^* + A_{\lambda_2}^* + \ldots + A_{\lambda_k}^* + A_{\lambda_{k+1}} + \ldots + A_{\lambda_m}.$$

Da $\lambda$ der zweiten Art ist, kann man eine solche transfinite Zahl $\mu$ finden, dass $\lambda_1 < \mu$, $\lambda_2 < \mu, \ldots, \lambda_k < \mu$ und $\mu < \lambda$ ist. Betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}_\mu$. Ihr Abschnit $\mathfrak{M}_\mu^{\lambda_{m+1}}$ enthält alle Formeln des Systems $S$ und ist gleichzeitig widerspruchsfrei, da nach Annahme die Abschnitte der Folgen $\mathfrak{M}_\alpha$ bei $\alpha < \lambda$ widerspruchsfrei sind. Folglich ist $S$ widerspruchsfrei w. z. b. w.

Bilden wir endlich die Menge $\mathfrak{M}^* = \sum A_\lambda^*$. Jedes endliche System von Aussagen $A_\lambda^*$ ist widerspruchsfrei, da es in irgendeinen Abschnitt von $\mathfrak{M}_\mu$ eingeht. Unter Benutzung dieser Tatsache ist es sehr leicht, ein Modell $M^*$ für die Menge $\mathfrak{M}^*$ zu konstruieren. In der Tat haben die Formeln der Menge $\mathfrak{M}^*$ die Gestalt:

$$a_\lambda^1 \,\&\, \overline{a}_\lambda^2 \,\&\, \ldots \,\&\, a_\lambda^{n_\lambda}.$$

Dabei kann das Element $a_\lambda^i$ wegen der endlichen Widerspruchsfreiheit in verschiedene Formeln eingehen und zwar entweder in alle auf einmal ohne Negationszeichen oder in alle mit Negationszeichen. Im ersten Fall geben wir ihm den Wert „wahr“, im zweiten — „falsch“. Das auf diese Weise erhaltene Modell $M^*$ genügt jeder Formel $A_\lambda^*$, folglich auch der Formel $A_\lambda$. Daraus folgt, dass das System $\mathfrak{M}$ widerspruchsfrei ist.

## § 2

Bekanntlich lässt sich jeder Ausdruck des engeren Funktionenkalküls durch einen ihm äquivalenten Ausdruck in der Normalform ersetzen, d. h. durch einen Ausdruck der Gestalt:

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

wo $\mathfrak{A}$ die Zeichen $(x)$ und $(Ex)$ nicht mehr enthält. Im Folgenden setzen wir voraus, dass jeder zu untersuchende Ausdruck schon in Normalform übergeführt ist.

Betrachten wir irgendein (im allgemeinen unendliches) System $S$ von Ausdrücken des engeren Funktionenkalküls und irgendeine Menge $B$, deren Elemente von beliebiger Natur sind. Ausgehend vom System $S$ und der Menge $B$, kann man andere Mengen aufbauen, die wir Konfigurationen der Menge $B$ nennen werden. Alle Konfigurationen sind Untermengen der Universalmenge $U$, die folgendermassen konstruiert wird. Seien

$$A_i(x),\ \overline{A}_i(x),\ B_j(x, y),\ \overline{B}_j(x, y), \ldots$$

die elementaren Funktionen des Systems $S$. Nehmen wir eine dieser Funktionen und setzen in sie anstatt $(x, y, \ldots, z)$ irgendeine Kombination von Elementen der Menge $B$ ein. Die erhaltene Funktionsfigur, deren leere Stellen durch Elemente der Menge $B$ ausgefüllt sind, ist nach Definition ein Element der Universalmenge $U$. Indem wir in diese Funktionen alle möglichen Kombinationen der Elemente der Menge $B$ einsetzen, erhalten wir eine Menge von Figuren der genannten Art. Die Gesamtheit aller dieser Figuren ist die Menge $U$.

Wie gesagt, heissen alle Untermengen der Universalmenge $U$ Konfigurationen der Menge $B$. Um die Elemente der Menge $B$ von den Elementen der Universalmenge zu unterscheiden, werden wir die letzteren Glieder nennen. Zwei Glieder der Menge $U$ heissen entgegengesetzt, wenn eines von ihnen irgendeine Funktion ist und das andere die Negation dieser Funktion, wobei an entsprechenden Stellen die gleichen Elemente der Menge $B$ stehen. Durch Zusammenfassen entgegengesetzter Glieder zerlegen wir die Menge $U$ in Paare.

D e f i n i t i o n. Eine Konfiguration heisst voll, wenn sie mindestens je ein Glied aus jedem Paar der Menge $U$ enthält.

D e f i n i t i o n. Eine Konfiguration ist widerspruchsfrei, wenn sie keine entgegengesetzten Elemente enthält.

D e f i n i t i o n. Eine Menge $B$ heisst Feld des Aussagensystems, wenn auf dieser Menge die Bedeutungen der Elementarfunktionen derart bestimmt sind, dass alle Aussagen des betrachteten Systems erfüllt werden.

Um darüber zu urteilen, ob eine Menge $B$ Feld eines Aussagensystems $S$ ist, muss man zuerst auf $B$ die Bedeutungen der Elementarfunktionen bestimmen. Dies werden wir stets folgendermassen ausführen: wir wählen irgendeine widerspruchsfreie volle Konfiguration $Q$ der Menge $B$ und geben den Funktionen die Bedeutung „wahr" für diejenigen Werte der Variablen, mit welchen sie in diese Konfiguration eingehen. Den übrigen Werten der Variablen geben wir die Bedeutung „falsch". Falls das erhaltene Modell dem System $S$ genügt, ergibt die Menge $B$ mit der Konfiguration $Q$ ein Feld des Systems $S$. Ist umgekehrt das Feld des Systems $S$ gegeben, so erhalten wir die entsprechende Konfiguration $Q$, indem wir Funktionen mit denjenigen Werten der Argumente sammeln, für die sie wahr sind.

Es sei noch auf eine Deutung der Elemente der Universalmenge hingewiesen. Diese Deutung liegt allen weiteren Betrachtungen zu Grunde. Betrachten wir alle Glieder der Universalmenge als verschiedene unbestimmte Elementaraussagen des Aussagenkalküls, indem wir die entgegengesetzten Glieder der Menge als entsprechend entgegengesetzte Aussagen des Aussagenkalküls ansehen werden. Nun können wir aus den Gliedern der Menge $U$ verschiedene Aussagen des Aussagenkalküls konstruieren; sei $\mathfrak{A}$ eine davon. Betrachten wir den mit $\mathfrak{A}$ verbundenen Ausdruck

$$(E)\,\mathfrak{A} = (Eb_i)\,(Eb_j)\,\ldots\,\mathfrak{A},$$

wo $b_i$, $b_j, \ldots$ alle möglichen Elemente der Menge $B$ sind, welche in diejenigen Glieder der Menge $U$ eingehen, aus denen die Aussage $\mathfrak{A}$ zusammengesetzt ist. Der Ausdruck $(E)\,\mathfrak{A}$ ist ein Ausdruck des engeren Funktionenkalküls. Gleichzeitig ist $(E)\,\mathfrak{A}$ der Aussage $\mathfrak{A}$ äquivalent, da es vollständig klar ist, dass aus der Erfüllbarkeit des einen die Erfüllbarkeit des anderen folgt.

## § 3

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, dass das betrachtete Axiomensystem die Identitätsrelation nicht enthält. Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, wenn das System $S$ die Identitätsrelation enthält. Bei der Verallgemeinerung der Resultate der vorigen Paragraphen stossen wir auf Schwierigkeiten in der Definition der Widerspruchsvollheit der Konfiguration: z. B. ist nach der Definition im § 2 die Konfiguration

$$A\,(a,\, b)\;\&\;\overline{A}\,(a,\, c)\;\&\; b \equiv c,$$

wo $a$, $b$, $c$ verschiedene Elemente der Menge $B$ sind, widerspruchsfrei, während sie, der üblichen Deutung der Identität entsprechend, als widerspruchsvoll angesehen werden muss. Die verlangte Definition der Widerspruchsvollheit einer Konfiguration $Q$ der Menge $B$, welche die Identitätsrelation enthält, kann man folgendermassen erhalten: den Elementen der Menge $B$ mögen Elemente einer anderen Menge $\widetilde{B}$ entsprechen, wobei folgende Bedingungen erfüllt werden sollen:

1. Jedem Element der Menge $B$ entspricht ein einziges Element der Menge $\widetilde{B}$.
2. Den Elementen $a$ und $b$ der Menge $B$, die in der Konfiguration $Q$ durch die Relation $a \equiv b$ verbunden sind, entspricht dasselbe Element der Menge $\widetilde{B}$. Den Elementen, die durch die Relation $a \not\equiv b$ verbunden sind, entsprechen jedoch verschiedene Elemente der Menge $\widetilde{B}$.

Ersetzen wir ferner in allen Gliedern der Konfiguration $Q$ die Elemente der Menge $B$ durch die entsprechenden Elemente der Menge $\widetilde{B}$. Als Resultat erhalten wir eine Konfiguration $\widetilde{Q}$ der Menge $\widetilde{B}$. Diese Konfiguration enthält die Identitätsrelation, jedoch mit der wesentlichen Beschränkung, dass in $\widetilde{Q}$ Glieder von der Form:

$$\widetilde{a} \equiv \widetilde{b},$$

nicht eingehen, falls $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ verschiedene Elemente der Menge $\widetilde{B}$ sind. Infolgedessen lässt sich für die Konfiguration $\widetilde{Q}$ die im vorigen Paragraphen gegebene Definition der Widerspruchsvollheit anwenden. Daraus erhalten wir die gesuchte Definition der Widerspruchsvollheit von $Q$.

D e f i n i t i o n. *Eine die Identitätsrelation enthaltende Konfiguration* $Q$ *der Menge* $B$ *heisst widerspruchsfrei, wenn die Menge* $\widetilde{B}$ *existiert und die entsprechende Konfiguration* $\widetilde{Q}$ *im Sinne von § 2 widerspruchsfrei ist.*

Ist also eine die Identitätsrelation enthaltende Konfiguration $Q$ gegeben, so kann man in zwei Sinnen von ihrer Widerspruchsfreiheit sprechen: 1) im Sinne der Definition des § 2 und 2) im Sinne der soeben angeführten Definition. Im ersten Fall werden wir sagen, die Konfiguration sei widerspruchsfrei bei r e l a t i v verstandener Identitätsrelation, im zweiten Fall — bei a b s o l u t verstandener Identität. Es ist unmittelbar klar, dass eine Konfiguration, die bei absolut verstandener Identitätsrelation widerspruchsfrei ist, auch bei relativ verstandener Identität widerspruchsfrei sein wird. Das Umgekehrte ist nicht richtig, wie das am Anfang dieses Paragraphen angeführte Beispiel zeigt. Das folgende Lemma gibt die Bedingungen, bei denen die absolut und relativ verstandenen Identitäten äquivalent sind.

L e m m a. *Ist die Konfiguration* $Q$ *widerspruchsfrei bei relativ verstandener Identität und genügt sie ausserdem noch dem Axiomensystem:*

$$\left.\begin{array}{c}
(x)\,[x \equiv x],\\
(x)\,(y)\,[x \equiv y \rightarrow y \equiv x],\\
(x)\,(y)\,(z)\,[x \equiv y\,\&\, x \equiv z \rightarrow y \equiv z],\\
(x)\,(y)\,[A\,(x)\,\&\, x \equiv y \rightarrow A\,(y)],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(x)\,(y)\ldots(z)\,(u)\,(v)\ldots(w)\,[F\,(x, y, \ldots, z)\,\&\, x \equiv u\,\&\, y \equiv\\
\equiv v\,\&\ldots\&\, z \equiv w \rightarrow F\,(u, v, \ldots, w)],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (I)$$

*wo* $A\,(x), \ldots, F\,(x, y, \ldots, z)$ *alle möglichen elementaren Funktionen des betrachteten Systems* $S$ *sind, so kann man behaupten, dass* $Q$ *auch vom absoluten Standpunkt aus widerspruchsfrei sei.*

Für die Durchführung des Beweises teilen wir alle Elemente der Menge $B$, deren Konfiguration $Q$ ist, in Klassen ein, indem wir in dieselbe Klasse jene Elemente vereinigen, welche in der Konfiguration $Q$ durch die Identitätsrelation verbunden sind. Infolge des Systems $(I)$ ist eine solche Einteilung möglich, und die Klassen werden paarweise keine gemeinsamen Elemente enthalten. Als Menge $\widetilde{B}$ nehmen wir die Menge dieser Klassen an; jedem Element der Menge $B$ möge diejenige Klasse de Menge $\widetilde{B}$ entsprechen, in die jenes Element eingeht. Man überzeugt sich leicht, dass dabei alle Bedingungen der Definition der absoluten Widerspruchsfreiheit erfüllt werden; folglich ist die Konfiguration $Q$ widerspruchsfrei bei absolut verstandener Identitätsrelation.

Aus diesem Lemma folgt der Satz [7]:

S a t z. *Es möge das System* $S$, *das in Symbolen des engeren Funktionenkalküls aufgeschrieben wird, die Identitätsrelation enthalten. Wir fügen zu* $S$ *das entsprechende System von Identitätsaxiomen* $(I)$ *hinzu und ersetzen im System* $S+I$ *die Identitätsrelation durch irgendeine elementare Hilfsfunktion* $\varphi\,(a, b)$. *Das neue System* $S'$, *das die Identitätsrelation nicht mehr enthält, ist dem System* $S$ *äquivalent.*

---

[7] Ein analoger Satz befindet sich bei Skolem [6] und Gödel [1].

Es genügt zu zeigen, dass aus der Widerspruchsfreiheit von $S'$ die absolute Widerspruchsfreiheit des Systems $S$ folgt, da das Umgekehrte offensichtlich ist. Sei $Q'$ eine widerspruchsfreie Konfiguration der Menge $B'$, die dem System $S'$ genügt. Bezeichnen wir mit $Q''$ die Konfiguration, die wir erhalten, wenn in allen Gliedern der Konfiguration $Q'$ die Funktion $\varphi(a, b)$ wieder durch die Identitätsrelation $a \equiv b$ ersetzt wird. Die Konfiguration $Q''$ ist widerspruchsfrei bei relativ verstandener Identität und genügt den Systemen $I$ und $S$. Daraus folgt nach dem Lemma, dass $Q''$ bei absolut verstandener Identität ebenfalls widerspruchsfrei ist. Somit existiert eine im absoluten Sinne widerspruchsfreie Konfiguration $Q''$, die dem System $S$ genügt; folglich ist das System $S$ widerspruchsfrei, w. z. b. w.

B e m e r k u n g. Im Folgenden werden wir beim Übergang von $S$ zu $S'$ die Identitätsrelation nicht durch eine neue Funktion ersetzen, sondern uns mit der Bemerkung begnügen, dass das System $S'$ die r e l a t i v i s i e r t e Identität enthält.

## § 4

Das Ziel dieses Paragraphen ist, für jedes System von Aussagen $S$ des engeren Funktionenkalküls ein entsprechendes System $\mathfrak{B}$ von Aussagen des Aussagenkalküls zu konstruieren, so dass die beiden Systeme äquivalent seien.

Sei zunächst das System $S$ endlich. Dann kann es durch eine Aussage $A$ von der Form

$$(x_1) \ldots (x_m)(Ey_1) \ldots (Ey_n)\mathfrak{A}$$

ersetzt werden. Sei ferner $B$ eine unendliche Menge. Unter der Annahme, dass der Ausdruck $A$ widerspruchsfrei sei, werden wir im weiteren aus $B$ eine Untermenge $B_\omega$ aussondern und für $B_\omega$ eine widerspruchsfreie Konfiguration $Q_\omega$ konstruieren, die der Aussage $A$ genügt.

Zu diesem Zweck nehmen wir irgendein Element $b_0$ der Menge $B$ und setzen es an Stelle aller „$x$" in das Axiom $A$ ein. Dann wird das Axiom $A$ die Existenz gewisser Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ behaupten, die mit $b_0$ durch die Relation

$$\mathfrak{A}(b_0, b_0, \ldots, b_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

verbunden sind. Als solche „$y$" wählen wir irgendwelche $n$ von $b_0$ verschiedene Elemente der Menge $B$. Diese Elemente seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Bezeichnen wir die Gesamtheit der Elemente $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ mit $B_1$, die Beziehung

$$\mathfrak{A}(b_0, b_0, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

der sie genügen, mit $\mathfrak{B}_1$. Bilden wir ferner aus $B_1$ alle möglichen Kombinationen (mit Wiederholungen) zu $m$ Elementen und setzen wir jede Kombination an Stelle der „$x$" in das Axiom $A$ ein. Für jede solche Einsetzung behauptet das Axiom die Existenz entsprechender $n$ neuer Elemente, als welche wir jedesmal irgendwelche $n$ Elemente aus dem übrigbleibenden Teil der Menge $B$ annehmen. Die Gesamtheit aller so gewählten Elemente, $B_1$ eingeschlossen, sei $B_2$. Die Elemente der Menge $B_2$ genügen einem System von Beziehungen der Form:

$$\mathfrak{A}(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}, b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}),$$

wo $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}$ irgendwelche Elemente aus $B_1$ sind, und $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}$ die entsprechende Gruppe von neuen Elementen ist. Bezeichnen wir das System dieser

Beziehungen, $\mathfrak{B}_1$ eingeschlossen, mit $\mathfrak{B}_2$. Der Prozess, mit dessen Hilfe wir aus $B_1$ und $\mathfrak{B}_1$ $B_2$ und $\mathfrak{B}_2$ erhalten haben, lässt sich auf eine beliebige Menge von Elementen anwenden. Wir werden denselben Anwendungsprozess des Axioms $A$ nennen. Wir haben somit durch Anwendung des Axioms $A$ auf die Mengen $B_1$, $\mathfrak{B}_1$ die Mengen $B_2$, $\mathfrak{B}_2$ erhalten. Indem wir das Axiom $A$ wiederum auf die Mengen $B_2$, $\mathfrak{B}_2$ anwenden, werden wir die Mengen $B_3$, $\mathfrak{B}_3$ erhalten u. s. w. Bei unbegrenzter Fortführung dieses Prozesses erhalten wir zwei Reihen von Mengen:

$$B_1, \quad B_2, \ldots, B_n, \ldots$$
$$\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n, \ldots$$

Es sei

$$B_\omega = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots,$$
$$\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{B}_n + \ldots$$

Bei Anwendung des Axioms $A$ auf $B_\omega$ werden wir keiner neuen Elemente bedürfen, da entsprechende dem Axiom $A$ genügende Elemente innerhalb $B_\omega$ zu finden sind.

Betrachten wir die Menge $\mathfrak{B}_\omega$ genauer. $\mathfrak{B}_\omega$ ist ein System von Beziehungen der Form:

$$\mathfrak{A}(b', b'', \ldots, b^{(m)}, c', c'', \ldots, c^{(n)}),$$

wo $b', b'', \ldots, b^{(m)}, c', c'', \ldots, c^{(n)}$ Elemente der Menge $B_\omega$ sind. Jede solche Beziehung ist eine Aussage des Aussagenkalküls zusammengesetzt aus Elementarfunktionen des Axioms $A$, deren leere Stellen durch Elemente der Menge $B_\omega$ ausgefüllt sind. Folglich kann man, unter Anwendung der Ausdrucksweise von § 2, sagen, $\mathfrak{B}_\omega$ sei ein System von solchen Aussagen des Aussagenkalküls, die aus Elementen der Universalmenge $U_\omega$ gebildet sind, welche der Menge $B_\omega$ entspricht. Ist das Aussagensystem $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsfrei, so existiert eine widerspruchsfreie Konfiguration $Q_\omega$, die $\mathfrak{B}_\omega$ erfüllt. Die Menge $B_\omega$ zusammen mit der Konfiguration $Q_\omega$ ergibt uns in diesem Fall das Feld des Axioms $A$. Dies bedeutet, dass aus der Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{B}_\omega$ die Widerspruchsfreiheit der Aussage $A$ folgt. Um die Richtigkeit der umgekehrten Aussagen zu zeigen, genügen folgende Bemerkungen:

Jede Aussage der Menge $\mathfrak{B}_\omega$ hat die Form

$$\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n).$$

Betrachten wir die Menge $(E)\mathfrak{B}_\omega$ der konjugierten Aussagen von der Form:

$$(Eb_1)(Eb_2)\ldots(Eb_m)(Ec_1)\ldots(Ec_n)\mathfrak{A}(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n).$$

Alle Aussagen der Menge $(E)\mathfrak{B}_\omega$ sind die Folgen der Formel $A$ [8]. Da $A$ als widerspruchsfrei vorausgesetzt wird, so ist jede endliche Untermenge von Aussagen des Systems $(E)\mathfrak{B}_\omega$ erfüllbar. Daraus folgt nach § 2 die Erfüllbarkeit einer beliebigen endlichen Menge von Aussagen des Systems $\mathfrak{B}_\omega$. Endlich erhalten wir infolge des Satzes des § 1 die Widerspruchsfreiheit des ganzen Systems $\mathfrak{B}_\omega$, was wir erreichen wollten.

Wir haben somit die Äquivalenz des Systems von Aussagen des Aussagenkalküls $\mathfrak{B}_\omega$ und des Ausdruckes $A$ aus dem engeren Funktionenkalkül bewiesen.

Besteht das System $S$ aus einer unendlichen Anzahl von Ausdrücken, so ist der Iterationsprozess folgendermassen zu führen. Wir wählen wieder ein Element $b_0$ und

[8] Vgl. z. B. Gödel, Die Vollständigkeit etc., „Monatsh. f. Math. u. Ph.“, Bd. XXXVII, S. 354.

wenden darauf der Reihe nach alle Aussagen des Systems $S$ an. Jede Aussage erfordert die Aussonderung einer gewissen Anzahl von Elementen aus $B$. Indem wir diese Elemente sammeln, erhalten wir die Menge $B_1$ ($b_0$ wird in $B_1$ eingeschlossen). Analogerweise wird die Menge von Aussagen $\mathfrak{B}_1$ zusammengestellt. Darauf wenden wir auf $B_1$ wiederum jedes Axiom des Systems $S$ an. Die Anwendung jedes Axioms ergibt entsprechende Mengen $B_2^i$ und $\mathfrak{B}_2^i$. Vereinigen wir alle $B_2^i$ und die entsprechenden $\mathfrak{B}_2^i$, so erhalten wir $B_2$ und $\mathfrak{B}_2$ u. s. w. Durch analoges Vorgehen erhalten wir schliesslich die Mengen $B_\omega$ und $\mathfrak{B}_\omega$. Alles früher in Bezug auf eine Aussage $A$ gesagte überträgt sich unverändert auf den allgemeinen Fall.

Anmerkung. Im Falle des endlichen Systems konnte die Menge $B$ abzählbar gewählt werden. Im Falle des unendlichen Systems $S$ kann die Menge $B$ von der gleichen Mächtigkeit gewählt werden, wie das System $S$. Daraus erhält man die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Löwenheim:

In jedem Feld eines unendlichen Systems $S$ von Aussagen des engeren Funktionenkalküls existiert ein Unterfeld, dessen Mächtigkeit die Mächtigkeit von $S$ nicht übersteigt

## § 5

In manchen Fällen muss man den Iterationsprozess nicht von einem Element aus, sondern von einer Menge von Elementen beginnen. Es sei uns z. B. eine Menge $B_0$ gegeben und die Konfiguration dieser Menge $Q_0$, wobei $Q_0$ dem betrachteten Axiom $A$ nicht genügt. Es ist zu untersuchen, ob es möglich ist, die Menge $B_0$ und die Konfiguration $Q_0$ so zu ergänzen, dass die neue Menge $B_\omega$ zum Feld des Axioms $A$ wird.

Zur Lösung dieser Aufgabe wählen wir eine Menge $B$, die uns zur Aussonderung neuer Elemente dienen wird, und wenden sukzessive, von $B_0$ und $Q_0$ angefangen, das Axiom $A$ an. Wie früher erhalten wir zwei Reihen von Mengen

$$\begin{gathered} B_0,\ B_1,\ B_2, \ldots, B_n, \ldots, \\ Q_0,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n, \ldots \end{gathered}$$

Es sei

$$\begin{gathered} B_\omega = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots, \\ \mathfrak{B}_\omega = Q_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots \end{gathered}$$

Ist das System $\mathfrak{B}_\omega$ von Aussagen widerspruchsfrei, so kann man $B_\omega$ als das gesuchte Feld betrachten, und die Aufgabe bekommt eine positive Lösung. Ist jedoch das System $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsvoll, so erhält man eine negative Antwort [9].

Die Mengen $B_\omega$, $\mathfrak{B}_\omega$ und überhaupt der ganze Iterationsprozess kann anschaulicher dargestellt werden mit Hilfe der endlichen Folgen verschiedener Ordnungen. Nennen wir die Elemente der Menge $B_0$ endliche Folgen 0-ter Ordnung. Eine Gesamtheit von der Form:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, i],$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ endliche Folgen 0-ter Ordnung und $i$ eine natürliche Zahl $\leqslant n$ ist, nennen wir endliche Folgen erster Ordnung. Allgemein bezeichnen wir als endliche Folgen $k$-ter Ordnung Gesamtheiten von der Form:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, i],$$

[9] Der Beweis ist dem Beweise des § 4 vollkommen analog.

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ endliche Folgen der Ordnung $\leqslant k-1$ sind. Diejenigen Elemente der Menge $B_0$, die entweder in die gegebene endliche Folge oder in seine Teilfolgen eingehen, werden wir kurz Grundelemente der endlichen Folge nennen. Es ist klar, dass jede Folge nur eine e n d l i c h e Anzahl von Grundelementen enthält.

Gehen wir nun zum Aufbau des Iterationsprozesses mit Hilfe der endlichen Folgen über. Beim Einsetzen irgendeiner Kombination $b_1, b_2, \ldots, b_m$ aus Elementen der Menge $B_0$ an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in das Axiom $A$ werden wir, anstatt neue Elemente aus der Menge $B$ auszuwählen, dieselben als endliche Folgen erster Ordnung bezeichnen:

$$[b_1, \ldots, b_m; 1], [b_1, \ldots, b_m; 2], \ldots, [b_1, \ldots, b_m; n].$$

Überhaupt werden wir beim Einsetzen der endlichen Folgen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ der Ordnung $\leqslant k$ an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die neuen Elemente, deren Existenz das Axiom behauptet, als endliche Folgen:

$$[\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 2], \ldots, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; n],$$

bezeichnen. Bei diesen Bezeichnungen wird die Menge $B_k$ mit der Menge der endlichen Folgen der Ordnung $\leqslant k$ zusammenfallen, die Menge $B_\omega$ wird mit der Menge aller endlichen Folgen zusammenfallen, und das System $\mathfrak{B}_\omega$ wird zur Gesamtheit von Aussagen der Form:

$$\mathfrak{A}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 1], \ldots, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; n]\},$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ unabhängig voneinander alle möglichen endlichen Folgen der Gesamtheit $B_\omega$ durchlaufen.

Wenn das zu untersuchende Axiom die Form hat:

$$(x)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x, y_1, \ldots, y_n),$$

so kann man sich nur auf einfache endliche Folgen beschränken. In der Tat, wenn wir an Stelle von „$x$" irgendein Element $b_0$ der Menge $B_0$ einsetzen, so können wir die neuen Elemente durch einfache endliche Folgen

$$[b_0, 1], \ldots, [b_0, n]$$

bezeichnen. Wenn wir dann wiederum anstatt „$x$" eine dieser endlichen Folgen einsetzen, so können wir die entsprechenden neuen Elemente wieder durch einfache endliche Folgen:

$$[b_0, i, 1], [b_0, i, 2], \ldots, [b_0, i, n],$$

bezeichnen u. s. w. In diesem Falle nimmt das System $\mathfrak{B}_0$ die folgende Form an:

$$\mathfrak{B}_\omega = \sum_\sigma \mathfrak{A}\{\sigma, [\sigma, 1], \ldots, [\sigma, n]\},$$

wo sich die Summation auf alle möglichen endlichen Folgen erstreckt.

## § 6

S a t z. *Die unendliche Menge $B$ mit der Konfiguration $Q$ sei ein Feld des Axiomensystems $S$, welches die Identitätsbeziehung enthält. Dann existiert für das System $S$ ein neues Feld $B_\omega$ mit der Konfiguration $Q_\omega$, wobei $B \subset B_\omega$ und $Q \subset Q_\omega$,* *d. h. jedes unendliche Feld des Systems $S$ besitzt mindestens eine eigentliche Erweiterung.*

Vor allem werden wir, unter Benutzung der Resultate von § 3, das System $S$ durch das äquivalente Axiom $A$ ersetzen:

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),$$

welches nur die relativisierte Identität enthält.

Es sei

$$Q' = Q + \sum_{i \neq k} (b_i \neq b_k),$$

wo $b_i$, $b_k$ alle möglichen Elemente des Feldes $B$ durchlaufen. Es ist klar, dass die Konfiguration $Q'$ dem Axiom $A$ genügt, da sie sich von $Q$ nur durch den Hinweis unterscheidet, dass alle Elemente der Menge $B$ verschieden sind. Bezeichnen wir mit $b_*$ irgendein neues Element, das in der Menge $B$ nicht enthalten ist, und setzen wir:

$$B_0 = B + b_*,$$
$$\mathfrak{B}_0 = Q' + \sum_i (b_* \neq b_i).$$

Das System $\mathfrak{B}_0$ ist eine Konfiguration der Menge $B_0$, die im Allgemeinen nicht mehr dem Axiom $A$ genügt. Wir zeigen, dass es möglich ist $B_0$ und $\mathfrak{B}_0$ derart zu ergänzen, dass die neue Menge wieder zum Feld des Axioms $A$ wird. Indem wir im neuen Feld diejenigen Elemente identifizieren, die durch die Identitätsrelation verbunden sind, erhalten wir das Feld des Systems. Dieses Feld wird breiter sein, als das alte, da das Element $b_*$ kraft der Beziehungen

$$\sum_i (b_* \neq b_i)$$

mit keinem der alten Elemente zusammenfallen kann.

Ausgehend von den Mengen $B_0$ und $\mathfrak{B}_0$ führen wir den Iterationsprozess durch, indem wir die neuen Elemente durch endliche Folgen bezeichnen, wie im vorigen aragraphen ? ngegeben wurde. Es sei

$$B_\omega = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots,$$
$$\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{B}_n + \ldots$$

Wenn es uns gelingt, zu entdecken, dass das Aussagensystem $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsfrei ist, so können wir die Konfiguration $Q_\omega$, die dem System $\mathfrak{B}_\omega$ genügt, aussuchen und auf diese Weise zeigen, dass $B_\omega$ mit der Konfiguration $Q_\omega$ ein Feld des Axioms $A$ ist. Dafür genügt es, laut Satz des § 1, zu zeigen, dass jede endliche Untermenge des Systems $\mathfrak{B}_\omega$ widerspruchsfrei ist.

Es sei $\mathfrak{M}$ irgendeine endliche Menge von Aussagen des Systems $\mathfrak{B}_\omega$. Die Aussagen der Menge $\mathfrak{M}$ sind Aussagen des Aussagenkalküls, dessen elementare Aussagen die elementaren Funktionen des Axioms $A$ sind. Die leeren Stellen dieser Funktionen seien durch endliche Folgen der Menge $B_\omega$ ausgefüllt. Da das System $\mathfrak{M}$ endlich ist, so gibt es auch nur eine endliche Anzahl von endlichen Folgen, die an der Konstruktion der elementaren Aussagen des Systems $\mathfrak{M}$ beteiligt sind. Betrachten wir die Gesamtheit aller dieser endlichen Folgen, sowie der endlichen Folgen niedrigerer Ordnung, die in die gegebenen eingehen. Bezeichnen wir diese Gesamtheit mit $M$. Es ist klar, dass jede endliche Folge der Menge $M$ wieder aus endlichen Folgen der Menge $M$ und aus natürlichen Zahlen aufgebaut wird. Insbesondere enthält $M$ die endlichen Folgen 0-ter Ordnung, d. h. Elemente der Menge $B_0$, und ausserdem ist $M$ endlich.

Bilden wir die Menge $M$ folgendermassen auf einen Teil des Feldes $B$ ab:

1. Die Elemente der Menge $M$, die in das Feld $B$ eingehen, entsprechen sich selbst.

2. Das Element $b_*$ bilden wir in ein Element $\widetilde{b}_*$ des Feldes $B$ ab. Wir fordern nur, dass $\widetilde{b}_*$ nicht in $M$ eingehe [10].

3. Die Abbildung sei für alle endlichen Folgen der Ordnung $\leqslant k$ bestimmt. Nehmen wir die endlichen Folgen der Ordnung $k+1$:

$$[\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 2], \ldots, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; n].$$

Die endlichen Folgen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ sind der $k$-ten Ordnung, daher sind sie schon in irgendwelche Elemente des Feldes $B$ abgebildet. Diese Elemente seien beziehungsweise:

$$b_1, b_2, \ldots, b_m.$$

Setzen wir in das Axiom $A$ an Stelle der „$x$" die Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ein. Da $B$ das Feld des Axioms $A$ ist, so werden sich unter den Elementen der Menge $B$ solche Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_n$ finden, die der Beziehung genügen:

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Wir nehmen an, dass den endlichen Folgen

$$[\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 1], [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 2], \ldots, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; n]$$

gerade die Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entsprechen.

Zeigen wir, dass bei dieser Abbildung alle Aussagen des Systems $\mathfrak{M}$ erfüllt werden, wenn wir in denselben die Elemente der Menge $M$ durch die entsprechenden Elemente des Feldes $B$ ersetzen. In der Tat, enthält das System $\mathfrak{M}$ entweder Aussagen von der Form $b_* \neq b_i$, wo $b_i$ in $M \times B$ eingeht, oder Glieder der Konfiguration $Q'$, oder Aussagen von der Form:

$$\mathfrak{A}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m; [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; 1], \ldots, [\sigma_1, \ldots, \sigma_m; n]\}.$$

Die Aussagen des letzten Typus gehen bei der Abbildung in

$$\mathfrak{A}(b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$$

über, d. h. sie werden vermöge 3. erfüllt.

Die Elemente der Konfiguration $Q'$ enthalten nur Elemente der Menge $B$ und gehen folglich in sich selbst über.

Die Aussagen von der Form $\widetilde{b}_* \neq b_i$ gehen endlich in $b_* \neq b_i$ über, d. h. werden vermöge 2. erfüllt.

Somit werden bei Ersetzung der Elemente der Menge $M$ durch ihre Abbildungen alle Aussagen der Gesamtheit $\mathfrak{M}$ erfüllt. Dadurch ist die Widerspruchsfreiheit des Sys-

[10] Ein solches Element existiert, da nach Annahme das Feld $B$ unendlich ist.

tems $\mathfrak{M}$ bewiesen, da wir annehmen können, dass unsere Funktionen die gleichen Bedeutungen haben, wie für die entsprechenden Elemente der Menge $B$.

In diesem und dem vorhergehenden Paragraphen wurde der Einfachheit halber angenommen, dass das System $S$ endlich sei. In diesem Fall konnte man es durch einen Ausdruck $A$ ersetzen. Ist das System $S$ unendlich, so kann eine solche Ersetzung nicht stattfinden. Jedoch bleiben alle Überlegungen in Kraft, falls nur folgende Änderungen gemacht werden:

a) der Iterationsprozess wird in allgemeiner Form durchgeführt, wie am Ende des § 4 angegeben wurde,

b) bei der Darstellung der neuen Elemente durch endliche Folgen muss man ausserdem noch in der neuen endlichen Folge den Index des verwendeten Axioms angeben.

Im übrigen wiederholen sich die Überlegungen fast wörtlich.

Dem Prof. Kolmogoroff sei an dieser Stelle für mannigfache wertvolle Ratschläge mein herzlicher Dank ausgesprochen.

(Поступило в редакцию 16/XII 1935 г.)

# Исследования по математической логике

**А. Мальцев** (Москва)

*(Резюме)*

Предлагаемая работа содержит доказательства следующих двух теорем из области математической логики:

1) *Для того, чтобы некоторая (произвольной мощности) система предложений из „Aussagenkalkül“ была непротиворечивой, достаточно, чтобы всякая конечная ее часть была непротиворечивой.*

2) *Всякое бесконечное поле произвольной системы предложений „engerer Funktionenkalkül“ может быть расширено.*

Первая из этих теорем является обобщением известной теоремы K. Gödel'я о непротиворечивости счетной системы предложений „Aussagenkalkül“. Вторая содержит в качестве своего частного случая теорему T. Skolem'а о нехарактеризуемости натурального ряда с помощью счетной системы предложений „engerer Funktionenkalkül“.