



ELSEVIER

Discrete Mathematics 217 (2000) 17–32

DISCRETE
MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/disc

Une bijection géométrique entre une famille d'hypercartes et une famille de polygones énumérées par la série de Schröder

Didier Arquès*, Alain Giorgetti

Université de Marne la Vallée, 2, rue de la Butte Verte, F-93166 Noisy-le-Grand Cedex, France

Received 25 October 1997; accepted 11 June 1999

Résumé

La série de Schröder énumère de nombreuses familles d'objets combinatoires, en particulier des partitions de polygones. Nous décrivons ici la famille des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets sont sur la face extérieure, qui est également énumérée par cette série. Nous explicitons ensuite une transformation bijective entre ces hypercartes et les partitions de polygones. Les étapes de cette transformation s'interprètent naturellement comme des manipulations géométriques sur la structure des hypercartes. The Schröder numbers enumerate several combinatorial families, such as partitions of polygons. We describe here the family of planar rooted hypermaps with all vertices on the outer face, which is also enumerated by this sequence of numbers. We describe then a one-to-one correspondence between these hypermaps and partitions of polygons. This correspondence has a simple geometrical meaning as handling on maps. © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

1. Introduction

En 1870, Schröder [8] aborde la question suivante: quel est le nombre de parenthésages différents d'une somme non commutative de n termes? Il divise cette question en 'Vier combinatorische Probleme', du cas I au cas IV. Le cas I traite du parenthésage complet, dans lequel chaque paire de parenthèses encadre une somme d'exactly deux termes ou expressions parenthésées. Le cas II correspond au parenthésage partiel, dans lequel chaque paire de parenthèses entoure au moins deux termes ou expressions parenthésées.

En 1940, Etherington [4] illustre cette question par des découps de polygones convexes et étudie le problème général du parenthésage avec contraintes sur l'arité des

* Corresponding author.

E-mail addresses: arquès@univ-mlv.fr (D. Arquès), giorgetti@loria.fr (A. Giorgetti).

sommes parenthésées. Le cas I de Schröder correspond alors à la contrainte maximale, qui impose que chaque somme parenthésée soit d'arité 2. Le cas II correspond au contraire à l'absence de telles contraintes d'arité. On trouve de nombreuses traces, antérieures à 1870, de résolution du cas I. Pour $n \geq 1$, le nombre de parenthésages est égal au nombre de Catalan C_{n-1} . On rappelle que $C_n = (2n)!/n!(n+1)!$. En 1983, la solution du cas II est nommée 'Schröder–Etherington sequence' par Kettle [6], qui propose diverses interprétations combinatoires de cette série de nombres.

En 1985, Arquès [2] établit de manière indépendante qu'une certaine famille d'hypercartes planaires, dites 'superficielles' dans la suite, est également énumérée par ces nombres.

Ces nombres auraient une origine beaucoup plus ancienne: Stanley [7] attribue le calcul du nombre de parenthésages d'une somme de 10 termes (égal à 103 049) à Hipparchus, grand astronome de la Grèce antique. Tout récemment, Foata et Zeilberger [5] donnent une interprétation combinatoire d'une relation de récurrence linéaire à trois termes permettant de calculer rapidement cette suite de nombres. Ceci témoigne de l'intérêt considérable encore porté à ces nombres millénaires, qu'on appelle désormais les nombres de Schröder.

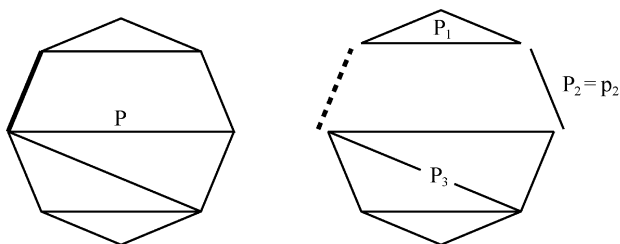
Parmi les différentes familles énumérées par les nombres de Schröder, les hypercartes planaires superficielles et les partitions de polygones d'Etherington ont en commun d'être des objets dessinables dans le plan. Ceci laisse entrevoir qu'il puisse exister une transformation géométrique réversible des objets d'une famille de taille donnée en objets de l'autre famille de même taille.

Nous présentons une telle bijection entre ces deux familles. Précisons que la famille (dite des hypercartes 'superficielles') est la famille des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets sont sur la face extérieure, dénombrées en fonction de leur nombre total d'arêtes plus une. La famille énumérée par Etherington est très précisément la famille des partitions de polygones, dénombrés en fonction du nombre d'arêtes extérieures moins une.

La deuxième partie du présent article définit et énumère la famille des partitions de polygones. La troisième partie définit et énumère la famille des hypercartes superficielles. La quatrième partie est l'exposé de la bijection, décomposée en quatre transformations ayant chacune une interprétation graphique élémentaire. Chacune de ces transformations est illustrée par une figure portant sur un unique exemple traité de bout en bout.

2. Partitions de polygones

Un polygone convexe coupé selon une de ses diagonales donne naissance à deux polygones convexes. Chacun d'entre eux peut à nouveau être coupé selon une diagonale, et ce processus de découpage peut être poursuivi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des triangles, ou interrompu avant. En effectuant r coupures, le polygone initial a été décomposé en $r + 1$ sous-polygones.

Fig. 1. Décomposition d'un polygone de \mathcal{P} .

Une telle décomposition est appelée partition du polygone. Elle correspond au choix de r diagonales du polygone non intersectantes. Deux partitions du même polygone sont différentes si elles mettent en jeu des diagonales différentes relativement à une arête de référence du bord du polygone. Cette arête de référence sera dite distinguée ou pointée.

On note \mathcal{P} la famille des partitions de polygones. Le plus petit polygone de \mathcal{P} , au sens du nombre d'arêtes extérieures, est constitué de 2 arêtes confondues, dont l'une est distinguée. Ce polygone est appelé p_2 . Le plus petit polygone de \mathcal{P} après p_2 est le triangle pointé.

2.1. Énumération des partitions de polygones

Nous rappelons très rapidement, pour fixer les définitions et notations, l'énumération classique des partitions de polygones par la série de Schröder. La famille \mathcal{P} peut être définie inductivement: tout polygone de \mathcal{P} , différent de p_2 , se décompose de manière unique en polygones de \mathcal{P} plus petits. L'exemple de la Fig. 1 illustre cette décomposition.

Ainsi, le polygone P de la Fig. 1 se décompose en son arête distinguée (en pointillés) et en trois autres polygones P_1 , P_2 et P_3 .

Leur arête distinguée est leur unique arête incidente à la même face de P que l'arête distinguée de P . P_2 est dans cet exemple le polygone de \mathcal{P} réduit à deux arêtes confondues, qu'on a noté p_2 . Remarque: Le polygone p_2 est indécomposable. Il est considéré comme ayant deux arêtes extérieures confondues. Dans la décomposition de P , il y a au moins une arête extérieure (l'arête distinguée).

Si P n'est pas le polygone p_2 , alors, en décomposant P , on obtient au moins deux autres polygones de \mathcal{P} . D'où la bijection de décomposition de \mathcal{P} suivante:

$$\mathcal{P} \leftrightarrow p_2 + \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}^*. \quad (1)$$

D'après la bijection (1), la série génératrice ordinaire $P(c)$, qui dénombre les polygones de \mathcal{P} selon leur nombre d'arêtes extérieures autres que l'arête distinguée (exposant de c) est solution de l'équation:

$$P(c) = c + \frac{P(c)^2}{1 - P(c)}.$$

L'unique solution de cette équation est la série de Schröder [4, p. vi]. La formule d'inversion de Lagrange appliquée à cette équation donne le nombre P_n de partitions de polygones à n arêtes extérieures (autres que l'arête distinguée), pour $n \geq 2$:

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0}^{k \leq n-2} \binom{n}{k+1} \binom{n-2}{k} 2^k.$$

Les 20 premiers termes de la série de Schröder sont 1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20 793, 103 049, 518 859, 2 646 723, 13 648 869, 71 039 373, 372 693 519, 1 968 801 519, 10 463 578 353, 55 909 013 009, 300 159 426 963, 1 618 362 158 587.

3. Hypercartes superficielles

3.1. Définition des hypercartes planaires pointées

Une définition complète des hypercartes est donnée dans [3]. Nous rappelons ici les éléments essentiels à la compréhension de la suite. Une carte planaire est une partition de la sphère de \mathbb{R}^3 en trois ensembles finis de cellules:

- L'ensemble des sommets, qui sont des points de la sphère;
- l'ensemble des arêtes, qui sont des arcs simples ouverts de Jordan, deux à deux disjoints, et dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets;
- l'ensemble des faces, qui sont des domaines simplement connexes, dont les frontières sont des réunions de sommets et d'arêtes.

On appelle cellule tout sommet, arête ou face de la carte planaire. Deux cellules sont dites incidentes si l'une est dans la frontière de l'autre. On appelle isthme toute arête incidente à une unique face. On appelle brin d'une carte planaire une arête orientée de cette carte planaire et on note B l'ensemble des brins. On associe à tout brin, de manière évidente, son sommet initial, son sommet final, l'arête qui constitue son support, et le brin qui lui est opposé.

On note α la permutation de B qui associe à chaque brin son brin opposé. α est une involution sans point fixe dont les cycles sont bijectivement associés aux arêtes de la carte. On note σ la permutation de B qui à tout brin b associe le premier brin rencontré en tournant autour du sommet initial de b dans le sens positif choisi sur la sphère (sens trigonométrique ici). Les cycles de σ sont bijectivement associés aux sommets de la carte. On note $\bar{\sigma}$ la permutation $\sigma\alpha$ de B . Les cycles de $\bar{\sigma}$ sont les circuits orientés constituant les frontières orientées des faces topologiques de la carte. Les cycles de $\bar{\sigma}$ sont bijectivement associés aux faces de la carte.

Si τ est une permutation de B et b un brin de B , on note $\tau^*(b)$ le cycle de τ engendré par b .

Une carte planaire pointée est une carte planaire dans laquelle un brin \tilde{b} , appelé brin pointé, a été distingué. On appelle face extérieure d'une carte planaire pointée, la

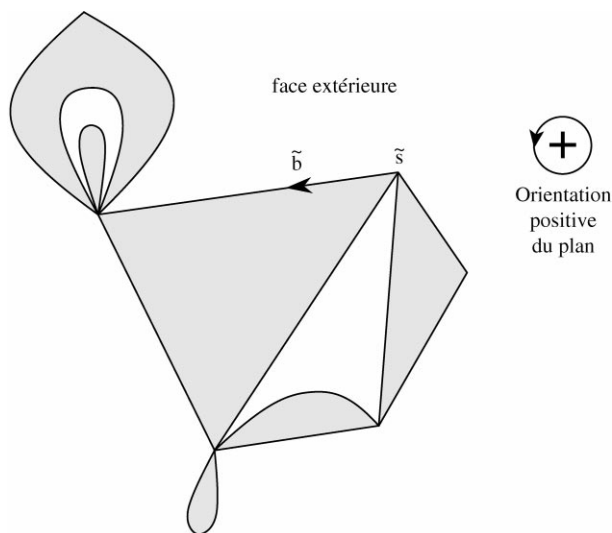


Fig. 2. Un exemple d'hypercarte superficielle.

face incidente à droite au brin pointé, pour l'orientation positive de la sphère. On appelle circuit des brins extérieurs d'une carte planaire pointée, le circuit $\tilde{\sigma}^*(\tilde{b})$ des brins bordant la face extérieure de la carte, à partir du brin pointé \tilde{b} . On représentera dans la suite une carte par sa projection stéréographique sur le plan, qui envoie la face extérieure de la carte sur la partie infinie de sa représentation dans le plan. Dans cette représentation, le nom d'un brin est situé près de son extrémité initiale.

Une hypercarte planaire pointée est une carte planaire pointée dont on peut colorier les faces avec deux couleurs, de telle sorte que toute arête soit incidente à deux faces de couleurs différentes (voir Fig. 2).

On désigne alors par hyperface toute face de la même couleur que la face extérieure, et par hyperarête toute face de l'autre couleur. Deux hypercartes planaires pointées sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme du plan préservant son orientation et échangeant les sommets, arêtes, hyperarêtes, hyperfaces et brin pointé de la première hypercarte et de la deuxième. Sous le nom d'hypercartes planaires pointées, ce sont en fait des classes d'hypercartes isomorphes qu'on dénombre et manipule dans la suite.

On s'intéressera plus particulièrement dans la suite à la famille \mathcal{H} des hypercartes planaires pointées dites 'superficielles', dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure.

La Fig. 2 présente une hypercarte de cette famille. Soit \mathcal{H} la famille des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure, appelées hypercartes superficielles dans la suite. Toute sous-hypercarte d'une hypercarte de \mathcal{H} est encore dans \mathcal{H} (évident). Bien que ne contenant aucune arête, l'hypercarte

constituée d’un seul sommet sera également dite pointée et sera notée h_0 : c’est la plus petite hypercarte de \mathcal{H} au sens du nombre d’arêtes. La plus petite hypercarte de \mathcal{H} autre que h_0 est composée du sommet pointé et du brin pointé formant une boucle sur le sommet pointé, définissant ainsi une hyperarête.

3.2. Décomposition d’une hypercarte superficielle

Soit H une hypercarte de \mathcal{H} différente de h_0 .

On note \tilde{b} le brin pointé de H et $C = \bar{\sigma}^*(\tilde{b})$ le circuit des brins extérieurs de H . La décomposition de H est illustrée par la Fig. 3.

Soit $b_1 = \alpha(\tilde{b})$ le brin opposé au brin pointé. On appelle hyperarête principale de H , l’unique hyperarête de H incidente à b_1 . On note (b_1, b_2, \dots, b_k) le circuit $\bar{\sigma}^*(b_1)$ des brins laissant l’hyperarête principale de H à leur droite ($k = 3$ dans la Fig. 3). Soit b_i un de ces brins, d’extrémité initiale s_i ($i = 1, \dots, k$). b_i est incident (à gauche) à une unique hyperface de H .

On va associer à b_i une hypercarte H_i de H . Pour ce faire, on distingue deux cas, selon que b_i est incident ou non à la face extérieure.

Premier cas: b_i incident à la face extérieure: Dans ce cas, $\alpha(b_i)$ appartient à C (c’est vrai pour b_1 , car $\alpha(b_1) = \tilde{b}$, voir Fig. 3). On pose $b_{s_i} = \sigma(b_i)$. C’est le brin suivant $\alpha(b_i)$ dans C . Son extrémité initiale est s_i .

Si b_{s_i} est l’unique brin de C d’extrémité initiale s_i , on pose $H_i = h_0$.

Sinon, soit C_i le sous-circuit de C dont le premier brin est b_{s_i} et dont le dernier brin est le dernier brin de C d’extrémité finale s_i . C_i est le circuit des brins extérieurs d’une sous-hypercarte de H . Soit H_i cette hypercarte de frontière extérieure C_i , pointée par b_{s_i} .

On note \mathcal{H}_1 l’ensemble de ces hypercartes, lorsque H décrit \mathcal{H} . H_i , sous-hypercarte de H , est aussi une hypercarte superficielle. Par conséquent, \mathcal{H}_1 est une sous-famille de \mathcal{H} . Il est évident que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$.

Deuxième cas: b_i incident à une hyperface de H autre que la face extérieure: Le brin b_i est incident à une hyperface F de H autre que la face extérieure. Puisque H est une hypercarte superficielle, b_i est l’unique brin de (b_1, \dots, b_k) incident à F (sinon, le sommet final de b_i ne serait pas incident à la face extérieure, mais à F).

Si b_i est une boucle (voir b'_2 dans l’hypercarte H_1 de la Fig. 3), alors on note H_i l’hypercarte à l’intérieur de cette boucle. Si H_i n’est pas h_0 , alors on pointe H_i avec $b_{s_i} = \sigma(b_i)$. H_i est une hypercarte planaire pointée à un seul sommet s_i . C’est une hypercarte de \mathcal{H} .

Sinon, b_i n’est pas une boucle (voir b_2 dans l’hypercarte H de la Fig. 3).

On note alors t_i l’extrémité finale de b_i et on pose $b_{s_i} = \sigma(b_i)$.

Soit C_{int} le chemin $\bar{\sigma}^*(b_{s_i}) \setminus \{\alpha(b_i)\}$ constitué des brins de H autres que $\alpha(b_i)$ laissant l’hyperface F à leur droite. C_{int} va de s_i à t_i et le premier brin de C_{int} est b_{s_i} .

Soit C_{ext} le sous-chemin de $C = \bar{\sigma}^*(\tilde{b})$ qui va du dernier brin de C d’extrémité initiale t_i au dernier brin de C d’extrémité finale s_i (inclus).

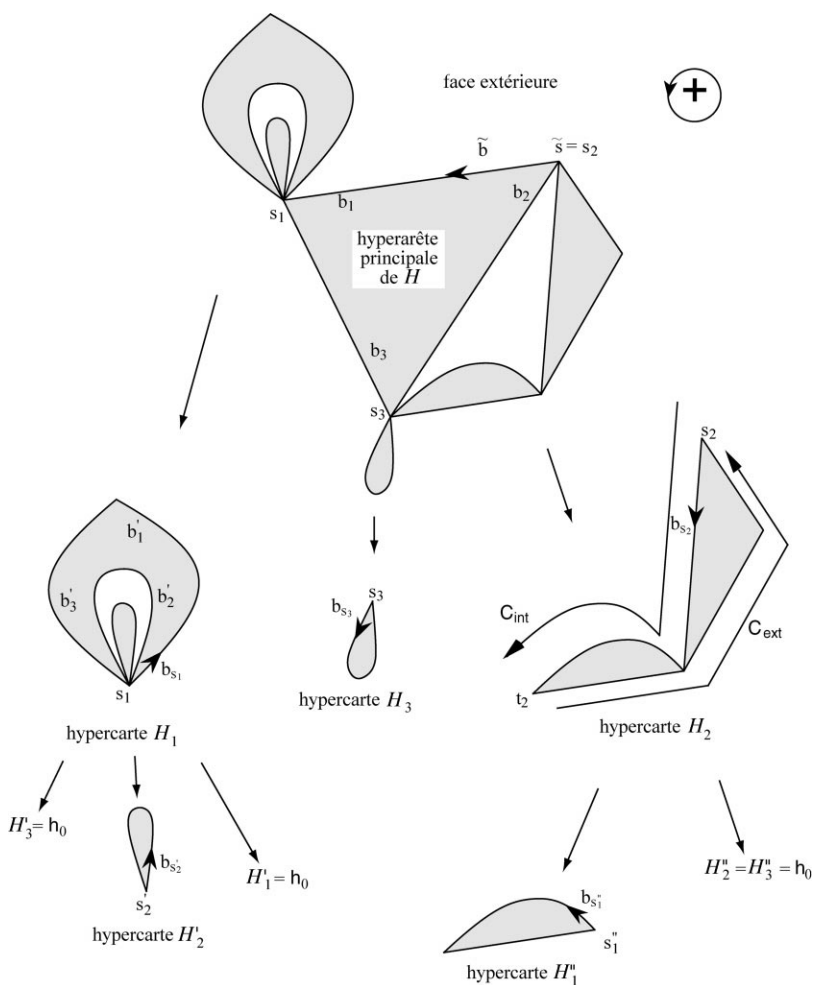


Fig. 3. Décomposition d'une hypercarte H .

En concaténant C_{ext} à la suite de C_{int} , on construit un circuit de brins $C_i = C_{\text{int}} \cdot C_{\text{ext}}$, d'origine et d'extrémité s_i . C_i est le circuit des brins extérieurs d'une sous-hypercarte de H .

Soit H_i cette sous-hypercarte de H , pointée par b_{s_i} , dont la frontière extérieure est C_i . H_i , sous-hypercarte de H , est aussi une hypercarte superficielle. H_i est une hypercarte de \mathcal{H} qui compte au moins deux sommets distincts s_i et t_i (car b_i n'est pas une boucle).

On note \mathcal{H}_2 la famille de ces hypercartes H_i , lorsque H décrit \mathcal{H} et que b_i est incident à une hyperface non extérieure de H . \mathcal{H}_2 réunit les hypercartes de \mathcal{H} à un seul sommet (obtenues lorsque b_i est une boucle) et les hypercartes de \mathcal{H} ayant au moins deux sommets (obtenues lorsque b_i n'est pas une boucle). D'où il résulte que $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

3.3. Algorithme de reconstruction de l'hypercarte

Nous allons montrer que chaque cas de la décomposition précédente de l'hypercarte H admet une opération de reconstruction inverse.

Le problème de la reconstruction peut s'énoncer de la manière suivante. Soit k un entier strictement positif, soient H_1 une hypercarte de \mathcal{H}_1 et H_2, \dots, H_k des hypercartes de \mathcal{H}_1 ou \mathcal{H}_2 . Pour i compris entre 1 et k , on note s_i le sommet pointé de H_i et b_{s_i} son brin pointé. Nous donnons ici un algorithme permettant de construire l'unique hypercarte de \mathcal{H} dont la décomposition conduit à la séquence d'hypercartes (H_1, \dots, H_k) . Par commodité, s_1 est aussi désigné par s_{k+1} , b_1 par b_{k+1} et b_k par b_{-1} .

On dispose les sommets distingués s_1 à s_k des hypercartes H_1 à H_k sur un cercle, dans cet ordre lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens négatif, en confondant les sommets s_i et s_{i+1} si l'hypercarte H_i appartient à \mathcal{H}_2 et si le sommet s_i est l'unique sommet de H_i , i étant un entier compris entre 1 et k . On relie les sommets s_i et s_{i+1} par deux brins opposés notés b_i et $\alpha(b_i)$: Si les sommets s_i et s_{i+1} sont distincts, alors le brin b_i est d'extrémité initiale s_i et d'extrémité finale s_{i+1} . Si les sommets s_i et s_{i+1} sont confondus, alors les brins b_i et $\alpha(b_i)$ sont tels que $b_i = \sigma(\alpha(b_{i-1}))$ et $\sigma(\alpha(b_i)) = b_{i+1}$.

Ainsi, on vient de recréer l'hyperarête principale de l'hypercarte H .

Premier cas: H_i est une hypercarte de \mathcal{H}_1 : On positionne alors H_i par rapport au brin b_i de telle sorte que $\sigma(b_i)$ soit le brin b_{s_i} . Le brin b_i est alors incident à la face extérieure.

Deuxième cas: H_i est une hypercarte de \mathcal{H}_2 : On positionne alors H_i de telle sorte que b_i soit incident à une hyperface de H autre que la face extérieure (Ce deuxième cas correspond au deuxième cas de décomposition).

Si H_i a un seul sommet, alors la position de H_i par rapport au brin b_i est telle que $\sigma(b_i)$ soit le brin b_{s_i} .

Sinon, H_i a au moins deux sommets. Dans ce cas, l'unicité de la reconstruction découle du lemme suivant.

Lemme 1. *Soit H une hypercarte de \mathcal{H} ayant au moins deux sommets. Alors il existe au moins deux sommets de H desquels soit issu, outre des boucles éventuelles, un unique brin extérieur non boucle de H .*

Preuve. On appelle brin extérieur de H tout brin du circuit $C = \bar{\sigma}^*(\tilde{b})$ des brins bordant la face extérieure de l'hypercarte H . Soit H' l'hypercarte construite à partir de H en supprimant dans H toutes les boucles et toutes les arêtes non extérieures. H' est une hypercarte de \mathcal{H} sans boucles, sans hyperfaces autres que la face extérieure, dont toutes les arêtes sont incidentes à la face extérieure. De plus, H' a les mêmes sommets et les mêmes arêtes extérieures non boucles que H .

On note a , s , h respectivement les nombres d'arêtes, de sommets et d'hyperarêtes de l'hypercarte H' . a est aussi le nombre de brins extérieurs de H' . H' étant une

hypercarte planaire (c'est-à-dire de genre 0), on a la relation (voir [3]):

$$a = s + h - 1. \quad (2)$$

Chaque arête de H' est incidente à une unique hyperarête de H' et chaque hyperarête de H' est bordée par au moins deux arêtes distinctes (car H' est sans boucles). On a donc:

$$a \geq 2h. \quad (3)$$

De (2) et (3), il résulte que $a \leq 2s - 2$.

Tout brin extérieur de H' admet exactement un sommet de H' pour extrémité initiale et de tout sommet de H' est issu au moins un brin extérieur. Par conséquent, l'inégalité $a \leq 2s - 2$ montre qu'il existe au moins deux sommets de H' desquels soit issu un unique brin extérieur (sinon, on aurait $a \geq 2s - 1$). Ceci est vrai aussi dans H et achève la démonstration. \square

On note t_i le premier sommet différent de s_i rencontré sur le circuit C_i des brins extérieurs de H_i duquel soit issu un unique brin extérieur non boucle. On note b_{t_i} cet unique brin non boucle de C_i d'extrémité initiale t_i . Le Lemme 1 montre que t_i existe toujours.

On raccroche l'hypercarte H_i en confondant les sommets t_i et s_{i+1} de telle sorte que le brin $\sigma(b_{t_i})$ soit le brin $b_{s_{i+1}}$ et que le brin b_{t_i} soit l'unique brin extérieur de H_i d'extrémité initiale t_i qui reste extérieur après raccrochage du sommet t_i en s_{i+1} . Les autres brins extérieurs de H_i d'extrémité initiale t_i sont des boucles que l'on rencontre entre b_{t_i} et $\alpha(b_{t_i})$ en tournant autour du sommet s_{i+1} dans le sens positif.

Enfin, on obtient une hypercarte H de \mathcal{H} en pointant le brin $\alpha(b_1)$.

3.4. Enumération des hypercartes superficielles

On a décomposé toute hypercarte H de \mathcal{H} de manière unique en un nombre fini k (égal au nombre d'arêtes de l'hyperarête principale de H) d'hypercartes de \mathcal{H}_1 ou \mathcal{H}_2 (la première de ces hypercartes, associée au brin b_1 , est dans \mathcal{H}_1).

Si $H = h_0$, alors $k = 0$. Sinon, parmi ces k ($k \geq 1$) hypercartes, on sait que celle qui est associée au brin pointé est un élément de \mathcal{H}_1 . D'où la décomposition bijective:

$$H \leftrightarrow h_0 + \mathcal{H}_1 \cdot (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)^* \text{ avec } \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \text{ et } \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}.$$

Soit $K(a)$ la série génératrice ordinaire simple des hypercartes de \mathcal{H} , dénombrées selon leur nombre d'arêtes plus une (exposant de a). D'après la décomposition bijective de \mathcal{H} qui précède, $K(a)$ est solution de l'équation: $K(a) = a(1 + K(a)/(1 - 2K(a)))$, qui se réécrit sous la forme:

$$K(a) = a + \frac{K(a)^2}{1 - K(a)}.$$

Cette relation définit la série de Schröder. Par conséquent, le nombre d'hypercartes de \mathcal{H} à $(n - 1)$ arêtes, coefficient de a^n dans $K(a)$, est le n -ème nombre de la série de Schröder.

Conclusion: le nombre d'hypercartes de \mathcal{H} à n arêtes est égal au nombre de polygones de \mathcal{P} à $n + 2$ arêtes extérieures. On est alors naturellement amené à chercher une bijection simple entre ces deux familles de structures.

4. Une bijection géométrique entre \mathcal{P} et \mathcal{H}

Pour définir cette bijection f de \mathcal{H} sur \mathcal{P} , on s'appuie sur la décomposition des hypercartes de \mathcal{H} décrite dans la partie 3.2. Avec les mêmes notations, on construit une partition de polygone $f(H)$ de \mathcal{P} à partir d'une hypercarte H de \mathcal{H} en quatre transformations bijectives successives.

4.1. Première transformation: insertion d'arêtes

La plus petite hypercarte de \mathcal{H} ayant au moins un brin est une boucle. La bijection f de \mathcal{H} sur \mathcal{P} applique cette hypercarte sur le plus petit polygone de \mathcal{P} non réduit à une arête, c'est-à-dire le triangle pointé. On voit donc qu'il sera nécessaire, pour construire un polygone à partir d'une hypercarte, d'ajouter des arêtes qui 'élargiront' notamment les boucles pour en faire des triangles. C'est l'objet de cette première transformation:

On insère deux arêtes non boucles, qu'on appellera A et B , et un sommet r entre A et B , au bord de l'hyperarête principale de H , entre le sommet pointé \tilde{s} et le brin pointé \tilde{b} . On induit cette insertion d'arêtes à tous les niveaux de la décomposition récursive de H .

Ainsi, on insère deux arêtes non boucles, qu'on appellera A_i et B_i , et un sommet r_i entre A_i et B_i , entre le sommet s_i et le brin b_{s_i} . Ce brin b_{s_i} est le brin pointé de chaque hypercarte H_i (non réduite à un sommet) de la décomposition de H .

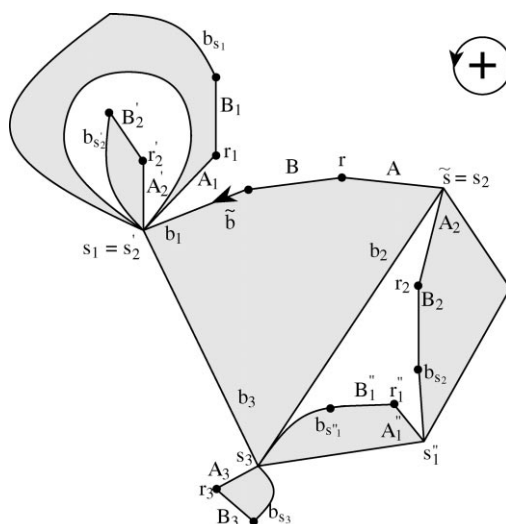
Cette opération, réalisée à tous les niveaux de la décomposition récursive de H (voir Fig. 4), est à l'évidence bijective. On note $f_1(H)$ l'hypercarte ainsi obtenue.

4.2. Deuxième transformation: ouverture des hyperfaces de $f_1(H)$ autres que la face extérieure et ajout d'arêtes repérant ces ouvertures

Soit r le sommet incident (intermédiaire) aux arêtes A et B de $f_1(H)$. Soit b_i un brin de (b_2, \dots, b_k) , d'extrémité initiale s_i ($i = 2, \dots, k$), incident à l'hyperarête principale de H . On note t_i l'extrémité finale de b_i . b_i est incident à une unique hyperface de H .

Si b_i est incident à une hyperface F de H autre que la face extérieure, alors on ajoute à $f_1(H)$ une arête entre r et t_i . Puis on ouvre cette hyperface F en décrochant la sous-hypercarte H_i en t_i .

Cette opération est bijective, car l'arête ajoutée repère le sommet t_i et le brin b_i qui permettent de 'raccrocher' l'image $f_1(H_i)$ des sous-hypercartes H_i de \mathcal{H}_2 et de recréer ainsi les hyperfaces internes de $f_1(H)$.

Fig. 4. Insertion d'arêtes et de sommets dans l'hypercarte H .

On induit cet ajout d'arêtes diagonales sur les hypercartes de la décomposition de H , à tous les niveaux de la décomposition de H . La structure ainsi obtenue n'est plus une hypercarte, car des arêtes traversent certaines des hyperarêtes. On la note $f_2(H)$. Sur la Fig. 5, les arêtes ajoutées sont représentées en pointillés. Cette opération est à l'évidence bijective.

4.3. Troisième transformation: collage d'arêtes

Pour i compris entre 1 et k , on confond l'arête A_i (si elle existe, c'est-à-dire si la sous-hypercarte H_i n'est pas réduite à un sommet) avec l'arête portant le brin b_i , qui précède A_i (pour l'orientation positive du plan, voir Fig. 6) lorsqu'on tourne autour de leur sommet commun s_i . Les arêtes issues de ces recollements deviennent des arêtes internes et s'ajoutent à celles en pointillés créées dans la deuxième transformation.

On induit ce collage d'arêtes sur les hypercartes de la décomposition de $f_2(H)$, et ainsi de suite récursivement à tous les niveaux de la décomposition de $f_2(H)$. On note $f_3(H)$ la structure ainsi obtenue (voir Fig. 6). On peut considérer cette structure $f_3(H)$ comme une carte planaire pointée dont tous les sommets sont incidents à la face extérieure et dont les arêtes sont de deux types: pleines ou pointillées.

Montrons que cette carte est 'polygonale', c'est-à-dire que le circuit des brins extérieurs de cette carte rencontre chaque sommet extérieur exactement une fois, définissant ainsi un polygone du plan. Pour cela, nous allons démontrer que le nombre de sommets et le nombre d'arêtes extérieures de cette carte sont égaux.

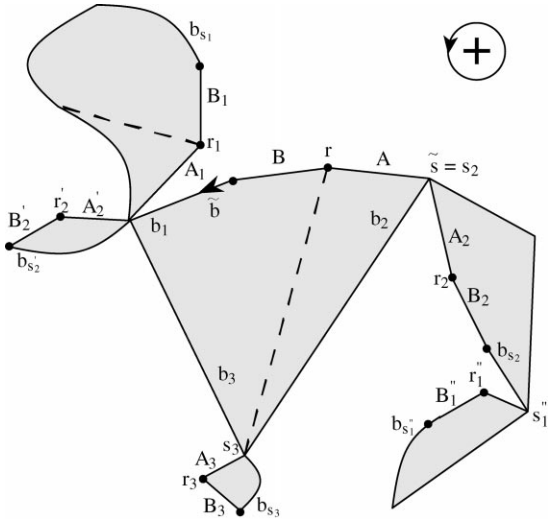


Fig. 5. Ouverture des hyperfaces non extérieures et repérage de ces ouvertures par des arêtes pointillées.

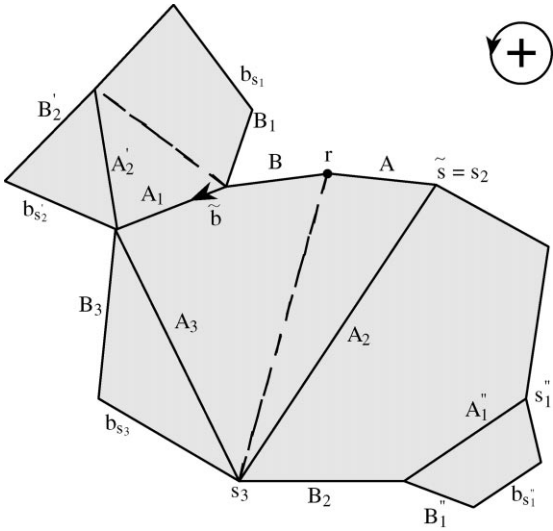


Fig. 6. Collage des arêtes de type ‘A’ sur leur arête précédente.

On note ae, ai, ap, s et f respectivement les nombres d’arêtes extérieures, d’arêtes intérieures pleines, d’arêtes intérieures pointillées, de sommets et de faces de la carte $f_3(H)$. On note ha et hf respectivement les nombres d’hyperarêtes et d’hyperfaces des hypercartes H et $f_1(H)$.

Par la première transformation, on a associé une unique arête (de type ‘A’) à chaque hyperarête de H . Pour toutes les hyperarêtes autres que l’hyperarête principale,

cette arête de type ‘ A ’ devient, par collage dans la troisième transformation, une arête intérieure pleine de $f_3(H)$, d’où

$$ha - 1 = ai. \quad (4)$$

Par la deuxième transformation, les hyperarêtes de $f_1(H)$ sont partitionnées par des arêtes pointillées, pour donner les $(f - 1)$ faces de $f_3(H)$ autres que la face extérieure, d’où:

$$f - 1 = ha + ap. \quad (5)$$

La relation d’Euler–Poincaré (voir [3]) pour la carte $f_3(H)$ s’écrit:

$$ae + ai + ap = s + f - 2$$

c’est-à-dire $ae = s$, compte tenu de (4) et (5).

Par conséquent, $f_3(H)$ est un polygone avec deux types de diagonales (pleines et pointillées). On le pointe avec l’arête B insérée lors de la première transformation entre le sommet pointé et le brin pointé (voir paragraphe 4.1).

L’opération inverse de décollage des arêtes s’applique à toutes les diagonales non pointillées du polygone, dans l’ordre où elles apparaissent dans la décomposition du polygone définie dans la partie 2.1. Ce décollage est réalisé autour de la deuxième extrémité de chaque diagonale rencontrée lorsqu’on parcourt le bord extérieur du polygone $f_3(H)$ à partir de l’arête B dans le sens trigonométrique. Cette transformation est donc bijective.

La Fig. 7 présente le polygone régulier obtenu à partir du polygone irrégulier de la Fig. 6 par réorganisation des sommets sur un cercle et déformation d’arêtes.

4.4. Quatrième transformation: ‘oubli’ de la différence entre diagonales pointillées et pleines du polygone

En ignorant dans le polygone $f_3(H)$ la distinction entre diagonales pleines et pointillées, on obtient un polygone $f(H)$ de \mathcal{P} (voir Fig. 8).

Contrairement aux apparences, nous allons montrer que cette opération est bijective, en produisant un algorithme qui retrouve dans $f(H)$ les arêtes pointillées.

4.4.1. Algorithme de caractérisation des diagonales pointillées dans le polygone

Les arêtes extérieures du polygone $f(H)$ sont orientées conformément à l’orientation positive du plan. Soit r le sommet initial de l’arête distinguée du polygone $f(H)$ pour cette orientation. L’algorithme consiste en un parcours du circuit des sommets du polygone à partir du sommet pointé r dans le sens positif, avec marquage des diagonales.

Prétraitement:

- Toutes les diagonales issues du sommet r sont des diagonales pointillées.
- On marque toutes ces diagonales.

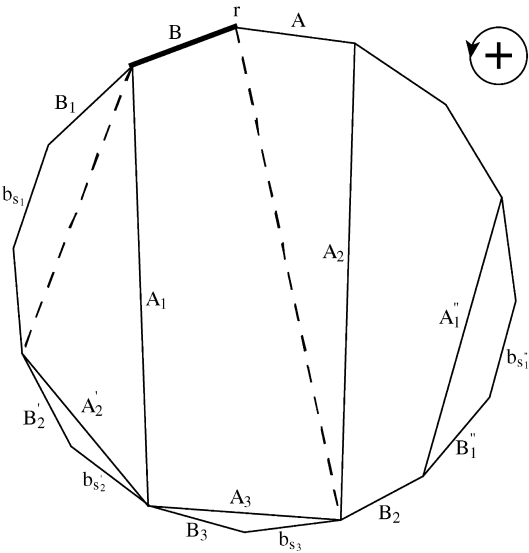


Fig. 7. $f_3(H)$, avec un bord extérieur convexe et régulier.

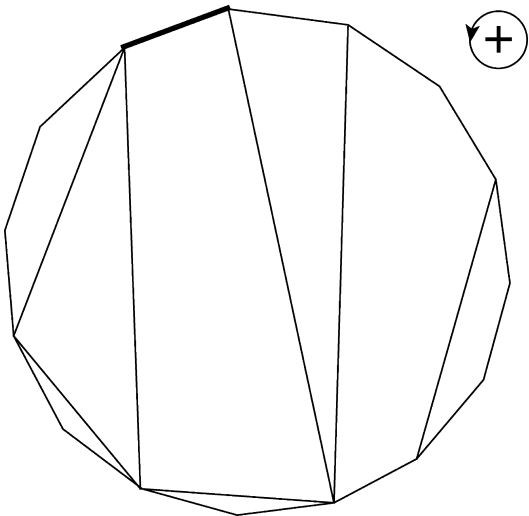


Fig. 8. Image $f(H)$ de l'hypercube H sous la forme d'un polygone régulier.

Le sommet courant t est initialement le sommet qui suit le sommet r dans le circuit des sommets du polygone.

Itération: Tant que t n'est pas égal à r faire:

1. Parcourir les diagonales non marquées issues de t , dans le sens contraire de l'orientation du plan.

2. La première de ces diagonales non marquées est pleine, les suivantes sont pointillées.
3. On marque toutes les diagonales issues du sommet t .
4. Le nouveau sommet t devient le sommet suivant t dans le circuit des sommets du polygone.

Justification: Le sommet r a été ajouté lors de la première transformation, entre les deux arêtes ajoutées A et B . Il n'est donc pas l'extrémité d'une arête de H . L'arête B est l'arête distinguée du polygone $f(H)$. L'arête A est l'autre arête extérieure de $f(H)$ d'extrémité r . Par conséquent, toutes les diagonales dont l'origine est le sommet r ont été ajoutées par la deuxième transformation. Ce sont toutes des arêtes pointillées. Ceci justifie le prétraitement.

La justification de l'algorithme peut être déduite de la propriété suivante: si l'hypercarte H se décompose en la séquence d'hypercartes (H_1, \dots, H_k) , alors le polygone $f_3(H)$ se construit à partir des polygones $f_3(H_1), \dots, f_3(H_k)$ par collage de leur arête de type 'A' sur une arête d'un polygone bijectivement associé à l'hyperarête principale de H (voir Fig. 3).

Autrement dit, la quatrième transformation peut être définie inductivement sur la décomposition du polygone $f_3(H)$ décrite dans la partie 2.1.

Par ailleurs, un sommet t du polygone dont est issue au moins une diagonale était, avant recollage des arêtes (troisième transformation), un sommet de type ' r ', ajouté lors la première transformation entre une arête de type 'A' et une arête de type 'B'.

Il résulte de la propriété et de la nature du sommet t qu'on peut reprendre le raisonnement portant sur le sommet r en l'adaptant au sommet t . Il suffit d'ignorer la première diagonale non marquée rencontrée, qui est l'arête de type 'A' recollée et qui est pleine. Comme pour le sommet r , les autres diagonales non marquées (celles dont la première extrémité rencontrée au cours de l'algorithme est le sommet t) sont des diagonales pointillées.

5. Conclusion

En comparant les définitions des deux familles étudiées dans cet article (parties 2.1 et 3.2), on constate d'importantes différences de structure et de méthode de décomposition.

Pourtant, ces deux familles sont énumérées par la série de Schröder.

Ceci est vrai si le paramètre d'énumération est le nombre d'arêtes pour les hypercartes et le nombre d'arêtes extérieures pour les polygones.

Cet article a construit une bijection géométrique, dont les quatre étapes élémentaires traitent, le plus 'naturellement' possible, les divergences de structure entre hypercartes et polygones: On ajoute d'abord aux hypercartes 'assez d'arêtes pour que les boucles deviennent des triangles', puis on 'ouvre' les hyperfaces intérieures pour les supprimer. Ensuite, on 'colle' certaines arêtes ajoutées à la première transformation, ce qui permet de transformer le bord extérieur de l'hypercarte en un polygone régulier. Enfin, on uniformise les diagonales de ce polygone, ce qui revient à ignorer la bicoloration des

hypercartes. Mais on prouve que cette transformation est encore bijective, comme le sont les précédentes.

Pour finir, nous donnons ici l'énoncé d'un problème voisin, qui (à notre connaissance) reste ouvert à ce jour: Dans [1], Arquès définit les cartes planaires pointées d'ordre 1 comme étant les cartes planaires pointées dont toutes les arêtes ont au moins une extrémité incidente à la face extérieure. Puis il établit que le nombre de cartes planaires pointées d'ordre 1 dont le brin pointé est un isthme et ayant n arêtes est égal à $(4n)!/n!/(3n+1)!$. Or, on peut déduire de la formule (2) de l'article d'Etherington [4, p. vii] que c'est aussi le nombre de partitions en n pentagones d'un polygone pointé à $3n+2$ arêtes extérieures. Il y a très probablement une bijection géométrique entre ces deux familles.

Une telle bijection serait à décrire et à comparer avec celle du présent article, afin d'apporter des précisions nouvelles sur la structure des cartes planaires et sur leurs relations avec les familles de partitions de polygones.

References

- [1] D. Arquès, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *J. Combin. Theory Ser. B* 39 (1985) 27–42.
- [2] D. Arquès, Relations fonctionnelles et dénombrement des hypercartes planaires pointées, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1234, 1985, pp. 5–26.
- [3] R. Cori, Un Code pour les Graphes Planaires et ses Applications, *Astérisque* 27 (1975).
- [4] I.M.H. Etherington, Some problems of non-associative combinations (I), *Edinburgh Math. Notes* 32 (1940) i–vi.
- [5] D. Foata, D. Zeilberger, A classic proof of a recurrence for a very classical sequence, *J. Comb. Theory Ser. A* 80 (1997) 380–384.
- [6] S.G. Kettle, Families enumerated by the Schröder–Etherington sequence and a renewal array it generates, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1036, 1983, pp. 244–274.
- [7] R.P. Stanley, Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough, *Amer. Math. Monthly* 104, Vol. 4 (1997) 344–350.
- [8] E. Schröder, Vier combinatorische Probleme, *Z. Math. Phys.* 15 (1870) 371–376.