Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 12, S. 131—168 (1966)

AXIOMATISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER EINIGE MIT DER PRESBURGERSCHEN ARITHMETIK VERWANDTE SYSTEME[1])

von HARRY APELT in Potsdam

Herrn Prof. Dr. Karl Schröter zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

1. Ausgehend von der PRESBURGERschen Arithmetik[2]) der ganzen Zahlen, $\mathfrak{T}_g(\forall)$, untersuchen wir einige verwandte arithmetische Systeme, und zwar beschränken wir uns auf elementare Theorien bzw. den Prädikatenkalkül der ersten Stufe, der allerdings im zweiten Teil der Arbeit in noch anzugebender Weise erweitert wird.

Im ersten Teil der Arbeit verwenden wir die logischen Zeichen $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots$ als Individuenvariablen und Klammern (,) als technische Zeichen. Als Individuenkonstanten werden $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$, als einzige Funktionenkonstante wird $+$, und neben $=$ wird als einzige weitere Relationenkonstante $<$ auftreten.

Die Terme und Ausdrücke des jeweiligen Formalismus werden in bekannter Weise definiert.

Als Schlußregeln benutzen wir die Regeln der Abtrennung, Termeinsetzung und Umbenennung gebundener Variabler, weiterhin die Regeln der vorderen und hinteren Partikularisierung sowie der vorderen und hinteren Generalisierung.[3])

2. Wir ändern das von PRESBURGER angegebene[4]) (vollständige) Axiomensystem zu einem (vollständigen und) unabhängigen Axiomensystem, $\Sigma_g(\forall)$, ab. Dabei wollen wir Unabhängigkeit bei Axiomenschemata nicht nur nach der Ordnung verstanden wissen, sondern stets in dem strengeren Sinne, daß kein einziges Axiom des Schemas aus dem restlichen Axiomensystem ableitbar ist.

$\mathfrak{T}_g(\forall)$ wird durch Aufnahme der (in $\mathfrak{T}_g(\forall)$ nicht definierbaren) Relation $<$ zu $\mathfrak{T}_g^{<}(\forall)$ erweitert. Für diese Theorie geben wir ebenfalls ein *vollständiges und unabhängiges Axiomensystem*, $\Sigma_g^{<}(\forall)$, an. Am Rande wird sich zeigen, daß eine Obermenge des oben genannten Axiomensystems $\Sigma_g(\forall)$ in keinem Falle ein vollständiges und unabhängiges $\Sigma_g^{<}(\forall)$ sein kann.

---

[1]) Dissertation Pädagogische Hochschule Potsdam, 1964. Referenten Prof. Dr. K. HÄRTIG (Berlin) und Prof. Dr. K. SCHRÖTER (Berlin).

[2]) M. PRESBURGER, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. Comptes-rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves (Warszawa 1929). Warschau 1930.

[3]) Vgl. z. B. K. SCHRÖTER, Theorie des logischen Schließens. Diese Zeitschr. 1 (1955), 37—86.

[4]) Vgl. M. PRESBURGER, a. a. O., 93—94.

Zum Abschluß des ersten Teiles nennen wir auch noch für die Presburgersche Arithmetik der natürlichen Zahlen, $\mathfrak{T}_n(\forall)$, ein *vollständiges und unabhängiges Axiomensystem.*

3. Im zweiten Teil, dem Hauptteil der Arbeit, erweitern wir die Formalismen der in den ersten drei Paragraphen behandelten Theorien $\mathfrak{T}_g(\forall)$, $\mathfrak{T}_g^<(\forall)$, $\mathfrak{T}_n(\forall)$ durch den von K. Härtig[1]) eingeführten zweistelligen Quantifikator I. Die Ausdrucksdefinition wird ergänzt durch die Festsetzung: Sind H_1 und H_2 Ausdrücke, die die Variable x vollfrei enthalten, so ist auch $\mathsf{I}x\, H_1\, H_2$ ein Ausdruck. Er ist etwa zu lesen: „Es gibt ebenso viele x, für die H_1 gilt, wie es x gibt, für die H_2 gilt."[2])

Auch nach dieser Erweiterung der Formalismen können wir von elementaren Theorien in dem Sinne sprechen, daß nur Individuenvariable auftreten (und gebunden werden können).

Wir geben Axiomenschemata für den Quantifikator I an, die in jedem Modell gelten, und fügen zu den sieben Schlußregeln des Prädikatenkalküls *allgemeingültigkeitserbliche* Schlußregeln für I hinzu.

4. Durch ein Eliminationsverfahren beweisen wir die Vollständigkeit eines Axiomensystems $\Sigma_g^<(\mathsf{I})$ für die Presburgersche Arithmetik $\mathfrak{T}_g^<(\mathsf{I})$. Diese Elimination liefert gleichzeitig ein Entscheidungsverfahren für alle von uns betrachteten Theorien.

Als Hauptergebnis erhalten wir: $\Sigma_g^<(\mathsf{I})$ ist ein *vollständiges, unabhängiges* und *kategorisches* Axiomensystem von $\mathfrak{T}_g^<(\mathsf{I})$. Die Kategorizität wird durch ein bestimmtes der Axiome erzwungen.

Ein analoges Ergebnis erhält man für die Presburgersche Arithmetik $\mathfrak{T}_n(\mathsf{I})$ der natürlichen Zahlen.

Dagegen unterscheiden sich die Menge der Modelle[3]) von $\mathfrak{T}_g(\forall)$ und die Menge der Modelle von $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$ überhaupt nicht; das liegt einfach daran, daß durch das Axiomensystem $\Sigma_g(\forall)$ — allerdings mit zusätzlichen Schlußregeln — bereits ganz $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$ vollständig axiomatisiert wird.

Schon hier möge erwähnt werden, daß bei einigen Unabhängigkeitsbeweisen für $\Sigma_g^<(\mathsf{I})$ *Nichtstandardinterpretationen auch des Quantifikators* I eine Rolle spielen werden.

Die vorliegende Arbeit ist aus einem Seminar über mathematische Logik hervorgegangen, das Herr Prof. Dr. K. Härtig während seiner Tätigkeit an der Pädagogischen Hochschule Potsdam durchgeführt hat. Er verfolgte die Entstehung der Arbeit mit großem Interesse und gab mir viele sehr wertvolle Ratschläge und Hinweise. Dafür danke ich ihm recht herzlich.

---

[1]) K. Härtig, Über einen Quantifikator mit zwei Wirkungsbereichen. *Kolloquium über die Grundlagen der Mathematik, mathematische Maschinen und ihre Anwendungen,* Tihany (Ungarn), September 1962. Budapest 1965.

[2]) Präzisiert bei K. Härtig, a. a. O.

[3]) Unter einem *Modell einer Theorie* $\mathfrak{T}$ verstehen wir hier selbstverständlich ein *Modell der Menge der allgemeingültigen Ausdrücke in* $\mathfrak{T}$ (bei der — zur Konstituierung von $\mathfrak{T}$ gehörenden — Standardinterpretation).

§ 1. Das Axiomensystem $\Sigma_g(\forall)$

In dem von M. PRESBURGER[1]) behandelten System $\mathfrak{T}_g(\forall)$ der Arithmetik der ganzen Zahlen ist für die Menge der allgemeingültigen Ausdrücke neben den aussagenlogischen und den identitätstheoretischen Axiomen das folgende vollständige Axiomensystem $\Sigma_g(\forall)$ angegeben.

$\Sigma_g(\forall)$: 1. $a + b = b + a$

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$

3. $\mathbf{0} + a = a$

4. $\exists b\, a + b = c$

Neben diesen vier einzelnen Axiomen stehen drei Schemata von Aussagen:

5. $\exists b \bigvee\limits_{j=0}^{p-1} j \cdot \mathbf{1} + pb = a$[2])

6. $pa = pb \rightarrow a = b$

7. $pa + \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$[3]),

in denen der Parameter p bei PRESBURGER alle natürlichen Zahlen von 2 an durchläuft. Wir lassen p nur die Primzahlen durchlaufen.[4])

Von dem so abgeänderten Axiomensystem zeigen wir zweierlei.

$\Sigma_g(\forall)$ ist erstens ein vollständiges und zweitens ein unabhängiges Axiomensystem der PRESBURGERschen Arithmetik. Daraus folgt, daß die PRESBURGERsche Arithmetik nicht endlich axiomatisierbar ist. Wäre nämlich ein endliches Axiomensystem $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ widerspruchsfrei und vollständig, so wären diese n Axiome — und wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{A}$ auch ganz $\Sigma_g(\forall)$ — aus einer endlichen Teilmenge von $\Sigma_g(\forall)$ ableitbar, im Widerspruch zur Unabhängigkeit von $\Sigma_g(\forall)$.

Zum Nachweis der Vollständigkeit leiten wir die bei PRESBURGER in den Schemata auftretenden Axiome, bei denen die Anzahl n der Summanden keine Primzahl ist, aus $\Sigma_g(\forall)$ ab, und zwar durch Induktion bezüglich der Zahl der Primfaktoren von n.

Diese (sehr einfachen) Ableitungen sollen nur als Beispiel für die Handhabung einiger Schlußregeln dienen.

---

[1]) M. PRESBURGER, a. a. O.

[2]) Zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir:

$$0a =_{\mathrm{Df}} \mathbf{0}, \quad (n + 1)\, a =_{\mathrm{Df}} ((na) + a).$$

Dabei seien n und im weiteren auch m, q, r, s, t — nötigenfalls auch mit Indizes — natürliche Zahlen.

[3]) Wir setzen fest:

$$a \neq b =_{\mathrm{Df}} \sim a = b.$$

[4]) Auch im folgenden sollen Zahlen p bzw. p_i stets Primzahlen sein.

Zu 5. Es ist ableitbar

$$(\bigvee_{j=0}^{p-1} j\cdot 1 + pb = c) \wedge (\bigvee_{j=0}^{m-1} j\cdot 1 + mc = a) \to \bigvee_{j=0}^{pm-1} j\cdot 1 + pmb = a .$$

Wir schreiben dafür zur Abkürzung: $H_1(b,c) \wedge H_2(c,a) \to H_3(b,a)$.
Durch hintere Partikularisierung folgt: $H_1(b,c) \wedge H_2(c,a) \to \exists b H_3(b,a)$.
Dies ist äquivalent mit $H_1(b,c) \to (H_2(c,a) \to \exists b\, H_3(b,a))$,
und hieraus folgt durch vordere Partikularisierung bezüglich b und Anwendung der Abtrennungsregel die Ableitbarkeit von $H_2(c,a) \to \exists b\, H_3(b,a)$.
Vordere Partikularisierung bezüglich c und nochmalige Anwendung der Abtrennungsregel ergibt die Ableitbarkeit von $\exists b\, H_3(b,a)$, d. h. von

$$\exists b \bigvee_{j=0}^{pm-1} j\cdot 1 + pmb = a .$$

Zu 6. Mit $A = ma$ und $B = mb$ ist $pA = pB \to A = B$ und damit auch

$$pma = pmb \to a = b$$

ableitbar.

Zu 7. $pma + 1 \neq 0$ ist ebenfalls ableitbar, da mit $A = ma$ auch $pA + 1 \neq 0$ ableitbar ist.

Die Unabhängigkeitsbeweise führen wir mit der Modellmethode. In den Modellen $\mu = \langle J, \dot{0}, \dot{1}, \dot{+}\rangle$ werden die Individuenbereiche Teilmengen der Menge der rationalen Zahlen oder aber Mengen von geordneten Paaren rationaler Zahlen sein.

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, setzen wir $\dot{0} = 0$, $\dot{1} = 1$, $a \dot{+} b = a + b$, d. h. also, wir werden dann $\dot{0}$, $\dot{1}$ und $\dot{+}$ standard-interpretieren. Da aus dem Zusammenhang jeweils hervorgeht, ob „x", „y", ... Symbole für Grundzeichen des Kalküls oder für Elemente der Individuenbereiche sind, erfolgt keine typographische Unterscheidung.

1) Unabhängigkeit von $a + b = b + a$

Ist J die Menge der natürlichen Zahlen und

$$x \dot{+} y =_{\mathrm{Df}} y ,$$

so gelten alle Axiome bis auf $a + b = b + a$.

2) Unabhängigkeit von $a + (b + c) = (a + b) + c$

Wir betrachten als J die Menge aller geordneten Zahlenpaare $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), \ldots$, in denen die ersten Komponenten ganze und die zweiten Komponenten rationale Zahlen sind. Wir setzen fest:

$$x \dot{+} y =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} (x_1 + y_1, x_2 + y_2) & \text{für } x_2 = 0 \text{ oder } y_2 = 0 \text{ oder } x_2 = y_2 \\ (x_1 + y_1, 2(x_2 + y_2)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0,0) \qquad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1,0) .$$

In diesem Modell sind die Axiome 1, 3 und 4 erfüllt. Auch die Ausdrücke der Schemata, in denen kanonisch zu klammern ist, gelten im Modell.

Da nämlich im Bereich der rationalen Zahlen eine Gleichung der Form

$$\underbrace{((\ldots(}_{p-2}2+1)\,2+1)\,2+\cdots+1)\,2x_2=y_2$$

für x_2 stets lösbar ist, gelten die Axiome 5. Die Axiome des Schemas 6 werden erfüllt, da aus

$$(px_1, \underbrace{((\ldots(}_{p-2}2+1)\,2+1)\,2+\cdots+1)\,2x_2) \\ = (py_1, \underbrace{((\ldots(}_{p-2}2+1)\,2+1)\,2+\cdots+1)\,2y_2)$$

stets $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ folgt. Und schließlich gelten die Axiome aus 7, da sie für die ganzen Zahlen erfüllt sind.

In unserem Modell gilt nicht das assoziative Gesetz. Die Unabhängigkeit des Axioms $a + (b + c) = (a + b) + c$ ist also nachgewiesen.

3) Unabhängigkeit von $0 + a = a$

Wenn als Individuenbereich die ganzen Zahlen zugrunde gelegt werden und $\dot{0} =_{\mathrm{Df}} 2$ gesetzt wird, dann gelten zunächst alle Axiome bis auf das 3. und die des Schemas 7. (In den anderen Axiomen kommt 0 nicht vor.) Die Axiome des letzten Schemas gelten aber auch, da $px \neq 1$ ist. Die Unabhängigkeit des Axioms $0 + a = a$ ist bewiesen.

4) Unabhängigkeit von $\exists b\; a + b = c$

Sie folgt sofort, wenn man die natürlichen Zahlen als Modell betrachtet.

5) Unabhängigkeit von $\exists b \bigvee_{j=0}^{p_i-1} j \cdot 1 + p_i b = a$

Als Individuenbereich nehmen wir die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, deren erste Komponenten ganze Zahlen und deren zweite Komponenten Zahlen der Form

$$\frac{k}{2^{\mu_1} \cdot 3^{\mu_2} \cdots p_{i-1}^{\mu_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{\mu_{i+1}} \cdots}$$

sind, wobei k, μ_j ganze Zahlen bedeuten. Wir definieren:

$$x \dot{+} y =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (\dot{0}, 0) \qquad 1 =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

In diesem Modell sind alle Axiome von $\Sigma_g(\forall)$ bis auf $\exists b \bigvee_{j=0}^{p_i-1} j \cdot 1 + p_i b = a$ erfüllt. Letzteres Axiom gilt nicht, da die Gleichung $p_i x_2 = y_2$ im Bereich der betrachteten Zahlen nicht immer eine Lösung hat.

6) Unabhängigkeit von $pa = pb \rightarrow a = b$

Wir betrachten wieder als Individuenbereich die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, deren erste Komponenten ganze Zahlen und deren zweite Komponenten Zahlen der Form $\frac{k}{p^\nu} - \left[\frac{k}{p^\nu}\right]$ (mit natürlichem k und ν) sind.[1]

[1] Als $[r]$ wird die ganze Zahl g mit $r - 1 < g \leqq r$ bezeichnet.

Wir setzen:

$$x \dot{+} y =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2 - [x_2 + y_2]),$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0) \qquad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

Die ersten vier Axiome von $\Sigma_g(\forall)$ sind erfüllt. Das gleiche gilt für alle Axiome des Schemas 5, da mindestens eine der q Gleichungen

$$(qx_1 + \lambda, qx_2 - [qx_2]) = (y_1, y_2) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, q - 1)$$

bei vorgegebenen (y_1, y_2) und q lösbar ist. Dazu ist nur zu zeigen, daß es stets ein x_2 mit $qx_2 - [qx_2] = y_2$ gibt.

Es sei $y_2 = \frac{\eta}{p^\nu}$. Für $q = p$ ist $x_2 = \frac{\eta}{p^{\nu+1}}$ eine Lösung. Für $q \neq p$ folgt die Lösbarkeit der Gleichung

$$q\frac{\xi}{p^\nu} - \left[q\frac{\xi}{p^\nu}\right] = \frac{\eta}{p^\nu}$$

aus der Lösbarkeit der Kongruenz $q \cdot \xi \equiv \eta (\mathrm{mod}\, p^\nu)$.

Die Axiome $qa = qb \to a = b$ des Schemas 6 mit $q \neq p$ sind ebenfalls erfüllt, da aus $\underbrace{x \dot{+} \cdots \dot{+} x}_{q} = \underbrace{y \dot{+} \cdots \dot{+} y}_{q}$, d. h. $(qx_1, qx_2 - [qx_2]) = (qy_1, qy_2 - [qy_2])$, $x_1 = y_1$ und $qx_2 - [qx_2] = qy_2 - [qy_2]$ folgt, und aus der letzten Gleichung $x_2 = y_2$ erschlossen werden kann.

Schließlich sind auch die Axiome des Schemas 7 erfüllt, da $px_1 + 1 \neq 0$ ist.

7) Unabhängigkeit von $pa + 1 \neq 0$

Den Individuenbereich des zu betrachtenden Modells bilden alle Zahlen der Form $x = \frac{r}{p^\nu}$, wobei r und ν ganze Zahlen sind.

Wir zeigen nur die Gültigkeit der Axiome des Schemas 5, da man leicht erkennt, daß alle anderen Axiome von $\Sigma_g(\forall)$ — bis auf das Axiom $pa + 1 \neq 0$ — in dem Modell gelten.

Es bleibt also nachzuweisen, daß zu beliebigem $x = \frac{r}{p^\nu}$ und einer beliebigen Primzahl q ein y in unserem Modell existiert, so daß mindestens eine der q Gleichungen $qy + \lambda = \frac{r}{p^\nu}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, q - 1)$ erfüllt ist. Für $q = p$ trifft dies auf die erste zu. Für $q \neq p$ trifft eine der q Kongruenzen $r - \lambda p^\nu \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, q - 1)$ zu, da $0, p^\nu, 2p^\nu, \ldots, (q - 1)p^\nu$ ein volles Repräsentantensystem Modulo q darstellt. Daraus folgt die Erfüllbarkeit einer der obigen Gleichungen.

Die Unabhängigkeit der Axiome des Systems $\Sigma_g(\forall)$ ist damit gezeigt.

§ 2. Das Axiomensystem $\Sigma_g^<(\forall)$

Im System $\mathfrak{T}_g(\forall)$ der PRESBURGERschen Arithmetik der ganzen Zahlen ist die Relation $<$ nicht definierbar[1]), denn der Automorphismus (bezüglich der Addition)

$$x \tilde{\to} -x$$

ist bezüglich der $<$-Beziehung nicht relationstreu.

Wir wollen in dem aus $\mathfrak{T}_g(\forall)$ durch Hinzunahme der $<$-Relation entstehenden erweiterten System $\mathfrak{T}_g^<(\forall)$ der PRESBURGERschen Arithmetik die folgende Menge von Ausdrücken auszeichnen.

$\Sigma_g^<(\forall)$:
1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $0 + a = a$
4. $\exists b\, a + b = c$
5. $\exists b \bigvee_{j=0}^{p-1} j \cdot 1 + pb = a$

Dies sind die ersten vier Axiome und das erste Schema von $\Sigma_g(\forall)$.

Hinzu kommt jetzt:

6. $a < b \to \sim b < 1 + a$
7. $a < b \wedge b < c \to a < c$
8. $a < b \vee a = b \vee b < a$
9. $a < b \to c + a < c + b$
10. $0 < 1$

Es gilt der

Satz. $\Sigma_g^<(\forall)$ *ist ein vollständiges und unabhängiges Axiomensystem der erweiterten Presburgerschen Arithmetik* $\mathfrak{T}_g^<(\forall)$.

Obwohl sich ähnliche Untersuchungen bei HILBERT-BERNAYS finden[2]), soll der Beweis des Satzes hier in allen Einzelheiten durchgeführt werden, da wir auf ihm, insbesondere auf dem Teil, der die Vollständigkeit nachweist, im § 5 aufbauen.

Zum Beweis unseres Satzes genügt es, zu jedem quantifikatorenfreien Ausdruck $H(a)$[3]) einen quantifikatorenfreien Ausdruck H^* anzugeben, der folgenden Bedingungen genügt:

(1) H^* enthält a nicht, jedoch sonst dieselben Variablen wie $H(a)$.

(2) Aus $\Sigma_g^<(\forall)$ ist die Äquivalenz $\exists a\, H(a) \longleftrightarrow H^*$ ableitbar.

---

[1]) Dies läßt sich auch durch Anwendung des PRESBURGERschen Eliminationsverfahrens zeigen.

[2]) Vgl. D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik Bd. I, Berlin 1934. Dort beschränken sich die Betrachtungen auf die natürlichen Zahlen; das von HILBERT und BERNAYS untersuchte Axiomensystem unterscheidet sich wesentlich von den von uns benutzten Systemen; es enthält rekursive Definitionen und die vollständige Induktion.

[3]) Durch die Schreibweise „$H(a)$" statt „H" soll angedeutet werden, daß a in H vollfrei vorkommt.

Bevor das Eliminationsverfahren durchgeführt wird, sollen einige dazu benötigte Ausdrücke aus $\Sigma_g^<(\forall)$ abgeleitet und ein Hilfssatz bewiesen werden.

α) $\vdash a < b \to \sim b < a$,[1])

denn:

$$\vdash a < 1 + a \quad \text{(nach 9., 10.)}, \qquad \vdash b < a \to b < 1 + a \quad (7.).$$

Hieraus und nach (6.) folgt die Behauptung.

β) $\vdash \sim a < a$ wegen α),

denn

$$\vdash (a < a \to \sim a < a) \to \sim a < a.$$

γ) a und b stehen genau in einer der Relationen $a < b$, $a = b$, $b < a$, d. h.

$$\vdash \sim a < b \leftrightarrow a = b \vee b < a, \qquad \vdash a \neq b \leftrightarrow a < b \vee b < a.$$

Es ist

$$\vdash \sim a < b \to a = b \vee b < a \quad (8.), \qquad \vdash a = b \to (a < b \to b < b),$$

daher

$$\vdash \sim b < b \to \sim(a < b \wedge a = b),$$

also

$$\vdash a < b \to a \neq b.$$

In Verbindung mit α) folgt

$$\vdash a = b \vee b < a \to \sim a < b.$$

Die Ableitbarkeit der zweiten Äquivalenz folgt aus

$$\vdash a \neq b \to a < b \vee b < a \quad (8.),$$

$$\vdash a < b \to a \neq b \quad \text{und} \quad \vdash b < a \to a \neq b.$$

δ) $\vdash a = b \leftrightarrow a < b + 1 \wedge b < a + 1.$

Mit

$$\vdash a = b \to a < b + 1 \quad \text{und} \quad \vdash a = b \to b < a + 1$$

ist

$$\vdash a = b \to a < b + 1 \wedge b < a + 1.$$

Weiter ist

$$\vdash b < a + 1 \to \sim a < b \quad (6.),$$

$$\vdash b < a + 1 \to a = b \vee b < a \quad (\gamma),$$

$$\vdash a < b + 1 \to a = b \vee a < b \quad (\gamma)$$

und daher

$$\vdash a < b + 1 \wedge b < a + 1 \to a = b.$$

---

[1]) In diesem Paragraphen bedeute das Zeichen „$\vdash$" Ableitbarkeit aus $\Sigma_g^<(\forall)$ mit Hilfe der üblichen Schlußregeln.

ε) $\vdash na = nb \rightarrow a = b \quad (n \geqq 2)$.

Zunächst zeigen wir durch vollständige Induktion

$$\vdash a < b \rightarrow na < nb.$$

Sei

$$\vdash a < b \rightarrow (n-1)\,a < (n-1)\,b.$$

Dann

$$\vdash (n-1)\,a < (n-1)\,b \rightarrow na < a + (n-1)\,b \quad (9.)$$

und

$$\vdash a < b \rightarrow (n-1)\,b + a < nb \quad (9.),$$

somit wie behauptet

$$\vdash a < b \rightarrow na < nb \quad (1., 7.).$$

Aus

$$\vdash a < b \vee b < a \rightarrow na < nb \vee nb < na$$

folgt durch Kontraposition und Beachtung von γ)

$$\vdash na = nb \rightarrow a = b.$$

ζ) $\vdash na + 1 \neq 0 \quad (n \geqq 2)$,

denn

$$\vdash 0 \leqq a \rightarrow 0 \leqq na\text{ [1]}, \quad (\varepsilon) \vdash 0 \leqq a \rightarrow 0 < na + 1 \quad (7., 10.)$$

und durch Kontraposition

$$\vdash na + 1 = 0 \rightarrow a < 0. \quad (*)$$

Weiter gilt

$$\vdash a + 1 \leqq 0 \rightarrow na + 1 \leqq (n-1)\,a \quad (9.), \quad \vdash a + 1 \leqq 0 \rightarrow (n-1)\,a < 0$$

und daher

$$\vdash a + 1 \leqq 0 \rightarrow na + 1 < 0 \quad (7.),$$

$$\vdash \sim na + 1 < 0 \rightarrow 0 < a + 1,$$

$$\vdash na + 1 = 0 \rightarrow 0 < a + 1.$$

Hieraus folgt mit (*)

$$\vdash na + 1 = 0 \rightarrow a < 0 \wedge 0 < a + 1,$$

$$\vdash \sim(a < 0 \wedge 0 < a + 1) \rightarrow na + 1 \neq 0.$$

η) $\vdash a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \longleftrightarrow a + qT \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$, [2]

d. h. also $\vdash \exists x\, qx + a = r \cdot 1 \longleftrightarrow \exists x\, qx + a + qT = r \cdot 1$,

---

[1]) Es wird definiert:

$$a \leqq b =_{\mathrm{Df}} a < b \vee a = b.$$

[2]) Dabei ist im Formalismus die neue Relation durch die explizite Definition

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, q) =_{\mathrm{Df}} \exists c\, qc + a = b$$

eingeführt.

denn

$$\vdash qx + a = r \cdot 1 \rightarrow \exists x\, qx + a = r \cdot 1,$$
$$\vdash q(y + T) + a = r \cdot 1 \rightarrow \exists x\, qx + a = r \cdot 1 \quad \text{(Termeinsetzung)},$$
$$\vdash \exists y\, qy + a + qT = r \cdot 1 \rightarrow \exists x\, qx + a = r \cdot 1.$$

Weiter gilt:

$$\vdash qx + a = r \cdot 1 \wedge x = y + T \rightarrow \exists y\, qy + a + qT = r \cdot 1,$$
$$\vdash x = y + T \rightarrow (qx + a = r \cdot 1 \rightarrow \exists y\, qy + a + qT = r \cdot 1),$$
$$\vdash \exists x\, qx + a = r \cdot 1 \rightarrow \exists y\, qy + a + qT = r \cdot 1.$$

Wir beweisen im Formalismus einen Hilfssatz, der den aus der Zahlentheorie bekannten Sachverhalt zum Ausdruck bringt, daß zwei simultane Kongruenzen $n_1 x \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, q_1)$ und $n_2 x \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, q_2)$ entweder einer Kongruenz $x \equiv r_3 (\mathrm{mod}\, q_3)$ äquivalent sind oder keine gemeinsame Lösung besitzen.

Hilfssatz. *Zu jedem 6-tupel* $[n_1, n_2, r_1, r_2, q_1, q_2]$ *natürlicher Zahlen mit* $0 \leq r_\nu < q_\nu$ *und* $q_\nu > 1$ $(\nu = 1, 2)$ *gibt es entweder natürliche Zahlen* r_3 *und* q_3 *mit* $0 \leq r_3 < q_3$ *und* $q_3 > 1$ *so, daß*

$$\vdash n_1 a \equiv r_1 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q_1) \wedge n_2 a \equiv r_2 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q_2) \longleftrightarrow a \equiv r_3 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q_3)$$

oder

$$\vdash \sim (n_1 a \equiv r_1 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q_1) \wedge n_2 a \equiv r_2 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q_2)).$$

Beweis. Da

$$\vdash kc + a = b \longleftrightarrow lkc + la = lb \;\; (l > 0), \;\; \vdash \exists c\, kc + a = b \longleftrightarrow \exists c\, lkc + la = lb,$$

also auch

$$\vdash a \equiv b (\mathrm{mod}\, k) \longleftrightarrow la \equiv lb (\mathrm{mod}\, lk),$$

kann die zu untersuchende Konjunktion als

$$m_1 a \equiv s_1 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \wedge m_2 a \equiv s_2 \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$$

mit gemeinsamem Modul q, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von q_1 und q_2 geschrieben werden.

Zur Durchführung des Beweises ist nun im wesentlichen nur nachzuweisen, daß Kongruenzen mit gleichem Modul im Formalismus addiert werden können. Wir zeigen also

$$\vdash a_1 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, q) \wedge a_2 \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, q) \longleftrightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\mathrm{mod}\, q) \wedge a_2 \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, q), \quad (*)$$

d. h.

$$\vdash \exists c\, qc + a_1 = b_1 \wedge \exists d\, qd + a_2 = b_2 \\ \longleftrightarrow \exists c\, qc + a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \wedge \exists d\, qd + a_2 = b_2.$$

Denn

$$\vdash qc + a_1 = b_1 \wedge qd + a_2 = b_2 \rightarrow q(c + d) + a_1 + a_2 = b_1 + b_2,$$
$$\vdash \exists c\, qc + a_1 = b_1 \wedge \exists d\, qd + a_2 = b_2 \rightarrow \exists c\, \exists d\, q(c + d) + a_1 + a_2 = b_1 + b_2,$$
$$\vdash q(c + d) + a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \rightarrow \exists c\, qc + a_1 + a_2 = b_1 + b_2,$$
$$\vdash \exists c\, \exists d\, q(c + d) + a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \rightarrow \exists c\, qc + a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

und daher

$$\vdash \exists c\, qc + a_1 = b_1 \wedge \exists d\, qd + a_2 = b_2 \rightarrow \exists c\, qc + a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \wedge \exists d\, qd + a_2 = b_2.$$

Weiter gilt

$\vdash q(c+d)+a_1+a_2=b_1+b_2 \wedge a_2=qe+b_2 \rightarrow \exists c\, \exists d\, \exists e\, q(c+d+e)+a_1=b_1,$

$\vdash \exists c\, qc+a_1+a_2=b_1+b_2 \wedge \exists e\, a_2=qe+b_2 \rightarrow \exists c\, \exists d\, \exists e\, q(c+d+e)+a_1=b_1,$

$\vdash \exists c\, \exists d\, \exists e\, q(c+d+e)+a_1=b_1 \rightarrow \exists c\, qc+a_1=b_1$

und daher

$\vdash \exists c\, qc+a_1+a_2=b_1+b_2 \wedge \exists e\, a_2=qe+b_2 \rightarrow \exists c\, qc+a_1=b_1 \wedge \exists e\, a_2=qe+b_2.$

Aus

$\vdash \exists e\, a_2=qe+b_2 \longleftrightarrow \exists d\, qd+a_2=b_2$

folgt schließlich

$\vdash \exists c\, qc+a_1+a_2=b_1+b_2 \wedge \exists d\, qd+a_2=b_2 \rightarrow \exists c\, qc+a_1=b_1 \wedge \exists d\, qd+a_2=b_2,$
womit die Behauptung (*) bewiesen ist.

Unter wiederholter Anwendung der bewiesenen Äquivalenz (*) kann die Konjunktion

$$m_1 a \equiv s_1 \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \wedge m_2 a \equiv s_2 \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$

äquivalent auf eine Konjunktion

$$na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \wedge t \cdot \mathbf{1} \equiv \mathbf{0} (\mathrm{mod}\, q)$$

zurückgeführt werden. Die n, r, t sind natürliche Zahlen, die sich aus den m_1, m_2, s_1 und s_2 ergeben. Bei den äquivalenten Umformungen ist gegebenenfalls von

$$\vdash a \equiv s \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, p) \longleftrightarrow a \equiv s \cdot \mathbf{1} + p \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, p)$$

Gebrauch zu machen.

Offenbar gilt entweder $\vdash t \cdot \mathbf{1} \not\equiv \mathbf{0} (\mathrm{mod}\, q)$ oder[1] $\vdash t \cdot \mathbf{1} \equiv \mathbf{0} (\mathrm{mod}\, q)$.
Im ersten Falle ist der Hilfssatz bewiesen. Im zweiten Falle gilt:

$$\vdash m_1 a \equiv s_1 \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \wedge m_2 a \equiv s_2 \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \longleftrightarrow na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q),$$

und wir haben nur noch die Kongruenz $na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$ zu betrachten.

Hier sind abermals zwei Fälle zu unterscheiden.

1) (n, q) ist Teiler von r. Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(n, q) = 1$ vorausgesetzt werden. Beachtet man

$\vdash na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \longleftrightarrow na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \wedge qa \equiv \mathbf{0} (\mathrm{mod}\, q)$

und die Äquivalenz (*), so folgt die Existenz einer natürlichen Zahl r_3 so, daß

$\vdash na \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \longleftrightarrow a \equiv r_3 \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q).$

2) (n, q) ist kein Teiler von r. In diesem Falle

$\vdash \sim \exists c\, qc + na = r \cdot \mathbf{1}.$

Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

---

[1]) Wir vereinbaren:

$$a \not\equiv b (\mathrm{mod}\, q) =_{\mathrm{Df}} \sim a \equiv b (\mathrm{mod}\, q)$$

Den Beweis des Vollständigkeitssatzes führen wir in drei Schritten. Zunächst wird in einem ersten Schritt der quantifikatorenfreie Ausdruck $H(a)$ so in eine alternative Normalform umgeformt, daß a nur noch in Ungleichungen und Kongruenzen auftritt, und zwar jeweils nur auf einer Seite (oder nur in der Form $a = a$).

Die Betrachtungen können dann wegen

$$\vdash \exists a (H_1(a) \vee H_2(a)) \longleftrightarrow \exists a\, H_1(a) \vee \exists a\, H_2(a)$$

und unter Berücksichtigung dei Tatsache, daß von a freie Teilausdrücke äquivalent aus dem Wirkungsbereich des Quantifikators $\exists$ herausgenommen werden können, auf Ausdrücke $H(a)$ beschränkt werden, die sich konjunktiv aus Ungleichungen und Kongruenzen in a aufbauen.

In einem zweiten Schritt wird das Eliminationsverfahren in den Fällen durchgeführt, in denen $H(a)$ von unendlich vielen a erfüllt wird, und in einem dritten Schritt geben wir schließlich das Eliminationsverfahren in dem noch verbleibenden Falle an, in dem der Ausdruck $H(a)$ aus einer Intervallangabe und der Angabe einer Kongruenz für a besteht.

1. Schritt: $H(a)$ kann äquivalent so in eine Alternative umgeformt werden, daß jedes Alternativglied in a höchstens je ein Glied der Formen:

$$T_1 < na + T,\ na + T < T_2,\ a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q),$$

(oder falls keines dieser Glieder auftritt) $a = a$

enthält, wobei in allen Ungleichungen die Seiten, die a enthalten, übereinstimmen und in allen Kongruenzen gleiche q auftreten. T_1, T_2 und T sind von a freie Terme.

Dazu werde $H(a)$ zunächst in eine alternative Normalform umgewandelt. Diese enthält:

$$k_1 a + T_1 = r_1 a + S_1,$$
$$k_2 a + T_2 < r_2 a + S_2,$$
$$k_3 a + T_3 \equiv r_3 a + S_3 (\mathrm{mod}\, t)$$

und entsprechende verneinte Ausdrücke. T_ν und S_ν sind von a freie Terme.

Unter Berücksichtigung der identitätstheoretischen Axiome und der Axiome 1., 2. und 9. aus $\Sigma_g^<(\forall)$ erreichen wir durch äquivalente Umformungen (bei denen keine der Variablen verlorengehen darf), daß a höchstens auf einer Seite oder nur in Teilausdrücken $a = a$ auftritt. Unter Verwendung der Äquivalenzen γ) und δ) formen wir so um, daß in a nur noch Glieder der folgenden Form auftreten:

$$T_1 < k_1 a + S_1,$$
$$k_2 a + S_2 < T_2,$$
$$k_3 a + S_3 \equiv T_3 (\mathrm{mod}\, t_3),$$
$$k_4 a + S_4 \not\equiv T_4 (\mathrm{mod}\, t_4),$$
$$(a = a).$$

Die folgenden Äquivalenzen ermöglichen äquivalente Umformungen der Kongruenzen für a, so daß diese nur noch in der Form $ka \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$ auftreten.

Es gilt:

$$\vdash na + S \equiv T (\mathrm{mod}\, q) \leftrightarrow na \equiv T + (q-1)\, S (\mathrm{mod}\, q) \quad (\eta),$$

$$\vdash na \not\equiv T (\mathrm{mod}\, q) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{q-1} na \equiv T + i \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \qquad (5.)$$

und

$$\vdash na \equiv T (\mathrm{mod}\, q) \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{q-1} na \equiv i \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \wedge T \equiv i \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q),$$

denn

$$\vdash \bigvee_{i=0}^{q-1} T \equiv i \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q).$$

Weiter können wir unter Beachtung vor allem der Axiome 1., 7. und 9. äquivalent so umformen, daß die a enthaltenen Seiten der Ungleichungen übereinstimmen.

Die alternative Normalform wird wieder hergestellt.

Tritt in einem Alternativglied $\bigwedge_{\nu=1}^{\varrho} T_{1\nu} < na + T$ bzw. $\bigwedge_{\nu=1}^{\sigma} na + T < T_{2\nu}$ auf, so können wir diese Konjunktionen äquivalent ersetzen, da

$$\vdash \bigwedge_{\nu=1}^{\varrho} T_{1\nu} < na + T \leftrightarrow \bigvee_{\nu=1}^{\varrho} (T_{1\nu} < na + T \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{\varrho} T_{1\mu} < T_{1\nu} + \mathbf{1})$$

$$\vdash \bigwedge_{\nu=1}^{\sigma} na + T < T_{2\nu} \leftrightarrow \bigvee_{\nu=1}^{\sigma} (na + T < T_{2\nu} \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{\sigma} T_{2\nu} < T_{2\mu} + \mathbf{1}),$$

denn

$$\vdash \bigvee_{\nu=1}^{\varrho} (\bigwedge_{\mu=1}^{\varrho} T_{1\mu} < T_{1\nu} + \mathbf{1})$$

$$\vdash \bigwedge_{\lambda=1}^{\varrho} T_{1\lambda} < na + T \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{\varrho} T_{1\mu} < T_{1\nu} + \mathbf{1} \leftrightarrow T_{1\nu} < na + T \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{\varrho} T_{1\mu} < T_{1\nu} + \mathbf{1}.$$

Entsprechend zeigt man die Ableitbarkeit der zweiten Äquivalenz.

Die alternative Normalform wird wieder hergestellt. Bei Konjunktionen von Kongruenzen wird der Hilfssatz berücksichtigt, d. h., wir ersetzen die Konjunktion durch eine Kongruenz der Form $a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$ bzw. durch $\mathbf{0} < \mathbf{0}$ (und gegebenenfalls durch $a = a \wedge \mathbf{0} < \mathbf{0}$).

Alle verbleibenden Kongruenzen können zum gleichen Modul geschrieben werden, denn

$$\vdash qb + a = r \cdot \mathbf{1} \leftrightarrow qb + a = r \cdot \mathbf{1} \wedge \exists c \bigvee_{i=0}^{p-1} pc + i \cdot \mathbf{1} = b$$

und damit auch

$$\vdash \exists b\, qb + a = r \cdot \mathbf{1} \leftrightarrow \exists b\, \exists c (\bigvee_{i=0}^{p-1} q(pc + i \cdot \mathbf{1}) + a = r \cdot \mathbf{1} \wedge pc + i \cdot \mathbf{1} = b).$$

Also gilt

$$\vdash \exists b\, qb + a = r \cdot \mathbf{1} \leftrightarrow \exists c \bigvee_{i=0}^{p-1} q(pc + i \cdot \mathbf{1}) + a = r \cdot \mathbf{1}, \quad \text{d. h.}$$

$$\vdash a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q) \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{p-1} a \equiv r \cdot \mathbf{1} + i \cdot q \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} pq).$$

Nach Wiederherstellung der alternativen Normalform ist der erste Umformungsschritt abgeschlossen.

Wir beachten $\vdash \exists a (H_1(a) \vee H_2(a)) \leftrightarrow \exists a\, H_1(a) \vee \exists a\, H_2(a)$ und – falls a in H^* nicht vorkommt –

$$\vdash \exists a (H(a) \wedge H^*) \leftrightarrow H^* \wedge \exists a\, H(a), \quad \vdash \exists a (H(a) \vee H^*) \leftrightarrow H^* \vee \exists a\, H(a)$$

und können uns nunmehr auf Ausdrücke $\exists a\, H(a)$ beschränken, in denen $H(a)$ eine Konjunktion aus höchstens je einem Glied der Formen

$$T_1 < na + T, \; na + T < T_2, \; a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q)$$

oder der Ausdruck $a = a$ ist. Dieser letzte Fall kann wegen $\vdash \exists a\, a = a \leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$ im folgenden ausgeschlossen werden.

Wir zeigen jetzt in einem

2. Schritt: In den Fällen, in denen $H(a)$ eine der folgenden Formen hat:

$$\begin{gathered} a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q), \\ T_1 < na + T, \\ na + T < T_2, \\ T_1 < na + T \wedge a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q), \\ na + T < T_2 \wedge a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q), \end{gathered}$$

ist das Eliminationsverfahren durchgeführt, denn in jedem der genannten Fälle gilt $\vdash \exists a\, H(a)$.

$$\vdash \exists a\, a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q),$$

denn $\vdash \exists a\, qx + a = r \cdot \mathbf{1}$, $\vdash \exists a \exists x\, qx + a = r \cdot \mathbf{1}$, d. h. $\vdash \exists a\, a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod} q)$.

$$\vdash \exists a\, T_1 < na + T,$$

denn

$$\vdash \bigvee_{j=0}^{n-1} T_1 + b + \mathbf{1} + j \cdot \mathbf{1} = na \rightarrow T_1 + b < na,$$

$$\vdash \Big(\bigvee_{j=0}^{n-1} T_1 + b + \mathbf{1} + j \cdot \mathbf{1} = na\Big) \wedge T + b = \mathbf{0} \rightarrow T_1 < na + T,$$

$$\vdash \exists a \Big(\bigvee_{j=0}^{n-1} T_1 + b + \mathbf{1} + j \cdot \mathbf{1} = na\Big) \rightarrow \exists a (T + b = \mathbf{0} \rightarrow T_1 < na + T),$$

Abtrennung ergibt

$$\vdash T + b = \mathbf{0} \rightarrow \exists a\, T_1 < na + T.$$

Hieraus erhält man durch vordere Partikularisierung bezüglich b und nachfolgende Abtrennung die Behauptung.

$\vdash \exists a\, na + T < T_2$,

denn

$$\vdash (\bigvee_{j=0}^{n-1} na + j \cdot 1 = T_2 + b) \wedge T + 1 + b = 0 \to \bigvee_{j=0}^{n-1} na + T + 1 + j \cdot 1 = T_2,$$

$$\vdash \bigvee_{j=0}^{n-1} na + T + 1 + j \cdot 1 = T_2 \to na + T < T_2$$

und somit

$$\vdash \exists a(\bigvee_{j=0}^{n-1} na + j \cdot 1 = T_2 + b) \to \exists a(T + 1 + b = 0 \to na + T < T_2).$$

Also gilt: $\vdash T + 1 + b = 0 \to \exists a\, na + T < T_2$, und hieraus erhält man wieder $\vdash \exists a\, na + T < T_2$.

$\vdash \exists a(T_1 < na + T \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod} q))$,

denn

$$\vdash \bigvee_{j=0}^{nq-1} T_1 + b + 1 + j \cdot 1 + nr \cdot 1 = na \wedge T + b = 0 \wedge qx + a = r \cdot 1$$
$$\to \exists a\, \exists x(T_1 < na + T \wedge qx + a = r \cdot 1).$$

Für die freie Variable a setzen wir den Term $qz + r \cdot 1$ ein und erhalten

$$\vdash \bigvee_{j=0}^{nq-1} T_1 + b + 1 + j \cdot 1 = nqz \wedge T + b = 0 \wedge qx + qz = 0$$
$$\to \exists a\, \exists x(T_1 < na + T \wedge qx + a = r \cdot 1).$$

Durch dreimalige Anwendung der Regeln der vorderen Partikularisierung und der Abtrennung ergibt sich die Behauptung.

$\vdash \exists a(na + T < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod} q))$,

denn

$$\vdash \bigvee_{j=0}^{nq-1} na + j \cdot 1 = T_2 + b \wedge T + 1 + b = 0 \wedge qx + a = r \cdot 1$$
$$\to \exists a\, \exists x(na + T < T_2 \wedge qx + a = r \cdot 1).$$

Die Behauptung folgt wie im vorigen Fall.

Damit ist der zweite Schritt durchgeführt. Beachten wir[1])

$\vdash \exists a\, T_1 < na + T < T_2 \leftrightarrow \exists b(T_1 < b < T_2 \wedge b \equiv T (\mathrm{mod} n))$ [2]) und

$$\vdash \exists a(T_1 < na + T < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod} q))$$
$$\leftrightarrow \exists b(T_1 < b < T_2 \wedge b \equiv nr \cdot 1 + T (\mathrm{mod} nq))\ ^{2)},$$

[1]) Wir wollen auch im folgenden für $T_1 < na + T \wedge na + T < T_2$ zur Abkürzung

$$T_1 < na + T < T_2$$

schreiben.

[2]) Die Kongruenz auf der rechten Seite kann entsprechend dem 1. Schritt umgeformt werden.

so ist nur noch der Fall[1])

$$\exists a(T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q))$$

zu behandeln. In einem

3. Schritt zeigen wir:

$$\vdash \exists a(T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)) \\ \longleftrightarrow \bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 < T_2 \wedge T_1 + j \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q).$$

Es gibt also ein a mit $T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$ genau dann, wenn der Term $T_1 + k \cdot 1$, für den $T_1 + k \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$ mit $0 < k \leqq q$ gilt, gleichzeitig der Bedingung $T_1 + k \cdot 1 < T_2$ genügt.

$$\vdash \bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 < T_2 \wedge T_1 + j \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \\ \rightarrow \exists a(T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)),$$

dies ergibt sich durch Termeinsetzung für a aus

$$\vdash T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \rightarrow \exists a(T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)).$$

$$\vdash \exists a(T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)) \\ \rightarrow \bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 < T_2 \wedge T_1 + j \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q),$$

denn

$$\vdash T_1 < a \rightarrow (\bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 = a \vee T_1 + q \cdot 1 < a), \quad \text{also}$$

$$\vdash T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \\ \rightarrow (\bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 = a \vee T_1 + q \cdot 1 < a) \wedge a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q),$$

$$\vdash T_1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \\ \rightarrow \bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 < T_2 \wedge T_1 + j \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \\ \vee T_1 + q \cdot 1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q).$$

Nun gilt

$$\vdash T_1 + q \cdot 1 < a < T_2 \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \\ \rightarrow \bigvee_{j=1}^{q} T_1 + j \cdot 1 < T_2 \wedge T_1 + j \cdot 1 \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q).$$

und daher folgt die Behauptung.

Das Eliminationsverfahren ist damit durchgeführt, und die Vollständigkeit von $\Sigma_g^{<}(\forall)$ bewiesen.

---

[1]) Ist $n = 1$ und treten keine Kongruenzen auf, dann vereinfacht sich der 3. Schritt.

Die Unabhängigkeit der Axiome von $\Sigma_g^{<}(\forall)$ beweisen wir durch Angabe geeigneter Modelle $\mu = \langle J, \dot{0}, \dot{1}, \dot{+}, \dot{<} \rangle$. Die Individuenbereiche sind ganze Zahlen oder natürliche Zahlen, oder es sind Mengen geordneter Zahlenpaare bzw. Zahlentripel mit ganzen Zahlen als ersten Komponenten.

Falls nichts anderes gesagt wird, setzen wir $\dot{0} = 0$, $\dot{1} = 1$, $a \dot{+} b = a + b$, $a \dot{<} b = a < b$.

1. J sei die Menge der geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, in denen beide Komponenten ganze Zahlen sind. Wir definieren:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x_1 < y_1 & \text{oder} \\ x_1 = y_1 & \text{und} \quad x_2 < y_2, \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \qquad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (0, 1).$$

2. Als Individuenbereich wird die Menge aller geordneten Zahlentripel (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3), \ldots$, bei denen die ersten Komponenten ganze Zahlen und die zweiten und dritten Komponenten rationale Zahlen sind, betrachtet. Es wird definiert:

$$(x_1, x_2, x_3) \dot{+} (y_1, y_2, y_3) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_2^2 y_2^2),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \dot{<} (y_1, y_2, y_3) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x_2 < y_2 & \text{oder} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_3 < y_3 \quad \text{oder} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_3 = y_3 \quad \text{und} \quad x_1 < y_1, \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0, 0), \qquad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0, 0).$$

3. J sei die Menge der ganzen Zahlen und

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} 2.$$

4. Die natürlichen Zahlen werden als Individuenbereich betrachtet.

5. Wir nehmen das Modell wie zum Unabhängigkeitsbeweis von Axiom 5. aus $\Sigma_g(\forall)$ (siehe § 1) mit der zusätzlichen Definition

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x_2 < y_2 & \text{oder} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_1 < y_1. \end{cases}$$

6. Der Individuenbereich sei die Menge aller geordneten Zahlenpaare (x_1, x_2), $(y_1, y_2), \ldots$, deren erste Komponenten ganze Zahlen und deren zweite Komponenten rationale Zahlen sind. Wir definieren:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} x_1 + x_2 \sqrt{2} < y_1 + y_2 \sqrt{2},$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \qquad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

7. Wir betrachten den gleichen Individuenbereich wie zu 6. und definieren:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} y_2 < x_2 & \text{falls} \quad |x_2 - y_2| = (2k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ x_2 < y_2 & \text{falls} \quad |x_2 - y_2| \neq (2k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_1 < y_1, \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \quad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

8. Wir legen ein Modell zugrunde, das aus dem unter 6. untersuchten durch die Abänderung

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} x_1 < y_1 \quad \text{und} \quad x_2 \leqq y_2$$

hervorgeht.

9. J sei die Menge aller geordneten Zahlenpaare (x_1, x_2), (y_1, y_2), ..., deren erste Komponenten ganze Zahlen und deren zweite Komponenten rationale Zahlen n_2 mit $0 \leqq n_2 < 1$ sind. Wir setzen:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2 - [x_2 + y_2]),$$

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x_2 < y_2 & \text{oder} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_1 < y_1. \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \quad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

10. Als Modell betrachten wir die ganzen Zahlen mit der Definition

$$x \dot{<} y =_{\mathrm{Df}} y < x.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Die Axiomenschemata $pa = pb \to a = b$ und $pa + 1 \neq 0$ aus $\Sigma_g(\forall)$ treten nicht als Axiome in $\Sigma_g^{<}(\forall)$ auf. Man kann die Frage aufwerfen, ob die Axiome 6., 7., 8., 9. und 10. aus $\Sigma_g^{<}(\forall)$ so abgeschwächt werden können, daß sie dann, vereinigt mit $\Sigma_g(\forall)$, ein vollständiges *und unabhängiges* Axiomensystem von $\mathfrak{T}_g^{<}(\forall)$ ergeben.

So könnte man erwägen, $a < b \to \sim b < 1 + a$ durch $a < b \to \sim b < a$ zu ersetzen. Das Schema $pa + 1 \neq 0$ ist dann zwar nicht mehr entbehrlich, aber die Vollständigkeit geht verloren, denn z. B. ist die Aussage, daß zwischen zwei ganzen Zahlen a und $a + 1$ keine ganze Zahl liege, in dem so abgeänderten Axiomensystem nicht mehr entscheidbar.

Die aufgeworfene Frage kann allgemein beantwortet werden durch den

Satz. *Es gibt keine Erweiterung von $\Sigma_g(\forall)$ zu einem vollständigen Axiomensystem der Theorie $\mathfrak{T}_g^{<}(\forall)$, bei der alle Axiome von $\Sigma_g(\forall)$ unabhängig bleiben.*

Beweis. Durch die Axiome $A_1, A_2, \ldots$ werde $\Sigma_g(\forall)$ zu einem vollständigen Axiomensystem von $\mathfrak{T}_g^{<}(\forall)$ erweitert. Aus endlich vielen Axiomen dieser Erweiterung sind die Ausdrücke 6., 7., 8.. 9. und 10. des Systems $\Sigma_g^{<}(\forall)$ ableitbar. Und aus $\Sigma_g(\forall)$ zuzüglich dieser Ausdrücke sind alle Axiome $pa = pb \to a = b$ und $pa + 1 \neq 0$ ableitbar. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Das Axiomensystem $\Sigma_n(\forall)$

Zum Abschluß der Untersuchungen des ersten Teiles dieser Arbeit wollen wir noch ein Axiomensystem $\Sigma_n(\forall)$ für die Menge der allgemeingültigen Ausdrücke der PRESBURGERschen Arithmetik, $\mathfrak{T}_n(\forall)$, der natürlichen Zahlen angeben.

$\Sigma_n(\forall)$: 1. $a + b = b + a$

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$

3. $\exists b(a + b = c \vee c + b = a)$

Dazu kommt ein Axiomenschema, in dem p alle Primzahlen durchläuft:

4. $\exists b \bigvee_{j=0}^{p-1} j \cdot 1 + pb = a$

Weiter die Axiome:

5. $c + a = c + b \rightarrow a = b$

6. $a + b = 1 \rightarrow a = 1 \vee b = 1$

7. $a + b = 0 \rightarrow b = 0$

8. $0 \neq 1$

Die zweistelligen Relationen $<$ und $\equiv$ (mod$q$) können im Formalismus explizit definiert werden:

$$a < b =_{\mathrm{Df}} \exists c\, a + c + 1 = b,$$

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, q) =_{\mathrm{Df}} \exists c(qc + a = b \vee qc + b = a).$$

Der Beweis der Vollständigkeit des angegebenen Axiomensystems bereitet keine Schwierigkeiten, sobald man gezeigt hat, daß unter Berücksichtigung der gegebenen Definitionen aus $\Sigma_n(\forall)$ alle Axiome des Systems $\Sigma_g^{<}(\forall)$ — natürlich bis auf 4. $\exists b\, a + b = c$ — sowie der Ausdruck $a = 0 \vee 0 < a$ ableitbar sind. Nur diese Ableitungen geben wir hier an.

α) $\vdash 0 + a = a$[1].

denn

$\vdash 0 + (0 + a) = (0 + 0) + a$ (2.),

$\vdash 0 + (0 + a) = 0 + a$ (3., 7.),

$\vdash \quad 0 + a = a.$

β) $\vdash a < b \rightarrow \sim b < 1 + a$, d. h.

$\vdash \exists c\, a + c + 1 = b \rightarrow \sim \exists d\, b + d + 1 = 1 + a.$

denn

$\vdash c + d + 1 \neq 0$ (7., 8.)

und

$\vdash a + c + d + 1 = b + d \wedge b + d = a \rightarrow c + d + 1 = 0,$

[1]) Das Zeichen „$\vdash$" bedeutet in diesem Paragraphen Ableitbarkeit aus $\Sigma_n(\forall)$.

daher

$$\vdash \sim(a + c + d + 1 = b + d \wedge b + d = a),$$

d. h.

$$\vdash a + c + 1 = b \rightarrow b + d + 1 \neq 1 + a$$

und somit

$$\vdash \exists c\, a + c + 1 = b \rightarrow \forall d\, b + d + 1 \neq 1 + a.$$

γ) $\vdash a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$, d. h.

$$\vdash \exists d\, \exists e (a + d + 1 = b \wedge b + e + 1 = c) \rightarrow \exists f\, a + f + 1 = c,$$

denn

$$\vdash a + f + 1 = b + e + 1 \wedge b + e + 1 = c \rightarrow a + f + 1 = c,$$
$$\vdash a + f + 1 = b + e + 1 \wedge b + e + 1 = c \rightarrow \exists f\, a + f + 1 = c.$$

Termeinsetzung und vordere Partikularisierung ergibt:

$$\vdash \exists d\, \exists e (a + d + 1 = b \wedge b + e + 1 = c) \rightarrow \exists f\, a + f + 1 = c.$$

δ) $\vdash a < b \vee a = b \vee b < a$, d. h.

$$\vdash \exists c\, a + c + 1 = b \vee a = b \vee \exists c\, b + c + 1 = a;$$

da

$$\vdash d = 0 \vee \exists c\, d = 1 + c$$

gelten

$$\vdash a + d = b \vee b + d = a \rightarrow (a + d = b \vee b + d = a) \wedge (d = 0 \vee \exists c\, d = 1 + c),$$
$$\vdash a + d = b \vee b + d = a \rightarrow a = b \vee \exists c\, a + c + 1 = b \vee \exists c\, b + c + 1 = a,$$
$$\vdash a = b \vee \exists c\, a + c + 1 = b \vee \exists c\, b + c + 1 = a.$$

ε) $\vdash a < b \rightarrow c + a < c + b$, d. h.,

$$\vdash \exists d\, a + d + 1 = b \rightarrow \exists d\, c + a + d + 1 = c + b,$$

denn

$$\vdash a + d + 1 = b \rightarrow c + a + d + 1 = c + b.$$

ζ) $\vdash 0 < 1$ d. h.

$$\vdash \exists b\, 0 + b + 1 = 1,$$

da

$$\vdash 0 + 0 + 1 = 1 \rightarrow \exists b\, 0 + b + 1 = 1.$$

η) $\vdash a = 0 \vee 0 < a$, d. h.

$$\vdash a = 0 \vee \exists b\, 0 + b + 1 = a,$$

denn

$$\vdash a + b = 1 \rightarrow a = 0 \wedge b = 1 \vee a = 1 \wedge b = 0,$$
$$\vdash a = 1 \wedge b = 0 \rightarrow 1 + b = a,$$
$$\vdash a + b = 1 \vee 1 + b = a \rightarrow a = 0 \wedge b = 1 \vee 1 + b = a.$$

Partikularisierung bezüglich b und Abtrennungsregel ergibt:

$$\vdash a = 0 \vee \exists b\, 1 + b = a.$$

Wir beweisen abschließend den

Satz. *$\Sigma_n(\forall)$ ist ein unabhängiges Axiomensystem der Theorie $\mathfrak{T}_n(\forall)$.*

Beweis. Wir geben wieder geeignete Modelle $\mu = \langle J, \dot{0}, \dot{1}, \dot{+}\rangle$ an und treffen die gleichen Vereinbarungen wie bei den entsprechenden Beweisen in den Paragraphen 1 und 2.

1. Als Individuenbereich nehmen wir die natürlichen Zahlen und definieren:

$$x \dot{+} y =_{\mathrm{Df}} y .$$

2. J sei die Menge der geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, deren zweite Komponenten nichtnegative rationale Zahlen sind. Die ersten Komponenten sind ganze oder natürliche Zahlen, je nachdem, ob die zweite Komponente ungleich oder gleich Null ist. Es wird definiert:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, \tfrac{1}{2}(x_2 + y_2)),$$
$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \quad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

3. Die geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$, bei denen die ersten Komponenten natürliche Zahlen und die zweiten Komponenten nichtnegative rationale Zahlen sind, bilden den Individuenbereich. Wir definieren:

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \quad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

4. Zum Unabhängigkeitsbeweis für ein bestimmtes Axiom aus dem Schema 4., etwa für $p = p_i$, betrachten wir ein Modell, dessen Individuenbereich aus geordneten Zahlenpaaren $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$ besteht, wobei die zweiten Komponenten Zahlen der Form

$$\frac{k}{2^{\mu_1} \cdot 3^{\mu_2} \cdots p_{i-1}^{\mu_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{\mu_{i+1}} \cdots} \qquad (k,\ \mu_j \text{ natürliche Zahlen})$$

sind. Die ersten Komponenten sind für $k = 0$ natürliche Zahlen und für $k \neq 0$ ganze Zahlen. Wir verabreden die gleichen Definitionen wie im Modell zu 3.

5. Es sei $J = \{0, 1, 2\}$. Wir definieren: $0 \dot{+} 0 =_{\mathrm{Df}} 0$, $0 \dot{+} 1 =_{\mathrm{Df}} 1$, $0 \dot{+} 2 =_{\mathrm{Df}} 2$, $1 \dot{+} 1 =_{\mathrm{Df}} 2$, $1 \dot{+} 2 =_{\mathrm{Df}} 2$ und $2 \dot{+} 2 =_{\mathrm{Df}} 2$.

6. Als Individuenbereich nehmen wir die nichtnegativen rationalen Zahlen.

7. Wir wählen $J = \{0, 1\}$ und definieren:

$$0 \dot{+} 0 =_{\mathrm{Df}} 0, \quad 0 \dot{+} 1 =_{\mathrm{Df}} 1, \quad 1 \dot{+} 1 =_{\mathrm{Df}} 0.$$

8. Hier sei $J = \{0\}$ und $\dot{0} =_{\mathrm{Df}} 0$, $\dot{1} =_{\mathrm{Df}} 0$.

An Hand dieser Modelle ist die Unabhängigkeit der Axiome aus $\Sigma_n(\forall)$ leicht nachzuprüfen.

§ 4. Der Quantifikator I

Der Quantifikator I, der zwei Wirkungsbereiche hat, wurde von K. HÄRTIG[1]) eingeführt. Im folgenden stützen wir uns auf die ersten Abschnitte der dortigen Darstellung.

In einem Modell μ mit dem Individuenbereich J erfüllt eine Belegung B den Ausdruck $\mathrm{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)$ genau dann, wenn die im Sinne von K. HÄRTIG[2]) durch $H_1(x)$ und $H_2(x)$ definierten Mengen M_1 und M_2 gleichmächtig sind.

Wie von K. HÄRTIG angegeben, lassen sich die Quantifikatoren $\exists$ und $\forall$ durch I ausdrücken:

$$\exists x\, H(x) =_{\mathrm{Df}} \sim \mathrm{I}x\, H(x)\, x \neq x, \qquad \forall x\, H(x) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{I}x \sim H(x)\, x \neq x.$$

Statt also in einer formalisierten Theorie den Quantifikator I noch hinzuzunehmen, kommt man mit I als einzigem Quantifikator aus.

Von diesem Paragraphen an treten neben die Axiome und Schlußregeln des Prädikatenkalküls Axiomenschemata und Schlußregeln für den Formalismus mit I. Dabei werden die Axiomenschemata in jedem Modell gelten und die Schlußregeln natürlich so gewählt, daß sie allgemeingültigkeitserblich sind. Nach dieser Erweiterung kann später für eine spezielle Theorie, nämlich für $\mathfrak{T}_g^{<}(\mathrm{I})$, ein Vollständigkeitssatz bewiesen werden, während übrigens der durch I erweiterte Prädikatenkalkül der ersten Stufe nicht axiomatisierbar ist.[3])

Wir werden, insbesondere am Schluß des Paragraphen, die Wirkungsweise der Schlußregeln und der Axiomenschemata an Beispielen zeigen, die wir ohnehin benötigen.[4])

Wir nehmen die folgenden beiden Axiomenschemata auf, die es ermöglichen, aus den beiden Wirkungsbereichen eines Quantifikators I Teilausdrücke H^*, in denen die durch I gebundene Variable x nicht auftritt, syntaktisch äquivalent herauszunehmen:

(1) $(\mathrm{I}x\, H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow (H^* \wedge \mathrm{I}x\, x = x\, H_2(x)) \vee (\sim H^* \wedge \mathrm{I}x\, H_1(x)\, H_2(x))$,

(2) $(\mathrm{I}x\, H^* \wedge H_1(x) \vee H_2(x)\, H_3(x))$

$$\longleftrightarrow (H^* \wedge \mathrm{I}x\, H_1(x) \vee H_2(x)\, H_3(x)) \vee (\sim H^* \wedge \mathrm{I}x\, H_2(x)\, H_3(x)).$$

---

[1]) Vgl. K. HÄRTIG, a. a. O.

[2]) *Bei gegebenem* B werden alle Belegungen B_0 betrachtet, für die erstens $B_0(y) = B(y)$ bei jeder von x verschiedenen Individuenvariablen y und für die zweitens B_0 den Ausdruck $H_i(x)$ erfüllt ($i = 1, 2$). Die Elemente von J, mit denen bei diesen B_0 die Individuenvariable x belegt wird, bilden die „durch $H_i(x)$ definierte" Menge M_i.

[3]) Dies wurde dem Verfasser von Herrn Prof. Dr. K. HÄRTIG mitgeteilt.

[4]) Es kam dem Verfasser bei den nachfolgenden Untersuchungen nicht darauf an, mit möglichst wenigen Axiomenchemata und Schlußregeln auszukommen.

Eine Vereinfachung der Schlußregeln und Schemata wurde von Herrn Prof. Dr. K. SCHRÖTER in dem Referat zur Dissertation angegeben und erscheint in dieser Zeitschrift.

Soweit zunächst die Axiomenschemata; nun zu den Schlußregeln:

$$\text{(A)}\quad \frac{\begin{array}{l} H_1(x) \leftrightarrow H_2(T(x)) \\ H_2(x) \rightarrow \exists y\, x = T(y) \\ T(x) = T(y) \rightarrow x = y \end{array}}{\mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)}$$

M_1 und M_2 mögen wieder die durch $H_1(x)$ bzw. $H_2(x)$ definierten Mengen bezeichnen. Die dem Term T entsprechende Funktion sei t.

Die erste Prämisse der Schlußregel sagt aus:

$$t(M_1) \subseteqq M_2.$$

Die zweite in Verbindung mit der ersten beinhaltet:

$$M_2 \subseteqq t(M_1),$$

und somit gilt

$$t(M_1) = M_2.$$

Hieraus ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung der dritten Prämisse:

$$M_1 \cong M_2 \quad (M_1 \text{ ist mit } M_2 \text{ gleichmächtig}).$$

Für x als $T(x)$ ergibt sich insbesondere:

Wenn[1]) $\vdash H_1(x) \leftrightarrow H_2(x)$, dann auch $\vdash \mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)$.

Für jeden Ausdruck $H(x)$ gilt fernerhin:

$$\vdash \mathsf{I}x\, H(x)\, H(x).$$

Hieraus und aus der Schlußregel

$$\text{(B)}\quad \frac{\mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)}{\mathsf{I}x\, H_1(x)\, H(x) \leftrightarrow \mathsf{I}x\, H(x)\, H_2(x)}$$

ergibt sich die Symmetrie der beiden Wirkungsbereiche im Quantifikator I, d. h.

$$\vdash \mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x) \leftrightarrow \mathsf{I}x\, H_2(x)\, H_1(x).$$

Außerdem ist wegen (B), falls $\vdash \mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)$ und $\vdash \mathsf{I}x\, H_2(x)\, H_3(x)$, dann auch $\vdash \mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_3(x)$.

Und entsprechend, falls $\vdash \mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_2(x)$ und $\vdash \sim\mathsf{I}x\, H_2(x)\, H_3(x)$, dann auch $\vdash \sim\mathsf{I}x\, H_1(x)\, H_3(x)$.

$$\text{(C)}\quad \frac{H_1(x) \rightarrow H_2(x)}{\mathsf{I}x\, x = x\, H_1(x) \rightarrow \mathsf{I}x\, x = x\, H_2(x).}$$

[1]) Das Zeichen „$\vdash$" bedeutet in diesem Paragraphen Ableitbarkeit aus den aussagenlogischen Axiomen und den hier angegebenen Axiomenschemata unter Benutzung der üblichen sowie der hier genannten Schlußregeln.

Das ist nichts anderes als ein Fall des BERNSTEINschen Äquivalenzsatzes. Wenn nämlich[1]) $M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq J$ und $J \cong M_1$, so $J \cong M_2$.

Aus (C) ergibt sich sofort

$$\vdash (\mathsf{I}\, x\; x = x\; H_1(x) \wedge H_2(x)) \to (\mathsf{I}\, x\; x = x\; H_1(x)) \wedge (\mathsf{I}\, x\; x = x\; H_2(x)),$$

denn

$$\vdash H_1(x) \wedge H_2(x) \to H_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

Man definiert:[2])

$$\mathsf{U} x\, H(x) =_{\mathrm{Df}} \exists y (H(y) \wedge \mathsf{I}\, x\, H(x)\, H(x) \wedge x \neq y);$$

$\mathsf{U} x\, H(x)$ kann gelesen werden: „Für unendlich viele x gilt $H(x)$."

Für U nehmen wir das folgende Axiomenschema auf

$$\mathsf{U} x (H_1(x) \wedge H_2(x)) \to \mathsf{U} x\, H_1(x) \wedge \mathsf{U} x\, H_2(x) \tag{3}$$

und geben schließlich noch eine vierte Schlußregel an:

$$\text{(D)} \qquad \frac{\begin{array}{c} \mathsf{I}\, x\, H_1(x)\, H_2(x) \\ \sim\exists x (H_1(x) \wedge \hat{H}_1(x)) \\ \sim\exists x (H_2(x) \wedge \hat{H}_2(x)) \\ \sim\mathsf{U} x\, H_1(x) \end{array}}{(\mathsf{I}\, x\, H_1(x) \vee \hat{H}_1(x)\, H_2(x) \vee \hat{H}_2(x)) \leftrightarrow \mathsf{I}\, x\, \hat{H}_1(x)\, \hat{H}_2(x)}$$

Die Schlußregel (D) gestattet unter gewissen Voraussetzungen einen äquivalenten Abbau der Ausdrücke in den beiden Wirkungsbereichen des Quantifikators I.

Wenn wir wieder die durch $H_i(x)$ definierte Menge als M_i bezeichnen, so besagen die vier Prämissen: $M_1 \cong M_2$, $M_1 \cap \hat{M}_1 = \emptyset$, $M_2 \cap \hat{M}_2 = \emptyset$, M_1 ist endlich. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$M_1 \cup \hat{M}_1 \cong M_2 \cup \hat{M}_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \hat{M}_1 \cong \hat{M}_2.$$

Abschließend geben wir die Ableitungen einiger Ausdrücke an. Die Variable x soll in H^* nicht vorkommen.

α) $\vdash (\mathsf{I}\, x\, H^* \wedge H_1(x)\, H_2(x)) \leftrightarrow (H^* \wedge \mathsf{I}\, x\, H_1(x)\, H_2(x)) \vee (\sim H^* \wedge \sim\exists x\, H_2(x))$.

Dies ergibt sich aus (2), wenn dort für $H_2(x)$ der Ausdruck $x \neq x$ eingesetzt wird, und die Schlußregeln (A) und (B) berücksichtigt werden.

β) Wenn $\vdash \mathsf{I}\, x\; x = x\; H(x)$, so $\vdash H^* \leftrightarrow \mathsf{I}\, x\; x = x\; H(x) \wedge H^*$,

denn aus α) ergibt sich, wenn wir $x = x$ für $H_2(x)$ und $H(x)$ für $H_1(x)$ einsetzen:

$$\vdash (\mathsf{I}\, x\, H^* \wedge H(x)\; x = x) \leftrightarrow H^* \wedge \mathsf{I}\, x\, H(x)\; x = x$$

und daher wegen $\vdash \mathsf{I}\, x\; x = x\; H(x)$ auch $\vdash H^* \leftrightarrow \mathsf{I}\, x\; x = x\; H(x) \wedge H^*$.

---

[1]) M_i $(i = 1, 2)$ bezeichne die durch H_i definierte Menge und J den Individuenbereich.

[2]) K. HÄRTIG, a. a. O.

γ) Wenn $\vdash \sim\exists x\, H_1(x)$, so $\vdash (\mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow \sim\exists x\, H_2(x)$,

wie sofort aus der Definition von $\exists$ und unter Berücksichtigung der Schlußregel (B) folgt.

δ) Wenn $\vdash \sim\mathsf{U} x\, H(x)$, so für beliebiges $\hat{H}(x)$ auch

$$\vdash \sim\mathsf{U} x (H(x) \wedge \hat{H}(x)),$$

denn Kontraposition des Axiomenschemas (3) ergibt:

$$\vdash \sim\mathsf{U} x\, H(x) \vee \sim\mathsf{U} x\, \hat{H}(x) \rightarrow \sim\mathsf{U} x (H(x) \wedge \hat{H}(x)).$$

ε) $\vdash (H^* \wedge \mathsf{I} x\, H^* \wedge H_1(x)\, H^* \wedge H_2(x)) \longleftrightarrow H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x)$,

denn man kann zweimal α) anwenden.

ζ) $\vdash H^* \rightarrow ((\mathsf{I} x \sim H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x))$,

denn

$$\vdash (\mathsf{I} x \sim H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow (\sim H^* \wedge \mathsf{I} x\, x = x\, H_2(x)) \vee (H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x)),$$
$$\vdash (\sim H^* \wedge \mathsf{I} x\, x = x\, H_2(x)) \rightarrow \sim H^*.$$

Wegen

$$\vdash (A \longleftrightarrow B \vee C) \wedge (B \rightarrow D) \rightarrow (A \vee D \longleftrightarrow D \vee C)$$

auch

$$\begin{aligned}\vdash ((\mathsf{I} x \sim H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow ((\sim H^* \wedge \mathsf{I} x\, x = x\, H_2(x)) \vee (H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x)))\\ \wedge ((\sim H^* \wedge \mathsf{I} x\, x = x\, H_2(x)) \rightarrow \sim H^*)\\ \rightarrow (((\mathsf{I} x \sim H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \vee \sim H^*) \longleftrightarrow (\sim H^* \vee H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x))).\end{aligned}$$

Anwendung der Abtrennungsregel ergibt schließlich

$$\vdash (\sim H^* \vee \mathsf{I} x \sim H^* \vee H_1(x)\, H_2(x)) \longleftrightarrow (\sim H^* \vee H^* \wedge \mathsf{I} x\, H_1(x)\, H_2(x)).$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen weisen wir darauf hin — wir haben davon bereits Gebrauch gemacht —, daß *das syntaktische Ersetzbarkeitstheorem des Prädikatenkalküls der ersten Stufe auch nach der vorgenommenen Erweiterung des Formalismus durch den Quantifikator* I *induktiv über die Ausdrucksstufe bewiesen werden kann.*

§ 5. Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Kategorizität des Axiomensystems $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$

In dem durch den Quantifikator I erweiterten Formalismus betrachten wir die durch die $<$-Relation erweiterte Theorie $\mathfrak{T}_g^{<}(\mathsf{I})$ der PRESBURGERschen Arithmetik der ganzen Zahlen.[1]) Wir zeichnen darin ein System $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$ von allgemeingültigen Ausdrücken aus, das aus $\Sigma_g^{<}(\forall)$ durch Erweiterung um drei Ausdrücke entsteht.

[1]) In dem durch I erweiterten Formalismus ist $+$ durch $<$ definierbar. Vgl. K. HÄRTIG, a. a. O., Abschnitt 3.

$\Sigma_g^{<}(\mathrm{I})$: 1. $a + b = b + a$

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$

3. $0 + a = a$

4. $\exists b\, a + b = c$

5. Alle Ausdrücke $\exists b \bigvee\limits_{j=0}^{p-1} j \cdot 1 + pb = a$ (p Primzahl)

6. $a < b \rightarrow \sim b < 1 + a$

7. $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$

8. $a < b \vee a = b \vee b < a$

9. $a < b \rightarrow c + a < c + b$

10. $0 < 1$

11. $\mathrm{I} b\, b = b\, b < a$

12. $\mathrm{I} b\, b = b\, a < b$

13. $\sim \mathrm{U} b\, a < b < c$ [1])

Es gilt der

Satz. $\Sigma_g^{<}(\mathrm{I})$ *ist ein vollständiges Axiomensystem der Presburgerschen Arithmetik* $\mathfrak{T}_g^{<}(\mathrm{I})$.

Der Beweis wird wieder wie im § 2 nach der Methode der Reduziertenbildung geführt. Wir können uns darauf beschränken, die Elimination des Quantifikators I für Ausdrücke $\mathrm{I} a\, H_1(a)\, H_2(a)$ durchzuführen, bei denen $H_1(a)$ und $H_2(a)$ quantifikatorenfrei sind.

Da sich das Eliminationsverfahren auf eine Kette syntaktischer Äquivalenzen gründet, ist damit die Vollständigkeit von $\Sigma_g^{<}(\mathrm{I})$ nachgewiesen.

Wir wollen den Vollständigkeitsbeweis folgendermaßen gliedern:

1. $H_1(a)$ und $H_2(a)$ werden entsprechend dem 1. Schritt aus dem Vollständigkeitsbeweis von § 2 umgeformt.

2. Wir nehmen Teilausdrücke von $H_1(a)$ und $H_2(a)$, die kein a enthalten, aus den Wirkungsbereichen des Quantifikators I heraus.

3. Es werden die Fälle behandelt, in denen $H_1(a)$ oder $H_2(a)$ von unendlich vielen a erfüllt werden.

4. $H_1(a)$ und $H_2(a)$, die beide nur für endlich viele a gelten, werden so in eine Alternative umgeformt, daß kein a gleichzeitig zwei verschiedene Alternativglieder von $H_1(a)$ bzw. $H_2(a)$ erfüllt.

5. Die Ausdrücke in den beiden Wirkungsbereichen des Quantifikators I werden sukzessive äquivalent abgebaut.

---

[1]) Ausgeschrieben: $\sim \exists d (a < d < c \wedge \mathrm{I} b\, a < b < c\, a < b < c \wedge b \neq d)$. Vgl. die Definition auf S. 154.

Zur Vorbereitung des Beweises wollen wir zunächst einen Hilfssatz beweisen und die Ableitungen einiger benötigter Ausdrücke angeben.

Hilfssatz. *Zu jeder Alternative*

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i < x < b_i$$

gibt es quantifikatorenfreie Ausdrücke H_j, *in denen genau die* a_i, b_i *als Variable auftreten, so daß*

$$\vdash \bigvee_{i=1}^{n} a_i < x < b_i \leftrightarrow \bigvee_{j=1}^{r} (H_j \wedge (\bigvee_{i=1}^{n_j} c_{ji} < x < d_{ji})) .^{1)}$$

Dabei sind die c_{ji} *sowie die* d_{ji} *gewisse* a_i, b_i *und*

$$\vdash H_j \to c_{j1} < d_{j1} \leqq c_{j2} < d_{j2} \leqq \cdots < d_{jn_j} \quad \textit{und}$$

$$\vdash \sim(H_j \wedge H_k) \quad \textit{für } j \neq k.$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion über die Zahl der auftretenden Alternativglieder geführt. Der Hilfssatz sei richtig für n. Wir betrachten

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i < x < b_i \vee A < x < B.$$

Da

$$\vdash A < x < B \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{r} H_i \wedge A < x < B \vee (\bigwedge_{i=1}^{r} \sim H_i) \wedge A < x < B$$

auch

$$\vdash \bigvee_{i=1}^{n} a_i < x < b_i \vee A < x < B$$

$$\leftrightarrow \bigvee_{j=1}^{r} (H_j \wedge (\bigvee_{i=1}^{n_j} c_{ji} < x < d_{ji} \vee A < x < B)) \vee (\bigwedge_{i=1}^{r} \sim H_i) \wedge A < x < B.$$

Auf Alternativen $\bigvee_{i=1}^{n_j} c_{ji} < x < d_{ji} \vee A < x < B$ mit weniger als $n + 1$ Alternativglieder können wir auf Grund der Induktionsvoraussetzung den Hilfssatz anwenden. Zu betrachten bleibt $H_k \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B)$.

Wir haben alle möglichen Anordnungen der A, B mit den $c_{\nu\mu}$ und $d_{\nu\mu}$ zu unterscheiden.

Zunächst gilt:

$$\vdash H_k \to A \leqq c_{k1} \vee \bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < A < d_{ki} \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} d_{ki} \leqq A \leqq c_{ki+1} \vee d_{kn} \leqq A,$$

$$\vdash H_k \to B \leqq c_{k1} \vee \bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < B < d_{ki} \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} d_{ki} \leqq B \leqq c_{ki+1} \vee d_{kn} \leqq B$$

---

1) Das Zeichen „$\vdash$" bedeutet im § 5 Ableitbarkeit aus $\Sigma_g^{<}(\mathrm{l})$ unter Verwendung der bereitgestellten Schlußregeln.

und damit auch

$$\vdash H_k \to B \leqq A \vee A < B$$

$$(*)\quad \begin{aligned} &\wedge \Big(A \leqq c_{k1} \vee \bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < A < d_{ki} \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} d_{ki} \leqq A \leqq c_{ki+1} \vee d_{kn} \leqq A\Big) \\ &\wedge \Big(B \leqq c_{k1} \vee \bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < A < d_{ki} \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} d_{ki} \leqq A \leqq c_{ki+1} \vee d_{kn} \leqq A\Big). \end{aligned}$$ [1])

Aus (*) ergeben sich folgende Alternativglieder:

$V^{(1)}$: $B \leq A$

$V^{(2)}$: $A < B \wedge A \leqq c_{k1} \wedge B \leqq c_{k1}$

$V_{\varrho}^{(3)}$: $A < B \wedge A \leqq c_{k1} \wedge c_{k\varrho} < B < d_{k\varrho}$

$V_{\mu}^{(4)}$: $A < B \wedge A \leqq c_{k1} \wedge d_{k\mu} \leqq B \leqq c_{k\mu+1}$

$V^{(5)}$: $A < B \wedge A \leqq c_{k1} \wedge d_{kn} \leqq B$

$V_{\varrho}^{(6)}$: $A < B \wedge c_{k\varrho} < A < d_{k\varrho} \wedge B \leqq c_{k1}$

$V_{\varrho\sigma}^{(7)}$: $A < B \wedge c_{k\varrho} < A < d_{k\varrho} \wedge c_{k\sigma} < B < d_{k\sigma}$

$V_{\varrho\mu}^{(8)}$: $A < B \wedge c_{k\varrho} < A < d_{k\varrho} \wedge d_{k\mu} \leqq B \leqq c_{k\mu+1}$

$V_{\varrho}^{(9)}$: $A < B \wedge c_{k\varrho} < A < d_{k\varrho} \wedge d_{kn} \leqq B$

$V_{\mu}^{(10)}$: $A < B \wedge d_{k\mu} \leqq A \leqq c_{k\mu+1} \wedge B \leqq c_{k1}$

$V_{\mu\varrho}^{(11)}$: $A < B \wedge d_{k\mu} \leqq A \leqq c_{k\mu+1} \wedge c_{k\varrho} < B < d_{k\varrho}$

$V_{\mu\nu}^{(12)}$: $A < B \wedge d_{k\mu} \leqq A \leqq c_{k\mu+1} \wedge d_{k\nu} \leqq B \leqq c_{k\nu+1}$

$V_{\mu}^{(13)}$: $A < B \wedge d_{k\mu} \leqq A \leqq c_{k\mu+1} \wedge d_{kn} \leqq B$

$V^{(14)}$: $A < B \wedge d_{kn} \leqq A \wedge B \leqq c_{k1}$

$V_{\varrho}^{(15)}$: $A < B \wedge d_{kn} \leqq A \wedge c_{k\varrho} < B < d_{k\varrho}$

$V_{\mu}^{(16)}$: $A < B \wedge d_{kn} \leqq A \wedge d_{k\mu} \leqq B \leqq c_{k\mu+1}$

$V^{(17)}$: $A < B \wedge d_{kn} \leqq A \wedge d_{kn} \leqq B.$

Mit $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$ und $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-1$.

Nun gilt offenbar:

$\vdash H_k \to \sim V_{\varrho}^{(6)}$ $\quad (\varrho = 1, \ldots, n)$

$\vdash H_k \to \sim V_{\varrho\sigma}^{(7)}$ $\quad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, n$ und $\sigma < \varrho)$

$\vdash H_k \to \sim V_{\varrho\mu}^{(8)}$ $\quad (\varrho = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, n-1$ und $\mu < \varrho)$

---

[1]) Bekanntlich können m Punkte auf einer Geraden in k verschiedenen Anordnungen auftreten mit

$$k = m! + \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)! \binom{m}{j+1}.$$

Bei drei „Intervallen" sind also bereits 3103 verschiedene Anordnungen der Endpunkte möglich. Die nachfolgend notwendigen zahlreichen Fallunterscheidungen überraschen daher nicht.

$$\vdash H_k \to \sim V^{(10)}_{\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n-1)$$
$$\vdash H_k \to \sim V^{(11)}_{\mu\varrho} \quad (\varrho, \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } \varrho \leqq \mu)$$
$$\vdash H_k \to \sim V^{(12)}_{\mu\nu} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } \nu < \mu)$$
$$\vdash H_k \to \sim V^{(14)}$$
$$\vdash H_k \to \sim V^{(15)}_{\varrho} \quad (\varrho = 1, \ldots, n)$$
$$\vdash H_k \to \sim V^{(16)}_{\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n-1).$$

Daher können die hier genannten Alternativglieder V in der Conclusio von (*) äquivalent weggelassen werden.

Es treten dann nur noch die folgenden Alternativglieder auf:

$$V^{(1)}$$
$$V^{(2)}$$
$$V^{(3)}_{\varrho} \quad (\varrho = 1, \ldots, n)$$
$$V^{(4)}_{\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n-1)$$
$$V^{(5)}$$
$$V^{(7)}_{\varrho\sigma} \quad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, n;\ \varrho \leqq \sigma)$$
$$V^{(8)}_{\varrho\mu} \quad (\varrho = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, n-1;\ \varrho \leqq \mu)$$
$$V^{(9)}_{\varrho} \quad (\varrho = 1, \ldots, n)$$
$$V^{(11)}_{\mu\varrho} \quad (\mu = 1, \ldots, n-1;\ \varrho = 1, \ldots, n;\ \mu < \varrho)$$
$$V^{(12)}_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \ldots, n-1;\ \mu \leqq \nu)$$
$$V^{(13)}_{\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n-1)$$
$$V^{(17)}$$

Betrachtet man eine Konjunktion aus H_k und zwei verschiedenen dieser Alternativglieder, so ist offenbar deren Verneinung ableitbar.

Wir bezeichnen die Alternative aus allen genannten noch verbleibenden Alternativgliedern V mit Q_k. Es gilt

$$\vdash H_k \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B)$$
$$\leftrightarrow H_k \wedge Q_k \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B).$$

Zur Abkürzung setzen wir P_k für $\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B$ und können auf Grund der nachfolgenden Äquivalenzen $H_k \wedge Q_k \wedge P_k$ syntaktisch äquivalent so umformen, daß der Hilfssatz in allen Einzelheiten bewiesen ist.

Es gilt:

$$\vdash H_k \wedge V^{(1)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V^{(1)} \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}),$$

$$\vdash H_k \wedge V^{(2)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V^{(2)} \wedge (A < x < B \vee \bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}),$$

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge (A < x < d_{k\varrho} \vee \bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\varrho = 1, \ldots, n,$$

$$\vdash H_k \wedge V_\mu^{(4)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_\mu^{(4)} \wedge (A < x < B \vee \bigvee_{i=\mu+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\mu = 1, \ldots, n-1,$$

$$\vdash H_k \wedge V^{(5)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V^{(5)} \wedge A < x < B,$$

$$\vdash H_k \wedge V_{\varrho\sigma}^{(7)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_{\varrho\sigma}^{(7)}$$
$$\wedge (\bigvee_{i=1}^{\varrho-1} c_{ki} < x < d_{ki} \vee c_{k\varrho} < x < d_{k\sigma} \vee \bigvee_{i=\sigma+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\varrho, \sigma = 1, \ldots, n;\ \varrho \leqq \sigma,$$

$$\vdash H_k \wedge V_{\varrho\mu}^{(8)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_{\varrho\mu}^{(8)}$$
$$\wedge (\bigvee_{i=1}^{\varrho-1} c_{ki} < x < d_{ki} \vee c_{k\varrho} < x < B \vee \bigvee_{i=\mu+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\varrho = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, n-1;\ \varrho \leqq \mu,$$

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(9)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(9)} \wedge (\bigvee_{i=1}^{\varrho-1} c_{ki} < x < d_{ki} \vee c_{k\varrho} < x < B)$$
$$\varrho = 1, \ldots, n,$$

$$\vdash H_k \wedge V_{\mu\varrho}^{(11)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_{\mu\varrho}^{(11)}$$
$$\wedge (\bigvee_{i=1}^{\mu-1} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < d_{k\varrho} \vee \bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\mu = 1, \ldots, n-1;\ \varrho = 1, \ldots, n \text{ und } \mu < \varrho,$$

$$\vdash H_k \wedge V_{\mu\nu}^{(12)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_{\mu\nu}^{(12)}$$
$$\wedge (\bigvee_{i=1}^{\mu} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B \vee \bigvee_{i=\nu+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki})$$
$$\mu, \nu = 1, \ldots, n-1;\ \mu \leqq \nu,$$

$$\vdash H_k \wedge V_\mu^{(13)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V_\mu^{(13)} \wedge (\bigvee_{i=1}^{\mu} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B)$$
$$\mu = 1, \ldots, n-1,$$

$$\vdash H_k \wedge V^{(17)} \wedge P_k \leftrightarrow H_k \wedge V^{(17)} \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B).$$

Die Beweise dieser Behauptungen erfolgen alle nach dem gleichen Prinzip, so daß wir uns auf die Angabe eines Beweises beschränken können. So ist z. B.:

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ik} \vee A < x < B)$$
$$\leftrightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge (A < x < d_{k\varrho} \vee \bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}),$$

denn

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B\right)$$
$$\rightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(A < x < d_{k\varrho} \vee \bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}\right)$$
$$(B < d_{k\varrho};\ A \leqq c_{ki};\ d_{ki} \leqq d_{k\varrho} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Es gilt aber auch:

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(A < x < d_{k\varrho} \vee \bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}\right)$$
$$\rightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki} \vee A < x < B\right),$$

da

$$\vdash c_{k\varrho} < B \rightarrow c_{k\varrho} < B \wedge (x < B \vee c_{k\varrho} < x),$$

auch

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge A < x < d_{k\varrho} \rightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge A < x < d_{k\varrho} \wedge (x < B \vee c_{k\varrho} < x)$$

und daher

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge A < x < d_{k\varrho} \rightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge (A < x < B \vee c_{k\varrho} < x < d_{k\varrho}).$$

Nun gilt weiterhin:

$$\vdash H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(\bigvee_{i=\varrho+1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}\right) \rightarrow H_k \wedge V_\varrho^{(3)} \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} c_{ki} < x < d_{ki}\right),$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Soweit der Hilfssatz. Wir zeigen nun:

α) $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, a < b \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$,

denn sei

$H_1(b)$ gleich $d < b$ und $H_2(b)$ gleich $nd + c < b \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, n)$,

so folgt

$$\vdash H_1(b) \leftrightarrow H_2(nb + c) \quad \text{und} \quad \vdash H_2(b) \rightarrow \exists e\, b = ne + c,$$

also auch $\vdash \mathsf{I} b\, d < b\, nd + c < b \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, n)$ und wegen (B)

$$\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, nd + c < b \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, n).$$

Auf Grund von α) aus § 4 gilt für einen Ausdruck H^*, der die freie Variable b nicht enthält, falls $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, H(b)$, dann auch $\vdash H^* \rightarrow \mathsf{I} b\, b = b\, H^* \wedge H(b)$.
Also

$$\vdash a < nd + c \rightarrow \mathsf{I} b\, b = b\, a < nd + c \wedge nd + c < b \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, n)$$

und unter Verwendung der Schlußregel (C)

$$\vdash a < nd + c \rightarrow \mathsf{I} b\, b = b\, a < b \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, n).$$

Vordere Partikularisierung bezüglich d und Anwendung der Abtrennungsregel ergibt die Behauptung.

$\beta)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, b < a \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$,
was man wie unter $\alpha)$ zeigt.

$\gamma)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, a < qb + d \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$,
denn

$$\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, qe + d < qb + d \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$$

und [wie unter $\alpha)$]

$$\vdash a < qe + d \to \mathsf{I} b\, b = b\, a < qe + d \wedge qe + d < qb + d \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n),$$
$$\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, a < qb + d \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n).$$

$\delta)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, qb + d < a \wedge b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$;

das kann wie unter $\gamma)$ gezeigt werden.

Aus den angegebenen ableitbaren Ausdrücken ergibt sich unter Beachtung der Schlußregel (C) aus § 4:

$\varepsilon)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, b \equiv c (\mathrm{mod}\, n)$. $\zeta)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, a < qb + d$. $\eta)$ $\vdash \mathsf{I} b\, b = b\, qb + d < a$.

Weiterhin zeigen wir:

$\vartheta)$ $\vdash \mathsf{I} b\, a < b < c\, a + d < b < c + d$,

denn sei $H_1(b)$ gleich $a < b < c$ und $H_2(b)$ gleich $a + d < b < c + d$, so

$$\vdash H_1(b) \leftrightarrow H_2(b + d) \quad \text{und} \quad \vdash H_2(b) \to \exists e\, b = e + d.$$

Anwendung der Schlußregel (A) ergibt die Behauptung.

$\varkappa)$ $\vdash \mathsf{I} b\, a < b < c \wedge b \equiv a + 1 (\mathrm{mod}\, n)\, a + d < b < c + d \wedge b \equiv a + d + 1 (\mathrm{mod}\, n)$,

denn sei $H_1(b)$ gleich $a < b < c \wedge b \equiv a + 1 (\mathrm{mod}\, n)$ und $H_2(b)$ gleich $a + d < b < c + d \wedge b \equiv a + d + 1 (\mathrm{mod}\, n)$, so

$$\vdash H_1(b) \leftrightarrow H_2(b + d) \quad \text{und} \quad \vdash H_2(b) \to \exists e\, b = e + d.$$

$\lambda)$ $\vdash \sim \mathsf{I} b\, b = b\, a < b < c$,
denn

$$\vdash \mathsf{I} b\, a < b < c\, a < b < c, \quad \vdash \sim \exists b (a < b < c \wedge b \neq b),$$
$$\vdash \sim \exists b (a < b < c \wedge (b \leqq a \vee c \leqq b)), \quad \vdash \sim \mathsf{U} b\, a < b < c \text{ (das ist Axiom 13.)},$$

und daraus folgt auf Grund der Schlußregel (D):

$$\vdash (\mathsf{I} b\, a < b < c \vee b \leqq a \vee c \leqq b\, a < b < c) \leftrightarrow \mathsf{I} b\, b \leqq a \vee c \leqq b\, b \neq b.$$

Also gilt wie behauptet: $\vdash \sim \mathsf{I} b\, a < b < c \vee b \leqq a \vee c \leqq b\, a < b < c$.

Wir führen jetzt den Vollständigkeitsbeweis.

1. Schritt: In dem zu betrachtenden Ausdruck $\mathsf{I} a\, H_1(a)\, H_2(a)$ formen wir entsprechend dem 1. Schritt aus § 2 die Ausdrücke $H_1(a)$ und $H_2(a)$ äquivalent so in eine Alternative um, daß jedes Alternativglied in a höchstens je ein Glied der Formen:

$$T_{ij} < na + T, \quad na + T < S_{ij}, \quad a \equiv r_{ij} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$$

enthält. Dabei stimmen in allen Ungleichungen die Seiten, die a enthalten, überein, und die Kongruenzen haben den gleichen Modul q. Falls in einem Wirkungsbereich keiner dieser Teilausdrücke auftritt, dann steht dort $a = a$.

2. Schritt: Unter Anwendung der Axiomenschemata (1) und (2) aus § 4 nehmen wir alle Teilausdrücke, in denen kein a auftritt, äquivalent aus den beiden Wirkungsbereichen des Quantifikators I heraus.

Die weiteren Untersuchungen können damit auf Ausdrücke $\mathsf{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)$ beschränkt werden, in denen $H_i(a)$ $(i = 1, 2)$ gleich $a = a$ ist oder aus Alternativgliedern der Form $T_{ij} < na + T \wedge na + T < S_{ij} \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$ besteht. In diesen Alternativgliedern können Konjunktionsglieder fehlen.

3. Schritt: Ist in $H_1(a)$ oder in $H_2(a)$ ein Alternativglied enthalten, in dem nicht beide Ungleichungen auftreten, dies sei etwa in $H_1(a)$ der Fall[1]), dann gilt

$$\vdash (\mathsf{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)) \leftrightarrow (H_1(\mathbf{0}) \vee \sim H_1(\mathbf{0})) \wedge \mathsf{I}a\, a = a\, H_2(a)$$

[γ), δ), (B) und (C)]. Ist auch in $H_2(a)$ ein derartiges Alternativglied enthalten, so

$$\vdash (\mathsf{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)) \leftrightarrow (H_1(\mathbf{0}) \vee \sim H_1(\mathbf{0})) \wedge (H_2(\mathbf{0}) \vee \sim H_2(\mathbf{0})),$$

und das Eliminationsverfahren ist in diesem Falle durchgeführt.

Treten jedoch in allen Alternativgliedern von $H_2(a)$ beide Ungleichungen auf, so

$$\vdash \sim \mathsf{I}a\, a = a\, H_2(a) \quad [\lambda) \text{ und Schlußregel (C)}]$$

und damit $\vdash (\mathsf{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)) \leftrightarrow (H_1(\mathbf{0}) \vee \sim H_1(\mathbf{0})) \wedge (H_2(\mathbf{0}) \wedge \sim H_2(\mathbf{0}))$.
Zu betrachten bleiben daher nur noch Ausdrücke $\mathsf{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)$, in denen die $H_i(a)$ $(i = 1, 2)$ von der Form

$$\bigvee_{j=1}^{k_i} T_{ij} < na + T < S_{ij} \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$

sind. In jedem Alternativglied sind beide Ungleichungen enthalten, und wenn überhaupt Kongruenzen auftreten, dann können wir annehmen, daß dies in jedem Alternativglied der Fall ist; denn Alternativglieder, die nur aus zwei Ungleichungen bestehen, können konjunktiv mit dem ableitbaren Ausdruck $\bigvee_{j=0}^{q-1} a \equiv j \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$ verknüpft werden.

Wir addieren auf beiden Seiten der Ungleichungen $(nq - 1)\, T$ und haben damit $H_i(a)$ von der Form

$$\bigvee_{j=1}^{k_i} T_{ij}^* < na + nqT < S_{ij}^* \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q).$$

Beachten wir schließlich noch, daß

$$\vdash \mathsf{I}a \bigvee_{j=1}^{k_i} T_{ij}^* < na + nqT < S_{ij}^* \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$
$$\bigvee_{j=1}^{k_i} T_{ij}^* < a < S_{ij}^* \wedge a \equiv nr_{ij} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, nq) \text{ }^{2})$$

---

[1]) Damit ist auch zugleich der Fall behandelt, daß $H_1(a)$ von der Form $a = a$ ist.

[2]) Falls in $H_i(a)$ keine Kongruenzen auftreten und $n > 1$ ist, dann wird jedes Alternativglied im zweiten Wirkungsbereich konjunktiv mit $a \equiv \mathbf{0} (\mathrm{mod}\, n)$ verknüpft.

[Schlußregel (A)], so können die weiteren Betrachtungen auf Ausdrücke $\mathsf{l}a\, H_1(a)\, H_2(a)$ mit $H_i(a)$ von der Form $\bigvee_{j=1}^{k_i} T_{ij} < a < S_{ij} \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\bmod q)$ beschränkt werden.

In einem

4. Schritt formen wir die $H_i(a)$ $(i = 1, 2)$ äquivalent so in eine Alternative $\bigvee_{j=1}^{\lambda_i} A_{ij}$ um, daß $\vdash \sim(A_{ij} \wedge A_{ik})$ für $j \neq k$.

Zunächst werden unter Berücksichtigung der Tatsache, daß alle auftretenden Kongruenzen mit natürlichen Zahlen r_{ij} mit $0 \leqq r_{ij} < q$ geschrieben werden können, alle Alternativglieder in $H_i(a)$, die Kongruenzen mit gleicher rechter Seite enthalten, zusammengefaßt. $H_i(a)$ hat dann die Gestalt

$$\bigvee_{\varrho=1}^{\mu_i} \Big(\Big(\bigvee_{\nu=1}^{\sigma_\varrho} T_{i\varrho_\nu} < a < S_{i\varrho_\nu} \Big) \wedge a \equiv r_{i j_\varrho} \cdot \mathbf{1} (\bmod q) \Big).$$

μ_i ist gleich der Anzahl der verschiedenen rechten Seiten der Kongruenzen, und die ϱ_ν durchlaufen alle natürlichen Zahlen von 1 bis k_i.

Auf $\bigvee_{\nu=1}^{\sigma_\varrho} T_{i\varrho_\nu} < a < S_{i\varrho_\nu}$ wenden wir den zu Beginn dieses Paragraphen bewiesenen Hilfssatz an. Da weiterhin $\vdash \sim(a \equiv r_{i j_\varrho}\; \mathbf{1} (\bmod q) \wedge a \equiv r_{i j_k} \cdot \mathbf{1} (\bmod q))$ für $j_\varrho \neq j_k$, liegt schließlich für $H_i(a)$ eine Darstellung

$$\bigvee_{j=1}^{\lambda_i} R_{ij}^* \wedge T_{ij}^* < a < S_{ij}^* \wedge a \equiv r_{ij}^* \cdot \mathbf{1} (\bmod q)$$

vor, wobei die R_{ij}^* quantifikatorenfreie Ausdrücke in den Variablen $T_{\nu\mu}$, $S_{\nu\mu}$ sind, die T_{ij}^* sowie die S_{ij}^* sind gewisse T_{ij}, S_{ij}, und für diese Darstellung gilt für $j \neq k$

$$\vdash \sim(R_{ij}^* \wedge T_{ij}^* < a < S_{ij}^* \wedge a \equiv r_{ij}^*\; \mathbf{1} (\bmod q)$$
$$\wedge R_{ik}^* \wedge T_{ik}^* < a < S_{ik}^* \wedge a \equiv r_{ik}^* \cdot \mathbf{1} (\bmod q)).$$

Wir zeigen abschließend in einem

5. Schritt: In $\mathsf{l}a\, H_1(a)\, H_2(a)$ mit $H_i(a)$ von der Form

$$\bigvee_{j=1}^{k_i} R_{ij} \wedge T_{ij} < a < S_{ij} \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\bmod q),$$

wobei die R_{ij} quantifikatorenfreie Ausdrücke in von a freien Termen sind, und wo gilt

$$\vdash \sim(R_{ij} \wedge T_{ij} < a < S_{ij} \wedge a \equiv r_{ij} \cdot \mathbf{1} (\bmod q)$$
$$\wedge R_{ik} \wedge T_{ik} < a < S_{ik} \wedge a \equiv r_{ik} \cdot \mathbf{1} (\bmod q)) \quad (j \neq k)$$

können die Ausdrücke in den beiden Wirkungsbereichen sukzessive äquivalent abgebaut werden.[1])

[1]) Falls in $H_i(a)$ keine Kongruenzen auftreten, vereinfacht sich das nachfolgende Verkürzungsverfahren wesentlich.

Es gilt[1]):

$$\vdash S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \leqq S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \vee S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 > S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1,$$

$$\vdash T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 < S_{11} \vee T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \geqq S_{11},$$

$$\vdash T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 < S_{21} \vee T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \geqq S_{21},$$

und somit auch

$$\begin{aligned}\vdash\ & S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \leqq S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \wedge T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 < S_{11} \\ \vee\ & S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \leqq S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \wedge T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \geqq S_{11} \\ \vee\ & S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 > S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \wedge T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 < S_{21} \\ \vee\ & S_{11} + T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 > S_{21} + T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \wedge T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \geqq S_{21}.\end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $\vdash Q_1^*(\varrho_1, \varrho_2) \vee Q_2^*(\varrho_1, \varrho_2) \vee Q_3^*(\varrho_1, \varrho_2) \vee Q_4^*(\varrho_1, \varrho_2)$.

Nun gilt auch

$$\vdash \bigvee_{\varrho_1=1}^{q} T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \equiv r_{11} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \quad \text{und} \quad \vdash \bigvee_{\varrho_2=1}^{q} T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \equiv r_{21} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q)$$

und damit auch

$$\vdash \bigvee_{\varrho_1, \varrho_2=1}^{q} T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \equiv r_{11} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \wedge T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \equiv r_{21} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q).$$

Bezeichnen wir

$$T_{11} + \varrho_1 \cdot 1 \equiv r_{11} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \wedge T_{21} + \varrho_2 \cdot 1 \equiv r_{21} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \wedge Q_\nu^*(\varrho_1, \varrho_2)$$

mit $Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2)$, so gilt: $\vdash \bigvee_{\varrho_1, \varrho_2=1}^{q} (\bigvee_{\nu=1}^{4} Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2))$.

Wir betrachten nunmehr $(\bigvee_{\varrho_1, \varrho_2=1}^{q} (\bigvee_{\nu=1}^{4} Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2))) \wedge \mathsf{I} a\, H_1(a)\, H_2(a)$

oder unter Berücksichtigung von ε) aus § 4 Ausdrücke

$$Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2) \wedge \mathsf{I} a\, Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2) \wedge H_1(a)\, Q_\nu(\varrho_1, \varrho_2) \wedge H_2(a)$$
$$(\nu = 1, \ldots, 4;\ \varrho_1, \varrho_2 = 1, \ldots, q).$$

Unter Beachtung der Symmetrie der beiden Wirkungsbereiche des Quantifikators I sind zwei Fälle zu behandeln.

1. Fall: Es liegt eine Verknüpfung mit Q_2 oder Q_4 vor. Da

$$\vdash Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R_{i1} \wedge T_{i1} < a < S_{i1} \wedge a \equiv r_{i1} \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \leftrightarrow Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge 0 < 0$$

für $(j, i) = (2, 1); (4, 2)$,

kann in diesem Falle für $j = 2$ das erste Alternativglied in $H_1(a)$ und für $j = 4$ das erste Alternativglied in $H_2(a)$ äquivalent gestrichen werden.

---

[1]) Wir vereinbaren:

$$a > b =_{\mathrm{Df}} b < a, \quad a \geqq b =_{\mathrm{Df}} b < a \vee a = b.$$

2. **Fall**: Es liegt eine Verknüpfung mit Q_1 oder Q_3 vor. Inhaltlich bedeutet dies, daß jeweils ein „echtes Intervall" in dem jeweils ersten Alternativglied auftritt. Wir werden in diesem Falle das größere der beiden Intervalle so in zwei Teilintervalle aufspalten, daß eines davon für genau so viele a erfüllt wird wie das erste Intervall in dem anderen Wirkungsbereich des Quantifikators. Anschließend werden diese beiden Intervalle äquivalent gestrichen. Zunächst gilt:

$$\vdash Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R_{i1} \wedge T_{i1} < a < S_{i1} \wedge a \equiv r_{i1} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$
$$\longleftrightarrow Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R_{i1} \wedge T_{i1} + (\varrho_i - 1) \cdot \mathbf{1} < a < S_{i1} \wedge a \equiv r_{i1} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$

für $(j, i) = (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)$.

Und weiter

$$\vdash Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R_{i1} \wedge T_{i1} + (\varrho_i - 1) \cdot \mathbf{1} < a < S_{i1} \wedge a \equiv r_{i1} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$
$$\longleftrightarrow Q_j(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R_{i1} \wedge (T_{i1} + (\varrho_i - 1) \cdot \mathbf{1} + T_{k1} + (\varrho_k - 1) \cdot \mathbf{1} <$$
$$< a + T_{k1} + (\varrho_k - 1) \cdot \mathbf{1} < T_{i1} + (\varrho_i - 1) \cdot \mathbf{1} + S_{k1}$$
$$\vee\, T_{i1} + (\varrho_i - 2) \cdot \mathbf{1} + S_{k1} < a + T_{k1} + (\varrho_k - 1) \cdot \mathbf{1} < S_{i1} + T_{k1} + (\varrho_k - 1) \cdot \mathbf{1})$$
$$\wedge\, a \equiv r_{i1} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$

für $(j, i, k) = (1, 2, 1);\ (3, 1, 2)$.

Auf Grund dieser Äquivalenzen wird für das entsprechende erste Alternativglied eine Ersetzung vorgenommen und in dem betrachteten Wirkungsbereich in allen Ungleichungen äquivalent so umgeformt, daß die Seiten, die a enthalten, von der Form $a + qT_{k1} + q(\varrho_k - 1) \cdot \mathbf{1}$ sind. Danach setzen wir in den Ungleichungen für diesen Term a ein. (Ableitbar ist, daß der so erhaltene und der ursprüngliche Ausdruck des betrachteten Wirkungsbereichs von gleich vielen a erfüllt werden. Weiter erfüllt auch nach dieser Umformung kein a gleichzeitig zwei verschiedene Alternativglieder.)

Unter Benutzung von $\varkappa$) (Seite 162) und Verwendung der Schlußregel (D) aus § 4 werden die Ausdrücke $H_1(a)$ und $H_2(a)$ äquivalent verkürzt. Das heißt, bei einer Verknüpfung mit $Q_1(\varrho_1, \varrho_2)$ wird das erste Alternativglied in $H_1(a)$ gestrichen und das erste Intervall in $H_2(a)$ verkürzt. Bei einer Verknüpfung mit $Q_3(\varrho_1, \varrho_2)$ ist es umgekehrt.

Nach dem angegebenen Verfahren können die Ausdrücke $H_1(a)$ und $H_2(a)$ in $\mathrm{I}a\, H_1(a)\, H_2(a)$ sukzessive äquivalent abgebaut werden, bis schließlich in einem Wirkungsbereich nur noch ein Ausdruck der Form

$$R \wedge T < a < S \wedge a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q)$$

steht. Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Wirkungsbereiche bleibt also zu betrachten

$$\mathrm{I}a\, R \wedge T < a < S \wedge a \equiv r \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \quad \bar{R} \wedge \bar{T} < a < \bar{S} \wedge a \equiv \bar{r} \cdot \mathbf{1} (\mathrm{mod}\, q) \vee \bar{H}(a).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß er konjunktiv mit $Q_1(\varrho_1, \varrho_2)$ oder mit $Q_2(\varrho_1, \varrho_2)$ verknüpft ist. Denn beim Auftreten von $Q_3(\varrho_1, \varrho_2)$ oder $Q_4(\varrho_1, \varrho_2)$ kann das obige Verfahren noch einmal angewandt werden. $\bar{H}(a)$ kann fehlen. Liegt eine Verknüpfung mit $Q_1(\varrho_1, \varrho_2)$ vor, so fügen wir im ersten

Wirkungsbereich $0 < 0 \wedge a = a$ alternativ an und können das Verkürzungsverfahren noch einmal anwenden. Tritt $Q_2(\varrho_1, \varrho_2)$ auf, so gilt:

$$\vdash Q_2(\varrho_1, \varrho_2) \wedge R \wedge T < a < S \wedge a \equiv r \cdot 1 (\mathrm{mod}\, q) \leftrightarrow Q_2(\varrho_1, \varrho_2) \wedge 0 < 0 \wedge a = a.$$

In beiden Fällen ist damit die Elimination von I auf den Fall zurückgeführt, daß in einem Wirkungsbereich nur noch $a = a$ auftritt. Dieser Fall ist aber im 3. Schritt behandelt. Damit ist das Eliminationsverfahren durchgeführt und der Vollständigkeitssatz bewiesen.

Das vollständige Axiomensystem $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$ ist (bei „Standardinterpretation" von I) wegen Axiom 13 auch kategorisch, denn durch dieses Axiom werden alle Modelle mit dem Ordnungstyp $(\omega^* + \omega)\,\tau$ mit $\tau \neq 1$ ausgeschlossen.[1]

Würde man die Betrachtungen auf abzählbar unendliche Modelle beschränken, so könnte an die Stelle des Axioms 13. der viel einfachere Ausdruck

$$\sim \mathsf{I}\, b\, b = b\, a < b < c$$

treten, den wir ja [vgl. Abschnitt λ) auf Seite 162] mit Hilfe von Axiom 13. ableiten konnten.

Wir zeigen, daß das unendliche System $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$ sogar (im strengen Sinne) unabhängig ist.

Zum Beweis der *Unabhängigkeit der Axiome* 1. *bis* 10. können die Modelle aus § 2 beibehalten werden. Bei den Beweisen für die Axiome 2., 5., 6., 7., 8. und 9. ist I folgendermaßen zu interpretieren[2]:

$\mathsf{I}\, x\, H_1(x)\, H_2(x)$ gilt genau dann, wenn M_1 und M_2 endlich sind und $M_1 \cong M_2$ oder wenn

M_1 und M_2 unendlich sind und beide Mengen nicht beschränkt sind.

Bei dieser wie auch bei den nachfolgenden Interpretationen von I bleibt in dem jeweils betrachteten Modell die Gültigkeit der im § 4 angegebenen Axiomenschemata erhalten und ebenfalls die Allgemeingültigkeitserblichkeit der dort genannten Schlußregeln.

Wir zeigen die *Unabhängigkeit von* $\mathsf{I}\, b\, b = b\, b < a$. Es wird das Standardmodell der ganzen Zahlen zugrunde gelegt und für I die folgende Interpretation gegeben:

$\mathsf{I}\, x\, H_1(x)\, H_2(x)$ gilt genau dann, wenn M_1 und M_2 endlich sind und $M_1 \cong M_2$ oder wenn M_1 und M_2 unendlich sind und beide Mengen nach oben beschränkt sind oder keine Menge nach oben beschränkt ist.

Zum Nachweis der *Unabhängigkeit von* $\mathsf{I}\, b\, b = b\, a < b$ wird I entsprechend interpretiert.

Die Unabhängigkeit von $\sim \mathsf{U}\, b\, a < b < c$.

Als Individuenbereich betrachten wir die Menge der geordneten Zahlenpaare $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots,$ deren erste Komponenten ganze Zahlen und deren zweite Komponenten rationale Zahlen sind, und definieren:

[1]) Vgl. K. Härtig, a. a. O., Abschnitt 3.

[2]) M_i ist dabei wieder die durch das Modell, eine Belegung und $H_i(x)$ definierte Menge. (Siehe § 4.)

$$(x_1, x_2) \dot{+} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(x_1, x_2) \dot{<} (y_1, y_2) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x_2 < y_2 & \text{oder} \\ x_2 = y_2 & \text{und} \quad x_1 < y_1 \end{cases}$$

$$\dot{0} =_{\mathrm{Df}} (0, 0), \quad \dot{1} =_{\mathrm{Df}} (1, 0).$$

I wird „standardinterpretiert".

In diesem Modell sind alle Axiome von $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$ bis auf $\sim \mathsf{U} b\, a < b < c$ erfüllt. Dieses Axiom erzwingt die Kategorizität, denn das angegebene Modell ist ein Nichtstandardmodell für eine Theorie, die durch die ersten zwölf Axiome von $\Sigma_g^{<}(\mathsf{I})$ axiomatisiert wird.

§ 6. Bemerkungen zu den Theorien $\mathfrak{T}_n(\mathsf{I})$ und $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$

Für die Theorie der natürlichen Zahlen $\mathfrak{T}_n(\mathsf{I})$ erhalten wir ein kategorisches, vollständiges und unabhängiges Axiomensystem einfach durch Hinzunahme des Ausdrucks

$$\sim \mathsf{U} b\, b < a^{1)}$$

zum System $\Sigma_n(\forall)$ aus § 3 (Seite 149) mit der dortigen Definition der $<$-Relation. ($\mathsf{I} b\, b = b\, a < b$ ist hier ableitbar.) Ganz anders liegen die Verhältnisse in der Theorie $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$. Auch hier ist, wie schon in $\mathfrak{T}_g(\forall)$, die $<$-Relation nicht definierbar, so daß uns so „starke" Axiome wie

$$\mathsf{I} b\, b = b\, a < b \qquad \mathsf{I} b\, b = b\, b < a \qquad \sim \mathsf{U} b\, a < b < c$$

nicht zur Verfügung stehen.

Die Theorie $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$ wird bereits vollständig durch $\Sigma_g(\forall)$ axiomatisiert. Es sind also keinerlei zusätzliche Axiome über I erforderlich, dagegen — im Unterschied zu $\mathfrak{T}_g^{<}(\mathsf{I})$ — zwei weitere Schlußregeln:

$$\text{(E)} \quad \begin{array}{c} \mathsf{I} x\, x = x \quad H_1(x) \\ \mathsf{I} x\, x = x \quad H_2(x) \\ \sim \mathsf{I} x\, x = x \sim H_1(x) \\ \hline \mathsf{I} x\, x = x\, H_1(x) \wedge H_2(x) \end{array} \qquad\qquad \text{(F)} \quad \begin{array}{c} \sim \mathsf{I} x\, x = x \quad H_1(x) \\ \sim \mathsf{I} x\, x = x \quad H_2(x) \\ \mathsf{I} x\, x = x \sim H_1(x) \\ \hline \sim \mathsf{I} x\, x = x\, H_1(x) \vee H_2(x) \end{array}$$

Da die im § 4 eingeführten Axiomenschemata (1), (2) und (3) in jedem Modell gelten und die Schlußregeln (A), (B), (C), (D), (E) und (F) allgemeingültigkeitserblich sind, hat die Theorie $\mathfrak{T}_g(\mathsf{I})$ genau die gleichen Modelle wie $\mathfrak{T}_g(\forall)$, und Nichtstandardmodelle von $\mathfrak{T}_g(\forall)$ sind ja — auch abgesehen von der bekannten allgemeinen SKOLEMschen Konstruktion — bekannt.[2])

(Eingegangen am 26. Juli 1965)

[1]) Ausgeschrieben: $\sim \exists c (c < a \wedge \mathsf{I} b\, b < a\, b < a \wedge b \neq c)$. Vgl. die Definition auf S. 154.

[2]) Vgl. Redaktionelle Bemerkung zu TH. SKOLEM, Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. Fund. Math. **23** (1934), 150—161.