

Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrique-logarithmiques sur leur cercle de convergence

par R. JUNGEN, Zurich

Introduction

Nous dirons dans la suite qu'un point singulier isolé d'une fonction analytique est algébrique-logarithmique, s'il a la même nature que les points singuliers des intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène de la classe de Fuchs. Plus précisément, la fonction $F(z)$ a au point c une singularité algébrique-logarithmique, si elle peut être représentée, dans un voisinage suffisamment petit de c , par une somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$(1) \quad (z - c)^{-s} [\log(z - c)]^k \varphi(z),$$

où s désigne une constante complexe quelconque, k un entier non négatif, et où $\varphi(z)$ est régulière en c , $\varphi(c) \neq 0$.

Soit

$$(2) \quad a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots = F(z)$$

une série entière, qui n'a qu'un nombre fini de points singuliers sur son cercle de convergence, ces points singuliers étant tous algébrique-logarithmiques au sens que nous venons de définir ci-dessus. L'objet du présent travail est la recherche de propriétés asymptotiques de la suite des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$.

On connaît depuis longtemps des développements asymptotiques du coefficient a_n : citons les travaux de M. O. Perron¹⁾, complétés plus tard par M. G. Faber¹⁾. Une partie de leurs résultats a été retrouvée récemment par M. S. Narumi¹⁾. Voyez aussi les recherches antérieures de M. et Mme P. et V. Dienes¹⁾. Bien que le développement de M. Perron nous suffise pour la suite, nous établirons, dans un premier chapitre (*théorème A*), un développement asymptotique très précis de a_n . Cette

¹⁾ O. Perron, Sitzungsber. München, 1913, 355—382. G. Faber, *ibid.*, 1917, 263—284. S. Narumi, The Tohoku math. Journ., 30, 1929, 185—201. P. et V. Dienes, cf. P. Dienes, Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, Paris 1913.

répétition est justifiée, car notre théorème A est une conséquence facile de la série classique de Stirling pour $\log \Gamma(s)$.

Théoriquement, l'allure asymptotique de a_n est ainsi connue. Pratiquement, il n'en est rien: les développements obtenus ne donnent pas toujours un aperçu bien clair de cette allure. L'étude d'un cas notamment présente des difficultés: c'est lorsqu'en un même point singulier c se trouvent plusieurs termes (1), ayant le même k et la même partie réelle de s , mais différant par la partie imaginaire de s . (Un exemple de ce cas sera discuté au chap. IV, n° 16.) Une étude plus approfondie de a_n ne sera donc pas superflue.

Dans le chapitre II, nous considérons le cas où il n'y a qu'un seul point singulier c sur le cercle de convergence de la série (2). Nous établissons d'abord un *théorème B* concernant l'ordre de grandeur de $|a_n|$, puis nous montrons que le rapport²⁾ a_n/a_{n+1} tend « en général » vers l'affixe du point singulier c (*théorème C*). Le lecteur trouvera les énoncés exacts de ces deux théorèmes, notamment le sens de l'expression « en général », au début du chapitre II.

Un troisième chapitre est consacré au cas général de notre problème, celui où il y a un nombre quelconque de singularités algébrico-logarithmiques sur le cercle de convergence de la série (2). Nous démontrons alors (*théorème D*) que l'on peut trouver trois entiers r, k, l ($r > 0$, $k \geq 0$, $l > 0$), deux nombres positifs A et B , et un nombre réel σ de sorte que

$$(3) \quad A n^{\sigma-r} (\log n)^k \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_{n-l}| \leq B n^{\sigma-1} (\log n)^k$$

pour n suffisamment grand. — Ce théorème est dû à M. G. Pólya, qui en a énoncé la partie principale en 1927³⁾. Des inégalités analogues à (3), se rapportant cependant à des singularités plus particulières, ont été trouvées par⁴⁾ MM. Ostrowski, Tsuji, Narumi et Shimizu. — Une conséquence immédiate du théorème D est la suivante: une série entière n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur son cercle de convergence n'est pas lacunaire, c'est-à-dire n'a pas de lacunes arbitrai-

²⁾ Sur la limite de ce rapport, cf. la 2^{me} éd. de l'ouvrage classique de J. Hadamard, *La série de Taylor* (par J. Hadamard et S. Mandelbrojt).

³⁾ G. Pólya, *Comptes rendus*, 184, 1927, 502—504.

⁴⁾ A. Ostrowski, *Jahresber. d. D. Math.-Ver.*, 35, 1926, 269—280. M. Tsuji, *Jap. Journ. of Math.*, 3, 1926, 69—85. S. Narumi, l. c. ¹⁾ T. Shimizu, *Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan*, (3) 11, 1929, 143—148. M. Shimizu affirme à tort, sans doute par suite d'une inadvertance, que ses résultats comprennent le théorème D de M. Pólya.

rement grandes. C'est M. Mandelbrojt⁵⁾ qui le premier a attiré l'attention sur des faits de ce genre.

Remarquons ici que la démonstration des théorèmes B-D devient presque triviale si l'on écarte le cas plus difficile dont nous avons parlé plus haut; d'autre part, les énoncés de ces théorèmes peuvent alors être considérablement précisés.

Le chapitre IV contient quelques applications du théorème B à la composition des séries «à la Hadamard». Nous y montrons aussi, sur un exemple, que les théorèmes B-D ne peuvent pas être précisés davantage sans que l'on porte atteinte à la généralité de leurs hypothèses.

Le dernier chapitre est consacré à un sujet légèrement différent; il est cependant rattaché au reste du travail par la définition même des singularités algébrique-logarithmiques. Nous y démontrons le *théorème E*⁶⁾ concernant la composition des séries à la Hadamard: Si chacune des séries entières

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad g(z) = \sum b_n z^n$$

est intégrale d'une équation différentielle de la classe de Fuchs, il en est de même de la série

$$h(z) = \sum a_n b_n z^n.$$

Puis nous donnons encore une généralisation de ce théorème.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma vive reconnaissance à mon cher maître, M. G. Pólya, pour tout l'intérêt qu'il m'a porté et pour sa direction et ses conseils très précieux.

I. Développement asymptotique du coefficient a_n de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z)^{-s} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

1. Pour obtenir le développement en série de Taylor de la fonction

$$(1-z)^{-s} = \sum a_n z^n, \quad (s \text{ entier} > 0)$$

il y a avantage à différentier $(s-1)$ fois la série géométrique. On trouve ainsi

⁵⁾ S. Mandelbrojt, Thèse, Annales Ec. Norm. sup., (3) 40, 1923, 413—462.

⁶⁾ La démonstration de ce théorème a été esquissée dans une Note des Comptes rendus, 189, 1929, 395—397.

$$a_n = \frac{1}{(s-1)!} (n+1)(n+2)\dots(n+s-1) \\ = \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)} \left[1 + \frac{s(s-1)}{2n} + \dots + \frac{\Gamma(s)}{n^{s-1}} \right].$$

Un développement analogue du n -ième coefficient d'une série de Taylor se présente dans des cas plus généraux. Nous établirons en effet au n° 2 le

Théorème A. Soient s un nombre complexe et k un entier positif ou nul; posons

$$(1) \quad (1-z)^{-s} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k = e^{s \log \frac{1}{1-z}} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k = \sum a_n z^n.$$

(Nous considérons la valeur principale du logarithme, de sorte que $a_k = 1$ sera le premier coefficient non nul.)

Lorsque $s \neq 0, -1, -2, \dots$, on a

$$(2) \quad a_n = \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)} [(\log n)^k \varphi_0(n) + (\log n)^{k-1} \varphi_1(n) + \dots + \varphi_k(n)],$$

où les fonctions φ sont développables en séries asymptotiques procédant suivant les puissances de $1/n$:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_0(n) \sim 1 + \frac{c_{01}}{n} + \frac{c_{02}}{n^2} + \dots \\ \varphi_1(n) \sim c_{10} + \frac{c_{11}}{n} + \frac{c_{12}}{n^2} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Dans le cas, écarté ci-dessus, où $s = 0, -1, -2, \dots$ et k est un entier positif (non nul), on a

$$(4) \quad a_n = (-1)^s k \Gamma(1-s) n^{s-1} [(\log n)^{k-1} \varphi_0(n) + (\log n)^{k-2} \varphi_1(n) \\ + \dots + \varphi_{k-1}(n)],$$

où les fonctions φ sont, comme plus haut, développables en séries asymptotiques de la forme (3).

Remarquons encore que le membre absolu du développement asymptotique de $\varphi_0(n)$ est 1; les autres coefficients dépendent de s et de k . Enfin, dans le cas trivial où $s = 0, -1, -2, \dots$ et $k = 0$, la fonction (1) se réduit à un polynôme, et $a_n = 0$ pour $n > -s$.

Ce théorème est une conséquence de la série de Stirling pour $\log \Gamma(s)$. Pour le démontrer, nous utiliserons quelques lemmes élémentaires concernant les séries asymptotiques⁷⁾, que nous nous bornons à énoncer ici:

Lemme 1. Si $\varphi(z)$ possède un développement asymptotique

$$(5) \quad \varphi(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

lorsque z tend vers l'infini en suivant une demi-droite d , et si s désigne une constante, on a aussi asymptotiquement

$$\varphi(z+s) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{-c_1 s + c_2}{z^2} + \dots$$

lorsque $z+s$ tend vers l'infini en suivant la même droite d .

Lemme 2. Si $\varphi(z)$ est développable uniformément en série asymptotique (5) dans la demi-bande

$$(6) \quad \Re z > a, \quad -b < \Im z < b, \quad (a, b, \text{const.} > 0)$$

$e^{\varphi(z)}$ l'est également:

$$e^{\varphi(z)} \sim e^{c_0} \left[1 + \frac{c_1}{z} + \dots \right].$$

Lemme 3. Si $\varphi(z)$ est une fonction analytique et développable uniformément en série asymptotique (5) dans la demi-bande (6), on a aussi

$$\varphi'(z) \sim -\frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \dots$$

dans toute demi-bande plus étroite

$$\Re z > a, \quad -b + \varepsilon < \Im z < b - \varepsilon. \quad (\varepsilon > 0)$$

(Pour le démontrer, il suffit d'estimer le « reste » à l'aide de la formule de Cauchy.)

⁷⁾ On trouvera la définition et les propriétés les plus simples de ces séries dans *K. Knopp, Theory and applications of infinite series*, London 1928, pp. 540—548.

2. Pour démontrer la première partie du théorème A, nous posons

$$\Gamma(s) (1-z)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{n!} z^n = \Phi_0(z).$$

En différentiant ν fois par rapport à s , nous obtenons :

$$(7) \quad (1-z)^{-s} \left[\Gamma(s) \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^{\nu} + \binom{\nu}{1} \Gamma'(s) \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^{\nu-1} + \dots + \Gamma^{(\nu)}(s) \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^{(\nu)}(s+n)}{n!} z^n = \Phi_{\nu}(z).$$

Donnons à ν successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., k ; nous aurons ainsi un système de $k+1$ équations linéaires, à coefficients indépendants de z , pour les fonctions

$$(1-z)^{-s}, (1-z)^{-s} \log \frac{1}{1-z}, \dots, (1-z)^{-s} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

En résolvant ce système de proche en proche par rapport à la dernière de ces fonctions, il vient :

$$(1-z)^{-s} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot [\Phi_k(z) + d_1 \Phi_{k-1}(z) + \dots + d_k \Phi_0(z)],$$

où les coefficients d ne dépendent que de s et de k . Développons maintenant les deux membres de cette identité en séries de Taylor; nous trouvons ainsi (cf. (1) et (7)) :

$$(8) \quad a_n = \frac{1}{n! \Gamma(s)} [\Gamma^{(k)}(s+n) + d_1 \Gamma^{(k-1)}(s+n) + \dots + d_k \Gamma(s+n)].$$

Il ne nous reste plus, pour démontrer (2), qu'à trouver le développement asymptotique de $\Gamma^{(k)}(s+n)/\Gamma(s+n)$, développement que nous déduirons de la formule bien connue de Stirling pour $\log \Gamma(s)$. En vertu du lemme 2, nous pouvons écrire cette formule de la manière suivante

$$(9) \quad \Gamma(z) = \left(\frac{z}{e} \right)^z \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est développable uniformément en série asymptotique dans toute demi-bande du type (6). En dérivant ν fois les deux membres de (9), on obtient par voie de récurrence

$$I^{(\nu)}(z) = \left(\frac{z}{e}\right)^z s^{-\frac{1}{2}} [(\log z)^\nu \varphi(z) + (\log z)^{\nu-1} \varphi_{\nu 1}(z) + \dots + \varphi_{\nu \nu}(z)],$$

où les fonctions φ , ainsi que les fonctions ψ qui se présenteront tout à l'heure, sont, en vertu des lemmes 3 et 1, développables en séries asymptotiques. On aura donc

$$\begin{aligned} \frac{I^{(\nu)}(n+s)}{I^{(\nu)}(n+1)} &= \left(\frac{n}{e}\right)^{s-1} \frac{(1+\frac{s}{n})^{n+s-\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\log(n+s))^\nu \varphi(n+s) + \dots + \varphi_{\nu \nu}(n+s)}{\varphi(n+1)} \\ &= n^{s-1} [(\log n)^\nu \psi(n) + (\log n)^{\nu-1} \psi_{\nu 1}(n) + \dots + \psi_{\nu \nu}(n)], \end{aligned}$$

où $\psi(n) \rightarrow 1$. Ceci nous permet enfin d'écrire (8) sous la forme

$$(2) \quad a_n = \frac{n^{s-1}}{I^{(s)}(s)} [(\log n)^k \varphi_0(n) + (\log n)^{k-1} \varphi_1(n) + \dots + \varphi_k(n)],$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ ayant les développements (3). Le théorème A est ainsi démontré dans le cas où $s \neq 0, -1, -2, \dots$.

On peut traiter le cas écarté jusqu'ici, où s est un pôle de $I(s)$, sans nouveaux calculs. En effet, en remarquant que

$$\left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k = k \int (1-z)^{-1} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{k-1} dz,$$

on voit que, pour $s=0$, le développement (4) se déduit de (2). Puis, pour les valeurs entières négatives de s , on établira le développement (4) par récurrence, en passant de $s+1$ à s , à l'aide de la relation plus générale

$$\begin{aligned} (1-z)^{-s} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k &= s \int (1-z)^{-(s+1)} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k dz \\ &\quad + k \int (1-z)^{-(s+1)} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{k-1} dz. \end{aligned}$$

Notons en terminant que la comparaison des deux dernières formules ci-dessus — la première n'est qu'un cas particulier de la seconde pour

$s=0$ — nous montre pourquoi $\log n$ ne se présente pas à la puissance k dans (4), mais seulement à la puissance $k-1$. Ajoutons encore que pour $s=0, -1, -2, \dots$, la fonction $\varphi_0(n)$ (cf. (4)) a un développement *convergent*; et même, pour $s=0$, on a $\varphi_0(n)=1$.

3. Nous n'utiliserons pas, dans la suite de ce travail, le théorème A sous sa forme générale; le terme principal des développements (2) et (4) nous suffira. *En posant (1) et en désignant par C_1 et C_2 des constantes non nulles, nous avons:*

$$(10) \quad a_n = C_1 n^{s-1} (\log n)^k \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right]$$

pour $s \neq 0, -1, -2, \dots$;

$$(10') \quad a_n = C_2 n^{s-1} (\log n)^{k-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right]$$

pour $s=0, -1, -2, \dots, k > 0$; et

$$(10'') \quad a_n = 0, \text{ si } n > -s$$

pour $s=0, -1, -2, \dots, k=0$.

Soit maintenant $\sigma = \Re s$, nous aurons encore pour la valeur absolue de a_n , respectivement:

$$(11) \quad |a_n| = |C_1| n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right],$$

$$(11') \quad |a_n| = |C_2| n^{\sigma-1} (\log n)^{k-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right],$$

$$(11'') \quad |a_n| = 0 \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

En substituant z/c à z dans (1), le lecteur établira aisément des relations analogues à (10) et à (11) dans le cas plus général où l'on aura posé

$$(z-c)^{-s} (\log(z-c))^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Pour simplifier le langage dans la suite, nous allons donner ici quelques définitions: Nous dirons que l'expression considérée dans l'introduction

$$(12) \quad (z-c)^{-s} (\log(z-c))^k \varphi(z)$$

(où $\varphi(z)$ est régulière en c , $\varphi(c) \neq 0$) est un *élément singulier* de la fonction $F(z)$ attaché au point c et du *type* (s, k) . Rappelons que d'après la définition d'un point singulier algébrique-logarithmique c , la fonction $F(z)$ peut être représentée au voisinage du point c par une somme finie d'éléments singuliers (12). Notons encore que si nous avons en c un élément singulier du type (s, k) , des éléments des types $(s-1, k)$, $(s-2, k)$, ... y sont superflus.

Nous appellerons *poids* $[\alpha, \beta]$ d'un élément singulier du type (s, k) un complexe de deux nombres réels, à savoir

$$\begin{array}{ll} [\sigma, k] & \text{si } s \neq 0, -1, -2, \dots; \quad (\sigma = \Re s) \\ [s, k-1] & \text{si } s = 0, -1, -2, \dots, k > 0; \\ [-\infty, 0] & \text{si } s = 0, -1, -2, \dots, k = 0. \end{array}$$

(Ainsi défini, le poids de l'expression (1) caractérise entièrement la croissance (11) du module des coefficients a_n .)

Nous ordonnons les poids des éléments singuliers comme suit: le poids $[\alpha, \beta]$ sera dit plus « lourd » que $[\alpha', \beta']$, si $\alpha > \alpha'$, ou bien si $\alpha = \alpha'$, $\beta > \beta'$.

Nous appellerons *poids*⁸⁾ du point singulier c de $F(z)$, le poids de l'élément singulier le plus lourd attaché à ce point-là. Enfin, nous ordonnons les poids des points singuliers de la même manière que les poids des éléments singuliers.

II. Un seul point singulier algébrique-logarithmique de plus grand poids sur le cercle de convergence d'une série entière.

4. Les résultats que nous avons obtenus dans le chapitre précédent vont nous permettre de généraliser le théorème suivant bien connu:

⁸⁾ Remarquons que la première composante du poids n'est autre chose que le degré d'infinitude de Hadamard: Le degré d'infinitude en un point singulier c sur le cercle de convergence d'une série de Taylor est la borne inférieure des nombres ν tels que

$$\lim_{z \rightarrow c} (z-c)^\nu F(z) = 0,$$

z tendant vers c le long d'une courbe non tangente au cercle de convergence et située à son intérieur.

Soit

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

un élément de fonction analytique $F(z)$ ayant comme seule singularité sur son cercle de convergence un pôle d'ordre s au point c . Plus généralement, prenons le cas où la série (1) n'a sur son cercle de convergence qu'un nombre fini de points singuliers

$$(2) \quad c_1 = c, c_2, c_3, \dots, c_p$$

qui sont des pôles, l'ordre s de c étant supérieur à l'ordre des autres pôles c_2, c_3, \dots, c_p . On démontre alors que⁹⁾

$$(3) \quad a_n = \frac{A n^{s-1}}{c^n} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \quad (A \neq 0, \text{ const.})$$

Cette formule nous montre que la partie principale du coefficient a_n est $A n^{s-1} c^{-n}$. De ce fait fondamental résulte immédiatement le

Théorème. *Sous les hypothèses qui précèdent, le rapport a_n/a_{n+1} tend vers c , lorsque n tend vers l'infini.*

C'est ce théorème-là que nous allons étendre aux singularités algébro-logarithmiques. Considérons d'abord un cas où la généralisation est particulièrement aisée. Nous démontrerons (n° 5) le

Théorème 1¹⁰⁾. *Si la série (1) n'a sur son cercle de convergence que des points singuliers algébro-logarithmiques (2), le poids $[\sigma, k]$ de c surpassant celui des autres points c_2, c_3, \dots, c_p ; si de plus il n'existe en c qu'un seul élément singulier*

$$(4) \quad (z - c)^{-s} (\log(z - c))^{k*} [b_0 + b_1(z - c) + \dots] \\ (\Re(s) = \sigma, k^* = k \text{ ou } k + 1)$$

de ce plus grand poids $[\sigma, k]$, on a (cf. (3))

$$(5) \quad a_n = \frac{A n^{s-1} (\log n)^k}{c^n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right]. \quad (A \neq 0, \text{ const.})$$

⁹⁾ Cf. p. ex. *G. Darboux*, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, *Journal de Math.*, (3) 4, 1878, pp. 14 et suivantes.

¹⁰⁾ Ce théorème comprend les résultats analogues de M. Narumi, l.c. 1).

Ce théorème est une conséquence immédiate des résultats du chapitre précédent. Comme plus haut, on en déduit sans autres le

Théorème 2. *Sous les mêmes hypothèses, le rapport a_n/a_{n+1} tend vers c , lorsque n tend vers l'infini.*

Passons au cas général: nous ne supposons donc plus qu'il n'y a qu'un seul élément de plus grand poids au point c . Le théorème 1 ci-dessus doit être alors remplacé par le suivant:

Théorème B. *Si la série (1) n'a sur son cercle de convergence que des points algébrico-logarithmiques (2), le poids $[\sigma, k]$ de c surpassant celui des autres points c_2, \dots, c_p , l'inégalité*

$$(6) \quad |a_n| > \frac{\varepsilon(n) n^{\sigma-1} (\log n)^k}{|c|^n}$$

(où $\varepsilon(n)$ est une fonction positive donnée de n , assujettie à la seule condition de tendre vers zéro avec $1/n$, est vérifiée pour tous les indices n , excepté peut-être pour une suite de densité nulle¹¹).

Pour établir ce théorème, nous nous baserons sur les résultats du chapitre précédent, ainsi que sur quelques propositions élémentaires concernant les fonctions analytiques. Une méthode identique nous permettra enfin de démontrer le théorème suivant, qui ne résulte plus maintenant, comme nous aurions pu l'espérer par analogie avec les cas plus simples, de l'inégalité (6) ci-dessus.

Théorème C. *Sous les hypothèses du théorème B, il existe une suite infinie d'entiers*

$$(7) \quad 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_\nu < \dots$$

de densité 1 (c'est-à-dire que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu/n_\nu = 1$), telle que

$$(8) \quad \lim a_n/a_{n+1} = c,$$

lorsque n tend vers l'infini en parcourant la suite (7) ci-dessus.

¹¹) On appelle densité de la suite des indices $n_1, n_2, \dots, n_\nu, \dots$ la limite du rapport ν/n_ν , si celle-ci existe. Par extension, nous dirons aussi que c'est la densité de la suite des coefficients $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_\nu}, \dots$. De même, on appelle densité inférieure et densité supérieure la limite inférieure et la limite supérieure du rapport ν/n_ν , lorsque $\nu \rightarrow \infty$.

5. Pour démontrer le théorème 1, nous décomposerons la fonction $F(z)$ représentée par la série (1) en deux fonctions

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1(z) + F_2(z) \\ \text{ou} \quad \sum a_n z^n &= \sum a'_n z^n + \sum a''_n z^n, \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on ait

$$(9) \quad a'_n = \frac{A n^{\sigma-1} (\log n)^k}{c^n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right] \text{ et } a''_n = O\left(\frac{n^{\sigma-1} (\log n)^{k-1}}{|c|^n}\right),$$

ce qui suffit pour la démonstration.

Au voisinage de chaque point singulier c_γ , la fonction $F(z)$ peut être représentée comme une somme finie d'éléments singuliers

$$F(z) = \sum_{(t, q)} (z - c_\gamma)^{-t} (\log(z - c_\gamma))^q [b_{\gamma, tq}^{(0)} + b_{\gamma, tq}^{(1)} (z - c_\gamma) + \dots].$$

Posons alors pour la fonction $F_1(z)$

$$\sum a'_n z^n = \sum_{(\gamma)} \sum_{(t, q)} (z - c_\gamma)^{-t} (\log(z - c_\gamma))^q [b_{\gamma, tq}^{(0)} + \dots + b_{\gamma, tq}^{(m)} (z - c_\gamma)^m],$$

$$\text{où }^{13)} m = \max([\sigma], 2)$$

la somme double étant prise sur tous les éléments singuliers de tous les points c, c_2, \dots, c_p .

$F_1(z)$ est la somme d'un nombre fini de fonctions du type traité au chapitre I, d'où il résulte la première des équations (9), ayant égard à l'hypothèse que nous n'avons qu'un seul élément singulier de plus grand poids, l'élément (4). — Pour vérifier la seconde¹³⁾, nous distinguerons deux cas: Supposons d'abord $\sigma > 1$. La fonction $F_2(z)$ est régulière à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1); sur le cercle lui-même, elle n'a qu'un nombre fini de singularités (c, c_2, \dots, c_p) où elle est cependant bornée. Nous en concluons¹⁴⁾ d'après une inégalité de Cauchy, que $a''_n c^n = o(1)$ et a fortiori $a''_n = O(n^{\sigma-1} (\log n)^{k-1} |c|^{-n})$. — Soit maintenant $\sigma \leq 1$. Non seulement la fonction $F_2(z)$ est régulière à l'intérieur et bornée sur le cercle $|z| = |c|$, mais encore ses — $[\sigma - 2]$

¹²⁾ On entend par $[x]$ le plus grand nombre entier qui n'est pas supérieur à x .

¹³⁾ La simple remarque sur laquelle se base la démonstration suivante permet d'éviter les longs calculs de MM. Tsuji (l.c.⁴⁾) et Narumi (l.c.¹⁾).

¹⁴⁾ Cf. p. ex. *Ed. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1916, pp. 7—8.

premières dérivées. Nous en concluons semblablement que $\alpha_n'' c^n n^{-[\sigma-2]} = o(1)$, c'est-à-dire que $\alpha_n'' = o(n^{[\sigma-2]} |c|^{-n}) = O(n^{\sigma-1} (\log n)^{k-1} |c|^{-n})$. La seconde des conditions (9) est ainsi vérifiée dans chaque cas, et notre théorème est démontré.

6. Pour démontrer les théorèmes B et C, nous établirons d'abord quelques lemmes concernant les fonctions analytiques.

Lemme 4¹⁵⁾. Soient $f_1(z), f_2(z), \dots, f_r(z)$ des fonctions régulières et uniformes dans le domaine connexe et fermé D ; u_1, u_2, \dots, u_r des constantes. Si la fonction

$$(10) \quad u_1 f_1(z) + u_2 f_2(z) + \dots + u_r f_r(z)$$

n'est pas identiquement nulle, le nombre de ses zéros dans le domaine D est inférieur à une certaine borne. Celle-ci dépend des fonctions $f_1(z), f_2(z), \dots, f_r(z)$ et du domaine D , mais non pas des constantes u_1, u_2, \dots, u_r .

Pour le démontrer, nous admettrons que les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ sont linéairement indépendantes et que $|u_1|^2 + \dots + |u_r|^2 = 1$. Ceci ne restreint nullement la portée du lemme. Le point $U = (u_1, \dots, u_r)$ variera sur une sphère de $2r$ dimensions. — Soit $N(U)$ le nombre des zéros de la fonction $f(z; U) = u_1 f_1(z) + \dots + u_r f_r(z)$ dans le domaine D . Si $N(U)$ n'était pas borné, il existerait une suite $U_1, U_2, \dots, U_\nu, \dots$ telle que $N(U_\nu)$ tende vers l'infini avec ν et que U_ν tende vers un point U_0 de la sphère. (Il appert que c'est la notion de la famille normale qui joue ici, ainsi que dans la démonstration des deux lemmes suivants, un rôle essentiel.)

Comme $f(z; U_0)$ n'est pas identiquement nulle (les fonctions $f_i(z)$ sont linéairement indépendantes par hypothèse) et que D est fermé, il existe un domaine D^* , fermé lui aussi, qui contient D à son intérieur, et dans lequel $f(z; U_0)$ est régulière et a autant de zéros que dans D . $f(z; U_\nu)$ tendant uniformément vers $f(z; U_0)$, on a

$$\lim_{\nu=\infty} \oint \frac{f'(z; U_\nu)}{f(z; U_\nu)} dz = \oint \frac{f'(z; U_0)}{f(z; U_0)} dz,$$

¹⁵⁾ Problème posé par G. Pólya, Jahresber. d. D. Math.-Ver., 34, 1925, 97. Notre démonstration, parue dans le même journal, 40, 1931, 6, a été traduite ici en français.

où le contour d'intégration est le bord du domaine D^* . Il suit de cette égalité que $N(U_\nu) \leq N(U_0)$ pour des valeurs de ν suffisamment grandes. $N(U)$ est donc borné, c. q. f. d.

Lemme 5¹⁶⁾. Soit D un domaine connexe fermé et borné du plan de Gauss; Ω un domaine fermé et borné de l'espace des U ; $f(z; U)$ une fonction régulière et uniforme de z et uniformément continue de U pour les valeurs de $z \in D$ et de $U \in \Omega$. (Par continuité uniforme, nous entendons ici qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta(\varepsilon) > 0$ indépendant de z , tel que $|f(z; U_1) - f(z; U_2)| < \varepsilon$ dès que $|U_1 - U_2| < \delta(\varepsilon)$ et pour tout $z \in D$.) Supposons de plus que le nombre des zéros de $f(z; U)$ situés dans D est borné (c'est-à-dire inférieur à un nombre N indépendant de U). Alors, à chaque $d > 0$ correspond un $\lambda > 0$ indépendant de U [$\lambda = \lambda(d) = \lambda(d, D, \Omega, f)$], tel que

$$(11) \quad |f(z; U)| \geq \lambda(d) \quad (U \text{ quelconque, mais fixe dans } \Omega)$$

pour tout z de D dont la distance à un zéro de $f(z; U)$ ou au contour de D n'est pas inférieure à d .

Pour le démontrer, nous considérons une valeur fixe positive de d . Soit $D(d, U)$ l'ensemble des points z de D dont la distance à un zéro de $f(z; U)$ ou au contour de D n'est pas inférieure à d . Désignons encore par $\lambda(d, U)$ le minimum de $|f(z; U)|$ lorsque z varie dans $D(d, U)$. Nous devons montrer que

$$(12) \quad \text{borne inf. de } \lambda(d, U) = \lambda(d) > 0. \\ (U \text{ dans } \Omega)$$

Supposons par impossible que cette borne soit nulle. Il existe alors une suite $U_1, U_2, \dots, U_\nu, \dots$ telle que $\lambda(d, U_\nu)$ tende vers zéro avec $1/\nu$ et que U_ν tende vers un point U_0 de Ω . Comme $f(z; U_0)$ n'est pas identiquement nulle, il existe un Δ , $0 < \Delta \leq d/2$, tel que les cercles de rayon Δ décrits autour des zéros de $f(z; U_0)$ comme centres ne se coupent pas. Soit D^* l'ensemble des points z de D non situés à l'intérieur de ces cercles, et λ^* le minimum de $|f(z; U_0)|$ lorsque z varie dans D^* . Ce minimum existe et est positif, car le domaine D^* est fermé.

¹⁶⁾ Ce lemme et sa démonstration ont été esquissés par Ch. E. Wilder, Trans. Am. Math. Soc., 18, 1917, 422. En voici un énoncé et une démonstration complets.

Par suite de nos hypothèses, et parce que U_ν tend vers U_0 , la fonction $f(z; U_\nu)$ tend uniformément vers $f(z; U_0)$. On aura donc pour des valeurs de ν suffisamment grandes

$$|f(z; U_\nu) - f(z; U_0)| < \frac{\lambda^*}{2} \quad \text{pour } z \in D,$$

et, par suite

$$(13) \quad |f(z; U_\nu)| > \frac{\lambda^*}{2} \quad \text{pour } z \in D^*.$$

Le théorème de Rouché permet alors de conclure que la fonction $f(z; U_\nu)$ a autant de zéros que $f(z; U_0)$ dans chaque cercle Δ qui n'empiète pas le bord du domaine D , c'est-à-dire au moins un. On en déduit que

$$D(d, U_\nu) \subset D(2\Delta, U_\nu) \subset D^*,$$

ce qui montre que l'inégalité (13) a lieu a fortiori pour les valeurs de z comprises dans le domaine $D(d, U_\nu)$. Nous avons donc établi que $\lambda(D, U_\nu) > \frac{\lambda^*}{2} > 0$ pour des valeurs de ν suffisamment grandes: notre lemme est démontré.

Lemme 6. *Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent, on peut faire correspondre à chaque $\lambda > 0$ un $d \geq 0$ indépendant de U [$d = d(\lambda) = d(\lambda, D, \Omega, f)$], tel que*

$$(14) \quad \lim_{\lambda=0} d(\lambda) = 0$$

et que

$$|f(z; U)| \geq \lambda \quad \text{pour tout } z \in D,$$

excepté peut-être pour ceux dont la distance à un zéro de $f(z; U)$ ou au contour de D est inférieure à d .

C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. Soit en effet $d_1, d_2, \dots, d_\nu, \dots$ une suite infinie décroissant monotonement vers zéro, p. ex. $d_\nu = 1/\nu$. D'après le lemme précédent, nous voyons qu'on peut faire correspondre à chaque d_ν un λ_ν positif, $\lambda_\nu = \lambda(d_\nu)$, de sorte que (11) soit vérifiée pour chaque d_ν et que la suite des λ_ν soit elle aussi

monotonement décroissante. — Nous pouvons alors inversement faire correspondre à tout λ , $\lambda_{\nu+1} < \lambda \leq \lambda_\nu$, un $d = d(\lambda) = d_\nu$. Cette fonction $d(\lambda)$ possède, par sa construction même, toutes les propriétés énumérées dans l'énoncé du lemme qui nous occupe. Celui-ci est donc démontré. — Remarque: Il peut arriver que $d(\lambda) = 0$ avant que λ lui-même ne soit nul. Cela voudrait dire que $f(z; U)$ n'a jamais de zéro dans le domaine D . Dans ce cas notre lemme est trivial.

7. Nous sommes en mesure, maintenant, de démontrer le théorème B. Pour simplifier l'écriture, nous supposons dorénavant que le rayon de convergence de la série (1) est égal à 1, et que le point singulier de plus grand poids est le point $c = 1$. Dans le cas général qui nous occupe, il y a en ce point r éléments singuliers du plus grand poids $[\sigma, k]$:

$$(z-1)^{-s_\rho} [\log(z-1)]^k \cdot [b_0^{(\rho)} + b_1^{(\rho)}(z-1) + \dots] \quad (\rho = 1, 2, \dots, r) \\ (s_\rho = \sigma + i\alpha_\rho).$$

(Au cas où $\sigma = 0, -1, -2, \dots$, il peut aussi se présenter un élément singulier du type $(\sigma, k+1)$.) Comme plus haut au n° 5, on verrait ici que le coefficient a_n de la série (1) est

$$(15) \quad a_n = A_1 n^{s_1-1} (\log n)^k + \dots + A_r n^{s_r-1} (\log n)^k + O(n^{\sigma-1} (\log n)^{k-1}) \\ = n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[A_1 e^{\alpha_1 \log n} + \dots + A_r e^{i\alpha_r \log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right],$$

où les A_ρ sont des constantes non nulles, et les α_ρ des quantités réelles différentes les unes des autres.

Il est clair que nous devons reporter d'abord notre attention sur la fonction

$$(16) \quad f(z) \equiv A_1 e^{i\alpha_1 z} + \dots + A_r e^{i\alpha_r z}$$

pour les valeurs de la variable

$$(17) \quad z_1 = \log 1, z_2 = \log 2, \dots, z_n = \log n, \dots$$

Considérons dans le plan de la variable $z = x + iy$ les carrés dont les centres sont les points $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2\nu-1}{2}, \dots$, et dont les côtés, de longueur $1 + \varepsilon$ (ε fixe > 0), sont respectivement parallèles aux axes des x et des y . Nous allons étudier la fonction $f(z)$ définie par (16)

dans chacun de ces carrés. Remarquons d'abord que nous pouvons remplacer l'étude de la fonction $f(z)$ dans le ν -ième carré par celle de la fonction

$$(18) \quad f(z + \nu - 1) \equiv A_1 e^{i(\nu-1)\alpha_1} e^{i\alpha_1 z} + \dots + A_r e^{i(\nu-1)\alpha_r} e^{i\alpha_r z}$$

dans le premier carré, car $f(z + \nu - 1)$ prend dans le premier carré les mêmes valeurs que prend $f(z)$ dans le ν -ième. La fonction (18) est un cas particulier de la suivante

$$(19) \quad f(z; U) \equiv A_1 e^{iu_1} e^{i\alpha_1 z} + \dots + A_r e^{iu_r} e^{i\alpha_r z} \\ \text{où } 0 \leq u_1 \leq 2\pi, \dots, 0 \leq u_r \leq 2\pi; U = (u_1, \dots, u_r).$$

Comme les fonctions $\exp(i\alpha_p z)$ sont linéairement indépendantes, et que les constantes A_p ne sont pas nulles, nous pouvons appliquer le lemme 4 à la fonction (19) et affirmer: Il existe un nombre N , tel qu'aucune des fonctions $f(z; U)$ n'ait plus de N zéros dans le premier de nos carrés; en particulier: *il existe un nombre N , tel que la fonction $f(z)$ n'ait plus de N zéros dans aucun de nos carrés.*

Il s'ensuit immédiatement que la fonction $f(z; U)$ remplit toutes les conditions énumérées dans les hypothèses du lemme 6; Ω est un cube fermé de n dimensions. Nous en concluons que:

A chaque $\lambda > 0$ correspond un $d \geq 0$, tel que

$$\lim_{\lambda=0} d(\lambda) = 0$$

et que $|f(z; U)| \geq \lambda$ pour tous les z du 1^{er} carré, excepté peut-être pour ceux dont la distance à un zéro de $f(z; U)$ ou au contour du carré est inférieure à d . Ce résultat peut de nouveau être interprété comme résultat concernant la fonction $f(z)$. Nous nous passons de le formuler ici. En ne considérant maintenant plus que des valeurs réelles de z , nous pourrions finalement énoncer le fait suivant:

Considérons sur l'axe des x positifs les segments $0 \dots 1, 1 \dots 2, 2 \dots 3, \dots$, le ν -ième segment allant de $\nu - 1$ à ν . A chaque $\lambda > 0$ correspond un $d = d(\lambda) \geq 0$ tel que

$$\lim_{\lambda=0} d(\lambda) = 0$$

et que

$$(20) \quad |f(z)| \geq \lambda$$

pour tout z de l'axe des x positifs, excepté peut-être dans certains intervalles: sur chacun des segments définis ci-dessus, il y a au maximum N de ces intervalles d'exception, dont la longueur totale ne surpasse pas $2Nd(\lambda)$. [L'entier N ne dépend pas de λ !]

8. Après avoir appliqué les trois lemmes du n° 6 à la fonction $f(z)$, nous pouvons reprendre l'étude de cette fonction pour les valeurs particulières de la variable

$$(17) \quad z_1 = \log 1, \quad z_2 = \log 2, \quad \dots, \quad z_n = \log n, \quad \dots$$

A cet effet, marquons sur l'axe des x positifs tous ces points $z_n = \log n$. Dans le ν -ième segment qui va de $\nu - 1$ à ν , il y a $[e^\nu] - [e^{\nu-1}]$ de ces points. Dans ce même segment, la distance de deux points z_n consécutifs est toujours supérieure à $\log(1 + e^{-\nu})$. Ceci permet d'estimer le nombre des points z_n du ν -ième segment, pour lesquels nous ne pouvons pas affirmer que (20) ait lieu. Ce nombre est certainement inférieur à

$$\frac{2Nd(\lambda)}{\log(1 + e^{-\nu})} + N.$$

Nous voyons ensuite que le nombre des points z_n des ν premiers segments, pour lesquels (20) n'a pas lieu est inférieur à

$$2Nd(\lambda) \left[\frac{1}{\log(1 + e^{-\nu})} + \frac{1}{\log(1 + e^{-\nu+1})} + \dots \right] + \nu N \sim 2Nd(\lambda) \cdot \frac{e^{\nu+1}}{e - 1}.$$

A l'aide d'un calcul facile, on en tire la conclusion suivante: *La densité supérieure (cf. note¹¹)) des indices n , pour lesquels $|f(z_n)| < \lambda$, est inférieure à $10Nd(\lambda)$; on a de plus*

$$\lim_{\lambda=0} 10Nd(\lambda) = 10N \lim_{\lambda=0} d(\lambda) = 0. \quad -$$

Soit maintenant $\eta(n)$ une fonction positive quelconque de n , tendant vers zéro avec $1/n$. On a

$$|f(z_n)| \geq \eta(n)$$

pour tous les indices n , excepté peut-être pour une suite de densité nulle. En effet, soit λ^ une quantité positive fixe aussi petite qu'on le voudra. Pour des valeurs de n suffisamment grandes, on aura $\eta(n) < \lambda^*$. La*

densité supérieure des indices d'exception est donc inférieure à $10Nd(\lambda^*)$. Or, puisque $10Nd(\lambda)$ tend vers zéro avec λ , on montrera que cette densité supérieure est arbitrairement petite, en choisissant λ^* suffisamment petit. Notre proposition est ainsi démontrée.

Désignons enfin par $\varepsilon(n)$ une autre fonction positive quelconque de n , tendant vers zéro avec $1/n$, et posons

$$\eta(n) = \varepsilon(n) + \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Pour tous les indices n suffisamment grands et tels que l'inégalité

$$|f(z_n)| \geq \varepsilon(n) + \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$

ou

$$|f(z_n)| - \frac{1}{\sqrt{\log n}} \geq \varepsilon(n)$$

soit vérifiée, on a aussi

$$\left| f(z_n) + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right| \geq \varepsilon(n).$$

Cette dernière inégalité a donc lieu pour tous les indices n , excepté peut-être pour une suite de densité nulle. En rapprochant maintenant les formules (15), (16) et (17) avec ce dernier résultat, on voit que

$$|a_n| \geq \varepsilon(n) n^{\sigma-1} (\log n)^k$$

pour tous les indices n , excepté peut-être pour une suite de densité nulle. Le théorème B est ainsi démontré.

9. Il est aisé, à l'aide des résultats précédents, de démontrer encore le théorème C. Nous ne considérerons dans la suite que ceux des indices n

$$(21) \quad n_1, n_2, n_3, \dots$$

pour lesquels

$$(22) \quad |f(z_n)| \geq \frac{1}{\sqrt{\log n}} \quad \text{et} \quad |f(z_{n+1})| \geq \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

En vertu de nos résultats précédents, la densité des indices n ainsi écartés est nulle. En nous souvenant que

$$a_n = n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[f(z_n) + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right],$$

nous voyons donc que le théorème C sera établi, si nous montrons que

$$(23) \quad \lim \frac{f(z_n) + O\left(\frac{1}{\log n}\right)}{f(z_{n+1}) + O\left(\frac{1}{\log n}\right)} = 1$$

lorsque n tend vers l'infini en parcourant la suite (21). — Les conditions (22) nous permettent tout d'abord d'affirmer que cette limite (23) sera, si elle existe, égale à

$$\lim \frac{f(z_n)}{f(z_{n+1})},$$

où n est toujours soumis aux mêmes restrictions. Or, nous avons

$$z_{n+1} - z_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

et d'autre part, il existe un nombre M (d'ailleurs indépendant de n) tel que

$$|f'(z)| \leq M \quad \text{pour } z_n \leq z \leq z_{n+1}.$$

Il s'ensuit que

$$|f(z_{n+1}) - f(z_n)| \leq M \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ou que (cf. (22))

$$f(z_{n+1}) = f(z_n) + o(|f(z_n)|).$$

La limite du rapport $f(z_n)/f(z_{n+1})$ est donc bien égale à l'unité, et par là-même, la formule (23) est établie. Le théorème C est ainsi entièrement démontré. — Nous remarquons encore après coup, que la seconde des conditions (22) était superflue.

III. Points singuliers algébrico-logarithmiques sur le cercle de convergence d'une série entière; cas général.

10. Le chapitre précédent était consacré à l'étude des coefficients d'une série de Taylor qui n'avait qu'un seul point singulier algébrico-logarithmique de plus grand poids sur son cercle de convergence. Nous allons maintenant laisser tomber cette restriction. — Prenons d'abord le cas des pôles. Soit

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

une série entière représentant une fonction $F(z)$: supposons que cette série converge dans le cercle $|z| = 1$ et n'a, sur ce cercle, qu'un nombre fini de points singuliers

$$(2) \quad c_1 = c, c_2, \dots, c_p$$

qui sont des pôles, l'ordre s de l d'entre eux, c_1, c_2, \dots, c_l , étant supérieur à celui des autres c_{l+1}, \dots, c_p . On démontre alors que pour des valeurs de n suffisamment grandes, on a

$$(3) \quad A n^{s-1} \leq |a_n| + |a_{n-2}| + \dots + |a_{n-l}| \leq B n^{s-1}. \quad (A, B, \text{const.} \neq 0).$$

Deux des méthodes qui conduisent à ce résultat sont particulièrement simples: La première¹⁷⁾ se base sur une expression approchée du coefficient a_n

$$a_n = (A_1 c_1^{-n} + A_2 c_2^{-n} + \dots + A_l c_l^{-n}) n^{s-1} + O(n^{s-2}),$$

à l'aide de laquelle on montre directement que la double inégalité (3) doit avoir lieu. — La seconde méthode¹⁸⁾ procède comme suit: On construit une fonction $F^*(z) = \sum a_n^* z^n$ qui dépend d'une manière simple de $F(z)$ et qui n'a qu'un seul pôle de plus grand ordre sur le cercle de convergence $|z| = 1$. La question à résoudre est alors ramenée à un problème connu: ce que nous savons sur les coefficients a_n^* nous renseignera aussi sur les coefficients a_n . Cette seconde méthode a un grand avantage sur la première: il est beaucoup plus facile de l'étendre à d'autres singularités. Elle permet par exemple de démontrer aisément le

¹⁷⁾ Cf. A. Ostrowski, l. c. ⁴⁾, pp. 269—270; dans le cas des singularités algébriques, M. Tsuji, l. c. ⁴⁾, pp. 70—71.

¹⁸⁾ Cf. G. Pólya, Crelles Journal, 151, 1921, 24—25.

Théorème 3¹⁹⁾. Si la série (1) n'a sur son cercle de convergence $|z| = 1$ que des points singuliers algébrico-logarithmiques (2), dont l du plus grand poids $[\sigma, k]$, si de plus un de ces l points singuliers de plus grand poids ne possède qu'un seul élément singulier de ce plus grand poids $[\sigma, k]$, on a

$$A n^{\sigma-1} (\log n)^k \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_{n-l}| \leq B n^{\sigma-1} (\log n)^k \quad (A, B, \text{const.} \neq 0)$$

pour toutes les valeurs de n suffisamment grandes.

La démonstration de ce théorème (n° 11) permettra de reconnaître clairement l'idée de la méthode de M. Pólya. La même idée nous guidera ensuite lorsque nous établirons le théorème général suivant:

Théorème D. Si la série (1) est régulière pour $|z| < 1$ et n'a que des singularités algébrico-logarithmiques (2) (en nombre fini) sur le cercle $|z| = 1$, il existe trois entiers r, k, l ($r > 0, k \geq 0, l > 0$), deux nombres positifs A et B , et un nombre réel σ , tels que l'on ait, pour des valeurs de n suffisamment grandes:

$$A n^{\sigma-r} (\log n)^k \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_{n-l}| \leq B n^{\sigma-1} (\log n)^k.$$

Le lecteur reconnaîtra dans la démonstration de ce théorème (n°s 12 et 13) de quelle manière les constantes r, k, l, A, B et σ dépendent des singularités algébrico-logarithmiques (2). Remarquons toutefois déjà ici que $[\sigma, k]$ est le poids de la ou des plus lourdes singularités (2), et que r désigne le nombre des éléments singuliers de plus grand poids qui se trouvent en l'un de ces points de poids maximum.

II. Démonstration du théorème 3. Désignons par $c_1 = c, c_2, \dots, c_l$ les points singuliers du plus grand poids $[\sigma, k]$, c étant celui d'entre eux qui n'a qu'un seul élément de plus grand poids. Alors la fonction

$$(4) \quad F^*(z) = \sum a_n^* z^n = \prod_{\gamma=2}^l (z - c_\gamma) \cdot F(z) = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{l-1} z^{l-1}) \cdot F(z)$$

n'a plus qu'un seul point singulier de plus grand poids sur le cercle $|z| = 1$, le point c , et en ce point qu'un seul élément singulier de plus grand poids, à savoir du poids $[\sigma, k]$. On a alors d'après le théorème 1:

¹⁹⁾ Ce théorème comprend les résultats analogues de MM. Tsuji (l. c. 4)) et Narumi (l. c. 1)).

$$|a_n^*| = \text{Const. } n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right].$$

Mais d'autre part, la relation (4) entre les fonctions $F(z)$ et $F^*(z)$ nous donne

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \sum_{\nu=0}^{l-1} b_\nu a_{n-\nu} \right| \\ &\leq \max(|b_0|, |b_1|, \dots, |b_{l-1}|) \cdot \sum_{\nu=0}^{l-1} |a_{n-\nu}| = M \cdot \sum_{\nu=0}^{l-1} |a_{n-\nu}|, \quad (M \neq 0) \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^{l-1} |a_{n-\nu}| \geq M^{-1} \cdot |a_n^*| = A n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right].$$

En procédant comme au n° 5, on voit qu'évidemment on a aussi

$$(6) \quad |a_n| = O(n^{\sigma-1} (\log n)^k).$$

Les inégalités (5) et (6) démontrent le théorème.

12. Abordons maintenant la *démonstration du théorème général D*. Nous procéderons en principe comme au n° précédent: nous chercherons à construire une fonction $F^*(z) = \sum a_n^* z^n$ qui dépende d'une manière simple de $F(z)$ et qui n'ait qu'un seul élément singulier de plus grand poids sur le cercle $|z| = 1$. Puis, ce que nous en déduirons pour les coefficients a_n^* nous donnera aussi des renseignements sur les coefficients a_n .

Dans le n° précédent, nous avons obtenu $F^*(z)$ en multipliant $F(z)$ par un polynôme convenablement choisi. Ce procédé devient insuffisant dans le cas général: il permet bien de construire une nouvelle fonction qui n'aura plus qu'un seul point singulier c de plus grand poids sur le cercle $|z| = 1$; mais, au lieu de n'avoir en c qu'un seul élément singulier de plus grand poids (comme précédemment au n° 11), nous pourrions en avoir plusieurs. La difficulté revient donc à trouver une opération qui diminue le poids des uns, tout en conservant celui d'un seul d'entre eux, de sorte à n'avoir plus en ce point c que ce seul élément singulier de plus grand poids.

Résolvons d'abord cette difficulté. Examinons pour commencer comment se comporte le poids par rapport à l'opération $D = \frac{d}{dz}$. Il est clair qu'après la différentiation la première composante du poids de chaque élément singulier aura augmenté d'une unité. En effet, pour s'en rendre compte, il suffit de se rappeler que notre définition du poids d'un élément singulier était basée sur la contribution au coefficient a_n de cet élément. Cette contribution était de l'ordre de $n^{\sigma-1} (\log n)^k$ pour un élément singulier du poids $[\sigma, k]$. On peut d'ailleurs s'assurer directement de l'exactitude de notre proposition, en la vérifiant dans chacun des différents cas qui peuvent se présenter. Ainsi, puisque la différentiation produit le même effet sur le poids de chaque élément singulier, cette opération ne nous est pas utile.

Par contre, si nous remarquons que $y = (z - c)^{-s}$ est une intégrale de l'équation différentielle

$$(z - c) D y + s y = 0,$$

nous pouvons espérer que l'opération définie comme suit

$$(7) \quad [(z - c) D + s] \cdot F(z) \equiv (z - c) D F(z) + s F(z)$$

pourra servir à nos fins. Il en est effectivement ainsi, car cette opération jouit, comme on le vérifie aisément, des propriétés suivantes: En un point c_γ différent de c , le poids augmente comme pour la différentiation, c'est-à-dire que sa première composante augmente d'une unité. Au point c lui-même, le poids d'un élément singulier du type (t, q) reste invariant si $t \neq s$ et diminue si $t = s$. L'influence de l'opération (7) n'est donc pas la même sur les différents éléments singuliers attachés au point c . Ceci nous servira à les séparer quand nous construirons la fonction $F^*(z)$.

13. Nous sommes en mesure maintenant de faire la démonstration proprement dite du théorème D. Comme plus haut, nous désignons par $c_1 = c, c_2, \dots, c_p$ les points singuliers qui sont sur le cercle de convergence $|z| = 1$ de la série $\sum a_n z^n = F(z)$. Parmi les points de plus grand poids, soit c l'un de ceux auxquels sont attachés le moins d'éléments singuliers de ce plus grand poids. Soit r le nombre de ces éléments

$$(z - c)^{-s_\rho} (\log(z - c))^k [b_0^{(\rho)} + b_1^{(\rho)}(z - c) + \dots], \quad (\rho = 1, 2, \dots, r) \\ (\Re s_\rho = \sigma; b_0^{(\rho)} \neq 0)$$

$(s_1, k) = (s, k), (s_2, k), \dots, (s_r, k)$ leurs types et $[\sigma, k]$ leur poids commun. (Au cas où $\sigma = 0, -1, -2, \dots$, il peut aussi se présenter un élément singulier du type $(\sigma, k+1)$.) — Formons la nouvelle fonction ²⁰⁾

$$(8) \quad \prod_{p=2}^r [(z-c)D + s_p] \cdot F(z).$$

Celle-ci ne présente plus qu'un seul élément singulier de plus grand poids en c , à savoir celui du type (s, k) ; par contre, aux autres points singuliers c_2, c_3, \dots, c_p , le poids a été augmenté de $r-1$ unités, d'après ce que nous avons vu plus haut. En ces points-là, nous voulons cependant que le poids soit moindre qu'en c . Nous atteindrons ce but en multipliant encore (8) par le produit

$$\prod_{\gamma=2}^p (z-c_\gamma)^{r_\gamma},$$

où chaque r_γ est un entier positif ou nul, le plus petit d'ailleurs qui convienne encore à notre but. Soit $\Sigma r_\gamma = l - r$. Comme on a sûrement $r_\gamma \leq r$, on aura aussi $l \leq p r$.

Nous avons ainsi construit, en partant de la fonction $\Sigma a_n z^n = F(z)$ la nouvelle fonction

$$F^*(z) = \Sigma a_n^* z^n = \prod_{\gamma=2}^p (z-c_\gamma)^{r_\gamma} \cdot \prod_{p=2}^r [(z-c)D + s_p] \cdot F(z)$$

qui n'a plus qu'un seul élément singulier de plus grand poids sur le cercle $|z| = 1$, à savoir un élément du poids $[\sigma, k]$. On a donc (cf. théorème 1)

$$(9) \quad |a_n^*| = A^* n^{\sigma-1} (\log n)^k \left[1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right]. \quad (A^* \neq 0, \text{ const.})$$

De là, nous pouvons aussi tirer une conclusion pour les coefficients a_n : il suffira de chercher leurs relations avec les coefficients a_n^* . Par induction complète, on montre que

²⁰⁾ Le produit symbolique (8) ne dépend pas d'ailleurs de l'ordre des facteurs, car on a

$$\begin{aligned} [(z-c)D + s] \cdot [(z-c)D + t] &= [(z-c)D + t] \cdot [(z-c)D + s] \\ &= [st + (1+s+t)(z-c)D + (z-c)^2 D^2]. \end{aligned}$$

$$F^*(z) = \prod_{\gamma=2}^r (z - c_\gamma)^{r_\gamma} [b_0 F(z) + b_1 (z - c) F'(z) + \dots + b_{r-1} (z - c)^{r-1} F^{(r-1)}(z)]$$

$$= P_{l-r}(z) F(z) + P_{l-r+1}(z) F'(z) + \dots + P_{l-1}(z) F^{(r-1)}(z),$$

où les b désignent des constantes, $b_{r-1} = 1$, et $P_k(z)$ un polynôme de degré k . On en tire

$$a_{n-r+1}^* = \sum_{\lambda=0}^{l-1} (d_\lambda + \varepsilon_\lambda) n^{r-1} a_{n-\lambda},$$

où les d_λ désignent des constantes, $d_{l-1} = 1$, et les ε_λ des quantités qui tendent vers zéro avec $1/n$. Pour des valeurs de n suffisamment grandes, nous avons donc

$$|a_{n-r+1}^*| \leq M n^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{l-1} |a_{n-\lambda}| \quad (M \neq 0, \text{ const.})$$

ou

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} |a_{n-\lambda}| \geq M^{-1} n^{1-r} |a_{n-r+1}^*|,$$

et finalement, à l'aide de (9)

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} |a_{n-\lambda}| \geq A n^{\sigma-r} (\log n)^k. \quad (A \neq 0, \text{ const.})$$

Comme on a évidemment aussi — on le montre par le procédé du n° 5 —

$$|a_n| = O(n^{\sigma-1} (\log n)^k),$$

notre théorème D est complètement démontré.

IV. Applications. Exemple.

14. Dans ce court chapitre, nous exposerons quelques théorèmes concernant la composition des séries à la Hadamard (voyez à ce sujet le début du chapitre suivant); puis, nous illustrerons par un exemple les résultats obtenus jusqu'ici.

Théorème 4. Soient $\sum a_n z^n = f(z)$ et $\sum b_n z^n = \varphi(z)$ deux séries entières ayant le cercle de convergence $|z| = 1$. Si $f(z)$ n'a que des points singuliers algébriques-logarithmiques sur $|z| = 1$, dont un seul de plus grand poids, si d'autre part $\varphi(z)$ est prolongeable au dehors du cercle $|z| = 1$, la nouvelle série $\sum a_n b_n z^n = H(f, \varphi)$ a, elle aussi, le cercle de convergence $|z| = 1$.

Pour le démontrer, nous nous baserons sur notre théorème B, ainsi que sur un théorème de M. Fabry²¹⁾. Soit $[\sigma, k]$ le poids de la plus lourde singularité de $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$. Si nous désignons un indice n par n' ou par n'' suivant que

$$(1) \quad |a_{n'}| \geq n'^{\sigma-1-\varepsilon} \quad \text{ou que} \quad |a_{n''}| < n''^{\sigma-1-\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0, \text{ fixe})$$

nous savons (théorème B) que la suite des indices n'' a une densité nulle. — Supposons maintenant que, par impossible, la série $\sum a_n b_n z^n$ (qui est certainement régulière pour $|z| < 1$) n'ait pas de singularité sur le cercle $|z| = 1$. On aura alors, pour des valeurs de n suffisamment grandes

$$(2) \quad |a_n b_n| \leq \theta^n \quad \text{où} \quad \theta < 1.$$

En combinant (1) et (2), il vient pour des indices n' suffisamment grands

$$|b_{n'}| \leq \theta^{n'} \cdot |a_{n'}|^{-1} \leq \theta^{n'} \cdot n'^{1-\sigma+\varepsilon},$$

et par conséquent

$$(3) \quad \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} |b_{n'}| \frac{1}{n'} \leq \theta < 1.$$

Ecrivons maintenant

$$\sum_{(n)} b_n z^n = \sum_{(n')} b_{n'} z^{n'} + \sum_{(n'')} b_{n''} z^{n''}.$$

Par suite de (3), la première série, $\sum_{(n')} b_{n'} z^{n'}$, converge en dehors du cercle $|z| = 1$. La seconde série, $\sum_{(n'')} b_{n''} z^{n''}$, qui a le cercle de conver-

²¹⁾ Si la densité des coefficients a_n est nulle, la série $\sum a_n z^n$ admet son cercle de convergence comme coupure. E. Fabry, Acta math., 22, 1899, 86.

gence $|z| = 1$, a ce même cercle comme coupure, puisque ses coefficients ont une densité nulle (cf. note 21)). Il s'ensuit que la série $\sum_{(n)} b_n z^n = \varphi(z)$, elle aussi, le cercle $|z| = 1$ comme coupure. Or ceci est contraire aux hypothèses de notre théorème. Nous avons donc montré, par l'absurde, que la série $\sum a_n b_n z^n = H(f, \varphi)$ a une singularité au moins sur le cercle $|z| = 1$, c. q. f. d.

Nous allons maintenant démontrer un corollaire du théorème 4; pour cela la définition suivante nous sera utile. Soit $z = 1$ un point singulier situé sur le cercle de convergence de la série $\sum b_n z^n = \varphi(z)$. Si $\varphi(z)$ reste régulière en tout point z satisfaisant à la fois aux conditions

$$|z| \leq 1, |z - 1| \leq \varepsilon, z \neq 1, \quad (\varepsilon > 0, \text{ suffisamment petit})$$

le point 1 sera appelé *isolé sur le cercle de convergence*.

Théorème 5. *Admettons que le point singulier algébrique-logarithmique $z = 1$ est l'unique point singulier situé sur le cercle de convergence de la série $\sum a_n z^n = f(z)$, admettons encore que 1 est un point singulier « isolé sur le cercle de convergence » de la série $\sum b_n z^n = \varphi(z)$. Le point 1 sera alors effectivement singulier pour la série $\sum a_n b_n z^n = H(f, \varphi)$.*

Par suite des hypothèses faites sur la fonction $\varphi(z)$, il existe une courbe fermée simple C (cf. fig. 1) entourant l'origine des coordonnées, jouissant de la propriété suivante: C est décomposable en deux arcs C_1 et C_2 , $C = C_1 + C_2$, tels que si l'on pose

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\varphi(u) du}{u - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\varphi(u) du}{u - z} \\ &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \end{aligned}$$

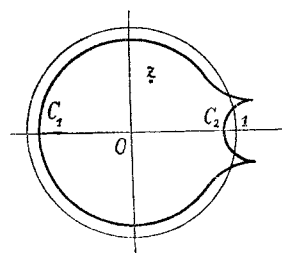


Fig. 1.

la fonction $\varphi_1(z)$ est régulière en $z = 1$, et la fonction $\varphi_2(z)$ est régulière pour $|z| \leq 1$, excepté en $z = 1$. — On a

$$H(f, \varphi) = H(f, \varphi_1) + H(f, \varphi_2).$$

En vertu du théorème de M. Hadamard, le point $z = 1$ est régulier pour $H(f, \varphi_1)$; en vertu du même théorème, il est l'unique point singulier possible de $H(f, \varphi_2)$; enfin, il est effectivement singulier pour cette fonction en vertu du théorème 4. Le point $z = 1$ est donc singulier pour la fonction $H(f, \varphi)$, c. q. f. d.

15. Théorème 6. *Admettons que la suite 0, 1, 2, ... est partagée en deux suites partielles illimitées, complémentaires l'une de l'autre, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ et $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ et que les deux séries*

$$\varphi(z) = b_1 z^{\lambda_1} + b_2 z^{\lambda_2} + b_3 z^{\lambda_3} + \dots \text{ et } \psi(z) = c_1 z^{\mu_1} + c_2 z^{\mu_2} + c_3 z^{\mu_3} + \dots$$

possèdent le même rayon de convergence égal à 1. Alors ou bien l'une des deux séries a plus d'un point singulier sur son cercle de convergence, ou bien l'autre n'y a aucune singularité algébrico-logarithmique.

Ce théorème a été énoncé déjà par M. Pólya²²⁾. Nous le démontrerons par l'absurde: nous supposons donc que $\varphi(z)$ n'a que le seul point singulier $z = 1$ sur son cercle de convergence, et que $z = z_0$ ($|z_0| = 1$) est une singularité algébrico-logarithmique de $\psi(z)$. Supposons encore que $z_0 = 1$, ce qui évidemment n'est pas une restriction. Posons maintenant

$$\psi(z) = f(z) - \chi(z)$$

où $f(z)$ est une série régulière pour $|z| \leq 1$, excepté au point $z = 1$ qui est algébrico-logarithmique, et où $\chi(z)$ est régulière en ce même point $z = 1$. De telles fonctions $f(z)$ et $\chi(z)$ existent, comme nous l'avons vu en démontrant le théorème 5.

Les hypothèses concernant les suites λ et μ nous permettent d'affirmer que

$$H(f, \varphi) = H(\chi, \varphi).$$

En vertu du théorème de M. Hadamard, la fonction $H(f, \varphi)$ ne peut avoir d'autres points singuliers sur le cercle $|z| = 1$ que le point $z = 1$. De plus, d'après le théorème 5 (ou directement 4), ce point doit être singulier pour la fonction $H(f, \varphi)$. Mais d'autre part, le théorème de M. Hadamard nous montre aussi que $H(\chi, \varphi)$ doit être régulière au point $z = 1$. Nous arrivons ainsi à une contradiction qui démontre le théorème.

16. *L'exemple* que nous allons construire ici doit illustrer les résultats des chapitres précédents, il doit aussi montrer que ces résultats sont, dans un certain sens, les plus précis possibles. Il s'agit surtout de prouver que les théorèmes B et D (nos 4 et 10) seraient faux si l'on remplaçait

²²⁾ G. Pólya, Comptes rendus, 184, 1927, 502—504. Voyez aussi la Thèse de Mandelbrojt, Annales Ec. Norm. sup., (3) 40, 1923, 428 ou La série de Taylor I, p. 99.

dans le premier la fonction $\varepsilon(n)$ (qui tend vers zéro avec $1/n$) par une constante, et dans le second la constante A par une fonction $\alpha(n)$ tendant vers l'infini avec n .

Soit $\Re s = \sigma \neq 0, -1, -2, \dots$. On sait alors²³⁾ que la série entière

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} z^n$$

n'a qu'un seul point singulier sur son cercle de convergence, à savoir le point $z=1$, au voisinage duquel on peut écrire

$$f(z) = (1-z)^{-s} \varphi(z) + \psi(z),$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant des éléments de fonctions analytiques régulières en $z=1$, $\varphi(1) \neq 0$.

Désignons par r un entier positif, et formons la nouvelle fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} \left[\sin \left(\pi \frac{\log n}{\log 2} \right) \right]^{r-1} z^n,$$

que nous pouvons encore écrire, en exprimant le sinus par la fonction exponentielle et en développant la puissance $(r-1)$ -ième

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{\rho=0}^{r-1} \left(\frac{1}{2i} \right)^{r-1} \binom{r-1}{\rho} (-1)^{\rho} f_{\rho}(z),$$

où $f_{\rho}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1+i \frac{\pi}{\log 2} (r-1-2\rho)} z^n.$

Nous voyons ainsi que cette fonction $F(z)$ n'a qu'un seul point singulier sur son cercle de convergence, à savoir le point $z=1$ qui est algébrique-logarithmique du poids $[\sigma, 0]$; il y a r éléments singuliers de types différents en ce point.

Examinons maintenant les coefficients a_n de $F(z)$. Déterminons pour commencer les indices n pour lesquels l'inégalité

$$|a_n| > A^{r-1} n^{\sigma-1} (\log n)^0 \quad (A = \text{const.}, 0 < A \leq 1)$$

ou
$$\left| \sin \left(\pi \frac{\log n}{\log 2} \right) \right| > A$$

²³⁾ E. Lindelöf, Le calcul des résidus, Paris 1905, pp. 138—140; J. Franel, L'interm. des math., 1, 1894, 185.

n'est pas vérifiée. Posons dans ce but $\log n = x$, et cherchons pour quelles valeurs positives de x on a $\left| \sin \frac{\pi x}{\log 2} \right| \leq A$. Ces valeurs de x se trouvent au voisinage des zéros de $\sin \frac{\pi x}{\log 2}$, et sont évidemment les suivantes :

$$m \log 2 - \frac{\log 2}{\pi} \arcsin A \leq x \leq m \log 2 + \frac{\log 2}{\pi} \arcsin A \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

On en déduit que les indices d'exception n sont groupés autour des puissances de 2 et vérifient l'une des doubles inégalités

$$2^{m - \frac{1}{\pi} \arcsin A} \leq n \leq 2^{m + \frac{1}{\pi} \arcsin A} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Un bref calcul montre enfin que la densité inférieure des indices d'exception est positive, quelque petite que soit la constante A , à savoir

$$2^{\frac{2}{\pi} \arcsin A} - 1.$$

La première des affirmations que nous avons faites au début de ce n° est ainsi établie. — Notons en passant que dans l'énoncé du théorème C (n° 4), l'introduction d'une suite exceptionnelle n'est pas superflue : dans notre exemple, a_n est nul pour tous les indices n qui sont une puissance de 2.

Pour motiver la seconde affirmation, nous considérons les indices n tels que

$$n = 2^m + \mu$$

où m désigne un entier suffisamment grand et μ un entier fixe positif ou négatif. Les coefficients correspondants a_n de la fonction $F(z)$ définie ci-dessus peuvent alors être estimés comme suit :

$$\begin{aligned} |a_n| &= n^{\sigma-1} \left| \sin \left(\pi \frac{\log n}{\log 2} \right) \right|^{r-1} = n^{\sigma-1} \left| \sin \left(\pi \frac{\log (1 + \frac{\mu}{2^m})}{\log 2} \right) \right|^{r-1} \\ &< n^{\sigma-1} \left| \pi \frac{\log (1 + \frac{\mu}{2^m})}{\log 2} \right|^{r-1} < 1, 1 n^{\sigma-1} \left| \frac{\pi}{\log 2} \cdot \frac{\mu}{2^m} \right|^{r-1} \\ &< 1, 2 n^{\sigma-1} \left| \frac{\pi}{\log 2} \cdot \frac{\mu}{n} \right|^{r-1} = 1, 2 \left| \frac{\pi}{\log 2} \cdot \mu \right|^{r-1} \cdot n^{\sigma-r}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une inégalité de la forme

$$\alpha(n) n^{\sigma-r} (\log n)^0 < |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_{n-l}|,$$

où $\alpha(n)$ tend vers l'infini avec n d'une manière quelconque, est impossible pour une infinité d'indices n , quelque grand d'ailleurs que soit l'entier fixe l . Par cet exemple, notre seconde affirmation se trouve justifiée elle aussi.

V. Les singularités algébrico-logarithmiques et la composition des séries à la Hadamard.

17. Ce dernier chapitre est entièrement consacré à la composition des séries à la Hadamard. Rappelons donc l'énoncé du théorème de M. Hadamard²⁴).

Considérons les séries entières

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (2) \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

et la série composée

$$(3) \quad h(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \dots$$

Désignons par α un point singulier quelconque de (1) que l'on peut atteindre par prolongement rectiligne à partir de l'origine des coordonnées; désignons de même par β un point singulier quelconque de (2) accessible de la même manière. Le prolongement rectiligne à partir de l'origine de la série (3) est alors possible tant que l'on ne rencontre pas l'un des points $\alpha \beta$.

Ce théorème peut être étendu si l'on ne se borne plus au prolongement rectiligne à partir de l'origine, si l'on considère donc les fonctions $f(z)$, $g(z)$ et $h(z)$ dans tout leur domaine d'existence. Il est clair que les difficultés à résoudre deviennent alors d'autant plus grandes que les singularités de $f(z)$ et de $g(z)$ sont plus compliquées; et les théorèmes que l'on obtient sont très complexes²⁵). — Le théorème prend cependant une forme très simple *dans le cas particulier où les fonctions $f(z)$ et $g(z)$*

²⁴) J. Hadamard, Acta math., 22, 1899, 55—63. Voyez aussi L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig u. Berlin 1927, Bd. 2, S. 292—294.

²⁵) Voyez: E. Borel, Bull. Soc. Math. de France, 26, 1898, 238—248; G. Faber, Jahresber. d. D. Math.-Ver., 16, 1907, 285—298.

n'ont qu'un nombre fini de singularités dans tout le plan. La fonction $h(z)$ n'a alors, elle aussi, qu'un nombre fini de points singuliers dans tout le plan; et ceux-ci sont à chercher parmi l'origine, le point à l'infini, et les points que l'on obtient en multipliant l'affixe d'un point singulier de $f(z)$ par l'affixe d'un point singulier de $g(z)$.

Le théorème de M. Hadamard peut être complété encore si l'on cherche les relations entre la nature des singularités de $f(z)$ et $g(z)$ et de $h(z)$ ²⁶. Le but de notre étude n'est pas très différent: nous supposons que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ n'ont dans tout le plan que des singularités d'une même classe, et chercherons des conséquences pour les points singuliers de $h(z)$. Nous serons ainsi conduits à formuler quelques théorèmes fort simples.

Théorème 7. *Si chacune des séries $f(z)$ et $g(z)$ représente une fonction rationnelle de z , il en est de même de $h(z)$.*

L'opération fonctionnelle qui définit la composition des séries à la Hadamard étant distributive, il suffit de démontrer ce théorème lorsque chacune des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ n'a qu'un seul pôle dans tout le plan; il suffit même de considérer le cas encore plus spécial où $f(z) = (\alpha - z)^{-(p+1)}$ et $g(z) = (\beta - z)^{-(q+1)}$. M. Borel a montré (l. c.²⁵), p. 241) que $h(z)$ n'a alors d'autre singularité dans tout le plan qu'un pôle d'ordre $p + q + 1$ au point $\alpha\beta$.

Théorème 8. *Si $f(z)$ est une fonction rationnelle et $g(z)$ une fonction algébrique, $h(z)$ est aussi algébrique.*

Ici encore, il suffit d'établir le théorème dans un cas particulier: il faut remarquer avec M. Borel (l. c.²⁵), p. 242) que si $f(z) = (1 - z)^{-(p+1)}$, on a pour $h(z)$ l'expression différentielle $\frac{1}{p!} \frac{d^p}{dz^p} [z^p g(z)]$. Cette expression est certainement algébrique si $g(z)$ l'est.

Si chacune des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ est algébrique, $h(z)$ l'est-elle aussi? Non, en général pas, comme le montre l'exemple suivant:

$$f(z) = g(z) = (1 - z)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} z^n,$$

$$h(z) = \sum \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \right)^2 z^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - z \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-zu^2)}}.$$

²⁶ Cf. E. Borel et G. Faber, l. c.²⁵), ainsi que G. Pólya, Comptes rendus, 184, 1927, 579-581.

En se basant sur les formules

$$\sum \binom{\lambda}{n} z^n = (1-z)^{-\lambda}, \quad \sum \binom{\mu}{n} z^n = (1-z)^{-\mu}, \quad \sum \binom{\lambda}{n} \binom{\mu}{n} z^n = F(\lambda, \mu, 1, z),$$

où λ et μ désignent des nombres rationnels, M. Shimizu²⁷⁾ a tenté, sans y parvenir entièrement, de démontrer le théorème suivant: Si $f(z)$ et $g(z)$ sont régulières pour $|z| < 1$ et n'ont que des singularités algébriques sur le cercle $|z| = 1$, $h(z)$ n'a que des singularités algébro-logarithmiques sur le cercle $|z| = 1$.

Parmi les manuscrits inédits de Hurwitz, conservés à l'Ecole Polytechnique de Zurich, se trouve le théorème suivant qu'il convient de citer ici:

Théorème 9 (de Hurwitz). *Si chacune des séries $f(z)$ et $g(z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de z , il en est de même de $h(z)$.*

La démonstration en est simple: Le fait que $f(z)$ est une intégrale d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels est équivalent à l'équation aux différences finies

$$a_n = \varphi_1(n) a_{n-1} + \varphi_2(n) a_{n-2} + \dots + \varphi_\mu(n) a_{n-\mu}$$

où les φ sont des fonctions rationnelles de n . Le théorème à démontrer se ramène donc au suivant: Des deux formules de récursion

$$(4) \quad a_n = \varphi_1(n) a_{n-1} + \dots + \varphi_\mu(n) a_{n-\mu}$$

$$(5) \quad b_n = \psi_1(n) b_{n-1} + \dots + \psi_\nu(n) b_{n-\nu}$$

(où les φ et les ψ sont des fonctions rationnelles de n), résulte la suivante

$$(6) \quad a_n b_n = \Phi_1(n) a_{n-1} b_{n-1} + \dots + \Phi_{\mu\nu}(n) a_{n-\mu\nu} b_{n-\mu\nu},$$

où les Φ sont également des fonctions rationnelles de n . Or ceci est aisé à voir. En effet, de (4) on tire

²⁷⁾ T. Shimizu, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, (3) 10, 1928, 207—212. Nous ne pouvons pas souscrire à la démonstration de M. Shimizu, car il omet d'envisager la possibilité qu'une fonction $\sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n/k}$ (k entier > 0) peut avoir plus d'une singularité sur le cercle $|z| = 1$, et d'autre part, il semble admettre implicitement que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ a une singularité algébro-logarithmique au point $z=1$, s'il en est ainsi pour chacun des termes $\varphi_n(z)$.

$$a_{n+r} = \varphi_1^{(r)}(n) a_{n-1} + \dots + \varphi_\mu^{(r)}(n) a_{n-\mu}, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, \mu \nu)$$

où les fonctions rationnelles $\varphi^{(r)}$ ne sont pas toutes identiquement nulles; on trouve des formules analogues pour la suite des b_n . On aura donc

$$a_{n+r} b_{n+r} = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\nu} \varphi_j^{(r)} \psi_k^{(r)} a_{n-j} b_{n-k} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, \mu \nu).$$

En éliminant dans ce système les $\mu \nu$ produits $a_{n-j} b_{n-k}$, on trouvera le résultat cherché (6).

Nous pouvons préciser le théorème précité en faisant intervenir la nature des singularités:

Théorème E. *Si chacune des séries $f(z)$ et $g(z)$ est intégrale d'une équation différentielle de la classe de Fuchs, il en est de même de $h(z)$.*

La démonstration de ce théorème (nos 18—20) se base, d'une part sur le théorème de Hurwitz indiqué ci-dessus, et d'autre part sur la formule de M. Hadamard (l. c.²⁴), p. 57)

$$(7) \quad h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}.$$

On démontrerait de même, mais beaucoup plus simplement le

Théorème 10. *Si chacune des séries $f(z)$ et $g(z)$ est intégrale d'une équation différentielle de la classe de Fuchs, il en est de même de $f(z) + g(z)$.*

Enfin, en combinant les théorèmes E et 10 un nombre fini de fois, on est conduit au

Théorème 11. *Si chacune des séries entières*

$$\sum a_n z^n, \sum b_n z^n, \dots, \sum l_n z^n,$$

satisfait à une équation différentielle de la classe de Fuchs, il en est de même de la série

$$\sum P(a_n, b_n, \dots, l_n) z^n,$$

où P est un polynôme donné des variables a, b, \dots, l .

Pour établir a), nous utiliserons le théorème de Hurwitz démontré au n° précédent. Soient donc (1) et (2) des intégrales d'équations différentielles de la classe de Fuchs. Ces équations différentielles sont linéaires, homogènes et à coefficients rationnels. (Par coefficients rationnels, nous entendons naturellement des coefficients qui sont des fonctions rationnelles de z). Nous pouvons donc affirmer, d'après Hurwitz, que $h(z) = \sum a_n b_n z^n$ est, elle aussi, intégrale d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels

$h(z)$ n'a donc que des points singuliers isolés, ceux des coefficients c_i ; ces points exceptés, elle est prolongeable dans tout le plan.

$$(9) \quad \begin{vmatrix} y & h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(m)} & h_1^{(m)} & h_2^{(m)} & \dots & h_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0$$

19. Nous allons retrouver quelques-uns des résultats précédents à l'aide de la formule (7) de M. Hadamard. Celle-ci nous permettra, de plus, de montrer que la fonction $h(z)$ n'a que des points singuliers de détermination.

301

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ les points singuliers de $f(z)$ et par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ceux de $g(z)$.

La formule en question ci-dessus

$$(7) \quad h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}$$

n'est valable tout d'abord que pour des valeurs de z proches de l'origine, le contour fermé d'intégration C étant alors facile à indiquer²⁸⁾. Cette expression de $h(z)$ restera valable si l'on déforme le contour C d'une manière continue, mais sans lui faire traverser les points singuliers de la fonction à intégrer. D'autre part, ce contour étant fixe, on obtiendra le prolongement analytique de $h(z)$, en déplaçant z d'une manière continue dans son plan, à condition toutefois que les points singuliers de la fonction à intégrer ne traversent pas le contour d'intégration. Les points que le contour C doit ainsi éviter sont d'abord les points $u = \alpha$, puis les points $z/u = \beta$ ou $u = z/\beta$, et encore le point $u = 0$. « Concevons », comme dit M. Borel (l. c. ²⁵⁾, p. 240), « le contour fermé C comme un « fil flexible et extensible, les points singuliers de $f(u)$ comme des épingles « fixées dans le plan, les points singuliers de $g\left(\frac{z}{u}\right)$ comme des épingles « qui se déplacent lorsque z varie. Il faut et il suffit que le fil sépare « toujours les deux systèmes d'épingles. Or cela sera toujours possible « par une déformation convenable, si, dans leur déplacement, les secondes « épingles ne viennent jamais heurter les premières (on pourra même « supposer le fil à une distance finie de chaque épingle, ce qui suffit « pour que l'intégrale soit une fonction régulière de z); le fil peut acquérir « une forme très compliquée, mais cela n'a aucun inconvénient. » En un mot, la formule (7) nous fournira le prolongement analytique de $h(z)$ aussi longtemps que les points singuliers énumérés ci-dessus n'entreront pas en collision les uns avec les autres, c'est-à-dire aussi longtemps que z sera différent des points $\alpha\beta$, de 0 et de l'infini²⁹⁾. Excepté ce nombre fini de points, $h(z)$ sera partout prolongeable. Nous voyons ainsi de nouveau que la fonction $h(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités; de plus, nous avons appris où il faut les chercher.

²⁸⁾ Nous nous basons dans la suite sur les travaux déjà cités de MM. *Hadamard*, l. c. ²⁴⁾, et *Borel*, l. c. ²⁵⁾.

²⁹⁾ Ces points ne sont pas nécessairement tous singuliers. Tout ce que nous savons est que $h(z)$ est régulière partout ailleurs.

Jusqu'ici, nous nous sommes uniquement basés sur le fait que les séries $f(z)$ et $g(z)$ sont des intégrales d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients rationnels. Il faut tenir compte maintenant de ce que ces équations différentielles appartiennent à la classe de Fuchs. Il en résulte, d'après le théorème de Fuchs, que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ n'ont que des points singuliers de détermination, c'est-à-dire des points singuliers algébrico-logarithmiques. Nous pouvons exprimer cela de la manière suivante :

Soit α un point singulier de $f(z)$; il existe un nombre réel μ tel que

$$(10) \quad f(z) = O(|z - \alpha|^{-\mu})$$

pour les valeurs de z situées dans le voisinage de α . Dans le cas où α est un point de ramification, il faut bien spécifier dans quel voisinage angulaire (10) a lieu, car nous ne pouvons pas permettre à z de tourner un nombre illimité de fois autour de α . Nous dirons donc que l'égalité (10) a lieu pour les valeurs de z situées dans tel voisinage angulaire fini de α qu'il nous plaira. Nous aurons semblablement

$$(11) \quad g(z) = O(|z - \beta|^{-\nu}),$$

où β désigne un point singulier de $g(z)$.

Faisons maintenant le prolongement analytique de la série $\sum \alpha_n b_n z^n$ qui définit la fonction $h(z)$, le long d'une certaine courbe partant de l'origine des coordonnées et qui ne tourne qu'un nombre fini de fois autour des points singuliers (éventuels) $\alpha\beta$, 0 et ∞ de $h(z)$. Supposons que le point z soit venu dans le voisinage immédiat d'un point singulier $\alpha\beta$. Le contour d'intégration C

de l'intégrale (7) sera alors coïncé entre les points α et z/β . (Il peut naturellement arriver que le contour C soit coïncé à la fois entre plusieurs paires de points.) Il est aisé d'estimer cette intégrale 7 dans la zone dangereuse, à l'aide des égalités (10) et (11). Nous allons le montrer dans le cas où un seul arc de la courbe C est coïncé entre

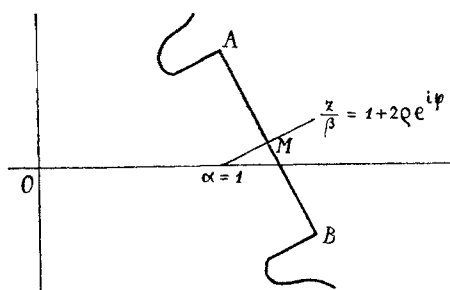


Fig. 2.

deux points, α et z/β . Pour simplifier l'écriture, nous supposerons encore que $\alpha = \beta = 1$, d'où $\alpha\beta = 1$. Donnons à z une position voisine de $\alpha\beta$,

soit $z = 1 + 2\rho e^{i\varphi}$ (ρ très petit, φ fixe). Dans le plan des u , le contour d'intégration C passera entre les points $\alpha = 1$ et $z/\beta = 1 + 2\rho e^{i\varphi}$. Supposons qu'il passe au point M d'affixe $1 + \rho e^{i\varphi}$, qu'il soit perpendiculaire au segment $\alpha \dots z/\beta$, et qu'il soit rectiligne de A à B sur une longueur fixe 2ε ($\overline{AM} = \overline{MB} = \varepsilon$). Nous avons alors :

$$|h(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \right| \leq O(1) + \frac{1}{2\pi} \int_A^B \left| f(u) g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \right|.$$

Cette dernière intégrale peut être estimée à l'aide de (10) et de (11); lorsque u est situé sur le segment AB , nous avons en effet:

$$\begin{aligned} |f(u)| &\leq \text{Const. } |u - \alpha|^{-\mu} = \text{Const. } |u - 1|^{-\mu}, \\ \left| g\left(\frac{z}{u}\right) \right| &\leq \text{Const. } \left| \frac{z}{u} - \beta \right|^{-\nu} \leq \text{Const. } |u - z|^{-\nu} = \text{Const. } |u - 1|^{-\nu}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq O(1) + \text{Const.} \int_A^B |u - 1|^{-(\mu+\nu)} |du| \\ &= O(1) + \text{Const.} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (\rho^2 + x^2)^{-\frac{\mu+\nu}{2}} dx \\ &\leq O(1) + \text{Const.} \rho^{-(\mu+\nu-1)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-\frac{\mu+\nu}{2}} dt, \end{aligned}$$

où nous avons supposé que $\mu + \nu > 1$, ce qui est évidemment permis. Observons que 2ρ est la distance de z au point singulier $\alpha\beta$. Comme plus haut, pour (10) et (11), cette estimation n'est valable que dans un voisinage angulaire fini de $\alpha\beta$.

Les points $z = 0$ et $z = \infty$ doivent être considérés à part; ils n'offrent cependant pas plus de difficultés que le cas général. Nous voyons ainsi qu'au voisinage d'un point singulier, l'ordre de la fonction $h(z)$ reste fini. Cette fonction, qui satisfait à l'équation différentielle linéaire homogène et à coefficients rationnels (8), n'a donc que des points singuliers algébriques-logarithmiques dans tout le plan. Plus exactement, nous dirons que les fonctions h_1, h_2, \dots, h_m [système fondamental de solutions de l'équation différentielle (9)] n'ont que des points singuliers de détermination dans tout le plan.

$$D_k \cdot \prod_{(\gamma)} (z - \gamma)^{R_\gamma} = P_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

sera alors uniforme dans tout le plan, et ne peut avoir qu'un pôle à l'infini: c'est donc un polynôme. On en conclut enfin que le rapport

$$\frac{D_k}{D_m} = \frac{P_k}{P_m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

est une fonction rationnelle de z . Les coefficients de l'équation différentielle (12) sont rationnels; ses intégrales n'ayant que des points singuliers de détermination, c'est une équation différentielle de la classe de Fuchs.

La série $h(z) = \sum a_n b_n z^n$ est donc bien intégrale d'une équation différentielle de la classe de Fuchs: notre théorème E est entièrement démontré.

(Reçu le 1^{er} septembre 1931)