Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Aluno(a): ______________________________ Data: ___ / ___ / _____

Avaliação III

Instruções

- Todas as justificativas necessárias na solução de cada questão devem estar presentes nesta avaliação;
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas de caneta;
- Esta avaliação tem um total de 25,0 pontos.

1. [**5,0 pontos**] Seja uma função f da qual são conhecidos os valores descritos na tabela abaixo.

x_i	1	1,5	2
$f(x_i)$	2	3,125	6

Determine o polinômio p que interpola f utilizando duas maneiras:

(a) escrevendo p na Forma de Lagrange;
(b) escrevendo p na Forma de Newton.

2. [**6,0 pontos**] Arme os sistemas de equações que permitem determinar uma *spline* natural cúbica que interpole os pontos da tabela abaixo:

x_i	$-1,2$	$-0,1$	$0,5$	$1,4$
y_i	-1	$0,2$	$0,75$	$-0,15$

3. [**4,0 pontos**] Considere os polinômios:

$$p_0(x) = 1;\ p_1(x) = x;\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

(a) Verifique que $\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)\,dx = 0$, sempre que $i \neq j$.
(b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ no intervalo $[-1,\ 1]$.

4. [**5,0 pontos**] Sobre certa função f são conhecidos os pontos $(x_k,\ f(x_k))$, com $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Suponha que seja aplicado o Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função $\phi(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor se ajusta a f. Deduza que os coeficientes a e b são a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}b = d_2 \end{cases},$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)g_j(x_k)$ e $d_i = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)f(x_k)$.

5. [**5,0 pontos**] Seja uma função f da qual são conhecidos os pontos $(x_0,\ f(x_0))$ e $(x_1,\ f(x_1))$. Considere que $L(x)$ seja o polinômio na Forma de Lagrange que interpola f. Além disso, considere que $N(x)$ seja o polinômio na Forma de Newton que interpola f. Prove que $L(x)$ e $N(x)$ representam um mesmo polinômio.