



Lista de Exercícios VIII

1. Determine um *spline* natural cúbica que interpole os pontos da tabela abaixo:

x_i	$-1, 2$	$-0, 1$	$0, 5$	$1, 4$
y_i	-1	$0, 2$	$0, 75$	$-0, 15$

2. Considere uma função f da qual são conhecidos os seguintes pontos:

x_i	$-4, 2$	$-2, 8$	$-2, 2$	$-0, 75$	0	$1, 2$	$1, 6$	$3, 5$	4	$5, 2$
$f(x_i)$	24	$15, 7$	$8, 8$	$3, 6$	$1, 2$	$0, 6$	$0, 25$	$4, 4$	$8, 2$	$15, 5$

- (a) Faça um esboço desses pontos no plano cartesiano. A partir desse esboço, analise qual o grau do polinômio que parece se ajustar a estes pontos.
- (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar o polinômio que melhor se ajusta a estes pontos (considerando o grau analisado no item (a)).
3. Sobre certa função f são conhecidos os pontos $(x_k, f(x_k))$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Suponha que seja aplicado o Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função $\phi(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor se ajusta a f . Deduza que os coeficientes a e b são a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}b = d_2 \end{cases},$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=0}^n g_i(x_k)g_j(x_k)$ e $d_i = \sum_{k=0}^n g_i(x_k)f(x_k)$.

4. Considere os polinômios:

$$p_0(x) = 1; p_1(x) = x; p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

- (a) Verifique que $\int_{-1}^1 p_i(x)p_j(x) dx = 0$, sempre que $i \neq j$.
- (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ no intervalo $[-1, 1]$.

Gabarito

$$[1] \ S(x) = \begin{cases} 0,057952x^3 + 0,20863x^2 + 1,2711x + 0,32509; & -1,2 \leq x < -0,1 \\ -1,1923x^3 - 0,16645x^2 + 1,2336x + 0,32384; & -0,1 \leq x < 0,5 \\ 0,72404x^3 - 3,0410x^2 + 2,6709x + 0,084291; & 0,5 \leq x \leq 1,4 \end{cases} \quad [2] \text{ (a) Grau 2. (b)}$$

$$\phi(x) = 1,3815x^2 - 1,9159x + 0,87686. \quad [3] \text{ Sugestão: Defina } D(a, b) = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \phi(x_i)]^2. \text{ Em seguida,}$$

$$\text{analise o sistema } \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial b} = 0 \end{cases} . \quad [4] \text{ (a) } \int_{-1}^1 p_0(x)p_0(x) dx = 2, \int_{-1}^1 p_0(x)p_1(x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 p_0(x)p_2(x) dx = 0, \int_{-1}^1 p_1(x)p_1(x) dx = \frac{2}{3}, \int_{-1}^1 p_1(x)p_2(x) dx = 0, \int_{-1}^1 p_2(x)p_2(x) dx = \frac{2}{5}. \quad (b) \\ \phi(x) = -\frac{13}{560} - \frac{17}{10}x + \frac{33}{14}x^2.$$