Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Lista de Exercícios VII

1. Determine um *spline* natural cúbica que interpole os pontos da tabela abaixo:

x_i	$-1,2$	$-0,1$	$0,5$	$1,4$
y_i	-1	$0,2$	$0,75$	$-0,15$

2. Considere uma função f da qual são conhecidos os seguintes pontos:

x_i	$-4,2$	$-2,8$	$-2,2$	$-0,75$	0	$1,2$	$1,6$	$3,5$	4	$5,2$
$f(x_i)$	24	$15,7$	$8,8$	$3,6$	$1,2$	$0,6$	$0,25$	$4,4$	$8,2$	$15,5$

   (a) Faça um esboço desses pontos no plano cartesiano. A partir desse esboço, analise qual o grau do polinômio que parece se ajustar a estes pontos.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar o polinômio que melhor se ajusta a estes pontos (considerando o grau analisado no item (a)).

3. Sobre certa função f são conhecidos os pontos $(x_k,\ f(x_k))$, com $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Suponha que seja aplicado o Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função $\phi(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor se ajusta a f. Deduza que os coeficientes a e b são a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}b = d_2 \end{cases},$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)g_j(x_k)$ e $d_i = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)f(x_k)$.

4. Considere os polinômios:

$$p_0(x) = 1;\ p_1(x) = x;\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

   (a) Verifique que $\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)\,dx = 0$, sempre que $i \neq j$.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ no intervalo $[-1,\ 1]$.

5. Considere a função definida por $g_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, onde $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Prove que $\int_{-1}^{1} g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$.

(b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = x$ no intervalo $[-1;\, 1]$.

Gabarito

[1] $S(x) = \begin{cases} 0,057952x^3 + 0,20863x^2 + 1,2711x + 0,32509; \; -1,2 \leq x < -0,1 \\ -1,1923x^3 - 0,16645x^2 + 1,2336x + 0,32384; \; -0,1 \leq x < 0,5 \\ 0,72404x^3 - 3,0410x^2 + 2,6709x + 0,084291; \; 0,5 \leq x \leq 1,4 \end{cases}$ **[2]** (a) Grau 2. (b) $\phi(x) = 1,3815x^2 - 1,9159x + 0,87686$. **[3]** Sugestão: Defina $D(a,\, b) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2$. Em seguida, analise o sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial D}{\partial b} = 0 \end{cases}$. **[4]** (a) $\int_{-1}^{1} p_0(x)p_0(x)\,dx = 2$, $\int_{-1}^{1} p_0(x)p_1(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)\,dx = \dfrac{2}{3}$, $\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)\,dx = \dfrac{2}{5}$. (b) $\phi(x) = -\dfrac{13}{560} - \dfrac{17}{10}x + \dfrac{33}{14}x^2$. **[4]** (a) Sugestão: caso $i = j$, use a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; caso $i \neq j$, use a identidade $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$; em ambos os casos, lembre-se que $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ quando $k \in \mathbb{Z}$. (b) $\phi(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x) + \dfrac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) - \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(4\pi x)$.