Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Lista de Exercícios V

1. Seja uma função f da qual são conhecidos os valores descritos na tabela abaixo.

x_i	1	1,5	2	2,5
$f(x_i)$	2	3,125	6	11,375

Determine o polinômio p que interpola f utilizando três maneiras:

(a) resolvendo o sistema formado pelas equações $p(x_i) = f(x_i)$;

(b) escrevendo p na Forma de Lagrange;

(c) escrevendo p na Forma de Newton.

2. Seja p o polinômio na Forma de Lagrange que interpola os pontos $(x_0,\, y_0)$, $(x_1,\, y_1)$, $\ldots$, $(x_n,\, y_n)$. Vamos definir o polinômio

$$q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Prove que p pode ser escrito no seguinte formato:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q(x)}{(x - x_i)q'(x_i)} y_i.$$

3. Seja uma função f da qual são conhecidos os pontos $(x_0,\, f(x_0))$ e $(x_1,\, f(x_1))$. Considere que $L(x)$ seja o polinômio na Forma de Lagrange que interpola f. Além disso, considere que $N(x)$ seja o polinômio na Forma de Newton que interpola f. Prove que $L(x)$ e $N(x)$ representam um mesmo polinômio.

4. Considere uma função f da qual são conhecidos os seguintes pontos:

x_i	$-4,2$	$-2,8$	$-2,2$	$-0,75$	0	$1,2$	$1,6$	$3,5$	4	$5,2$
$f(x_i)$	24	$15,7$	$8,8$	$3,6$	$1,2$	$0,6$	$0,25$	$4,4$	$8,2$	$15,5$

(a) Faça um esboço desses pontos no plano cartesiano. A partir desse esboço, analise qual o grau do polinômio que parece se ajustar a estes pontos.

(b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar o polinômio que melhor se ajusta a estes pontos (considerando o grau analisado no item (a)).

5. Sobre certa função f são conhecidos os pontos $(x_k,\, f(x_k))$, com $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n$. Suponha que seja aplicado o Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função $\phi(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor se ajusta a f. Deduza que os coeficientes a e b são a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}b = d_2 \end{cases},$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k) g_j(x_k)$ e $d_i = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k) f(x_k)$.

6. Considere os polinômios:

$$p_0(x) = 1;\ p_1(x) = x;\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

   (a) Verifique que $\int_{-1}^{1} p_i(x) p_j(x)\, dx = 0$, sempre que $i \neq j$.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ no intervalo $[-1,\, 1]$.

7. Considere a função definida por $g_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, onde $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Prove que $\int_{-1}^{1} g_i(x) g_j(x)\, dx = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = x$ no intervalo $[-1;\, 1]$.

8. Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, deseja-se determinar a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos $(x_1,\, y_1),\ (x_2,\, y_2),\ \ldots,\ (x_n,\, y_n)$. Prove que:

$$a = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

onde em cada somatório temos $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Gabarito

[1] (a) $p(x) = x^3 - x^2 + 2$ (b) $p(x) = -\frac{8}{3}(x-1,5)(x-2)(x-2,5) + \frac{25}{2}(x-1)(x-2)(x-2,5) - 24(x-1)(x-1,5)(x-2,5) + \frac{91}{6}(x-1)(x-1,5)(x-2)$ (c) $p(x) = 2 + \frac{9}{4}(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)(x-1,5) + (x-1)(x-1,5)(x-2)$ **[2]** Sugestão: Comece justificando que $\frac{q(x)}{(x - x_i)}$, para $x \neq x_i$, é o mesmo que $\prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x - x_k)$. Em seguida, justifique que $q'(x_i) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x_i - x_k)$. **[3]** Sugestão: Determine as expressões para $L(x)$ e $N(x)$. Em seguida, arrume essas expressões de tal modo que possamos concluir a identidade $L(x) = N(x)$. **[4]** (a) Grau 2. (b) $\phi(x) = 1,3815x^2 - 1,9159x + 0,87686$. **[5]** Sugestão: Defina $D(a,\, b) = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - \phi(x_i)\right]^2$.

Em seguida, analise o sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial D}{\partial b} = 0 \end{cases}$. **[6]** (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_0(x)p_0(x)\,dx = 2$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_0(x)p_1(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)\,dx = \frac{2}{3}$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)\,dx = \frac{2}{5}$. (b) $\phi(x) = -\dfrac{13}{560} - \dfrac{17}{10}x + \dfrac{33}{14}x^2$. **[7]** (a) Sugestão: caso $i = j$, use a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; caso $i \neq j$, use a identidade $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$; em ambos os casos, lembre-se que $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ quando $k \in \mathbb{Z}$. (b) $\phi(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x) + \dfrac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) - \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(4\pi x)$. **[8]** Sugestão: Resolva o sistema deduzido no exercício [5] considerando $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1$, $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.