Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico Semestre: 2023/2
Prof. Dr. Luiz C. M. de Aquino

Trabalho II

1. Considere uma função f da qual são conhecidos os seguintes pontos:

x_i	$-4,2$	$-2,8$	$-2,2$	$-0,75$	0	$1,2$	$1,6$	$3,5$	4	$5,2$
$f(x_i)$	24	$15,7$	$8,8$	$3,6$	$1,2$	$0,6$	$0,25$	$4,4$	$8,2$	$15,5$

   (a) Faça um esboço desses pontos no plano cartesiano. A partir desse esboço, analise qual o grau do polinômio que parece se ajustar a estes pontos.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar o polinômio que melhor se ajusta a estes pontos (considerando o grau analisado no item (a)).

2. Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, deseja-se determinar a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, $\ldots$, $(x_n,\, y_n)$. Prove que:

$$a = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

   onde em cada somatório temos $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

3. Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados deseja-se determinar $\phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a uma função f no intervalo $[a;\, b]$. Suponha que as funções $g_0,\, g_1,\, \ldots,\, g_n$ sejam escolhidas de tal forma que $\displaystyle\int_a^b g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Prove que nesse caso teremos $a_k = \displaystyle\int_a^b f(x)g_k(x)\,dx$.

4. Considere a função definida por $g_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, onde $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Prove que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = x$ no intervalo $[-1;\, 1]$.