Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Aluno(a): ______________________________ Data: ___ / ___ / _____

Avaliação III

Instruções

- Todas as justificativas necessárias na solução de cada questão devem estar presentes nesta avaliação;
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas de caneta;
- Esta avaliação tem um total de 25,0 pontos.

1. [**4,0 pontos**] Seja uma função f da qual são conhecidos os valores descritos na tabela abaixo.

x_i	1	1,5	2
$f(x_i)$	2	3,125	6

   Determine o polinômio p que interpola f utilizando duas maneiras:

   (a) escrevendo p na Forma de Lagrange;

   (b) escrevendo p na Forma de Newton.

2. [**6,0 pontos**] Monte o sistema de equações que permite determinar uma *spline* natural cúbica que interpole os pontos da tabela abaixo:

x_i	$-1,2$	$-0,1$	$0,5$	$1,4$
y_i	-1	$0,2$	$0,75$	$-0,15$

3. [**5,0 pontos**] Considere a função definida por $g_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, onde $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Prove que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$.

   (b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = x$ no intervalo $[-1;\, 1]$.

4. [**4,0 pontos**] Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados deseja-se determinar $\phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a uma função f no intervalo $[a;\, b]$. Suponha que as funções $g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_n$ sejam escolhidas de tal forma que $\displaystyle\int_a^b g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$. Prove que nesse caso teremos $a_k = \displaystyle\int_a^b f(x)g_k(x)\,dx$.

5. **[6,0 pontos]** Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, deseja-se determinar a reta $y = ax+b$ que melhor se ajusta aos pontos $(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2),\, \dots,\, (x_n,\, y_n)$. Prove que:

$$a = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum(x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

onde em cada somatório temos $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$.