Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Aluno(a): ____ Data: ___ / ___ / ______

Avaliação III

Instruções

- Todas as justificativas necessárias na solução de cada questão devem estar presentes nesta avaliação;
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas de caneta;
- Esta avaliação tem um total de 25,0 pontos.

1. [**4,0 pontos**] Seja uma função f da qual são conhecidos os valores descritos na tabela abaixo.

x_i	1	1,5	2
$f(x_i)$	2	3,125	6

Determine o polinômio p que interpola f utilizando duas maneiras:

(a) escrevendo p na Forma de Lagrange;

(b) escrevendo p na Forma de Newton.

2. [**5,0 pontos**] Seja p o polinômio na Forma de Lagrange que interpola os pontos $(x_0,\, y_0)$, $(x_1,\, y_1)$, $\ldots$, $(x_n,\, y_n)$. Vamos definir o polinômio

$$q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Prove que p pode ser escrito no seguinte formato:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{q(x)}{(x - x_i)q'(x_i)} y_i.$$

3. [**6,0 pontos**] Sobre certa função f são conhecidos os pontos $(x_k,\, f(x_k))$, com $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n$. Suponha que seja aplicado o Método dos Mínimos Quadrados para determinar a função $\phi(x) = ag_1(x) + bg_2(x)$ que melhor se ajusta a f. Deduza que os coeficientes a e b são a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}b = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}b = d_2 \end{cases},$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)g_j(x_k)$ e $d_i = \sum_{k=0}^{n} g_i(x_k)f(x_k)$.

4. [**6,0 pontos**] Considere a função definida por $g_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$, onde $k \in \mathbb{N}$.

(a) Verifique que $\int_{-1}^{1} g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1,\; i = j \\ 0,\; i \neq j \end{cases}$.

(b) Utilize o Método dos Mínimos Quadrados para determinar $\phi(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a função definida por $f(x) = x$ no intervalo $[-1;\, 1]$.

5. [**4,0 pontos**] Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados deseja-se determinar $\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k g_k(x)$ que melhor se ajusta a uma função f no intervalo $[a;\, b]$. Suponha que as funções $g_0,\, g_1,\, \ldots,\, g_n$ sejam escolhidas de tal forma que $\int_a^b g_i(x)g_j(x)\,dx = \begin{cases} 1,\; i = j \\ 0,\; i \neq j \end{cases}$. Prove que nesse caso teremos $a_k = \int_a^b f(x)g_k(x)\,dx$.