Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Lista de Exercícios IV

Observação: Nos exercícios 1 e 2 use o Método de Eliminação Gaussiana para resolver o sistema de equações.

1. Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 1.340 minutos por semana, a bancada para tingir 940 minutos por semana e a bancada para envernizar 1.560 minutos por semana. Quantos móveis devem ser fabricados (por semana) de cada tipo para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?

2. Considere o problema do circuito hidráulico mostrado na Figura 1. Este sistema está alimentado por um reservatório cuja a pressão é mantida constante e igual a $P_r = 10$. As saídas das tubulações desembocam na atmosfera, onde a pressão é considerada nula (isto é, $P_a = 0$). Deste modo, a vazão Q_i da i-ésima tubulação depende da diferença de pressão ΔP_i de tal modo que

$$Q_i = K_i L_i \Delta P_i,$$

onde K_i é a resistência hidráulica e L_i o comprimento da tubulação. Por exemplo, para a tubulação 8 temos que $Q_8 = K_8 L_8 \Delta P_8$, sendo que $\Delta P_8 = P_1 - P_4$ (ou seja, a pressão que "entra" na tubulação pela bifurcação 1 menos a pressão que "sai" da tubulação pela bifurcação 4). Por outro lado, sabe-se que em cada bifurcação a soma das vazões deve ser nula. Por exemplo, na bifurcação 4 temos que $Q_8 - Q_6 - Q_7 = 0$ (aqui note que a vazão que "entra" na bifurcação é considerada positiva, enquanto que a que "sai" é considerada negativa). Considerando essas informações e os dados da Tabela 1, determine as vazões em cada tubulação e as pressões em cada bifurcação.

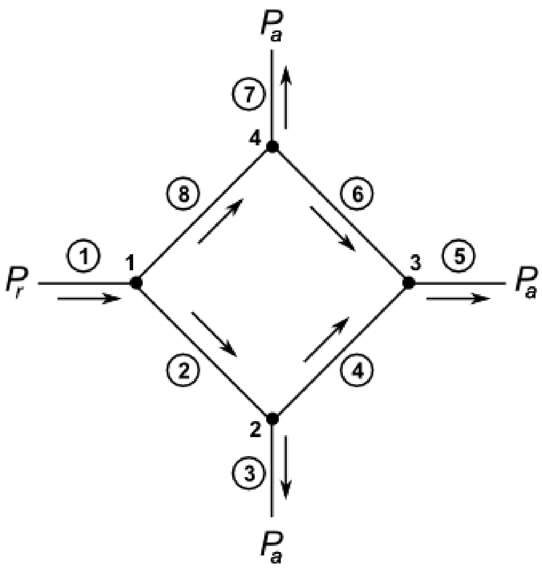

Figura 1: Esquema do circuito hidráulico.

Tubulação i	K_i	L_i
1	0,02	1,0
2	0,005	2,0
3	0,085	0,5
4	0,02	1,0
5	0,075	0,5
6	0,085	0,5
7	0,015	2,0
8	0,01	1,0

Tabela 1: Resistência hidráulica e comprimento das tubulações.

3. Pesquise uma maneira de adaptar o Método de Eliminação Gaussiana para calcular o determinante de uma matriz. Em seguida, use este método para calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a fatoração LU de A.

   (b) Use a fatoração do item anterior para resolver os sistemas $Ax = b$ e $Ax = c$.

5. Suponha que uma matriz A foi fatorada no formato LU (sem utilizar pivoteamento). Preencha os espaços em branco abaixo de modo a determinar as matrizes A, L e U.

$$A = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ 1 & 0 & \square \\ \square & -4 & -3 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \square & 1 & 0 \\ -5 & \square & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} -2 & \square & 4 \\ 0 & \square & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Suponha que a fatoração LU de uma matriz A seja conhecida. Explique como usar essa informação para resolver o sistema $A^T x = b$.

Gabarito

[1] 50 cadeiras, 20 mesinhas de centro e 40 mesas de jantar. **[2]** $P_1 = 5,47246730738932$, $P_2 = 0,919331967858831$, $P_3 = 0,596344729793603$, $P_4 = 0,970537261698440$. $Q_1 = 0,0905506538522137$, $Q_2 = 0,0455313533953049$, $Q_3 = 0,0390716086340003$, $Q_4 = 0,00645974476130455$, $Q_5 = 0,0223629273672601$, $Q_6 = 0,0159031826059556$, $Q_7 = 0,0291161178509532$, $Q_8 = 0,0450193004569088$. **[3]** $\det A = 94$. **[4]** (a) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & \frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. (b) $x = \begin{bmatrix} \frac{17}{20} \\ -\frac{29}{20} \\ -\frac{43}{20} \end{bmatrix}$. $x = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix}$. **[5]** $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **[6]** Sugestão: note que $A^T = (LU)^T = U^T L^T$.