Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Cálculo Numérico
Prof.: Luiz C. M. de Aquino

Aluno(a): ______________________ Data: ___ / ___ / _____

Avaliação II

Instruções

- Todas as justificativas necessárias na solução de cada questão devem estar presentes nesta avaliação;
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas de caneta;
- Esta avaliação tem um total de 25,0 pontos.

1. [**7,5 pontos**] Considere o problema do circuito hidráulico mostrado na Figura 1. Este sistema está alimentado por um reservatório cuja a pressão é mantida constante e igual a $P_r = 10$. As saídas das tubulações desembocam na atmosfera, onde a pressão é considerada nula (isto é, $P_a = 0$). Deste modo, a vazão Q_i da i-ésima tubulação depende da diferença de pressão ΔP_i de tal modo que $Q_i = K_i L_i \Delta P_i$, onde K_i é a resistência hidráulica e L_i o comprimento da tubulação. Por exemplo, para a tubulação 8 temos que $Q_8 = K_8 L_8 \Delta P_8$, sendo que $\Delta P_8 = P_1 - P_4$ (ou seja, a pressão que "entra" na tubulação pela bifurcação 1 menos a pressão que "sai" da tubulação pela bifurcação 4). Por outro lado, sabe-se que em cada bifurcação a soma das vazões deve ser nula. Por exemplo, na bifurcação 4 temos que $Q_8 - Q_6 - Q_7 = 0$ (aqui note que a vazão que "entra" na bifurcação é considerada positiva, enquanto que a que "sai" é considerada negativa). Considerando essas informações e os dados da Tabela 1, responda aos quesitos abaixo.

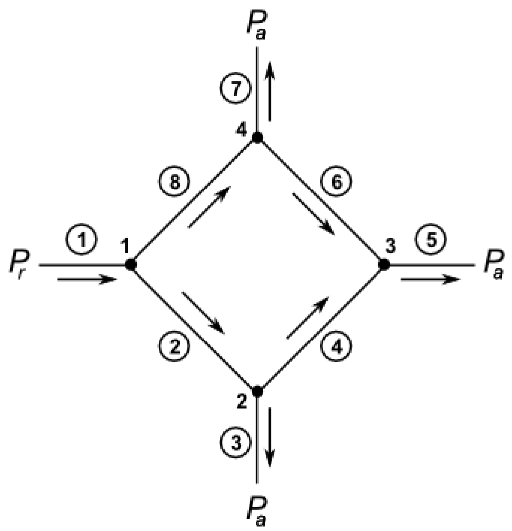

Figura 1: Esquema do circuito hidráulico.

Tubulação i	K_i	L_i
1	0,02	1,0
2	0,005	2,0
3	0,085	0,5
4	0,02	1,0
5	0,075	0,5
6	0,085	0,5
7	0,015	2,0
8	0,01	1,0

Tabela 1: Resistência hidráulica e comprimento das tubulações.

(a) Arme o sistema de equações necessário para obter as pressões em cada bifurcação.

(b) Explique o procedimento necessário para resolver o sistema do quesito (a) usando Eliminação Gaussiana. Atenção: não é necessário determinar a solução do sistema.

2. **[2,5 pontos]** Suponha que uma matriz A foi fatorada no formato LU. Preencha os espaços em branco abaixo de modo a determinar as matrizes A, L e U.

$$A = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ 1 & 0 & \square \\ \square & -4 & -3 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} \square & 0 & 0 \\ \square & \square & 0 \\ -5 & \square & \square \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} -2 & \square & 4 \\ 0 & \square & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. **[5,0 pontos]** Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z - w = -6 \\ -2x - 2y + z - 7w = -5 \\ 5x - y + z - 2w = -2 \\ x - 4y - z + w = 8 \end{cases}$$

(a) Da forma como ele está arrumado, é recomendável usar diretamente o método de Gauss-Jaboci? Justifique sua resposta.

(b) Exiba as equações utilizadas pelo método de Gauss-Jacobi para obter uma solução aproximada desse sistema.

(c) Exiba as equações utilizadas pelo método de Gauss-Seidel para obter uma solução aproximada desse sistema.

4. **[5,0 pontos]** Considere um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas. Suponha que é possível aplicar o Método de Gauss-Jacobi nesse sistema com garantia de convergência. Determine as matrizes $x^{(k)}$, B e c de tal modo a escrever este método no formato $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.

5. **[5,0 pontos]** Determine a fatoração LU da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Use essa fatoração para obter a solução do sistema $Ax = y$, onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.