Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Faculdade de Ciências Sociais, Aplicadas e Exatas - FACSAE
Departamento de Ciências Exatas - DCEX
Disciplina: Matrizes e Sistemas Lineares. Semestre: 2021/1
Prof. Me. Luiz C. M. de Aquino

Lista IV

1. Dizemos que uma matriz A é ortogonal quando sua transposta coincide com sua inversa (ou seja, quando $A^t = A^{-1}$). Considerando a matriz $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, responda aos quesitos abaixo.
   (a) Determine $R_{\frac{\pi}{2}}$.
   (b) Determine $R_{\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.
   (c) Mostre que R_θ é ortogonal.
   (d) Mostre que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.

2. Determine o valor de p para que o sistema abaixo seja SPD.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + px_2 = -1 \end{cases}$$

3. Prove que se $A = B^{-1}CB$, então $A^n = B^{-1}C^nB$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Observação: por convenção considere que $M^0 = I$, para toda matriz quadrada M.)

4. Vamos usar operações com matrizes para criptografar uma mensagem. Primeiro, converta cada letra da mensagem em um número, como indica a tabela abaixo. Cada grupo de três letras, formará uma linha da matriz de mensagem M, de ordem 3×3. Agora, escolha uma matriz invertível S, de ordem 3×3, para ser a chave da criptografia. Para determinar a mensagem criptografada C, calculamos $C = SM$. Já para recuperar a mensagem original, calculamos $M = S^{-1}C$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Considerando que a chave de criptografia é a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e a mensagem criptografada é $C = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 15 \\ -4 & 3 & 80 \\ 48 & 28 & 147 \end{bmatrix}$, qual é a mensagem original?

Gabarito

[1] (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. (c) Sugestão: mostre que $R_\theta R_\theta^t = I$. (d) Sugestão: use as identidades para o seno e o cosseno da soma de arcos. [2] $p \neq -\frac{2}{3}$. [3] Sugestão: aplique o Princípio de Indução Finita. [4] $M = \begin{bmatrix} A & L & G \\ L & I & N \\ E & A & R \end{bmatrix}$.