MAC0315-2018 EP: Simplex

Luciano Antonio Siqueira NUSP: 8535467

O problema de otimização

$$min \int_0^T |a(s)|ds \tag{1}$$

sujeito a

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(s)ds, \forall t \in [0, T] \tag{2}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds, \forall t \in [0, T] \tag{3}$$

$$v(0) = 0, v(T) = 0, x(0) = 0, x(T) = 1 \tag{4}$$

pode ser discretizado dividindo o intervalo T em subintervalos, de modo que o cálculo das integrais é substituído por aproximações em cada um desses subintervalos.

1 Discretização

Tomando $d \geq 2$ como o número de subintervalos, a função em (1) pode ser substituída por

$$min \sum_{i=0}^{d} |a_i| \tag{5}$$

e as restrições (2), (3) e (4) podem ser substituídas por

$$v_{i+1} = v_i + \rho a_i, \forall i \in \{0, \cdots, d-1\} \tag{6}$$

$$x_{i+1} = x_i + \rho v_i, \forall i \in \{0, \cdots, d-1\} \tag{7}$$

$$v_0 = 0, v_d = 0, x_0 = 0, x_d = 1 \tag{8}$$

onde ρ é o tamanho do subintervalo, definido por $\rho = \frac{T}{d}$. Em particular, a restrição (7) pode ser reescrita como

$$x_{i+1} = x_i + \rho(v_{i+1} - \rho a_i) = x_i + \rho v_{i+1} - \rho^2 a_i, \forall i \in \{0, \cdots, d-1\}$$

pois (6) implica que $v_i = v_{i+1} - \rho a_i$.

A princípio, o problema possui três grupos de variáveis: a_i, v_i e x_i, mas apenas as variáveis a_i possuem coeficientes não nulos na função objetivo. As variáveis v_i e x_i atuam apenas nas restrições do problema.

A matriz de restrições correspondente a (6), (7) e (8) possuirá $2d+4$ linhas e $3d+2$ colunas. Por exemplo, para um número de subintervalos $d = 2$, a forma matricial das restrições é dada por

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho^2 & 0 & 0 & \rho & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2 & 0 & 0 & \rho & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

A variável a_d não aparece nas restrições. Seu valor é considerado nulo, pois não interfere na solução de interesse: a minimização da aceleração antes de chegar no instante final T.

1.1 Tratamento do módulo e variáveis irrestritas

Para lidar com a minimização dos valores absolutos na função objetivo, as variáveis $|a_i|$ são substituídas por um número correspondente de variáveis z_i:

$$min \sum_{i=0}^{d} z_i$$

e duas novas restrições são incluídas para cada $i = 1, \cdots, d$:

$$z_i \geq a_i$$

$$z_i \geq -a_i$$

sendo $z_i \geq 0$. Já as variáveis a_i são irrestritas e por isso serão substituídas pelas variáveis $a_i^+ \geq 0$ e $a_i^- \geq 0$, tal que $a_i = a_i^+ - a_i^-$. Desse modo, as restrições para o problema ficam dadas por:

$$v_{i+1} = v_i + \rho(a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \cdots, d-1\}$$

$$x_{i+1} = x_i + \rho v_{i+1} - \rho^2(a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \cdots, d-1\}$$

$$v_0 = 0, v_d = 0, x_0 = 0, x_d = 1$$

$$z_i \geq (a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \cdots, d-1\}$$

$$z_i \geq -(a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \cdots, d-1\}$$

$$a_i^+, a_i^-, v_i, x_i, z_i \geq 0, \forall i \in \{0, \cdots, d\}$$

A nova forma matricial é obtida estendendo a forma exemplificada em (9) para adequar-se às novas restrições, resultando numa matriz com $4d + 4$ linhas e $5d + 2$ colunas. Por fim, são incluídas as variáveis de folga para cada restrição de desigualdade, aumentando o número de colunas da matriz de restrição para $7d + 2$.

2 Implementação

O programa foi implementado em linguagem *Python*. O arquivo `ep.py` contém os procedimentos para construir o problema e o arquivo `simplex.py` contém a implementação do algoritmo de duas fases dos Simplex, invocado automaticamente quando `ep.py` é executado.

A quantidade de intervalos d utilizada na discretização do problema é informada como parâmetro do comando `ep.py`. Por exemplo, se o comando for invocado na forma `./ep.py 8`, então o tempo será discretizado em 8 partes.

A saída do programa é dividida em 4 colunas, separadas por um caractere de tabulação. Na primeira coluna estão os tempos discretizados e nas colunas seguintes estão *a(t)*, *v(t)* e *x(t)* correspondentes a cada intervalo de tempo na primeira coluna. Na última linha da saída é exibido o valor ótimo para a discretização solicitada. A saída produzida pelo comando `./ep.py 8` será:

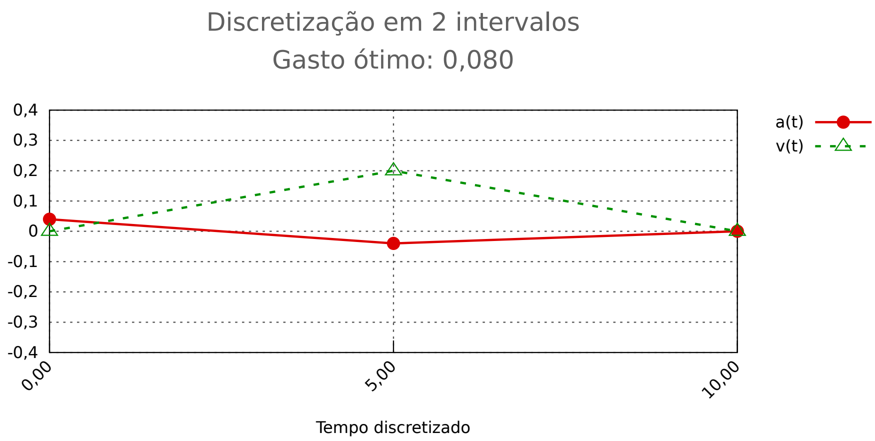
```
t       a(t)    v(t)    x(t)
0,00    0,091429        0,000000        0,000000
1,25    0,000000        0,114286        0,285714
2,50    0,000000        0,114286        0,428571
3,75    0,000000        0,114286        0,571429
5,00    0,000000        0,114286        0,714286
6,25    0,000000        0,114286        0,857143
7,50    0,000000        0,114286        1,000000
```

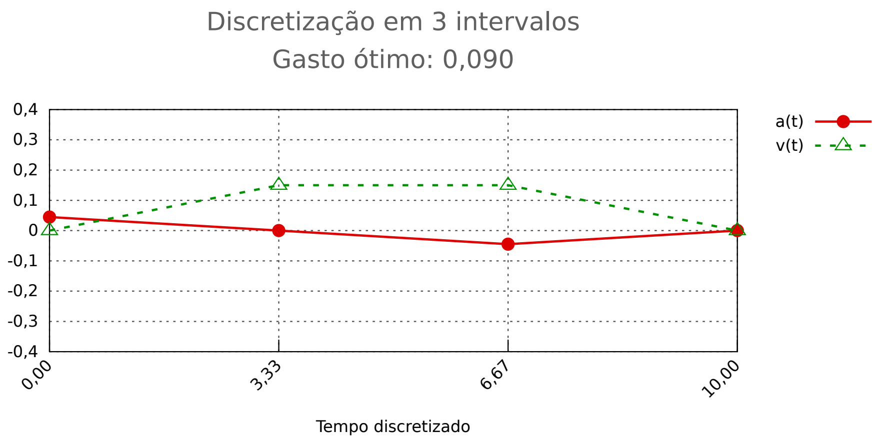
```
8,75     -0,091429       0,114286        1,142857
10,00    0,000000        0,000000        1,000000
Valor ótimo: 0.182857
```

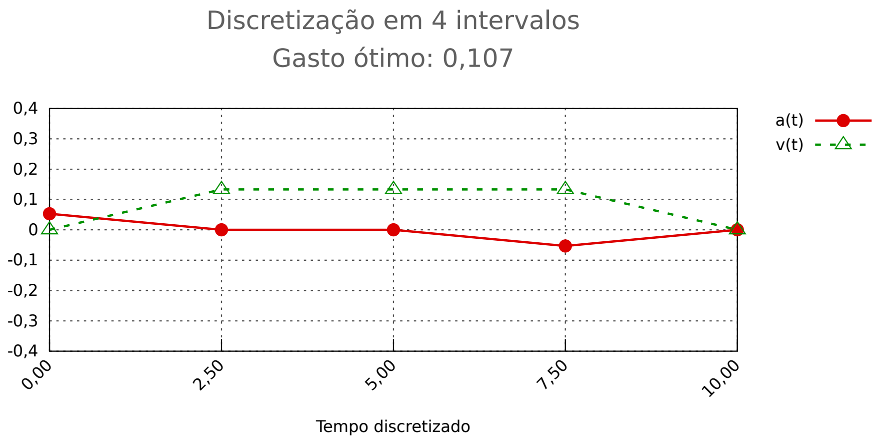
3 Resultados

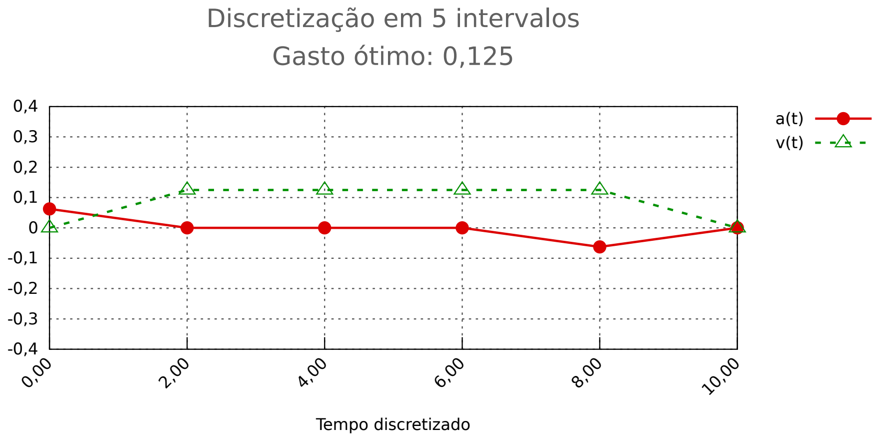
Foram feitas diversas discretizações, cujos resultados estão ilustrados nos gráficos a seguir. As soluções ficaram dentro do esperado, pois observa-se que uma aceleração é aplicada no início para impulsionar o foguete e uma aceleração negativa equivalente é aplicada no fim, parando o foguete.

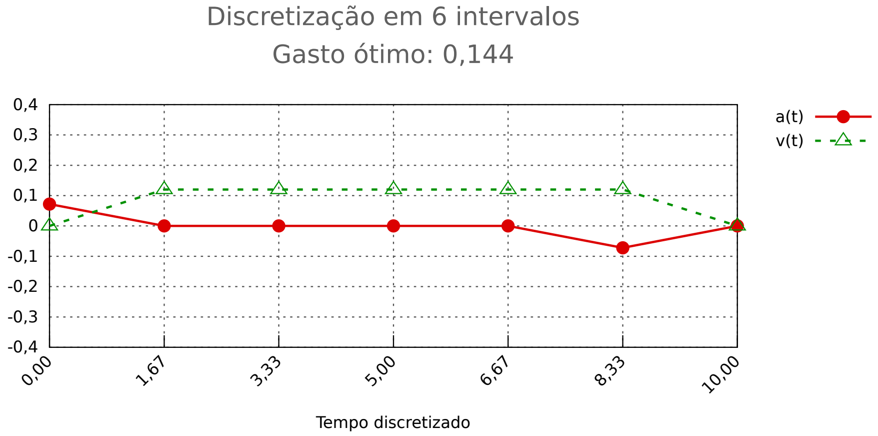
Apesar do valor ótimo ser melhor quando é utilizado um número menor de subintervalos de discretização, é esperado que o erro na aproximação das integrais seja grande quando são utilizados subintervalos de tempo muito grandes. Por isso, valores mais confiáveis são obtidos quanto maior for o número de subintervalos utilizados na discretização.

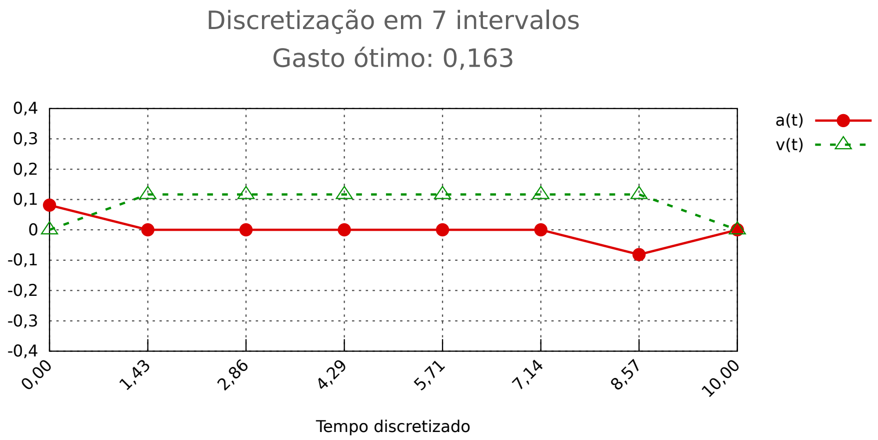


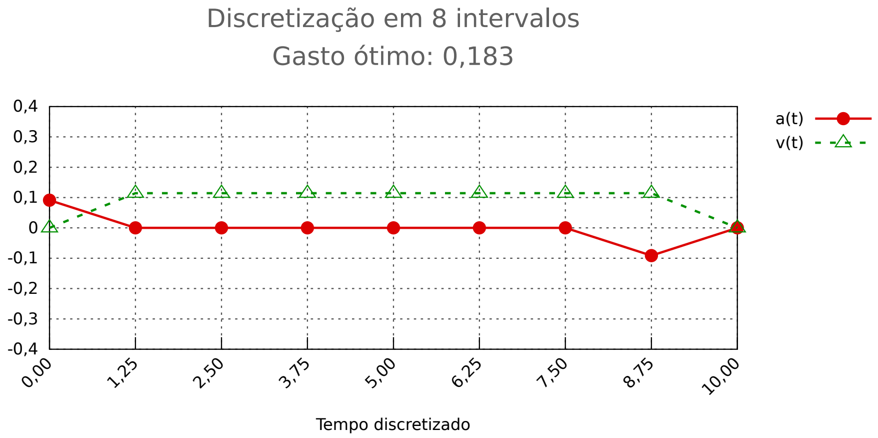


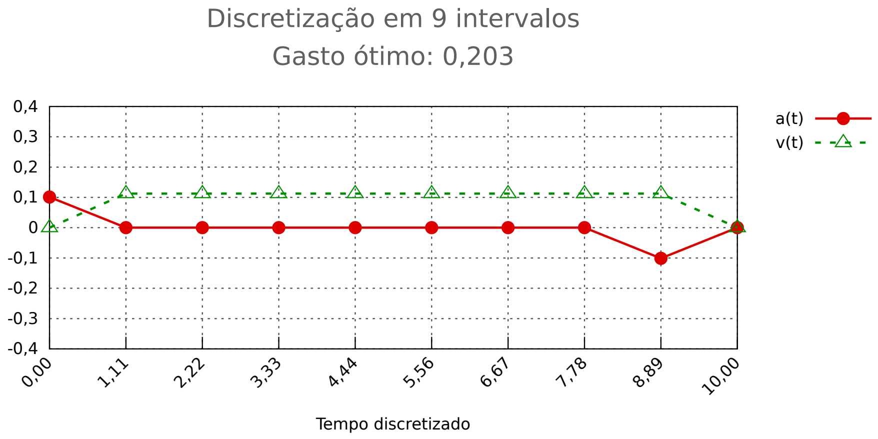

Discretização em 4 intervalos
Gasto ótimo: 0,107
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
2,50
5,00
7,50
10,00
Tempo discretizado

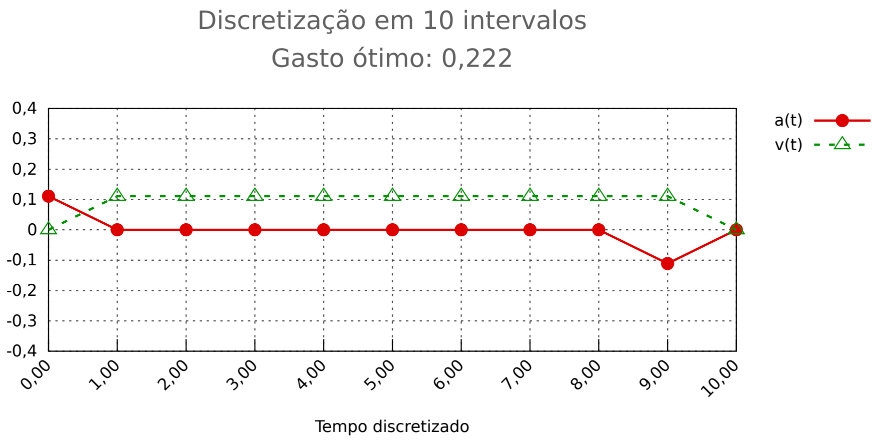

Discretização em 5 intervalos
Gasto ótimo: 0,125
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
2,00
4,00
6,00
8,00
10,00
Tempo discretizado

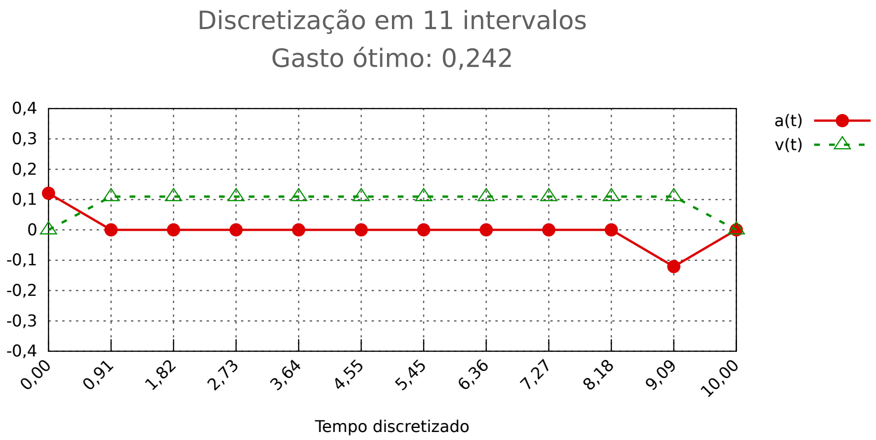

Discretização em 6 intervalos
Gasto ótimo: 0,144
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
1,67
3,33
5,00
6,67
8,33
10,00
Tempo discretizado

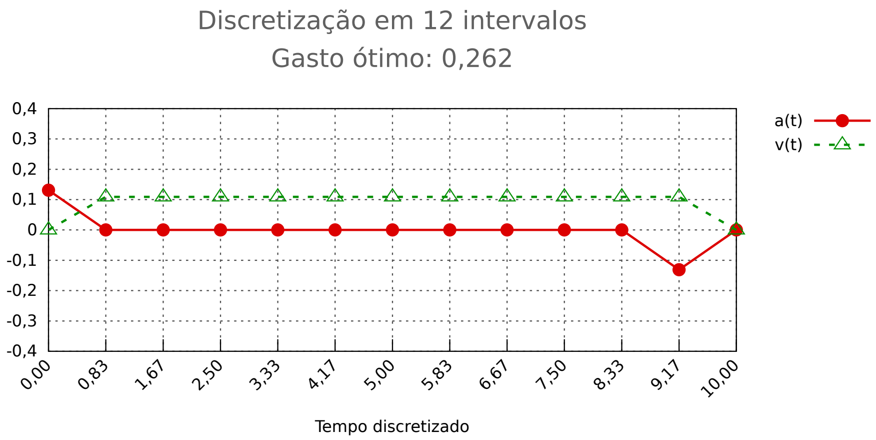

Discretização em 7 intervalos
Gasto ótimo: 0,163
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
1,43
2,86
4,29
5,71
7,14
8,57
10,00
Tempo discretizado


Discretização em 8 intervalos
Gasto ótimo: 0,183
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
1,25
2,50
3,75
5,00
6,25
7,50
8,75
10,00
Tempo discretizado

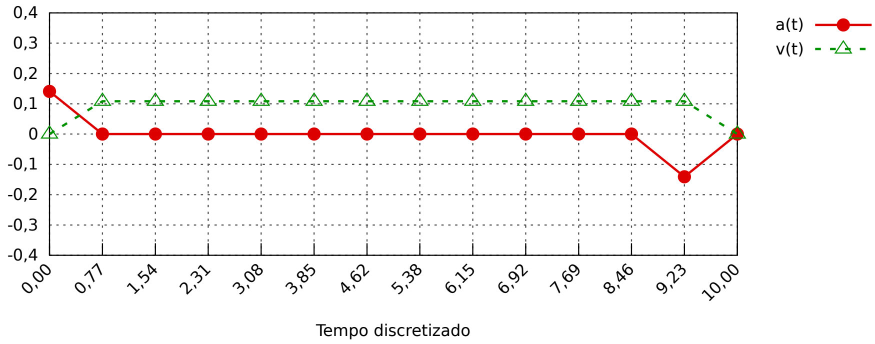

Discretização em 9 intervalos
Gasto ótimo: 0,203
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
1,11
2,22
3,33
4,44
5,56
6,67
7,78
8,89
10,00
Tempo discretizado


Discretização em 10 intervalos
Gasto ótimo: 0,222
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
1,00
2,00
3,00
4,00
5,00
6,00
7,00
8,00
9,00
10,00
Tempo discretizado

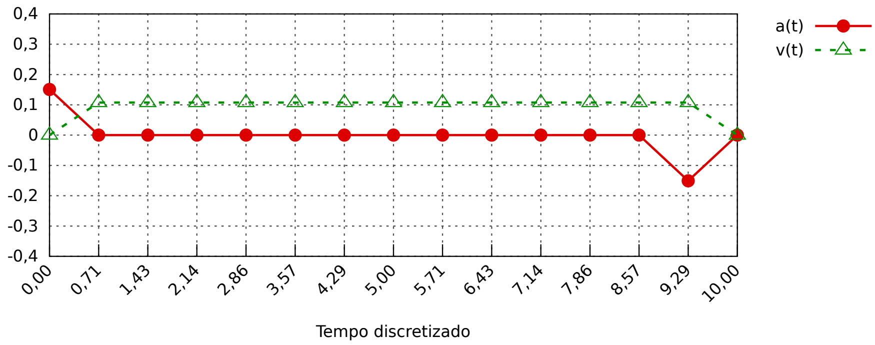

Discretização em 11 intervalos
Gasto ótimo: 0,242
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
0,91
1,82
2,73
3,64
4,55
5,45
6,36
7,27
8,18
9,09
10,00
Tempo discretizado


Discretização em 12 intervalos
Gasto ótimo: 0,262
a(t)
v(t)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00
0,83
1,67
2,50
3,33
4,17
5,00
5,83
6,67
7,50
8,33
9,17
10,00
Tempo discretizado

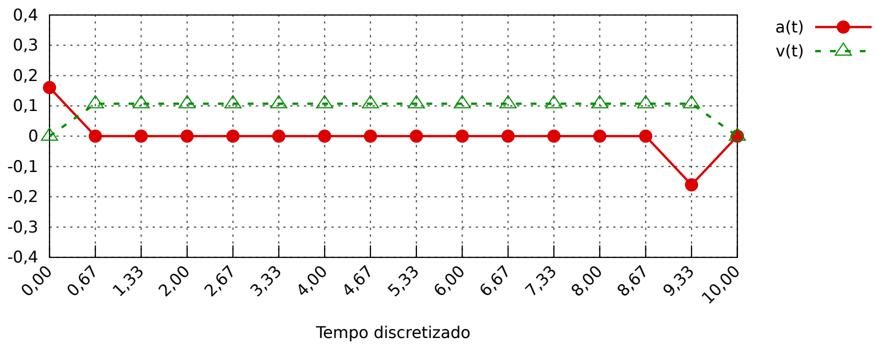
Discretização em 13 intervalos
Gasto ótimo: 0,282

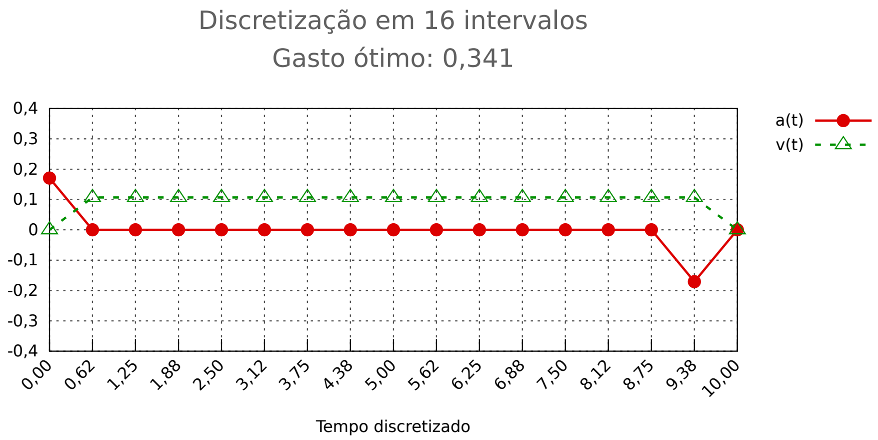


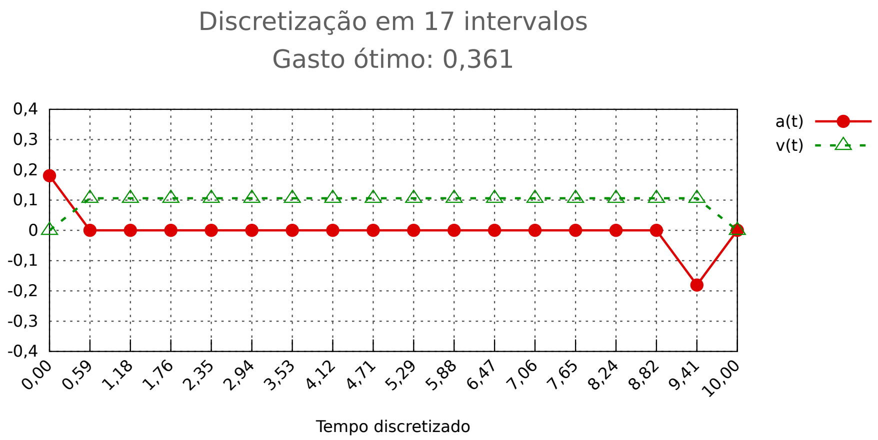
Discretização em 14 intervalos
Gasto ótimo: 0,302

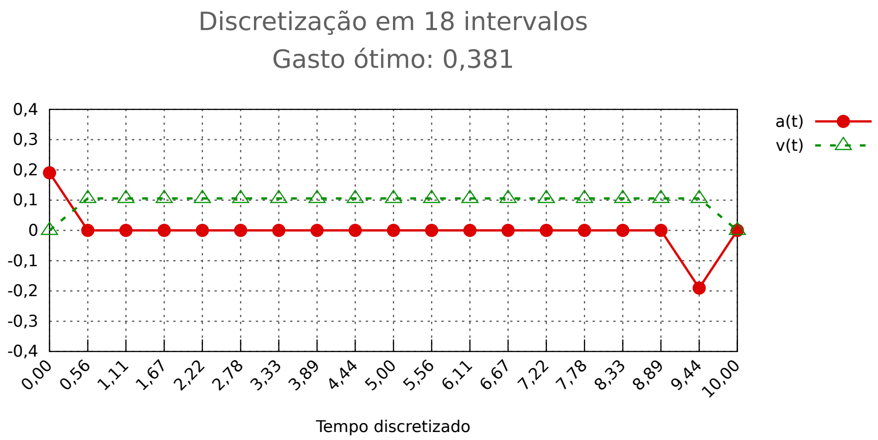


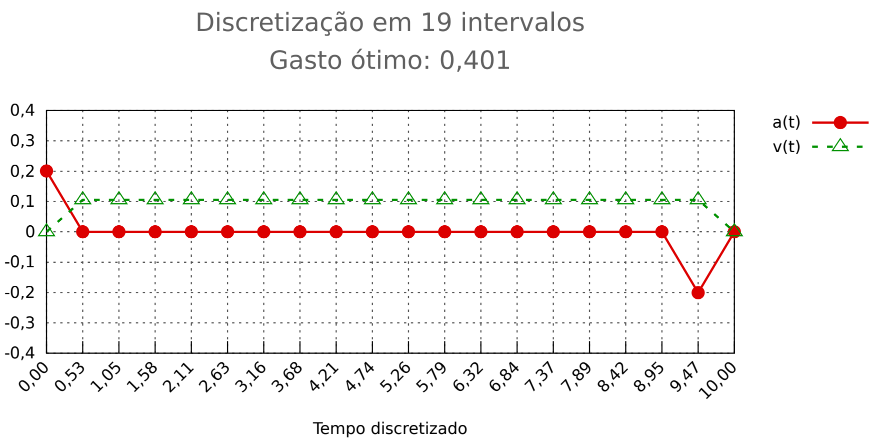
Discretização em 15 intervalos
Gasto ótimo: 0,321

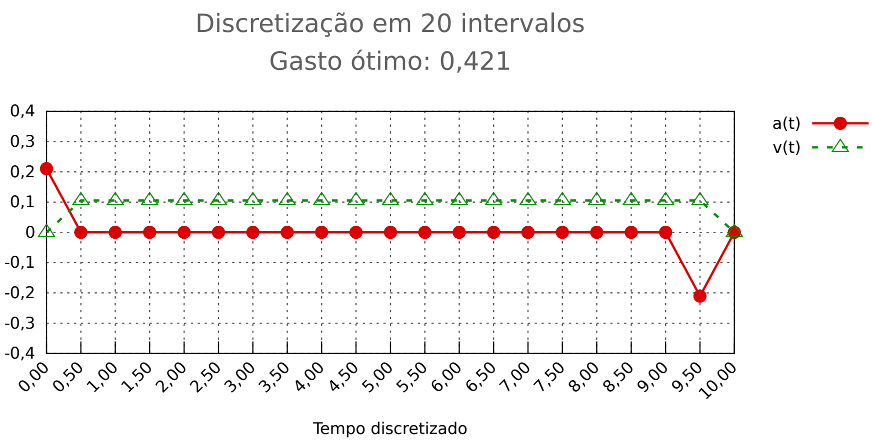


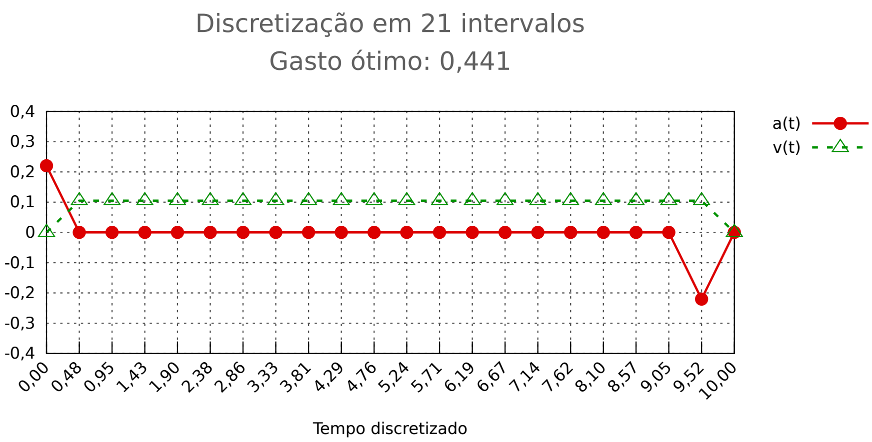

Discretização em 16 intervalos
Gasto ótimo: 0,341
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00 0,62 1,25 1,88 2,50 3,12 3,75 4,38 5,00 5,62 6,25 6,88 7,50 8,12 8,75 9,38 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)

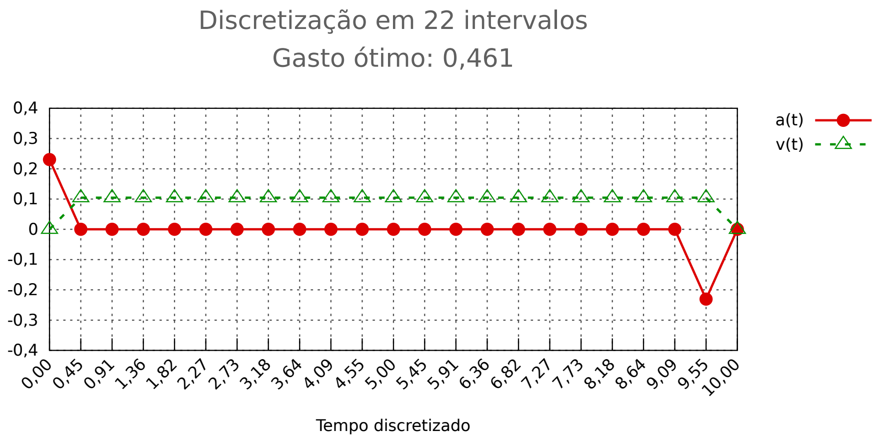

Discretização em 17 intervalos
Gasto ótimo: 0,361
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00 0,59 1,18 1,76 2,35 2,94 3,53 4,12 4,71 5,29 5,88 6,47 7,06 7,65 8,24 8,82 9,41 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)

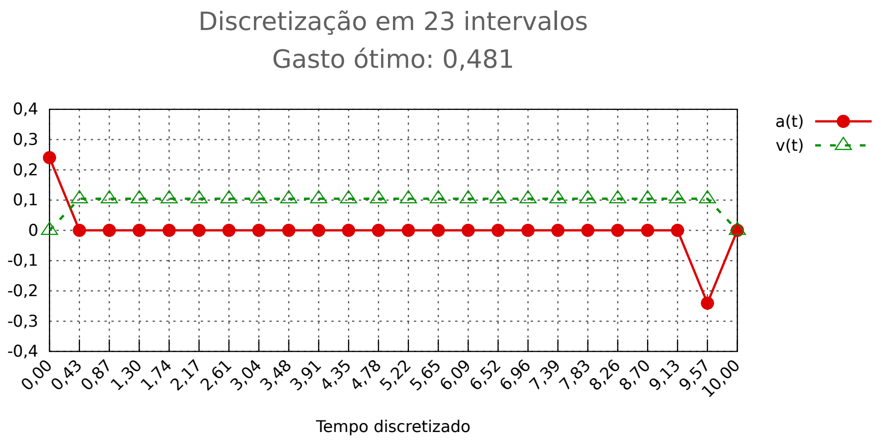

Discretização em 18 intervalos
Gasto ótimo: 0,381
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
0,00 0,56 1,11 1,67 2,22 2,78 3,33 3,89 4,44 5,00 5,56 6,11 6,67 7,22 7,78 8,33 8,89 9,44 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)

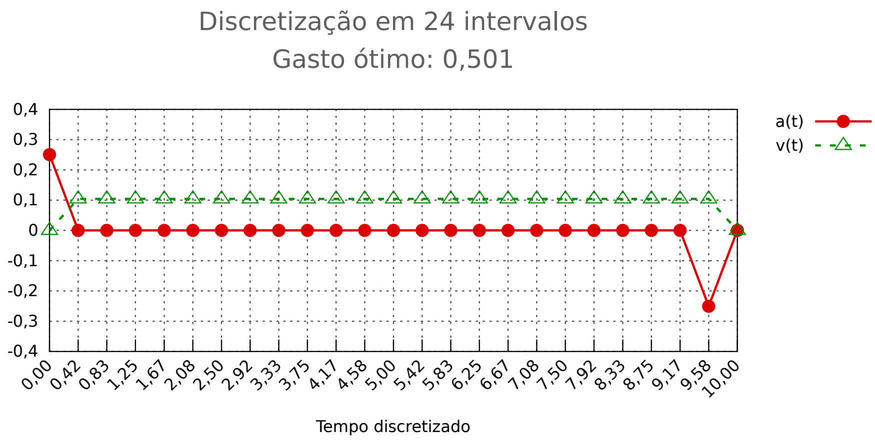

Discretização em 19 intervalos
Gasto ótimo: 0,401
a(t)
v(t)
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,53 1,05 1,58 2,11 2,63 3,16 3,68 4,21 4,74 5,26 5,79 6,32 6,84 7,37 7,89 8,42 8,95 9,47 10,00
Tempo discretizado


Discretização em 20 intervalos
Gasto ótimo: 0,421
a(t)
v(t)
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,50 1,00 1,50 2,00 2,50 3,00 3,50 4,00 4,50 5,00 5,50 6,00 6,50 7,00 7,50 8,00 8,50 9,00 9,50 10,00
Tempo discretizado

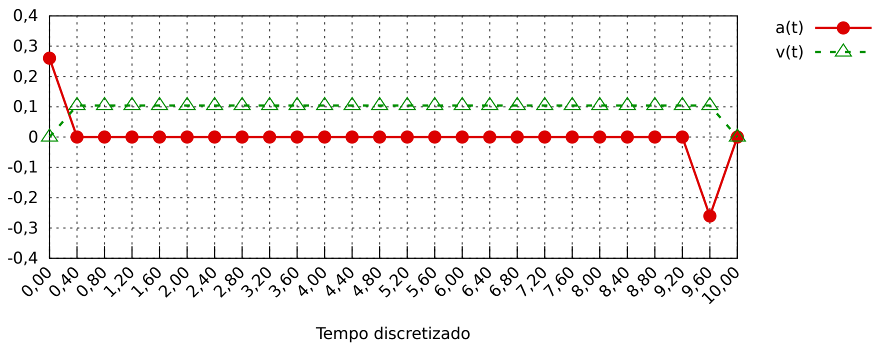

Discretização em 21 intervalos
Gasto ótimo: 0,441
a(t)
v(t)
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,48 0,95 1,43 1,90 2,38 2,86 3,33 3,81 4,29 4,76 5,24 5,71 6,19 6,67 7,14 7,62 8,10 8,57 9,05 9,52 10,00
Tempo discretizado


Discretização em 22 intervalos
Gasto ótimo: 0,461
a(t)
v(t)
Tempo discretizado

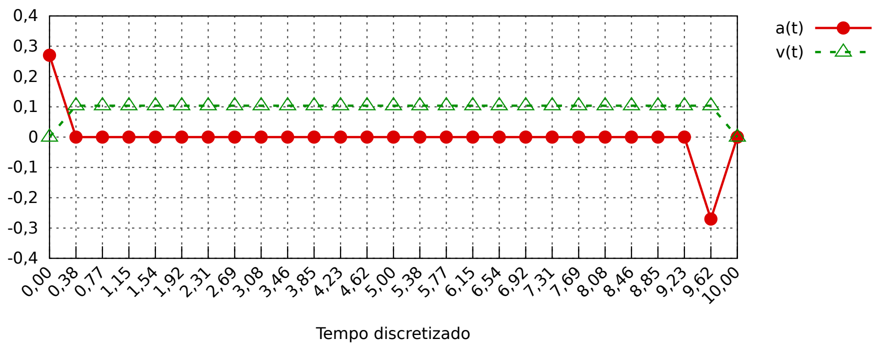

Discretização em 23 intervalos
Gasto ótimo: 0,481
a(t)
v(t)
Tempo discretizado


Discretização em 24 intervalos
Gasto ótimo: 0,501
a(t)
v(t)
Tempo discretizado

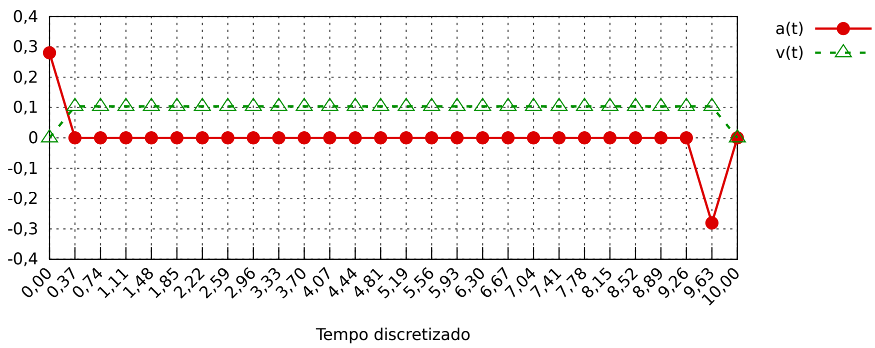
Discretização em 25 intervalos
Gasto ótimo: 0,521

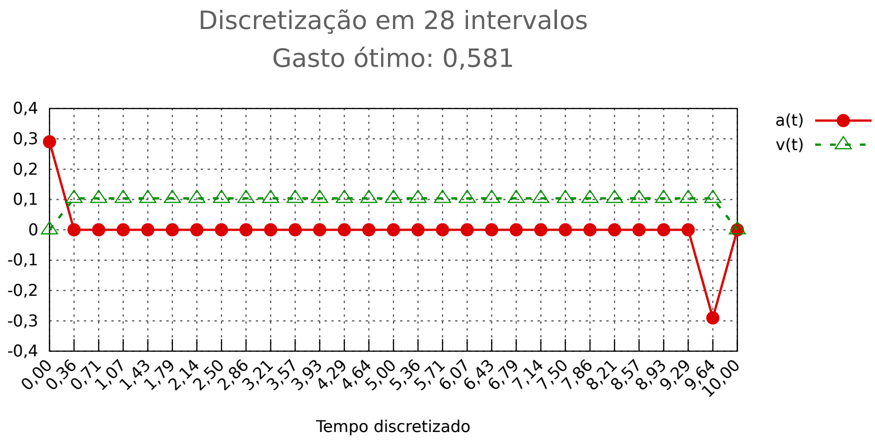


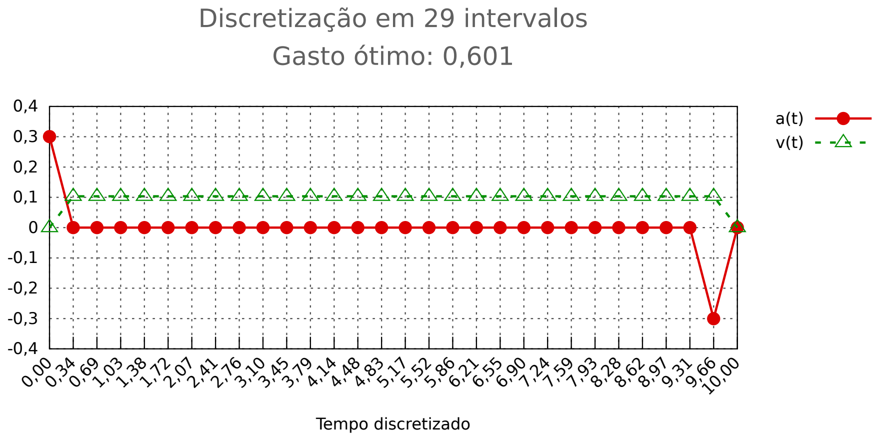
Discretização em 26 intervalos
Gasto ótimo: 0,541

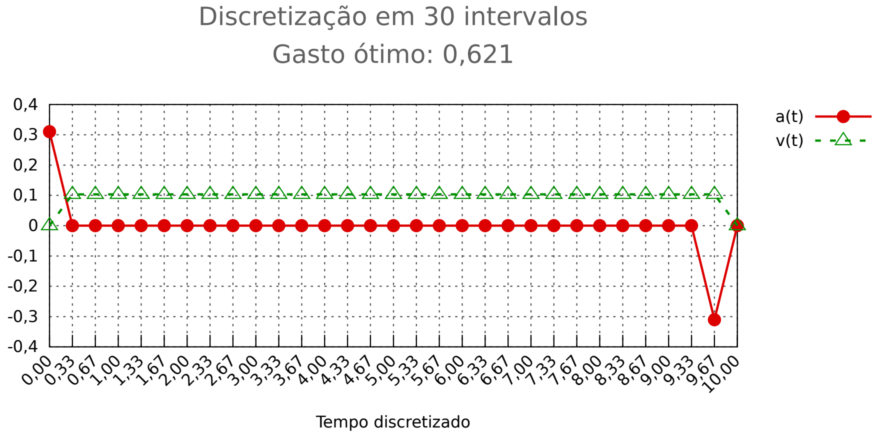


Discretização em 27 intervalos
Gasto ótimo: 0,561

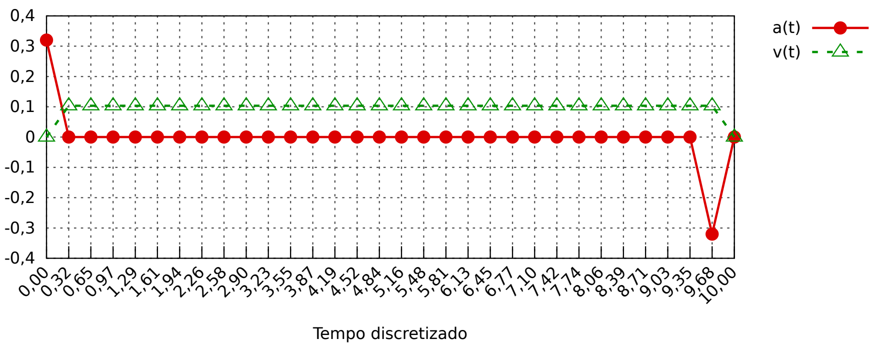



Discretização em 28 intervalos
Gasto ótimo: 0,581
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,36 0,71 1,07 1,43 1,79 2,14 2,50 2,86 3,21 3,57 3,93 4,29 4,64 5,00 5,36 5,71 6,07 6,43 6,79 7,14 7,50 7,86 8,21 8,57 8,93 9,29 9,64 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)

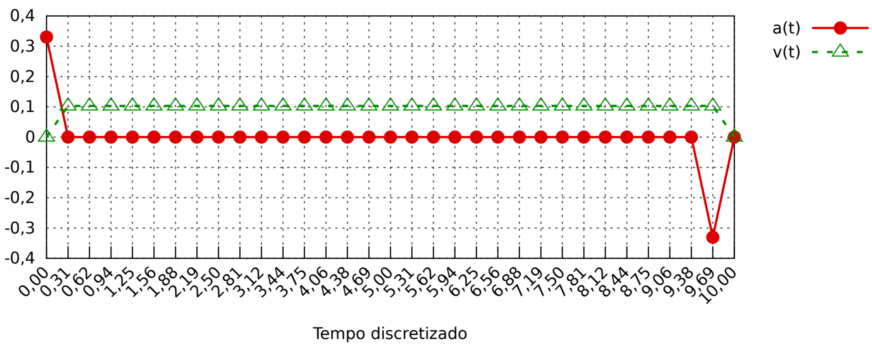

Discretização em 29 intervalos
Gasto ótimo: 0,601
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,34 0,69 1,03 1,38 1,72 2,07 2,41 2,76 3,10 3,45 3,79 4,14 4,48 4,83 5,17 5,52 5,86 6,21 6,55 6,90 7,24 7,59 7,93 8,28 8,62 8,97 9,31 9,66 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)


Discretização em 30 intervalos
Gasto ótimo: 0,621
0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3 -0,4
0,00 0,33 0,67 1,00 1,33 1,67 2,00 2,33 2,67 3,00 3,33 3,67 4,00 4,33 4,67 5,00 5,33 5,67 6,00 6,33 6,67 7,00 7,33 7,67 8,00 8,33 8,67 9,00 9,33 9,67 10,00
Tempo discretizado
a(t)
v(t)

Discretização em 31 intervalos
Gasto ótimo: 0,641



Discretização em 32 intervalos
Gasto ótimo: 0,661



Discretização em 33 intervalos
Gasto ótimo: 0,681