

MAC0315-2018 EP: Simplex

Luciano Antonio Siqueira NUSP: 8535467

O problema de otimização

$$\min \int_0^T |a(s)| ds \quad (1)$$

sujeito a

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(s) ds, \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s) ds, \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

$$v(0) = 0, v(T) = 0, x(0) = 0, x(T) = 1 \quad (4)$$

pode ser discretizado dividindo o intervalo T em subintervalos, de modo que o cálculo das integrais é substituído por aproximações em cada um desses subintervalos.

1 Discretização

Tomando $d \geq 2$ como o número de subintervalos, a função em (1) pode ser substituída por

$$\min \sum_{i=0}^d |a_i| \quad (5)$$

e as restrições (2), (3) e (4) podem ser substituídas por

$$v_{i+1} = v_i + \rho a_i, \forall i \in \{0, \dots, d-1\} \quad (6)$$

$$x_{i+1} = x_i + \rho v_i, \forall i \in \{0, \dots, d-1\} \quad (7)$$

$$v_0 = 0, v_d = 0, x_0 = 0, x_d = 1 \quad (8)$$

onde ρ é o tamanho do subintervalo, definido por $\rho = \frac{T}{d}$.

A princípio, o problema possui três grupos de variáveis: a_i , v_i e x_i , mas apenas as variáveis a_i possuem coeficientes não nulos na função objetivo. As variáveis v_i e x_i atuam apenas nas restrições do problema.

A matriz de restrições correspondente a (6), (7) e (8) possuirá $2d + 4$ linhas e $3d + 2$ colunas. Por exemplo, para um número de subintervalos $d = 2$, a forma matricial das restrições é dada por

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

A variável a_d não aparece nas restrições. Seu valor é considerado nulo, pois não interfere na solução de interesse: a minimização da aceleração antes de chegar no instante final T .

1.1 Tratamento do módulo e variáveis irrestritas

Para lidar com a minimização dos valores absolutos na função objetivo, as variáveis $|a_i|$ são substituídas por um número correspondente de variáveis z_i :

$$\min \sum_{i=0}^d z_i$$

e duas novas restrições são incluídas para cada $i = 1, \dots, d$:

$$z_i \geq a_i$$

$$z_i \geq -a_i$$

sendo $z_i \geq 0$. Já as variáveis a_i são irrestritas e por isso serão substituídas pelas variáveis $a_i^+ \geq 0$ e $a_i^- \geq 0$, tal que $a_i = a_i^+ - a_i^-$. Desse modo, as restrições para o problema ficam dadas por:

$$v_{i+1} = v_i + \rho(a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$$

$$x_{i+1} = x_i + \rho v_i, \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$$

$$v_0 = 0, v_d = 0, x_0 = 0, x_d = 1$$

$$z_i \geq (a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$$

$$z_i \geq -(a_i^+ - a_i^-), \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$$

$$a_i^+, a_i^-, v_i, x_i, z_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, d\}$$

A nova forma matricial é obtida estendendo a forma exemplificada em (9) para adequar-se às novas restrições, resultando numa matriz com $4d + 4$ linhas e $5d + 2$ colunas. Por fim, são incluídas as variáveis de folga para cada restrição de desigualdade, aumentando o número de colunas da matriz de restrição para $7d + 2$.

2 Implementação

O programa foi implementado em linguagem *Python*. O arquivo `ep.py` contém os procedimentos para construir o problema e o arquivo `simplex.py` contém a implementação do algoritmo de duas fases dos Simplex, invocado automaticamente quando `ep.py` é executado.

A quantidade de intervalos d utilizada na discretização do problema é informada como parâmetro do comando `ep.py`. Por exemplo, se o comando for invocado na forma `./ep.py 8`, então o tempo será discretizado em 8 partes.

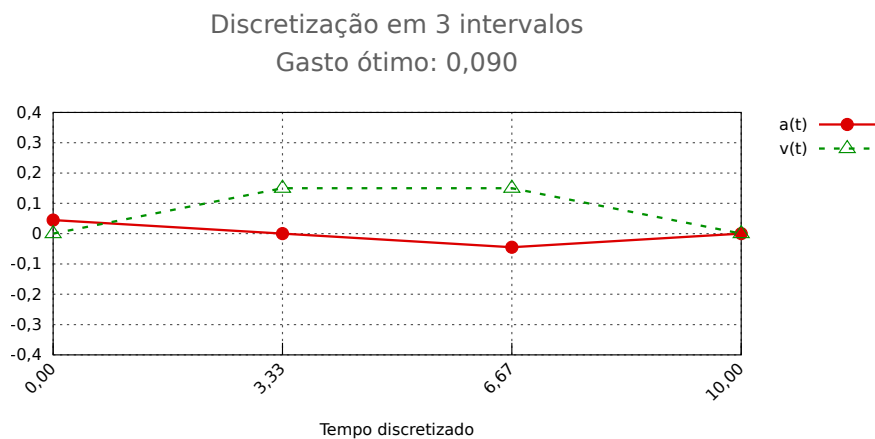
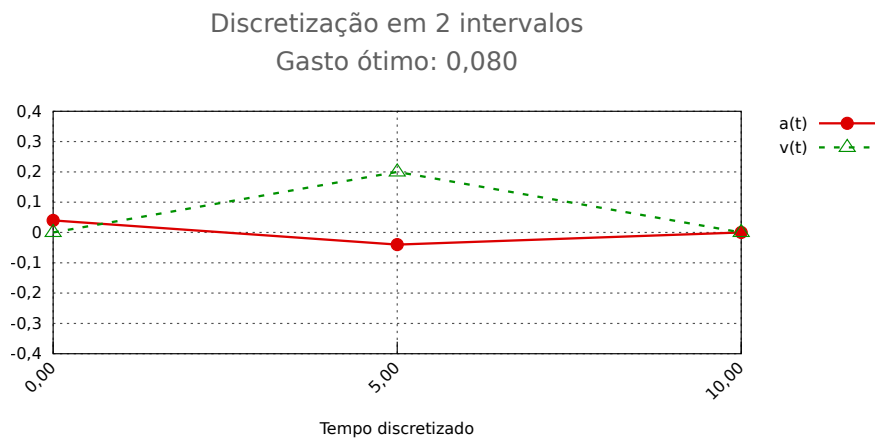
A saída do programa é dividida em 4 colunas, separadas por um caractere de tabulação. Na primeira coluna estão os tempos discretizados e nas colunas seguintes estão $a(t)$, $v(t)$ e $x(t)$ correspondentes a cada intervalo de tempo na primeira coluna. Na última linha da saída é exibido o valor ótimo para a discretização solicitada. A saída produzida pelo comando `./ep.py 8` será:

t	a(t)	v(t)	x(t)
0,00	0,091429		0,000000
1,25	0,000000		0,114286
2,50	0,000000		0,114286
3,75	0,000000		0,114286
5,00	0,000000		0,114286
6,25	0,000000		0,114286
7,50	0,000000		0,114286
8,75	-0,091429		0,114286
10,00	0,000000		0,000000
Valor ótimo: 0.182857			

3 Resultados

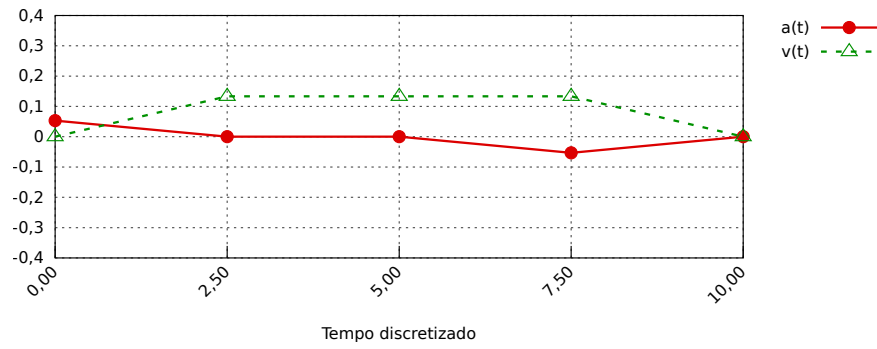
Foram feitas diversas discretizações, cujos resultados estão ilustrados nos gráficos a seguir. As soluções ficaram dentro do esperado, pois observa-se que uma aceleração é aplicada no início para impulsionar o foguete e uma aceleração negativa equivalente é aplicada no fim, parando o foguete.

Apesar do valor ótimo ser melhor quando é utilizado um número menor de subintervalos de discretização, é esperado que o erro na aproximação das integrais seja grande quando são utilizados subintervalos de tempo muito grandes. Por isso, valores mais confiáveis são obtidos quanto maior for o número de subintervalos utilizados na discretização.



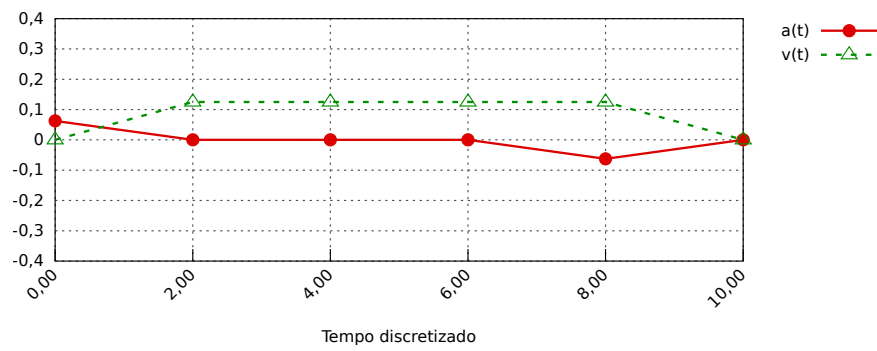
Discretização em 4 intervalos

Gasto ótimo: 0,107



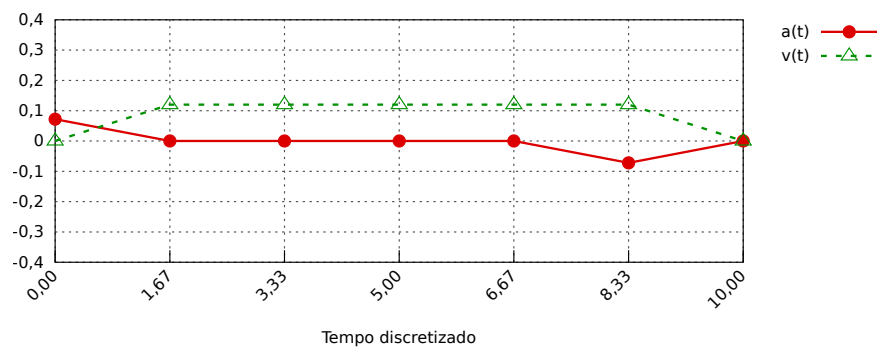
Discretização em 5 intervalos

Gasto ótimo: 0,125



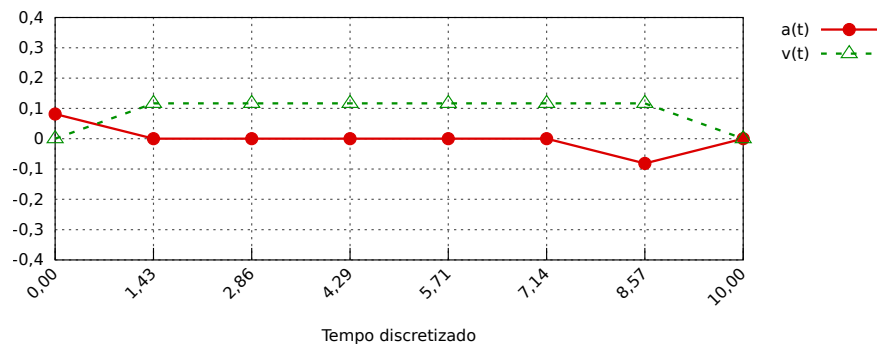
Discretização em 6 intervalos

Gasto ótimo: 0,144



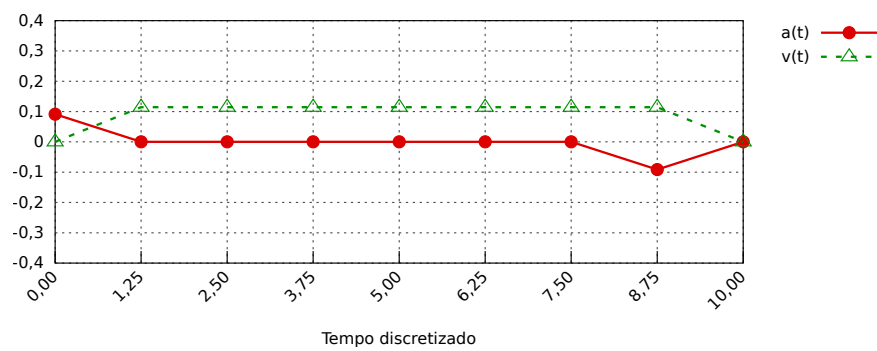
Discretização em 7 intervalos

Gasto ótimo: 0,163



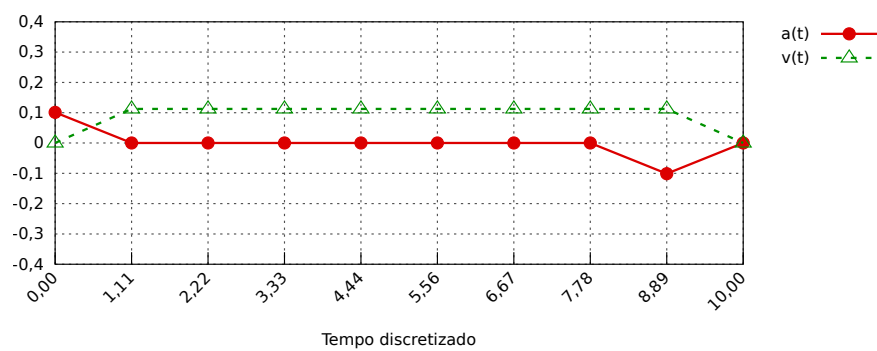
Discretização em 8 intervalos

Gasto ótimo: 0,183



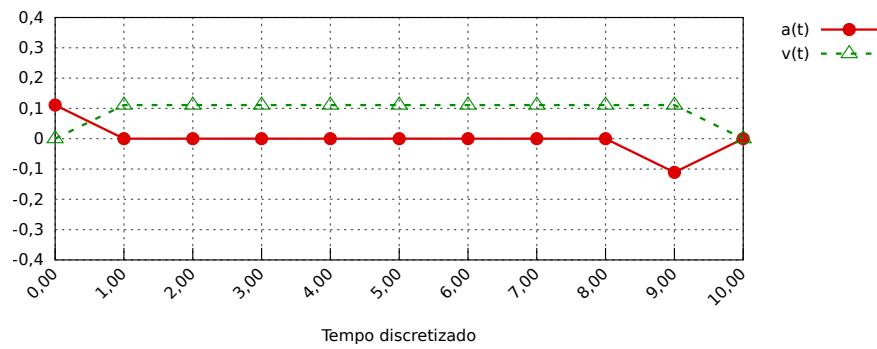
Discretização em 9 intervalos

Gasto ótimo: 0,203



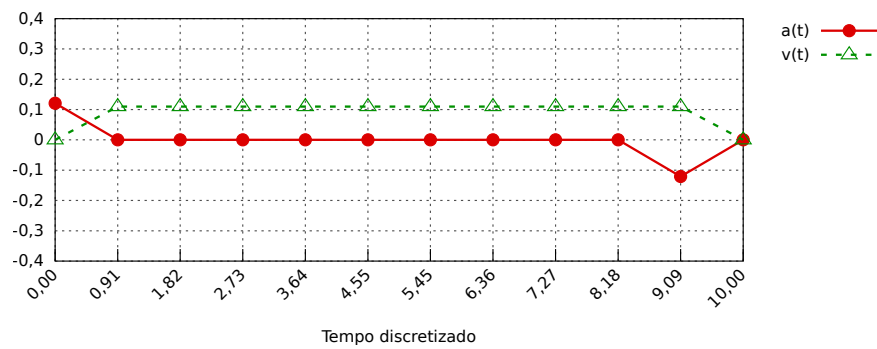
Discretização em 10 intervalos

Gasto ótimo: 0,222



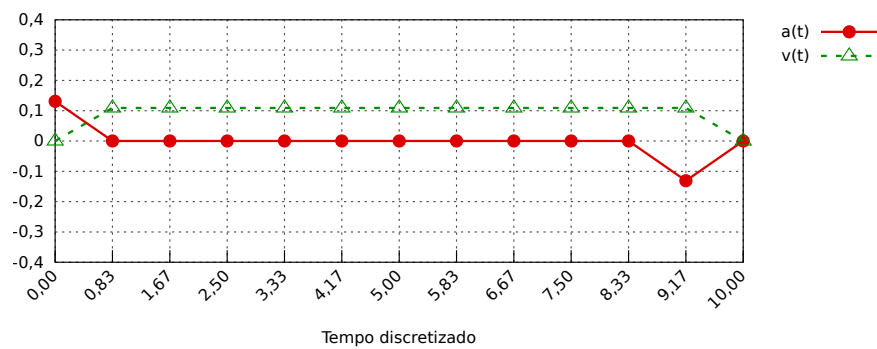
Discretização em 11 intervalos

Gasto ótimo: 0,242



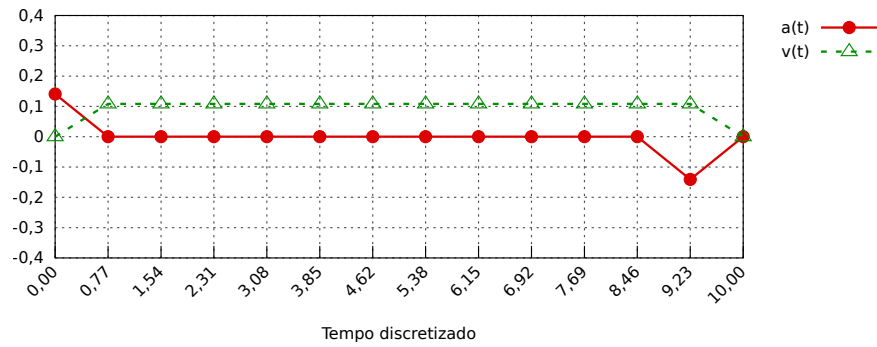
Discretização em 12 intervalos

Gasto ótimo: 0,262



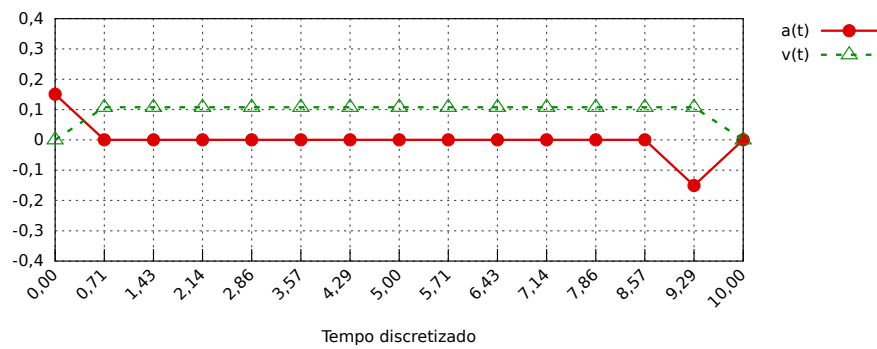
Discretização em 13 intervalos

Gasto ótimo: 0,282



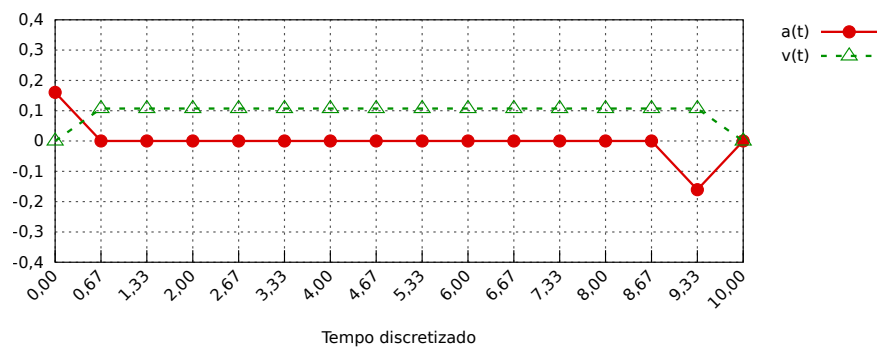
Discretização em 14 intervalos

Gasto ótimo: 0,302



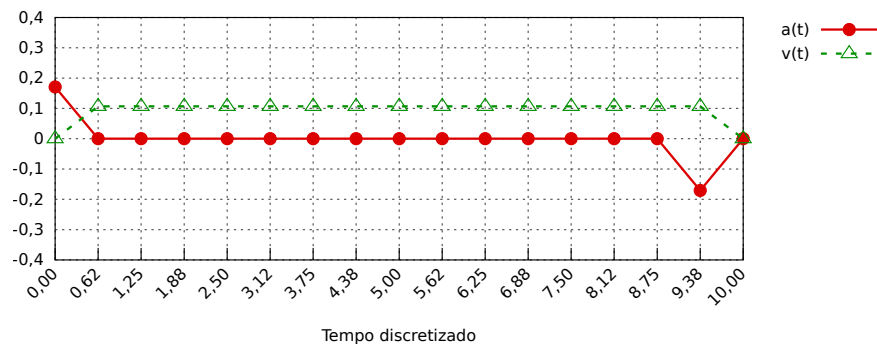
Discretização em 15 intervalos

Gasto ótimo: 0,321



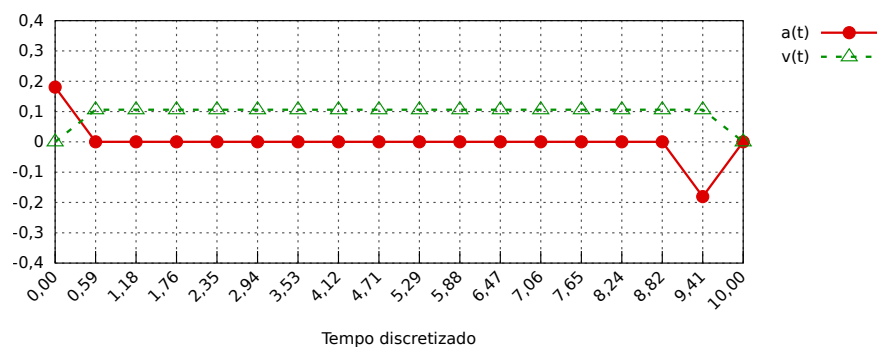
Discretização em 16 intervalos

Gasto ótimo: 0,341



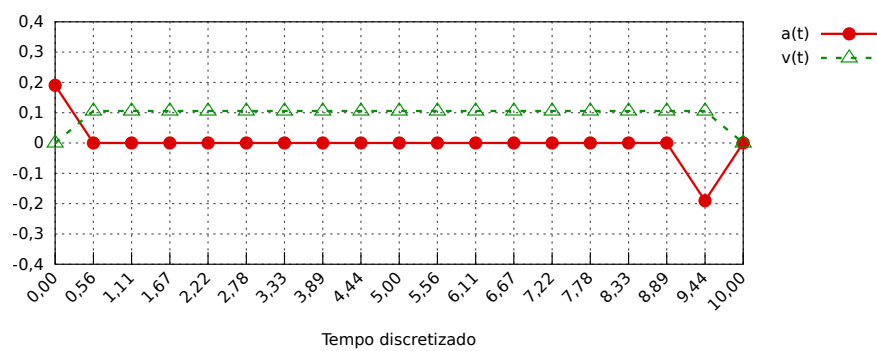
Discretização em 17 intervalos

Gasto ótimo: 0,361



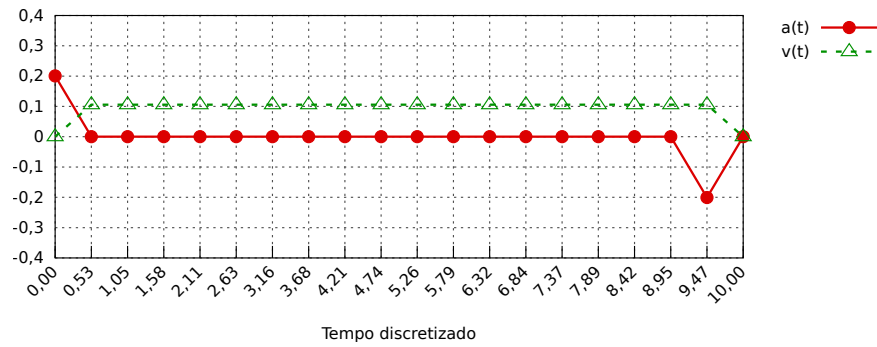
Discretização em 18 intervalos

Gasto ótimo: 0,381



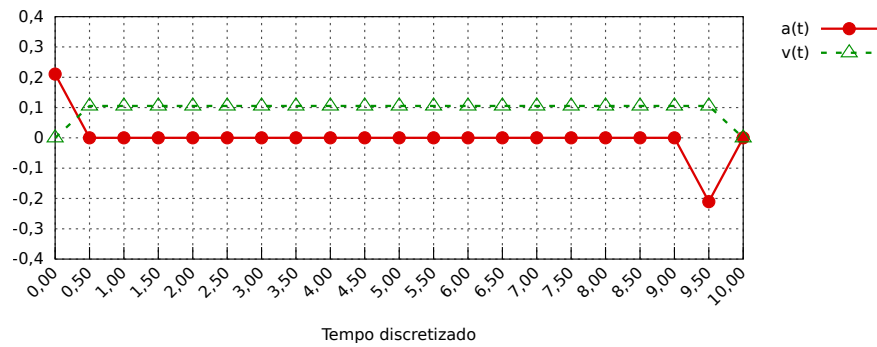
Discretização em 19 intervalos

Gasto ótimo: 0,401



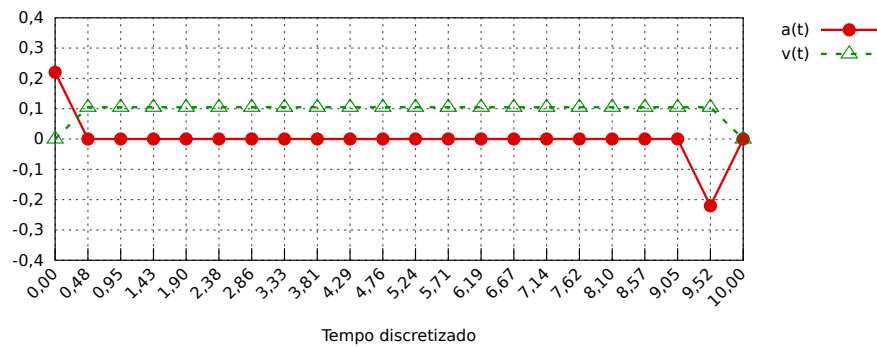
Discretização em 20 intervalos

Gasto ótimo: 0,421



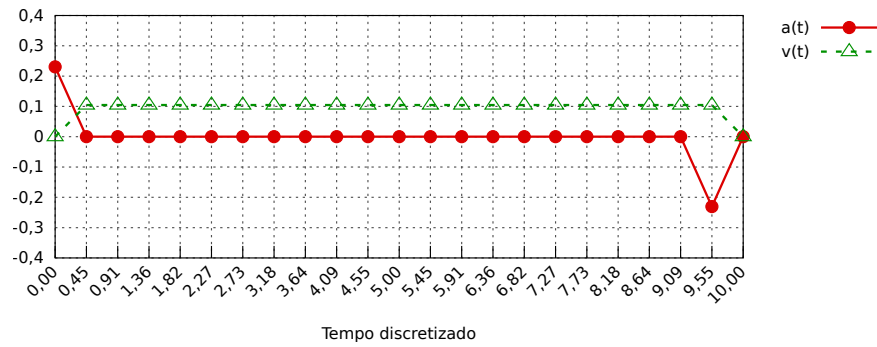
Discretização em 21 intervalos

Gasto ótimo: 0,441



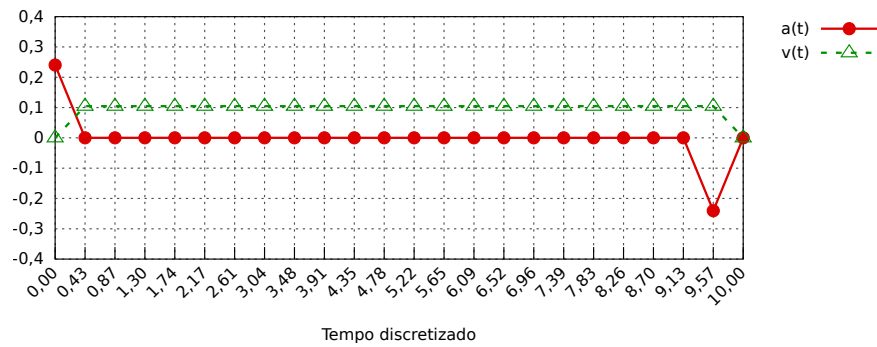
Discretização em 22 intervalos

Gasto ótimo: 0,461



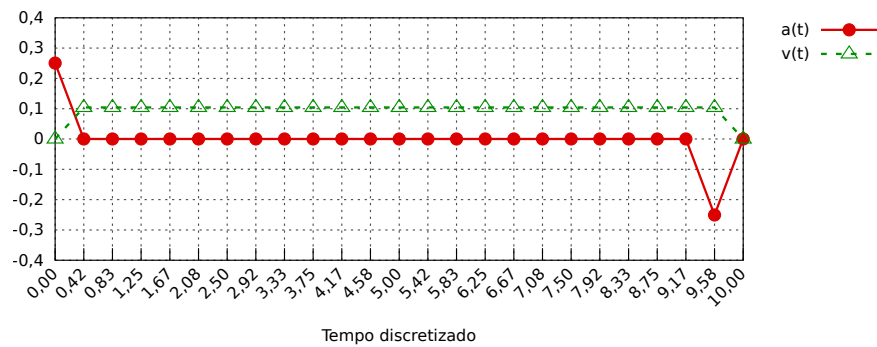
Discretização em 23 intervalos

Gasto ótimo: 0,481



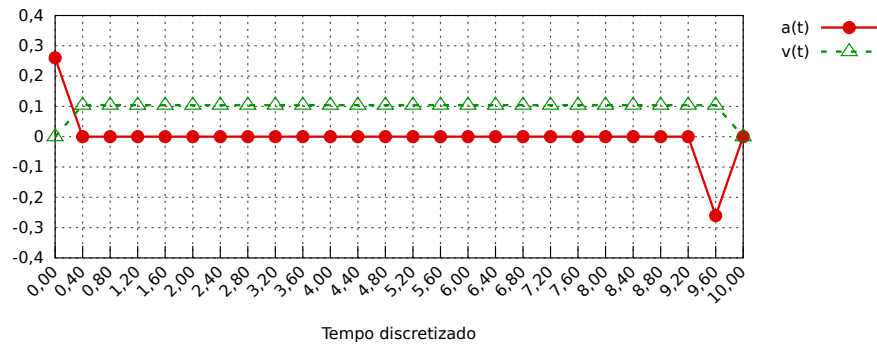
Discretização em 24 intervalos

Gasto ótimo: 0,501



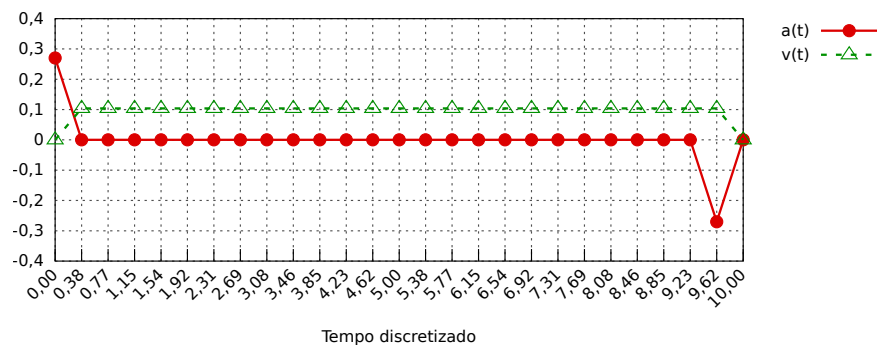
Discretização em 25 intervalos

Gasto ótimo: 0,521



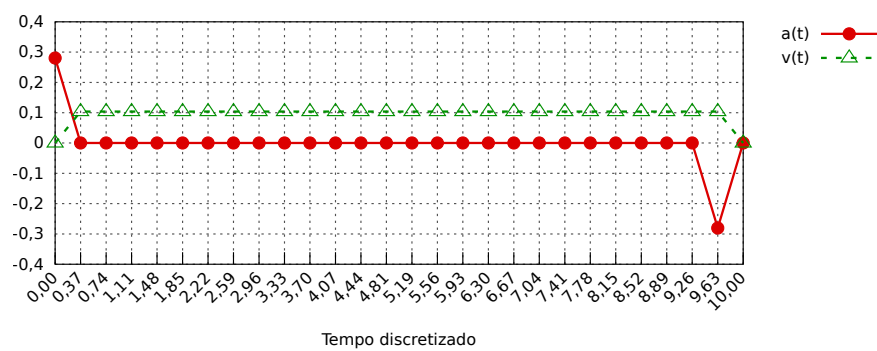
Discretização em 26 intervalos

Gasto ótimo: 0,541



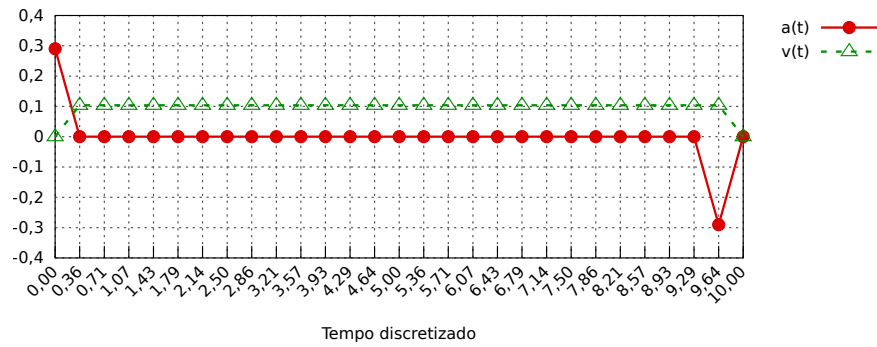
Discretização em 27 intervalos

Gasto ótimo: 0,561



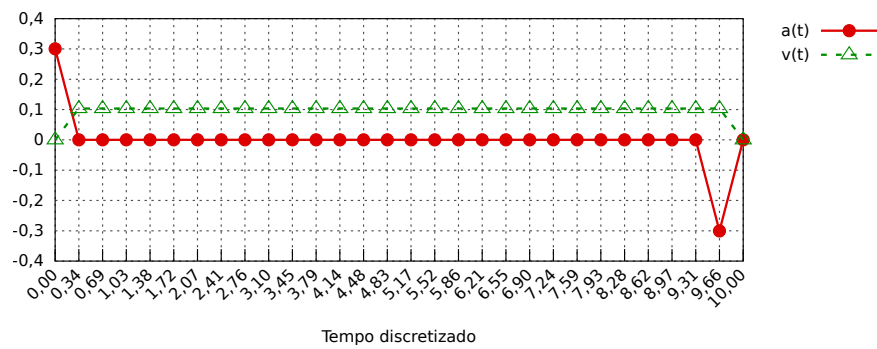
Discretização em 28 intervalos

Gasto ótimo: 0,581



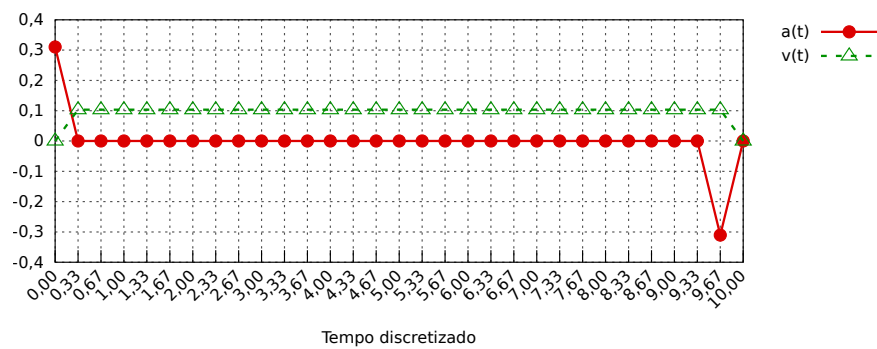
Discretização em 29 intervalos

Gasto ótimo: 0,601



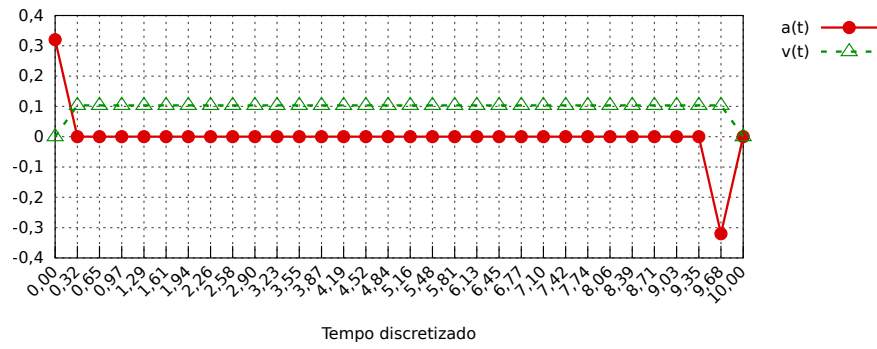
Discretização em 30 intervalos

Gasto ótimo: 0,621



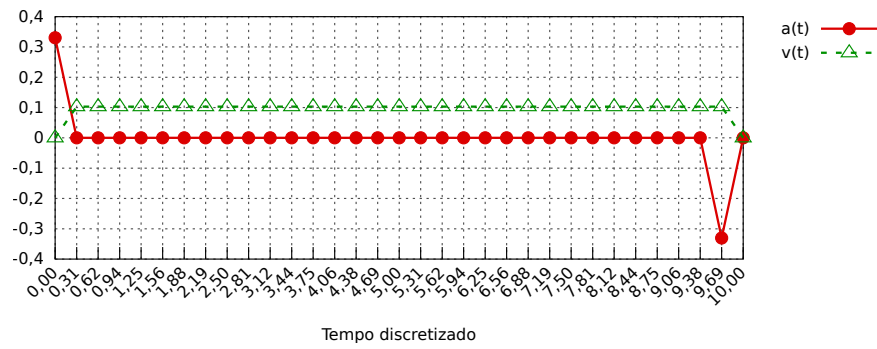
Discretização em 31 intervalos

Gasto ótimo: 0,641



Discretização em 32 intervalos

Gasto ótimo: 0,661



Discretização em 33 intervalos

Gasto ótimo: 0,681

