MAE0699 – 2018 – LAB 2

Luciano Antonio Siqueira 8535467

Solução da equação diferencial de segunda ordem não-homogênea:

$$Ay'' + 2By' + Cy = De^{Ex} + F\cos(Gx + H) + M(t)$$

Condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) \sim \frac{\Theta_v - \pi}{\pi} \\ y'(0) \sim \frac{\Theta_e - \pi}{\pi} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias envolvidas:

$A \sim 1 + \Theta_e - \pi$, onde Θ_e é o ângulo da esfera: $0 < \Theta_e < 2\pi$

$B \sim \Phi_e + 1$, onde Φ_e é o ângulo da esfera: $-\frac{\pi}{2} < \Phi_e < \frac{\pi}{2}$

$C \sim 1 + R_v - \mathbb{E}R_v$, onde R_v é o raio no sólido (funil) e $\mathbb{E}R_v$ é o valor esperado para o raio.

$D \sim \Theta_v$, onde Θ_v é o ângulo no sólido.

$E \sim -\rho_c$, onde ρ_c é o raio na espiral.

$F \sim H_v$, onde H_v é a altura no sólido.

$G \sim \Theta_c$, onde $\Theta_c \in [-2\pi, \beta]$ é o ângulo na espiral. β é uma v.a. dada por $\beta \sim f_\beta = \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2}$ e c é a constante tal que $\int_0^\infty \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2} d\beta = 1$.

$H \sim u(\mathcal{C})$, onde $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} \left[i, i + \frac{1}{2^{i+1}}\right]$.

Parcela $M(t)$:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} (-1)^{z_i} x_i$$

$N(0,t)$ é o número de ocorrências do processo de Poisson no intervalo t com parâmetro $\lambda_p \sim$ Geom $\left(\frac{1}{5}\right)$.

$$z_i \sim \begin{cases} 1 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \\ 0 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_i \sim \exp(1 + \lambda_e(1 + t))$$

$$\lambda_e \sim \text{ Poisson } \left(\frac{1}{2}\right)$$

Variáveis da esfera

O ponto dentro da esfera pode ser obtido tanto pelo método de Aceitação/Rejeição quanto pelo método Box-Muller. Algoritmo para gerar um ponto na esfera em três dimensões:

```
// Coordenadas cartesianas
x = 0
y = 0
z = 0
// Raio
r = 0
// Aceitar ponto se dentro da esfera de raio 1
enquanto  r > 1 ou r == 0
    x = -1 + 2 * uniforme(0,1)
    y = -1 + 2 * uniforme(0,1)
    z = -1 + 2 * uniforme(0,1)
    r = raiz_quadrada( x*x + y*y + z*z )
```

Os ângulos Θ_e e Φ_e são obtidos utilizando as funções trigonométricas inversas:

$$
\begin{aligned}
\Theta_e &= atan2(y,x) \\
\Phi_e &= \arccos(z)
\end{aligned}
$$

A função $atan2$ é a implementação de arctan que retorna o ângulo no intervalo $[0, 2\pi)$.

Variáveis do funil

Ponto uniformemente distribuído no sólido definido por $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq e^{2z}, -\infty < z \leq 0\right\}$

Seja $a(z) = \pi(e^z)^2$ a área do disco na altura z, então o volume total do funil é dado por:

$$
v_{total} = \int_{-\infty}^{0} a(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \pi(e^z)^2 dz = \lim_{z \to -\infty} \frac{\pi}{2} \left[e^{2z} \Big|_z^0 \right] = \frac{\pi}{2}
$$

e o volume parcial até $z, -\infty < z < 0$, é dado por:

$$
v_z = \int_z^0 \pi(e^z)^2 dz = \frac{\pi}{2} \left[e^{2z} \Big|_z^0 \right] = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{2z}\right)
$$

Logo, a função distribuição de probabilidade da coordenada z é dada por:

$$
F(z) = \frac{v_z}{v_{total}} = 1 - e^{2z}
$$

Pelo método da inversa, a variável z é obtida por $z = F^{-1}(u)$:

$$
\begin{aligned}
u &= 1 - e^{2z} \\
e^{2z} &= 1 - u \\
2z &= \log(1 - u) \\
z &= \tfrac{1}{2} \log(1 - u)
\end{aligned}
$$

A partir da coordenada z, as coordenadas x e y podem ser obtidas pelo método de aceitação/rejeição no disco de raio e^{2z}. Assim, as variáveis relativas ao funil são definidas por:

$$
\begin{aligned}
R_v &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\Theta_v &= atan2(y,x) \\
H_v &= z
\end{aligned}
$$

A esperança $\mathbb{E}R_v = \frac{4}{9}$ foi calculada pela média de 1.000.000.000 de amostras geradas para R_v. A função $atan2$ é a implementação de arctan que retorna o ângulo no intervalo $[0, 2\pi)$.

Variáveis da espiral

A espiral é dada pelas coordenadas polares:

$$
\theta \in (-2\pi, \beta)
$$
$$
\rho = \rho(\theta) = e^{\theta}
$$

Em coordenadas cartesianas:

$$
\begin{aligned}
x(\theta) &= \rho(\theta)\cos(\theta) \\
y(\theta) &= \rho(\theta)\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Seja s o comprimento da espiral, o elemento de comprimento é dado por:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos(\theta)\right)^2 + (\rho(\theta)\sin(\theta))^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\sin(\theta)\right)^2 + (\rho(\theta)\cos(\theta))^2 \\
&= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1} + [\rho(\theta)]^2 \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \frac{ds}{d\theta} = \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{1}{2}} \implies ds = \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta
$$

Logo, o comprimento $L(\beta)$ da espiral até o ângulo β é dado por:

$$L(\beta) = \int_{-2\pi}^{\beta} \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

e sendo $\rho = e^{\theta}$:

$$L(\beta) = \int_{-2\pi}^{\beta} \left[e^{2\theta} + e^{2\theta} \right]^{\frac{1}{2}} d\theta = \sqrt{2} \left[e^{\theta} \Big|_{-2\pi}^{\beta} \right] = \sqrt{2}(e^{\beta} - e^{-2\pi})$$

A função distribuição de probabilidade do ângulo θ ao longo da espiral é dada pela razão:

$$F(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\beta)} = \frac{\sqrt{2}(e^{\theta} - e^{-2\pi})}{\sqrt{2}(e^{\beta} - e^{-2\pi})} = \frac{e^{\theta} - e^{-2\pi}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}} = \frac{e^{\theta}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}} - \frac{e^{-2\pi}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}}$$

e pelo método da inversão se obtém o ângulo uniformemente distribuído Θ_c e, consequentemente, a distância até a origem ρ_c:

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \log\left((e^{\beta} - e^{-2\pi})u + e^{-2\pi}\right) \\ \rho_c &= e^{\Theta_c} \end{aligned}$$

onde u é uma variável uniforme em $(0, 1]$.

A variável aleatória β tem f.d.p. dada por $f_{\beta} = \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2}$. A constante c pôde ser obtida por tentativa e erro ao calcular numericamente a integral $\int_0^{\infty} f_{\beta} d\beta = 1$ e possui o valor $c = 3,60566$.

A função f_{β} é estritamente decrescente no intervalo $[0, \infty)$ e seu valor máximo nesse mesmo intervalo é dado pela constante c. Dado que o valor de f_{β} em 10 é inferior a $\frac{1}{10^9}$, foi utilizado o método aceitação/rejeição no semi-plano $[0, 10] \times [0, 4]$ para obter a v.a. β.

Variável H

A variável H é construída a partir do algoritmo:

```
// "Grudar" todos os intervalos de C (a união)
```

```
// e identifica-los com sub-intervalos em [0, 1].
x = uniforme(0,1)
// p define cada intervalo em [0,1] que
// corresponde] aos sub-intervalos da união
p = 1/2
// i é a posição do sub-intervalo
i = 0
// Iterar até identificar o intervalo de C
Enquanto p < x :
    i = i + 1
    p = p + 1/2^(i+1)
// Mapear H de acordo com o intervalo onde x caiu
p = p - 1/2^(i+1)
H = i + x - p
```

Formato das soluções

Para a **solução homogênea**

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \implies r_1, r_2 = \frac{1}{2A}\left(-2B \pm \sqrt{\Delta}\right), y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ \Delta = 0 \implies r = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ \Delta < 0 \implies \lambda = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A}, y_h = e^{\lambda x}\left(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x\right) \end{cases}$$

Sistema para determinar as constantes a partir dos valores iniciais

$$\begin{pmatrix} y \\ y\prime \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y\prime_0 \end{pmatrix}$$

Esse sistema 2×2 pode ser solucionado diretamente utilizando a *regra de Cramer*.

As **soluções particulares** são obtidas pelo método de coeficientes indeterminados. Cada solução particular obtida é somada à solução homogênea da equação.

Primeira solução particular: $Y_1(x) = ke^{Ex}$

O coeficiente k é obtido tomando a primeira e a segunda derivadas de Y_1

$$\begin{aligned} Y_1' &= Eke^{Ex} \\ Y_1'' &= E^2ke^{Ex} \end{aligned}$$

e substituindo na equação $AY_1'' + 2BY_1' + CY_1 = De^{Ex}$

$$\begin{aligned} AE^2ke^{Ex} + 2BEke^{Ex} + Cke^{Ex} &= De^{Ex} \\ \left(AE^2 + 2BE + C\right) ke^{Ex} &= De^{Ex} \\ \left(AE^2 + 2BE + C\right) k &= D \\ k &= \tfrac{D}{(AE^2+2BE+C)} \end{aligned}$$

Logo, a primeira solução particular é dada por

$$Y_1(x) = ke^{Ex} = \frac{D}{AE^2 + 2BE + C}e^{Ex}$$

Segunda solução particular: $Y_2(x) = k_1 \cos(Gx + H) + k_2 \sin(Gx + H)$

Os coeficientes k_1 e k_2 são obtidos tomando a primeira e a segunda derivadas de Y_2

$$\begin{aligned} Y_2' &= -Gk_1 \sin(Gx + H) + Gk_2 \cos(Gx + H) \\ Y_2'' &= -G^2k_1 \cos(Gx + H) - G^2k_2 \sin(Gx + H) \end{aligned}$$

e substituindo na equação $AY_2'' + 2BY_2' + CY_2 = F \cos(Gx + H)$

$$A\left[-G^2k_1\cos(Gx+H)-G^2k_2\sin(Gx+H)\right]$$
$$+2B\left[-Gk_1\sin(Gx+H)+Gk_2\cos(Gx+H)\right]$$
$$+C\left[k_1\cos(Gx+H)+k_2\sin(Gx+H)\right]=F\cos(Gx+H)$$

$$\left(-AG^2k_1+2BGk_2+Ck_1\right)\cos(Gx+H)$$
$$+\left(-AG^2k_2-2BGk_1+Ck_2\right)\sin(Gx+H)=F\cos(Gx+H)$$

$$\left[(C-AG^2)k_1+2BGk_2\right]\cos(Gx+H)$$
$$+\left[-2BGk_1+(C-AG^2k_2)k_2\right]\sin(Gx+H)=F\cos(Gx+H)$$

Decorre dessa igualdade o sistema linear 2×2

$$\begin{pmatrix} C-AG^2 & 2BG \\ -2BG & C-AG^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por eliminação Gaussiana, chega-se aos valores dos coeficientes k_1 e k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{F(C-AG^2)}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2} \\ k_2 &= \tfrac{2BGF}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2} \end{aligned}$$

Logo, a segunda solução particular é dada por

$$Y_2(x)=\frac{F(C-AG^2)}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2}\cos(Gx+H)$$
$$+\frac{2BGF}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2}\sin(Gx+H)$$

Terceira solução particular: $Y_3(x)=kM(x)$

A função $M(x)$ possui derivada nula em todo intervalo de interesse. Portanto, a substituição na equação $AY_3''+2BY_3'+CY_3=M(x)$ é simplesmente

$$\begin{aligned} CkM(x) &= M(x) \\ Ck &= 1 \\ k &= \tfrac{1}{C} \end{aligned}$$

e a terceira solução particular é dada por

$$Y_3(t) = \frac{M(t)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{N(0,t]} (-1)^{z_i} x_i$$

Finalmente, a **solução geral** é composta em

$$y(x) = y_h(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x)$$