MAE0699 – LAB 2

Luciano Antonio Siqueira 8535467

Solução da equação diferencial de segunda ordem não-homogênea:

$$Ay'' + 2By' + Cy = De^{Ex} + F\cos(Gx + H) + M(t)$$

Condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) \sim \frac{\Theta_v - \pi}{\pi} \\ y'(0) \sim \frac{\Theta_e - \pi}{\pi} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias envolvidas:

$A \sim 1 + \Theta_e - \pi$, onde Θ_e é o ângulo da esfera: $0 < \Theta_e < 2\pi$

$B \sim \Phi_e + 1$, onde Φ_e é o ângulo da esfera: $-\frac{\pi}{2} < \Phi_e < \frac{\pi}{2}$

$C \sim 1 + R_v - \mathbb{E}R_v$, onde R_v é o raio no sólido (funil).

$D \sim \Theta_v$, onde Θ_v é o ângulo no volume.

$E \sim -\rho_c$, onde ρ_c é o raio na espiral.

$F \sim H_v$, onde H_v é a altura no sólido.

$G \sim \Theta_c$, onde Θ_c é o ângulo na espiral.

$H \sim u(\mathcal{C})$, onde $\mathcal{C}$ é o comprimento da espiral.

Parcela $M(t)$:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} (-1)^{z_i} x_i$$

$N(0, t)$ é o número de ocorrências do processo de Poisson no intervalo t com parâmetro $\lambda_p \sim$ Geom $\left(\frac{1}{5}\right)$.

$$z_i \sim \begin{cases} 1 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \\ 0 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_i \sim \exp(1 + \lambda_e(1+t))$$

$$\lambda_e \sim \text{ Poisson} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Formato das soluções

Para a solução homogênea

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \implies r_1, r_2 = \frac{1}{2A}\left(-2B \pm \sqrt{\Delta}\right), y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ \Delta = 0 \implies r = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ \Delta < 0 \implies \lambda = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A}, y_h = e^{\lambda x}\left(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x\right) \end{cases}$$

Sistema para determinar as constantes a partir dos valores iniciais

$$\begin{pmatrix} y \\ y\prime \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y\prime_0 \end{pmatrix}$$

As soluções particulares são obtidas pelo método de coeficientes indeterminados.

Solução particular (i):

$$\frac{D}{AE^2 + 2BE + C} e^{Ex}$$

Solução particular (ii):

$$\frac{F}{-AG^2+2BG+C}\cos\left(Gx+H\right)$$

Solução particular (iii):

$$CM\left(t\right)=C\sum_{i=1}^{N(0,t]}\left(-1\right)^{z_i}x_i$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$y_p=\frac{D}{AE^2+2BE+C}e^{Ex}+\frac{F}{-AG^2+2BG+C}\cos\left(Gx+H\right)+CM\left(x\right)$$

Solução geral

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$