MAE0699 – 2018 – LAB 2

Luciano Antonio Siqueira 8535467

Solução da equação diferencial de segunda ordem não-homogênea:

$$Ay'' + 2By' + Cy = De^{Ex} + F\cos(Gx + H) + M(t)$$

Condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) \sim \frac{\Theta_v - \pi}{\pi} \\ y'(0) \sim \frac{\Theta_e - \pi}{\pi} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias envolvidas:

$A \sim 1 + \Theta_e - \pi$, onde Θ_e é o ângulo da esfera: $0 < \Theta_e < 2\pi$

$B \sim \Phi_e + 1$, onde Φ_e é o ângulo da esfera: $-\frac{\pi}{2} < \Phi_e < \frac{\pi}{2}$

$C \sim 1 + R_v - \mathbb{E}R_v$, onde R_v é o raio no sólido (funil) e $\mathbb{E}R_v$ é o valor esperado para o raio.

$D \sim \Theta_v$, onde Θ_v é o ângulo no sólido.

$E \sim -\rho_c$, onde ρ_c é o raio na espiral.

$F \sim H_v$, onde H_v é a altura no sólido.

$G \sim \Theta_c$, onde $\Theta_c \in [-2\pi, \beta]$ é o ângulo na espiral. β é uma v.a. dada por $\beta \sim f_\beta = \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2}$ e c é a constante tal que $\int_0^\infty \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2} d\beta = 1$.

$H \sim u(\mathcal{C})$, onde $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} \left[i, i + \frac{1}{2^{i+1}}\right]$.

Parcela $M(t)$:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(0,t]} (-1)^{z_i} x_i$$

$N(0, t)$ é o número de ocorrências do processo de Poisson no intervalo t com parâmetro $\lambda_p \sim$ Geom $\left(\frac{1}{5}\right)$. Os $N(0,t)$ instantes S_i do processo de Poisson foram gerados por um número correspondente de variáveis aleatórias uniformes no mesmo intervalo, que foram ordenadas para refletir os instantes no processo de Poisson.

Os demais valores envolvidos na função $M(t)$ são dadas por:

$$z_i \sim \begin{cases} 1 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \\ 0 \text{ com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_i \sim \exp(1 + \lambda_e(1+t))$$

$$\lambda_e \sim \text{ Poisson} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Variáveis da esfera

O ponto dentro da esfera pode ser obtido tanto pelo método de Aceitação/Rejeição quanto pelo método Box-Muller. Algoritmo para gerar um ponto na esfera em três dimensões:

```
// Coordenadas cartesianas
x = 0
y = 0
z = 0
// Raio
r = 0
// Aceitar ponto se dentro da esfera de raio 1
enquanto  r > 1 ou r == 0
    x = -1 + 2 * uniforme(0,1)
    y = -1 + 2 * uniforme(0,1)
    z = -1 + 2 * uniforme(0,1)
```

```
r = raiz_quadrada( x*x + y*y + z*z )
```

Os ângulos Θ_e e Φ_e são obtidos utilizando as funções trigonométricas inversas:

$$\begin{aligned}\Theta_e &= atan2(y, x)\\ \Phi_e &= \arccos(z)\end{aligned}$$

A função $atan2$ é a implementação de arctan que retorna o ângulo no intervalo $[0, 2\pi)$.

Variáveis do funil

Ponto uniformemente distribuído no sólido definido por $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq e^{2z}, -\infty < z \leq 0\right\}$

Seja $a(z) = \pi(e^z)^2$ a área do disco na altura z, então o volume total do funil é dado por:

$$v_{total} = \int_{-\infty}^{0} a(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \pi(e^z)^2 dz = \lim_{z \to -\infty} \frac{\pi}{2} \left[e^{2z} \Big|_z^0 \right] = \frac{\pi}{2}$$

e o volume parcial até z, $-\infty < z < 0$, é dado por:

$$v_z = \int_{z}^{0} \pi(e^z)^2 dz = \frac{\pi}{2} \left[e^{2z} \Big|_z^0 \right] = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{2z}\right)$$

Logo, a função distribuição de probabilidade da coordenada z é dada por:

$$F(z) = \frac{v_z}{v_{total}} = 1 - e^{2z}$$

Pelo método da inversa, a variável z é obtida por $z = F^{-1}(u)$:

$$\begin{aligned} u &= 1 - e^{2z}\\ e^{2z} &= 1 - u\\ 2z &= \log(1 - u)\\ z &= \tfrac{1}{2}\log(1 - u)\end{aligned}$$

A partir da coordenada z, as coordenadas x e y podem ser obtidas pelo método de aceitação/rejeição no disco de raio e^{2z}. Assim, as variáveis relativas ao funil são definidas por:

$$\begin{aligned} R_v &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Theta_v &= atan2(y, x) \\ H_v &= z \end{aligned}$$

A esperança $\mathbb{E}R_v = \frac{4}{9}$ foi calculada pela média de 1.000.000.000 de amostras geradas para R_v. A função $atan2$ é a implementação de arctan que retorna o ângulo no intervalo $[0, 2\pi)$.

Variáveis da espiral

A espiral é dada pelas coordenadas polares:

$$\theta \in (-2\pi, \beta)$$
$$\rho = \rho(\theta) = e^{\theta}$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) &= \rho(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Seja s o comprimento da espiral, o elemento de comprimento é dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos(\theta)\right)^2 + (\rho(\theta)\sin(\theta))^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\sin(\theta)\right)^2 + (\rho(\theta)\cos(\theta))^2 \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} + [\rho(\theta)]^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}} \implies ds = \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

Logo, o comprimento $L(\beta)$ da espiral até o ângulo β é dado por:

$$L(\beta) = \int_{-2\pi}^{\beta} \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

e sendo $\rho = e^{\theta}$:

$$L(\beta) = \int_{-2\pi}^{\beta} \left[e^{2\theta} + e^{2\theta} \right]^{\frac{1}{2}} d\theta = \sqrt{2} \left[e^{\theta} \Big|_{-2\pi}^{\beta} \right] = \sqrt{2}(e^{\beta} - e^{-2\pi})$$

A função distribuição de probabilidade do ângulo θ ao longo da espiral é dada pela razão:

$$F(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\beta)} = \frac{\sqrt{2}(e^{\theta} - e^{-2\pi})}{\sqrt{2}(e^{\beta} - e^{-2\pi})} = \frac{e^{\theta} - e^{-2\pi}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}} = \frac{e^{\theta}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}} - \frac{e^{-2\pi}}{e^{\beta} - e^{-2\pi}}$$

e pelo método da inversão se obtém o ângulo uniformemente distribuído Θ_c e, consequentemente, a distância até a origem ρ_c:

$$\begin{aligned} \Theta_c &= \log\left((e^{\beta} - e^{-2\pi})u + e^{-2\pi}\right) \\ \rho_c &= e^{\Theta_c} \end{aligned}$$

onde u é uma variável uniforme em $(0, 1]$.

A variável aleatória β tem f.d.p. dada por $f_{\beta} = \frac{c}{e^{2\beta}(1+\beta)^2}$. A constante c pôde ser obtida por tentativa e erro ao calcular numericamente a integral $\int_0^{\infty} f_{\beta} d\beta = 1$ e possui o valor $c = 3,60566$.

A função f_{β} é estritamente decrescente no intervalo $[0, \infty)$ e seu valor máximo nesse mesmo intervalo é dado pela constante c. Dado que o valor de f_{β} em 10 é inferior a $\frac{1}{10^9}$, foi utilizado o método aceitação/rejeição no semi-plano $[0, 10] \times [0, 4]$ para obter a v.a. β.

Variável H

A variável H é construída a partir do algoritmo:

```
// "Grudar" todos os intervalos de C (a união)
// e identifica-los com sub-intervalos em [0, 1].
x = uniforme(0,1)
// p define cada intervalo em [0,1] que
// corresponde] aos sub-intervalos da união
p = 1/2
// i é a posição do sub-intervalo
i = 0
// Iterar até identificar o intervalo de C
Enquanto p < x :
    i = i + 1
    p = p + 1/2^(i+1)
// Mapear H de acordo com o intervalo onde x caiu
p = p - 1/2^(i+1)
H = i + x - p
```

Formato das soluções

Para a **solução homogênea**

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \implies r_1, r_2 = \frac{1}{2A}\left(-2B \pm \sqrt{\Delta}\right), y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ \Delta = 0 \implies r = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, y_h = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ \Delta < 0 \implies \lambda = -\frac{2B}{2A} = -\frac{B}{A}, \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2A}, y_h = e^{\lambda x}\left(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x\right) \end{cases}$$

Sistema para determinar as constantes a partir dos valores iniciais

$$\begin{pmatrix} y \\ y\prime \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y\prime_0 \end{pmatrix}$$

Esse sistema 2×2 pode ser solucionado diretamente utilizando a *regra de Cramer*.

As **soluções particulares** são obtidas pelo método de coeficientes indeterminados. Cada solução particular obtida é somada à solução homogênea da equação.

Primeira solução particular: $Y_1(x) = ke^{Ex}$

O coeficiente k é obtido tomando a primeira e a segunda derivadas de Y_1

$$\begin{aligned} Y_1' &= Eke^{Ex} \\ Y_1'' &= E^2ke^{Ex} \end{aligned}$$

e substituindo na equação $AY_1'' + 2BY_1' + CY_1 = De^{Ex}$

$$\begin{aligned} AE^2ke^{Ex} + 2BEke^{Ex} + Cke^{Ex} &= De^{Ex} \\ \left(AE^2 + 2BE + C\right) ke^{Ex} &= De^{Ex} \\ \left(AE^2 + 2BE + C\right) k &= D \\ k &= \tfrac{D}{(AE^2+2BE+C)} \end{aligned}$$

Logo, a primeira solução particular é dada por

$$Y_1(x) = ke^{Ex} = \frac{D}{AE^2 + 2BE + C}e^{Ex}$$

Segunda solução particular: $Y_2(x) = k_1 \cos(Gx + H) + k_2 \sin(Gx + H)$

Os coeficientes k_1 e k_2 são obtidos tomando a primeira e a segunda derivadas de Y_2

$$\begin{aligned} Y_2' &= -Gk_1 \sin(Gx + H) + Gk_2 \cos(Gx + H) \\ Y_2'' &= -G^2k_1 \cos(Gx + H) - G^2k_2 \sin(Gx + H) \end{aligned}$$

e substituindo na equação $AY_2'' + 2BY_2' + CY_2 = F\cos(Gx+H)$

$$
\begin{aligned}
A\left[-G^2k_1\cos(Gx+H) - G^2k_2\sin(Gx+H)\right]& \\
+ 2B\left[-Gk_1\sin(Gx+H) + Gk_2\cos(Gx+H)\right]& \\
+ C\left[k_1\cos(Gx+H) + k_2\sin(Gx+H)\right] &= F\cos(Gx+H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(-AG^2k_1 + 2BGk_2 + Ck_1\right)\cos(Gx+H)& \\
+ \left(-AG^2k_2 - 2BGk_1 + Ck_2\right)\sin(Gx+H) &= F\cos(Gx+H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[(C-AG^2)k_1 + 2BGk_2\right]\cos(Gx+H)& \\
+ \left[-2BGk_1 + (C-AG^2k_2)k_2\right]\sin(Gx+H) &= F\cos(Gx+H)
\end{aligned}
$$

Decorre dessa igualdade o sistema linear 2×2

$$
\begin{pmatrix} C-AG^2 & 2BG \\ -2BG & C-AG^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Por eliminação Gaussiana, chega-se aos valores dos coeficientes k_1 e k_2

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{F(C-AG^2)}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2} \\
k_2 &= \tfrac{2BGF}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2}
\end{aligned}
$$

Logo, a segunda solução particular é dada por

$$
\begin{aligned}
Y_2(x) = \frac{F(C-AG^2)}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2}\cos(Gx+H)& \\
+ \frac{2BGF}{(C-AG^2)^2+(2BG)^2}\sin(Gx+H)&
\end{aligned}
$$

Terceira solução particular: $Y_3(x) = kM(x)$

A função $M(x)$ possui derivada nula em todo intervalo de interesse. Portanto, a substituição na equação $AY_3'' + 2BY_3' + CY_3 = M(x)$ é simplesmente

$$
\begin{aligned}
CkM(x) &= M(x) \\
Ck &= 1 \\
k &= \tfrac{1}{C}
\end{aligned}
$$

e a terceira solução particular é dada por

$$Y_3(t) = \frac{M(t)}{C} = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{N(0,t]}(-1)^{z_i}x_i$$

Finalmente, a **solução geral** é composta em

$$y(x) = y_h(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x)$$

Estimativa de $\mathbb{E}\left(y(1)\right)$ e $Var(y(1))$

As estimativas foram obtidas pelas médias de 10.000.000.000 de amostras produzidas pelo programa gerado a partir do código fonte apresentado. Os resultados foram:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(y(1)\right) &\approx 0 \\
Var\left(y(1)\right) &\approx 25 \times 10^9
\end{aligned}
$$