MAE0699 – 2018 – LAB 3

Luciano Antonio Siqueira 8535467

Objetivo: Gerar uma função (série) de coeficientes aleatórios. Simular essa função um número suficientemente grande de vezes para conseguir estimar certas propriedades do máximo da função. A série a ser calculada é:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2\pi n x) + B_n \cos(2\pi n x)$$

Distribuições de máxima entropia

As distribuições de máxima entropia para os coeficientes A_n e B_n, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, são definidas pela função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = k \exp(\lambda x)$$

e os parâmetros k e λ são definidos como:

$$\begin{cases} k = \frac{\lambda}{(\exp(b\lambda) - \exp(a\lambda))} \\ \frac{(1-a\lambda)}{(1-b\lambda)} = \exp((b-a)\lambda) \end{cases}$$

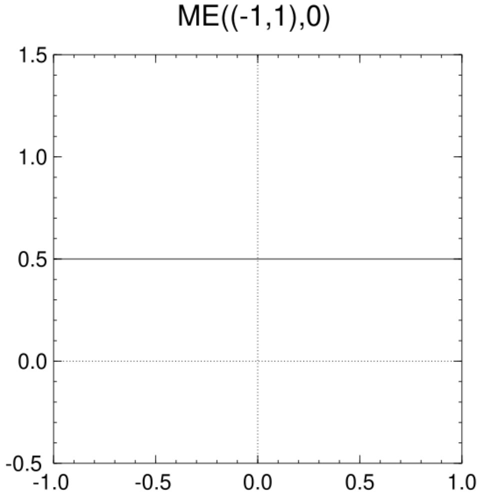
onde a e b definem o intervalo para cada coeficiente aleatório.

O parâmetro λ foi determinado numericamente pelo *método de Newton*, ao encontrar a raiz para a função $g(\lambda)$ definida por:

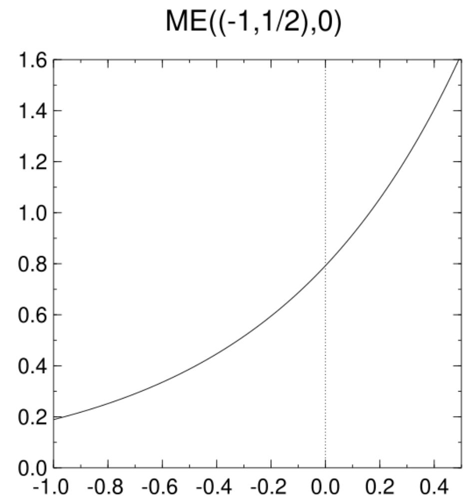
$$g(\lambda) = \frac{1 - a\lambda}{1 - b\lambda} - \exp((b-a)\lambda)$$

O parâmetro k é determinado a partir do valor de λ. Os valores de k e λ para cada distribuição de máxima entropia estão listados a seguir:

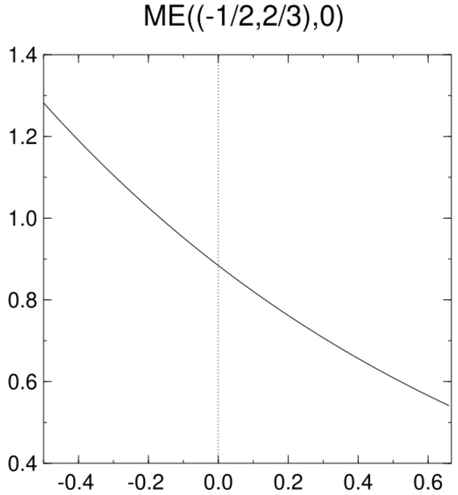
$$A_0 \sim ME((-1,1),0) \begin{cases} \lambda = 0 \\ k = 0.5 \end{cases}$$



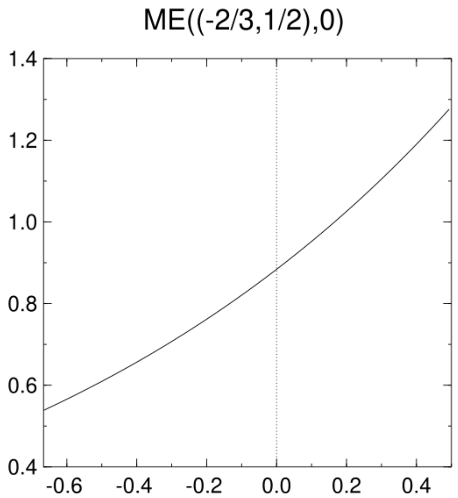
$$B_0 \sim ME((-1,1/2),0) \begin{cases} \lambda = 1.4327505332713748043005352883483283222 \\ k = 0.79229787679112129161751454375917092 0 \end{cases}$$



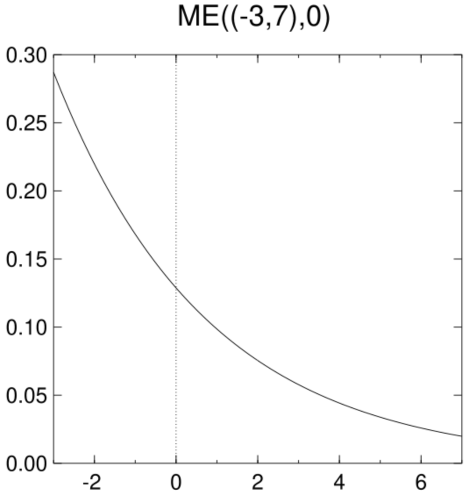
$$A_1 \sim ME((-1/2, 2/3), 0) \begin{cases} \lambda = -0.74386478787494303421823360622511 2453 \\ k = 0.883955805769716773667710185691248626 \end{cases}$$



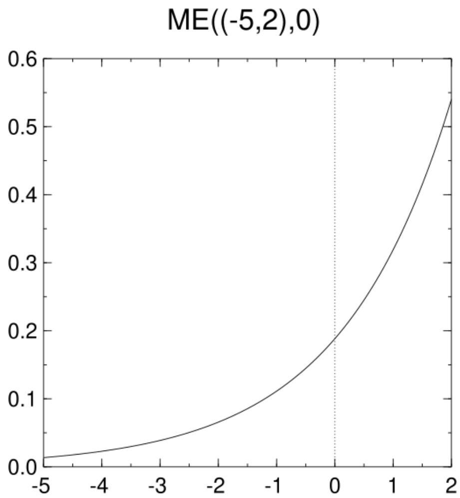
$$B_1 \sim ME((-2/3, 1/2), 0) \begin{cases} \lambda = 0.743864787874943145240536068740766495 \\ k = 0.883955805769716884690012648206902668 \end{cases}$$



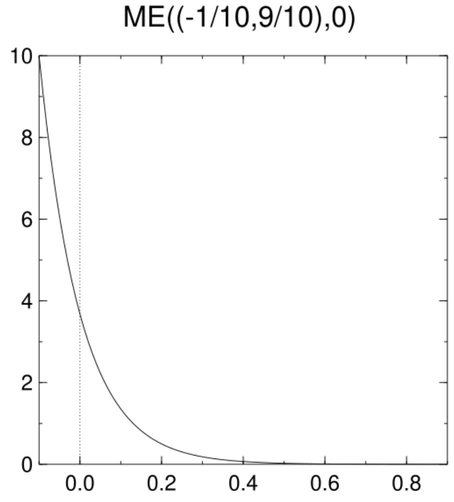
$$A_2 \sim ME((-3,7),0) \begin{cases} \lambda = -0.267210385527338611932890444222721271 \\ k = 0.128768439536812023815670613657857757 \end{cases}$$



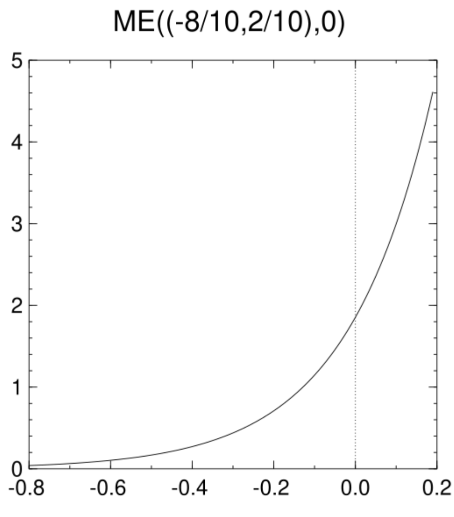
$$B_2 \sim ME((-5,2),0) \begin{cases} \lambda = 0.526768681965973151193338708253577352 \\ k = 0.188402460085155792901545623863057699 \end{cases}$$



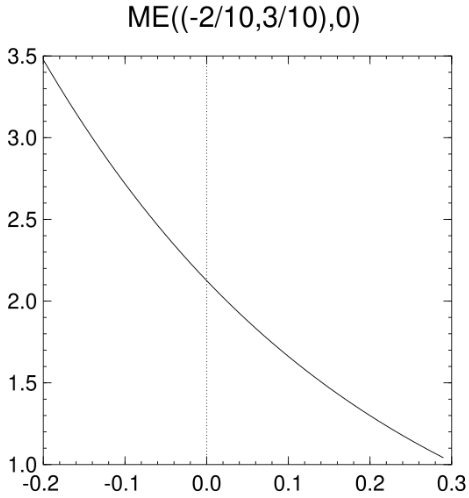
$$A_3 \sim ME((-1/10, 9/10), 0) \begin{cases} \lambda = -9.99544113381484145008926134323701262 5 \\ k = 3.67896181710072855963744586915709078 3 \end{cases}$$



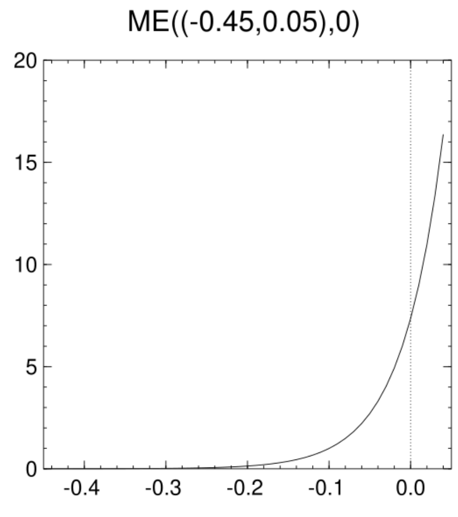
$$B_3 \sim ME((-8/10, 2/10), 0) \begin{cases} \lambda = 4.80100754972251753116552208666689693 9 \\ k = 1.85313673190935102041976278997026383 9 \end{cases}$$



$$A_4 \sim ME((-2/10, 3/10), 0) \begin{cases} \lambda = -2.4598664007639152728756926080677658 32 \\ k = 2.1252423992935995933351023268187418 58 \end{cases}$$



$$B_4 \sim ME((-0.45, 0.05), 0) \begin{cases} \lambda = 19.990882267629682900178522686474025249 \\ k = 7.357923634201457119274891738314181566 \end{cases}$$



O código-fonte com o método de Newton está no arquivo `newton.c`, compilado com o comando `gcc -o newton -lm newton.c`. O comando recebe três parâmetros:

1. Início do intervalo
2. Fim do intervalo
3. Tolerância do erro para a aproximação
4. Número máximo de iterações

Por sua vez, a função $h(x)$ e todas as demais funções relacionadas estão no arquivo `lab3.c`, compilado com o comando `gcc -o lab3 -lm lab3.c`.

Cada coeficiente aleatório com distribuição de máxima entropia foi gerado pelo método aceitação-rejeição. Dado que todas as densidades de probabilidade são limitadas nos respectivos intervalos, bastou identificar o extremo de máximo e gerar pontos aleatórios no semi-plano definido para cada coeficiente.

A função $h(x)$ é periódica de período 1, mas foi deixada a opção para definir em qual intervalo traçar a função pelo primeiro e segundo parâmetro do comando `lab3`. O terceiro parâmetro define o último número inteiro até onde vai a série $h(x)$ e o quarto parâmetro define a quantidade de pontos no grid. O quinto parâmetro define quantas estimativas para o máximo da função $h(x)$ serão feitas e o sexto parâmetro é qualquer valor numérico para ser utilizado como semente aleatória para a função `srand()`.

À cada valor da função $h(x)$ no grid foi somado um erro de truncamento de $e_t \sim |\mathcal{N}(0, \frac{2\pi^4}{45})|$. A estimativa para o limitante superior entre cada par de pontos no grid foi feita usando a derivada em cada respectivo ponto. As derivadas foram determinadas numericamente pelas fórmulas:

$$h'(x_k) = \begin{cases} \frac{-3h(x_k)+4h(x_{k+1})-h(x_{k+2})}{2d} & \text{se } k = 0 \\ \frac{h(x_{k+1})-h(x_{k-1})}{2d} & \text{se } k > 0 \text{ e } k < m \\ \frac{h(x_{k-2})-4h(x_{k-1})-3h(x_k)}{2d} & \text{se } k = m \end{cases}$$

onde k é o índice do ponto no grid, d é o espaçamento entre os pontos e m é o último índice do grid.

A estimativa para o valor entre cada par de pontos foi feita simplesmente determinando a equação da reta a partir das derivadas e calculando o ponto de interceptação das duas retas em questão. Por fim, é avaliado qual foi o maior valor de $h(x)$ entre todas as repetições geradas, com o resultado sendo exibido na saída padrão.