Universidade de Brasília

Exame de Álgebra

Parte II

Lucas Corrêa Lopes

Notas escritas para o Exame de Qualificação em Álgebra da Universidade de Brasília.

GRUPOS LIVRES vs GRUPOS PROJETIVOS

Sumário

Capítulo 1

Livres x Projetivos

1.1 Grupos livres abstratos

Vamos falar brevemente sobre a construção dos grupos livres abstratos.

> **Definição 1.1.1.** Sejam X um conjunto não-vazio, F um grupo e $\iota : X \to F$ um mapa. O par (F, ι) é um *grupo livre* se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: se $g : X \to G$ é um homomorfismo num grupo G, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi\iota = g$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

é comutativo.

A existência é provada de maneira puramente construtiva: dado um conjunto X e um conjunto

$$X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\},$$

isto é, $X \cap X^{-1} = \varnothing$, uma sequência finita de elementos de X é uma *palavra* (a *palavra vazia*, sem símbolos, é denotada por 1). Definimos uma relação de equivalência entre as palavras de X dizendo que as palavras v, w são equivalentes se podemos transformar v em w inserindo ou removendo elementos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Uma palavra que não contém termos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$ é *reduzida*. É fácil verificar que cada classe de equivalência contém uma única palavra reduzida. Denotando por F o grupo de todas as palavras reduzidas com a operação de justaposição e definindo $\iota : X \to F$ por $\iota(x) = [x]$, então (F, ι) satisfaz a propriedade universal.

Exercício. Pesquise e descreva detalhadamente o processo acima para a construção de um grupo livre. Além disso, mostre que existe um único grupo livre em X, isto é, se F_1 e F_2 são livres em X, então $F_1 \simeq F_2$. Além disso, mostre que se $|X| = |Y|$, então $F(X)$ e $F(Y)$, os grupos livres em X e Y, são isomorfos.

1.2 A propriedade projetiva

Definição 1.2.1. Seja P um grupo. Dizemos que P é *projetivo* se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: se $\alpha : P \to H$ é um homomorfismo e $\beta : G \to H$ um epimorfismo de grupos, existe um homomorfismo $\gamma : P \to G$ tal que $\beta\gamma = \alpha$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Teorema 1.2.2. *Um grupo F é livre se, e somente se, é projetivo.*

Demonstração. Suponha que F seja livre e que seja dado o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$

onde α é um homomorfismo de grupos e β um epimorfismo de grupos. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\iota"] \\ & F \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta \end{tikzcd}$$

Seja T um transversal de $\ker\beta$ em G. Então $\beta_T : T \to H$ é uma bijeção admitindo uma inversa $\tau : H \to T$. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddl, "\tau\alpha\iota"'] \\
& F \arrow[d, "\alpha"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta
\end{tikzcd}$$

Pela propriedade universal dos grupos livres, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddl, "\tau\alpha\iota"'] \\
& F \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta
\end{tikzcd}$$

em azul é comutativo. Assim, $\beta\varphi = \alpha$.

Suponha agora que F seja projetivo. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \\
F(X) \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

onde $\beta : F(X) \to F$ é um epimorfismo de $F(X)$ em F, onde $F(X)$ é o grupo livre em X. Assim, $\beta\gamma = \mathrm{id}_F$ e então γ é um monomorfismo. Considerando F um subgrupo de $F(X)$, o Teorema de Nielsen-Schreier garante que F é livre. $\square$

O Teorema de Nielsen-Schreier não é um resultado trivial. Daremos uma prova em outro momento usando a Teoria de Bass-Serre.

1.3 Grupos profinitos livres

Consideraremos $\mathcal{C}$ uma variedade de grupos finitos fechada para extensões.

Se G é um grupo profinito. Um subconjunto S de G é 1-*convergente* se todo aberto de G contém quase todos os elementos de S, isto é, não contém apenas uma quantidade finita. Se $\mu : X \to G$ é um mapa, então μ é 1-*convergente* se $\mu(X)$ é 1-convergente.

Definição 1.3.1. Sejam X um conjunto, $F_{\mathcal{C}}(X)$ um grupo pro-$\mathcal{C}$ e $\iota : X \to F_{\mathcal{C}}(X)$ um mapa 1-convergente. Dizemos que $F_{\mathcal{C}}(X)$ (ou $(F_{\mathcal{C}}(X), \iota)$) é um *grupo pro-$\mathcal{C}$ livre restrito* em X se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: para cada grupo pro-$\mathcal{C}$ G e mapa 1-convergente $g : X \to G$, existe um único homomorfismo $\varphi : F_{\mathcal{C}} \to G$ tal que $\varphi\iota = g$.

Isso siginifica que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F_{\mathcal{C}} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Iremos nos referir a $F_{\mathcal{C}}(X)$ simplesmente como grupo pro-$\mathcal{C}$ livre em X.

Proposição 1.3.2. *Seja X um conjunto, então existe um único grupo pro-C livre em X.*

Demonstração. Sejam X um conjunto e F^{abs} (mais especificamente, (F^{abs}, ι^{abs})) o grupo livre abstrato em X. Considere

$$\mathcal{N} = \{N \lhd F : F/N \in \mathcal{C}, |X - N| < \infty\},$$

F o completamento de F^{abs} com respeito a topologia determinada por $\mathcal{N}$, $f : F^{abs} \to F$ o mapa natural de F^{abs} no seu completamento e $\iota = f\iota^{abs}$. Se $\pi_N : F \to F^{abs}/N$ é a projeção do limite inverso, então $\iota(x) \in \ker \pi_N$ se, e somente se, $x \in N$, logo, a condição $|X - N| < \infty$ garante que $\ker \pi_N$ contém quase todos os elementos de $\iota(X)$, isto é, ι é 1-convergente.

Sejam $G \in C$, $g : X \to G$ um mapa 1-convergente e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F^{abs} \arrow[d, dashed, "\varphi^{abs}"] \\ X \arrow[ur, "\iota^{abs}"] \arrow[r, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

que comuta pela propriedade universal dos grupos livres abstratos. Por construção, temos

$$\begin{tikzcd} & F^{abs} \arrow[d, "\varphi^{abs}"] \arrow[r, "f"] & F \\ X \arrow[ur, "\iota^{abs}"] \arrow[r, "g"'] & G & \end{tikzcd}$$

Como g é 1-convergente, 1 contém quase todos os elementos de $g(X)$, logo, $g = \varphi^{abs}\iota^{abs}$ implica $\ker \varphi^{abs} \in \mathcal{N}$, ou seja, φ^{abs} é contínua. Pela propriedade universal do completamento, existe um único $\varphi : F \to G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F^{abs} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi^{abs}"] & F \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
X \arrow[ur, "\iota^{abs}"] \arrow[r, "g"'] & G &
\end{tikzcd}$$

É imediato notar que φ é único.

A unicidade de F é mostrada de maneira similar ao caso abstrato aplicando a propriedade universal duas vezes (obviamente fica como **exercício**!). □

Note que se X é finito, então a condição $|X - N| < \infty$ é irrelevante, logo, o grupo pro-$\mathcal{C}$ livre num conjunto finito X é o completamento pro-$\mathcal{C}$ do grupo livre abstrato em X.

Na demonstração do resultado acima, usamos um grupo G em $\mathcal{C}$ e não um grupo pro-$\mathcal{C}$ como a definição exige. Para justificar isso, suponha que a propriedade universal seja válida para grupos em C e $g : X \to G$ seja um mapa contínuo num grupo pro-$\mathcal{C}$ G. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dr, dashed, "\varphi_N"] & \\
X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "g"'] & G \arrow[r, "\pi_N"'] & G/N
\end{tikzcd}$$

pela propriedade universal dos grupos livros com grupos em $\mathcal{C}$. Pela propriedade universal do limite inverso, existe um único φ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dr, "\varphi_N"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \\
X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "g"'] & G \arrow[r, "\pi_N"'] & G/N
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

1.4 A propriedade $\mathcal{C}$-projetiva

Definição 1.4.1. Dizemos que um grupo pro-$\mathcal{C}$ P é $\mathcal{C}$-*projetivo* se satisfaz a seguinte propriedade universal: se $\alpha : P \to H$ é um homomorfismo contínuo e $\beta : G \to H$ um epimorfismo contínuo (onde H, G são grupos pro-$\mathcal{C}$), então existe um homomorfismo contínuo $\gamma : P \to G$ tal que $\beta\gamma = \alpha$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Teorema 1.4.2. *Um grupo pro-$\mathcal{C}$ livre é $\mathcal{C}$-projetivo.*

Demonstração. Seja F pro-$\mathcal{C}$ livre e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$

onde α é um homomorfismo contínuo de grupos e β um epimorfismo contínuo de grupos. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\iota"] \\ & F \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta \end{tikzcd}$$

Seja T um transversal de $\ker\beta$ em G. Então $\beta_T : T \to H$ é uma bijeção contínua admitindo uma inversa $\tau : H \to T$. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddl, "\tau\alpha\iota"'] \\ & F \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta \end{tikzcd}$$

Note que se $N \lhd_o G$, então

$$\{x \in X : (\tau\alpha\iota)(x) \notin N\} = \{x \in X : \iota(x) \notin (\tau\alpha)^{-1}(N)\}$$

que é finito já que $(\tau\alpha)^{-1}(N)$ é um aberto contendo 1 em G, ou seja, $\tau\alpha\iota$ é 1-convergente. Pela propriedade universal dos grupos pro-$\mathcal{C}$ livres, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddl, "\tau\alpha\iota"'] \\
 & F \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & H \simeq G/\ker\beta
\end{tikzcd}$$

em azul é comutativo. Assim, $\beta\varphi = \alpha$. $\square$

Se tentarmos usar a mesma ideia do caso abstrato, vamos para no seguinte ponto: *suponha agora que F seja projetivo. Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \\
F_{\mathcal{C}}(X) \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

onde $\beta : F_{\mathcal{C}}(X) \to F$ é um epimorfismo de $F_{\mathcal{C}}(X)$ em F, onde $F_{\mathcal{C}}(X)$ é o grupo livre em X. Assim, $\beta\gamma = \mathrm{id}_F$ e então γ é um monomorfismo. Considerando F um subgrupo de $F_{\mathcal{C}}(X)$, o Teorema de Nielsen-Schreier garante que F é livre (falso!). O teorema de Nielsen-Schreier no caso pro-$\mathcal{C}$ não vale em geral!

Exemplo 1.4.3. Considere o grupo profinito livre $\widehat{\mathbb{Z}}$. Sabemos que

$$\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p.$$

Assim, $\mathbb{Z}_p$ é um subgrupo pro-p fechado de $\widehat{\mathbb{Z}}$ que não é profinito, logo, não é profinito livre.

Assim, o melhor que podemos dizer é que: *um grupo $\mathcal{C}$-projetivo é um subgrupo fechado de um grupo pro-$\mathcal{C}$ livre*

Exemplo 1.4.4. De fato, considere $\pi = \{2, 3\}$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\alpha"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & H
\end{tikzcd}$$

onde α é um homomorfismo contínuo e β um epimorfismo contínuo de grupos pro-π. Note que $\alpha(\mathbb{Z}_2)$ é um 2-subgrupo de H e todo 2-Sylow de H é imagem de um 2-Sylow P de G. Assim, $\alpha(\mathbb{Z}_2) \leqslant \beta(P)$ para algum 2-Sylow P de G. Se $\mathbb{Z}_2 = \overline{\langle g \rangle}$, então $\alpha(g) = \beta(p)$ para algum $p \in P$. Defina $\gamma : \mathbb{Z}_2 \to G$ por $\gamma(g) = p$. Assim,

$$(\beta\gamma)(g) = \beta(p) = \alpha(g),$$

logo, $\mathbb{Z}_2$ é π-projetivo. Contudo, $\mathbb{Z}_2$ não é pro-π livre pois é impossível obter um homomorfismo contínuo levando g em $1 \in \mathbb{Z}_3$.

Assim, $\mathbb{Z}_2$ é pro-π projetivo mas não é pro-π livre.

1.5 O caso pro-p

Seja $\rho : P/\Phi(P) \to G/\Phi(G)$ um epimorfismo contínuo. Sejam $\alpha : P \to P/\Phi(P)$ e $\beta : G \to G/\Phi(G)$ os epimorfismos canônicos. Temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\rho\alpha"] & G \arrow[d, "\beta"] \\
P/\Phi(P) \arrow[r, "\rho"'] & G/\Phi(G)
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi : P \to G$ existe pela propriedade projetiva de P. Como $\beta\varphi = \rho\alpha$, então

$$(\beta\varphi)(P) = \beta(\varphi(P)) = \varphi(P)\Phi(G)/\Phi(G)$$

e

$$(\rho\alpha)(P) = \rho(\alpha(P)) = \rho(P/\Phi(G)) = G/\Phi(G),$$

logo,

$$\varphi(P)\Phi(G)/\Phi(G) = G/\Phi(G),$$

isto é, $\varphi(P)\Phi(G) = G$ e assim $\varphi(P) = G$ (veja [Wil98, Proposição 2.5.1]). Se adicionalmente, ρ é um isomorfismo, então φ também será.

Se P é um grupo pro-p projetivo, então

$$P/\Phi(P) \simeq \prod_X \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Se F é o grupo pro-p livre em X, então

$$F/\Phi(F) \simeq \prod_X \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Pela observação anterior, $F \simeq P$.

Assim, um grupo F é pro-p livre se, e somente se, é p-projetivo.

Exercício. A demonstração de que projetivo implica livre no caso abstrato pode ser usada no caso pro-p? Isto é, o Teorema de Nielsen-Schreier vale para subgrupos fechados de grupos pro-p?

1.6 Um prova de Nielsen-Schreier quando X é finito

Teorema 1.6.1 (Nielsen-Schreier versão pro-$\mathcal{C}$). *Seja F um grupo pro-$\mathcal{C}$ livre no conjunto finito X. Se $H \leqslant_o F$, então H é pro-$\mathcal{C}$ livre.*

Demonstração. Temos que $\overline{F^{abs}} = F$ e $H \cap F^{abs}$ é livre abstrato pelo Teorema de Nielsen-Schreier. Suponha que $H \cap F^{abs}$ contenha um subgrupo normal N de F^{abs} com $F^{abs}/N \in \mathcal{C}$, então a topologia profinita em F^{abs} induz a topologia profinita plena em $F^{abs} \cap H$ de modo que H é o completamento pro-$\mathcal{C}$ de $F^{abs} \cap H$ e, portanto, livre. Note que

$$F - H = \bigcup_{M \lhd_o F} F - HM$$

com $F/M \in \mathcal{C}$. Uma vez que $F - H$ é fechado em F, a compacidade nos dá

$$F - H = (F - HM_1) \cup \cdots \cup (F - HM_n) = F - \bigcap_1^n HM_i.$$

Então

$$H\left(\bigcap_1^n M_i\right) = \bigcap_1^n HM_i \subset H.$$

Tomando

$$K = \bigcap_1^n M_i,$$

então $N = K \cap F^{abs}$ é o subgrupo procurado. $\square$

Referências Bibliográficas

[Wil98] J. Wilson. *Profinite Groups*, volume 19. Oxford University Press, Nova Iorque, 1 edition, 1998.