Universidade de Brasília

Exame de Álgebra

Lucas Corrêa Lopes

Notas escritas para o Exame de Qualificação em Álgebra da Universidade de Brasília, sob orientação do Prof. Dr. Pavel Zaleski. Os assuntos se resumem, essencialmente, a Grupos Profinitos, com ênfase em Construções Livres e Teoria de Bass-Serre.

Exame de Álgebra

Sumário

Capítulo 1

Produtos livres abstratos e profinitos

1.1 Produtos livres abstratos

Definição 1.1.1. Sejam $G_1, ..., G_n$ grupos. Um grupo G junto com uma família de homomorfismos $\iota_i : G_i \to G$ é um *produto livre* dos G_i se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: dados um grupo H e uma família de homomorfismos $\varphi_i : G_i \to H$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi\iota_i = \varphi_i$. Dizemos que G_i é um *fator livre* de G.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ G_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H \end{tikzcd}$$

é comutativo.

A demonstração da existência é similar ao caso dos grupos livres: assumindo que $G_i \cap G_j = \varnothing$ (trocando por uma cópia isomorfa se necessário), considere $X = \bigcup_i G_i$ e todas as palavras em g. Definimos uma relação de equivalência entre duas palavras g e h se podemos transformar g em h trocando um par $g_1 g_2$ no mesmo grupo por seu produto, trocando um elemento $g_j \in G_{i_j}$ por um par que seja seu produto e inserindo ou removendo a identidade. Não é difícil verificar que cada classe de equivalência $[g]$ contém uma única palavra reduzida. Escolhemos G como o grupo gerado por todos os $[g]$ com a operação de justaposição. Definimos $\iota_i : G_i \to G$ por $\iota_i(g) = [g]$. Dados $\varphi_i : G_i \to H$ definimos $\varphi([g]) = \varphi_{i_1}(g_1) \cdots \varphi_{i_k}(g_k)$ para $g_j \in G_{i_j}$.

O produto livre é denotado por

$$G = \mathop{\ast}_i G_i = G_1 \ast \cdots \ast G_n.$$

Exercício. Pesquise e descreva detalhadamente o processo acima para a construção do produto livre.

Exercício. Deduza da construção acima que existe uma forma normal e que está caracteriza o produto livre G.

1.2 Generalização dos grupos livres

Seja F um grupo livre em X. Como F é livre de torção, então $|\langle x\rangle| = \infty$ para cada $x \in X$. Considere $G_x = \langle x\rangle$ e $G = \ast_x G_x$. Sejam $\varphi_x : G_x \to F$ as inclusões. Pela propriedade universal do produto livre, existe um único $\varphi : G \to F$ tal que $\varphi\iota_x = \varphi_x$ onde $\iota_x : G_x \to G$ é dado por $\iota_x(x) = x$. É imediato notar que φ é sobrejetora. Se $\varphi(w)\varphi(v)^{-1} = 1$, então a unicidade da forma normal nos dá $w = v$. Assim,

$$F \simeq G \simeq \ast\,\mathbb{Z}.$$

1.3 Aplicações de Kurosh

O Teorema de Kurosh tem um enunciado carregado de símbolos, então este autor se permitirá escrevê-lo uma única vez num outro arquivo em que também constará uma demonstração (felizmente quem nunca viu o enunciado pode usar o google).

Aplicação 1. O Teorema de Nielsen-Schreier é consequência de Kurosh.

Seja F um grupo livre. Podemos então escrever

$$F = \ast\,\mathbb{Z}$$

Se $H \leqslant F$, o Teorema de Kurosh nos dá a decomposição

$$H = \tilde{F} \ast \left(\mathop{\ast}_{i,g_{ij}} (H \cap \mathbb{Z}^{g_{ij}}) \right).$$

Uma vez que $H \cap \mathbb{Z}^{g_{ij}} \leqslant \mathbb{Z}$, então $H \cap \mathbb{Z}^{g_{ij}}$ é trivial ou cíclico infinito. Assim,

$$H = \tilde{F} \ast (\ast\,\mathbb{Z}),$$

isto é, H é um produto livre de grupos livres e, portanto, é livre.

Aplicação 2. Assumindo que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = C_2 \ast C_3$, podemos descrever precisamente seus subgrupos usando Kurosh.

Se $H \leqslant C_2 \ast C_3$, o Teorema de Kurosh nos dá a decomposição

$$H = \tilde{F} \ast \left(\mathop{\ast}_{i} (H \cap C_2^{g_i}) \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{j} (H \cap C_3^{\tilde{g}_j}) \right).$$

Assim, os fatores livres não triviais são isomorfos a C_2 ou C_3. Portanto,

$$H \simeq \tilde{F} \ast H_1 \ast H_2$$

onde $H_1 = 1$ ou $H_1 = C_2$ e $H_2 = 1$ ou $H_2 = C_3$.

1.4 O Teorema de Grushko-Neumann

Teorema 1.4.1 (Grushko-Neummann). *Sejam F um grupo livre finitamente gerado e $G = \ast_i G_i$ um produto livre de grupos. Se $\varphi : F \to G$ é um epimorfismo, então*

$$F = \ast_i F_i$$

onde $\varphi(F_i) = G_i$.

Corolário 1.4.2 (Grushko-Neumann 'baby'). *Se G_1 e G_2 são grupos finitamente gerados, então*

$$\mathrm{rk}(G_1 * G_2) = \mathrm{rk}(G_1) + \mathrm{rk}(G_2).$$

Demonstração. Sejam $\mathrm{rk}(G_1) = n$, $\mathrm{rk}(G_2) = m$, F o grupo livre de posto k e $\varphi : F \to G = G_1 * G_2$ um epimorfismo. Pelo Teorema de Grushko-Neumann, $F = F_1 * F_2$ com $\varphi(F_1) = G_1$ e $\varphi(F_2) = G_2$. Se $x_1, ..., x_k$ os geradores de F, sejam $x_1, ..., x_r$ os geradores de F_1 e $x_{r+1}, ..., x_k$ os geradores de F_2. Então

$$G = \langle \varphi(x_1), ..., \varphi(x_k) \rangle, \quad G_1 = \langle \varphi(x_1), ..., \varphi(x_r) \rangle, \quad G_2 = \langle \varphi(x_{r+1}), ..., \varphi(x_k) \rangle,$$

logo, $r \geqslant n$ e $k - r \geqslant m$. Assim,

$$\mathrm{rk}(G_1) + \mathrm{rk}(G_2) = n + m \leqslant r + (k - r) = k = \mathrm{rk}(G).$$

A outra desiguadade é óbvia. $\square$

1.5 Produtos profinitos livres

Consideraremos $\mathcal{C}$ uma variedade de grupos finitos fechada para extensões.

Definição 1.5.1. Sejam $G_1, ..., G_n$ grupos pro-$\mathcal{C}$. Um grupo pro-$\mathcal{C}$ G junto com uma família de homomorfismos contínuos $\iota_i : G_i \to G$ é um *produto pro-$\mathcal{C}$ livre* dos G_i se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: dados um grupo pro-$\mathcal{C}$ H e uma família de homomorfismos contínuos $\varphi_i : G_i \to H$, existe um único homomorfismo contínuo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi\iota_i = \varphi_i$. Dizemos que G_i é um *fator livre* de G.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ G_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H \end{tikzcd}$$

é comutativo.

O produto pro-$\mathcal{C}$ livre será denotado por

$$G = \coprod G_i = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_n.$$

Teorema 1.5.2. *O produto pro-$\mathcal{C}$ livre de grupos pro-$\mathcal{C}$ $G_1, ..., G_n$ existe e é único.*

Demonstração. Sejam G^{abs} o produto livre abstrato dos $G_1, ..., G_n$, $\iota_i^{abs} : G_i \to G^{abs}$ os monomorfismos. Considere

$$\mathcal{N} = \{N \lhd G^{abs} : G^{abs}/N \in C, (\iota_i^{abs})^{-1}(N) \lhd_o G_i\},$$

G o completamento de G^{abs} com respeito a topologia determinada por $\mathcal{N}$, $f : G^{abs} \to G$ o mapa natural e $\iota_i = f\iota_i^{abs}$.

Sejam $H \in \mathcal{C}$ e $\varphi_i : G_i \to H$ homomorfismos contínuos. Pela propriedade universal do produto livre abstrato, existe um único $\varphi^{abs} : G^{abs} \to H$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G^{abs} \arrow[d, dashed, "\varphi^{abs}"] \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i^{abs}"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H
\end{tikzcd}$$

comutativo. Por construção, temos

$$\begin{tikzcd}
 & G^{abs} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi^{abs}"] & G \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i^{abs}"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H &
\end{tikzcd}$$

Note que $(\iota_i^{abs})^{-1}(\ker \varphi^{abs}) = \ker \varphi_i$, logo, $\ker \varphi^{abs} \in \mathcal{N}$ e φ^{abs} é contínua. Pela propriedade universal do completamento, existe um homomorfismo $\varphi : G \to H$ tornando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G^{abs} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi^{abs}"] & G \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i^{abs}"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H &
\end{tikzcd}$$

comutativo. É imediato verificar que qualquer outro $\tilde{\varphi}$ completando o diagrama é igual a φ.

A unicidade fica como exercício para o leitor (se você fez os anteriores já sabe exatamente o que precisa fazer, senão... estou te dando mais uma chance de aprender). $\square$

Note que, assim como fizemos para grupos livres, ao invés de tomar um grupo pro-$\mathcal{C}$, escolhemos um C-grupo finito H. O argumento que justifica essa escolha é extremamente similar ao usado para grupos livres (e usaremos esse maravilhoso fato posteriormente). Daremos uma ideia mais uma vez apenas para exercício: suponha a propriedade universal válida para grupos em $\mathcal{C}$ e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G & \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H \arrow[r, "\pi_N"'] & H/N
\end{tikzcd}$$

onde H é um grupo pro-$\mathcal{C}$. Por hipótese, existe φ_N tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dr, dashed, "\varphi_N"] & \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H \arrow[r, "\pi_N"'] & H/N
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Pela propriedade universal do limite invero, existe $\varphi : G \to H$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dr, "\varphi_N"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \\
G_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & H \arrow[r, "\pi_N"'] & H/N
\end{tikzcd}$$

é comutativo. É imediato verificar que φ é único.

1.6 O completamento do produto livre

Proposição 1.6.1. *Seja $G = G_1 * G_2$ um produto livre abstrato. Então*

$$\widehat{G} = \widehat{G_1} \sqcup \widehat{G_2}.$$

Demonstração. A propriedade universal do produto profinito livre garante a existência de um único φ que torna o diagrama

comuta por construção

$$\begin{tikzcd}
& & & \widehat{G_1} \sqcup \widehat{G_2} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
\widehat{G_1} \arrow[urrr] \arrow[rrr, bend right, "\psi"'] & G_1 \arrow[l] \arrow[r] & G_1 * G_2 \arrow[ur] \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

propriedade universal do completamento de G_1

$\square$

Estamos usando implicitamente o fato de $\widehat{G_1}$ ser fechado em $\widehat{G_1} \sqcup \widehat{G_2}$, logo, ser profinito (veja [Rib17] para uma demonstração).

Exercício. Esse argumento vale para o completamento pro-$\mathcal{C}$?

Vimos anteriormente que se F é o grupo profinito livre num conjunto finito X, então F é o completamento profinito do grupo livre abstrato F^{abs} em X. Além disso,

$$F^{abs} = \underset{X}{*}\, \mathbb{Z},$$

logo,

$$F = \bigsqcup_X \widehat{\mathbb{Z}}.$$

1.7 Aplicações de Kurosh

Aplicação 3. Assim como no caso abstrato, a versão pro-$\mathcal{C}$ de Nielsen-Schreier é uma consequência de Kurosh.

Uma vez que Nielsen-Schreier não vale em geral no caso profinito, então Kurosh obviamente não pode valer. Mas é útil ter um exemplo dentro desse contexto.

Exemplo 1.7.1. Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p não triviais com p primo (ambos são profinitos). Considere $G = G_1 \sqcup G_2$ seu produto profinito livre. Note que o subgrupo cartesiano K_G é um grupo profinito livre, logo, grupo pro-q, com $q \neq p$, é imagem epimórfica contínua de K_G. Assim, existe um pro-q subgrupo de Sylow não trivial Q em G. Temos que $Q \cap G_1^g = 1 = Q \cap G_2^g$ para qualquer $g \in G$, pois $q \neq p$.

Se o Teorema de Kurosh é verdadeiro em qualquer caso, Q deve ser profinito livre. Se Q é profinito livre em um conjunto X e $g : X \to \mathbb{Z}_p$ é um mapa 1-convergente satisfazendo $g(x) = 1$, pela propriedade universal, deve existir um homomorfismo contínuo $\varphi : Q \to \mathbb{Z}_p$ satisfazendo $\varphi(g) = 1$ onde g é gerador de Q, o que é impossível. Assim, Q não é um grupo profinito livre.

Aplicação 4. Sejam $G_1, ..., G_n$ grupos em $\mathcal{C}$ e G seu produto pro-$\mathcal{C}$ livre com $G_j \neq 1$. Então $G_i \cap G_i^x = 1$ para cada $x \in G - G_i$.

Escolha $x \in G - G_i$ e $N_i \triangleleft_o G$ tal que $x \notin g_i N_i$ para cada $g_i \in G_i$. Assim, se $N = \bigcap N_i$, então $x \notin G_i N$. Uma vez que $G_i N$ é aberto, o Teorema de Kurosh nos dá

$$G_i N = F \sqcup \left(\bigsqcup_{j, g_{jk}} (G_i N \cap G_j^{g_{jk}}) \right)$$

. Existe um representante g de uma classe dupla tal que

$$x \in (G_i N) g G_j,$$

ou seja,

$$x = (g_i u) g g_j = g_i g_{i,k} g_j' u.$$

Os mapas que mandam cada fator livre identicamente no fator direto correspondente induzem o homomorfismo

$$\psi : G_i N \to F \times \left(\prod_{j, g_{jk}} (G_i N \cap G_j^{g_{jk}}) \right).$$

Além disso, $G_i^x = G_i^{g_{i,k} g'_j u}$ implica

$$G_i \cap G_i^x = G_i \cap (G_i N \cap G^{g_{i,k} g'_j u}).$$

Assim,

$$\psi(G_i \cap G_i^x) \leqslant \psi(G_i) \cap \psi(G_i N \cap G^{g_{i,k}}) = 1,$$

logo, $G_i \cap G_i^x = 1$ (explique com detalhes).

1.8 O Teorema de Grushko-Neumann

O Teorema de Grushko-Neumann 'baby' não vale no caso profinito.

Exemplo 1.8.1. Considere o seguinte resultado:

Teorema (Kovács-Sim (1991)). *Se um grupo finito solúvel G pode ser gerador por s subgrupos de ordens coprimas e se cada um dos subgrupos geradores pode ser gerado por r elementos, então G pode ser gerado por $r + s - 1$ elementos.*

Considere $G_1 = C_2 \times C_2$ e $G_2 = C_3 \times C_3$. Note que $d(G_1) = 2$ e $d(G_2) = 2$. Se $G = G_1 * G_2$ é um produto prosolúvel livre, G é limite inverso de grupos solúveis finitos G/N. Aplicando esse teorema a cada G/N, vemos que $d(G/N) = 3$ e assim, $d(G) = 3$, logo,

$$d(G) = 3 < 4 = d(G_1) + d(G_2).$$

Contudo, nos restringindo a classe dos p-grupos finito, ainda temos a validade no resultado.

Teorema 1.8.2 (Grushko-Neumann 'baby' versão pro-p). *Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p finitamente gerados, então*

$$\mathrm{rk}(G_1 \sqcup G_2) = \mathrm{rk}(G_1) + \mathrm{rk}(G_2)$$

Demonstração. Seja K_G o subgrupo cartesiano de G. Então

$$G/K_G \simeq G_1 \times G_2.$$

Assim,

$$\mathrm{rk}(G) \geqslant \mathrm{rk}(G/\Phi(G)) = \mathrm{rk}(G_1/\Phi(G_1)) + \mathrm{rk}(G_2/\Phi(G_2)) = \mathrm{rk}(G_1) + \mathrm{rk}(G_2).$$

A outra desigualdade é óbvia. □

Referências Bibliográficas

[Rib17] L. Ribes. *Profinite graphs and groups*, volume 66. Springer, 2017.