

Exame de Álgebra

Universidade[•]
de Brasília

Parte II
Lucas Corrêa Lopes

Notas escritas para o Exame de
Qualificação em Álgebra da Universidade
de Brasília.

GRUPOS LIVRES vs GRUPOS PROJETIVOS

Sumário

capítulo 1	Livres x Projetivos	Página 1
1.1	Grupos livres abstratos	1
1.2	A propriedade projetiva	2
1.3	Grupos profinitos livres	3
1.4	A propriedade \mathcal{C} -projetiva	5
1.5	O caso $\text{pro-}p$	8
1.6	Um prova de Nielsen-Schreier quando X é finito	8

Capítulo 1

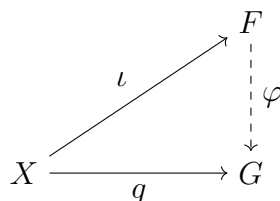
Livres x Projetivos

1.1 Grupos livres abstratos

Vamos falar brevemente sobre a construção dos grupos livres abstratos.

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto não-vazio, F um grupo e $\iota : X \rightarrow F$ um mapa. O par (F, ι) é um *grupo livre* se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: se $g : X \rightarrow G$ é um homomorfismo num grupo G , existe um **único** homomorfismo $\varphi : F \rightarrow G$ tal que $\varphi\iota = g$.

Isso significa que o diagrama



é comutativo.

A existência é provada de maneira puramente construtiva: dado um conjunto X e um conjunto

$$X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\},$$

isto é, $X \cap X^{-1} = \emptyset$, uma sequência finita de elementos de X é uma *palavra* (a *palavra vazia*, sem símbolos, é denotada por 1). Definimos uma relação de equivalência entre as palavras de X dizendo que as palavras v, w são equivalentes se podemos transformar v em w inserindo ou removendo elementos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Uma palavra que não contém termos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$ é *reduzida*. É fácil verificar que cada classe de equivalência contém uma única palavra reduzida. Denotando por F o grupo de todas as palavras reduzidas com a operação de justaposição e definindo $\iota : X \rightarrow F$ por $\iota(x) = [x]$, então (F, ι) satisfaz a propriedade universal.

Exercício. Pesquise e descreva detalhadamente o processo acima para a construção de um grupo livre. Além disso, mostre que existe um único grupo livre em X , isto é, se F_1 e F_2 são livres em X , então $F_1 \simeq F_2$. Além disso, mostre que se $|X| = |Y|$, então $F(X)$ e $F(Y)$, os grupos livres em X e Y , são isomorfos.

1.2 A propriedade projetiva

Definição 1.2.1. Seja P um grupo. Dizemos que P é *projetivo* se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: se $\alpha : P \rightarrow H$ é um homomorfismo e $\beta : G \rightarrow H$ um epimorfismo de grupos, existe um homomorfismo $\gamma : P \rightarrow G$ tal que $\beta\gamma = \alpha$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \gamma \swarrow & \downarrow \alpha & \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

é comutativo.

Teorema 1.2.2. Um grupo F é livre se, e somente se, é projetivo.

Demonstração. Suponha que F seja livre e que seja dado o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \downarrow \alpha & \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

onde α é um homomorfismo de grupos e β um epimorfismo de grupos. Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \iota & & \\ F & & \\ \downarrow \alpha & & \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \simeq G/\ker \beta \end{array}$$

Seja T um transversal de $\ker \beta$ em G . Então $\beta_T : T \rightarrow H$ é uma bijeção admitindo uma inversa $\tau : H \rightarrow T$. Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \tau\alpha\iota \swarrow & \downarrow \iota & \\
 G & & F \\
 \beta \searrow & \downarrow \alpha & \\
 & H \simeq G/\ker \beta &
 \end{array}$$

Pela propriedade universal dos grupos livres, existe um único homomorfismo $\varphi : F \rightarrow G$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \tau\alpha\iota \swarrow & \downarrow \iota & \\
 G & & F \\
 \beta \searrow & \downarrow \alpha & \\
 & H \simeq G/\ker \beta &
 \end{array}$$

(A seta $\varphi : F \rightarrow G$ é representada por uma linha tracejada azul no diagrama original)

em azul é comutativo. Assim, $\beta\varphi = \alpha$.

Suponha agora que F seja projetivo. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \gamma \swarrow & \downarrow \text{id}_F & \\
 F(X) & \xrightarrow{\beta} & F
 \end{array}$$

onde $\beta : F(X) \rightarrow F$ é um epimorfismo de $F(X)$ em F , onde $F(X)$ é o grupo livre em X . Assim, $\beta\gamma = \text{id}_F$ e então γ é um monomorfismo. Considerando F um subgrupo de $F(X)$, o Teorema de Nielsen-Schreier garante que F é livre. \square

O Teorema de Nielsen-Schreier não é um resultado trivial. Daremos uma prova em outro momento usando a Teoria de Bass-Serre.

1.3 Grupos profinitos livres

Consideraremos \mathcal{C} uma variedade de grupos finitos fechada para extensões.

Se G é um grupo profinito. Um subconjunto S de G é *1-convergente* se todo aberto de G contém quase todos os elementos de S , isto é, não contém apenas uma quantidade finita. Se $\mu : X \rightarrow G$ é um mapa, então μ é *1-convergente* se $\mu(X)$ é 1-convergente.

Definição 1.3.1. Sejam X um conjunto, $F_{\mathcal{C}}(X)$ um grupo pro- \mathcal{C} e $\iota : X \rightarrow F_{\mathcal{C}}(X)$ um mapa 1-convergente. Dizemos que $F_{\mathcal{C}}(X)$ (ou $(F_{\mathcal{C}}(X), \iota)$) é um *grupo pro- \mathcal{C} livre restrito* em X se satisfaz a seguinte **propriedade universal**: para cada grupo pro- \mathcal{C} G e mapa 1-convergente $g : X \rightarrow G$, existe um **único** homomorfismo $\varphi : F_{\mathcal{C}} \rightarrow G$ tal que $\varphi\iota = g$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F_{\mathcal{C}} \\ & \nearrow \iota & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

é comutativo.

Iremos nos referir a $F_{\mathcal{C}}(X)$ simplesmente como grupo pro- \mathcal{C} livre em X .

Proposição 1.3.2. *Seja X um conjunto, então existe um único grupo pro- \mathcal{C} livre em X .*

Demonstração. Sejam X um conjunto e F^{abs} (mais especificamente, (F^{abs}, ι^{abs})) o grupo livre abstrato em X . Considere

$$\mathcal{N} = \{N \triangleleft F : F/N \in \mathcal{C}, |X - N| < \infty\},$$

F o completamento de F^{abs} com respeito a topologia determinada por \mathcal{N} , $f : F^{abs} \rightarrow F$ o mapa natural de F^{abs} no seu completamento e $\iota = f\iota^{abs}$. Se $\pi_N : F \rightarrow F^{abs}/N$ é a projeção do limite inverso, então $\iota(x) \in \ker \pi_N$ se, e somente se, $x \in N$, logo, a condição $|X - N| < \infty$ garante que $\ker \pi_N$ contém quase todos os elementos de $\iota(X)$, isto é, ι é 1-convergente.

Sejam $G \in \mathcal{C}$, $g : X \rightarrow G$ um mapa 1-convergente e considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F^{abs} \\ & \nearrow \iota^{abs} & \downarrow \varphi^{abs} \\ X & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

que comuta pela propriedade universal dos grupos livres abstratos. Por construção, temos

$$\begin{array}{ccccc} & & F^{abs} & \xrightarrow{f} & F \\ & \nearrow \iota^{abs} & \downarrow \varphi^{abs} & & \\ X & \xrightarrow{g} & G & & \end{array}$$

Como g é 1-convergente, 1 contém quase todos os elementos de $g(X)$, logo, $g = \varphi^{abs} \iota^{abs}$ implica $\ker \varphi^{abs} \in \mathcal{N}$, ou seja, φ^{abs} é contínua. Pela propriedade universal do completamento, existe um único $\varphi : F \rightarrow G$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F^{abs} & \xrightarrow{f} F \\ & \downarrow \varphi^{abs} & \searrow \varphi \\ X & \xrightarrow{g} G & \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \iota^{abs} \\ \end{array}$$

É imediato notar que φ é único.

A unicidade de F é mostrada de maneira similar ao caso abstrato aplicando a propriedade universal duas vezes (obviamente fica como **exercício!**). \square

Note que se X é finito, então a condição $|X - N| < \infty$ é irrelevante, logo, o grupo pro- \mathcal{C} livre num conjunto finito X é o completamento pro- \mathcal{C} do grupo livre abstrato em X .

Na demonstração do resultado acima, usamos um grupo G em \mathcal{C} e não um grupo pro- \mathcal{C} como a definição exige. Para justificar isso, suponha que a propriedade universal seja válida para grupos em \mathcal{C} e $g : X \rightarrow G$ seja um mapa contínuo num grupo pro- \mathcal{C} G . Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow \iota & & \searrow \varphi_N & \\ X & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{\pi_N} & G/N \end{array}$$

pela propriedade universal dos grupos livres com grupos em \mathcal{C} . Pela propriedade universal do limite inverso, existe um único φ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow \iota & \downarrow \varphi & \searrow \varphi_N & \\ X & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{\pi_N} & G/N \end{array}$$

é comutativo.

1.4 A propriedade \mathcal{C} -projetiva

Definição 1.4.1. Dizemos que um grupo pro- \mathcal{C} P é \mathcal{C} -projetivo se satisfaz a seguinte propriedade universal: se $\alpha : P \rightarrow H$ é um homomorfismo contínuo e $\beta : G \rightarrow H$ um epimorfismo contínuo (onde H, G são grupos pro- \mathcal{C}), então existe um homomorfismo contínuo $\gamma : P \rightarrow G$ tal que $\beta\gamma = \alpha$.

Isso significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \gamma & \downarrow \alpha \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

é comutativo.

Teorema 1.4.2. *Um grupo pro- \mathcal{C} livre é \mathcal{C} -projetivo.*

Demonstração. Seja F pro- \mathcal{C} livre e considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & & \downarrow \alpha \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

onde α é um homomorfismo contínuo de grupos e β um epimorfismo contínuo de grupos. Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \iota \\ & & F \\ & & \downarrow \alpha \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \simeq G/\ker \beta \end{array}$$

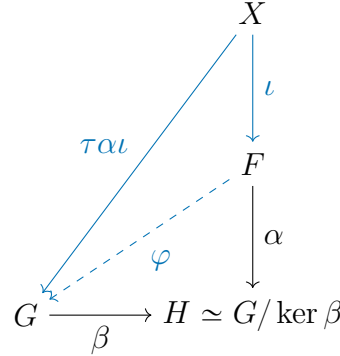
Seja T um transversal de $\ker \beta$ em G . Então $\beta_T : T \rightarrow H$ é uma bijeção contínua admitindo uma inversa $\tau : H \rightarrow T$. Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \searrow \tau\alpha\iota & \downarrow \iota \\ G & \xrightarrow{\beta} & H \simeq G/\ker \beta \\ & & \downarrow \alpha \\ & & F \end{array}$$

Note que se $N \triangleleft_o G$, então

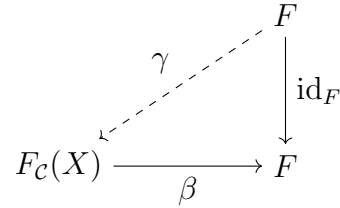
$$\{x \in X : (\tau\alpha\iota)(x) \notin N\} = \{x \in X : \iota(x) \notin (\tau\alpha)^{-1}(N)\}$$

que é finito já que $(\tau\alpha)^{-1}(N)$ é um aberto contendo 1 em G , ou seja, $\tau\alpha\iota$ é 1-convergente. Pela propriedade universal dos grupos pro- \mathcal{C} livres, existe um único homomorfismo $\varphi : F \rightarrow G$ tal que o diagrama



em azul é comutativo. Assim, $\beta\varphi = \alpha$. □

Se tentarmos usar a mesma ideia do caso abstrato, vamos para no seguinte ponto: *suponha agora que F seja projetivo. Considere o diagrama*



onde $\beta : F_{\mathcal{C}}(X) \rightarrow F$ é um epimorfismo de $F_{\mathcal{C}}(X)$ em F , onde $F_{\mathcal{C}}(X)$ é o grupo livre em X . Assim, $\beta\gamma = \text{id}_F$ e então γ é um monomorfismo. Considerando F um subgrupo de $F_{\mathcal{C}}(X)$, o **Teorema de Nielsen-Schreier garante que F é livre** (falso!). O teorema de Nielsen-Schreier no caso pro- \mathcal{C} não vale em geral!

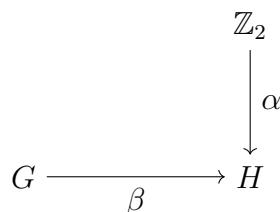
Exemplo 1.4.3. Considere o grupo profinito livre $\hat{\mathbb{Z}}$. Sabemos que

$$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p.$$

Assim, \mathbb{Z}_p é um subgrupo pro- p fechado de $\hat{\mathbb{Z}}$ que não é profinito, logo, não é profinito livre.

Assim, o melhor que podemos dizer é que: *um grupo \mathcal{C} -projetivo é um subgrupo fechado de um grupo pro- \mathcal{C} livre*

Exemplo 1.4.4. De fato, considere $\pi = \{2, 3\}$. Considere o diagrama



onde α é um homomorfismo contínuo e β um epimorfismo contínuo de grupos pro- π . Note que $\alpha(\mathbb{Z}_2)$ é um 2-subgrupo de H e todo 2-Sylow de H é imagem de um 2-Sylow P de G . Assim, $\alpha(\mathbb{Z}_2) \leq \beta(P)$ para algum 2-Sylow P de G . Se $\mathbb{Z}_2 = \langle g \rangle$, então $\alpha(g) = \beta(p)$ para algum $p \in P$. Defina $\gamma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow G$ por $\gamma(g) = p$. Assim,

$$(\beta\gamma)(g) = \beta(p) = \alpha(g),$$

logo, \mathbb{Z}_2 é π -projetivo. Contudo, \mathbb{Z}_2 não é pro- π livre pois é impossível obter um homomorfismo contínuo levando g em $1 \in \mathbb{Z}_3$.

Assim, \mathbb{Z}_2 é pro- π projetivo mas não é pro- π livre.

1.5 O caso pro- p

Seja $\rho : P/\Phi(P) \rightarrow G/\Phi(G)$ um epimorfismo contínuo. Sejam $\alpha : P \rightarrow P/\Phi(P)$ e $\beta : G \rightarrow G/\Phi(G)$ os epimorfismos canônicos. Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \alpha \downarrow & \searrow \rho\alpha & \downarrow \beta \\ P/\Phi(P) & \xrightarrow{\rho} & G/\Phi(G) \end{array}$$

onde $\varphi : P \rightarrow G$ existe pela propriedade projetiva de P . Como $\beta\varphi = \rho\alpha$, então

$$(\beta\varphi)(P) = \beta(\varphi(P)) = \varphi(P)\Phi(G)/\Phi(G)$$

e

$$(\rho\alpha)(P) = \rho(\alpha(P)) = \rho(P/\Phi(P)) = G/\Phi(G),$$

logo,

$$\varphi(P)\Phi(G)/\Phi(G) = G/\Phi(G),$$

isto é, $\varphi(P)\Phi(G) = G$ e assim $\varphi(P) = G$ (veja [Wil98, Proposição 2.5.1]). Se adicionalmente, ρ é um isomorfismo, então φ também será.

Se P é um grupo pro- p projetivo, então

$$P/\Phi(P) \simeq \prod_X \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Se F é o grupo pro- p livre em X , então

$$F/\Phi(F) \simeq \prod_X \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Pela observação anterior, $F \simeq P$.

Assim, um grupo F é pro- p livre se, e somente se, é p -projetivo.

Exercício. A demonstração de que projetivo implica livre no caso abstrato pode ser usada no caso pro- p ? Isto é, o Teorema de Nielsen-Schreier vale para subgrupos fechados de grupos pro- p ?

1.6 Um prova de Nielsen-Schreier quando X é finito

Teorema 1.6.1 (Nielsen-Schreier versão pro- \mathcal{C}). *Seja F um grupo pro- \mathcal{C} livre no conjunto finito X . Se $H \leq_o F$, então H é pro- \mathcal{C} livre.*

Demonstração. Temos que $\overline{F^{abs}} = F$ e $H \cap F^{abs}$ é livre abstrato pelo Teorema de Nielsen-Schreier. Suponha que $H \cap F^{abs}$ contenha um subgrupo normal N de F^{abs} com $F^{abs}/N \in \mathcal{C}$, então a topologia profinita em F^{abs} induz a topologia profinita plena em $F^{abs} \cap H$ de modo que H é o complemento pro- \mathcal{C} de $F^{abs} \cap H$ e, portanto, livre. Note que

$$F - H = \bigcup_{M \triangleleft_o F} F - HM$$

com $F/M \in \mathcal{C}$. Uma vez que $F - H$ é fechado em F , a compacidade nos dá

$$F - H = (F - HM_1) \cup \dots \cup (F - HM_n) = F - \bigcap_1^n HM_i.$$

Então

$$H \left(\bigcap_1^n M_i \right) = \bigcap_1^n HM_i \subset H.$$

Tomando

$$K = \bigcap_1^n M_i,$$

então $N = K \cap F^{abs}$ é o subgrupo procurado. □

Referências Bibliográficas

[Wil98] J. Wilson. *Profinite Groups*, volume 19. Oxford University Press, Nova Iorque, 1 edition, 1998.