MGL KE2

Definition: Treppennormalform

$A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ ist in Treppennormalform, wenn

- $A = 0$ oder

- Pivot-positionen: 1 bei bis zu n Zeilen
- Alle sonstigen Elemente der Pivotspalte $= 0$
- Alle Elemente der Pivotspalte links der Pivotposition $= 0$
- Alle Zeilen > Anzahl Pivotpositionen $= 0$

Ermitteln der Transformationsmatrix

Wende Gaußalgorithmus auf Matrix $\bar{A} = (A \mid I_m)$, $A \in M_{mm}(\mathbb{K})$ an.

Definition: Rang

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ und sei T die Treppennormalform zu A.
Wir nennen die Anzahl der Pivot-Positionen den Rang von A und schreiben $Rg(A)$

Proposition: Ränge von Matrizen

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Es gilt

a.) $P \in M_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar $\Rightarrow Rg(A) = Rg(PA)$

b.) $A = A'A'' \Rightarrow Rg(A) \leq Rg(A')$

c.) $Q \in M_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbar $\Rightarrow Rg(A) = Rg(AQ)$

Definition: Lineares Gleichungssystem

LGS:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{aligned}$$

- Koeffizientenmatrix LGS $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$
- Lösung LGS $Ax = b$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{K}) \quad \text{mit } A\lambda = b.$$

- erweiterte Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij} \mid b) \in M_{m\,n+1}(\mathbb{K})$
- homogenes LGS: $Ax = 0$
- inhomogenes LGS: $Ax = b$ mit $b \neq 0$

Definition: Lösung LGS

Sei λ_0 eine Lösung von $Ax = b$. Sei $\mathcal{L} =$

$$\lambda_0 + \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{Menge der Lösungen des homogenen LGS}} := \{\lambda_0 + u \mid u \in \mathcal{U}\} \subseteq M_{n1}(\mathbb{K})$$

Anzahl Lösungen

$Rg(A) = Rg(A') \iff Ax = b$ hat mindestens eine Lösung

$Rg(A) = n \iff Ax = b$ hat genau eine Lösung

Berechnung

1.) Berechne Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix
2.) Streiche Nullzeilen, Füge Nullzeilen so ein, dass Matrix quadratisch ist und Pivot-Elemente Diagonalelemente sind. Ersetze Null-Diagonalelemente mit -1
3.) Rechte Spalte spezielle Lösung, Spalten sind Basis von $\mathcal{U}$

Satz: Existenz von Treppennormalform

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Dann existieren Elementarmatrizen $E_1, \dots E_s \in M_{mm}(\mathbb{K})$, so dass $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A$ eine Matrix in Treppennormalform ist.

Satz: Eindeutigkeit der Treppennormalform

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ und seien $T, T' \in M_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform, die beide aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgehen. Dann gilt $T = T'$.

Korollar

Seien $A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt

A, B zeilenäquivalent $\iff TNF(A) = TNF(B)$

Proposition: Invertierbare Matrizen

Seien $A \in M_{mm}(\mathbb{K})$. Es gilt

A ist invertierbar $\iff$

$TNF(A) = I_m \iff$

$Rg(A) = m \iff$

A ist ein Produkt von Elementarmatrizen

MGL KE2

Körper

Sei $\mathbb{K}$ eine Menge mit additiver und multiplikativer Verknüpfung und zwei verschiedenen Elementen 0 und 1 mit folgenden Regeln

- Addition: – kommutativ, assoziativ, neutrales Element 0, alle Elemente invertierbar

- Multiplikation: – kommutativ, assoziativ, neutrales Element 1, alle Elemente $\neq 0$ invertierbar

- Distributivgesetz

Rechenregeln

$\forall a \in \mathbb{K}: \ a \cdot 0 = 0$

$\forall a, b \in \mathbb{K}: \ ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \ a+b = 0 \wedge a+c = 0 \Rightarrow b = c$

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \ a \neq 0 \wedge ab = 1 \wedge ac = 1 \Rightarrow b = c$

Vektorraum

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist eine Menge V mit

- Vektoraddition $+: V \times V \to V$
  - assoziativ, kommutativ, neutrales Element 0, alle Elemente invertierbar

- Skalarmultiplikation $\cdot: \mathbb{K} \times V \to V$
  assoziativ bzgl. Skalare $\forall a, b \in \mathbb{K}, v \in V: (ab)v = a(bv)$
  neutrales Element $1 \in \mathbb{K}$

- Distributivgesetze

Rechenregeln

$0v = 0$ für alle $v \in V$

$\forall a \in \mathbb{K}, 0 \in V: \ a0 = 0$

$\forall a \in \mathbb{K}, v \in V: \ (-a)v = a(-v) = -(av)$

MGL KE3

Definition 7.1.1: Darstellung des Nullvektors
Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ heißt triviale Darstellung des Nullvektors durch $v_1, \dots, v_n$, wenn $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Andernfalls sprechen wir von einer nicht-trivialen Darstellung des Nullvektors.

Definition: Lineare Unabhängigkeit
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls der Nullvektor nur trivial dargestellt werden kann. Andernfalls ist $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.

Proposition 7.1.6: Charakterisierung linear abhängiger Vektoren
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Genau dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, wenn es ein i mit $1 \leq i \leq n$ gilt, so dass $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$.

Definition 7.2.1: Basis
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen Basis von V, falls $v_1, \dots, v_n$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Standardbasen
$\mathbb{K}^n$: $e_1, \dots, e_n$ $\qquad M_{mn}(\mathbb{K})$: $E_{ij} \in M_{mn}(\mathbb{K})$
$\mathbb{K}[T]$: $e_0, \dots, e_n$
Sonderfall Basis $\{0\} = \emptyset$

Proposition 7.2.7: Charakterisierung von Basen
Sei $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $v_1, \dots, v_n \in V$. Es gilt
$v_1, \dots, v_n$ Basis von $V \iff$ jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben

Proposition 7.2.8: Existenz von Basen endlich erzeugter Vektorräume
Sei $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann gilt
a) Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und ist $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, so ist $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n$ ein Erzeugendensystem von V.
b.) Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so existieren $v_{i_1}, \dots, v_{i_t} \in \{v_1, \dots, v_n\}$, so dass $v_{i_1}, \dots, v_{i_t}$ eine Basis von V ist.

Bemerkung Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $v_1, \dots, v_n \in V$
a.) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und ist $v_{n+1} \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, so ist auch $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig.
b.) Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem, so ist $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ für alle $v_{n+1} \in V$ linear abhängig.

Satz 7.3.3 Austauschsatz von Steinitz
Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis eines endlichen erzeugten Vektorraums V und seien $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann gilt $n \geq m$ und es gilt $u_{i_{m+1}}, \dots, u_{i_n} \in \{u_1, \dots, u_n\}$, so dass $v_1, \dots, v_m, u_{i_{m+1}}, \dots, u_{i_n}$ eine Basis von V ist.

Korollar 7.3.4: Charakterisierung endlich erzeugter Vektorräume
Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist genau dann endlich erzeugt, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so dass jede Menge linear unabhängiger Elemente aus V höchstens n Elemente besitzt.

Korollar 7.3.5: Basisergänzungssatz
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und seien $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängige Vektoren in V. Dann lässt sich $w_1, \dots, w_m$ zu einer Basis von V ergänzen.

Korollar 7.3.6
Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben die gleiche Anzahl an Vektoren.

Definition 7.4.1: Dimension
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
a.) Ist V unendlich erzeugt, gilt $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$
b.) $V \neq \{0\}$ endlich erzeugt, Basen von n Vektoren $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$
c.) $V = \{0\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V) = 0$

Proposition 7.4.4 (Vereinfachung Basisermittlung)
Sei $\dim(V) = n < \infty$. Dann gilt
a.) n linear unabhängige Vektoren in V sind Basis.
b.) Erzeugendensystem von V mit n Vektoren ist Basis

Korollar 7.4.5: Dimensionsformel für Unterräume
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$ mit $\dim(U) = \dim(V) \iff U = V$

Proposition 7.4.6 Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien U, W endlich dimensionale Unterräume von V. Dann gilt $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

KE3

Definition: Vektorraumhomomorphismus / lineare Abbildung
Seien V, W Vektorräume über einem Vektor $\mathbb{K}$. Wir nennen eine Abbildung $f: V \to W$ linear bzw. einen Vektorraumhomomorphismus, wenn gilt
a.) $\forall v, v' \in V: f(v+v') = f(v) + f(v')$
b.) $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall v \in V: f(av) = a f(v)$

Definition: Isomorphismus
Wir nennen eine bijektive lineare Abbildung $f: V \to W$ einen Isomorphismus. Notation: $V \simeq W$.
Bemerkung: Da f bijektiv ist, ist f mit f^{-1} invertierbar und f^{-1} ist selbst ein Isomorphismus.

Definition 8.3.1: Bild(f)
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.
Das Bild von f ist die Menge
$\mathrm{Bild}(f) = \{ w \in W \mid \exists v \in V: f(v) = w \}$
Bemerkung: Bild(f) ist Unterraum von W

Proposition 8.3.4
Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von Bild(f).

Korollar
Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Es gilt
f surjektiv $\iff$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ Erzeugendensystem von W

Satz 8.3.19: Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume
Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume
a.) V, W isomorph $\iff$ $\dim(V) = \dim(W)$
b.) $\dim(V) = n \iff V \simeq \mathbb{K}^n$

Proposition 8.3.22
Seien V, W, X endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume und seien $f: V \to W$ und $g: W \to X$ lineare Abbildungen. Dann gilt $Rg(g \circ f) \le Rg(g)$ und $Rg(g \circ f) \le Rg(f)$.

Proposition 8.1.9
Die Komposition zweier linearer Abbildungen ist selbst wieder linear.
$f: U \to V$, $g: V \to W$ linear $\Rightarrow$ $g \circ f: U \to W$ linear.

Die Komposition zweier Isomorphismen ist selbst wieder ein Isomorphismus

Satz 8.2.2: Struktur endlich erzeugter Vektorräume
Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$, bezeichnet mit B. Sei $K_B: V \to \mathbb{K}^n$ mit $K_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für alle $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$. Dann ist K_B ein Isomorphismus.

Definition 8.2.4
Wir nennen $K_B(v)$ den Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B.

Korollar 8.2.6
Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gilt
1.) $\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow V$ und W isomorph
2.) $\dim(V) = n \Rightarrow V$ isomorph zu $\mathbb{K}^n$

Definition 8.3.7: Kern(f)
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Kern von f ist die Menge $\mathrm{Kern}(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$
Bemerkung: Der Kern einer linearen Abbildung $f: V \to W$ ist ein Unterraum von V.

Proposition 8.3.10
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gilt:
f injektiv $\iff$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$

Definition 8.3.12: Rang(f)
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Rang von f wird mit $Rg(f)$ bezeichnet und durch $Rg(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$ definiert

Satz 8.3.13
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von Kern(f) und sei $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ eine Basis von Bild(f).

Korollar 8.3.14: Rangsatz
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + Rg(f)$.

Korollar 8.3.17
Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume derselben Dimension und sei $f: V \to W$ linear. Es gilt:
f surjektiv $\iff$ f injektiv

Korollar 8.3.18
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann gilt
a.) f injektiv $\iff$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ Basis von Bild(f)
b.) f surjektiv $\iff$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ Erzeugendensystem von W
c.) f bijektiv $\iff$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ Basis von W

KE3

Satz 8.4.1: Beschreibung linearer Abbildungen durch die Bilder einer Basis

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Korollar 8.4.6

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$. Dann gibt es zu jeder Basis $v_1, \dots, v_n$ von V und jeder Basis $w_1, \dots, w_n$ von W genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Korollar 8.4.7

Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraum V können durch genau eine lineare Abbildung ineinander übergeführt werden. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Definition

Seien B und B' zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums. Sei f der Isomorphismus, der B in B' überführt. Wir nennen f Basistransformation oder Basiswechsel von B nach B'.

Definition 9.0.2: System von Vektoren

Sei V ein Vektorraum und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein System von n Vektoren in V ist ein Ausdruck der Form $(v_1, \dots, v_n)$ mit $v_i \in V$ für alle $1 \leq i \leq n$. Zwei Systeme von n Vektoren $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ in V heißen gleich, wenn $v_i = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

Definition 9.1.1: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen von V nach W. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird Homomorphismenraum von V nach W genannt.

Definition 9.1.4: Matrixdarstellung

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $C = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Die $m \times n$-Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren von $f(v_1), \dots, f(v_n)$ bezüglich C sind, wird die Matrixdarstellung von f bzgl. B und C genannt und mit ${}_C M_B(f)$

Beobachtung 9.1.5

Durch $f \mapsto {}_C M_B(f)$ wird eine Abbildung ${}_C M_B: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{K})$ definiert.

Satz 9.1.9: Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $C = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Dann ist die Abbildung ${}_C M_B: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{K})$, die jeder linearen Abbildung f die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen B und C zuordnet, ein Isomorphismus.

Korollar 9.1.10: Dimensionsformel für Homomorphismenräume

V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$

Proposition 9.2.1

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume und seien B und C Basen von V bzw. W. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$${}_C M_B(f)\, K_B(v) = K_C(f(v)) \text{ für alle } v \in V.$$

Korollar 9.2.3

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Sei B eine Basis von V und sei C eine Basis von W. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem ${}_C M_B(f)\, x = 0$. Dann sind $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathcal{U}$ isomorph. Insbesondere gilt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathcal{U})$.

Korollar 9.2.4

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Sei B eine Basis von V und sei C eine Basis von W. Dann gilt $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}({}_C M_B(f))$.

Korollar 9.2.5

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$. Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spalten von A. Dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Proposition 9.3.1: Matrizenmultiplikation und Komposition linearer Abbildungen

Seien V, W und X endlich erzeugte Vektorräume und seien $f: V \to W$ und $g: W \to X$ lineare Abbildungen. Sei B eine Basis von V, C eine Basis von W und D eine Basis von X. Dann gilt

$${}_D M_B(g \circ f) = {}_D M_C(g)\, {}_C M_B(f)$$

Korollar 9.3.3

Sei $A' \in M_{ms}(\mathbb{K})$ und $A'' \in M_{sn}(\mathbb{K})$, und sei $A = A'A''$. Dann gilt $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A')$ und $\mathrm{Rg}(A) \leq \mathrm{Rg}(A'')$.

KE4 Analysis

Axiome der reellen Zahlen

Körperaxiome

(A1) Kommutativgesetze: $\forall a,b \in \mathbb{R}: a+b=b+a \wedge ab=ba$

(A2) Assoziativgesetze: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: a+(b+c)=(a+b)+c \wedge a(bc)=(ab)c$

(A3) Distributivgesetz $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: a(b+c)=ab+ac$

(A4) Existenz neutraler Elemente $\exists 0,1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}: 0+a=a \wedge 1\cdot a=a$

(A5) Existenz inverser Elemente $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}: a+(-a)=0$

$\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}: a\cdot a^{-1}=1$

Ordnungsaxiome

(A6) Trichotomiegesetz $\forall a,b \in \mathbb{R}$ entweder $a<b$ oder $a=b$ oder $a>b$

(A7) Transitivitätsgesetz $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

(A8) Monotoniegesetze $\forall c \in \mathbb{R}: a<b \Rightarrow a+c<b+c$

$\forall c>0: a<b \Rightarrow ac<bc$

Schnittaxiom

Definition: Dedekindscher Schnitt

Ein Dedekind'scher Schnitt $(A|B)$ liegt vor, wenn gilt

1.) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$.

2.) $A \cup B = \mathbb{R}$

3.) $\forall a \in A, b \in B: a<b$

Gilt $a \leq t \leq b$ für ein $t \in \mathbb{R}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$, so heißt t Trennungszahl des Dedekind'schen Schnitts $(A|B)$.

(A9) Jeder Dedekind'sche Schnitt besitzt genau eine Trennungszahl

Proposition 12.2.9

$\forall c<0: a<b \Rightarrow ac>bc$

Proposition 12.2.12

Gleich gerichtete Ungleichungen dürfen immer dann multipliziert werden, wenn alle Glieder positiv sind:

$0<a<b$ und $0<c<d \Rightarrow ac<bd$.

Proposition 12.2.13

Sei $b \neq 0$. Dann gilt:

1.) $\frac{1}{b}>0 \Leftrightarrow b>0$ 2.) $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow a,b$ beide positiv oder beide negativ

Proposition 12.2.15: Abschätzung von Brüchen

1.) $p_1<p_2$ und $q>0 \Rightarrow \frac{p_1}{q}<\frac{p_2}{q}$.

2.) $0<q_1<q_2$ und $p>0 \Rightarrow \frac{p}{q}<\frac{p}{q_1}$

Satz 12.2.17: Bernoulli'sche Ungleichung

$\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1\ \forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx$.

12.1.3: Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten

Seien $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m,n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Proposition 12.2.1: Vorzeichen- und Bruchrechnungsregeln

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

1. $-(-a)=a$
2. $(a^{-1})^{-1}=a$ für alle $a\neq 0$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ und $(-a)(-b)=ab$
4. $b\neq 0$ und $d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d} = \frac{ad\pm bc}{bd}$.
5. $b\neq 0$ und $d\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
6. $b\neq 0$ und $c\neq 0$ und $d\neq 0 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Proposition 12.2.3

$\forall a,b \in \mathbb{R}$:

1.) $a<b \Leftrightarrow b-a>0$

2.) $a<0 \Leftrightarrow -a>0$

3.) $a>0 \Leftrightarrow -a<0$

4.) $a<b \Leftrightarrow -b<-a$

Proposition 12.2.4: Addition gleich gerichteter Ungleichungen

Gleich gerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden.

$a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$

Proposition 12.2.5

Seien $a,b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Es ist $ab>0$ genau dann, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind.

Korollar 12.2.6

$ab<0$ genau dann, wenn ein Faktor positiv und ein Faktor negativ ist.

Korollar 12.2.7

$\forall a \in \mathbb{R}: a^2 \geq 0$ mit $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$

Merkregeln

- Gleich gerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden
- Ungleichungen dürfen mit positiven Zahlen multipliziert werden. Bei negativen Zahlen dreht sich das Ungleichungszeichen um.
- Einen Bruch mit positivem Zähler und Nenner kann man vergrößern, indem man den Zähler vergrößert oder den Nenner verkleinert (aber positiv hält).

KE4

Abstand und Betrag

Definition 12.2.19: Betrag

Sei $a \in \mathbb{R}$. Der Betrag von a ist

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften des Betrags

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

1.) $|a| \geq 0$ mit $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2.) $|a| = |-a|$

3.) $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$

4.) Sei $a > 0$. Dann gilt

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

5.) $|ab| = |a||b|$

6.) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

7.) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$

8.) $||a| - |b|| \leq \begin{cases} |a-b| \\ |a+b| \end{cases}$

Korollar 12.2.23: Erweiterung Dreiecksungleichungen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Definition 12.2.24: Abstand

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren $d(a,b) = |a-b|$ als Abstand zwischen a und b.

Eigenschaften Abstand

1.) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $d(a,b) = d(b,a)$

2.) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

Ungleichung des Arithmetischen Mittels

$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$,

genannt „arithmetische Mittel" von a und b.

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ geschlossenes Intervall

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall

Definition

a, b := Randpunkte

$b-a$:= Länge

$\frac{a+b}{2}$:= Mittelpunkt

$\frac{b-a}{2}$:= Radius

Definition 12.2.32: ε-Umgebung

Sei (a,b) bzw. $[a,b]$ ein Intervall mit Mittelpunkt x_0 und Radius ε. Wir bezeichnen (a,b) als offene ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ und $[a,b]$ als geschlossene ε-Umgebung $U_\varepsilon[x_0]$.

Es gilt

$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ und

$U_\varepsilon[x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$.

Definition 12.2.36: Minimum und Maximum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen $m \in M$ Minimum von M, wenn $m \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Wir nennen $m \in M$ Maximum von M, wenn $m \geq x$ für alle $x \in M$ gilt.

Proposition 12.2.40

Jede nicht leere, endliche Teilmenge reeller Zahlen besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Definition 12.2.42: Untere und obere Schranken

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen $a \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke, wenn $x \geq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir nennen $a \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von M, falls $x \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Vereinbarung 12.2.45

Jede reelle Zahl ist eine obere und untere Schranke der leeren Menge $\emptyset$.

Definition 12.2.47: Infimum und Supremum

Wir nennen $s \in \mathbb{R}$ Infimum (größte untere Schranke) von M, wenn gilt

1.) s ist untere Schranke von M und

2.) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M: s + \varepsilon > x$

Wir nennen $s \in \mathbb{R}$ Supremum (kleinste obere Schranke) von M, wenn gilt

1.) s ist obere Schranke von M und

2.) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M: x > s - \varepsilon$

Bemerkung 12.2.48

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

1.) M besitzt Supremum $\Rightarrow$ eindeutig bestimmt

2.) M besitzt Maximum $\Rightarrow$ Maximum ist Supremum

3.) M besitzt Infimum $\Rightarrow$ eindeutig bestimmt.

4.) M besitzt Minimum $\Rightarrow$ Minimum ist Infimum

Satz 12.2.52: Supremumsprinzip

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Korollar 12.2.53: Infimumsprinzip

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Korollar 12.2.56

Das Supremumsprinzip und das Schnittaxiom sind äquivalent.

Korollar 12.2.57: Satz des Archimedes

$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Korollar 12.2.58: Satz des Eudoxos

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}: \frac{1}{m} < \varepsilon$

Korollar 12.2.59: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt es in $U_\varepsilon(a)$ ein $r \in \mathbb{Q}$, also $a - \varepsilon < r < a + \varepsilon$.

KE 4

Definition 12.2.60: Binomialkoeffizient

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ („n über k") ist definiert durch

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Für $k=0$ gelte $\binom{n}{0} = 1$.

Satz 12.2.62: Binomischer Lehrsatz

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}: (a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k$$

Definition 12.2.64: p-te Wurzel

Sei $a \geq 0$ und sei $p \in \mathbb{N}$. Wir nennen $r \in \mathbb{R}$ die p-te Wurzel von a, wenn gilt 1.) $r \geq 0$ und 2.) $r^p = a$.

Lemma 12.2.66

Sind $x, y > 0$ und $p \in \mathbb{N}$, so gilt $x^p > 0$ und $x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$.

Korollar 12.2.69: Existenz und Eindeutigkeit von p-ten Wurzeln

Zu jeder ~~reellen~~ Zahl $a \geq 0$ und jedem $p \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine p-te Wurzel

Definition 12.2.74: geometrisches Mittel

Sind $a, b \in \mathbb{R}^+$, so nennen wir $\sqrt{ab}$ das geometrische Mittel von a und b.

Proposition 12.2.75

Sind $a, b \in \mathbb{R}^+$, so gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Definition 12.2.76

Sei $a > 0$ und $r = \frac{s}{p}$ mit $s, p \in \mathbb{N}$. Wir definieren $a^r = \sqrt[p]{a^s}$ und $a^{-r} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^s}}$. Für $a = 0$ gilt $0^r = 0$ und wir definieren $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 12.2.78: Potenzregeln für rationale Exponenten

Sei $a, b > 0$ und seien $r = \frac{s}{p}$ und $r' = \frac{s'}{p'}$ mit $s, s', p, p' \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1.) $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$ 2.) $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

3.) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$ 4.) $a^r b^r = (ab)^r$

5.) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Proposition 12.2.79

Seien $a, b > 0$ und sei $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

1.) $r > 0 \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow a^r < b^r)$

2.) $r < 0 \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow a^r > b^r)$

Proposition 12.2.80

Sei $a > 0$ und seien $r, r' \in \mathbb{Q}$ mit $r < r'$. Dann gilt

$a^r < a^{r'} \Leftrightarrow a > 1$ und

$a^r > a^{r'} \Leftrightarrow a < 1$

Definition 13.1.1: (reelle) Folge

Eine reelle Folge ist eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Definition 13.1.2: Folgenendstück / fast alle

Sei (a_n) eine Folge.

1.) Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ heißt $(a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$ Endstück der Folge (a_n) und mit $(a_n)_{n > n_0}$ bezeichnet.

2.) fast alle Folgenglieder von (a_n) haben Eigenschaft A $\Leftrightarrow$ alle a_n – bis auf endlich viele Ausnahmen – haben Eigenschaft A.

Definition 13.1.6 / 13.1.8: Konvergenz

Sei (a_n) eine Folge.

13.1.6 (a_n) konvergiert gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder von (a_n) liegen.

13.1.8 (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0: |a_n - a| < \varepsilon$.

Proposition 13.2.1

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Definition 13.2.3: Teilfolge

Ist $(n_1, n_2, \ldots)$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir $(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von (a_n).

Proposition 13.2.4

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (a_n) konvergiert gegen $\lim a_n$.

Definition 13.2.6: Beschränkte Folge

Wir nennen eine Folge (a_n) beschränkt, wenn $\{a_1, a_2, \ldots\}$ beschränkt ist.

Proposition 13.2.7

Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Proposition 13.2.9

Jede reelle Zahl a ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

Definition 13.3.1: Divergenz

Eine reelle Folge (a_n) heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

Proposition 13.3.2

(a_n) konvergiert nicht gegen a $\Leftrightarrow$ es gibt eine ε-Umgebung von a, so dass eine Teilfolge von (a_n) vollständig außerhalb von $U_\varepsilon(a)$ liegt.

Informell

Nachweis Divergenz: – Folge ist nicht beschränkt
– Teilfolgen konvergieren gegen unterschiedliche Grenzwerte

Proposition 13.4.1: Vergleichssatz

Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, und ist fast immer $a_n \leq b_n$, so folgt $a \leq b$.

Proposition 13.4.3: Einschnürungssatz

Konvergieren (a_n) und (b_n) gegen a, und gilt fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$, so konvergiert (c_n) gegen a.

Proposition 13.4.6

Ist (α_n) eine Nullfolge und gilt fast immer $|a_n - a| < \alpha_n$, so gilt $\lim(a_n) = a$.

Proposition 13.4.7: Betragssatz

$\lim(a_n) = a \Rightarrow \lim(|a_n|) = |a|$

Proposition 13.4.9

$\lim(a_n) = 0 \wedge (b_n)$ beschränkt $\Rightarrow \lim(a_n b_n) = 0$

KE4

Proposition 13.4.12 : Rechenregeln konvergenter Folgen

Sei $\lim(a_n) = a$ und $\lim(b_n) = b$. Es gilt

1.) $\lim(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim(a_n b_n) = ab$

3.) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim(\alpha a_n) = \alpha a$

4.) $\lim(a_n - b_n) = a - b$

5.) $b \neq 0$ und sind alle $b_n \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Beachten: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beginnt bei einem Index, ab dem alle $b_n \neq 0$ sind.

Definition 13.5.1

Wir nennen eine Folge (a_n)

1.) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

2.) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

gilt.

Satz 13.5.2 : Monotonieprinzip

Jede monotone, beschränkte Folge (a_n) konvergiert.

Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so gilt

$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ist (a_n) monoton fallend und beschränkt, so gilt

$\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Korollar 13.5.3

Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Definition 13.5.6 : Euler'sche Zahl

Der Grenzwert der Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ wird mit e bezeichnet und Euler'sche Zahl genannt. Es ist

$e \approx 2{,}7182818$.

Proposition 13.5.7 + 13.5.9

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ und $e \leq 3$.

Satz 13.5.13 : Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Definition 13.5.14 : Cauchyfolge

Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m,n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$ gilt.

Korollar 13.5.17: Cauchy'sches Konvergenzprinzip für Folgen

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Definition 13.5.20 : Intervallschachtelung

Sei $I_n = [a_n, b_n]$. Eine Folge (I_n) heißt Intervallschachtelung, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist. Notation $\langle a_n | b_n \rangle$.

Satz 13.5.22 : Prinzip der Intervallschachtelung

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n | b_n \rangle$ gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

KE5

Definition 14.1.3: Dirichlet funktion

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ heißt
Dirichlet funktion.

Definition 14.1.4: Komposition

Seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D' \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq D'$. Die Funktion $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in D$ heißt Komposition von f und g.

Bemerkung 14.1.6

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Genau dann gibt es eine inverse Funktion $f^{-1}: f(D) \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1} \circ f = id_D$ und $f \circ f^{-1} = id_{f(D)}$, wenn f injektiv ist. Wir nennen f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Definition 14.1.9

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist monoton wachsend / fallend, wenn gilt

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ bzw.
$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

f ist streng monoton wachsend / fallend, wenn gilt

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ bzw.
$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Definition: Konstante Funktion

Die konstante Funktion $\hat{a}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert mit $x \mapsto a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition: identische Funktion

$id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition: Größte - Ganze - Funktion

$[\,]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$. Ordne x die nächst größte ganze Zahl $\leq x$ zu.

Proposition 14.1.11: Umkehrfunktionen streng monotone Folgen

1. Jede streng monotone Folge ist injektiv.
2. f streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f^{-1}: f(D) \to \mathbb{R}$ wächst streng monoton.
3. f streng monoton fallend $\Rightarrow$ $f^{-1}: f(D) \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend.

Merkregel 14.1.14

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Den Graph f^{-1} erhält man durch Spiegelung des Graphen von f an der Diagonalen $\Delta = \{(z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Definition 14.1.15

$f+g: D \to \mathbb{R}$ ist $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$f-g: D \to \mathbb{R}$ ist $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$af: D \to \mathbb{R}$ ist $(af)(x) = a\, f(x)$
$fg: D \to \mathbb{R}$ ist $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$
$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ ist $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Definition 14.1.19: Restriktion

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei $D' \subseteq D$ mit $D' \neq \emptyset$. Wir nennen $f|_{D'}: D' \to \mathbb{R}$ mit $f|_{D'}(x) = f(x)$ für alle $x \in D'$ die Restriktion bzw. Einschränkung von f auf D'!

Definition 14.1.20: Untere und obere Schranken bei Funktionen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$.

f ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \; \forall x \in D: \; f(x) \geq a$
f ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \; \forall x \in D: \; f(x) \leq a$

Merken: $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn
$|f|: D \to \mathbb{R}$ mit $|f|(x) = |f(x)|$ nach oben beschränkt ist.

KE5

Polynomfunktionen

Definition 14.2.2: Polynommultiplikation

Seien $p=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q=\sum_{i=0}^{m} b_i T^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$.

Wir definieren

$$pq=\sum_k c_k T^k \quad \text{mit} \quad c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j .$$

Bemerkung 14.2.5: Gradformel

Seien $p=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q=\sum_{i=0}^{m} b_i T^i$ Polynome in $\mathbb{K}[T]$ mit $\text{grad}(p)=n\geq 0$ und $\text{grad}(q)=m\geq 0$. Dann ist $\text{grad}(pq)=m+n$.

Proposition 14.2.6: Division mit Rest in $\mathbb{K}[T]$

Zu Polynomen $p,q\in\mathbb{K}[T]$ mit $q\neq 0$ gibt es eindeutige Polynome $f,r\in\mathbb{K}[T]$ mit $p=fq+r$ und $\text{grad}(r)<\text{grad}(q)$.

Definition 14.2.7: Einsetzen / Nullstelle

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $p=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\in\mathbb{K}[T]$.
Für alle $r\in\mathbb{K}$ definieren wir
$\tilde{p}(r)=\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ und sagen, dass $\tilde{p}(r)$ durch Einsetzen von r in p entsteht. Gilt $\tilde{p}(r)=0$, so ist r eine Nullstelle von p.

Proposition 14.2.8: Nullstellen und Faktoren $T-\lambda$

$\lambda\in\mathbb{K}$ ist Nullstelle von $p\in\mathbb{K}[T] \Leftrightarrow p=(T-\lambda)q$ für ein $q\in\mathbb{K}[T]$.

Korollar 14.2.9: Anzahl der Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom $p\in\mathbb{K}[T]$, $p\neq 0$, vom Grad $n\geq 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Definition 14.2.10: Polynomfunktion

Sei $p=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\in\mathbb{R}[T]$. Die Polynomfunktion $\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wird definiert durch
$\tilde{p}(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Satz 14.2.13: Identitätssatz für Polynomfunktionen

Seien $p=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ und $q=\sum_{i=0}^{m} b_i T^i\in\mathbb{R}[T]$ und seien $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Sei $\text{grad}(p)=n$ und $\text{grad}(q)=m$.
Gilt $\tilde{p}(x)=\tilde{q}(x)$ für $\max(m,n)+1$ verschiedene $x\in\mathbb{R}$, so ist $m=n$ und $a_i=b_i$ für alle $0\leq i\leq n$. Insbesondere gilt $\tilde{p}(x)=\tilde{q}(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Definition 14.2.15: Grad der Polynomfunktion

Sei $p\in\mathbb{R}[T]$ ein Polynom. Der Grad $\text{grad}(\tilde{p})$ der entsprechenden Polynomfunktion $\tilde{p}$ wird als $\text{grad}(p)$ definiert.

Definition 14.2.16: rationale Funktion

Seien $\tilde{p},\tilde{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Dann nennen wir $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}:\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}\mid\tilde{q}(x)=0\}\to\mathbb{R}$ eine rationale Funktion.

Definition 14.2.21: Allgemeine Potenz

Sei $a>0$ und sei $p\in\mathbb{R}$. Sei (r_n) eine gegen p konvergente rationale Folge. Wir definieren $a^p=\lim_{n\to\infty}(a^{r_n})$.
Weiter sei $0^p=0$ für $p>0$.

Proposition 14.2.22: Rechenregeln für allgemeine Potenzen

Seien $a,b>0$ und seien $p,\sigma\in\mathbb{R}$. Seien (r_n) und (s_n) rationale Folgen, die gegen p bzw. σ konvergieren. Dann gilt:

1.) $a^pa^\sigma=a^{p+\sigma}$ 3.) $a^pb^p=(ab)^p$

2.) $\frac{a^p}{a^\sigma}=a^{p-\sigma}$ 4.) $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$

Korollar 14.2.23

$\forall p\in\mathbb{R},\ a>0:\ a^p>0$

Definition 14.2.24: Potenzfunktion

Sei $p\in\mathbb{R}$. Wir nennen die Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^p$ für alle $x\in(0,\infty)$ (allgemeine) Potenzfunktion.

Proposition 14.2.25: Monotonie der Potenzfunktion

Die allgemeine Potenzfunktion $x\mapsto x^p$ ist

1.) streng monoton wachsend, falls $p>0$
2.) streng monoton fallend, falls $p<0$
3.) konstant $\hat{1}$, falls $p=0$.

Korollar 14.2.26

Seien $p,\sigma\in\mathbb{R}$ und sei $p<\sigma$. Dann gilt
1) $a>1 \Rightarrow a^p<a^\sigma$
2) $0<a<1 \Rightarrow a^p>a^\sigma$.

Proposition 14.2.29

Sei $a>0$. Konvergiert eine beliebige reelle Folge (x_n) gegen x, so konvergiert (a^{x_n}) gegen a^x

Proposition 14.2.30

$\forall a>0,\ p,\sigma\in\mathbb{R}:(a^p)^\sigma=a^{p\sigma}$

Korollar 14.2.31

Sei $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Das Bild der allgemeinen Potenzfunktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^p$ ist $(0,\infty)$. Die Umkehrfunktion von $x\mapsto x^p$ ist $x\mapsto x^{\frac{1}{p}}$

KE5

Definition 14.2.34: Exponentialfunktion

Sei $a>0$. Die Exponentialfunktion $\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\exp_a(x) := a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nennen a die Basis der Exponentialfunktion

Satz 14.2.35: Eigenschaften der Exponentialfunktion

Sei $a>0$. Dann gilt

1.) $a \neq 1 \Rightarrow \text{Bild}(\exp_a) = (0,\infty)$

2.) $a=1 \Rightarrow \exp_a = \hat{1} \wedge \text{Bild}(\exp_a) = \{1\}$

3.) $a>1 \Rightarrow \exp_a$ streng monoton wachsend

4.) $0<a<1 \Rightarrow \exp_a$ streng monoton fallend

5.) $\exp_a(1) = a$ und $\exp_a(0) = 1$

6.) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$

14.2.37

Notation: Die Exponentialfunktion $\exp_e$ wird mit $\exp$ bezeichnet. Man nennt $\exp$ auch e-Funktion.

Satz 14.2.39

Sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n > -1$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Definition 14.2.40: Logarithmus

Sei $a>0$ mit $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp_a$ zur Basis a wird Logarithmus zur Basis a genannt und mit $\log_a$ bezeichnet.

Satz 14.2.42: Eigenschaften des Logarithmus

Sei $a>0$ und $a \neq 1$. Dann gilt:

1.) $\text{Bild}(\log_a) = \mathbb{R}$

2.) $a>1 \Rightarrow \log_a$ streng monoton wachsend

3.) $0<a<1 \Rightarrow \log_a$ streng monoton fallend

4.) $\log_a(1) = 0$ und $\log_a(a) = 1$

5.) $a>1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a(x) < 0 & \text{für alle } x<1 \\ \log_a(x) > 0 & \text{für alle } x>1 \end{cases}$

6.) $0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a(x) > 0 & \text{für alle } x<1 \\ \log_a(x) < 0 & \text{für alle } x>1 \end{cases}$

7.) $\forall x,y \in (0,\infty): \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

und $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

8.) $\forall p \in \mathbb{R}, x>0: \log_a(x^p) = p \log_a(x)$

Definition 14.2.43: natürlicher Logarithmus

Die Funktion $\log_e: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wird mit ln bezeichnet und natürlicher Logarithmus genannt. Alternative Notation log.

Proposition 14.2.44

Sei $a>0$. Dann gilt:

1.) $\forall x>0: x^a = \exp(a \ln(x))$

2.) $\forall x \in \mathbb{R}: \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$.

3.) $\forall x>0$ mit $a \neq 1$: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Proposition 14.2.46

Sei $a>0$ mit $a \neq 1$. Sei (x_n) eine gegen $x>0$ konvergierende Folge positiver reeller Zahlen. Dann ist $\lim(\log_a(x_n)) = \log_a(x)$.

Proposition 14.2.47

Sei $p \in \mathbb{R}$. Sei (x_n) eine Folge positive reelle Zahlen mit Grenzwert $x>0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^p) = x^p$.

Proposition 14.2.48

Sei $a>0$ und sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln(a)$.

Stetigkeit

Definition 15.1.1: Stetigkeit

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in D$. Wir nennen f stetig in a, wenn gilt:

Ist (a_n) eine gegen a konvergente Folge von Zahlen in D, dann konvergiert $(f(a_n))$ gegen $f(a)$. Die Funktion f heißt stetig auf D, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Satz 15.1.9: ε-δ-Kriterium

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $a \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a|<\delta$ immer $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ausfällt.

Proposition 15.1.11: Rechenregeln für Stetigkeit

Seien $f,g: D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetige Funktionen. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Folgende Funktionen sind ebenfalls stetig in a:

1.) $f+g$ 2.) $f-g$ 3.) αf 4.) fg 5.) $\frac{f}{g}$, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.

6.) $h: E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ stetig in $f(a) \Rightarrow h \circ f$ stetig in a

Stetige Funktionen auf Intervallen

Lemma 15.2.1

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere, beschränkte Menge. Seien $\sup A$ und $\inf A$ das Supremum bzw. Infimum von A. Dann existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ in A, die gegen $\sup A$ bzw. $\inf B$ konvergieren.

Satz 15.2.2: Nullstellensatz von Bolzano

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)<0$ und $f(b)>0$ (oder $f(a)>0$ und $f(b)<0$). Dann existiert mindestens ein $x \in (a,b)$ mit $f(x)=0$.

Korollar 15.2.4: Zwischenwertsatz von Bolzano

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq d \leq f(b)$ (bzw. $f(b) \leq d \leq f(a)$). Dann existiert ein $x_d \in [a,b]$ mit $f(x_d) = d$.

Korollar 15.2.5

Das Bild einer stetigen Funktion auf einem Intervall ist ein Intervall.

KE 5

Satz 15.2.8

Sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein abgeschlossenes Intervall. Insbesondere ist $f(I)$ beschränkt.

Korollar 15.2.9: Satz vom Minimum und Maximum

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann gibt es eine Minimalstelle x_1 und eine Minimalstelle x_2 in $[a,b]$, so dass $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Lemma 15.2.10

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist f streng monoton.

Proposition 15.2.11

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig mit beliebigem Intervall I. Dann ist f streng monoton.

Korollar 15.2.12

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Genau dann ist f injektiv, wenn f streng monoton ist.

Proposition 15.2.14

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion mit beliebigem Intervall I. Dann ist $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ stetig.

Grenzwerte von Funktionen

Definition 15.3.1: Häufungspunkt

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir nennen a einen Häufungspunkt von M, wenn mindestens eine Folge (a_n) in $M \setminus \{a\}$ existiert, die gegen a konvergiert.

Definition 15.3.4: Funktionskonvergenz

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann ist f konvergent in a, wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, die Folge $(f(a_n))$ konvergiert.

Beobachtung 15.3.5

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine in $a \in D$ stetige Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann ist f in a konvergent.

Proposition 15.3.7

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D. Sei f konvergent in a. Seien (a_n) und (a'_n) gegen a konvergente Folgen in $D \setminus \{a\}$. Dann ist $\lim f(a_n) = \lim f(a'_n)$.

Definition 15.3.8: Grenzwert

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei a ein Häufungspunkt von D. Sei f konvergent in a. Der Grenzwert von f in a ist der Grenzwert einer (und damit aller) Folge $(f(a_n))$, wobei (a_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ ist, die gegen a konvergiert. Ist b dieser Grenzwert, so schreiben wir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Proposition 15.3.9

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Häufungspunkt $a \in D$ von D. Dann gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definition 15.3.11: stetige Fortsetzung

Die Funktion g wird stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$ genannt. Kontext:
$f: D \to \mathbb{R}$ mit $a \notin D$ Häufungspunkt von D. Wir nehmen an, dass $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert. Wir definieren

$$g: D \cup \{a\} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in D, \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Definition 15.3.14: hebbare Unstetigkeit

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine in $a \in D$ nicht stetige Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D. Wir sagen, dass f in a eine hebbare Unstetigkeit besitzt, wenn $f|_{D \setminus \{a\}}$ auf D stetig fortgesetzt werden kann.

Satz 15.3.15: ε-δ-Kriterium für den Grenzwert

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Häufungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Dann gilt

f konvergiert in a mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \setminus \{a\}$ mit $0 < |x - a| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon$.

Satz 15.3.16: Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Funktionen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt

Es existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x) \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ und $|y - a| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Proposition 15.3.17: Rechenregeln für Funktionenkonvergenz

Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ Funktionen und sei a ein Häufungspunkt von D. Seien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = v$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = u \pm v$

2.) $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha u$

3.) $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = uv$

4.) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{u}{v}$, falls $v \neq 0$.

KE5

Differenzierbarkeit

Definition 16.1.1: differenzierbar im Punkt a

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit beliebigem Intervall I, das mehr als einen Punkt enthält. Wir sagen, dass f im Punkt $a \in I$ differenzierbar ist, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{oder alternativ} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet und Ableitung von f an der Stelle a genannt. Ist f für alle $x \in I$ differenzierbar, so sagen wir, dass f differenzierbar ist und nennen $f': I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Proposition 16.1.3

Eine Funktion f ist in jedem Punkt stetig, in dem sie differenzierbar ist.

Definition 16.1.5: Differenzenquotient

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und sei $a \in D$. Sei $x \in D \setminus \{a\}$. Wir nennen den Bruch $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Differenzenquotient.

Merkregel 16.1.6

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion. Die Ableitung $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an f im Punkt $(a, f(a))$

Definition 16.1.7: lokales Maximum / Minimum

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $a \in D$. Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in a, wenn für alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ $f(x) \leq f(a)$ gilt. f besitzt ein lokales Minimum in a, wenn $\forall x \in U_\varepsilon(a) \cap D: f(x) \geq f(a)$.

Wir nennen $f(a)$ lokales Minimum / Maximum oder lokales Extremum.

Definition 16.1.8: globales Maximum / Minimum

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $a \in D$. In a befindet sich ein globales Maximum von f, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. In a befindet sich ein globales Minimum von f, falls für alle $x \in D$ $f(a) \leq f(x)$ ist.

Definition 16.1.10: innerer Punkt von X

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Ein $x \in X$ heißt innerer Punkt von X, wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(x)$ für $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposition 16.1.12

Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine in einem inneren Punkt $a \in I$ differenzierbare Funktion. Es gilt

f hat in a ein lokales Extremum $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Korollar 16.3.7: Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ die allgemeine Potenzfunktion. Dann ist f differenzierbar und es gilt

$f'(x) = a x^{a-1}$ für alle $x > 0$.

Proposition 16.2.1: Rechenregeln der Differentialrechnung

Seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei $a \in I$ und seien f und g in a differenzierbar. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $f \pm g$, αf, fg und $\frac{f}{g}$ mit $g(a) \neq 0$ differenzierbar. Die Ableitungen sind durch folgende Formeln gegeben.

1.) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ (Summenregel)

2.) $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$ (Skalarmultiplikationsregel)

3.) $(fg)'(a) = f(a) g'(a) + f'(a) g(a)$ (Produktregel)

4.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{(g(a))^2}$ (Quotientenregel)

Korollar 16.2.2: Reziprokregel

$g: I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ und $g(a) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$

Satz 16.2.3: Kettenregel

Sei g auf dem Intervall I_g und f auf dem Intervall I_f definiert und sei $\text{Bild}(g) \subseteq I_f$. Sei g in $a \in I_g$ und f in $g(a)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar und es gilt

$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a)$.

Proposition 16.2.4: Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei f in $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt

$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Proposition 16.3.1

Polynomfunktionen $f: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ sind für alle Intervalle I, die mehr als einen Punkt enthalten und alle $x \in I$ differenzierbar. Es gilt $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

Propositionen 16.3.2 / 16.3.3

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $(x^k)' = k x^{k-1}$.

Rationale Funktionen sind dort differenzierbar, wo sie definiert sind.

Satz 16.3.4: Ableitung der Exponentialfunktion

Sei $a > 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp_a$ in x differenzierbar und es gilt $\exp_a'(x) = \exp_a(x) \ln(a)$, also insbesondere $\exp'(x) = \exp(x)$.

Korollar 16.3.6: Ableitung des Logarithmus

Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Die Funktion $\log_a$ ist differenzierbar und für alle $x \in (0, \infty)$ ist $\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$.

Korollar 16.3.5: Ableitung des natürlichen Logarithmus

Die Funktion $\ln$ ist differenzierbar und für alle $x \in (0, \infty)$ gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Satz 16.3.11: Ableitungen der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ sind differenzierbar und es ist $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

KE 6

Eigenschaften 16.3.10: Winkelfunktionen

(SinCos-1) Die Funktionen sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig.

(SinCos-2) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

(SinCos-3) Additionstheoreme
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ und
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(SinCos-4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(SinCos-5) $\cos(0) = 1$

Definition 17.0.1: k-te Ableitung

Existiert $f^{(k)}(a)$ für ein $k \geq 1$, so ist f in a k-mal differenzierbar. Die Zahl $f^{(k)}(a)$ wird die k-te Ableitung von f in a genannt. Für $k \geq 1$ wird $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f genannt.

Satz 17.1.1: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a,b]$ differenzierbar ist. Dann gilt

$$\exists x_0 \in (a,b): \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ alternativ}$$
$$f'(x_0)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Satz 17.1.2: Satz von Rolle

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a,b]$ differenzierbar ist. Sei $f(a) = f(b)$. Dann $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) = 0$.

Korollar 17.1.3

Sei I ein beliebiges Intervall und seien $g_1, g_2: I \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar. Sei $g_1'(x) = g_2'(x)$ für alle x im Inneren von I. Dann ist $g_1 = g_2 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Korollar 17.1.5

Ist f differenzierbar und $f'(x) = f(x)$ für alle x, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f = c\exp$ ist.

Korollar 17.1.6: Charakterisierung der e-Funktion

Die Funktion exp ist die einzige differenzierbare Funktion f mit $f = f'$ und $f(0) = 1$.

Korollar 17.1.7: Eindeutigkeit der Winkelfunktionen

Wenn es Funktionen $\sin, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften 16.3.10 gibt, so sind diese Funktionen eindeutig.

Korollar 17.1.8

Die Funktion f sei auf einem Intervall I stetig und im Inneren von I differenzierbar.

1.) f wächst, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle x im Inneren von I
2.) f wächst streng monoton, wenn $f'(x) > 0$ für alle x im Inneren von I
3.) f fällt, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle x im Inneren von I.
4.) f fällt streng monoton, wenn $f'(x) < 0$ für alle x im Inneren von I

Korollar 17.1.9

Sei $f: I \to \mathbb{R}$. Ist f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar und ist $f'(x_0) = 0$, so ist

1.) x_0 ein lokales Maximum, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > x_0$ und $x \in U_\delta(x_0)$.

2.) x_0 ein lokales Minimum, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > x_0$ und $x \in U_\delta(x_0)$.

Korollar 17.1.10

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und sei f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f'(x_0) = 0$ und sei f' in x_0 differenzierbar. Dann gilt:

1.) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum
2.) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lokales Minimum

Proposition 17.1.13

Seien f und g auf dem Intervall $I = [a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$:

$$(f(b) - f(a))\, g'(x_0) = (g(b) - g(a))\, f'(x_0).$$

Satz 17.1.14: Regel von de l'Hospital

Seien f und g auf einem offenen Intervall I definierte Funktionen und sei $a \in I$. Seien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Falls $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Definition 17.2.1: n-te Taylorpolynom

Sei f eine beliebige Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$, so dass $f^{(1)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ alle existieren. Für alle $0 \leq k \leq n$ setzen wir $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ und definieren $P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$. Wir nennen die Polynomfunktion $P_{n,a}$ das n-te Taylorpolynom von f in a.

Definition 17.2.7: Restglied

Sei f eine Funktion, für die $P_{n,a}(x)$ existiert und sei $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Dann wird $R_{n,a}(x)$ als das Restglied bezeichnet.

Satz 17.2.8: Satz von Taylor

Sei f eine Funktion, für die $f', \dots, f^{(n+1)}$ auf $[a,x]$ definiert ist. Sei $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Für das Restglied $R_{n,a}(x)$ gilt dann:

1.) $\exists t_1 \in [a,x]: R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a)$
2.) $\exists t_0 \in [a,x]: R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

KE 6

Korollar 17.2.9: Satz von Taylor, allgemeine Fassung

Sei f eine Funktion, für die $f', \dots, f^{(n+1)}$ auf einem abgeschlossenen Intervall I, das a enthält, definiert ist. Sei $x \in I$ und sei $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$. Für das Restglied $R_{n,a}(x)$ gilt dann:

1.) Es existiert ein t_1 zwischen a und x mit
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a) \quad \text{„Cauchy-Form"}.$$

2.) Es gibt ein t_0 zwischen a und x mit
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{„Lagrange-Form"}.$$

Korollar 17.2.12

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ existieren. Sei $a \in I$. Angenommen, es gibt ein $K \geq 0$, so dass $|f^{(n+1)}(t)| \leq K$ für alle $t \in I$ gilt. Dann folgt
$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \text{ für alle } x \in I.$$

Lemma 17.2.13

$\forall a \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Proposition 17.2.14

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Seien α und K Konstanten, so dass $|f^{(n)}(t)| \leq \alpha K^n$ für alle $t \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge.

Folgerungen aus dem Satz von Taylor

Korollar 17.2.17

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ existieren. Gilt $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine Polynomfunktion.

Korollar 17.2.18

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}$ existieren. Sei $f^{(n+1)}$ stetig. Sei $x_0 \in I$.
Gilt $f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0

1.) ein lokales Minimum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$
2.) Ein lokales Maximum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$
3.) kein lokales Extremum, falls n gerade.

Korollar 17.2.15

Die Euler'sche Zahl e ist irrational.

Reihen

Definition 18.1.1: Reihe

Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ wird Reihe genannt und mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die a_n heißen Glieder der Reihe und die s_n werden Partialsummen der Reihe genannt.

Definition 18.1.2: Konvergenz und Divergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ konvergent ist. Ist $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent, so sagen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist.

Definition 18.1.6: harmonische Reihe

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ wird harmonische Reihe genannt.

Definition 18.1.7: geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ wird geometrische Reihe genannt.

Proposition 18.1.8

$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Korollar 18.1.9

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für alle $|q| \geq 1$ und sie konvergiert für alle $|q| < 1$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Definition 18.1.10: Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
wird Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a genannt.

Proposition 18.1.11

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Genau dann gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x),$$
wenn die Folge $(R_{n,a}(x))$ eine Nullfolge ist.

Definition 18.1.13: Exponentialreihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ wird Exponentialreihe genannt.

Definition 18.1.14: Logarithmusreihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ wird Logarithmusreihe genannt.

Definition 18.1.15: alternierende harmonische Reihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ wird alternierende harmonische Reihe genannt.

KE 6

Proposition 18.1.16

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist die Folge der Partialsummen beschränkt und (a_n) ist eine Nullfolge.

Proposition 18.1.18

Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Proposition 18.1.19: Cauchy-Kriterium für Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

Ist $n > m \geq n_0$, so ist $|a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon$.

Proposition 18.1.20: Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann gilt:

1.) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2.) Ist $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 18.1.21: Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} c_l$ konvergente Reihen mit den Grenzwerten B bzw. C. Sei $d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn zusätzlich $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ und $\sum_{l=0}^{\infty} |c_l|$ konvergent sind, so sind $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$ konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = B \cdot C$.

Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 18.2.1: Majorantenkriterium

Sei $|a_n| < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so konvergieren auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und es gilt

$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definition 18.2.2: Majorante

Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) die Voraussetzungen des Majorantenkriteriums erfüllen, so sagen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist.

Korollar 18.2.4: Majorantenkriterium, allgemeiner Fall

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern und gilt fast immer $b_n \geq |a_n|$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Korollar 18.2.6: Minorantenkriterium

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe mit nicht negativen Gliedern und gilt fast immer $a_n \geq b_n$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 18.2.8: Quotientenkriterium

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast ~~immer~~ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$, so folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind. Gilt jedoch fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 18.2.11: Wurzelkriterium

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind.

Gilt jedoch fast immer (oder auch nur unendlich oft) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent.

Korollar 18.2.14

Konvergiert die Wurzelfolge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ oder die Quotientenfolge $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ gegen einen Grenzwert α, so sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, wenn $\alpha < 1$, und divergent, wenn $\alpha > 1$. Im Fall $\alpha = 1$ lässt sich nichts Allgemeines aussagen.

Definition 18.2.17: Cosinusreihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ wird Cosinusreihe genannt.

Definition 18.2.18: Sinusreihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ wird Sinusreihe genannt.

Definition 18.2.19: Binomialkoeffizienten

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{\alpha}{0} = 1$ und $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \geq n$, so wird $\binom{\alpha}{n}$ wie in Definition 12.2.60. definiert, wobei $\binom{0}{0} = 1$ gesetzt wird. Ist $\alpha < n$, so setzen wir $\binom{\alpha}{n} = 0$. Die Zahlen $\binom{\alpha}{n}$ werden Binomialkoeffizienten genannt.

Definition 18.2.20: Binomialreihe

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ wird $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ Binomialreihe genannt.

Proposition 18.2.21: Konvergenzverhalten der Binomialreihe

Ist $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $|x| < 1$ und sie divergiert für alle $|x| > 1$.

Proposition 18.2.22:

$\forall x \in [0,1)$ und $\alpha \notin \mathbb{N}_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^{\alpha}$.

KE6

Definition 18.2.23: alternierende Reihe

Eine Reihe, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben, wird alternierende Reihe genannt.

Satz 18.2.24: Leibniz-Kriterium

Ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$.

Bemerkung 18.2.26

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: (a_n) monoton wachsend und unbeschränkt $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ monoton fallende Nullfolge.

Definition 18.3.1: absolut konvergent

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Proposition 18.3.4

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Definition 18.3.5: Umordnung

Ist $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ eine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 18.3.6: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so konvergiert jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Satz 18.3.7: Umordnungssatz von Riemann

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Dann gilt:

1.) Es gibt eine Umformung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die divergent ist.

2.) Zu jeder reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = c$.

Definition 18.4.1: Potenzreihe mit Mittelpunkt a

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ wird Potenzreihe mit Mittelpunkt a und Koeffizienten a_n genannt.

Lemma 18.4.2

Falls eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = x_0$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_0|$, und zwar absolut.

Beobachtung 18.4.3: Konvergenz der Logarithmus- und Binomialreihe

1.) Die Logarithmusreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konvergiert für alle $-1 < x < 1$.

2.) Die Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ konvergiert für alle $-1 < x < 1$.

Definition 18.4.4: Konvergenzradius

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und sei $M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$.

Ist M beschränkt, so wird $R = \sup M$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ genannt. Ist M nicht beschränkt, so sagen wir, dass der Konvergenzradius der Reihe ∞ ist.

Proposition 18.4.7

Hat eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius R, so konvergiert sie für alle x mit $|x| < R$ und sie divergiert für alle x mit $|x| > R$.

Definition 18.4.8: Konvergenzintervall

Hat eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}$, so sagen wir, dass $(-R, R)$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe ist. Für $R = \infty$ wird $\mathbb{R}$ als das Konvergenzintervall der Potenzreihe definiert.

Definition 18.4.9: Häufungswert

Eine Zahl α heißt Häufungswert einer Folge (a_n), wenn in jeder ε-Umgebung $M_\varepsilon(\alpha)$ von α unendlich viele Folgenglieder liegen.

Definition 18.4.11: Limes superior/inferior

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Der größte Häufungswert wird Limes superior genannt und mit $\limsup a_n$ bezeichnet. Der kleinste Häufungswert wird Limes inferior genannt und mit $\liminf a_n$ bezeichnet.

Bemerkung 18.4.12

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und sei $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt. Sei $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a$.
Ist $a < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und ist $a > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 18.4.13: Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe.

1.) $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt und $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

2.) $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt und $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$

3.) $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt $\Rightarrow R = 0$.

KE6

Definition 18.5.2: Summenfunktion

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ und Konvergenzintervall K. Sei $f: K \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in K$. Dann wird f die zu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gehörende Summenfunktion genannt.

Lemma 18.5.3

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0<\alpha<R$. Dann gibt es Zahlen $q \in (0,1)$ und $c>0$, so dass gilt:

$$|a_n x^n| \leq c q^n \text{ für alle } n \text{ und alle } x \text{ mit } |x| \leq \alpha.$$

Satz 18.5.4: Summenfunktionen sind stetig

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ und Konvergenzintervall K. Dann ist die zugehörige Summenfunktion $f: K \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 18.5.5: Summenfunktionen sind differenzierbar

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ und Konvergenzintervall K. Dann ist die zugehörige Summenfunktion $f: K \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dabei gilt für alle $x \in K$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n.$$

Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ haben denselben Konvergenzradius.

Korollar 18.5.6

Summenfunktionen sind unendlich oft differenzierbar, und für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) a_{n+k} x^n.$$

Korollar 18.5.8

Jede Potenzreihe ist die Taylorentwicklung ihrer Summenfunktion im Entwicklungspunkt 0.

Definition 18.5.9: Stammfunktion

Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu f auf einem Intervall I, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

Bemerkung 18.5.10

Zwei Stammfunktionen F und G einer Funktion f auf einem Intervall I unterscheiden sich nur durch eine konstante Funktion.

Korollar 18.5.11

Die Summenfunktion f einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitzt auf ihrem Konvergenzintervall K eine Stammfunktion. Eine solche ist etwa die Funktion $F: K \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Proposition 18.5.12

$$\forall |x|<1: \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Lemma 18.5.13

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0: \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n}.$$

Proposition 18.5.14

$$\forall |x|<1: (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Elementare Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Satz 19.1.1: Existenz der Winkelfunktionen

Seien $\sin, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dann erfüllen sin und cos die Eigenschaften in 16.3.10.

Korollar 19.1.2: Trigonometrischer Pythagoras

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Korollar 19.1.3: Sin und cos sind beschränkt

$$\forall x \in \mathbb{R}: |\sin(x)| \leq 1 \text{ und } |\cos(x)| \leq 1.$$

Proposition 19.1.5

Im Intervall $[0,2]$ hat die Funktion cos genau eine Nullstelle.

Definition 19.1.6

Die einzige Nullstelle von cos im Intervall $[0,2]$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet und π wird Kreiszahl genannt.

Korollar 19.1.7

$\sin(0)=0$, $\sin(\frac{\pi}{2})=1$, $\sin(\pi)=0$, $\sin(\frac{3}{2}\pi)=-1$, $\sin(2\pi)=0$
$\cos(0)=1$, $\cos(\frac{\pi}{2})=0$, $\cos(\pi)=-1$, $\cos(\frac{3}{2}\pi)=0$, $\cos(2\pi)=1$

KE 6

Korollar 19.1.8

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$,

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$,

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ und $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

Die Nullstellen von sin und cos sind

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und

$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Definition 19.1.9

Eine Funktion f heißt periodisch mit Periode $p \neq 0$ (kurz p-periodisch), wenn $f(x+p) = f(x)$ für alle x in ihrem Definitionsbereich gilt.

Satz 19.1.11: Zusammenfassung Sinus und Cosinus

- Definitionen: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

- Ableitungen: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$

- Spezielle Werte:

$\sin(\frac{-\pi}{2}) = -1$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\pi) = 0$,

$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$

$\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$,

$\cos(2\pi) = 1$

- Bildbereich:

$\mathrm{Bild}(\sin) = \mathrm{Bild}(\cos) = [-1, 1]$

- Monotonie:

$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ streng monoton wachsend

$\sin|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]}$ streng monoton fallend

$\cos|_{[0,\pi]}$ streng monoton fallend

$\cos|_{[\pi, 2\pi]}$ streng monoton wachsend

- Wichtige Gleichungen:

$\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$,

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

- Nullstellen

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- Periodizität

sin und cos haben die kleinste positive Periode 2π.

Definition 19.1.12: tan und cot

$\tan: \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$

Satz 19.1.13: Zusammenfassung Tangens und Cotangens

- Definitionen

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- Ableitungen

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

- Bildbereich

$\mathrm{Bild}(\tan) = \mathrm{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$

- Wichtige Gleichungen

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und $\cot'(x) = -(1 + \cot^2(x))$

- Monotonie:

$\tan|_{((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi)}$ streng monoton wachsend für alle $k \in \mathbb{Z}$,

$\cot|_{(k\pi, (k+1)\pi)}$ streng monoton fallend für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- Periodizität

tan und cot haben die kleinste positive Periode π.

Definition 19.2.1: Zyklometrische Funktionen

Arcussinus: $\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(x) = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}(x)$

Arcuscosinus: $\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arccos(x) = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}(x)$

Arcustangens: $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arctan(x) = (\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}(x)$

Arcuscotangens: $\mathrm{arccot}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $\mathrm{arccot}(x) = (\cot|_{(0,\pi)})^{-1}(x)$.

Bemerkung 19.2.2

$\forall x \in [-1,1]$: $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ und

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$

Satz 19.2.3: Zusammenfassung Arcussinus und Arcustangens

- Ableitungen

$\forall x \in (-1,1)$: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, nicht differenzierbar für $x = \pm 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- Spezielle Werte

$\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$

$\arctan(0) = 0$, $\arctan(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{4}$

- Ableitungen

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Spezielle Werte

$\arcsin(0) = \arcsin(\sin(0)) = 0$, $\arcsin(1) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}$,

$\arcsin(-1) = \arcsin(\sin(\frac{-\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2}$, $\arctan(0) = \arctan(\tan(0)) = 0$ und

$\arctan(\pm 1) = \arctan(\tan(\pm\frac{\pi}{4})) = \pm\frac{\pi}{4}$

(KE6)

Satz 19.3.1: Zusammenfassung Exponentialfunktion

- Definition: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$
- Reihendarstellung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Ableitung: $\exp' = \exp$
- Spezielle Werte: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- Bildbereich: Es gilt

  $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x \in (-\infty, 0)$

  $1 < \exp(x) < \infty$ für alle $x \in (0, \infty)$

  $\text{Bild}(\exp) = (0, \infty)$
- Monotonie

  exp ist streng monoton wachsend
- Wichtige Gleichungen:

  $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ und

  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Satz 19.3.3: Allgemeine Potenz

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Definition

  $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$
- Reihendarstellung

  $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$
- Ableitung:

  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ für alle $x > 0$
- Bildbereich:

  $\text{Bild}(f) = (0, \infty)$ für $\alpha \neq 0$ und

  $\text{Bild}(f) = \{1\}$ für $\alpha = 0$.
- Monotonie

  Für $\alpha > 0$ ist f streng monoton wachsend.

  Für $\alpha < 0$ ist f streng monoton fallend

  Für $\alpha = 0$ ist f die Konstante Funktion $\hat{1}$.

Satz 19.3.2: Zusammenfassung natürlicher Logarithmus

- Definition: $\ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von exp
- Reihendarstellung: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$
- Ableitung $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in (0, \infty)$
- Spezielle Werte

  $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$
- Bildbereich

  Es gilt

  $\ln(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$

  $\ln(x) > 0$ für alle $x \in (1, \infty)$

  $\text{Bild}(\ln) = \mathbb{R}$
- Monotonie

  ln ist streng monoton wachsend
- Wichtige Gleichungen:

  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

  $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 19.3.4

Sei $a > 0$. Dann gilt:

1.) $\forall x > 0: x^a = \exp(a \ln(x))$

2.) $\forall x \in \mathbb{R}: \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$

3.) Sei $a \neq 1$. $\forall x > 0: \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Definition 20.1.1: Partition

Sei $a<b$. Eine Partition P des Intervalls $[a,b]$ sind endlich viele Punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$, so dass gilt $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Definition 20.1.2: Ober- und Untersumme

Sei $a<b$, sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und sei $t_0,\dots,t_n$ eine Partition P auf $[a,b]$. Für alle $1 \le i \le n$ sei

$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\}$ und

$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\}$.

Die Untersumme $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$ von f auf der Partition P.

Die Obersumme $O(f,P)$ von f für P wird definiert als $O(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$.

Bemerkung 20.1.3

Sei $a<b$, sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und sei $t_0,\dots,t_n$ eine Partition von $[a,b]$. Dann gilt $U(f,P) \le O(f,P)$.

Definition 20.1.4: Verfeinerung

Sei $a<b$ und sei $t_0,\dots,t_n$ eine Partition P von $[a,b]$ und sei $t_0',\dots,t_m'$ eine Partition Q von $[a,b]$. Wir sagen, dass Q eine Verfeinerung von P ist, wenn $\{t_0,\dots,t_n\} \subseteq \{t_0',\dots,t_m'\}$ gilt.

Lemma 20.1.5

Sei $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Sei P eine Partition von $[a,b]$ und sei Q eine Verfeinerung von P. Dann gilt $U(f,P) \le U(f,Q)$ und $O(f,P) \ge O(f,Q)$.

Proposition 20.1.6: Untersummen sind nie größer als Obersummen

Sei $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Seien P_1 und P_2 Partitionen von $[a,b]$. Dann gilt $U(f,P_1) \le O(f,P_2)$

Definition 20.1.7:

Sei $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Wir nennen f integrierbar auf $[a,b]$, wenn

$\sup\{U(f,P) \mid P \text{ Partitionen von } [a,b]\} = \inf\{O(f,P) \mid P \text{ Partitionen von } [a,b]\}$.

In diesem Fall wird diese gemeinsame Zahl das Riemann-Integral von f auf $[a,b]$ genannt und mit $\int_a^b f$ oder $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet. Dabei wird a die untere Integrationsgrenze, b die obere Integrationsgrenze, f der Integrand und x die Integrationsvariable genannt.

Proposition 20.1.9

Sei $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Partition P von $[a,b]$ so gibt, dass $O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$ ist.

Proposition 20.1.11

Sei $a<b$, sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und sei $c\in\mathbb{R}$ mit $a<c<b$. Dann gilt

Genau dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar, wenn f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Notation 20.1.12

Sei $a<b$ und sei f auf $[a,b]$ integrierbar. Wir setzen

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ und $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Lemma 20.1.13

Sei f integrierbar auf $[a,b]$ und sei $m \le f(x) \le M$ für alle $x\in[a,b]$. Dann gilt $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Satz 20.1.14

Sei f auf dem abgeschlossenen Integral $[a,b]$ integrierbar. Die Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für alle $x\in[a,b]$ ist stetig auf $[a,b]$.

Definition 20.1.15: unbestimmtes Integral

Sei f auf dem abgeschlossenen Integral $[a,b]$ integrierbar. Die Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für alle $x\in[a,b]$ wird unbestimmtes Integral genannt.

Proposition 20.1.16: Rechenregeln der Integration

1.) Sind f, g auf $[a,b]$ integrierbar, so ist $f+g$ auf $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

2.) Ist f auf $[a,b]$ integrierbar und ist $c\in\mathbb{R}$, so ist cf auf $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

KE7

Satz 20.2.1: Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $a < b$ und sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für alle $x \in [a,b]$.

Ist f in $c \in [a,b]$ stetig, so ist F in c differenzierbar und es gilt $F'(c) = f(c)$.

Definition 20.2.2: Ober- und Unterintegral

Sei f eine auf einem Intervall $[a,b]$ beschränkte Funktion. Wir nennen $\sup\{M(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\}$ das Unterintegral von f auf $[a,b]$ und $\inf\{O(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\}$ das Oberintegral von f auf $[a,b]$. Das Unterintegral wird mit $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und das Oberintegral mit $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ bezeichnet.

Korollar 20.2.3

Sei $a < b$. Ist f auf $[a,b]$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

Korollar 20.2.4

Ist f auf $[a,b]$ stetig, so besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion.

Satz 20.2.5: Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f auf einem Intervall $[a,b]$ integrierbar und ist g irgendeine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Bezeichnung 20.2.6

Statt $g(b) - g(a)$ schreibt man oft $g(x)\Big|_a^b$.

Tabelle 20.2.7: Stammfunktionen

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)} a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Satz 20.2.9: Partielle Integration

Sei $a < b$. Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, seien f' und g' stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

Satz 20.2.12: Substitutionsregel

Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g([a,b]) \subseteq I$ und g' sei stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Bezeichnung 20.2.15

Unter Verwendung der Schreibweise $dg(x) = g'(x)\,dx$ lautet die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\,dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Satz 20.2.16

Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist π.

KE 7

Logik

Aussagenlogik

Definition 2.1.1.1: Aussagenlogische Formeln

Aussagenlogische Formeln werden induktiv durch die folgenden vier Schritte definiert. Sei Σ die Menge der Atome.

1.) jedes Atom in Σ ist eine Formel.
2.) Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3.) Für Formeln α und β sind $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.
4.) Nur Ausdrücke, die mit 1.), 2.) oder 3.) gebildet werden, sind Formeln.

Vereinbarung 2.1.1.3: Präzedenzregeln

1.) $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
2.) $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
3.) $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$
4.) $\rightarrow$ bindet stärker als $\leftrightarrow$

Somit $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$

Definition 2.1.1.4: links-/rechtsassoziativ

Sei $\square$ ein Platzhalter für logische Operationen derselben Bindungsstärke. Wir sagen, dass die Operation $\square$ linksassoziativ bindet, wenn $A \square B \square C$ gleichbedeutend mit $(A \square B) \square C$ ist. Wir sagen, dass $\square$ rechtsassoziativ bindet, wenn $A \square B \square C$ gleichbedeutend mit $A \square (B \square C)$ ist.

Vereinbarung 2.1.1.5: Klammerersparnis

1.) $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ binden linksassoziativ
2.) $\leftrightarrow$ muss nicht geklammert werden
3.) Formeln umfassende Klammern können weggelassen werden.

Definition 2.1.1.7: Literal

Sei α eine Formel. Mit atoms(α) bezeichnen wir die Menge der in α auftretenden Atome. Ein Literal ist ein Atom A oder ein negiertes Atom $\neg A$. Ein Atom wird auch als positives Literal und $\neg A$ als negatives Literal bezeichnet.

Definition 2.1.1.8: Bewertung/Interpretation

Sei Σ die Menge der Atome. Eine Abbildung $\mathfrak{I}: \Sigma \rightarrow \{0,1\}$ wird Bewertung / Interpretation genannt. Ist $\alpha \in \Sigma$, so sagt man, dass $\mathfrak{I}(\alpha)$ die Bewertung/Interpretation von α ist

Definition 2.1.1.9: Bewertung von Formeln

Sei $\mathfrak{I}$ eine Bewertung der Atome. Wir erweitern die Bewertung zu einer Bewertung von Formeln, wobei wir die Erweiterung wieder mit $\mathfrak{I}$ bezeichnen, durch die Regeln

1.) $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = 1 \iff \mathfrak{I}(\alpha) = 0$
2.) $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = 1 \iff \mathfrak{I}(\alpha) = 1$ und $\mathfrak{I}(\beta) = 1$.
3.) $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = 1 \iff \mathfrak{I}(\alpha) = 1$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = 1$
4.) $\mathfrak{I}(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \iff \mathfrak{I}(\alpha) = 0$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = 1$
5.) $\mathfrak{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff \mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$

Definition 2.1.1.14: Wahrheitstafel

Schreiben wir alle möglichen Bewertungen der Atome mit dem zugehörigen Wahrheitswert der Formel in eine Tabelle, so erhalten wir die Wahrheitstafel der Formel.

Definition 2.1.1.16

1.) Eine Formel α heißt erfüllbar, wenn es eine Bewertung mit $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ gibt.
2.) Eine Formel α heißt tautologisch, wenn die Formel für jede Bewertung $\mathfrak{I}$ den Wert $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ besitzt.
3.) Eine Formel α heißt widerspruchsvoll/unerfüllbar, wenn die Formel für jede Bewertung $\mathfrak{I}$ den Wert $\mathfrak{I}(\alpha) = 0$ annimmt.
4.) Eine Formel α heißt falsifizierbar, wenn es eine Bewertung $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(\alpha) = 0$ gibt.

Definition 2.1.1.19: semantische Folgerung

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass β eine semantische Folgerung aus α ist (semantisch aus α folgt), wenn für jede Bewertung $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ gilt.

Notation 2.1.1.21

β semantische Folgerung aus α : $\alpha \models \beta$
α tautologisch $\models \alpha$
Statt $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models \alpha$ schreiben wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
Für eine Menge F von Formeln sei α_F die Konjunktion der Formeln in F

Bemerkung 2.1.1.22

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Dann gilt

1.) $\alpha \models \beta \iff \alpha \rightarrow \beta$ tautologisch
2.) $\alpha \models \beta \iff \alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll
3.) α widerspruchsvoll $\iff \forall \gamma: \alpha \models \gamma$
4.) α widerspruchsvoll $\iff \exists$ Formel π : $\alpha \models (\pi \wedge \neg\pi)$

KE7

Definition 21.1.23: logisch äquivalent

Zwei aussagenlogische Formeln heißen logisch äquivalent, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ für alle Bewertungen gilt.
Notation $\alpha \approx \beta$.

Bemerkung 21.1.24: Vererbungsregeln

Seien α, β, γ aussagenlogische Formeln. Dann gilt

1.) $\alpha \approx \beta \Rightarrow \neg\alpha \approx \neg\beta$
2.) $\alpha \approx \beta \Rightarrow \gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$
3.) $\alpha \approx \beta \Rightarrow \gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$

Proposition 21.1.25: Junktor-Minimierung

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Dann gilt

1.) $\alpha \rightarrow \beta \approx \neg\alpha \vee \beta$
2.) $\alpha \wedge \beta \approx \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
3.) $\alpha \Leftrightarrow \beta \approx (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
$\approx (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
$\approx \neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha))$

Proposition 21.1.26: Äquivalenzregeln

Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gilt

1.) $\neg\neg\alpha \approx \alpha$ (Negationsregel)
2.) $\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ und $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$ (Idempotenzregel)
3.) $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$ und $\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ (Kommutativ)
4.) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ und
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (Assoziativgesetze)
5.) $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ und
$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ (Distributivgesetze)
6.) $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ und $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
de Morgansche Regeln.

Vereinbarung 21.1.29

Es gelten $\mathfrak{I}(0) = 0$ und $\mathfrak{I}(1) = 1$. Weiterhin gilt
$\alpha \wedge 0 \approx 0$, $\alpha \vee 0 \approx \alpha$, $\alpha \wedge 1 \approx \alpha$, $\alpha \vee 1 \approx 1$,
$\alpha \wedge \neg\alpha \approx 0$ und $\alpha \vee \neg\alpha = 1$.

Definition 21.1.30: Negationsnormalform (NNF)

Sei α eine Formel ohne $\rightarrow$ und ohne $\Leftrightarrow$. Wir sagen, dass α in Negationsnormalform (NNF) ist, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Notation 21.1.33

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Formeln.

1.) $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ („Konjunktion über α_1 bis α_n")
2.) $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$. („Disjunktion über α_1 bis α_n")

Definition 21.1.34: Klausel

Eine Formel $\alpha = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ wird Klausel genannt, wenn alle α_i, $1 \le i \le n$ Literale, also Atome oder negierte Atome sind. Sind alle Literale einer Klausel negativ, so sprechen wir von einer negativen Klausel. Sind alle Literale positiv, so wird α positive Klausel genannt. Eine Klausel mit k Literalen bezeichnen wir als k-Klausel.

Definition 21.1.35: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Formel α ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn α eine Konjunktion von Klauseln ist (einer oder mehreren Klauseln).

Definition 21.1.38: Monom

Eine Formel $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ wird als Monom bezeichnet, wenn alle α_i, $1 \le i \le n$ Literale sind. Eine Konjunktion mit genau k Literalen heißt k-Monom.

Definition 21.1.39: disjunktive Normalform (DNF)

Eine Formel α ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn α eine Disjunktion von (einem oder mehreren) Monomen ist.

Definition 21.1.42: gültiges Argument

Eine Formel der Form $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ heißt gültiges Argument, wenn sie eine Tautologie ist.

Definition 21.1.45: Beweisfolge

Eine Beweisfolge ist eine Folge $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ von Formeln, wobei für jede Formel γ_i, $1 \le i \le s$ in der Folge gilt: γ_i ist entweder eine Prämisse oder γ_i ist das Ergebnis einer Ableitungsregel des Beweissystems, die auf Formeln in $\{\gamma_1, \dots, \gamma_j\}$ mit $j < i$ angewendet wurde.

Äquivalenzregeln 21.1.46

- Kommutativgesetz / com: $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$
  $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$
- Assoziativgesetz / ass: $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- De Morgan: $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$
  $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
- Implikation / imp: $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$
- Doppelte Negation / dn: $\alpha \Leftrightarrow \neg\neg\alpha$

Schlussregeln 21.1.48

- Modus ponens / mp: Aus α und $\alpha \rightarrow \beta$ folgt β
- Modus tollens / mt: Aus $\neg\beta$ und $\alpha \rightarrow \beta$ folgt $\neg\alpha$
- Konjunktion / con: Aus α und β folgt $\alpha \wedge \beta$
- Vereinfachung / simp: Aus $\alpha \wedge \beta$ folgt α, β
- Ausdehnung / add: Aus α folgt $\alpha \vee \beta$

KE7

Satz 21.1.53: Korrektheit und Vollständigkeit

Das auf den Äquivalenz- und Schlussregeln in 21.1.46 und 21.1.48 basierende Beweissystem der Aussagenlogik ist korrekt und vollständig.

Proposition 21.1.54: Deduktionsregel

Seien α, β und γ logische Formeln. Dann sind die Formeln $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ und $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ logisch äquivalent.

Merkregel 21.1.55

1.) Modus ponens möglichst oft benutzen.

2.) De Morgansche Regeln anwenden, um $\neg(\alpha \wedge \beta)$ bzw. $\neg(\alpha \vee \beta)$ zu ersetzen.

3.) Formeln $\alpha \vee \beta$ können mit der doppelten Negation zu $\neg\neg\alpha \vee \beta$ und dann mit der Implikationsregel in $\neg\alpha \to \beta$ umgeformt werden.

4.) statt $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \to (\beta \to \gamma)$ kann auch $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \beta \to \gamma$

Prädikatenlogik

Definition 21.2.1

Seien $M, M_1, \dots, M_n$ Mengen und sei $n \in \mathbb{N}$.

1.) $M^n := \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in M \text{ für alle } 1 \le i \le n\}$.
Ein Element in M^n heißt n-Tupel.

2.) $M_1 \times \dots \times M_n := \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in M_i \text{ für alle } 1 \le i \le n\}$

3.) Eine n-stellige Funktion auf M ist eine Abbildung $f: M^n \to M$.

4.) Eine Teilmenge R auf $M_1 \times \dots \times M_n$ wird n-stellige Relation auf $M_1, \dots, M_n$ genannt. Ist $(m_1, \dots, m_n) \in R$, so schreiben wir $R(m_1, \dots, m_n)$ und sagen, dass $m_1, \dots, m_n$ in Relation (Beziehung) stehen.

Definition 21.2.3: Terme

Sei V eine Menge von Variablen, K eine Menge von Konstantensymbolen und F eine Menge von Funktionssymbolen. Weiter seien $V \cap K = \emptyset$ und $V \cap F = \emptyset$ und $K \cap F = \emptyset$. Terme werden induktiv definiert durch die folgenden vier Schritte:

1.) Jede Variable aus V ist ein Term.

2.) Jedes Konstantensymbol aus K ist ein Term.

3.) Sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und ist f ein Funktionssymbol der Stelligkeit $n > 0$, so ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.

4.) Terme werden nur mit den Schritten 1 bis 3 gebildet.

Definition: n-stelliges Prädikat

Seien $t_1, \dots, t_n$ Terme. Wenn diese Terme in Beziehung zueinander stehen, drückt man das durch $P(t_1, \dots, t_n)$ aus und nennt P ein n-stelliges Prädikat.

Definition 21.2.5: Prädikatenlogische Formeln

Sei V eine Menge von Variablen, K eine Menge von Konstantensymbolen, F eine Menge von Funktionssymbolen und P eine Menge von Prädikatensymbolen. Der Durchschnitt je zweier Mengen sei leer. Prädikatenlogische Formeln werden induktiv definiert durch folgende Schritte:

1.) Sind $t_1, \dots, t_n$, $n > 0$, Terme und ist P ein n-stelliges Prädikatensymbol, so ist $P(t_1, \dots, t_n)$ eine Formel. Wir bezeichnen $P(t_1, \dots, t_n)$ auch als Primformel.

2.) Sind t_1 und t_2 Terme, so ist auch $t_1 = t_2$ eine Primformel.

3.) Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.

4.) Sind α und β Formeln, dann sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.

5.) Sei x ein Variablensymbol und sei α eine Formel. Dann sind auch $\forall x \alpha$ und $\exists x \alpha$ Formeln.

6.) Formeln werden nur mit 1 bis 5 gebildet.

Vereinbarung 21.2.7

Es gelten die Präzedenzregeln 21.1.3 und 21.1.5 der Aussagenlogik. Zusätzlich binden $\exists$ und $\forall$ stärker als alle aussagenlogischen Junktoren.

Definition 21.2.9:

Seien $\exists x \alpha$ und $\forall x \alpha$ Formeln. Wir sagen, dass x die Variable des Quantors ist und dass die Formel α der Wirkungsbereich des Quantors ist. Wir sagen, dass der Quantor alle Vorkommen von x in der Formel α bindet, außer den Vorkommen, die durch einen weiteren Quantor innerhalb von α gebunden sind.

Definition 21.2.11: freie / gebundene Variable

Das Vorkommen einer Variable x heißt frei, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors liegt. Ein Vorkommen einer Variable x heißt gebunden, wenn x im Wirkungsbereich eines Quantors liegt.

Definition 21.2.14: geschlossene Formel

Enthält eine Formel keine freien Variablen, so bezeichnen wir sie als geschlossene Formel.

Definition 21.2.16: Konsistente Umbenennung

Eine Formel ist konsistent umbenannt, wenn

1.) es nicht zugleich eine freie und eine gebundene Variable mit Namen x gibt und

2.) die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Variablennamen besitzen.

KE7

Merkregel 21.2.7: Konsistente Umbenennung

1.) Solange ein Variablenname x sowohl frei als auch gebunden vorkommt, wähle einen neuen Variablennamen z und ersetze alle freien Vorkommen von x durch z.

2.) Solange es zwei Quantoren mit einer Variablen gleichen Namens gibt, wähle einen der Quantoren und einen neuen Variablennamen z. Ersetze im Wirkungsbereich des Quantors alle Vorkommen von x durch z, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor in diesem Wirkungsbereich gebunden sind.

Definition 21.2.20: Signatur

Eine Signatur besteht aus einem Tripel $\Sigma = (K, F, R)$, wobei K eine Menge von Konstantensymbolen, F eine Menge von Funktionssymbolen und R eine Menge von Prädikatensymbolen ist.
Ist α eine Formel, so besteht die durch α induzierte Signatur $\Sigma(\alpha)$ aus der Menge der in α vorkommenden Konstantensymbolen, der Menge der vorkommenden Funktionssymbolen und der Menge der vorkommenden Prädikatensymbole.

Definition 21.2.21: Interpretation

Eine zu einer Signatur Σ syntaktisch passende Interpretation besteht aus

1.) einer beliebigen, nicht leeren Menge M, dem Universum / Grundbereich

2.) einer Abbildung $\mathfrak{I}$, die den verschiedenen Symbolen aus Σ konkrete Objekte wie folgt zuordnet:

a.) jedem Konstantensymbol a eine Konstante $a \in M$.

b.) jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $f: U^n \to U$.

c.) jedem n-stelligen Prädikatsymbol P eine Relation $P \subseteq U^n$.

Definition: Interpretation, Fortsetzung

Für jeden Term $f(t_1, \dots, t_n)$ legen wir fest $\mathfrak{I}(f(t_1, \dots, t_n)) = \mathfrak{I}(f)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$. Für Formeln gilt:

1.) $\mathfrak{I}(P(t_1, \dots, t_n)) = \mathfrak{I}(P)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$. Es ist $\mathfrak{I}(P(t_1, \dots, t_n)) = 1$ genau dann, wenn $(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{I}(P)$.

2.) $\mathfrak{I}(t_1 = t_2) = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

3.) $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = 0$.

4.) $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ und $\mathfrak{I}(\beta) = 1$

5.) $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ oder $\mathfrak{I}(\beta) = 1$

6.) $\mathfrak{I}(\exists x \alpha) = 1$ genau dann, wenn es ein $x_u \in M$ gibt, so dass $\mathfrak{I}_{[x/x_u]}(\alpha) = 1$

7.) $\mathfrak{I}(\forall x \alpha) = 1$ genau dann, wenn für jedes $x_u \in U$ gilt, dass $\mathfrak{I}_{[x/x_u]}(\alpha) = 1$ ist.

Definition 21.2.26: Erfüllbar, widerspruchsvoll, tautologisch

Eine Formel α heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation gibt, die für α den Wert wahr liefert. Sie ist widerspruchsvoll, falls sie für jede Interpretation den Wert falsch und tautologisch, falls sie für jede Interpretation den Wahrheitswert wahr liefert.

Definition 21.2.27: entscheidbar

Eine beliebige Menge M heißt entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jedes x angibt, ob x in M liegt oder nicht.

Bemerkung 21.2.28

Sei α eine prädikatenlogische Formel. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.) Die Formel α ist widerspruchsvoll.

2.) Die Formel α ist nicht erfüllbar

3.) Die Formel $\neg\alpha$ ist tautologisch.

Definition 21.2.29

Seien α und β prädikatenlogische Formeln. Wir sagen, dass β aus α folgt, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, für die $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ gilt, auch $\mathfrak{I}(\beta) = 1$ ist. Als Abkürzung schreiben wir $\alpha \models \beta$.

Bemerkung 21.2.30

Seien α und β prädikatenlogische Formeln. Es gilt $\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll ist.

Definition 21.2.31: logisch äquivalent

Formeln α und β heißen logisch äquivalent (Notation $\alpha \approx \beta$), wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt.

Proposition 21.2.32: Äquivalenzregeln

Seien α und β prädikatenlogische Formeln. Dann gilt:

1.) $\neg(\exists x \alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x \alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$ „Quantorwechsel"

2.) $\exists x \exists y \alpha \approx \exists y \exists x \alpha$ und $\forall x \forall y \alpha \approx \forall y \forall x \alpha$ „Quantortausch"

3.) $\exists x \alpha \vee \exists x \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ und $\forall x \alpha \wedge \forall x \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ „Quantorzusammenfassung"

4.) Ist x keine freie Variable in α, so gilt $\exists x \alpha \approx \alpha$ und $\forall x \alpha \approx \alpha$. „Quantorelimination"

5.) Ist x keine freie Variable in β, so gilt

(a) $\exists x \alpha \wedge \beta \approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$ und $\exists x \alpha \vee \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$

(b) $\forall x \alpha \wedge \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ und $\forall x \alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$

„Quantifizierung"

KE7

Normalformen

Definition 21.2.38: Negationnormalform

Eine Formel α ist in Negationnormalform, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einer Primformel steht.

Definition 21.2.41: pränexe Normalform

Eine Formel α ist in pränexer Normalform, wenn sie die Form $Q_1 x_1, \ldots, Q_n x_n \beta$ hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und β keine Quantoren enthält. Die Quantorfolge $Q_1 x_1, \ldots, Q_n x_n$ wird als Präfix und β als der Kern der Formel bezeichnet.

Formale Beweise

Vereinbarung 21.2.44

Auch in der Prädikatenlogik gelten die Äquivalenzregeln 21.1.46.
sowie die Schlussregeln 21.1.48.
Weiterhin gelten die Äquivalenzregeln 21.2.45.

Schlussregeln 21.2.47: $\forall$-\ $\exists$-Instantiierung

Formel	ableiten	Name	Einschränkung
$\forall x \alpha$	$\alpha[x \backslash t]$	$\forall$-Instantiierung	t muss ein variablenfreier Term sein
$\exists x \alpha$	$\alpha[x \backslash a]$	$\exists$-Instantiierung	Das Konstantensymbol a durfte bisher nicht verwendet werden.

Notation 21.2.46

Sei α eine prädikatenlogische Formel und sei t ein Term.
Wir bezeichnen mit $\alpha[x \backslash t]$ die Formel, die aus α entsteht, indem wir in α jedes freie Auftreten von x durch t ersetzen.