1-1

解:

质点位移大小

$$\begin{aligned}|\Delta x| &= |x(4\text{ s}) - x(0)|\text{ m} \\ &= |x(8\text{ s}) - x(0)|\text{ m} \\ &= 8\text{ m}.\end{aligned}$$

质点速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (6 - 2t)\text{ m/s},$$

令$v = 0$, 解得$t = 3$ s.
质点在$t = 3$ s时反转运动方向，总路程

$$\begin{aligned}s &= (|x(3\text{ s}) - x(0)| + |x(4\text{ s}) - x(3\text{ s})|)\text{ s} \\ &= (|9 - 0| + |8 - 9|)\text{ m} \\ &= 10\text{ m}.\end{aligned}$$

1-2

解:

由

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 12 - 2t^2 \end{cases}$$

得运动轨迹方程为

$$x^2 + 2y = 24,$$

质点坐标

$$\vec{x} = (2t\hat{\mathbf{i}} + (12 - 2t^2)\hat{\mathbf{j}})\text{ m},$$

速度和加速度矢量分别为

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = (2\hat{\mathbf{i}} - 4t\hat{\mathbf{j}})\text{ m/s}, \\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = (-4\hat{\mathbf{j}})\text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

1-3

解:

设质点的速度为v, 质点在4.5 s时的位置

$$x(4.5\text{ s}) = \int_0^{4.5\text{ s}} v\mathrm{d}t.$$

由图象可得积分值

$$\begin{aligned}\int_0^{4.5\text{ s}} v\mathrm{d}t &= (\frac{(1+2.5)\times 2}{2} - \frac{(1+2)\times 1}{2})\text{ m} \\ &= 2\text{ m}.\end{aligned}$$

故$t = 4.5$ s时质点位于$x = 2$ m处.

1-4

解:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$a = (3 + 9x^2)\text{ m/s}^2 \tag{2}$$

由(1)(2)得

$$v\mathrm{d}v = (3 + 9x^2)\mathrm{d}x.$$

利用$v|_{t=0} = 0$积分:

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^x (3 + 9x^2)\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{v^2}{2} = 3x + 3x^3.$$

取合理解

$$v = \sqrt{6x + 6x^3}\text{ m/s}.$$

1-5

解:

(1)

$x(2\text{ s}) = -7\text{ m}, x(1\text{ s}) = 2.5\text{ m}$. 平均速度

$$\bar{v_{12}} = \frac{x(2\text{ s}) - x(1\text{ s})}{2\text{ s} - 1\text{ s}} = -9.5\text{ m/s}.$$

(2)

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(4.5-6t^2)\ \mathrm{m/s},$$
$$v(2\ \mathrm{s})=-19.5\ \mathrm{m/s}.$$

(3)

令$v(t)=0$，取合理解$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{s}<1\ \mathrm{s}$,因此在第2秒内质点向同一方向运动.

质点运动的路程

$$s=|x(2\ \mathrm{s})-x(1\ \mathrm{s})|=9.5\ \mathrm{m}.$$

1-6

解:

由

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

得$\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$,积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x-k\mathrm{d}x$$

得$\ln\dfrac{v}{v_0}=-kx$, 即

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kx}.$$

1-7

解:

(1)

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-\omega a\sin\omega t\hat{\mathbf{i}}+\omega b\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}.$$

(2)

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t,\\ y=b\sin\omega t\end{cases}$$

消去t得椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(3)

$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2\vec{x}$, 即$\vec{a}$和$\vec{x}$反向. 故$\vec{a}$指向椭圆中心.

1-8

解:

由几何关系,

$$\frac{h}{H}=\frac{x-s}{x}.$$

即$hx=Hx-Hs$, 两侧对t求导得

$$h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=H\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

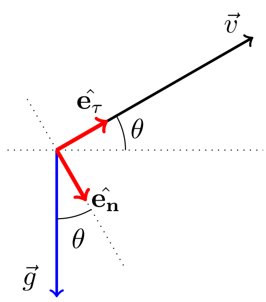
代入$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0$得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{Hv_0}{H-h},$$

此即影子端点移动的速度.

1-9

解:



$\vec{v}$的方向为运动轨迹切线的方向, 如图建立自然坐标系, 则有

$$|a_\tau| = |-g\sin\theta| = g\sin\theta,$$
$$|a_n| = |g\cos\theta| = g\cos\theta.$$

1-10

解:

在极坐标系中讨论问题. 由于质点做圆周运动, 故法向加速度只有向心加速度部分, 质点在轴向运动的加速度为0, 切向加速度只有角速度变化对应的加速度, 而没有轴向速度变化对应的加速度.

$$a_\tau = \left|r\ddot{\theta}\right| \tag{1}$$
$$a_n = \left|-r\dot{\theta}^2\right| \tag{2}$$
$$r = R \tag{3}$$
$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2 \tag{4}$$
$$s = R\theta \tag{5}$$

由(1)至(5)解得$a_\tau = c, a_n = \dfrac{1}{R}(b-ct)^2$.
取$a_\tau = a_n$得

$$t_1 = \frac{b}{c} + \sqrt{\frac{R}{c}}, t_2 = \frac{b}{c} - \sqrt{\frac{R}{c}}.$$

均为合理解.

1-11

解:

(1)

任意时刻质点的切向加速度

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(v_0 t - \frac{1}{2}bt^2\right) \\ &= -b. \end{aligned}$$

法向加速度

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{R}(v_0 - bt)^2. \end{aligned}$$

在自然坐标系中, 质点的加速度为

$$\vec{a} = -b\hat{\mathbf{e}_\tau} + \frac{1}{R}(v_0 - bt)^2\,\hat{\mathbf{e}_\mathbf{n}}.$$

其中$\hat{\mathbf{e}_\tau}$在运动轨迹上定向为质点在圆周上初始的运动方向, $\hat{\mathbf{e}_\mathbf{n}}$指向圆心.

(2)

质点的加速度大小

$$\begin{aligned} a &= |\vec{a}| \\ &= \sqrt{(-b)^2 + \left[\frac{1}{R}(v_0 - bt)^2\right]^2} \end{aligned}$$

令$a = b$解得$t = \dfrac{v_0}{b}$.
当$t = \dfrac{v_0}{b}$时, 质点的加速度大小为b.

1-12

解:

轮船B相对岸上的速度$\vec{v'}$和小船A相对轮船B的速度$\vec{v_r}$分别为

$$\vec{v'} = 25\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{km/h},$$
$$\vec{v_r} = 40\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{km/h}.$$

设小船相对岸上的速度为$\vec{v}$, 由伽利略坐标变换求导可得

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_r},$$

即

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v_r} + \vec{v'} \\ &= (25\hat{\mathbf{i}} + 40\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

1-13

解:

在车中观察, 水平方向上雨滴以12 m/s的速度向北运动, 竖直方向上水滴以28 m/s的速度向下运动,水滴的速度大小为

$$v = \sqrt{12^2 + 28^2}\ \mathrm{m/s} = 4\sqrt{58}\ \mathrm{m/s} = 30.46\ \mathrm{m/s}.$$

速度与竖直方向夹角

$$\theta = \arctan(12/28) = 23.2^\circ,$$

方向向北.

1-14

解:

无论在汽车还是大地参考系中, 雨滴的竖直速度都是一样的. 要使雨滴刚好不淋湿物体, 雨滴在汽车参考系中的速度与竖直方向夹角要达到$\alpha = \arctan(l/h)$. 设雨滴的竖直速度为$v_v = v_e\cos\theta$, 在汽车参考系中的水平速率为v_f', 在大地参考系中的水平速率为v_f. 则$v_f = v_2\sin\theta$, $v_1 = v_f + v_f'$, 结合$v_f'/v_v = \tan\alpha$可得

$$v_1 = v_2\left(\frac{l}{h}\cos\theta + \sin\theta\right).$$

1-15

解:

以船的出发点为原点, 水流方向为x方向, 垂直河岸指向河心为y方向建立直角坐标系.

当$0 \le y \le L/2$时, 河水流速

$$v_r = \frac{2v_0}{L}y. \tag{1}$$

由于小船相对水流垂直运动, 故小船的水平速度可认为是河水流速.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_r \tag{2}$$

小船向河心运动时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u \tag{3}$$

$$x|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

$$y|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

得到积分

$$\int_0^y 2v_0 y\,\mathrm{d}y = \int_0^x uL\,\mathrm{d}x,$$

即

$$v_0 y^2 = uLx,$$

令$y = \dfrac{L}{4}$可得掉头点坐标$\left(\dfrac{v_0 L}{16u}, \dfrac{L}{4}\right)$. 则船驶向对岸的轨迹为

$$v_0 y^2 = uLx, 0 \le x \le \frac{L}{4}.$$

由返回时y坐标对时间的均匀性得船在返回过程中沿x方向运动的距离为$\left(\dfrac{u}{u/2}\right)\dfrac{v_0 L}{16u} = \dfrac{v_0 L}{8u}$.

全过程横向位移

$$\Delta x = \frac{v_0 L}{8u} + \frac{v_0 L}{16u} = \frac{3v_0 L}{16u}.$$