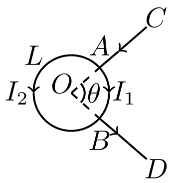
7-1

解:



假设载流导线是均匀的，取导线上顺时针为电流正向，AB间较短导线上的电流I_1与较长导线上的电流I_2之间满足

$$\frac{I_1}{-I_2}=\frac{2\pi-\theta}{\theta}.$$

取圆弧上一电流元$I\mathrm{d}l$，设导线圈半径为R，由B-S定律，其在O点产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{R^2}=\alpha I\mathrm{d}l,$$

方向垂直纸面向里为正，其中$\alpha=\mu_0/\left(4\pi R^2\right)$. O点磁感应强度

$$\begin{aligned}B_O&=\int_L\mathrm{d}B\\&=\int_0^\theta\alpha I_1R\mathrm{d}\theta+\int_\theta^{2\pi}\alpha I_2R\mathrm{d}\theta\\&=\alpha I_1R\theta+\alpha\frac{\theta}{\theta-2\pi}I_1\left(2\pi-\theta\right)\\&=0.\end{aligned}$$

综上，O点的磁感应强度为0.

7-5

解:

由带点球面的电势与电荷量关系，有

$$U-U_\infty=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0R}.$$

解得

$$Q=4\pi\epsilon_0RU.$$

电荷面密度

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}=\frac{\epsilon_0U}{R}.$$

按题图，θ处圆环的电荷量为

$$\mathrm{d}q=2\pi\sigma R\sin\theta R\mathrm{d}\theta.$$

旋转产生的电流

$$I\mathrm{d}l=\frac{\mathrm{d}q}{T}=\frac{\omega\mathrm{d}q}{2\pi}.$$

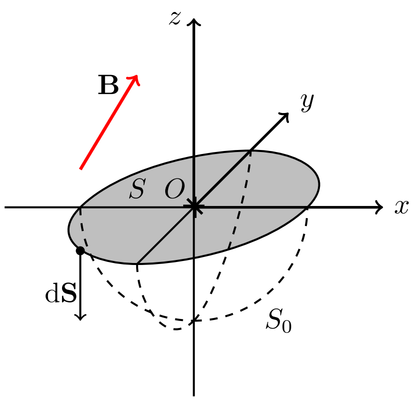
由对称性，该电流环在O点产生的磁感应强度方向与$\vec{\omega}$相同. 由B-S定律可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B&=2\pi R\sin\theta\times\frac{\mu_0I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin\theta\\&=\frac{\mu_0\epsilon_0\omega U}{2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}B\\&=\int_0^\pi\frac{\mu_0\epsilon_0\omega U}{2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2\mu_o\epsilon_0\omega U}{3}.\end{aligned}$$

7-6

解:



设磁通量向球壳表面凸方向为正. 场$\mathbf{B}$显然是无源的，所以存在矢量场$\mathbf{A}$，使得$\mathbf{B}$对任意有边界曲面S的通量只取决于$\mathbf{A}$在边界上的环量$\left(\iint_S\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_{\partial S}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\right)$，记半球面为$S_0$，开口圆平面为$S$，由于两个曲面有共同的边界，所以他们的通量相同.

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint_{S_0}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_0\\&=\iint_S\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\\&=\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}\\&=(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\cdot\left(-\pi R^2\mathbf{k}\right)\\&=-\pi cR^2.\end{aligned}$$

7-8

解:

由对称性得螺绕环内的磁感应强度方向沿圆环方向．设距螺绕环对称轴$r\ (R_1 \le r \le R_2)$处位置的磁感应强度大小为$B(r)$，由安培环路定理，

$$2\pi r B(r) = \mu_0 N I,$$

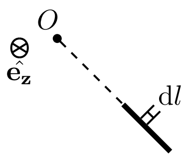
解得$B(r) = \mu_0 NI/(2\pi r)$．铁芯截面的磁通量

$$\Phi = h\int_{R_1}^{R_2} B(r)\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

7-9

解:

(1)



在杆上取线元dl，到O点的距离为l，线元因旋转产生的电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{T} = \frac{\lambda\omega \mathrm{d}l}{2\pi}.$$

在O点产生的磁感应强度大小

$$\mathrm{d}B_O = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{4\pi l^2}\cdot 2\pi l = \frac{\mu_0\lambda\omega \mathrm{d}l}{4\pi l}.$$

O点的磁感应强度大小

$$B_O = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0\lambda\omega \mathrm{d}l}{4\pi l} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}.$$

记垂直纸面向里的单位向量为$\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}$，$O$点的磁感应强度

$$\mathbf{B_O} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}.$$

(2)

线元dl产生的磁矩

$$\mathrm{d}\mathbf{m} = \mathrm{d}I\cdot\mathbf{S} = \frac{\lambda\omega \mathrm{d}l}{2\pi}\cdot\pi l^2\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}} = \frac{\lambda\omega \mathrm{d}l}{2}\cdot l^2\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}.$$

总磁矩

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \int_{l=a}^{l=a+b}\mathrm{d}\mathbf{m}\\ &= \int_a^{a+b}\frac{\lambda\omega \mathrm{d}l}{2}\cdot l^2\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}\\ &= \frac{\lambda\omega\left[(a+b)^3 - a^3\right]}{6}.\end{aligned}$$

(3)

当$a \gg b$时，

$$\begin{aligned}\mathbf{B_O} &= \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}\\ &\approx \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\cdot\frac{b}{a}\\ &= \frac{\mu_0\lambda b\omega}{4\pi a}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{\lambda\omega\left[(a+b)^3 - a^3\right]}{6}\\ &\approx \frac{\lambda\omega a^3}{6}\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 - 1\right]\\ &= \frac{\lambda\omega a^3}{6}\cdot\frac{3b}{a}\\ &= \frac{\lambda\omega a^2 b}{2}.\end{aligned}$$

7-10

解:

由对称性及B-S定律得，电子所在位置的磁感应强度方向为垂直纸面向里，设其大小为B，由安培环路定理，

$$2\pi\cdot 3rB = \mu_0 I,$$

解得

$$B = \frac{\mu_0 I}{6\pi r}.$$

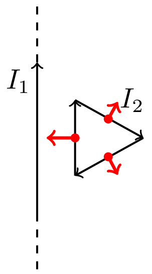
$\mathbf{v}$与磁感应强度方向垂直，由$\mathbf{F} = -e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$可得电子所受磁场力的方向垂直导线在纸面内向左，大小

$$F = \frac{\mu_0 Iev}{6\pi r},$$

其中$v = |\mathbf{v}|$.

7-11

解：



由安培环路定理可得距无限长导线r处的磁感应强度大小为

$$B(r)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

方向垂直导线且可使用相对电流方向的右手螺旋定向.

与无限长导线平行的一段导线所受安培力大小为

$$F_1=B(d)aI_2=\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi d}.$$

剩余两段直导线所受的安培力关于F_1所在直线对称，设其大小为F_2.

$$\begin{aligned}F_2&=\int_0^a I_2 B(d+\frac{\sqrt{3}}{2}l)\mathrm{d}l\\&=\int_0^a \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\left(d+\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)}\mathrm{d}l\\&=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1 I_2}{3\pi}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}a}{2d}\right).\end{aligned}$$

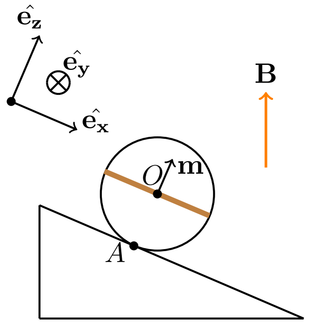
等边三角形导线框所受的安培力总和的大小

$$\begin{aligned}F&=F_1-2F_2\sin 30^\circ\\&=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\frac{a}{2d}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}a}{2d}\right)\right].\end{aligned}$$

方向垂直无限长导线向左.

7-14

解：



设电流方向从上到下看逆时针为正，圆柱截面半径为R，设斜面倾角为θ.如图建立坐标系，则导线框的磁矩

$$\mathbf{m}=2lNRI\hat{\mathbf{e}_\mathbf{z}}.$$

安培力形成的力偶矩

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{m}\times\mathbf{B}=-2lNRIB\sin\theta\hat{\mathbf{e}_\mathbf{y}}.$$

将力偶矩$\mathbf{M}_1$平移至点A，重力在点A产生的力矩

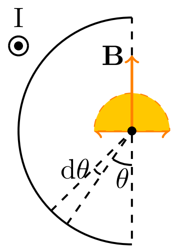
$$\mathbf{M}_g=mgR\sin\theta\hat{\mathbf{e}_\mathbf{y}}.$$

由力矩平衡$\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_g=0$得

$$I=\frac{mg}{2NlB}.$$

7-15

解：



由对称性易得磁感应强度的方向如图所示.如图按角度分割，设其产生的磁感应强度在合场强方向的投影为$\mathrm{d}B_y$，

$$\mathrm{d}B_y=\frac{\mu_0}{2\pi R}\cdot\frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}\cdot\sin\theta.$$

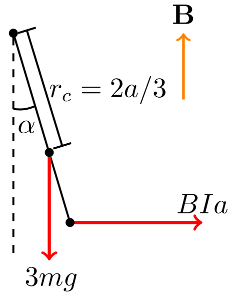
半圆同轴线上磁感应强度大小

$$\begin{aligned}B&=\int_0^\pi \mathrm{d}B_y\\&=\int_0^\pi \frac{\mu_0}{2\pi R}\cdot\frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}\cdot\sin\theta\\&=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.\end{aligned}$$

方向如图所示.

7-17

解：



设导线框的质心到OO'轴的距离为r_c，正方形边长为a，线框的正方形三边的总质量为$3m$. 两个径向段的质心位置$r_{c1} = a/2$，质量为$m_1 = 2m$，与OO'平行段杆的质心位置为$r_{c2} = a$，质量为$m_2 = m$，总的质心位置为$r_c = (r_{c1}m_1 + r_{c2}m_2)/(3m) = 2a/3$.

导线框所受安培力如图，大小为BIa.由力矩平衡

$$BIa \cdot a\cos\alpha = 3mgr_c\sin\alpha$$

得

$$B = \frac{3mgr_c\tan\alpha}{a^2I} = \frac{2mg\tan\alpha}{aI},$$

代入$m = \rho Sa$得

$$B = \frac{2\rho Sg\tan\alpha}{I},$$

代入数值$S = 2.0\ \mathrm{mm}^2$，$\rho = 8.9\ \mathrm{g/cm}^3$，$I = 10\ \mathrm{A}$，$\alpha = 15°$，$g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$得

$$B = 9.35\ \mathrm{mT}.$$