第9章

9-1

解:

对振动表达式求导得

$$v = -3A\pi \sin(3\pi t + \varphi).$$

在上式和振动表达式中分别代入$t = 0$，$x_0 = 0.06$ m，$v_0 = -0.24$ m · s^{-1}得

$$0.06 \text{ m} = A\cos\varphi, \quad (1)$$
$$-0.24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -3A\pi \sin\varphi. \quad (2)$$

由(1)(2)式取合理解得

$$A = 6.5 \times 10^{-2} \text{ m},$$
$$\varphi = \arctan\frac{4}{3\pi} = 23°.$$

9-2

解:

由题意，$v_0 = -0.03$ m · s$^{-1} < 0$，$x_0 = 0$，振动方程

$$x = 0.02\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m},$$

而

$$\omega = \frac{v_0}{A} = \frac{3}{2},$$

振动表达式

$$x = 0.02\cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}.$$

9-3

解:

(1)

由题意得角频率

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

振动表达式

$$x = 4.8 \times 10^{-2}\cos\frac{2\pi t}{3} \text{ m}.$$

代入$t = 0.5$ s得$x|_{t=0.5 \text{ s}} = 0.024$ m. 由$F = -m\omega^2 x$得

$$F|_{t=0.5 \text{ s}} = -1.05 \times 10^{-3} \text{ N},$$

其中负号表示沿$-x$方向.

(2)

将$x = 2.4 \times 10^{-2}$ m代入振动表达式，整理得

$$\cos\frac{2\pi t}{3} = \frac{1}{2}.$$

解得

$$t = \frac{1}{2} \text{ s}, \frac{5}{2} \text{ s}, \cdots, 3k + \frac{1}{2} \text{ s}, 3k - \frac{1}{2} \text{ s}, \cdots.$$

取最小解

$$t = 0.5 \text{ s}$$

即为所需的最短时间.

9-4

解:

由图得振动的幅值$A = 10$ m.设振动表达式

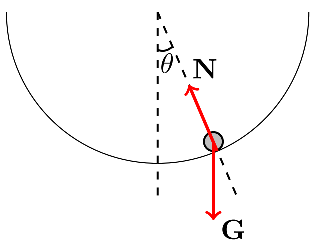
$$x = 10\cos(\omega t + \varphi) \text{ m}.$$

使用旋转矢量法，图中$t = 0$到$t = 1$ s的时间内相位变化为$5\pi/6$，即$5/12$个周期，由此得周期$T = 12/5$ s，角频率$\omega = 2\pi/T = 5\pi/6$ rad · s^{-1}.由图易得初相位$\varphi = 2\pi/3$，综上，振动表达式为

$$x = 10\cos\left(\frac{5\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ m}.$$

9-5

解:



设物体质量为m，由牛顿第二定律

$$mg\sin\theta = -mr\ddot{\theta},$$

取小角近似得

$$mg\theta = -mr\ddot{\theta},$$

即

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\theta.$$

故物体所做的运动是简谐振动，角频率$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$，周期

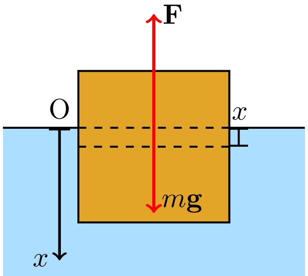
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

9-6

解：

(1)

忽略水面高度的变化，设木块质量为$m = \rho l^3$，水的密度为ρ_w.



设下沉深度为x时木块受到的浮力为$\mathbf{F}$，重力为$m\mathbf{g}$. 已知$x = 0$时$F = mg$，故$F = mg + \rho_w g l^2 x$，由牛顿第二定律，$mg - F = m\ddot{x}$，即

$$\ddot{x} = -\frac{\rho_w g l^2}{m}x. \tag{1}$$

故木块所做的运动是简谐振动.

(2)

木块在初始位置的$x = b - a$，速度大小为0，故振幅

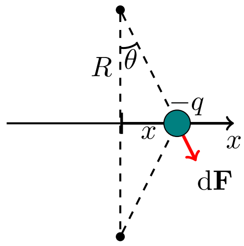
$$A = b - a.$$

由(1)得木块运动的角频率$\omega = \sqrt{\frac{\rho g l^2}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_w g}{\rho l}}$，周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{\rho_w g}}.$$

9-8

解：



由对称性得圆环对电荷施加的力

$$\begin{aligned} F &= -\oint_R \frac{q\sin\theta \mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)} \\ &= -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

在环心附近有

$$\begin{aligned} F &= -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3}x. \end{aligned}$$

由牛顿第二定律整理得

$$\ddot{x} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}x.$$

故带电粒子所作小振动为简谐振动，角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{Qq}}.$$

9-10

解：

(1)

弹簧振子的能量$E = 0.8$ J. 由$E = kA^2/2$得

$$A = 0.253\ \mathrm{m}.$$

(2)

系统的势能

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\pm\frac{A}{2}\right)^2 = 0.2 \text{ J}.$$

动能

$$E_k = E - E_p = 0.6 \text{ J}.$$

(3)

设振子经过平衡位置时的速度为v_0，由$E = mv_0^2/2$得

$$v_0 = 2.530 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

9-12

解：

(1)

由振动表达式得角频率$\omega = \pi/3$，振幅$A = 6\times10^{-2}$ m.

动能等于势能

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1}$$

又

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{2}$$

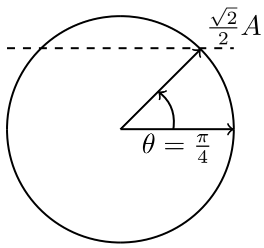
$$A^2 = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \tag{3}$$

由(1)(2)(3)解得

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A,$$

代入数值得$x = \pm4.24\times10^{-2}$ m.

(2)

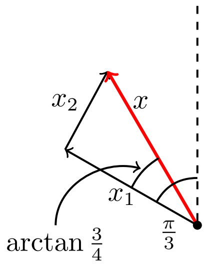


由旋转矢量法，质点从平衡位置移动到此位置所需要的最短时间

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{3}{4} \text{ s}.$$

9-14

解：



(1)

由振幅矢量法，和振动的振幅

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} \text{ m} = 5 \text{ m}.$$

初相

$$\varphi = \frac{\pi}{3} - \arctan\frac{3}{4} = 23.1°.$$

(2)

当x_1和x_3的复振幅矢量同向，即

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

时，x_1与x_3的合振幅为最大.

当x_2和x_3的复振幅矢量反向，即

$$\varphi = \frac{5\pi}{6}$$

时，x_2与x_3的合振幅为最小.

第10章

10-4

解：

(1)

由振动表达式得频率$\nu = \omega/(2\pi) = 1/4\ \mathrm{s}^{-1}$，波长$\lambda = u/\nu = 8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}$.

设单位长度内波的相位变化

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

距原点5 m处的质元的振动表达式为

$$\begin{aligned} y_1 &= 6.0\times10^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t - k\cdot 5\ \mathrm{m}\right)\ \mathrm{m} \\ &= 6.0\times10^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{5\pi}{4}\right)\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

化为余弦形式：

$$y_1 = 6.0\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{7\pi}{4}\right)\ \mathrm{m}.$$

(2)

由(1)得相位差

$$\Delta\varphi = -\frac{5\pi}{4}.$$

10-5

解：

(1)

由波形图得a，b，c点的运动方向分别为为$+y$，$+y$，$-y$.

(2)

由波形图得波长$\lambda = 0.4\ \mathrm{m}$，周期$T = \lambda/u = 8\ \mathrm{s}$，振幅$A = 0.1\ \mathrm{cm}$，角频率$\omega = 2\pi/T = \pi/4\ \mathrm{s}^{-1}$，初相位$\varphi_0 = 0$. 波动表达式为

$$\begin{aligned} y &= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \\ &= 0.1\cos\left(\frac{\pi}{4}t - 5\pi x\right)\ \mathrm{cm}. \end{aligned}$$

(3)

在波动表达式中代入$x = 0.3\ \mathrm{m}$，得

$$y = 0.1\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{3\pi}{2}\right)\ \mathrm{cm}.$$

10-6

解：

(1)

波动表达式

$$\begin{aligned} y_A &= 3\cos\left(4\pi t - \frac{\omega}{u}x + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m} \\ &= 3\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

(2)

以B为原点，则波动表达式为

$$\begin{aligned} y_B &= y_A(x - 6\ \mathrm{m}, t) \\ &= 3\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

10-7

解：

由题意，振幅$A = 3\ \mathrm{cm}$，波长$\lambda = 20\ \mathrm{cm} = 0.2\ \mathrm{m}$，波速$u = \nu\lambda = 5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，$x = 0$处的初相位$\varphi_0 = -\pi/2$. 该纵波的波函数为

$$\begin{aligned} y &= A\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \\ &= 0.03\cos\left(50\pi t - 10\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

10-8

解：

(1)

由波形图得波长$\lambda = 0.6\ \mathrm{m}$，振幅$A = 0.2\ \mathrm{m}$，在0.25 s内平面简谐波向前传播的距离为$\Delta x = (k + 1/4)\lambda, k = 0, 1, 2, \ldots$. 波速

$$u = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1} = 0.6(4k+1)\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, k = 0, 1, 2, \cdots,$$

质元的振动频率

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = (4k+1)\ \mathrm{s}^{-1}, k = 0, 1, 2, \cdots.$$

$t=0$时P点位于平衡位置且正在向$+y$方向运动，P点的初相位$\varphi_{P0}=-\pi/2$. P点的振动表达式为

$$y_P=0.2\cos\left[2\pi(4k+1)t-\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m},k=0,1,2,\cdots.$$

特别地，当$k=0$时，有

$$y_P=0.2\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}.$$

(2)

由波形图得原点的初相位$\varphi_{O0}=\pi/2$. 角波数$k=2\pi/\lambda=10\pi/3\ \mathrm{s}^{-1}$. 波动表达式为

$$y=0.2\cos\left[2\pi(4k+1)t-\frac{10\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m},k=0,1,2,\cdots$$

特别地，当$k=0$时，波动表达式为

$$y=0.2\cos\left(2\pi t-\frac{10\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}.$$

(3)

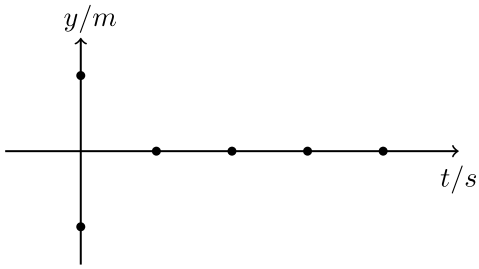
将$x=0$代入波动表达式得原点O的振动表达式

$$y_O=0.2\cos\left[2\pi(4k+1)t+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m},k=0,1,2,\cdots,$$

当$k=0$时为

$$y_O=0.2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{m}.$$

此时原点的振动曲线如下.



10-10

解:

设S_1初相位$\varphi_{S_1}=\pi/2$，S_2初相位$\varphi_{S_2}=0$.

$t=0$时，S_1，S_2发出的波在P点的相位为

$$\varphi_{S_1P}=\varphi_{S_1}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi\nu_1}{u_1}r_1=-\frac{3\pi}{2},$$

$$\varphi_{S_2P}=\varphi_{S_2}=0-\frac{2\pi\nu_2}{u_2}r_2=-\frac{3\pi}{2}.$$

相位差

$$\Delta\varphi=\varphi_{S_1P}-\varphi_{S_2P}=0.$$

故两列波在P点干涉相长，合振幅$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}=0.02\ \mathrm{m}$.

10-11

解:

以A为原点，$\overrightarrow{AB}$为正方向. 设A的初相为0，B的初相为π. 两列波的角波数均为$k=2\pi\nu/u=\pi/2\ \mathrm{m}^{-1}$. A，B点发出的波在线段AB上的相位分别为

$$\varphi_A=-kx=-\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m}^{-1}\cdot x,$$

$$\varphi_B=-k(30\ \mathrm{m}-x)=-\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m}^{-1}\cdot(30\ \mathrm{m}-x)+\pi.$$

波节处两者完全干涉相消，

$$\Delta\varphi=\varphi_A-\varphi_B=2k\pi+\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

解得$x=2k+1\ (\mathrm{m}),k=0,1,2,\cdots,14$.

10-13

解:

由题意，反射波向$+x$方向传播，故入射波在$+x$区域反向传播.

入射波的方程

$$y_0=0.15\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m}.$$

合成波的表达式

$$\begin{aligned}y_t&=y+y_0\\&=0.15\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m}\\&+0.15\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\ \mathrm{m}\\&=0.3\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}x\ \mathrm{m}.\end{aligned}$$

合成波是驻波.