2025年4月稽阳联谊学校高三联考

数学试题卷（解析）

1．C

2．A

3．D【详解】 当 $x<0$ 时，$x^3=4xy-y^3=y(4x-y^2)<0$，
若 $y<0$，则 $4x-y^2>0$，即 $y^2<4x<0$，不符合，
故 $x<0$，$y<0$ 不可能同时成立，故 A，B C，选项错误.选 D

4．C【详解】 由题干图象可知$\frac{T}{4}=5-2=3$，则 $T=12$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)$，由 $f(5)=A\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$，得$\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\pi$，$k\in Z$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)$.又 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{A}{2}$，则 $C\left(0,\frac{A}{2}\right)$，又$\overrightarrow{BC}=\left(-2,-\frac{A}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(5,-\frac{A}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=-10+\frac{A^2}{4}$，解得 $A=2\sqrt{10}$(负根舍去)，

所以 $f(x)=2\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(4)=\sqrt{10}$.选 C

5．A【详解】因为$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n$，

所以当$n=1$时，$a_2=2S_1=2a_1=2$，

当$n\geq 2$时，$a_n=2S_{n-1}$，所以两式相减得：$a_{n+1}-a_n=2\left(S_n-S_{n-1}\right)$，

则$a_{n+1}-a_n=2a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，又因为 $\frac{a_2}{a_1}=2$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$是以$a_2=2$为首项，公比为3的等比数列.

所以当$n\geq 2$时，$a_n=2\cdot 3^{n-2}$.

所以数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为：$a_n=\begin{cases}1,n=1\\2\cdot 3^{n-2},n\geq 2\end{cases}$. $a_3=6$ $S_4=27$ 故选 A

6. C【详解】C 设左焦点为F',则$\left|AF'\right|=a+m,\left|AF\right|=a-m,\left|CF\right|=a+m,\left|CF'\right|=a+3m$，

在$\Delta AF'C$中用勾股定理得$m=\frac{a}{2}$，所以$\left|FF'\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}a$，故选 C

7. B【详解】解析因为$x\ln xf'(x)+f(x)=x^2$，所以$\ln xf'(x)+\frac{f(x)}{x}=x$，即$\left(\ln xf(x)\right)'=x$

所以$\ln xf(x)=\frac{x^2}{2}+C$.又因为$\ln 2f(2)=\frac{2^2}{2}+C$，即$C=0$.

所以 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2\ln x}$.

所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{4x\ln x-2x}{\left(2\ln x\right)^2}=\dfrac{2x\left(2\ln x-1\right)}{\left(2\ln x\right)^2}$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递增。

又因为 $f(a^2)\ge f(b-1)$，所以 $a^2\ge b-1$，即 $a^2+\dfrac{2}{b+1}\ge b-1+\dfrac{2}{b+1}=b+1+\dfrac{2}{b+1}-2$，

又因为 $b\ge 3$，所以 $a^2+\dfrac{1}{b+1}\ge\dfrac{5}{2}$，所以 B.

8. 【详解】翻动正面数字为偶数的卡片时，奇偶性发生改变，翻动正面数字为奇数的卡片时，奇偶性不变，进行上述试验 3 次，发现卡片朝上的数字之和为偶数，则分为两类：

（1）正面数字为偶数的卡片翻一次：

①掷 3 次骰子 1 次偶数 2 次奇数：$3\times3\times3\times3=81$ 种，其中恰有一次点数为 2 有 27 种，

②掷 3 次骰子 2 次同一个偶数 1 次奇数：$C_3^2\times3\times3=27$ 种，

③掷 3 次骰子 3 次同一个偶数：3 种，

（2）正面数字为偶数的卡片一次翻三次：$A_3^3=6$ 种，其中恰有一次点数为 2 有 6 种，所以骰子恰有一次点数为 2 的概率为 $\dfrac{33}{117}=\dfrac{11}{39}$.

9.AC

【详解】对于 A，因为 $X\sim N\left(3,\sigma^2\right)$，又 $P\left(X\le 4\right)=0.7$，则

$P(3<X<4)=P(X\le 4)-P\left(X\le 3\right)=0.7-0.5=0.2$，正确；对于选项 B，因为 $5\times40\%=2$，所以数据 $5,8,10,12,13$ 的第 40 百分位数是 $\dfrac{8+10}{2}=9$，故选项 B 错误；对于选项 C，若决定系数 R^2=1，则散点图中的散点均落在一条斜率非 0 的直线上，所以残差的平方和为 0；对于选项 D，设 x_1，x_2，x_3，x_4 的平均数为 $\overline{x}$，y_1，y_2，y_3，y_4 的平均数为 $\overline{y}$，

因为 $x_i+y_i=10$，则 $\overline{y}=10-\overline{x}$，又 $S_1^2=\dfrac{1}{4}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\left(x_4-\overline{x}\right)^2\right]$，

$$S_2^2=\frac{1}{4}\left[\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(\overline{x}-x_1\right)^2+\left(\overline{x}-x_2\right)^2+\left(\overline{x}-x_3\right)^2+\left(\overline{x}-x_4\right)^2\right]$$

，所以 $S_1^2=S_2^2$，故选 D 错误

10.ACD【详解】

A.截面的形状有可能是三角形、四边形、五边形、六边形，故 A 正确

B.当 $PD=\dfrac{1}{3}A_1D, AQ=\dfrac{1}{3}AC$ 时，PQ 与 A_1D、AC 都垂直，故 B 错误

C.当$PD=\frac{1}{3}A_1D,AQ=\frac{1}{3}AC$时，$PQ$与所有表面所成的角都相等，故C正确

D.区域的形状以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为棱长、夹角60°的菱形，故D正确

11.ABD【详解】

由题意可知 $S_n=a_1(1+q+\cdots+q^{n-1})$，$a_1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q),a_n=a_2q^{n-2},a_2\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$,
$\therefore S_n\equiv a_n(\mathrm{mod}\ q),\therefore A$正确$\because a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$,若$S_n\equiv a_n(\mathrm{mod}\ q)$则$S_n\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$,
$\therefore a_1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q),a_1\equiv a_2(\mathrm{mod}\ q)\therefore B$正确

$\because S_n$为偶数，a_2也为偶数，显然不能成立,$\therefore C$错误

$\because T_n=\sum_{i=1}^{n}[a_1+(i-1)d](a_1+id)=\sum_{i=1}^{n}[a_1^2+(2i-1)da_1+(i^2-i)d^2]$

$=na_1^2+n^2da_1+\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)d^2,\therefore$ D成立

12.$\frac{5\pi}{6}$【详解】$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{4}\vec{a}$，$\therefore\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{\sqrt{3}}{4}|\vec{a}|^2$，

则$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\left|\frac{1}{2}\right||\vec{a}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，由于$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，$\therefore\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$

13.$\frac{\pi}{2}$【详解】由题意知，当$OP\perp l$时，劣弧AB最小，此时

$\cos\angle POA=\frac{OA}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2},\therefore\angle POA=\frac{\pi}{4}$所以劣弧AB长度的最小值为$\frac{\pi}{2}$。

14.$[\frac{1}{e^2},+\infty)$【详解】因为$e^{ax+1}-x\geq(ax+\ln x+1)(ax-\ln x+1)$，所以$e^{ax+1}-x\geq(ax+1)^2-(\ln x)^2$

即$e^{ax+1}-(ax+1)^2\geq x-(\ln x)^2$. 设函数$f(x)=e^x-x^2$, 因为$f'(x)=e^x-2x$, 又$f''(x)=e^x-2$,

所以$f'(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增。

所以$f'(x)_{\min}=f(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以$f(x)$在$R$上单调递增。

又因为$f(ax+1)\geq f(\ln x)$，所以$ax+1\geq\ln x$，即$a\geq\frac{\ln x-1}{x}$，

令$g(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，所以$g'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$，即$g(x)$在$(0,\mathrm{e}^2)$上单调递增，在$(\mathrm{e}^2,+\infty)$上单调递减。所以$a\leq\frac{1}{e^2}$.

15.【解析】(1)∵b cos C+$\sqrt{3}$c sin B=1+2c=a+2c, ...1 分

∴在△ABC 中，由正弦定理得，

sin B cos C+$\sqrt{3}$sin C sin B=sin A+2sin C，...............2 分

由三角形内角和为 180° 可得 sin A=sin (B+C)，

∴sin B cos C+$\sqrt{3}$sin C sin B=sin (B+C)+2sin C

=sin B cos C+cos B sin C+2sin C，

即$\sqrt{3}$sin C sin B−cos B sin C=2sin C，.............2 分

∵0°<C<180°，∴sin C≠0，∴$\sqrt{3}$sin B−cos B=2 $\frac{\sqrt{3}}{2}$sin B−$\frac{1}{2}$cos B=1.....6 分

即 sin (B−30°)=1，又∵0°<B<180°，α∴B−30°=90°，即 B=12 ....7 分

(2)设 AC=AD，令∠DCA=∠CDA=α，∠CAD=$180^\circ-2\alpha$

在△ACD 中，由正弦定理得，

$\frac{AC}{\sin D}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，CD=$\sqrt{3}$，∴AC=$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$..............8 分

在△ABC 中，由正弦定理得，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，∠BAC=$\alpha-60^\circ$，BC=1，

∴AC=$\frac{\sin 120^\circ}{\sin\left(\alpha-60^\circ\right)}$ ....9 分

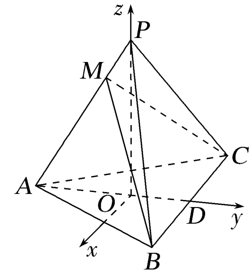
$\therefore\sin\left(\alpha-60^\circ\right)=\cos\alpha\quad\sin\left(\alpha-60^\circ\right)=\sin\left(90^0-\alpha\right)$

解得α=75° ....11 分,

∴sin ∠BCA=sin (120°-75°)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....13 分

16.【详解】

(1)因为 *AB*=*AC*，*D* 为 *BC* 的中点故 *AD*⊥*BC*,又 *PO*⊥面 A*BC* 故得 *PO*⊥*BC* 于是 *BC*⊥面 APO,从而 *AP*⊥*BC*。............4 分



(2)法 1：以 *O* 为坐标原点，以射线 *OD* 为 *y* 轴正半轴，射线 *OP* 为 *z* 轴正半轴建立如图所示的空间直角坐标系 *O*−*xyz*.

则 *AO*=3，$O(0，0，0)$，$A(0，-3，0)$，$B(4，2，0)$，$C(-4，2，0)$，$P(0，0，4)$.

于是$\overrightarrow{AP}$＝(0，3，4)，$\overrightarrow{BC}$＝(－8，0，0)，................................*6 分*

令$\overrightarrow{AM}$＝$\lambda\overrightarrow{AP}$＝$(0,3\lambda,4\lambda)$，所以 M=$(0,3\lambda-3,4\lambda)$，又因为$\overrightarrow{AC}=(-4,5,0)$,

设面 AMC 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$.

所以$\begin{cases}-4x+5y=0\\3\lambda y+4\lambda z=0\end{cases}$，所以$\vec{m}=(5,4,-3)$.

又$\overrightarrow{BC}$＝(－8，0，0)，$\overrightarrow{BA}$＝(－4，－5，0)，

所以$\overrightarrow{BM}$＝$\overrightarrow{BA}$＋$\overrightarrow{AM}$＝$(-4,3\lambda-5,4\lambda)$ ....*8 分*

设面 BMC 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$.

所以$\begin{cases}8x=0\\-4x+(3\lambda-5)y+4\lambda z=0\end{cases}$，所以$\vec{n}=(0,4\lambda,5-3\lambda)$. ....*10 分*

根据 AMC⊥平面 BMC，即$\vec{m}\bullet\vec{n}=0$，所以$\lambda=\frac{3}{5}$ ....*12 分*

$\overrightarrow{AM}$＝$\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}=\left(-4,-\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$, $\overrightarrow{CP}=(4,-2,4)$, $\overrightarrow{BM}\bullet\overrightarrow{CP}=0$......*14 分*

CP⊥BM, 得所成角为 90 度，正弦值为 1. ....*15 分*

法 2：几何法。

作 BM⊥AP,垂足为 M.连 CM,由三角形全等得$MC\perp PA$,

得PA⊥平面BMC，从而平面 AMC⊥平面 BMC。 ....*8 分*

在$Rt\triangle POA$中，$PA^2=AO^2+OP^2=25$得$A0=3$

在$Rt\triangle ADB$中，$AB^2=AD^2+BD^2=41$得$AB=\sqrt{41}$

在$Rt\triangle POD$中，$PD^2=PO^2+OD^2$，

在$Rt\triangle PDB$中，$PB^2=PD^2+BD^2$

所以$PB^2=PO^2+OD^2+BD^2=36$得$PB=6$，

又$\cos\angle BPA=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{1}{3}$

从而$\sin\angle BPA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$故$BM=PB\sin\angle BPA=4\sqrt{2}$ ....*13 分*

同理$CM=4\sqrt{2}$，

因为$BM^2+CM^2=BC^2$所以$\angle BMC=90^\circ$ 从而平面 BM⊥平面 BMC

CP⊥BM, 得所成角为 90 度，正弦值为 1.

................................*15 分*

17.【详解】

（1）当 $n=1$ 时，$1<2S_1<4$.

又因为 $a_n\in\mathbf{Z}$，所以 $a_1=1$ . . . . 1 分

设 $a_n=1+(n-1)d$，则 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$.

依题意，$n^2<2n+n(n-1)d<(n+1)^2$，

得 $\begin{cases}(1-d)n+d-2<0\\(d-1)n^2-dn-1<0\end{cases}$ 恒成立 . . . . 2 分

解得 $d=1$， . . . . 3 分

所以，$a_n=n$. $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ . . . . 4 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，$b_1+b_2+b_3=14$，$b_1b_2b_3=64$.

所以 $b_1+b_1q+b_1q^2=14$，$b_1^3q^3=64$．得到 $b_1q=4$，联立得 $2q^2-5q+2=0$. . . . 7 分

解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$（舍去），代入 $b_1q=4$ 中，解得 $b_1=2$

得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$. . . . . 8 分

（2）$c_n=\frac{n}{2^n}$

$T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ …①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$ …②

① −②，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$

即 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}<2$ . . . . 11 分

$n=1$ 时，$2^n<n+2$，$T_1=2-\frac{1+2}{2}=0.5$，所以 $[T_1]=0$； . . . . 12 分

$n \geq 2$ 时，$2^n \geq 1+C_n^1+C_n^2=1+n+\frac{n(n+1)}{2} \geq n+2$，所以 $1<T_n<2$，所以 $[T_n]=1$，.................14 分

所以 $M_{2025}=2024$. ....15 分

18.【详解】

(1)因为 $f'(x)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2}$，所以 $f'(0)=a+2$.又因为 $f(0)=0$，

所以切线方程为 $y=(a+2)x$ ....3 分

(2) 因为函数 $f(x)$ 无极值点，所以 $f'(x)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2}$ 恒大于等于 0，或者恒小于等于 0.

又因为 $\frac{2}{1-x^2}>0$，所以 $f'(x)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2} \geq 0$.

所以 $f'(0)=a+2 \geq 0$，即 $a \geq -2$.所以由必要性开路可得 $a \geq -2$ ....5 分

下证充分性：即 $a \geq -2$ 且 $x \in (-1,1)$ 时，$f'(x)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2} \geq 0$.

（主元互换）令 $g(a)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2}$，则 $g'(a)=\cos x>0$，

所以 $g(a)=a\cos x+\frac{2}{1-x^2}$ 在 $a \geq -2$ 上单调递增，所以 $g(a) \geq -2\cos x+\frac{2}{1-x^2}$ ....7 分

所以即证 $-2\cos x+\frac{2}{1-x^2} \geq 0$.

令 $h(x)=-2\cos x+\frac{2}{1-x^2}$，则 $h'(x)=2\sin x+\frac{4x}{(1-x^2)^2}$ 在 $x \in (-1,1)$ 单调递增，且 $h'(0)=0$.

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $h(x) \geq h(0)=0$，得证............9 分

(3) 由（2）可得，当 $a \geq -2$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点.

所以当 $a<-2$ 时，又因为此时 $f''(x)=-a\sin x+\frac{4x}{(1-x^2)^2}$ 在 $x \in (-1,1)$ 单调递增，且 $f''(0)=0$.

所以 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增.又因为 $f'(0)=a+2<0$，

且 $x \to 1$ 时，$f'(x) \to +\infty$.且 $x \to -1$ 时，$f'(x) \to +\infty$.所以 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$.

$x_1 \in (-1,0)$，使得 $f'(x_1)=0$.所以 $f(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_0) 单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增

所以函数 $f\left(x\right)$ 存在唯一的极小值点 $x_0\in\left(0,1\right)$，且满足 $a\cos x_0+\frac{2}{1-{x_0}^2}=0$ ....12 分

下证：$\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{a}}<{x_0}^2<1$.

令 $G\left(x_0\right)=\cos x_0-1+\frac{1}{2}{x_0}^2$，则 $G'\left(x_0\right)=-\sin x_0+x_0$，又 $G''\left(x_0\right)=-\cos x_0+1\geq 0$，

所以 $G'\left(x_0\right)=-\sin x_0+x_0$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递增，即 $G'\left(x_0\right)=-\sin x_0+x_0\geq 0$.

所以 $G\left(x_0\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递增，所以 $G\left(x_0\right)\geq 0$.

又因为 $a\cos x_0+\frac{2}{1-{x_0}^2}=0$，所以 $\left(1-{x_0}^2\right)\cos x_0=-\frac{2}{a}$.又因为 $\cos x_0>1-\frac{1}{2}{x_0}^2$，............15 分

所以 $-\frac{2}{a}>\left(1-\frac{1}{2}{x_0}^2\right)\left(1-{x_0}^2\right)$.

即 $-\frac{2}{a}>\frac{1}{2}{x_0}^4-\frac{3}{2}{x_0}^2+1$，即 $-\frac{2}{a}>\frac{1}{2}\left({x_0}^2-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，

所以 $\frac{1}{2}\left({x_0}^2-\frac{3}{2}\right)^2<-\frac{2}{a}+\frac{1}{8}$，即 $\left(\frac{3}{2}-{x_0}^2\right)^2<\frac{1}{4}-\frac{4}{a}$，所以 $\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{a}}<{x_0}^2<1$，得证.....17 分

19.【详解】

（1）证明：方法一：$\because k_{P_1P_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=y'|_{x=x_A}=x_{A_1},\therefore y_1-y_2=x_{A_1}(x_1-x_2)$ .....2 分

又 $\because x_{A_1}=\frac{x_1-x_2}{2},\therefore y_1-y_2=\frac{x_1+x_2}{2}(x_1-x_2)$

$\therefore {x_1}^2-{x_2}^2=2(y_1-y_2),\therefore {x_1}^2-2y_1={x_2}^2-2y_2$ ....4 分

方法二:设切线为 $y-y_1=k_1(x-x_2)$,联立 $x^2=2y$

得：$x^2-2k_1x+2k_1x_1-2y_1=0$，令 $\Delta=0$ 得 ${k_1}^2-2k_1x_1+2y_1=0$

$k_1=\frac{2x_1+\sqrt{(2x_1)^2-8y_1}}{2}=x_1+\sqrt{x_1^2-2y_1}$ ....2 分

要证 ${x_1}^2-2y_1={x_2}^2-2y_2\Leftrightarrow y_2-y_1=\frac{1}{2}({x_2}^2-x_1^2)\Leftrightarrow\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{2}$

即 $k_1=x_{A_1}$ ....4 分

(2)（i）解：设过 $P_n(x_n,y_n)$ 的切线为: $y-y_n=k^*(x-x_n)$,联立 $x^2=2y$

得 $x^2-2k^*x+2k^*x_n-2y_n=0$,令 $\Delta=0\Rightarrow(k^*)^2-2x_nk^*+2y_n=0$ ....6 分

$k^* = \dfrac{2x_n \pm \sqrt{4{x_n}^2 - 8y_n}}{2} = x_n \pm \sqrt{{x_n}^2 - 2y_n}$, ...8 分

记 $\sqrt{{x_1}^2 - 2y_1} = t,$ 则 $k^* = x_n \pm t$ 设 $k_n = x_n + t, k_{n-1} = x_n - t,$.

$\therefore x_{n+1} - x_n = (k_n + \mathrm{t} - (k_n - t)) = 2t$, ...10 分

$x_{n+1} - x_n = 2\mathrm{t}, \therefore \{x_n\}$为等差数列 ....11 分

（ii）$|P_{2025}P_{2026}| = 2|P_{2025}A_{2025}| =$

$2\sqrt{1+k_{2025}^2}\,|x_{2025} - x_{A_{2025}}| = 2\sqrt{1+k_{2025}^2}\,|x_{2025} - k_{2025}| = 2\sqrt{1+(x_{2025}+t)^2}\,t$ ....13 分

此时 $t = \sqrt{x_1^2 - 2y_1} = 1, d = x_{n+1} - x_n = 2t = 2$ ....15 分

$|P_{2025}P_{2026}| = 2\sqrt{1+(1+2024\mathrm{d}+1)^2} = 2\sqrt{1+4050^2}$ ....17 分