# 2024学年第二学期宁波六校联盟期中联考高一年级数学答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | A | B | D | D | B | ABD | B |

| 题号 | 9 | 10 | 11 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | ACD | BC | ABD | | | | | |

12、$\sqrt{5}$　　13、$-\dfrac{7}{2}$　　14、$\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

15.（1）因为 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，所以 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$　即 $\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

即 $10+2-3x=0$，即 $x=4$，　..........................4分

所以 $\vec{b}=(2,4)$，所以 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$；　..........................6分

（2）由题意可得 $\vec{a}+\vec{b}=(3,x-3)$

又因 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\vec{c}$，所以 $3(x+5)=-3(x-3)$，解得 $x=-1$，　..........................9分

所以 $\vec{b}=(2,-1)$　因为 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2+3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　..........................11分

又因为 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{4}$

所以向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$　..........................13分

16.解：∵ $z=1+mi$，∴ $\bar{z}=1-mi$. ∴ $\bar{z}\cdot(3+i)=(1-mi)(3+i)=(3+m)+(1-3m)i$.

又∵ $\bar{z}\cdot(3+i)$ 为纯虚数，∴ $\begin{cases}3+m=0\\1-3m\neq 0\end{cases}$，解得 $m=-3$．∴ $z=1-3i$.　..........................5分

（1）$z_1=\dfrac{-3+2i}{1-i}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$，∴ $|z_1|=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$；　..........................9分

（2）∵ $z=1-3i$，∴ $z_2=\dfrac{a-i}{1-3i}=\dfrac{(a+3)+(3a-1)i}{10}$，　..........................12分

又∵复数 $z_2$ 所对应的点在第一象限，

∴ $\begin{cases}a+3>0\\3a-1>0\end{cases}$，解得：$a>\dfrac{1}{3}$.　..........................15分

17.（1）因为 $PO_1=2\text{m}$，正四棱柱的高 $O_1O$ 是正四棱锥的高 $PO_1$ 的4倍，

所以 $O_1O=8\text{m}$，所以仓库的容积 $V=\frac{1}{3}\times 6^2\times 2+6^2\times 8=312\text{m}^3$. ............................6 分

（2）若正四棱锥的侧棱长为 $6\text{m}$，设 $PO_1=x\text{m}$，

则 $O_1O=4x\text{m}$， $A_1O_1=\sqrt{36-x^2}\text{m}$， $A_1B_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2}m$，

正四棱柱侧面积为：

$S=4\times 4x\cdot\sqrt{2}\sqrt{36-x^2}=16\sqrt{2}x\cdot\sqrt{36-x^2}\,(0<x<6)$， ............................11 分

所以 $S\leqslant 16\sqrt{2}\times\dfrac{x^2+\left(\sqrt{36-x^2}\right)^2}{2}=288\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{36-x^2}$，即 $x=3\sqrt{2}$ 时， $S_{\max}=288\sqrt{2}\text{m}^2$.

所以当 $PO_1=3\sqrt{2}\text{m}$ 时，正四棱柱侧面积最大，最大为 $288\sqrt{2}\text{m}^2$. ............................15 分

18.（1）解：选①，由 $(\sin A-\sin C)\sin(A+B)=\sin^2A-\sin^2B$，

可得 $(\sin A-\sin C)\sin(A+B)=(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)$，

因为 $A+B+C=\pi$ 及正弦定理，可得 $(a-c)\sin C=(a-b)(\sin A+\sin B)$，

所以 $(a-c)c=(a-b)(a+b)$，整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$， ............................4 分

则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ............................7 分

选②，由 $\sqrt{3}\sin B\cos B-\frac{1}{2}\cos 2B=1$，可得 $\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B=2$，即 $\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

............................4 分

因为 $0<B<\pi$，可得 $-\dfrac{\pi}{6}<2B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$，所以 $2B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ............................7 分

选③，由 $b\cos C=a-\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，由正弦定理得 $\sin B\cos C=\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

即 $\sin B\cos C=\sin(B+C)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

即 $\sin B\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，整理得 $\sin C\left(\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\right)=0$，

因为 $0<C<\pi$， $\sin C>0$，可得 $\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B=0$， ............................4 分

即 $\tan B=\sqrt{3}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ............................7 分

（2）解：由 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=2$，可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{4\sqrt{3}}{3}=2R$，

所以周长 $l_{\triangle ABC}=a+b+c=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)$， ........................9 分

又由 $A+B+C=\pi$，可得 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

$l_{\triangle ABC}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]$

$=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=2+4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ ........................12 分

又因为 $\Delta ABC$ 是锐角三角形，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$， ........................14 分

可得 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，所以 $2+2\sqrt{3}<2+4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\le 6$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $\left(2+2\sqrt{3},6\right]$. ........................17 分

19.（1）因为 $\overrightarrow{a_0}=(3,1,2)$，所以 $\overrightarrow{a_1}=(2,1,1)$， ........................2 分

$\overrightarrow{a_2}=(1,0,1)$， ........................4 分

所以 $\langle\overrightarrow{a_2}\rangle=1\times0\times1=0,\|\overrightarrow{a_2}\|=1+0+1=2$. ........................7 分

（2）（ⅰ）设 $\overrightarrow{a_0}=(x_0,y_0,z_0)$，因为 $\overrightarrow{a_1}=(p,2,q)(q\ge p)$，

所以有 $x_0\le y_0\le z_0$ 或 $x_0\ge y_0\ge z_0$.

当 $x_0\ge y_0\ge z_0$ 时，可得 $\begin{cases}p=x_0-y_0,\\2=y_0-z_0,\\-q=z_0-x_0.\end{cases}$ 三式相加得 $q-p=2$.

又 $\|\overrightarrow{a_1}\|=2024$，可得 $p=1010,q=1012$. ........................9 分

当 $x_0\le y_0\le z_0$ 时，也可得 $p=1010,q=1012$，于是 $\overrightarrow{a_1}=(1010,2,1012)$. ........................11 分

（ⅱ）设 $\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量为 $2,t,t+2\left(t\in\mathrm{N}^*\right)$ 这三个数，

当 $t>2$ 时，$\overrightarrow{a_{k+1}}$ 的三个分量为 $t-2,2,t$ 这三个数，

所以 $\|\overrightarrow{a_{k+1}}\|=\|\overrightarrow{a_k}\|-4$.

当 $t=2$ 时，$\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量为 $2,2,4$，

则 $\overrightarrow{a_{k+1}}$ 的三个分量为 $0,2,2$，$\overrightarrow{a_{k+2}}$ 的三个分量为 $2,0,2$，

所以 $\left\|\overrightarrow{a_{k+1}}\right\|=\left\|\overrightarrow{a_{k+2}}\right\|=\cdots=4$.

所以，由 $\left\|\overrightarrow{a_1}\right\|=2024$，可得 $\left\|\overrightarrow{a_{505}}\right\|=8, \left\|\overrightarrow{a_{506}}\right\|=4$. ............................14 分

因为 $\overrightarrow{a_1}=(1010,2,1012)$，所以任意 $\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量始终为偶数，

且都有一个分量等于 2.

所以 $\overrightarrow{a_{505}}$ 的三个分量只能是 $2,2,4$ 三个数，

$\overrightarrow{a_{506}}$ 的三个分量只能是 $0,2,2$ 三个数.

所以当 $m<505$ 时，$\left\|\overrightarrow{a_{m+1}}\right\|\geq 8$；当 $m\geq 505$ 时，$\left\|\overrightarrow{a_{m+1}}\right\|=4$.

所以 $m$ 的最小值为 505. ............................17 分