2024 学年第二学期浙南名校联盟期中联考

高一年级数学学科参考答案及评分细则

一．选择题： 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	D	C	A	B

二．多选题： 本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	AB	BCD	ABD

三．**填空题：** 本大题共 3 小题，每小题 5 分。请把答案填到题中横线上。

12. $\dfrac{-10}{3}$　　13. $20\sqrt{19}$　　14. $\left[-2,\dfrac{6\sqrt{3}+3}{4}\right]$

四．解答题： 本大题共 5 小题，共 77 分，解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）已知复数 $z=m^2-m-2+(m-2)i$，$(m\in R)$，其中 i 为虚数单位.

（1）若 z 是纯虚数，求实数 m 的值;

（2）若 $m=3$，设 $z+i=(a+bi)\cdot(\bar{z}-i)$，$(a,b\in R)$，求 $a+b$ 的值.

解(1) $\because$ z是纯虚数$\therefore \begin{cases} m^2-m-2=0 \\ m-2\neq 0 \end{cases}$，……………………………4 分

解得 $m=-1$……………………………………………………6 分

(2)$\because m=3$，$\therefore z=4+i$　　$\bar{z}=4-i$……………………………8 分

$\therefore \frac{z+i}{\bar{z}-i}=\frac{4+2i}{4-2i}=\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$……………………………10 分

$$=\frac{4+4i-1}{4+1}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

$\therefore a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{4}{5}$……………………………………………………12 分

$\therefore a+b=\frac{7}{5}$……………………………………………………13 分

16. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为120°，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，若$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\vec{b},\lambda\in R$，

(1)当$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{c}$时，求实数$\lambda$的值；

(2)当$|\vec{c}|$取最小值时，求向量$\vec{b}$与$\vec{c}$夹角的大小.

解：（1）$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\lambda\vec{a}+\vec{b})=0$ ……………………………………………2 分

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ$ ……………………………………………………3 分

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ ……………………………………………………………………4 分

$\therefore(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda\vec{a}^2-\vec{b}^2-\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}=5\lambda-2=0$

$\therefore\lambda=\dfrac{2}{5}$ ……………………………………………………………………6 分

（2）$|\vec{c}|^2=|\lambda\vec{a}+\vec{b}|^2=\lambda\vec{a}^2+2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ ……………………………………7 分

$=4\lambda^2-2\lambda+1$ ……………………………………………………………8 分

$=4(\lambda-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$

当$\lambda=\dfrac{1}{4}$时，$|\vec{c}|_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，此时$\vec{c}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$ ………………………………10 分

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………………11 分

$\cos<\vec{b},\vec{c}>=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$

$=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …………………………………………………… 13 分

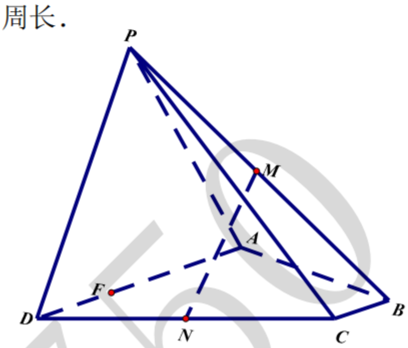
所以向量$\vec{b}$与$\vec{c}$夹角的大小为30° ……………………………………………… 15 分

17.（本小题满分 15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，M，N 分别是 PB，CD 的中点，$AD=3BC$，$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{ED}$.

(1)求证：$MN//$ 平面 PAD .

(2)若 $PB//$ 平面 ACE，求 λ 的值.

(3)当 $\lambda=2$ 时，若 $PA=PB=PC=AD=9$，$CD=12$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FD}$ 请在图中作出四棱锥 $P-ABCD$ 过点 B,E,F 的截面（保留作图痕迹），并求出截面周长.



解：(1)证明一：取 AB 的中点为 Q，连接 MQ，NQ，

$\because AD//BC$，N、Q 分别为 CD、AB 的中点;

$\therefore NQ//AD$，$\because NQ\not\subset$ 平面 PAD，$\therefore NQ//$ 平面 PAD，…………………………2 分

又 $\because M$ 为 PB 的中点，$\therefore MQ//PA$，$\because MQ\not\subset$ 平面 PAD，$\therefore MQ//$ 平面 PAD ……4 分

$\because MQ\cap NQ=Q$，$\therefore$ 平面 $MNQ//$ 平面 PAD，又 $MN\subset$ 平面 MNQ，

$\therefore MN//$ 平面 PAD .…………………………5 分

（说明：$NQ\not\subset$ 平面 PAD，$MQ\not\subset$ 平面 PAD，$MQ\cap NQ=Q$ 缺一扣 1 分；由线线平行得面面平行扣 2 分。）

证明二：取 PA 的中点为 R，过 C 作 $CG//AB$ 交 AD 于 G，取 DG 中点 H，连接 MR,NH,HR，则 $MR//AB$，$MR=\frac{1}{2}AB$，$NH//CG//AB$，$NH=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ 四边形 $MNHR$ 是平行四边形,

$\therefore MN//RH$，…………………………………………………………………3 分

$\because MN\not\subset$ 平面 PAD，$RH\subset$ 平面 PAD，$\therefore MN//$ 平面 PAD ……………………5 分

（说明：$MN\not\subset$ 平面 PAD，$RH\subset$ 平面 PAD，缺一扣 1 分。）

(2)连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OE .

$\because PB//$ 平面 ACE，平面 $PBD\cap$ 平面 $ACE=OE$，$\therefore OE//PB$，$\therefore\frac{PE}{ED}=\frac{OB}{OD}$. …8 分

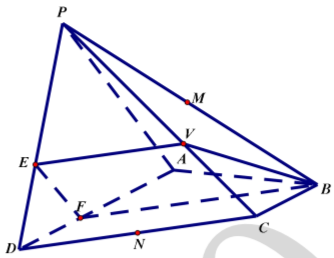
又 $\frac{OB}{OD}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3}$，$\therefore\overrightarrow{PE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$，$\therefore\lambda=\frac{1}{3}$.…………………………10 分

(3) 设 V 为 PC 上靠近点 C 的三等分点，连接 EF，EV，BF，BV，则四边形 $VEFB$ 为所求截面．(注：不要求证明，证明过程如下：$\because\lambda=2$，$\therefore\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{ED}$，$\therefore VE//CD$.

又 $\because BC//DF$，$BC=DF$ $\therefore$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，$\therefore BF//CD$，$\therefore VE//BF$

故V、E、F、B共面，故四边形$VEFB$为所求截面．）　…………………………12 分

$\because PA=PB=PC=AD=9$，$CD=12$，$VE=\dfrac{2}{3}CD=8$，



$EF=\dfrac{1}{3}PA=3$，$BF=CD=12$，

在ΔPBC中，$\because PB=PC=9$

$\therefore BC=\dfrac{1}{3}AD=3$，故$\therefore \cos\angle PCB=\dfrac{1}{6}$，

故$BV=\sqrt{BC^2+CV^2-2BC\cdot CV\cdot\cos\angle PCB}=\sqrt{15}$，　…………………………14 分

所以截面周长为$12+3+8+\sqrt{15}=23+\sqrt{15}$．　…………………………15 分

18.（本小题满分 17 分）

已知a,b,c分别为斜ΔABC三个内角A,B,C的对边，且满足$b-a\cos C=\sqrt{3}a\sin C-\sqrt{3}c$．

(1)求角A的值；

(2)记BC边上的高为h，

（i）若$h=\dfrac{\sqrt{3}}{14}a$，求$\sin B:\sin C$的值；

（ii）求$\dfrac{\sqrt{3}h}{b}+\dfrac{h}{c}$的取值范围．

解：(1)由$b-a\cos C=\sqrt{3}a\sin C-\sqrt{3}c$及正弦定理得：

$$\sin B-\sin A\cos C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin C$$

化简得：$\cos A\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin C$　……………………………1分

化简得$\sqrt{3}\sin A-\cos A=\sqrt{3}$，则$\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……………………………3分

又$\because -\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<-\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$，由斜三角形知，$A=\dfrac{5\pi}{6}$……5分

(2)（i）由$A=\dfrac{5\pi}{6}$，ΔABC面积$S=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}bc\sin A, h=\dfrac{\sqrt{3}}{14}a$，

得$\dfrac{\sqrt{3}}{7}a^2=bc$　………………………………………………………………7分

由余弦定理可知：$a^2=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}bc=b^2+c^2+\sqrt{3}bc$，即$(b-\sqrt{3}c)(b-\dfrac{\sqrt{3}}{3}c)=0$则

$\dfrac{b}{c}=\sqrt{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　………………………………………………………………10分

所以$\sin B:\sin C=\sqrt{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．　……………………………………………11分

（ii）由$S=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，$A=\dfrac{5\pi}{6}$得$h=\dfrac{bc\sin A}{a}$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}h}{b}+\frac{h}{c}=\frac{1}{2}\frac{bc}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{b}+\frac{1}{c}\right)=\sin B+\sqrt{3}\sin C$$ ……………………………13分

$$=\sqrt{3}\sin C+\sin\left(\frac{\pi}{6}-C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C=\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$$ ……………………15分

$\because C\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),\therefore\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ ……………………………………………16分

$\therefore \frac{\sqrt{3}h}{b}+\frac{h}{c}=\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ……………………………………………17分

19.（本小题满分 17 分）对集合 A，若存在实数 k，使得对于 $\forall x\in A$，$x\geq k$，则称集合 A 有下界 k，实数 k 的最大值为函数的下确界，记作 $\inf A$.

（1）记函数 $f(x)=-x^2+2x+1,0<x<3$ 的值域为 B，求 $\inf B$；

（2）已知函数 $g(x)=\begin{cases}\frac{a^2}{x}-1，x\geq 0\\ a\cdot 4^x-2^x，x<0\end{cases}$.

（i）记集合 $C=\{y\mid y=g(x),x\in R\}$，若 $\inf C=-1$，求实数 a 的取值范围;

（ii）记集合 $P=\{y\mid y=g(x),x\geq a\},Q=\{y\mid y=g(x),x<a\}$,若 $\inf P=\inf Q$，求实数 a 的值.

解：（1）$f(x)=-(x-1)^2+2$，$B=(-2,2]$，……………………………………………2分

$\therefore \inf B=-2$ ……………………………………………………………4分

（2）（i）$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的下确界为 -1，………………………………………5 分

故 $\inf C=-1\Leftrightarrow\forall x<0,a\cdot 4^x-2^x\geq -1$ ……………………………………6 分

法一：令 $t=\frac{1}{2^x},x<0,则t\in(1,+\infty)$ ……………………………………………7 分

$a\geq -\frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^x}=-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，（参变分离）……………………………8 分

$\because t>1,\therefore -(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\in(-\infty,0)\ \therefore a\geq 0$ ……………………………………10 分

法二：令 $t=2^x,x<0,则\forall t\in(0,1)$，$at^2-t\geq -1$ ……………………………………7 分

当 $a\geq 0$ 时，$a\cdot t^2-t\geq -t>-1$，合题意；……………………………………………9 分

当 $a<0$ 时，$a\cdot t^2-t\in(a-1,0)$，不合题意；

综上所述，$a\geq 0$.…………………………………………………………………10 分

（ii）当 $a>0$ 时，$\inf P=-1$；

而 $x\in[0,a)$ 时，$y=g(x)$ 的下确界为 $a-1>-1$，

故必有 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的下确界为 -1，令 $t=2^x,x<0,则t\in(0,1)$

$y=h(t)=at^2-t=a(t-\frac{1}{2a})^2-\frac{1}{4a},t\in(0,1)$ 的下确界为 -1，

对称轴 $t=\frac{1}{2a}\in(0,1)$ 时，$\inf Q=h(\frac{1}{2a})=-\frac{1}{4a}=-1$，$a=\frac{1}{4}$，此时 $\frac{1}{2a}=2\notin(0,1)$，舍去；

对称轴 $t=\frac{1}{2a}\in[1,+\infty)$ 时，$\inf Q=h(1)=a-1=-1$，$a=0$，舍去；………………13 分

当 $a=0$ 时，$\inf P=-1$，$\inf Q=-1$，合题意；……………………………15 分

当 $a<0$ 时，$\inf P=a-1$；此时 $g(x)=a\cdot 4^x-2^x$ 在 $(-\infty,a)$ 单调递减，故

$\inf Q=a\cdot 4^a-2^a=g(a)>g(0)=a-1$

综上所述，$a=0$. ……………………………………………………………17 分