金丽衢十二校2024学年高三第二次联考

数学试题

命题人：永康一中　颜熙　高雄略　　审核：浦江中学

本卷分选择题和非选择题两部分．考试时间为120分钟，试卷总分为150分．请考生将所有试题的答案涂、写在答题纸上．

选择题部分

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x^2<4\}$，则 $A\cup B=$（ ▲ ）

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{-1,1,2,3\}$　　D．$\{-1,0,1,2,3\}$

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2x,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,0)$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$ 则 x 的值为（ ▲ ）

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

3．已知复数 z 满足 $(1+i)z=2i$，则 $|z|$ 为（ ▲ ）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

4．若圆锥的轴截面是一个边长为4的等边三角形，则它的体积为（ ▲ ）

A．$\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$　　B．8π　　C．12π　　D．$8\sqrt{3}\pi$

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leqslant 0\\ \ln x-x^2, & x>0\end{cases}$，则 $f(f(1))=$（ ▲ ）

A．-1　　B．$-\frac{1}{e}$　　C．1　　D．e

6．已知两条相交直线 a,b，a 在平面 α 内，b 在平面 α 外．设 a,b 的夹角为 θ_1，直线 b 与平面 α 所成角为 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$，$\sin\theta_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．则由 a，b 确定的平面与平面 α 夹角的大小为（ ▲ ）

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

7．设抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与抛物线交于 A，B 两点，若 $|AF|+|BF|=7$，则 $\cos\angle AFB$ 的值为（ ▲ ）

A．0　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{7}}{4}$

8．在△ABC 中，“$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin(A+B)$”是“$C$ 为直角”的（ ▲ ）

A．充分但非必要条件　　B．必要但非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分条件也非必要条件

二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。）

9．设 $(1+2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，则下列说法正确的有（ ▲ ）

A．$a_0=1$　　B．$a_3=20$

C．该二项式的所有二项式系数之和为 64　　D．$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=729$

10．已知函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，$g(x)=2f(x)f(-x)f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，下列说法正确的有（ ▲ ）

A．$f(x)$ 的最小正周期为 2π　　B．$g(x)$ 是偶函数

C．$g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减　　D．$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{9},1\right]$

11．已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 首项相等，且满足 $a_1+b_1=a_2, a_2+b_2=b_3$，则下列说法中正确的有（ ▲ ）

A．$\{b_n\}$ 的公比为 2　　B．$\exists m\geqslant 3$，使得 $a_m=b_m$

C．对 $\forall\lambda<1$，数列 $\{b_n-\lambda a_n\}$ 为递增数列　　D．$\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k}{a_k}<150$

非选择题部分

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。）

12．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点与右顶点分别为 A，B，若直线 AB 的倾斜角为 $\frac{5}{6}\pi$，则 C 的离心率为__▲__．

13．已知函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在 $x=a$ 处取得极大值，在 $x=b$ 处取得极小值，若 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上的最大值为 $a+b$，则 m 的最大值为__▲__．

14．有 6 张卡片，正面分别写有数字 1，2，3，4，5，6，且背面均写有数字 7．先把这些卡片正面朝上排成一排，且第 k 个位置上的卡片恰好写有数字 k．然后掷一颗均匀的骰子，若点数为 n，则将第 n 个位置上的卡片翻面并置于原处．进行上述实验 3 次，发现卡片朝上的数字之和为偶数，在这一条件下，计算骰子恰有一次点数为 2 的概率为__▲__．

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15.（本题满分 13 分）

为了了解高中学生语文与数学成绩之间的联系，从某学校获取了 400 名学生的成绩样本，并将他们的数学和语文成绩整理如表：

单位：人

数学成绩	语文成绩	
	不优秀	优秀
不优秀	180	90
优秀	50	80

（1）依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，能否认为学生的数学成绩与语文成绩有关联？

（2）以频率估计概率，从全市高中所有数学不优秀的学生中随机抽取 5 人，设其中恰有 X 位学生的语文成绩优秀，求随机变量 X 的分布列以及数学期望．

附：

$P(\chi^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)};$$

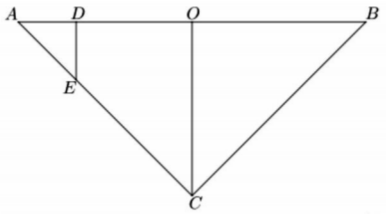
16.（本题满分 15 分）

已知等轴双曲线 C 的左右焦点分别为 F_1, F_2，经过点 F_2 的直线与 C 的渐近线相交于点 M，N，点 M 的横坐标为 -1，N 是线段 F_2M 的中点，经过点 F_1 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点．

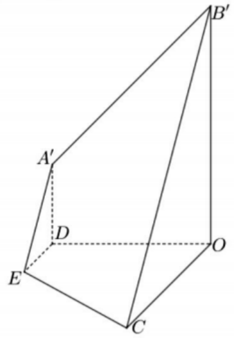
（1）求双曲线 C 的方程；

（2）当 $\triangle ABF_2$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ 时，求 l 的方程．

17.（本题满分 15 分）



如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$，$AB = 6$，O 为 AB 的中点，D, E 分别为 AB, AC 边上一点，满足 $AD = 1$，$DE // OC$．将 $\Delta ADE, \Delta BOC$ 分别沿着 DE, OC 翻折成 $\Delta A'DE, \Delta B'OC$，满足 A', B' 在平面 $CODE$ 的同一侧，$A'D \perp$ 面$CODE$，$B'O \perp$ 面$CODE$．



（1）证明：A', B', C, E 共面；

（2）在线段 $B'C$ 上是否存在一点 F（异于端点），满足 $EF //$ 平面 $A'DOB'$？若存在，求出点 F 的位置；若不存在，请说明理由；

（3）在（2）的情况下，求直线 CE 与平面 ODF 所成角的正弦值．

18.（本题满分 17 分）

已知 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-a\mathrm{e}^{x}+b$．

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2(x+1)$，求 $a+b$ 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

（3）若对 $\forall b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 至多有两个零点，求 a 的取值范围．

19.（本题满分 17 分）

对任意给定的 $n\in\mathbf{N}^*$，若有穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_m=\sum\limits_{k=1}^{n}X_{k,m-1}$，$(\forall m\leqslant n且m\in\mathbf{N}^*)$ 其中 $X_{k,i}=\begin{cases}0,a_k\neq i\\1,a_k=i\end{cases}$．则称该数列为“$D$ 数列”．

（1）当 $n\in\{1,2\}$ 时，是否存在符合条件的“D 数列”？若存在，请求出所有的符合条件的“D 数列”；若不存在，请说明理由；

（2）证明：（i）$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n$；

（ii）当 $n\geqslant7$ 时，任意符合条件的“D 数列”都满足 $a_2\geqslant2$；

（3）当 $n=20$ 时，求出所有的“D 数列”．