金丽衢十二校 2024 学年高三第二次联考

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	C	A	B	B	B	C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9	10	11
ACD	ABD	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　13. 4　　14. $\dfrac{13}{36}$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 解：（1）假设 H_0：学生的数学成绩与语文无关…………1 分

$\chi^2=\dfrac{400\times(180\times80-90\times50)^2}{270\times130\times230\times170}=\dfrac{145200}{5083}\approx28.57>3.841$…………3 分

故拒绝原假设，即认为学生的数学成绩与语文成绩有关联，这一结论有 5% 的概率出错．

…………5 分

（2）设抽取到的语文成绩优秀的学生恰有 X 人，则 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{3}\right)$，…………7 分

X	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{32}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{40}{243}$	$\dfrac{10}{243}$	$\dfrac{1}{243}$

因此随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=C_5^k\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-k}(k=0,1,2,3,4,5)$…………11 分

所以随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$．…………13 分

16. （1）由题可知 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，因此点 M 的坐标为 $(-1,1)$，故 $N\left(\dfrac{c-1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，代入渐近线方程 $y=x$ 可得 $c=2$．所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$．…………5 分

（2）由于直线l不与y轴垂直，不妨设为$x=ty-2$，与C方程联立得$(t^2-1)y^2-4ty+2=0$，

$t^2-1\neq 0,\Delta=8(t^2+1)>0$，$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2-1} \\ y_1\cdot y_2=\dfrac{2}{t^2-1} \end{cases}$. ……………………………………………8 分

$|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+1}}{|t^2-1|}$，$d_{F_2-l}=\dfrac{4}{\sqrt{t^2+1}}$，

因此$S_{\Delta ABF_2}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{F_2-l}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+1}}{|t^2-1|}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$，……………………………13 分

（$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_1-y_2|$亦可）

解得$t=\pm 2$，

所以直线l的方程为$x+2y+2=0$或$x-2y+2=0$……………………………………15 分

17. 解：（1）延长OD,CE相交于点A，由题可知$DE // CO, DE=\dfrac{1}{3}CO$，因此$AD=\dfrac{1}{3}AO$.

由于$A'D\perp$面$CODE$，$B'O\perp$面$CODE$，故$A'D // B'O$.而$A'D=\dfrac{1}{3}B'O$，故A,A',B'共线. 所以A',B',C,E共面.…………………………………………………………………3 分

（2）由（1）得$A'D // B'O$. $B'O\subset$面$B'OC$，$A'D\not\subset$面$B'OC$，因此$A'D //$面$B'OC$.……5 分

同理可得$ED //$面$B'OC$，而$A'D\cap ED=D$，因此面$A'DE //$面$B'OC$………………6 分

又由（1）得A',B',C,E共面.故$A'E // B'C$.取$B'C$上靠近B'的三等分点F.可得$A'E=B'F$.因此四边形$A'B'EF$为平行四边形. ……………………………………………8 分

故$EF // A'B'$，又$EF\not\subset$面$A'DOB'$，$A'B'\subset$面$A'DOB'$.

所以$EF //$面$A'DOB'$.………………………………………………………………10 分

（3）由（2）得直线CE与平面ODF所成角即直线AC与平面OAF所成角.

作$CH\perp OF$与OF相交于点H.由$B'O\perp$面$CODE$得$B'O\perp OA$，又$CO\perp OA$，$B'O\cap CO=O$，故$OA\perp$面$OB'C$，…………………………………………12 分

因此$OA\perp CH$.

又$OA\cap OF=O$，故$CH\perp$面OAF，所以$\angle CAH$就是直线AC与平面OAF所成角.……14 分

在$\Delta B'OC$中，可计算得$CH=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.又在$\triangle CHA$中，$CH\perp AH$，$AC=3\sqrt{2}$，因此$\sin\angle CAH=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，即直线$CE$与平面$ODF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.………………15 分

18.（1）由题意得$f(0)=b-a=2$.………………………………………………………1 分

$f'(x)=(1-x)e^{-x}-ae^{x}$，故$f'(0)=1-a=2$得$a=-1$.……………………………3 分

所以$b=1$，$a+b=0$.

(2) $f'(x)=(1-x)e^{-x}-ae^{x}\geq 0\Leftrightarrow a\leq(1-x)e^{-2x}$.……………………………5 分

令 $g(x)=(1-x)e^{-2x}$，$g'(x)=(2x-3)e^{-2x}$. ……………………………………………………6 分

故当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. ……………………………………………………7 分

因此 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2e^3}$.

所以 $a\le-\dfrac{1}{2e^3}$，经检验，符合题意. ……………………………………………………8 分

（3）方法一：①由（2）得当 $a\le-\dfrac{1}{2e^3}$ 时，$f(x)$ 单调递增，故至多一个零点，符合题意；

……………………………………………………9 分

②当 $a\ge0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow a<g(x)$，由于当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$. ……………………………………………………10 分

设 $g(x_0)=a$，可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，因此至多两个零点，符合题意；……………………………………………………12 分

③当 $a\in\left(-\dfrac{1}{2e^3},0\right)$ 时，$g(x)=a$ 存在两个不同零点，设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增. …………………………14 分

而当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

故当 $b\in(-f(x_1),-f(x_2))$ 时，函数 $f(x)$ 存在三个不同零点，舍去. …………………………16 分

（两端极限未判断的不扣分）

综上所述，$a\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}\right]\cup[0,+\infty)$. ……………………………………………………17 分

方法二：由题意可得 $f'(x)=(1-x)e^{-x}-ae^{x}$ 至多有一个零点，即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=a$ 至多一个交点. ……………………………………………………13 分

由（2）得 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. 而当 $x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 时 $g(x)\in\left(-\dfrac{1}{2e^3},0\right)$；又当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$. ……………………………………………………16 分

所以 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}\right]\cup[0,+\infty)$. ……………………………………………………17 分

19.（1）当 $n=1$ 时，$a_1=X_{1,0}=\begin{cases}0,a_1\ne0\\1,a_1=0\end{cases}$，可知不存在“$D$ 数列”. …………………………1 分

当 $n=2$ 时，若 $a_1=0$，考虑到 $a_1=X_{1,0}+X_{2,0}=1+X_{2,0}\ne0$，矛盾；若 $a_1\ne0$，则 $a_1=X_{1,0}+X_{2,0}=0+X_{2,0}=X_{2,0}\le1$，因此只能 $a_1=X_{2,0}=1$，故 $a_2=0$，但是此时 $a_2=X_{1,1}+X_{2,1}=1+0=1$，矛盾. 所以不存在“$D$ 数列”. …………………………………3 分

（2）由题意可知 $a_m\le n(\forall m\le n 且 m\in N^*)$……………………………………………………4 分

假设$\exists k \le n$满足$a_k = n$，则$X_{m,k-1} = 1(\forall m \le n)$即$a_m = k-1(\forall m \le n)$，这与$a_k = n$矛盾.

……………………………………………………5 分

因此$a_m \le n-1(\forall m \le n且m \in \mathrm{N}^*)$，故$\sum_{m=1}^{n} X_{k,m-1} = 1(\forall k \le n且k \in \mathrm{N}^*)$，……………6 分

所以

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k,0} + \sum_{k=1}^{n} X_{k,1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} X_{k,n-1} = \sum_{m=1}^{n} X_{1,m-1} + \sum_{m=1}^{n} X_{2,m-1} + \cdots + \sum_{m=1}^{n} X_{n,m-1} = n$$

……………………………………………………8 分

(ii)设$a_1 = m(1 \le m \le n-1)$，①当$m \ge \frac{n}{2}$时，可知$a_k < m(\forall 2 \le k \le n, k \in \mathbf{N}^*)$，否则与(i)矛盾，故$a_{m+1} = \sum_{k=1}^{n} X_{k,m} = 1$，因此$a_2 = \sum_{k=1}^{n} X_{k,1} \ge 1$. 而若$a_2 = 1$，则$X_{2,1} = 1$，得$a_2 \ge 2$矛盾. 所以$a_2 \ge 2$；……………………………………………………………………10 分

②当$m < \frac{n}{2}$时，由(i)得$\sum_{k=2}^{n} a_k = n-m$，而$\sum_{k=2}^{n} X_{k,0} = m$，因此$\sum_{k=2}^{n} X_{k,1} = n-m-2$，$\sum_{k=2}^{n} X_{k,2} = 1$，因此$a_2 = \sum_{k=1}^{n} X_{k,1} = n-m-2 \ge 2$. ……………………………………12 分

综上所述，当$n \ge 7$时，任意符合条件的“D数列”都满足$a_2 \ge 2$.

（3）由（2）得当$a_1 = m(1 \le m \le 19)$时，$\sum_{k=2}^{20} X_{k,1} = 18-m$，$\sum_{k=2}^{20} X_{k,2} = 1$，此时$a_2 = 18-m$，$a_3 = 1$，$a_{m+1} = 1$.

①当$m=1$时，$a_2 = 18-m = 17 \ne a_{m+1}$，舍去；……………………………………13 分

②当$m=2$时，$a_2 = 16$，$a_3 = 1$，而此时$\sum_{k=4}^{20} X_{k,1} = 15$，故$\sum_{k=1}^{20} a_k \ge 34$与(i)矛盾，舍去；

……………………………………………………14 分

③当$m>2$时，恰满足$a_1 + a_2 + a_3 + a_{m+1} = n$，故其他项均为 0，可知$a_1 = \sum_{k=1}^{20} X_{k,0} = 16$，即$m = 16$. ……………………………………………………………………16 分

因此$a_2 = 2$，$a_3 = 1$，$a_{17} = 1$，其他项均为 0. 综上所述，当$n = 20$时，只有一个符合题意的“D数列”，即为$\{16,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0\}$……………………17 分