宁波“十校”2025 届高三 3 月联考

数学参考答案

一、选择题： 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	B	B	D	C

二、选择题： 本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	ABD	AB	ACD

三、填空题： 本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$3-\sqrt{5}$　　13．2　　14．10505　提示：$5\sum_{k=1}^{5}C_5^k 4^{5-k}=5(5^5-4^5)=10505$

四、解答题： 本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）【解析】

（1）$f(x)=\sqrt{3}\cdot\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，$f(-\frac{\pi}{12})=-\sqrt{3}$．…………6’

（2）$f(A)=2\sin(2A-\frac{\pi}{6})=\frac{2}{3}$，因为 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$，故 $2A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，

因为 $\sin(2A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，故 $2A-\frac{\pi}{6}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos(2A-\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故

$$\cos 2A=\cos(2A-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\cos(2A-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\sin(2A-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{6}.$$

……13’

16．（15 分）

【解析】

（1）作 $DE\perp AB$ 于 E，连 PE．

在 $\triangle ACB$ 中，$BC^2+AC^2=AB^2$，则 $\angle ACB=90°$，又 $AD=1$，故 $DE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AE=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

在 $\triangle APB$ 中，$PA^2+PB^2=AB^2$，则 $\angle APB=90°$，$\cos\angle PAE=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

在 $\triangle PAE$ 中，$PE^2=PA^2+AE^2-2PA\cdot AE\cdot\cos\angle PAE=2+\frac{2}{3}-2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$，

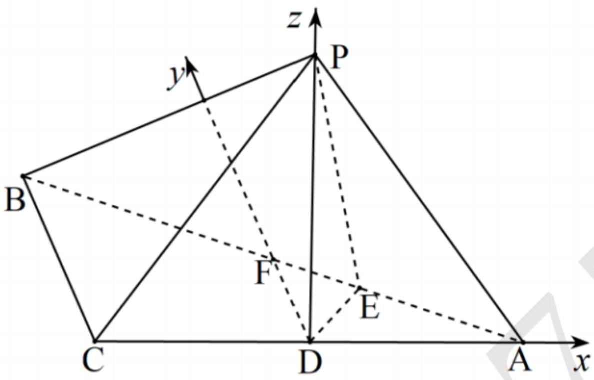
又 $PE^2+AE^2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2=PA^2$，则 $PE\perp AB$．

由于 $DE\cap PE=E$，$DE\perp AB$，$PE\perp AB$，则 $AB\perp$ 平面 PDE，

又 $PD\subset$ 平面 PDE，故 $AB\perp PD$． …………7’

（2）由（1）得，$PE\perp AB$，$DE\perp AB$，则二面角 $P-AB-C$ 的平面角为 $\angle PED=\dfrac{\pi}{3}$，

又 $PE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$DE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $PD=1$，在 $\triangle PDA$ 中，$PD^2+DA^2=PA^2$，则 $PD\perp AD$．



方法 1：由于 D 为 AC 的中点，$PA=\sqrt{2}$，且 $PA\perp PC$，则 $PC=\sqrt{2}$．
又 $PA\perp PB$，$PB\cap PC=P$，则 $PA\perp$ 平面 PBC，
则 $\angle PCA$ 为直线 AC 与平面 PBC 所成的角，又 $\angle PCA=45°$，
故直线 AC 与平面 PBC 所成的角为 $45°$． …………15’
方法 2：由（1）得 $PD\perp AB$，$AB\cap AC=A$，则 $PD\perp$ 平面 ABC，取 AB 中点 F，连 DF，则 $DF\parallel BC$，$DF\perp AC$，以 D 为坐标原点，分别以 DA，DF，DP 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图的空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$B(-1,\sqrt{2},0)$，$P(0,0,1)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，
$\overrightarrow{CP}=(1,0,1)$，
$\overrightarrow{BP}=(1,-\sqrt{2},1)$．
设平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x-\sqrt{2}y+z=0,\\ x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$ 得，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$，

设直线 AC 与平面 PBC 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

故直线 AC 与平面 PBC 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$． …………15’

17.（15 分）

【解析】

（1）当 $k=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}=x\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}x+2\mathrm{e}$，

由于 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}$，$f'(2)=3\mathrm{e}-\mathrm{e}=2\mathrm{e}$，$f(2)=2\mathrm{e}-2\mathrm{e}+2\mathrm{e}=2\mathrm{e}$，

故函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-2\mathrm{e}=2\mathrm{e}(x-2)$，即 $y=2\mathrm{e}x-2\mathrm{e}$． …………5’

（2）方法 1：

由于 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}-k$，令 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-1}$，因为 $x\in[-2,+\infty)$，

有 $\varphi'(x)\ge 0$，则 $\varphi(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)_{\min}=f'(-2)=-\mathrm{e}^{-3}-k$．

①当 $k\le -\mathrm{e}^{-3}$ 时，有 $f'(x)\ge f'(-2)\ge 0$，则 $f(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，

由 $f(x)_{\min}=f(-2)=-2\mathrm{e}^{-3}+3k+\mathrm{e}\ge 0$，得 $k\ge \dfrac{2\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}}{3}$，故 $\dfrac{2\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}}{3}\le k\le -\mathrm{e}^{-3}$；

②当 $k>-\mathrm{e}^{-3}$ 时，有 $f'(x)_{\min}=f'(-2)<0$，因为 $f'(x)$ 在区间 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，

若 $-\mathrm{e}^{-3}<k\le 0$，有 $f'(0)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-k>0$，则存在 $x\in(-2,0)$ 使得 $f'(x)=0$，

当 $k>0$ 时，取 $n=\max\{0,\ln k+1\}$，有 $f(n)>0$，则存在 $x_1\in(-2,n)$，使得 $f'(x_1)=0$，

综上，当 $k>-\mathrm{e}^{-3}$ 时，存在 $x_0\in(-2,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}-k=0$．

故当 $-2<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(-2,x_0)$ 上单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0-1}-k(x_0-1)+\mathrm{e}\ge 0$， (*)

由 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}-k=0$，得 $k=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}$，

代入(*)得 $x_0\mathrm{e}^{x_0-1}-(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}(x_0-1)+\mathrm{e}=(-x_0^2+x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}+\mathrm{e}\ge 0$，

令 $F(x)=-(x^2-x-1)\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}$，则 $F'(x)=-(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}=-(x+2)(x-1)\mathrm{e}^{x-1}$．

由于 $x\ge -2$，由 $F'(x)=0$ 得，$x=1$，

当 $-2<x<1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在区间 $(-2,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又因为 $F(-2)=-\mathrm{e}^3+\mathrm{e}<0$，$F(1)=1+\mathrm{e}>0$，$F(2)=0$，故当 $x>2$ 时，$F(x)<0$，所以满足 $(-x_0^2+x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}+\mathrm{e}\ge 0$ 的实数 x_0 的取值范围为 $-2<x_0\le 2$．

又因为 $k=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0-1}$，令 $H(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}$，则 $H'(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-1}\ge 0$，所以 $H(x)$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，故 $-\mathrm{e}^{-3}<k\le 3\mathrm{e}$，

综上所述，实数 k 的取值范围为 $\dfrac{2\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}}{3}\le k\le 3\mathrm{e}$． …………15'

方法 2：

①当 $x=1$ 时，不等式 $1+\mathrm{e}\ge 0$ 恒成立，此时 $k\in\mathbf{R}$；

②当 $x>1$ 时，问题转化为 $k\le \dfrac{x\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}}{x-1}$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立． …………7'

令 $h(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}}{x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{(x^2-x-1)\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}}{(x-1)^2}$．

令 $\mu(x)=(x^2-x-1)\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}$，则 $\mu'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}=(x+2)(x-1)\mathrm{e}^{x-1}$．

因为 $x>1$，有 $\mu'(x)>0$，所以 $\mu(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．又因为 $h'(2)=\mu(2)=0$，所以 $x=2$ 是 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点，所以当 $1<x<2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(2)=3\mathrm{e}$，所以 $k\le 3\mathrm{e}$．

③当 $-2\le x<1$ 时，问题等价于 $k\ge \dfrac{x\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}}{x-1}$ 对任意 $x\in[-2,1)$ 恒成立．

此时 $\mu'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}=(x+2)(x-1)\mathrm{e}^{x-1}$，由于当 $-2<x<1$ 时，$\mu'(x)<0$，故 $\mu(x)$ 在区间 $[-2,1)$ 上单调递减，且 $\mu(-2)=5\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}<0$，当 $-2\le x<1$ 时，$\mu(x)<\mu(-2)<0$．

故当 $-2\le x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在区间 $[-2,1)$ 上单调递减，$k\ge h(x)_{\max}=h(-2)=\dfrac{2\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}}{3}$．

综上所述，实数 k 的取值范围为 $\dfrac{2\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}}{3}\le k\le 3\mathrm{e}$． …………15'

18．（17 分）【解析】

（1）椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． …………4’

（2）（i）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_0,y_0)$，$C(x_3,y_3)$，记 $m=\frac{x_0-4}{y_0}$，$n=\frac{x_0-1}{y_0}$，

则直线 AB 的方程：$x=my+4$，联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，消去 x 得

$(m^2+2)y^2+8my+12=0$

由韦达定理得 $y_0y_1=\frac{12}{m^2+2}$，则 $y_1=\frac{12}{(m^2+2)y_0}$．

另一方面 BG：$x=ny+1$，联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，消去 x 得 $(n^2+2)y^2+2ny-3=0$

由韦达定理得 $y_0y_3=\frac{-3}{n^2+2}$，则 $y_3=\frac{-3}{(n^2+2)y_0}$．

由于 $x_0^2+2y_0^2=4$，则 $2y_0^2=4-x_0^2$．

$\frac{|AH|}{|HC|}=\frac{|y_1|}{|y_3|}=\frac{4(n^2+2)}{m^2+2}=4\frac{(x_0-1)^2+2y_0^2}{(x_0-4)^2+2y_0^2}=4\frac{(x_0-1)^2+4-x_0^2}{(x_0-4)^2+4-y_0^2}=4\frac{5-2x_0}{20-8x_0}=1$，

$\therefore\frac{|AH|}{|AC|}=\frac{1}{2}$ ……10’

（ii）由上面的结论可知，H 为线段 AC 的中点，则 $S_{\triangle GCP}=S_{\triangle GAP}$．

进一步有 $\frac{S_{\triangle GCP}}{S_{\triangle GBP}}=\frac{S_{\triangle GAP}}{S_{\triangle GBP}}=\frac{y_1}{y_0}$．

由上面的直线 AB 与联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，消去 x 得 $(m^2+2)y^2+8my+12=0$．

由判别式 $\triangle=64m^2-48(m^2+2)=16m^2-96>0$，得 $m^2>6$．

由韦达定理得，$y_0+y_1=\frac{-8m}{m^2+2}$，$y_0y_1=\frac{12}{m^2+2}$．

$\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_0}{y_1}=\frac{{y_0}^2+{y_1}^2}{y_0y_1}=\frac{(y_0+y_1)^2-2y_0y_1}{y_0y_1}=\frac{16m^2}{3(m^2+2)}-2\in(2,\frac{10}{3})$，得 $\frac{y_1}{y_0}\in(\frac{1}{3},1)$，

故 $\frac{S_{\triangle GCP}}{S_{\triangle GBP}}=\frac{S_{\triangle GAP}}{S_{\triangle GBP}}=\frac{y_1}{y_0}$ 的取值范围是 $(\frac{1}{3},1)$． ……17’

19．（17 分）【解析】

（1）由于 $a_na_{n+1}a_{n+2}=3(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})$，　①

$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=3(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})$，　②

由②-①得，$a_{n+1}a_{n+2}(a_{n+3}-a_n)=3(a_{n+3}-a_n)$，即 $(a_{n+3}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}-3)=0$，

又 $a_na_{n+1}\neq3$，则 $a_{n+3}=a_n$，故 3 是 $\{a_n\}$ 的一个周期. ……5’

（2）由递推 $b_{n+2}=|b_{n+1}|-b_n$ 和 $b_1=-a$，$b_2=b$，得 $b_3=b+a$，$b_4=a$，$b_5=-b$，$b_6=b-a$.

（i）若 $b\geq a$，则 $b_7=2b-a$，$b_8=b$，$b_9=a-b$，$b_{10}=-a$，$b_{11}=b$.

（ii）若 $b<a$，则 $b_7=a$，$b_8=2a-b$，$b_9=a-b$，$b_{10}=-a$，$b_{11}=b$.

无论何种情况，都有 $b_1=b_{10}$， $b_2=b_{11}$.

由递推关系得，$\{b_n\}$ 会逐渐进入循环，对 $\forall n\geq 1$ 的自然数，恒有 $b_{n+9}=b_n$.

故 $T=9$ 是 $\{b_n\}$ 的一个周期. ……10'

（3）假设 $\{c_n\}$ 是周期数列，则至少存在 $m,n\in\mathbf{N}^*$，不妨设 $m>n$，使得 $c_{m+1}=c_{n+1}$.

由递推关系得 $\dfrac{3+c_m}{1-3c_m}=\dfrac{3+c_n}{1-3c_n}$，整理得 $c_m=c_n$.

再进一步得到 $c_{m-1}=c_{n-1}$，如此进行下去，最后得到 $c_{m-n+1}=c_1$.

设 $m-n=p$，则 $c_{p+1}=\dfrac{3+c_p}{1-3c_p}=c_1=3$，得 $c_p=0$，但这不可能.

接下来证明：$\forall n\in\mathbf{N}^*$， $c_n\neq 0$.

设 $3=\tan\alpha$， $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

则 $c_2=\dfrac{3+\tan\alpha}{1-3\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha$；

$c_3=\dfrac{3+c_2}{1-3c_2}=\dfrac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha}=\tan 3\alpha$；

以此类推，得到 $c_n=\tan n\alpha$， $n\in\mathbf{N}^*$.

于是有 $c_{2n}=\tan 2n\alpha=\dfrac{2c_n}{1-c_n^{\ 2}}$， (*)

若存在 $c_n=0$，不妨设 $n=2^s(2t+1)$，其中 s， t 都是非负整数，

则式(*)经过 s 步倒推后，得到 $c_{2t+1}=0$，则 $0=c_{2t+1}=\dfrac{3+c_{2t}}{1-3c_{2t}}$，得 $c_{2t}=-3$.

由于 $c_{2t}=\dfrac{2c_t}{1-c_t^{\ 2}}=-3$，得 $c_t=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}\in\complement_{\mathbf{R}}Q$，

但 $c_1=3$ 经过递推后得到 c_n 都是有理数，两者矛盾.

故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$， $c_n\neq 0$，假设不成立，故 $\{c_n\}$ 不是周期数列. ……17'