

绝密★考试结束前

## 宁波“十校”2025届高三3月联考

## 数学试题卷

考生须知：

- 本卷满分150分，考试时间120分钟；
- 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
- 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
- 考试结束后，只需上交答题卷。

## 第I卷

**一、选择题：**本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知随机变量  $X \sim N(4, 9)$ ，则  $DX =$ 
  - A. 2
  - B. 3
  - C. 4
  - D. 9
- 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | 1 < 3^x < 9\}$ ，则  $A \cap B =$ 
  - A.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$
  - B.  $\{x | 1 < x \leq 2\}$
  - C.  $\{x | 1 \leq x < 2\}$
  - D.  $\{x | 0 \leq x < 2\}$
- 在平面直角坐标系中，动点  $P(x, y)$  满足方程  $|\sqrt{(x+2\sqrt{6})^2 + y^2} - \sqrt{(x-2\sqrt{6})^2 + y^2}| = 4$ ，则动点轨迹的离心率为
  - A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$
  - B. 2
  - C.  $\sqrt{6}$
  - D.  $2\sqrt{6}$
- 已知函数  $f(x) = \frac{\ln|2a + \frac{2}{1-x}|}{x}$  为偶函数，则  $a =$ 
  - A.  $-\frac{1}{2}$
  - B.  $-\frac{1}{4}$
  - C.  $\frac{1}{4}$
  - D.  $\frac{1}{2}$
- 已知  $\tan \alpha = 3 \tan \beta$ ，则  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$  的最大值为
  - A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
  - B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
  - C. 1
  - D.  $\frac{2}{3}$
- 对空间中的非零向量  $\mathbf{a}_i$  ( $1 \leq i \leq m$ )，记向量  $\mathbf{a}_i$  与  $\mathbf{a}_j$  的夹角为  $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ ，对  $\forall i \neq j$ ， $\cos \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \leq 0$ ，则  $m$  的最大值是
  - A. 5
  - B. 6
  - C. 7
  - D. 8
- 在四边形  $ABCD$  中，已知  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ ，若  $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $AC = 6$ ，则  $BD$  的长度为
  - A. 4
  - B.  $2\sqrt{3}$
  - C. 5
  - D.  $\sqrt{14}$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , 对任意  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{5}]$ , 都有  $f(x) + f(4x - a) \leq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为  
 A. [1, 4]      B. [2, 5]      C. [3, 4]      D. [3, 5]

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

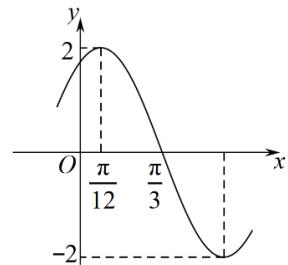
9. 在二项式  $(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2})^n$  的展开式中，前 3 项的系数成等差数列，则下列结论中正确的是  
 A.  $n=8$   
 B. 展开式中所有奇数项的二项式系数和为 128  
 C. 常数项为  $\frac{1}{16}$   
 D. 展开式中系数最大项为第 3 项和第 4 项

10. 已知函数  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 部分图像如图所示，则下列说法中正确的是

- A.  $f(x)$  的图像关于直线  $x = \frac{7\pi}{12}$  对称  
 B.  $f(x)$  的图像关于点  $(\frac{5\pi}{6}, 0)$  对称  
 C. 将函数  $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位得到函数  $f(x)$  的图像  
 D. 若方程  $f(x) = m$  在  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  上有两个不相等的实数根，则实数  $m$  的取值范围是  $[-2, -\sqrt{3}]$

11. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $P$  为面  $A_1ADD_1$  内以  $AD$  为直径的半圆上的动点，则

- A.  $BP$  的最大值为  $2\sqrt{2}$   
 B.  $BP$  与平面  $ABCD$  所成角的最大值的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$   
 C.  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD_1}$  的最小值为  $-2$   
 D. 二面角  $P - B_1D_1 - A_1$  的最小值的正切值为  $\frac{3}{4}\sqrt{2}$



## 第 II 卷

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知复数  $z$  满足  $|z - 1 + 2i| = 3$ , 则  $|z|$  的最小值为  $\boxed{\text{▲}}$ .  
 13. 已知点  $F$  为抛物线  $\Gamma: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点，过  $F$  的直线  $l$  (倾斜角为锐角) 与  $\Gamma$  交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在第一象限)，交其准线于点  $C$ ，过点  $A$  作准线的垂线，垂足为  $D$ ，若  $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$ ，则  $\tan \angle AFD = \boxed{\text{▲}}$ .  
 14. 生活中经常会统计一列数据中出现不同数据的个数. 设  $c_k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 对于有序数组  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ , 记  $R(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  为  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  中所包含的不同整数的个数，比如：  
 $R(1, 1, 2, 2, 2) = 2$ ， $R(2, 1, 3, 4, 4) = 4$ . 当  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  取遍所有的  $5^5$  个有序数组时， $R(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  的总和为  $\boxed{\text{▲}}$ .

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$ .

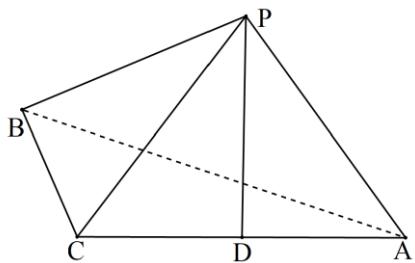
(1) 化简  $f(x)$ ，并求  $f(-\frac{\pi}{12})$  的值； 浙考神墙750

(2) 在锐角  $\triangle ABC$  中，内角  $A$  满足  $f(A) = \frac{2}{3}$ ，求  $\cos 2A$  的值.

16. (15 分) 在三棱锥  $P-ABC$  中， $PA = BC = \sqrt{2}$ ， $PB = AC = 2$ ， $AB = \sqrt{6}$ ， $D$  为  $AC$  的中点.

(1) 求证： $AB \perp PD$ ；

(2) 若二面角  $P-AB-C$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$ ，求直线  $AC$  与平面  $PBC$  所成的角.



17. (15 分) 已知函数  $f(x) = xe^{x-1} - k(x-1) + e$ ， $k \in \mathbf{R}$ ， $e = 2.71828 \cdots$  为自然对数的底数.

(1) 当  $k = e$  时，求函数  $f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程；

(2) 若不等式  $f(x) \geq 0$  对任意  $x \in [-2, +\infty)$  恒成立，求  $k$  的取值范围.

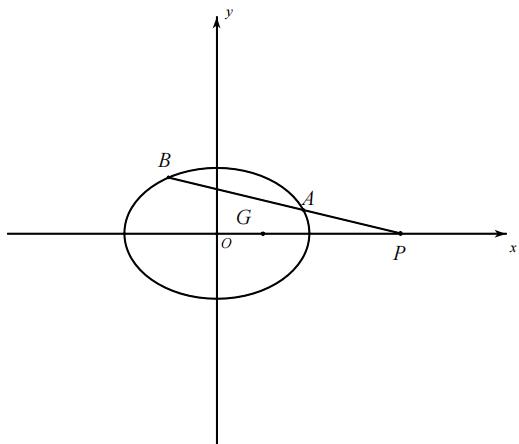
18. (17分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点  $(2, 0)$ .

(1) 求椭圆  $E$  的标准方程；

(2) 已知点  $P(4, 0), G(1, 0)$ ，过点  $P$  作直线  $l$  (不与  $x$  轴重合) 交椭圆  $E$  于  $A, B$ ，连接  $BG$  交  $E$  于点  $C$ ，连接  $AC$ ，直线  $AC$  与  $x$  轴交于点  $H$ .

(i) 求  $\frac{|AH|}{|AC|}$  的值；

(ii) 若点  $A$  在线段  $BP$  上，求  $\frac{S_{\triangle GCP}}{S_{\triangle GBP}}$  的取值范围.



19. (17分) 对于数列  $\{a_n\}$ ，若存在正整数  $T$ ，使得从数列  $\{a_n\}$  的第  $N$  项起，恒有  $a_{n+T} = a_n (n \geq N)$  成立，则称数列  $\{a_n\}$  为第  $N$  项起的周期为  $T$  的周期数列。

(1) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n a_{n+1} a_{n+2} = 3(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$ ，且  $a_n a_{n+1} \neq 3$ ，证明：3 是  $\{a_n\}$  的一个周期.

(2) 已知数列  $\{b_n\}$ ， $b_1 = -a$ ， $b_2 = b$  (其中  $a, b \geq 0$ ， $a, b$  不全为 0)， $b_{n+2} = |b_{n+1}| - b_n (n \geq 1)$ ，证明：存在正整数  $N$ ，使得  $n \geq N$  时， $b_{n+T} = b_n (n \geq N)$  成立，并求出满足条件的一个周期  $T$ .

(3) 已知数列  $\{c_n\}$ ， $c_1 = 3$ ， $c_{n+1} = \frac{3+c_n}{1-3c_n}$ ，求证： $\{c_n\}$  不是周期数列.

命题：慈溪中学 陈红冲、苗孟义

审题：宁海中学 吕珊娟

宁波中学 竺佳菁