Simetria conforme em $1+1$ dimensões

L. N. Queiroz Xavier

27 de junho de 2020

Aqui, daremos uma breve introdução à teoria conforme de campos, com foco no caso $1+1$-dimensional. Para mais detalhes, sugerimos as referências [1, 2].

1 Simetrias em teorias de campos

2 Transformações conformes em duas dimensões

Considere o espaço Euclidiano em $1+1$ dimensões, com coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1) = (t, x)$ e métrica $h^{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Uma transformação de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu = \varphi(x^\mu)$ é dita conforme se a métrica transformada $h'_{\mu\nu}$ difere da original apenas por um fator de escala local $\Lambda(x^\mu)$, i.e.,

$$h'_{\mu\nu} = \Lambda(x^\mu) h_{\mu\nu}, \tag{2.0.1}$$

isto é,

$$h_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \Lambda(x^\mu) h_{\mu\nu}. \tag{2.0.2}$$

Por exemplo, no $\mathbb{R}^n$, uma transformação de coordenadas é conforme se muda apenas a escala de distância entre os vetores em cada ponto, não alterando o ângulo relativo entre eles.

Vamos determinar a forma geral de uma transformação conforme infinitesimal em $1+1$ dimensões. Considere

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x^\mu),$$

onde em cada ponto x^μ, $\epsilon^\mu(x^\mu) << 1$. Da (2.0.2), temos que

$$h_{\rho\sigma}(\delta^\rho_\mu + \partial_\mu \epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\mu + \partial_\nu \epsilon^\sigma) = \Lambda(x^\mu) h_{\mu\nu}, \tag{2.0.3}$$

ou seja, desprezando termos de ordem $O(\epsilon^2)$,

$$h_{\mu\nu} + \partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu = \Lambda(x^\mu) h_{\mu\nu}, \tag{2.0.4}$$

isto é, ϵ deve ser uma função tal que

$$\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu = (\Lambda(x^\mu) - 1) h_{\mu\nu}. \tag{2.0.5}$$

Em componentes,

$$\partial_0 \epsilon_0 = \frac{1}{2}(\Lambda(x^\mu) - 1) = \partial_1 \epsilon_1, \tag{2.0.6}$$

$$\partial_0 \epsilon_1 + \partial_1 \epsilon_0 = 0, \tag{2.0.7}$$

ou seja,

$$\partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1, \ \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0. \tag{2.0.8}$$

Se definirmos então uma função $\epsilon = \epsilon(z)$ de uma variável complexa $z = x^0 + ix^1$ de modo que

$$\epsilon(z) = \epsilon_0(x^0, x^1) + i\epsilon_1(x^0, x^1),$$

temos que $\epsilon(z)$ é uma *função analítica* (em algum conjunto aberto), pois suas componentes ϵ_0 e ϵ_1 satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann* (2.0.8). Ou seja, passando para variáveis complexas, qualquer transformação de coordenadas $z \to w = f(z)$, onde $f(z) = z + \epsilon(z)$ é uma função analítica em algum conjunto aberto, é uma transformação conforme.

Portanto, a partir de agora trabalharemos em coordenadas complexas. Para que a transformação de (x^0, x^1) em variáveis complexas seja uma mudança de coordenadas bem definida, devemos considerar x^0, x^1 como variáveis complexas. Desse modo, o mapa $x^0, x^1 \to z = x^0 + ix^1, \bar{z} = x^0 - ix^1$ é apenas uma mudança de coordenadas em $\mathbb{C}^2$ ($\bar{z}$ não é o complexo conjugado de z, mas apenas uma coordenada independente). No entanto, ao final dos cálculos, devemos selecionar o subespaço físico bidimensional, definido pela condição $\bar{z} = z^*$, onde z^* é o complexo conjugado de z. Essa equação define a chamada *superfície real.*

A transformação conforme $z \to f(z)$ é analítica em algum conjunto aberto, mas é razoável assumir que ela possui polos isolados fora desse conjunto. Podemos então expandir $\epsilon(z)$ em uma série de Laurent em torno do ponto $z = 0$, i.e.,

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1},$$

onde $\epsilon_n << 1$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ e escrevemos a potência z^{n+1} por convenção. O mesmo acontece com o mapa $\bar{z} \to \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$, onde

$$\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}.$$

Considere um campo escalar $\phi = \phi(z, \bar{z})$ definido em $\mathbb{C}^2$. Uma transformação conforme $(z, \bar{z}) \to (z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}))$ transforma o campo $\phi \to \phi'$ de modo que

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})).$$

Como a transformação é infinitesimal, temos que

$$\phi(z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})) = \phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z)\partial_z\phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\phi(z, \bar{z}).$$

Daí,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\epsilon_n z^{n+1}\partial_z + \bar{\epsilon}_n \bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}\right] \phi(z, \bar{z}),$$

ou seja,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left[1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\epsilon_n l_n + \bar{\epsilon}_n \bar{l}_n\right)\right] \phi(z, \bar{z}),$$

onde

$$l_n = z^{n+1}\partial_z, \ \bar{l}_n = \bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \tag{2.0.9}$$

são *geradores* de transformações conformes infinitesimais para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esses operadores satisfazem a álgebra

$$[l_n, l_m] = (m - n)l_{n+m}, \tag{2.0.10}$$
$$[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (m - n)\bar{l}_{n+m}, \tag{2.0.11}$$
$$[l_n, \bar{l}_m] = 0, \tag{2.0.12}$$

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$, que é igual a duas cópias da chamada *Álgebra de Witt*. De fato, temos que, dado um mapa $\xi = \xi(z)$ diferenciável,

$$\begin{aligned}(l_n l_m - l_m l_n)\xi(z) &= z^{n+1}\partial_z(z^{m+1}\partial_z\xi(z)) - z^{m+1}\partial_z(z^{n+1}\partial z\xi(z)) \\ &= (m + 1)z^{m+n+1}\partial_z\xi(z) - (n + 1)z^{m+n+1}\partial_z\xi(z) \\ &= (m - n)z^{m+n+1}\partial_z\xi(z) \\ &= (m - n)l_{m+n}\xi(z),\end{aligned}$$

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$. Trocando $z \to \bar{z}$, obtemos a (2.0.11), enquanto que a (2.0.12) é trivial, pois z e $\bar{z}$ são independentes. Como existem infinitos geradores l_n ($\bar{l}_n$), as transformações conformes em duas dimensões formam uma *álgebra de Lie de dimensão infinita*. Isso significa que um sistema com simetria conforme local deve satisfazer tantas condições que seu comportamento pode ser completamente determinado praticamente apenas por argumentos de simetria. Em breve discutiremos mais sobre esse fato.

Agora, note que para alguns valores de $n \in \mathbb{Z}$, os geradores l_n não são bem definidos em $z = 0$. Por exemplo, $l_{-2} = z^{-1}\partial_z$ não é definido no ponto $z = 0$. Para remediar isso, incluímos um ponto no infinito no plano complexo $\mathbb{C}$, o que significa que consideramos os geradores definidos na *esfera de Riemann* $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que é a *compactificação conforme* do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$. Assim, no nosso exemplo, o gerador $l_{-2} = \infty$ na esfera de Riemann. No entanto, ainda temos um problema: um número infinito de geradores, quando definidos no ponto $z = 0$, levam um campo qualquer $\phi(z)$ ao mesmo ponto ∞. De fato, todos os geradores l_n com $n < -1$ em $z = 0$ levam $\phi(z)$ ao ponto no infinito. Isso nos leva a crer que apenas um número pequeno de transformações conformes são globalmente definidas na esfera de Riemann.

Para determinar quais são as transformações conformes globalmente definidas, vamos relembrar que o isomorfismo $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é obtido através da projeção estereográfica de $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 | X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ no subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido pelo conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, i.e., o plano xy. O polo norte de S^2, que é o ponto $N = (0, 0, 1)$, é mapeado ao ponto no infinito, e o plano xy é identificado com o plano complexo $\mathbb{C}$. A projeção estereográfica de S^2 no plano estabelece que suas linhas de longitude correspondem a linhas retas que passam pela origem em $\mathbb{C}$, o que nos permite também identificar a esfera de Riemann com a *linha projetiva complexa* $\mathbb{C}P^1$.

A linha projetiva complexa $\mathbb{C}P^1$ é definida por meio da seguinte relação de equivalência em $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$: para $(\xi, \eta), (\xi', \eta') \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$,

$$(\xi, \eta) \sim (\xi', \eta') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \text{ tal que } (\xi, \eta) = (\lambda\xi', \lambda\eta').$$

Podemos diferenciar entre duas cartas de coordenadas: na carta onde $\xi \neq 0$, $(\xi, \eta) = \xi(1, w) \sim (1, w)$, onde $w = \eta/\xi$, e na carta onde $\eta \neq 0$, $(\xi, \eta) = \eta(z, 1) \sim (z, 1)$, onde $z = \xi/\eta$. Ou seja, temos uma carta com coordenada $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e outra com coordenada $w \in \mathbb{C} - \{0\}$. Na intersecção entre as duas cartas, devemos ter que $z = 1/w$. Assim, considerando os geradores $\{l_n\}$ na coordenada w, temos que

$$l_n = \frac{1}{w^{n+1}} \frac{\partial w}{\partial z} \partial_w = w^{-(n+1)}(-w^2)\partial_w = -w^{1-n}\partial_w,$$

e todos os operadores l_n com $n > 1$ são singulares em $w = 0$, que é o mesmo que dizer que tais operadores são singulares em $z = \infty$. Isso significa que os operadores globalmente bem-definidos são tais que $-1 \leq n \leq 1$, i.e., o conjunto

$$\{l_{-1} = \partial_z, l_0 = z\partial_z, l_1 = z^2\partial_z\}$$

gera transformações conformes *globais*. O mesmo vale para $\bar{l}_n$. Resta ver qual o efeito dessas transformações globais nos campos $\phi(z, \bar{z})$. É fácil ver que os geradors $l_{-1} = \partial_z$ e $\bar{l}_{-1} = \partial_{\bar{z}}$ geram translações infinitesimais no plano complexo, isto é, estão associados à transformação

$$\phi(z, \bar{z}) \to \phi(z + b, \bar{z} + \bar{b}),$$

onde $b = \epsilon_{-1}$ e $\bar{b} = \bar{\epsilon}_{-1}$ são constantes infinitesimais. Do mesmo modo, é fácil ver que $l_0 = z\partial_z$ e $\bar{l}_0 = \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ geram *dilatações* no plano complexo, i.e., transformações da forma

$$\phi(z, \bar{z}) \to \phi(z + \epsilon_0 z, \bar{z} + \bar{\epsilon}_0 \bar{z}) = \phi\left(az, \bar{a}\bar{z}\right),$$

onde $a = 1 + \epsilon_0$, $\bar{a} = 1 + \bar{\epsilon}_0$ e $\epsilon_0, \bar{\epsilon}_0 << 1$. Dilatações no plano complexo correspondem a *mudanças de escala* e *rotações* na superfície real $\bar{z} = z^*$, que é onde o sistema físico realmente vive. De fato, temos que, como $z = x^0 + ix^1$ e $\bar{z} = x^0 - ix^1$,

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1),\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1).$$

Introduzindo coordenadas polares $z = re^{i\theta}$ e $\bar{z} = z^* = re^{-i\theta}$, como $r = \sqrt{(x^0)^2 + (x^1)^2}$ e $\theta = \arctan(x^1/x^0)$, segue que

$$\partial_0 = \frac{\partial r}{\partial x^0}\partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x^0}\partial_\theta = \frac{x^0}{r}\partial_r - \frac{x^1}{r^2}\partial_\theta,$$

e, de forma semelhante,

$$\partial_1 = \frac{x^1}{r}\partial_r + \frac{x^0}{r^2}\partial_\theta.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\partial_z &= \frac{1}{2}\left((x^0 - ix^1)\frac{1}{r}\partial_r - i(x^0 - ix^1)\frac{1}{r^2}\partial_\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{z}}{r}\partial_r - i\frac{\bar{z}}{r^2}\partial_\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-i\theta}\left(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta\right),
\end{aligned}$$

e do mesmo modo,

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta\right).$$

Nessas coordenadas, os operadores l_0 e $\bar{l}_0$ são

$$l_0 = z\partial_z = \frac{r}{2}\left(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta\right)$$

e

$$\bar{l}_0 = \bar{z}\partial_{\bar{z}} = \frac{r}{2}\left(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta\right).$$

Segue que,

$$l_0 + \bar{l}_0 = r\partial_r$$

gera dilatações, i.e., mudanças de escala no espaço real bidimensional, enquanto

$$i(l_0 - \bar{l}_0) = \partial_\theta$$

gera rotações no espaço real.

Agora, a transformação gerada por l_1 ($\bar{l}_1$) é tal que $z \to z + \epsilon_1 z^2$ ($\bar{z} \to \bar{z} + \bar{\epsilon}_1\bar{z}^2$), onde ϵ_1 ($\bar{\epsilon}_1$) é uma constante infinitesimal. Seja $c = -\epsilon_1$ ($\bar{c} = -\epsilon_1$). Note que expandindo $\frac{z}{cz+1}$ até a primeira ordem em c, obtemos a transformação gerada por l_1. O mapa $z \to \frac{z}{cz+1}$ é chamado *transformação conforme especial*. Nas coordenadas $w = 1/z$, essa transformação corresponde a levar w em $\frac{1}{w+c}$, isto é, primeiro efetuamos uma translação $w \to w + c$ no plano complexo e depois levamos $w + c \to \frac{(w+c)^*}{|w+c|^2}$, que é uma reflexão com relação ao eixo real e uma mudança de escala. Essa transformação é ilustrada na figura **??**.

Vamos então efetuar uma transformação conforme arbitrária gerada por $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$. Primeiro temos uma translação por $b' \in \mathbb{C}$

$$z \to z + b',$$

gerada por l_{-1}. Em seguida temos uma dilatação por $a \in \mathbb{C}$

$$z + b' \to a(z + b') = az + b,$$

gerada por l_0, onde $b = ab'$. Por último temos uma transformação conforme especial com parâmetro $c' \in \mathbb{C}$

$$az + b \to \frac{az + b}{c'(az + b) + 1} = \frac{az + b}{cz + d},$$

gerada por l_1, onde $c = c'a$ e $d = c'b + 1$. Ou seja, qualquer transformação conforme global é tal que

$$z \to z' = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{2.0.13}$$

Na esfera de Riemann, o mapa $f(z)$ é analítico. Para que seja invertível, o teorema da função inversa exige que devemos ter $f'(z) \neq 0$ para qualquer $z \in S^2$, isto é,

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz+d)^2} \neq 0,$$

o que implica que as constantes a, b, c e d devem ser tais que $ad - bc \neq 0$. Podemos então escolher a, b, c e d de modo que $ad - bc = 1$. Essa condição implica que o mapa $z \to f(z)$ é conforme no sentido usual, i.e., preserva o ângulo entre duas curvas arbitrárias que terminam no mesmo ponto no plano complexo. Mais ainda, a (2.0.13) é chamada de *transformação de Möbius*, e sua inversa é também uma transformação de Möbius. De fato, seja $w = f(z)$. Temos que

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} = \frac{a'w + b'}{c'w + d'},$$

onde $a' = -d$, $b' = b$, $c' = c$ e $d' = -a$. Temos ainda que a composição de duas transformações de Möbius resulta, por sua vez, em uma transformação de Möbius. De fato, se $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ e $g(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$,

$$g(f(z)) = \frac{e\frac{az+b}{cz+d} + f}{g\frac{az+b}{cz+d} + h} = \frac{\frac{eaz+eb+cfz+df}{cz+d}}{\frac{agz+bg+chz+dh}{cz+d}} = \frac{(ae+cf)z + be + df}{(ag+ch)z + bg + dh} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'},$$

onde $a' = ae + cf$, $b' = be + df$, $c' = ag + ch$ e $d' = bg + dh$. Note que, se construirmos as matrizes dos coeficientes das transformações $z \to f(z)$ e $z \to g(z)$ como sendo

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \tag{2.0.14}$$

os coeficientes da transformação composta $z \to (g \circ f)(z)$ são os coeficientes da matriz produto

$$GF = \begin{pmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix}. \tag{2.0.15}$$

Como $\det(F) = ad - bc = 1$ e o mesmo acontece com G e GF, tais matrizes são invertíveis e portanto fazem parte do grupo linear $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Mais ainda, a transformação (2.0.13) é invariante sob a mudança $(a, b, c, d) \to -(a, b, c, d)$, e portanto existe uma redundância na escolha da matriz F, pois podemos muito bem tomar $-F$ como a matriz da transformação linear. Isso significa que as transformações de Möbius estão em uma correspondência de um para dois com o grupo das matrizes complexas 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, tais que $\det(A) = ad - bc = 1$. Esse grupo é conhecido como o *grupo especial linear* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Para tornar essa correspondência um para um, consideramos a relação de equivalência $A \sim B \Leftrightarrow A = -B$ nesse grupo e tomamos o grupo quociente $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\sim\, = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ como o grupo das transformações conformes globais na esfera de Riemann S^2.

3 Campos primários

Sistemas físicos costumam apresentar simetria conforme quando estão na vizinhança do ponto crítico de uma transição de fase de segunda ordem. Vamos considerar uma situação onde a invariância conforme pode ser facilmente observada: o ponto crítico do modelo de Ising em duas dimensões. Tal ponto marca a transição de uma fase ordenada para uma fase desordenada, ou vice-versa. Partindo da fase desordenada, ao nos aproximarmos do ponto de transição, o sistema começa a apresentar um chamado *comportamento de escala*, onde não há diferença, em termos de alinhamento dos spins, entre uma pequena vizinhança de um ponto e uma região macroscópica do sistema. Em ambas, os spins estão alinhados na mesma direção. Assim, o sistema manifesta uma invariância por transformações de escala. É fácil ver que a magnetização média $m(\sigma)$ de uma certa região σ está relacionada com a magnetização média $m(\lambda\sigma)$ de uma região dilatada $\lambda\sigma$, onde $\lambda\sigma = \{\lambda x | x \in \sigma\}$ apenas por um fator de escala, isto é, $m(\lambda\sigma) = \lambda^{\Delta} m(\sigma)$, onde Δ é a chamada *dimensão de escala* da magnetização. Como m é alguma função de correlação dos campos de spin $s(x)$, segue que os próprios campos devem ter algum comportamento de escala, i.e., $s(\lambda x) = \lambda^{\delta} s(x)$.

A discussão anterior nos induz a assumir que qualquer teoria conforme possui campos especiais, com regras de transformação particulares que fazem com que os observáveis obtidos através das funções de correlação entre esses campos tenham um comportamento de escala, de modo que, por exemplo, eles possam ser usados como parâmetros de ordem da transição de fase que a teoria visa descrever. Assim, definimos que qualquer campo $\phi(z, \bar{z})$ que, sob uma transformação conforme $(z,\bar{z}) \to (f(z), \bar{f}(\bar{z}))$, se transforma como

$$\phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = (\partial_z f(z))^{-h} \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}} \phi(z,\bar{z}), \tag{3.0.1}$$

é um *campo primário*. As constantes $h, \bar{h}$ são as *dimensões conformes* do campo em questão. Se a (3.0.1) vale apenas para transformações globais ($f, \bar{f} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$), o campo ϕ é chamado *quasi-primário*. Note que campos primários se transformam, sob transformações conformes, de forma análoga a tensores sob mudanças de coordenadas, o que indica um caráter *invariante* dos campos primários. De fato, a (3.0.1) equivale à afirmação de que a forma $\phi(z,\bar{z}) dz^h d\bar{z}^{\bar{h}}$ é invariante sob mapas analíticos $(z,\bar{z}) \to (f(z), \bar{f}(\bar{z}))$. Note ainda que a (3.0.1) equivale a dizer que o campo avaliado nos pontos transformados difere do campo original apenas por um fator de escala, no mesmo espírito da discussão sobre o modelo de Ising crítico realizada acima.

Vamos mostrar que as funções de correlação de campos primários em uma teoria com invariância conforme de fato apresentam um comportamento de escala sob transformações conformes. Considere uma teoria definida pela ação Euclidiana $S[\phi]$, que é invariante sob transformações conformes. Uma função de n-pontos dos campos ϕ_i, $i = 1, ..., n$, é dada por

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1) ... \phi_n(z_n,\bar{z}_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int D[\phi] e^{-S[\phi]} \phi_1(z_1,\bar{z}_1) ... \phi_n(z_n,\bar{z}_n), \tag{3.0.2}$$

onde Z é a função de partição $Z = \int D[\phi] e^{-S[\phi]}$. Assumimos aqui que a medida de integração $D[\phi]$ também é invariante sob transformações conformes. Sejam $(z_i, \bar{z}_i) \to (f(z_i), \bar{f}(\bar{z}_i))$, $i = 1, ..., n$, transformações conformes. A função de n-pontos dos campos transformados é

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_1'(f(z_1), \bar{f}(\bar{z}_1)) ... \phi_n'(f(z_n), \bar{f}(\bar{z}_n)) \rangle \\
&= \frac{1}{Z} \int D[\phi] e^{-S[\phi]} \phi_1'(f(z_1), \bar{f}(\bar{z}_1)) ... \phi_n'(f(z_n), \bar{f}(\bar{z}_n)) \\
&= \frac{1}{Z} \int D[\phi] e^{-S[\phi]} \left(\partial_z f(z)\right)^{-h_1}_{z=z_1} \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}_1}_{\bar{z}=\bar{z}_1} \phi_1(z_1, \bar{z_1}) ... \\
&\quad ... \left(\partial_z f(z)\right)^{-h_n}_{z=z_n} \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}_n}_{\bar{z}=\bar{z}_n} \phi_n(z_n, \bar{z_n}) \\
&= \left(\partial_z f(z)\right)^{-h_1}_{z=z_1} \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}_1}_{\bar{z}=\bar{z}_1} ... \left(\partial_z f(z)\right)^{-h_n}_{z=z_n} \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}_n}_{\bar{z}=\bar{z}_n} \\
&\quad \langle \phi_1(z_1, \bar{z_1}) ... \phi_n(z_n, \bar{z_n}) \rangle ,
\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

ou seja, a função de correlação dos campos transformados é apenas uma mudança de escala da função de n-pontos dos campos originais. Temos então exatamente o comportamento que gostaríamos intuitivamente.

Mais ainda, a forma das funções de correlação de 2 e 3-pontos de campos *quasi-primários* podem ser completamente determinadas utilizando-se apenas a simetria conforme. De fato, temos que a função de 2-pontos entre dois campos quasi-primários ϕ_1 e ϕ_2 é dada por

$$O(z,w;\bar{z},\bar{w}) = \langle \phi_1(z,\bar{z})\phi_2(w,\bar{w})\rangle \,, \tag{3.0.4}$$

onde separamos os setores holomórficos e anti-holomórficos porque sabemos que eles são independentes. Tal função depende dos parâmetros presentes na ação, o que ignoramos aqui para focar apenas em como O depende da posição dos campos. Então, sob transformações de Möbius $(z,\bar{z}) \to (f(z),\bar{f}(\bar{z}))$, $(w,\bar{w}) \to (f(w),\bar{f}(\bar{w}))$, a função de 2-pontos se transforma como

$$\begin{aligned} &O'(f(z),f(w);\bar{f}(\bar{z}),\bar{f}(\bar{w})) \\ &= (\partial_u f(u))^{-h_1}_{u=z}\left(\partial_{\bar{u}}\bar{f}(\bar{u})\right)^{-\bar{h}_1}_{\bar{u}=\bar{z}}(\partial_v f(v))^{-h_2}_{v=w}\left(\partial_{\bar{v}}\bar{f}(\bar{v})\right)^{-\bar{h}_2}_{\bar{v}=\bar{w}} O\left(z,w;\bar{z},\bar{w}\right). \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

Se a transformação de Möbius for uma translação $z \to f(z) = z+a$, $a \in \mathbb{C}$, segue que $\partial_z f(z) = 1$, o que implica que

$$O'(z+a,w+a;\bar{z}+\bar{a},\bar{w}+\bar{a}) = O(z,w;\bar{z},\bar{w}),$$

ou seja, a função transformada é igual à função original, o que significa que a função de correlação é invariante por translações. Logo, deve depender apenas da diferença entre as coordenadas z e w, i.e., $O = O(z-w;\bar{z}-\bar{w})$. Agora, se a transformação de Möbius for uma dilatação no plano complexo $z \to f(z) = bz$, $b \in \mathbb{C}$, segue que $\partial_z f(z) = b$, o que implica que

$$O'(b(z-w);\bar{b}(\bar{z}-\bar{w})) = b^{-h_1-h_2}\bar{b}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2}O\left(z-w;\bar{z}-\bar{w}\right). \tag{3.0.6}$$

Isso significa que a função transformada é igual à função original, a menos de um fator de escala. Assumindo que a função seja analítica em uma vizinhança de $(z-w,\bar{z}-\bar{w}) = (0,0)$, podemos expandi-la em uma série de Laurent em torno do ponto $(0,0)$,

$$O(z-w;\bar{z}-\bar{w}) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(z-w)^m(\bar{z}-\bar{w})^n,$$

e então devemos ter que, para todo $m,n \in \mathbb{Z}$,

$$a'_{m,n}b^m\bar{b}^n(z-w)^m(\bar{z}-\bar{w})^n = a_{m,n}b^{-h_1-h_2}\bar{b}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2}(z-w)^m(\bar{z}-\bar{w})^n.$$

No entanto, como a função transformada é igual à original, a menos apenas de um fator de escala, devemos ter que $a'_{m,n} = a_{m,n}$. Isso só é válido para

$m = -h_1 - h_2$ e $n = -\bar{h}_1 - \bar{h}_2$. Logo, o único coeficiente diferente de zero da série de Laurent é $a_{m,n} = a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}$, e temos então que

$$O(z-w;\bar{z}-\bar{w}) = \frac{a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}}{(z-w)^{h_1+h_2}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}}. \tag{3.0.7}$$

A constante $a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}$ depende apenas dos parâmetros da ação e das dimensões conformes dos campos envolvidos. Assumimos que $a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}$ não muda sob transformações conformes.

Finalmente, se a transformação de Möbius for uma transformação conforme especial $z \to f(z) = z/(cz+1)$, $c \in \mathbb{C}$, temos que $\partial_z f(z) = 1/(cz+1)^2$ e daí

$$\begin{aligned} &O'\left(\frac{z-w}{(cz+1)(cw+1)};\frac{\bar{z}-\bar{w}}{(\bar{c}\bar{z}+1)(\bar{c}\bar{w}+1)}\right) \\ &= (cz+1)^{2h_1}(cw+1)^{2h_2}(\bar{c}\bar{z}+1)^{2\bar{h}_1}(\bar{c}\bar{w}+1)^{2\bar{h}_2}O(z-w;\bar{z}-\bar{w}). \end{aligned} \tag{3.0.8}$$

Da (3.0.7), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}}{(z-w)^{h_1+h_2}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}}(cz+1)^{h_1+h_2}(cw+1)^{h_1+h_2}(\bar{c}\bar{z}+1)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}(\bar{c}\bar{w}+1)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2} \\ &= \frac{a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)}}{(z-w)^{h_1+h_2}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}}(cz+1)^{2h_1}(cw+1)^{2h_2}(\bar{c}\bar{z}+1)^{2\bar{h}_1}(\bar{c}\bar{w}+1)^{2\bar{h}_2}. \end{aligned}$$

Esta é uma equação cujas incógnitas são $h_i, \bar{h}_i$, $i = 1, 2$. Suas soluções são quaisquer $h_i, \bar{h}_i$, $i = 1, 2$, tais que $a_{-(h_1+h_2),-(\bar{h}_1+\bar{h}_2)} = 0$ ou $h_1 = h_2$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$. Assim, existe correlação apenas entre campos que partilham a mesma dimensão conforme. Resumindo, a função de 2-pontos entre dois campos quasi-primários $\phi_1(z,\bar{z})$ e $\phi_2(w,\bar{w})$, de dimensões conformes h_1 e h_2, respectivamente, é dada por

$$\langle \phi_1(z,\bar{z})\phi_2(w,\bar{w})\rangle = \begin{cases} \frac{d_{12}}{(z-w)^{2h}(\bar{z}-\bar{w})^{2\bar{h}}}, & \text{se} \quad h_1 = h_2 = h, \\ 0, & \text{se} \quad h_1 \neq h_2. \end{cases} \tag{3.0.9}$$

Vale ressaltar que, apenas assumindo a invariância conforme do sistema e a existência de campos com um comportamento de escala, conseguimos encontrar a forma exata como um observável depende da posição, o que determina completamente seu comportamento de escala. No exemplo do modelo de Ising crítico, a função de correlação entre spins em pontos muito distantes nos dá uma medida da magnetização do sistema, que, como argumentamos anteriormente, deve de fato possuir um comportamento de escala no ponto crítico de uma transição de fase. Assim, os spins seriam campos quasi-primários e a magnetização seria dada pela (3.0.9). A constante d_{12} depende dos parâmetros da ação da teoria e das dimensões conformes dos campos envolvidos.

A simetria conforme também fixa a função de 3-pontos entre campos quasi-primários. De fato, sejam $\phi_1(z,\bar{z})$, $\phi_2(w,\bar{w})$ e $\phi_3(v,\bar{v})$ campos quasi-primários de dimensões conformes $(h_1,\bar{h}_1)$, $(h_2,\bar{h}_2)$ e $(h_3,\bar{h}_3)$, respectivamente. Definindo a função de 3-pontos como

$$O(z,w,v;\bar{z},\bar{w},\bar{v}) = \langle \phi_1(z,\bar{z})\phi_2(w,\bar{w})\phi_3(v,\bar{v})\rangle\,, \tag{3.0.10}$$

temos que, sob transformações de Möbius

$$(z,w,v;\bar{z},\bar{w},\bar{v}) \to (f(z),f(w),f(v);\bar{f}(\bar{z}),\bar{f}(\bar{w}),\bar{f}(\bar{v})),$$

a função O se transforma como

$$\begin{aligned}
&O'(f(z),f(w),f(v);\bar{f}(\bar{z}),\bar{f}(\bar{w}),\bar{f}(\bar{v}))\\
&= (\partial_u f(u))^{-h_1}_{u=z}\left(\partial_{\bar{u}}\bar{f}(\bar{u})\right)^{-\bar{h}_1}_{\bar{u}=\bar{z}}(\partial_u f(u))^{-h_2}_{u=w}\left(\partial_{\bar{u}}\bar{f}(\bar{u})\right)^{-\bar{h}_2}_{\bar{u}=\bar{w}}\\
&\quad (\partial_u f(u))^{-h_3}_{u=v}\left(\partial_{\bar{u}}\bar{f}(\bar{u})\right)^{-\bar{h}_3}_{\bar{u}=\bar{v}} O\left(z,w,v;\bar{z},\bar{w},\bar{v}\right).
\end{aligned}$$

Então, sob translações $z \to z+a$, $a \in \mathbb{C}$, temos que

$$O'(z+a,w+a,v+a;\bar{z}+\bar{a},\bar{w}+\bar{a},\bar{v}+\bar{a}) = O(z,w,v;\bar{z},\bar{w},\bar{v}),$$

o que significa que O é invariante sob translações, e depende apenas das diferenças entre as coordenadas, i.e., $O = O(z-w,w-v,z-v;\bar{z}-\bar{w},\bar{w}-\bar{v},\bar{z}-\bar{v})$. Agora, sob dilatações $z \to bz$, $b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
&O'(b(z-w),b(w-v),b(z-v);\bar{b}(\bar{z}-\bar{w}),\bar{b}(\bar{w}-\bar{v}),\bar{b}(\bar{z}-\bar{v}))\\
&= b^{h_1+h_2+h_3}\bar{b}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}O(z-w,w-v,z-v;\bar{z}-\bar{w},\bar{w}-\bar{v},\bar{z}-\bar{v}).
\end{aligned}$$

Assumindo que a função é analítica em uma vizinhança de $z-w=w-v=\bar{z}-\bar{w}=\bar{w}-\bar{v}=0$, expandimos os dois lados da equação em uma série de Laurent em torno do ponto zero:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}\in\mathbb{Z}} a_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}}(z-w)^m(w-v)^n(z-v)^p(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{m}}(\bar{w}-\bar{v})^{\bar{n}}(\bar{z}-\bar{v})^{\bar{p}}\\
&= \sum_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}\in\mathbb{Z}} a_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}}(z-w)^m(w-v)^n(z-v)^p(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{m}}(\bar{w}-\bar{v})^{\bar{n}}(\bar{z}-\bar{v})^{\bar{p}}\\
&\qquad\times b^{h_1+h_2+h_3}\bar{b}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}b^{m+n+p}\bar{b}^{\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}},
\end{aligned}$$

e a igualdade se verifica se o único coeficiente não nulo $a_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}}$ da soma à direita for $a_{m,n,p,\bar{m},\bar{n},\bar{p}} = a_{r,s,q,\bar{r},\bar{s},\bar{q}}$ tal que $r+s+q = -h_1-h_2-h_3$ e $\bar{r}+\bar{s}+\bar{q} = -\bar{h}_1-\bar{h}_2-\bar{h}_3$. Assim,

$$O(z-w,w-v,z-v;\bar{z}-\bar{w},\bar{w}-\bar{v},\bar{z}-\bar{v}) = a_{r,s,q,\bar{r},\bar{s},\bar{q}}(z-w)^r(w-v)^s(z-v)^q$$

$$\times(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{r}}(\bar{w}-\bar{v})^{\bar{s}}(\bar{z}-\bar{v})^{\bar{q}},$$

onde $r+s+q=-(h_1+h_2+h_3)$ e $\bar{r}+\bar{s}+\bar{q}=-(\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3)$.

Finalmente, sob transformações conformes especiais $z\to z/(cz+1)$, $c\in\mathbb{C}$, O se transforma como

$$O'\left(\frac{z-w}{(cz+1)(cw+1)},\frac{w-v}{(cw+1)(cv+1)},\frac{z-v}{(cz+1)(cv+1)}\right)=$$
$$O(z-w,w-v,z-v)(cz+1)^{2h_1}(cw+1)^{2h_2}(cv+1)^{2h_3},$$

onde escrevemos apenas a parte holomórfica por simplicidade. Segue que o lado esquerdo é igual a

$$(cz+1)^{-r-q}(cw+1)^{-r-s}(cv+1)^{-s-q}a_{r,s,q,\bar{r},\bar{s},\bar{q}}(z-w)^r(w-v)^s(z-v)^q,$$

e então, a igualdade se verifica se

$$r+q=-2h_1,\ r+s=-2h_2,\ s+q=-2h_3.$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $r=-h_1-h_2+h_3$, $s=h_1-h_2-h_3$ e $q=-h_1+h_2-h_3$. O mesmo pode se verificar para a parte anti-holomórfica da função, e o resultado é que a função de 3-pontos entre os campos quasi-primários $\phi_1(z,\bar{z})$, $\phi_2(w,\bar{w})$ e $\phi_3(v,\bar{v})$, de dimensões conformes $(h_1,\bar{h}_1)$, $(h_2,\bar{h}_2)$ e $(h_3,\bar{h}_3)$, respectivamente, é dada por

$$\langle\phi_1(z,\bar{z})\phi_2(w,\bar{w})\phi_3(v,\bar{v})\rangle=\frac{C_{123}}{(z-w)^{h_1+h_2-h_3}(w-v)^{-h_1+h_2+h_3}(z-v)^{h_1-h_2+h_3}}$$
$$\times\frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}(\bar{w}-\bar{v})^{-\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3}(\bar{z}-\bar{v})^{\bar{h}_1-\bar{h}_2+\bar{h}_3}},\tag{3.0.11}$$

onde a constante C_{123} depende dos parâmetros da ação da teoria e das dimensões conformes dos campos envolvidos. Novamente, ilustrando o poder da invariância conforme, encontramos a dependência espacial da função de correlação entre três campos distintos, definidos em três pontos diferentes, utilizando apenas argumentos de simetria.

Entretanto, funções de n-pontos para $n\geq 4$ não têm sua dependência espacial determinada pela simetria conforme. De fato, se fôssemos realizar os cálculos anteriores para uma função de 4-pontos por exemplo, no último passo teríamos que resolver um sistema linear formado por quatro equações e seis incógnitas, o que significa que restariam duas variáveis a serem determinadas livremente. Outra forma de ver isso é que, com mais de quatro pontos, podemos construir combinações entre as coordenadas que são invariantes conformes, e a função de correlação pode depender dessas combinações de forma arbitrária.

4 O tensor de energia-momento

Quando introduzimos os campos primários, dissemos que pontos críticos de transições de fase contínuas possuem invariância conforme, mas não explicamos o porquê. No que se segue, vamos demonstrar que, em duas dimensões, a simetria conforme é uma consequência da invariância por translações, rotações e transformações de escala. Assim, como a grande maioria dos modelos físicos são construídos para possuírem as duas primeiras simetrias, o que é quase sempre uma condição bastante razoável, a invariância por escala já implica a simetria conforme em duas dimensões. Como a invariância por escala se manifesta no ponto crítico de transições de fase, este pode ser descrito por teorias conformes em duas dimensões.

Antes de demonstrar que a invariância conforme é consequência da invariância por translações, rotações e escalas, vamos relembrar algumas noções de teoria clássica de campos. Considere uma teoria definida em um espaço Euclidiano d-dimensional, com um número N de campos ϕ_a, $a = 1, ..., N$. A Lagrangiana dessa teoria é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)),$$

e sua ação é

$$S = \int d^d x \mathcal{L}\left(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)\right).$$

Suponha que realizamos uma transformação infinitesimal tanto nas posições,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x^\mu),$$

onde $\epsilon^\mu(x^\mu) << 1 \; \forall x^\mu$, quanto nos campos,

$$\phi_a(x^\mu) \rightarrow \phi'_a(x'^\mu) = \phi_a(x^\mu) + \Delta\phi_a(x^\mu).$$

A variação $\Delta\phi_a(x^\mu) = \phi'_a(x'^\mu) - \phi_a(x^\mu)$ leva em conta tanto a variação de sua forma funcional quanto de sua posição. Definindo

$$\delta\phi_a(x^\mu) = \phi'_a(x^\mu) - \phi_a(x^\mu),$$

a variação da forma funcional do campo em um mesmo ponto do espaço, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_a(x^\mu) &= \phi'_a(x'^\mu) - \phi_a(x^\mu) - \phi_a(x'^\mu) + \phi_a(x'^\mu) \\
&= \delta\phi_a(x'^\mu) + \phi_a(x'^\mu) - \phi_a(x^\mu) \\
&= \delta\phi_a(x^\mu + \epsilon^\mu) + \phi_a(x^\mu + \epsilon^\mu) - \phi_a(x^\mu) \\
&= \delta\phi_a(x^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\mu \delta\phi_a(x^\mu) + \phi_a(x^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_a(x^\mu) - \phi_a(x^\mu) + ... \\
&= \delta\phi_a(x^\mu) + \epsilon^\mu(x^\mu) \partial_\mu \phi_a(x^\mu),
\end{aligned}$$

onde descartamos variações de segunda ordem (tanto nas posições quanto na forma funcional do campo). Como a derivada de ϕ_a é apenas mais um campo na teoria, podemos imediatamente escrever a transformação infinitesimal

$$\partial_\mu\phi_a(x^\mu) \to (\partial_\mu\phi_a)'(x'^\mu) = \partial_\mu\phi_a(x^\mu) + \Delta\left(\partial_\mu\phi_a(x^\mu)\right),$$

onde

$$\Delta\left(\partial_\mu\phi_a(x^\mu)\right) = \delta\left(\partial_\mu\phi_a(x^\mu)\right) + \epsilon^\nu(x^\mu)\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi_a(x^\mu)\right).$$

Sob tais transformações, a variação da ação é dada por

$$\Delta S = \int d^dx'\mathcal{L}(\phi'_a(x'^\mu),(\partial_\mu\phi_a)'(x'^\mu)) - \int d^dx\mathcal{L}(\phi_a(x^\mu),\partial_\mu\phi_a(x^\mu)). \quad (4.0.1)$$

Temos então que, expandindo $\mathcal{L}(\phi'_a(x'^\mu),(\partial_\mu\phi_a)'(x'^\mu))$ até a primeira ordem nas variações,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi'_a(x'^\mu),(\partial_\mu\phi_a)'(x'^\mu)) &= \mathcal{L}\left(\phi_a(x^\mu)+\Delta\phi_a(x^\mu),\partial_\mu\phi_a(x^\mu)+\Delta\left(\partial_\mu\phi_a(x^\mu)\right)\right)\\ &= \mathcal{L}(\phi_a,\partial_\mu\phi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\Delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta(\partial_\mu\phi_a)\\ &= \mathcal{L}(\phi_a,\partial_\mu\phi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}(\delta\phi_a+\epsilon^\mu\partial_\mu\phi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\delta\left(\partial_\mu\phi_a\right)+\epsilon^\nu\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi_a\right))\\ &= \mathcal{L}+\delta\mathcal{L}+\epsilon^\mu\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu},\end{aligned}$$

onde

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\left(\partial_\mu\phi_a\right)$$

e

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\partial_\mu\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\partial_\mu\left(\partial_\nu\phi_a\right).$$

Agora, como

$$d^dx' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| d^dx = (1+\partial_\mu\epsilon^\mu)d^dx,$$

pois $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu\epsilon^\mu$ e $\det_{\mu,\nu}(\delta^\mu_\nu+\partial_\nu\epsilon^\mu) \approx 1 + \mathrm{Tr}(\partial_\nu\epsilon^\mu) = 1+\partial_\mu\epsilon^\mu$, temos que

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int d^dx\left[(1+\partial_\mu\epsilon^\mu)\left(\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}+\epsilon^\mu\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}\right)-\mathcal{L}\right]\\ &= \int d^dx\left[\delta\mathcal{L}+\epsilon^\mu\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}+\partial_\mu\epsilon^\mu\mathcal{L}\right],\end{aligned}$$

onde mantemos apenas as variações de primeira ordem. Agora, suponha que a variação funcional dos campos seja nula, i.e., $\delta\phi_a = 0$. Segue que $\delta\mathcal{L} = 0$. A equação de movimento

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}$$

implica que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\partial_\mu\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\partial_\mu\left(\partial_\nu\phi_a\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\partial_\mu\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\partial_\nu\left(\partial_\mu\phi_a\right),$$

isto é,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\partial_\mu\phi_a\right].$$

Mais ainda,

$$\int d^dx\partial_\mu\epsilon^\mu\mathcal{L} = \int d^dx\left[\partial_\mu\left(\epsilon^\mu\mathcal{L}\right) - \epsilon^\mu\partial_\mu\mathcal{L}\right] = -\int d^dx\epsilon^\mu\partial_\mu\mathcal{L}.$$

Então, a variação da ação é

$$\Delta S = \int d^dx\epsilon^\nu\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\nu\phi_a - \delta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = \int d^dx\epsilon^\nu\partial_\mu T^{\mu\nu}, \tag{4.0.2}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\nu\phi_a - \delta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.0.3}$$

é o *tensor de energia-momento*. Segue que a ação da teoria, e por conseguinte suas equações de movimento e todo o seu comportamento, é invariante sob a transformação infinitesimal $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x^\mu)$, para qualquer função $\epsilon^\mu(x^\mu) << 1$, se

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

isto é, se o tensor de energia-momento é conservado. Uma transformação do tipo $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x^\mu)$, pode, por exemplo, corresponder a uma translação (se ϵ^μ é constante), a uma rotação e a uma dilatação (se ϵ^μ é no máximo linear em x^μ). Assim, a invariância sob translações, rotações e dilatações de uma teoria implica em um tensor de energia-momento conservado. A carga conservada é o *4-momento*

$$P^\mu = \int d^{d-1}xT^{0\mu}, \tag{4.0.4}$$

e, em particular, a *energia*, dada por

$$E = P^0 = \int d^{d-1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \right], \tag{4.0.5}$$

também é conservada.

Agora, uma transformação infinitesimal $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ é conforme se o mapa ϵ_μ satisfaz $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = (\Lambda(x) - 1) h_{\mu\nu}$, onde Λ é uma função qualquer. Sob tal transformação infinitesimal, a variação da ação da teoria é dada por

$$\Delta S = \int d^d x \epsilon^\nu \partial^\mu T^\nu_\mu.$$

Integrando por partes, temos que

$$\Delta S = - \int d^d x \partial^\mu \epsilon^\nu T^\nu_\mu$$

e, assumindo que o tensor de energia-momento é simétrico, escrevemos

$$\Delta S = - \int d^d x \frac{1}{2} (\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu) T^\nu_\mu.$$

Como $\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu = (\Lambda(x) - 1) h^{\mu\nu}$, segue que

$$\Delta S = - \int d^d x \frac{\Lambda(x) - 1}{2} h^{\mu\nu} T^\nu_\mu.$$

Como $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária, $\Delta S = 0$ e a ação possui invariância conforme se

$$h_{\mu\nu} T^\mu_\nu = T^\mu_\mu = 0,$$

isto é, se o tensor de energia-momento possuir traço nulo. Ou seja, uma teoria cujo tensor de energia-momento possui traço nulo apresenta, necessariamente, simetria conforme. No entanto, a invariância conforme não faz com que o tensor de energia-momento possua traço nulo, pois $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária.

Considere uma teoria de campos em $d = 2$ dimensões, com simetria sob translações, rotações e dilatações. O tensor de energia-momento é, em coordenadas complexas $z = x^0 + ix^1$, $\bar{z} = x^0 - ix^1$, dado por

$$T^{zz} = \frac{\partial z}{\partial x^\rho} \frac{\partial z}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} = T^{00} + 2iT^{01} - T^{11},$$

$$T^{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x^\rho} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} = T^{00} - 2iT^{01} - T^{11},$$

$$T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z} = \frac{\partial z}{\partial x^\rho}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x^\sigma}T^{\rho\sigma} = T^{00} + T^{11} = T^\mu_\mu,$$

onde assumimos que $T^{\mu\nu}$ é simétrico. A lei de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica que

$$\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{01} = 0$$

e que

$$\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} = 0.$$

Daí, temos que, em coordenadas complexas,

$$\begin{aligned}
\partial_z T^{zz} + \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}z} &= \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1)(T^{00} + 2iT^{01} - T^{11}) + \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1)(T^{00} + T^{11}) \\
&= \partial_0 T^{00} + i\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{01} + i\partial_1 T^{11} \\
&= (\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{01}) + i(\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11}),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\partial_z T^{zz} + \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}z} = 0. \tag{4.0.6}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\partial_z T^{z\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1)(T^{00} + T^{11}) + \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1)(T^{00} - 2iT^{01} - T^{11}) \\
&= \partial_0 T^{00} - i\partial_1 T^{11} - i\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{01} \\
&= (\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{01}) - i(\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\partial_z T^{z\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0, \tag{4.0.7}$$

como esperado. Agora, imagine que as simetrias da teoria também se manifestam a *nível quântico*. Isso significa que não só a ação $S[\Phi]$ é invariante sob translações, rotações e dilatações, mas também a medida de integração $D[\Phi]$. Definindo $T^\mu_\mu = T^{z\bar{z}} = \theta(z, \bar{z})$, considere a função de correlação

$$\langle \theta(z, \bar{z})\theta(0, 0)\rangle = \frac{1}{Z}\int D[\Phi]\theta(z, \bar{z})\theta(0, 0)e^{-S[\Phi]}. \tag{4.0.8}$$

Sob translações $(z, \bar{z}) \to (z', \bar{z}') = (z + a, \bar{z} + \bar{a})$, $a \in \mathbb{C}$, podemos ver imediatamente que, como

$$\theta(z', \bar{z}') = T'^{z\bar{z}} = \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}T^{z\bar{z}} = T^{z\bar{z}} = \theta(z, \bar{z}),$$

segue que

$$\langle \theta(z+a, \bar{z}+\bar{a})\theta(a,\bar{a})\rangle = \langle \theta(z,\bar{z})\theta(0,0)\rangle\,,$$

isto é, a função de correlação é invariante sob translações. Rotações e dilatações são dadas pela transformação $(z,\bar{z}) \to (z',\bar{z}') = (az, \bar{a}\bar{z})$, $a \in \mathbb{C}$. Como

$$\theta(z',\bar{z}') = T'^{z\bar{z}} = \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} T^{z\bar{z}} = a\bar{a}T^{z\bar{z}} = a\bar{a}\theta(z,\bar{z}),$$

segue que

$$\langle \theta(az, \bar{a}\bar{z})\theta(0,0)\rangle = a\bar{a}\,\langle \theta(z,\bar{z})\theta(0,0)\rangle\,.$$

Assumindo que $\langle \theta(z,\bar{z})\theta(0,0)\rangle$ é analítica em uma vizinhança de $(z,\bar{z}) = (0,0)$, podemos expandi-la em uma série de Laurent em torno do ponto $(0,0)$. Então, temos que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} A_{nm} a^n \bar{a}^m z^n \bar{z}^m = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} A_{nm} a\bar{a} z^n \bar{z}^m,$$

o que implica que $A_{nm} = 0$ para $n, m \neq 1$ e $A_{11} = A \in \mathbb{C}$. Logo, a forma funcional da função de correlação é

$$\langle \theta(z,\bar{z})\theta(0,0)\rangle = Az\bar{z},$$

o que implica que

$$\langle \theta(0,0)^2\rangle = 0.$$

Como a função é invariante por translações, devemos ter que $\langle \theta(z,\bar{z})^2\rangle = 0$, $\forall (z,\bar{z}) \in \mathbb{C}^2$. Portanto,

$$\theta(z,\bar{z}) = T^{\mu}_{\mu} = 0, \tag{4.0.9}$$

$\forall (z,\bar{z}) \in \mathbb{C}^2$, e de fato a invariância por translações, rotações e dilatações em uma teoria em duas dimensões faz com que o tensor de energia-momento possua traço nulo. Segue então que tal teoria possui invariância conforme. Outra consequência desse fato é que, da lei de conservação do tensor de energia-momento,

$$\partial_z T^{zz} = 0,\ \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0, \tag{4.0.10}$$

o que significa que $T^{zz} = \bar{T}(\bar{z})$ e $T^{\bar{z}\bar{z}} = T(z)$ são funções de uma variável complexa apenas. Com isso em vista, é mais natural definir o tensor de energia-momento de modo que $T^{zz} = T(z)$ e $T^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$, o que é sempre possível visto que apenas permutamos as entradas da diagonal da matriz.

5 Identidades de Ward e a expansão do produto de operadores

Considere uma teoria de campos em duas dimensões e suponha que realizamos uma transformação infinitesimal nas posições e nos campos, i.e,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x),\ \mu = 0, 1$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x).$$

Considere ainda que a forma funcional dos campos não mudam, isto é, $\delta\phi = 0$. Assim, $\Delta\phi(x) = \epsilon^\mu(x)\partial_\mu\phi(x)$. Vimos que, sob tal transformação, a variação na ação da teoria é dada por

$$\Delta S = \int d^2x \epsilon^\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}.$$

Passando para coordenadas complexas $(x^0, x^1) \to (z = x^0 + ix^1, \bar{z} = x^0 - ix^1)$, $(\epsilon, \bar{\epsilon}) = (\epsilon^0 + i\epsilon^1, \epsilon^0 - i\epsilon^1)$, as transformações são dadas por

$$z^a \to z'^a = z^a + \epsilon^a(z^a),\ a = 0, 1,$$

onde $z^0 = z,\ z^1 = \bar{z}$, $\epsilon^0 = \epsilon$, $\epsilon^1 = \bar{\epsilon}$,

$$\phi(z, \bar{z}) \to \phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) + \epsilon^a(z^a)\partial_a\phi(z, \bar{z}).$$

Em coordenadas complexas, a variação na ação é

$$\Delta S = \frac{1}{4i}\int dz d\bar{z} \epsilon^b(z^b)\partial_a T^{ab}(z, \bar{z}).$$

Em duas dimensões, uma transformação conforme infinitesimal $(z, \bar{z}) \to (f(z), \bar{f}(\bar{z}))$ é dada por quaisquer funções analíticas $f = f(z)$, $\bar{f} = \bar{f}(\bar{z})$ (com a restrição $f^* = \bar{f}$). No entanto, uma função limitada e analítica em todo o plano complexo deve ser uma constante. Então, para evitar que todas as transformações sejam triviais, consideramos sempre funções meromórficas, analíticas apenas em um conjunto $D^2 \in \mathbb{C}^2$.

Seja $(z, \bar{z}) \to (f(z), \bar{f}(\bar{z})) = (z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}))$ uma transformação infinitesimal meromórfica, analítica (e, portanto, conforme) apenas no interior de um conjunto $D^2 \in \mathbb{C}^2$. Considere um campo primário $\phi(z, \bar{z})$ definido em D^2. Consideramos que $\phi(z, \bar{z}) \to 0$ para pontos $(z, \bar{z})$ distantes de D^2. Sob o mapa $(z, \bar{z}) \to (f(z), \bar{f}(\bar{z}))$, a função de correlação $\langle\phi(z, \bar{z})\rangle$ se transforma como

$$\langle\phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z}))\rangle = (\partial_z f)^{-h}(\partial_{\bar{z}}\bar{f})^{-\bar{h}}\langle\phi(z, \bar{z})\rangle$$

$$= (1 - h\partial_z \epsilon)(1 - \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon}) \langle \phi(z, \bar{z}) \rangle ,$$

onde mantivemos apenas os termos de primeira ordem. No entanto, como a transformação é analítica apenas no interior de D^2, a ação não é totalmente invariante. Sua variação é

$$\Delta S = \frac{1}{4i} \int_{\bar{D}^2} dw d\bar{w} \epsilon^b(w^b) \partial_a T^{ab}(w, \bar{w}),$$

onde $\bar{D}^2$ é o complemento de D^2 em $\mathbb{C}^2$. Temos que, como o tensor de energia-momento possui traço nulo,

$$\Delta S = \frac{1}{4i} \int_{\bar{D}^2} dw d\bar{w} \left[\epsilon(w) \partial_w T(w) + \bar{\epsilon}(\bar{w}) \partial_{\bar{w}} \bar{T}(\bar{w}) \right]$$

$$= \frac{1}{4i} \int_{\bar{D}^2} dw d\bar{w} \left[\partial_w(\epsilon T) + \partial_{\bar{w}}(\bar{\epsilon}\bar{T}) \right] - \frac{1}{4i} \int_{\bar{D}^2} dw d\bar{w} \left[\partial_w \epsilon T + \partial_{\bar{w}} \bar{\epsilon} \bar{T} \right] .$$

Fora de D^2, como o campo $\phi \to 0$, temos que $T \to 0$ também. Logo,

$$\Delta S = \frac{1}{4i} \int_{\bar{D}^2} dw d\bar{w} \left[\partial_w(\epsilon T) + \partial_{\bar{w}}(\bar{\epsilon}\bar{T}) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\partial D^2} \left[\epsilon(w) T(w) dw - \bar{\epsilon}(\bar{w}) \bar{T}(\bar{w}) d\bar{w} \right]$$

Assumindo sempre que a medida $D\phi$ é invariante, a função de partição se torna

$$Z' = \int D\phi e^{-S - \Delta S} = \int D\phi e^{-S} \left[1 - \frac{1}{4} \int_{\partial D^2} \left[\epsilon(w) T(w) dw - \bar{\epsilon}(\bar{w}) \bar{T}(\bar{w}) d\bar{w} \right] \right] ,$$

onde expandimos a exponencial até a primeira ordem. Segue que

$$Z' = Z \left[1 - \frac{1}{4} \int_{\partial D^2} \left[\epsilon(w) \langle T(w) \rangle dw - \bar{\epsilon}(\bar{w}) \langle \bar{T}(\bar{w}) \rangle d\bar{w} \right] \right] .$$

Para simplificar, considere $\bar{\epsilon} = 0$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\langle \phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \rangle &= \frac{1}{Z'} \int D\phi e^{-S-\Delta S} \phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \\
&= \left[1 + \frac{1}{4} \int_{\partial D^2} \epsilon(w) \langle T(w) \rangle \, dw \right] \\
&\frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S-\Delta S} \left[\phi(z,\bar{z}) + \epsilon(z) \partial_z \phi(z,\bar{z}) \right] \\
&= \left[1 + \frac{1}{4} \int_{\partial D^2} \epsilon(w) \langle T(w) \rangle \, dw \right] \\
&\left[\langle \phi(z,\bar{z}) \rangle + \epsilon(z) \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle - \frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle \right] \\
&= \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle + \epsilon(z) \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle \\
&-\frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle + \frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \rangle \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle \\
&= \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle + \epsilon(z) \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle - \frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle_c ,
\end{aligned}$$

onde

$$\langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle_c = \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle - \langle T(w) \rangle \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle \tag{5.0.1}$$

é a função de correlação conexa. Segue então que

$$\begin{aligned}
\langle \phi(z,\bar{z}) \rangle + \epsilon(z) \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle - \frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle_c \\
= \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle - h \partial_z \epsilon(z) \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{4} \int dw \epsilon(w) \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle_c - h \partial_z \epsilon(z) \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle - \epsilon(z) \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle = 0. \tag{5.0.2}$$

Escrevendo

$$\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} dw \frac{\epsilon(w)}{w - z},$$

$$\partial_z \epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} dw \frac{\epsilon(w)}{(w - z)^2},$$

segue que

$$\int_{\partial D} dw \epsilon(w) \left[\frac{\pi}{2} \langle T(w) \phi(z,\bar{z}) \rangle_c - \frac{h}{(w-z)^2} \langle \phi(z,\bar{z}) \rangle - \frac{1}{w-z} \langle \partial_z \phi(z,\bar{z}) \rangle \right] = 0,$$

para todo $\epsilon(w) << 1$. Isso significa que o integrando é igual a uma função analítica em D. Ou seja,

$$\frac{\pi}{2}\left\langle T(w)\phi(z,\bar{z})\right\rangle_c = \frac{h}{(w-z)^2}\left\langle \phi(z,\bar{z})\right\rangle + \frac{1}{w-z}\left\langle \partial_z\phi(z,\bar{z})\right\rangle + \text{ termos regulares.}$$

Temos então uma identidade de operadores

$$\frac{\pi}{2}T(w)\phi(z,\bar{z}) = \frac{h}{(w-z)^2}\phi(z,\bar{z}) + \frac{1}{w-z}\partial_z\phi(z,\bar{z}) + \text{ termos regulares} \tag{5.0.3}$$

chamada *expansão do produto de operadores*. É fácil ver também que

$$\frac{\pi}{2}\bar{T}(\bar{w})\phi(z,\bar{z}) = \frac{\bar{h}}{(\bar{w}-\bar{z})^2}\phi(z,\bar{z}) + \frac{1}{\bar{w}-\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\phi(z,\bar{z}) + \text{ termos regulares.} \tag{5.0.4}$$

Para N campos primários ϕ_i, $i = 1, ..., N$, temos que

$$\begin{aligned} &\langle \oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left\langle \phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\oint_{C(w_i)}\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\phi_i(w_i,\bar{w}_i)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

onde os pontos w_i estão contidos no círculo definido por z, e deformamos o contorno em vários círculos, cada um centrado em w_i. Segue que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}\left\langle \phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\oint_{C(w_i)}\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\phi_i(w_i,\bar{w}_i)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left\langle \phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\left(h_i\partial_{w_i}\epsilon(w_i) + \epsilon(w_i)\partial_{w_i}\right)\phi_i(w_i,\bar{w}_i)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)\left\langle T(z)\phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\right\rangle \\ &-\oint \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\right)\left\langle \phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{5.0.7}$$

para qualquer $\epsilon(z)$, não necessariamente analítica em todo lugar. Logo, obtemos a *identidade de Ward* conforme

$$\begin{aligned} &\langle T(z)\phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2}+\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\right)\langle\phi_1(w_1,\bar{w}_1)...\phi_N(w_N,\bar{w}_N)\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.0.8}$$

A expansão do produto de operadores de um campo com o tensor de energia-momento pode ser utilizada como teste para saber se ele é primário ou não. Assim, o tensor de energia-momento não é um campo primário. Sua expansão consigo mesmo é dada por

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + ... \tag{5.0.9}$$

Referências

[1] Ralph Blumenhagen and Erik Plauschinn. *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory*, volume 779. Springer Science & Business Media, 2009.

[2] Philippe di Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.