Escapade algorithmique avec Fibonacci

Présentation ADS - TIPE

Lucas RODRIGUEZ

21 Mars 2019 - 16h30

Définition de la suite (F_n)

Définition

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Problématique générale

Comment calculer les nombres de Fibonacci de manière performante ?

Table des matières

Formule de récurrence

Avec tableau

```
def fibo_table(n):
    f = [0, 1]
    for k in range(2,n+1):
        f.append(f[k-1] + f[k-2])
    return f[n]
```

Avantage

$n - 1$ additions réalisées

Inconvénient

$n + 2$ variables affectées

Formule de récurrence

Sans tableau

```
def fibo(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return n
    u = 0
    v = 1
    for i in range(2, n+1):
        s = u + v
        u = v
        v = s
    return s
```

Avantages

- $n - 1$ additions réalisées
- 3 variables affectées $+ 1$ compteur

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On reconnaît une suite récurrente d'ordre 2.

Démonstration.

Polynôme caractéristique : $P = r^2 - r - 1$ avec $r_1 = \phi$ et $r_2 = \overline{\phi}$
$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \alpha\phi^n + \beta\overline{\phi}^n$$

Avec les conditions initiales $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, on obtient :
$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ □

Formule explicite

Démonstration

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On reconnaît une suite récurrente d'ordre 2.

Démonstration.

Polynôme caractéristique : $P = r^2 - r - 1$ avec $r_1 = \phi$ et $r_2 = \overline{\phi}$
$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \alpha\phi^n + \beta\overline{\phi}^n$$

Avec les conditions initiales $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, on obtient :
$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ □

Formule de Binet

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \overline{\phi}^n\right)$$

Formule explicite

Implémentation

```
import math

def fibo_binet(n):
    phi, phib = (1 + math.sqrt(5))/2, (1 - math.sqrt(5))/2
    f = (phi**n - phib**n)//math.sqrt(5)
    return int(f)
```

Avantage

Permet de calculer F_n sans connaître les termes précédents

Inconvénient

Moins efficace que les 2 précédents algorithmes

- **Cas de base** : $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$
- **Formule de propagation** : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- **Cas de base** : $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$
- **Formule de propagation** : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

```
def fiborec(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return n
    else:
        return fiborec(n-1) + fiborec(n-2)
```

Avantage

Meilleure écriture et lisibilité

Inconvénient

Pas performant car **beaucoup de calculs sont inutilement répétés**

Amélioration possible

Garder en mémoire les anciens termes pour éviter de les recalculer

Inconvénient persistant

Complexité spatiale très mauvaise

Comparaison des 2 méthodes

- Algorithme itératif
  - $n - 1$ additions
  - $2 + 3(n - 1)$ affectations

$\Longrightarrow$ Complexité linéaire

Comparaison des 2 méthodes

- Algorithme itératif
  - $n - 1$ additions
  - $2 + 3(n - 1)$ affectations

  $\Longrightarrow$ Complexité linéaire
- Algorithme récursif
  - s_n : nombre d'additions $s_n > F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$

  $\Longrightarrow$ Complexité exponentielle

Comparaison des 2 méthodes

- Algorithme itératif
  - $n-1$ additions
  - $2+3(n-1)$ affectations

  $\Longrightarrow$ Complexité linéaire
- Algorithme récursif
  - s_n : nombre d'additions $s_n > F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$

  $\Longrightarrow$ Complexité exponentielle

Conclusion

La récursivité est donc à éviter pour calculer les nombres de Fibonacci. (comportement chaotique)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = A * X_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = A * X_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n = A^n * X_0}$. $\square$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = A * X_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n = A^n * X_0}$. □

Remarque

Le nombre de Fibonacci F_n est donc dans la matrice A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration.

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = A * X_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n = A^n * X_0}$. □

Remarque

Le nombre de Fibonacci F_n est donc dans la matrice A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de l'exponentiation rapide.

Permet de diminuer <u>considérablement</u> le nombre de multiplications réalisées

Permet de diminuer considérablement le nombre de multiplications réalisées

- **Cas de base** : $a^0 = 1$
- **Formule de propagation** : $\left\{ \begin{array}{lcll} a^n & = & (a^2)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ a^n & = & a * (a^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon} \end{array} \right.$

En l'implémentant par récursivité, on obtient une complexité logarithmique.
$2(\log_2(n) + 1)$ multiplications effectuées pour calculer a^n

Permet de diminuer <u>considérablement</u> le nombre de multiplications réalisées

- **Cas de base** : $a^0 = 1$
- **Formule de propagation** : $\begin{cases} a^n = (a^2)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ a^n = a * (a^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$

En l'implémentant par récursivité, on obtient une complexité logarithmique.
$2(\log_2(n) + 1)$ multiplications effectuées pour calculer a^n

Implémentons-le maintenant en tenant compte du produit matriciel !

Soit `proMat(A,B)`, une fonction renvoyant le produit matriciel de A et B.

```
A = [[0, 1], [1, 1]]
def fibo_exporap(A, n):
    if n == 0:
        return [[1, 0], [0, 1]] # retourner I_2
    elif n % 2 == 0:
        return fibo_exporap(proMat(A, A), n/2)
    else:
        return proMat(A, fibo_exporap(proMat(A, A), (n-1)/2))
```

Soit `proMat(A,B)`, une fonction renvoyant le produit matriciel de A et B.

```
A = [[0, 1], [1, 1]]
def fibo_exporap(A, n):
    if n == 0:
        return [[1, 0], [0, 1]] # retourner I_2
    elif n % 2 == 0:
        return fibo_exporap(proMat(A, A), n/2)
    else:
        return proMat(A, fibo_exporap(proMat(A, A), (n-1)/2))
```

On exécute :

```
>>> fibo_exporap(A, 50)[0][1]
12586269025
```

- Algorithme récursif utilisant l'exponentiation rapide
  - $2(\log_2(n) + 1)$ multiplications matricielles
  - $16(\log_2(n) + 1)$ multiplications d'entiers
  - $8(\log_2(n) + 1)$ additions d'entiers

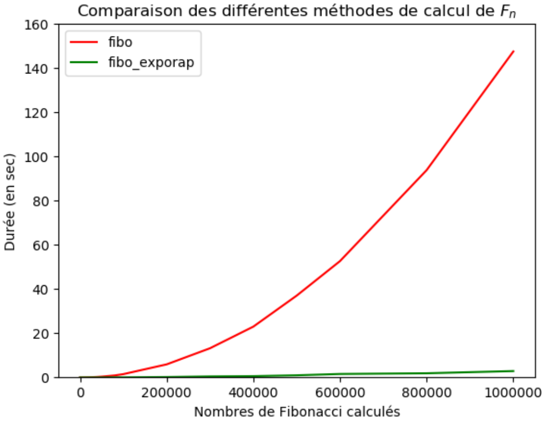
  $\Longrightarrow$ Complexité logarithmique

3 programmes pour calculer les nombres de la suite de Fibonacci :

- `fibo`
- `fiborec` (on l'abandonne car ne satisfait pas les contraintes imposées)
- `fibo_exporap`

Réponse au problème

Etude comparative



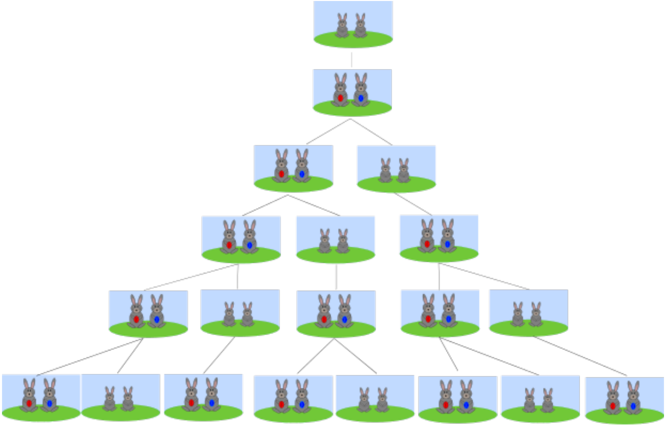
3 programmes pour calculer les nombres de la suite de Fibonacci :

- `fibo`
- `fiborec` (on l'abandonne car ne satisfait pas les contraintes imposées)
- `fibo_exporap`

Conclusion

La fonction `fibo_exporap` (utilisant l'écriture matricielle) est la plus performante dans le calcul des nombres de Fibonacci.

Fin de l'exposé



L'algorithme d'Euclide permet de calculer efficacement le PGCD de 2 nombres entiers a et b.

```
def euclide(a, b):
    u, v = a, b
    while v != 0:
        r = u % v
        u = v
        v = r
    return u
```

```
def eucliderec(a, b):
    if b = 0:
        return a
    else:
        return eucliderec(b, a%b)
```

- **Cas de base** : $b = 0 \Rightarrow a \wedge b = a$
- **Formule de propagation** : $a \wedge b = b \wedge r$

Le théorème de Lamé nous dit que le **nombre de divisions euclidiennes est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffre du plus petit nombre entre** a **et** b.

Le théorème de Lamé nous dit que le **nombre de divisions euclidiennes est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffre du plus petit nombre entre** a **et** b.
De plus, pour calculer $F_{n+2} \wedge F_{n+1}$, `euclide(a,b)` va effectuer exactement n divisions et $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = 1$.

Le théorème de Lamé nous dit que le **nombre de divisions euclidiennes est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffre du plus petit nombre entre a et b.**
De plus, pour calculer $F_{n+2} \wedge F_{n+1}$, `euclide(a,b)` va effectuer exactement n divisions et $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = 1$.

Conclusion

Les nombres de Fibonacci servent de véritables indicateurs dans l'analyse de la complexité de l'algorithme d'Euclide.
Plus précisément, ils permettent d'obtenir une majoration du nombre de divisions euclidiennes et donc de la complexité de ce dernier.