Etude de l'équirépartition de suites denses

Lucas Willems

12 juin 2016

Tous les résultats avec une bordure rouge sont le fruit d'un vrai travail personnel. Une partie des résultats énoncés sont démontrés en annexe.

1 Introduction à l'équirépartition

1.1 Approche intuitive

La première notion est celle de densité. Visuellement, une suite est dense dans $[0,1]$ si quand on "regarde" n'importe quel sous segment de $[0,1]$, on y voit au moins un terme de la suite, c'est-à-dire qu'il y a des termes de la suite "partout" dans $[0,1]$.

Définition 1 (Densité d'une suite)**.** $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *est* ***dense*** *dans* $[0,1]$ *si :*

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \text{ avec } a < b, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \in]a,b[$$

Exemple 1 (Suite dense)**.** *L'ensemble* $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *est dénombrable : on peut donc créer une suite* (a_n) *des éléments de* A*. Cette suite est dense dans* $[0,1]$*.*

Exemple 2 (Suite dense)**.** *La suite* $(|cos(n)|)$ *est dense dans* $[0,1]$ *comme nous le verrons dans la 2ème section.*

La seconde notion est celle d'équirépartition. Visuellement, une suite est équirépartie dans $[0,1]$ si quand on "regarde" le segment $[0,1]$, on y voit le "même nombre de termes partout".

Définition 2 (Equirépartition d'une suite)**.** $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *est* ***équirépartie*** *dans* $[0,1]$ *si :*

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \text{ avec } a \leq b, \lim_{n \to \infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in [a,b]\}}{n} = b - a$$

Exemple 3 (Suite équirépartie)**.** *La suite* $(\sqrt{2} \cdot n \mod 1)$ *est équirépartie dans* $[0,1]$ *comme nous le verrons dans la sous-section suivante de manière plus générale.*

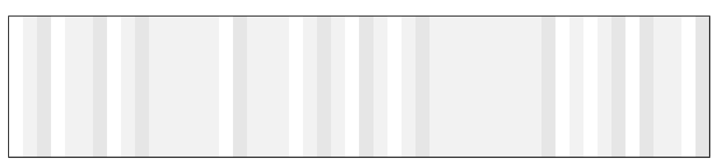
Pour clairement mettre en évidence la différence entre une suite équirépartie et une suite simplement dense, j'ai considéré les suites $u_n = |cos(n)|$ et $v_n = \sqrt{2} \cdot n \mod 1$, et pour chacune des suites, j'ai :

1. Divisé le segment $[0,1]$ en 50 sous-segments de même longueur
2. Compté le nombre de termes de la suite se trouvant dans chaque sous-segment parmi les 1.000 premiers termes de la suite
3. Donné une teinte de gris à chaque sous-segment : la luminosité d'un sous-segment est proportionnelle au rapport $r = \frac{\text{nombre de termes dans le sous-segment en question}}{\text{nombre de termes du sous-segment contenant le plus de termes de la suite}} \in [0,1]$. $r = 0$ donne du noir et $r = 1$ donne du blanc.

Avec une telle représentation, une suite est équirépartie si le segment est en blanc.

Pour les 2 suites en question, voici les graphiques obtenus :

1.000 premiers termes de $u_n = |cos(n)|$



1.000 premiers termes de $v_n = \sqrt{2} \cdot n \mod 1$

Tous 2 mettent clairement en évidence :

— Le caractère non équirépartie de (u_n) : le sous-segment le plus à droite de $[0,1]$ est blanc et les autres noirs donc il contient beaucoup plus de termes que les autres
— Le caractère équirépartie de (v_n) : tous les sous-segments contiennent un nombre similaire de termes

Une fois que j'ai réussi à comprendre les notions de densité et équirépartition, je me suis posé la question du lien direct entre ces 2 notions.

Proposition 1 (Equirépartition implique densité)**.** *Si $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie, alors (u_n) est dense.*

Remarque 1 (Densité n'implique pas équirépartition)**.** *Supposons que $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ soit équirépartie dans $[0,1]$. Alors, si on considère la suite (v_n) telle que $v_{2n} = u_n$ et $v_{2n+1} = 0$, la suite est dense mais n'est pas équirépartie (au moins la moitié des termes de (v_n) est dans $[0, \frac{1}{4}]$ soit un quart de $[0,1]$).*

Conclusion. *L'équirépartition est une notion plus forte que celle de densité : c'est un cas particulier.*

1.2 Existence de suites équiréparties

Ensuite, je me suis posé la question de l'existence de suites équiréparties dans $[0,1]$. Des recherches dans des livres m'ont mené à une caractérisation de l'équirépartition et au critère de Weyl pour aboutir à un corollaire que j'ai souvent utilisé par la suite. Les résultats suivants sont très utiles et les seuls tirés de sources externes :

Théorème 1 (Caractérisation de l'équirépartion)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Il y a équivalence entre :*

1. *(u_n) est équirépartie*
2. *$\forall f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)dt$*

Théorème 2 (Critère de Weyl)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Il y a équivalence entre :*

1. *(u_n) est équirépartie*
2. *$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp(2i\pi \cdot p \cdot u_k) = 0$*

Corollaire 1 (Equirépartition de $(\alpha \cdot n \mod 1)$)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :*

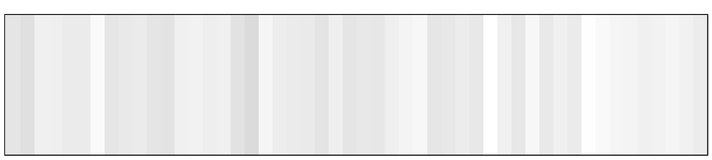
1. *$(\alpha \cdot n \mod 1)$ est équirépartie*
2. *α est irrationnel*

Remarque 2. *En particulier, $(\sqrt{2} \cdot n \mod 1)$ est équirépartie.*

D'autres types de suites équiréparties dans $[0,1]$ existent comme le montre le théorème suivant :

Théorème 3 (Koksma)**.** *$(x^n \mod 1)$ est équirépartie pour presque tout $x \geq 1$ (au sens de la mesure de Lebesgue)*

Remarque 3. *Aussi étrange que cela puisse paraître, il est facile d'exhiber des $x \geq 1$ tels que $(x^n \mod 1)$ **ne** soit **pas** équirépartie (e.g. $\sqrt{n}$) mais très dur d'exhiber des x tels que la suite soit équirépartie. Par exemple, il est seulement conjecturé que $((\frac{3}{2})^n \mod 1)$ est équirépartie. L'utilisation de ma représentation pour, non pas 1.000 termes, mais 50.000 termes de cette suite semble confirmer cette conjecture :*



Conclusion. *De nombreuses suites équiréparties dans $[0,1]$ existent.*

2 Représentation graphique

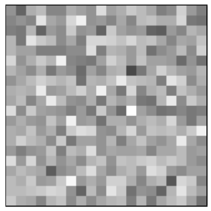
Les 2 graphiques présentés dans la section précédente sont en réalité tirés d'un programme Python graphique, plus complet, que j'ai réalisé dans le but de rendre visuelle la notion d'équirépartition, et ce de 2 manières avec :
— une représentation lumineuse consistant à colorer le segment $[0,1]$
— une représentation analytique consistant à tracer une fonction de répartition de la suite

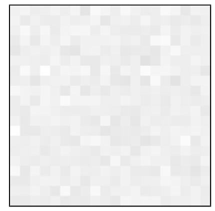
Remarque 4. *Mon programme ne donne qu'une image à un instant t de la répartition de la suite. Il ne permet pas de prouver l'équirépartition d'une suite, juste d'avoir un avis, une intuition. Par exemple, si l'on considère la suite $(\frac{2^n}{2^{20}} \mod 1)$, on pensera que la suite est équirépartie alors qu'elle ne l'est absolument pas.*

2.1 Coloration du segment $[0,1]$

Une première manière de rendre visuelle la notion d'équirépartition est de colorer l'ensemble dans lequel se trouve la suite ($[0,1]$, $[a,b]$ ou même $[a,b]\times[c,d]$) avec l'algorithme utilisé dans la section précédente. Le programme permet en plus de choisir le nombre de subdivision de l'ensemble en question, la suite représentée et affiche, lorsque l'on passe la souris sur une subdivision, le rapport r utilisé dans l'algorithme.

Cette coloration permet de visualiser l'équirépartition de suites comme ($|cos(n)|$), ..., et plus généralement, de suites quelconques. Par exemple, j'ai pu vérifier grâce à mon programme que le générateur aléatoire de mon ordinateur fourni bien des nombres aléatoires et équirépartis comme en témoignent les 2 images suivantes :


10.000 couples aléatoires


1.000.000 couples aléatoires

2.2 Fonctions de répartition

Une deuxième manière de rendre visuelle la notion d'équirépartition est de tracer les fonctions de répartition associées à la suite en question, définies comme suit :

Définition 3 (Fonctions de répartition d'une suite)**.** *Soit* $(u_n)\in[0,1]^{\mathbb{N}}$*. On appelle* ***fonctions de répartition*** (f_n) *associées à la suite* (u_n) *la suite de fonction suivante :*

$$\forall n\in N,\quad f_n:\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & [0,1]\\ x & \longmapsto & \frac{\#\{i\leq n|u_i\in[0,x]\}}{n}\end{array}$$

Définition 4 (Indices d'équirépartition d'une suite)**.** *Soit* $(u_n)\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ *et* (f_n) *les fonctions de répartition associées. On appelle* ***indices d'équirépartition*** (I_n) *la suite :*

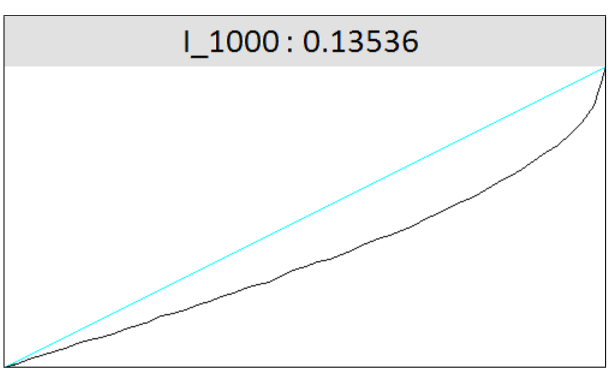
$$\forall n\in N, I_n=\int_0^1|f_n(x)-x|dx$$

L'utilisation de cette suite de fonction et d'indices est alors pertinente comme le montre la caractérisation suivante :

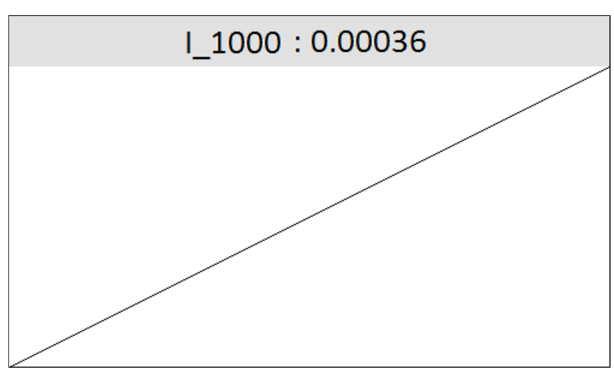
Théorème 4 (Caractérisation de l'équirépartition)**.** *Soit* $(u_n)\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ *et* (f_n) *et* (I_n) *les fonctions de répartition et indices associés. Il y a équivalence entre :*

1. (u_n) *est équirépartie*
2. (f_n) *converge simplement vers l'identité*
3. (I_n) *converge vers* 0

Visuellement, voici ce que cela donne pour $u_n=|cos(n)|$ et $v_n=\sqrt{2}\cdot n \mod 1$:



$u_n=|cos(n)|$ avec $n\in[\![0,1000]\!]$



$v_n=\sqrt{2}\cdot n \mod 1$ avec $n\in[\![0,1000]\!]$

La convergence simple des fonctions de répartition (fonction en noir) vers l'identité offre un deuxième critère visuel d'équirépartition et la convergence de l'indice vers 0 offre un critère **quantitatif**. Par exemple, le traçage de la fonction de répartition sur l'image de gauche (respectivement, de droite) permet clairement de voir le caractère non équirépartie de (u_n) (respectivement, équirépartie de (v_n)).

De plus, l'étude des fonctions de répartition permet, dans certains cas, à l'aide de la proposition suivante, de déterminer la densité ou l'équirépartition d'une suite :

Proposition 2 (Condition suffisante de densité)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et (f_n) les fonctions de répartition associées. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f strictement croissante, alors (u_n) est dense.*

Exemple 4 ($(|cos(n)|)$ dense non équirépartie)**.** *Considérons $u_n = |cos(n)| = |cos(\pi \cdot v_n)|$ (avec $v_n = \frac{n \mod \pi}{\pi} = \frac{n}{\pi} \mod 1$ équirépartie d'après le corollaire 1) et (f_n) les fonctions de répartition associées. Ainsi :*

$$f_n(x) = \frac{\#\{i \leq n | \cos(\pi \cdot v_n) \in [-x, x]\}}{n} = \frac{\#\{i \leq n | v_n \in [\frac{\arccos(x)}{\pi}, \frac{\arccos(-x)}{\pi}]\}}{n} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{(Cor.\ 1)}} \frac{\arccos(-x) - \arccos(x)}{\pi}$$

(f_n) converge simplement vers $1 - \frac{2}{\pi}\arccos$, fonction strictement croissante différente de l'identité, donc (u_n) est dense dans $[0,1]$ mais n'est pas équirépartie.

Remarque 5. *Dans l'exemple précédent, les fonctions de répartition convergent simplement vers $1 - \frac{2}{\pi}\arccos$ ce qui correspond bien à la fonction tracée dans l'image de gauche (avec la suite $(|cos(n)|)$).*

3 Lien entre densité et équirépartition

Une fois les notions bien assimilées et le programme graphique terminé, je me suis plus fortement intéressé au lien entre densité et équirépartition, au delà de l'équivalence ou la simple implication... Je me suis posé la question de la conservation de l'équirépartition, d'abord, par extraction puis par réordonnement des termes.

Avant de continuer, voici un petit résultat très utile pour la suite :

Proposition 3. *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dense. Alors :*

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \text{ avec } a < b, \forall N \in \mathbb{N}, \{i \geq N | u_i \in]a,b[\} \neq \emptyset$$

3.1 Suite extraite équirépartie d'une suite dense

La première question que mes camarades et moi nous sommes posées est : peut-on extraire une suite équirépartie d'une suite simplement dense ? A priori, je pensais que ce n'était pas possible, puis en cherchant, j'eus le déclic et crus avoir trouvé une extractrice le permettant : l'idée consistait à découper $[0,1]$ en 2 ($[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$), prendre un terme de la suite dans chaque sous-segment, puis à découper en 4, prendre un terme dans chaque sous-segment où l'on n'a pas déjà pris un terme, puis en 8, 16... Je me suis lancé dans la démonstration et à la toute fin de celle-ci, me suis rendu compte que je ne pourrais pas conclure.

Fort de cette expérience, j'ai reconsidéré le problème et trouvé un nouvel angle d'approche plus simple : je me suis dit que je pourrais extraire, d'une suite dense, une suite qui "tend vers une suite équirépartie" et que cette suite extraite serait, peut-être, équirépartie. C'est bel et bien le cas.

Proposition 4 (Transmission de l'équirépartition)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Si $\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$, alors :*

$$(u_n) \text{ équirépartie} \Leftrightarrow (v_n) \text{ équirépartie}$$

Proposition 5 (Suite extraite calquée sur une autre)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dense.*

$$\forall (a_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}, \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ extractrice}, \lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} - a_n = 0$$

Corollaire 2 (Suite extraite équirépartie ou non)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dense.*

— $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *extractrice, $(u_{\varphi(n)})$ est équirépartie*

— $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *extractrice,* $(u_{\varphi(n)})$ *n'est pas équirépartie*

Corollaire 3. *Des suites équiréparties de rationnels et décimaux existent.*

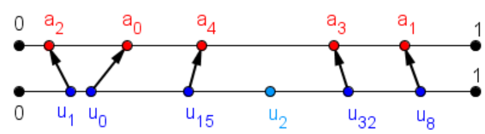
Conclusion. *D'une suite (u_n) dense, on peut extraire des suites qui "tendent" vers n'importe quelle autre suite (v_n) et si (v_n) a une propriété "transmissible", alors la suite extraite aura aussi cette propriété. Cela fonctionne en particulier pour la propriété d'équirépartition ou de densité.*

3.2 Réorganisation équirépartie des termes d'une suite dense

Ayant répondu à la question précédente, nous l'avons poussée plus loin : peut-on réordonner les termes d'une suite dense pour la rendre équirépartie ? Là encore, de prime abord, j'étais persuadé que ce n'était pas possible, puis en considérant des exemples simplifiés, je me suis dit que si. J'ai ensuite convaincu mes camarades et ai fini par trouver.

Proposition 6 (Réorganisation d'une suite calquée sur une autre)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dense.*

$$\forall (a_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}} \ \textbf{\textit{dense}}, \exists \gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ \textit{bijective}, \lim_{n\to\infty} u_{\gamma(n)} - a_n = 0$$



L'idée de la proposition précédente est simple : nous voulons calquer (u_n) dense sur (a_n) dense. Initialisons 3 files d'attente $U = [|u_0; u_1; ...|]$, $A = [|a_0; a_1; ...|]$ et $V = [||]$, et appliquons l'algorithme suivant : noter r l'indice du premier élément de U, puis prendre le premier terme a de A (a_0 puis a_1 puis a_2...) et trouver (possible car (u_n) dense) le premier terme u de U distant de $\frac{1}{r+1}$ de a (u_0 puis u_8 puis u_1...), puis ajouter u à la fin de V et retirer a de A et u de U, puis recommencer.

Avec cet algorithme, V contient le réordonnement équiréparti et, comme (a_n) est dense, tous les termes de U vont être enlevés. Ainsi, même si u_2 ne semble pas être pris dans la figure ci-dessus, il va y avoir un moment où un terme a_i de (a_n) va être très proche de u_2. u_2 sera alors le premier terme de U distant de $\frac{1}{\mathbf{2}+1}$ de a_i et sera donc enlevé de U.

Corollaire 4 (Réorganisation équirépartie ou non d'une suite)**.** *Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dense.*
— $\exists \gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *bijective,* $(u_{\gamma(n)})$ *est équirépartie*
— $\exists \gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *bijective,* $(u_{\gamma(n)})$ *n'est pas équirépartie*

Conclusion. *La seule différence entre une suite simplement dense et une suite équirépartie est l'ordre d'apparition des termes : l'équirépartition correspond tout simplement à un certain ordonnancement d'un ensemble dense. Ainsi, si parler d'ensemble dense a un sens, parler d'ensemble équiréparti n'en a pas puisque le caractère équiréparti est propre à un certain ordonnancement des éléments de l'ensemble.*

4 Problème connexe : fonctions conservant l'équirépartition

La question de la conservation de l'équirépartition après réordonnement des termes d'une suite m'a fait penser, à plusieurs reprises, à la question de la conservation de l'équirépartition de l'image d'une suite par une fonction : on pourrait voir le réordonnement comme l'application d'une fonction sur une suite. Ainsi, une fois la question du réordonnement réglée, je me suis attaché à cette dernière question.

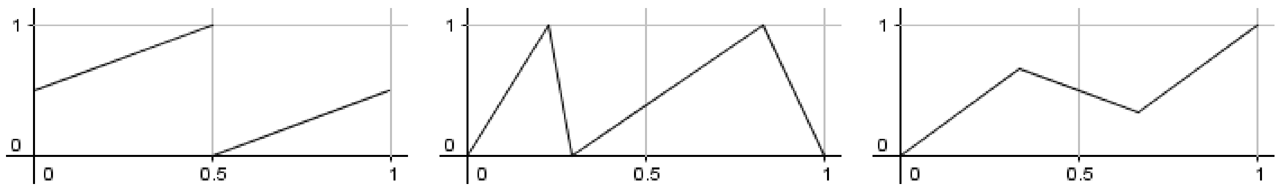
4.1 Approche intuitive

Définition 5 (Fonction conservant l'équirépartition)**.** $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ***conserve l'équirépartition*** *si :*

$$\forall (u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}} \ \textit{équirépartie}, (f(u_n)) \ \textit{est équirépartie}$$

Bien que la définition d'une fonction f conservant l'équirépartition soit simple à comprendre, se représenter de telles fonctions, autre que $Id_{[0,1]}$ ou $1 - Id_{[0,1]}$ peut être assez difficile. Déjà, si (u_n) est équirépartie, pour que $(f(u_n))$ le soit aussi, il faut que $(f(u_n))$ soit dense. On se doute alors que $\inf f = 0$ et $\sup f = 1$. Mais, ce n'est pas suffisant. Pour mieux voir, voici quelques exemples :

Exemple 5 (Fonctions discontinues et continues conservant l'équirépartition)**.** *Quelques exemples :*



4.2 Cas des fonctions continues et dérivables

Les fonctions quelconques conservant l'équirépartition étant difficilement manipulables, je me suis restreint aux fonctions continues et dérivables, et ai essayé de les caractériser.

Dès que j'ai commencé à étudier les fonctions continues conservant l'équirépartition, j'ai tout de suite été persuadé de la véracité de la proposition suivante. Pourtant, même si la démonstration fournie est simple, ce résultat est celui que j'ai eu le plus de mal à démontrer.

Proposition 7 (Caractérisation des fonctions continues conservant l'équirépartition)**.** *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *continue. Il y a équivalence entre :*

1. f *conserve l'équirépartition*
2. $\exists (u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *équirépartie,* $(f(u_n))$ *est équirépartie*

Remarque 6. *Ce résultat est faux si la fonction n'est pas supposée continue. Par exemple, si* $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *est équirépartie,* $Id \cdot \mathbf{1}_{\{u_i | i \in \mathbb{N}\}}$ *conserve l'équirépartition de* (u_n)*, mais pas de toutes les suites équiréparties.*

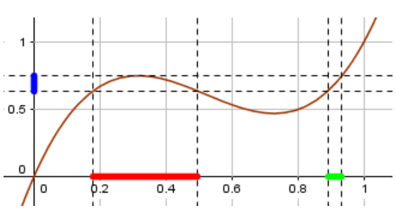
Je me suis ensuite lancé dans la caractérisation des fonctions dérivables conservant l'équirépartition.

Proposition 8. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *continue et injective. Il y a équivalence entre :*

1. f *conserve l'équirépartition*
2. $f \in \{Id_{[0,1]}, 1 - Id_{[0,1]}\}$

Proposition 9 (Caractérisation des fonctions dérivables conservant l'équirépartition)**.** *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$*. Il y a équivalence entre :*

1. f *conserve l'équirépartition*
2. $f \in \{Id_{[0,1]}, 1 - Id_{[0,1]}\}$



L'idée de la proposition précédente est que si f est dérivable et de dérivée nulle en un point (voir figure à gauche), on peut trouver un segment $[a', b']$ de $[0,1]$ (en bleu) tel que $f^{-1}([a', b'])$ contienne un segment $[a, b]$ (en rouge) plus grand que $[a', b']$. Dans ce cas, pour (u_n) équirépartie, la proportion de termes de $(f(u_n))$ dans $[a', b']$ est supérieure à celle des termes de (u_n) dans $[a, b]$, elle-même strictement supérieure à $b' - a'$. Ainsi, $(f(u_n))$ ne peut être équirépartie et la dérivée de f ne doit pas s'annuler pour que f conserve l'équirépartition : la proposition 8 permet alors de conclure.

Pour finir, les résultats précédents m'ont permis de démontrer la proposition intéressante suivante :

Proposition 10. $\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ *continue sur* $\mathbb{R}$*, périodique et dérivable sur* $]0,1[$*,* $(f(n))$ *n'est pas équirépartie.*

Remarque 7. *En particulier, les suites* $(|cos(n)|)$*,* $(\frac{1+cos(n)}{2})$*... ne sont pas équiréparties dans* $[0,1]$*.*

5 Ouverture : vers une généralisation ?

Pour finir, je me suis demandé qu'elle serait, dans un premier temps, une généralisation de la définition de l'équirépartition dans $[0,1]$ à $[0,1]^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Logiquement, ce serait la suivante :

Définition 6 (Equirépartition d'une suite)**.** $(u_n) \in ([0,1]^k)^{\mathbb{N}}$ *est **équirépartie** dans* $[0,1]^k$ *si :*

$$\forall (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k) \in ([0,1]^{2k} \text{ avec } a_1 \leq b_1, ..., a_k \leq b_k, \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in \prod_{i=1}^k [a_i, b_i]\}}{n} = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

Puis, comme l'idée de ces 2 définitions de l'équirépartition (celle dans $[0,1]$ et dans $[0,1]^k$) est la conservation de la proportion (longueur, aire, volume...), je me suis demandé s'il était possible de trouver une définition d'équirépartition plus générale que celle donnée en préambule, prenant en compte, dans $[0,1]$, les parties ayant une "longueur" en plus des segments, et pouvant s'appliquer à des ensembles comme $\mathbb{R}^n$ voire plus abstraits encore. L'étude du cours de probabilité de classe de MP et l'éclairage de mon professeur de mathématiques m'a mené à la notion de mesure et d'espace mesurable.

En sachant que la mesure est ce qui donne un sens à l'idée de "longueur", une première généralisation de la définition d'équirépartition, intuitive et trouvée à plusieurs endroits sur internet, serait de considérer un espace mesuré $(E, \mathfrak{M}, \mu)$ où E est un ensemble, $\mathfrak{M}$ une tribu sur E et μ une mesure **finie** et de dire que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est équirépartie dans E si :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in A\}}{n} = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$$

Malheureusement, cette définition n'est pas fonctionnelle car si l'on considère, par exemple, l'ensemble mesuré $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \mu)$ où $\mathfrak{B}([0,1])$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$ et μ la mesure de Lebesgue, aucune suite $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ne peut être équirépartie dans $[0,1]$. En effet, pour $A = [0,1] \backslash \{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ élément de $\mathfrak{B}([0,1])$ avec $\frac{\mu(A)}{\mu([0,1])} = \frac{1}{1} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in A\}}{n} = 0$$

Grâce à une lecture de la page 14, 15 et 16 du papier "Sato-tate distribution" de Andrew Sutherland et un fructueux échange avec l'auteur, j'ai compris que pour corriger le problème de la définition précédente, il ne faut pas prendre en compte tous les éléments A de la tribu $\mathfrak{M}$, mais seulement les éléments A **quarrables**, c'est-à-dire tels que $\mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A})$. La nouvelle définition est alors :

Définition 7 (Equirépartition d'une suite)**.** *Soit* $(E, \mathfrak{M}, \mu)$ *un espace mesuré de mesure finie.* $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *est **équirépartie** dans E si :*

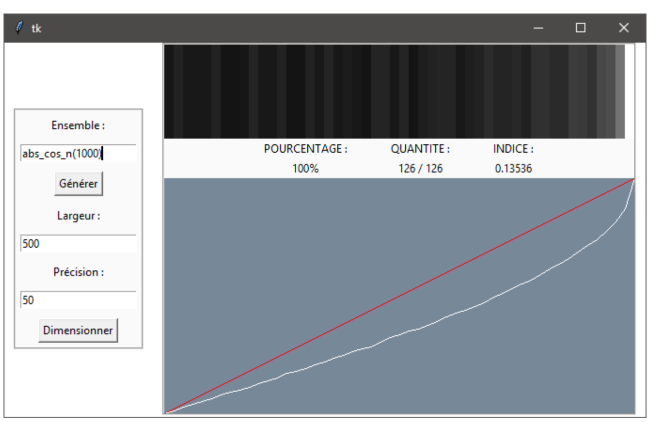
$$\forall A \in \mathfrak{M} \text{ avec } \mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A}), \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in A\}}{n} = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$$

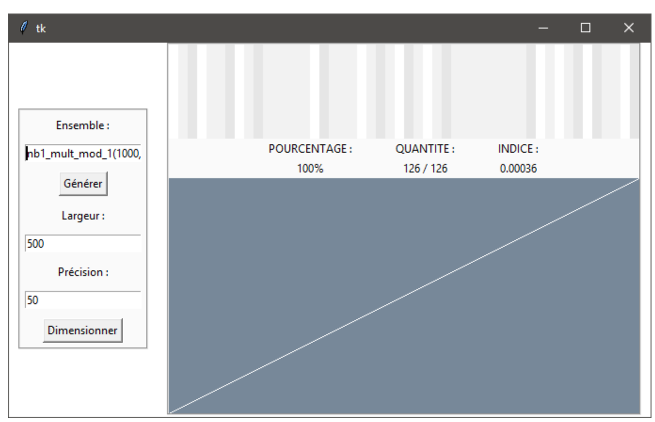
Cette définition ne présente plus le problème précédent. En effet, si $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie dans $[0,1]$ d'après la première définition, $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$ donc $A = [0,1] \backslash \{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ n'est pas quarrable puisque $\mu(\mathring{A}) = \mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\overline{A}) = \mu([0,1]) = 1$. De plus, cette dernière définition est équivalente à la première définition de l'équirépartition dans $[0,1]$ et, en adaptant la preuve fournie en annexe, à celle dans $[0,1]^k$.

Annexe

Captures d'écran du logiciel

Voici 2 captures d'écran complètes du programme obtenues pour les suites $u_n = |cos(n)|$ et $v_n = \sqrt{2} \cdot n \mod 1$:





Preuves de quelques uns des résultats présentés

Théorème 3 (Koksma). La démonstration est longue et technique et est détaillé dans les pages 32, 33, 34 et 35 du livre "Uniform distribution of sequences" de Kuipers et Niederreiter, mais je vais essayer de mettre en lumière le passage faisant intervenir le "pour presque tout $x \geq 1$" au sens de la mesure de Lebesgue.

Dans le théorème 4.1 de ce livre, l'auteur veut montrer que pour (a_n) une suite d'entiers injective, $(a_n \cdot x \mod 1)$ est équirépartie pour presque tout $x \in [0,1]$, c'est à dire que si on considère l'espace mesuré $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \mu)$ où $\mathfrak{B}([0,1])$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$ et μ la mesure de Lebesgue, il existe un ensemble $E \in \mathfrak{B}([0,1])$ tel que $\mu(E) = 0$ et que $\forall x \in [0,1] \backslash E$, $(a_n \cdot x \mod 1)$ est équirépartie.

Pour ce faire, l'auteur introduit, pour $h \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1], \quad S(N,x) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \cdot h \cdot a_n \cdot x}$$

et montre que :

$$\int_0^1 |S(N^2,x)|^2 dx = \frac{1}{N^2}$$

et donc que :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2,x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty$$

Définissons pour tout $M \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rccl} g_M : & [0,1] & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & \sum_{N=1}^{M} |S(N^2,x)|^2 \end{array}$$

(g_M) est une suite croissante de fonctions **continues** positives donc **mesurables** positives. D'après le théorème de convergence monotone (théorème 2.16 page 16 du cours "Théorie de la mesure et de l'intégration" de Gallay) :

$$\int_0^1 \sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2,x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 |S(N^2,x)|^2 dx < \infty$$

D'après la proposition 2.19 de ce même cours, $\sum_{N=1}^{\infty} |S(N^2,x)|^2 < \infty$ et donc $|S(N^2,x)|^2 \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$.

Enfin, le "pour presque tout $x \geq 1$" du théorème de Koksma est obtenu, dans le corollaire 4.1, en montrant que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $E \in \mathfrak{B}([k,k+1])$ tel que $\mu(E) = 0$ et que pour tout $x \in [k,k+1] \backslash E$, $(x^n \mod 1)$ est équirépartie. $\square$

Proposition 4 (Transmission de l'équirépartition). Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

f est uniformément continue sur $[0,1]$ donc $\lim_{n\to\infty} f(u_n) - f(v_n) = 0$. D'après le théorème de Césaro :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(v_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(u_k) - f(v_k)) = 0$$

Si (v_n) est équirépartie, d'après le théorème 1 :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(v_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(v_k) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(v_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k)$$

ce qui montre que (u_n) est équirépartie. La réciproque s'obtient en permutant les rôles de (u_n) et (v_n).

$\square$

Proposition 6 (Réorganisation d'une suite calquée sur une autre). Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(a_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ denses. Posons :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \min\{i \in \mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,n-1]\!]) \mid |u_i - a_n| \leq \frac{1}{1+\min(\mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,n-1]\!]))}\} \end{array}$$

<u>γ est injective</u> : Pour $n < m$, $\gamma(m) \in \mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,m-1]\!]) \subset \mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,n]\!]) \subset \mathbb{N} \backslash \{\gamma(n)\}$ donc $\gamma(m) \neq \gamma(n)$.

<u>γ est surjective</u> : Supposons $\mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,n-1]\!]) \neq \emptyset$. Soit $r \in \mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,n-1]\!])$. Comme $\gamma(0) = 0$, $r \geq 1$.

Comme (a_n) dense, $A = \{n > \max(\gamma^{-1}([\![0,r-1]\!])) \mid |a_n - u_r| \leq \frac{1}{1+r}\}$ est non vide. Posons $s = \min A$.

Par construction, $s - 1 \geq \max(\gamma^{-1}([\![0,r-1]\!]))$ donc $\gamma([\![0,s-1]\!]) \supset [\![0,r-1]\!]$ donc $\min(\mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,s-1]\!])) \geq r$. D'autre part, $r \in \mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,s-1]\!])$ donc $\min(\mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,s-1]\!])) \leq r$ donc $\min(\mathbb{N} \backslash \gamma([\![0,s-1]\!])) = r$.

Ainsi, $\gamma(s) = \min\{i \in \mathbb{N}\backslash\gamma([\![0, s-1]\!]) \mid |u_i - a_s| \leq \frac{1}{1+r}\}$. Comme $\min(\mathbb{N}\backslash\gamma([\![0, s-1]\!])) = r$, $\gamma(s) \geq r$. Par construction, $|u_r - a_s| \leq \frac{1}{1+r}$ donc $\gamma(s) \leq r$ donc $\gamma(s) = r$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\gamma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

$\underline{u_{\gamma(n)} - a_n \to 0}$: Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{r+1} \leq \varepsilon$. Soit $N = 1 + \max(\gamma^{-1}([\![0, r]\!]))$.
Comme $n \geq N \Rightarrow \gamma([\![0, n-1]\!]) \supset [\![0, r]\!] \Rightarrow \min(\mathbb{N}\backslash\gamma([\![0, n-1]\!])) \geq r$:

$$\forall n \geq N, |u_{\gamma(n)} - a_n| \leq \frac{1}{1 + \min(\mathbb{N}\backslash\gamma([\![0, n-1]\!]))} \leq \frac{1}{1+r} \leq \varepsilon$$

□

Proposition 7 (Caractérisation des fonctions continues conservant l'équirépartition). Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue.

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Direct d'après la définition de la conservation de l'équirépartition.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ équirépartie telle que $(f(u_n))$ équirépartie. En appliquant le théorème 1 sur $(f(u_n))$:

$$\forall g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(f(u_k)) = \int_0^1 g(t)dt$$

Or, comme f est continue, $g \circ f$ est continue. En appliquant le théorème 1 sur (u_n) :

$$\forall g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(f(u_k)) = \int_0^1 g(f(t))dt$$

ce qui donne $\forall g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 g(f(t))dt$.

Soit $(v_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ une autre suite équirépartie. En appliquant le théorème 1 dessus :

$$\forall g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(f(v_k)) = \int_0^1 g(f(t))dt = \int_0^1 g(t)dt$$

ce qui revient à dire, d'après le théorème 1, que $(f(v_n))$ est équirépartie. □

Proposition 9 (Caractérisation des fonctions dérivables conservant l'équirépartition). Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ équirépartie telle que $(f(u_n))$ soit équirépartie.

Supposons que f ne soit pas injective : $\exists (a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b, f(a) = f(b)$. D'après le théorème de Rolle, $\exists x \in]0,1[, f'(x) = 0$ ie $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\exists \eta > 0, |h| \leq \eta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\eta}{2}$$

Notons $S = [x-\eta, x+\eta]$. f étant continue, $f(S)$ est un segment inclus dans $[f(x) - \frac{\eta}{2}, f(x) + \frac{\eta}{2}]$. Comme $(f(u_n))$ est équirépartie :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{i \leq N \mid f(u_i) \in f(S)\}}{N} \leq \eta$$

Or :

$$\frac{\#\{i \leq N \mid f(u_i) \in f(S)\}}{N} = \frac{\#\{i \leq N \mid u_i \in f^{-1}(f(S))\}}{N} \geq \frac{\#\{i \leq N \mid u_i \in S\}}{N}$$

Et puisque (u_n) est équirépartie :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{i \leq N \mid f(u_i) \in f(S)\}}{N} \geq 2\eta$$

ce qui est absurde. Ainsi, f est injective. Comme f est continue, $f \in \{Id_{[0,1]}, 1 - Id_{[0,1]}\}$ d'après la proposition 8.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$: $Id_{[0,1]}$ et $1 - Id_{[0,1]}$ sont continues sur $[0,1]$, dérivables sur $]0,1[$ et conservent l'équirépartition. □

Equivalence des définitions de l'équirépartition. Si on considère l'espace mesuré $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue et $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, alors il y a équivalence entre :

1. $\forall (a,b) \in [0,1]^2$ avec $a \leq b$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in [a,b]\}}{n} = b - a$
2. $\forall A \in \mathfrak{M}$ avec $\mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A})$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in A\}}{n} = \mu(A)$

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Pour $B \in \mathfrak{B}([0,1])$, notons $C_n(B) = \frac{\#\{i \leq n | u_i \in B\}}{n}$. La suite $(C_n(B))$ est dans $[0,1]$ compact donc a une valeur d'adhérence l associée à l'extractrice φ.

Si B est ouvert, alors $B = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$ avec I au plus dénombrable et l'union disjointe.

— Si $I = [\![0, p]\!]$: $C_n(B) = \sum_{i=0}^{p} C_n(]a_i, b_i[)$ donc $\lim_{n\to\infty} C_n(B) = \sum_{i=0}^{p} b_i - a_i = \mu(B)$ donc $l \geq \mu(B)$

— Si $I = \mathbb{N}$: $\forall k \in \mathbb{N}, C_n(B) \geq \sum_{i=0}^{k} C_n(]a_i, b_i[)$ donc, par passage à la limite sur n, $\forall k \in \mathbb{N}, l \geq \sum_{i=0}^{k} b_i - a_i$ puis, par passage à la limite sur k, $l \geq \sum_{i=0}^{\infty} b_i - a_i = \mu(B)$

Dans les 2 cas, $l \geq \mu(B)$.

Soit $A \in \mathfrak{B}([0,1])$ tel que $\mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A})$ et l une valeur d'adhérence de $(C_n(A))$ associée à l'extractrice φ.

— Comme $C_n(A) \geq C_n(\mathring{A})$ et que $\mathring{A}$ est ouvert, $l \geq \mu(\mathring{A}) = \mu(A)$.

— Comme $C_n([0,1]\backslash\overline{A}) \leq C_n([0,1]\backslash A) = C_n([0,1]) - C_n(A) = 1 - C_n(A)$ et que $[0,1]\backslash\overline{A}$ est ouvert, $1 - \mu(A) = 1 - \mu(\overline{A}) = \mu([0,1]\backslash\overline{A}) \leq 1 - l$. Donc, $l \leq \mu(A)$.

Par conséquent, $l = \mu(A)$. $(C_n(A))$ est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence $l = \mu(A)$ donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n | u_i \in A\}}{n} = \mu(A)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : Le segment $S = [a, b]$ pour $(a, b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$ vérifie $\mu(\mathring{S}) = \mu(\overline{S})$. □

Bibliographie

1. Equirépartition d'une suite de nombres par CHOMETTE et BOUCEKKINE : document qui m'a fait découvrir la notion d'équirépartition
2. Uniform distribution of sequences par KUIPERS et NIEDERREITER : document fournissant les démonstrations de la caractérisation de l'équirépartition avec les fonctions continues, le critère de Weyl et le théorème de Koksma (pages 2, 8, 32, 33, 34 et 35)
3. Théorie de la mesure et de l'intégration par GALLAY : cours sur la théorie de la mesure pour généraliser la notion d'équirépartition (chapitre 1, début du chapitre 2, chapitre 3)
4. Sato-Tate distributions par SUTHERLAND : document expliquant quelle serait la définition plus générale de l'équirépartition (pages 14, 15 et 16)