Aleph (ℵ) ou la mesure de l'infini

(planche prononcée à la RL « la Clé de Voûte »)

A.L.

Introduction

Lors de la dernière tenue de la loge, des planches sur le symbolisme du nombre 3 ont été présentées, et notre F. Maurice a fait une remarque qui a évoqué en moi des souvenirs. Il disait que dans la Kabbale, le nombre « Un », représenté par la lettre Aleph (ℵ) était indicible, et que par ailleurs en symbolique, les nombres ne pouvaient à son sens, être décrits isolément, mais que les relations entre eux étaient essentielles.

Cela m'a fait penser à la théorie du mathématicien Cantor, qui, le premier, a eu l'audace de penser l'infini, ou plutôt les infinis, et d'imaginer des méthodes pour les comparer.

Le but de mon propos est d'essayer de vous présenter, aussi simplement que possible, ses méthodes et ses résultats.

Les aspects métaphysiques de ceux-ci ne vous échapperont pas.

1 L'infini simple (Aleph 0) et son exploration.

Le mot « infini » du langage courant couvre divers aspects :

infini numérique

infini géométrique

une notion plus vague qui est en fait l'indéfini.

Nous allons nous limiter ici à l'infini ou plutôt aux infinis mathématiques. Les découvertes que nous allons faire chemin faisant méritent bien cette limitation provisoire.

1.1 L'infini des nombres entiers

C'est l'idée la plus simple : chaque nombre a un successeur, et il n'y a pas de limites. Il y a l'infini des nombres pairs, celui des nombres premiers, etc...

1.2 Comment comparer deux infinis.

Georg Cantor a proposé de comparer deux infinis de la façon suivante:

ils sont de même taille si chaque élément de l'un peut être mis en correspondance avec chaque élément de l'autre, sans répétition ni manque.

Simple et logique, n'est-ce pas ? C'est bien comme cela que l'on compte les objets. La seule différence est qu'il n'y a plus de limite dans le comptage.

1.3 Des conséquences étonnantes.

Comparons donc l'infini des nombres entiers et celui des nombres pairs. Il y a une correspondance parfaite entre chaque nombre pair et un nombre entier (obtenu en le divisant par 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

Fig 1: l'infini des nombres entiers est &gal à celui des nombres pairs

L'ensemble des nombres entiers est donc de même taille que celui des nombres pairs, qui en est une partie !

La partie est donc de même taille que le tout ! Voilà qui suggère des réflexions métaphysiques...

Nous pouvons aussi montrer simplement que $\aleph \times \aleph = \aleph$(figure 2)

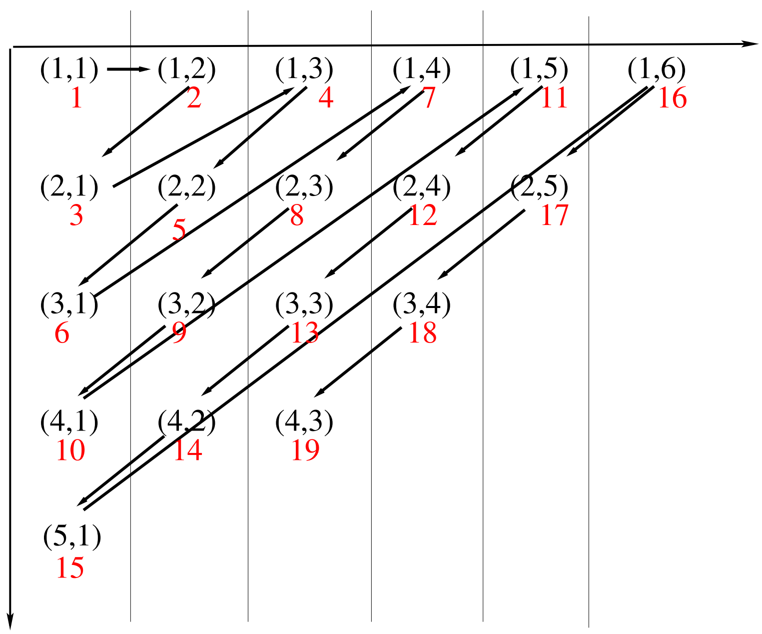


Fig 2: infini$\times$infini$=$infini

Regardons les colonnes du tableau : chacune a une infinité d'éléments notés (i,j) . Par le circuit tracé en gras, on peut associer à chacune de ces paires de nombre, un nombre entier (en rouge) sans en manquer un seul. On peut donc compter ces paires avec des entiers ; d'après la méthode de Cantor, ils sont de taille infinie équivalente.

En utilisant les mêmes méthodes, Cantor a montré que l'ensemble des nombres fractionnaires (comme 1/3=0,33333333) avait même taille que celui des nombres entiers !

Il a suggéré de désigner cet infini dénombrable par $\aleph_0$ (aleph zéro)

La question qui se pose alors est : tous les infinis sont-ils équivalents ?

2 Les autres infinis (Aleph 1) et au-delà.

La réponse de Cantor est « Non » ! Il a trouvé une méthode pour montrer que l'infini des nombres réels (il contient les entiers, les nombres fractionnaires, et bien d'autres comme ou est plus grand que celui des nombres entiers !

Et on peut montrer que l'infini géométrique est équivalent à celui-là.

L'infini continu qui les décrit tous les deux est (aleph 1)

Nous ne savons pas s'il existe des infinis plus grands qu'$\aleph_0$ et plus petit qu'$\aleph_1$.

Mais il existe encore des infinis plus grands qu'aleph un. Leur description en des termes non-mathématiques est difficile, et n'apporterait que peu aux non-mathématiciens.

3 Infiniment grand et infiniment petit

On peut se rapprocher d'un point quelconque (sur une droite, dans l'espace) infiniment près. Cet infini-là est-il différent, en taille de ceux dont nous venons de parler ?

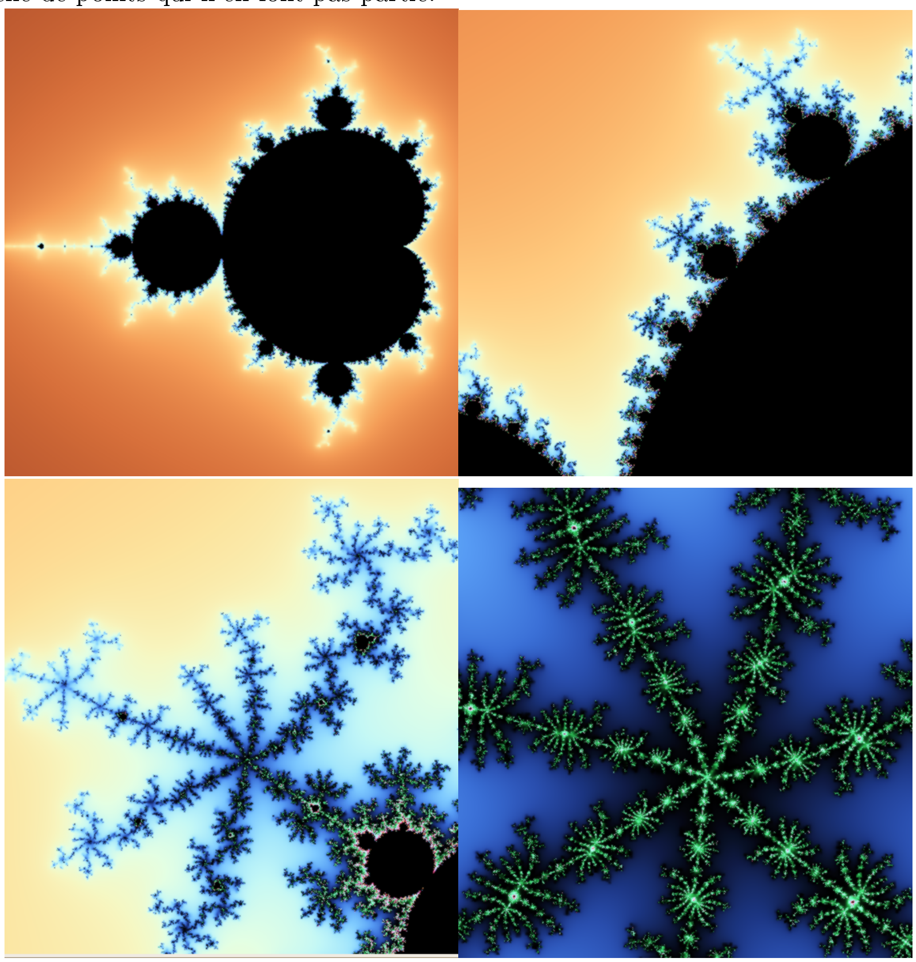
La réponse est non : il est possible de les rendre équivalents. Par exemple, on peut décrire le voisinage de zéro par sa correspondance avec l'infini, par les inverses.

Cela nous fait évidemment songer, même si c'est hors de propos, à la Table d'Emeraude :

« ce qui est en haut est comme ce qui est en bas ».

4 L'infinie complexité des propriétés de nombres

Elle est rendue perceptible par le « microscope de Mandelbrot ». Mandelbrot a montré que des nombres très voisins pouvaient avoir des propriétés très différentes. L'ensemble de Mandelbrot illustre cette propriété. Il a défini une transformation $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dans le plan des nombres complexes. Si on effectue cette opération jusqu'à l'infini, le point obtenu peut partir à l'infini, plus ou moins vite ou rester près de l'origine. La couleur des points c décrit cette propriété. En voici quelques images, à des grossissements de plus en plus grands. Elles illustrent le fait que, dans certains cas, des points infiniment voisins ont des couleurs, donc des propriétés radicalement différentes, comme les nombres réels sont infiniment voisins des nombres fractionnaires. L'infiniment petit est donc ici d'une complexité considérable. Chaque point de l'ensemble est infiniment poche de points qui n'en font pas partie.



5 Polémiques

Les mathématiciens sont gens calmes et pondérés. Pourtant, cette théorie de Cantor a provoqué de violentes disputes, qui ne sont pas terminées.

Certains d'entre eux refusent l'infini (ou les infinis) comme objet mathématique acceptable. Ce sont Poincaré, Borel, Lebesgue et une bonne partie de l'école française, mais aussi Brouwer et Weyl.

D'autres, dont les plus célèbres sont Russell et Hilbert les acceptent.

Du point de vue philosophique, Aristote avait déjà étudié le concept d'infini, comme une potentialité dérivée du fini. Il se refusait à considérer « l'infini en acte », c'est-à-dire l'infini en tant qu'ayant une existence propre, qualifiant cette idée d'inconvenante.

Le débat à ce sujet est plus que millénaire. Il recouvre le débat des mathématiciens, avec d'autres termes. L'infini en puissance, est celui que l'on envisage, comme limite du fini. On s'interdit alors de considérer ses propriétés spécifiques. L'infini en acte est celui que l'on considère, non plus comme une limite, mais comme un objet ayant son existence propre et ses propriétés.

Je ne détaillerai pas la discussion des philosophes, faute de compétence dans ce domaine. Sachons simplement que la question s'est posée à Aristote (-384 -322), et continue d'être discutée par Emmanuel Lévinas (1906-1995) deux millénaires plus tard.

Conclusion

Il s'agit ici de bien plus que des propriétés des nombres. Lorsque l'on parle de l'infini, on pense au GADl'U, sans le nommer bien sûr ! Faut-il rester dans notre condition humaine, et le penser uniquement comme limite (l'infini en puissance), ou, nous hissant au-dessus de notre condition, oser comparer les infinis?

Bibliographie :

Biographie de Georg Cantor :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
Infini, mathématiques et philosophie :
http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/FAMMARKHODJA/Infini.pdf