Run Test

```
python3 main.py
```

背景

Linear Attention

下面的公式是attention的全并行形式。

$$Q, K, V = XW_Q, XW_K, XW_V$$
$$O = \mathrm{softmax}(QK^T)V$$

下面的公式是attention的单步计算形式（预测时）：

$$o_t = \frac{\sum_{i=1}^{t} \exp(q_t k_i^T) v_i}{\sum_{i=1}^{t} \exp(q_t k_i^T)}$$

linear attention的核心是用一个kernel function将query 和key序列中的token映射到正值，然后用内积（内积的数据并行可以用矩阵乘高效实现）作为两者之间的相似性度量，$< \phi(q_i), \phi(k_i)^T >$，用来替代softmax中的$\exp(q_i, k_i^T)$。于是输出$o_t$的计算可以被简化为：

$$
\begin{aligned}
o_t &= \frac{\sum_{i=1}^{t} \phi(q_t)\phi(k_i)^T v_i}{\sum_{i=1}^{t} \phi(q_t)\phi(k_i)^T} \\
&= \frac{\phi(q_t)\sum_{i=1}^{t} \phi(k_i)^T v_i}{\phi(q_t)\sum_{i=1}^{t} \phi(k_i)^T} \\
o_t &\triangleq \frac{\phi(q_t)S_t}{\phi(q_t)z_t} && (1) \\
S_t &= S_{t-1} + \phi(k_t)^T v_t && (2) \\
z_t &= z_{t-1} + \phi(k_t) && (3)
\end{aligned}
$$

将(1)，(2)，(3)进一步简化，令$\phi = I$（indentity function)，同时舍弃归一化因子z_t于是有：

$$
\begin{aligned}
o_t &= q_t S_t && (4) \\
S_t &= S_{t-1} + k_t^T v_t && (5)
\end{aligned}
$$

式（4）和（5）就是linear attention的recurrent形式。从式（4）和（5）我们可以得到一个看待linear attention的新的视角：

1. linear attention是一个hidden state是matrix的RNN；
2. 对状态S_t的更新是以"$+$"为二元操作符，不断累加k_i和v_i的外积；$+$具有结合性，这样的一个累加过程是可并行的，可以利用parallel scan算法在序列长度级别增加并行性；
3. 如果以recurrent方式完成计算，linear attention只在序列长度上循环一次，不论是时间还是空间复杂度都不是序列长度的二次方。过程Fig 1（a）所示。但缺点是如果在一个chunk之内以recurrent方式计算，chunk之内的计算是外积、gemv和加法。他们都无法利用tensor core。

Chunkwise Parallelism

linear attention和MHA相比优点有两个：

1. 预测时，由于对状态进行了压缩，可以选择用recurrent方式计算，节约k-v cache；
2. 训练时刻，序列长度维度的并行pattern是parallel scan，当序列特别长的时候，在序列长度方向还有并行性可以利用；

linear attention存在以下两种计算模式：

	Recurrent形式	**全并行形式**
优点	I/O复杂度低， 一次在序列长度上的for循环就可以完成输出的计算	并行性高，可以利用tensor core
缺点	无法利用tensor core	时间和空间复杂度都是序列长度的二次方

可以看到recurrent计算形式和全并行计算形式的优缺点相对。chunkwise parallelism是用来trade-off两者的优点的一种并行方法。

将式（5）展开：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_0 + k_1^T v_1 \\
S_2 &= S_1 + k_2^T v_2 \\
&= S_0 + k_1^T v_1 + k_2^T v_2 \\
S_3 &= S_2 + k_3^T v_3 \\
&= S_0 + k_1^T v_1 + k_2^T v_2 + k_3^T v_3 \\
S_t &= S_0 + \sum_{i=1}^{t} k_i^T v_i \qquad \leftarrow \text{这里外积之上的连加等价于矩阵乘}
\end{aligned}
$$

最后一行外积之上的连加$\sum_{i=1}^{t} k_i^T v_i$就等于矩阵乘；如果我们将S_t分为多个chunk，每个chunk含有C个token，那么$\mathbf{S}_t$可以写成：$\mathbf{S}_t = \mathbf{K}_{[d_k,C]}^T \mathbf{V}_{[C,d_v]}$，从而利用起来tensor core计算出$S_t = K^T V$，但是要注意因为矩阵乘直接得到的是0到$C-1$时刻的累加，不暴露每一步循环的中间结果，$\mathbf{S}_t$如果得到$\mathbf{S}_t$后，通过$q_t \mathbf{S}_t$计算出来$o_t$，这样一个$o_t$始终是每一个chunk最后一个时刻的输出。

如果希望一个chunk内的计算能够利用上tensor core，需要再次切换回：$(QK^T) \odot MV$，这个和经典Transformer相同的，有着$O(C^2 d)$复杂度的计算过程，先算$\mathbf{QK}$再算$\mathbf{V}$这个视角。

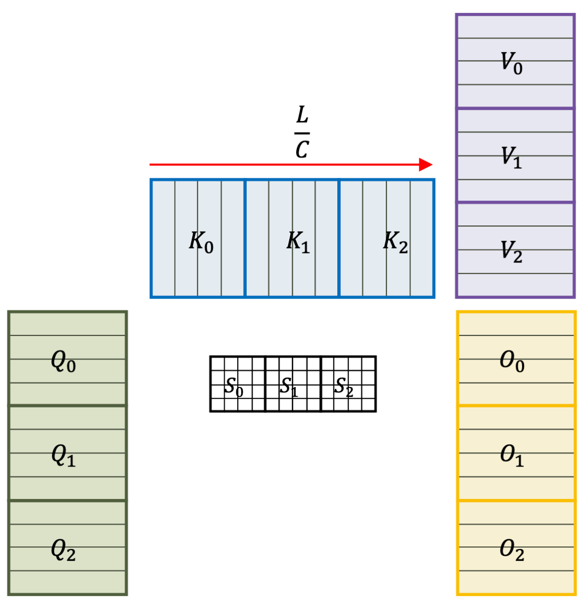
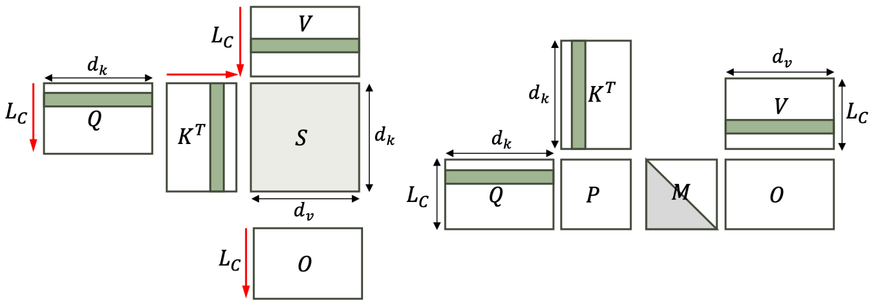


Fig 1. chunk-form linear attention.



(a) 以recurrent方式完成chunk内计算　　(b) 以矩阵方式完成chunk内计算

Fig 2. attention的chunk内计算

我们来看一下在块间累积状态：

$$\mathbf{O}_{i+1} = Q_{i+1}S_i + \left(\left(Q_{i+1}K_{i+1}^T\right) \odot M\right) V_{i+1}$$
$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{S}_i + \mathbf{K}_{i+1}^T\mathbf{V}_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, \frac{L}{C}$$

。因为外积计算先算$\mathbf{K}^T\mathbf{V}$得到状态，只能得到最后一个时间步的输出。一个长度为C的块计算输出$\mathbf{O}_{[C\times d_v]}$，需要以二次方复杂度的方式来计算当前块这个局部窗口内C个时间步的输出，也就是上面公式的蓝色部分。于是chunkwise 并行算法将整个计算过程分为两部分：

1. 每一个块独立的计算出当然块的输出和每一块最后一个时刻的状态。这一步是块间全并行方式，互相独立地完成，也就是上述公式的蓝色部分。
2. 将每一块最后一个时刻的状态在块间进行传递，也就是上述公式的红色部分。

到这里就会出现两种实现选择：

1. 第一步以更大的并行性将所有的chunk独立进行计算（相当于用kernel并行地计算上面公式中的蓝色部分，没有数据依赖），每个分块计算出状态S_i；这时候状态会占一个较大的空间（$\frac{L}{C}\times d_k \times d_v$，$C$是分块的大小，但应该比全并行方式存储$\mathbf{P}=\mathbf{KV}$占据$L\times L$要小才会有明显的受益？），存储回DRAM；第二步再用另外一个kernel，以parallel scan 方式利用序列级别的并行性，对状态进行累加，计算出最终的O（相当于用parallel scan kernel计算上面公式的红色部分），或者串行累加解决空间；
2. 为了避免将状态S存回DRAM，kernel内部在序列长度方向循环，在SRAM上计算出状态，对状态进行累加，这时候不会产生DRAM和SRAM之间的I/O，但是并行性会较小一些；

我们继续用一个hello world的例子来理解一下上面第一个公式红色和蓝色的部分所做的事情。

一个例子

假设我们以分段的方式计算0~11之上的前缀和：

Input	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
prefix-sum	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

1. **将整个序列分成三段，每段首先相互独立的计算前缀和**
   第一个chunk

Input	0	1	2	3
prefix-sum	0	1	3	6

   第二个chunk

Input	4	5	6	7
prefix-sum	4	9	15	22

   第三个chunk

Input	8	9	10	11
prefix-sum	8	17	27	38

2. **传播块间的状态，对每个chunk进行调整**
   这时chunk 2和chunk 3由于是独立计算的，需要为每一项累加之前chunk的累积状态，chunk 2的每一项都应该加上chunk 1的最后一项，chunk 3的每一项都应该加上chunk 1和chunk 2最后一项之和。
   第二个chunk

Input	4	5	6	7
调整	4+6	9+6	15+6	22+6
	10	15	21	28

   第三个chunk

Input	8	9	10	11
调整	8+28	17+28	27+28	38+28
	36	45	55	66

第一步就是红色的公式，第二步就是蓝色公式的部分。

chunk之间沿着序列长度方向对状态S_t进行累积，在序列长度方向的parallel scan（下面公式的红色部分），chunk之内以全并行或者recurrent 方式进行计算。

Gated Linear Attention Layer

Gated Linear Attention在linear attention的基础上加上input-dependent的门控，对状态进行衰减，也就是引入了下图红色的G矩阵。G_t是一个$d_k \times d_v$大小的矩阵，并且依赖于输入。

$$
\begin{aligned}
o_t &= q_t S_t & [1, d_v] &= [1, d_k] \otimes [d_k, d_v] \\
S_t &= G_t \odot S_{t-1} + k_t^T v_t & [d_k, d_v] &= [d_k, d_v] \odot [d_k, d_v] + [d_k, 1] \otimes [1, d_v]
\end{aligned}
$$

我们把GLA看做是一个RNN layer（causal形式，不attend到未来时刻，i时刻只去attend i时刻之前）由以下计算得到：

$$
\begin{aligned}
&\text{for} \quad t \in [0, L-1) \\
&\qquad s_t = s_{t-1} * g_t + k_t \otimes v_t \qquad && // \text{ 对状态进行衰减，与当前时刻状态相加} \\
&\qquad o_t = \gamma * q_t * s_t && // \text{ gemv操作}
\end{aligned}
$$

GLA在模型设计方面的贡献

如果通过full rank的方法得到G_t，那么需要$d_k \times d_k \times d_v$大小的映射矩阵，需要学习的参数会非常多；GLA通过以下2个技巧解决parameter-efficiency问题：

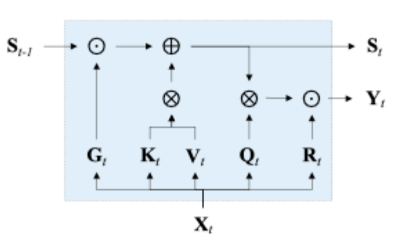
1. 第一，通过一个低秩方法得到整个序列长度级别的gating factors矩阵：

$$
G = \text{sigmoid}\left((x_{[1,d_k]} W^1_{[d_k,d_1]}) W^2_{[d_1,d_k]} \right)
$$

   也就是将输入$\mathbf{X}$先映射到一个***维度非常小的向量空间，再映射到最终的向量空间***。上面公式中两个蓝色的W矩阵是门控部分的可学习参数。
2. 第二，每个时间步的G_t矩阵通过对G的列进行扩展得到：$G_t = \left(\alpha_t^T \mathbf{1}\right)$；

通过以上两步，GLA只增加了：$d_k \times d_1 + d_1 \times d_k = 2d_1 \times d_k$ 个可学习参数得到了gating factor，其中$d_1 \lll d$，比full rank 需要的$d_k \times d_k \times d_v$方式要高效许多。

下面四行公式是gated linear attention layer在算法设计上得到的最终模型，公式（8）和（9）是linear attention部分，（10）和（11）是normalization和类似于输出门。



$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_t &= \mathbf{G}_t \odot \mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{K}_t^{\top} \mathbf{V}_t \in \mathbb{R}^{d_k \times d_v}, && (8) \\
\mathbf{O}_t &= \mathbf{Q}_t^{\top} \mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{1 \times d_v}, && (9) \\
\mathbf{R}_t &= \text{Swish}(\mathbf{X}_t \boldsymbol{W}_r + \boldsymbol{b}_r) \in \mathbb{R}^{1 \times d_v}, && (10) \\
\mathbf{Y}_t &= (\mathbf{R}_t \odot \text{LN}(\mathbf{O}_t)) \boldsymbol{W}_O \in \mathbb{R}^{1 \times d}. && (11)
\end{aligned}
$$

Fig 3. GLA layer以recurrent模式单步计算的线性代数公式

下图是GLA layer作者的实现转换为tensor operator之间的数据流依赖，对应了Fig 3。**图中GLA圈出来的部分实现了论文中的公式（8）和（9），但在实现中分成了多个kernel。**

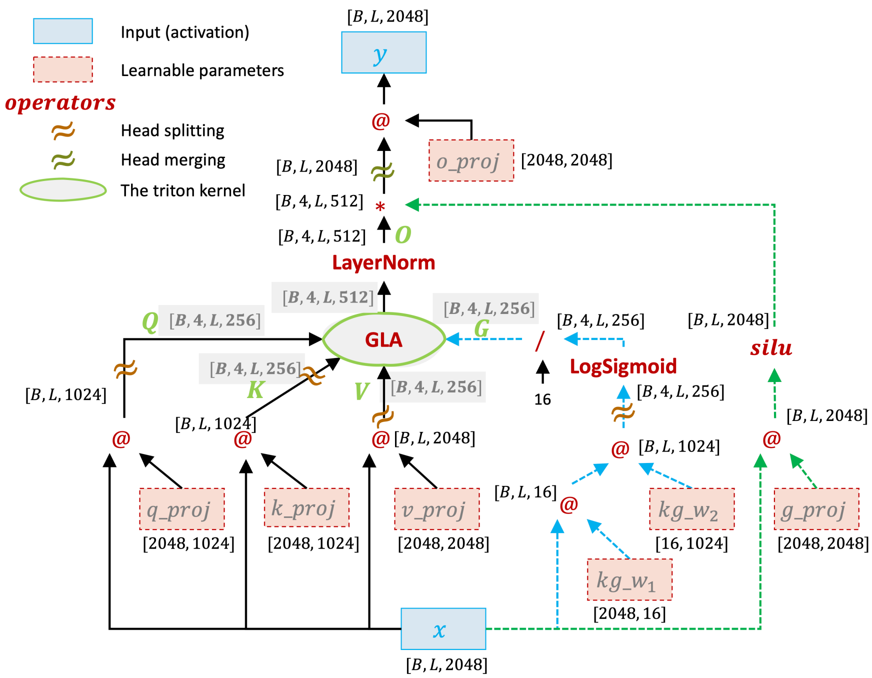


Fig 3. GLA layer的数据流依赖

从DNN模型设计的角度看GLA的数据流动，上图中蓝色虚线这一枝信息的流动起到了和传统RNN中input gate类似的功能，也是GLA这个模型中"gated"所指的部分。绿色虚线这一枝信息的流动起到了和传统RNN中output gate类似的功能。

一些注释：

1. $\text{LogSigmoid}(x) = \log \frac{1}{1+\exp(-x)}$。将sigmoid函数的输出映射到log空间，将连乘转换为对数空间的连加。

   > PyTorch里LogSigmoid计算是以2位为底的对数，作者在代码实现中通过换底公式，将LogSigmoid激活的输出乘以 $\frac{1}{\ln 2}$ （$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$ ），转换为以 e 为底的对数。然后后续会通过 2^x还原回sigmoid的输出，也就是gating的输出（gate是[0, 1)之间的一个浮点数）。

2. $\text{silu}(x) = x * \text{sigmoid}(x)$

Gated states的全并行形式

当引入G_t对状态S_t进行衰减之后，我们很容易发现上面的chunk-wise并行方式需要重新进行推导。为了得到全并行方式（或者判断一个递推式是否存在某种等价的高效全并行实现形式），我们将递推公式：$S_t = G_t \odot S_{t-1} + k_t^T v_t$进行unroll展开，于是会得到：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= G_1 \odot S_0 + k_1^T v_1 \\
S_2 &= G_2 \odot S_1 + k_2^T v_2 \\
&= G_2 \odot \left(G_1 \odot S_0 + k_1^T v_1\right) + k_2^T v_2 \\
&= G_2 \odot G_1 \odot S_0 + G_2 \odot k_1^T v_1 + k_2^T v_2 \\
S_3 &= G_3 \odot S_2 + k_3^T v_3 \\
&= G_3 \odot \left(G_2 \odot G_1 \odot S_0 + G_2 \odot k_1^T v_1 + k_2^T v_2\right) + k_3^T v_3 \\
&= G_3 \odot G_2 \odot G_1 \odot S_0 + G_3 \odot G_2 \odot k_1^T v_1 + G_3 \odot k_2^T v_2 + k_3^T v_3
\end{aligned}
$$

注意观察上面的公式，假设当前时刻为t，从1到t时刻的gating factor全部都会作用于S_0，对S_0进行衰减，也就是说距离当前时刻越远的状态对t时刻的影响越小。假设在计算每个时间步的输出o_t时，总是从0时刻开始运算，于是我们会得到以下展开的S_t计算公式。同时，上文提到在GLA这个模型中，处于效率方面的考虑G_t这个衰减矩阵来自于对向量α_t（大小$1 \times d_k$）的扩展运算，即：$G_t = \left(\alpha_t^T \mathbf{1}\right)$（这里$\mathbf{1}$的大小为$1 \times d_v$），将$G_t$的这个具体形式一并带入unrolled 的$S_t$计算公式，于是有：

$$
\begin{aligned}
S_t &= \sum_{i=1}^{t} \left(\left(\prod_{j=i+1}^{t} G_j \right) \odot \left(k_i^T v_i\right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left(\left(\prod_{j=i+1}^{t} \alpha_j^T \mathbf{1} \right) \odot \left(k_i^T v_i\right) \right)
\end{aligned}
$$

令$b_t \triangleq \prod_{j=1}^{t} \alpha_j$（这是一个沿着序列长度维度的parallel scan运算），于是S_t可以写成：

$$
\begin{aligned}
S_t &= \sum_{i=1}^{t} \left(\left(\frac{b_t}{b_i} \right)^T \mathbf{1} \right) \odot k_i^T v_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left(\left(\frac{b_t}{b_i} \right) k_i \right)^T v_i
\end{aligned}
$$

一旦采用了外积视角通过矩阵乘先计算了$\mathbf{K}^T\mathbf{V}$，得到的是到当前时刻的累加状态，而不能得到所有时刻的输出。公式$\mathbf{S}_t$得到了是chunk-wise算法中到t时刻为止的状态，这与上文讨论的非gating的chunk-wise并行计算方式是一致的，我们还需要一个能够的得到每个时间步输出的块内全并行计算。

$o_t = q_t S_t$，于是有：

$$
\begin{aligned}
o_t &= q_t \sum_{i=1}^{t} \left(\left(\frac{b_t}{b_i} \right)^T \mathbf{1} \right) \odot k_i^T v_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} (q_t \odot b_t) \left(\frac{k_i}{b_i} \right)^T v_i \\
&= (q_t \odot b_t) \sum_{i=1}^{t} {\color{blue}\left(\frac{k_i}{b_i} \right)^T v_i}
\end{aligned}
$$

gating factor同时作用于q_t和k_i。将b_i^T（$i = 0, \ldots, L$）进行stack，记作$\mathbf{B} \in (0,1)^{L \times d}$。将上面的公式写成矩阵化的形式：

$$
\mathbf{O} = \left((\mathbf{Q} \odot \mathbf{B}) \left(\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{B}} \right)^T \odot \mathbf{M} \right) \mathbf{V}
$$

公式中每一个操作数的形状为：$[C, d_v] = [C, d_k] \odot [C, d_k] \left(\frac{[C, d_k]}{[C, d_k]} \right)^T [C, d_v]$，上式就是GLA的全并行公式。如果能够提前对$\mathbf{Q}$和$\mathbf{K}$进行衰减得到$\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \odot \mathbf{B}$及$\widetilde{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{B}}$，那么$\widetilde{\mathbf{Q}}\widetilde{\mathbf{K}}^T$依然可以利用矩阵乘完成。

但是$\mathbf{B}$是一个对$(0,1)$之间浮点数沿着序列长度方向上的连乘，随着序列长度增加数值会无限趋近于0，导致计算$\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{B}}$是数值不稳定的。为了让数值计算稳定，$\mathbf{P} \triangleq (\mathbf{Q} \odot \mathbf{B}) \left(\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{B}} \right)^T \odot \mathbf{M}$，将计算转换到对数空间，将得到$\mathbf{B}$的连乘变成对数空间的连加，然后再通过exp操作转换回来原空间，于是有：

$$
\mathbf{P}_{ij} = \sum_{k=1}^{d_k} \mathbf{Q}_{i,k} \mathbf{K}_{j,k} \exp\left(\log\left(\mathbf{B}_{i,k} \right) - \log\left(\mathbf{B}_{j,k} \right) \right), \qquad i \geq j
$$

这个公式的计算pattern和矩阵乘一样，如下图所示。上式中的连加符号就是在矩阵乘的K维度进行reduce，但是可以注意由于A，B操作数（沿用矩阵乘的namning convention）需要首先和gating factor进行element-wise运算（为了使用tensor core，实现的时候会对Q和K预先完成与gating）。

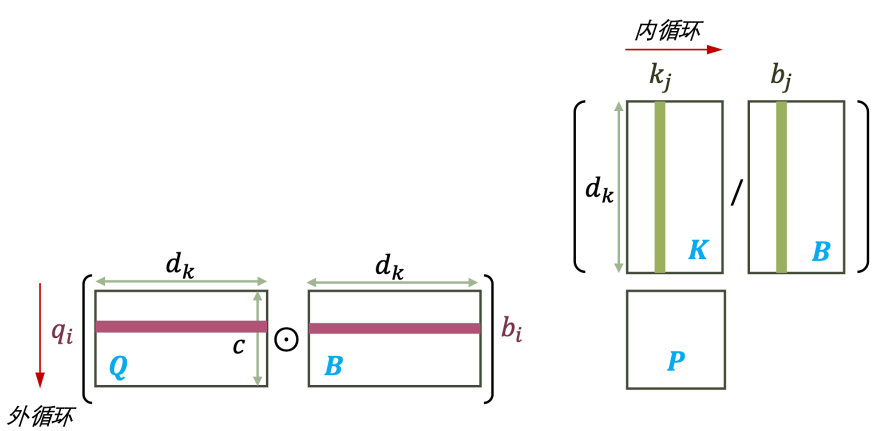


Fig.

这里我们总结一下，也就是说GLA要解决的一个问题是：引入data-dependent的门控机制对状态进行衰减，对学习效果的改善有很大帮助，但是随着序列长度的增加会引起数值不稳定问题。在对数空间的计算稳定更高，但是会无法利用起tensor core。

Chunked Fuse 的实现

分成了5步，前4步是4个triton kernel，最后一步是一个简单的相加，用了PyTorch的operator。下面的符号都尽量沿用了代码中对应的变量名，以便和代码对应。

Notation	Explanation	取值量级	
B	batch size	32	
L	sequence length	2048	
H	head number	4	
D_{qk}	query和key的hidden dimension	1024或者2048这样的量级	
D_v	value的hidden dimension	1024或者2048这样的量级	
BT	序列长度维度上的分块大小	*固定取16*	太小了
BK	D_{qk}维度上的分块大小	D_{qk}和64中的较小值	
NK	$NK=\frac{D_{qk}}{BK}$	D_{qk}维度上的分块数目	
BV	D_v维度上的分块大小	D_v和64中的较小值	
NV	$NV=\frac{D_v}{BV}$	D_v维度上的分块数目	

输入tensor	形状
Q	$[B,H,L,D_{qk}]$
K	$[B,H,L,D_{qk}]$
V	$[B,H,L,D_v]$
gK	$[B,H,L,D_{qk}]$

下面表格第3列的”数据划分“，就对应了CUDA device kernel launch config中blocks的三个维度，也就是并发blocks数目。

Kernel	数据划分	theads per CTA
$g_o = \text{fwd\_decay\_cumsum}(g)$	$NK, \frac{L}{BT}, B * H$	32
$\color{red}{q_g}, \color{red}{k_g} = \text{prepare\_qg\_kg}(q, k, g_o)$	$NK, \frac{L}{BT}, B * H$	32
$o = \text{fused\_chunk\_gla\_fwd\_kernel}(\color{red}{q_g}, \color{red}{k_g}, v, g_o, o)$	$NK, NV, B * H$	64
$o_2 = \text{fwd\_inner\_chunk}(\color{blue}{q}, \color{blue}{k}, g_o)$	$NK, \frac{L}{BT}, B * H$	128
combine inner and intra chunks	/	由PyTorch operator完成，见后面的说明

fwd_decay_cumsum

> 这个kernel是为了计算论文中的$\mathbf{B}$矩阵，在序列长度维度上进行分块，实现的时候分块大小固定为16。但是由于这个kernel在序列长度上并行分布blocks，因此gating factor的累乘只在长度为16的窗口内进行。

第1个kernel是一个很小的element-wise kernel，用来计算沿着序列长度L维度的gated factor的累乘。输入的是通过低秩方法得到的gating factor $GK_{[B,H,L,D_{qk}]}$。由于多样本和多head之间完全独立，我们总是可以忽略B，H这两个全并行维度，他们最终会映射到CUDA的blocks之上并发进行处理。于是我们始终只关注如何处理一个序列。

Fig 4是fwd_decay_cumsum这个kernel处理数据的示意图，这个kernel在G的hidden维度和序列长度维度并行。

1. 每一个CTA相互独立地处理$D_{qk} \times BT$大小的数据。
2. 这个kernel的pattern是一个2D kernel，在序列长度维度上进行scan，在G的hidden dimension上没有数据依赖，可以全并发处理。

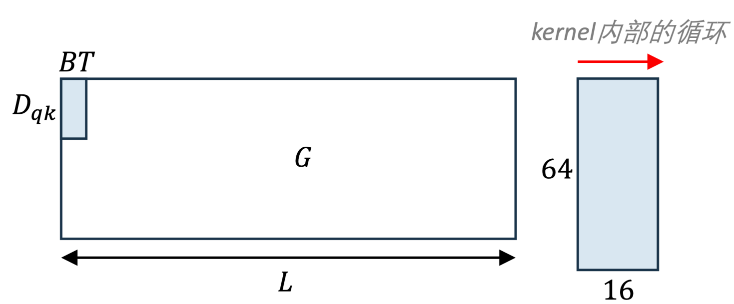


Fig 5. fwd_decay_cumsum的并行方式

这个kernel内部带有一个pattern为scan的for循环：$Y = \text{scan}\left((\vec{s}, \vec{x}) \to f, I = \vec{1}, \text{rows}(X)\right)$，$f(\vec{s}, \vec{x})$是scan携带的二元算符，公式如下：

$$f(\vec{s}, \vec{x}) = \vec{s} + \vec{x}/\ln 2$$

这个kernel**可能是为了提高并行性**，在蓝色小块内部进行了累积和运算，但是小块之间是独立的，也就是说这个kernel计算完毕后，**gating factor在每一个长度为16的local窗口内进行了累积，但是并没有在全序列长度范围内进行累积。**

prepare_qg_kg

以Q，K，V和G为输入，以和Q，K等大的Q_g和K_g为输出，给Q和K都乘以gating factor G，进行衰减。这个kernel完成的数学计算如下（实现中需要先对g计算2的幂运算，将映射到对数空间的gating factor进行还原得到sigmoid的输出，下面的公式省略了这个2的幂运算)：

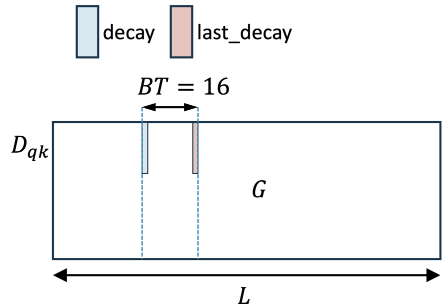
$$q_i = q_i * g_i * \gamma$$
$$k_i = k_i * (\text{last\_decay} - g_i)$$

```
load(last_decay)

for i in range(BT):
  load(_q)  # [BK]
  load(_k)  # [BK]
  load(_g)  # [BK]

  _q *= _g * scale
  _k *= (last_decay - _g)

  store(_k)
  store(_g)
```

这个kernel和 `fwd_decay_cumsum` 的分数据方式，kernel内部循环方式完全一样，也就是每个kernel依然独立地去处理Fig 4中蓝色部分的数据块。当前kernel需要读取gating factor矩阵G中D_{qk}行，BT列大小的一块数据（Fig 4蓝色方块大小）的一块数据，来看 `last_decay` 的指针偏移计算， `last_decay` 取到这块数据的最后一列。

```
last_decay = tl.load(g + i_bh * s_qk_h + (i_c * BT + BT - 1) * DK + i_k * BK
          + tl.arange(0, BK))
```

取到的数据如下图所示：



fused_chunk_gla_fwd_kernel

这个kernel完成了在整个序列长度上累积状态，本质上是一个parallel scan过程。这个kernel的分数据方案如下，这个公式的内部以recurrent模式计算linear attention，每个块是相互独立的，只有这个kernel里面的运算使用到了tensor core。

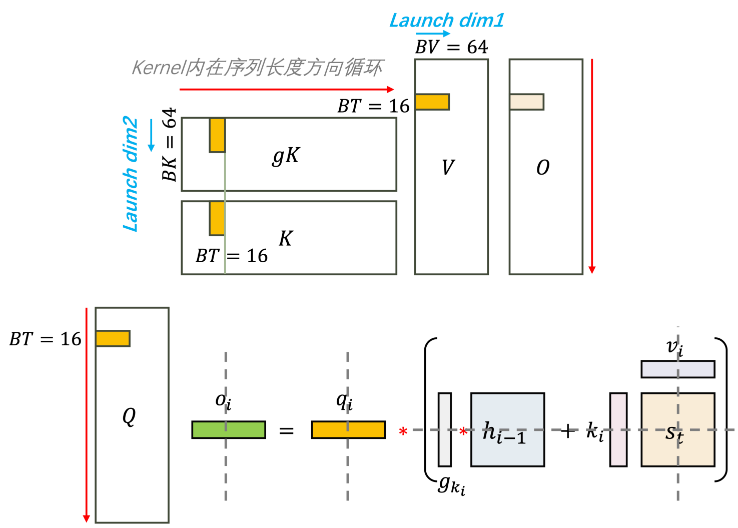


Fig 6. fused_chunk_gla_fwd_kernel的并行方式

这个kernel内部的for循环在整个序列长度方向上进行循环，每个循环步处理一个分块。h_0大小为$[d_k, d_v]$初始化为全0。

$$
\begin{aligned}
o_t &= q_t \otimes h_{t-1} \\
h_t &= h_{t-1} * g_{db} + k_t @ v_t \qquad \leftarrow \text{这里的}k_t\text{已经被gating factor调整过}
\end{aligned}
$$

第2个公式中的g_{db}对应了代码中的 `d_b` 。 `d_b` 取到了一个序列第一个分块（跨16列）的最后一列。随着kernel内的循环在序列长度分块上移动，g_{db}总是指向当前分块的最后一列，类似于 `prepare_qg_kg` 中 `last_deacy` 的作用。

```
d_b = g + i_bh * s_qk_h + (BT - 1) * s_qk_t + i_k * BK + tl.arange(0, BK)
load(d_b)
```

第二个公式中外积转换为矩阵乘，等价于在多次外积之上的累加和。

```
b_h = zeros(BK, BV)  # hidden初始化为0
for i in range(L / BT):
    load(b_k)  # b_k 形状：[BK, BT]
    load(b_v)  # b_v 形状：[BT, BV]
    load(b_q)  # b_q 形状：[BT, BK]
    load(d_b)  # d_b 形状：[BK]

    b_o = zeros(BT, BV, dtype=float32)

    b_o = b_q @ b_h  # [BT, BV] = [BT, BK] @ [BK, BV]
    b_h = b_h * d_b + b_k @ b_v  # [BK, BV] = [BK, BV] * [BK, 1] + [BK, BT] @ [BT, BV]

    store(b_o)
```

fwd_inner_chunk

这个kernel分数据的方式和kernel 1，2 完全相同。每个小分块之间完全的独立。以Q，K和G为输入，输出tensor的大小$[NK, B, H, \frac{L}{BT}, BT, BT]$。

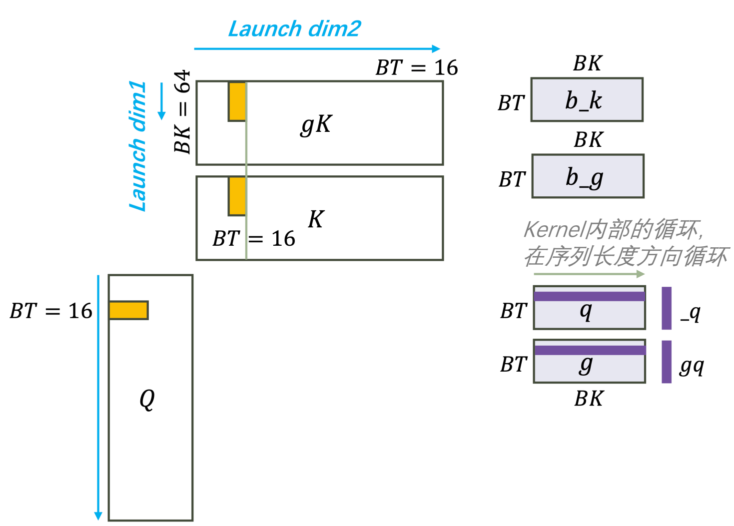


Fig 7. fwd_inner_chunk的并行方式

kernel内部的for循环在序列长度方向循环。Fig 6的右半部分是 `fwd_inner_chunk` kernel内部access数据的示意图，下面的代码是这个kernel完成的计算（下面的变量名和上图以及作者代码中的实现完全相同，方便对应回作者的代码）：

```
for i in range(BT):
  s = (_q * b_k) * (gq - b_g)  # [BT, BK]，注意这里的形状，第一个“*”和最后一个“-”是broadcast
  score = sum(s, axis=1)  # [BT, 1]，这里是在算一个q和K-chunk的内积。
  score = tl.where(o_i <= i, score, 0)  # [BT, BT]， o_i = range(0, BT)，causal mask
```

combine inner and intra

这一步是用PyTorch的tensor operator完成的。

```
# A has a shape of [NK, B, H, L/BT, BT, BT]
v2 = rearrange(v, 'b h (n c) d -> b h n c d', n=num_chunk)
A = A.sum(0)  # A是`fwd_inner_chunk的输出`，[B, H, L/BT, BT, BT]
o2 = A @ v2  # [B, H, L/BT, BT, Dv]
o2 = rearrange(o2, 'b h n c d -> b h (n c) d')  # [B, H, L, Dv]
# fwd_inner_chunk结合到这一行为止，联合起来用传统Transforer平方复杂的方式计算出了每个块之内的输出

o.add_(o2)
```