资源与地球科学学院2019~2020学年

第二学期高等数学A3多元微分单元基础题测试（2）

剪不断，理还乱，高数愁，别是多元函数在心头

1 设$u = x + \cos\dfrac{y}{2} + \mathrm{e}^{xz}$，则$\mathrm{d}u\Big|_{x=1,\ y=\pi,\ z=0} =$____________.

2 设函数$z = z(x,y)$由方程$z + \mathrm{e}^{z} + 2xy = 5$确定，则$\mathrm{d}z\Big|_{(1,2,0)} =$____________.

3 由方程$xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$所确定的函数$z = z(x,y)$在点$(1,\ 0,\ -1)$处的全微分$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0,-1)} =$________________.

4 设函数$z = z(x,y)$由方程$z - x - y + x\mathrm{e}^{z-x-y} = \sqrt{2}$所确定，则$\mathrm{d}z =$____________________.

5 设函数$z = z(x,y)$由方程$2y = z - \mathrm{e}^{2x-3z}$所确定，则$3\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} =$________.

6 函数$z = x^2 - xy + y^2$在点$(-1,1)$处沿方向$\vec{l} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$的方向导数$\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)} =$____________.

1 考虑二元函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处的下面四条性质：

①连续； ②可微； ③$f_x'(x_0,y_0)$与$f_y'(x_0,y_0)$存在； ④$f_x'(x,y)$与$f_y'(x,y)$连续.

若用“P$\Rightarrow$Q”表示由性质P可以推出性质Q，则对本题有（　　）.

（A） ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①； （B） ④$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①；

（C） ②$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①； （D） ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②.

2 设函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = a$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = b$，则下列结论正确的是（　　）.

（A） 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在，但函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处不连续；

（B） 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；

（C） 在点(x_0,y_0)处$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)} = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$；

（D） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$与$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$都存在，且相等.

3　螺旋线 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=\theta \end{cases}$（$0\le\theta\le 2\pi$）上与平面 $x+y+z=0$ 平行的切线有

（　　　）.

（A）1 条；　　（B）2 条；　　（C）3 条；　　（D）4 条.

4　设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$ 及

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　　）.

（A）　函数 $u(x, y)$ 的最大值点与最小值点都在区域 D 的内部；

（B）　函数 $u(x, y)$ 的最大值点与最小值点都在区域 D 的边界上；

（C）　函数 $u(x, y)$ 的最大值点在区域 D 的内部，最小值点在区域 D 的边界上；

（D）　函数 $u(x, y)$ 的最小值点在区域 D 的内部，最大值点在区域 D 的边界上.

5　设二元函数 $F(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $F(x_0, y_0)=0$，$F'_x(x_0, y_0)=0$，$F'_y(x_0, y_0)>0$．若一元函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的在点 (x_0, y_0) 附近的隐函数，则 x_0 是函数 $y=y(x)$ 的极小值点的一个充分条件是（　　　）.

（A）$F''_{xx}(x_0, y_0)>0$；　　（B）$F''_{xx}(x_0, y_0)<0$；

（C）$F''_{yy}(x_0, y_0)>0$；　　（D）$F''_{yy}(x_0, y_0)<0$.

6　若函数 $f(x, y)=ax^2+bxy-y^2$ 有一个唯一极大值 $f(0, 0)$，则常数 a、b 应满足（　　　）.

（A）$a>-\dfrac{b^2}{4}$　　（B）$a<\dfrac{b^4}{4}$　　（C）$a<-\dfrac{b^2}{4}$　　（D）上述结论都不正确

1　设函数 $z=z(x, y)$ 是由方程 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 确定的二元函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2　设变量代换 $\begin{cases} u=x+a\sqrt{y}, \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化　为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试确定 a 值.

3　设二元函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可微，在 D 的边界曲线上

$u(x, y)=0$，并满足关系式$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u(x, y)$，求$u(x, y)$的表达式.

4　求λ的值，使曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦

限内相切，并求出在切点处两曲面的公共切平面方程.

5　求过直线L:$\begin{cases}3x-2y-z=5,\\ x+y+z=0\end{cases}$与曲面$2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$相切的　切平面方程.

设l是曲面$z=y^2+x^3y$上的一条曲线在点$P(2,1,9)$处的切线，

6　若l在xOy面上的投影平行于直线$y=x$，求该切线l的方程.

1　设二元函数$z=z(x, y)$具有二阶连续偏导数，证明方程

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$可经过变量替换$u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z$化为方程

$2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-1=0$.

2　设函数$f(x, y)=(y-x^2)(y-2x^2)$，试证明：

（1）对任意的常数k，$f(0, 0)$是函数$f(x, y)$在约束条件$y=kx$下的极小值；

（2）$f(0, 0)$不是函数$f(x, y)$的极小值.

注：考察全微分运算。

解：因为 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x-\sin\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{2}+\mathrm{e}^{xz}(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)$，所以 $\mathrm{d}u\big|_{x=1,\ y=\pi,\ z=0}=\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$.

注：考察全微分运算。

解：方程 $z+\mathrm{e}^z+2xy=5$ 两边同时求微分，有 $\mathrm{d}z+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$，解得

$\mathrm{d}z=-\dfrac{2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)}{1+\mathrm{e}^z}$，所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2,0)}=-\dfrac{2(2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)}{2}=-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

注：考察全微分、隐函数求导。

解：方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 同时求微分，有

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0 .$$

用 $x=1$、$y=0$、$z=-1$ 代入上式，有 $-\mathrm{d}y+\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}}{\sqrt{2}}=0$，解得

$$\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y .$$

注：考察全微分运算。

解：方程 $z-x-y+x\mathrm{e}^{z-x-y}=\sqrt{2}$ 两边同时求微分，有

$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{z-x-y}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{z-x-y}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0 ,$$

解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-y-x}}{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

注：考察求偏导运算。

解：方程 $2y=z-\mathrm{e}^{2x-3z}$ 两边同时对 x 求导，有 $0=\dfrac{\partial z}{\partial x}-\mathrm{e}^{2x-3z}(2-3\dfrac{\partial z}{\partial x})$；

方程 $2y=z-\mathrm{e}^{2x-3z}$ 两边同时对 y 求导，有 $2=\dfrac{\partial z}{\partial y}-\mathrm{e}^{2x-3z}(-3\dfrac{\partial z}{\partial x})$；

由此解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，所以 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}+2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2$.

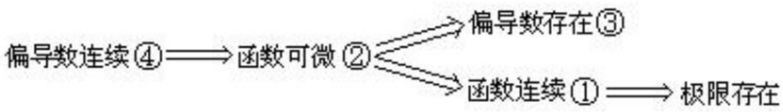
注：考察方向导数的计算。

解：因为$\mathbf{grad}z(-1,1)=(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x})\Big|_{(-1,1)}=(2x-y,-x+2y)\Big|_{(-1,1)}=(-3,3)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)}=\mathbf{grad}z(-1,1)\cdot\vec{e}_l=\mathbf{grad}z(-1,1)\cdot\vec{l}=(-3,\cdot 3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)=-\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

注：考察多元函数的连续、可微、偏导存在等概念。

解：根据多元函数几个概念的树状图：



成立的有④⇒②⇒③ 或 ④⇒②⇒①，可选项只有（B）.

注：考察多元函数连续与偏导数的概念。

解：因为$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=a$存在，且分母极限为零，有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)]=0$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$存在，同理$\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$存在，选（D）.

（A）、（B）、（C）的排除都用例子：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

在点$O(0,0)$处，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在（沿$y=0$取极限其值为0；沿$y=x$取极限其值为$\frac{1}{2}$），从而也不连续，进而也不可微.

注：考察偏导数的几何应用。

解：设切点对应的参数为$\theta=\theta_0$，则切线的方向向量为

$\vec{T}=(x'(\theta_0),y'(\theta_0),z'(\theta_0))=(-\sin\theta_0,\cos\theta_0,1)$，

而平面$x+y+z=0$的法向量$\vec{n}=(1,1,1)$，由已知有$\vec{n}\perp\vec{T}$，于是$\vec{n}\cdot\vec{T}=0$，即$-\sin\theta_0+\cos\theta_0+1=0$，解得$\theta_0=\frac{\pi}{2}$或$\theta_0=\pi$，所以螺旋线上与平面$x+y+z=0$平行的切线有两条（它们是$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\pi/2}{-1}$及$\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-\pi}{-1}$），选（B）.

注：考察多元函数取极值的条件。

解: 由于函数$u(x, y)$在有界闭区域D上具有二阶连续偏导数，则函数$u(x, y)$在区域D上一定有最大值与最小值．若最大（小）值在区域内部取得，则它一定是极大（小）值，设该极值点为P，记$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big|_P$、$B=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big|_P$、$C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big|_P$，根据已知条件$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}>0$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，有$AC-B^2<0$，由极值充分条件得函数$u(x, y)$在$P$点不取极值，相互矛盾，所以函数$u(x, y)$的最大值点与最小值点都在区域$D$的边界上，选（B）.

注：考察偏导数的应用。

解：由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{x=x_0}=-\frac{F_x'(x_0, y_0)}{F_y'(x_0, y_0)}=0$，知$x=x_0$是函数$y=y(x)$的一个驻点.

方程$F(x, y)=0$两边同时对x求导，有$F_x'(x, y)+F_y'(x, y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，对$x$再求一次导，得$F_{xx}''(x, y)+F_{xy}''(x, y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[F_{yx}''(x, y)+F_{yy}''(x, y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_y'(x, y)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$，

将点(x_0, y_0)代入，有$F_{xx}''(x_0, y_0)+F_y'(x_0, y_0)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$，解得$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=x_0}=-\frac{F_{xx}''(x_0, y_0)}{F_y'(x_0, y_0)}$，

根据一元函数极值的第二充分条件，要使$x=x_0$为函数$y=y(x)$的极小值点，应有$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=x_0}=-\frac{F_{xx}''(x_0, y_0)}{F_y'(x_0, y_0)}>0$，而$F_y'(x_0, y_0)>0$，所以必须$F_{xx}''(x_0, y_0)<0$，选（B），同时排除（A）.

（C）、（D）的排除可以用例子：$F(x, y)=y-x^2$在$O(0, 0)$点满足题目的所有条件，且方程$F(x, y)=0$所确定的函数$y=x^2$在点$x=0$处取极小值，但是$F_{yy}''(0, 0)=0$.

注：考察多元函数极值的判定。

解：$f_x'(x, y)=2ax+by$、$f_y'(x, y)=bx-2y$，显然$f_x'(0, 0)=f_y'(0, 0)=0$.

又$A=f_{xx}''(0, 0)=2a$、$B=f_{xy}''(0, 0)=b$、$C=f_{yy}''(0, 0)=-2$.

根据二元函数极值的充分条件，应有$AB-B^2>0$、$A<0$，于是$-4a-b^2>0$，$a<0$，即$a<-\frac{b^2}{4}$，选（C）.

注：考察隐函数求高阶偏导。

解：方程 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 两边同时对 x 求导，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{1+\mathrm{e}^z}$；

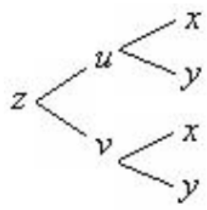
方程 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 两边同时对 y 求导，有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}+\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^z}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{1+\mathrm{e}^z}$ 两边同时对 x 再求导，得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{-y\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y^2\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{1+\mathrm{e}^z}$ 两边同时对 y 再求导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}-\frac{y\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}-\frac{xy\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}.$$

注：考察复合函数求偏导。



解：将 u、v 视为之间变量，按复合函数链式法则求偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{a}{2\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{y\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

将其代入到程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 之中，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

要将原方程化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，必有 $\begin{cases}1-\dfrac{a^2}{4}=0,\\ 2-a\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=-2$.

注：考察偏导数的应用。

解：显然$u(x，y)\equiv 0$满足题目条件，下面证明只有$u(x，y)\equiv 0$才满足题目条件.

事实上，若$u(x，y)$不恒等于零，则至少存在一点$(x_1，y_1)\in D$，使得$u(x_1，y_1)\neq 0$，不妨假设$u(x_1，y_1)>0$（$u(x_1，y_1)<0$同理可证），由于有界闭区域上连续函数一定有最大（小）值，根据在D的边界曲线上$u(x，y)=0$，而$u(x_1，y_1)>0$，所以$u(x，y)$在D内取得最大值，设最大值点为$P(x_0，y_0)$，即$u(P)=M>0$.

因为$u(x,y)$在D上可微，所以必有$\dfrac{\partial u(P)}{\partial x}=0$、$\dfrac{\partial u(P)}{\partial y}=0$，由在$D$上$u(x，y)$满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u(x，y)$，则$\dfrac{\partial u(P)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(P)}{\partial y}=u(P)=0$，这与$u(P)=M>0$矛盾，所以在$D$上$u(x，y)\equiv 0$.

注：考察偏导数的几何应用。

解：曲面$xyz=\lambda$在点$M(x，y，z)$处的法向量为$\vec{n}_1=(yz，zx，xy)$；

曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在点$M(x，y，z)$处的法向量为$\vec{n}_2=(\dfrac{x}{a^2}，\dfrac{y}{b^2}，\dfrac{z}{c^2})$.

由两曲面在点M处相切，有$\vec{n}_2 // \vec{n}_2$，于是$\dfrac{x}{a^2yz}=\dfrac{y}{b^2zx}=\dfrac{z}{c^2xy}$，令该比值为$t$，则$\dfrac{x^2}{a^2xyz}=\dfrac{y^2}{b^2xyz}=\dfrac{z^2}{c^2xyz}=t$，进而$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=txyz=\lambda t$，即$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=3\lambda t$，所以$3\lambda t=1$，由此得$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}$，由于$x>0，y>0，z>0$，解得共切点坐标为$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}，y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}，z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，进而得$\lambda=xyz=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$.

这时法向量取为$\vec{n}=\vec{n}_1=(yz，xz，xy)=\dfrac{1}{3}(bc，ac，ab)$，公共切平面方程为

$$\frac{bc}{3}(x-\frac{a}{\sqrt{3}})+\frac{ac}{3}(y-\frac{b}{\sqrt{3}})+\frac{ab}{3}(z-\frac{c}{\sqrt{3}})=0，化简得\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}.$$

注：考察偏导数的几何应用。

解：设 $F(x,y,z)=2x^2-2y^2+2z-\frac{5}{8}$，则 $F'_x=4x$， $F'_y=-4y$， $F'_z=2$．

设过直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$ 相切的切平面方程为

$3x-2y-z-5+\lambda(x+y+z)=0$，即 $(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0$．该切平面的法向量为 $(3+\lambda,\lambda-2,\lambda-1)$．

设曲面与切平面的切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$\begin{cases}\dfrac{3+\lambda}{4x_0}=\dfrac{\lambda-2}{-4y_0}=\dfrac{\lambda-1}{2}\overset{命}{=}t, & (1)\\(3+\lambda)x_0+(\lambda-2)y_0+(\lambda-1)z_0-5=0, & (2)\\2{x_0}^2-2{y_0}^2+2z_0=\dfrac{5}{8}, & (3)\end{cases}$$

由(1)、(2)解得： $x_0=\dfrac{2+t}{2t},y_0=-\dfrac{2t-1}{4t},z_0=-\dfrac{15}{8t^2}$，

代入(3)式，得到 $t^2-4t+3=0$，求得 $t_1=1$ 或 $t_2=3$，进而可求得 $\lambda_1=3$ 或 $\lambda_2=7$．

故所求切平面方程为：

$3x-2y-z-5+3(x+y+z)=0$ 或 $3x-2y-z-5+7(x+y+z)=0$，

即 $6x+y+2z=5$ 或 $10x+5y+6z=5$．

注：考察偏导数的几何应用。

解：（方法 1）设 l 的方向向量 $\vec{T}$ 曲面 $z=y^2+x^3y$ 上在点 $P(2，1，9)$ 处的法向量为 $\vec{n}$，则

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ -1\right)\Big|_P=(3x^2y，2y+x^3，-1)\big|_P=(12，10，-1)\ .$$

由题意知 l 平行于平面 $y=x$，该平面的法向量 $\vec{n}_1=(-1,\ 1,\ 0)$，于是有 $\vec{T}//\vec{n}$，且 $\vec{T}//\vec{n}_1$，

故取. $\vec{T}=\vec{n}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\12&10&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}=(1，1，22)$.

所求切线 l 的方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-9}{22}$.

（方法 2）曲面 $z=y^2+x^3y$ 上在点　处的法向量为 $\vec{n}$，则

$$\vec{n}=(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)\Big|_P=(3x^2y, 2y+x^3, -1)\Big|_P=(12, 10, -1),$$

曲面 $z=y^2+x^3y$ 在点 $P(2, 1, 9)$ 处的切平面 π 的方程为 $12(x-2)+10(y-1)-(z-9)=0$，即 $12x+10y-z-25=0$.

根据已知 l 关于 xOy 平面的投影柱面（平面）π_1 的方程可以设为 $x-y+D=0$，由于该平面过点 $P(2, 1, 9)$，有 $2-1+D=0$，得 $D=-1$，故 π_1 的方程为 $x-y-1=0$.

由于 l 既在 π 上，又在 π_1 上，所以切线 l 的方程为 $\begin{cases}12x+10y-z-25=0,\\ x-y-1=0.\end{cases}$

注：考察求偏导的运算。

证明：因为所给函数基本都是具体函数，所以采用代入法，由 $u=x+y$，$v=x-y$，解得 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，从而 $w=\frac{u^2-v^2}{4}-z(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$，所以

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{2}u-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(u-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}(1-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{2})=\frac{1}{4}[2-(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})],$$

于是，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$，即 $2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-1=0$.

注：考察偏导数的应用。

解：（1）将约束条件 $y=kx$ 代到目标函数 $f(x, y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 之中，记

$$F(x)=f(x,kx)=(kx-x^2)(kx-2x^2)=2x^4-3kx^3+k^2x^2,$$

由 $F'(x)=8x^3-9kx^2+2k^2x=0$，可知 $x=0$ 是函数 $F(x)$ 的驻点.

若 $k=0$，则 $F(x)=2x^4$，显然 $f(0,0)=F(0)$ 的是函数 $f(x, y)$ 在约束条件 $y=kx$ 下的极小值；

若 $k\neq 0$，$F''(x)=24x^2-18kx+2k^2$，$F''(0)=2k^2>0$，于是 $f(0,0)=F(0)$ 的是函数 $f(x, y)$ 在约束条件 $y=kx$ 下的极小值.

所以对任意的常数 k，$f(0, 0)$ 是函数 $f(x, y)$ 在约束条件 $y=kx$ 下的极小值.

（2）$f(0,0)=0$，而

$$f(x,y)\Big|_{y=3x^2,x\neq 0}=(3x^2-x^2)(3x^2-2x^2)=2x^4>0;$$

$$f(x,y)\Big|_{y=3x^2/2,x\neq 0}=(\frac{3}{2}x^2-x^2)(\frac{3}{2}x^2-2x^2)=-\frac{1}{4}x^4<0,$$

这表明，在 $(0,0)$ 的任何邻域内，函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 既可以取正值，又可以取负值，所以 $f(0,0)=0$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值，当然也不是函数 $f(x,y)$ 的极小值.