资源与地球科学学院2019~2020学年

第二学期高等数学A3空间解析几何单元测试

1 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{c}$是两两垂直的单位向量，设$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，则$|\vec{u}|=$________.

2 设$\vec{a}$、$\vec{b}$为非零向量，且满足$(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，

则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为____________.

3 设向量$\vec{a}=\{3,5,-2\}$，$\vec{b}=\{2,1,4\}$，若$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与z轴垂直，则$\lambda=$_______.

4 若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$_______.

5 设平面π位于平面π_1：$x-2y+z-2=0$与平面π_2：$x-2y+z-6=0$之间，

且将此两平面的距离分为1：3，则平面π的方程为（　　　）.

（A）　π：$x-2y+z=0$；　　　　（B）　π：$x-2y+z+8=0$；

（C）　π：$x-2y+z-8=0$；　　　　（D）　π：$x-2y+z-3=0$.

6 设空间曲线Γ的参数方程为：$x=t$，$y=1+t^2$，$z=1-t^3$.

问曲线Γ哪点处的切线与平面$3x+z=0$平行，并写出对于的切向量；

7　求过原点，且过点 $P(1,-1,0)$ 到直线 $L:\begin{cases}x=z-3\\y=2x-4\end{cases}$ 的垂线的平面方程

注：考察向量的模运算，几何意义.

解：因为 $|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=1+1+1=3$$

所以 $|\vec{u}|=\sqrt{3}$.

注：考察向量的内积运算.

解：设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，由 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，有

$0=(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\vec{a}\cdot\vec{a}-15\vec{b}\cdot\vec{b}+16\vec{a}\cdot\vec{b}=7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+16|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$；（1）

由 $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，有

$0=(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}\cdot\vec{a}+8\vec{b}\cdot\vec{b}-30\vec{a}\cdot\vec{b}=7|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2-30|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，　（2）

（2）式与（1）式相减，有

$23|\vec{b}|^2-46|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$，由于 $\vec{b}\neq\vec{0}$，得 $|\vec{b}|-2|\vec{a}|\cos\theta=0$.　（3）

（1）式的 15 倍与（2）式的 8 倍相加，有

$$161|\vec{a}|^2-161|\vec{b}|^2=0,$$

于是 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，将其代入到（3）式之中，有 $1-2\cos\theta=0$，即 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

注：考察向量的内积运算.

解：$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\{3\lambda+2，5\lambda+1，-2\lambda+4\}$，由 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 z 轴垂直，有 $-2\lambda+4=0$，得 $\lambda=2$.

注：考察向量的混合积运算. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]$ 的绝对值表示以 $\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}$ 为边的平行六面体的体积.

解：根据混合积的定义，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]$，于是 $[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]=2$.

$$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$=[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]+[\vec{a}，\vec{b}，\vec{a}]+[\vec{a}，\vec{c}，\vec{a}]+[\vec{b}，\vec{c}，\vec{c}]+[\vec{b}，\vec{c}，\vec{a}].$$

由混合积的性质，$[\vec{a}，\vec{b}，\vec{a}]=0$、$[\vec{a}，\vec{c}，\vec{a}]=0$、$[\vec{b}，\vec{c}，\vec{c}]=0$、

$[\vec{b}，\vec{c}，\vec{a}]=[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]$，所以

$$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=2[\vec{a}，\vec{b}，\vec{c}]=4.$$

注：考察平行平面的距离公式.

解：平面 π_1 与 π_2 之间的距离为 $\dfrac{|-6+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}$.

设所求平面方程为 π：$x-2y+z+D=0$，则 π 与 π_1 的距离应为 $d_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，π 与 π_2 的距离应为 $d_2=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$，而 $d_1=\dfrac{|D+2|}{\sqrt{6}}$、$d_2=\dfrac{|D+6|}{\sqrt{6}}$，于是 $|D+2|=1$、$|D+6|=3$，得 $D=-3$，所以所求平面方程为 π：$x-2y+z-3=0$，选（D）.

解：（1）设切点对应参数为 $t=\tau$，则切向量为 $\vec{T}=(1，2\tau，-3\tau^2)$.

而平面 $3x+z=0$ 的法向量为 $\vec{n}=(3，0，1)$，根据题设，有 $\vec{n}\cdot\vec{T}=0$，即 $3-3\tau^2=0$，得 $\tau=\pm1$，所求点为 $P_1(1，2，0)$、$P_2(-1，2，2)$，该两点处的切向量分别为

$$\vec{T}_1=(1，2，-3)、\vec{T}_2=(1，-2，-3).$$

解：由已知得 L 的方向向量 $\vec{s}=(-1,-2,-1)$

过点 P 做直线 L 的垂直平面，其方程为 $(x-1)+2(y+1)+z=0$，即 $x+2y+z+1=0$

设交点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线 L 与此平面的交点，解得 $x_0=\dfrac{2}{3},y_0=-\dfrac{8}{3},z_0=\dfrac{11}{3}$

由于所求平面过原点，可设其方程为 $Ax+By+Cz=0$

将 P 、 P_0 坐标代入上方程得：$\begin{cases}A-B=0\\ \dfrac{2}{3}A-\dfrac{8}{3}B+\dfrac{11}{3}C=0\end{cases}$，解得 $A=B=\dfrac{11}{6}C$

故所求平面方程为 $11x+11y+6z=0$