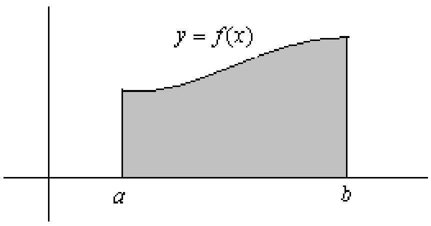
第 10 章　定积分的应用

§1　平面图形的面积

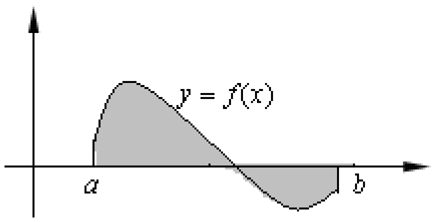
【一】由连续函数表示的曲线

【1】如图面积



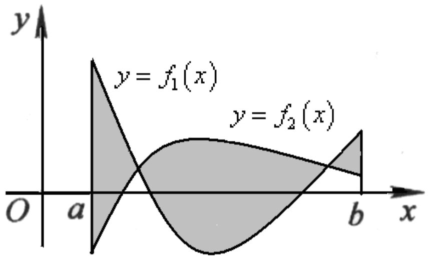
$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

【2】如图面积



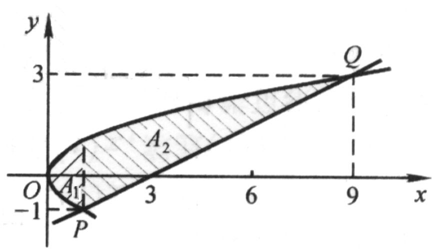
$$A=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

【3】如图面积



$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$$

【例 1】[P222] 求由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $x-2y-3=0$ 所围平面图形的面积 A .



解法 1　先求出抛物线与直线的交点 $P(1,-1)$ 与 $Q(9,3)$。用 $x=1$ 把图形分为左、右两部分，分别求得它们的面积为

$$A_1=\int_0^1\left[\sqrt{x}-\left(-\sqrt{x}\right)\right]dx=2\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{4}{3},$$

$$A_2=\int_1^9\left(\sqrt{x}-\frac{x-3}{2}\right)dx=\frac{28}{3}.$$

所以 $A=A_1+A_2=\dfrac{32}{3}$.

解法 2　$x=y^2=g_1(y),x=2y+3=g_2(y),y\in[-1,3]$

$$A=\int_{-1}^3\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy=\int_{-1}^3\left(2y+3-y^2\right)dy=\frac{32}{3}.$$

【二】由参数方程表示的曲线

【1】设曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$$

给出。$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，$x(t)$ 连续可微且 $x'(t)\neq 0$。记 $a=x(\alpha),b=x(\beta)$（$a<b$ 或 $b<a$），则由曲线 C 及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围的图形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta\left|y(t)x'(t)\right|\mathrm{d}t$$

证　由 $x'(t)\neq 0$，知 $x'(t)>0$ 或 $x'(t)<0$。

当 $x'(t)>0$ 时，$a<b$。$x=x(t)$ 有反函数 $t=\varphi(x)$。因此所求面积

$$A=\int_a^b\left|y[\varphi(x)]\right|\mathrm{d}x\overset{\text{换元}}{\underset{x=x(t)}{=\!=\!=}}\int_\alpha^\beta\left|y(t)\right|x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

当 $x'(t)<0$时，$a>b$。

$$A=\int_b^a\left|y[\varphi(x)]\right|\mathrm{d}x\overset{\text{换元}}{\underset{x=x(t)}{=\!=\!=}}\int_\beta^\alpha\left|y(t)\right|x'(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\left|y(t)\right|\left(-x'(t)\right)\mathrm{d}t$$

综上 $A=\int_\alpha^\beta \left|y(t)x'(t)\right|\mathrm{d}t.$

【2】设简单封闭曲线 C 参数方程

$$x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$$

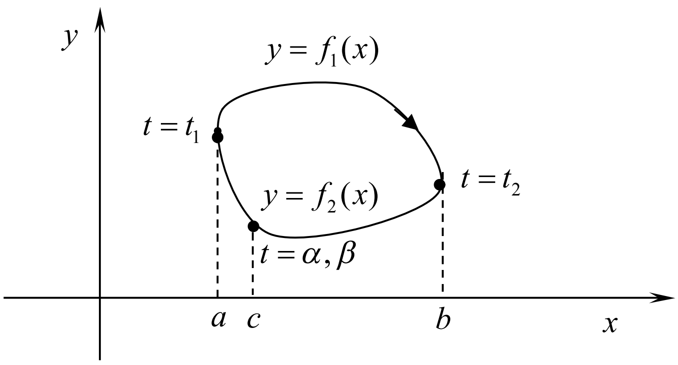
给出。即

$$x(\alpha)=x(\beta), y(\alpha)=y(\beta)$$

且在 (α,β) 内曲线自身不再相交。若 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，$x(t)$ 连续可微，那么由曲线 C 自身所围图形的面积为

$$A=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right|$$

证 设曲线如下图（顺时针旋转）



记 $a=x(t_1), b=x(t_2), c=x(\alpha)=x(\beta)$，则

$$A=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\left[\int_a^c f_2(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f_2(x)\mathrm{d}x\right]$$

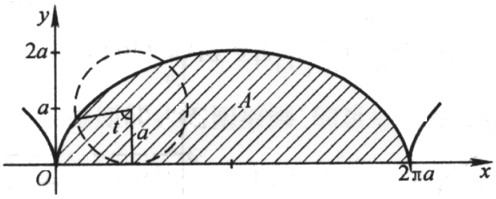
$$=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt-\left[\int_{t_1}^{\alpha} y(t)x'(t)dt+\int_{\beta}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right]$$

$$=\int_\alpha^{t_1} y(t)x'(t)dt+\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt+\int_{t_2}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

如果曲线是逆时针旋转，类似可得 $A=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$。

【例 2】 [P244]求由摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积。



解　$A=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\left[a(t-\sin t)\right]'\,\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t=3\pi a^2$

【例 3】[P223]　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围的面积。

解　$x=a\cos t,y=b\sin t,t\in[0,2\pi]$(这是逆时针旋转)

$$A=-\int_0^{2\pi}b\sin t\left(a\cos t\right)'\,\mathrm{d}t=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi ab$$

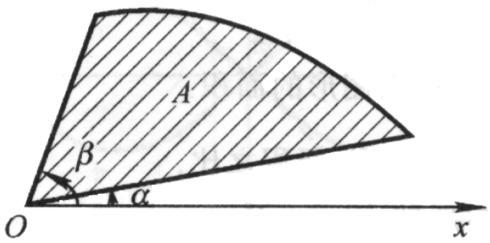
特别地，当$a=b=r$时，圆的面积为$A=\pi r^2$。

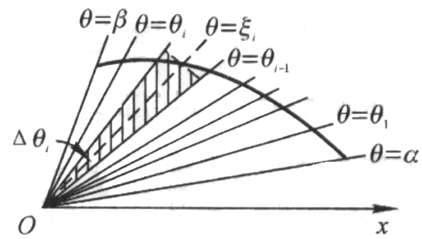
【三】由极坐标方程表示的曲线

设曲线C由极坐标方程

$$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$$

给出，其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$\beta-\alpha\le 2\pi$。由曲线C与两条射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$所围成的平面图形，为了与扇形区别，不妨称之为曲边扇形。下面求此曲边扇形的面积：





如图，对区间$[\alpha,\beta]$作分割

$$T:\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=\beta$$

射线$\theta=\theta_i(i=1,2,\cdots,n-1)$把曲边扇形分成$n$个小曲边扇形。当$\|T\|$很小时，第$i$个小曲边扇形的面积约等于小扇形的面积

$$\Delta A_i\approx\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$$

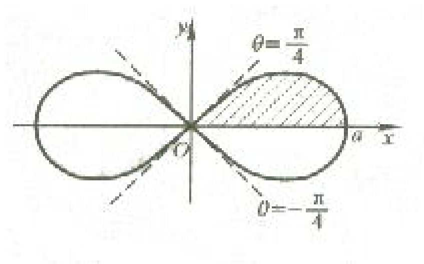
于是

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta\theta_i$$

当$\|T\| \to 0$时，上式右边的极限即为要求的面积

$$A = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

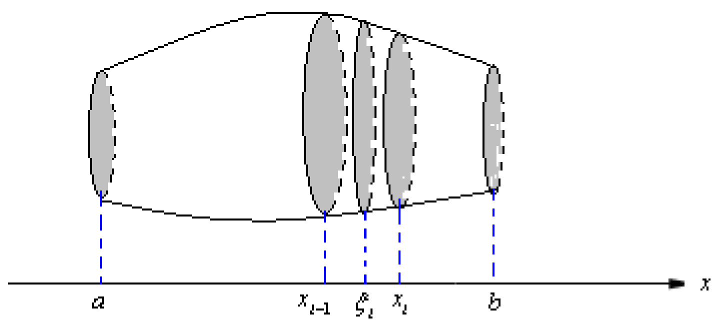
【例 4】[P224]　求双纽线$r^2 = a^2 \cos 2\theta$所围平面图形的面积。



解　如图$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2$

§2　由平行截面面积求体积

【一】已知平行截面面积求体积



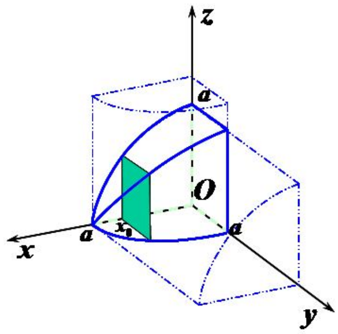
设Ω为三维空间中的一立体，它夹在垂直于x轴的两平面$x = a$与$x = b$之间$(a < b)$。设垂直于x轴的截面积函数为$A(x), x \in [a,b]$。设$A(x)$连续且把平行截面投影某一垂直于x轴的平面上，它们永远是一个含在另一个里面。

作$[a,b]$的分割T，见图，完全类似于定积分的定义，得Ω的体积为

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x$$

【例 1】[P227]求由圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $z^2+x^2=a^2$ 所围立体的体积。

解 如图所示为该立体在第一卦限的部分。



对 $\forall x_0\in[0,a]$，用平面 $x=x_0$ 截该立体所得到的截面是一正方形，其边长为 $\sqrt{a^2-x_0^2}$ 。所以截面积为

$$A(x)=a^2-x^2,x\in[0,a]$$

因此所求体积为

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x=\frac{16}{3}a^3$$

【例 2】求由椭球面所围绕立体（椭球）的体积。

解 用平面 $x=x_0(|x_0|\le a)$ 截椭球，得椭圆（它 yOz 平面上的正投影）

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}=1$$

由椭圆的面积公式

$$A(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$$

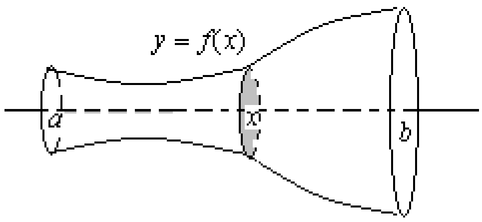
于是椭球体积为

$$V_{椭球}=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

特殊地，当 $a=b=c=R$ 时，球的体积为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

【二】旋转体的体积



$y = f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，由平面图形

$$0 \le |y| \le |f(x)|, a \le x \le b$$

绕 x 轴旋转一周便得到一个旋转体。其截面积

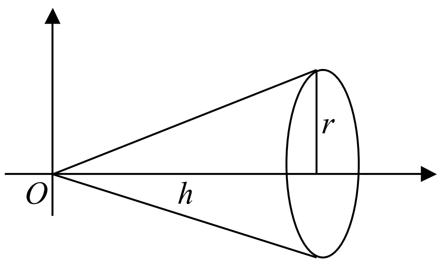
$$A(x) = \pi [f(x)]^2$$

体积

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}\, x$$

【例 3】[P228]求圆锥体的体积。

解 如图



$$f(x) = \frac{r}{h} x$$

$$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h} x)^2 \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

【例 4】[P228]求由圆 $x^2 + (y-R)^2 \le r^2 (0 < r < R)$ 绕 x 轴旋转一周便得环状立方体的体积。

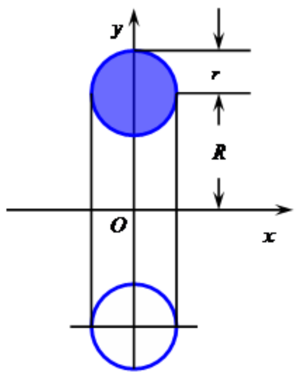
解 如图。上半圆：$y = f_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, |x| \le r$

下半圆：$y = f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, |x| \le r$

体积

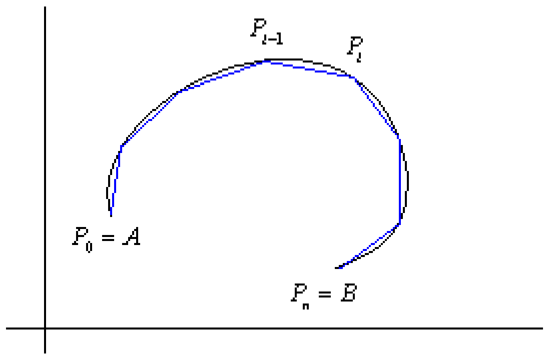
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\overset{x=r\sin t}{=\!=\!=\!=}8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=2\pi^2r^2R$$



§3　平面曲线的弧长和曲率

【一】平面曲线的弧长



【定义 1】设平面曲线C由参数方程

$$C:x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$$

给出。其中$x(t),y(t)$连续且除了起终点外，C没有自交点。

对$[\alpha,\beta]$作分割$T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$。记$P_i=(x(t_i),y(t_i))$，则$\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$就构成了曲线$C$的一个分割，依次用直线段连接这些点就构成了一条折线。记弦$\overline{P_{i-1}P_i}$的长度为$|P_{i-1}P_i|$，则折线的总长度为$s(T)=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$。如果存在极限

$$\lim_{\|T\|\to0}s(T)=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|=s$$

则称曲线 C 是可求长的，称极限 s 为该曲线的弧长。

【定理 1】(弧长公式)设 $x(t),y(t)\in C^1[\alpha,\beta]$，则曲线

$$C: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$$

是可求长的，其弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

证
$$|P_{i-1}P_i|=\sqrt{\left[x(t_i)-x(t_{i-1})\right]^2+\left[y(t_i)-y(t_{i-1})\right]^2}$$

由 Lag 中值定理

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\Delta t_i,\quad y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)\Delta t_i$$

所以

$$s(T)=\sum_{i=1}^n|P_{i-1}P_i|=\sum_{i=1}^n\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i$$

任取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$，记 $\sigma_i=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}-\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}$，则

$$s(T)=\sum_{i=1}^n\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\Delta t_i+\sum_{i=1}^n\sigma_i\Delta t_i \tag{1}$$

由 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ 可积，得

$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n\sqrt{[x'(\tau_i)]^2+[y'(\tau_i)]^2}\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

下面证明 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^n\sigma_i\Delta t_i=0$。由向量的三角不等式

$$|\sigma_i|\le\sqrt{[x'(\xi_i)-x'(\tau_i)]^2+[y'(\xi_i)-y'(\tau_i)]^2}\le|x'(\xi_i)-x'(\tau_i)|+|y'(\xi_i)-y'(\tau_i)|$$

记 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上的振幅分别是 ω_i' 与 ω_i''，则

$$|\sigma_i\Delta t_i|\le|x'(\xi_i)-x'(\tau_i)|\Delta t_i+|y'(\xi_i)-y'(\tau_i)|\Delta t_i\le\omega_i'\Delta t_i+\omega_i''\Delta t_i$$

$$\left|\sum_{i=1}^n\sigma_i\Delta t_i\right|\le\sum_{i=1}^n|\sigma_i\Delta t_i|\le\sum_{i=1}^n\omega_i'\Delta t_i+\sum_{i=1}^n\omega_i''\Delta t_i$$

由于 $x'(t),y'(t)$ 可积，根据可积准则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta t_i=0,\quad \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta t_i=0$$

于是

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta t_i=0 \qquad (3)$$

综合（1）、（2）、（3）式就证明了

$$s=\lim_{\|T\|\to 0}s(T)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

【推论 1】 $C: y=f(x)\in C^1[a,b]$，则

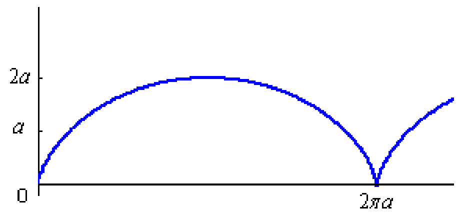
$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

【推论 2】 $C: r=r(\theta)\in C^1[\alpha,\beta]$，则

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

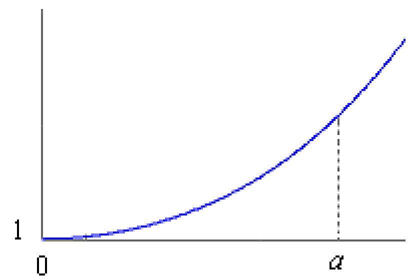
【注】 可以证明，弧长公式依赖于参数方程。

【例 1】 求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0)$ 一拱的弧长。



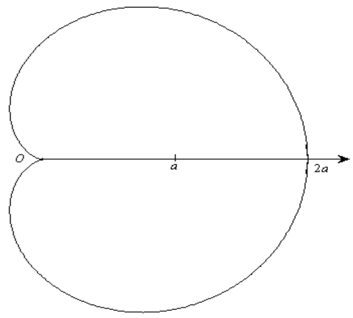
解　$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{1}{2}\mathrm{d}t=8a$

【例 2】 求悬链线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 那一段的弧长。



解　$s=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a(e^x+e^{-x})\,\mathrm{d}x=\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}$

【例 3】 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的周长。



解 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a$$

【例 4】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 的周长。

解 $x=a\sin t, y=b\cos t, t\in[0,2\pi]$

$$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{b^2-(b^2-a^2)\sin^2 t}=b\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$$

其中 $0<k=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}<1$（离心率）

$$s=4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

上面积分称为**第一类椭圆积分**。其不定积分不可用初等函数表示。

【定义 2】 曲线 $C: x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$，若 $x(t),y(t)\in C^1[\alpha,\beta]$，且

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0, t\in[\alpha,\beta]$$

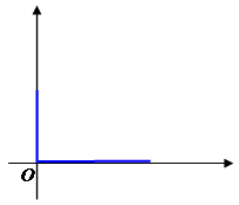
则称 C 为一条**光滑曲线**。

【注】 不是光滑曲线的例子

$$x(t)=\begin{cases}0, & t>0\\ t^2, & t\le 0\end{cases}, y(t)=\begin{cases}t^2, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

$$x'(t)=\begin{cases}0, & t>0\\ 2t, & t\le 0\end{cases}, y'(t)=\begin{cases}2t, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

$x(t),y(t)\in C^1$，但 $x'(0)=y'(0)=0$。曲线 $C: x=x(t), y=y(t)$ 的图形见下



【二】弧微分

设曲线 $C: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ 是光滑曲线，则

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{[x'(\mu)]^2 + [y'(\mu)]^2}\, \mathrm{d}\mu, t \in [\alpha, \beta]$$

由微积分基本定理

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

因此

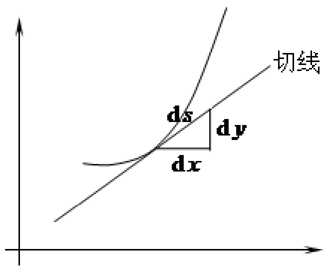
$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$

又 $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$，所以

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[dx]^2 + [dy]^2}$$

称 $\mathrm{d}s$ 为弧微分。

几何意义



【注】 由于 $s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} > 0$，故函数 $s = s(t)$ 有反函数 $t = t(s)$。因此，我们可以选择 s 为新的参变量，这样参数方程为

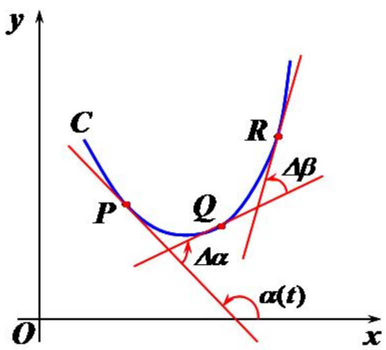
$$C: x = x(t(s)), y = y(t(s))$$

这个方程称为自然参数方程。自然参数方程的切向量 $\left(x'(t(s)), y'(t(s))\right)$ 是单位向量，即

$$\left[x'(t(s))\right]^2 + \left[y'(t(s))\right]^2 = 1$$

【三】曲率

曲率是刻画曲线的弯曲程度的一个概念。如图所示，在**光滑曲线**C上，弧段$\overset{\frown}{PQ}$与$\overset{\frown}{QR}$的长度相差不多，而弯曲程度却很不一样。这反映动点沿曲线从P移到Q时切线转过的角$\Delta\alpha$比动点从Q移到R时切线转过的角$\Delta\beta$要大的多。



设$\alpha(t)$表示曲线在点$P(x(t), y(t))$处切线的倾角，$\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ ($0 \le \Delta\alpha \le \pi$) 表示动点由$P$沿曲线移至$Q(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$时切线倾角的增量。若$\overset{\frown}{PQ}$的弧长为$\Delta s$，则称

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为弧段$\overset{\frown}{PQ}$的平均曲率。

由上面【二】的【注】，弧长函数$s = s(t)$有反函数$t = t(s)$，这样可以构造参数方程

$$\begin{cases} s = s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{[x'(\mu)]^2 + [y'(\mu)]^2}\, \mathrm{d}\,\mu \\ \alpha = \alpha(t) \end{cases}$$

α可以表示为弧长s的函数。

【定义 2】如果极限

$$K = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,s}\right|$$

存在，则称此极限K为曲线C在点P处的曲率。

【例 5】求半径为R的圆周的曲率。

解　因为圆的切线与半径垂直，所以$\Delta s = R\Delta\alpha$。从而

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\frac{1}{R}$$

这表示圆周上每点的曲率相等且半径越小，曲率越大。

由于假设C是光滑曲线，故总有

$$\alpha(t)=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}\quad 或\quad \alpha(t)=\operatorname{arc}\cot\frac{x'(t)}{y'(t)}$$

又若$x(t),y(t)$二阶可导，则可得下面曲率公式：

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{\left|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\right|}{\left[x'^2(t)+y'^2(t)\right]^{3/2}}$$

【例 6】求椭圆$x=a\cos t,y=b\sin t\left(a>b>0\right)$上曲率最大与最小的点。

解　由曲率公式得

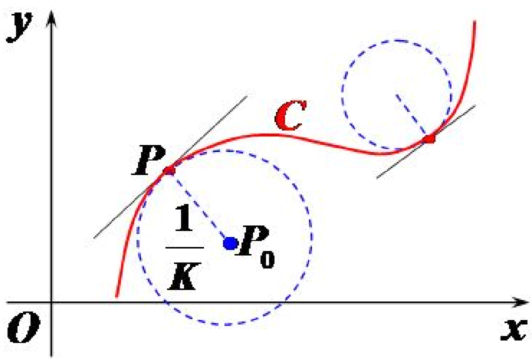
$$K=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}=\frac{ab}{\left[(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\right]^{3/2}}$$

当$t=0,\pi$（长轴端点）处曲率最大，当$t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$（短轴端点）处曲率最小，且

$$K_{\max}=\frac{a}{b^2},\quad K_{\min}=\frac{b}{a^2}$$

当$a=b=R$时，$K=\dfrac{1}{R}$。

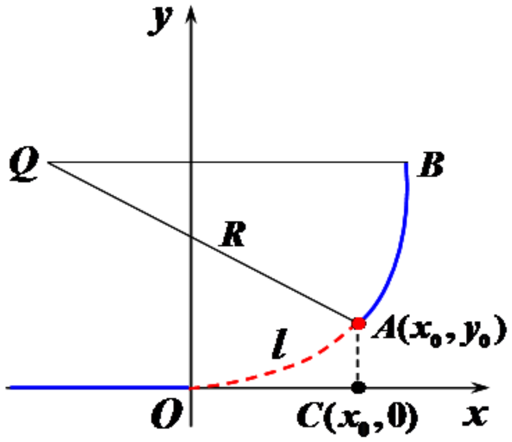
设曲线上一点P处曲率$K\neq 0$。若过P作一个半径为$R=\dfrac{1}{K}$的圆，使它在点P处与曲线有相同的切线，并在P近旁与曲线位于切线的同侧(见图). 我们把这个圆称为曲线在P处的曲率圆或密切圆. 曲率圆的半径称为曲率半径，曲率圆的圆心称为曲率中心。



由曲率圆的定义可知，曲线在点P与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。

【例 7】如图所示，火车轨道从直道进入半径为R的圆形弯道时，为了行车安全，必须经

过一段缓冲轨道(用虚线表示)，为保证火车的行驶安全，要求曲率由零连续地变到$\dfrac{1}{R}$。



解 缓冲曲线常采用三次曲线

$$y=\frac{x^3}{6Rl}\ \text{（其中}\ l\ \text{为}\ \overset{\frown}{OA}\ \text{的弧长）}$$

由曲率公式

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{8R^2l^2x}{(4R^2l^2+x^4)^{3/2}}$$

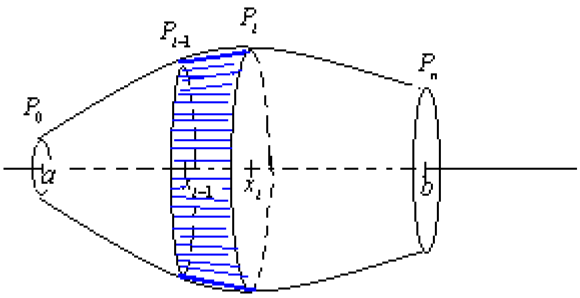
当x从 0 变为x_0时，曲率K从 0 连续地变为

$$K_0=\frac{8R^2l^2x_0}{(4R^2l^2+x_0^4)^{3/2}}=\frac{1}{R}\cdot\frac{8l^2x_0}{\left(4l^2+\dfrac{x_0^4}{R^2}\right)^{3/2}}$$

当$x_0\approx l$，且$\dfrac{x_0}{R}$很小时，$K_0\approx\dfrac{1}{R}$。因此曲线段$\overset{\frown}{OA}$的曲率从 0 逐渐增加到接近于$\dfrac{1}{R}$，从而起到了缓冲作用。

§4　旋转曲面的面积

光滑曲线$C:y=f(x),x\in[a,b]$（不妨设$f(x)\ge 0$），绕x轴旋转一周得到旋转曲面（如图）。



作 $[a,b]$ 的分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 对应 C 的分点 $T=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$。用直线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 绕 x 轴旋转一周得到的圆台面积

$$\Delta S_i'=\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\left|P_{i-1}P_i\right|$$

来近似弧段 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 绕 x 轴旋转一周得到的小旋转曲面的面积。

【定义 1】旋转曲面的面积为

$$S=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i'=\lim_{\|T\|\to 0}\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\left|P_{i-1}P_i\right|$$

【定理 1】旋转曲面的面积计算公式为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{1}$$

证　由微分中值定理

$$\left|P_{i-1}P_i\right|=\sqrt{\Delta x_i^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=\sqrt{\Delta x_i^2+[f'(\xi_i)\Delta x_i]^2}=\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$$

因此

$$\Delta S_i'=\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\left|P_{i-1}P_i\right|=\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$$

直观上

$$\Delta S_i'=\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\approx 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i$$

记

$$\sigma_i=\pi\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}-2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$$

则

$$S=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i'=\lim_{\|T\|\to 0}2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta x_i$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta x_i$$

下面只需再证明

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta x_i=0$$

由 f' 连续，知 f' 有界，设 $\left|f'(x)\right|\le M$ ，ω_i 为 f 在区间 $\left[x_{i-1},x_i\right]$ 上振幅，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta x_i\le\pi\sqrt{1+M^2}\left(\sum_{i=}^{n}\left|f(x_{i-1})-f(\xi_i)\right|\Delta x_i+\sum_{i=}^{n}\left|f(x_i)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i\right)$$

$$\le 2\pi\sqrt{1+M^2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

由 f 可积，$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$ 。

【注 1】 $\mathrm{d}\,s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}\,x$ 是弧微分。面积公式（1）又可写成

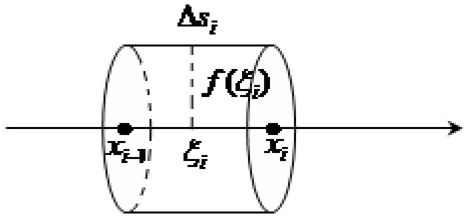
$$S=2\pi\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,s$$

【注 2】 弧段 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 的弧长

$$\Delta s_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

如果用以 Δs_i 为高，$f(\xi_i)$ 为底半径的圆柱面的面积作为旋转面的面积近似

$$\Delta S_i\approx\Delta S_i'=2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$



则同样可得到面积公式（1）。

【思考】 为什么不用以 Δx_i 为高，$f(\xi_i)$ 为底半径的圆柱面的面积作为近似？

【注 3】 如果光滑曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]\ （y(t)\ge 0）$$

给出，则绕 x 轴旋转的曲面面积为

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\,\mathrm{d}s$$

【注 4】如果光滑曲线 C 由极坐标方程

$$r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$$

给出，则绕极轴旋转的曲面面积为

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

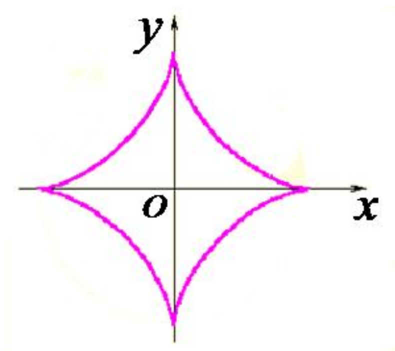
【例 1】[P238]计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 在 $[x_1,x_2]\subset[-R,R]$ 上的弧段绕 x 轴旋转所得球带的面积。

解 对曲线 $y=f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ 用面积公式

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=2\pi R\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1)$$

特别地 $x_1=-R,x_2=R]$ 时，得球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2$。

【例 2】[P238]计算由内摆线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积。



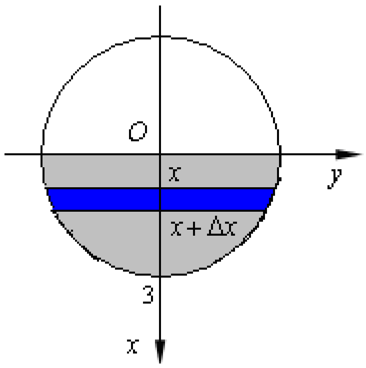
解 $S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t=\dfrac{12}{5}\pi a^2$

§5　定积分在物理中的某些应用

求解物理问题，常使用微元法。微元法省去了繁琐的理论验证，直观方便。

微元法简述（上课讲，此略）

【例 1】[液体的静压力]　如图为一管疺的圆形闸门。问水平齐及直径时，闸门所受到的水的静压力为多大?



解 同一深度（x）的压强相等为ρx（其中ρ为水的比重）。x到$x+\Delta x$狭条的面积约为矩形面积

$$\Delta A \approx 2\sqrt{9-x^2}\Delta x$$

因此在这狭条上所受的静压力为

$$\Delta P \approx \mathrm{d}P = 2\rho x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

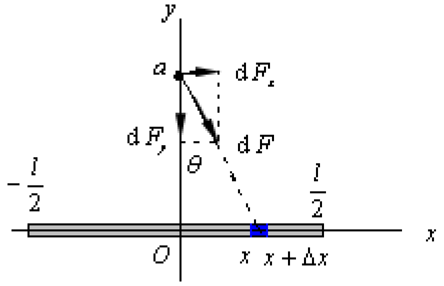
这里$\mathrm{d}P$即为压力的微元。

$$P = \int_0^3 2\rho x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = 18\rho$$

【例 2】[万有引力]　一根长为l的均匀细杆，质量为M，其中垂线上相距细杆为a处有一质量为m的质点。试求细杆对质点的成有引力。

解 如图。x到$x+\Delta x$看作一质点，质量为$\Delta M = \dfrac{M}{l}\Delta x$，它对质点$m$的引力微元为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\cdot\Delta M}{a^2+x^2} = \frac{kmM}{l}\cdot\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$



水平方向引力抵消，垂直方向引力微元为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\theta = -\frac{kmM}{l}\cdot\frac{1}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{kmMa}{l}\left(a^2+x^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}\,x$$

因此

$$F_y = -\frac{kmMa}{l}\int_{-l/2}^{l/2}\left(a^2+x^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}\,x = -\frac{2kmMa}{l}\int_0^{l/2}\left(a^2+x^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}\,x$$

$$= -\frac{2kmMa}{l}\frac{1}{a^2}\cdot\left.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right|_0^{l/2} = -\frac{2kmM}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$$

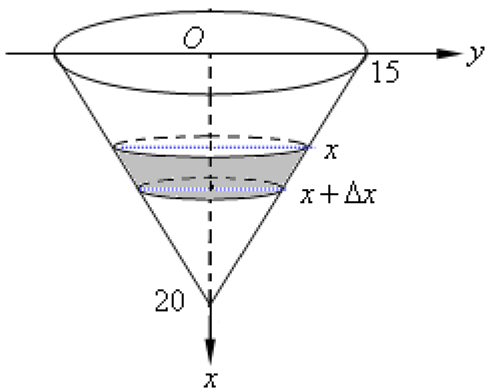
【注】 $\int\left(a^2+x^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}\,x \overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{====}} \frac{1}{a^2}\int\cos t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a^2}\sin t + C$

$$\overset{\text{用三角形}}{====}\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

【例 3】[做功] 一圆锥形水池，池口直径$30\,\mathrm{m}$，深$20\,\mathrm{m}$，池中盛满了水。试求将全部池水抽出池外需做的功。

解 抽出深度为x的单位体积的水需做功ρx（ρ为水的比重）。小薄层水的体积约等于小圆柱体的体积

$$\Delta V \approx \pi\left[15(1-\frac{x}{20})\right]^2\Delta x = 225\pi\left(1-\frac{x}{20}\right)^2\Delta x$$



因此，功的微元为

$$\mathrm{d}W = 225\pi\rho x\left(1-\frac{x}{20}\right)^2\Delta x$$

总的功

$$W = 225\pi\rho\int_0^{20}x\left(1-\frac{x}{20}\right)^2\mathrm{d}\,x = 7500\pi\rho$$

§6　定积分的近似计算

（只讲必要性，上课讲，此略）