资源与地球科学学院 2019~2020 学年

第二学期高等数学 A3 重积分单元综合测试（3）

请记得回头再看一眼，在心里刻下每一个人的脸庞，

不管怎样，他/她都曾陪你，从那时的落叶飘零，到如今的绿意葱茏。

1　设 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}v$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge 0$，则 $I=$（　　　）.

（A）$\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{e}^z\mathrm{d}v$；　　（B）$\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{e}^x\mathrm{d}v$；

（C）$\iiint\limits_{\Omega}(2\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}v$；　　（D）$\iiint\limits_{\Omega}(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}v$.

2　设 $f(u)$ 为连续函数，$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$ $(R>0)$，则二重积分

$I=\iint\limits_{D}\left[x^2+xyf(x^2+y^2)\right]dxdy$ 的值为（　　）

(A) $\frac{1}{4}\pi R^4$　(B) 1　(C) 与函数 $f(u)$ 相关的值　(D) 0

3　累次积分 $\int_0^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{4}{\sin\theta-\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{4}{\sin\theta-\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_0^{2\sqrt{2}}dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$

(C) $\int_{-4}^4 dx\int_{x+4}^{\sqrt{16-x^2}}f(x,y)dy$

(D) $\int_0^4 dy\int_{y-4}^0 f(x,y)dx+\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{16-y^2}}f(y,x)dx$

1　计算三次积分 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$.

2　设函数 $f(u)$ 连续，在 $u=0$ 点处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=-3$，求

极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

3　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 yOz 平面内 $z=0$，

$z=2$ 以及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转而成的空间区域.

向英雄致敬，向逝者致哀

4 在曲面 $z=4+x^2+y^2$ 上求一点 P，使曲面在该点的切平面与曲面之间被圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成空间区域的体积最小.

5 设曲面 Σ 是由直线 L：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}$、$y=\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}$、$z=t$（$t\in[0, 1]$）绕 z 轴旋转一周所得的旋转面.

（1）试导出 Σ 的直角坐标方程;

（2）如果 Ω 是由 Σ 与平面 $z=0$、$z=1$ 所围成的立体，其密度为 $\mu(x, y, z)=\frac{z}{1+x^2+y^2}$，

6 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内连续，令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)dxdy$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{t}$.

1 设正值函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，证明不等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\ge(b-a)(b-a+A)$.

2 证明不等式 $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}$.

3 设函数 $f(x, y)$ 在单位圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上具有连续的偏导数，且在边界上的值恒为零. 证明：$f(0, 0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆环区域 $\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1$.

4 设 Ω 是以原点和三点 $(0, 1, 0)$、$(1, 1, 1)$、$(0, 1, 1)$ 为顶点的四面体.（1）将三重积分 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 表示为“先 z、次 y、后 x”的三次积分;

（2）试证明 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6}(\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x)^3$.

注：考察三重积分的性质，对称性。

解：由于区域Ω关于平面$y=x$对称，则在Ω上三重积分满足对称性：

$$\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} f(y,\ x,\ z)\mathrm{d}v,$$

于是$\iiint_{\Omega}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}v$，所以$I=\iiint_{\Omega}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{z})\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{z})\mathrm{d}v$，选（D）.

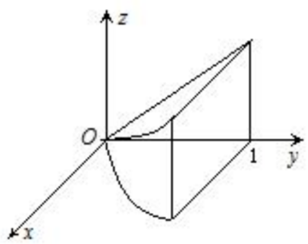
解：区域D关于x轴对称，被积函数$xyf(x^2+y^2)$关于y为奇函数，故二重积分$\iint_D xyf(x^2+y^2)dxdy=0$。区域$D$关于$y=x$对称，从而$\iint_D x^2dxdy=\iint_D y^2dxdy$

$$I=\iint_D x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{1}{4}\pi R^4,$$ 选(A)

解：所给累次积分区域为$\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 4,y-4\le x\le\sqrt{16-y^2}\right\}$，选项(D)正确，且选项(D)中第二项利用了积分区域关于$y=x$对称的特性.

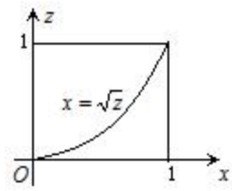
注：考察三重积分的计算。

解：（方法 1）交换积分次序，采用先对x、再对y、最后对z的积分次序，则



$$\begin{aligned}&\int_0^1x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\frac{y^2\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\int_0^1\frac{(1-z^3)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{12}\int_0^1(1-z)\sin z\mathrm{d}z=\frac{1}{12}[-(1-z)\cos z\big|_0^1-\int_0^1\cos z\mathrm{d}z]\\&=\frac{1}{12}(1-\sin z\big|_0^1)=\frac{1}{12}(1-\sin 1).\end{aligned}$$

（方法 2）交换积分次序，采用先对y、再对x、最后对z的积分次序，则



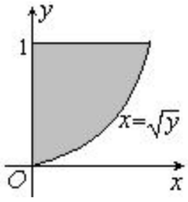
$$\begin{aligned}&\int_0^1x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\int_z^1\frac{x^3\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{x^3\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\frac{x^3(1-z)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z}}^1\frac{x^3(1-x^2)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{z^2(1-z)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{(1-z^2)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-z^3)\sin z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1(1-z)\sin z\mathrm{d}z=\frac{1}{12}[-(1-z)\cos z\Big|_0^1-\int_0^1\cos z\mathrm{d}z]$$

$$=\frac{1}{12}(1-\sin z\Big|_0^1)=\frac{1}{12}(1-\sin 1).$$

注：考察球面坐标积分。

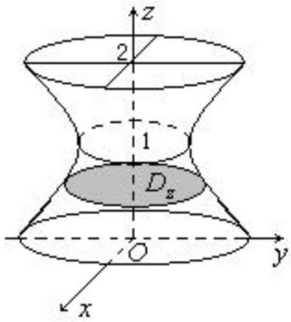


解：设 $G(t)=\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，应用球面坐标系，

有 $G(t)=\dfrac{8}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=\dfrac{4\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r}{t^4}$，

则 $\lim\limits_{t\to0}G(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{4\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r}{t^4}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{4f(t)t^2}{4t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)=-3$.

注：考察三重积分的运算。



解：用“先二后一”法，在区间 $z\in[0,2]$ 内任取一点 z，

用 $z=z$ 平面截区域 Ω，得一个截面 D_z：$x^2+y^2\le1+(z-1)^2$

（即半径为 $r=\sqrt{1+(z-1)^2}$ 的圆域），于是

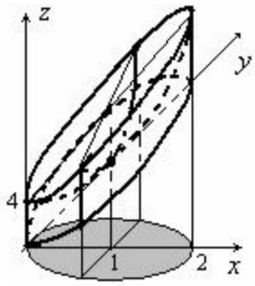
$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^1[\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+(z-1)^2}}\rho^3\mathrm{d}\rho]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi}{4}\int_0^1[1+(z-1)^2]^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\int_0^1[1+2(z-1)^2+(z-1)^4]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{2}[1+\frac{2}{3}(z-1)^3\Big|_0^1+\frac{1}{5}(z-1)^5\Big|_0^1]=\frac{\pi}{2}(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5})=\frac{14}{15}\pi.$$

注：考察三重积分的几何应用，求极值。



解：设所求点为 $M(u,v,t)$，且 $t=4+u^2+v^2$，该点处的法向量

$\vec{n}=(2u,2v,-1)$，切平面方程为

$$2u(x-u)+2v(y-v)-(z-t)=0，即$$

$z=2ux+2vy+t-2u^2-2v^2$，化简为 $z=2ux+2vy+4-u^2-v^2$

（由于 $z=4+x^2+y^2$ 是开口向上的旋转抛物面，则切平面在该曲面下方）．切平面与此旋转抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的立体体积为

$$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}[(4+x^2+y^2)-(2ux+2vy+4-u^2-v^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(x^2+y^2-2ux-2vy+u^2+v^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho-2u\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\cos\theta\mathrm{d}\rho-0+\pi(u^2+v^2)$$

$$=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-\frac{16u}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\pi(u^2+v^2)$$

$$=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{32u}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\pi(u^2+v^2)=(\frac{3}{2}-2u+u^2+v^2).$$

由此看到 V 是 u、v 的二元函数，记为 $V=V(u,\ v)=(\frac{3}{2}-2u+u^2+v^2)$，

由 $\begin{cases}V'_u=-2+2u=0,\\ V'_v=2v=0,\end{cases}$ 得唯一驻点 $(1,\ 0)$，又 $A=V''_{uu}=2>0$、$B=V''_{uv}=0$、$C=V''_{vv}=2$，

$AC-B^2=4>0$，所以该点是极小值点，也是最小值点，该体积的最小值为 $V_{\min}=V(1,\ 0)$ $=\frac{\pi}{2}$，此时 $t=4+u^2+v^2=5$，所求点是 $(1,\ 0,\ 5)$.

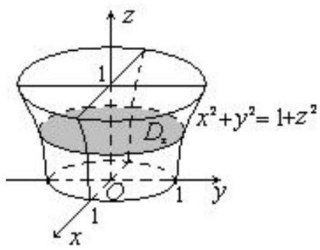
注：考察积分运算技巧，几何应用，空间直线绕轴旋转形成旋转曲面的方程求法。

解：（1）设 $M(x,\ y,\ z)$ 是 Σ 上任意一点，且它是由直线 L 上的点 $M'(x_0,\ y_0,\ z)$ 旋转得到，记 M（或 M'）在 z 轴上的投影为 $M_0(0,\ 0,\ z)$，由 $|MM_0|^2=|M'M_0|^2$，有

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=t^2+1=z^2+1,$$

并且不再 Σ 上的点，一定不满足上述方程，所以 Σ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-z^2=1$.

（2）$M=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$



$$=\int_0^1(\iint\limits_{D_z}\frac{z}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\mathrm{d}z=\int_0^1(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\frac{z\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^1 z\ln(1+\rho^2)\Big|_0^{\sqrt{1+z^2}}\mathrm{d}z=\pi\int_0^1 z\ln(2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{2+z^2=t}}\ \frac{\pi}{2}\int_2^3\ln t\mathrm{d}t=(t\ln t-t)\Big|_2^3=\frac{\pi}{2}(3\ln 3-2\ln 2-1).$$

解：利用极坐标，对 $t>0$ 充分小，

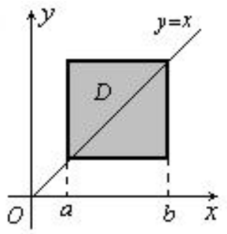
$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\int_0^t\left(\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta\right)dr$$

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}f(t\cos\theta,t\sin\theta)td\theta$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\int_0^{2\pi}f(t\cos\theta,t\sin\theta)d\theta=\lim_{t\to0^+}f(t\cos\xi,t\sin\xi)\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi f(0,0)\ .$$

注：考察积分放缩证明技巧，用到泰勒公式。

证明：记 $D=\{(x，y)|a\le x\le b，\ a\le y\le b\}$，左式化为二重积分，并利用对称性，则



$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$（D 关于直线 $y=x$ 对称）

$$=\frac{1}{2}\iint_D[\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{e}^{f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\iint_D\mathrm{e}^{\frac{f(x)+f(y)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$（均值不等式）

$$\ge\iint_D[1+\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$（用不等式 $\mathrm{e}^u\ge1+u\ (u\ge0)$）

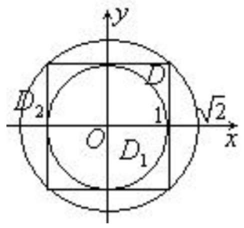
$$=(b-a)^2+\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)^2+(b-a)A=(b-a)(b-a+A)\,.$$

注：考察积分放缩证明技巧。

证明：记 $I=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，平面区域 $D=\{(x，y)|-1\le x\le1，\ -1\le y\le1\}$，则

$$I^2=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

作两个圆域 $D_1=\{(x，y)|x^2+y^2\le10\}$，$D_2=\{(x，y)|x^2+y^2\le2\}$，如图 $D_1\subset D\subset D_2$，且函数 $f(x，y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ge0$ 又连续，则



$$\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

而 $\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_0^1=\pi(1-\mathrm{e}^{-1})$，

$\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt2}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_0^{\sqrt2}=\pi(1-\mathrm{e}^{-2})$，于是

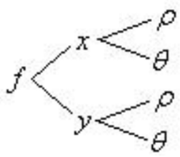
$\pi(1-\mathrm{e}^{-1})<I^2<\pi(1-\mathrm{e}^{-2})$，即 $\sqrt{\pi}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}<I<\sqrt{\pi}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}$ ，所以

$$\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}\,.$$

注：考察二重极坐标积分运算，积分变换。

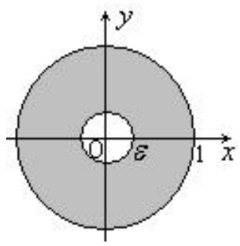
证明：应用极坐标系，由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，根据复合函数求导法则，得

$\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\rho}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$ (**注：这与以往求导方法不同，以往是将新引入的变量作为中间变量，去求** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$)，将该等式两端同乘 ρ，得



$$\rho\frac{\partial f}{\partial \upsilon}=\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta=xf'_x+yf'_y\,.$$ 于是

$$I=\iint_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{1}{\rho^2}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho$$



$$=\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\ \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}0\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\ \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\ \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\,.$$

由积分中值定理，有

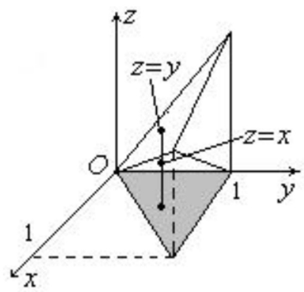
$I=-2\pi\cdot f(\varepsilon\cos\xi,\ \varepsilon\sin\xi)$，其中 $0\le\xi\le 2\pi$，所以

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to0^+}f(\varepsilon\cos\xi,\ \varepsilon\sin\xi)=f(0,\ 0)\,.$$

注：考察三重积分的运算。

解：（1）积分区域如图所示，它在 xOy 面上的投影区域为：

$0\le x\le1$，$x\le y\le1$，而 z 的变化范围是：$x\le z\le y$.



$$\iiint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z\,.$$

（2）设函数 $F(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ （$0\le x\le1$），则

$F(0)=0$ 、 $F(1)=\int_0^1 e^{t^2}dt=\int_0^1 e^{x^2}dx$，且 $dF(x)=e^{x^2}dx$，于是

$$\iiint_\Omega e^{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y e^{x^2+y^2+z^2}dz=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 e^{y^2}dy\int_x^y e^{z^2}dz$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 e^{y^2}[F(y)-F(x)]dy=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 e^{y^2}F(y)dy-\int_0^1 e^{x^2}F(x)dx\int_x^1 e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 e^{y^2}F(y)dy-\int_0^1 e^{x^2}F(x)[F(1)-F(x)]dx$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 F(y)dF(y)-F(1)\int_0^1 F(x)dF(x)+\int_0^1 F^2(x)dF(x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}[F^2(1)-F^2(x)]dx-\frac{1}{2}F(1)[F^2(1)-F^2(0)]+\frac{1}{3}[F^3(1)-F^3(0)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[F^2(1)-F^2(x)]dF(x)-\frac{1}{2}F^3(1)+\frac{1}{3}F^3(1)$$

$$=\frac{1}{2}F^2(1)[F(1)-F(0)]-\frac{1}{6}[F^3(1)-F^3(0)]-\frac{1}{6}F^3(1)$$

$$=\frac{1}{2}F^3(1)-\frac{1}{3}F^3(1)=\frac{1}{6}F^3(1)=\frac{1}{6}(\int_0^1 e^{x^2}dx)^3.$$

或者：$I=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_x^1 e^{y^2}dy\int_x^y e^{z^2}dz=\int_0^1 dF(x)\int_x^1 dF(y)\int_x^y dF(z)$

$$=\int_0^1 dF(x)\int_x^1[F(y)-F(x)]dF(y)=\int_0^1[\frac{1}{2}F^2(y)-F(y)F(x)]\Big|_x^1 dF(x)$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{2}F^2(1)-F(1)F(x)+\frac{1}{2}F^2(x)]dF(x)$$

$$=[\frac{1}{2}F^2(1)F(x)-\frac{1}{2}F(1)F^2(x)+\frac{1}{6}F^3(x)]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}F^3(1)=\frac{1}{6}(\int_0^1 e^{x^2}dx)^3.$$