第 08 章　不定积分

一、主要结论

【1】若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数的全体为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\text{，}\ C\ \text{为任意常数}$$

【2】$f(x) \in C(I)$，则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数（见第 9 章）。

【3】$f(x)$ 有第一类间断点，则 $f(x)$ 一定不存在原函数。

二、主要方法

重点掌握换元法与分部积分法；掌握有理函数的积分法。

三、例题

【1】$f(x)$ 有第二类间断点，但 $f(x)$ 存在原函数。

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\quad F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

【2】$f(x)$ 有第二类间断点，但 $f(x)$ 不存在原函数。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases},$$

若有 $F'(x) = f(x)$，则 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，应具有介值性。

【3】$\int |x-1|\,\mathrm{d}x$。这里 $x \in (-\infty, +\infty)$，要考虑原函数可导，从而一定连续。

$$\int |x-1|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - x + C_1, & x > 1 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 + x + C_2, & x < 1 \end{cases}$$

$F(x)$ 在点 $x=1$ 处连续

$$C_2 = C_1 - 1$$

一个原函数为

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - x, & x \ge 1 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

由导数极限定理易验证：$F'(1) = f(1) = 0$

【4】常用的几个积分公式（积分表）

（01）$\int 0dx = C$

（02）$\int 1dx = x + C$

（03）$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \ne -1, x > 0)$

（04）$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C \ (x \ne 0)$

（05）$\int e^x dx = e^x + C$

（06）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \ne 1)$

（07）$\int \cos x dx = \sin x + C$

（08）$\int \sin x dx = -\cos x + C$

（09）$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

（10）$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

（11）$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$

（12）$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$

（13）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos + C_1$

（14）$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\mathrm{arc}\cot x + C_1$

（15）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

（16）$\int \csc x dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$.

（17）$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

（18）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

（19）$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

（20）$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

【5】往年的部分考题

(1) $\int |x| e^{-x} dx$；(2) $\int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$；(3) $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$；(4) $\int (\arcsin x)^2 dx$

(5) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$；(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x$；（7）$\int \sec^3 x\, \mathrm{d}x$

第 09 章　定积分

一、主要结论

【1】N-L 公式：若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，且存在原函数 F，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

【2】推广的 N-L 公式(P209 习题 3)：

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，F 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限点外有 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

【3】可积准则：函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists T,$ 使得

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$$

这里

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_T M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_T m_i\Delta x_i$$

$$\overline{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_T\omega_i\Delta x_i$$

【4】可积函数类：三类（要求会用可积准则证明）

【注】Riemann 函数可积，不属于上面三类。

【5】定积分的性质：5 个。如区间可加性，积分不等式等。

【6】积分第一中值定理（P223 习题 9）：

若 $f,g\in R[a,b]$，且 g 在 $[a,b]$ 上不变号（$g(x)\ge 0$ 或 $g(x)\le 0$），记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$$

则 $\exists\mu:m\le\mu\le M$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

【推论 1】若 $f,g\in C[a,b],$，且 g 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

【推论 2】若 $f\in C[a,b],$ 则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

【注】推论 1 和推论 2，$\xi\in[a,b]$，可改为 $\xi\in(a,b)$（P223 习题 8）

【7】微积分基本定理：

（1）若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续；（2）若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x)=f(x),x\in[a,b]。$$

二、主要方法

重点掌握换元与分部积分法。

三、例题

【1】具有原函数的函数不一定可积。如

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0$，有 $f'(x_n)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty$，知 f 在 $[-1,1]$ 上无界，所以 f 在 $[-1,1]$ 上不可积。

【2】（P215 习题 3）（常用结论）设 $f(x)$，$g(x)$ 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 证明：若仅在 $[a,b]$ 中有限个点处 $f(x)\neq g(x)$，则当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

【3】$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

方法 1：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上没有原数，只有一个间数点，从而可积。取 $g(x)=x$，$x\in[0,1]$，由【2】

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

方法 2：$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$，用推广的 N-L 公式

$$\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}$$

【注】对于分段函数的积分常用区间可加性再结合方法 1。例如 P219 例 1。

【4】用定积分的定义求极限：$I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right]$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{i}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

【5】(P219 例 2) 证明若 $f\in C\left[a,b\right]$，且 $f\left(x\right)\ge 0,\int_a^b f\left(x\right)dx=0,$ 则

$$f\left(x\right)\equiv 0,x\in\left[a,b\right].$$

【推论 1】 $f\in R[a,b],f(x)\ge 0$，f 在某点 x_0 处连续，且 $f\left(x_0\right)>0$，则

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}\,x>0$$

【推论 2】 $f\in C[a,b],\int_a^b f(x)dx=0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

【6】(P225 例 1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{x^2}}$

【7】［P232 习题 1］设 $f(x)$ 为连续函数，$u(x)$，$v(x)$ 均为可导函数，且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证明：

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

【8】往年部分考题

（1）利用定积分求极限：$I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)x}{n}]$

答案：$I=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

（2）计算定积分 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$。答案：$\frac{\pi}{16}$

（3）求定积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。答案：$\frac{\pi^2}{4}$

（4）求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$。答案：1

（5）设 f 是 $[a,b]$ 上的连续增函数，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, & a<x\le b\\ f(a), & x=a\end{cases}$$

试证明F也是$[a,b]$上的增函数。（P241 习题 2）

（6）设f是$[-a,a]$上的连续函数，$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt, x\in[-a,a]$，证明：

$$F''(x)=2f(x)$$

（7） 设$f(x)$在$[0,a]$上可导，且

$$n\int_0^{\frac{1}{n}} e^{x-a} f(x)dx = f(a)\ (\frac{1}{n}<a)$$

证明：$\exists\xi\in(0,a)$，使得$f(\xi)+f'(\xi)=0$。

（8）利用可积准则证明：若f是$[a,b]$上的单调函数，则f在$[a,b]$上可积。

（9）利用可积准则证明：若f为$[a,b]$上的连续函数，则f在$[a,b]$上可积.

(10) 若f在$[a,b]$上可积，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续；

(11) 证明微积分基本定理:：若f在$[a,b]$上连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上处处可导，且

$$F'(x)=f(x), x\in[a,b]。$$

第 10 章　积分的应用

要求：掌握前 3 节的内容。

第 11 章　反常积分

一、主要结论

柯西收敛准则（P277，P283）

比较判别法及其限形式（P279，P284）

绝对收敛与条件收敛

A-D 判别法（只要求无穷积分，P280-281）

二、往年部分考题

（1） 讨论 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x$ 的收敛性.

答案：$\mathrm{B}(p,q)$ 只有当 $p>0,q>0$ 收敛。

（2） 讨论 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 的收敛性。

答案：$\Gamma(s)$ 只有在 $s>0$ 时收敛。

（3） 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}\,x$ 的收敛性。

答案：反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}\,x$ 收敛.

（4）讨论反常积分 $\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的收敛性.（P285 例 2）

（5）讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}\,x(p>0)$ 的收敛性（包括绝对收敛与条件收敛）（P281 例 3）

第 12 章 数项级数

一、主要结论

【1】Cauchy 准则（P3）

【2】正项级数的比较判别法（包括比式与根式判别法）

【3】积分判别法

【4】一般项级数的 Leibniz 判别法（P19）

【5】绝对收敛与条件收敛

【6】A-D 判别法（P24-25）

二、例题

【1】引理（根式判别法比比式判别法更有效）：［上册 P43 总练习题 4(7)］

$$u_n>0,\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a$$

反之不然。见下例：

$$\sum u_n = \sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的。（$1 \le \sqrt[n]{2+(-1)^n} \le \sqrt[n]{3}$）

如果用比式判别法，由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{2m}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}} = \frac{3}{2},\ \lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2m+1}}}{\frac{3}{2^{2m}}} = \frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，比式判别法无法判别.

【2】用根式判别法或比式判别法时，当极限大于 1 时，其一般项不趋于零，从而发散。这一点常用于判别一般项级数，**加绝对值发散，本身也发散**（见下例）

讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{r^n}{n^p}(p>0,r>0)$ 的收敛性（包括条件收敛，绝对收敛）。

记 $u_n=(-1)^n\frac{r^n}{n^p}$，考虑 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$，由

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)^p}\frac{n^p}{r^n} \to r(n\to\infty)$$

当 $r<1$ 时（任意 $p>0$），绝对收敛（从而本身也收敛）

当 $r>1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散。**这是因为用比式（或根式）判别的发散，其一般项不趋于零。**（$|u_n| \not\to 0 \Rightarrow u_n \not\to 0$）

当 $r=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 这是 Leibniz 型级数，收敛。再考虑

$$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

这是 $p-$级数，$p>1$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。$p\le 1$，$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

综上，$r<1$，绝对收敛；$r>1$，发散；$r=1,p>1$，绝对收敛；$r=1,p\le 1$，条件收敛.

【3】 讨论级数$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$（$\alpha\in R$）的收敛性。

(1) $\alpha\le 0$ 时，$\frac{1}{2^{\alpha}},\frac{1}{4^{\alpha}},\frac{1}{6^{\alpha}},\cdots\ge 1$，一般项$\not\to 0$，发散；

(2) $0<\alpha<1$时，考虑$(1-\frac{1}{2^{\alpha}})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}})+\cdots$

一般项$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\sim\frac{-1}{(2n)^{\alpha}}$，（$n$充分大后，同号，相当于正项级数）

而后者发散（p 级数）$\Rightarrow$上面级数发散$\Rightarrow$原级数发散（发散的去括号也发散）;

(3) $\alpha=1$时，为 Leibniz 型级数，收敛；

(4) $\alpha>1$时，$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$发散，$-\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}-\frac{1}{6^{\alpha}}-\cdots$收敛（$p$ 级数）

$\Rightarrow$原级数发散（也用到：发散的去括号也发散）。

综上，$\alpha=1$时，原级数收敛，其它发散。

【4】由 D 判别法可以直接证明 L 判别法和 A 判别法。

（1） $D\Rightarrow L$。对于 Leibniz 型级数：$\sum(-1)^n u_n,u_n>0,\{u_n\}\downarrow 0$，

令$a_n=u_n,b_n=(-1)^n$，由 D 判别法立即得$\sum(-1)^n u_n$ 收敛。

（2）$D\Rightarrow A$。设$\{a_n\}$单调有界，$\sum b_n$ 收敛，从而$\{a_n\}$有极限记为a，

则$\{a_n-a\}$单调趋于零。由$\sum b_n$ 收敛，知其部分和有界。

考虑$a_nb_n=(a_n-a)b_n+ab_n$，由 D 判别法便知$\sum a_nb_n$ 收敛。

三、往年部分考题

【1】用 Cauchy 准则证明级数$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$收敛。

【2】用 Cauchy 准则证明级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$发散.

【3】设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$收敛。

【4】讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{r^n}{n^p}(p>0,r>0)$的收敛性（包括条件收敛，绝对收敛）。

（见例题）

【5】 设$\{a_n\}\downarrow 0$，证明$\sum a_n\sin nx,\sum a_n\cos nx$对任何$x\in(0,2\pi)$都收敛。

（见 P25 例 3）

第13章　　函数列与函数项级数

一、主要结论

【1】一致收敛的判别法：（1）M 判别法；（2）A-D 判别法

【2】内闭一致收敛的概念

【3】连续性，可积性，可微性（或逐项求极限，逐项积分，逐项求导）三个定理的条件及应用

二、例题

【1】(1)$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=0$

其中 $\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|$（正项数列）

（见 P31 定理 13.2）

(2)$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于$S(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|R_n(x)\|_\infty=0$

(见 P34 定理 13.4)

【2】$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)\Leftrightarrow\exists\{x_n\}\subset D$，使得$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|\neq 0$

(见 P32 推论)

（$\Leftarrow$）设$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|\neq 0$，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N,\exists n_0>N$，使

$$|f_{n_0}(x_{n_0})-f(x_{n_0})|\geq\varepsilon_0$$

于是

$$\left\|f_{n_0}(x)-f(x)\right\|_\infty=\sup_{x\in D}\left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|\ge\left|f_{n_0}(x_{n_0})-f(x_{n_0})\right|\ge\varepsilon_0$$

说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_\infty\ne0$，$\{f_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $f(x)$.

（$\Rightarrow$）设 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\ne0$$

由上确界的定义，取 $n=1,2,\cdots$

$$\exists x_n\in D,|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{1}{n}\ge\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\ne0$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|\ne0$。

【3】设 $u_n(x)\in C[a,b],(n=1,2,\cdots)$，$\sum u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛，证明：

（1）$\sum u_n(a),\sum u_n(b)$ 都收敛；（2）$\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

（1）$\forall\varepsilon>0$，Cauchy 准则，$\exists N$，$\forall n>N,\forall p$，有

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in(a,b)$$

令 $x\to a+$，$|u_{n+1}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)|\le\varepsilon$，再数项级数的 Cauchy 准则知，

$\sum u_n(a)$ 收敛，同理 $\sum u_n(b)$ 收敛。

（2）由上面证明过程，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N,\forall p$，有

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\le\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b]$$

由 Cauchy 准则，得证。

【4】判别下面级数的一致收敛性：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$，$0\le x<+\infty$；（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(x+n)^n}{n^{2+n}}$，$x\in[0,1]$

（1）记 $u_n(x)=\sin x\cdot\sin nx$，$v_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$

验证满足 D 判别法的条件。

（2）记 $u_n(x)=\dfrac{x}{n^2},v_n(x)=(1+\dfrac{x}{n})^n$

验证满足 A 判别法的条件。

【5】设函数项级数 $\sum u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ ，证明

（1）在 $(-1,1)$ 上收敛；（2）在 $(-1,1)$ 上不一致收敛；

（3）在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛；（4）在 $(-1,1)$ 上连续。

（1）$\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\left|x+\frac{1}{n}\right|\to|x|$，由根式判别法得证。

（2）方法 1：当 $x=1$ ，$\sum u_n(x)$ 发散，故例【3】结论，在 $(-1,1)$ 上不一致收敛。

方法 2：考虑区间 $x\in(0,1)$

$$R_n(x)=(x+\frac{1}{n+1})^{n+1}+(x+\frac{1}{n+2})^{n+2}+\cdots\ge(x+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$$\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)|\ge\sup_{x\in[0,1]}\left|x+\frac{1}{n+1}\right|^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\not\to 0$$

由例【1】，$\sum u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛，从而在 $(-1,1)$ 上不一致收敛。

(3) 取 $q>0$，$[-q,q]\subset(-1,1)$

$\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|\le(q+\frac{1}{n})^n$，由(1), $\sum(q+\frac{1}{n})^n$ 收敛，从而原级在 $[-q,q]$

一致收敛(M 判别法)。

（4）根据（3），由连续性定理得证。

【6】求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx},x\in(0,+\infty)$ 的和函数（要说明主要步骤的依据）。

提示：要有以下几个步骤

（1）在 $(0,+\infty)$ 上收敛

（2）在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛（不是一致收敛）

（3）考虑 $\sum u_n(x)=\sum(-e^{-nx})$，$\sum u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$

$\sum u_n(x)=\sum(-e^{-nx})$ 满足逐项求导的条件。

(4)用逐项求导的方法求和函数。

第 14 章　幂级数

一、主要结论

【1】Abel 第一定理（P47 定理 14.1）

【2】Abel 第二定理：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域 $<-R,R>$ 上内闭一致收敛（P50 定理 14.4 和定理 14.5）

【3】 (1)幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在收敛域 $<-R,R>$ 上连续。即

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,\ x_0\in<-R,R>$$

亦即可逐项求极限。

（2）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 上可逐项求导，且收敛半径不变。

（3）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 上可逐项积分，且收敛半径不变。

二、例题及往年考题

【1】（P55 习题 3）证明：设 $f(x)=\sum a_n x^n$ 在 $|x|<R$ 内收敛，若 $\sum \frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，则 $\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x=\sum \frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$

由幂级数的性质，在 $|x|<R$ 时，可逐项积分

$$\int_0^x f(t)dt=\sum\int_0^x a_n x^n=\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

由于上面右边级在 $x=R$ 时收敛，由连续性定理，此级数在 $x=R$（左）连续。上式两边令 $x\to R^-$ 得证。

【2】由已知的幂级数展开式，求 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式（在点 $x=0$），并证明

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

由

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, x \in (-1,1)$$

逐项积分

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, x \in (-1,1)$$

当 $x=1$ 时，上式右边的级数收敛，由例【1】，上式对 $x=1$ 也成立，即

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, x \in (-1,1]$$

令 $x=1$ 得 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

【3】求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$ 的收敛域。（见 P50 例 4）

【4】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ 的和函数并指出收敛域。

收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1$

$x = \pm 1$ 时级数显然发散，故收敛域为：$(-1,1)$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ ，则当 $x \in (-1,1)$ 且 $x \neq 0$ 时，有

$$S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^n dx$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^n dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = -\frac{1}{x}(x + \ln(1-x))$$

显然，$S(0)=0$，故

$$S(x) = \begin{cases} -(1 + \frac{\ln(1-x)}{x}), & x \in (-1,1) \text{且} x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

【5】求函数 $\frac{1}{x^2+4x+3}$ 在 $x_0 = 1$ 处的幂级数展开式并指出收敛域。

$$\frac{1}{3+4x+x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3+x})=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n$$

由上面第一个级数的的收敛域$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$和第二个级数的收敛域$\left|\frac{x-1}{4}\right|<1$得

上面级数的收敛域为$(-1,3)$

【6】求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$的和。[P66-4(2)]

考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1},x\in(-1,1]$$

由于$S(0)=0$，且

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},|x|<1$$

由例【1】,

$$S(1)=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

第 15 章　傅里叶级数

往年部分考题

【1】把函数$f(x)=|\sin x|,-\pi\le x\le\pi$展开为傅里叶级数，并指出收敛性。

【02】把函数$f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$展开为余弦级数并指出收敛性，再利用该级数证明

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$。