第 12 章　数项级数

§1 级数的收敛性

《庄子·天下篇》“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例中，把每天截下那一部分的长度“加”起来：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

再如，

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots=0.333\cdots=\frac{1}{3}$$

如何计算

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots=?$$

如果

$$\left[1+(-1)\right]+\left[1+(-1)\right]+\cdots=0$$

如果

$$1+\left[(-1)+1\right]+\left[(-1)+1\right]+\cdots=1$$

问题：如何定义“无限个数相加”？

【定义 1】　给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**数项级数**或**无穷级数**(也常简称**级数**)，其中u_n称为数项级数(1)的**通项**.

数项级数（1）也常写作：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 或简单写作$\sum u_n$.

数项级数（1）的前 n 项之和，记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n \tag{2}$$

称它为数项级数（1）的**第 n 个部分和**，也简称**部分和**。

【定义 2】　若数项级数(1)的部分和数列$\{S_n\}$收敛于S，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$则称数项级数

(1)**收敛**，称 S 为数项级数(1)的**和**，记作

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{ 或 } S=\sum u_n .$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称数项级数(1)**发散**.

【例 1】 讨论**等比级数**(也称为**几何级数**)

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \tag{3}$$

的收敛性 $(a\neq 0)$.

解　$q\neq 1$ 时，级数(3)的第 n 个部分和

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

因此，

(i)当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}$. 此时级数(3)收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

(ii)当 $|q|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数(3)发散.

(iii)当 $q=1$ 时，$S_n=na$，级数发散.

(iv)当 $q=-1$ 时，$S_{2k}=0, S_{2k+1}=a, k=0,1,2,\cdots$，级数发散.

总之，$|q|<1$ 时，级数(3)收敛；$|q|\geq 1$ 时，级数(3)发散.

【例 2】 讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{4}$$

的收敛性。

解　级数(4)的第 n 个部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

因此级数(4)收敛，且

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1.$$

【性质 1】（**级数收敛的必要条件**）若$\sum u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

这是因为

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$

例如：$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$发散。

【性质 2】若$\sum u_n$与$\sum v_n$都收敛，则对任意常数c, d，级数$\sum(cu_n + dv_n)$亦收敛，且

$$\sum(cu_n + dv_n) = c\sum u_n + d\sum v_n.$$

这是因为：记$w_n = cu_n + dv_n$，由

$$S_n^{(w)} = cS_n^{(u)} + dS_n^{(v)}$$

便得证。

由此又可得

若$\sum u_n$收敛，$\sum v_n$发散，则$\sum(u_n + v_n)$发散。

【性质 3】在收敛级数的项中任意加括号后得到的新级数仍收敛，且其和不变.

这是因为：设$\sum u_n = S$

$$\sum v_n = v_1 + v_2 + \cdots = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

显然$S_n^{(v)}$是$S_n^{(u)}$的子列。

注意 从级数加括号后的收敛，不能推断它在未加括号前也收敛．例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

收敛，但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

【性质 4】　去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

这是因为：设$\sum u_n$收敛，去掉、增加或改变$\sum u_n$的有限个项得到的新级数为$\sum v_n$。$\{u_n\}$的某项之后与$\{v_n\}$的某项之后对应相等。在$\{u_n\}$或$\{v_n\}$中适当补充 0 项后，可使$\{u_n\}$与$\{v_n\}$的某项之后$(n \ge N)$完全相等。这时的$S_n^{(u)}$与$S_n^{(v)}$ $(n \ge N)$只差一个常数。它们有相同的收敛性。

【性质 5】　设$\sum u_n = S$，则第 n 个**余项**

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = S - S_n$$

且$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

这是因为:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} = S_{n+m} - S_n$$

令$m \to \infty$得$R_n = S - S_n$，再令$n \to \infty$得$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$。

【定理】（柯西准则）　级数(1)收敛的充要条件是：任给正数ε，总存在正整数N，使得当$m > N$以及对任意的正整数p，都有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon . \tag{6}$$

级数(1)发散的充要条件：存在某正数ε_0，对任何正整数N，总存在正整数$m_0 (> N)$和p_0，有

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right| \ge \varepsilon_0 . \tag{7}$$

【例 3】　讨论调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性.

解　由

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m} \right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \ge m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任何正整数$N$，取$m=N+1$，$p=m$就有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}\right|\geq\varepsilon_0=\frac{1}{2}$$

所以调和级数是发散的.

【例 4】 应用级数收敛的柯西准则证明级数$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛.

证 由于

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}$$

因此，对任给正数ε，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，使当$m>N$及对任意正整数$p$，由上式就有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

推得级数$\sum\dfrac{1}{n^2}$是收敛的.

【例 5】 讨论级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$$

的收敛性。

解 因

$$\sum u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\text{收敛（等比级数）}$$

$$\sum v_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{10n}+\cdots\text{发散（调和级数）}$$

所以

$$\sum(u_n+v_n)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{20})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n})+\cdots\text{发散。}$$

从而（由性质 3）去掉括号后

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots\text{发散}$$

【例 6】 设$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|$收敛，证明$\left\{a_n\right\}$收敛。

证 由 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall p$，有

$$\left|a_{n+1}-a_n\right|+\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|+\cdots+\left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|<\varepsilon$$

从而

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})++(a_{n+p}-a_{n+p-1})\right|$$

$$\leq\left|a_{n+1}-a_n\right|+\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|+\cdots+\left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|<\varepsilon$$

再由 Cauchy 准则，$\left\{a_n\right\}$收敛.

§2 正项级数

【一】比较判别法

如果$u_n>0\left(n=1,2,\cdots\right)$, 则称$\sum u_n$为正项级数。正项级数的特点是部分和$\left\{S_n\right\}$是递增数列. 因此有下面定理。

【定理 1】 正项级数$\sum u_n(u_n>0)$收敛的充要条件是：部分和数列$\left\{S_n\right\}$有上界，即存在某正数M，对一切正整数n有$S_n<M$.

【定理 2】（比较原则） 设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数，如果存在某正数N，对一切$n>N$都有

$$u_n\leq v_n$$

则

(i)若级数$\sum v_n$收敛，则级数$\sum u_n$也收敛；

(ii)若级数$\sum u_n$发散，则级数$\sum v_n$也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性，因此不妨设$u_n\leq v_n$对一切正整数n都成立. 若$\sum v_n$收敛，由$S_n^{(u)}\leq S_n^{(v)}$知

$$S_n^{(u)} \le \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)}$$

因此$\sum u_n$的部分和数列$\left\{S_n^{(u)}\right\}$有上界，$\sum u_n$收敛.

【推论】（比较原则的极限形式） 设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

则

(i) 当$0<l<+\infty$时，$\sum u_n$和$\sum v_n$同敛态；

(ii) 当$l=0$时，若$\sum v_n$收敛，则$\sum u_n$也收敛；

(iii) 当$l=+\infty$时，若$\sum v_n$发散，则$\sum u_n$也发散。

证 (i)由条件可得

$$c_1 v_n < u_n < c_2 v_n (c_2 \ge c_1 > 0, n > N).$$

其他类似。

【例 1】 考察$\sum \frac{1}{n^2-n+1}$的收敛性.

解 由于当$n\ge 2$时, 有

$$\frac{1}{n^2-n+1} \le \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} \le \frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$收敛, 故$\sum\frac{1}{n^2-n+1}$也收敛.

或

$$\frac{1}{n^2-n+1}\Big/\frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2-n+1} \to 1$$

因为$\sum\frac{1}{n^2}$收敛, 故$\sum\frac{1}{n^2-n+1}$也收敛.

【例 2】 考察$\sum\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$的收敛性.

解 因为

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}\Big/\frac{1}{2^n} = \sqrt[n]{n} \to 1$$

等比级数$\sum\frac{1}{2^n}$收敛，所以级数$\sum\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$也收敛.

【例 3 】 考察级数$\sum\sin\frac{1}{n}$的收敛性。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

调和级数$\sum\frac{1}{n}$发散, 所以级数$\sum\sin\frac{1}{n}$也发散.

【例 4】 考察级数$\sum\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$的收敛性。

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\Big/\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\to+\infty$$

级数$\sum\frac{1}{n}$发散, 所以级数$\sum\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$也发散.

【例 5】（P17-3） 设$\sum u_n$和$\sum v_n$为正项级数，且存在正整数N_0对一切$n\geq N_0$有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

证明：若级数$\sum v_n$，则级数$\sum u_n$也收敛；若$\sum u_n$发散，则$\sum v_n$也发散。

证 当$n\geq N_0$时，有

$$0<\frac{u_n}{v_n}\leq\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\leq\cdots\leq\frac{u_{N_0}}{v_{N_0}}$$

从而

$$u_n\leq\frac{u_{N_0}}{v_{N_0}}v_n(n\geq N_0)$$

由比较判别法得证。

【二】比式判别法和根式判别法

【定理 3】（比式判别法） 若 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

则

(i)当 $q<1$ 时，级数 $\Sigma\, u_n$ 收敛；

(ii)当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

证 当 $q<1$ 时，取 ε_0 使得 $c=q+\varepsilon_0<1$，存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon_0=c$$

在例 5 中，取 $\sum v_n=1+c+c^2+\cdots$，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=c$，由 $\sum v_n$ 收敛得证。

当 $1<q<+\infty$ 时，取 ε_0 使得 $c=q-\varepsilon_0>1$，存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，有

$$c=q-\varepsilon_0<\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，级数 $\sum u_n$ 发散。

当 $q=+\infty$ 时，则存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1,$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，级数 $\sum u_n$ 是发散的.

【注 1】比式判别法实际上是与等比级数比较产生的判别法。

【注 2】 用比式判别法时，当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$。这一点以后常用于 $\sum u_n$ 不是正项级数时，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=q>1$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而 $\sum|u_n|$ 发散，$\sum u_n$ 也发散。

【注 3】 用比式判别法时，如果 $q=1$，则无法判别 $\sum u_n$ 的收敛性。例如

$$\sum\frac{1}{n}\text{ 发散，}\sum\frac{1}{n^2}\text{ 收敛}$$

【例 6】 讨论级数 $\sum nx^{n-1}(x>0)$ 的敛散性.

解 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=x\cdot\frac{n+1}{n}\to x(n\to\infty),$$

当 $0<x<1$ 时级数收敛；当 $x>1$ 时级数发散；而当 $x=1$ 时，所考察的级数是 $\sum n$, 它显然也是发散的.

【定理 4】（根式判别法） 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$$

则

（i）当 $l<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

（ii）当 $l>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

证 当 $l<1$ 时，取 ε_0 使得 $c=l+\varepsilon_0<1$，存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，有

$$\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon_0=c$$

从而，

$$u_n<c^n\,(n\geq N_0)$$

由 $\sum c^n$ 收敛，得 $\sum u_n$ 收敛.

当 $l>1$ 时，取 ε_0 使得 $c=l-\varepsilon_0>1$，存在正整数 N_0，当 $n\geq N_0$ 时，有

$$c=l-\varepsilon_0<\sqrt[n]{u_n}$$

从而，

$$u_n>c^n>1(n\geq N_0)$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，级数 $\sum u_n$ 发散。

【注 1】 根式判别法实际上也是与等比级数比较产生的判别法。

【注 2】 用根式判别法时，当$l>1$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$。这一点以后常用于$\sum u_n$不是正项级数时，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l>1$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而$\sum|u_n|$发散，$\sum u_n$也发散。

【注 3】 用根式判别法时，如果$q=1$，则无法判别$\sum u_n$的收敛性。例如

$$\sum\frac{1}{n}\text{发散，}\sum\frac{1}{n^2}\text{收敛}$$

【注 4】 根式判别法比比式判别法更有效。即[上删 P43 总练习题 4(7)]

$$u_n>0,\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a$$

反之不然。见下面例。

【例 7】 考察级数$\sum u_n=\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的。（$1\le\sqrt[n]{2+(-1)^n}\le\sqrt[n]{3}$）

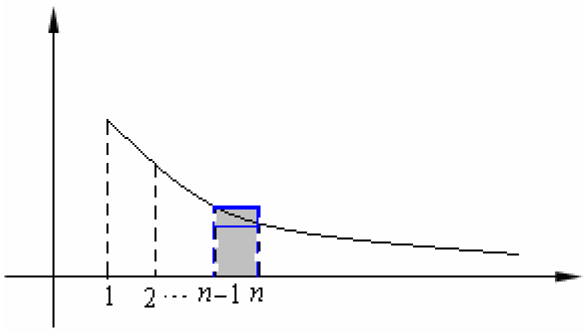
如果用比式判别法，由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{3}{2^{2m}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}}=\frac{3}{2},\ \lim_{m\to\infty}\frac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2m+1}}}{\frac{3}{2^{2m}}}=\frac{1}{6},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，比式判别法无法判别。

【三】积分判别法

【定理 5】（**积分判别法**）设f为$[1,+\infty)$上非负减函数，那么正项级数$\sum f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同时收敛或同时发散.



证　由假设 f 为 $[1,+\infty]$ 上非负减函数，对任何正数 A，f 在 $[1,A]$ 上可积，从而有

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1), n = 2,3,\cdots.$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \le \int_{1}^{m} f(x)dx \le \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=2}^{m-1} f(n).$$

若反常积分收敛，则

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \le f(1) + \int_{1}^{m} f(x)dx \le f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

有上界，级数 $\sum f(n)$ 收敛.

反之，若 $\sum f(n)$ 为收敛级数，则

$$\int_{1}^{m} f(x)dx \le S_{m-1} \le \sum f(n) = S.$$

故对任何正数 A，都有

$$0 \le \int_{1}^{A} f(x)dx \le S_n < S, n \le A \le n+1.$$

$\int_{1}^{A} f(x)dx$ 有上界，反常积分 $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

【例 8】　讨论 p **- 级数** $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解　函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$，当 $p > 0$ 时在 $[1,+\infty]$ 上是非负减函数. 反常积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 在 $p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散. 故 $\sum \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $0 < p \le 1$ 时发散. 至于 $p \le 0$ 的情形，$\frac{1}{n^p} \not\to 0$，它也是发散的.　□

【例 9】讨论下列级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性.

解　研究反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$$

当$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散；故原级数在$p>1$时收敛,，$p\le 1$时发散.

§3　一般项级数

【一】交错级数

若级数的各项符号正负相同，即

$$\sum(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots\quad(u_n>0,n=1,2,\cdots),\qquad(1)$$

则称级数（1）为交错级数．若交错级数(1)再满足下述两个条件：

(i)数列$\{u_n\}$单调递减；

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则称级数（1）为 **Leibniz 型级数**。

【定理 1】(莱布尼茨判别法)　Leibniz 型级数(1)必收敛，且其和S满足

$$0<S<u_1$$

证 考察 Leibniz 型级数(1)的部分和数列$\{S_n\}$，其偶子列

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})\qquad(1)$$

(1)每个括号都非负，因此$S_{2m}\ge 0$且$\{S_{2m}\}\uparrow$。又

$$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}\qquad(2)$$

(2)每个括号以及$u_{2m}>0$，因此$S_{2m}<u_1$。由单调有界定理，$\{S_{2m}\}$存在极限，设

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S$$

$\{S_n\}$的奇子列

$$S_{2m-1}=S_{2m}+u_{2m}$$

又$u_{2m} \to 0$，所以

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = S$$

综上，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$。

由$u_n > 0, \{u_n\} \downarrow 0$，当$m$充分大时，（1）中和（2）括号至少有正项，因此，$0 < c_1 \le S_{2m} \le c_2 < u_1$，取极限得$0 < S < u_1$。

【推论】 Leibniz 型级数(1)的余项

$$R_n = (-1)^{n+2} u_{n+1} + (-1)^{n+3} u_{n+2} + \cdots$$

其符号为$(-1)^{n+2}$（同首项符号），且

$$|R_n| < u_{n+1}$$

【例如】

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

是收敛的，且其和$0 < S < 1$。又

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

也是收敛的，且其和$S' < 0, |S'| < \frac{1}{2}$

【二】绝对收敛级数及其性质

若级数$\sum |u_n|$收敛，则称级数$\sum u_n$ **绝对收敛**。

【定理 2】 绝对收敛的级数一定收敛.

证 根据级数的柯西收敛准则，对任意正数 ε ，总存在正数N，使得对$n > N$和任意正整数r，有

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_{m+r}| < \varepsilon$$

由于

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+r}| \le |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \cdots + |u_{m+r}| < \varepsilon$$

因此由柯西准则知级数$\sum u_n$ 也收敛.

若级数 $\sum u_n$ 收敛，级数 $\sum |u_n|$ 不收敛，则称级数 $\sum u_n$ **条件收敛**。

例如：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$ 是条件收敛。

【例 1】 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\sum\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

证　由 $a_n>0,\{a_n\}\downarrow$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$。再由 $\sum(-1)^n a_n$ 发散, 得 $a>0$.(否则，由 Leibniz 判别法，$\sum(-1)^n a_n$ 收敛)。因

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(1+a_n)^n}}=\frac{1}{1+a_n}\to\frac{1}{1+a}<1$$

由根式判别法，$\sum\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

【例 2】 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{r^n}{n^p}(p>0,r>0)$ 的收敛性（包括条件收敛，绝对收敛）。

解　考虑 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$，由

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{r^{n+1}}{(n+1)^p}\frac{n^p}{r^n}\to r(n\to\infty)$$

当 $r<1$ 时（任意 $p>0$），绝对收敛（从而本身也收敛）

当 $r>1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 发散。这是因为用比式（或根式）判别的发散，其一般项不趋于零。

当 $r=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 这是 Leibniz 型级数，收敛。再考虑

$$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

这是 $p-$ 级数，$p>1$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。$p\le 1$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

综上，$r<1$，绝对收敛；$r>1$，发散；$r=1,p>1$，绝对收敛；$r=1,p\le 1$，条件

收敛.

【定理 3】（**级数重排定理**）（1）设$\sum u_n$绝对收敛，则任意重排后得到的级数$\sum u_n'$也绝对收敛且其和不变，即$\sum u_n=\sum u_n'$。（2）设$\sum u_n$条件收敛，则总存在它的重排级数$\sum u_n'$，使之收敛于预先给定的任意数或者使之按预先给定的任意方式发散。

例如:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$是条件收敛的，设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=A.$$

乘以常数$\frac{1}{2}$后，有

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{A}{2}.$$

将上述两个级数相加，

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\\&0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots\end{aligned}$$

就得到（取原级数两正项一个负项重新排列）

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

再如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$是条件收敛的。考察下面级数

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots \qquad (1)$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}>0$$

因$\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，推得级数（1）发散，把（1）中括号去掉仍发散，即原级数的重排级数

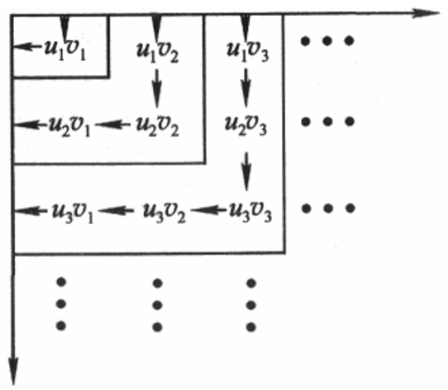
$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots$$

发散。

【定理 4】（柯西定理） 设$\sum u_n$和$\sum v_n$都绝对收敛，$\sum u_n = A$，$\sum v_n = B$，则对所有乘积项$u_i v_j$按任意顺序排列得到的级数（记为$\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right)$）也绝对收敛且其和等于$AB$。

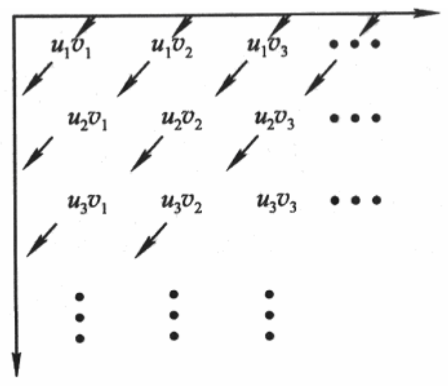
$\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right)$常见的有:

（1）矩形法则排列



$$\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \cdots$$

（2）对角线法则排列



$$\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots.$$

【例 3】 等比级数

$$\sum r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \cdots = \frac{1}{1-r}, |r| < 1$$

是绝对收敛的，将$\left(\sum r^{n-1}\right)\left(\sum r^{n-1}\right)$按对角线法则排列，则得到

$$\frac{1}{(1-r)^2} = 1 + (r+r) + \left(r^2 + r^2 + r^2\right) + \cdots + \underbrace{\left(r^n + \cdots + r^n\right)}_{n+1\text{个}} + \cdots$$

$$= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + (n+1)r^n + \cdots$$