中国矿业大学 2016-2017 学年第 2 学期

《数学分析 2》试卷（B）参考答案

一、单项选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1、函数 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_1^{2x} f(t)dt =$（B）。

（A） $f(2x)$；（B） $2f(2x)$； （C） $2f(x)$； （D） $2f(2x)-f(x)$。

2、$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx =$（D）。

（A） -2 ； （B） 2； （C） 0； （D）发散。

3、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中必收敛的为（D）。

（A） $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$； （B） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$； （C） $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}-u_{2n}$； （D） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n+u_{n+1}$。

4、函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充要条件是（B）。

（A）$\forall\varepsilon>0$，及 $x\in D$，$\exists\ N(\varepsilon, x)>0$，使 $\forall m>n>N$，有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_m(x)|<\varepsilon$；

（B）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，使 $\forall m>n>N$ 和 $x\in D$，有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_m(x)|<\varepsilon$；

（C）$\exists\varepsilon>0$，$\forall\ N(\varepsilon)>0$，使 $\forall m>n>N$ 和 $x\in D$，有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_m(x)|<\varepsilon$；

（D）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon, x)>0$，使 $\exists m>n>N$ 和 $x\in D$，有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_m(x)|<\varepsilon$。

5、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n$ 的收敛域为（C）。

（A） (-1, 1)； （B） (0, 2]； （C） [0, 2)； （D） [-1, 1)。

二、填空（共 5 小题，每题 3 分，共计 15 分）

1、若等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$（$a\neq 0$）发散，则 q 的范围为 $|q|\geq 1$。

2、设 $\sum u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$，若级数 $\sum u_n$ 收敛，则 q 的范围为 $q<1$。

3、函数列$\{f_n(x)\}$在区间D上一致收敛于$f(x)$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$。

4、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{5\pi}{32}$ 。

5、椭圆$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$所围的面积$=12\pi$ 。

三、计算题（共 6 小题，每小题 5 分，共计 30 分）

1、求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$。

【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dte^{x^2}}{e^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$ ---------3 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty.$$ ---------2 分

2、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$的收敛域及和函数。

【解】$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$收敛半径$R=1/\rho=1$ ---------1 分

当$x=1$时原级数为$1+2+3+\cdots+n+\cdots$发散

当$x=-1$时原级数为$-1+2-3+4+\cdots+n(-1)^n+\cdots$发散 --------2 分

因此收敛区域为$(-1,1)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]=\frac{x}{(1-x)^2}$$ -----2 分

3、求不定积分$\int\arctan x\,\mathrm{d}x$。

【解】$\int\arctan x\,\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ------2

$$=x\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=x\arctan x+\sqrt{1-x^2}+C.\qquad ----3$$

4、利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1+2^3+\cdots+n^3\right)$。

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1+2^3+\cdots+n^3\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}\qquad -----2$$

$$=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}.\qquad -----3$$

5、求定积分 $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$。

【解】 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=}\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int(1-\frac{1}{1+t})dt=2(t-\ln|1+t|)+C$

$$=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C.\qquad ------2$$

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]\Big|_0^4=4-2\ln 3.\qquad ------3$$

6、求摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(a>0),0\le t\le 2\pi$ 绕 x 轴旋转所围成立体的体积。

【解】 $V=\pi\int_0^{2\pi}[y(t)]^2x'(t)dt=a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$ ----------5 分

$$=a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2a^3$$ 。 ----------5 分

四、判定题（共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分）

1、判定反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^5+1}}$ 的收敛性。

【解】因为 $x^{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^5+1}}\xrightarrow{x\to+\infty}1$ -----------2

所以由柯西判别法知，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^5+1}}$ 收敛 -----------3

2、判定反常积分 $\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^3}$ 的收敛性。

【解】 这瑕积分，$x=1$是瑕点，

由$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^3}=+\infty$，知积分发散。

3、判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(1+\cos n)^n}{3^n}$的收敛性。

【解】因为$0<\dfrac{n^2(1+\cos n)^n}{3^n}<\dfrac{n^2\cdot2^n}{3^n}.$ ----2 分

设$a_n=\dfrac{n^2\cdot2^n}{3^n}$.考察$\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$的收敛性。

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\cdot(\frac{2}{3})^{n+1}}{n^2(\frac{2}{3})^n}=\dfrac{2}{3}<1$.由比值判别收敛法知级数$\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$收敛，

再由比较判别收敛法知原级数收敛。 -------3 分

4、判定函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!},x\in[-2,2]$的一致收敛性。

【解】对$\forall x\in[-2,2]$有$\left|\dfrac{x^n}{(n-1)!}\right|=\dfrac{|x|^n}{(n-1)!}\le\dfrac{2^n}{(n-1)!}$， -------2 分

令$u_n=\dfrac{2^n}{(n-1)!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n!}\cdot\dfrac{(n-1)!}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}<1.$

所以由比值判收敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n-1)!}$收敛。

从而根据 M 判别法知原级数一致收敛。 ------3 分

五、证明题（共 2 小题，每小题 10 分，共计 20 分）

1、用可积准则证明：若$f(x)$在$[a,b]$上可积，$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上也可积。

【证】 已知$f(x)$在$[a,b]$上可积，故任给$\varepsilon>0$，存在对$[a,b]$的某分割T，

使得$\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，在$T$上增加两个分点$\alpha$，$\beta$，得到一个新的分割$T'$，

则$\sum\limits_{T'}\omega_k'\Delta x_k'\le\sum\limits_{T}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$, -------5 分

分割T'在$[\alpha,\beta]$上的部分，构成$[\alpha,\beta]$的一个分割，记为T^*，

则有$\sum\limits_{T^*}\omega_k^*\Delta x_k^* \le \sum\limits_{T'}\omega_k'\Delta x_k' < \varepsilon$.　　　　------5 分

2、设f在$[a,b]$上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$，证明$F(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$F'(x)=f(x), x\in[a,b]。$$

【证】对$\left[a,b\right]$上任一确定的x，当$\Delta x \ne 0$且$x+\Delta x\in\left[a,b\right]$时，由积分中值定理，有

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt = f\left(x+\theta\Delta x\right), 0\le\theta\le 1.$$ --------5 分

由于f在点x连续，故有

$$F'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f\left(x+\theta\Delta x\right)=f\left(x\right).$$ --------5 分

【注】此题多有种证法。