资源与地球科学学院2019~2020学年

第二学期高等数学A3多元微分单元基础题测试（1）

有时候就调侃，一个人思维逻辑能力如何，看看多元微分能不能理清

1　已知 $z=(1+xy)^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________ .

2　设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则全微分 $dz\big|_{(0,\ 1)}=$________________.

3　设函数 f 和 g 都可微，令 $u=f(x,\ xy)$，$v=g(x+xy)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=$________.

4　设 $z=\int_0^{x^2y}f(t,\ e^t)dt$，其中函数 f 具有连续的一阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________________.

5　设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中函数 f，φ 有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

6　设函数 $u=e^z yz^2$，其中 $z=z(x,\ y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则当 $x=0$、$y=1$、$z=-1$ 时 $u'_y=$________________.

1　若函数 f，g 均可微，设 $z=f[xy,\ \ln x+g(xy)]$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　　）.

（A）f'_1；　　（B）f'_2；　　（C）0；　　（D）1.

2　设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 1)$ 的某个邻域内有连续偏导数，且满足 $f(x,\ x^3)=c$（这里 c 为某一常数），若 $f'_y(1,\ 1)=-1$，则 $f'_x(1,\ 1)=$（　　　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）3　　（D）-3

3　设函数 $u(x,\ y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 $\varphi(u)$ 有二阶

导数、$\psi(t)$ 有一阶导数，则必有（　　）.

（A）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（B）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（C）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（D）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

4　函数 $z(x，y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在点 $(0，0)$ 处（　　）.

（A）连续且偏导数存在；　（B）连续但是不可微；

（C）不连续且偏导数不存在；　（D）不连续但是偏导数存在.

5　设函数 $f(x，y)=\sqrt{|xy|}$，则在点 $(0，0)$ 处函数 $f(x，y)$（　　）.

（A）可微；　（B）偏导数存在，但不可微；

（C）连续，但偏导数不存在；　（D）不连续且偏导数不存在.

6　设 $f(x，y)$、$\varphi(x，y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x，y)\neq 0$．已知点 $P(x_0，y_0)$ 是函数 $f(x，y)$ 在约束条件 $\varphi(x，y)=0$ 下的一个极值点，下列选项中正确的是（　　）

（A）若 $f_x'(x_0，y_0)=0$，则 $f_y'(x_0，y_0)=0$；

（B）若 $f_x'(x_0，y_0)=0$，则 $f_y'(x_0，y_0)\neq 0$；

（C）若 $f_x'(x_0，y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0，y_0)=0$；

（D）若 $f_x'(x_0，y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0，y_0)\neq 0$.

1　设函数 $f(x，y)$ 在点 $(1，1)$ 处可微，且 $f(1，1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1，1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1，1)}=3$，设函数 $\varphi(x)=f\big(x，f(x，x)\big)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

2　设函数 $z=f(xy，\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g

具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3 设二元函数 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，

$u(x, 2x)=x$，$u_1'(x, 2x)=x^2$，求 $u_{11}''(x, 2x)$.

4 设函数 $z=f[x^2-y, \varphi(xy)]$，其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 有二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5 设函数 $u=f(x, y, z)$，而 x, y, z 满足 $\varphi(x^2, y, z)=0$ 及 $y=\sin x$，其中函数 f, φ 都具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

6 已知方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 定义了函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1 若函数 $f(u, v)$ 具有一阶连续偏导数，设 $z=f(x^2-y^2, \cos(xy))$，又 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明：$\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)$.

2 设函数 $f(x, y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $O(0, 0)$ 的一个邻域内连续，证明函数 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0, 0)=0$.

注：幂指函数求导数，取对数，用隐函数求导法。

解：改写函数为 $z=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]=(1+xy)^{y}[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

注：考察全微分的概念和运算。

解：因为 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+\ln(1+y)\mathrm{d}x+\dfrac{x+1}{1+y}\mathrm{d}y$，所以

$$\mathrm{d}z\Big|_{(0,\ 1)}=\mathrm{e}\mathrm{d}x+\ln 2\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{2}=(\mathrm{e}+\ln 2)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{2}.$$

注：考察多元抽象复合函数求偏导。

解：因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'\cdot(1+y)$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=(1+y)(f_1'+yf_2')g'$.

注：考察求高阶混合偏导运算。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+2xy[x^2f_1'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+x^2\mathrm{e}^{x^2y}f_2'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})]$$

$$=2xf(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+2x^3y[f_1'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+\mathrm{e}^{x^2y}f_2'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})].$$

注：考察符合函数求高阶偏导。

解：由于函数 f，φ 有二阶连续导数，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与求导次序无关，先对 y 求导，有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)x+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)=f'(xy)+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).$$

注：复合函数、隐函数求导，先代后求，比较简单。

解：方程 $x+y+z+xyz=0$ 两边同时对 y 求导（将 z 看作 x、y 的函数），有

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}+x(z+\frac{\partial z}{\partial y}y)=0\text{，解得}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1+xz}{1+xy}.$$

$$u'_y=\mathrm{e}^z z^2+y(\mathrm{e}^z z^2+2z\mathrm{e}^z)\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^z[z^2-yz(z+2)\frac{1+xz}{1+xy}]\text{，}u'_y=e^{-1}(1+1)=\frac{2}{e}.$$

注：考察求偏导的运算。

解：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+(\frac{1}{x}+yg')f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+xg'f_2'$，所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=xyf_1'+(1+xyg')f_2'-xyf_2'-xyg'f_2'=f_2'\text{，选（B）.}$$

注：考察求偏导的运算。

解：等式 $f(x，x^3)=c$ 两边同时对 x 求导，有 $f_x'(x，x^3)+3x^2f_y'(x，x^3)=0$，用 $x=1$ 代入，有 $f_x'(1，1)+3f_y'(1，1)=0$，所以 $f_x'(1，1)=-3f_y'(1，1)=3$，故选（C）.

注：考察求偏导的运算。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)\text{，}$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$．只有（B）可选.

注：考察多元函数连续（沿任意方向）、偏导存在的定义。

解：沿 $y=0$ 取极限，$\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}} z(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}}0=0$；

沿 $y=x$ 取极限，$\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to0}} z(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}} z(x,y)\ne\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to0}} z(x,y)$，于是极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y)$ 不存在，所以函数 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，从而也不可微.（A）、（B）被排除.

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}0=0$ 、$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{z(0,y)-z(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to0}0=0$，所以函数 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且 $z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0$，选（D）同时排除（C）.

注：考察多元函数连续、偏导存在、可微的概念。

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}0=0$ 、$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to0}0=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

若函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则

$$\Delta z=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)=o(\rho)\ \text{（其中}\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ \text{），}$$

而 $\Delta z=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$，因为 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z}{\rho}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{\Delta x\cdot\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在（沿 $\Delta y=0$ 取极限，其值为 0；沿 $\Delta y=\Delta x$ 取极限，其值为 $\dfrac{1}{\sqrt2}$），与 $\Delta z=o(\rho)$ 矛盾，所以函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微，只有选（B）.

注：考察偏导数的应用。

解：在 $\varphi'_y(x,y)\ne0$ 时，若点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，则函数 $f(x,y)$ 及 $\varphi(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 满足关系

$$f'_x(x_0,y_0)-\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}f'_y(x_0,y_0)=0\,.$$

（D）是正确的，事实上，若 $f'_y(x_0,y_0)=0$，根据上式得

$$f'_x(x_0,\ y_0)-\frac{\varphi'_x(x_0,\ y_0)}{\varphi'_y(x_0,\ y_0)}f'_y(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)=0,$$

与条件 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$ 矛盾．同时将（C）否定．

（A）否定的理由为：当 $f'_x(x_0,y_0)=0$ 时，可以是 $\varphi'_x(x_0,\ y_0)=0$，未必必须是 $f'_y(x_0,y_0)=0$，如 $f(x,\ y)=x^2+y$，$\varphi(x,\ y)=y-x^2$ 在点 $P_0=O(0,\ 0)$ 处；

（B）否定的理由为：当 $f'_x(x_0,y_0)=0$ 时，如果 $\varphi'_x(x_0,\ y_0)\neq 0$，应有 $f'_y(x_0,y_0)=0$，如 $f(x,\ y)=xy$，$\varphi(x,\ y)=x-y$ 在点 $P_0=O(0,\ 0)$ 处．

注：考察求偏导运算。

解：因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\{f'_1(x,f(x,x))+f'_2(x,f(x,x))[f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]\}$，而

$\varphi(1)=f\big(1,\ f(1,\ 1)\big)=f(1,\ 1)=1$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=3\{f'_1(1,\ 1)+f'_2(1,\ 1)[f'_1(1,\ 1)+f'_2(1,\ 1)]\}=3[2+3(2+3)]=51.$$

注：考察求偏导运算。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf''_{11}+\frac{1}{y}f'')+\frac{1}{y}(yf''_{21}+\frac{1}{y}f'')+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''$$

$$=y^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f'')-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22})-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

注：考察多元复合函数求导。

解：等式$u(x,2x)=x$两边同时对x求导，有$u_1'(x,2x)+2u_2'(x,2x)=1$，再两边同时对x求导，有

$$u_{11}''(x,2x)+2u_{12}''(x,2x)+2u_{21}''(x,2x)+4u_{22}''(x,2x)=0,$$

由$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，有$u_{11}''(x,2x)=u_{22}''(x,2x)$及$u_{12}''(x,2x)=u_{21}''(x,2x)$，得

$$5u_{11}''(x,2x)+4u_{12}''(x,2x)=0, \qquad (1)$$

等式$u_1'(x,2x)=x^2$两边同时对x求导，有

$$u_{11}''(x,2x)+2u_{12}''(x,2x)=2x, \qquad (2)$$

（1）减去（2）式的 2 倍，得$3u_{11}''(x,2x)=-4x$，所以$u_{11}''(x,2x)=-\dfrac{4x}{3}$.

注：考察多元复合函数求偏导。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(2x)+f_2'\cdot(\varphi'\cdot y)=2xf_1'+y\varphi'f_2'$；

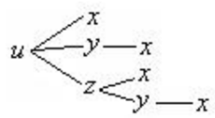
$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\cdot(\varphi'\cdot x)=-f_1'+x\varphi'f_2'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot(\varphi'\cdot x)]+\varphi'f_2'+y\cdot\varphi''\cdot xf_2'+y\varphi'[f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot(\varphi'\cdot x)]$$

$$=(\varphi'+xy\varphi'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)\varphi'f_{12}''+xy\varphi'^2 f_{22}''.$$

注：考察复合函数、隐函数求偏导，先代后求。

解：（方法 1）函数关系如图所示，最终u是x的一元函数，其中$z=z(x,y)$为隐函数部分，它由方程$\varphi(x^2,y,z)=0$确定，根据隐函数求导法则，设$F(x,y,z)=\varphi(x^2,y,z)$，则



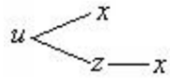
$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{2x\varphi_1'}{\varphi_3'}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{\varphi_2'}{\varphi_3'}$，

又$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$．按复合函数链式求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=f_1'+f_2'\cdot\cos x-\frac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\cos x}{\varphi_3'}f_3'.$$

（方法 2）先将 $y=\sin x$ 代入到 $u=f(x,\ y,\ z)$、$\varphi(x^2,\ y,\ z)=0$ 之中，分别有

$u=f(x,\ \sin x,\ z)$ 及 $\varphi(x^2,\ \sin x,\ z)=0$．这时函数关系如图所示，



其中隐函数部分为 $z=z(x)$，由方程 $\varphi(x^2,\ \sin x,\ z)=0$ 确定．

方程 $\varphi(x^2,\sin x,\ z)=0$ 两边同时对 x 求导，有 $2x\varphi_1'+\cos x\cdot\varphi_2'+\varphi_3'\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，解得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'}$．对 $u=f(x,\ \sin x,\ z)$ 再按复合函数链式求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot\cos x+f_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot\cos x-\frac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\cos x}{\varphi_3'}f_3'.$$

注：考察隐函数求高阶偏导。

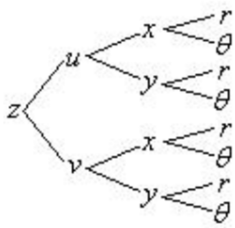
解：方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 改写为 $x=z(\ln z-\ln y)$，两边同时对 x 求导，有 $1=(\ln\dfrac{z}{y}+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}$，即

$1=\dfrac{x+z}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{z+x}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(z+x)-(1+\frac{\partial z}{\partial x})z}{(z+x)^2}=\frac{xz-z(z+x)}{(z+x)^3}=-\frac{z^2}{(z+x)^3}.$$

注：考察复合函数求偏导运算。

解： 设 $u=x^2-y^2$，$v=\cos(xy)$，则函数关系如图所示：



由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-y\sin(xy)$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2x\sin(xy)$，

$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta$、$\dfrac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta$，$\dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta$、$\dfrac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$，有

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial r})+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial r})$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(2x\cos\theta-2y\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial v}[-y\sin(xy)\cos\theta-x\sin(xy)\sin\theta]$$

$$=2\frac{\partial z}{\partial u}(x\cos\theta-y\sin\theta)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)(y\cos\theta+x\sin\theta).$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta})+\frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta})$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(-2xr\sin\theta-2yr\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial v}[y\sin(xy)r\sin\theta-x\sin(xy)r\cos\theta]$$

$$=-2r\frac{\partial z}{\partial u}(x\sin\theta+y\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial v}r\sin(xy)(y\sin\theta-x\cos\theta).$$

将$\frac{\partial z}{\partial r}$、$\frac{\partial z}{\partial \theta}$代入原式左边，得到

$$\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta$$

$$=[2\frac{\partial z}{\partial u}(x\cos\theta-y\sin\theta)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)(y\cos\theta+x\sin\theta)]\cos\theta$$

$$+[2\frac{\partial z}{\partial u}(x\sin\theta+y\cos\theta)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)(y\sin\theta-x\cos\theta)]\sin\theta$$

$$=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\frac{\partial z}{\partial v}\sin(xy).$$

注：考察可微的概念。

证明：

充分性　因为$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$（该不等式放缩是关键），有函数$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$有界，而由函数$\varphi(x,y)$在点$O(0,0)$连续，且$\varphi(0,0)=0$，有$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$，根据无穷小与有界变量之积为无穷小，得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

这表明$\Delta z=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\rho)$（其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$），所以函数

$$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)\text{在点}O(0,0)\text{处可微}.$$

必要性　由函数$f(x,y)$在点$O(0,0)$处可微，有$f'_x(0,0)$（与$f'_y(0,0)$）存在，即极限

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{|x-0|\varphi(x,0)-0\cdot\varphi(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}\text{存在},$$

但是，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0)$、$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0)$，要使$\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}$存在，必须$\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$，得$\varphi(0,0)=0$.