数学分析(1)-(3)历年考题

第 08 章　不定积分

【01】求不定积分$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx=\int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int \sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}+C$$

【02】求不定积分$\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$

$$\int x^2e^{-x}dx=\int x^2d\left(-e^{-x}\right)=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\int xd\left(-e^{-x}\right)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C.$$

【03】求不定积分$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}\,x$

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}\,x=\int e^x\,\mathrm{d}\sin x$$

$$=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=e^x\sin x+\int e^x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}\,x$$

解得

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$$

【04】求不定积分 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}\,x$

$$I=\int e^x\sin x\,\mathrm{d}\,x=\int \sin x\,\mathrm{d}\,e^x=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}\,x=e^x\sin x-\int \cos x\,\mathrm{d}\,e^x$$

$$=e^x\sin x-\int \cos x\,\mathrm{d}\,e^x=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}\,x=e^x\sin x-e^x\cos x-I$$

解得

$$I=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)+C$$

【05】求不定积分$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$。

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

【06】求不定积分 $\int |x|e^{-x}dx$

当 $x \geq 0$ 时，$\int |x|e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$

当 $x < 0$ 时，$\int |x|e^{-x}dx = \int -xe^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x} + C_2$

由 $\int |x|e^{-x}dx$ 的连续性得

$$-1 + C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 + 2$$

$$\int |x|e^{-x}dx = \begin{cases} -xe^{-x} - e^{-x} + 2 + C & x \geq 0 \\ xe^{-x} + e^{-x} + C & x < 0 \end{cases}$$

【07】求不定积分 $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

令 $x = \sin t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C$$

这里

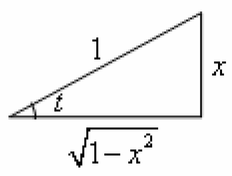
$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = x\sqrt{1-x^2}$$

【08】求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

令 $x = \sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$，

原式 $= \int \frac{\cos t}{(1+\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t + 2\sin^2 t}\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1}{(1+2\tan^2 t)\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2\tan^2 t}\mathrm{d}\tan t$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+2\tan^2 t}\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

【09】求不定积分$\int(\arcsin x)^2dx$

$$\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-2\int\arcsin x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

【10】求不定积分$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int(\frac{\arctan x}{x^2}-\frac{\arctan x}{1+x^2})dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=I-II$$

$$I=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int\arctan x d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C_1$$

这里

$$\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx^2$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C_1\text{）}$$

$$II=\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan x d\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C_2$$

综上

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

第 09 章　定积分

【01】利用定积分求极限$I=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

【02】利用定积分求极限$I=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{1}{n}[1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)x}{n}]$

当$x=0$时，$I=1$

当$x\neq 0$时，$I=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{i-1}{n}x=\int_0^1\cos xtdt=\frac{1}{x}\sin xt\Big|_0^1=\frac{\sin x}{x}$

综上

$$I=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

【03】求定积分$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。（提示：可作换元$x=\pi-t$）

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\overset{x=\pi-t}{=\!=\!=}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I\text{。}$$

解得

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos t\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{4}$$

【04】设f为$[a\,,b]$上的非负连续函数，证明：如果$\int_a^b f(x)dx=0$，则$f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$。

反证。设$f(x)\not\equiv 0,x\in[a,b]$，不妨设$f(x_0)>0\ (a<x_0<b)$。

由连续函数的保号性，存在$U(x_0,\delta)\subset(a\,,b)$，当$x\in U(x_0,\delta)$时，有

$$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2} f(x_0)dx = f(x_0)\delta > 0$$

这与 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 矛盾。得证。

【05】求极限 $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4} \overset{\text{洛必达}}{===} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

【06】设 f 是 $[a,b]$ 上的连续增函数，

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, & a < x \leq b \\ f(a), & x = a \end{cases}$$

试证明 F 也是 $[a,b]$ 上的增函数。

当 $x \in (a,b]$ 时，

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

[方法 1]用积分中值定理，$\exists \xi \in [a,x]$

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-a} \geq 0$$

[方法 2]

$$F'(x) = \frac{\int_a^x f(x)dt - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2} = \frac{\int_a^x [f(x)-f(t)]dt}{(x-a)^2} \geq 0$$

知 F 在 $(a,b]$ 上增，又

$$\lim_{x\to a^-} F(x) \overset{\text{洛必达}}{===} \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{1} = f(a)$$

知 $F(x)$ 在点 $x = a$ 连续，从而 F 在 $[a,b]$ 上增。

【07】设 f 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，$F(x)=\int_{-a}^{a}\left|x-t\right|f(t)dt, x\in[-a,a]$，证明：

$$F''(x)=2f(x)$$

$$F(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)dt$$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+\int_{x}^{a}tf(t)dt-x\int_{x}^{a}f(t)dt$$

$$F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt$$

$$F''(x)=2f(x)$$

【08】 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续增函数，

$$F(x)=\int_{a}^{x}tf(t)\,\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_{a}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

证明 $F'(x)\geq 0$， $x\in[a,b]$。

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_{a}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_{a}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

[方法 1]用积分中值定理，$\exists\xi\in[a,x]$

$$F'(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(\xi)=\frac{x-a}{2}(f(x)-f(\xi))\geq 0$$

[方法 2] $F'(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a}^{x}f(x)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{a}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{a}^{x}[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t\geq 0$

【09】设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可导，且

$$n\int_{0}^{\frac{1}{n}}e^{x-a}f(x)dx=f(a)\ (\frac{1}{n}<a)$$

证明：$\exists\xi\in(0,a)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

令 $F(x)=e^{x-a}f(x)$，则 $F(a)=f(a)$。由积分中值定理，存在 $0\leq\xi_1\leq\dfrac{1}{n}$ 使得

$$n\int_{0}^{\frac{1}{n}}e^{x-a}f(x)dx=e^{\xi_1-a}f(\xi_1)$$

再由条件知 $F(\xi_1)=f(a)$。对 $F(x)$ 在 $[\xi_1,a]$ 上用 Rolle 中值定理得：

$\exists\xi\in(\xi_1,a)\subset(0,a)$ 使得

$$F'(\xi)=e^{\xi-a}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0\Rightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0$$

【10】利用可积准则证明：若 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

设 f 为增函数，且 $f(a)<f(b)$（若 $f(a)=f(b)$，则 f 为常量函数，显然可积）

对 $[a,b]$ 的任一分割 T，由 f 的增性，f 在 T 所属的每个小区间 Δ_i 上的振幅为：

$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

于是有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\|T\| = [f(b)-f(a)]\|T\|.$$

由此可见，任给 $\varepsilon>0$，只要 $\|T\| \le \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，这时就有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上可积。

【11】证明微积分基本定理：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$，$f$ 在点 $x_0 \in [a,b]$ 连续，则 $F(x)$ 在点 x_0 可导，并且 $F'(x_0)=f(x_0)$。

由 f 在点 $x_0 \in [a,b]$ 连续，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon, \quad t \in [x_0, x_0+\Delta x] \; or \; [x_0+\Delta x, x_0]$$

于是

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{|\Delta x|}|f(t)-f(x_0||\Delta x| = |f(t)-f(x_0| < \varepsilon$$

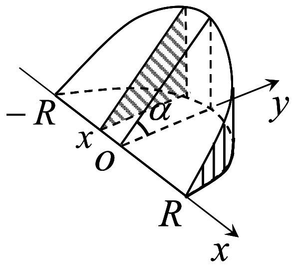
即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

由导数的定义知，$F(x)$ 在点 x_0 可导，并且 $F'(x_0)=f(x_0)$。

第 10 章　积分的应用

【01】设一平面通过半径为 R 的圆柱体的底圆中心,且与底面的夹角为 α，求截得楔形体的体积（如图）。



底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$.过点 $x\in[-R,R]$ 作垂直于 x 轴的截面,得

$$A(x)=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha, x\in[-R,R].$$

则楔形体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha\,.$$

【02】（1）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围的椭圆面积；

（2）求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围的椭球体积。

（1）化椭圆为参数方程

$$x=a\cos t\ \ ,\ y=b\sin t\ \ ,\ t\in[0,2\pi].$$

椭圆面积为

$$A=\left|\int_0^{2\pi}b\sin t\,(a\cos t\,)'dt\right|=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi\,a\,b$$

(2) 以 $z=z_0$ 截椭球得椭圆（在 xOy 平面的投影）

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z_0^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z_0^2}{c^2})}=1$$

由（1）此椭圆面积为：$A(z_0)=\pi\,a\,b(1-\frac{z_0^2}{c^2})$，椭球体积：

$$V=\int_{-c}^{c}A(z)dz=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$$

【03】求摆线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 一拱的弧长。

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8$$

第 11 章　反常积分

【01】 讨论 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性.

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}\quad+\int_{1/2}^1$

（1）讨论 $\int_0^{1/2}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

$p\ge 1$ 时，是正常积分。$p<1$ 时，是瑕积分，$x=0$ 是瑕点，由

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-p}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1$$

得 $p>0$ 时收敛，否则发散。

（2）$\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

$q\ge 1$ 时，是正常积分。$q<1$ 时，是瑕积分，$x=1$ 是瑕点，由

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1-q}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1$$

得 $q>0$ 时收敛，否则发散。

综上，$\mathrm{B}(p,q)$ 只有当 $p>0,q>0$ 收敛。

【02】 讨论 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 的收敛性。

记 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\quad+\int_1^{+\infty}\quad=I(s)+J(s)$

（1）讨论 $I(s)$

当 $s\ge 1$ 时，是正常积分。当 $s<1$ 时，是瑕积分，$x=0$ 是瑕点。由于

$$\lim_{x\to 0}x^{1-s}x^{s-1}e^{-x}=1$$

所以，当 $1-s<1\Leftrightarrow s>0$ 时，$I(s)$ 收敛，当 $1-s\ge 1\Leftrightarrow s\le 0$，$I(s)$ 发散。

（2）讨论$J(s)$

它是无穷积分，由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 x^{s-1} e^{-x} = 0$$

所以，对$\forall s$，$J(s)$收敛。

综上，$\Gamma(s)$只有在$s>0$时收敛。

【03】讨论反常积分$\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$的收敛性.

解 把反常积分$\Phi(\alpha)$写成

$$\Phi(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=I(a)+J(a)$$

(1) 先讨论$I(\alpha)$

当$\alpha-1\geq 0$，即$\alpha\geq 1$时它是定积分；当$\alpha<1$时它是瑕积分，瑕点为$x=0$．由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=1,$$

当$0<q=1-\alpha<1,$即$\alpha>0$时，瑕积分$I(a)$收敛；

当$q=1-\alpha\geq 1$，即$\alpha\leq 0$时，$I(\alpha)$发散。

（2） 再讨论$J(\alpha)$

它是无穷积分．由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=1,$$

当$p=2-\alpha>1$，即$\alpha<1$时，$J(\alpha)$收敛；

而当$p=2-\alpha\leq 1$，即$\alpha\geq 1$时，$J(\alpha)$发散.

综上$\Phi(\alpha)$收敛$\Leftrightarrow I(\alpha)$与$J(\alpha)$同时收敛，

所以$\Phi(\alpha)$只有当$0<\alpha<1$时才是收敛的。

第 12 章　数项级数

【01】用 Cauchy 准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$收敛。

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}<\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}$$

因此，$\forall\varepsilon>0,$取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$m>N,\forall p$，有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\varepsilon$$

【02】用 Cauchy 准则证明级数$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$发散.

$$\begin{aligned}\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+m}\right|&=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+m}\\&\ge\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$N$，只要$m>N$和$p=m$，则

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|\ge\varepsilon_0$$

【03】设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$收敛。

由于$\{a_n\}$单调减少且$a_n>0$（有下界），故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ge 0$存在，

再由$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散知$a\ne 0$，因此$a>0$（否则由 Leibniz 级数的收敛性导致矛盾）。

由$a_n\ge a$得

$$\frac{1}{(1+a_n)^n}\le\frac{1}{(1+a)^n}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a)^n}$是收敛的，根据比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$收敛。

【04】讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{r^n}{n^p}(p>0,r>0)$的收敛性（包括条件收敛，绝对收敛）。

考虑$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$，由

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{r^{n+1}}{(n+1)^p}\frac{n^p}{r^n}\to r(n\to\infty)$$

得

当$r<1$时（任意$p>0$），绝对收敛（从而本身也收敛）

当$r>1$时，$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散，从而$\sum_{n=2}^{\infty}u_n$发散。这是因为用比式（或根式）判别的发散，其一般项不趋于零。

当$r=1$时，$\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$这是 Leibniz 型级数，收敛。再考虑

$$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

这是$p-$级数，$p>1$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}u_n$绝对收敛。$p\le 1$，$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散，$\sum_{n=2}^{\infty}u_n$条件收敛。

综上

$r<1$，绝对收敛；$r>1$，发散；

$r=1,p>1$，绝对收敛；$r=1,p\le 1$，条件收敛.