第四章　函数的连续性

§1　连续性概念

连续函数是数学分析中着重讨论的一类函数.

从几何形象上粗略地说，连续函数在坐标平面上的图象是一条连绵不断的曲线. 当然我们不能满足于这种直观的认识，而应给出函数连续性的精确定义，并由此出发研究连续函数的性质. 本节中先定义函数在一点的连续性和在区间上的连续性.

【一】　函数在一点的连续性

【定义 1】 设函数 f 在某 $U\left(x_0\right)$ 内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$，则称 f **在点 x_0 连续**. 设函数 f 在某 $U^0\left(x_0\right)$ 内有定义. 若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则称点 x_0 为函数 f 的**间断点**或**不连续点**.

若 x_0 为函数 f 的间断点，则必出现下列情形之一：

（1）f 在点 x_0 无定义

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 不存在；

（3）f 在点 x_0 有定义且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$

例如，函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$,在点 $x=0$ 连续

函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$,在点 $x=0$ 连续

【增量形式】 记 $\Delta x = x - x_0$，称为**自变量 x** (在点 x_0)的**增量**. 设 $y_0=f\left(x_0\right)$，相应的**函数 y** (在点 x_0)的**增量**记为

$$\Delta y = f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=y-y_0$$

函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

【定义 2】　设函数 f 在某 $U_+\left(x_0\right)\left(U_-\left(x_0\right)\right)$ 内有定义．若

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\left(\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\right),$$

则称 f 在点 x_0 **右(左)连续**．

【显然】　函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是：f 在点 x_0 既是右连续又是左连续．

例如：$f\left(x\right)=\begin{cases} x+2, x\ge 2 \\ x-2, x<0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 右连续，但不左连续，从而它在 $x=0$ 不连续。

【例 1】　狄利克雷函数 $D\left(x\right)=\begin{cases} 1, x\in Q \\ 0, x\notin Q \end{cases}$ 没有连续点。

因为 $\forall x_0\in R$，$\lim_{x\to x_0} D\left(x\right)$ 不存在（由归结原则）

【例 2】　函数 $f\left(x\right)=xD\left(x\right)$ 仅在点 $x=0$ 连续.

显然 由 $\lim_{x\to 0} f(x)=f\left(0\right)=0$，$f$ 在点 $x=0$ 连续.

另外，$\forall x_0\ne 0$，$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 不存在。这是因为

取有理点列 $x_n\to x_0$，$f\left(x_n\right)=x_nD\left(x_n\right)=x_n\to x_0\ne 0$

取无理点列 $\overline{x}_n\to x_0$，$f\left(\overline{x}_n\right)=\overline{x}_nD\left(\overline{x}_n\right)=0\to 0$

【例 3】　黎曼函数

$$R\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{q},\text{当}x=\dfrac{p}{q}\left(p\text{，}q\text{为正整数},p/q\text{为既约真分数}\right) \\ 0,\text{当}x=0,1\text{及（}0,1\text{）内无理数} \end{cases}$$

在 $(0,1)$ 内任何无理点处都连续，任何有理点处都不连续.

由上一章例题 $\forall x_0\in[0,1],\quad \lim_{x\to x_0} R(x)=0$ 便知。（间断点是可数无穷多）

【二】　间断点的分类

第一类间断点：左右极限都存在的间断点。

第二类间断点：非第一类的间断点。即左右极限至少有一个不存在。

第一类间断点又分为可去间断点与跳跃间断点

1．可去间断点　若 $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$，而 f 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f\left(x_0\right)\ne A$，

则称 x_0 为 f 的可去间断点.

例如，$f(x)=|\operatorname{sgn}x|$，$x=0$是$f$的可去间断点.

又如$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x=0$是g的可去间断点.

设x_0为函数f的可去间断点，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，定义

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}f(x), x\neq x_0\\ A, x=x_0\end{cases}$$

则对于函数$\hat{f}$在点x_0连续.

2．跳跃间断点　若函数f在点x_0的左、右极限都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点$x_0$为函数$f$的**跳跃间断点**.

例如，$f(x)=[x]$，当$x=n$　(n为整数)时有

$$\lim_{x\to n^-}[x]=n-1\text{，}\lim_{x\to n^+}[x]=n$$

整数点都是函数$f(x)=[x]$的跳跃间断点.

第二类间断点的例子：

$f(x)=\dfrac{1}{x}$，当$x\to 0$时，不存在有限的极限（无穷间断点）

$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处左、右极限都不存在（振荡间断点）

狄利克雷函数$D(x)$，其定义域R上每一点x都是第二类间断点.

【三】　区间上的连续函数

【连续函数】若函数f在区间I上的每一点都连续，则称f为I上的**连续函数**．对于闭区间或半开半闭区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续.

如函数$y=\sin x$是R上连续函数，又如$y=\sqrt{1-x^2}$在$(-1,1)$每一点处都连续，在$x=1$为左连续，在$x=-1$为右连续，因而它在$[-1,1]$上连续.

【分段函数】若函数f在区间$[a,b]$上仅有有限个第一类间断点，则称f在$[a,b]$上**分段连续**.

例如，函数$y=[x]$和$y=x-[x]$]在区间$[-3,3]$上是分段连续的.

§2　连续函数的性质

【一】 连续函数的局部性质

【定理 1】(局部有界性)　若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某 $U(x_0)$ 内有界.

【定理 2】(局部保号性)　若函数 f 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$ (或 <0)，则对任何正数 $r<f(x_0)$ (或 $r<-f(x_0)$)，存在某 $U(x_0)$，使得对一切 $x\in U(x_0)$ 有 $f(x)>r$，(或 $f(x)<-r$).

【注】 在具体应用局部保号性时，常取 $r=\frac{1}{2}f(x_0)$ 则(当 $f(x_0)>0$ 时)存在某 $U(x_0)$ 使在其内有 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$.

【定理 3】(四则运算)　若函数 f 和 g 在点 x_0 连续，则 $f\pm g, f\cdot g, f/g$ (这里 $g(x_0)\neq 0$)也都在点 x_0 连续.

【定理 4】（复合函数的连续）若函数 g 在点 x_0 连续，$u_0=g(x_0)$，f 在点 u_0 连续，则复合函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

【二】 闭区间上连续函数的基本性质

【定义 1】　设 f 为定义在数集 D 上的函数．若存在 $x_0\in D$，使得对一切 $x\in D$ 有

$$f(x_0)\geq f(x)\left(f(x_0)\leq f(x)\right),$$

则称 f 在 D 上有最大(最小)值，并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的**最大(最小)值**.

【定理 4】 (最值定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

用致密性定理证明最值定理

记 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $(-\infty<M\leq+\infty)$，易知 $\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

这是因为，如果 $M<+\infty$，根据上确界的定义，取 $n=1,2,\cdots$，则 $\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$M-\frac{1}{n}\le f(x_n)\le M$$

两边取极限，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$

如果 $M=+\infty$，即 $f(x)$ 无上界，取 $n=1,2,\cdots$，则 $\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$f(x_n)>n$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$

$\{x_n\}\subset[a,b]$，$\{x_n\}$ 有界，由致密性定理，$\{x_n\}$ 有收敛子列，不妨假设就是它本身。于是设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，显然 $\xi\in[a,b]$，再由 f 的连续性得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)=M$$

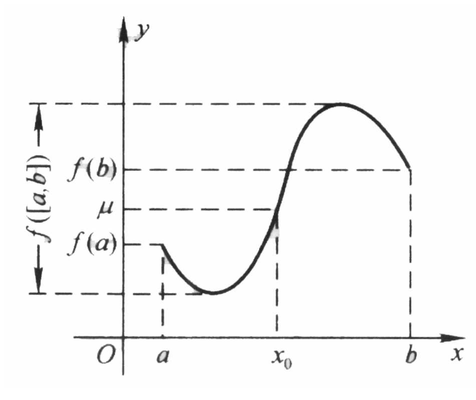
上式说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 $M=f(\xi)(-\infty<M<+\infty)$

【注】 上述证明没有用到有界性定理，这也同时证明了有界性定理。

【定理 5】 (有界性定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

【定理 6】 (介值性定理 1)　设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\ne f(b)$. 若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数 ($f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(a)>\mu>f(b)$)，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\mu$.

这个定理表明，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，又不妨设 $f(a)<f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[f(a),f(b)]$ 中的一切值，即有 $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$，其几何意义如下图所示.

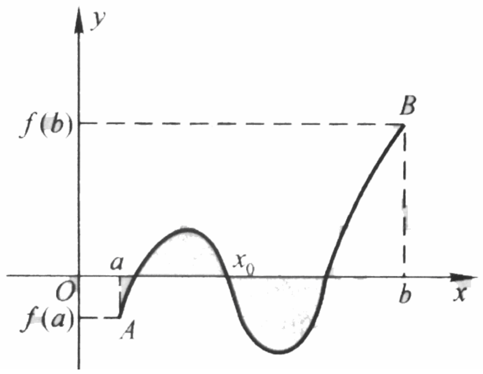


【定理 7】 (介值性定理 2) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，　f 在 $[a,b]$ 上的最大值为

M，最小值为 m，则 $f([a,b])=[m,M]$。即 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[m,M]$ 中的一切值。

【定理 8】(根的存在定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)f(b)<0$)，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

这个定理的几何解释如下图所示：若点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 分别在 x 轴的两侧，则连接 A、B 的连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点.



【例 1】（P80 例 3）　证明：若 $r>0$，n 为正整数，则存在唯一正数 x_0，使得 $x_0^n=r$(x_0 称为 r 的 n 次正根（即算术根），记作 $x_0=\sqrt[n]{r}$).

证　先证存在性．由于当 $x\to+\infty$ 时有 $x^n\to+\infty$，故必存在正数 a，使得 $a^n>r$．因 $f(x)=x^n$ 在 $[0,a]$ 上连续，并有 $f(0)<r<f(a)$，故由介值性定理，至少存在一点 $x_0\in(0,a)$，使得 $f(x_0)=x_0^n=r$．

再证唯一性．设正数 x_1 使得 $x_1^n=r$，则有

$$x_0^n-x_1^n=(x_0-x_1)\left(x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x_1+\cdots+x_1^{n-1}\right)=0,$$

由于第二个括号内的数为正，所以只能 $x_0-x_1=0$，即 $x_1=x_0$.

【例 2】（P80 例 4）　设 f 在 $[a,b]$ 上连续，满足

$$f([a,b])\subset[a,b]$$

证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

证　条件意味着：对任何 $x\in[a,b]$ 有 $a\le f(x)\le b$，特别有

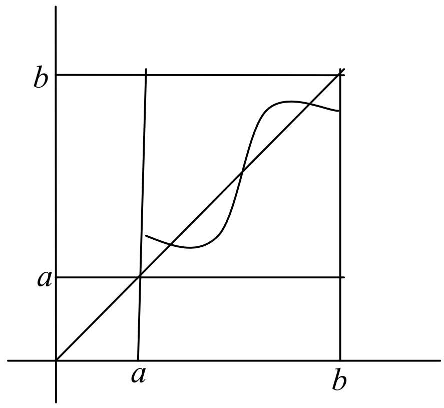
$$a \le f(a) \quad \text{以及} \quad f(b) \ge b.$$

若 $a = f(a)$ 或 $f(b) = b$，则取 $x_0 = a$ 或 b.

现设 $a < f(a)$ 与 $f(b) < b$. 令

$$F(x) = f(x) - x$$

则 $F(a) = f(a) - a > 0,$，$F(b) = f(b) - b < 0$. 故由根的存在性定理，存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 $F(x_0) = 0$，即 $f(x_0) = x_0$. （参见下图）



【例 3】(P85 习题 10）证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根。

证　设实系数奇次方程为

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 = 0\text{，}\quad a_{2n+1} \ne 0$$

不妨 $a_{2n+1} > 0$。由

$$f(x) = x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$

知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，故存在 $a < b$，$f(a) < 0, f(b) > 0$

因 f 在 $[a,b]$ 上连续，于是由根的存在定理，存在 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f(x_0) = 0$。

【例 4】(P86 习题 19）设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$。证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \dfrac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right]$。

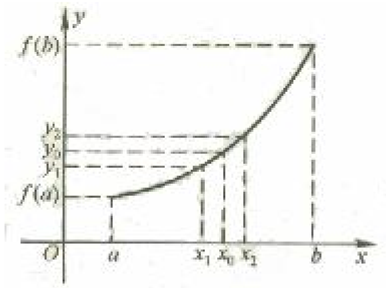
证：$M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x), m = \min\limits_{a\le x\le b} f(x)$，则

$$m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le M$$

由介值定理知，存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$。

【三】　反函数的连续性

【定理 9】若函数f在$[a,b]$上严格单调并连续，则反函数f^{-1}在其定义域$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$上连续.



证　不妨设f在$[a,b]$上严格增.

此时f的值域即反函数f^{-1}的定义域为$[f(a),f(b)]$. 任取$y_0 \in (f(a),f(b))$，设$x_0 = f^{-1}(y_0)$，则$x_0 \in (a,b)$. 于是对任给的$\varepsilon > 0$，可在(a,b)内x_0的两侧各取异于x_0的点$x_1, x_2 (x_1 < x_0 < x_2)$，使它们与$x_0$的距离小于$\varepsilon$(见图).

设与x_1, x_2对应的函数值分别为y_1，y_2，由f的严格增性知$y_1 < y_0 < y_2$，令

$$\delta = \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1),$$

则当$y \in U(y_0;\delta)$时，对应的$x = f^{-1}(y)$的值都落在x_1与x_2之间，故有$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| = |x - x_0| < \varepsilon$，所以$f^{-1}$在点$y_0$连续，从而$f^{-1}$在$(f(a),f(b))$内连续.

类似地可证f^{-1}在其定义区间的端点$f(a)$与$f(b)$分别为右连续与左连续. 所以f^{-1}在$[f(a),f(b)]$上连续.

例如　由于$y = \sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上严格单调且连续，故其反函数$y = \arcsin x$在区间$[1,1]$上连续.

同理可得其它反三角函数也在相应的定义区间上连续. 如$y = \arccos x$在$[-1,1]$上连续，$y = \arctan x$在$(-\infty,+\infty)$上连续等.

【四】　一致连续性

函数f在区间上连续，是指f在该区间上每一点都连续. 本段中讨论的一致连续性概

念反映了函数在区间上更强的连续性.

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，它在 $(0,1)$ 上每一点 x_0 都连续，用定义写出为

$$\forall x_0\in(0,1),\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\left|x-x_0\right|<\delta\text{ 时，有}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

注意这里 δ 不仅与 ε 有关，而且与 x_0 有关。对同一个 ε，x_0 越靠近 0，δ 就越小。

【问】 f 为定义在区间 I 上的函数，对 $\forall\varepsilon>0$，能否找到公共的 $\delta>0$，对 $\forall x_0\in I$，当 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$。

【定义 2】　设 f 为定义在区间 I 上的函数．若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 x' , $x''\in I$，只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$，就有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 I 上一致连续.

直观地说，f 在 I 上一致连续意味着：不论两点 x' 与 x'' 在 I 中处于什么位置，只要它们的距离小于 δ，就可使 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

【例 5】证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证　$\left|\sin x'-\sin x''\right|=\left|2\cos\dfrac{x'-x''}{2}\sin\dfrac{x'-x''}{2}\right|\le\left|x'-x''\right|$

【例 6】（P82 例 9）证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证　按一致连续性的定义，为证函数 f 在某区间 I 上不一致连续，只须证明：存在某 $\varepsilon_0>0$，对任何正数 δ (不论 δ 多么小)，总存在两点 $x',x''\in I$，尽管 $\left|x'-x''\right|<\delta$，但有 $\left|f(x')-f(x'')\right|\ge\varepsilon_0$.

对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$，可取 $\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数 $\delta\left(<\dfrac{1}{2}\right)$，只要取 $x'=\delta$ 与 $x''=\dfrac{\delta}{2}$，则虽有 $\left|x'-x''\right|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，但

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{\delta}>1,$$

所以 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

【定理 10】（P82 例 10）$f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件为：对 $\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$

证（必要性）若 $f(x)$ 在 I 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，则 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。设 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$，于是对上述 $\delta>0$，$\exists N>0,\forall n>N,\ \left|x_n'-x_n''\right|<\delta$，由一致连续性，有 $\left|f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$$

（充分性）设 $\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$。现证 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

用反证法。若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in I,$ 满足 $\left|x'-x''\right|<\delta$，但有 $\left|f(x')-f(x'')\right|\ge\varepsilon_0$

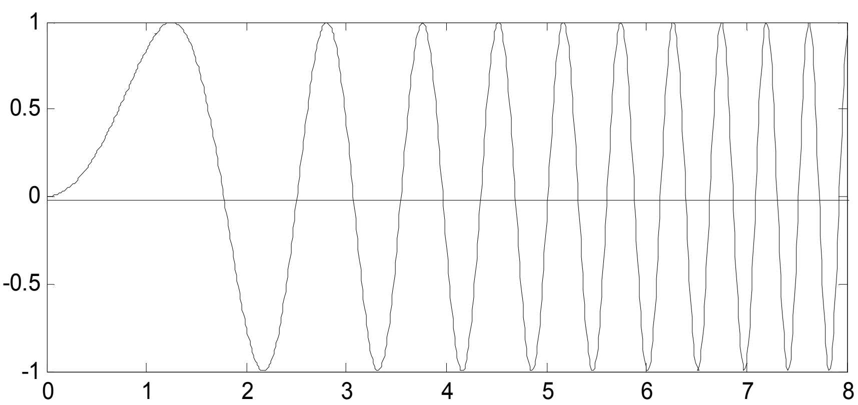
取 $\delta_n=\dfrac{1}{n},\exists x_n',x_n''\in I,\left|x_n'-x_n''\right|<\dfrac{1}{n},\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\ge\varepsilon_0,n=1,2,\cdots$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)\ne0$。矛盾。

【例 7】证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

取 $x_n'=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}},x_n''=\sqrt{n\pi}$，$x_n'-x_n''=\dfrac{\pi/2}{\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}}\to0$

但 $\left|\sin x_n'-\sin x_n''\right|=1\not\to0$



【例 8】 证明 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

取 $x_n'=n+\dfrac{1}{n}, x_n''=n$

f 在区间 I 上每一点都连续，并不能推出 f 在 I 上一致连续．然而，对于定义在闭区间上的函数来说，由它在每一点都连续却可推出在区间上的一致连续性，即有如下重要定理：

【定理 11】 (一致连续性定理，Cantor 定理)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

【例 9】 若 f 分别在 $<a,c]$ 和 $[c,b>$ 上一致连续，则 f 在 $<a,b>$ 上也一致连续.

证　任给 $\varepsilon>0$，

$\exists\delta_1>0$，$\forall\ x',x''\in<a,c]$，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$，$\forall x',x''\in[c,b>$，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

f 在点 c 为既左连续又右连续，所以 f 在点 c 连续．故对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_3>0$，当 $|x-c|<\delta_3$ 时，有 $|f(x)-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$，对任何 $x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，分别讨论以下两种情形：

(i)　x',x'' 同时属于 $<a,c]$ 或 $[c,b>$，则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立；

（ii）x',x'' 分属 $<a,c]$ 与 $[c,b>$，设 $x'\in<a,c],,x''\in[c,b>$，则

$$|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta\le\delta_3,$$

故 $|f(x')-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.同理 $|f(x'')-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

【例 10】（P89 习题 1）设函数 f 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值。证明：

（1）f 在 (a,b) 上有界；

（2）若存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)\ge\max\{f(a+0),f(b-0)\}$，则 f 在 (a,b) 内能取到最大值。

（3）f 在 (a,b) 上一致连续。

证（1）定义

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), x=a \\ f(x), a<x<b \\ f(b-0), x=b \end{cases}$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，从而$F(x)$在$[a,b]$上有界，当然也在(a,b)内有界，即f在(a,b)内有界。

(2) 因为$F(x)$在$[a,b]$上连续，从而$F(x)$在$[a,b]$内取得最大值$M=F(x_0)$。

如$F(x_0)=f(\xi)$，ξ即为f的最大值点。则得证。

如$F(x_0)\neq f(\xi)$，则$F(x_0)>F(\xi)=f(\xi)\geq \max\{F(a),F(b)\}$，

说明$x_0\neq a,b$，$F(x)$的最大值在(a,b)上达到，即f的最大值在(a,b)上达到。

（3）$F(x)$在$[a,b]$上一致连续，从而在(a,b)上一致连续。

§3　初等函数的连续性

我们证得下面函数在其定义域上都是连续的：

$y=c$

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$

$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

【定理 1】　指数函数 $a^x(a>0,a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续的.

证　先设 $a>1$．由第三章§2 例 4 知

$$\lim_{x\to 0}a^x=1=a^0,$$

这表明 a^x 在 $a=0$ 连续．现任取 $x_0\in\mathbf{R}$.

$$a^x=a^{x_0+(x-x_0)}=a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}$$

令 $t=x-x_0$，则当 $x\to x_0$ 时有 $t\to 0$，从而有

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^t=a^{x_0}.$$

这就证明了 a^x 在任一点 x_0 连续.

当 $0<a<1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}$，则有 $b>1$，而

$$a^x=(\frac{1}{b})^x=b^{-x}$$

可看作函数 b^u 与 $u=-x$ 的复合，所以此时 a^x 亦在 R 上连续.

【推论 1】对数函数 $\log_a x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内也连续.

【推论 2】幂函数 $y=x^\alpha$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上连续.

【例 1】　设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$．证明

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$$

证　补充定义 $u(x_0)=a, v(x)=b$，则 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 连续，从而 $v(x)\ln u(x)$ 在 x_0 连续，所以 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b$ 在 x_0 连续．由此得

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b.$$

【定理 2】 一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数.

【定理 3】 任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数.

【例 2】 证明 $\ln(1+x) \sim x(x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1$$

【例 3】 证明 $e^x - 1 \sim x(x\to 0)$

令 $y = e^x - 1, x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

【例 4】 证明 $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x(x\to 0, \alpha\neq 0)$

令 $y = (1+x)^{\alpha} - 1$，$\alpha\ln(1+x) = \ln(1+y)$，$x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$