

第9章 定积分

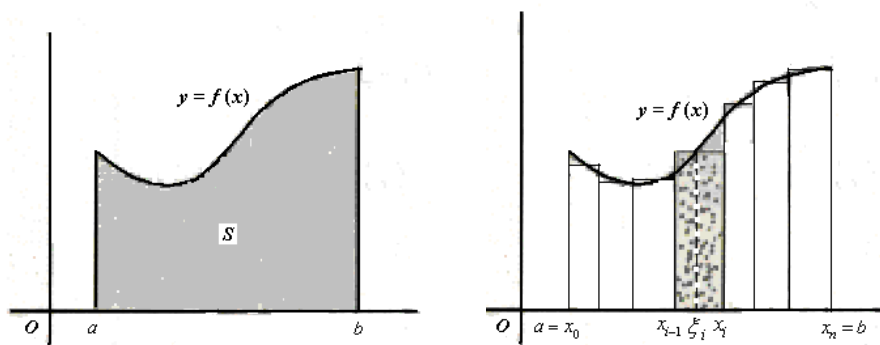
§1 定积分的概念

历史简述：古希腊，阿基米德（公元前 287-212），“穷竭法”；中国，刘徽（公元 263 年），“割圆术”；16 世纪中叶，开普勒（Kepler, 1571-1630），三大定律；17 世纪下半叶，牛顿（1642-1727）和莱布尼茨（1646-1716）创立微积分学。

【一】问题的提出

【引例 1】曲边梯形的面积。

设 $y = f(x) \geq 0$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，构成如图的曲边梯形。如何定义和计算曲边梯形的面积 S ？



把 $[a, b]$ 分割成 n 个小区间

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n, x_0 = a, x_n = b$$

用 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 来记这个分割。相应地，把大曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形。记小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ，我们用小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积，因此所求面积

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ 。如果极限

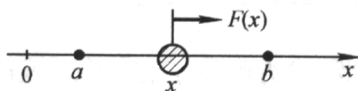
$$I = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在, 且此极限与分割 T 无关, 与 $\{\xi_i\}$ 的选取无关. 就把此极限 I 定义为曲边梯形的面积.

【注】 上面的极限不同于函数极限. $\|T\|$ 相等的 T 有无穷多; 对同一个 T , $\{\xi_i\}$ 的选法又有无穷多. 在下一段将给出上面极限的严格定义.

【引例 2】 变力作功.

设质点受力 F 的作用沿 x 轴由点 a 移动到点 b , 并设 F 处处平行于 x 轴. 如果 F 为常力, 则它对质点所作的功为 $W = F \cdot (b-a)$. 现在的问题是, F 为变力, 它连续依赖于质点所在位置的坐标 x , 即 $F = F(x), x \in [a, b]$ 为一连续函数, 此时 F 对质点所做的功 W 又该如何计算?



由假设 $F(x)$ 为一连续函数, 故在很小的一段位移区间上 $F(x)$ 可以近似地看作一常量.

类似于求曲边梯形面积那样, 把 $[a, b]$ 分割成为 n 个小区间

$$[x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n;$$

并在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 就有

$$F(x) \approx F(\xi_i), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

于是, 质点从 x_{i-1} 位移到 x_i 时, 力 F 所作的功就近似等于 $F(\xi_i) \Delta x_i$, 从而

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$$

则定义变力 F 所作的功为

$$W = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$$

以上两个例子, 一个是计算曲边梯形面积的几何问题, 另一个是求变力作功的力学问题, 最终都归结为一个特定形式的和式逼近. 在科学技术中还有许多同类型的数学问题, 解决这类问题的思想方法可以概括为“分割, 近似求和, 取极限”. 这就是产生定积分概念的背景.

【二】 定积分的定义

【定义】 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, 把 $[a, b]$ 分割成 n 个小区间

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n, x_0 = a, x_n = b$$

称为区间 $[a, b]$ 的一个分割。用分点的集合为 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 来记这个分割。记

$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 称为分割 T 的**细度** (或 T 的**模**), 用它来刻画分割的细密程度。在每个

小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 记 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, 称和式

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

为函数 f 在 $[a, b]$ 上的一个**积分和**, 也称**黎曼和**。

显然, 积分和与分割 T 有关, 又与 ξ 的选取有关。

【定义】 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, I 是一个确定的实数。若对任给的正数 ε , 总存在某一正数 δ , 使得对 $[a, b]$ 的任何分割 T , 以及在其上任意选取的点集 $\xi = \{\xi_i\}$, 只要 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

则称函数 f 在区间 $[a, b]$ 上**可积**或**黎曼可积** (记为 $f \in R[a, b]$); 数 I 称为 f 在 $[a, b]$ 上的**定积分**或**黎曼积分**, 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

其中, f 称为**被积函数**, x 称为**积分变量**, $[a, b]$ 称为**积分区间**, a, b 分别称为这个定积分的**下限**和**上限**。

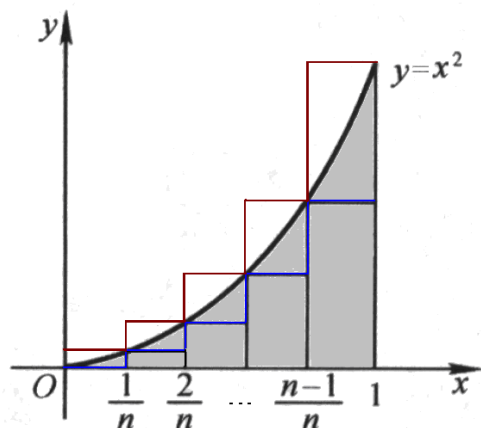
由于上述定义与函数极限的定义相似, 因此我们常用极限符号表示定积分

$$I = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

后面我们将证明: $[a, b]$ 上的**连续函数一定是可积的**。我们不妨先根据此结论讨论定积

分的计算。

【例 1】 计算如图曲边三角形（阴影部分）的面积。



解 由于 $y = f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上可积，我们采用特殊的分割：把区间 $[0, 1]$ 等分。

$$T = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

取 ξ_i 为小区间的左端点： $\xi_i = \frac{i-1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ ，则积分和为一数列：

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

取极限，得面积

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

如果取 ξ_i 为小区间的右端点： $\xi_i = \frac{i}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ ，则积分和

$$S'_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

同样可求得面积

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \frac{1}{3}$$

§ 2 牛顿-莱布尼茨公式

假设 f 在 $[a, b]$ 上可积，如何计算定积分 $\int_a^b f(x) dx$ ？如果像 § 1 的例 1 那样直接计算

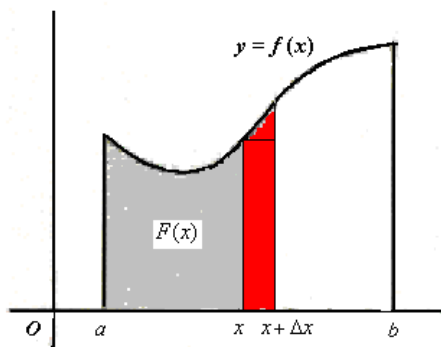
极限

$$I = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

将是很困难的。比如计算 $\int_0^\pi \sin x dx$ 。

下面我们探讨有效的方法。

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, x]$ 上的曲边梯形的面积 ($F(a) = 0$), 即 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 。



所求面积为

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx$$

当 x 增加小量 Δx 时, 面积增量

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$$

即

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

直观地, Δx 越小, 上式近似程度就越高。应有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

即

$$F'(x) = f(x)$$

因此只要找到函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 且 $F(a) = 0$, 则所求面积为

$$\int_a^b f(x) dx = F(b)$$

如果 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不满足 $F(a) = 0$, 则用 $G(x) = F(x) - F(a)$ 作为 f 的原函

数, 有 $G(a) = 0$, 因此

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

这就是牛顿—莱布尼茨公式 (N.L.公式)。

尽管上面推导不是严格的,但直观上是对的。它把计算一个特殊和式的极限问题(求面积问题等)转化为求原函数的问题。

我们用 N.L.公式来验证 §1 的例 1。

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

【定理】(N.L.公式) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且存在原函数 F , 即

$$F'(x) = f(x), x \in [a, b]$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

证 对于 $[a, b]$ 的任一分割 $T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上对 $F(x)$ 使用 Lag 中值定理, 则存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_i) \Delta x_i$$

因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 因此, 取上述所确定的 $\{\xi_i\}$, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} [F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

注 上面证明是用极限符号来写的, 这给推导带来方便。很容易改写成定义中的 $\varepsilon - \delta$ 语言, 请读者试之。

【例 1】 $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$ (画图)

【例 2】 求极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i-1}{n}\pi\right) \cdot \frac{\pi}{n} = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

【例 3】 求极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{i}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$$

【例 4】 $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0$ (正负面积) (画图)

【例 5】(推广的 N.L.公式) [P192 习题 3]

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且除有限点外有 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

证 对 $[a, b]$ 作分割 $T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, 使其包含 $F'(x) = f(x)$ 不成立的有限个点。在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上对 $F(x)$ 使用 Lag 中值定理, 则分别存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

在上式中令 $\|T\| \rightarrow 0$, 由 f 在 $[a, b]$ 上可积, 得

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

故 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

【例 6】 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$ (以后说明可积)。

解 取 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$, 则 F 满足例 5 的条件, 于是

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$$

§3 可积条件

【一】可积条件

【定理1】(可积的必要条件) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上必定有界.

证 设 $\int_a^b f(x)dx = J$. 由定义, $\exists T, \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < 1 \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < |J| + 1 = M$$

若 f 在 $[a, b]$ 上无界, 则 f 必在上面 T 的某个小区间 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ 上无界. 令

$$G = \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta x_i \right|$$

由于 f 在 Δ_k 上无界, 故存在 $\xi_k \in \Delta_k$, 使得

$$|f(\xi_k)| > \frac{M+G}{\Delta x_k}.$$

于是

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \geq |f(\xi_k) \Delta x_k| - \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta x_i \right| > \frac{M+G}{\Delta x_k} \cdot \Delta x_k - G = M$$

矛盾.

以后讨论函数的可积性时, 总是假设函数是有界的. 但有界函数不一定可积, 见下例.

【例1】 证明狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上有界但不可积.

证 显然 $D(x)$ 有界.

若 $D(x)$ 可积, 记 $\int_0^1 D(x)dx = J$. 则 $\exists T, \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \frac{1}{2}$$

取 $\xi_i = \xi'_i$ 全为有理数, 则 $\sum_{i=1}^n D(\xi'_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$; 取 $\xi_i = \xi''_i$ 全为无理数, 则

$\sum_{i=1}^n D(\xi''_i) \Delta x_i = 0$. 此时

$$\left| \sum_{i=1}^n D(\xi'_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n D(\xi''_i) \Delta x_i \right| = 1$$

又

$$\left| \sum_{i=1}^n D(\xi'_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n D(\xi''_i) \Delta x_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n D(\xi'_i) \Delta x_i - J \right| + \left| \sum_{i=1}^n D(\xi''_i) \Delta x_i - J \right| < 1$$

矛盾.

【例 2】 具有原函数的函数不一定可积, 即 f' 不一定可积。

$$\text{如 } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

取 $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0$, 有 $f'(x_n) = -2\sqrt{2n\pi} \rightarrow -\infty$, 知 f' 在 $[-1, 1]$ 上无界, 所以 f' 在

$[-1, 1]$ 上不可积。

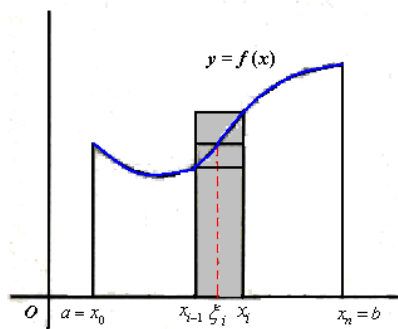
下面讨论可积的充要条件。

设 f 在 $[a, b]$ 上有界, $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 为 $[a, b]$ 的任一分割. f 它在每个小区间

$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上存在上、下确界。记

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$



作两个和式

$$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_T M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_T m_i \Delta x_i$$

分别称为 f 关于分割 T 的**上和**与**下和**(或称**达布上和**与**达布下和**, 统称**达布和**).

与黎曼和相比较, 达布和只与分割 T 有关, 而与点集 $\{\xi_i\}$ 的选取无关.

对 $\forall \xi_i \in \Delta_i, i=1, 2, \dots, n$, 显然有

$$m(b-a) \leq \underline{S}(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(T) \leq M(b-a) \quad (1)$$

记

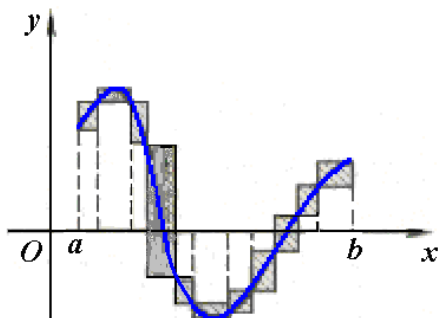
$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|$$

称为 f 在 Δ_i 上的**振幅** (第二个等号见第一章总练习题 16), 称

$$\bar{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

为 f 在 $[a, b]$ 上的**振幅和**。

振幅和的几何意义见下图(小矩形的面积之和):



【例 3】 设 T' 是 T 增加 k 个新分点后所得的分割 (称 T' 是 T 的**加细分割**), 则

$$\bar{S}(T') \leq \bar{S}(T), \quad \underline{S}(T') \geq \underline{S}(T)$$

即加细分割后, **上和不增, 下和不减**。

证 不妨只证 T 增加一个新分点得 T_1 的情况。设新分点 $x' \in [x_{k-1}, x_k]$ (见下图)

$$\begin{array}{ccccccc} & M'_k & & M''_k & & & \\ & | & & | & & & \\ \hline & | & & | & & | & \\ & x_{k-1} & & \Delta x'_k & & x' & & \Delta x''_k & & x_k \end{array}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}(T) - \bar{S}(T_1) &= M_k \Delta x_k - (M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k) \\ &= M_k (\Delta x'_k + \Delta x''_k) - (M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k) = (M_k - M'_k) \Delta x'_k + (M_k - M''_k) \Delta x''_k \geq 0\end{aligned}$$

同理可证另一式。

【推论】 (本节习题 1): 若 T' 是 T 的加细分割, 则

$$\sum_{T'} \omega'_i \Delta x'_i \leq \sum_T \omega_i \Delta x_i$$

$$\text{【例 4】} \quad \bar{S}(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

证 由 (1) 式, $\bar{S}(T)$ 是 $\left\{ \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right\}$ 的上界。又 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$, 故

可选取 $\xi_i \in \Delta_i$, 使

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

于是

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i > \sum_{i=1}^n \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \bar{S}(T) - \varepsilon$$

因此 $\bar{S}(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 。同理可证另一式。

【例 5】 设 $f \in R[a, b]$, 则 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$ 。

证 记 $J = \int_a^b f$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \|T\| < \delta$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$J - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i < J + \varepsilon$$

上式对 $\{\xi_i\}$ 取上 (下) 确界, 由例 4 得

$$J - \varepsilon \leq \underline{S}(T) \leq \bar{S}(T) \leq J + \varepsilon$$

从而

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \bar{S}(T) - \underline{S}(T) \leq \varepsilon$$

【定理 2】(可积准则)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{使得} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

【注】第一个条件推第二个条件见例 5, 第二个条件推第三个条件是显然, 第三个条件推第一个条件见第 6 节。

【二】可积函数类

【定理 3】 若 f 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积。

证 由于 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 因此在 $[a, b]$ 上一致连续. 即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a, b]$ 中任意两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 便有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

取 $[a, b]$ 的分割 $\|T\| < \delta$, f 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上连续, 从而必取得最大值 M_i 与最小值 m_i , 设

$f(\xi'_i) = M_i, f(\xi''_i) = m_i$ ($\xi'_i, \xi''_i \in [x_{i-1}, x_i]$)。因为 $|\xi'_i - \xi''_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$, 所以

$$\omega_i = M_i - m_i = f(\xi'_i) - f(\xi''_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

证得 f 在 $[a, b]$ 上可积。

【注】证明方法与教材不同, 请读者自己比较。

【定理 4】 若 f 是区间 $[a, b]$ 上只有有限个间断点的有界函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积。

证 不失一般性, 这里只证明 f 在 $[a, b]$ 上仅有一个间断点的情形, 并设该间断点即为端点 b 。

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $x_{n-1} = b - \varepsilon, x_n = b$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = \varepsilon$, f 在 $[x_{n-1}, x_n]$ 上振幅和 (M, m) 分别是 f 在 $[a, b]$ 上的上, 下确界)

$$\omega_n \Delta x_n \leq (M - m)\varepsilon$$

因为 f 在 $[x_0, x_{n-1}]$ ($x_0 = a$) 上连续, 由定理 3, f 在 $[x_0, x_{n-1}]$ 上可积, 故存在

$$T' = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

令 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, 则

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_n \Delta x_n < \varepsilon + (M - m)\varepsilon = (1 + M - m)\varepsilon$$

证得 f 在 $[a, b]$ 上可积。

【定理 6】 若 f 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积。

证 设 f 为增函数, 且 $f(a) < f(b)$, 若 $f(a) = f(b)$, 则 f 为常量函数, 显然可积. 对

$[a, b]$ 的任一分割 T , 由 f 的增性, f 在 T 所属的每个小区间 Δ_i 上的振幅为

$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1}),$$

于是有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \cdot \|T\| = [f(b) - f(a)] \cdot \|T\|$$

由此可见, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\|T\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, 就有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

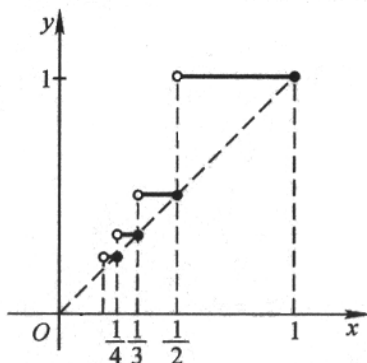
所以 f 在 $[a, b]$ 上可积。

注意, 单调函数即使有无限多个间断点, 仍不失其可积性。

例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

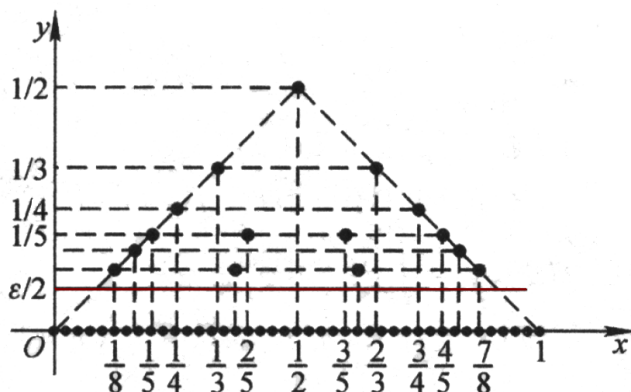
在区间 $[0,1]$ 上可积.



【例 6】 证明黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互素}, q > p, \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 以及 } (0, 1) \text{ 内的无理数} \end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上可积, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 。



分析 已知黎曼函数在 $x = 0, 1$ 以及一切无理点处连续, 而在 $(0, 1)$ 内的一切有理点处间断. 证明它在 $[0, 1]$ 上可积的直观构思如下: 在黎曼函数的图像中画一条水平直线 $y = \frac{\varepsilon}{2}$, 在此直线上方只有函数图像中有限个点, 这些点所对应的自变量可被含于属于分割 T 的有限个小区间中, 当 $\|T\|$ 足够小时, 这有限个小区间的总长可为任意小; 而 T 中其余小区间上函数的振幅不大于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 把这两部分相合, 便可证得 $\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. (证明略, 参见教材)

由于可积, 取 ξ_i 全为无理数, 便有

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

【例 7】 [第 3 节习题 3] 设 $f(x), g(x)$ 均为定义在 $[a, b]$ 上的有界函数. 证明: 若仅在 $[a, b]$ 中有限个点处 $f(x) \neq g(x)$, 则当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

证 不妨设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅在点 $c \in [a, b]$ 上的值不同. 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 记

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall \|T\| < \delta_1, \forall \{\xi_i\}$, 有

$$\left| \sum_T f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{2|g(c) - f(c)|} \right\}$, 则 $\forall \|T\| < \delta, \forall \{\xi_i\}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_T g(\xi_i) \Delta x_i - \sum_T f(\xi_i) \Delta x_i \right| &\leq \sum_T |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \Delta x_i \\ &\leq \|T\| \cdot \sum_T |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \leq \|T\| \cdot |g(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_T g(\xi_i) \Delta x_i - I \right| &\leq \left| \sum_T g(\xi_i) \Delta x_i - \sum_T f(\xi_i) \Delta x_i \right| + \left| \sum_T f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 且 $\int_a^b g(x)dx = I = \int_a^b f(x)dx$.

【注】 更简单的证明方法见第 4 节例 3.

【例 8】 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$

解 $g(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 由例 7

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

【注】 参见 § 2 例 6, 它是用广义 N. L. 公式求解的。

§ 4 定积分的性质

【一】 定积分的基本性质

【性质 1】 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, k 为常数, 则 kf 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

【性质 2】 若 f, g 都在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f + g$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

【注】 性质 1 与性质 2 合起来称为**定积分的线性性**。等价于

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

其中 α, β 为常数。

【性质 3】 若 f, g 都在 $[a, b]$ 上可积; 则 fg 在 $[a, b]$ 上也可积。

证 由 f, g 都在 $[a, b]$ 上可积, 从而都有界, 设

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, B = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

且 $A > 0, B > 0$ (否则 f, g 中至少有一个恒为零值函数, 于是 $f \cdot g$ 亦为零值函数, 结论显然成立)。

任给 $\varepsilon > 0$, 由 f, g 可积, 必分别存在分割 T', T'' , 使得

$$\sum_{T'} \omega_i^f \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}, \sum_{T''} \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

令 $T = T' + T''$ (表示把 T' 和 T'' 的分点合并成新的分割 T)。对于 $[a, b]$ 上 T 所属的每一个 Δ_i , 有 (见 P20 习题 16)

$$\begin{aligned} \omega_i^{f \cdot g} &= \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &\leq \sup_{x', x'' \in \Delta_i} [|g(x')| \cdot |f(x') - f(x'')| + |f(x'')| \cdot |g(x') - g(x'')|] \\ &\leq B\omega_i^f + A\omega_i^g. \end{aligned}$$

由 T 是 T' 和 T'' 加细分割知

$$\begin{aligned}\sum_T \omega_i^{f \cdot g} \Delta x_i &\leq B \sum_T \omega_i^f \Delta x_i + A \sum_T \omega_i^g \Delta x_i \\ &\leq B \sum_{T'} \omega_i^f \Delta x_i + A \sum_{T''} \omega_i^g \Delta x_i < B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证得 $f \cdot g$ 在 $[a, b]$ 上可积.

【注】 在一般情形下 $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

如

$$\int_0^1 x^2 dx \neq \left(\int_0^1 x dx \right) \cdot \left(\int_0^1 x dx \right)$$

【性质 4】 (积分区间的可加性) f 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是: 任给 $c \in (a, b)$, f 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上都可积. 此时又有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (1)$$

证 [充分性] 由于 f 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上都可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 分别存在对 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 的分割 T' 与 T'' , 使得

$$\sum_{T'} \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{T''} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现令 $T = T' + T''$, 它是对 $[a, b]$ 的一个分割, 且有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i = \sum_{T'} \omega'_i \Delta x'_i + \sum_{T''} \omega''_i \Delta x''_i < \varepsilon$$

由此证得 f 在 $[a, b]$ 上可积.

[必要性] 已知 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的某分割 T , 使得 $\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 在 T 上再增加一个分点 c , 得到加细分割 T^* . 于是

$$\sum_{T^*} \omega_i^* \Delta x_i^* \leq \sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

分割 T^* 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上的部分, 分别是对 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割, 记为 T' 和 T'' , 显然

$$\sum_{T'} \omega'_i \Delta x'_i \leq \sum_{T^*} \omega_i^* \Delta x_i^* < \varepsilon, \quad \sum_{T''} \omega''_i \Delta x''_i \leq \sum_{T^*} \omega_i^* \Delta x_i^* < \varepsilon$$

这就证得 f 在 $[a, b]$ 与 $[b, c]$ 上都可积.

下面证明等式(1)。

为此对 $[a, b]$ 作分割 T , 恒使点 c 为其中的一个分点, 这时 T 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上的部分各自构成对 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 的分割, 分别记为 T' 与 T'' . 由于

$$\sum_T f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{T'} f(\xi'_i) \Delta x'_i + \sum_{T''} f(\xi''_i) \Delta x''_i,$$

因此当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时(同时有 $\|T'\| \rightarrow 0, \|T''\| \rightarrow 0$), 对上式取极限即得证。

按定积分的定义, 记号 $\int_a^b f(x)dx$ 只有当 $a < b$ 时才有意义, 而当 $a = b$ 或 $a > b$ 时本来是没有意义的. 但为了运用上的方便, 对它作如下规定:

规定 1 当 $a = b$ 时, 令 $\int_a^b f(x)dx = 0$;

规定 2 当 $a > b$ 时, 令 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

有了这个规定之后, 等式(1)对于 a, b, c 的任何大小顺序都能成立. 例如, 当 $a < b < c$ 时, 只要 f 在 $[a, c]$ 上可积, 则有

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \left(\int_a^b f + \int_b^c f \right) - \int_b^c f = \int_a^b f$$

【性质 5】(保不等式性) 若 f 与 g 为 $[a, b]$ 上的两个可积函数, 且 $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

证 对 $[a, b]$ 作 n 等分得分割 T , 则

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x_i$$

上式令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 由数列极限的保不等式性便得证。

【注】 特别地: $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ 。

【性质 6】(积分不等式) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \quad (2)$$

证 由于 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在分割 T , 使得

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon.$$

由

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|,$$

可得 $\omega_i^{|f|} \leq \omega_i^f$, 于是有

$$\sum_T \omega_i^{|f|} \Delta x_i \leq \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon.$$

从而证得 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

再由不等式 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, 应用性质 5, 即证得不等式 (2) 成立.

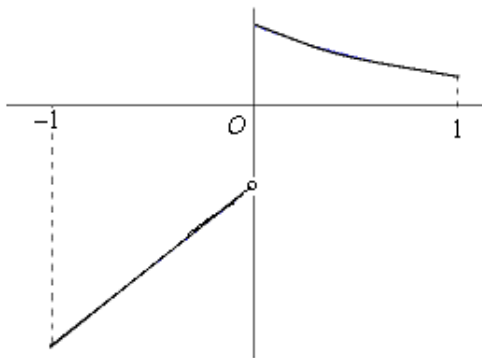
【注】 这个性质的逆命题一般不成立, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上不可积 (类似于狄利克雷函数); 但 $|f(x)| \equiv 1$, 它在 $[0, 1]$ 上可积.

【例 1】 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -1 \leq x < 0 \\ e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



解 对于分段函数的定积分, 通常利用积分区间可加性来计算, 即

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x-1) dx + \int_0^1 e^{-x} dx = (x^2 - x) \Big|_{-1}^0 + (-e^{-x}) \Big|_0^1 = -(1 + e^{-1}) \end{aligned}$$

【注 1】 上述解法中取 $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x-1) dx$, 其中被积函数在 $x=0$ 处的值已由原来的 $f(0) = e^{-x}|_{x=0} = 1$ 改为 $(2x-1)|_{x=0} = -1$, 见 § 3 例 5 和例 6.

【注 2】 取

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ -e^x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

由 §2 例 5 (推广的 N.L. 公式)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^1 = -(1 + e^{-1})$$

【例 2】 若 $f \in R[a, b]$, $f(x) \geq 0$, 且 f 至少在一个连续点 $x_0 \in [a, b]$ 处有 $f(x_0) > 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$ 。

证 由连续函数的局部保号性, 存在 x_0 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (当 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 时, 则为右邻域或左邻域, 这里不妨 $x_0 \neq a, b$), 使得

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = f(x_0) \delta > 0 \end{aligned}$$

推论 1 设 $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ 。若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$ 。

推论 2 设 $f \in C[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ 。

反证。设 $f(x) \neq 0, x \in (a, b)$, 则 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$ (思考为什么?), 从而

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \text{ 或 } \int_a^b f(x) dx < 0$$

矛盾。

【例 3】 [重新证明第 3 节习题 3] 设 $f(x), g(x)$ 均为定义在 $[a, b]$ 上的有界函数. 证明: 若仅在 $[a, b]$ 中有限个点处 $f(x) \neq g(x)$, 则当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ 。

证 记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 仅在有限个点上不等于零, 从而 $h(x)$ 可积。对任意分割 T , 取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得 $h(\xi_i) = 0$, 因此

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

再由 $g(x) = f(x) - h(x)$ 知 $g(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b g = \int_a^b f - \int_a^b h = \int_a^b f$$

【二】 积分中值定理

【定理 1】(积分第一中值定理) 若 $f, g \in R[a, b]$, 且 g 在 $[a, b]$ 上不变号 ($g(x) \geq 0$ 或 $g(x) \leq 0$), 记

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

则 $\exists \mu: m \leq \mu \leq M$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

证 不妨设 $g(x) \geq 0, x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ 。由

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

得

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则任取 $\mu: m \leq \mu \leq M$, (1) 式都成立。如果 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 则

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

取

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

即可。

【注】 上面定理即为见本节习题 9。

【推论 1】若 $f, g \in C[a, b]$, 且 g 在 $[a, b]$ 上不变号, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

【注】上面的证明要用到第二种形式的介值定理。

【推论 2】若 $f \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

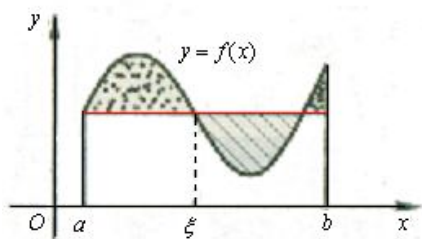
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

【注】以后上面定理 1 与推论 1 和推论 2 都叫做**积分中值定理**。

积分中值定理 (推论 2) 几何意义为, 若 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形面积等于以 $f(\xi)$ 为高, $[a, b]$ 为底的矩形面积. 称

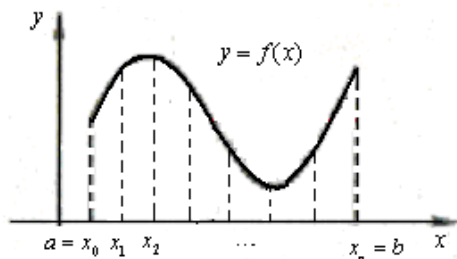
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**平均值**.



这是通常有限个数算术平均值的推广. 如何计算 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上所有函数值的平均值? 一个很自然的想法就是把 $[a, b]$ 作 n 等分, 取有限个数的平均

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$



然后令 $n \rightarrow \infty$ 取极限

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

【例 4】 试求 $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值.

解 所求平均值为

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

【例 5】 推论 1 和推论 2 中的 $\xi \in [a, b]$, 可改为 $\xi \in (a, b)$ 。

下面只对推论 2 进行证明.

证 设 f 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m 。若 $m = M$, 则 $f \equiv c$, ξ 可在 (a, b) 中任取。

若 $m < M$, 则

$$m \leq f(x) \leq M$$

且上面两个不等式都有一点取严格不等号。从而 (参见例 2)

$$\begin{aligned} m(b-a) &= \int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx = M(b-a) \\ m &< \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M \end{aligned}$$

由连续函数的介值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

【例 6】 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

下面证法对否?

由积分中值定理 (参见例 5), $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\xi^n}{1+\xi}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^n}{1+\xi} = 0$$

错误在于 ξ 应随函数 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x} (n=1, 2, \dots)$ 而改变, 不是常数。即

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\xi_n^n}{1+\xi_n} (0 < \xi_n < 1)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有可能 $\xi_n \rightarrow 1$, 这是不定式。

证法 1: $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n, x \in [0, 1]$, 由积分的保不等式性,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

证法 2: 由积分中值定理 (推论 1)

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \xi_n \in [0, 1]$$

【例 7】 (P203 例 4) 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx$ 。

解 设 $n \geq 2$ 。根据积分中值定理, $\exists \xi_n \in [0, \frac{1}{n}], \exists \eta_n \in [\frac{1}{n}, 1]$, 使得

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x}) dx = f(\sqrt[n]{\xi_n}) \cdot \frac{1}{n}, \int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x}) dx = f(\sqrt[n]{\eta_n}) \cdot (1 - \frac{1}{n})$$

因为 f 在 $[0, 1]$ 上有界, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt[n]{\xi_n}) \cdot \frac{1}{n} = 0$$

又因 $\frac{1}{n} \leq \eta_n \leq 1$, 故有 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\eta_n} \leq 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\eta_n} = 1$ 。根据 f 在 $x=1$ 处的连续性, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt[n]{\eta_n}) \cdot (1 - \frac{1}{n}) = f(1)$$

因此

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x}) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(\sqrt[n]{\xi_n}) \cdot \frac{1}{n} + f(\sqrt[n]{\eta_n}) \cdot (1 - \frac{1}{n}) \right] = 0 \end{aligned}$$

【例 8】 设 f 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = f(1)$ 。试证: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得

$$f'(\xi) = -\frac{1}{\xi} f(\xi)$$

证 令 $F(x) = xf(x)$, 由积分中值定理

$$\int_0^{\frac{1}{2}} F(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = \frac{1}{2} \xi_1 f(\xi_1), \xi_1 \in (0, \frac{1}{2})$$

又由条件

$$F(1) = f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = \xi_1 f(\xi_1) = F(\xi_1)$$

对 $F(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上用 Rolle, $\exists \xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

§5 微积分学基本定理·定积分的计算

【一】微积分基本定理

设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 根据定积分的性质, 对任何 $x \in [a, b]$, f 在 $[a, x]$ 上也可积. 于是, 由

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

定义了一个以积分上限为自变量的函数, 称为**变上限的定积分**.

【定理 1】 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证 对 $[a, b]$ 上任一确定的点 x , 只要 $x + \Delta x \in [a, b]$, 有

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

因 f 在 $[a, b]$ 上有界, 可设 $|f(t)| \leq M, t \in [a, b]$. 于是,

当 $\Delta x > 0$ 时,

$$|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq M \Delta x;$$

当 $\Delta x < 0$ 时,

$$|\Delta F| = \left| \int_{x+\Delta x}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x+\Delta x}^x |f(t)| dt \leq M |\Delta x|;$$

由此得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = 0,$$

即证得 F 在点 x 连续. 由 x 的任意性, F 在 $[a, b]$ 上处处连续.

【注】 不等式 $\left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq M |\Delta x|$ 是常用的。下面定理的证明就会用到。

【定理 2】 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且在点 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在点 x_0 处可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$ 。

证 由 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |\Delta x| = |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad x \in [x_0, x_0 + \Delta x] \text{ 或 } x \in [x_0 - \Delta x, x_0]$$

从而

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} [f(x) - f(x_0)] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon \end{aligned}$$

根据导数定义, 得 $F(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$ 。

【推论 1】(微积分基本定理) 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]。$$

本定理沟通了导数和定积分这两个从表面看去似不相干的概念之间的内在联系; 同时也证明了“**连续函数必有原函数**”这一基本结论, 并以积分形式给出了 f 的一个原函数。

【注】 推论 1 也可用积分中值定理直接证明, 见教材。

【推论 2】(连续函数的 N.L. 公式) 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 其一个原函数为 F (必存在), 则

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

证 由推论 1, $\int_a^x f(t) dt$ 是 f 的一个原函数, 从而

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C.$$

令 $x = a$, 得到 $C = F(a)$, 从而有 $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. 再令 $x = b$, 有

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

【注】由定理 1 和定理 2 知, $F(x)$ 的光滑性比 $f(x)$ 要高一阶。

类似于变上限的定积分, 可定义变下限的定积分:

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt, x \in [a, b].$$

统称为变限积分. 更一般地, 还可以定义如下形式的变限积分

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

【例 1】[P205 例 1] 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$

解 用洛必达法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x \int_0^x e^{t^2} dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2 \int_0^x e^{t^2} dt + 2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{2e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x^2}{2 + 2x^2} = 1 \end{aligned}$$

【例 2】[本节习题 1] 设 $f(x)$ 为连续函数, $u(x), v(x)$ 均为可导函数, 且可实行复合

$f \circ u$ 与 $f \circ v$. 证明:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

证 设 $f(t)$ 的一个原函数为 $F(t)$, 则

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \\ &= F'(v(x))v'(x) - F'(u(x))u'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \end{aligned}$$

【例 3】求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$.

解

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{x^3} \cos x = 1$$

【例 4】设 $f(t) > 0$ 且是连续函数, $F(x) = \int_{-a}^x |x-t| f(t) dt, x \in [-a, a]$, 证明 $F'(x)$ 单调增加。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad F(x) &= \int_{-a}^x (x-t) f(t) dt + \int_x^a (t-x) f(t) dt \\ &= x \int_{-a}^x f(t) dt - \int_{-a}^x t f(t) dt + \int_x^a t f(t) dt - x \int_x^a f(t) dt \\ F'(x) &= \int_{-a}^x f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \\ F''(x) &= 2f(x) > 0 \end{aligned}$$

所以 $F'(x)$ 单调增加。

【定理 3】 (积分第二中值定理)

(略)

【二】 换元法与分部积分法

【定理 4】 (定积分换元法) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, φ' 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 且满足 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

证 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 因此它的原函数存在. 设 F 是 f 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 由复合函数微分法

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

可见 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ 的一个原函数. 因为 $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 根据 N. L. 公式 (见注 2), 得

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

【注 1】 如果 $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$, 则 $\int_a^b f(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. 即积分的上下限始终保持对应关系。

【注2】上面所用的 N. L. 公式是本讲义第2节给出的, 如果再进一步假设 φ' 连续, 就可用连续函数的 N. L. 公式了.

【例1】 计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

解 令 $x = \sin t$, 当 $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $x: 0 \rightarrow 1$, 用换元法, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

或 令 $x = \cos t$, 当 $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $x: 1 \rightarrow 0$, 用换元法, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} (-\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

【注】在用换元法计算定积分时, 一旦得到了用新变量表示的原函数后, 不必作变量还原, 而只要用新的积分限代人并求其差值就可以了. 这就是定积分换元积分法与不定积分换元积分法的区别, 这一区别的原因在于不定积分所求的是被积函数的原函数, 理应保留与原来相同的自变量; 而定积分的计算结果是一个确定的数.

【例2】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt$.

解 逆向使用换元法法1

令 $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$, $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $x: 1 \rightarrow 0$, 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = -\int_1^0 \cos^2 t (-\sin t) dt = -\int_1^0 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

【例3】 计算 $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

解 令 $x = \tan t$, $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$, $x: 0 \rightarrow 1$. 于是由换元公式及 $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ 得到

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\cos t + \sin t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{\cos t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt.$$

对最末第二个定积分作变换 $u = \frac{\pi}{4} - t$, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos u (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos u du,$$

它与上面第三个定积分相消. 故得

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

【注】事实上, 该例中的被积函数的原函数虽然存在, 但难以用初等函数来表示, 因此无法直接使用牛顿-莱布尼茨公式.

【例 4】 [P214 习题 5] 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上可积. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

证 下面假设 f 连续来证明, 当 f 仅是可积的情况见【注 1】.

因为 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$, 对右边第一个积分用换元法, 令 $x = -t$, 则

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

于是

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x) + f(-x) = 0$, 故 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) + f(-x) = 2f(x)$, 故 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

【注 1】当 f 可积时, 可取对称分点的分割, 然后由定义来证明, 请读者自己完成.

【注 2】本题结论常记为“**偶倍奇零**”.

【例 5】 [P233 习题 6] 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上以 T 为周期的连续周期函数. 证明对任意实数 a , 恒有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

证法 1

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f$$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx \stackrel{x=t+T}{=} \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f$$

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f - \int_a^0 f = \int_0^T f$$

证法 2 记 $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$, 则

$$F'(x) = f(x+T) - f(x) \equiv 0$$

因此 $F(x) \equiv C$ 。又 $F(0) = \int_0^T f(t)dt$, 故

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

【定理 5】 (定积分分部积分法) 若 $u(x), v(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可微函数, 且 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有定积分分部积分公式:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

证 因为 uv 是 $uv' + u'v$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 所以有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

移项便得证.

【例 6】 [P211 例 5] 计算 $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^e x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} \int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{1}{3} \left(x^3 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(e^3 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^e \right) = \frac{1}{9} (2e^3 + 1). \end{aligned}$$

【例 7】 [P211 例 6] 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, n = 1, 2, \dots$.

解 当 $n \geq 2$ 时, 用分部积分求得

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\
 &= (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.
 \end{aligned}$$

移项整理后得到递推公式:

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, n \geq 2.$$

由于

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

重复应用递推式得

$$\begin{aligned}
 J_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
 J_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.
 \end{aligned}$$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

因而这两个定积分是等值的.

【注 1】上面两个公式要记住。

【注 2】了解 Wallis 公式 (教材 P211)。

【三】 泰勒公式的积分余项

(略)

§ 6 可积理论补叙(选学)

本节主要补充证明可积准则。首先把前面内容作一下梳理:

以下总假设 f 在 $[a, b]$ 上有界。

分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 记 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

振幅

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|$$

上下和分别为

$$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

振幅和为

$$\bar{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

则

$$m(b-a) \leq \underline{S}(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(T) \leq M(b-a)$$

上下积分

$$\bar{S} = \inf_T \bar{S}(T), \quad \underline{S} = \sup_T \underline{S}(T)$$

【性质 1】 $\bar{S}(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

证明见第 3 节例题 4。

【性质 2】 设 T' 是 T 增加 k 个新分点后所得的分割 (称 T' 是 T 的加细分割), 则

(1) $\bar{S}(T') \leq \bar{S}(T), \quad \underline{S}(T') \geq \underline{S}(T)$

(2) 设 $|f(x)| \leq M$, 则

$$\bar{S}(T) - \bar{S}(T') \leq 2kM \|T\|, \quad \underline{S}(T') - \underline{S}(T) \leq 2kM \|T\|$$

(1) 的证明见第 3 节例题 3。

下面证明 (2)。设 T 增加一个新分点 $x' \in [x_{k-1}, x_k]$ 得 T_1 (见下图)

$$\begin{array}{ccccccc} & & M'_k & & M''_k & & \\ & & | & & | & & \\ \hline & | & & | & & | & \\ & x_{k-1} & & x' & & x_k & \\ & & \Delta x'_k & & \Delta x''_k & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}(T) - \bar{S}(T_1) &= M_k \Delta x_k - (M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k) \\ &\leq M \Delta x_k + (M \Delta x'_k + M \Delta x''_k) = 2M \Delta x_k \leq 2M \|T\|\end{aligned}$$

如果 T' 是 T 增加 k 个新分点后所得的分割, 则 $\bar{S}(T) - \bar{S}(T') \leq 2kM \|T\|$ 。

同理可证另一式。

【性质 3】 任何一个上和必大于等于任何一个下和。即 T' 与 T'' 是 $[a, b]$ 的任意两个分割, 则

$$\underline{S}(T') \leq \bar{S}(T'')$$

记 $T = T' + T''$, T 既是 T' 的加细, 也是 T'' 的加细。于是

$$\underline{S}(T') \leq \underline{S}(T) \leq \bar{S}(T) \leq \bar{S}(T'')$$

【性质 4】 (1) $\forall T, \underline{S}(T) \leq \bar{S}, \underline{S} \leq \bar{S}(T)$; (2) $\underline{S} \leq \bar{S}$

由性质 3 立即得。

【定理 1】 (可积准则)

$$f \in R[a, b] \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{使得} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \tag{3}$$

(1) \Rightarrow (2) 见第 3 节例 5, (2) \Rightarrow (3) 是显然。只需再证明 (3) \Rightarrow (1) 即可。

设 $|f(x)| \leq M$ 。由 (3), $\forall \varepsilon > 0, \exists T_1$ (设 T_1 有 k 个分点), 使得

$$\bar{S}(T_1) - \underline{S}(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4Mk}$, 对 $\forall \|T\| < \delta$, 有

$$\bar{S}(T) \leq \bar{S}(T + T_1) + 2kM \|T\| \leq \bar{S}(T_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(T_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \bar{S} + \varepsilon$$

$$\underline{S}(T) \geq \underline{S}(T + T_1) - 2kM \|T\| \geq \underline{S}(T_1) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \bar{S}(T_1) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \bar{S} - \varepsilon$$

因此, 在分割 T 下任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 有

$$\bar{S} - \varepsilon \leq \underline{S}(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(T) \leq \bar{S} + \varepsilon$$

根据定义就证明了 $f \in R[a, b]$, 且 $\int_a^b f = \bar{S}$ 。

作为本章的结束, 下面不加证明地给出一些有用的结论。

【定理 2】 $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \bar{S} = \underline{S}$

【定理 3】 $f \in R[a, b]$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \eta > 0, \exists T$, 使得振幅 $\omega_k \geq \varepsilon$ 的那些小区间的长度总和 $\sum_k \Delta x_k < \eta$ 。

【定理 4】 若 $f \in C[a, b]$, $\varphi \in R[\alpha, \beta]$, $a \leq \varphi(t) \leq b, t \in [\alpha, \beta]$, 则复合函数

$$f(\varphi(t)) \in R[\alpha, \beta]$$

【定理 5】 (另一换元法) 若 $f \in R[a, b]$, φ 在 $[\alpha, \beta]$ 上严格单调且 $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$,

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$