习题课　多元函数微分法

一．基本概念

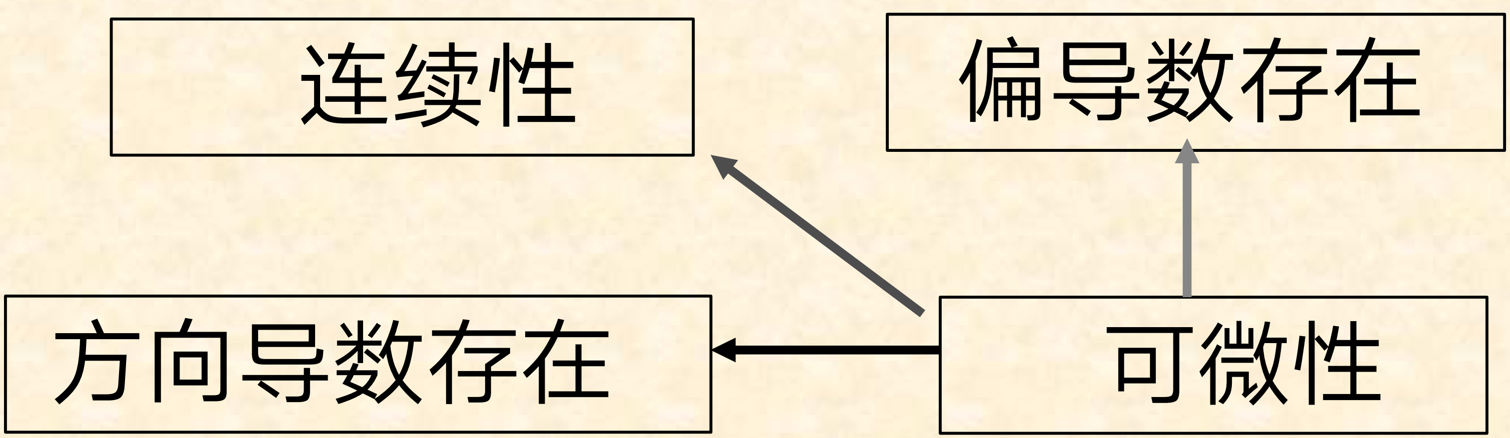
1. 多元函数的定义，极限 ，连续

定义域及对应规律

判断极限不存在及求极限的方法

函数的连续性及其性质

2. 几个基本概念的关系



例1. 已知 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2 + \phi(x+y)$，且

$f(x, 0) = x$， 求出 $f(x, y)$ 的表达式.

解法1. 令 $u = x+y$， $v = x-y$， 则

$$x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$\therefore \quad f(u, v) = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2 + \phi(u) = uv + \phi(u)$$

即 $f(x, y) = xy + \phi(x)$

$$\downarrow \quad \because \quad f(x, 0) = x,\ \therefore \phi(x) = x$$

$$f(x, y) = x(y+1)$$

解法2. $\because \quad f(x+y, x-y) = (x+y)(x-y) + \phi(x+y)$,

$$\therefore \quad f(x, y) = xy + \phi(x)$$

以下与解法1 相同.

例2、研究函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x + y + (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) 在点 (0,0) 处是否连续

(2) 在点 (0,0) 处偏导数是否存在和连续

(3) 在点 (0,0) 处沿任意方向的方向导数是否存在

(4) 在点 (0,0) 处是否可微

提示: 对于分段函数在分界点处的讨论，通常情况下，用定义讨论

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x + y + (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0\quad, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

1、连续性

$$0 \le \left| f(x, y) \right| \le |x| + |y| + x^2 + y^2$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0,0)$$ 故连续

2、偏导数

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 1$$ 故不连续

$$f_x(x, y) = 1 + 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2 + y^2}$$ 极限不存在

3、方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}$$

$$=\cos\varphi+\sin\varphi$$

故在点 (0,0) 处沿任意方向的方向导数都存在。

4、可微

$$\Delta z = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$$

$$= f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho) = \Delta x + \Delta y + o(\rho)$$

而 $\Delta z-(\Delta x+\Delta y) = f(\Delta x,\Delta y) -(\Delta x+\Delta y)$

$$=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = o(\rho)$$ 故可微

思考与练习

证明: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0) 处连续且偏导数存在, 但不可微 .

提示: 利用 $2xy\le x^2+y^2$,

知 $\left|f(x,y)\right|\le\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2}$

$\therefore\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$

$\Longrightarrow$ f 在 (0,0) 连续

又 $\because\quad f(x,0)=f(0,y)=0\quad\therefore\quad f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$ 证明：

$f(x,y)$ 在点(0,0)处连续且偏导数存在，但不可微．

而 $$\Delta f\Big|_{(0,0)}=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，

$$\left.\frac{\Delta f\big|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right/\rho=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}\not\to 0$$

$\therefore$ **f 在点(0,0)不可微！**

二.多元函数微分法

1. 分析复合结构 $\begin{cases}\text{显示结构}\\ \text{隐式结构}\end{cases}$ (画变量关系图)

自变量个数 = 变量总个数 − 方程总个数

自变量与因变量由所求对象判定

2. 正确使用求导法则

“分段用乘,分叉用加,单路全导,叉路偏导”

注意: 正确使用求导符号

3. 利用一阶微分形式不变性

例3. 设 $z = x f(x+y)$，$F(x, y, z) = 0$，其中 f 与 F 分别具有一阶导数或偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

解法1. 方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f + x f' \cdot \left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) \\ F_1' + F_2' \dfrac{dy}{dx} + F_3' \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x f' \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} = f + x f' \\ F_2' \dfrac{dy}{dx} + F_3' \dfrac{dz}{dx} = -F_1' \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -x f' & f + x f' \\ F_2' & -F_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x f' & 1 \\ F_2' & F_3' \end{vmatrix}} = \frac{x F_1' f' - x F_2' f' - f F_2'}{-x f' F_3' - F_2'}$$

$$(x f' F_3' + F_2' \neq 0)$$

$z = x f(x+y)$, $F(x, y, z) = 0$，求 $\dfrac{dz}{dx}$

解法2. 方程两边求微分,得

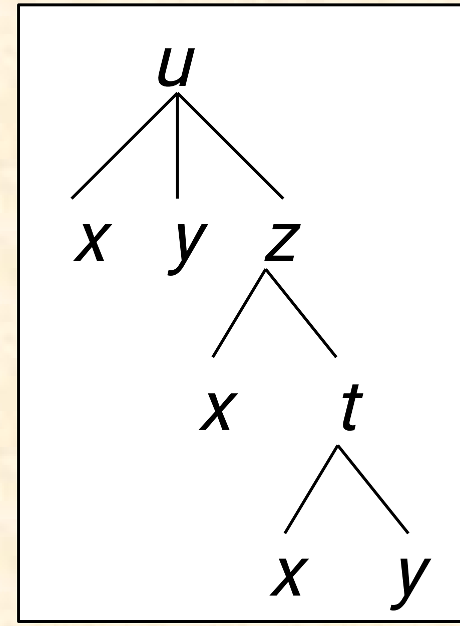
$$\begin{cases} dz = f\,dx + x f' \cdot (dx + dy) \\ F_1' dx + F_2' dy + F_3' dz = 0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{化简}$$

$$\begin{cases} (f + x f')\,dx + x f' dy - dz = 0 \\ F_1' dx + F_2' dy + F_3' dz = 0 \end{cases}$$

消去 dy 即可得 $\dfrac{dz}{dx}$

例3.设 $u = f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $z = x^2 \sin t$, $t = \ln(x + y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.



解: $$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_3' \cdot \left(2x\sin t + x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right)$$

$$= f_1' + f_3' \cdot \left(2x\sin t + \frac{x^2 \cos t}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{12}'' + f_{13}'' \cdot \left(x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right)$$

$$+ \left[f_{32}'' + f_{33}'' \cdot \left(x^2 \cos t \cdot \frac{1}{x+y}\right) \right] \left(2x\sin t + \frac{x^2 \cos t}{x+y}\right)$$

$$+ f_3' \cdot \left(2x\cos t \cdot \frac{1}{x+y} + x^2 \frac{-\sin t \cdot \frac{1}{x+y}(x+y) - \cos t \cdot 1}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \cdots$$

练习题

设函数f 二阶连续可微，求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$(1)\quad z = x f\left(\frac{y^2}{x}\right);$$

$$(2)\quad z = f\left(x + \frac{y^2}{x}\right);$$

$$(3)\quad z = f\left(x, \frac{y^2}{x}\right)$$

解答提示:

(1) $z = x f(\frac{y^2}{x})$: $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x f'(\frac{y^2}{x}) \cdot \frac{2y}{x} = 2y f'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y f'' \cdot (-\frac{y^2}{x^2}) = -\frac{2y^3}{x^2} f''$$

(2) $z = f(x + \frac{y^2}{x})$: $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{2y}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x} f'' \cdot (1 - \frac{y^2}{x^2}) = -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x}(1 - \frac{y^2}{x^2}) f''$$

(3) $z = f(x, \frac{y^2}{x})$: $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x} f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f_2' + \frac{2y}{x}(f_{21}'' - \frac{y^2}{x^2} f_{22}'')$$

三. 多元函数微分法的应用

1、在几何中的应用

求曲线在切线及法平面 (参数方程，一般方程)

求曲面的切平面及法线 (隐式方程 , 显式方程)

2、极值与最值问题

极值的必要条件与充分条件

求条件极值的方法 (消元法,拉格朗日乘数法)

求解最值问题

3、在微分方程中的应用

例4.在第一卦限作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使其在三坐标轴上的截距的平方和最小，求切点.

解: 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，

则切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}\Big|_M=\left\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right\}$$

切平面方程 $\dfrac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

即 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y+\dfrac{z_0}{c^2}z=\boxed{1}$

在三坐标轴上的截距 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$

例4.在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使其在三坐标轴上的截距的平方和最小，求该切点的坐标 .

问题归结为求 $s=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2$

在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0)$$

令 $$F=\left(\frac{a^2}{x}\right)^2+\left(\frac{b^2}{y}\right)^2+\left(\frac{c^2}{z}\right)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&F_x=-2\left(\frac{a^2}{x}\right)\frac{a^2}{x^2}+2\lambda\frac{x}{a^2}=0\\
&F_y=-2\left(\frac{b^2}{y}\right)\frac{b^2}{y^2}+2\lambda\frac{y}{b^2}=0\\
&F_z=-2\left(\frac{c^2}{z}\right)\frac{c^2}{z^2}+2\lambda\frac{z}{c^2}=0\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1
\end{aligned}\right.
\Longrightarrow
\begin{aligned}
x&=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}\\
y&=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}\\
z&=\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}
\end{aligned}$$

由实际意义可知 $M\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}},\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}},\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)$ 为所求切点 .

练习题：

1. 在曲面 $z = xy$ 上求一点，使该点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$，并写出该法线方程．

提示： 设所求点为 (x_0, y_0, z_0)，则法线方程为

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{x_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

利用 $$\begin{cases} \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{-1}{1} \\ z_0 = x_0 y_0 \end{cases}$$

得 $x_0 = -3$，$y_0 = -1$，$z_0 = 3$

2.在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面与三坐标面围成的四面体的体积最小,并求此体积.

提示: 设切点为 (x_0, y_0, z_0), 则切平面为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

所围体积 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$

V 最小等价于 $f(x, y, z)=xyz$ 最大, 故取拉格朗日函数为

$$F=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

用拉格朗日乘数法可求出 (x_0, y_0, z_0)

3. 设三个实数x、$y(y>0)$和z满足$y+e^x+|z|=3$，求$ye^x|z|$的最大值，并证明$ye^x|z|\le 1$.

解 $\because y+e^x+|z|=3,\quad \therefore |z|=3-y-e^x,$

令 $f(x,y)=ye^x|z|=ye^x(3-e^x-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^x(3-2e^x-y)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^x(3-e^x-2y)$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2e^x-y=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=3-e^x-2y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 唯一驻点$x=0,\ y=1$

而 $A=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=-2,\qquad B=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=-1,$

$$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,1)}=-2$$

$\because AC-B^2=(-2)\cdot(-2)-(-1)^2=3>0$, 且 $A<0$,

$\therefore f(x,y)$在点$(0,1)$处取得极值 $f(0,1)=1$，即为最大值

$\therefore f(x,y)\le 1$ 从而 $ye^x|z|\le 1.$

4. 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$, (f 具有二阶连续偏导数) ,

求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(f_1' x+f_2' \frac{1}{x}\right)=x^4 f_1'+x^2 f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(f_{11}'' x+f_{12}'' \frac{1}{x}\right)+x^2\left(f_{21}'' x+f_{22}'' \frac{1}{x}\right)$$

$$=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+x f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1' + x^2 f_2')$$

$$= 4x^3 f_1' + x^4 [f_{11}'' y + f_{12}''(-\frac{y}{x^2})] + 2x f_2'$$

$$+ x^2 [f_{21}'' y + f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$

5. 求半径为R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为x, y, z, 则

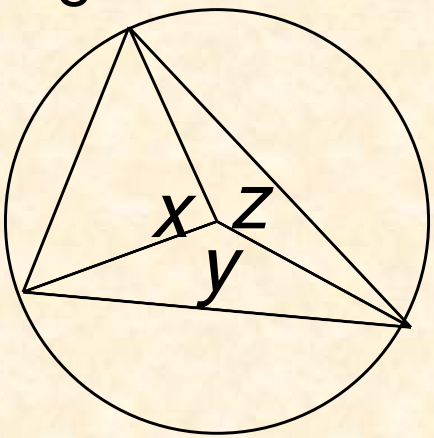
$$x+y+z=2\pi, \quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$$

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\frac{1}{2}R^2\sin x, \quad S_2=\frac{1}{2}R^2\sin y, \quad S_3=\frac{1}{2}R^2\sin z$$

设拉氏函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

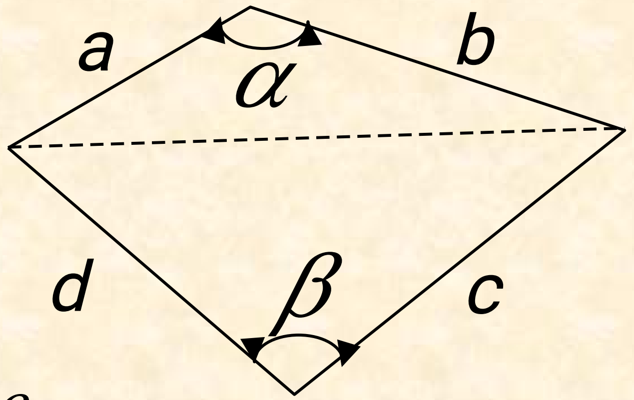
解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$, 得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大, 最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

6. 求平面上以 a, b, c, d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数： $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$

$(0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi)$

约束条件： $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$

答案: $\alpha + \beta = \pi$, 即四边形内接于圆时面积最大 .

7. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且

$$f(1,1)=1,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,$$

$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解: 由题设 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\varphi^2(x)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$$

$$=3\big[f_1'(x,f(x,x))$$

$$\left.+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))\big]\right|_{x=1}$$

$$=3\cdot[2+3\cdot(2+3)]=51$$

3. 在球面$2x^2+2y^2+2z^2=1$上找一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$沿$A(1,1,1)$到$B(2,0,1)$的方向导数具有最大值点。

提示：由于$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

$$=2x\cos\alpha+2y\cos\beta+2z\cos\gamma$$

$$=2x\frac{1}{\sqrt{2}}+2y\frac{-1}{\sqrt{2}}+2z\cdot 0=\sqrt{2}(x-y)$$

问题转化为求：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$在条件$2x^2+2y^2+2z^2=1$下的极值，利用拉格朗日判别法