第 11 章　反常积分 习题课

§1　反常积分的概念

一、反常积分的定义

【1】无穷积分的定义

（1）$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$

（2）$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

【注意】无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，是要求$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$同时收敛。不能定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$$

应该是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{v\to-\infty}\int_v^a f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

【2】瑕积分的定义

（1）a为f的瑕点，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$

（2）b为f的瑕点，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$

（3）$c\in(a,b)$ 为f的瑕点，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

【注意】瑕积分的记号与定积分的记号一样，要注意区分。例如

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$$

$x=1$不是瑕点，只有$x=0$为瑕点。

【3】混合型反常积分

a为f的瑕点

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,(b>a)$$

中国矿业大学理学院胡建华

二、定积分的 N.L. 公式、换元法、分部积分法都可用于反常积分

例如：（以 N.L. 公式为例，其它类似）

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x == F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+)$$

这里 $F(+\infty) = \lim\limits_{u\to+\infty} F(u)$，$F(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$。

三、两个重要的反常积分

【1】$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}\begin{cases} p>1, & 收敛 \\ p\le 1, & 发散 \end{cases}$

【2】$\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^q}\begin{cases} q<1, & 收敛 \\ q\ge 1, & 发散 \end{cases}$（注：$q \le 0$ 为正常积分）

四、瑕积分用换元法可以转化为无穷积分或正常积分

例 1（把瑕积分化为无穷积分）：

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t \quad (x = \frac{1}{\sqrt{t}})$$

例 2（把瑕积分化为正常积分）：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \quad（x = \sin^2\theta）$$

§2　反常积分敛散性判别法

一、柯西准则

【1】$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在 $G \ge a$，只要 $u_1, u_2 > G$，总有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$。

【2】瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ （瑕点为 a）收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，

只要u_1，$u_2 \in (a,a+\delta)$，总有$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$。

二、比较原准则

【1】设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数f和g都在任何有限区间$[a,u]$上可积，且满足

$$f(x) \le g(x), x \ge X \ge a$$

则当$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$必收敛。等价地，当$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$必发散。

【2】设定义在$(a,b]$上的两个非负函数f与g，瑕点同为$x=a$，在任何$[u,b]\subset(a,b]$上都可积，且满足

$$f(x) \le g(x), x \in (a,a+\delta) \subset (a,b]\text{。}$$

则当$\int_a^b g(x)dx$收敛时，$\int_a^b f(x)dx$必定收敛。等价地，当$\int_a^b f(x)dx$发散时，$\int_a^b g(x)dx$亦必发散。

三、柯西判别法

【1】设f是定义在$[a,+\infty)$上的非负函数，在任何有限区间$[a,u]$上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda\text{。}$$

则有

(i) 当$p>1, 0\le\lambda<+\infty$时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；

(ii) 当$p\le1, 0<\lambda\le+\infty$时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

【2】设f是定义在$(a,b]$上的非负函数，a为其瑕点，且在任何$[u,b]\subset(a,b]$上可积。如果

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^q f(x) = \lambda$$

则有：

（i）当$0<q<1$，$0\le\lambda<+\infty$时，$\int_a^b f(x)dx$收敛；

（ii）当$q\ge 1$，$0<\lambda\le+\infty$时，$\int_a^b f(x)dx$发散。

四、A-D 判别法

【1】无穷积分

$D-$判别法	$A-$判别法
(1) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调； (2) $g(x)\to 0(x\to+\infty)$； (3)$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$上有界，	(1) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调； (2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上有界； (3)$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛, 即$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$存在，
则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。	

【2】瑕积分（由于瑕积分可化为无穷积分，故把瑕积分的 A-D 判别法省略）

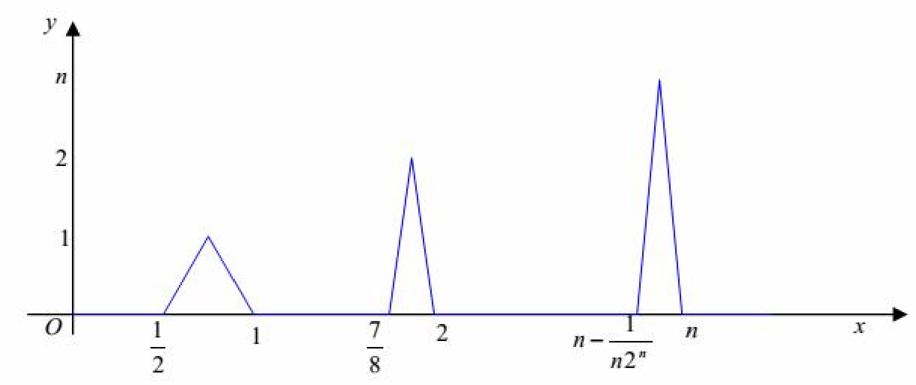
§3　疑难问题与例题

一、无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$的关系

【例 1】$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$不能推出$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0，但\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x 发散$$

【例 2】$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，即使$f(x)\ge 0$，也不能推出$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。



$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

【注】上面用到了级数的知识，也可不用。

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

在附加一些条件下，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

【例 3】（习题 11.1－5）证明：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $A=0$。

【证】反证法．假设 $A\neq 0$，不妨设 $A>0$．由保号性，存在 $N>a$，当 $x>N$ 时，$f(x)>\frac{A}{2}>0$，于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^N f(x)dx+\int_N^{+\infty} f(x)dx\geq\int_a^N f(x)dx+\frac{A}{2}\int_N^{+\infty} dx=+\infty$$

这与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛相矛盾，所以 $A=0$.

【例 4】（习题 11.2－8） 证明：若 f 是$[a,+\infty]$上的单调函数，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，且 $f(x)=o(\frac{1}{x}),x\to+\infty$。

【证】 首先证明 f 有界。若 f 在$[a,+\infty)$上单调递增无上界，则对任何 $M>0$，存在 $X>a$，使得当 $x>X$ 时，$f(x)>M$．于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty} f(x)dx\geq\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty} M\,dx=+\infty$$

这与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛相矛盾， 从而 f 在$[a,+\infty)$上单调有界。

根据单调有界定理，存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$．由上面例 3（习题 11.1－5），知 $A=0$。

下面证明：$f(x)=o(\frac{1}{x})$， $x\to+\infty$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

不妨设 f 在$[a,+\infty)$上单调递减趋于零（$f(x)\geq 0$）。 因$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，由无穷积分的柯西准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists G\geq a$，使得当 $x>\frac{x}{2}>G$ 时，有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt<\varepsilon$$

于是

$$0 \le \frac{1}{2} x f(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,dt \le \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$ 。

【例 5】（习题 11.1－6）证明：若 f 在 $[a,+\infty]$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

【证】因为

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^{u} f'(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}[f(u) - f(a)]$$

收敛，所以极限 $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)$ 存在，由上面例 3（习题 11.1－5）， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 。

【例 6】（习题 11.2－9）　若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续， $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 .$$

【证】由 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续， $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ （设 $\delta \le \varepsilon$ ），使得当 $x_1, x_2 \in [a,+\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

又因 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，由无穷积分的柯西准则，对上述 δ ，$\exists G \ge a$ ，使得当 $u_1, u_2 > G$ 时，有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dx\right| < \frac{\delta^2}{2}$.

现在对任何 $x > G$ ，取 $u_1, u_2 > G$ ，使得 $u_1 < x < u_2$ ，且 $u_2 - u_1 = \delta$ ，于是

$$|f(x)\delta| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dt\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dt - \int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt + \int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt\right|$$

$$\le \int_{u_1}^{u_2} |f(x) - f(t)|\,dt + \left|\int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\delta + \frac{\delta^2}{2} \le \varepsilon\,\delta$$

从而 $|f(x)| < \varepsilon$ ，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

二、绝对收敛与条件收敛

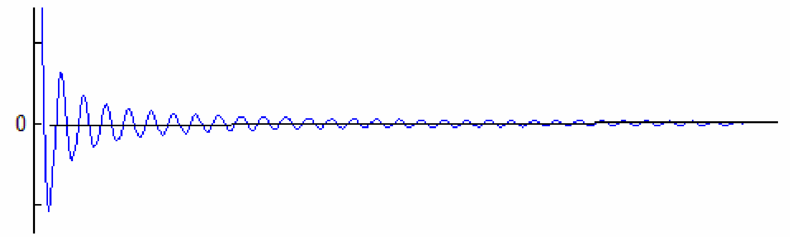
【定义】当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 都收敛时，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为**绝对收敛**；当

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散时，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为**条件收敛**。

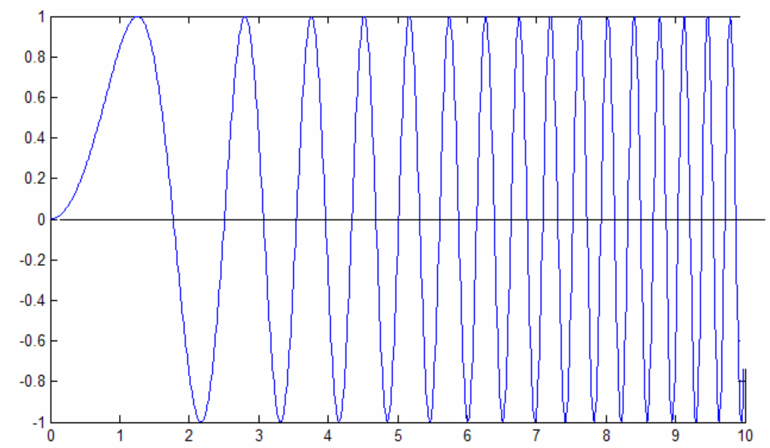
【定理】　若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛时，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必收敛，并有 $\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$。

【例 7】通过下面三个条件收敛的例子（见图），进一步理解条件收敛的本质。

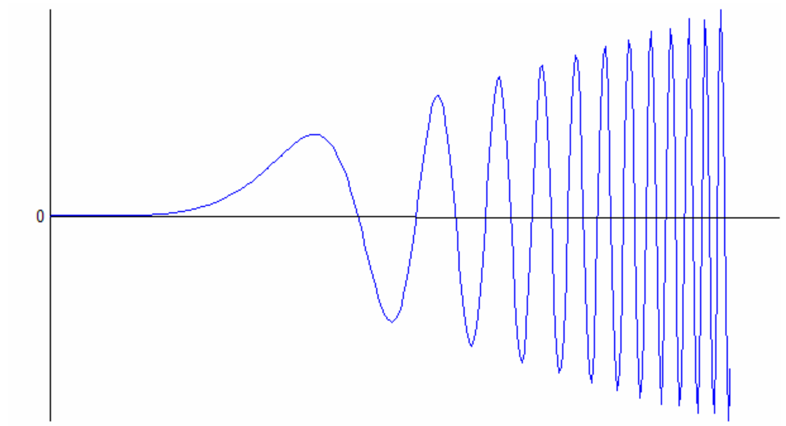
$$(1)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;\quad (2)\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}x;\quad (3)\int_0^{+\infty}x\sin^4 x\,\mathrm{d}x$$



（1）



（2）



（3）

【例 8】设$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$为条件收敛，则

（1）$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x$与$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x$都发散；

（2）$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\int_a^u\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^u\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x}=1$。

【证】（1）若$\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x$收敛，则

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|-f(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x$$

也收敛，矛盾。所以$\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x$发散，同理，$\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x$也发散。

（2）由于（1）中两个积分的被积函数都是非负的，所以

$$\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x=+\infty$$

考察

$$\frac{\int_a^u\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^u\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x}-1=\frac{2\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^u\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x}$$

当$u\to+\infty$时，上式分子的极限是常数，分母的极限是$+\infty$，所以

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\int_a^u\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^u\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x}-1\right)=0\Rightarrow\lim_{u\to+\infty}\frac{\int_a^u\left[|f(x)|+f(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^u\left[|f(x)|-f(x)\right]\mathrm{d}x}=1$$

【注】通过本例再来理解条件收敛的本质。

【例 9】证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛。举例说明，把$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$改为条件收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$不一定收敛。

【证】由$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=A$，易知$|g(x)|\le M, x\ge G$。于是

$$|f(x)g(x)|\le M|f(x)|, x\ge G$$

由比较原则，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛。

考虑$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$它是条件收敛。

$$g(x)=1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\to 1\,(x\to+\infty)$$

则

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x})\mathrm{d}x$发散。所以上式积分发散。

【注】这里用到教材例题的结果（也是下面的例 12）。

三、A-D 判别法

【例 10】(习题集 1.2－10) 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法

【证】 $(A-$判别法$)$设

(1) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调；

(2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上有界；

(3)$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

由 A-判别法的条件（1）和（2），$g(x)$单调有界，故必有极限，设$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$。令$g_1(x)=g(x)-A$，则$g_1(x)$单调且$\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)=0$。由 D-判别法，$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)\mathrm{d}x$收敛。于是由

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x+A\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

知$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

【例 11】证明：若$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$也收敛。

【证】 因$g(x)=\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调有界，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，由 A-判别法得证。

【注】错误的做法：由

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|f(x)|$$

且$\int_1^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$绝对收敛。

【例 12】(教材 P255 例 3) 讨论$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$的敛散性.

【证】这里只讨论前一个无穷积分，后者有完全相同的结论．下面分两种情形来讨论：

（i）当$p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$绝对收敛．这是因为

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p},x\in[a,+\infty),$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$当$p>1$时收敛，故由比较法则推知$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$收敛。

（ii）当$0<p\le1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛．这是因为对任意$u\ge1$，有

$$\left|\int_1^u\sin xdx\right|=|\cos1-\cos u|\le2$$

而$\frac{1}{x^p}$当$p>0$时单调趋于$0(x\to+\infty)$，故由狄利克雷判别法推知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$当$p>0$时总是收敛的．

另一方面，由于

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos2x}{2x},x\in[1,+\infty),$$

其中$\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$满足狄利克雷判别条件，是收敛的，而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$是发散的，因此当$0<p\le1$时该无穷积分不是绝对收敛的．所以它是条件收敛的．

【例 13】讨论$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x(p>0)$的收敛性

【证】当$p>1$时，$\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^p}$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x$绝对收敛。

当$0<p\le1$时，由上例知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛，而$\arctan x$在$[1,+\infty)$单调有界，由 A-判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛，但它不是绝对收敛。因为当$x\ge1$时，

$$\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\ge\frac{|\sin x|\cdot|\arctan x|}{x}\ge\frac{\pi}{4}\frac{|\sin x|}{x}$$

再由上例知，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$发散，故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$发散。

四、混合型反常积分

【例 14】 讨论$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$的收敛性。

【证】记$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ +\int_1^{+\infty}\ =I(s)+J(s)$

（1）讨论$I(s)$

当$s\geq 1$时，是正常积分。当$s<1$时，是瑕积分，$x=0$是瑕点。由于

$$\lim_{x\to 0}x^{1-s}x^{s-1}e^{-x}=1$$

所以，当$1-s<1\Leftrightarrow s>0$时，$I(s)$收敛，当$1-s\geq 1\Leftrightarrow s\leq 0$，$I(s)$发散。

（2）讨论$J(s)$

它是无穷积分，由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^2x^{s-1}e^{-x}=0$$

所以，对$\forall s$，$J(s)$收敛。

综上，$\Gamma(s)$只有在$s>0$时收敛。

【例 15】讨论$J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x$的收敛性。

【证】记

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x=J_1+J_2$$

先讨论J_1。

当$m\leq 2$时为定积分。当$m>2$时为瑕积分，瑕点为$x=0$。当$2<m<3$时（$0<m-2<1$），由

$$\lim_{x\to 0}x^{m-2}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^m}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$$

知J_1收敛。

当$m\geq 3$时，由

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\sin^2 x}{x^m}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^{m-1}}=\begin{cases}1, & m=3\\ +\infty, & m>3\end{cases}$$

知 J_1 发散。

再讨论 J_2。

当 $m>1$ 时，由

$$\frac{\sin^2 x}{x^m}\le\frac{1}{x^m}$$

知 J_2 收敛。

当 $0<m\le 1$ 时，由

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^m}-\frac{\cos 2x}{x^m})\mathrm{d}x$$

以及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^m}\mathrm{d}x$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛，知 J_2 发散。

综上，当且仅当 $1<m<3$ 时，J 收敛。