第14章　　幂级数

§1 函数列与函数项级数

【一】 函数列

设

$$f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots \tag{1}$$

是一列定义在同一数集E上的函数，称为定义在E上的**函数列**. 记作$\{f_n\}$。

设$x_0 \in E$，若数列$\{f_n(x_0)\}$收敛，则称函数列（1）**在点**x_0**收敛**，否则称函数列（1）**在点**x_0**发散**. 使函数列（1）收敛的全体收敛点集合，称为函数列（1）的**收敛域**. 若函数列（1）在数集$D \subset E$上每一点都收敛，则称(1)**在数集**D**上收敛**. 这时定义D上的函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)，\quad x \in D$$

称为函数列(1)的**极限函数**.

设$f(x)$是函数列$\{f_n\}$在区间I上的极限函数，我们重点关心如下三个问题：

（1）若每个f_n在I上都连续，其极限函数f是否在I上也连续，即下式是否成立

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)，\quad x_0 \in I$$

（2）若每个f_n在I上都连续，$[a,b] \subset I$，下式是否成立

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

（3）若每个f_n在I上都有连续的导函数，下式是否成立

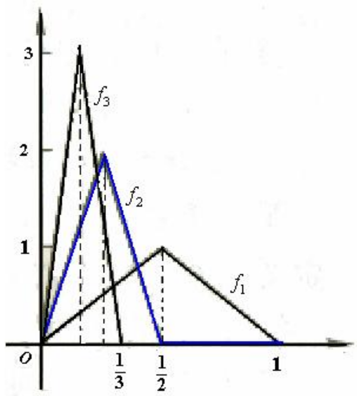
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x), x \in I$$

【例 1】 设$f_n(x) = x^n$，它的收敛域是$(-1,1]$，极限函数是

$$f(x) = \begin{cases} 0, |x| < 1, \\ 1, x = 1. \end{cases}$$

这里每个$f_n(x) = x^n$在$(-1,1]$上都连续且有连续的导函数，但极限函数$f(x)$在$(-1,1]$却不连续，从而也不可导。

【例 2】 定义在$\left[0,1\right]$上的函数列$\left\{f_n\right\}$如下图所示。



易知其极限函数 $f(x)=0, x\in[0,1]$．这里$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

【例 3】 设 $f_n(x)=xe^{-nx^2}, x\in[-1,1]$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$

$$f'(x)=0$$

又 $f_n'(x)=(1-2nx^2)e^{-nx^2}$，则

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

所以，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)\neq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x), x\in[-1,1]$

【二】 函数列级数

设$\left\{u_n(x)\right\}$是定义在同一数集E上的一个函数列，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, x\in E \tag{1}$$

称为定义在E上的**函数项级数**，称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x), x\in E, n=1,2,\cdots \tag{2}$$

为函数项级数(1)的**部分和函数列**．定义函数项级数(1)的**和函数**

$$S(x)=\sum u_n(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x), x\in D\subset E$$

【例 4】　几何级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},|x|<1$$

对于部分和函数列$\{S_n(x)\}$，我们同样关心上面所提的三个问题。换成级数就是

（1）极限与求和是否可交换：

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)$$

（2）积分与求和是否可交换（即是否可逐项积分）：

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

（3）求导与求和是否可交换（即是否可逐项求导）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}u_n(x)$$

§2 幂级数

本章将讨论由幂级数列$\{a_n(x-x_0)^n\}$ 所产生的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

它称为**幂级数**, 是一类最简单的函数项级数，从某种意义上说，它也可以看作是多项式函数的延伸. 幂级数在理论和实际上都有很多应用，特别在应用它表示函数方面，是我们对它的作用有许多新的认识.

下面将着重讨论$x_0=0$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

的情形.

【一】 幂级数的收敛区间

首先讨论幂级数（1）的收敛性问题. 显然任意一个幂级数（1）在$x=0$处总是收敛的. 除此之外, 它还在哪些点收敛？我们有下面重要的定理.

【定理 1】(阿贝耳定理)　若幂级数(1)在$x=\bar{x}\neq 0$收敛, 则对满足不等式$|x|<|\bar{x}|$的任

何 x, 幂级数(1)收敛而且绝对收敛; 若幂级数(1)在 $x=\bar{x}$ 时发散, 则对满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的任何 x, 幂级数(1)发散.

证　设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ 收敛, 从而数列 $\{a_n \bar{x}^n\}$ 收敛于零且有界, 即存在某正数 M, 使得

$$\left|a_n \bar{x}^n\right| < M \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

另一方面对任意一个满足不等式 $|x|<|\bar{x}|$ 的 x, 设

$$r=\frac{|x|}{|\bar{x}|}<1$$

则有

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n \bar{x}^n \cdot \frac{x^n}{\bar{x}^n}\right| = \left|a_n \bar{x}^n\right| \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n < Mr^n.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mr^n$ 收敛，故幂级数（1）当 $|x|<|\bar{x}|$ 是绝对收敛.

现在证明定理的第二部分. 设幂级数(1)在 $x=\bar{x}$ 时发散, 如果存在某一个 x_0, 它满足不等式 $|x_0|>|\bar{x}|$, 且使级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ 收敛. 则由定理第一部分知道, 幂级数(1)应在 $x=\bar{x}$ 时绝对收敛, 这与假设相矛盾, 所以对一切满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的 x, 幂级数(1)都发散.

【推论】令

$$R=\sup\left\{|\bar{x}| \;\middle|\; \text{幂级数(1)在}\,\bar{x}\,\text{收敛}\right\} \tag{2}$$

当 $R=0$ 时, 幂级数(1)仅在 $x=0$ 处收敛;

当 $R=+\infty$ 时, 幂级数(1)在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛;

当 $0<R<+\infty$ 时, 幂级数(1)在 $(-R,R)$ 内收敛；在 $[-R,R]$ 外发散；当 $x=\pm R$ 时，不定.

证　首先集合 $S=\left\{|\bar{x}| \;\middle|\; \text{幂级数(1)在}\,\bar{x}\,\text{收敛}\right\}$ 非空，至少幂级数（1）在 $\bar{x}=0$ 处收敛。

当 $R=0$ 时，结论显然成立。

设 $0<R\le+\infty$，对 $\forall |x|<R$，由 R 的定义（2）(上确界的定义)，存在 $x_0: |x|<|x_0|$ 且

幂级数（1）在 x_0 收敛。由 Able 定理，幂级数（1）在 x 处绝对收敛。

我们称 R 为幂级数(1)的**收敛半径**，称 $(-R,R)$ 为幂级数(1)的**收敛区间**.

怎样求得幂级数(1)的收敛半径,有如下定理.

【定理 2】 对于幂级数(1),若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

则收敛半径

$$R=\frac{1}{\rho}$$

这里约定 $\rho=0$ 时, $R=+\infty$； $\rho=+\infty$ 时, $R=0$.

证 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|=\rho|x|$$

根据根式判别法, 当 $\rho|x|<1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛；当 $\rho|x|>1$ 时级数发散. 于是

当 $0<\rho<+\infty$ 时, 由 $\rho|x|<1$ 得幂级数(2)的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

当 $\rho=0$ 时, 对任何 x 皆有 $\rho|x|<1$, 所以 $R=+\infty$.

当 $\rho=+\infty$ 时, 则对除 $x=0$ 外的任何 x 皆有 $\rho|x|>1$, 所以 $R=0$.

【推论】 若 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$, 则有 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

这是因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$.

【例 1 】 求幂级数 $\sum\dfrac{\ln(n+1)}{n}x^{n-1}$ 的收敛域。

由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\ln(n+2)}{n+1}\times\frac{n}{\ln(n+1)}\to 1(n\to\infty),$$

得收敛半径 $R=1$。

$x=1$ 时，$\dfrac{\ln(n+1)}{n}>\dfrac{1}{n}$，$\sum\dfrac{\ln(n+1)}{n}$ 发散；

$x=-1$ 时，$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(n+1)}{n}$ 是 Leibniz 级数，收敛。

所以这个级数的收敛域为 $[-1,1)$.

[$\ln(n+1)\ll n$]

【例 2】 求幂级数 $\sum(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^p}\,(p>0)$ 的收敛域。

收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$$

$x=1$ 时，$\sum(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 是 Leibniz 级数，收敛；

$x=-1$ 时，$\sum\dfrac{-1}{n^p}$ 是 p-级数，$p>1$ 时收敛，$0<p\le 1$ 时发散。

综上，$p>1$ 时,收敛收敛域为 $[-1,1]$；$0<p\le 1$ 时,收敛域为 $(-1,1]$。

【例 3】 求幂级数级数 $\sum\dfrac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域。

由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{2}$$

得收敛半径 $R=2$, 收敛区间为 $|x-1|<2$ 即 $(-1,3)$.

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

当 $x=3$ 时, 级数为 $\sum\dfrac{1}{n}$ 发散。

所以收敛域为 $[-1,3)$.

【例 4】 求幂级数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域。

由根式判别法

中国矿业大学理学院胡建华

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1\\ +\infty, & |x|>1\end{cases}$$

所以收敛域为$[-1,1]$。

注：错误的$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}$

【二】 幂级数的性质

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

的收敛半径为$R>0$。

【定理 3】 (i)幂级数(1)的和函数在收敛域$<-R,R>$上连续。即

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n,\ x_0\in<-R,R>$$

亦即可逐项求极限。

（ii）幂级数(1)在收敛区间$(-R,R)$上可逐项求导，且收敛半径不变。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \tag{2}$$

且幂级数(2) 与幂级数(1)有相同的收敛半径。

（iii）幂级数(1)在收敛区间$(-R,R)$上可逐项积分，且收敛半径不变。即

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}\,t=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \tag{3}$$

且幂级数(3) 与幂级数(1)有相同的收敛半径。

这里只证明（1)、(2)、(3)具有相同的收敛半径。只需证明（2）与（1）有相同的收敛半径，因为对(3)逐项求导就得到(1).

设x_0为幂级数(1)收敛区间$(-R,R)$内任一不为零的点.有阿贝耳定理的证明知道,存在正数M与$r<1$,对一切正整数n,都有

$$\left|a_n x_0^n\right| < Mr^n.$$

于是

$$\left|na_n x_0^{n-1}\right| = \frac{n}{|x_0|}\left|a_n x_0^n\right| < \frac{M}{|x_0|}nr^n,$$

由级数的比式判别法知道, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ 收敛. 根据级数的比较原则及上述不等式, 就推出幂级数(2)在点 x_0 是绝对收敛的(当然也是收敛的). 由于 x_0 为 $(-R, R)$ 内任一点, 这就证得幂级数(2)在 $(-R, R)$ 内收敛.

现在证明幂级数(2)对一切满足不等式 $|x| > R$ 的 x 都不收敛. 如若不然, 幂级数(2)在点 $x_0\left(|x_0| > R\right)$ 收敛, 则有一数 $\overline{x}$, 使得 $|x_0| > |\overline{x}| > R$. 由阿贝耳定理, 幂级数(2)在 $x = \overline{x}$ 时绝对收敛. 但是, 取 $n \ge |\overline{x}|$ 时, 就有

$$\left|na_n \overline{x}^{n-1}\right| = \frac{n}{|\overline{x}|}\left|a_n \overline{x}^n\right| \ge \left|a_n \overline{x}^n\right|,$$

由比较原则推得幂级数(1)在 $x = \overline{x}$ 时绝对收敛. 这与所设幂级数(1)的收敛区间为 $(-R, R)$ 相矛盾. 这就证得幂级数(2)的收敛区间也是 $(-R, R)$.

【例 5】[P55-3] 证明: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 也收敛, 则

$$\int_0^R f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

证 由定理 3（iii）

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R).$$

又当 $x = R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 收敛, 再由定理 3（i）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = R$ 左连续, 于是

$$\int_0^R f(x)dx = \lim_{x \to R^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

【例 6】证明：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,x\in(-1,1] \tag{4}$$

由

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,x\in(-1,1) \tag{5}$$

逐项积分

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,x\in(-1,1) \tag{6}$$

当 $x=1$ 时，（6）右边的级数收敛，由例 5，（6）对 $x=1$ 也成立，因此得（4）

注意 当 $x=1$ 时，（5）右边的级数发散，但（6）右边的级数收敛。

【注】由（4）又得由此得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

【例 7】求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数。

由

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,x\in(-1,1)$$

逐项求导

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},x\in(-1,1)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$$

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 都发散。

【例 8】证明

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$$

由

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,|x|<1$$

逐项积分得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,|x|<1$$

由于 $x=\pm1$ 时，上式右边级数都收敛，与例 5，上式对 $x=\pm1$ 也成立。所以

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,|x|\le1$$

【例 9】[P66-4(2)] 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ 的和。

考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1},x\in(-1,1]$$

由于 $S(0)=0$，且

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},|x|<1$$

由例 5，

$$S(1)=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{x^2-x+1}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

§3　函数的幂级数展开

【一】 泰勒级数

设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,x\in U(x_0)\qquad(1)$$

则

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

……

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

则级数（1）的系数与 f 在 $x=x_0$ 处的各阶导数有如下关系：

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$$

反之，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的有任意阶导数，称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (2)$$

为函数 f 在 x_0 的**泰勒级数**.

问 f 在 x_0 的泰勒级数在 x_0 附近的和函数是否就是 f？

看下面的例子：

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

由第五章 P114-11

$$f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots,$$

所以 f 在 $x=0$ 的泰勒级数为

$$0+0\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots.$$

显然它在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛,且其和函数 $S(x)=0$. 但，对一切 $x\neq 0$ ， $f(x)\neq S(x)$.

下面重点讨论具备什么条件的函数 f ,它的泰勒级数才能收敛于 f 本身.

设函数 f 在点 x_0 有任意阶导数，由 Tayler 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

这里 $R_n(x)$ 是 f 在 x_0 的泰勒公式余项.

显然,f 在区间(x_0-r,x_0+r)上等于它的泰勒级数的和函数的充分条件是：:对一切满足不等式$|x-x_0|<r$的x,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

如果f能在x_0的某邻域上等于其泰勒级数的和函数,则称函数f在x_0的这一邻域内可以展开成泰勒级数,并称等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

的右边为f在$x=x_0$处的**泰勒展开式,** 或称**幂级数展开式**.

若f为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数,则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$就是$f$在$(-R,R)$上的泰勒展开式.

在实际应用上,主要讨论函数在$x_0=0$处的展开式

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为**麦克劳林级数**.

【二】 初等函数的幂级数展开式

【例 1】由第 2 节我们已经得到下面几个函数的 Mac 公式：

【1】$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,x\in(-1,1)$

【2】$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,x\in(-1,1)$

【3】$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots,x\in(-1,1]$

【4】$\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$

【例 2】下面再列举几个重要的 Mac 公式

【5】$e^x=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$

【6】$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$， $x \in (-\infty, +\infty)$

【7】$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$， $x \in (-\infty, +\infty)$

【8】$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + \cdots \begin{cases} x \in (-1,1), & \alpha \le -1 \\ x \in (-1,1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1], & \alpha > 0 \end{cases}$

这里 $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

证【5】 $f(x) = e^x$，由于 $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1, (n = 1,2,\cdots)$. Lag 余项

$$|R_n(x)| \overset{0\le\theta\le1}{=\!=\!=\!=} \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

它对任何实数 x, 由结论 $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0.$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

证【6】 $f(x) = \sin x$，由于

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), n = 1,2,\cdots.$$

Lag 余项

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\xi + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 (n\to\infty),$$

证【7】 对【6】逐项求导得【7】

证【8】 $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, n = 1,2,\cdots,$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), n = 1,2,\cdots.$$

于是 $f(x)$ 的 Mac 级数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

至于$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$的证明，这里略。

【例 3】求$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$的 Mac 级数

在公式【8】中，取$\alpha=-\dfrac{1}{2}$得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots,(-1,1].$$

【例 4】求$f(x)=\arcsin x$的 Mac 级数

以$-x^2$分别代入例 3 中

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots,(-1,1).$$

逐项求积

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\cdots,[-1,1].$$

这里端点的收敛性要另外判别（略）。

【例 5】用非初等函数

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

的幂级数展开式.

以$-x^2$代替e^x展开式的x,得

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

再逐项求积就得到$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的展开式

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

【例 6】求函数$f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$的幂级数展开式并指出收敛域。

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\text{，}\ |x|<1$$

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

收敛域为：$|x|\le 1$

注：$f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}=2\arctan x$

【例 7】 求 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 在点 $x_0=1$ 的幂级数展开。

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$$

收敛域：$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ 且 $\left|\frac{x-1}{4}\right|<1$，即 $x\in(-1,3)$