第 18 章　隐函数定理及其应用

§1 隐函数

显函数：

$$y=x^2+1，u=e^{xyz}(\sin xy+\sin yz+\sin zx).$$

隐函数：自变量与因变量之间的对应法则是由一个方程式或方程组所确定。

【**定义**】设 $F:E\subset R^2\to R^2$，若 $\forall x\in I$，有唯一的 $y\in J$，使得 $(x,y)\in E$ 且满足 $F(x,y)=0$。这样就确定了一个函数

$$y=f(x),x\in I,y\in J$$

称之为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的定义在 I，值域含于 J 的**隐函数**。

例如，由方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 可确定隐函数

$$y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1],y\in[0,1]$$

也可确定另一个隐函数

$$y=-\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1],y\in[-1,0]$$

但一般情况下，隐函数没有显式的表达式。例如：Kepler 方程

$$F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$$

可确定隐函数

$$x=g(y)=y-\frac{1}{2}\sin y,y\in(-\infty,+\infty)$$

容易知道上面函数严格增，因此 Kepler 方程也可确定上面函数的反函数

$$y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$$

但函数 $f(x)$ 却无法用 x 的算式来表达。

方程 $F(x,y)=x^2+y^2+1=0$ 不能确定隐函数。

一般情况下，由方程 $F(x,y)=0$，我们只能知道在某点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域是否存在

隐函数。尽管隐函数没有显式表达式，我们仍能根据 F 的性质推断隐函数的连续性，可导性等性质。

【隐函数存在定理 1】 若函数 $F(x,y)$ 满足：

（i） F 在点 P_0 (x_0,y_0) 的某邻域 $U(P_0,\delta')$ 上连续且具有连续的偏导数；

（ii） $F(x_0,y_0)=0$（通常称为初始条件）；

（iii） $F_y\left(x_0,y_0\right)\neq 0$，

则存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0,\delta)\subset U(P_0,\delta')$，在 $U(P_0,\delta)$ 上由方程 $F\left(x,y\right)=0$ 可确定唯一的一个连续且具有连续导数的隐函数

$$y=f(x),x\in U(x_0,\alpha),(x,y)\in U(P_0,\delta)$$

它满足 $f\left(x_0\right)=y_0$ 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

【解释】 $F\left(x,y\right)\approx F(x_0,y_0)+F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$F\left(x,y\right)=0\overset{\approx}{\Leftrightarrow}F(x_0,y_0)+F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

注意到 $F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq 0$，当 x 充分靠近 x_0 时，上面右边方程有唯一解：

$$y=y_0-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

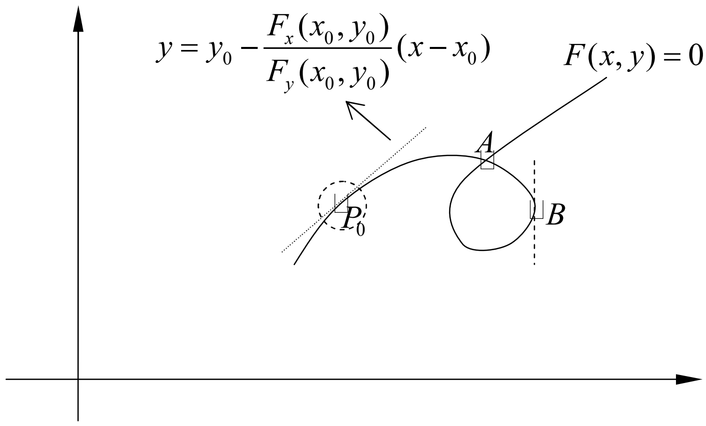
可推断方程 $F\left(x,y\right)=0$ 也有唯一解，上面的解就是方程 $F\left(x,y\right)=0$ 的近似解。

注: $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ 为切线方程。

由 $F(x,f(x))\equiv 0$，两边对 x 求导：$F_x(x,y)+F_y(x,y)f'(x)=0$ 得

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

参见下图



【隐函数存在定理 2】 若函数 $F(x,y,z)$ 满足：

（i）F 在点 P_0 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域 $U(P_0,\delta')$ 上连续且具有连续的偏导数；

（ii）$F(x_0,y_0,z_0)=0$；

（iii）$F_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\neq 0$，

则存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0,\delta)\subset U(P_0,\delta')$，在 $U(P_0,\delta)$ 上由方程 $F\left(x,y,z\right)=0$ 可确定唯一的一个连续且具有连续偏导数的隐函数（记 $Q_0(x_0,y_0)$）

$$z=f(x,y),x\in U(Q_0,\alpha),(x,y,z)\in U(P_0,\delta)$$

它满足 $f\left(x_0,y_0\right)=z_0$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

【解释】 $F\left(x,y,z\right)\approx F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)$

$$F\left(x,y,z\right)=0\overset{\approx}{\Leftrightarrow}F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

注意到 $F_z(P_0)\neq 0$，当 (x,y) 充分靠近 $Q_0(x_0,y_0)$ 时，上面右边方程有唯一解 z。可推断方程 $F\left(x,y,z\right)=0$ 也有唯一解。

注：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$ 为切平面方程。

由 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，两边对 x,y 求偏导便得上面 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的公式。

【例 1】（P159） 设 Kepler 方程

$$F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0.$$

由于F及其偏导数$F_x=-1, F_y=1-\frac{1}{2}\cos y>0$在平面上任一点都连续，且$F(0,0)=0,$

故由方程$F(x,y)=0$确定了一个连续可导隐函数$y=f(x), x\in U(0)$，且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

【例 2】验证方程$F(x,y)=\sin y+e^x-xy-1=0$，在原点附近可确定一个可导的隐函数$y=f(x)$，并求$y'(0), y''(0)$。

F, F_x, F_y都连续，且

$$F_x(x,y)=e^x-y, F_y(x,y)=\cos y-x$$

$$F(0,0)=0, F_y(0,0)=1$$

满足隐函数存在定理条件。因此唯一地确定一个可导的隐函数$y=f(x), x\in U(0)$。

方程$\sin y+e^x-xy-1=0$两边对x求导（注意$y=f(x)$）得

$$\cos y\cdot y'+e^x-y-xy'=0$$

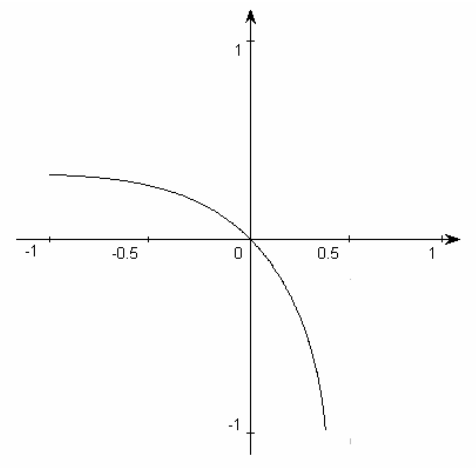
解得

$$y'=-\frac{e^x-y}{\cos y-x}, y'(0)=-1$$

方程两$\cos y\cdot y'+e^x-y-xy'=0$边再对$x$求导

$$-\sin y\cdot y'^2+\cos y\cdot y''+e^x-y'-y'-xy''=0$$

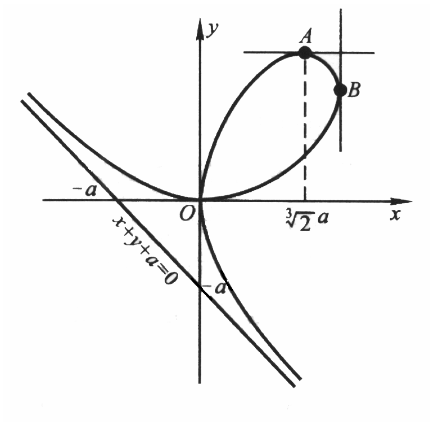
把$x=0, y=0, y'(0)=-1$代入，得$y''(0)=-3$。



【例 3】（P160）讨论笛卡儿（Descartes）叶形线

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0(a > 0)$$

所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的一阶与二阶导数，并求隐函数的极值.



解 显然 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ 及 F_x, F_y 在平面上任一点都连续.

使得 $F_y\left(x, y\right) = 3\left(y^2 - ax\right) = 0$ 的点是 $O(0,0), B(\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a)$，除这两点外，其他点附近都能确定隐函数 $y = f(x)$。

对 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 关于 x 求导（其中 y 是 x 的函数）得

$$x^2 + y^2 y' - ay - axy' = 0$$

于是

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}. \left(y^2 - ax \neq 0\right).$$

上上式再求导得

$$2x-ay'+(2yy'-a)y'+(y^2-ax)y''=0$$

解得

$$y''=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

下面讨论极值。

由 $x^3+y^3-3axy=0$ 和 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}=0$ 解得驻点 $A(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$，又 $y''\big|_A=-\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}a}<0$，所以隐函数 $y=f(x)$ 在点 $x=\sqrt[3]{2}a$ 取得极大值 $\sqrt[3]{4}a$。

【例 4】（P161）讨论方程

$$F(x,y,z)=xyz^3+x^2+y^3-z=0$$

在原点附近所确定的二元隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数及在 $(0,1,1)$ 处的全微分.

解 由于 $F(0,0,0)=0,F_z(0,0,0)=-1\neq 0,F,F_x,F_y,F_z$ 处处连续，在原点 $(0,0,0)$ 附近能唯一确定连续可微得隐函数 $z=f(x,y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz^3+2x}{1-3xyz^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz^3+3y^2}{1-3xyz^2}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,1)}=1,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,1)}=3,dz\big|_{(0,1,1)}=dx+3dy$$

【例 5】（反函数的存在性与其导数）（P161）

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域上有连续的导函数 $f'(x)$，且 $f(x_0)=y_0$；考虑方程

$$F(x,y)=y-f(x)=0.$$

由于 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y=1$，$F_x(x_0,y_0)=-f'(x_0)$，所以只要 $f'(x_0)\neq 0$，就能满足隐函数定理的所有条件，方程 $F(x,y)=0$ 能确定出在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$ 内的连续可微隐函数 $x=g(y)$，并称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的导数是

§2　隐函数组

【隐函数存在定理 3】（隐函数组定理）若函数 $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 满足

（i）F 与 G 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域 $U(P_0,\delta')$ 上连续且具有连续的偏导数；

（ii）$F(P_0)=0$，$G(P_0)=0$（初始条件）；

（iii）$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 不等于零，

则存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0,\delta)\subset U(P_0,\delta')$，在 $U(P_0,\delta)$ 上由方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 唯一地确定了两个连续且具有连续偏导数的二元隐函数（记 $Q_0(x_0,y_0)$）

$$u=f(x,y),\quad v=g(x,y),(x,y)\in U(Q_0),\quad (x,y,u,v)\in U(P_0,\delta)$$

它满足 $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$ 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

【解释】方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在 P_0 附近近似为

$$\begin{cases}F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_u(P_0)(u-u_0)+F_v(P_0)(v-u_0)=0\\G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_u(P_0)(u-u_0)+G_v(P_0)(v-u_0)=0\end{cases}$$

若

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix}F_u(P_0)&F_v(P_0)\\G_u(P_0)&G_v(P_0)\end{vmatrix}\neq 0$$

则 $\forall(x,y)$ 充分靠近 $Q_0(x_0,y_0)$，有唯一解 (u,v)。

方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 两边对 x,y 求导

$$\begin{cases} F_x + F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F_y + F_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ G_y + G_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = -\frac{1}{J}\begin{bmatrix} G_v & -F_v \\ -G_u & F_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}$$

即为上面四个公式。

【例 1】（P164）讨论方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 \\ G(x,y,u,v) = -u + v - xy + 1 = 0 \end{cases}$$

在点 $P_0(2,1,1,2)$ 附近能确定怎样的隐函数组，并求其偏导数。

解　首先 $F(P_0) = G(P_0) = 0$，即 P_0 满足初始条件。再求出 F,G 的所有一阶偏导数

$$F_x = -2x, F_y = -1, F_u = 2u, F_v = 2v,$$

$$G_x = -y, G_y = -x, G_u = -1, G_v = 1.$$

容易验算，在点 P_0 处的所有六个雅可比行列式中只有

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

因此，只有 x,v 难以肯定能否作为以 y,v 为自变量的隐函数。除此之外，在 P_0 的附近任何两个变量都可作为以其余两个变量为自变量的隐函数。

如果我们想求得 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 的偏导数，只需对原方程组分别关于 u,v 求偏导数，得到

$$\begin{cases} 2u - 2xx_u - y_u = 0 \\ -1 - yx_u - xy_u = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2v - 2xx_v - y_v = 0 \\ 1 - xy_v - yx_v = 0 \end{cases}$$

解得

$$x_u = \frac{2xu+1}{2x^2-y}, y_u = -\frac{2x+2yu}{2x^2-y}. \quad x_v = \frac{2xv-1}{2x^2-y}, y_u = -\frac{2x-2yv}{2x^2-y}.$$

【例 2】设 $\begin{cases} F = x + y + z + u + v - 1 = 0 \\ G = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 - 2 = 0 \end{cases}$ 可确定隐函数

$$u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$$

求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

解　由$\begin{cases}1+u_x+v_x=0\\2x+2uu_x+2vv_x=0\end{cases}$解得$u_x=\dfrac{x-v}{v-u},v_x=\dfrac{u-x}{v-u}$

由

$$\begin{cases}u_{xx}+v_{xx}=0\\1+(u_x)^2+uu_{xx}+(v_x)^2+vv_{xx}=0\end{cases}$$

解得

$$u_{xx}=\frac{1+(u_x)^2+(v_x)^2}{v-u},v_{xx}=-\frac{1+(u_x)^2+(v_x)^2}{v-u}$$

【反函数组定理】　设函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D\subset R^2$ 上连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，且

$$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0),\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0,$$

则在点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某一邻域 $U(Q_0)$ 内存在唯一的反函数组 $x=x(u,v),y=y(u,v),$ 使得 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0)$，在 $U(Q_0)$ 上存在连续的一阶偏导数，且

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

证 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=u-u(x,y)=0\\G(x,y,u,v)=v-v(x,y)=0\end{cases}$，$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-u_x & -u_y\\-v_x & -v_y\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

由隐函数存在定理 3 得存在反函数组，且

$$\begin{bmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_x & u_y\\v_x & v_y\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}v_y & -u_y\\-v_x & u_x\end{bmatrix}$$

即$\begin{bmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}u_x & u_y\\v_x & v_y\end{bmatrix}$互为逆矩阵。从而

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

【例 3】（P167）平面上点 P 的直角坐标 (x,y) 与极坐标 (r,θ) 之间的坐标变换公式为

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta.$$

由于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

所以除原点外，在一切点上由上面函数组所确定的反函数组是

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\text{（书上有问题）}$$

【例 4】（P168）　直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (r,φ,θ) 之间的变换公式为

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

由于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi,$$

所以在 $r^2\sin\varphi\neq 0$ 即除去 z 轴上的一切点，由坐标变换可确定出 r,θ,φ 为

$x,y,z(x>0)$ 的函数，即

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\theta=\arctan\frac{y}{x},\varphi=\arccos\frac{z}{r}.$$

§3　几何应用

【一】　平面曲线的切线与法线

设平面曲线由方程：$F(x,y)=0$，$F(x_0,y_0)=0$，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域上确定了隐函数 $y=f(x)$，$F_y(P_0)\neq 0$，则

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}$$

因此

切线方向：$\vec{t} = \pm(F_y, -F_x)_{P_0}$

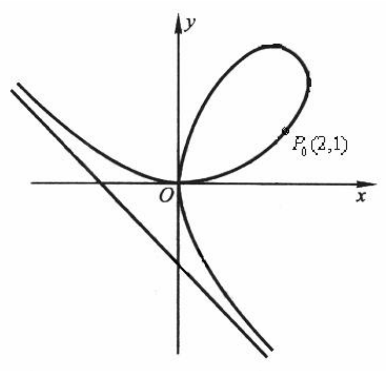
法线方向：$\vec{n} = \pm(F_x, F_y)_{P_0}$

则该曲线在点 P_0 的切线和法线方程分别为

切线：$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$

法线：$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$

【例 1】（P170）求笛卡儿叶形线 $2(x^3 + y^3) - 9xy = 0$ 在点 $P_0(2,1)$ 处的切线与法线。



解 设 $F(x, y) = 2(x^3 + y^3) - 9xy,$

$$F_x = 6x^2 - 9y, F_y = 6y^2 - 9x \quad F_x(2,1) = 15 \neq 0, F_y(2,1) = -12 \neq 0.$$

$$\vec{t} = (-12, -15) = (4,5), \vec{n} = (5, -4)$$

（这里平行与等于不分，因为我们只考虑方向，以后也如此）

切线方程与法线方程分别为

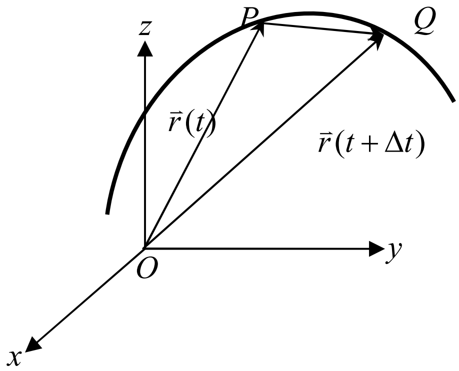
$$5(x-2) - 4(y-1) = 0 \text{ 即 } 5x - 4y - 6 = 0,$$

$$4(x-2) + 5(y-1) = 0 \text{ 即 } 4x + 5y - 13 = 0.$$

【二】 空间曲线的切线与法平面

空间曲线

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \alpha \le t \le \beta$$



切向量（切线方向）：

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t))$$

切线方程：

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面方程

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

设空间曲线 L 由下面方程组给出

$$L\text{:} \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

即两个曲面的交线。$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线 L 上一点。记

$$\vec{n}_1 = (F_x, F_y, F_z)_{P_0}, \vec{n}_2 = (G_x, G_y, G_z)_{P_0}$$

并设 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 线性无关（不平行），不妨设 $\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{P_0} \ne 0$。在 P_0 附近确定隐函数组

$$x = x(z), y = y(z), z \in [\alpha, \beta]$$

因此曲线 $L: x = x(z), y = y(z), z = z, z \in [\alpha, \beta]$ 在点 P_0 的切线方向是

$$\vec{t}=\left(x'(z_0),y'(z_0),1\right)=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},1\right)_{P_0}$$

$$=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0}$$

即

$$\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}$$

【例 2】(P172)　求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线在点 $P_0(3,4,5)$ (3, 4, 5) 处的切线与法平面方程。

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50,G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2.$

$$\vec{n}_1=(F_x,F_y,F_z)_{P_0}=(2x,2y,2z)_{P_0}=(6,8,10)=(3,4,5)$$

$$\vec{n}_2=(G_x,G_y,G_z)_{P_0}=(2x,2y,-2z)_{P_0}=(6,8,-10)=(3,4,-5)$$

$$\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}=(-40,30,0)=(-4,3,0)$$

所以曲线在点 (3, 4, 5) 处的切线方程为：

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{0}$$

法平面方程为

$$-4(x-3)+3(y-4)+0(z-5)=0$$

【三】 曲面的切平面与法线

曲面 $\pi:F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$，F 有连续的偏导数。设曲线

$$L:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\subset\pi\text{，且}\vec{r}(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$$

从而 $F(x(t),y(t),z(t))=0$，求导得

$$F_x(P_0)x'(t_0)+F_y(P_0)y'(t_0)+F_z(P_0)z'(t_0)=0$$

说明向量$\vec{n}=\left(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\right)$与切向量$\vec{t}=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$，即$\vec{n}$与在曲面$\pi$上过点$P_0$的切线都正交。因此这些切线都在过点$P_0$与$\vec{n}$垂直的平面上。这个平面称为曲面$\pi$在点$P_0$的**切平面**，$\vec{n}$称为曲面$\pi$在点$P_0$的法线方向。

【例 3】(P174)　求椭圆面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点$P_0(1,1,1)$处的切平面方程与法线方程。

解　设$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6.$

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)_{P_0}=\left(2x,4y,6z\right)_{P_0}=(1,2,3)$$

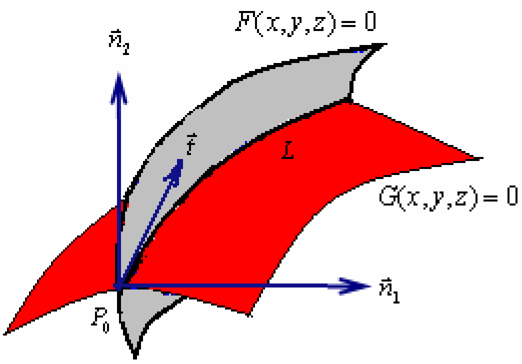
切平面方程

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

和法线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

【小结】



曲面$F(x,y,z)=0$的法向量为$\vec{n}_1=(F_x,F_y,F_z)_{P_0}=\operatorname{grad}F(P_0)$，

曲面$G(x,y,z)=0$的法向量为$\vec{n}_2=(G_x,G_y,G_z)_{P_0}=\operatorname{grad}G(P_0)$，

曲线$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的在点$P_0$的切向量为$\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$。即曲线$L$在点$P_0$的法平面由$\vec{n}_1,\vec{n}_2$张成。这一点下一节要用到。

§4 条件极值

【引例 1】 要设计一个容量为V的长方形开口水箱，试问水箱的长、宽、高各等于多少时，其表面积最小？设水箱的长、宽、高分别为x, y, z，则表面积为

$$S(x,y,z)=2(xz+yz)+xy.$$

该问题写为

$$\min S(x,y,z)=2(xz+yz)+xy$$

$$s.t.\quad xyz=V\,(x,y,z>0)$$

【引例 2】 求原点到直线$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$的距离的平方。

该问题写为

$$\min f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$$

一般地，条件极值问题

$$\min f(x,y,z)$$

$$s.t.\quad \begin{cases} G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$$

下面寻找必要条件

设f, G, H有连续的偏导数，点$P_0(x_0,y_0,z_0)$为所求。再设$\vec{n}_1=(G_x,G_y,G_z)_{P_0}$，$\vec{n}_2=(H_x,H_y,H_z)_{P_0}$线性无关。不妨$\left.\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}\neq 0$，这样就确定了隐函数

$$y=y(x), z=z(x)$$

代入f，记

$$\Phi(x)=f(x,y(x),z(x))$$

问题转化为求$\Phi(x)$无条件的极值问题，当然x_0是它的极值点。因此$\Phi'(x_0)=0$，即

$$\Phi'(x_0)=f_x(P_0)+f_y(P_0)y'(x_0)+f_z(P_0)z'(x_0)$$

上式说明 $\operatorname{grad} f(P_0)=\left(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)\right)$ 与 $\vec{t}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(1,y'(x_0),z'(x_0)\right)$ 垂直。因此

$\operatorname{grad} f(P_0)$ 必是 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ 的一个线性组合，即存在 λ_0,μ_0 使得

$$\operatorname{grad} f(P_0)=-\lambda_0\vec{n}_1-\mu_0\vec{n}_2$$

写成分量形式就是

$$\begin{cases} f_x(P_0)+\lambda_0G_x(P_0)+\mu_0H_x(P_0)=0\\ f_y(P_0)+\lambda_0G_y(P_0)+\mu_0H_y(P_0)=0\\ f_z(P_0)+\lambda_0G_z(P_0)+\mu_0H_z(P_0)=0\end{cases}$$

因此得下面

【Lagrange 乘数法】

作 Lag 函数：

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)+\mu H(x,y,z)$$

令

$$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda G_x+\mu H_x=0\\ L_y=f_y+\lambda G_y+\mu H_y=0\\ L_z=f_z+\lambda G_z+\mu H_z=0\\ L_\lambda=G(x,y,z)=0\\ L_\mu=H(x,y,z)=0\end{cases}$$

如 (x_0,y_0,z_0) 是极值点，则它必是上面方程组的解。

【例 1】(求解引例 1)

解 作 Lag 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V)$$

令

$$\begin{cases} L_x=2z+y+\lambda yz=0 & ①\\ L_y=2z+x+\lambda xz=0 & ②\\ L_z=2(x+y)+\lambda xy=0 & ③\\ L_\lambda=xyz-V=0 & ④\end{cases}$$

①−② $(y-x)(1+\lambda z)=0$, 得

$$y=x$$

（$1+\lambda z=0$ 舍去，否则的话，由①得 $z=0$）代入③，$x=-\dfrac{4}{\lambda}$，代入②

$$z=\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y=-\frac{2}{\lambda}$$

代入④

$$x=y=2z=\sqrt[3]{2V}\left(\lambda=-\frac{4}{\sqrt[3]{2V}}\right)$$

依题意，所求水箱的表面积在所给条件下确实存在最小值. 上面长宽高即为所求。

【例 2】(求解引例 2)

解 作 Lag 函数

$$L=\left(x^2+y^2+z^2\right)+\lambda\left(x+y+z-1\right)+\mu\left(x+2y+3z-6\right)$$

令

$$\begin{cases}L_x=2x+\lambda+\mu=0 & ① \\ L_y=2y+\lambda+2\mu=0 & ② \\ L_z=2z+\lambda+3\mu=0 & ③ \\ L_\lambda=x+y+z-1=0 & ④ \\ L_\mu=x+2y+3z-6=0 & ⑤\end{cases}$$

这是线性方程组，容易解得

$$x_0=-\frac{5}{3},y_0=\frac{1}{3},z_0=\frac{7}{3},\lambda_0=\frac{22}{3},\mu_0=-4$$

$$f_{\min}=x_0^2+y_0^2+z_0^2=\frac{25}{3}$$

也可以这样解

① + ② + ③：　$$2(x+y+z)+3\lambda+6\mu=0\Rightarrow 3\lambda+6\mu=-2$$

① + 2×② + 3×③:　$$2(x+2y+3z)+6\lambda+14\mu=0\Rightarrow 6\lambda+14\mu=-12$$

$$\lambda=\frac{22}{3},\mu=-4$$

①×x + ②×y + ③×z：

$$x^2+y^2+z^2=-\frac{\lambda}{2}-3\mu=\frac{25}{3}$$

【例 3】(P183-11) A 是 n 阶实对称矩阵，$x\in R^n$ 求解

$$\min f(x)=x^TAx$$
$$s.t.\quad x^Tx=1$$

解 作 Lag 函数：$L = x^T Ax + \lambda(x^T x - 1)$

$$L_{x_i} = 0(i = 1, 2, \cdots, n) \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

上式两边左乘 x^T 并由 $x^T x = 1$ 得

$$\lambda = x^T Ax$$

因此 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $x^T x = 1$ 上的最大值与最小值就是 A 的最大特征值与最小特征值。