《曲线积分与曲面积分》

1、设在 xoy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处，它的线密度为 $\mu(x,y)$，则有

① 曲线弧 L 的质量 $M=\int_L \mu(x,y)ds$；

② 曲线弧 L 的质心坐标 $\overline{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}$， $\overline{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}$；

③ 曲线弧 L 对坐标轴的转动惯量 $I_x=\int_L y^2\mu(x,y)ds$， $I_y=\int_L x^2\mu(x,y)ds$；

④ 曲线弧 L 的长度 $l=\int_L ds$。

以上正确的是

（A）①②③； （B）①②④； （C）①③④； （D）①②③④。

D

2、设曲线 L 为上半圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$，则对弧长的曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$

（A）2π； （B）4π； （C）8π； （D）16π。

解：$\int_L (x^2+y^2)ds=\int_L 4ds=\mathbf{4}\int_L ds=\mathbf{4}\cdot\mathbf{2}\pi=8\pi$

3、右半圆周 $L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2})$ 的形心为

（A）$(\dfrac{a}{\pi},0)$； （B）$(\dfrac{2a}{\pi},0)$； （C）$(\dfrac{a^2}{\pi},0)$； （D）$(\dfrac{2a^2}{\pi},0)$。

解：$\overline{x}=\dfrac{\int_L xds}{\int_L ds}=\dfrac{1}{\pi a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt=\dfrac{1}{\pi a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos tdt=\dfrac{2a}{\pi}$

4、设 Γ 是从点 $(1,-1,2)$ 到点 $(2,1,3)$ 的直线段，则 $\int_\Gamma (x+y+z)ds=$

（A）$\sqrt{6}$； （B）$2\sqrt{6}$； （C）$3\sqrt{6}$； （D）$4\sqrt{6}$。

解：Γ 的方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=t+1\\ y=2t-1\\ z=t+2\end{cases}$

$$\int_\Gamma (x+y+z)ds=\int_0^1(t+1+2t-1+t+2)\sqrt{1^2+2^2+1^2}dt=\sqrt{6}\int_0^1(4t+2)dt=4\sqrt{6}$$

1、设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，其周长为 a，则曲线积分 $\oint_L(4x^2+3y^2+2xy)ds=$

（A）$4a$；　　（B）$3a$；　　（C）$9a$；　　（D）$12a$。

解：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow 4x^2+3y^2=12$

$$\oint_L(4x^2+3y^2+2xy)ds=\oint_L 12ds+\oint_L 2xyds=12a+0=12a$$

2、设有闭曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2z\\ z=1\end{cases}$，则 $\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds=$

（A）2π；　　（B）4π；　　（C）8π；　　（D）16π。

解：由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2z\\ z=1\end{cases}$ 知：$x^2+y^2+z^2=2$

$$\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds=2\oint_\Gamma ds=2\cdot 2\pi 1=4\pi$$

3、设 L_1 是从 $o(0,0)$ 到 $A(1,0)$ 的直线段，L_2 是从 $A(1,0)$ 到 $B(1,1)$ 的直线段，则

$$\int_{L_1}(x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y+\int_{L_2}(x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y=$$

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4。

解：$\int_{L_1}(x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y+\int_{L_2}(x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 xdx+\int_0^1(1-y)dy=1$

4、设 L 是上半圆周 $\begin{cases}x=a(1+\cos t)\\ y=a\sin t\end{cases}(a>0,y\ge 0)$ 从 $o(0,0)$ 到 $A(2a,0)$ 的有向曲线，

则 $\int_L xydx=$

（A）$-\frac{\pi}{4}a^3$；　　（B）$\frac{\pi}{4}a^3$；　　（C）$-\frac{\pi}{2}a^3$；　　（D）$\frac{\pi}{2}a^3$。

解：$\int_L xydx=\int_\pi^0 a(1+\cos t)a\sin t(-a\sin t)dt=a^3\int_0^\pi(1+\cos t)\sin^2 tdt$

$$=a^3\int_0^\pi\sin^2 tdt+a^3\int_0^\pi\cos t\sin^2 tdt=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt+0=2a^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}a^3$$

1、一个质点在力 $\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}$ 的作用下，沿上半椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 从点 $A(-a,0)$ 移动到点 $B(a,0)$，则力 $\vec{F}$ 对该质点所做的功 $W=$

（A）$\frac{4}{3}ab^2$；　（B）$-\frac{4}{3}ab^2$；　（C）$\frac{2}{3}ab^2$；　（D）$-\frac{2}{3}ab^2$。

A

2、设 L 是先沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(x,0)$，然后再沿直线到点 (x,y) 的有向折线，则曲线积分 $\int_L(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy=$

（A）$x^2+y^2\sin x+x^2\cos y$；　（B）$y^2\cos x+x^2\sin y$；

（C）$y^2\sin x+x^2\cos y$；　（D）$x^2+y^2\cos x+x^2\sin y$。

C

3、设 D 是由曲线 $L_1:x^2+y^2=1$ 和曲线 $L_2:x^2+y^2=2$ 所围成的圆环状闭区域，则闭区域 D 的边界正方向是

（A）曲线 L_1 是逆时针方向，曲线 L_2 是顺时针方向；

（B）曲线 L_1 是逆时针方向，曲线 L_2 是逆时针方向；

（C）曲线 L_1 是顺时针方向，曲线 L_2 是逆时针方向；

（D）曲线 L_1 是顺时针方向，曲线 L_2 是顺时针方向。

C

4、设 L 为有向闭曲线 $x^2+y^2=1$，方向为逆时针方向，利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L(xe^{2y}-yx^2)\,\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}+xy^2)\,\mathrm{d}y=$

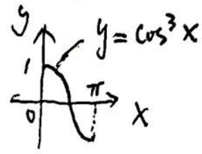
（A）$\frac{\pi}{2}$；　（B）π；　（C）$\frac{\pi}{4}$；　（D）2π。

A

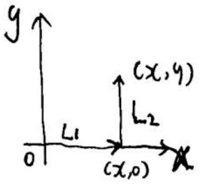
1. $W=\int_L y^2dx+x^2dy=\int_\pi^0 (b^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\cdot b\cos t)\,dt$

$=ab^2\int_0^\pi \sin^3 t\,dt-a^2b\int_0^\pi \cos^3 t\,dt$

$=2ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt-0=2ab^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}ab^2$



2.



$\int_L (2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$

$=\int_{L_1}+\int_{L_2}$

$=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y (2y\sin x-x^2\sin y)\,dy$

$=x^2+(y^2\sin x+x^2\cos y)\Big|_0^y$

$=y^2\sin x+x^2\cos y$

3. 略

4. $\oint_L (xe^{2y}-yx^2)dx+(x^2e^{2y}+xy^2)dy$

$=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint_D (y^2+x^2)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}$ ✓

注：错误做法 $\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma=\iint_D 1\cdot d\sigma=\pi$ ×

1、设 L 是闭曲线 $|x|+|y|=1$，取顺时针方向，则 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}=$

（A）2；（B）-2；（C）4；（D）-4。

D

2、设 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $A(2,0)$ 的有向曲线，则 $\int_L (e^x\sin y-2x-3y)dx+(e^x\cos y-x)dy=$

（A）$-\pi+4$；（B）$-\pi-4$；（C）$\pi-4$；（D）$\pi+4$。

B

3、设 L 是以 $O(0,0)$ 为起点沿摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}, 0\le t\le 2\pi$ 一拱的有向曲线，则曲线积分 $\int_L e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy=$

（A）$1-e^{2\pi a}$；（B）$e^{2\pi a}-1$；（C）$e^{2\pi a}$；（D）$-e^{2\pi a}$。

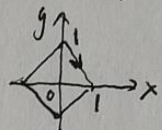
B

4、已知$(x^4+4xy^p)\,\mathrm{d}x+(kx^q y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$是某个二元函数的全微分，则$p,q,k$分别等于

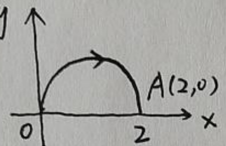
（A）$3,2,6$；　（B）$2,3,6$；　（C）$6,3,2,$；　（D）$3,6,2$。

A

1. $\oint_L \frac{xdy-ydx}{|x|+|y|} = \oint_L xdy-ydx = -\iint_D 2d\sigma = -2S_D = -4$



2.



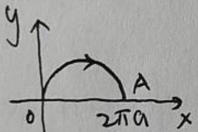
$\overline{AO}: y=0$, x从2到0

$\int_L (e^x\sin y-2x-3y)dx+(e^x\cos y-x)dy$

$= \int_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}} = -\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma - \int_2^0 -2x\,dx$

$= -\iint_D(-1+3)d\sigma + x^2\Big|_2^0 = -2\cdot\frac{\pi}{2}-4 = -\pi-4$

3.



$\overline{OA}: y=0$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$，∴ 积分与路径无关

原式 $=\int_{\overline{OA}} e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy$

$= \int_0^{2\pi a} e^x dx = e^x\Big|_0^{2\pi a} = e^{2\pi a}-1$.

4. $P(x,y) = x^4+4xy^p$，$Q(x,y) = kx^q y^2-5y^4$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$：　$kqx^{q-1}y^2 = 4pxy^{p-1}$

∴ $p=3$，$q=2$，$k=6$.

1、已知曲线积分$\int_L xy^\lambda dx + x^\lambda y dy$与路径无关，则$\int_{(0,1)}^{(1,2)} xy^\lambda dx + x^\lambda y dy =$

（A）4；　(B) 3；　（C）2；　（D）1。

C

2、已知 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$, L 的方向为逆时针方向，

则 $\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=$

（A）$-\pi$；（B）π；（C）-2π；（D）2π。

B

3、设 Σ 为平面 $z=1-x-y$ 在第一卦限部分，则 $\iint_\Sigma (x+y+z)dS=$

（A）$\sqrt{3}$；（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（C）$2\sqrt{3}$；（D）$\frac{\sqrt{3}}{4}$。

B

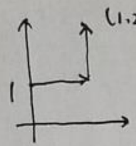
4、设曲面 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，曲面 Σ_1 为 Σ 在第一卦限部分，则以下错误的是

（A）$\iint_\Sigma x^2dS=4\iint_{\Sigma_1} x^2dS$；（B）$\iint_\Sigma xdS=\frac{1}{3}\iint_\Sigma (x+y+z)dS$；

（C）$\iint_\Sigma zdS=4\iint_{\Sigma_1} xdS$；（D）$\iint_{\Sigma_1} x^2dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2+z^2)dS$。

B

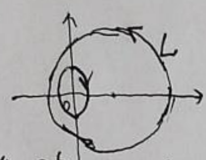
1. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \lambda x^{\lambda-1} y = \frac{\partial P}{\partial y} = \lambda x y^{\lambda-1}$，$\therefore \lambda = 2$.



$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} xy^2 dx + x^2 y dy = \int_0^1 x dx + \int_1^2 y dy = 2.$$

或 $$\int_{(0,1)}^{(1,2)} xy^2 dx + x^2 y dy = \int_{(0,1)}^{(1,2)} d\frac{x^2y^2}{2} = \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = 2$$

2. 作椭圆 l: $\begin{cases} x = \frac{r}{2}\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ 取顺时针方向

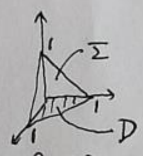


则 $$\oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2+y^2} = \oint_{L+l} - \oint_l = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma + \oint_{l^-}$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\frac{r}{2}\cos t \cdot r\cos t\, dt - r\sin t \cdot (-\frac{r}{2}\sin t)dt}{r^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi.$$

3. $$\iint_\Sigma (x+y+z) dS = \iint_\Sigma dS = \Sigma\text{的面积} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

或 $$= \iint_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\, d\sigma = \sqrt{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\to D\text{的面积}}$$



4. (A) $f(x,y,z) = x^2$ 关于 x、y 均为偶函数，而 Σ 既是"前后"对称又是"左右"对称，所以 $\iint_\Sigma x^2 dS = 2\iint_{\Sigma_前} x^2 dS = 4\iint_{\Sigma_1} x^2 dS$

(C) $f(x,y,z) = z$ 关于 x、y 均为偶函数.

$\therefore$ 有 $\iint_\Sigma z dS = 4\iint_{\Sigma_1} z dS$

而 Σ_1: $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ 具有轮换对称性.

$\therefore$ $\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS = \iint_{\Sigma_1} y dS$

(D) 同上有 $\iint_{\Sigma_1} x^2 dS = \iint_{\Sigma_1} y^2 dS = \iint_{\Sigma_1} z^2 dS$，$\therefore$ (D) 正确.

从而 $\iint_{\Sigma_1} x^2 dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2+z^2) dS = \frac{a^2}{3}\iint_{\Sigma_1} dS = \frac{a^2}{3}\cdot\frac{1}{8}4\pi a^2 = \frac{\pi}{6}a^4$

若直接计算：$\iint_{\Sigma_1} x^2 dS = \iint_D x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy = \iint_D \frac{a x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy$

$= a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot \rho d\rho = \cdots\cdots$ 令 $\rho = a\sin t$

(B) $\iint_\Sigma x dS = 0$，$\frac{1}{3}\iint_\Sigma (x+y+z) dS = \frac{1}{3}\iint_\Sigma z dS > 0$ $\therefore$ (B) 错误!

1、设曲面 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则 $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS =$

（A）πa^2；　（B）$2\pi a^2$；　（C）πa^3；　（D）$2\pi a^3$。

解：$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=0+0+\iint\limits_{\Sigma}zdS==\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=a\cdot\pi a^2=\pi a^3$$

2、面密度为μ的球面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$绕z轴的转动惯量$I_z=$

（A）$\frac{8}{3}\mu\pi R^4$；（B）$\frac{4}{3}\mu\pi R^4$；（C）$\frac{2}{3}\mu\pi R^4$；（D）$\frac{1}{3}\mu\pi R^4$。

解： $I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mu dS=\frac{2}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mu dS$

$$=\frac{2}{3}\mu R^2\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{2}{3}\mu R^2\cdot 4\pi R^2=\frac{8}{3}\mu\pi R^4$$

3、设有向曲面Σ为xoy面上的圆$x^2+y^2\le a^2$，方向取下侧，

则$\iint\limits_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$

（A）$\frac{\pi a^4}{2}$；（B）πa^4；（C）$-\frac{\pi a^4}{2}$；（D）$-\pi a^4$。

解：Σ的方程：$z=0,(x^2+y^2\le a^2)$，所以，$dydz=dzdx=0$

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}-(x^2+y^2+0^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3d\rho=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{2}$$

1、设有向曲面Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=1,\ z=2$之间部分，方向为上侧，

则$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$

（A）$2\pi(e-e^2)$；（B）$2\pi(e^2-e)$；（C）$2\pi(e^2-1)$；（D）$2\pi(1-e^2)$。

解：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^{\rho}}{\rho}\cdot\rho d\rho=2\pi(e^2-e)$

2、设有向曲面$\Sigma=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0\}$，方向取上侧，则下述曲面积分不为零的是

（A）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz$；（B）$\iint\limits_{\Sigma}zdzdx$；（C）$\iint\limits_{\Sigma}y^3dxdy$；（D）$\iint\limits_{\Sigma}xdydz$。

解：（A）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz=\iint\limits_{\Sigma前}x^2dydz+\iint\limits_{\Sigma后}x^2dydz$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(\sqrt{a^2-y^2-z^2})^2dydz-\iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{a^2-y^2-z^2})^2dydz=0$$

（B）$\iint\limits_{\Sigma}zdzdx=\iint\limits_{\Sigma右}zdzdx+\iint\limits_{\Sigma左}zdzdx=\iint\limits_{D_{zx}}zdzdx-\iint\limits_{D_{zx}}zdzdx=0$

（C）$\iint\limits_{\Sigma}y^3dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}y^3dxdy=0$

（D）$\iint\limits_{\Sigma}xdydz=\iint\limits_{\Sigma前}xdydz+\iint\limits_{\Sigma后}xdydz$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz-\iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{a^2-y^2-z^2})dydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}dydz\ne 0$$

1、设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$，方向取外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$

（A）4π；　（B）2π；　（C）$\frac{4\pi}{5}$；　（D）$\frac{12\pi}{5}$。

解：由高斯公式 $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{12\pi}{5}$$

注：错误做法　$3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv=3\cdot\frac{4}{3}\pi 1^3=4\pi$

2、设有向曲面$\sum$为$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，方向取上侧，则

曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=$

（A）$\frac{5\pi}{3}$；　（B）$\frac{\pi}{3}$；　（C）$-\frac{5\pi}{3}$；　（D）$-\frac{\pi}{3}$。

解：作辅助面$\sum_1 : z=1\,(x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\iint_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=-\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)dxdydz+\iint_{D_{xy}}1^2\,dxdy$$

$$=-0-0-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 2zdz+\pi$$

$$=-2\pi\int_0^1\rho\left(1-\rho^4\right)d\rho+\pi=\frac{\pi}{3}$$

《无穷级数》

1、**（多选题）** 下列级数 **收敛** 的有

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^n})$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$；

（D）$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\cdots$；　（E）$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{n+9}+\cdots$。

解：（A）因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^n})$发散。

（B）公比$\left|\frac{-2}{3}\right|<1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$收敛；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$收敛；

（D）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}=1\neq 0$，所以，级数发散；

（E）原级数是调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$去掉了前九项，所以发散。

2、**（多选题）** 关于无穷级数有下列命题，**正确** 的有

（A）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛；

（C）若数列$\{u_n\}$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$一定收敛；

（D）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$有界，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛；

（E）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$一定收敛。

解：（A）正确（书上定理）。

（B）错误，反例：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

（C）正确，因为数列$\{u_n\}$收敛，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$的部分和$S_n=u_1-u_2+u_2-u_3+\cdots+u_n-u_{n+1}=u_1-u_{n+1}$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(u_1-u_{n+1})=u_1-a$存在，因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$收敛。

（D）错误，反例：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$的部分和数列$\{S_n\}$有界，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散。

（E）正确，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$也收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛。

1、**（多选题）** 下列级数 **收敛** 的有

（A）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\frac{2}{n}$。

解：（A）$\because\ \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\therefore\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散。

（B）$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1$，所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$收敛。

（C）$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\sin^n\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{2}{n}=2>1$，所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\sin^n\frac{2}{n}$发散。

2、**（多选题）** 下列级数 **收敛** 的有

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(1-\cos\frac{\pi}{n})$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$。

解：（A）$\because\ \sqrt{n}(1-\cos\frac{\pi}{n})\sim\sqrt{n}\cdot\frac{\pi^2}{2n^2}=\frac{\pi^2}{2n^{\frac{3}{2}}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以原级数收敛。

（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{2}$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以原级数收敛。

（C）$\because\ \frac{n\sin^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$，

由$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1$知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$收敛。

1、设常数$\alpha\ne 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}})$

(A) 绝对收敛； (B) 条件收敛； (C) 发散； (D) 敛散性与α取值有关。

解：$\because\ \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$绝对收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}})$发散。

2、设$u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛。

解：因为$\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$单调减少且趋向于 0，由莱布尼兹审敛法知

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\text{收敛。}$$

$\because\ u_n^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散。

3、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，则$\alpha$的取值范围为（　　）；

A、$0<\alpha\le 1/2$；　B、$1/2<\alpha\le 1$；　C、$1<\alpha\le 3/2$；　D、$3/2<\alpha<2$。

解 $\because$ $\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}$ $(\alpha>1/2)$，由$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛可知

$$\alpha-1/2>1,\quad \alpha>3/2,$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2-\alpha}}$条件收敛可知$0<2-\alpha\le 1$，即$1\le\alpha<2$，故选择$D$；

1、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3 2^n}x^n$的收敛域为

(A) $(-2,2)$；　(B) $(-2,2]$；　(C) $[-2,2)$；　(D) $[-2,2]$。

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3 2^{n+1}}\cdot\frac{n^3 2^n}{n^2+1}=\frac{1}{2}$，所以，收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=2$

当$x=2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$发散，当$x=-2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3}$收敛，

所以，收敛域为$[-2,2)$。

2、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$的和函数$S(x)$为

(A) $-\ln(2-x),-2\le x<2$；　(B) $-\ln(1-\frac{x}{2}),-2\le x<2$；

(C) $\ln(2-x),-2\le x<2$；　(D) $\ln(1-\frac{x}{2}),-2\le x<2$。

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=2$，收敛域为$[-2,2)$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},(-2<x<2)$$

$$\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x)+\ln 2$$

$$\therefore\ S(x)=-\ln(2-x)+\ln 2=-\ln(1-\frac{x}{2}),-2\le x<2$$

1、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开为 x 的幂级数是

(A) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})x^n \quad (-2<x<2)$；

(B) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})x^n \quad (-1<x<1)$；

(C) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n}})x^n \quad (-2<x<2)$；

(D) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n}})x^n \quad (-1<x<1)$。

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-x}$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1), \qquad \frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \quad (|x|<2)$$

所以，$f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})x^n \quad (-1<x<1)$。

2、将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数是

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1\le x\le 1$；　(B) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1<x<1$；

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1\le x\le 1$；　(D) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1<x<1$。

解： $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ，$-1<x<1$

于是 $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \quad ,\ -1\le x\le 1。$$

（因为 $x=\pm1$ 时，级数收敛且函数有定义）

1、 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $\left(-\pi,\pi\right]$ 上有表达式

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases},$$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅位叶级数的和函数，则 $S(3\pi)=$

（A）0；　　（B） $\frac{\pi}{2}$；　　（C） π；　　（D） 2π 。

解： $S(3\pi)=S(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$

2、设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则其中系数 $b_3=$

（A）0；　　（B） $\frac{\pi}{3}$；　　（C） π；　　（D） $\frac{2\pi}{3}$ 。

解： $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3xdx=2\int_0^{\pi}x\sin 3xdx$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}xd\cos 3x=-\frac{2}{3}(x\cos 3x\big|_0^{\pi}-\frac{1}{3}\sin 3x\big|_0^{\pi})=\frac{2\pi}{3}$$