第十六章　多元函数的极限与连续

§1　平面点集与多元函数

在前面各章中，我们所讨论的函数都只限于一个自变量的函数，简称一元函数. 但是在更多的问题中所遇到的是多个自变量的函数.

例如，矩形的面积 $S = xy$，描述了面积 S 和长 x 、宽 y 这两个量之间的函数关系. 又如，烧热的铁块中每一点的温度 T 与该点的位置之间有着确定的函数关系，即当铁块中点的位置用坐标 (x, y, z) 表示时，温度 T 由 x, y, z 这三个变量所确定. 如果进一步考虑上述铁块的冷却过程，那末温度 T 还与时间 t 有关，即 T 的值由 x, y, z, t 这四个变量所确定.

这种两个、三个或四个自变量的函数，分别称为二元、三元或四元函数，一般统称为多元函数. 我们重点讨论二元函数。

建立数轴后，我们把实数与数轴上的点集一一对应起来，建立平面（直角）从坐标系后，我们把实数对 (x, y) 与平面上的点集一一对应起来。因此可以说，一元函数是定义在实数轴上的函数；二元函数是定义在平面点集上的函数. 在讨论二元函数之前，有必要先了解有关平面点集的一些基本概念.

一　平面点集

实数全体用 $\mathbf{R}$ 表示，平面上的点的全体用 $\mathbf{R}^2$ 表示

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ (x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty \right\}.$$

更一般地（n 维向量全体）

$$\mathbf{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid -\infty < x_i < +\infty \right\}$$

1. 线性运算

设两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义**加法**运算和**数乘**运算如下

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$kx=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$$

再规定

$$-y=(-y_1,-y_2,\cdots,-y_n)$$

定义

$$x-y=x+(-y)=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)$$

2. 距离与内积

x 和**长度**（或范数）

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

x 与 y 的**距离**

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

x 与 y 的**内积**

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$$

三角不等式：

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

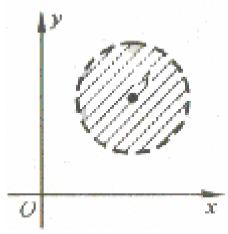
$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

3. 邻域

设点 $A(x_0,y_0)$，定义

$$U(A;\delta)=\left\{(x,y)\,|\,\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\right\}$$

$$U^{\circ}(A;\delta)=\left\{(x,y)\,|\,0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\right\}$$



4. 点与点集的关系

设$S \subset R^2, A \in R^2$，

（1）内点、外点、边界点

▲内点：若存在$U(A) \subset S$，则称A是S的**内点**。S的内点的全体叫做S的**内部**，记作$\operatorname{int} S$。

显然，$\operatorname{int} S \subset S$

▲外点：若存在$U(A) \bigcap S = \Phi$，则称A是S的**外点**。

显然，外点$A \notin S$

▲边界点：$\forall \delta > 0$，都有$U(A;\delta) \bigcap S \neq \Phi$且$U(A;\delta) \bigcap S^{\mathrm{c}} \neq \Phi$，则称$A$是$S$的**边界点**（也可简称界点）。$S$的边界点的全体叫做$S$的**边界**，记作$\partial S$。

显然，边界点A可能$\in S$，也可能$\notin S$

（2）聚点、孤立点、外点

▲聚点：若在点A的任何空心邻域$U^{\circ}(A)$内都含有S中的点，即

$$\forall \delta > 0，U^{\circ}(A;\delta) \bigcap S \neq \Phi$$

则称A是S的**聚点**。S的全体聚点所构成的集合称为S的**导集**，记作S'或S^{d}。

聚点本身可能属于S，也可能不属于S.

▲孤立点：若点$A \in S$，但A不是S的聚点，即$A \in S$，且存在正数δ，使得$U^{\circ}\left(A;\delta\right) \bigcap S = \Phi$，则称点$A$是$S$的**孤立点**.

显然，孤立点一定是界点；内点和非孤立的界点一定是聚点；既不是聚点，又不是孤立点，则必为外点.

【例 1】　设平面点集

$$D = \left\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 < 4\right\}$$

满足$1 < x^2 + y^2 < 4$的一切点都是D的内点；满足$x^2 + y^2 = 1$的一切点是D的界点，它们都属于D；满足$x^2 + y^2 = 4$的一切点也是D的界点，但它们都不属于D；点集D连同它外圆边界上的一切点都是D的聚点.

5. 开集与闭集

▲开集：若点集S的每一点都是S的内点（即$\operatorname{int} S = S$），则称S为**开集**.

▲闭集：若点集S的所有聚点都属于S，则称S为**闭集**．规定：若点集 S 没有聚点，也称S为闭集.

例如：$C=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\right\}$是开集

$S=\left\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\right\}$是闭集

$D=\left\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2<4\right\}$既非开集，又非闭集

R^2既是开集又是闭集

约定：空集Φ既是开集又是闭集

定理 1 (对偶性)　S闭$\Leftrightarrow$ S^c开（P100 习题 9）

证（$\Rightarrow$）设S闭，$\forall x\in S^c \Rightarrow x\notin S \Rightarrow x$不是$S$的聚点（因为$S$闭）$\Rightarrow \exists U(x)\bigcap S=\Phi \Rightarrow U(x)\subset S^c \Rightarrow S^c$开

（$\Leftarrow$）如S无聚点，按规定S闭。设x是S的任一个聚点。下面由S^c开，来证明$x\in S$。若$x\notin S \Rightarrow x\in S^c \Rightarrow \exists U(x)\subset S^c$（因为$S^c$开）$\Rightarrow U(x)\bigcap S=\Phi$，这与$x$是$S$的聚点矛盾。

定理 2　任意多个开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集；任意多个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集。

证 先证第一个结论。

设$S_\alpha(\alpha\in\Lambda)$都是开集，$S=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha$，要证$S$也是开集。

$\forall x\in S \Rightarrow \exists \alpha_0\in\Lambda, x\in S_{\alpha_0}$（由$S_{\alpha_0}$开）$\Rightarrow \exists U(x)\subset S_{\alpha_0} \Rightarrow \exists U(x)\subset S \Rightarrow S$开。

设$S_i(i=1,2,\cdots,m)$都是开集，$S=\bigcap\limits_{i=1}^{m}S_i$，要证$S$也是开集。

若$S=\Phi$，则按规定S是开集。$\forall x\in S \Rightarrow x\in S_i(i=1,2,\cdots,m)$（由$S_i$开）$\Rightarrow \exists U(x,\delta_i)\subset S_i$，取$\delta=\min(\delta_i)$，则$\exists U(x,\delta)\subset S$，$S$开。

由 de Morgan 律即得第二个结论成立。

注 de Morgan 律

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha^c,\quad \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha^c$$

注 无限个开集的交不一定是开集。例如

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n})=(0,1]$$

【例】　D 是闭集 $\Leftrightarrow \partial D\subset D$

证 设 D 是闭集，$\forall x\in\partial D$，若 x 是 D 的孤立点，当然 $x\in D$。否则，x 是 D 的聚点，由 D 是闭集，$x\in D$。即以 $\partial D\subset D$。

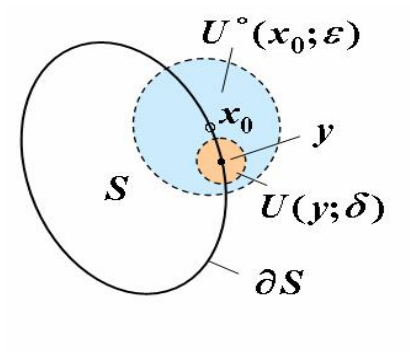
反之，设 $\partial D\subset D$，再设 x 是 D 的聚点，则 x 必是 D 的内点或边界点。若 x 是 D 的内点，则 $x\in D$，若 x 是 D 的边界点，由 $\partial D\subset D$，得 $x\in D$。所以 D 是闭集。

【例】　D 是闭集 $\Leftrightarrow D=D\bigcup\partial D$

证 （$\Rightarrow$）由上例得。

（$\Leftarrow$）设 $D=D\bigcup\partial D$，下面证 D^c 是开集。$\forall x\in D^c$，则 $x\notin D$ 且 $x\notin\partial D$，因此 x 为 D 的外点，故存在 $U(x)\bigcap D=\Phi$，从而 $U(x)\subset D^c$。这就证明了 D^c 是开集，由定理 1，D 为闭集。

【例】（P95）∂S 为闭集。



证 设 x_0 为 ∂S 的任一聚点，要证 $x_0\in\partial S$。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists y\in U^\circ(x_0,\varepsilon)\bigcap\partial S$，$\forall U(y,\delta)\subset U(x_0,\varepsilon)$ 既有 S 的点，又有非 S 的点。由此得 x_0 是 S 的界点。

【例】 $E\subset R^n$ 的导集 E' 与 E 的闭包 $\overline{E}=E\bigcup E'$ 都是闭集。

证 （1）证 E' 是闭集，即要证 $\left(E'\right)'\subset E'$。

$\forall P\in\left(E'\right)'$，于是$\forall\delta>0$，$U(P,\delta)$含有异于$P$的点$P_1\in E'$。即$P_1$是$E$的聚点。令

$$\delta_1=\min\left\{\delta-\rho(P,P_1),\rho(P,P_1)\right\}$$

则$U(P_1,\delta_1)\subset U(P,\delta)$，而$P_1$是$E$的聚点，故$U(P_1,\delta_1)$含有异于$P_2\in E$，故$P_2\neq P_1,P_2\neq P$且$P_2\in U(P,\delta)$，所以$P$是$E$的聚点，即$P\in E'$。于是$\left(E'\right)'\subset E'$。

（2）证$\overline{E}=E\bigcup E'$是闭集。易知

$$\left(\overline{E}\right)'=E'\bigcup\left(E'\right)'$$

再由（1）得证。

4. 区域

▲连通集：

▲开域：非空的连通开集。

▲闭域：开域连同其边界。

▲区域：开域、闭域，或者开域连同其一部分界点所成的点集，统称为**区域.**

【作业】 闭域一定是闭集。（P100 习题 4）

证 设D是闭域，即$D=G\bigcup\partial G$，其中G是开域，要证D是闭集。只需证D^c是开集。

设$P\in D^c(P\notin D)$，则$P\notin G$且$P\notin\partial G$.从而P是G的外点。即

$$\exists\delta_0>0，使得U(P,\delta_0)\bigcap G=\Phi$$

下证：$U(P,\delta_0)\bigcap\partial G=\Phi$

否则，存在$P_1\in U(P,\delta_0)\bigcap\partial G$，由$P_1\in U(P,\delta_0)$（开集），当$\varepsilon>0$充分小时，$U(P_1,\varepsilon)\subset U(P,\delta_0)$，由$P_1\in\partial G$，$U(P_1,\varepsilon)$含有$G$的点。于是$U(P,\delta_0)\bigcap G\neq\Phi$，矛盾。

综上，$U(P,\delta_0)\subset D^c$

反之不真。例如：$E=[0,1]\bigcup[2,3]$是闭集，由于不连通，E不是闭域

5. 有界与无界

对于平面点集 S，若存在某一正数r，使得

$$S\subset U\left(O;r\right),$$

则称 S 是**有界点集**．否则就是**无界点集**．

所谓点集 S 的**直径**，就是

$$d(S) = \sup_{P_1, P_2 \in S} \rho(P_1, P_2)$$

【作业】(P95 第 6 行)：　S 有界 $\Leftrightarrow d(S)$．

二　$\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理

【定义】　设 $\{P_n\} \subset \mathbf{R}^2$ 为平面点列，$P_0 \in \mathbf{R}^2$ 为一固定点。若对任给的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $P_n \in U(P_0; \varepsilon)$，则称点列 $\{P_n\}$ **收敛**于点 P_0，记作

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n \to P_0, n \to \infty.$$

在坐标平面中，以 (x_n, y_n) 与 (x_0, y_0) 分别表示 P_n 与 P_0 时，显然

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \rho(P_n, P_0) = 0$$

【定理】(柯西准则)　平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，　对一切正整数 p，都有

$$\rho(P_n, P_{n+p}) < \varepsilon$$

【定理】(聚点定理)　设 $E \subset R^2$ 为有界无限点集，则 E 在 R^2 中至少有一个聚点．

【推论】　有界无限点列 $\{P_n\} \subset R^2$ 必存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$．

三　二元函数

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

或

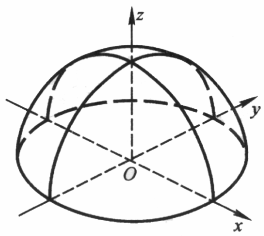
$$z = f(P), \quad P \in D,$$

【例】　函数 $z = 2x + 5y$ 的图象是 R^3 中一个平面，其定义域是 R^2，值域是 R．

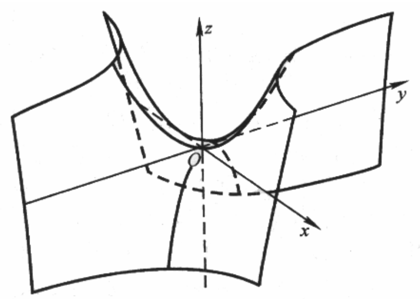
【例】　函数 $z=\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$ 的定义域是 xOy 平面上的单位圆域

$$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$$

值域为区间 $[0,1]$，它的图象是以原点为中心的单位球面的上半部.



【例】　$z=xy$ 是定义在整个 xOy 平面上的函数，它的图象是过原点的双曲抛物面.



§2　二元函数的极限

一　二元函数的极限

【定义】 设 f 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 二元函数，P_0 为的 D 一个聚点，A 是一个确定的实数。若对任给正数 ε，总存在某正数 δ，使得当 $P\in U^{\circ}\left(P_0;\delta\right)\bigcap D$ 时，都有

$$\left|f(P)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时，以 A 为极限，记作

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f\left(P\right)=A.$$

在对于 $P\in D$ 不致产生误解时，也可简单地写作

$$\lim_{P\to P_0}f\left(P\right)=A.$$

当 P,P_0 分别用坐标 $(x,y),\left(x_0,y_0\right)$ 表示时，也常写作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=A.$$

【例】 依定义验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\sqrt{x^2+y^2}=0$

记点 $P(x,y),O(0,0)$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $P\in U^{\circ}\left(O;\delta\right)$ 时，即 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，有

$$\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-0\right|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

【例】（P101）设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

证 对函数的自变量作极坐标变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$。这时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于对任何 φ 都有 $r\to 0$。由于

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2\left|\sin 4\varphi\right|\le\frac{1}{4}r^2$$

因此，对任何 $\varepsilon>0,$， 只须取 $\delta=2\sqrt{\varepsilon},$，当 $0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，不管 φ 取什么值都有 $\left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

下述定理及推论相当于数列极限的子列定理与一元函数极限的海涅归结原则(而且证明方法也相似).

【定理】 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A$ 的充要条件是：对于 D 的任一子集 E，只要 P_0 是 E 的聚点，就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in E}} f(P)=A$$

【推论 1】 设 $E_1\subset D$，P_0 是 E_1 的聚点，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)$ 不存在，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 也不存在.

【推论 2】 设 $E_1,E_2\subset D$，P_0 是它们的聚点，若存在极限

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)=A_1,\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_2}} f(P)=A_2,$$

但 $A_1 \neq A_2$，则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 不存在.

【推论 3】 极限 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 存在充要条件是：对于 D 中任一满足条件 $P_n \neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n \neq P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

【例】（P102） 讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限.

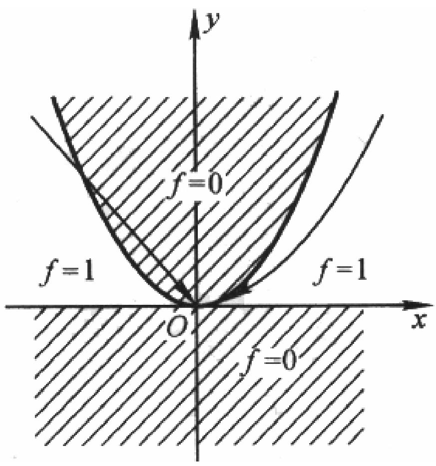
解 当动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 而趋于定点 $(0,0)$ 时，由于此时 $f(x,y)=f(x,mx)=\dfrac{m}{1+m^2}$ ，因而有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

这一结果说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时，对应的极限值不同，因此所讨论的极限不存在.

【例】（P103） 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2, -\infty<x<+\infty \text{ 时}\\ 0, & \text{其余部分}\end{cases}$$



当 (x,y) 沿任何直线趋于原点时，相应的 $f(x,y)$ 都趋于零，但这并不表明此函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限存在．因为当点 (x,y) 沿抛物线 $y=kx^2(0<k<1)$ 趋于点 O 时，$f(x,y)$ 将趋于 1。所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. 不存在。

下面我们再给出当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 $+\infty$（非正常极限）的定义.

【定义】 设 D 为二元函数的定义域，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点。若对任给正数 M，

总存在点 P_0 的一个 δ 邻域，使得当 $P(x,y)\in U^{\circ}(P_0;\delta)\cap D$ 时，都有 $f(P)>M$，则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时，存在非正常极限 $+\infty$，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=+\infty \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=+\infty.$$

仿此可类似的定义：

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=-\infty \text{ 与 } \lim_{P\to P_0} f(P)=\infty.$$

二　累次极限

在上一段所研究的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 中，两个自变量 x,y 同时以任何方式趋于 x_0,y_0。这种极限也称为**重极限**。在这一段里，我们要考察 x 与 y 依一定的先后顺序相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限，这种极限称为累次极限.

【定义】 设 $E_x,E_y\subset\mathbf{R}$，x_0 是 E_x 的聚点，y_0 是 E_y 的聚点，二元函数 f 在集合 $D=E_x\times E_y$ 上有定义。若对每一个 $y\in E_y, y\neq y_0$，存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$，由于此极限一般与 y 有关，因此记作

$$\varphi(y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y),$$

而且进一步存在极限

$$L=\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\varphi(y),$$

则称此极限为二元函数 f 先对 $x(\to x_0)$ 后对 $y(\to y_0)$ 的**累次极限**，并记作

$$L=\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$$

或简记作

$$L=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

类似地可以定义先对 y 后对 x 的累次极限

$$K=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

累次极限与重极限是两个不同的概念，它们的存在性没有必然的蕴含关系．下面三个例子将说明这一点．

【例】 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$． 由前面的例知道 $(x,y)\to(0,0)$ 时 f 的重极限不存在．

但当 $y\neq 0$ 时有

$$\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

从而有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

同理可得

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

即 f 的两个累次极限都存在而且相等．

【例】 $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

它关于原点的两个累次极限分别为

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-y}{y}=\lim_{y\to 0}(y-1)=-1.$$

与

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

当沿斜率不同的直线 $y=mx,(x,y)\to(0,0)$ 时，容易验证所得极限也不同。因此该函数的重极限不存在

注 后面定理将告诉我们，这是一个必然的结果．

【例】 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$,

它关于原点的两个累次都不存在。这是因为对任何 $y\neq 0$，当 $x\to 0$ 时 f 的第二项不存

在极限。同理，对任何 $x \neq 0$，当 $y \to 0$ 时 f 的第一项也不存在极限。但是由于

$$\left| x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|,$$

知道 f 的重极限存在，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

下述定理告诉我们：重极限与累次极限在一定条件下也是有联系的.

【定理】 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y)$$

与累次极限

$$\lim_{y\to x_0}\lim_{x\to y_0} f(x,y),$$

则它们必相等。

证　设

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y) = A,$$

则对任给的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $P(x,y) \in U^\circ(P_0;\delta)$ 时，有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

另由存在累次极限之假设，对任一满足不等式

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{3}$$

的 x，存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x). \tag{4}$$

回到不等式（2），让其中 $y \to y_0$，由(4)可得

$$|\varphi(x) - A| \leq \varepsilon. \tag{5}$$

故由(3),(5)证得 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$，即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y) = A.$$

由这个定理可导出如下两个便于应用的推论。

【推论 1】 若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

和重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y)$$

都存在，则三者相等。

【推论 2】 若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \text{与} \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

存在但不相等，则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y)$ 必不存在。

注 推论 1 给出了累次极限次序可交换的一个充分条件；推论 2 可被用来否定重极限的存在性。

§ 3　二元函数的连续性

一　二元函数的连续性

【定义】 设 f 为定义在点集 $D\subset R^2$ 上的二元函数． $P_0\in D$（它或者 D 的聚点，或者是 D 的孤立点）。对于任给的正数 ε，总存在相应的正数 δ，只要 $P\in U(P_0;\ \delta)\cap D$,，就有

$$\left|f(P)-f(P_0)\right|<\varepsilon$$

则称 f 关于集合 D 在点 P_0 **连续**。在不至于误解的情况下，也称 f 在点 P_0 连续。

若 f 在 D 上任何点都关于集合 D 连续，则称 f 为 D 上的**连续函数**。

由上述定义知道：若 P_0 是 D 的孤立点，则 P_0 必定是 f 关于 D 的连续点；若 P_0 是 D 的聚点，则 f 关于 D 在连续等价于

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=f(P_0)$$

间断点、可去间断点等概念与一元函数类似。

设 $P_0(x_0,y_0)$、$P(x,y)\in D,\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，则称

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数 f 在点 P_0 的**全增量**。和一元函数一样，可用增量形式来描述连续性，即当

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}}\Delta z=0$$

时，f 在点 P_0 连续。

如果在全增量中取 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$，则相应的函数增量称为**偏增量**，记作

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

若一个偏增量的极限为零，例如

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(x_0,y_0)=0$$

它表示 f 在的两个自变量中，当固定 $y=y_0$ 时，$f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数 x_0 在连续。同理，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(x_0,y_0)=0.$ 则表示 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续。

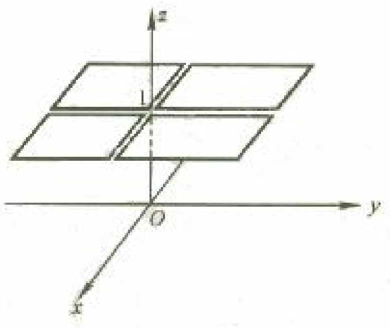


图 16－9

容易证明：当 f 在其定义域的内点 (x_0,y_0) 连续时，$f(x,y_0)$ 在 x_0 和 $f(x_0,y)$ 在 y_0 都连续。但是反过来，二元函数对单个自变量都连续并不能保证该函数的连续性.例如二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1,xy\neq 0,\\0,xy=0\end{cases}$$

在原点处显然不连续。但由于

$$f(0,y)=f(x,0)\equiv 0,$$

因此在原点处 f 对 x 和对 y 分别都连续。

【例 1】 证明 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数。

证

$$\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right|$$

$$\le\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\quad\text{（三角不等式）}$$

【例 2】 $f(x,y)$ 是定义在直线 $y=mx$ 上的函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & y=mx, x\neq 0\\ \dfrac{m}{1+m^2}, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

由前面的例题知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}$$

因此，f 在原点没直线 $y=mx$ 是连续的。但如果把 f 看作定义在整个平面上的函数，则 f 在原点不连续。这是因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

【性质 1】局部有界性

【性质 2】局部保号性

【性质 3】四则运算法则

【性质 4】（复合函数的连续性）

设函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在 xy 平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 P_0 连续；函数 $f(u,v)$ 在 uv 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 连续，其中 $u_0=\varphi(x_0,y_0)$，$v_0=\psi(x_0,y_0)$. 则复合函数 $g(x,y)=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 也连续.

证　由 f 在点 Q_0 连续可知：任给正数 ε，存在相应正数 η，使得当 $|u-u_0|<\eta,|v-v_0|<\eta$ 时，有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

又由 φ、ψ 在点 P_0 连续可知：对上述正数 η，总存在正数 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$，都有

$$|u-u_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\eta,$$

$$|v-v_0|=|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|<\eta.$$

综合起来，当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，便有

$$\left|g(x,y)-g(x_0,y_0)\right|=\left|f(u,v)-f(u_0,v_0)\right|<\varepsilon.$$

所以说复合函数$f\left(\varphi(x,y),\phi(x,y)\right)$在点$P_0\left(x_0,y_0\right)$连续。

二　有界闭域上连续函数的性质

【定理 1】（有界性与最大、最小值定理）　若函数f在有界闭域$D\subset \mathbf{R}^2$上连续，则：f在D上有界，且能取得最大值与最小值.

【定理 2】（一致连续性定理）　若函数f在有界闭域$D\subset R^2$上连续，则f在D上一致连续。即对任何$\varepsilon>0$，总存在只依赖于ε的正数δ，使得对一切点P,Q，只要$\rho(P,Q)<\delta$，就有$\left|f(P)-f(Q)\right|<\varepsilon$。

【定理 3】（介值性定理）　设函数f在区域$D\subset R^2$连续，若P_1,P_2为D中任意两点，且$f(P_1)<f(P_2)$，则对任何满足不等式

$$f(P_1)<\mu<f(P_2)$$

的实数μ，必存在点$P_0\in D$，使得$f(P_0)=\mu$。

【注】定理 1 与 2 中的有界闭域 D 可以改为有界闭集。