第 22 章　曲面积分

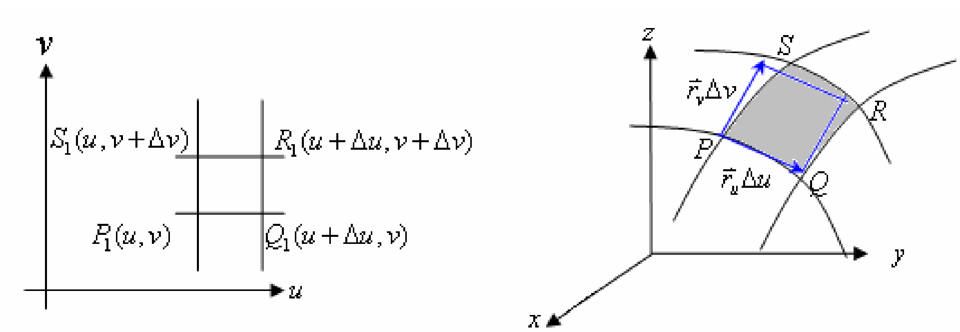
§1　曲面面积

空间曲面可用参数表示为

$$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D$$

其中 D 是可求面积的有界闭区域，$\vec{r}(u,v)$ 光滑（即 $\vec{r}(u,v)\in C^1(D)$ 且 $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ 线性无关）

当 v 固定，u 变化时，就得到空间曲面上的一条曲线，称为 $u-$ 曲线，类似定义 $v-$ 曲线。如图



$\vec{r}_u=(x_u,y_u,z_u)$ 是 $u-$ 曲线的切向量，$\vec{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$ 是 $v-$ 曲线的切向量.

$$\overline{PQ}=\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)=\vec{r}_u\Delta u+o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})\approx\vec{r}_u\Delta u$$

$$\overline{PS}=\vec{r}(u,v+\Delta v)-\vec{r}(u,v)=\vec{r}_v\Delta v+o(\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2})\approx\vec{r}_v\Delta v$$

当 $\Delta u,\Delta v$ 充分小时，略去上面高阶无穷小，用向量 $\vec{r}_u\Delta u$，$\vec{r}_v\Delta v$ 所张成的平行四边形（在过点 P 的切平面上）的面积来近似曲面 $PQRS$ 的面积.

【定义】面积的微元定义为

$$dS=|\vec{r}_u\Delta u\times\vec{r}_v\Delta v|=|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\Delta u\Delta v=|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv$$

曲面的面积定义为

$$S=\iint_D|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv$$

易计算

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}) \triangleq (A,B,C)$$

$$\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| == \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}\ ,\quad E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u, F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v, G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$$

所以面积微元为

$$dS = \sqrt{EG-F^2}dudv$$

曲面面积为

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}dudv$$

特别地，如果曲面由 $z = z(x,y), (x,y)\in D$ 表示，则

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\ ,\quad S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

【例 1】 求半径为 R 的球面面积。

解 $\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi), D: 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\vec{r}_\varphi = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi)$$

$$\vec{r}_\theta = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0)$$

$$\sqrt{EG-F^2} = R^2\sin\varphi$$

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}d\varphi d\theta = \iint_D R^2\sin\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}R^2\sin\varphi d\varphi = 4\pi R^2$$

【例 2】 求以 $(0,0,0)$ 为顶点，圆 $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = h$ 为底的圆锥面的面积。

解 $\vec{r}(t,\theta) = (Rt\cos\theta, Rt\sin\theta, ht), D: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le t\le 1$

$$\vec{r}_t = (R\cos\theta, R\sin\theta, h),\quad \vec{r}_\theta = (-Rt\sin\theta, Rt\cos\theta, 0)$$

$$E = \vec{r}_t\cdot\vec{r}_t = R^2+h^2,\quad G = \vec{r}_\theta\cdot\vec{r}_\theta = R^2t^2,\quad F = \vec{r}_t\cdot\vec{r}_\theta = 0$$

$$S = \iint_D \left(R\sqrt{R^2+h^2}\right)tdtd\theta = \left(R\sqrt{R^2+h^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 tdt = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$$

【例 3】 设变换 $T: x = x(u,v), y = y(u,v)$ 将 $u-v$ 平面上由按段光滑封闭曲线所围的闭区域 Δ，一对一地映成 $x-y$ 平面上的闭区域 D，函数 $x(u,v), y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一

阶连续偏导数，且$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\neq 0,(u,v)\in\Delta$. 则

$$S(D)=\iint_{\Delta}\left|J(u,v)\right|dudv$$

证　$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),0),\quad (u,v)\in\Delta$，$\vec{r}_u=(x_u,y_u,0),\vec{r}_v=(x_v,y_v,0)$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix}=(0,0,J(u,v))$$

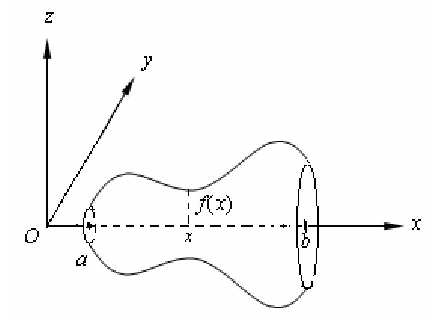
$$S(D)=\iint_{\Delta}\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|dudv=\iint_{\Delta}\left|J(u,v)\right|dudv$$

【注】由此可证明二重积分的换元法。参见教材 P247.

【例 4】［旋转曲面的面积］设$y=f(x)>0,x\in[a,b]$是平面光滑曲线。求证：它绕x轴一周得到的旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

解　$\vec{r}(x,\theta)=(x,f(x)\cos\theta,f(x)\sin\theta),a\le x\le b,0\le\theta\le 2\pi$

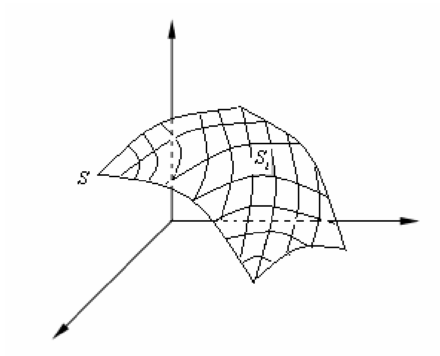


$$E=1+f'^2(x),G=f^2(x),F=0$$

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

§2　第一型曲面积分

【背景】一曲面块S，具有连续的密度$f(x,y,z)$，求曲面块S的质量。



【定义】

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

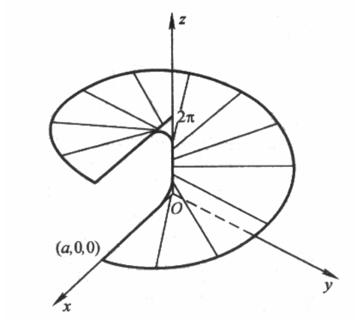
【计算】 设$S:\bar{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D$。其中$D$是可求面积的有界闭区域，$S$光滑，$f(x,y,z)$在$S$上连续。则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

特别地，若$S:z=z(x,y),(x,y)\in D$

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\text{。}$$

【例 1】（P295）计算$\iint\limits_S zdS$，其中 S 为螺旋面（如图）的一部分



$$S:\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v,\left(u,v\right)\in D,\ D:\begin{cases} 0\le u\le a, \\ 0\le v\le 2\pi. \end{cases} \\ z=v, \end{cases}$$

解 $$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

因此

$$\iint_S z dS = \iint_D v\sqrt{1+u^2}\,dudv = \int_0^{2\pi} vdv \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^a = \pi^2\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right].$$

注：$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$

【例 2】计算 $I = \iint_S (x^2+y^2)dS$， S 是抛物面 $z = 2-(x^2+y^2), z \ge 0$ 。

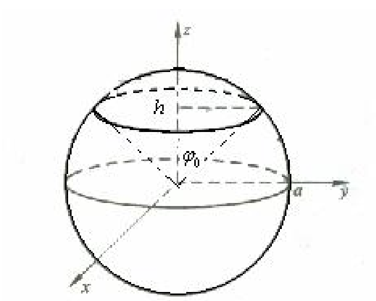
解 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy$， $D: x^2+y^2 \le 2$

$$I = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{149}{30}\pi$$

注：$\int r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int r^2\sqrt{1+4r^2}\,d(r^2) \overset{t=r^2}{=} \frac{1}{8}\int(1+4t-1)\sqrt{1+4t}\,dt = \cdots$

【例 3】（P294）计算 $\iint_S \frac{dS}{z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 所截的顶部(如图).



解 （不同与教材，采用参数方程）

$$S: x = a\sin\varphi\cos\theta, y = a\sin\varphi\sin\theta, z = a\cos\varphi,$$

$$(\varphi,\theta) \in D: 0 \le \varphi \le \varphi_0, 0 \le \theta \le 2\pi$$

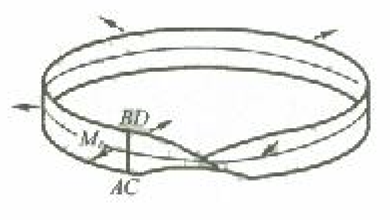
$$\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\varphi$$

$$\iint_S \frac{dS}{z}=\iint_D \frac{a^2\sin\varphi}{a\cos\varphi}d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi=2\pi a\left(-\ln\cos\varphi_0\right)=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

§3　第二型曲面积分

【一】　曲面的侧

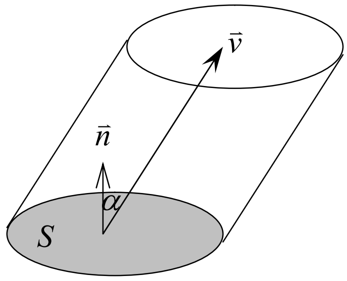
单侧曲面与双侧曲面。单侧曲面的一个典型例子是默比乌斯(Möbius)带。



通常由 $z=z(x,y)$ 所表示的曲面都是双侧曲面，当以其法线正方向与 z 正向的夹角成锐角的一侧(也称为上侧)为正侧时，则另一侧(也称下侧)为负侧。当 S 为封闭曲面时，通常规定曲面的外侧为正侧，内侧为负侧。

【二】　第二型曲面积分概念

【背景：流量问题】某流体流速 $\vec{v}$ 是常量（流体在单位时间内流过的距离），则流过平面 S 的流量（单位时间内流过 S 的体积）为（如图）

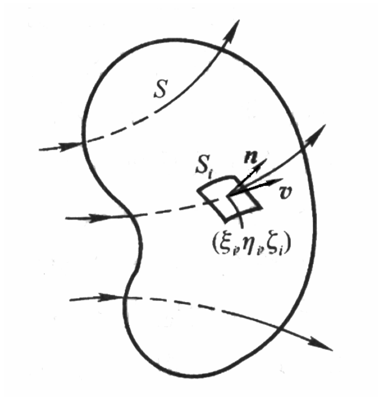


$$E=\left|\vec{v}\right|\Delta S\cos\alpha=\vec{v}\cdot\vec{n}\Delta S=\vec{v}\cdot\Delta\vec{S}$$

设流体的流速

$$\vec{v}=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$$

从给定的曲面 S 的负侧流向正侧(如图)，其中 P,Q,R 为所讨论范围上的连续函数，求单位时间内流经曲面 S 的总流量 E。



设在曲面 S 的正侧上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

这里 α,β,γ 是 x,y,z 的函数。则单位时间内流经小曲面 S_i 的流量近似地等于

$$E_i\approx\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$=\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i,$$

其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 S_i 上任意取定的一点，$\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i$ 是 S_i 的正侧上法线的方向余弦。故单位时间内由曲面 S 的负侧流向正侧的总流量

$$E=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i$$

注：$\Delta S_i\cos\alpha_i,\Delta S_i\cos\beta_i,\Delta S_i\cos\gamma_i$ 分别是 S_i 的正侧在坐标面 yz,zx,xy 上投影区域的面积的近似值，有符号，符号 $\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i$ 决定。

【定义】 设 R 为定义在双侧曲面 S 上的函数，在 S 所指定的一侧作分割 T，它把 S 分为 n 个小曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，分割 T 的细度 $\|T\|=\max d(S_i)$，定义

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i=\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

称为函数 R 在曲面 S 所指定的一侧上的**第二型曲面积分**。同样定义

$$\iint_S P(x,y,z)dydz\text{，}\iint_S Q(x,y,z)dzdx$$

据此定义，某流体以速度 $\vec{v}=(P,Q,R)$ 从曲面 S 的负侧流向正侧的总流量

$$E=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy.$$

【面积微元向量】把面积微元看作有方向的向量：大小为面积微元，方向为法线方向

$$d\vec{S}=\pm\vec{r}_u\times\vec{r}_v dudv=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

单位法向量

$$\vec{n}=\pm\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\text{（}\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]\text{）}$$

则

$$d\vec{S}=\vec{n}dS=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(dydz,dzdx,dxdy)$$

其三个分量分别是面积微元向三个坐标平面的投影的微元（有符号，由选定的方向及方向角来定）

上面流量问题

$$E=\iint_S\vec{v}\cdot d\vec{S}=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iint_S\overline{F}\cdot\vec{n}dS$$

【计算公式】

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

其中符号的确定：首先要指明曲面的正侧，即曲面的法线方向 $\vec{n}$（向上或向下，向里或向外等），如果 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ 与指定的方向一致，取正号；否则，取负号。

【例如】 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D$，分上下侧。

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy$$

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$$

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_y=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&z_x\\0&1&z_y\end{vmatrix}=(*,*,1)$$

因此，曲面如取上侧为正侧，则取正号，否则取负号。

类似地，$S:x=x(y,z),(y,z)\in D$，分前后侧。

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\pm\iint_D P(x(y,z),y,z)dydz$$

曲面如取前侧为正侧，则为正号，否则为负号。

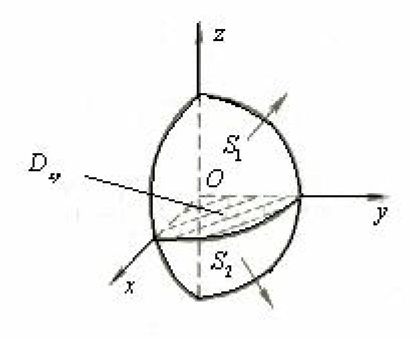
类似地，S 分左右侧（自己写出公式）。

【再如】球面 $S: x=\sin\varphi\cos\theta, y=\sin\varphi\sin\theta, z=\cos\varphi$，$(\varphi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ 分内外侧。

$$\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta=(\sin^2\varphi\cos\theta,\sin^2\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\varphi)$$

如取外侧为正，则始终与 $\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta$ 方向一致，故取正号。否则，取负号。

【例 1】 计算 $\iint\limits_S xyzdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\ge 0, y\ge 0$ 部分并取球面外侧。



解 1　$S_1: z_1=\sqrt{1-x^2-y^2}, S_2: z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 。S_1 取上侧，S_2 取下侧。

$$\iint\limits_S xyzdxdy=\iint\limits_{S_1} xyzdxdy+\iint\limits_{S_2} xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} -xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}dr=\frac{2}{15}.$$

解 2　$S: x=a\sin\varphi\cos\theta, y=a\sin\varphi\sin\theta, z=a\cos\varphi,$

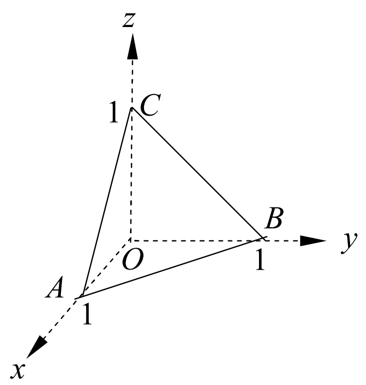
$$(\varphi,\theta)\in D_{\varphi\theta}: 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}=\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\iint\limits_S xyzdxdy=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$$

【例 2】 计算 $I=\iint\limits_S (x+1)dydz+ydzdx+dxdy$，$S$ 为如图四面体的珍面，取外侧。



解
$$\iint\limits_{ABO} *=\iint\limits_{ABO} dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=-\frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{BCO} *=\iint\limits_{BCO} (x+1)dydz=-\iint\limits_{D_{yz}} dxdy=-\frac{1}{2}，\ \iint\limits_{ACO} *=\iint\limits_{ACO} ydzdx=0$$

$$\iint\limits_{ABC} (x+1)dydz=\iint\limits_{D_{yz}} (2-y-z)dydz=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-z)dz=\frac{2}{3}$$

$$\iint\limits_{ABC} ydzdx=\iint\limits_{D_{zx}} (1-x-z)dzdx=\frac{1}{6},\iint\limits_{ABC} dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=\frac{1}{2}$$

$$I=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

【例 3】 计算位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场强度为

$$\overline{E}=\frac{q}{\left|\overline{r}\right|^3}\overline{r},\overline{r}=(x,y,z)$$

求 $\overline{E}$ 通过球面 $S:\left|\overline{r}\right|=R$ 外侧的电通量 Φ。

$$\Phi=\iint\limits_S \overline{E}\cdot d\overline{S}=\iint\limits_S \overline{E}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_S \frac{q}{\left|\overline{r}\right|^3}\overline{r}\cdot\frac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|}dS=\iint\limits_S \frac{q}{\left|\overline{r}\right|^2}dS$$

$$=\frac{q}{R^2}\iint\limits_S dS=\frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi q$$

【例 4】计算 $I=\iint\limits_S (z^2+x)dydz-zdxdy$，$S$ 是抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分，取下侧。

解 设 $F=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-z$

$$\vec{n}=\frac{(F_x,F_y,F_z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$$

$$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\iint_S (z^2+x)dydz=\iint_S (z^2+x)\cos\alpha dS=\iint_S (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma dS$$

$$=\iint_S (z^2+x)(-x)\cos\gamma dS=\iint_S (z^2+x)(-x)dxdy$$

$$I=\iint_S (z^2+x)dydz-zdxdy=\iint_S \left(-x(z^2+x)-z\right)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left(-x[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2dxdy+\iint_{D_{xy}}\left(x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)rdr=8\pi$$

§4　Gauss 公式与 Stokes 公式

【一】 高斯公式

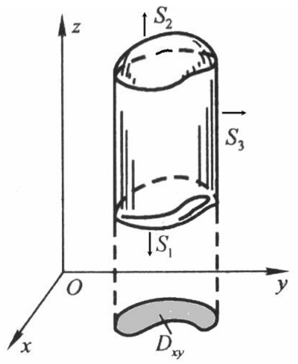
格林公式建立了沿封闭曲线的曲线积分与二重积分的关系,沿空间闭曲面的曲面积分和三重积分之间也有类似的关系，这就是本段所要讨论的高斯（Gauss）公式。

【定理 1】（Gauss 公式）设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成。若函数 P，Q，R 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oint\!\!\!\!\oint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oint\!\!\!\!\oint\limits_S \left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS$$

其中 S 取外侧。$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$



证　下面证 $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\oint\!\!\!\!\oint\limits_S Rdxdy$

设 V 是一个 xy 型区域，如图。

$$S_1: z=z_1(x,y),(x,y)\in D_{xy}, S_2: z=z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}$$

于是按三重积分的计算方法有

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,z_2(x,y)\right)dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,z_1(x,y)\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_2} R\left(x,y,z\right)dxdy+\iint\limits_{S_1} R\left(x,y,z\right)dxdy+\iint\limits_{S_3} R\left(x,y,z\right)dxdy=\oint\!\!\!\!\oint\limits_S Rdxdy.$$

类似可证：$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_S Pdydz, \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_S Qdzdx$

对于不是 xy 型区域的情形，则用有限个光滑曲面将它分割成若干个 xy 型区域来讨论。详细的推导与格林公式相似，这里不再细说了。

【例 1】计算 $I = \oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，取外侧。

解　$I = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3\Delta V = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$

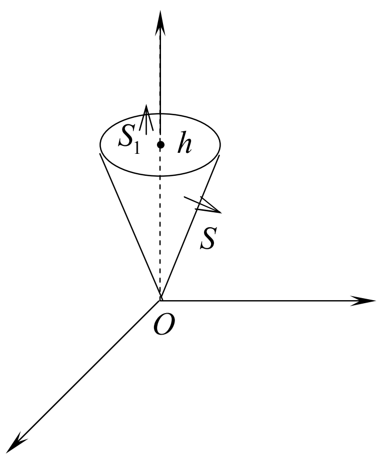
【例 2】计算 $I = \oiint\limits_S \left(x - y\right) dxdy + x\left(y - z\right) dydz$，其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围空间闭区域 V 的边界曲面的外侧。

解　用高斯公式

$$I = \iiint\limits_V (y - z) dV \overset{\text{柱坐标}}{=\!=\!=\!=} \iiint\limits_{V'} (r\sin\theta - z) rdrd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_0^3 (r\sin\theta - z) dz = -\frac{9}{2}\pi$$

【例 3】 计算 $I = \oiint\limits_S \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right) dS$，其中 S 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于 $z = 0, z = h(h > 0)$ 之间部分的下侧，$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为法线方向。



解　作辅助面 $S_1: z = h, (x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \le h^2$，取上侧。

$$I = \oiint\limits_{S+S_1} - \oiint\limits_{S_1} = 2\iiint\limits_V (x + y + z) dxdydz - \oiint\limits_{S_1} h^2 dxdy = 2 \cdot \frac{1}{4}\pi h^4 - h^2 \cdot \pi h^2 = -\frac{\pi}{2} h^4$$

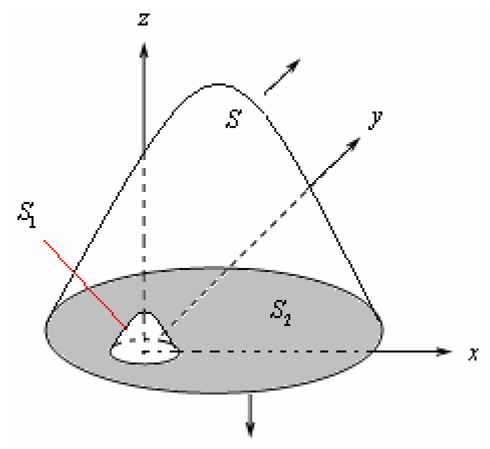
其中，由质心坐标知：$\iiint\limits_V xdxdydz = \iiint\limits_V ydxdydz = 0$

$$\iiint_V zdxdydz = \int_0^h dz \iint_{D_z} zdxdy = \int_0^h z \cdot \pi z^2 dz = \frac{1}{4}\pi h^2$$

【例 4】 计算 $I = \iint\limits_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中

$$S: 1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}, z \ge 0$$

取上侧。



作辅助面(如图)：$S_1: z = \sqrt{\varepsilon^2 - x^2 - y^2}$（$\varepsilon > 0$ 足够小），取下侧，S_2 取下侧。

$$\text{解}\quad I = \iint\limits_{S+S_1+S_2} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2} = \iiint\limits_V 0dV - \frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint\limits_{S_2} 0dxdy$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$\iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\pi\varepsilon^3\right) \text{（再作辅助面易求）}$$

$$I = -\frac{1}{\varepsilon^3} \times \left(-2\pi\varepsilon^3\right) = 2\pi$$

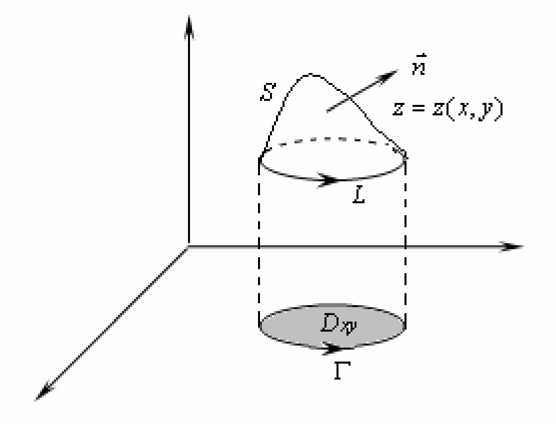
【二】 斯托克斯公式

斯托克斯（Stokes）公式是建立沿空间双侧曲面 S 的积分与沿 S 的边界曲线 L 的积分之间的联系。

【定理 2】 （Stokes 公式） 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线。若函数 P,Q,R 在 S（连同 L）上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

其中 S 的侧与 L 的方向符合右手法则。



证　只证

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\oint_L Pdx$$

$$\vec{n}=\frac{(-z_x,-z_y,1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$$

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint_S (\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma)dS=\iint_S (\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma dS$$

$$=-\iint_S (\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}z_y)dxdy=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy\overset{Green}{=\!=\!=}\oint_\Gamma P\left(x,y,z(x,y)\right)dx$$

$$\overset{注}{=}\oint_L P(x,y,z)dx$$

上面注　$\oint_L P(x,y,z)dx=\lim\sum P(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta x_i=\lim\sum P\left(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)\right)\Delta x_i$

$$=\oint_\Gamma P\left(x,y,z(x,y)\right)dx$$

【注 1】如果 S 是 xy 平面上的区域，则 Stockes 公式变为 Green 公式

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

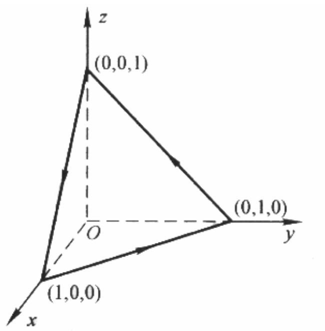
【注 2】为了便于记忆，Stockes 公式可写成

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

【例 5】（P309）计算

$$\oint_L (2y+z)dx + (x-y)dy + (y-x)dz$$

其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 与各坐标面的交线，取逆时针方向为正向（如图）。



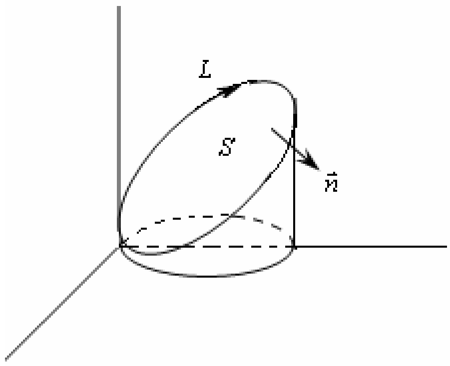
解　应用斯托克斯公式推得

$$\oint_L (2y+z)dx + (x-z)dy + (y-z)dz = \iint_S (1+1)dydz + (1+1)dzdx + (1-2)dxdy$$

$$= \iint_S 2dydz + 2dzdx - dxdy = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

【例 6】　L 为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正向看为顺时针。计算

$$I = \oint_L y^2 dx + xydy + xzdz$$



解　平面 $y=z$ 的法向量取

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S(y-z)dS=0$$

【三】　空间曲线积分与路线的无关性

【定理 3】　设$\Omega\subset R^3$为空间单连通区域。若函数P,Q,R在Ω上连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件是等价的：

（i）对于Ω内任一按段光滑的封闭曲线 L 有

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$$

（ii）对于Ω内任一按段光滑的曲线 L，曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

与路线无关；

（iii）$Pdx+Qdy+Rdz$是Ω内某一函数u的全微分，即

$$du=Pdx+Qdy+Rdz;$$

（iv）$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$在$\Omega$内处处成立。

【例 7】　（P309）验证曲线积分

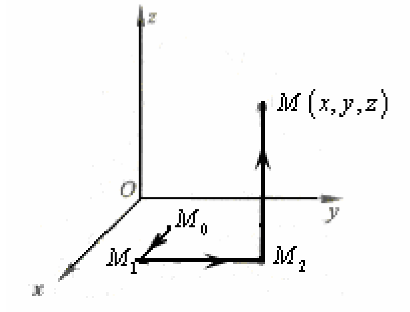
$$\int_L(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

与路线无关，并求被积表达式的原函数$u(x,y,z)$。

解　$P=y+z,Q=z+x,R=x+y$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=1$$

所以曲线积分与路线无关。



现在求

$$u(x,y,z)=\int_{M_0M}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz.$$

如图路线

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(y_0+z_0)\,ds+\int_{y_0}^{y}(z_0+x)\,dt+\int_{z_0}^{z}(x+y)\,dr$$

$$=(y_0+z_0)x-(y_0+z_0)x_0+(z_0+x)y-(z_0+x)y_0+(x+y)z-(x+y)z_0$$

$$=xy+xz+yz+c$$

其中c是一个常数。