数学分析(1)历年考题选

第 01 章　实数集与函数

【01】设 $f(x)$ 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$，证明

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m$$

【证】只证 $m<M$ 的情况，否则 f 为常数结论显然成立。

一方面，由 $m\le f(x)\le M$ ，知 $\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$ （$x',x''\in I$）

于是

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$$

另一方面，由确界的定义，对 $\forall\varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<M-m$），$\exists x',x''\in I$ 使

$$f(x')>M-\frac{\varepsilon}{2}，\ f(x'')<m+\frac{\varepsilon}{2}$$

这时

$$f(x')-f(x'')>M-\frac{\varepsilon}{2}-(m+\frac{\varepsilon}{2})=(M-m)-\varepsilon$$

综上两个方面，得

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m$$

【02】 设 f,g 为 D 上的有界函数，证明：$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$

【证】 $\forall x_0\in D$，

$$\inf\{f(x)+g(x)\}\le f(x_0)+g(x_0)\le f(x_0)+\sup g(x)$$

$$\inf\{f(x)+g(x)\}-\sup g(x)\le f(x_0)$$

说明 $\inf\{f(x)+g(x)\}-\sup g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个下界，从而

$$\inf\big(f(x)+g(x)\big)-\sup g(x)\le\inf f(x)$$

移项即得证。

【或】 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使得 $f(x_0)<\inf f(x)+\varepsilon$，又 $g(x_0)\le\sup g(x)$，所以

$$\inf\{f(x)+g(x)\} \le f(x_0)+g(x_0) < \inf f(x)+\sup g(x)+\varepsilon$$

由ε的任意性得

$$\inf\{f(x)+g(x)\} \le \inf f(x)+\sup g(x)$$

第 02 章　数列极限

【01】用$\varepsilon - N$方法证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n+1}=1$。

【证】 因为

$$\left|\frac{n^2}{n^2+n+1}-1\right| = \left|\frac{n+1}{n^2+n+1}\right| < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

所以对任意$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{\varepsilon}{2}\right]$。当$n>N$时，有$\left|\dfrac{n^2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}=1。$$

【02】设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$

【证】由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，$\forall G>0$，$\exists N_1$，$\forall n>N_1$，有$a_n>2G+1$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}$$

$$\ge \frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n} + \frac{(n-N_1)}{n}(2G+1)$$

由于$\dfrac{a_1+\cdots+a_N}{n}\to 0$, $\dfrac{n-N_1}{n}=1-\dfrac{N_1}{n}\to 1$

故$\exists N_2$, $\forall n>N_2$, $\dfrac{a_1+\cdots+a_N}{n}>-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{n-N_1}{n}>\dfrac{1}{2}$

取$N=\max(N_1,N_2)$，当$n>N$时，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2G+1)=G$$

【03】设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a(a_n > 0, a > 0)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 。

【解】取ε_0满足$0<\varepsilon_0<a$，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$知，$\exists N\in N_+$，当$n>N$时，

$$a-\varepsilon_0 < a_n < a+\varepsilon_0$$

从而

$$\sqrt[n]{a-\varepsilon_0} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a+\varepsilon_0}$$

上式两边取极限并利用结论$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$（$c>0$为常数)和迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$$

【04】求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}(a>1)$

【解 1】
$$x_n=\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{n}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{a}{n}x_{n-1}$$

$n>a$时，有$x_n<x_{n-1}$，$\{x_n\}\downarrow$，又$x_n\ge 0$，0是$\{x_n\}$的下界由单调有界定理，$\{x_n\}$有极限设为a。在$x_n=\dfrac{a}{n}x_{n-1}$两边令$n\to\infty$，得$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

【解 2】取$N>a$，当$n>N$时

$$0\le x_n=\frac{a^n}{n!}=\frac{a^N}{N!}\cdot\underbrace{\frac{a}{N+1}\cdot\frac{a}{N+2}\cdots\cdots}_{<1}\frac{a}{n}<\frac{a^N}{N!}\cdot\frac{a}{n}$$

两边取极限，由迫敛性得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

【05】设$a_1=\sqrt{c}(c>0), a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}, (n=1,2,\cdots)$。证明$\{a_n\}$收敛，并求其极限。

【证】首先证明$\{a_n\}$单调增。$a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=a_1$，

设$a_n>a_{n-1}$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}>\sqrt{c+a_{n-1}}=a_n$$

其次证明$\{a_n\}$有上界。$a_1=\sqrt{c}<\sqrt{c}+1$，

设$a_{n-1}<\sqrt{c}+1$，则

$$a_n = \sqrt{c + a_{n-1}} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1$$

由单调有界定理, $\{a_n\}$ 必有极限, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$a_{n+1}^2 = c + a_n$ 两边取极限, $A^2 = c + A$，解得(另一根不合题意舍去)。

$$A = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

【06】设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n = 1,2,\cdots$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

【证】 显然 $\{a_n\}$ 递增，下证 $\{a_n\}$ 有上界。事实上，

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2, n = 1,2,\cdots。$$

于是由单调有界定理，$\{a_n\}$ 收敛。

【或】

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+p)} \le \frac{1}{n}$$

由 Cauchy 准则，易知 $\{a_n\}$ 收敛。

第 03 章　函数极限

【01】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

【02】设 $\lim\limits_{u\to +\infty} f(u) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = A$。

【证】 由 $\lim\limits_{u\to +\infty} f(u) = A$，$\forall \varepsilon > 0, \exists G > 0,$ 当 $u > G$ 时，有

$$|f(u) - A| < \varepsilon$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$，对上面 G，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$g(x)>G$$

因此

$$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$$

综上，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$. 根据定义得证。

【03】设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$，$f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续，证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(a)$。

【证】因 $f(u)$ 在点 a 连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|u-a|<\delta$ 时，有

$$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=a$，对上面 δ，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，有 $|g(x)-a|<\delta$，从而

$$|f[g(x)]-f(a)|<\varepsilon$$

综上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，有 $|f[g(x)]-f(a)|<\varepsilon$，这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty} f[g(x)]=f(a)$$

第 04 章　函数的连续性

【01】证明 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是：对 $\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$。

【证】[必要性] 设 f 在区间 I 上一致连续。即对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，对上面的 δ，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n'-x_n''|<\delta$，从而

$$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$$

根据定义证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$

[充分性]（用反证法）设 f 在 I 上不一致连续。即 $\exists\ \varepsilon_0>0$，对 $\forall\ \delta>0$，$\exists\ x',x''\in I$，满足 $|x'-x''|<\delta$，但

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\ge\varepsilon_0$$

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，$\exists\ x_n',x_n''\in I$，满足 $|x_n'-x_n''|<\delta_n=\dfrac{1}{n}$，但

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\ge\varepsilon_0。$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)\ne0$。矛盾。

【02】设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

【证】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，由 Cauchy 准则知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X\ge a$，只要 $x',x''\ge X$，就有

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$$

又因为 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，所以 f 在 $[a,X+1]$ 上连续，进而在 $[a,X+1]$ 上一致连续。即对上述 ε，$\exists\delta(<1)$，对任何 $x',x''\in[a,X+1]$，只要 $|x''-x'|<\delta$ 就有

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$$

综上，可知 $\forall\varepsilon>0$，任何 $x',x''\in[a,+\infty)$，只要 $|x''-x'|<\delta$ 就有 $\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$。即 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

【03】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在。证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

【证】 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在，由 Cauchy 准则可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1<0$，当 $x',x''\le X_1$ 时，有

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon。\tag{1}$$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$\exists X_2>0$，当 $x',x''\ge X_2$ 时，有

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon。\tag{2}$$

另一方面 f 在 $[X_1-1,X_2+1]$ 上连续，所以在 $[X_1-1,X_2+1]$ 一致连续。于是即对上述 ε，$\exists\delta\in(0,1)$，当 $x',x''\in[X_1-1,X_2+1]$，且 $|x''-x'|<\delta$ 就有

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon。\tag{3}$$

这样，当$x',x''\in(-\infty,+\infty)$，且$\left|x''-x'\right|<\delta$时，

(i) 若$x',x''<X_1$，由(1)式，$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$；

(ii) 若$x',x''>X_2$，由(2)式，$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$；

(iii) 若 $x'\in[X_1,X_2]$ 或 $x''\in[X_1,X_2]$ ， 则 $x',x''\in[X_1-1,X_2+1]$ 由 (3) 式 ，$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$。

根据定义，即得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

第 05 章　导数和微分

【01】设$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

【解】$x\neq 0$时，由求导公式

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$x=0$时，由定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\quad=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

【02】求曲线$x=1-t^2, y=t-t^2$在$t=1$对应点的切线方程。

【解】 因为 $x'=-2t, y'=1-2t$，

所以当$t=1$时，$x=0, y=0$；$x'=-2, y'=-1$。

那么切线方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-0}{-1}\text{ 即 }x-2y=0$$

【或】

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=1}=\left.\frac{1-2t}{-2t}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$$

当$t=1$时，$x=0, y=0$，故切线方程是

$$y-0=\frac{1}{2}(x-0)$$

【03】设$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

【解】$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\Bigg/\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} = \left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\right)' = \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}{(\cos t - \sin t)^2} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

【04】设函数f在点x_0存在左右导数，试证f在点x_0连续。

【证】由$\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$存在知，

$$f(x) = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) + o(1)(x - x_0)$$

从而$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$，即$f(x)$在$x_0$左连续。同理由$f'_+(x_0)$存在，知$f(x)$在$x_0$右连续。综上，$f(x)$在$x_0$处连续

［注］以上也可用增量公式写

【05】确定a,b的值，使$f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{x^2e^{p(x-1)} + ax + b}{1 + e^{p(x-1)}}(x \in R)$可导并求出$f'(x)$.

【解】易求得

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ \frac{1}{2}(1 + a + b) & x = 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$$

首先$f(x)$连续：$f(1+0) = f(1-0) = f(1) \Rightarrow a + b = 1$

其导函数

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ a & x < 1 \end{cases}，又 f'(1+0) = 2, f'(1-0) = a$$

由于导数极限定理（也可由导数的定义做）：

$$f_+'(1)=f'(1+0),f_-'(1)=f'(1-0)$$

令

$$f'(1+0)=f'(1-0)\Rightarrow a=2\Rightarrow b=-1$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}，\quad f'(x)=\begin{cases}2x & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}$$

【06】求a,b使$f(x)=\begin{cases}ax+b & x\geq 0\\ 2e^x-1 & x<0\end{cases}$在点$x=0$处可导。

【解】首先$f(x)$在点$x=0$要连续。由$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=b$和$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1$得$b=1$。

当$x\neq 0$时，$f'(x)=\begin{cases}a & x>0\\ 2e^x & x<0\end{cases}$。由$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=a$和$\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=2$，根据导数极限定理，令$a=2$，此时$f(x)$在点$x=0$可导，且有$f'(0)=2$。

综上，$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 0\\ 2e^x-1 & x<0\end{cases}$

［注］也可根据定义，不用导数极限定理

【07】证明费马定理：设函数f在点x_0的某邻域上有定义，且在点x_0可导. 若点x_0为f的极值点，则必有$f'(x_0)=0$.

【证 1】设$f'(x_0)\neq 0$.不妨$f'(x_0)>0$.则

$$f_+'(x_0)=f_-'(x_0)=f'(x_0)>0$$

由$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$及保号性可知，

$$\exists\delta_1>0，\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)，\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)>f(x_0)$$

同理，由$f_-'(x_0)>0,$得

$$\exists\delta_2>0，\ \forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)，\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)<f(x_0)$$

所以，f 在点 x_0 不取极值，与假设矛盾。

【证 2】设 f 在点 x_0 取极大值。即 $f(x)\le f(x_0), x\in U(x_0)$。因此当 $x>x_0$ 时，

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，由保不等式性

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

同理又可得，$f'_-(x_0)\ge 0$。由 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$ 得

$$f'(x_0)=0$$

第 06 章　微分中值定理及其应用

【01】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

【解】由麦克劳林公式得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\text{，}\quad e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

【02】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}\text{。}$$

【或】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{6}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

【或】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

【03】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

【解】 原式=$\lim\limits_{x\to 0}\cos x\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{6}$$

【04】求极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

【解 1】$\left[\frac{\tan x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{\ln(\frac{\tan x}{x})}{x^2}}$ 而

$$\ln\frac{\tan x}{x}=\ln\frac{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x}=\ln(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))\sim\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\tan x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{3}$$

因此$I=e^{\frac{1}{3}}$

【解 2】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}$$

因此$I=e^{\frac{1}{3}}$

【05】求极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

【解】Taylor 展开

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

$$\tan(\tan x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)=x+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=2$$

【06】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

【解】当 $x\to\infty$ 时，$\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}>0$，故

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left((1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right)^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e^1=e$$

【07】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，且 $g(0)=g'(0)=0,g''(0)=2$，求 $f'(0)$。

【解】因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{g(x)}{x^2}$$

又 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续（因为可导），所以 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$。

由洛必达法则得

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=1\text{。}\end{aligned}$$

【08】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$，且 $g(1)=g'(1)=0,g''(1)=2$，求 $f'(1)$。

【解】 因为

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

所以由洛必达法则得

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}=\frac{1}{2}g''(1)=1$$

【09】证明：当 $x>0$ 时，$0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1$

【证】对 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $[0,x]$ 用 Lag 中值定理

$$f(x)-f(0)=\ln(1+x)=f'(\xi)(x-0)=\frac{x}{1+\xi},\ \xi\in(0,x)$$

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1+\xi}{x}=\frac{1}{x}+\frac{\xi}{x},\quad 0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{\xi}{x}<1$$

【10】设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并 $\exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$。证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$。

【证】$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上用 Lag 定理，$\exists\xi_1\in(a,c)$，使得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a)$$

由于 $f(a)=0,f(c)>0,c-a>0$，故 $f'(\xi_1)>0$。

$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上用 Lag 定理，$\exists\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c)$$

由于 $f(b)=0,f(c)>0,b-c>0$，故 $f'(\xi_2)<0$。

因 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$，$f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上可导，$f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再用 Lag 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)\left(\xi_2-\xi_1\right)$$

得 $f''(\xi)<0$。

【11】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导。若有 $f(a)=f(b)=0, f'(a)\cdot f'(b)>0$ ，则存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f''(\xi)=0$ 。

【证 1】 不妨假设 $f'(a), f'(b)>0$ ，则由导数定义和极限保号性可知，存在

$x_1, x_2\in(a,b), x_1<x_2$ ，使得

$$f(x_1)>f(a)=0, f(x_2)<f(b)=0$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故由介值定理可知存在 $c\in(x_1,x_2)$ ，使得

$$f(c)=0$$

在 $[a,c],[c,b]$ 上对函数应用由罗尔定理，知存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$ ，使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

那么对函数 f' 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 再应用罗尔定理，则存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得

$$f''(\xi)=0$$

【证 1】 设 $f(x)\not\equiv 0$ ，不妨 $f(c)>0$ ， $a<c<b$ ，

则由 Lag 定理，

$$f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)\Rightarrow f'(\eta)<0, c<\eta<b$$

又不妨设 $f'(a), f'(b)>0$ ，对 $f'(x)$ 在 $[a,\eta],[\eta,b]$ 上用根的存在定理

$$f'(a)>0, f'(\eta)<0\Rightarrow f'(\xi_1)=0, a<\xi_1<\eta$$

$$f'(b)>0, f'(\eta)<0\Rightarrow f'(\xi_2)=0, \eta<\xi_2<b$$

对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用 Rolle 定理

$$f''(\xi)=0, \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$$

【证 3】 $f(a)=f(b)=0$ ，在 $[a,b]$ 用 Rolle 定理

$$f'(c)=0, a<c<b$$

对 $f'(x)$ 在 $[a,c],[c,b]$ 上用 Lag 定理

$$f'(c)-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a)\Rightarrow f''(\xi_1)<0, a<\xi_1<c$$

$$f'(b)-f'(c)=f''(\xi_2)(b-c)\Rightarrow f''(\xi_2)>0, c<\xi_2<b$$

由导数介值定理$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$

$$f''(\xi)=0$$

【12】设 f 在$U(x_0)$一阶可导，在点x_0二阶可导。若$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则f在x_0取得严格极小值。

【证 1】由条件可得 f 在 x_0 处的二阶泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

由于 $f'(x_0)=0$，因此

$$f(x)-f(x_0)=\left[\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1)\right](x-x_0)^2$$

由 $f''(x_0)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}o(1)=0$，故$\exists\delta>0$，当$x\in U^0(x_0;\delta)$时，有

$$\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1)>0$$

从而$f(x)-f(x_0)>0$，说明 f 在x_0取得严格极大值。

【证 2】 $$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0,$$

由保号性

$$f'(x)<0, x\in(x_0-\delta_1,x_0)\text{ 和 }f'(x)>0, x\in(x_0,x_0+\delta_2)$$

由极值的第一充分条件得证。

【证 3】 用洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2}f''(x_0)>0$$

由保号性，$f(x)>f(x_0), x\in U^0(x_0,\delta)$

【13】证明导数极限定理：设函数 f 在点 x_0 的某右邻域$[x_0,x_0+\delta)$上连续，在$(x_0,x_0+\delta)$

上可导，若导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的右极限 $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 存在，则 f 在点 x_0 的右导数一定存在，且 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$.

【证】取 $x\in(x_0,x_0+\delta)$, $f(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上满足拉格朗日定理条件,则存在 $\xi(x)\in(x_0,x)$ ，使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'[\xi(x)]$$

当 $x\to x_0^+$ 时， $\xi(x)\to x_0$ ，上式两边取极限得

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+} f'\left[\xi(x)\right]\overset{注}{=}\lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=f'(x_0+0)$$

【注】 ξ 是 x 的函数 $\xi=\xi(x)$ ，这里用了变量替换法（即复合函数极限定理 1)，其中三个条件是：

（1） $\lim\limits_{u\to x_0^+} f'(u)$ 存在，（2） $\lim\limits_{x\to x_0^+}\xi(x)=x_0$ ，（3） $\xi(x)\neq x_0$

因此， $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'[\xi(x)]=\lim\limits_{u\to x_0^+} f'(u)$

【14】设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$$

（1）求导函数 $f'(x)$；

（2）证明 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 不连续;

（3）证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域不单调。

【解】　(1)　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2x\sin x-\cos\dfrac{1}{x} & , x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & , x=0\end{cases}$$

(2) 易知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 不连续；[需要简单证明]

(3) $f'(x)$在点$x=0$的任何邻域都不能保持相同符号。事实上，对一切正整数k有

$$f'(\frac{\pm 1}{2k\pi})=-\frac{1}{2}<0, f'(\frac{\pm 1}{2k\pi+\pi})=\frac{3}{2}>0$$

而$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\pm 1}{2k\pi}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\pm 1}{2k\pi+\pi}=0$。

【15】求极限$I=\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})]$。

【解】 由归结原则得

$$I=\lim_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})]=\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t\ (1+t)}=\frac{1}{2}$$

【16】证明：当$h>-1,h\neq 0$时，有不等式$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$。

【证】令$f(x)=\ln(1+x)$，由 Lag 定理

$$f(h)-f(0)=f'(\theta h)h, 0<\theta<1$$

$$\ln(1+h)=\frac{h}{1+\theta h}$$

当$h>0$时，$1<1+\theta h<1+h\Rightarrow\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$

当$-1<h<0$时，$0<1+h<1+\theta h<1\Rightarrow\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$

【17】设$f(x)$是开区间(a,b)上的凸函数，证明：（1）f在(a,b)内的任一点都存在左、右导数；（2）f在(a,b)上连续。

【证】（1）首先证明对任意$x_0\in(a,b)$弦斜率函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

当$x>0$时是有下界的增函数。

$\forall x_1<x_2$，由凸

$$F(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leq\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=F(x_2)$$

任取固定的$x'<x_0$，又由凸

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = F(x), (x>x_0)$$

由单调有界定理

$$f_-'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} F(x)\text{存在}$$

同理$f_+'(x_0)$存在。

(2) 对任意$x_0\in(a,b)$，由$f_+'(x_0)$存在

$$f(x)=f(x_0)+f_+'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), x\to x_0^+$$

得$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，即$f$在$x_0$右连续。同理$f$在$x_0$左连续。因此$f$在$(a,b)$上连续。

【18】求$y=x^5-5x^4+5x^3+1$在$[-1,2]$上的最大值与最小值。

【解】 $$y'=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x-1)(x-3)$$

令$y'=0$得驻点$x=0,1,3$．计算 ······································3

$$y(-1)=-10，\quad y(0)=1，\quad y(1)=2，\quad y(2)=-7，$$

所以最大值 $y(1)=2$，最小值 $y(-1)=-10$。

【19】求$f(x)=2x^3-x^4$的极值。

【解】 $f'(x)=6x^2-4x^3=2x^2(3-2x)=0$，得稳定点$x=0,\frac{3}{2}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	—
$f(x)$	↗	无极值	↗	极大值$27/16$	↘

【或】$f'(x)=6x^2-4x^3=2x^2(3-2x)=0$，得稳定点$x=0,\frac{3}{2}$

又 $f''(x)=12x-12x^2=12x(1-x)$， $f'''(x)=12(1-2x)$

$f''(0)=0, f'''(0)\ne 0$，所以f在$x=0$不取极值。

$f''(\frac{3}{2})=-9<0$，所以f在$x=\frac{3}{2}$取极大值$f(\frac{3}{2})=\frac{27}{16}$。

【20】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 具有二阶导数，且 $f''(x)\ge 0$，证明对 $[a,b]$ 内任意 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\ge f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$。

【证】 第一步

记 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$，下面证明 $\forall x\in[a,b]$，有

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

由 Taylor 展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

第二步

$$f(x_i)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$$

上式两边乘 λ_i 再求和

$$\sum\lambda_i f(x_i)\ge f(x_0)\sum\lambda_i+f'(x_0)\sum\lambda_i(x_i-x_0)$$

注意到

$$\sum\lambda_i=1 \text{和} \sum\lambda_i(x_i-x_0)=\sum\lambda_i x_i-x_0\sum\lambda_i=x_0-x_0=0$$

于是

$$\sum\lambda_i f(x_i)\ge f(x_0)=f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)$$

【注】第一步也可如下证

由 $f''(x)\ge 0$，知 $f'(x)$ 递增，由 Lag 定理

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$$

当 $x_0<x$ 时，$\xi\in[x_0,x]$，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\ge f'(x_0)$，于是

$$f(x)-f(x_0)\ge f'(x_0)\left(x-x_0\right)$$

当 $x<x_0$ 时，$\xi\in[x,x_0]$，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\le f'(x_0)$，于是

$$f(x)-f(x_0)\ge f'(x_0)\left(x-x_0\right)$$

总之 $f(x)-f(x_0)\ge f'(x_0)\left(x-x_0\right)$ 成立，对 $x=x_0$ 也成立。

【21】讨论函数 $y=\dfrac{(1+x)^2}{4(1-x)}$ 的图像，并作图。

【解】定义域 $x\ne1$。$f(-1)=0, f(0)=\dfrac{1}{4}$

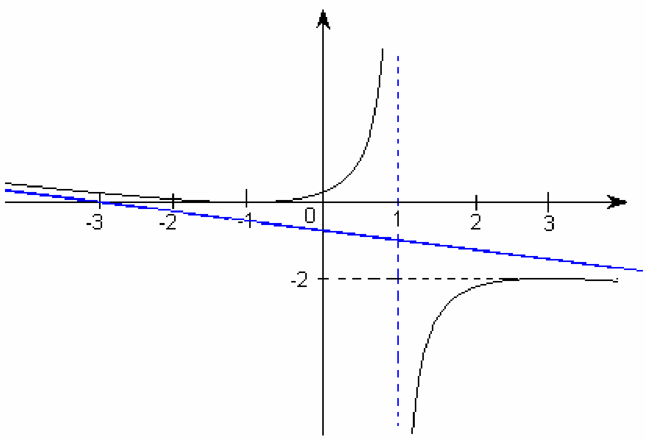
$$y'=\frac{(3-x)(1+x)}{4(1-x)^2},\quad y''=\frac{2}{(1-x)^3}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	−	0	+	+	0	−
y''	+	+	+	−	−	−
y	凸减	极小 0	凸增	凹增	极大−2	凹减

$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$， $x=1$ 为竖直渐近线。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{4},\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+\frac{1}{4}x\right]=-\frac{3}{4}$$

$y=-\dfrac{1}{4}(x+3)$ 为斜渐近线。



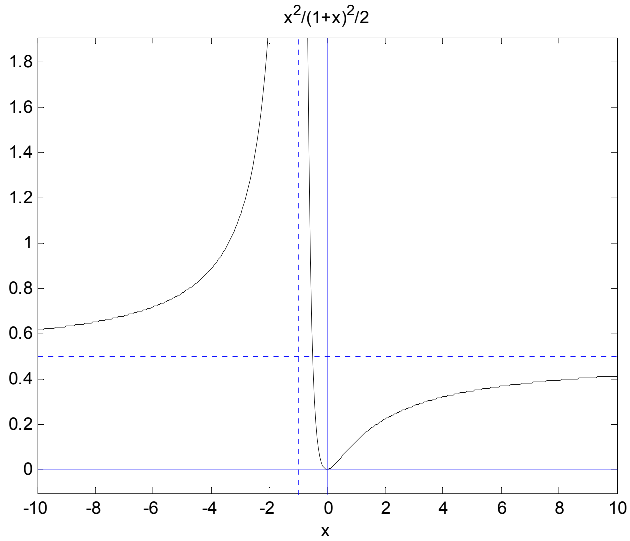
【22】讨论函数 $y=\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}$ 的图像，并作图。

【解】定义域 $x \neq -1$。$y' = \dfrac{x}{(1+x)^3}$，$y'' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$，$y'' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
y'	+	—	0	+	+	+
y''	+	+	+	+	0	—
y	凸增	凸减	极小 $(0,0)$	凸增	拐点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{18}\right)$	凹增

$\lim\limits_{x\to-1} y = +\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} y = \dfrac{1}{2}$，渐近线 $x = -1, y = \dfrac{1}{2}$。



【23】证明：方程 $x^3 - 3x + c = 0$（c 为常数）在区间 $[0\,,1]$ 内不可能有两个不同的实根。

【证】反证。假设 $f(x) = x^3 - 3x + c$ 在 $[0\,,1]$ 内有两个不同的零点 $x_1 < x_2$，由 Rolle 中值定理，$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$，使 $f'(\xi) = 0$。但 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 的零点只有 ± 1，矛盾。

【24】设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，证明 f 在 I 的任一内点（非区间端点）上连续。

【证】(I) 首先证明对任意固定的 $x_0 \in I$ 弦斜率函数 $k(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 是增函数。这一点由凸函数的充要条件：对 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

易知。

（II）其次证明对I的任一内点x_0，$f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$都存在。当$x\to x_0-$时，由$k(x)$是增函数且$k(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$有界（这里任取$x_2>x_0$固定），由单调有界定理，得$\lim\limits_{x\to x_0-}k(x)=f'_-(x_0)$存在。同理$f'_+(x_0)$存在。

（III）最后证明f在I的任一内点上连续。由$\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$存在，即$f(x)=f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0)$，即得$f(x)$在$x_0$左连续。同理由$f'_+(x_0)$存在，得$f(x)$在$x_0$右连续。因此$f(x)$在$x_0$处连续。

【25】证明不等式　$\ln(x+y)\ge\ln\sqrt{xy}+\ln 2\qquad(x,y>0)$。

【证】 令$f(t)=-\ln t\qquad(t>0)$。则

$$f'(t)=-\frac{1}{t}，\ f''(t)=\frac{1}{t^2}>0，$$

那么$f(t)$在$(0,+\infty)$上为凸函数。所以对任意$x,y>0$，有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\ge f(\frac{x+y}{2})，$$

即　$\dfrac{-\ln x-\ln y}{2}\ge-\ln\dfrac{x+y}{2}$，

亦即　$\ln(x+y)\ge\ln\sqrt{xy}+\ln 2\qquad(x,y>0)$。

【26】设函数f在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=f(1)=0$，且$\exists\ x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)>x_0$。证明：(1) $\exists\ \eta\in(0,1)$，使$f(\eta)=\eta$；(2) $\exists\ \xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=1$.

【证】作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，

由$F(x_0)=f(x_0)-x_0>0$及$F(1)=f(1)-1=-1<0$，由介值定理知：

$$\exists\ \eta\in[x_0,1]，使F(\eta)=0$$

又$F(0)=0$，故根据罗尔定理，

$$\exists\ \xi\in[0,\xi_1]，使F'(\xi)=f'(\xi)-1=0，得证。$$

【27】应用函数的凸性证明：对任意的非负实数a,b，有

$$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \arctan a + \arctan b 。$$

【证】设 $f(x)=\arctan x \quad (x>0)$

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}，\quad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}<0 \quad (x>0)。$$

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹函数，则由凹函数的性质，对任意 $a,b\in(0,+\infty)$ 有

$$f(\frac{a+b}{2}) \ge \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

即

$$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \arctan a + \arctan b 。$$

第 07 章　实数的完备性

【01】设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，但非无穷大量。证明：存在两个子列，一个是无穷大量，另一个是收敛子列。

【证】（1）$\{x_n\}$ 无界：$\forall G>0$，$\exists n\in N_+$，使得 $\left|x_n\right|>G$

取 $G=1$，则 $\exists\, x_{n_1}$，使 $\left|x_{n_1}\right|>1$；

取 $G=2$，则 $\exists\, x_{n_2}$，$n_2>n_1$，使 $\left|x_{n_2}\right|>2$（否则，如果对所有 $n>n_1$，都有 $\left|x_n\right|\le 2$，则 $\{x_n\}$ 有界，矛盾）

如此继续下去，可得子列 $\{x_{n_k}\}$，$\left|x_{n_k}\right|>k(k=1,2,\cdots)$

易知 $\{x_{n_k}\}$ 为无穷大量。

（2）$\{x_n\}$ 非无穷大量：$\exists\, M$，对 $\forall\, N_k$，$\exists\, n_k>N_k$，使 $\left|x_{n_k}\right|\le M$。

取 $N_1=1$，$\exists\, n_1>1$，$\left|x_{n_1}\right|\le M$；

取 $N_2=n_1$，$\exists\, n_2>n_1$，$\left|x_{n_2}\right|\le M$；

如果继续下去，得子列 $\{x_{n_k}\}$，$\left|x_{n_k}\right|\le M(k=1,2,\cdots)$，$\{x_{n_k}\}$ 有界。

由致密性定理，$\{x_{n_k}\}$ 有收敛子列，这个收敛子列也是 $\{x_n\}$ 的子列。

【02】设 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上连续，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 都存在且有限。（提示使用一致连续性定理）

【证】充分性。定义 $f(a)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)$，$f(b)=\lim\limits_{x\to b-} f(x)$，则 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，由一致连续性定理即 Cantor 定理，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，从而在 (a,b) 上一致连续。

必要性。由 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x',x''\in(a,b)$ 只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。特别地取 $x',x''\in(a,b)$ 并满足 $x'-a<\delta$，$x''-a<\delta$，此时 $|x'-x''|<\delta$，当然有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛准则，$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ 存在。同理 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 也存在。