

曲线积分与曲面积分练习题

答案

班级	姓名	学号	组号		
题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 若曲线 L 是上半椭圆 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ 取顺时针方向, 则曲线积分 $\int_L y dx - x dy = \underline{\pi ab}$.

2. 已知曲线积分 $\int_L x\varphi(y) dx + x^2 y dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(0) = 0, \varphi(y)$ 有一阶连续导数, 则 $\int_{(0,1)}^{1,2} x\varphi(y) dx + x^2 y dy = \underline{2}$.

3. 设曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上的点的外法向量的方向余

弦, 则 $\oiint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \underline{4\pi}$.

4. 设向量场 $\vec{A} = (x+y)\vec{i} + xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$, 则 $\operatorname{div} \vec{A} = \underline{1+x+2xz}$; 设向量场

$\vec{A} = (3z-2y)\vec{i} + (4x-5z)\vec{j} + (y-3x)\vec{k}$, 则 $\operatorname{rot} \vec{A} = \underline{6\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}}$.

5. 已知 $du(x, y) = xy^2 dx + x^2 y dy$, 则 $u(x, y) = \underline{\frac{1}{2}x^2 y^2 + C}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 如果 $(2ax^3y^3 - 3y^2 + 5) dx + (3x^4y^2 - 2bxy - 4) dy$ 是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 (B)

(A) $a=3, b=2$;

(B) $a=2, b=3$;

(C) $a=1, b=2$;

(D) $a=2, b=1$.

2. 设 Σ 为 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 平面上方部分的曲面, 则 $\iint_{\Sigma} dS =$ (D)

$$(A) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho,$$

$$(B) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho,$$

$$(C) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2-\rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho,$$

$$(D) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho,$$

3、设有向曲面 $\Sigma = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ ，方向取上侧，则下述曲面积分不为零的是 (D)

$$(A) \iint_{\Sigma} x^2 dydz;$$

$$(B) \iint_{\Sigma} zdzdx;$$

$$(C) \iint_{\Sigma} y^3 dx dy;$$

$$(D) \iint_{\Sigma} x dy dz.$$

4、设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，其周长记为 a ，则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ (C)

$$(A) 12a;$$

$$(B) 0;$$

$$(C) 144a;$$

$$(D) a.$$

5、3、设曲面 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ ，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则有 (A)

$$(A) \iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS;$$

$$(B) \iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS;$$

$$(C) \iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS;$$

$$(D) \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS;$$

三、计算题 (本题共 7 小题， 每小题 6 分， 满分 42 分)

1、计算 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ ，其中 L 是圆弧 $\rho = 2 \cos \theta$. (作业册 P46 第 3 题) (答案: 8)

2、计算 $\int_L (2y + y^3) dx + (4x + 3xy^2) dy$, 其中 L 是沿曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 从点 $A(0,1)$ 到

$B(1,0)$ 的有向弧. (作业册 $P50$ 第 2 题) (答案: $-\frac{\pi}{2}$)

3、计算 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向为逆时针方向.

(作业册 $P52$ 第 7 题) (答案: $-\pi$)

4、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, Σ 为立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界.

(高等数学辅导 (张兴永老师主编) P343 第 6 题) (答案: $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$)

5、计算 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 的外侧.

(高等数学教材 P250 第 4 (4) 题) (答案: $\frac{2}{15}$)

6、计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + (z+1)^2 dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取下侧.

(作业册 P57 第 4 题) (答案: $\frac{\pi}{2}$)

7、求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的质心的坐标.

(高等数学教材 P250 第 8 题) (答案: $(0, 0, \frac{a}{2})$)

四、综合题（本题共 2 小题， 每小题 9 分， 满分 18 分）

1. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y) dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1) 证明 :对右半平面 $x > 0$ 内任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y) dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$.

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(高等数学辅导 (张兴永老师主编) P333 例题 10.29) (答案: $\varphi(y) = -y^2$)

2、计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, 其中 Σ 为曲面 $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} (z \geq 0)$ 的上

侧.

(高等数学辅导 (张兴永老师主编) P336 例题 10.33) (答案: 2π)