资源与地球科学学院2019~2020学年

第二学期高等数学A3多元函数微分单元测试（3）

1 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1，0，1)$处，沿从点A指向点$B(3，-2，2)$方向上的方向导数为____________________.

2 函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$M(1，1，1)$处，沿曲面$2z=x^2+y^2$在该点的外法线方向$\vec{l}$上的方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=$____________.

3 设可微函数$f(x，y)$在点$P_0(x_0，y_0)$处沿$\vec{l}_1=(1，-1)$的方向导数为$\sqrt{2}$，沿$\vec{l}_2=(0，-2)$的方向导数为3，则$f(x，y)$在点$P_0(x_0，y_0)$处沿$\vec{l}=(-2，3)$的方向导数为__________.

4 曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1,\\ x-2y+z=0\end{cases}$在点$(1，1，1)$处的切线方程为__________________.

5 由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周所得的旋转面在点$M(0，\sqrt{3}，\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为____________________.

6 曲线L：$\begin{cases}3x^2+2y^2-2z-1=0,\\ x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}$在点$M(1，1，2)$处的切线方程

7 椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程为____________________与_____________________.

8 若可微函数$z=f(x，y)$的全微分$\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，则（　　　）.

（A）$f(0，0)$为极大值　　（B）$f(0，0)$为极小值

（C）$f(0，0)$不是极值　　（D）不能判断$f(x，y)$在点$(0，0)$处是否取极值

9 可微函数$z=f(x,y)$的微分为$dz=xy(8-3x-2y)dx+x^2(4-x-2y)dy$，则（　　）

(A) $f(2,1)$ 为极小值　　(B) $f(2,1)$ 为极大值

(C) $f(2,1)$ 不是极值　　(D)无法判断 $f(2,1)$ 是否为极值

1　已知曲面 $4x^2+y^2-z^2=1$ 上的点 P 处的切平面 π 平行于平面 $2x-y+z=1$，求切平面 π 的方程.

2　在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x，y，z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$ 的方向导数最大.

3　设某工厂生产 A、B 两种产品，当这两种产品的产量分别为 x 和 y

（单位为吨）时总收益函数为

$$R(x，y)=15x+34y-x^2-2xy-4y^2-36 \text{（万元）}.$$

已知生产产品 A 时，每吨需支付排污费 1 万元；生产产品 B 时，每吨需支付排污费 2 万元。若要限制排污费为 14 万元，试问这两种产品的产量各为多少时，工厂的总利润最大？最大总利润为多少？

4　某工厂计划投资 144（百万元）用于购进 A、B 两种生产线，A 生产线每套售价 4（百万元），B 生产线每套售价 3（百万元）. 若购进 x 套 A 生产线和 y 套 B 生产线，可使该厂新增年产值

$$L(x,y)=\frac{2\sqrt{6}}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \text{（百万元）}.$$

问该厂应当分别购进 A、B 两种生产线个多少套，能使该厂新增年产值最大，并求此最大值.

5　已知曲面方程为 $xyz=1$（$x>0，y>0，z>0$），

在曲面上求一点，使其到原点的距离最小；

6　设曲面 S：$(x-y)^2-z^2=1$，

（1）求曲面 S 在点 $M(1，0，0)$ 处的切平面 π 的方程；

（2）证明原点到曲面 S 上的点的最小距离等于原点到切平面 π 的距离.

7　函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数，且 $f(0,0)=0$，当 $x^2+y^2\le 5$ 时，$\left|\mathrm{grad}f(x,y)\right|\le 1$，求证：$\left|f(1,2)\right|\le\sqrt{5}$.

注：考察方向导数的计算。

解：$\mathbf{grad}u(x，y，z)=(\frac{\partial u}{\partial x}，\frac{\partial u}{\partial y}，\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}(1，\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}，\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}})$，

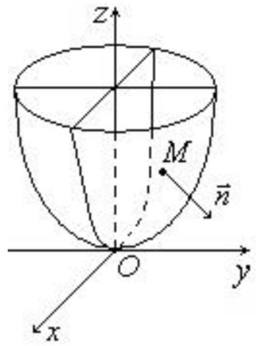
$$\mathbf{grad}u(1，0，1)=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}(1，\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}，\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}})\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}(1，0，1).$$

$\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(2，-2，1)$，$\vec{e}_l=\frac{1}{3}(2，-2，1)$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,0,1)}=\mathbf{grad}u(1，0，1)\cdot\vec{e}_l=\frac{1}{2}(1，0，1)\cdot\frac{1}{3}(2，-2，1)=\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}.$$

注：考察方向导数的计算。

解：$\mathbf{grad}u(1，1，1)=(\frac{\partial u}{\partial x}，\frac{\partial u}{\partial y}，\frac{\partial u}{\partial z})\Big|_M=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x，y，z)\Big|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}(1，1，1)$.



曲面 $2z=x^2+y^2$ 在 M 处的法向量为

$$\vec{n}=\pm(2x，2y，-2)\Big|_M=\pm 2(1，1，-1),$$

由于取外法向量，如图有 $\cos\gamma<0$，因此外法向量为

$\vec{n}=2(1，1，-1)$，则取 $\vec{l}=(1，1，-1)$，

此时 $\vec{e}_l=\frac{1}{\sqrt{3}}(1，1，-1)$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=\mathbf{grad}u(1，1，1)\cdot\vec{e}_l=\frac{1}{\sqrt{3}}(1，1，1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1，1，-1)=\frac{1}{3}.$$

注：考察方向导数的计算。

解：因为 $\vec{e}_{l_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1，-1)$，$\vec{e}_{l_2}=(0，-1)$，$\vec{e}_l=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2，3)$，所以

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}\Big|_{P_0}=f'_x(P_0)\frac{1}{\sqrt{2}}-f'_y(P_0)\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}，即\ f'_x(P_0)-f'_y(P_0)=2；$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2}\Big|_{P_0}=f'_x(P_0)0-f'_y(P_0)=3，即-f'_y(P_0)=3，于是\ f'_x(P_0)=-1、f'_y(P_0)=-3，$$

故 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f'_x(P_0)(\frac{-2}{\sqrt{13}})+f'_y(P_0)\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{2-9}{\sqrt{13}}=-\frac{7}{\sqrt{13}}$.

注：考察偏导数的几何应用。

解：（方法 1）取 $F(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+2z^2-4$、$G(x,\ y,\ z)=x-2y+z$，则切向量

$$\vec{T}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(10,\ 2,\ -6)=2(5,\ 1,\ -3),$$

切线方程为 $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

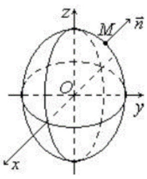
（方法 2）先求椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切平面，为此法向量为

$\vec{n}=(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ z)\Big|_{(1,1,1)}=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 2)$，切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$，即

$x+y+2z-4=0$. 由于曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1,\\ x-2y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切线既在切平面上也

在平面 $x-2y+z=0$ 上，所以切线方程为 $\begin{cases}x+y+2z-4=0\\ x-2y+z=0\end{cases}$.

注：考察偏导数的几何应用。



解：旋转面方程为 $3x^2+2y^2+3z^2=12$，设

$F(x,\ y,\ z)=3x^2+2y^2+3z^2-12$，则点 M 处的法向量为

$$\vec{n}=\pm(F'_x,\ F'_y,\ F'_z)\Big|_M=\pm(6x,\ 4y,\ 6z)\Big|_M=\pm 2(0,\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2}),$$

由于要求取外法向量，如图有 $\cos\gamma>0$，于是外法向量 $\vec{n}=2(0,\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2})$，

外侧的单位法向量为 $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(0,\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

注：考察偏导数的几何应用。

解：设 $F(x, y, z)=3x^2+2y^2-2z-1$、$G(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4y-2z+2$，则切向量

$$\vec{T}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{(1,1,2)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6x & 4y & -2\\ 2x & 2y-4 & 2z-2\end{vmatrix}_{(1,1,2)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}$$

$=(4, -16, -20)=4(1, -4, -5)$，

切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{-5}$.

注：考察偏导数的几何应用。

解：设切点的坐标为 $M(x_0, y_0, z_0)$，则法向量 $\vec{n}=2(x_0, 2y_0, z_0)$，而已知平面 $x-y+2z=0$ 的法向量 $\vec{n}_1=(1, -1, 2)$，由 $\vec{n}//\vec{n}_1$，有 $\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{-1}=\dfrac{z_0}{2}$，即 $x_0=-2y_0$、$z_0=-4y_0$，将其代入到椭球面方程之中，有 $4y_0^2+2y_0^2+16y_0^2=1$，即 $22y_0^2=1$，得 $y_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{22}}$，$x_0=\mp\dfrac{2}{\sqrt{22}}$，$z_0=\mp\dfrac{4}{\sqrt{22}}$，所以所求切平面方程为

$$(x\pm\frac{2}{\sqrt{22}})-(y\mp\frac{2}{\sqrt{22}})+2(z\pm\frac{4}{\sqrt{22}})=0,$$

化简为 $x-y+2z=\pm\dfrac{11}{\sqrt{22}}$，即 $x-y+2z=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

注：考察多元函数极值的判定。

解：由 $\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，得 $f'_x(x, y)=y$，$f'_y(x, y)=x$.

（方法 1）$f'_x(0, 0)=0$，$f'_y(0, 0)=0$，$A=f''_{xx}(0, 0)=0$、$B=f''_{xy}(0, 0)=1$、$C=f''_{yy}(0, 0)=0$，$AC-B^2=-1<0$，所以 $f(0, 0)$ 不是极值，故选（C）.

（方法 2）$f(x, y)=xy+C$，$f(0, 0)=C$，在点 $(0, 0)$ 的任何邻域内，函数 $f(x, y)$ 既可以取得大于 C 的值（沿直线 $y=x$，$f(x, y)=x^2+C$），又可以取得小于 C 的值（沿直线 $y=-x$，$f(x, y)=-x^2+C$），所以 $f(0, 0)$ 不是极值，故选（C）.

解：$f_x(x,y)=xy(8-3x-2y), f_y(x,y)=x^2(4-x-2y)$，则 $f_x(2,1)=0, f_y(2,1)=0$

$f_{xx}(x,y)=8y-6xy-2y^2, f_{xy}(x,y)=8x-3x^2-4xy, f_{yy}(x,y)=-2x^2$

$A=f_{xx}(2,1)=-6, B=f_{xy}(2,1)=-4, C=f_{yy}(2,1)=-8$

$AC-B^2>0, A<0$，故 $f(2,1)$ 为极大值，选(B)

注：考察偏导数的几何应用。

解：设切点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$， $F(x, y, z)=4x^2+y^2-z^2-1$，则法向量

$$\vec{n}=(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))=(8x_0, 2y_0\ \ -2z_0)=2(4x_0, y_0\ \ -z_0).$$

由切平面 π 平行于平面 $2x-y+z=1$，有 $\vec{n}$ 平行于平面的法向量 $\vec{n}_1=(2, -1, 1)$，于是 $\dfrac{4x_0}{2}=\dfrac{y_0}{-1}=\dfrac{-z_0}{1}$，即 $y_0=-2x_0$、$z_0=-2x_0$，代入到曲面方程 $4x^2+y^2-z^2=1$ 之中，有 $4x_0^2=1$，得 $x_0=\pm\dfrac{1}{2}$、$y_0=\mp1$、$z_0=\mp1$，切平面 π 的方程为:

$2(x\mp\dfrac{1}{2})-(y\pm1)+(z\pm1)=0$，即 $2x-y+z=\pm1$.

注：考察方向导数，梯度的概念，条件极值。

解：由 $\mathbf{grad}f(x, y, z)=(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z})=(2x, 2y, 2z)$， $\vec{e}_l=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$，有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\mathbf{grad}f(x, y, z)\cdot\vec{e}_l=\sqrt{2}(x-y).$$

按题意，作拉格朗日函数 $L(x, y, z)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$，由

$\begin{cases} L_x'=\sqrt{2}+4\lambda x=0, \\ L_y'=-\sqrt{2}+4\lambda y=0, \\ L_z'=2\lambda z=0, \\ 2x^2+2y^2+z^2=1, \end{cases}$ 得可能极值点 $M_1(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0)$ 及 $M_1(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0)$，而 $\dfrac{\partial f(M_1)}{\partial l}=\sqrt{2}$、$\dfrac{\partial f(M_2)}{\partial l}=-\sqrt{2}$，由于连续函数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$ 在有界闭曲面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上一定有最大（小）值，所以所求点为 $M_1(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0)$.

注：考察求条件极值的拉格朗日乘子法。

解：问题化为在条件 $x+2y=14$ 下，求利润函数

$$L(x,y)=R(x,y)-(x+2y)=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36$$

的最大值.

作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=L(x,y)+\lambda(x+2y-14)$，由

$$\begin{cases} F_x'=14-2x-2y+\lambda=0, \\ F_y'=32-2x-8y+2\lambda=0, \\ x+2y-14=0. \end{cases}$$

解得唯一可能极值点 $x=6$，$y=4$，又实际问题存在最大值，故当 $x=6$，$y=4$ 时，工厂获得最大利润.

此最大利润为 $L(6,4)=14\times6+32\times4-36-48-64-36=28$（万元）.

注：考察求条件极值的拉格朗日乘子法。

解：问题为在条件 $4x+3y=144$ 下，求函数 $L(x,y)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值.

作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+\lambda(4x+3y-144)$，设

$$\begin{cases} F_x'=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+4\lambda=0, & (1) \\ F_y'=\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+3\lambda=0, & (2) \\ 4x+3y=144, & (3) \end{cases}$$

由(1)、(2)得 $4x=9y$，代入（3）有 $12y=144$，得唯一可能极值点 $y=12$，$x=27$，根据实际意义可知 L 一定存在最大值，即分别购进 A 型生产线 27 套和 B 型生产线 12 套可使新增年产值最大，且新增年产值的最大值为 $L_{\max}=36$（百万元）.

注：考察条件极值问题。

解：（1）设(x,y,z)是曲面$xyz=1$上任一点，它到原点的距离为$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

作拉格朗日函数$F(x,y,z)=d^2+\lambda(xyz-1)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xyz-1)$，由

$$\begin{cases} F'_x=2x+\lambda yz, \\ F'_y=2y+\lambda xz, \\ F'_z=2z+\lambda xy, \\ xyz=1, \end{cases}$$

及$x>0$，$y>0$，$z>0$得唯一可能极值点$P_1(1,\ 1,\ 1)$，由于曲面$xyz=1$到原点的最小距离一定存在，所以$P_1(1,\ 1,\ 1)$是曲面到原点的最近点，且最小距离为$d_{\min}=\sqrt{3}$.

注：考察偏导数的几何应用，条件极值问题。

解：（1）设$F(x，y，z)=(x-y)^2-z^2-1$，则法向量为

$\vec{n}=(F'_x，F'_y，F'_z)\big|_M=2(x-y，y-x，-z)\big|_M=2(1，-1，0)$，切平面为

$(x-1)-(y-0)-0(z-0)=0$，即$x-y-1=0$.

（2）（方法 1）设$(x，y，z)$是曲面S上任意一点，它到原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

设$L(x，y，z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$，由

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda(x-y)=0, \\ L'_y=2y-2\lambda(x-y)=0, \\ L'_z=2z-2\lambda z=0, \\ (x-y)^2-z^2=1, \end{cases}$$

得可能极值点$P_1(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2}，0)$、$P_2(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，0)$，而$d(P_1)=d(P_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，根据实际意义，$d$有最小值，原点到曲面$S$上的点的最小距离等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，而（1）中切平面$\pi$到原点的距离为$\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以原点到曲面$S$上的点的最小距离等于原点到切平面$\pi$的距离.

（方法 2）设$P(x，y，z)$是曲面S上任意一点，则该点处的法向量为

$$\vec{n}=(F'_x，F'_y，F'_z)=2(x-y，y-x，-z).$$

以原点O为起点P为终点的向量$\overrightarrow{OP}=(x，y，z)$，由于曲面$S$上到原点最近距离处的点的法向量一点过原点，有$\vec{n}\,//\,\overrightarrow{OP}$，于是$\dfrac{x-y}{x}=\dfrac{y-x}{y}=\dfrac{-z}{z}$，且由$(x-y)^2-z^2=1$，解得$P_1(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2}，0)$、$P_2(-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}，0)$.

过P_1点作曲面S的切平面，由于$\vec{n}=(F'_x，F'_y，F'_z)\big|_{P_2}=2(1，-1，0)$，所以切平面方程为

$$(x-\frac{1}{2})-(y+\frac{1}{2})+0(z-0)=0，\text{即 } x-y-1=0，$$

这表明原点到曲面S上的点的最小距离等于原点到切平面π：$x-y-1=0$的距离.

证明：设函数$H(t)=f(t,2t)$，$t\in[0,1]$

则$H(t)=f(t,2t)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，利用拉格朗日中值定理，存在$\theta\in(0,1)$，使得$f(1,2)=H(1)=H(1)-H(0)=H'(\theta)=f_x(\theta,2\theta)+2f_y(\theta,2\theta)$

因此$\left|f(1,2)\right|=\left|f_x(\theta,2\theta)+2f_y(\theta,2\theta)\right|=\left|\left(f_x(\theta,2\theta),f_y(\theta,2\theta)\right)\cdot(1,2)\right|$

$$\le\left|\left(f_x(\theta,2\theta),f_y(\theta,2\theta)\right)\right|\cdot\left|(1,2)\right|=\sqrt{5}\left|\left(f_x(\theta,2\theta),f_y(\theta,2\theta)\right)\right|\le\sqrt{5}$$