

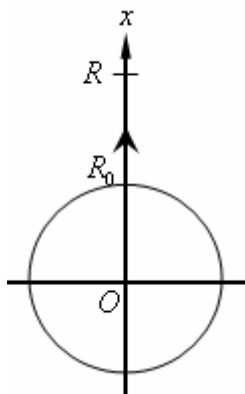
第 11 章 反常积分

§ 1 反常积分概念

【一】问题提出

在讨论定积分时有两个最基本的限制：积分区间的有穷性和被积函数的有界性，但在很多实际问题中往往需要突破这些限制，考虑无穷区间上的“积分”，或是无界函数的“积分”，这便是本章的主题。

【例 1】（第二宇宙速度问题）在地球表面垂直发射火箭(如图)，要使火箭克服地球引力无限远离地球，试问初速度 v_0 至少要多大？



设地球半径为 R_0 ，火箭质量为 m ，地面上的重力加速度为 g 。按万有引力定律，在距地心 $x(x \geq R)$ 处火箭所受的引力为 $F(x) = k \frac{mM}{x^2}$ 。由于 $mg = k \frac{mM}{R_0^2} \Rightarrow k = \frac{gR_0^2}{M}$ ，代入得

$$F(x) = \frac{mgR_0^2}{x^2}.$$

于是火箭从地面上升到距离地心为 $R(R > R_0)$ 处需作的功为

$$W(R) = \int_{R_0}^R \frac{mgR_0^2}{x^2} dx = mgR_0^2 \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right).$$

当 $R \rightarrow +\infty$ 时，其极限

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} W(R) = mgR_0$$

就是火箭无限远离地球需作的功. 我们很自然地会把这极限写作上限为 $+\infty$ 的“积分”:

$$\int_{R_0}^{+\infty} \frac{mgR_0^2}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R_0}^R \frac{mgR_0^2}{x^2} dx = mgR_0.$$

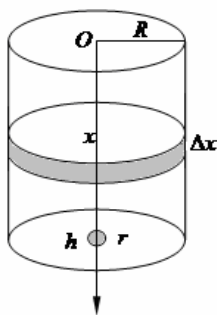
最后, 由机械能守恒定律可求得初速度 v_0 至少应使

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR_0.$$

用 $g = 9.18(m/s^2)$, $R_0 = 6.371 \times 10^6(m)$ 代入, 使得

$$v_0 = \sqrt{2gR_0} \approx 11.2(km/s).$$

【例 2】 圆柱形桶的内壁高为 h , 内半径为 R , 桶底有一半径为 r 的小孔. 试问从盛满水开始打开小孔直至流完桶中的水, 共需多少时间?



从物理学知道, 在不计摩擦力的情形下, 当桶内水位高度为 $(h-x)$ 时, 水从孔中流出的流速(单位时间内流过单位截面积的流量)为

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

其中 g 为重力加速度. (注: 上面公式由 $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-x)$ 得)

设在很小一段时间 dt 内, 桶中液面降低的微小量为 dx , 它们之间应满足

$$\pi R^2 dx = v\pi r^2 dt,$$

由此则有

$$dt = \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx, x \in [0, h].$$

所以流完一桶水所需时间在形式上亦可写成“积分”:

$$t_f = \int_0^h \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx.$$

但是在这里因为被积函数是 $[0, h)$ 上的无界函数, 所以它的确切含义应该是

$$\begin{aligned} t_f &= \lim_{u \rightarrow h} \int_0^u \frac{R^2}{r^2 \sqrt{2g(h-x)}} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow h} \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{R^2}{r^2} (\sqrt{h} - \sqrt{h-u}) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{R}{r}\right)^2. \end{aligned}$$

相对定积分(不妨称之为**正常积分**)而言, 上面两例分别提出了两类**反常积分**.

【二】 两类反常积分的定义

【定义 1】 设函数 f 定义在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上, 且在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f(x) dx = J, \quad (1)$$

则称此极限 J 为函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上的**无穷限反常积分**(简称**无穷积分**), 记作

$$J = \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (1')$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **收敛**. 否则, 称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **发散**.

类似地, 定义 f 在 $(-\infty, b]$ 上的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx. \quad (2)$$

定义 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (3)$$

其中 a 为任一实数, 当且仅当右边两个无穷积分都收敛时它才是收敛的.

注 无穷积分(3)的收敛性与收敛时的值, 都和实数 a 的选取无关.

【例 3】 讨论无穷积分 (p -积分)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (4)$$

的收敛性.

解 由于

$$\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(u^{1-p} - 1), & p \neq 1 \\ \ln u, & p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

因此无穷积分 (4) 当 $p > 1$ 时收敛, 其值为 $\frac{1}{p-1}$; 而当 $p \leq 1$ 时发散于 $+\infty$.

【例 4】 讨论下列无穷积分的收敛性:

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解 1) 由于无穷积分是通过变限定积分的极限来定义的, 因此有关定积分的换元积分法和分部积分法一般都可引用到无穷积分中来. 对于本例来说, 就有

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

从例 3 知道, 该无穷积分当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

2) 任取实数 a , 讨论如下两个无穷积分:

$$\int_{-\infty}^a \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{和} \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{u \rightarrow -\infty} (\arctan a - \arctan u) = \arctan a + \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{v \rightarrow +\infty} \int_a^v \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{v \rightarrow +\infty} (\arctan v - \arctan a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a, \end{aligned}$$

因此这两个无穷积分都收敛. 由定义 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^s \frac{dx}{1+x^2} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

注 由于上述结果与 a 无关, 因此若取 $a = 0$, 则可使计算过程更简洁些.

【定义 2】 设函数 f 定义在区间 $(a, b]$ 上, 在点 a 的任一右邻域内无界, 但在任何内闭区间 $[u, b] \subset (a, b)$ 上有界且可积. 如果存在极限

$$\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx = J, \quad (5)$$

则称此极限为**无界函数** f 在 $(a, b]$ 上的**反常积分**, 记作

$$J = \int_a^b f(x)dx, \quad (5')$$

并称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**. 否则, 称 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**.

在定义 2 中, 被积函数 f 在点 a 近旁是无界的, 这时点 a 称为 f 的**瑕点**, 而无界函数反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 又称为**瑕积分**.

类似地, 可定义瑕点为 b 时的瑕积分:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x)dx.$$

其中 f 在 $[a, b)$ 有定义, 在点 b 的任一左邻域内无界, 但在任何 $[a, u] \subset [a, b)$ 上可积.

若 f 的瑕点 $c \in (a, b)$, 则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (6)$$

其中 f 在 $[a, c) \cup (c, b]$ 上有定义, 在点 c 的任一邻域内无界, 但在任何 $[a, u] \subset [a, c)$ 和 $[v, b] \subset (c, b]$ 上都可积. 当且仅当右边两个瑕积分都收敛时, 左边的瑕积分才是收敛的.

又若 a, b 两点都是 f 的瑕点, 而 f 在任何 $[u, v] \subset (a, b)$ 上可积, 这时定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (7)$$

其中 c 为 (a, b) 内任一实数. 当且仅当(7)式右边两个瑕积分都收敛时, 左边的瑕积分才是收敛的.

【例 5】 计算瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 的值

解 被积函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0, 1)$ 上连续, 从而在任何 $[0, u] \subset [0, 1)$ 上可积, $x = 1$

为其瑕点. 依定义 2 求得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \arcsin u = \frac{\pi}{2}.$$

【例 6】 讨论瑕积分 (q -积分):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} (q > 0) \quad (8)$$

的收敛性.

解 被积函数在 $(0,1]$ 上连续, $x=0$ 为其瑕点. 由于

$$\int_u^1 \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q \neq 1 \\ -\ln u, & q = 1 \end{cases} \quad (0 < u < 1),$$

故当 $0 < q < 1$ 时, 瑕积分 (8) 收敛, 且

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q};$$

而当 $q \geq 1$ 时, 瑕积分 (8) 发散于 $+\infty$.

注 对于 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 结论同上。

【例 7】 计算 $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

解

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} -t^n de^{-t} = -t^n e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= n\Gamma(n) = n! \end{aligned}$$

§ 2 无穷积分的性质与收敛判别

【一】无穷积分的性质

由定义知道, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛与否, 取决于函数 $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ 在 $u \rightarrow +\infty$ 时是否存在极限. 因此可由函数极限的柯西准则

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) \text{ 存在} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists G > 0, \forall u_1, u_2 > G, \text{ 有 } |F(u_1) - F(u_2)| < \varepsilon$$

导出无穷积分收敛的柯西准则.

【定理 1】(柯西准则) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $G \geq a$, 只要 $u_1, u_2 > G$, 便有

$$\left| \int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

【性质 1】 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛, k_1, k_2 为任意常数, 则

$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)dx. \quad (1)$$

由定义立即得证。

【性质 2】 若 f 在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, $a < b$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同敛态(即同时收敛或同时发散), 且有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx, \quad (2)$$

其中右边第一项是定积分。

由 $\int_a^u f = \int_a^b f + \int_b^u f$ 两边取极限即得证。

性质 2 相当于定积分的积分区间可加性, 由它又可导出 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的另一充要条件:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_u^{+\infty} f(x)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{任给 } \varepsilon > 0, \text{ 存在 } G \geq a, \text{ 当 } u > G \text{ 时, 总有 } \left| \int_u^{+\infty} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 由 $\int_a^{+\infty} f = \int_a^u f + \int_u^{+\infty} f \Leftrightarrow \int_u^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^u f$ 得

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_u^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_a^u f = 0$$

反之, 若 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_u^{+\infty} f(x)dx = 0$, 这里默认了 $\int_u^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 所以 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

【性质 3】 若 f 在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 且有 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 亦必收敛, 并有

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx. \quad (3)$$

证 由 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 根据柯西准则(必要性), 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $G \geq a$, 当

$u_2 > u_1 > G$ 时, 总有

$$\int_{u_1}^{u_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

利用定积分的绝对值不等式, 又有

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

再由柯西准则(充分性), 证得 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

又因 $\left| \int_a^u f(x) dx \right| \leq \int_a^u |f(x)| dx$, 令 $u \rightarrow +\infty$ 取极限, 立刻得到不等式 (3)

当 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛时, 称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 为**绝对收敛**. 称收敛而不绝对收敛的无穷积分为**条件收敛**.

注 条件收敛的例子有 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, $\int_1^{+\infty} \sin^2 x dx$ 等等.

【二】非负函数无穷积分的收敛判别法

由于 $\Phi(u) = \int_a^u |f(x)| dx$ 是单调递增的, 因此 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \Phi(u)$ 存在即 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛的充要条件是 $\Phi(u) = \int_a^u |f(x)| dx$ 存在上界.

【定理 2】 (比较判别法) 设定义在 $[a, +\infty)$ 上的两个函数 f 和 g 都在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 且满足

$$|f(x)| \leq g(x), x \in [a, +\infty),$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 必收敛. 等价地, 当 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 必发散.

证 $\int_a^u |f(x)| dx \leq \int_a^u g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$, $\int_a^u |f(x)| dx$ 有上界.

或 由柯西准则证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists G \geq a, \forall u_1, u_2 > G$, 有 $\left| \int_{u_1}^{u_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$, 于是

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_{u_1}^{u_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$$

注 条件可改为: $|f(x)| \leq g(x), x \in [G, +\infty), G \geq a$

【例 1】 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

解 由于 $\left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}, x \in [0, +\infty]$, 以及 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 为收敛, 根据比较判别法,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 为绝对收敛.

推论 1 (比较原则的极限形式) 若 f 和 g 都在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, $g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c,$$

则有

- (i) 当 $0 < c < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态;
- (ii) 当 $c = 0$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 也收敛;
- (iii) 当 $c = +\infty$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 也发散.

证 当 $0 < c < +\infty$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c$, 对 $\varepsilon_0 = \frac{c}{2}$, $\exists G \geq a$, 当 $x > G$ 时, 有

$$\left| \frac{|f(x)|}{g(x)} - c \right| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow \frac{c}{2} g(x) < |f(x)| < \frac{3c}{2} g(x)$$

由比较判别法, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态;

其他两种情况类似可证 (作为作业)。

在推论 1 中, 选 $g(x) = \frac{1}{x^p}$ 得:

【推论 2】(柯西判别法) 设 f 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, 在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = \lambda.$$

则有

- (i) 当 $p > 1, 0 \leq \lambda < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛;
- (ii) 当 $p \leq 1, 0 < \lambda \leq +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散.

【例 2】 讨论下列无穷限积分的收敛性:

$$1) \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5 + 1}} dx.$$

解 本例中两个被积函数都是非负的。

1) 由于对任何实数 α 都有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x^\alpha e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0,$$

因此 1) 对任何实数 α 都是收敛的。

2) 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5 + 1}} = 1,$$

因此 2) 是发散的。

§ 3 瑕积分的性质与收敛判别

类似于无穷积分的柯西收敛准则以及其后的三个性质, 瑕积分同样可由函数极限

$\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ 的原意写出相应的命题。

【定理 1】 (柯西准则) 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ (瑕点为 a) 收敛的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$,

存在 $\delta > 0$, 只要 $u_1, u_2 \in (a, a + \delta)$, 总有

$$\left| \int_{u_1}^b f(x) dx - \int_{u_2}^b f(x) dx \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

【性质 1】 设函数 f_1 与 f_2 的瑕点同为 $x = a$, k_1, k_2 为常数, 则当瑕积分 $\int_a^b f_1(x) dx$ 与 $\int_a^b f_2(x) dx$ 都收敛时, 瑕积分 $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx$ 必定收敛, 并有

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx \quad (1)$$

【性质 2】 设函数 f 的瑕点为 $x = a$, $c \in (a, b)$ 为任一常数. 则瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^c f(x) dx$ 同敛态, 并有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

其中 $\int_c^b f(x) dx$ 为定积分。

【性质 3】 设函数 f 的瑕点为 $x = a$, f 在 $(a, b]$ 的任一内闭区间 $[u, b]$ 上可积. 则当 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛时, $\int_a^b f(x) dx$ 也必定收敛, 并有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3)$$

同样地, 当 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛时, 称 $\int_a^b f(x)dx$ 为**绝对收敛**. 又称收敛而不绝对收敛的瑕积分是**条件收敛**的.

判别瑕积分绝对收敛的比较法则及其推论如下:

【定理 1】(比较判别法) 设定义在 $(a, b]$ 上的两个函数 f 与 g , 瑕点同为 $x = a$, 在任何 $[u, b] \subset (a, b]$ 上都可积, 且满足

$$|f(x)| \leq g(x), x \in (a, b].$$

则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^b |f(x)|dx$ 必定收敛. 等价地, 当 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散时, $\int_a^b g(x)dx$ 亦必发散.

【推论 1】(比较判别法的极限形式) 又若 $g(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c$, 则有:

- (i) 当 $0 < c < +\infty$ 时, $\int_a^b |f(x)|dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态;
- (ii) 当 $c = 0$ 时, $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ 也收敛;
- (iii) 当 $c = +\infty$ 时, $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ 也发散.

在推论 1 中, 选用 $g(x) = \frac{1}{(x-a)^q}$, 则得

【推论 2】(柯西判别法) 设 f 是定义在 $(a, b]$ 上的函数, a 为其瑕点, 且在任何 $[u, b] \subset (a, b]$ 上可积. 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q |f(x)| = \lambda,$$

则有:

- (i) 当 $0 < q < 1$, $0 \leq \lambda < +\infty$ 时, $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛;
- (ii) 当 $q \geq 1$, $0 < \lambda \leq +\infty$ 时, $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散.

【例 1】 判别下列瑕积分的收敛性:

$$1) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} dx.$$

解 本例两个瑕积分的被积函数在各自的积分区间上分别保持同号 $-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上恒

为负, $\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ 在 $(1, 2]$ 上恒为正—所以它们的瑕积分收敛与绝对收敛是同一回事.

1) 此瑕积分的瑕点为 $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4}} \cdot \left| \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right| = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4x^{\frac{1}{4}}) = 0,$$

所以瑕积分 1) 收敛.

2) 此瑕积分的瑕点为 $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 1,$$

推知该瑕积分发散.

【例 2】 讨论 $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ 的收敛性.

解 $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$

(1) 讨论 $\int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

$p \geq 1$ 时, 是正常积分. $p < 1$ 时, 是瑕积分, $x = 0$ 是瑕点, 由

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-p} \cdot x^{p-1} (1-x)^{q-1} = 1$$

得 $p > 0$ 时收敛, 否则发散.

(2) $\int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

$q \geq 1$ 时, 是正常积分. $q < 1$ 时, 是瑕积分, $x = 1$ 是瑕点, 由

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{1-q} \cdot x^{p-1} (1-x)^{q-1} = 1$$

得 $q > 0$ 时收敛, 否则发散.

综上, $B(p, q)$ 只有当 $p > 0, q > 0$ 收敛.

【例 3】 讨论反常积分 $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ 的收敛性.

解 把反常积分 $\Phi(\alpha)$ 写成

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = I(\alpha) + J(\alpha)$$

(1) 先讨论 $I(\alpha)$

当 $\alpha - 1 \geq 0$, 即 $\alpha \geq 1$ 时它是定积分; 当 $\alpha < 1$ 时它是瑕积分, 瑕点为 $x = 0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = 1,$$

当 $0 < q = 1 - \alpha < 1$, 即 $\alpha > 0$ 时, 瑕积分 $I(\alpha)$ 收敛; 当 $q = 1 - \alpha \geq 1$, 即 $\alpha \leq 0$ 时, $I(\alpha)$ 发散.

(2) 再讨论 $J(\alpha)$

它是无穷积分. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2-\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 1,$$

当 $p = 2 - \alpha > 1$, 即 $\alpha < 1$ 时, $J(\alpha)$ 收敛; 而当 $p = 2 - \alpha \leq 1$, 即 $\alpha \geq 1$ 时, $J(\alpha)$ 发散.

综上 $\Phi(\alpha)$ 收敛 $\Leftrightarrow I(\alpha)$ 与 $J(\alpha)$ 同时收敛, 所以 $\Phi(\alpha)$ 只有当 $0 < \alpha < 1$ 时才是收敛的.

【例 3】 讨论 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 的收敛性.

解 记 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = I(s) + J(s)$

(1) 讨论 $I(s)$

当 $s \geq 1$ 时, 是正常积分. 当 $s < 1$ 时, 是瑕积分, $x = 0$ 是瑕点. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-s} x^{s-1} e^{-x} = 1$$

所以, 当 $1 - s < 1 \Leftrightarrow s > 0$ 时, $I(s)$ 收敛, 当 $1 - s \geq 1 \Leftrightarrow s \leq 0$, $I(s)$ 发散.

(2) 讨论 $J(s)$

它是无穷积分, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{s-1} e^{-x} = 0$$

所以, 对 $\forall s$, $J(s)$ 收敛.

综上, $\Gamma(s)$ 只有在 $s > 0$ 时收敛.