第一章 实数集与函数

§1 实数

一、集合

集合是现代数学一个最基本的概念。集合论的奠基人是Cantor。数学的各个分支普遍地运用集合的符号和方法，我们要养成用集合的语言来表述数学命题的习惯。

1、集合的概念

具有某种性质的事物的全体称为一个集合，组成集合的每一个事物称为该集合的元素。

解释下面记号：$a\in A, a\notin A, \varnothing$

“集合”和“元素”是不定义的名词，“属于”也是不定义的关系。

2、集合的关系

解释下面记号：$A\subset B(B\supset A)$，$A=B$（定义是$A\subset B, B\subset A$）

3、映射

设V和V'是任意两个非空集合，如果存在某个对应关系T，使得对$\forall\alpha\in V$，在V'中有唯一的元素α'与之对应，则称T是V到V'的一个映射。记为

$$T:V\to V',\alpha\mapsto\alpha'。$$

称α'为α在T下的象，记为$T(\alpha)=\alpha'$，并称α为α'在T下的一个原象。

记

$$T(V)=\{T(\alpha)\mid\alpha\in V\}\subset V'$$

它表示V在映射T下象的集合。

记

$$T^{-1}(\alpha')=\{\alpha\mid T(\alpha)=\alpha'\}\subset V$$

它表示$\alpha'\in V'$在映射T下原象的集合。

如果$T(V)=V'$，即V'中的所有元素都有原象，则称T是V到V'的满射。

如果V中任意两个不同的元素在V'中的象也不同，即当$T(\alpha)=T(\beta)$时，必有$\alpha=\beta$，

中国矿业大学理学院胡建华

则称T是V到V'的单射。

如果T既是满射又是单射，则称T是V到V'的双射或一一对应。

当T是V到V'的一一对应，则对$\forall \alpha' \in V'$，则有唯一的$\alpha \in V$与之对应，这样定义了V'的映射，称为T的逆映射，记为$T^{-1}: V' \to V, \alpha' \mapsto \alpha$。

4、可数集与不可数集

引例：古阿拉伯人，只会数 1，如何知道谁口袋里的贝壳（钱）多？
对于两个无穷集，如何比较"多少"？

凡是能建立一一对应关系的两个集合，我们说它们"一样多"。比如，正整数$\{1,2,3,\cdots\}$与偶数$\{2,4,6,\cdots\}$ "一样多"。

凡是能与正整数$\{1,2,3,\cdots\}$建立一一对应的集合，称为可数（无穷）集，也称可列（无穷）集。如果一个无穷集不能与正整数建立一一对应关系，则称为不可数集，或不可列集。

可以证明：
（1）有理数是可数的；
（2）无理数与实数不可数；
（3）任何区间中的无理数或实数与全体实数"一样多"；

5、集合的运算及运算律

定义：

$A \bigcup B \triangleq \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A \bigcap B \triangleq \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$

$A \setminus B \triangleq \{x | x \in A \text{ and } x \notin B\}$（也记为$A-B$）

$A^{c} \triangleq \Omega \setminus A$（$\Omega$是全集）（也记为$\overline{A}$）

推广：（设I是一指标集，可以不可数）

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x | \text{存在某个} \alpha \in I, \text{使得} x \in A_\alpha\}$，特别地，$\bigcup_{n=1}^{N} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x | \text{对任何} \alpha \in I, \text{都有} x \in A_\alpha\}$，特别地，$\bigcap_{n=1}^{N} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

运算律：

1° $A \bigcup A = A, A \bigcap A = A$（幂等律）

2° $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$（交换律）

3° $\left(A\bigcup B\right)\bigcup C = A\bigcup\left(B\bigcup C\right),\left(A\bigcap B\right)\bigcap C = A\bigcap\left(B\bigcap C\right)$（结合律）

4° $\left(A\bigcup B\right)\bigcap C = \left(A\bigcap C\right)\bigcup\left(B\bigcup C\right),\left(A\bigcap B\right)\bigcup C = \left(A\bigcup C\right)\bigcap\left(B\bigcup C\right)$（分配律）

5° $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c,\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$（de Morgan 律，对偶律）【作为作业】

6、常用符号

$\Rightarrow$：“蕴涵”，“推得”，“若…，则…”

$\Leftrightarrow$：“充分必要”，“当且仅当”，“等价”

$\forall$：“任意”，“任一个”，“对任一个”，Any

$\exists$：“存在”，“能找到”，Exist

$\ni$：使得[不常用]

R：实数全体

Q：有理数全体

Z：整数全体

$\mathbf{N}_+$：正整全体

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$$

二、实数及其性质

1、实数公理

实数是满足（I）域公理、（II）序公理和（III）连续性公理的集合。

（I）域公理：加法公理、乘法公理和分配律

（A）加法公理：

（A_1）$\forall x, y \in R \Rightarrow x + y \in R$（封闭性）

（A_2）$\forall x, y \in R \Rightarrow x + y = y + x$（交换律）

（A_3）$\forall x, y, z \in R \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$（结合律）

（A_4）存在唯一零元$0\in R$，$\forall x\in R$，满足$0+x=x$

（A_5）$\forall x\in R$，存在唯一负元$-x\in R$，满足$x+(-x)=0$

（M）乘法公理：

（M_1）$\forall x,y\in R\Rightarrow xy\in R$（封闭性）

（M_2）$\forall x,y\in R\Rightarrow xy=yx$（交换律）

（A_3）$\forall x,y,z\in R\Rightarrow (xy)z=x(yz)$（结合律）

（A_4）存在唯一单位元$1\in R$，$\forall x\in R$，满足$1x=x$

（A_5）$\forall x\neq 0\in R$，存在唯一逆元$x^{-1}\in R$，满足$xx^{-1}=1$

（D）分配律：$x(y+z)=xy+xz$

（II）序公理

（1）三歧性：$x<y,x=y,x>y$三者必居其一，也只居其一

（2）传递性：$x<y,y<z\Rightarrow x<z$

（3）保序性：$x<y\Rightarrow x+z<y+z,x<y,c>0\Rightarrow xc<yc,$

（III）连续性公理（见第 2 节）

2、绝对值

实数a的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a, a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases}$$

从数轴上看，数a的绝对值$|a|$就是点a到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

1°　$|a|=|-a|\geq 0$；当且仅当$a=0$时有$|a|=0$

2°　$-|a|\leq a\leq |a|$

3°　$|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$|a|\leq h\Leftrightarrow -h\leq a\leq h(h>0)$

4°　对于任何a、$b\in \mathbf{R}$有如下的三角形不等式：

$$\big||a|-|b|\big|\leq |a\pm b|\leq |a|+|b|$$

5° $a \le c \le b \Rightarrow |c| \le \max(|a|,|b|)$

6° $|ab| = |a||b|$

7° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}(b \ne 0)$

3、常用不等式（暂不证）

1° **伯努利（Bernoulli）不等式**：设 $x \ge -1, n \in N_+$，则

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

证明：用数学归纳法。当 $n=1$ 时，上式显然以是等式的形式成立。假设成立不等式

$$(1+x)^{n-1} \ge 1+(n-1)x, x \ge -1$$

则

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x) \ge \left[1+(n-1)x\right](1+x)$$

$$= 1+nx+(n-1)x^2 \ge 1+nx, \forall x \ge -1$$

说明对正整数 n 伯努利不等式成立。

2° **柯西-许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式**：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

当且仅当 $y_i = kx_i (i=1,2,\cdots,n)$ 时，等号成立。

证明：由

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \ge 0 \text{（} \forall t \in \mathbf{R} \text{）}$$

得判别式

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \le 0$$

移项便得证。

如果 $x_i = ky_i (i=1,2,\cdots,n)$，则不等式显然以等号形式成立。

反之，如果等号成立，则 $\Delta = 0$，上面二次函数（抛物线）有零点（与 x 有交点），即

存在$t\in\mathbf{R}$使$\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2=0$，于是$y_i=-tx_i=kx_i$。

3°　平均值不等式：设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个正实数，则（几何平均≤算术平均）

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

当且仅当$x_1,x_2,\cdots,x_n$都相等时，等号成立。

证明：用数学归纳法证明. 当$n=1$时，上式显然以等式形式成立。假设对$n-1$上式成立，现考虑n个正数$x_1,x_2,\cdots,x_n$。不妨假设x_n是最大的。记

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

则

$$x_n\ge A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$$

于是

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right)^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n$$

$$\ge A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)=A^n+A^{n-1}(x_n-A)=A^{n-1}x_n\ge x_1x_2\cdots x_n$$

即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$都相等，则显然等号成立。

反之，如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$不都相等，则上面$x_n>A$

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n>A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)$$

与上完全一样，推得严格不等号成立。

推论：设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个正实数，则（调和平均≤几何平均）

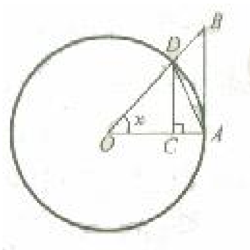
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

在平均值不等式中用 $\dfrac{1}{x_i}$ 换 x_i （$i=1,2,\cdots,n$）即得证。

4° 三角函数不等式

$$\sin x < x < \tan x，\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

推论：$\left|\sin x\right| \le \left|x\right|$，其中等号仅当 $x=0$ 时成立。



证［见教材 P44］

$$S_{\Delta OCD} < S_{扇形OAD} < S_{\Delta OAB}，\ \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

又当 $x \ge \dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x \le 1 < x$，故对一切 $x>0$ 都有 $\sin x < x$

当 $x<0$ 时，由 $\sin(-x) < -x$　得 $-\sin x < -x$

综上，我们又得到不等式

$$\left|\sin x\right| \le \left|x\right|,\ x \in R$$

其中等号仅当 $x=0$ 时成立.

4、区间与邻域[一些记号]

$(a,b) \triangleq \{x \mid a<x<b\}$，$[a,b] \triangleq$，$(a,b] \triangleq$，$[a,b) \triangleq$

$(a,+\infty) \triangleq$，$[a,+\infty) \triangleq$，$(-\infty,a) \triangleq$，$(-\infty,a] \triangleq$，$(-\infty,+\infty) \triangleq \mathbf{R}$

$U(a,\delta) \triangleq \left\{x \middle| \left|x-a\right| < \delta\right\} = (a-\delta, a+\delta)$

$U^{\circ}(a,\delta) \triangleq \left\{x \middle| 0 < \left|x-a\right| < \delta\right\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

$U_{+}(a,\delta) \triangleq [a, a+\delta), U_{+}^{\circ}(a,\delta) \triangleq (a, a+\delta)$

$U_{-}(a,\delta) \triangleq \cdots, U_{-}^{\circ}(a,\delta) \triangleq \cdots$

$U(a), U_{+}(a), \cdots$

$U(\infty) \triangleq \left\{x \middle| \left|x\right| > M\right\}$，其中 M 为某个正数

$U(+\infty) \triangleq \cdots, U(-\infty) \triangleq \cdots$

【例 1】［P3 例 2］：设 $a,b\in R$ 。证明：若对 $\forall\varepsilon>0$ 有 $a<b+\varepsilon$ ，则 $a\le b$ 。

证　用反证法．若结论不成立，即 $a>b$ ．令 $\varepsilon_0=a-b>0$ ，于是 $a=b+\varepsilon_0$ 。这与假设对 $\forall\varepsilon>0$ 成立 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾。从而必有 $a\le b$ 。

【例 2】［P4 习题 1］：设 $a\in Q, x\in R\setminus Q$（无理数）。证明 $a+x\in R\setminus Q$ 。

证　用反证法．假设 $a+x\in Q$ ，令 $a+x=q$ ，则 $x=q-a\in Q$ ，与假设矛盾。

§2 实数的连续性公理

一、有界集与无界集，上（下）确界

定义　设 S 为 **R** 中的一个数集．若存在数 M（L），使得对一切 $x\in S$ ，都有 $x\le$M（$x\ge$L），则称 S 为**有上界（下界）的数集**，数 M（L）称为 S 的一个**上界（下界）**。
若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为**有界集**．若 S 不是有界集，则称 S 为**无界集**.

【提问】

（1）S 有界 $\Leftrightarrow \exists G>0,\forall x\in S,|x|\le G$ 。

（2）S 无界 $\Leftrightarrow$ S 无上界或 S 无下界。

（3）叙述：S 无上界？S 无下界？

【注】S 无上界可用下面诗来形象描述。

南宋诗人叶绍翁的《游园不值》

应怜屐齿印苍苔 ，小扣柴扉久不开 。春色满园关不住 ，一枝红杏出墙来 。

【例如】

（1）$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（有限集），则 S 是有界集

$L=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n), M=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

（2）$S=[0,1)$ 是有界集。$L=0, M=1$

（3）$S=\{y\,|\,y=\sin x, x\in R\}$ 是有界集。$|y|\le 1$

（4）$N_+=\{1,2,3,\cdots\}$ 有下界但无上界。

证：$\forall M>0$，$\exists n_0\in N_+, n_0>M$（如$n_0=[M]+1$）

（5）$S=\left\{x \middle| x=-\frac{1}{t}, t>0\right\}$有上界，无下界。

证：$\forall M>0$，取$0<t_0<\frac{1}{M}$，则$x_0=-\frac{1}{t_0}<-M$

引例 1：叙述S中有最大数（无最大数），有最小数（无最小数）。

答：S中有最大数：$\exists \beta\in S, \forall x\in S, \ni x\le\beta$，则$\beta$就是$S$中的最大数。

S中无最大数：$\forall x\in S, \exists y\in S, \ni x<y$

例如：（1）$S=[0,1]$中有最大数1，$\max S=1$。

（2）$S=[0,1)$中没有最大数，符号$\max S$不能使用。

引例 2：证明$S=[0,1)$的最大下界是$\alpha=0$，最小上界是$\beta=1$。

证：$\alpha=0$显然是S的一个下界。如何说明α是S的最大下界？这就要证明比α大的任何一个数都不是S的下界。

$\forall \alpha':1>\alpha'>\alpha$，取$x_0=\frac{\alpha+\alpha'}{2}$，则$x_0\in S$且$x_0<\alpha'$，说明$\alpha'$不是$S$的下界。

类似可证$\beta=1$是S的最小上界。

定义　设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若数η满足：

（i）对一切$x\in S$，有$x\le\eta$，即η是S的上界；

（ii）对任何$\alpha<\eta$，存在$x_0\in S$，使得$x_0>\alpha$，即η又是S的最小上界，

则称数η为数集S的**上确界**，记作$\eta=\sup S$。（supremum）

【注 1】（ii）又可写成：(ii)$'$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in S$，$\ni x_0>\eta-\varepsilon$。

【注 2】上确界也记为$\operatorname{lub} S$（least upper bound）

定义　设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若数ξ满足：

（i）对一切$x\in S$，有$x\ge\xi$，即ξ是S的下界

（ii）对任何$\beta>\xi$，存在$x_0\in S$，使得$x_0<\beta$,即ξ又是S的最大下界，

则称数ξ为数集S的**下确界**，记作$\xi=\inf S$。（infimum）

【注 1】(ii) 又可写成：(ii)′ $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in S$，$\ni x_0<\xi+\varepsilon$。

【注 2】下确界也记为 glb S（greatest lower bound）

上确界与下确界统称为**确界**.

【注 1】上（下）确界如果存在，则是唯一的。

【注 2】显然 $\inf S\le\sup S$

例 1　设数集 S 有上确界．证明：$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S$

证　$\Rightarrow$) 设 $\eta=\sup S\in S$，则对一切 $x\in S$ 有 $x\le\eta$，而 $\eta\in S$，故 η 是数集 S 中最大的数，即 $\eta=\max S$.

$\Leftarrow$) $\eta=\max S$，则 $\eta\in S$；下面验证 $\eta=\sup S$.

(i) 对一切 $x\in S$，有 $x\le\eta$，即 η 可是 S 的上界；

(ii) 对任何 $\alpha<\eta$，只须取 $x_0=\eta\in S$，则 $x_0>\alpha$，从而满足 $\eta=\sup S$ 的定义.

二、戴德金切割原理与确界原理

毕达哥拉斯（Pythagoras，572 BC—497 BC）学派认为“一切数均可表成整数或整数之比”。当时人们对有理数的认识还很有限，对于无理数的概念更是一无所知。然而，具有戏剧性的是由毕达哥拉斯建立的毕达哥拉斯定理（勾股定理）却成了毕达哥拉斯学派数学信仰的“掘墓人”。

正方形的边长为 1，那么，对角线是多少呢？这就是数学史上最著名的事件：第一次数学危机。第一次危机的产生最大的意义导致了无理数地产生。

戴德金切割原理也称实数的连续性公理，它形象地描述了“实数是连续不断的，无空隙”。通俗地说：如果将实数集看作一条直线，并用一把没有厚度的理想的刀来砍它，那么不论砍在哪里，总要碰着直线上的一个点。[参见 P294]。

戴德金（Dedekind）切割原理

设 $A,A'\subset R$ 满足：

1° $A\ne\varnothing$，$A'\ne\varnothing$

2° $A\bigcup A'=R$

3° $\forall x\in A,\forall x'\in A'\Rightarrow x<x'$

则称$(A\mid A')$是R的一个切割。对于R的任何一个切割$(A\mid A')$，都存在唯一的$x^*\in R$，使得对$\forall x\in A,\forall x'\in A'$，都有$x\le x^*\le x'$。

确界原理

设S为非空数集．若S有上界，则S必有上确界；若S有下界，则S必有下确界．

记A'为S的上界全体，$A'\ne\Phi$，$A=R\setminus A'$，$A\ne\Phi$，$(A\mid A')$为R的一个切割。由戴德金切割原理，存在唯一的数x^*，对$\forall x\in A,\forall x'\in A'$，都有

$$x\le x^*\le x' \qquad (1)$$

下证x^*为S的上界。若不然，$\exists x_0\in S$使得$x^*<x_0$，令$z=\dfrac{x^*+x_0}{2}$，则

$$x^*<z<x_0 \qquad (2)$$

z不是S的上界，所以$z\in A$。由（1）$z\le x^*$。这与（2）矛盾。所以，x^*为S的上界，即$x^*\in A'$。

再由（1）知，$\forall x'\in A'$，$x^*\le x'$。因此，x^*是A'中的最小元，即A的上确界。

【注】确界原理$\Rightarrow$切割原理

设$(A\mid A')$为R的一个切割，由确界原理，A有上确界x^*，按定义$\forall x\in A$，有$x\le x^*$。又按切割的定义，$\forall x'\in A'$都是A的上界，从而$x^*\le x'$。

下证唯一性。若还有$x_0\ne x^*$，满足$\forall x\in A,\forall x'\in A'$，都有$x\le x_0\le x'$，不妨设$x^*<x_0$，于是令$z=\dfrac{x^*+x_0}{2}$，有

$$x^*<z<x_0$$

从而$z\notin A,z\notin A'$，矛盾。

例 2　设A,B为非空数集，满足：对一切$x\in A$和$y\in B$有$x\le y$．证明：数集A有上确界，数集B下确界，且$\sup A\le\inf B$

证　由假设，数集B中任一数y都是数集A的上界，A中任一数x都是B的下界，故由确界原理推知数集A有上确界，数集B有下确界.

对任何$y \in B$，y是数集A的一个上界，而由上确界的定义知，$\sup A$是数集A的最小上界，故有$\sup A \le y$．而此式又表明数$\sup A$是数集B的一个下界，故由下确界定义证得$\sup A \le \inf B$．

例 3　设A, B为非空有界数集，$S = A \bigcup B$．证明：

（i）$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$；

（ii）$\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证　由于$S = A \bigcup B$显然也是非空有界数集，因此S的上、下确界都存在.

（i）对任何$x \in S$，有$x \in A$或$x \in B \Rightarrow x \le \sup A$或$x \le \sup B$，从而有$x \le \max\{\sup A, \sup B\}$，故得$\sup S \le \max\{\sup A, \sup B\}$.

另一方面，对任何$x \in A$，有$x \in S \Rightarrow x \le \sup S \Rightarrow \sup A \le \sup S$；同理又有$\sup B \le \sup S$．所以$\sup S \ge \max\{\sup A, \sup B\}$.

综上，即证得$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii)可类似地证明.（作为作业）

【规定】

若把$+\infty$和$-\infty$补充到实数集中，并规定任一实数a与$+\infty$、$-\infty$的大小关系为：$a < +\infty$，$a > -\infty, -\infty < +\infty$,则确界概念可扩充为：

若数集S无上界，则定义$+\infty$为S的**非正常上确界**，记作$\sup S = +\infty$；

若S无下界，则定义$-\infty$为S的**非正常下确界**，记作$\inf S = -\infty$.

推广的确界原理：任一非空数集必有上、下确界(正常的或非正常的).

***例 4**　［P290 引理 1］证明实数具有阿基米德（Archimedes）性，即$\forall a, b \in R, b > a > 0$，则$\exists n \in N_+$，$\ni na > b$。

证：用反证法。假设$\{na\}, n = 1, 2, \cdots$中没有一项大于b，则b是$\{na\}$的一个上界。

由确界原理，$\{na\}$ 有上确界，记为 λ 。即 $\forall n \in N_+, na \le \lambda$ ，$\exists n_0 \in N_+, \ni n_0 a > \lambda - a$ ，即 $\lambda < (n_0+1)a$ 。从而

$$(n_0+2)a \le \lambda < (n_0+1)a$$

由于 $a>0$ ，上式不可能成立。矛盾。

***例 5** ［P290 引理 2］证明有理数在实数中稠密。即 $\forall a,b \in R, a<b$ ，则 $\exists r \in Q$ ，满足 $a<r<b$

证：由阿基米德性，$\exists N \in N_+, \ni N(b-a)>1$ 或 $\frac{1}{N} < b-a$ 。令 $d=\frac{1}{N}$ ，则

$$d \in Q, 0<d<b-a$$

再任取一个有理数 $r_0 < a$ ，在有理等差数列中 $\{r_0+nd\}$ ，由阿基米德性，总有某项大于 a ，设在该数列中第一个大于 a 的项是 $r=r_0+n_0d$ ，则 $a<r$ ，又

$$r_0+(n_0-1)d<a \Rightarrow r_0+n_0d \le a+d < a+(b-a)=b$$

即 $r<b$ 。所以 $r=r_0+n_0d$ 即为所求。

§3 函数

（包括教材中的第 3 节与第 4 节）

一、函数

定义　映射 $f: D \subset R \to R, x \mapsto y=f(x)$ 称为数集 D 上的函数。

相应的概念：自变量，因变量，定义域（D），值域($f(D) \subset R$)，反函数等。

函数的四则运算（略）

复合函数：设有两函数

$$\begin{aligned} y &= f(u), u \in D, \\ u &= g(x), x \in E. \end{aligned} \tag{1}$$

记 $E^* = \{x \mid g(x) \in D\} \bigcap E$. 若 $E^* \ne \phi$, 则对每一个 $x \in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y . 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，

它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y=f(g(x)),x\in E^*\text{或}y=(f\circ g)(x),\quad x\in E^*$$

称为函数 f 和 g 的复合函数．并称 f 为外函数，g 为内函数，(1)式中的 u 为中间变量．函数 f 和 g 的复合运算也可简单地写作 $f\circ g$.

反函数： 函数 $f:D\to f(D),x\mapsto y=f(x)$ 是一一对应，则存在反函数

$$f^{-1}:f(D)\to D,\quad y\mapsto x$$

或

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D)$$

注 1　函数 f 也是函数 f^{-1} 的反函数．或者说，f 与 f^{-1} 互为反函数．并有

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,x\in D；\ f\left(f^{-1}(y)\right)\equiv y,y\in(D)$$

注 2　上面反函数 f^{-1} 的表示式中，是以 y 为自变量，x 为因变量．若按习惯仍用 x 作为自变量的记号，y 作为因变量的记号，则反函数可改写为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D)$$

例如，按习惯记法，函数 $y=ax+b(a\neq 0)$，$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 与 $y=\sin x,$ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数分别是

$$y=\frac{x-b}{a},y=\log_a x\text{与}y=\arcsin x.$$

例 1　函数 $y=f(u)=\sqrt{u},u\in D=[0,+\infty)$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2,x\in E=R$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2},\text{或}(f\circ g)(x)=\sqrt{1-x^2}$$

其定义域 $E^*=[-1,1]\subset E$.

例 2　符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$$

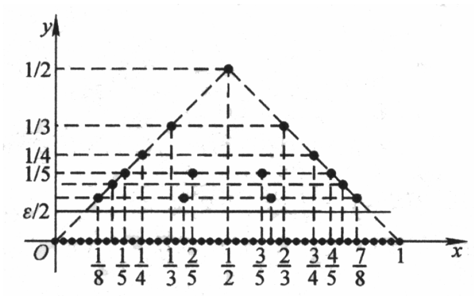
例 3　Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\notin Q\end{cases}$$

例 4　Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当}x=\dfrac{p}{q}, p,q\in N_+,\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\\0,\text{当}x=0,1\text{和}(0,\ 1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

定义域为[0,1]



例 5　取整函数

$$f(x)=[x]\text{（不超过}x\text{的最大整数）}$$

即$[x]$为整数且满足

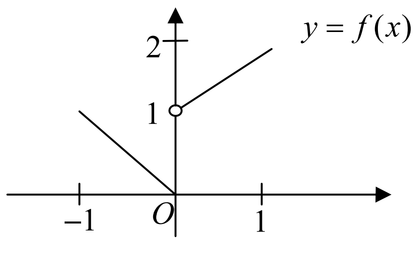
$$x-1<[x]\le x$$

例如：$[0]=0,[2]=2,[2.5]=2,[-\pi]=4$

例 6　求函数

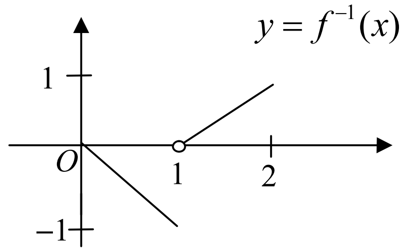
$$f(x)=\begin{cases}-x,-1\le x\le 0\\x+1, 0<x\le 1\end{cases}$$

的反函数。



解：反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-x,0\le x\le 1\\ x-1,1<x\le 2\end{cases}$$



二、具有某些特性的函数

1. 有界函数

定义：设 $f:D\to R$，如果 $f(D)$ 有上界，则称 f 为有上界的函数。

类似地：有下界，有界，无界，无上界，无下界

定义：$\sup\limits_{x\in D}f(x)=\sup f(D),\inf\limits_{x\in D}f(x)=\inf f(D)$

例 7 证明　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无上界函数 .

证 对任何正数 M，取 $(0,1]$ 上一点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$，则有

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M\ .$$

故按上述定义，f 为 $(0,1]$ 上的无上界函数.

例 8　设 f，g 为 D 上的有界函数.证明：

(i) $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$ ；

(ii) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

证　(i)对任何 $x\in D$ 有

$$\inf_{x\in D}f(x)\le f(x),\inf_{x\in D}g(x)\le g(x)\Rightarrow\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in d}g(x)\le f(x)+g(x)\ .$$

上式表明，数 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 是函数 $f+g$ 在 D 上的一个下界，从而

$$\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in D}g(x)\le\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\ .$$

(ii)可类似地证明(略).

例 9[P21-12]　设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

【证法 1】$\forall x_0\in D$

$$f(x_0)+\inf_{x\in D} g(x)\le f(x_0)+g(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

$$f(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

说明 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个上界，而 $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ 是 $f(x)$ 的最小上界。从而

$$\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

移项即得证。

【证法 2】$\forall \varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使得 $f(x_0)>\sup f(x)-\varepsilon$。因此

$$\sup f(x)-\varepsilon+\inf g(x)\le f(x_0)+g(x_0)\le \sup\{f(x)+g(x)\}$$

$$\sup f(x)+\inf g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}+\varepsilon$$

由 ε 的任意性

$$\sup f(x)+\inf g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}$$

例 10[P21-16] 设 $f(x)$ 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$，证明

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m。$$

证 只证 $m<M$ 的情况，否则 f 为常数结论显然成立。

一方面，由 $m\le f(x)\le M$，知 $\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$（$x',x''\in I$）

于是

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$$

另一方面，由确界的定义，对 $\forall \varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<M-m$），$\exists x',x''\in I$ 使

$$f(x')>M-\frac{\varepsilon}{2},\quad f(x'')<m+\frac{\varepsilon}{2}$$

这时 $f(x')-f(x'')>M-\dfrac{\varepsilon}{2}-(m+\dfrac{\varepsilon}{2})=(M-m)-\varepsilon$

综上两个方面，得 $\sup\limits_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m$ 。

2. 单调函数

定义　设 f 为定义在D上的函数．若对任何 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时，总 有

（i） $f(x_1)\le f(x_2)$, 则称 f 为D上的**增函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 f 为D上的**严格增函数**;

(ii) $f(x_1)\ge f(x_2)$，则称 f 为 D 上的**减函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，称 f 为D上的**严格减函数**;

增函数和减函数统称为**单调函数**，严格增函数和严格减函数统称为**严格单调函数**.

例 3.11[P19-3(2)]　$y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 严格递增;

证　设 $-\frac{\pi}{2}\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$$

这是由于 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$， $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0,-\frac{\pi}{2}\le\frac{x_1-x_2}{2}<0,\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$， $f(x)$ 严格递增。

定理[P18]　设 $y=f(x),x\in D$ 为严格增(减) 函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)函数.

证　设 f 在 D 上严格增．对任一 $y\in f(D)$，有　$x\in D$ 使 $f(x)=y$．下面证明这样的 x 只能有一个．事实上，对于 D 内任一 $x_1\ne x$，由 f 在 D 上的严格增性，当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)<y$，当 $x_1>x$ 时有 $f(x_1)>y$，总之 $f(x_1)\ne y$．这就说明，对每一个 $y\in f(D)$，都只存在唯一的一个 $x\in D$，使得 $f(x)=$y，从而函数 f 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$， $y\in f$(D).

现证 f^{-1} 也是严格增的．任取 $y_1,y_2\in f$ (D)， $y_1<y_2$ • 设

$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$，则 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$．由 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性，显然有 $x_1 < x_2$，即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$．所以反函数 f^{-1} 是严格增的．

3. 奇（偶）函数：要求 D 对称于原点

例 12［P20-6(3)］　证明 $[-a,a]$ 上任何一个函数都可写成一个偶函数与一个奇函数的和。

4. 周期函数：周期定义为正数，最小周期又称基本周期（如果有的话）。

例 13　考察 Dirichlet 函数的周期性

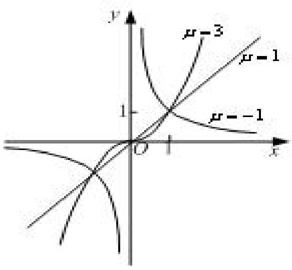
三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为初等函数．不是初等函数的函数，称为非初等函数．

基本初等函数有以下六类:

常量函数　$y = c$　(c 是常数);

幂函数　　$y = x^{\mu}$ $\left(\mu\text{为实数}\right)$;



μ 偶数，$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = [0, +\infty)$，偶函数

μ 奇数，$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = (-\infty, +\infty)$，奇函数

μ 负整数，$D_f = (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}, R_f$ 由 $|\mu|$ 的奇偶性定

μ 任意数，$D_f = (0, +\infty), R_f = (0, +\infty)$

【注】 这里我们要指出，幂函数 $y = x^a$ 和指数函数 $y = a^x$ 都涉及乘幂，而在中学数学课程中只给出了有理数乘幂的定义。下面我们借助确界来定义无理数幂，使它与有理数幂一起构成实指数乘幂，并保持有理数幂的基本性质。［暂且承认这些结论］

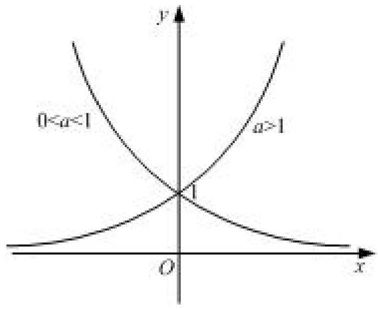
给定实数 a>0，设 x 为无理数，我们规定

$$a^x=\begin{cases}\sup\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\}，\text{当}a>1\text{时}，\\ \inf\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\}，\text{当}0\langle a<1\text{时}\end{cases}.$$

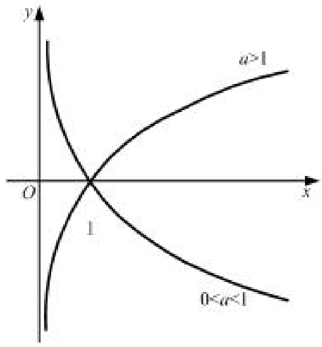
幂函数的反函数仍是幂函数

$$y=x^{\mu},y=x^{\frac{1}{\mu}}$$

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1);x\in(-\infty,+\infty)$

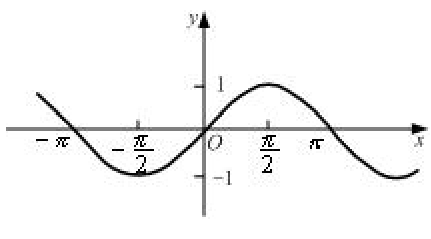


对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1);\ x\in(0,+\infty)$

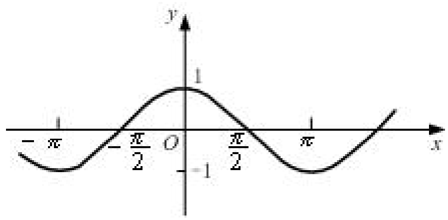


三角函数

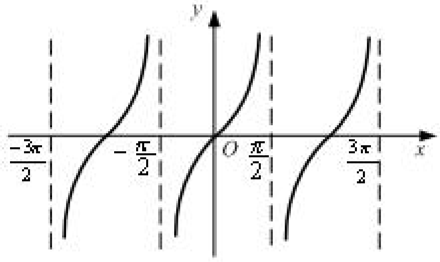
正弦函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$



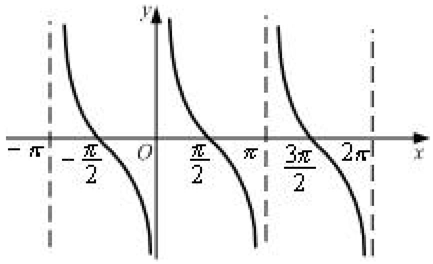
余弦函数 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$



正切函数 $y=\tan x$， $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z,y\in(-\infty,+\infty)$

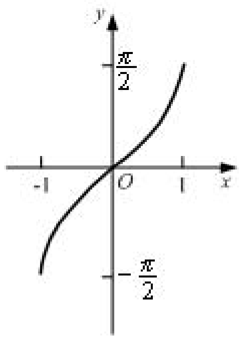


余切函数 $y=\cot x,x\neq k\pi,k\in Z,y\in(-\infty,+\infty)$



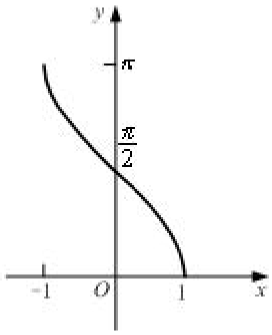
反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x,x\in[-1,1],y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

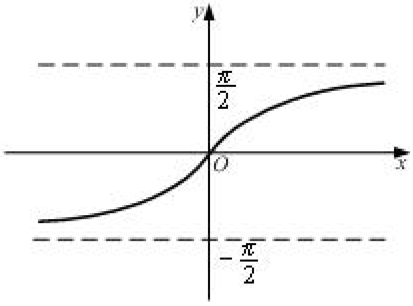


反余弦函数 $y=\arccos x,x\in[-1,1],y\in\left[0,\pi\right]$

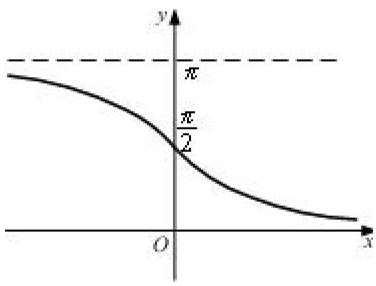
中国矿业大学理学院胡建华



反正切函数 $y=\arctan x$， $x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$



反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$， $x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(0,\pi\right)$



例 ［P16-11］问 $y=|x|$是初等函数吗？

答： $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 是初等函数。

注： $y=|x|$还可表示为 $y=x\operatorname{sgn}(x)$

例 ［P20-2］问 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 是初等函数吗？