曲线积分与曲面积分练习题

班级______________姓名____________学号______________ 组号______________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．若曲线 L 是上半椭圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$取顺时针方向，则曲线积分$\int_L ydx - xdy =$________.

2．已知曲线积分 $\int_L x\varphi(y)dx + x^2ydy$ 与路径无关，其中$\varphi(0)=0, \varphi\left(y\right)$有一阶连续导数，则$\int_{(0,1)}^{1,2} x\varphi(y)dx + x^2ydy =$__________.

3．设曲面Σ是球面$x^2+y^2+z^2=2z$，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$上的点的外法向量的方向余弦，则$\oiint\limits_{\Sigma}\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS =$________________.

4．设向量场$\vec{A}=\left(x+y\right)\vec{i}+xy\vec{j}+xz^2\vec{k}$，则$div\,\vec{A}=$_____________；设向量场$\vec{A}=\left(3z-2y\right)\vec{i}+(4x-5z)\vec{j}+(y-3x)\vec{k}$，则$rot\,\vec{A}=$_______________.

5．已知$du\left(x,y\right)=xy^2dx+x^2ydy$，则$u\left(x,y\right)=$_______________.

二、 选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、如果$\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)dx+\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)dy$是某一函数$u\left(x,y\right)$的全微分，则（　　　）

$\left(A\right)$　$a=3, b=2;$　　　　$\left(B\right)$　$a=2, b=3;$

$\left(C\right)$　$a=1, b=2$　　　　$\left(D\right)$　$a=2, b=1.$

2、设Σ为$z=2-\left(x^2+y^2\right)$在xOy平面上方部分的曲面，则$\iint\limits_{\Sigma}dS=$（　　　）

$\left(A\right)$　$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho}\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho;$　　　　$\left(B\right)$　$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho;$

$(C)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(2-\rho^2\right)\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho;$ $(D)\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho;$

3、设有向曲面$\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0\right\}$，方向取上侧，则下述曲面积分不为零的是（　　）

$(A)\ \iint\limits_{\Sigma}x^2dydz;$ $(B)\ \iint\limits_{\Sigma}zdzdx;$ $(C)\ \iint\limits_{\Sigma}y^3dxdy;$ $(D)\ \iint\limits_{\Sigma}xdydz.$

4、设 L 为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，其周长记为 a，则$\oint\limits_L\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds=$（　　）

$(A)\ 12a;$ $(B)\ 0;$ $(C)\ 144a;$ $(D)\ a.$

5、3、设曲面Σ是上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2\left(z\geq 0\right)$，曲面$\Sigma_1$是曲面$\Sigma$在第一卦限中的部分，则有（　　）

$(A)\ \iint\limits_{\Sigma}xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS;$ $(B)\ \iint\limits_{\Sigma}ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS;$

$(C)\ \iint\limits_{\Sigma}zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS;$ $(D)\ \iint\limits_{\Sigma}xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS;$

三、计算题（本题共 7 小题， 每小题 6 分，满分 42 分）

1、计算$\oint\limits_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 是圆弧 $\rho=2\cos\theta$.

2、计算$\int_L\left(2y+y^3\right)dx+\left(4x+3xy^2\right)dy$，其中$L$是沿曲线$y=\sqrt{1-x^2}$从点A(0,1)到B(1,0)的有向弧.

3、计算$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中$L$为圆周$\left(x-1\right)^2+y^2=2$，$L$的方向为逆时针方向.

4、计算曲面积分$\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)dS$，$\Sigma$为立体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的边界.

5、计算$\iint_{\Sigma}xyzdxdy$，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1\left(x\ge 0,y\ge 0\right)$的外侧.

6、计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+\left(z+1\right)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧.

7、求均匀曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的质心的坐标.

四、综合题（本题共 2 小题， 每小题 9 分，满分 18 分）

1. 设函数$\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

（1） 证明: 对右半平面$x > 0$内任意分段光滑简单闭曲线 C，有$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$.

（2） 求函数$\varphi(y)$的表达式.

2、计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$，其中$\Sigma$为曲面$1-\frac{z}{5}=\frac{\left(x-2\right)^2}{16}+\frac{\left(y-1\right)^2}{9}\left(z\geq 0\right)$的上侧.