总复习

一. 曲线积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲线积分}\begin{cases}\text{第一类（对弧长）}\\ \text{第二类（对坐标）}\end{cases}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{定积分}$$

(1) 统一积分变量 $\begin{cases}\text{用参数方程}\\ \text{用直角坐标方程}\\ \text{用极坐标方程}\end{cases}$

(2) 确定积分上下限 $\begin{cases}\text{第一类: 下小上大}\\ \text{第二类: 下始上终}\end{cases}$

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算；

(2) 利用积分与路径无关的等价条件

(3) 利用格林公式 (注意**加辅助线的技巧**)；

(4) 利用斯托克斯公式；

(5) 利用两类曲线积分的联系公式 .

二. 曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)}\\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 – 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{cases}$$

(3) 确定二重积分域

– 把曲面积分域投影到相关坐标面

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算

(2) 利用高斯公式
- 注意公式使用条件
- 添加辅助面的技巧

(辅助面一般取平行坐标面的平面)

(3) 两类曲面积分的转化

练. 设L 是周长为a 的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds = \underline{\quad 12a \quad}$$

提示: 利用对称性

$$\text{原式} = 12\oint_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right) ds = 12a$$

2. 设 Γ 为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，它是线密度为 1

的物质曲线，关于z 轴的转动惯量I = $\underline{\quad \frac{4}{3}\pi R^3 \quad}$

提示: $I = \oint_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$

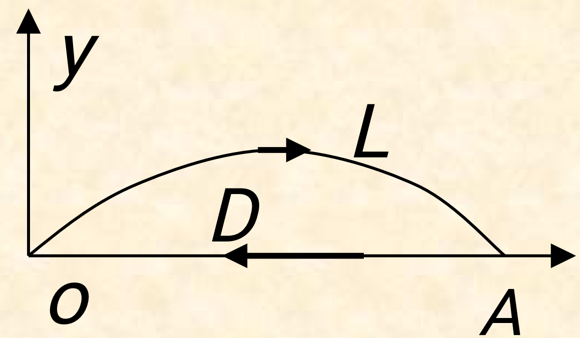
$$= \frac{2}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{4}{3}\pi R^3$$

例1. 计算曲线积分

$$I=\int_L (e^x\cos y-e^y\sin x+y)\,dx+(e^y\cos x-e^x\sin y)\,dy$$

其中L 是摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 由点$O(0,0)$ 到点$A(2\pi,0)$

的一段弧.



解: $$I=\int_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}$$

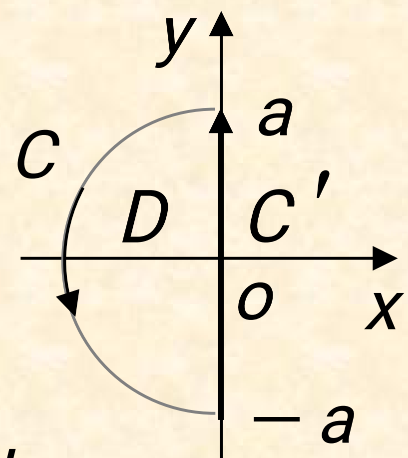
$$=-\iint_D(-1)\,dx\,dy+\int_0^{2\pi}(e^x-\sin x)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}y\,dx+(e^x+\cos x)\Big|_0^{2\pi}=3\pi+e^{2\pi}-1$$

例2. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆，计算

$$\int_C \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx+[ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]\,dy$$

解: 添加辅助线，利用格林公式.



原式 $= \int_{C+C'} - \int_{C'}$

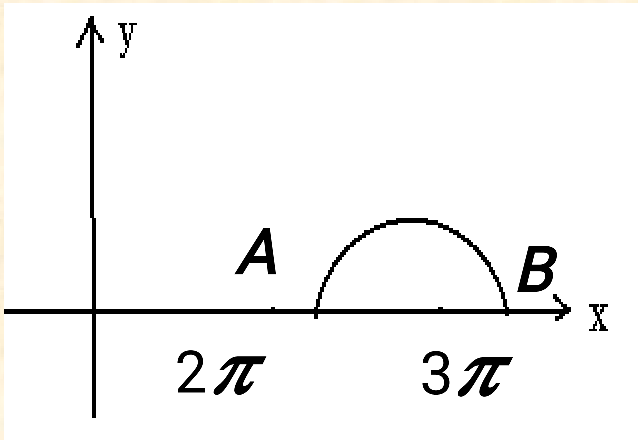
$$= \iint_D [\,a+\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}-\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\,]\,dx\,dy$$

$$-\int_{-a}^{a}(2y\ln a)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

练习1: $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$

其中L 是 $y=\sin x$上由$A(2\pi,0)$ 到 $B(3\pi,0)$ 的一段



解: $\int_L = \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}}$

$\because \oint_{L+\overline{BA}} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

$$= -\iint_D y^2\,dx\,dy = -\frac{4}{9}$$

$\int_{\overline{BA}} = \int_{3\pi}^{2\pi}\sqrt{x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\pi^2$

$\therefore \int_L = \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = -\frac{9}{4}-\left(-\frac{5}{2}\pi^2\right) = \frac{5}{2}\pi^2-\frac{4}{9}$

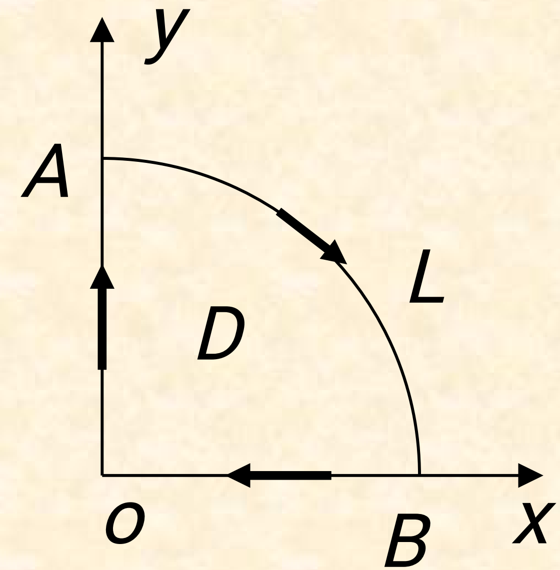
2. 计算$I=\int_L(\sin y-y\sin x)\,dx+(\cos x+x\cos y+\underline{x^2})\,dy$

其中L 是沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$从A (0,1) 到B (1,0) 的一段弧 .

解: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\sin x$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos y-\sin x+2x$ 则

$$I=\int_L(\sin y-y\sin x)\,dx+(\cos x+x\cos y)\,dy+\int_L x^2\,dy$$

积分与路径无关，取 $\overline{BO}+\overline{OA}$



$$=-\int_0^1 dy+\int_{\pi/2}^{0}\cos^3 t\,dt$$

$$=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$$

3. 已知 $\int_l F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$ 与路径无关，且由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 过点(1,2)，求 $y(x)$.

解: 利用 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 得 $y\,F_2' = x\,F_1'$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'}{F_2'} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

积分得 $xy = C$，利用 $y\big|_{x=1}=2$，得 $C=2$，

故所求函数为 $y=\dfrac{2}{x}$

例3 已知 $f(0)=-1$ 确定 $f(x)$ 使

$$I=\int_L [\tan x - f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}dx + f(x)dy$$ 与路径无关，

并求当L 是曲线 $y=(x\sin x+\tan x)(x-1)+x$

从 (0,0) 到 (1,1) 上一段的积分值

解: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \sec^2 x\tan x-\sec^2 x\ f(x)=f'(x)$

$f(x)=\tan x-1+Ce^{-\tan x}$ 又 $f(0)=-1$ $C=0$

$\therefore$ $f(x)=\tan x-1$ 时，积分与路径无关

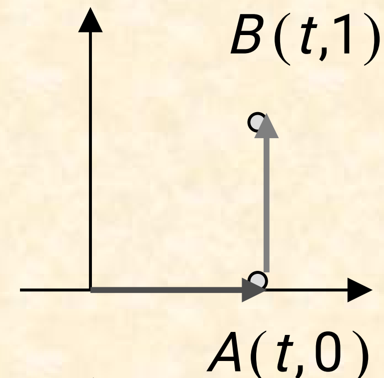
$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} = \tan 1-1$$

例4 设 $Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数，且

$\int_L 2xy\,dx + Q(x, y)dy$ 与路径无关，并对任意t 恒有

$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy$ 求 $Q(x, y)$

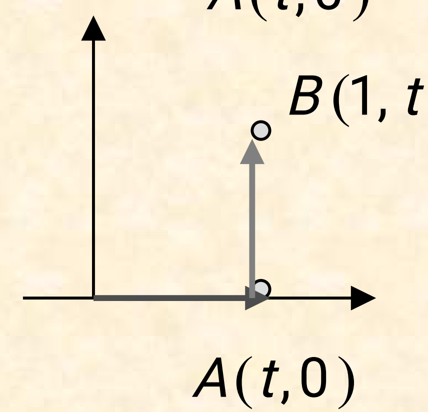
解 由积分与路径无关条件知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$



$\Rightarrow \quad Q(x, y) = x^2 + \varphi(y)$ $\varphi(y)$ 待定

$\because \quad \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy = \int_0^1 [t^2 + \varphi(y)]dy$

$= t^2 + \int_0^1 \varphi(y)dy$



$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy = \int_0^t [1^2 + \varphi(y)]dy = t + \int_0^t \varphi(y)dy$

例4 设 $Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\int_L 2xy\,dx + Q(x, y)dy$$ 与路径无关，并对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x, y)dy$$ 求 $Q(x, y)$

由题设有 $$t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\,dy = t + \int_0^t \varphi(y)\,dy$$

对 t 求导 $$\varphi(t) = 2t - 1$$

$$\therefore \quad Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$$

例5. 函数 $\phi(x)$ 具有二阶导数, 并使曲线积分

$$\int_L (3\phi'(x)-2\phi(x)+xe^{-x})\,y\,dx+\phi'(x)\,dy$$

与路径无关, 求 $\phi(x)$.

解: 利用 $P_y = Q_x$, 得

$$\phi''(x)-3\phi'(x)+2\phi(x)=xe^{-x}$$

对应齐次方程的通解 $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

设非齐次方程特解 $y^* = (ax+b)\,e^{-x}$

代入原方程可定出 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{5}{36}$

则所求 $\phi(x) = Y + y^*$

$$= C_1e^x + C_2e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}\right)e^{-x}$$

例6. 在变力 $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 第一卦限的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问 ξ, η, ζ 取何值时, 力 $\vec{F}$ 所作的功最大, 并求出功的最大值

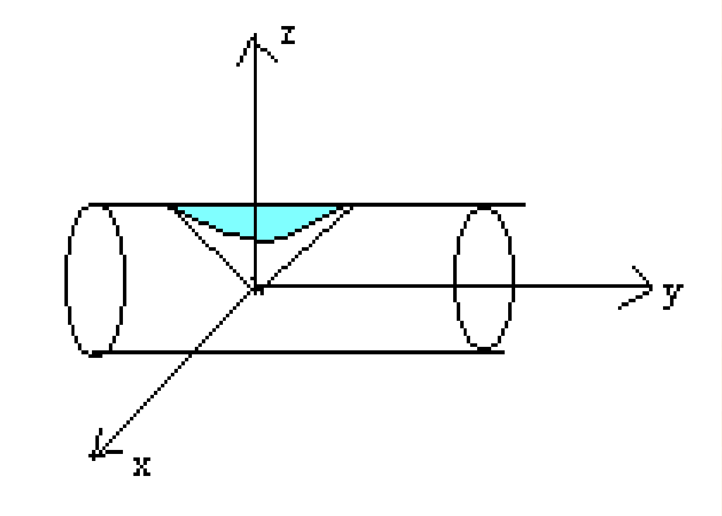
解: 直线 OM 参数方程 $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta} \Rightarrow \begin{cases} x = \xi t \\ y = \eta t \\ z = \zeta t \end{cases}$

$$\therefore \quad W = \int_{OM} yzdx + zxdy + xydz = \int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt = \xi\eta\zeta$$

构造函数 $F(\xi, \eta, \zeta) = \xi\eta\zeta + \lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right)$

$$\Rightarrow \xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \ \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \ \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}} \qquad W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$$

例7 $I=\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$ 其中Σ是柱面$x^2+z^2=R^2$被锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$截下的部分



解 两曲面的交线

$$\begin{cases} z=\sqrt{R^2-x^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

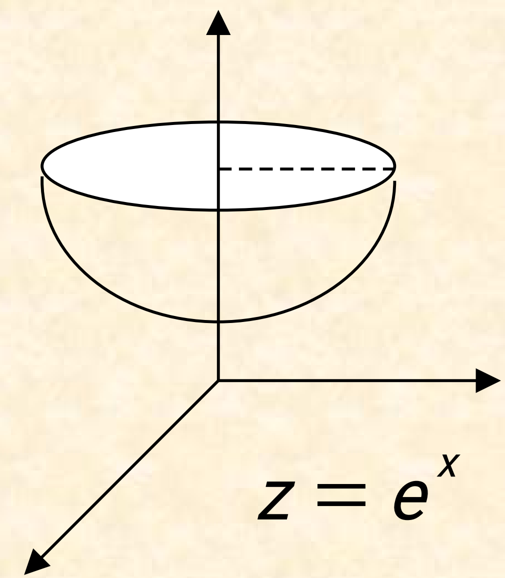
投影柱面 $2x^2+y^2=R^2$ $\quad D_{xy}: 2x^2+y^2\le R^2$

$$\because dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma} z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3$$

例8. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} 8xz\,dy\,dz-3yz\,dz\,dx+(4z-\frac{5}{2}z^2)\,dx\,dy$

其中Σ是 $z=e^x\ (0\le x\le 2)$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面的下侧.



解：作辅助面Σ_1：$\begin{cases} z=e^2 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases}$ 取上侧

$$\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}4\,dv=4\int_1^{e^2}dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy$$

$$=4\int_1^{e^2}\pi(\ln z)^2\,dz=8\pi(e^2-1)$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}(4z-\frac{5}{2}z^2)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_{xy}}(4e^2-\frac{5}{2}e^4)\,dx\,dy$$

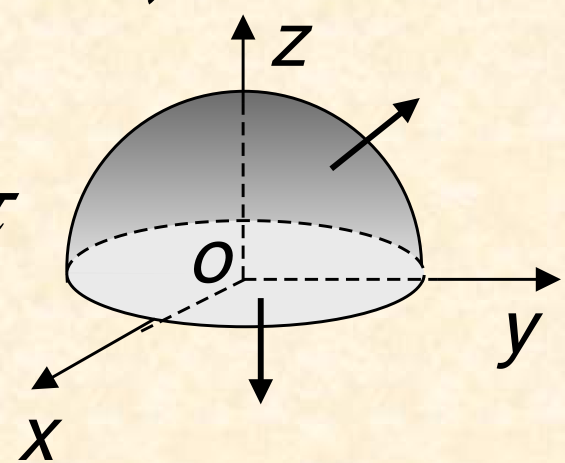
$$=4\pi(4e^2-\frac{5}{2}e)\qquad \therefore\ I=2(5e^4-4e^2-4)\pi$$

例9. 计算 $\iint_\Sigma x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上侧 .

解: 设 Σ_0为半球底面, 取下侧 , 与Σ 所围区域为Ω

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0} = 3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv - 0$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi \int_0^1 r^4 dr = \frac{6}{5}\pi$$



练习: 求 $I = \oiint_\Sigma \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}\right)$, 其中$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧. (答案: $12\pi R$)

例10、设 $f(u)$ 具有连续导数，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz+[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3]dzdx+[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3]dxdy$$

其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=1$

$x^2+y^2+z^2=4$ 所围成立体表面的外侧。

解 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=3x^2$ $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{1}{z^2}f'\left(\dfrac{y}{z}\right)+3y^2$ $\dfrac{\partial R}{\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}f'\left(\dfrac{y}{z}\right)+3z^2$

由高斯公式得 $I=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2 r^4\,dr=\frac{93}{5}\pi(2-\sqrt{2})$$

例11. 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\rho=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 $z=1$以上部分 Σ 的质量M.

解: Σ在xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$, 故

$$M=\iint_{\Sigma}\rho\, dS=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\cdots=13\pi$$

练习: 曲面 $\Sigma: z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$, 其上面密度 $\rho=x^2+y^2$, 求其质量

(**答案:** $\dfrac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$)

例12. 求面密度为 1 的锥面 $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le h,\ a>0)$ 对 oz 轴的转动惯量 .

解: $$I=\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\,dx\,dy$$

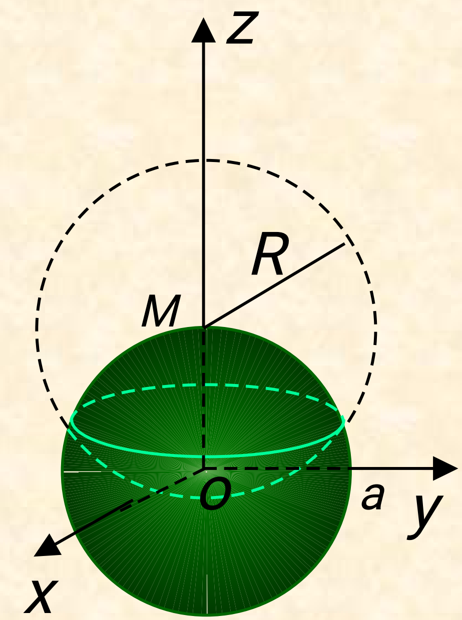
$$=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr \ =\frac{\pi}{2}a^3\sqrt{a^2+h^2}$$

练习: 求面密度为 1 的球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 绕 z 轴的转动惯量 I .

(答案: $\frac{8}{3}\pi R^4$)

例13. 设半径为R 的球面 Σ 的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的点 $M(0,0,a)$ $(a>0)$ 处，问当R 取何值时, 球面 Σ 在定球内部那部分的面积最大 .

解: $\Sigma: x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$ 含于定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部那部分Σ' 在xoy 面上的投影为



$$D: x^2+y^2 \le R^2-\frac{R^4}{4a^2}$$

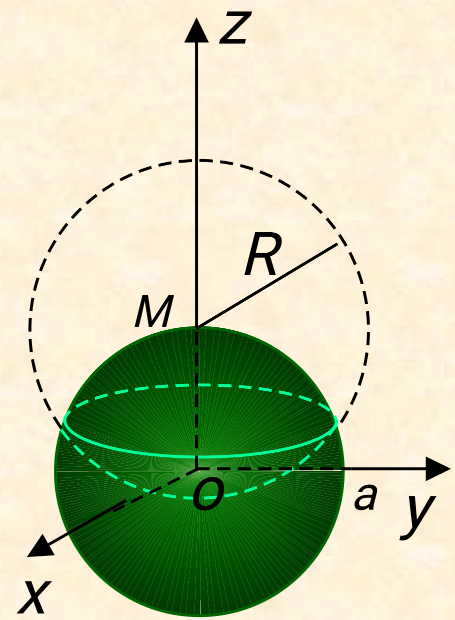
其面积为

$$S=\iint_{\Sigma'} dS=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$S=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\boxed{D: x^2+y^2\le R^2-\frac{R^4}{4a^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R\sqrt{1-\frac{R^2}{4a^2}}} \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr$$



$$=2\pi R\left(R-\frac{R^2}{2a}\right),\quad a\in(0,+\infty)$$

令 $S'(R)=0$，得 $R=\frac{4}{3}a$，

由实际意义可知

$$S_{\max}=S\left(\frac{4a}{3}\right)=\frac{16\pi a(2a-1)}{9}$$

总复习

《高等数学》（下）

常微分方程

1、一阶微分方程的求解

变量分离、齐次、线性、伯努利、全微分

2、可降阶的高阶微分方程的求解

3、线性微分方程解的结构定理

4、二阶线性常系数齐次与非齐次微分方程的求解

典型例题

1. 求解微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$

解：原方程改写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

令 $\dfrac{y}{x}=u,\quad \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}\qquad \therefore u+x\dfrac{du}{dx}=u\ln u$

分离变量 $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$

两边积分 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$

从而通解为 $y=xe^{Cx+1}$

2. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y^2 \cos y}$

解：将原方程写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = -y \cos y$

$$x = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} \left[\int (-y \cos y) e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + C \right]$$

$$= y \left[\int (-y \cos y) \frac{1}{y} dy + C \right]$$

$$= y(C - \sin y)$$

3. 求解微分方程 $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

解：原方程变形为 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = xy^{\frac{1}{2}}$

令 $z = y^{1-n} = y^{1/2} \quad \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y^{-1/2}\dfrac{dy}{dx}$

方程变为 $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{x}{2}$

$$\therefore \sqrt{y} = z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left[\int \frac{x}{2}e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = x^2\left[\int \frac{1}{2x}dx + C\right]$$

$$= x^2\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)$$

4. 求解微分方程$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$

解：原方程变形为

$$2xy^2 dx - (ydx - xdy) + (y^2 + y)dy = 0$$

用$\mu(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$乘方程两边

$$2xdx - \frac{ydx - xdy}{y^2} + (1 + \frac{1}{y})dy = 0$$

$\therefore$ 通解：$x^2 - \dfrac{x}{y} + y + \ln y = C$

5. 设 $\phi(x)\in C,\ \phi(x)=e^x-\int_0^x(x-u)\phi(u)\,du$，求 $\phi(x)$.

解: $\phi(x)=e^x-x\int_0^x\phi(u)\,du+\int_0^x u\phi(u)\,du$

$\Big\downarrow$ 两边对x 求导

$$\boxed{\begin{aligned}\phi'(x)&=e^x-\int_0^x\phi(u)\,du\\&\quad\cancel{-x\phi(x)}+\cancel{x\phi(x)}\end{aligned}}$$

$$\begin{cases}\phi''(x)+\phi(x)=e^x\\ \phi(0)=1,\quad \phi'(0)=1\end{cases}$$

求解可得 $\phi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

思考: 设 $\phi(x)=e^x-x^{3/2}\int_0^{\sqrt{x}}\phi(\sqrt{x}\,u)\,du$，如何求 $\phi(x)$？

提示: 对积分换元，令 $t=\sqrt{x}\,u$，则有

$$\phi(x)=e^x-x\int_0^x\phi(t)\,dt$$

6. 求解初值问题 $\begin{cases} 2yy'' = (y')^2 + y^2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

$$\therefore p^2 = y^2$$

故$p = -y \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -dx$

两边积分并整理得 $y = C_2 e^{-x}$

由$y(0) = 1$, 知： $C_2 = 1$

故所求特解为 $y = e^{-x}$

7. 求微分方程通解 $y'' + 2y' + 3y = 0$

解：特征方程 $r^2 + 2r + 3 = 0 \quad \Rightarrow r_{1,2} = -1 + \sqrt{2}i$

通解 $y = e^{-x}[C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x]$

8. 求微分方程通解 $y^{(4)} + y''' + y' + y = 0$

解：特征方程 $r^4 + r^3 + r + 1 = 0$

$$\Rightarrow r_{1,2} = -1, \quad r_{2,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

通解

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}[C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]$$

9. 求微分方程通解 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

解：特征方程 $r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow r_{1,2} = 2$

对应齐方程通解 $Y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

$\because \lambda = 2$是二重根

可设特解 $y^* = x^2(ax + b)e^{2x}$

代入方程得 $a = \frac{1}{6}, b = 0 \quad \therefore y^* = \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$

通解 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$

10. 求微分方程通解 $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$

解：特征方程 $r^2 + 2r + 5 = 0 \quad \Rightarrow r_{1,2} = -1 + 2i$

对应齐方程通解 $Y = e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

$\because \lambda \pm i\omega = -1 \pm 2i$是一重根

可设特解 $y^* = x(a\cos 2x + b\sin 2x)e^{-x}$

代入方程得 $a = 0, b = \dfrac{1}{4} \qquad \therefore\ y^* = \dfrac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$

通解

$$y = e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

11. 求微分方程通解形式 $y'' + y = x + \cos x + e^{2x}\cos 3x$

解：特征方程 $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

对应齐方程通解 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

下面分别求方程特解形式

$y'' + y = x$ $\qquad y_1{}^* = a_1 x + a_2$

$y'' + y = \cos x$ $\qquad y_2{}^* = x(b_1 \cos x + b_2 \sin x)$

$y'' + y = e^{2x}\cos 3x$ $\qquad y_3{}^* = e^{2x}(d_1 \cos 3x + d_2 \sin 3x)$

原方程通解形式

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y^*_1 + y_2{}^* + y_3{}^*$$

12. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$， $y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求出该微分方程。

解：由线性微分方程解的结构理论知

$y_3 - y_2 = e^{2x}$ 及 $y_3 - y_1 = e^{-x}$ 是对应齐次方程的解，且它们线性无关

所以对应齐次方程的特征方程为

$$(r-2)(r+1) = 0 \quad \text{即} \quad r^2 - r - 2 = 0$$

所以可设方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$

将 $y_1 = xe^x + e^{2x}$代入方程 $\Rightarrow f(x) = e^x - 2xe^x$

所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$

13. 求满足 $f(0)=-1,\ f'(0)=1$ 的具有二阶连续导数的函数 $f(x)$ ，使得

$$f(x)ydx+\left[\frac{3}{2}\sin 2x-f'(x)\right]dy=0$$

是全微分方程，并求此全微分方程的积分曲线中经过 $(\pi,1)$ 的一条积分曲线。

解： $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\quad\Rightarrow 3\cos 2x-f''(x)=f(x)$

$$\therefore\ f''(x)+f(x)=3\cos 2x$$

对应齐次方程的通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

令 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$ 代入方程得 $A=-1,\ B=0$

所以方程通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos 2x$

由 $f(0)=-1,\ f'(0)=1\ \Rightarrow C_1=0, C_2=1$

$$\therefore\ f(x)=\sin x-\cos 2x$$

因此全微分方程为

$$(\sin x-\cos 2x)ydx-(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)dy=0$$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}=\int_0^y-(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)dy=-(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)y$$

所以全微分方程通解为 $(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)y=C$

由 $y|_{x=\pi}=1$知： $C=-1$

于是所求积分曲线为 $y=-(\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x)^{-1}$

14、 设 $f(x)$ Î C^2，且满足方程

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

求 $f(x)$.

提示: $f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t\,f(t)\,dt$

上式两边对x 求导两次：

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\,dt - \cancel{x\,f(x)} + \cancel{x\,f(x)}$$

$$f''(x) = -\sin x - f(x)$$

因此问题化为解下列初值问题

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = -\sin x \\ f(0) = 0,\quad f'(0) = 1 \end{cases}$$

最后求得 $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{x}{2}\cos x$

15 已知 $\int_L \left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right] y\,dy+\frac{3}{2}y^2 f(x)\,dx$ 在全平面上与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，且当 L 是起点在(0,0)，终点为(1,1)的有向曲线时，该曲线积分值等于 $\frac{1}{4}$，试求函数 $f(x)$

解：由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \left[f'(x)-x\right]y=3yf(x)$

$$\therefore \quad f'(x)-3f(x)=x$$

$$f(x)=e^{\int 3dx}\left[\int xe^{-\int 3dx}dx+C\right]=e^{3x}\left[\int xe^{-3x}dx+C\right]$$

$$f(x) = e^{\int 3dx}\left[\int x e^{-\int 3dx}dx + C\right] = e^{3x}\left[\int x e^{-3x}dx + C\right]$$

$$= Ce^{3x} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\because \int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[f(x) - \frac{x^2}{2}\right]ydy + \frac{3}{2}y^2 f(x)dx = \int_0^1\left[f(1) - \frac{1}{2}\right]ydy = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{13}{9}e^{-3}$$

$$f(x) = \frac{13}{9}e^{3x-3} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

级数的收敛、求和与展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} S(x) \quad \text{（在收敛域内进行）}$$

$$\begin{cases} \text{当 } x = x_0 \text{ 时，} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \text{ 为数项级数；} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n x^n \text{ 时，} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \text{ 为幂级数} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (a_n, b_n \text{ 为傅} \end{cases}$$

氏系数) 时，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 为傅立叶级数 。

基本问题：判别敛散； 求收敛域；

求和函数； 级数展开。

1、设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处的收敛，试求在 $x=2$ 处的敛散性。

解： $|x-1| < |-1-1| = 2 \Longrightarrow -1 < x < 3$

由阿贝尔定理，在如上范围内绝对收敛

故 $x=2$ 时，原级数绝对收敛。

练习：若 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^{n-1}$ 在 $x=3$ 处的条件收敛，求原级数的收敛半径 R 。

解：由阿贝尔定理， $x=3$ 为端点

即 $|x+1| < R \Longrightarrow -R-1 < x < R-1 \Longrightarrow R=4$

练习 将 $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$ 展成x的幂级数

解: $f(x)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1-2x}\right)$

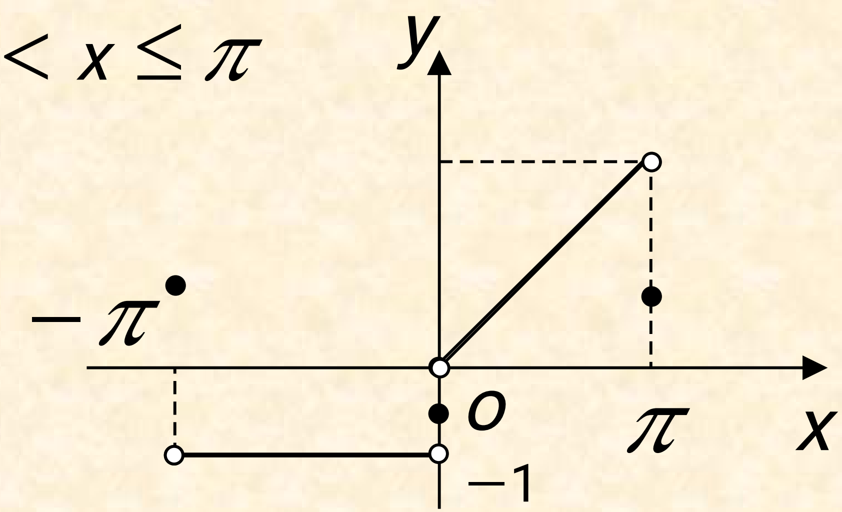
而 $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad -1<x<1$

$$\therefore \frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n \quad |x|<\frac{1}{2}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3}x^n \qquad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

2、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$



(1) 求傅里叶系数 b_2

解: $b_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx$

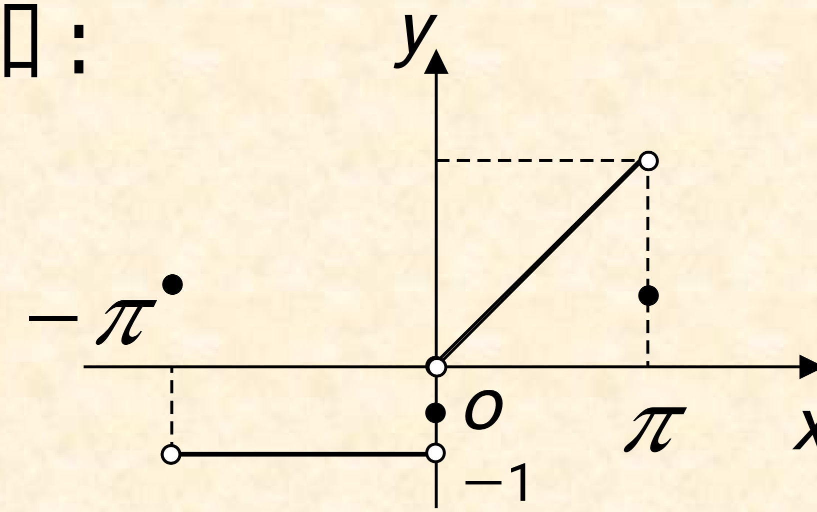
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin 2x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin 2x\,dx=-\frac{3}{2}$$

(2) 写出 $[-\pi,\pi]$ 上傅里叶系数的和函数的表达式

分段表示　　　　（略）

(3) 求 $x=\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 5\pi, 6.1\pi, -4.2\pi, 116.8\pi$ 时的值

解：由图与函数的周期性可知：



$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

$$f(5\pi)=f(\pi)=\frac{\pi-1}{2}$$

$$f(6.1\pi)=f(0.1\pi)=0.1\pi$$

$$f(-4.2\pi)=f(-0.2\pi)=-1$$

$$f(116.8\pi)=f(0.8\pi)=0.8\pi$$

3、 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=\infty$

思路：利用无穷大与无穷小的关系

只要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ 看成是某个正项级数的通项

故只需证明级数收敛。

4、 求下列级数的和函数

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^n$ $(|x|\le 1)$ 的和函数

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n n!}x^{2n}$ $(|x|\le +\infty)$ 的和函数

(1) 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$ $(|x|\le 1)$ 的和函数

去分母常求导,
去分子常积分,

解：逐项求导得

$$s'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}x^{2n-1}$$

再逐项求导，得

$$s''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=2\cdot\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{2}{1+x^2}$$

$$\therefore\quad s'(x)=2\arctan x$$

分部积分，得

$$\therefore\quad s(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\qquad(|x|\le 1)$$

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}x^{2n}$ $\quad(|x|\le+\infty)$ 的和函数

解: $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^n}{(n-1)!}=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{x^2}{2}e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^n}{n!}=e^{\frac{x^2}{2}}-1$$

$$\therefore\quad s(x)=\frac{x^2}{2}e^{\frac{x^2}{2}}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$$

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛 .

提示: 因 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$， $\therefore$ 存在 $N>0$，

当 $n>N$ 时

$$u_n^2 < u_n, \quad v_n^2 < v_n$$

又因

$$(u_n+v_n)^2 \le 2(u_n^2+v_n^2) < 2(u_n+v_n) \quad (n>N)$$

利用**收敛级数的性质**及**比较判敛法**易知结论正确 .

练习 求下列幂级数的和函数:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n}}x^{2(n-1)}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$

解: (1)

$x\neq 0$

$$原式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}(x^{2n-1})'=\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{n}\right]'=\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{2}/2}{1-x^{2}/2}\right]'$$

$$=\left[\frac{x}{2-x^{2}}\right]'=\frac{2+x^{2}}{(2-x^{2})^{2}} \qquad \left(0<\frac{x^{2}}{2}<1\right)$$

显然$x=0$时上式也正确,而在 $x=\pm\sqrt{2}$ 级数发散,

故和函数为 $S(x)=\dfrac{2+x^{2}}{(2-x^{2})^{2}}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

$\boxed{x \neq 0}$

解: 原式= $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^n\,dt\right)$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right)dt - \frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt \qquad (0<|x|<1)$$

$$= -\ln(1-x) + 1 + \frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

原式 $= 1 + (\frac{1}{x} - 1)\ln(1-x) \qquad 0 < |x| < 1$

显然$x = 0$ 时, 和为 0 ; $x = \pm 1$ 时, 级数也收敛

根据和函数的连续性，有

$$S(x) = \begin{cases} 1 + (\frac{1}{x} - 1)\ln(1-x), & 0 < |x| < 1 \text{ 及 } x = -1 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$