

第21章 重积分

§1 二重积分概念

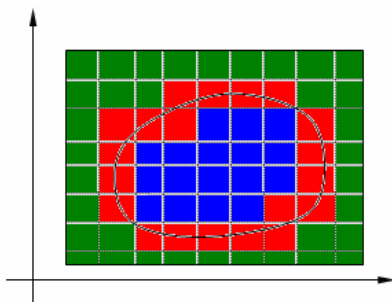
【一】平面图形的面积

为了研究定义在平面图形（即平面点集）上函数的积分，我们首先讨论平面有界图形的面积问题。

称一个平面图形 P 是有界的，是指构成这个平面图形的点集是平面上的有界点集，即存在一个矩形 R ，使得 $P \subset R$ 。

设 P 是一平面有界图形，取矩形 R ，使得 $P \subset R$ 。用平行于坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形。这时直线网 T 的网眼（即小闭矩形 Δ_i ）可分为三类：

- (1) Δ_i 上的点都是 P 的内点；
- (2) Δ_i 上含有 P 的边界点；
- (3) Δ_i 上的点都是 P 的外点，即 $\Delta_i \cap P = \Phi$ 。



记 $S(\Delta_i)$ 为小矩形 Δ_i 的面积，并记

$$s_p(T) = \sum_{(1)} S(\Delta_i), S_p(T) = \sum_{(1)} S(\Delta_i) + \sum_{(2)} S(\Delta_i)$$

显然 $s_p(T) \leq S_p(T)$ 。又数集 $\{s_p(T)\}, \{S_p(T)\}$ 都是有界集，从而 $\{s_p(T)\}$ 有上确界，

$\{S_p(T)\}$ 有下确界。显然

$$0 \leq \underline{s}_p = \sup_T s_p(T) \leq \inf_T S_p(T) = \overline{S}_p$$

【定义】 如果 $\underline{s}_p = \overline{S}_p = S(P)$ ，则称 P 为可求面积的平面图形，并称这个共同值 $S(P)$

为 P 的面积.

若 T_2 是 T_1 的加细分割, 易知

$$s_P(T_1) \leq s_P(T_2), S_P(T_1) \geq S_P(T_2)$$

因此, P 为可求面积又等价于

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s_P(T) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} S_P(T) = S(P)$$

这里 $\|T\| = \max d(\Delta_i)$ 。

【定理 1】 平面有界图形 P 可求面积的充要条件是 P 的边界 ∂P 的面积为零, 即

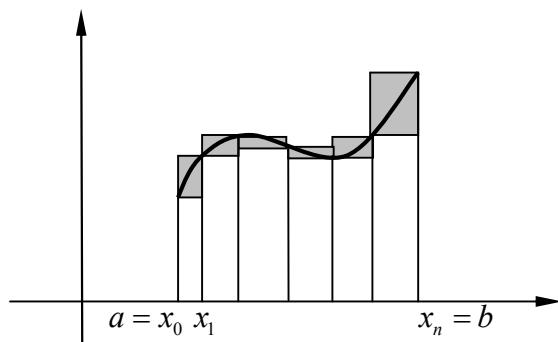
$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} [S_P(T) - s_P(T)] = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{(2)} S(\Delta_i) = 0$$

或写成

$\forall \varepsilon > 0, \exists T$, 使得

$$S_P(T) - s_P(T) = \sum_{(2)} S(\Delta_i) < \varepsilon$$

【定理 2】 设 $f(x)$ 为定义在 $[a, b]$ 上的有界函数, 则由 $y = f(x)$ 表示的曲线为零面积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.



这相当于

$$\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = 0$$

推论 1: $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则由 $y = f(x)$ 表示的曲线是零面积.

推论 2: 由参量方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 所表示的平面光滑曲线是零面积.

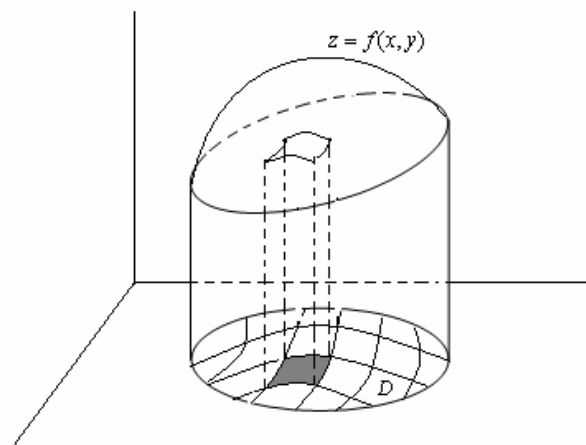
推论 3: 由平面上分段光滑曲线所围成的有界闭区域是可求面积的.

例如: $A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq D(x)\}$ ($D(x)$ 为 Dirichlet 函数), 则 A 不可求面积.

对 $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, (x_0, y_0) 的小邻域既有属于 A 的点, 又有不属于 A 的点, 因此 A 有边界点是 $[0, 1] \times [0, 1]$, 其面积不是零. 或者由定理 2, $D(x)$ 不可积, 所以 A 不可求面积.

【二】 二重积分的定义及其存在性

【几何背景】 设 $f(x, y)$ 为定义在可求面积的有界闭区域 D 上的非负连续函数. 求以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, D 为底的曲顶柱体的体积 V .



用任意的曲线网把 D 分成 n 个可求面积的小区域 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. 以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 σ_i 的面积. 这个曲线网也相应地把曲顶柱体分割成 n 个以 σ_i 为底的小曲顶柱体 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 在 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 用以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高, σ_i 为底的小平顶柱体的体积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 作为 V_i 的体积 ΔV_i 的近似值, 即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

从而

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

记 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$, 定义

$$V = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i,$$

【定义】设 D 为 xy 平面上可求面积的有界闭区域, $f(x, y)$ 为定义在 D 上的函数. 同上“分割, 近似求和, 取极限”, 定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

称为 f 在 D 上的二重积分. 此时, 称 f 在 D 上可积, 二重积分也记为 $\iint_D f(x, y) dx dy$.

注: 上述极限存在的“ $\varepsilon - \delta$ 语言”同定积分.

【约定】以后的积分区域 D 均指平面上可求面积的有界闭区域.

【定理 3】 f 在 D 上可积, 则 f 在 D 上有界.

【定理 4】设 $f(x, y)$ 在 D 上有界, T 是 D 的分割, 记

$$M_i = \sup_{(x, y) \in \sigma_i} f(x, y), \quad m_i = \inf_{(x, y) \in \sigma_i} f(x, y)$$

$$S(T) = \sum M_i \Delta \sigma_i, \quad s(T) = \sum m_i \Delta \sigma_i,$$

则 f 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) \text{ 或 } \lim_{\|T\| \rightarrow 0} [S(T) - s(T)] = 0$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{ 使得 } S(T) - s(T) < \varepsilon$$

【定理 5】有界闭区域 D 上的连续函数必可积.

【定理 6】设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有界, 且其不连续点集是零面积, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

【三】二重积分的性质

1. 若 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, k 为常数, 则 $kf(x, y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

2. 若 $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上都可积, 则 $f(x, y) \pm g(x, y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

3. 若 $f(x, y)$ 在 D_1 和 D_2 上都可积, 且 D_1 与 D_2 无公共内点, 则 $f(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上也可积, 且

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

4. 若 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在 D 上可积, 且 $f(x, y) \leq g(x, y), (x, y) \in D$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

5. 若 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 则函数 $|f(x, y)|$ 在 D 上也可积, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

6. 若 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 且 $m \leq f(x, y) \leq M, (x, y) \in D$, 则

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS_D,$$

这里 S_D 是积分区域 D 的面积.

7. (中值定理) 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_D$$

这里 S_D 是积分区域 D 的面积.

§2 直角坐标系下二重积分的计算

【定理 1】 设 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积,

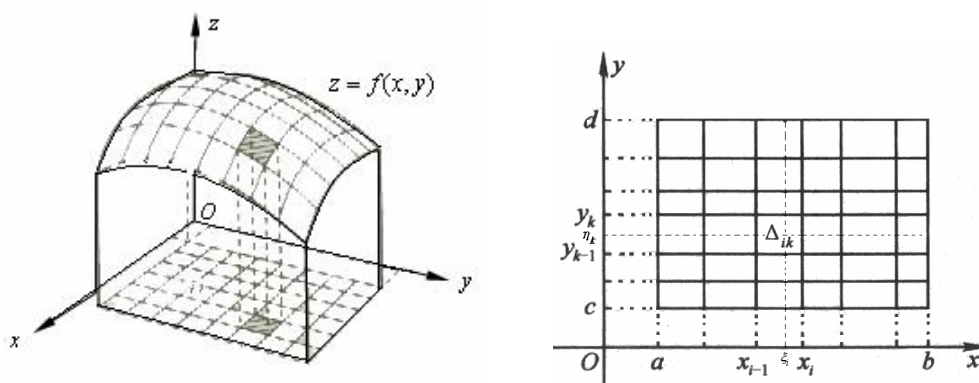
(1) 对 $\forall x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x, y) dy$ 存在, 则累次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 也存在, 且

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

(2) 对 $\forall y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y) dx$ 存在, 则累次积分 $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ 也存在, 且

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

证明 令 $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 定理要求证明 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且积分的结果恰为二重积分.



对区间 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 分别作分割

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_s = d.$$

设 $f(x, y)$ 在 Δ_{ik} 上的上确界和下确界分别为 M_{ik} 和 m_{ik} . 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任取一点 ξ_i , 于是就有不等式

$$m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}$$

对上不等式同时积分, 可得

$$m_{ik} \Delta y_k \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \Delta y_k$$

因此

$$\sum_{k=1}^s m_{ik} \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=1}^s M_{ik} \Delta y_k$$

$$\sum_{k=1}^s m_{ik} \Delta y_k \leq F(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^s M_{ik} \Delta y_k$$

所以有

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s m_{ik} \Delta y_k \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^r F(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s M_{ik} \Delta y_k \Delta x_i$$

由于二重积分存在, 当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i,k} m_{ik} \Delta y_k \Delta x_i$ 和 $\sum_{i,k} M_{ik} \Delta y_k \Delta x_i$ 有相同的极限, 且极

限值等于 $\iint_D f(x, y) d\sigma$. 因此当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, 可得

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r F(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

又由于当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, 必有 $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, 因此由定积分定义, 上式左边

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

【注】上述证明过程简单地写为:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k \\ &= \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_i \left(\lim_{\max(\Delta y_k) \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_i, \eta_k) \Delta y_k \right) \Delta x_i \\ &= \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_i \left(\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x_i = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

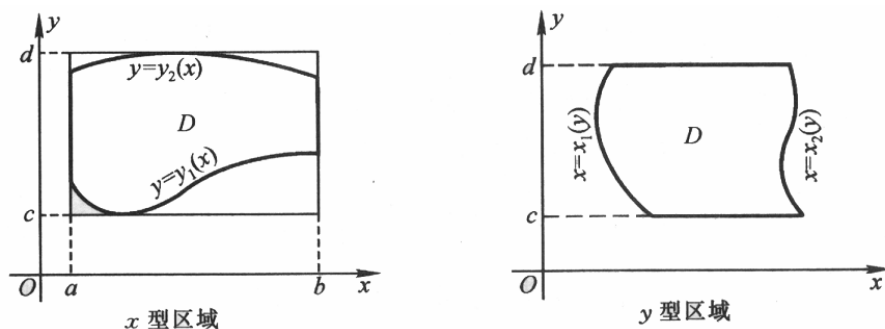
称平面点集

$$D = \{(x, y) | y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

为 x 型区域; 称平面点集

$$D = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

为 y 型区域.



x 型区域的特点是, 垂直于 x 轴的直线 $x = x_0 (a < x_0 < b)$ 至多与区域 D 的边界交于两点; y 型区域的特点是, 直线 $y = y_0 (c < y_0 < d)$ 至多与 D 的边界交于两点.

【定理 2】 (1) 若 $f(x, y)$ 在 x 型区域 D 上连续, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

(2) 若 $f(x, y)$ 在 y 型区域 D 上连续, 其中 $x_1(y), x_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

证明 (1) 取矩形 $[a, b] \times [c, d] \supset D$, 作 $[a, b] \times [c, d]$ 上的函数

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$F(x, y)$ 不连续点的面积为零. 因此 $F(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上可积. 易知

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{[a, b] \times [c, d]} F(x, y) d\sigma$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \int_a^b dx \left\{ \int_c^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy \right\} \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

【注】 另证 $x = x_0$ 的截面积

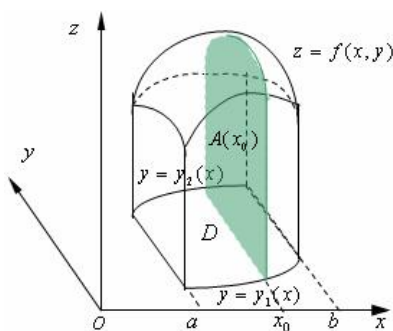
$$A(x_0) = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y) dy$$

截面积函数

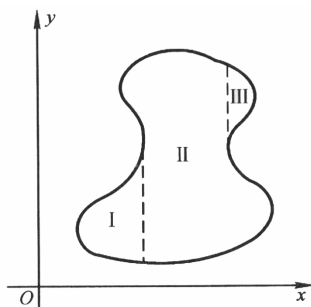
$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, x \in [a, b]$$

曲顶柱体的体积 (即二重积分)

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

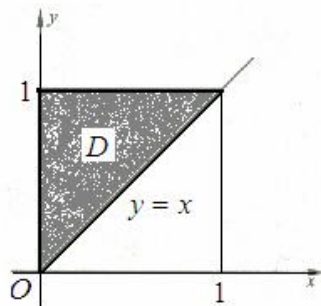


【注】许多常见的区域都可以分解成有限个除边界外无公共内点的 x 型区域或 y 型区域, 如图所示的区域 D 可分解成三个区域, 其 I, III 为 x 型区域, II 为 y 型区域.



【例 1】(P233) 设 D 是由直线 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 围成的区域, 试计算:

$$I = \iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$$



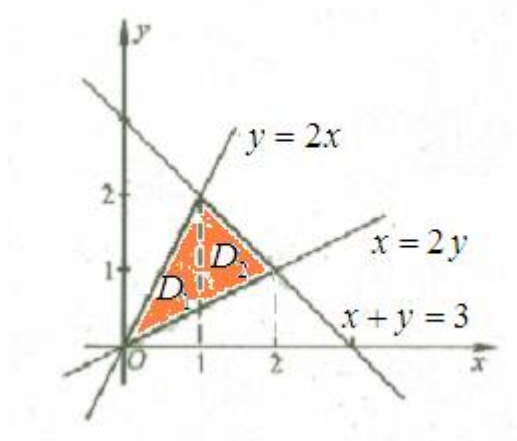
解 若用先对 y 后对 x 的积分, 则 $I = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$.

由于函数 e^{-y^2} 的原函数无法用初等函数形式表示, 因此改用另一种顺序的累次积分,

则有

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.$$

【例 2】(P233) 计算二重积分 $\iint_D d\sigma$, 其中 D 为由直线 $y=2x, x=2y$ 及 $x+y=3$ 所围的三角形区域.



解 当把 D 看作 x 型区域时, $y_1(x) = \frac{1}{2}x$, $y_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D d\sigma &= \iint_{D_1} d\sigma + \iint_{D_2} d\sigma = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} dy \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(3 - x - \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1 + \left[3x - \frac{3}{4}x^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

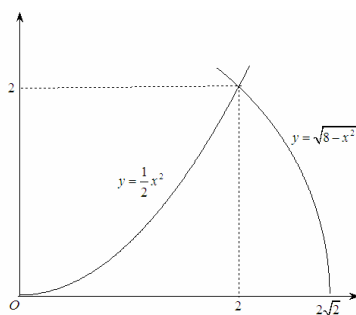
【注】 用三点坐标求面积 $O(0,0), A(1,2), B(2,1)$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

【例 3】 交换下面累次积分的顺序

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y) dy$$

解 画图



$$I = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$$

【例 4】 求两个底面半径相同的直交圆柱所围立体的体积 V .

解 设圆柱底面半径为 a , 两个圆柱方程为

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ 与 } x^2 + z^2 = a^2.$$

利用对称性, 只要求出在第一卦限 (即 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 部分的体积, 然后再乘以 8 即

得所求的体积. 第一卦限部分的立体是以 $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ 为曲顶, 以四分之一圆域 D :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \\ 0 \leq x \leq a, \end{cases}$$

为底的曲顶柱体, 所以

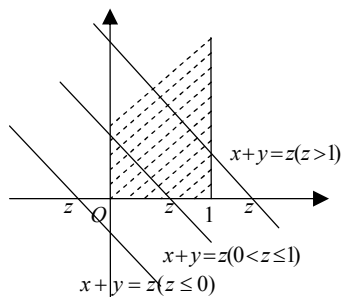
$$V = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} d\sigma = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.$$

【例 5】 设二维随机变量

$$(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数 $F(z) = \iint_{D: x+y \leq z} f(x, y) dy$.

解



$$z \leq 0 \text{ 时, } F(z) = \iint_{D: x+y \leq z} 0 dy = 0$$

$$0 < z \leq 1 \text{ 时, } F(z) = \int_0^z dx \int_0^{x-z} e^{-y} dy = z + e^{-z} - 1$$

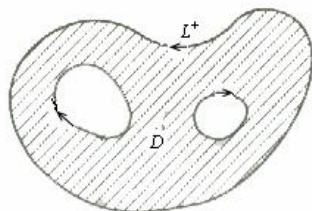
$$z > 1 \text{ 时, } F(z) = \int_0^1 dx \int_0^{x-z} e^{-y} dy = 1 - (e-1)e^{-z}$$

§3 格林公式·曲线积分与路线的无关性

【一】格林(Green)公式

N. L. 公式: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 把 $[a, b]$ 上的积分用原函数在边界上的值来计算. 本节讨论区域 D 上的二重积分与 D 的边界曲线 L 上的曲线积分之间的联系.

设区域 D 的边界 L 是由一条或几条光滑曲线所组成. 边界曲线的正方向规定为: 当人沿边界行走时, 区域 D 总在它的左边, 记为 L^+ (如图). 与上述规定的方向相反的方向称为负方向, 记为 L^- . 下面所说的简单闭曲线是指除两个端点重合外, 自身不相交.



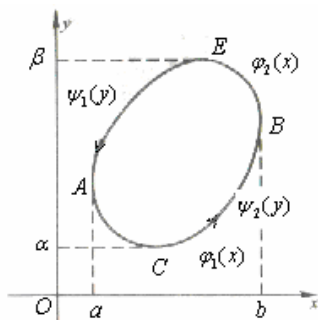
【定理 1】(Green 公式) 设 D 是平面上的有界闭区域, 其边界由有限条光滑的简单闭曲线组成, 其正向边界记为 L^+ . 若函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{L^+} Pdx + Qdy \quad (1)$$

证 根据区域 D 的不同形状, 分三种情形来证明:

(i) 若区域 D 既是 x 型区域又是 y 型区域, 即平行于坐标轴的直线和 L 至多交于两点. 这时区域 D 可表示为

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \quad \text{或} \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), a \leq y \leq \beta.$$



这里 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 分别为曲线 \widehat{ACB} 和 \widehat{AEB} 的方程. 而 $x = \psi_1(y)$ 和 $x = \psi_2(y)$

则分别是曲线 \widehat{CAE} 和 \widehat{CBE} 的方程. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_2(y), y) dy - \int_{\alpha}^{\beta} Q(\psi_1(y), y) dy \\ &= \int_{\widehat{CBE}} Q(x, y) dy - \int_{\widehat{CAE}} Q(x, y) dy \\ &= \int_{\widehat{CBE}} Q(x, y) dy + \int_{\widehat{EAC}} Q(x, y) dy = \oint_{L^+} Q(x, y) dy.\end{aligned}$$

同理可以证得

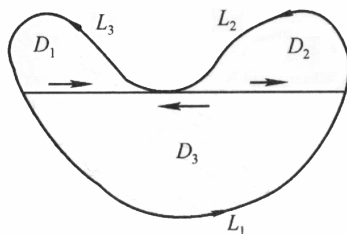
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \oint_{L^+} P(x, y) dx.$$

将上述两个结果相加即得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{L^+} P dx + Q dy.$$

(ii) 若区域 D 是由一条按段光滑的闭曲线围成, 则先用几段光滑曲线将 D 分成有限个既是 x 型又是 y 型的子区域, 然后逐块按 (i) 得到它们的格林公式, 并相加即可.

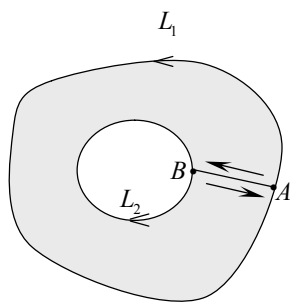
如图, 可将 D 分成三个既是 x 型又是 y 型的区域 D_1, D_2, D_3 ,



于是

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma &= \left\{ \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} \right\} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \\ &= \left\{ \oint_{L_1^+} + \oint_{L_2^+} + \oint_{L_3^+} \right\} (P dx + Q dy) = \oint_{L^+} P dx + Q dy.\end{aligned}$$

(iii) 若区域 D 由几条闭曲线所围成, 如图, 这时可适当添加直线段 AB 把区域转化为 (ii) 的情况来处理.

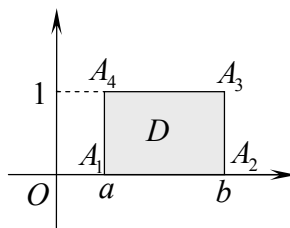


$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma &= \left\{ \int_{AB} + \int_{L_2} + \int_{BA} + \int_{L_1} \right\} (Pdx + Qdy) \\ &= \left\{ \oint_{L_2} + \oint_{L_1} \right\} (Pdx + Qdy) = \oint_{L^+} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

【注 1】 记忆

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \oint_{L^+} Pdx + Qdy.$$

【注 2】 Green 公式是 N. L. 公式的推广



取 $Q = f(x), P = 0$

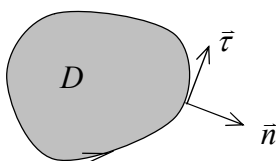
$$\text{左} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \iint_D f'(x) d\sigma = \int_a^b dx \int_0^1 f'(x) dy = \int_a^b f'(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{右} &= \left\{ \int_{A_1A_2} + \int_{A_2A_3} + \int_{A_3A_4} + \int_{A_4A_1} \right\} (Pdx + Qdy) \\ &= \int_{A_2A_3} f(x) dy + \int_{A_4A_1} f(x) dy = \int_0^1 f(b) dy + \int_1^0 f(a) dy = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

【定理 2】 (用第一型曲线积分表示的 Green 公式)



设切线方向 $\vec{\tau}$ 与 D 的正边界方向一致, 法线方向如前约定, 设 $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta)$,

则 $\vec{n} = (\cos \beta, -\cos \alpha) \triangleq (\cos \alpha', \cos \beta')$

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\sigma &= \oint_{L^+} -Qdx + Pdy = \oint_L (-Q \cos \alpha + P \cos \beta) ds \\ &= \oint_L (P \cos \alpha' + Q \cos \beta') ds \end{aligned}$$

这与后面 Gauss 公式的形式是一致的.

【例 1】 在 Green 公式中, 令 $P=0, Q=x$, 则 D 的面积

$$S(D) = \iint_D d\sigma = \oint_{L^+} xdy$$

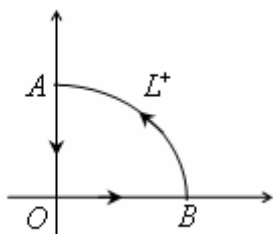
类似地,

$$S(D) = \oint_{L^+} -ydx, \quad S(D) = \frac{1}{2} \oint_{L^+} -ydx + xdy$$

求椭圆: $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的面积

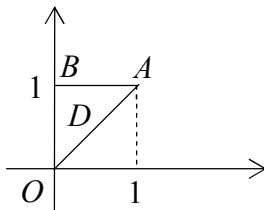
$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{L^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} abd\theta = \pi ab$$

【例 2】 计算 $\int_{\widehat{AB}} xdy$, 其中曲线 \widehat{AB} 是半径为 r 的圆在第一象限部分.



$$\begin{aligned} \int_{\widehat{BA}} xdy &= \left\{ \int_{\widehat{BA}} + \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}} \right\} xdy - \left\{ \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}} \right\} xdy \\ &= \oint_{L^+} xdy = \iint_D d\sigma = S(D) \\ \int_{\widehat{AB}} xdy &= -\int_{\widehat{BA}} xdy = -S(D) = -\frac{1}{4} \pi r^2 \end{aligned}$$

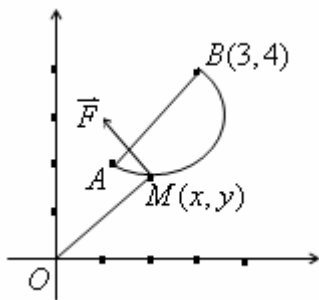
【例 3】 计算 $\iint_D e^{-y^2} d\sigma$.



令 $P=0, Q=xe^{-y^2}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$

$$\iint_D e^{-y^2} d\sigma = \oint_{L^+} xe^{-y^2} dy = \int_{OA} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

【例 4】质点沿着以 AB 为直径的半圆从 $A(1,2)$ 运动到 $B(3,4)$. 在过程中受力 \vec{F} 作用, \vec{F} 的大小等于点 M 到原点的距离, 其方向垂直于 OM , 且与 y 轴正向夹角为锐角. 求变力 \vec{F} 对质点 M 所作的功.



解 $\vec{OM} = (x, y)$, $\vec{F} = (-y, x)$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\widehat{AMB}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AMB}} -ydx + xdy = \oint_{\widehat{AMB}A} -ydx + xdy - \int_{BA} -ydx + xdy \\ &= 2 \iint_D d\sigma + \int_{AB} -ydx + xdy = 2\pi + \int_1^3 [-(x+1) + x] dx = 2\pi - 2 \end{aligned}$$

【例 5】计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 分别为

- (1) 圆周 $x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (\varepsilon > 0)$, 逆时针;
- (2) 任一不含原点的闭区域的边界线, 逆时针;
- (3) 任一包含原点的闭区域的边界线 (原点不在边界上), 逆时针.

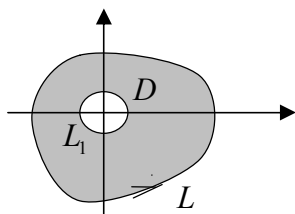
解 (1) 因为 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 在原点不连续, 不能直接用 Green 公式

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_L xdy - ydx \stackrel{\text{Green}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} S(D) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi$$

$$(2) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0$$

(3) 取小圆 $L_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ ($\varepsilon > 0$ 充分小完全包含在 L 内, 顺时针)



$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \left\{ \oint_{L+L_1} - \oint_{L_1} \right\} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 - (-2\pi) = 2\pi$$

【例 6】 设函数 $u(x, y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数,

证明

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

其中 \vec{n} 是 L 的外法线方向.

证 设法线方向 $\vec{n} = (\cos \alpha', \cos \beta')$, 由 Green 公式的第一型曲线积分形式

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha' + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta' \right) ds \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

【注】 类似地, 见 P291-16(1). 这是它的特殊情况.

设函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数, 证

明

$$\iint_D \left(v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

其中 \vec{n} 是 L 的外法线方向.

【例 6】 (P244-3) 证明: 若 L 为平面上封闭曲线, \vec{l} 为任意方向向量, 则

$$\oint_L \cos(\widehat{\vec{l}, \vec{n}}) ds = 0$$

其中 \vec{n} 是 L 的外法线方向.

证 设 $\vec{l} = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0)$ (常向量), $\vec{n} = (\cos \alpha', \cos \beta')$

$$\begin{aligned} \oint_L \cos(\widehat{\vec{l}, \vec{n}}) ds &= \oint_L \vec{l} \cdot \vec{n} ds = \oint_L (\cos \alpha_0 \cos \alpha' + \cos \beta_0 \cos \beta') ds \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial \cos \alpha_0}{\partial x} + \frac{\partial \cos \beta_0}{\partial y} \right) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

【注】类似地, 可求解 (P244-4) 求积分值

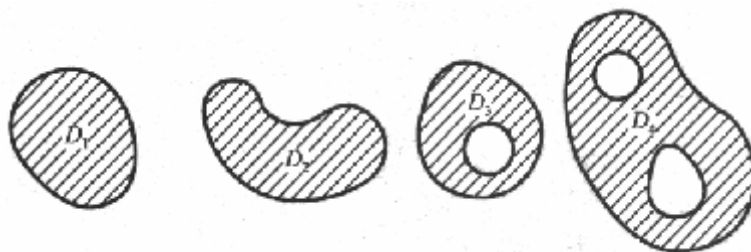
$$I = \oint_L [x \cos(\widehat{\vec{n}, x}) + y \cos(\widehat{\vec{n}, y})] ds$$

其中 L 为包围有界区域的封闭曲线, \vec{n} 是 L 的外法线方向. 答案: $I = 2S(D)$

【二】 曲线积分与路线的无关性

本段讨论第二型曲线积分在什么条件下, 它的值与所沿路线的选取无关, 只与起点与终点有关. 在物理、力学中第二型曲线积分与路线无关的向量场叫保守场. 比如: 重力场、静电场都是保守场.

若对于平面区域 D 内一条封闭曲线, 皆可不经 D 以外的点而连续收缩于属于 D 的某一点, 则称此平面区域为**单连通区域**; 否则称为**复连通区域**. 如图, D_1 与 D_2 是单连通区域, 而 D_3 与 D_4 则是复连通区域. 单连通区域也可以这样叙述: D 内任一封闭曲线所围成的区域内只含有 D 中的点. 更通俗地说, 单连通区域是没有“洞”的区域, 复连通区域是有“洞”的区域.



【定理 3】 设 D 是单连通闭区域. 若函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(i) 沿 D 内任一按段光滑封闭曲线 L , 有

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

(ii) 对 D 中任一按段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy$$

与路线无关, 只与 L 的起点及终点有关;

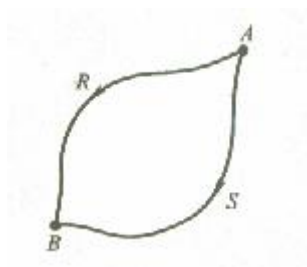
(iii) $Pdx + Qdy$ 是 D 内某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即在 D 内有

$$du = Pdx + Qdy$$

(iv) 在 D 内处处成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证明: (i) \Rightarrow (ii) 如图



设 \widehat{ARB} 与 \widehat{ASB} 为联结点 A, B 的任意两条按段光滑曲线, 由 (i) 可推得

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy - \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy &= \int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BSA}} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{\widehat{ARBSA}} Pdx + Qdy = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\widehat{ARB}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{ASB}} Pdx + Qdy.$$

(ii) \Rightarrow (iii) 设 $A(x_0, y_0)$ 为 D 内某一定点, $B(x, y)$ 为 D 内任意一点. 由 (ii), 曲线积分

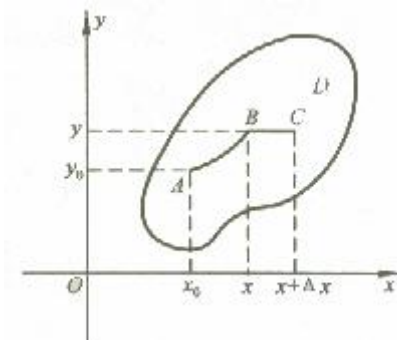
$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

与路线的选择无关, 故当 $B(x, y)$ 在 D 内变动时, 其积分值是 $B(x, y)$ 的函数, 记

$$u(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

取 Δx 充分小, 使 $(x + \Delta x, y) \in D$, 则函数 $u(x, y)$ 对于 x 的偏增量

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{AC} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy.$$



因为在 D 内曲线积分与路线无关, 所以

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy.$$

由于直线段 BC 平行于 x 轴, 所以 $dy = 0$, 从而由积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{BC} Pdx + Qdy \\ &= \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 根据 $P(x, y)$ 在 D 上连续, 于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta\Delta x, y) = P(x, y).$$

同理可证 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. 因此

$$du = Pdx + Qdy.$$

(iii) \Rightarrow (iv) 设存在函数 $u(x, y)$, 使得

$$du = Pdx + Qdy,$$

所以 $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y), Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$. 因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

从而在 D 内每一点处都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(iv) \Rightarrow (i) 设 L 为 D 内任一按段光滑封闭曲线, 记 L 所围得区域为 σ . 由于 D 为单连

通区域, 所以区域 σ 含在 D 内. 应用格林公式及在 D 内恒有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 的条件, 就得到

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$

【注】如果 $du = Pdx + Qdy$, 则称 $u(x, y)$ 为 $Pdx + Qdy$ 原函数. 由

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

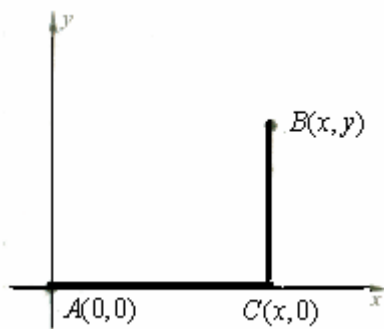
得

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \left\{ \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} \right\} Pdx + Qdy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)$$

【例 7】(P243) 试应用曲线积分求 $(2x + \sin y)dx + (x \cos y)dy$ 的原函数

解 这里 $P(x, y) = 2x + \sin y$, $Q(x, y) = x \cos y$, 所以在整个平面上成立

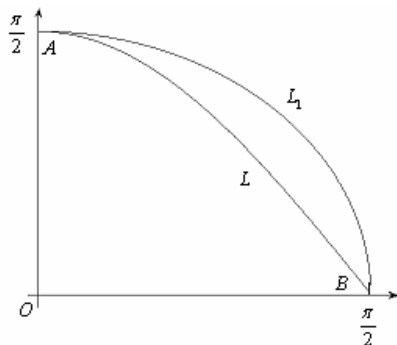
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$. 曲线积分与路线无关.



取 $A(0, 0), B(x, y)$ 取路线为图中的折线段 ACB . 于是有

$$u(x, y) = \int_0^x 2x dx + \int_0^y x \cos y dy = x^2 + x \sin y.$$

【例 8】设质点在力场 $\vec{F} = \frac{k}{r^2}(y, -x)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) 作用下, 沿曲线 $L: y = \frac{\pi}{2} \cos x$, 由 $A(0, \frac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\frac{\pi}{2}, 0)$, 求力 \vec{F} 所用的功.



解 $W = \int_{AB} \frac{k}{r^2} (ydx - xdy), \quad P = \frac{k}{r^2} y, Q = -\frac{k}{r^2} x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{k(x^2 - y^2)}{r^2} (x^2 + y^2 \neq 0)$$

在不包含原点的单连通区域, 曲线积分与路线无关. 取圆弧

$$L_1: x = \frac{\pi}{2} \cos \theta, y = \frac{\pi}{2} \sin \theta, \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

$$W = k \int_{\pi/2}^0 -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} k$$

【注】不能取 $AO + OB$

§4 二重积分的变量变换

【一】 二重积分的变量变换公式

先看定积分的变量变换:

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 设 $x = \varphi(t), \varphi'(t) > 0, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 再假设 $\varphi'(t)$ 连续, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

我们直接从定义出发来证明上述公式:

将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 相应地得 $[a, b]$ 的分割 $x_i = \varphi(t_i)$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i, t_{i-1} < \tau_i < t_i$$

令 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

由 $x = \varphi(t)$ 的一致连续性, $\max(\Delta t_i) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \max(\Delta x_i) \rightarrow 0$, 因此, 上式取极限, 再利用可积性便得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

这里要把 Δx_i 换成 $\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, $\varphi'(\tau_i)$ 是 Δx_i 与 Δt_i 的比例因子. 例如

$$x = \varphi(t) = \lambda t + \mu (\lambda > 0)$$

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = \lambda \Delta t, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda$$

一般地, 如果 $x = \varphi(t)$ 非线性, $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) \approx \varphi'(t)\Delta t$, 有

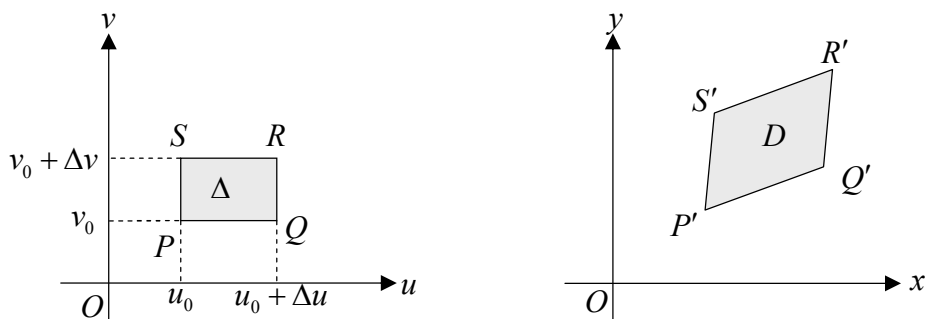
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t)$$

$\varphi'(t)$ 就是在 Δt 充分小时, Δx 与 Δt 的比例因子.

再看平面区域变量变换, 先看线性变换 (再加平移)

$$\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v + c_1 \\ y = a_{21}u + a_{22}v + c_2 \end{cases}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

它把 $u-v$ 平面上的矩形变成了 $x-y$ 平面上的平行四边形, 如图



下面求平行四边形的面积 $S(D)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = u\alpha_1 + v\alpha_2 + c$$

$$P' = u_0\alpha_1 + v_0\alpha_2 + c, Q' = (u_0 + \Delta u)\alpha_1 + v_0\alpha_2 + c,$$

$$R' = (u_0 + \Delta u)\alpha_1 + (v_0 + \Delta v)\alpha_2 + c, S' = u_0\alpha_1 + (v_0 + \Delta v)\alpha_2 + c$$

$$\overline{P'Q'} = \overline{S'R'} = \Delta u\alpha_1, \overline{P'S'} = \overline{Q'R'} = \Delta v\alpha_2$$

$$S(D) = |\Delta u\alpha_1 \times \Delta v\alpha_2| = |\Delta u\Delta v| \cdot |\alpha_1 \times \alpha_2| = S(\Delta) \cdot |\det(A)|$$

注: 这里把 α_1, α_2 看成空间向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, |\alpha_1 \times \alpha_2| = \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \end{bmatrix} \right| = |\det(A)|$$

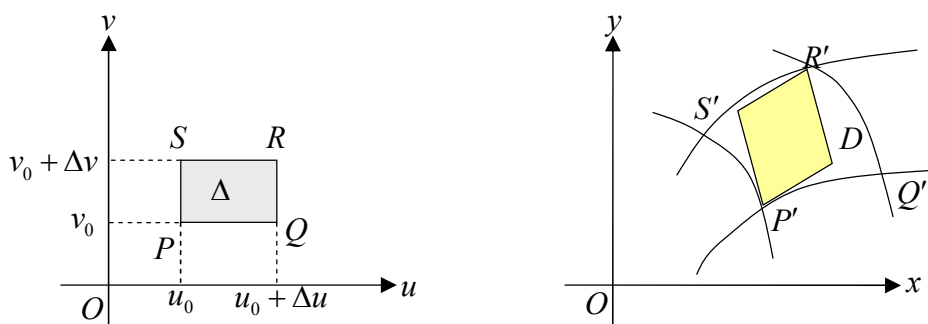
因此, 两个面积之比

$$\frac{S(D)}{S(\Delta)} = |\det(A)|$$

一般地, 设变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 $u-v$ 平面上由按段光滑封闭曲线所围的

闭区域 Δ , 一对一地映成 $x-y$ 平面上的闭区域 D , 函数 $x(u, v), y(u, v)$ 在 Δ 内分别具有一

阶连续偏导数, 且 $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0, (u, v) \in \Delta$



$$\begin{cases} x(u, v) = x(u_0, v_0) + \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v}(v - v_0) + o(\rho) \\ y(u, v) = y(u_0, v_0) + \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v}(v - v_0) + o(\rho) \end{cases}$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$ 。则 (不严格证明, 直观理解)

$$S(D) = |J(u_0, v_0)| S(\Delta) + o(S(\Delta))$$

【注】记 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$, 则 $|J(u_0, v_0)| S(\Delta)$ 就由向量 $\Delta u \alpha_1, \Delta v \alpha_2$ 决

定的平行四边形的面积。这里 α_1, α_2 分别是曲线 $\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases}, \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$ 的切线方向。

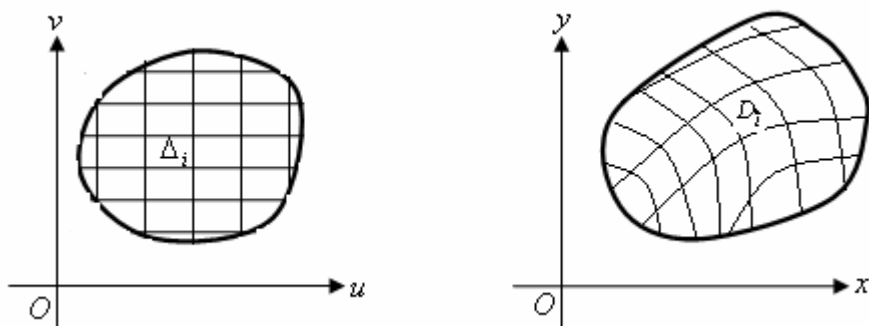
【定理 1】 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 $u-v$ 平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一地映成 $x-y$ 平面上的闭区域 D , 函数 $x(u, v), y(u, v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, (u, v) \in \Delta,$$

则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

证 如下图分割



$$S(D_i) = |J(u_i, v_i)| S(\Delta_i) + o(S(\Delta_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

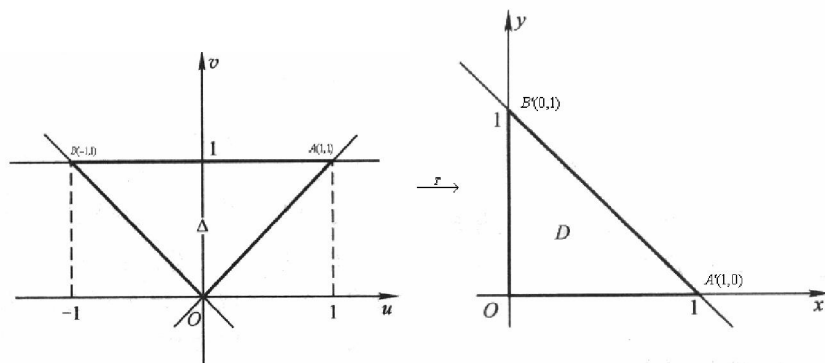
令 $\xi_i = x(u_i, v_i)$, $\eta_i = y(u_i, v_i)$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S(D_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| S(\Delta_i) + \sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) o(S(\Delta_i)) \end{aligned}$$

由变换 T 的连续性可知, $\max d(\Delta_i) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \max d(D_i) \rightarrow 0$, 又 f 有界, 因此取极限得到

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

【例1】 求 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围区域.



解 令 $T^{-1}: u = x - y, v = x + y$, 其逆变换:

$$T: x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(-u + v)$$

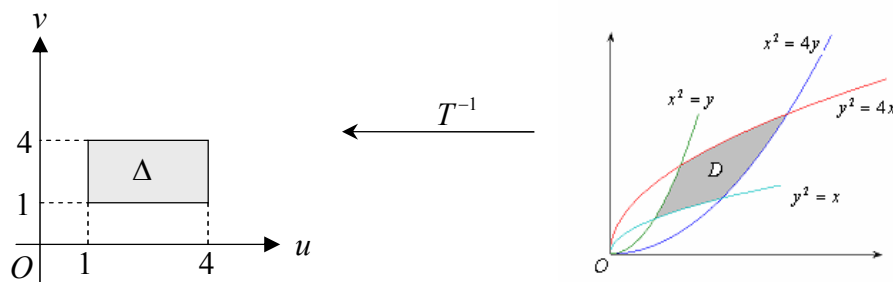
$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

(注: 这里 $S(D) = \frac{1}{2} S(\Delta)$)

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \iint_{\Delta} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = \frac{1}{4} (e - e^{-1})$$

【例 2】 求抛物线 $y^2 = x, y^2 = 4x, x^2 = y, x^2 = 4y$ 所围区域 D 的面积.

解 作变换 $T^{-1}: u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}, T^{-1}(D) = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\}$



$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{3}$$

$$S(D) = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{3} du dv = 3$$

【二】 用极坐标计算二重积分

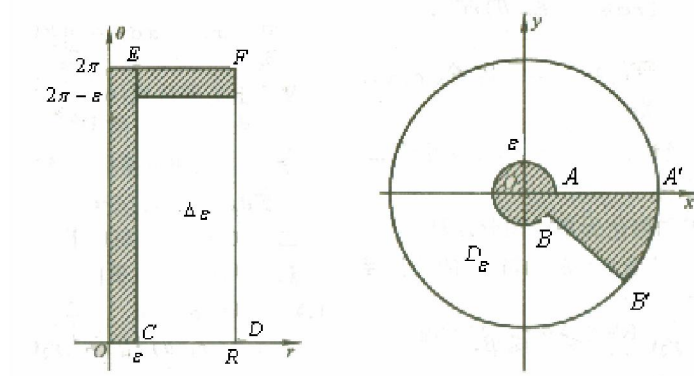
$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

变换 T 的函数行列式为

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \geq 0$$

T 把 $r\theta$ 平面上的矩形 $[0, R] \times [0, 2\pi]$ 变换成 xy 平面上的圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 但

对应不是一对一的.例如, xy 平面上原点 $O(0,0)$ 与 $r\theta$ 平面上直线 $r=0$ 相对应, x 轴上线段 AA' 对应于 $r\theta$ 平面上两条线段 CD 和 EF (见图). 又当 $r=0$ 时, $J(r,\theta)=0$, 因此不满足定理 1 的条件.



但是, 定理 1 的结论仍然成立.

若 D 为圆域 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}$, 则 Δ 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0,R] \times [0,2\pi]$ 设 D_ε 为在圆环 $\{(x,y)|0 < \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ 中除去中心角为 ε 的扇形 $BB'A'A$ 所得的区域 (见图)

在极坐标变换下, D_ε 对应于 $r\theta$ 平面上的矩形区域 $\Delta_\varepsilon = [\varepsilon, R] \times [0, 2\pi - \varepsilon]$ (见图). 这是一对一变换, 且在 Δ_ε 上函数行列式 $J(r,\theta) > 0$. 于是

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta_\varepsilon} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

因为 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上有界, 在上式中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

若 D 是一般的有界闭区域, 则取足够大的 $R > 0$, 使 D 包含在圆域

$$D_R = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\}$$

内, 并且在 D_R 上定义函数

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

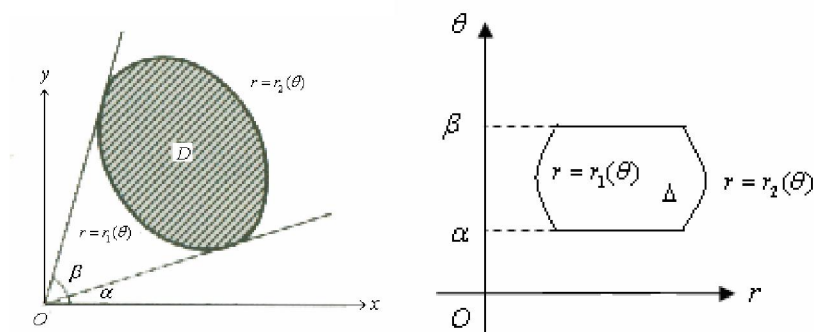
$F(x,y)$ 在 D_R 上可积

$$\iint_{D_R} F(x, y) dx dy = \iint_{\Delta_R} F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

其中 Δ_R 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0, R] \times [0, 2\pi]$.

下面介绍二重积分在极坐标系下如何化为累次积分计算.

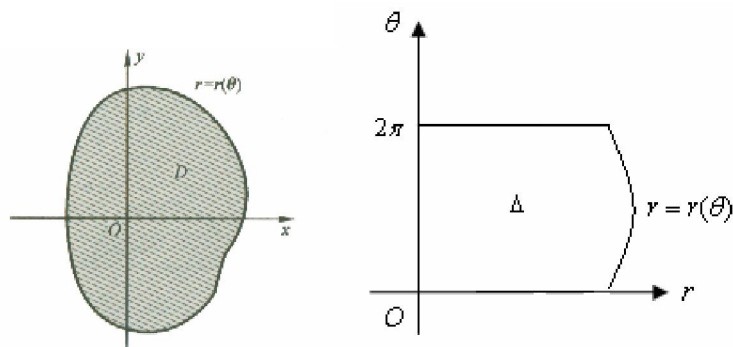
(I) 若原点 $O \notin D$, 且 xy 平面上射线 $\theta = \text{常数}$ 与 D 的边界至多交于两点, 则 Δ 必可表示成: $\Delta: r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$,



于是有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

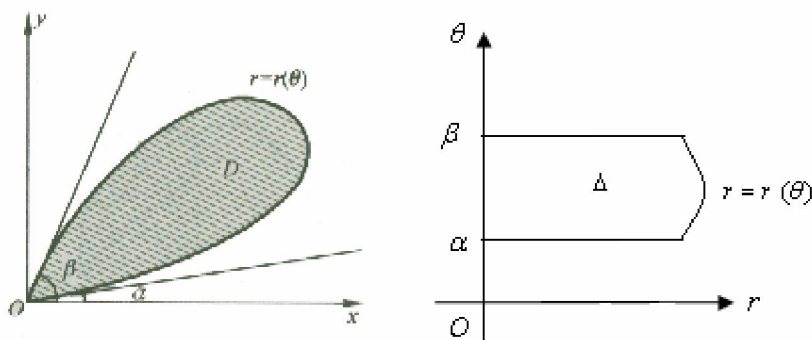
(II) 若原点为 D 的内点, D 的边界的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, 则 Δ 可表示成 $0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$.



所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(III) 若原点 O 在 D 的边界上, 则 Δ 为 $0 \leq r \leq r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$,



于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

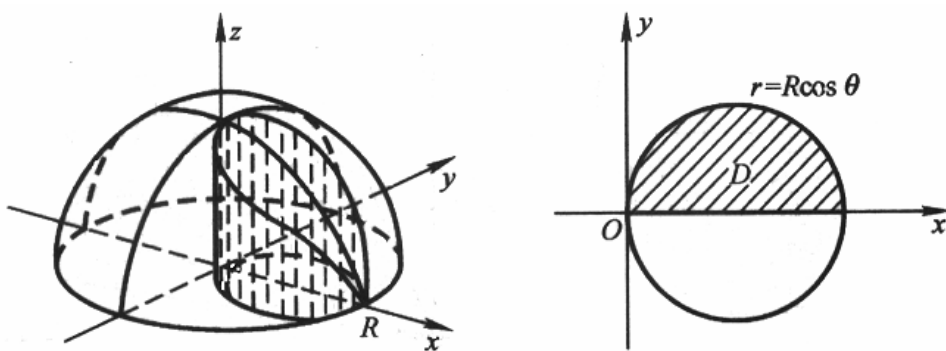
当积分区域是圆域与圆域的一部分, 或者被积函数的形式为 $f(x^2 + y^2)$ 时, 采用极坐标变换往往能达到简化积分区域或被积函数的目的.

【例 3】 (P252) 计算 $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, 其中 D 为圆域: $x^2 + y^2 \leq 1$.

解 用极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \Delta: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

【例 4】 (P252) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所割下部分的体积(称为维维安尼(Viviani)体).



解 由所求立体的对称性, 我们只要求出在第一卦限内的部分体积后乘以 4, 即得所求立体的体积. $D = \{(x, y) | y \geq 0, x^2 + y^2 \leq Rx\}$

$$V = 4 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} r \sqrt{R^2 - r^2} dr$$

$$= \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{注: } \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n = 2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

【例 5】 (P252) 计算 $I = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, 其中 D_R 为圆域: $x^2 + y^2 \leq R^2$.

解 利用极坐标变换

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

【注 1】 该题用直角坐标系无法计算.

【注 2】 与一元定积分类似, 可以定义反常二重积分 (详见本章 § 8). 下面我们这一结果推导一个重要的反常积分, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

由 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \pi$, 得

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

由此又易得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

【例 6】 (P253) 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

解 与极坐标相类似, 我们也可以作下面的广义极坐标变换:

$$T: \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq r \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

并计算得

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

由对称性, 椭球体的体积 V 是第一卦限部分体积的 8 倍.

$$D = \left\{ (x, y) \left| 0 \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a \right. \right\}$$

应用广义极坐标变换

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 c \sqrt{1 - r^2} ab r dr \\ &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

当 $a = b = c = R$ 时, 得到球的体积为 $\frac{4\pi}{3} R^3$.

§ 5 三重积分

【一】 三重积分的概念

【物理背景】 设一个空间物体 V 的密度为 $f(x, y, z)$, 求 V 的质量 M .

把 V 分割成 n 个小块 V_1, V_2, \dots, V_n , 在每个 V_i 中任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 则 V_i 的质量

$$M_i \approx f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

总的质量

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

其中的符号不言自明.

【定义】 设 $f(x, y, z)$ 为定义在三维空间可求体积的有界区域 V 上的函数, 经过“分割、近似求和、取极限”, 定义

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

称为函数 $f(x, y, z)$ 在 V 上的三重积分.

三重积分具有与二重积分相应的可积条件和有关性质, 这里不再叙述.

【二】 化三重积分为累次积分

为简明起见, 下面定理 1 与定理 2 略去了一些必要的假设.

【定理 1】 (先一后二法) 若 $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, D_{xy}

是 V 在 xy 平面的投影, $z_1(x, y), z_2(x, y)$ 是 D_{xy} 上的连续函数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

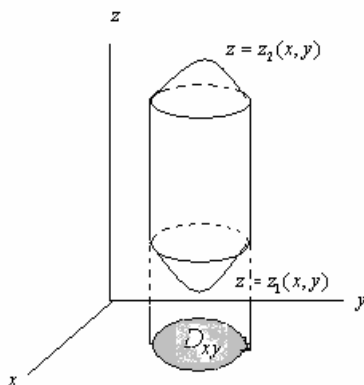
证 (用极限符号简写)

用平行于坐标面的平面网分割 V , 小长方体体积 $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{i,j} \left(\sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

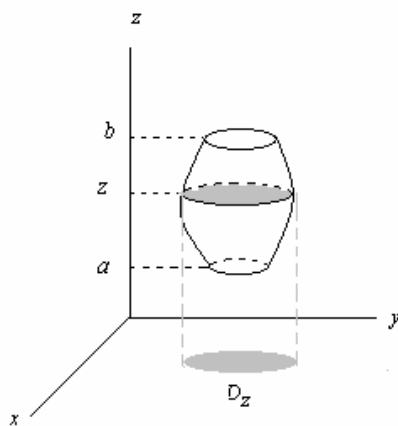
取极限：先 $\max(\Delta z_k) \rightarrow 0$ ，再 $\max(\Delta x_i, \Delta y_j) \rightarrow 0$ 便得证。

这里 $\left(\sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \right) \Delta x_i \Delta y_j$ 约等于第 (i, j) 个小柱体的质量。



【定理 2】（先二后一法）若 V 如下图， D_z 是截面在 xy 平面的投影，则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$



证（用极限符号简写）

用平行于坐标面的平面网分割 V ，小长方体体积 $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

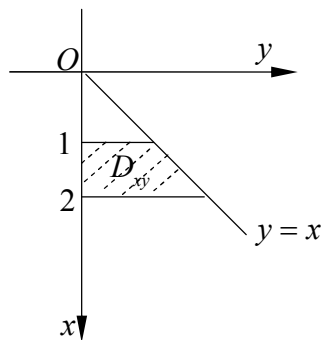
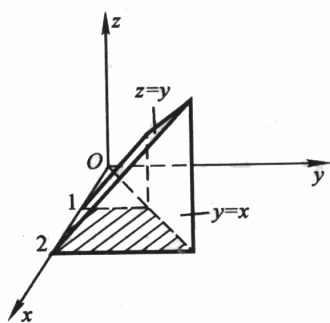
$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_k \left(\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \right) \Delta z_k$$

取极限：先 $\max(\Delta x_i, \Delta y_j) \rightarrow 0$ ，再 $\max(\Delta z_k) \rightarrow 0$ 便得证。

这里 $\left(\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \right) \Delta z_k$ 约等于第 k 层小薄片的质量。

【例 1】 计算 $\iiint_V \frac{dxdydz}{x^2 + y^2}$, 其中 V 为由平面 $x=1, x=2, z=0, y=x$ 与 $z=y$ 所围

成的区域.



解 [先一后二法] V 在 xy 平面上的投影区域

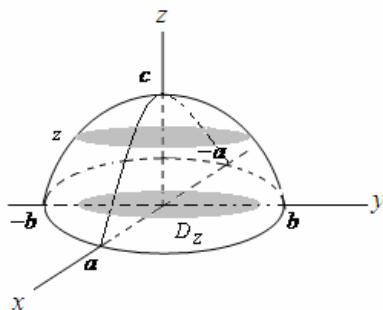
$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$$

这里 $z_1(x, y) = 0, z_2(x, y) = y$.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dxdydz}{x^2 + y^2} &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^y \frac{dz}{x^2 + y^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_0^x \frac{y dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^x dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln 2 dx = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

【例 2】 [先二后一法] 求 $I = \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dxdydz$, 其中 V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解 用垂直于 z 轴的平面截椭球体, 向 xy 平面投影, 椭圆面



$$D_z: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \quad \text{即} \quad \frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \frac{z^2}{c^2} dx dy dz = \frac{1}{c^2} \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\
 &= \frac{1}{c^2} \int_{-c}^c \pi bc \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc.
 \end{aligned}$$

注: $\iint_{D_z} dx dy$ 为椭圆 D_z 的面积.

【三】 三重积分换元法

和二重积分一样, 某些类型的三重积分作适当的变量变换后能使计算方便.

设变换 $T: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$, 把 uvw 空间中的区域 V' 一对一地映成 xyz 空间中的区域 V , 并设函数 $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ 及它们的一阶偏导数在 V' 内连续且函数行列式

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, (u, v, w) \in V'.$$

则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

其中 $f(x, y, z)$ 在 V 上可积.

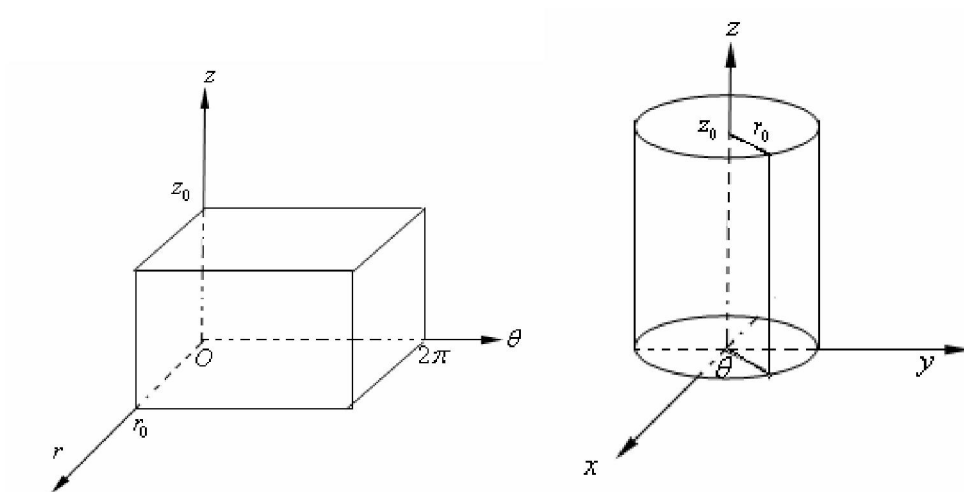
下面介绍几个常用的变换公式:

1. 柱面坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

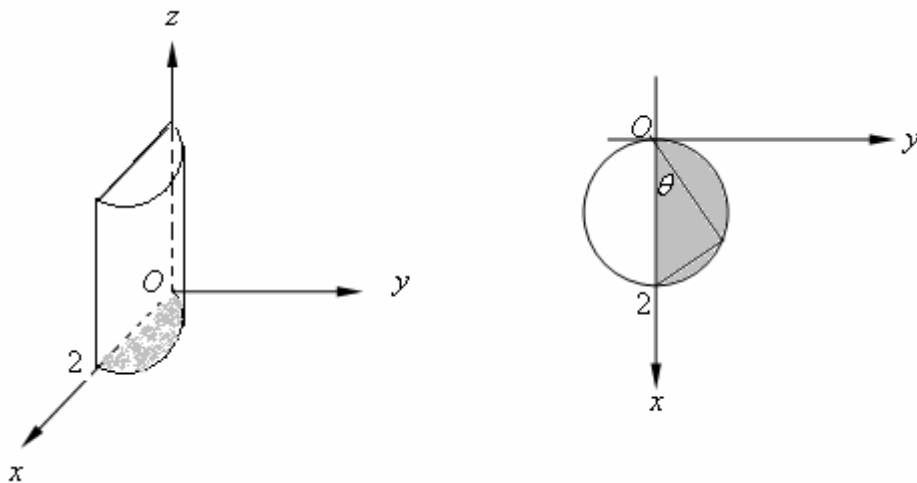
$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \geq 0$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$



【例 3】计算 $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ，其中 V 为柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 及平面 $z = 0$ ，

$z = a (a > 0)$ 所围半圆柱体.



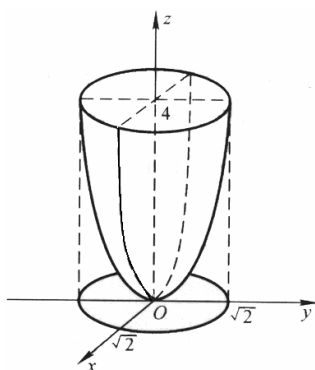
解 采用柱坐标变换. $V': 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq a$

$$I = \iiint_{V'} z r^2 dr d\theta dz = \int_0^a dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} z r^2 dr$$

$$= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{9} a^2$$

【例 4】计算 $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $2(x^2 + y^2) = z$ 与 $z = 4$ 为界面

的区域.



解 V 在 xy 平面上的投影区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 2$. 按柱坐标变换, 区域 V' 可表为

$$V' = \{(r, \theta, z) | 2r^2 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

所以

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{V'} r^3 dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{2r^2}^4 r^3 dz = \frac{8\pi}{3}.$$

另解 (先二后一法)

$$D_z : x^2 + y^2 \leq \frac{z}{2}$$

$$\iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z/2}} r^3 dr = \frac{\pi}{8} z^2$$

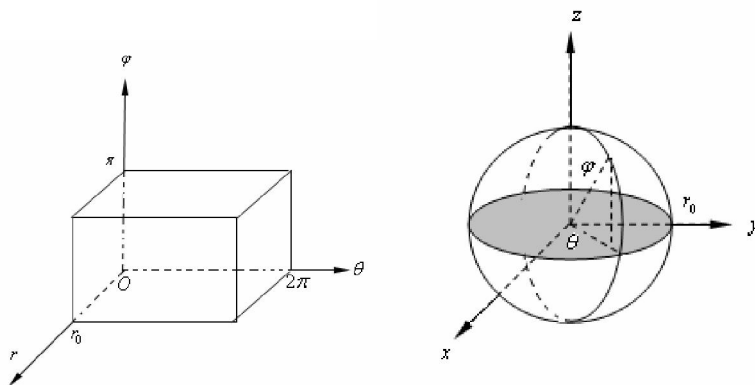
$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{\pi}{8} \int_0^4 z^2 dz = \frac{8}{3} \pi$$

2. 球坐标变换

$$T : \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = r \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

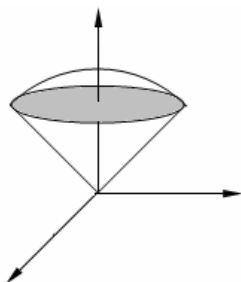
$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi \geq 0$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



【例 5】 计算 $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$, 其中 V 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围区域.

解 用球坐标变换下,



$$V': 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I = \iiint_{V'} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2})$$

【例 6】 求椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

解 作广义球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \varphi, \end{cases} J = abcr^2 \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3} \pi abc \end{aligned}$$

§6 重积分的应用

【一】 质心

设 V 是密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 的空间物体, $\rho(x, y, z)$ 在 V 上连续. 为求得 V 的重心坐标公式. 先对 V 作分割 T , 在属于分割 T 的每一小块 v_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 于是小块 v_i 的质量可以用 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 近似代替. 若把每一小块看作质量集中在 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的质点时, 整个物体就可用这 n 个质点的质点系来近似代替. 由于质点系的质心坐标公式为

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}, \quad \bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}, \quad \bar{z}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i}$$

当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, $\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n$ 的极限 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 即为 V 的质心坐标, 即

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}.$$

【注1】当物体 V 的密度均匀即 ρ 为常数时, 则有

$$\bar{x} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V x dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V y dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V z dV$$

这里 ΔV 为 V 的体积. 此时, 质心也称形心.

【注2】密度分布为 $\rho(x, y)$ 的平面薄板 D 的质心坐标是

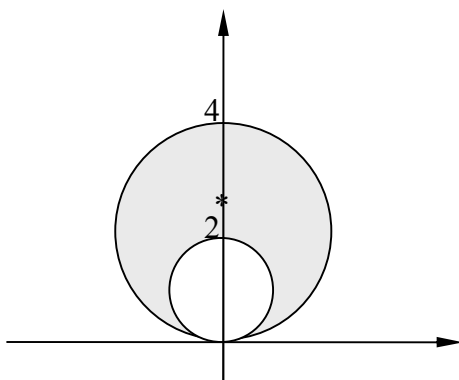
$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}.$$

【例1】求位于两圆 $r = 2 \sin \theta, r = 4 \sin \theta$ 之间均匀薄片 D 的质心 (即形心).

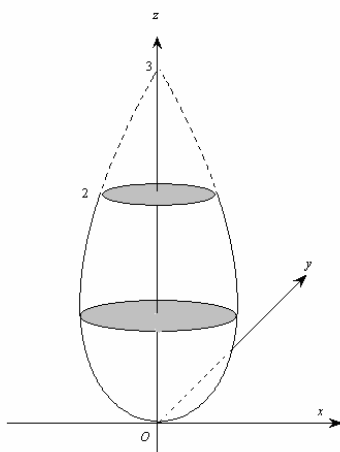
解 由对称性 $\bar{x} = 0$. D 的面积 $A = \pi(2^2 - 1^2) = 3\pi$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r \sin\theta \cdot r dr$$

$$= \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{56}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{56}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$



【例 2】 求一个炼钢炉为旋转体形，剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2 (0 \leq z < 3)$ 。若炉内储有高为 $z = 2$ 的钢液，求它质心。（不计炉体质量，钢液密度均匀）



解 由对称性 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ 。

$$\Delta V = \iiint_V dV = \int_0^2 dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^2 \pi \frac{z(3-z)^2}{9} dz = \frac{2}{3} \pi$$

这里采用先二后一法，其中 $\iint_{D_z} dxdy$ 是截面积。类似地

$$\iiint_V zdV = \frac{32}{45} \pi$$

因此

$$\bar{z} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V zdV = \frac{16}{15}$$

【二】 转动惯量

质点 A 对于轴 l 的转动惯量

$$J = mr^2$$

其中: m 是质点 A 的质量, r 是 A 与转动轴 l 的距离

现在讨论空间物体 V 的转动惯量问题.

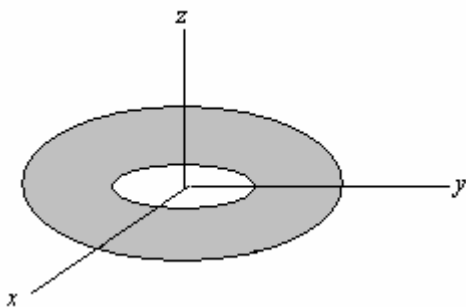
设 $\rho(x, y, z)$ 为空间物体 V 的密度分布函数, 它在 V 上连续. 对 V 作分割 T , 在每一小块 v_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 于是 v_i 的质量可以 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 近似替代. 当以质点 $\{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), i=1, 2, \dots, n\}$ 近似替代 V 时, 质点系对于 z 轴的转动惯量则是

$$J_{z_n} = \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

当 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, 上述积分和的极限就是物体 V 对于 z 轴的转动惯量

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

【例 3】 求密度均匀的圆环 D 对于垂直与圆环面中心轴的转动惯量.



解 设圆环 D 为 $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, 密度为 ρ

$$J = \iint_D \rho(x^2 + y^2) d\sigma = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R r^3 dr = \frac{\pi\rho}{2} (R^4 - r^4) = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$$

其中 m 为圆环的质量.

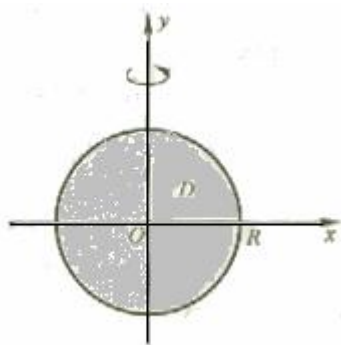
【例 4】 求均匀圆盘 D 对于其直径的转动惯量.

解 设圆盘 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 密度为 ρ , 求对于 y 轴的转动惯量. 由于 D 内任一点

(x, y) 与 y 轴的距离为 $|x|$, 故

$$\begin{aligned}
 J &= \iint_D \rho x^2 d\sigma = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (r \cos \theta)^2 \cdot r dr \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho \pi R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2
 \end{aligned}$$

其中 m 为圆盘的质量.



【例 5】 设某球体的密度与球心的距离成正比, 求它对于切平面的转动惯量.

解 设球体由不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 表示, 密度函数为 $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

这里 k 为比例常数. 切平面方程为 $x = R$, 则球体对于平面 $x = R$ 的转动惯量为

$$\begin{aligned}
 J &= k \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (R - x)^2 dx dy dz \\
 &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R (R - r \sin \varphi \cos \theta)^2 r^3 \sin \varphi dr \\
 &= k R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r^3 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi - 2kR \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^R r^r dr \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \\
 &\quad + k \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^5 dr \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{11}{9} k \pi R^6.
 \end{aligned}$$

【三】 引力

求密度为 $\rho(x, y, z)$ 的立体对立体外质量为 1 的质点 A 的引力. 设 A 的坐标为 (ξ, η, ζ) ,

V 中点的坐标用 (x, y, z) 表示. 我们使用微元法来求 V 对 A 的引力. V 中质量微元 $dm = \rho dV$

对 A 的引力在 x 坐标轴上的投影为

$$dF_x = k \frac{\rho dV}{r^2} \cos \alpha = k \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV$$

其中 k 为引力系数, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ 是 A 到 dV 的距离.

于是力 \vec{F} 在三个坐标轴上的投影分别为

$$F_x = k \iiint_V \frac{x-\xi}{r^3} \rho dV, F_y = k \iiint_V \frac{y-\eta}{r^3} \rho dV, F_z = k \iiint_V \frac{z-\zeta}{r^3} \rho dV,$$

所以

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

【例 6】 设球体 V 具有均匀的密度 ρ , 求 V 对球外一点 A (质量为 1) 的引力 (引力系数为 k).

解 设球体为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 球外一点 A 的坐标为 $(0, 0, a)$ ($R < a$).

显然有 $F_x = F_y = 0$, 现在计算 F_z . 由上述公式,

$$\begin{aligned} F_z &= k \iiint_V \frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} \rho dx dy dz \\ & \text{(先二后一)} = k \rho \int_{-R}^R (z-a) dz \iint_{D_z} \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

其中 $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$.

$$\begin{aligned} F_z &= k \rho \int_{-R}^R (z-a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{r}{[r^2 + (z-a)^2]^{3/2}} dr \\ &= 2\pi k \rho \int_{-R}^R \left(-1 - \frac{z-a}{\sqrt{R^2 - 2az + a^2}}\right) dz = -\frac{4}{3a^2} \pi R^3 \rho k. \end{aligned}$$

【例 7】 设面密度为常数 ρ , 半径为 R 的圆形薄片 $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$. 求它对位于 $A(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处的单位质量的引力.

$$\begin{aligned} \text{解 } F_z &= -k \rho a \iint_D \frac{d\sigma}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}} = -k \rho a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr \\ &= 2\pi k \rho a \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$