资源与地球科学学院 2019~2020 学年

第二学期高等数学 A3 重积分单元测试（1）

1 将二重积分 $I=\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy$ 变换积分次序得 $I=$____________________.

2 设区域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$，则积分 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=$________.

3 二次积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$_____________.

4 二次积分 $\int_0^1 tdt\int_t^1 e^{(\frac{t}{x})^2}dx=$_____________.

5 设 $f(x, y)$ 是连续函数，且满足 $f(x, y)=xy+\iint\limits_D f(x, y)dxdy$，其中区域 D 由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 围成，则 $f(x, y)=$_______________.

1 设区域 $D=\{(x,y)||x|\le a, |y|\le a\}$，常数 $a>0$，$\lambda\ne 0$，则二重积分 $\iint\limits_D (e^{\lambda\sin x}-e^{\lambda\sin y})d\sigma$ 的值（　　　）.

（A） 为正；　　　　（B） 为零；

（C） 为负；　　　　（D） 当 $\lambda>0$ 时为正，当 $\lambda<0$ 时为负.

2 若平面区域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\le 1\}$，设 $M=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，$N=\iint\limits_D \cos^2 x\sin^2 x d\sigma$，$P=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma$，则 M, N, P 的大小关系是（　　　）.

（A） $M>N>P$；　　　　（B） $M>P>N$；

（C） $N>M>P$；　　　　（D） $N>P>M$.

3 设 $I_1=\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D x^2e^{x^2+y^2}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D x^3e^{x^2+y^2}dxdy$，其中积

分区域D：$x^2+y^2\le a^2$（$a>0$），则（　　）.

（A）$I_1=I_2$　　（B）$I_2=I_3$　　（C）$I_1=I_3$　　（D）I_1、I_2、I_3任何两个不相等

4　设D为由折线$|x|+|y|=1$所围成的区域，D_1，D_2，D_4为D在第1、2、4象限部分，

则$\iint\limits_D e^{-(x^2+y)}\,dxdy=$（　　）.

（A）$4\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y)}\,dxdy$；　　（B）$4\iint\limits_{D_4} e^{-(x^2+y)}\,dxdy$；

（C）$2\iint\limits_{D_1+D_2} e^{-(x^2+y)}\,dxdy$；　　（D）$2\iint\limits_{D_1+D_4} e^{-(x^2+y)}\,dxdy$.

5　设$f(u)$是关于变量u的奇函数，D是由曲线$y=-x^3$，$x=1$，$y=1$所围成的平面

闭区域，则积分$\iint\limits_D [x^3+f(xy)]\,dxdy=$（　　）.

（A）0；　　（B）$\dfrac{1}{4}$；　　（C）$\dfrac{2}{7}$；　　（D）$\iint\limits_D f(xy)\,dxdy$.

1　计算积分$\int_{1/4}^{1/2}dy\int_{1/2}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\,dx+\int_{1/2}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\,dx$.

2　计算积分$\int_0^{a\sin\varphi} e^{-y^2}dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} e^{-x^2}dx+\int_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi} e^{-y^2}dy\int_{y\cot\varphi}^{\sqrt{b^2-y^2}} e^{-x^2}dx$，其

中$0<a<b$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$且a，b，φ均为常数.

3　设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$，求$\iint\limits_D \dfrac{x\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\,dxdy$.

4　计算二重积分$I=\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，其中闭区域

D：$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

5　计算二重积分$\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,dxdy$，其中闭区域

D：$0 \le x \le \pi$，$0 \le y \le 2\pi$.

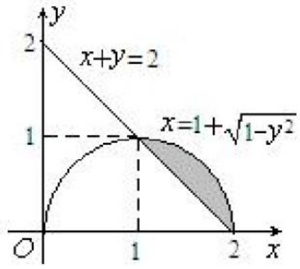
6 计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \left| x + y - x^2 - y^2 \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1 设函数 $f(r)$ 在闭区间 $[1, 0]$ 上连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)^n f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 .$$

注：考察二重积分的运算。

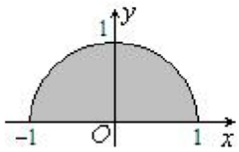
解：积分区域如图所示，所以变换积分次序得



$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x .$$

注：考察二重积分的运算。

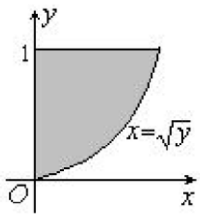
解：用极坐标计算，则



$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r = \pi \cdot \frac{\ln(1+r^2)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2 .$$

注：考察二重积分的运算。

解：交换二次积分次序，有



$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x$$

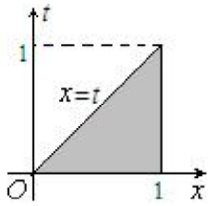
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 y}{\sqrt{1+y^3}}\Big|_0^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1) .$$

注：考察二重积分的运算。

解：交换积分次序，得

$$\int_0^1 t\mathrm{d}t\int_t^1 \mathrm{e}^{(\frac{t}{x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{x^2}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{x^2}}\mathrm{d}(\frac{t^2}{x^2})$$

$$=\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{x^2}}\Big|_0^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}(\mathrm{e}-1)\Big|_0^1=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-1).$$

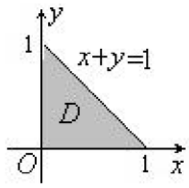


注：考察积分方程，设常数。

解：设 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，则 $f(x,y)=xy+A$，该式两边同时在区域 D 上求二重积分，有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (xy+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$A=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(xy+A)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x+\frac{A}{2}=\frac{1}{24}+\frac{A}{2}，得$$

$A=\frac{1}{12}$，所以 $f(x,y)=xy+\frac{1}{12}$.



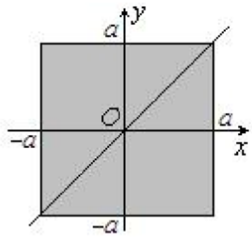
注：考察积分运算技巧，对称性。

结论：若积分区域关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$

解：（方法 1）$\iint\limits_D(\mathrm{e}^{\lambda\sin x}-\mathrm{e}^{\lambda\sin y})\mathrm{d}\sigma=\int_{-a}^a\mathrm{d}x\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}y-\int_{-a}^a\mathrm{d}y\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin y}\mathrm{d}x$

$$=2a\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}x-2a\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin y}\mathrm{d}y$$

$$=2a\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}x-2a\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}x=0，选（B）.$$



（方法 2）由于积分区域对于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\iint\limits_D(\mathrm{e}^{\lambda\sin x}-\mathrm{e}^{\lambda\sin y})\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_D\mathrm{e}^{\lambda\sin y}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_D\mathrm{e}^{\lambda\sin x}\mathrm{d}\sigma=0.$$

注：考察积分估值定理，对称性。

解：由积分区域 D 既关于 x 轴、又关于 y 轴对称，而 x^3、$3xy^2$ 是 x 的奇函数，$3x^2y$、y^3 是 y 的奇函数，则 $M=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\mathrm{d}\sigma=0$；

由于在 D 上，连续函数 $\cos^2 x\sin^2 x\ge 0$，且不恒为零，则 $N=\iint\limits_D\cos^2 x\sin^2 x\mathrm{d}\sigma>0$；

由于在 D 上，连续函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\le 0$，且不恒为零，则 $P=\iint\limits_D[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1]\mathrm{d}\sigma<0$.

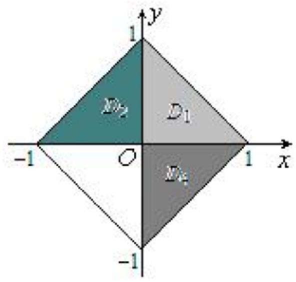
所以 $N>M>P$，选（C）.

注：考察积分估值定理，对称性。

解：由于积分区域 D：$x^2+y^2\le a^2$ 关于 y 轴对称，而 $xe^{x^2+y^2}$、$x^3e^{x^2+y^2}$ 是 x 的奇函数，所以 $I_1=\iint\limits_D xe^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$I_3=\iint\limits_D x^3e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，而在 D 上函数 $x^2e^{x^2+y^2}\ge 0$，且不恒等于零，又函数连续，则 $I_2=\iint\limits_D x^2e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，所以 $I_1=I_3$，故选（C）.

注：考察二重积分的性质，对称性。

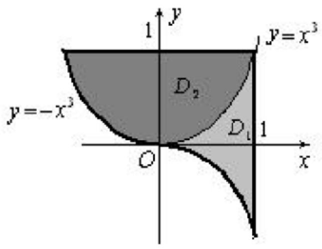
解：由于区域 D 关于 y 轴对称，且被积函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y)}$ 是 x 的偶函数，所以



$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1+D_4}\mathrm{e}^{-(x^2+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y，选（D）.$$

而因为被积函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y)}$ 不是变量 y 的偶函数，所以（A）、（B）、（C）都不正确.

注：考察二重积分的运算，对称性。



解：用辅助线 $y=x^3$ 将积分区域 D 分成两块 D_1 与 D_2，其中 D_1 关于 x 轴对称，D_2 关于 y 轴对称，由于 x^3 是变量 x 的奇函数，$f(xy)$ 既是变量 x 的奇函数、也是变量 y 的奇函数，利用奇、偶函数在对称区域上的积分性质，则

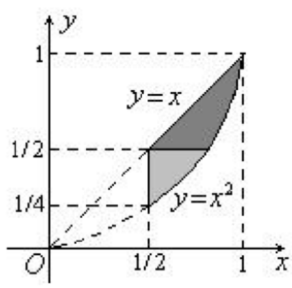
$$\iint\limits_D[x^3+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}[x^3+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}[x^3+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^3}x^3\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}，选（C）.$$

因为 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0$，所以不能选（D）.

注：考察二重积分的运算。

解：根据所给的二次积分，求得积分区域如图所示，交换积分次序，得



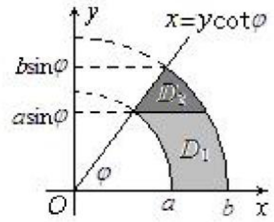
$$\int_{1/4}^{1/2}\mathrm{d}y\int_{1/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{1/2}^{1}x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{2}x^2\Big|_{1/2}^{1}-x\mathrm{e}^x\Big|_{1/2}^{1}+\mathrm{e}^x\Big|_{1/2}^{1}=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\mathrm{e}+\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}+\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}\,.$$

注：考察二重积分的运算，极坐标。

解：积分区域如图，改用极坐标系计算，则



$$\int_0^{a\sin\varphi}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{y\cot\varphi}^{\sqrt{b^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\varphi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=-\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_a^b=\frac{\varphi}{2}(\mathrm{e}^{-a^2}-\mathrm{e}^{-b^2})\,.$$

注：考察二重积分的运算。

解：（方法 1）直接利用极坐标计算，则

$$\iint_D\frac{x\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\cos\theta\sin r}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot[-r\cos r\Big|_0^1+\int_0^1\cos r\mathrm{d}r]=\frac{\pi}{4}(\sin 1-\cos 1)\,.$$

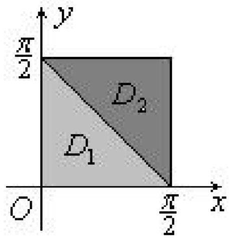
（方法 2）由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，于是

$$\iint_D\frac{x\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(x+y)\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}[-r\cos r\Big|_0^1+\int_0^1\cos r\mathrm{d}r]=\frac{\pi}{4}(\sin 1-\cos 1)\,.$$

注：考察二重积分的运算，利用区域的可分性。

解：如图，用直线 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ 将区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分，在 D_1 上，$0\le x+y\le\dfrac{\pi}{2}$；在 D_2 上，$\dfrac{\pi}{2}\le x+y\le\pi$，于是



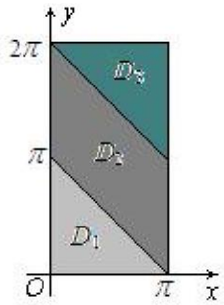
$$I=\iint_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)\mathrm{d}x=\pi-2\,.$$

注：考察二重积分的运算，利用区域的可分性。

解: 如图，将积分区域 D 用直线 $x+y=\pi$ 、$x+y=2\pi$ 分为 D_1、D_2、D_3 三块，则



$$D_1=\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x+y\le \pi\};$$
$$D_2=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le 2\pi, \pi\le x+y\le 2\pi\};$$
$$D_3=\{(x,y)|0\le x\le \pi, \pi\le y\le 2\pi, 2\pi\le x+y\}。$$

在 D_1 上 $\sin(x+y)\ge 0$；在 D_2 上 $\sin(x+y)\le 0$；在 D_3 上 $\sin(x+y)\ge 0$。故

$$\iint_D |\sin(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi-x}^{2\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{2\pi-x}^{2\pi}\sin(x+y)\mathrm{d}y$$

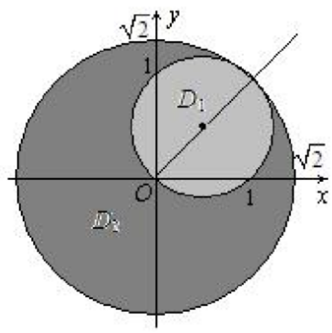
$$=-\int_0^{\pi}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi-x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos(x+y)\Big|_{\pi-x}^{2\pi-x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\cos(x+y)\Big|_{2\pi-x}^{2\pi}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}(1+\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}4\mathrm{d}x=4\pi .$$

注：考察二重积分的运算，极坐标。

解：用圆周 $x+y-x^2-y^2=0$（其极坐标方程为 $r=\cos\theta+\sin\theta$）将区域 D：$x^2+y^2\le 2$ 分

成如图两部分 D_1 与 D_2，则



$$\iint_{x^2+y^2\le 2}|x+y-x^2-y^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

10

$$=\iint_{D_1}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint_{D_1}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

而 $\displaystyle\iint_D(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=-2\pi\cdot\frac{4}{4}=-2\pi .$

又 $\displaystyle\iint_{D_1}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta-r^2)r\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 u\mathrm{d}u \text{（令}\theta+\frac{\pi}{4}=u\text{）}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left|x+y-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\frac{\pi}{8}-(-2\pi)=\frac{9\pi}{4}$.

或者计算 $\iint\limits_{D_1}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 用极坐标变换 $x=\frac{1}{2}+\rho\cos\theta$， $y=\frac{1}{2}+\rho\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{D_1}(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{2}-\rho^2)\rho d\rho=2\pi(\frac{1}{8}-\frac{1}{16})=\frac{\pi}{8}.$$

注：考察积分估值定理放缩技巧，极坐标。

证明： $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)^n f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{2n+1}f(r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 r^{2n+1}f(r)\mathrm{d}r$.

由于函数 $f(r)$ 在闭区间 $[1,0]$ 上连续，设 $|f(r)|$ 在闭区间 $[1,0]$ 的最大值为 M，则

$$0\le\left|2\pi\int_0^1 r^{2n+1}f(r)\mathrm{d}r\right|\le 2\pi M\int_0^1 r^{2n+1}\mathrm{d}r=\frac{M\pi}{n+1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M\pi}{n+1}=0$，根据极限的夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|2\pi\int_0^1 r^{2n+1}f(r)\mathrm{d}r\right|=0$，所

以 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)^n f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.