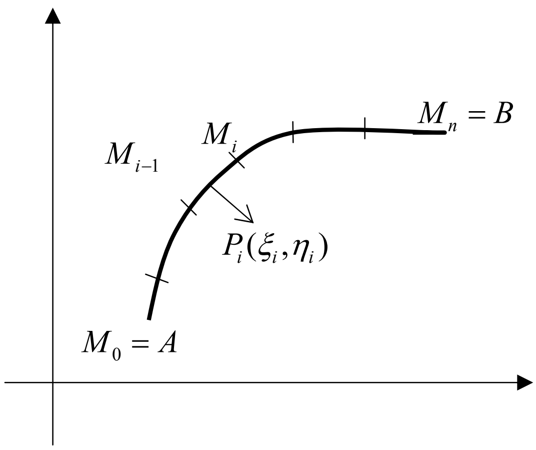
第 20 章　曲线积分

§1　第一型曲线积分

【一】 第一型曲线积分的定义

【背景】设 L 是平面上可求长的曲线，其线密度为连续函数 $f(x,y)$。求曲线 L 质量。



还是采用定积分的思想："分割，近似求和，取极限"

[1] 分割：把 L 分成 n 个小段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其弧长记为 Δs_i；

[2] 近似求和：在 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任一点 $P_i(\xi_i,\eta_i)$，则 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的质量约等于 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，由线 L 的质量

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

[3] 取极限：令 $\|T\| = \max \Delta s_i \to 0$，则（定义）

$$M = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

【注】这个极限要求与分割无关、与 $P_i(\xi_i,\eta_i)$ 的取法无关，严格的表述要用"$\varepsilon-\delta$"语言。

【定义 1】 若 L 为平面可求长曲线段，$f(x,y)$ 为定义在 L 上的函数，同上面"分割，近似求和，取极限"，定义

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

为 $f(x,y)$ 在 L 上的**第一型曲线积分**。

可类似地定义 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 L 上的第一型曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)ds=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

【性质】

关于第一型曲线积分也和定积分一样具有下述一些重要性质,下面列出平面上第一型曲线积分的的性质.

1．若 $\int_L f_i(x,y)ds(i=1,2,\cdots,k)$ 存在，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数，则 $\int_L\sum_{i=1}^{k}c_i f_i(x,y)ds$ 也存在，且 $\int_L\sum_{i=1}^{k}c_i f_i(x,y)ds=\sum_{i=1}^{k}c_i\int_L f_i(x,y)ds.$

2．若曲线段 L 由曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_k$ 首尾相接而成，且 $\int_{L_i} f(x,y)ds(i=1,2,\cdots,k)$ 都存在，则 $\int_L f(x,y)ds$ 也存在，且 $\int_L f(x,y)ds=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_I} f(x,y)ds.$

3．若 $\int_L f(x,y)ds$ 与 $\int_L g(x,y)ds$ 都存在，且在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds.$

4．若 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，则 $\int_L|f(x,y)|ds.$ 也存在，且 $\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L|f(x,y)|ds.$

5．若 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，L 的弧长为 s，则存在常数 c ,使得 $\int_L f(x,y)ds=cs,$ 这里 $\inf_L f(x,y)\le c\le\sup_L f(x,y).$

【二】 第一型曲线积分的计算

【定理 1】 设曲线 L：$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}t\in[\alpha,\beta]$ 为光滑曲线，$f(x,y)$ 为定义在 L 上的连续函数，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

证明（不严格）：由弧长公式和积分中值定理

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt\ \ \Delta s_i=\sqrt{[\varphi'(\overline{\tau}_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}\Delta t_i\ \left(t_{i-1}<\overline{\tau}_i<t_i\right)$$

所以

$$\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta s_i=\sum_{i=1}^n f\left(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\right)\sqrt{[\varphi'(\overline{\tau}_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}\Delta t_i$$

$$\approx\sum_{i=1}^n f\left(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\right)\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\Delta t_i\ \left(t_{i-1}<\tau_i<t_i\right)$$

取极限并由定积分的定义

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\lim_{\Delta t_i\to0}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\right)\sqrt{[\varphi'(\overline{\tau}_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}\Delta t_i$$

$$=\lim_{\Delta t_i\to0}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\right)\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\Delta t_i$$

$$=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$$

【注】可以证明

$$\lim_{\Delta t_i\to0}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)\right)\left[\sqrt{[\varphi'(\overline{\tau}_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\right]\Delta t_i=0$$

这样就严格了，这里略。

【注 1】特别地，当曲线 L 由方程 $y=\psi(x),x\in[a,b]$ 给出，且 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数时，$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f\left(x,\psi(x)\right)\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}dx$

【注 2】当曲线 L 由参量方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\chi(t),t\in[\alpha,\beta]$ 表示时，曲线积分 $\int_L f(x,y,z)ds$ 的计算公式为：

$$\int_L f\left(x,y,z\right)ds=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt$$

【例 1】（P212）设 L 是半圆周 $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le\pi,$ 试计算第一型曲线积分 $\int_L\left(x^2+y^2\right)ds.$

解　$$\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=\int_0^{\pi}a^2\sqrt{a^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=a^3\pi$$

【例 2】（P212）设 L 是 $y^2=4x$ 从 $O\left(0,0\right)$ 到 $A(1,2)$ 的一段，试计算第一型曲线积分 $\int_L yds.$

解　$x=\dfrac{y^2}{4}(0\le y\le 2),x'(y)=\dfrac{y}{2}$

$$\int_L yds=\int_0^2 y\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}dy=\frac{1}{4}\int_0^2\sqrt{y^2+4}d(y^2+4)=\frac{1}{6}\left(y^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

【例 3】（曲线的质心）平面上有 n 个质点，其坐标为 (x_i,y_i)，质量为 m_i，则质心为

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

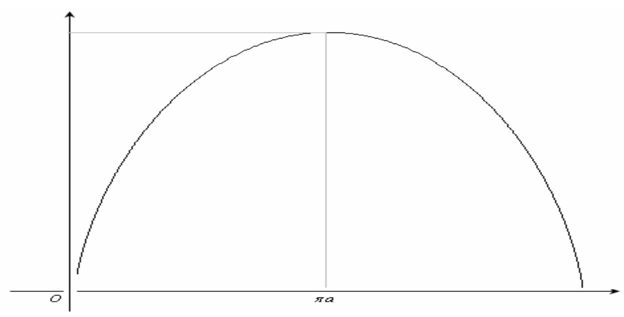
平面曲线 L，其线性密度为 $\rho(x,y)$，参见第一个图，分割，近似求和，取极限，其质心

$$\overline{x}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i},\overline{y}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i}$$

取极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}$

$$\overline{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)ds}{\int_L\rho(x,y)ds},\overline{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)ds}{\int_L\rho(x,y)ds}$$

【P214-3】求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le\pi)$ 的质心，设其质量分布是均匀的。



解　$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=\sqrt{2a^2-2\cos^2 ta^2}=2a\sin\dfrac{t}{2}dt$

质量 $M=\int_0^{\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=4a(\rho=1)$ ，质心坐标为

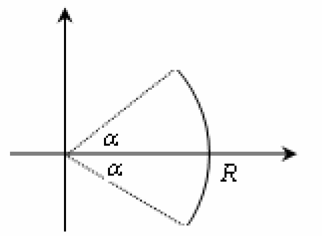
$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{4}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{3t}{2}\right)dt=\frac{4}{3}a$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_0^{\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{4}\int_0^{\pi}(\sin\frac{3}{2}t-\sin\frac{t}{2})dt=\frac{4}{3}a$$

【例 4】（曲线的转动惯量）平面曲线 L 的线性密度为 $\rho(x,y)$，对 y 轴的转动惯量为

$$I_y=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\int_L x^2\rho(x,y)ds$$

计算半径为 R，中心角为 2α 的圆弧对它的对称轴的转动惯量（$\rho=1$）。

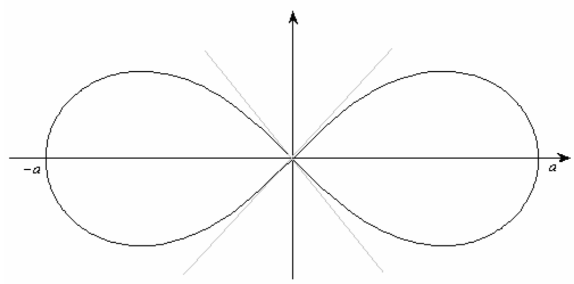


$$x=R\cos t,y=R\sin t,-\alpha\le t\le\alpha$$

$$ds=\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}dt=Rdt$$

$$I_y==\int_L y^2ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}(R\sin t)^2Rdt=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=R^3\left(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

【例 5】 L 为双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta\left(0\le\theta\le 2\pi\right)$，求 $\int_L|x|ds$



解　$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$\int_L|x|ds=4\int_{L_1}xds=4\int_0^{\pi/4}r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\pi/4}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}a^2$$

【例 6】计算 $I=\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases}$

解　$L:\begin{cases} \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1 \\ x+z=1 \end{cases}$，令

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\theta, y=2\sin\theta, z=1-x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta(0\le\theta\le 2\pi)$$

$$ds=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}d\theta=2d\theta$$

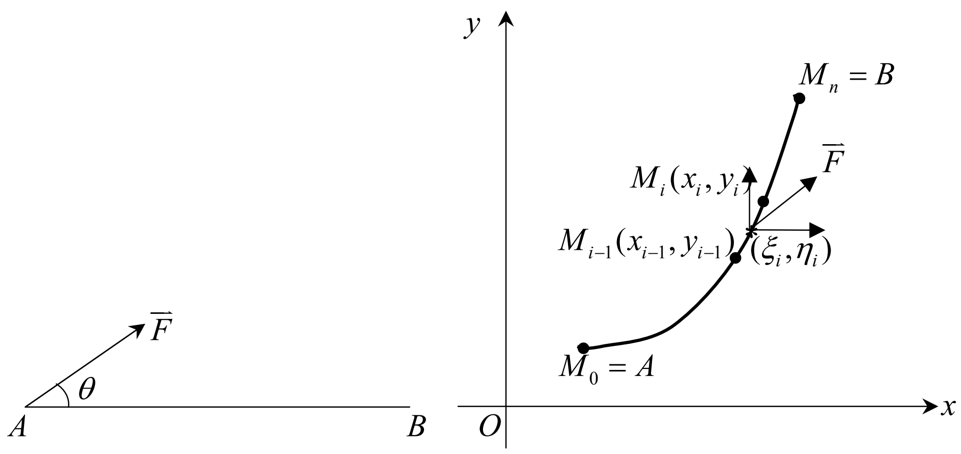
$$I=\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\cdot 2d\theta=18\pi$$

§2 第二型曲线积分

【一】 第二型曲线积分的定义

【背景】常力 $\overline{F}$ 沿直线段 $\overline{AB}$ 所作的功为

$$W=\left|\overline{F}\right|\left|\overline{AB}\right|\cos\theta=\overline{F}\cdot\overline{AB}$$



现在，一质点受力 $\overline{F}(x,y)$ 的作用沿平面曲线 L 从点 A 移动到点 B，求力 $\overline{F}(x,y)$ 所作的功.

为此把有向曲线 $\widehat{AB}$ 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 。若记小曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i，则分割 T 的细度为 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$.

设力 $\overline{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$，$\overline{M_{i-1}M_i}=(\varDelta x_i,\varDelta y_i)$（$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\varDelta y_i=y_i-y_{i-1}$），于是力 $\overline{F}(x,y)$ 在小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上所作的功

$$W_i\approx\overline{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overline{M_{i-1}M_i}=P(\xi_i,\eta_i)\varDelta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\varDelta y_i,$$

其中 (ξ_i,η_i) 为小弧曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意一点.因而力 $\overline{F}(x,y)$ 沿曲线 $\widehat{AB}$ 所作的功

$$W=\sum_{i=1}^{n}W_i\approx\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

所求的功为

$$W=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\varDelta x_i+\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\varDelta y_i$$

这种类型的和式极限就是下面所要讨论的第二型曲线积分.

【定义 1】 设函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 定义在平面有向可求长度曲线 $L:\widehat{AB}$ 上. 如上面分割、近似求和，取极限，定义

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\varDelta x_i+\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\varDelta y_i$$

称为函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 沿有向曲线 L 上的第二型曲线积分,

【注 1】 记 $\overline{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$，$d\overline{s}=(dx,dy)$. 则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\overline{F}\cdot d\overline{s}$$

【注 2】 第二型曲线积分与曲线 L 的方向有关。对同一曲线，当方向由 A 到 B 改为由 B 到 A 时，每一小弧段的方向都改变，从而 $\Delta x_i,\Delta y_i$ 也随之改变符号，故有

$$\int_{AB}Pdx+Qdy=-\int_{BA}Pdx+Qdy.$$

【注 3】类似可定义空间曲线上的第二型曲线积分

$$\int_L P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy+R\left(x,y,z\right)dz$$

【性质】

1. $\int_L\left(c_1P_1+c_2P_2\right)dx+\left(c_1Q_1+c_2Q_2\right)dy=c_1\int_L P_1dx+Q_1dy+c_2\int_L P_2dx+Q_2dy$

2. $L=L_1+L_2$（首尾相接），则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1}Pdx+Qdy+\int_{L_2}Pdx+Qdy.$$

【二】 第二型曲线积分的计算

【定理 2】 设平面曲线由 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta]$ 给出，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导函数，且起点为 $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$，终点为 $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$. 又设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 为 L 上的连续函数，则沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt.$$

证（不严格）

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n P(x(\tau_i),y(\tau_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$$

$$=\sum_{i=1}^n P(x(\tau_i),y(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i\approx\sum_{i=1}^n P(x(\tau_i),y(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

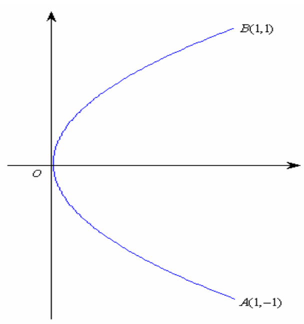
$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n P(x(\tau_i),y(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n P(x(\tau_i),y(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$\int_L P(x,y)dx=\int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

【注 1】若起点是 $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$，终点是 $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$，则

$$\int_{BA}Pdx=-\int_{AB}Pdx=-\int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt=\int_\beta^\alpha P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt$$

【例 1】 计算 $\int_L xydx$，其中 L 为沿抛物线 $y^2=x$ 从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段。



［解 1］选 x 为参数，$L=\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{OB}$，

$$\overset{\frown}{AO}: y=-\sqrt{x}, x:1\to 0；\ \overset{\frown}{OB}: y=\sqrt{x}, x:0\to 1$$

$$\int_L xydx=\int_{\overset{\frown}{AO}} xydx+\int_{\overset{\frown}{OB}} xydx$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x\sqrt{x}dx=2\int_0^1 x^{3/2}dx=\frac{4}{5}$$

［解 2］选 y 为参数，$L: x=y^2, y:-1\to 1$

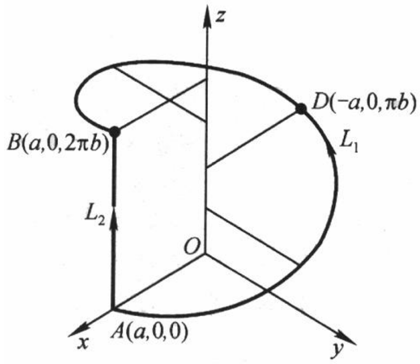
$$\int_L xydx=\int_{-1}^1 y^2\cdot y\cdot(2y)dy=2\int_{-1}^1 y^4dy=4\int_0^1 y^4dy=\frac{4}{5}$$

【例 2】（P219）求在力 $\vec{F}=(y,-x,x+y+z)$ 作用下，

(1) 质点由 A 沿螺旋线 L_1 到 B 所作的功（如图），其中

$$L_1: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi;$$

(2) 质点由 A 沿直线 L_2 到 B 所作的功。



解　　$$W=\int_L \overline{F}\cdot d\overline{s}=\int_L ydx-xdy+(x+y+z)dz$$

(1)　由于 $dx=-a\sin tdt, dy=a\cos tdt, dz=bdt$，所以

$$W=\int_0^{2\pi}\left(-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t+ab\cos t+ab\sin t+b^2 t\right)dt=2\pi(\pi b^2-a^2).$$

(2)　L_2 的参量方程为: $x=a, y=0, z=t, 0\le t\le 2\pi b.$

由于 $dx=0, dy=0, dz=dt,$ 所以

$$W=\int_0^{2\pi b}(a+t)dt=2\pi b(a+\pi b).$$

【例 3】力场 $\vec{F}=(yz,zx,xy)$，问质点从原点沿直线移到曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的第一卦限部分上哪一点作的功最大，并求最大功。

解 设$M(\xi,\eta,\zeta)$是曲面上一点，直线段$\overline{OM}$的参数方程:

$$x=\xi t, y=\eta t, z=\zeta t,\ t:0\to 1$$

$$W=\int_{OM} yz\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\,\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta$$

用 Lagrange 乘数法求极值，把ξ,η,ζ换成x,y,z

$$\max W = xyz$$
$$s.t.\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(x,y,z\ge 0)$$

作 Lagrange 函数：

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz+\dfrac{2\lambda}{a^2}x=0 & (1)\\ L_y = xz+\dfrac{2\lambda}{b^2}y=0 & (2)\\ L_z = xy+\dfrac{2\lambda}{c^2}z=0 & (3)\\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (4)\end{cases}$$

由(1),(2),(3)得$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$,再由(4)得

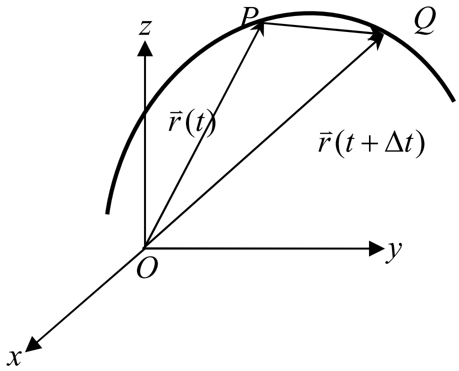
$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

最大功：$W_{max}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$

【三】 两类曲线积分的联系

空间曲线

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \alpha\le t\le\beta$$



切向量（切线方向）

约定为

$$\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

【注】它上面规定的切向量永远与曲线的走向（t 增加的方向）一致。

$$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$

当 $\Delta t>0$ 时，设曲线由点 P 移到点 Q，$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 的方向与点 P 移动的方向一致。

当 $\Delta t<0$ 时，$\Delta\vec{r}$ 的方向与曲线的走向相反，$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 的方向与 $\Delta\vec{r}$ 的方向相反，与曲线的走向仍是一致的。

单位切向量

$$\vec{\tau}=\frac{\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}\triangleq(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

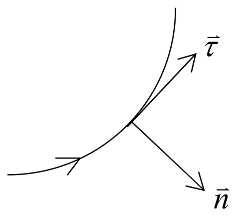
其中 α,β,γ 是切向量 $\vec{r}'(t)$ 与 x,y,z 轴正向的夹角,$0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi$ 。$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 叫方向余弦。

平面曲线的法向量

设单位切向量 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则规定单位法向量为

$$\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$$

即 $[\vec{n},\vec{\tau}]$ 构成右手系标架。如图



弧长微分

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt\left(dt>0\right)$$

弧长微分向量

$$\left\|d\vec{s}\right\|=ds\text{，}\ d\vec{s}\ \text{方向同}\ \vec{\tau}\text{，即}$$

$$d\vec{s}=\vec{\tau}\,ds=(x'(t),y'(t),z'(t))dt=(dx,dy,dz)$$

其中 $dx=x'(t)dt=\cos\alpha\,ds,dy=y'(t)dt=\cos\beta\,ds,dz=z'(t)dt=\cos\gamma\,ds$

【注】dx,dy,dz 有符号，符号由方向余弦确定，这是 $d\vec{s}=\vec{\tau}\,ds$ 到三个坐标轴上的投影。

设 $L:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad \alpha\le t\le\beta$

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)\right]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cos\alpha+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cos\beta+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cos\gamma\right]ds$$

$$=\int_L\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)ds$$

如果记 $\overline{F}=(P,Q,R)$ 上式即为

$$\int_L\overline{F}\cdot d\vec{s}=\int_L\overline{F}\cdot\vec{\tau}\ ds$$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(x,y,z)\vec{\tau}\cdot d\vec{s}=\int_L f\cos\alpha dx+f\cos\beta dy+f\cos\gamma dz$$

【例 4】 计算 $\oint_L\dfrac{\partial f}{\partial\vec{n}}ds$，其中 $f(x,y)=x+y^2$，L 为椭圆 $2x^2+y^2=1$，$\vec{n}$ 为 L 的外法线向量.

[解 1]（按一型计算）记 $F=2x^2+y^2-1$，L 的外法线向量为

$$(F_x,F_y)=(4x,2y)//(2x,y)$$

单位外法线向量（仍记为 $\vec{n}$），

$$\vec{n}=\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2}}\right)$$

由 $\operatorname{grad} f=(f_x,f_y)=(1,2y)$ 得

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+y^2}}+\frac{2y^2}{\sqrt{4x^2+y^2}}$$

把 L 写成参数方程 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi$，

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}ds=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}\cos t+2\sin^2 t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\sqrt{2}\sin^2 t\right)dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=\sqrt{2}\pi$$

[解 2]（化二型计算） $L: x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi$

设 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则 $\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$，切向量

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=-f_y\cos\alpha+f_x\cos\beta$$

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}ds=\oint_L(-f_y\cos\alpha+f_x\cos\beta)ds=\oint_L -f_ydx+f_xdy=\oint_L -2ydx+dy$$

$$\oint_L -2ydx+dy=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\sqrt{2}\sin^2 t\right)dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\sqrt{2}\pi$$