资源与地球科学学院 2019~2020 学年

第二学期高等数学 A3 重积分单元测试（2）

铭记英雄，缅怀同胞，清明追思，家国永念

1　设函数 $f(x)$ 可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，又设平面区域 D：$x^2+y^2\le t^2$，则极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma=$ ________________.

2　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le t^2,\ 0\le z\le 2\}$，又 $F(t)=\iiint\limits_\Omega[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=$ ____________.

3　$I=\int_0^1 dy\int_y^1\cos(x^2)dx=$ ___________.

4　$f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，则 $\int_0^\pi f(x)dx=$ _________.

5　设 D 是 xOy 面上以点 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，区域 D_1 是 D 位于第一象限部分，则积分 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　　）.

（A）$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（B）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（D）0.

6　累次积分 $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以改写为（　　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$；　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

7　设 $f(x,y)$ 连续，且 $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}\theta\int_c^d f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$，

则a、b、c、d取值为（　　）.

（A）$a=\dfrac{\pi}{2}$、$b=\pi$、$c=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$、$d=1$；

(B) $a=\dfrac{\pi}{2}$、$b=\pi$、$c=\dfrac{1}{\sin\theta-\cos\theta}$、$d=1$

（C）$a=0$、$b=\dfrac{\pi}{2}$、$c=\sin\theta+\cos\theta$、$d=1$；

（D）$a=0$、$b=\dfrac{\pi}{2}$、$c=\sin\theta-\cos\theta$、$d=1$.

8　设$\varphi(x)$是区间$[0,1]$上的正值连续函数，闭区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

a与b为任意常数，则积分$\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）a；　　（B）b；

（C）$a+b$；　　（D）$\dfrac{1}{2}(a+b)$.

9　设$f(x)$可导，且$f(0)=0$、$f'(0)=1$，平面有界闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$. 当$t\to 0^+$时，函数$F(t)=\iint\limits_D[x^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是$t$的（　　）无穷小.

（A）一阶；　（B）二阶；　（C）三阶；　（D）四阶.

10　若$f(x,y,z)$为非零的连续函数，设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则当$t\to 0^+$时，（　　）.

（A）$F(t)$与t是同阶无穷小；　　（B）$F(t)$与t^2是同阶无穷小；

（C）$F(t)$与t^3是同阶无穷小；　　（D）$F(t)$是比t^3高阶的无穷小.

1　计算二次积分$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$；

2 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x^2+y^2\geq 1且x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 计算积分

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中闭区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq 2y\}$.

3 计算积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$f(x，y)=\underset{D}{\mathrm{Max}}\{x，y\}$，积分区域 $D=\{(x,y)\big|0\leq x\leq 1，0\leq y\leq 1\}$.

4 设函数 $f(x，y)$ 连续，且满足 $f(x，y)=xy+\iint\limits_D f(x，y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$ 及 $x=1$ 围成的闭区域，求函数 $f(x，y)$.

5 设函数 $f(x，y)$ 在闭区域 D：$x^2+y^2\leq y$，$x\geq 0$ 上连续，且满足

$f(x，y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，求 $f(x，y)$.

6 求曲面 $z=xy$ 与平面 $x+y+z=1$，$z=0$ 所围成立体区域 Ω 的体积.

7 设 $p(x)$ 是闭区间 $[a，b]$ 上连续的非负函数，又函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续且有相同的单调性，闭区域 $D=\{(x,y)\big|a\leq x\leq b，a\leq y\leq b\}$，证明不等式

$$\iint\limits_D p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\iint\limits_D p(x)f(y)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注：考察二重积分的运算，极坐标系。

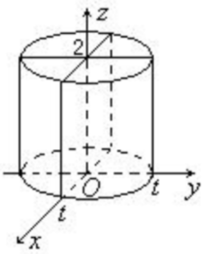
解：$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho}{t^3}$

$$=2\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)t}{3t^2}=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{2\pi}{3}f'(0)=\frac{2\pi}{3}.$$

注：考察三重积分的运算，柱坐标系。

解：因为 $F(t)=\iiint\limits_\Omega [z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho\mathrm{d}\rho\int_0^2[z^2+f(\rho^2)]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t\rho[\frac{8}{3}+2f(\rho^2)]\mathrm{d}\rho,$$



所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t\rho[\frac{8}{3}+2f(\rho^2)]\mathrm{d}\rho}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\cdot t[\frac{8}{3}+2f(t^2)]}{2t}=\frac{8}{3}\pi.$$

解：$I=\int_0^1 dy\int_y^1\cos(x^2)dx=\int_0^1 dx\int_0^x\cos(x^2)dy=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\cos(x^2)dx=\dfrac{\sin 1}{2}$

解：（方法 1）利用定积分的分部积分

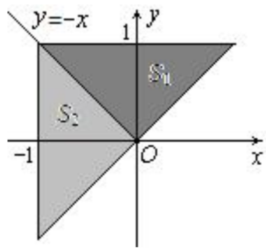
$$\int_0^\pi f(x)dx=xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx=xf(\pi)-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}dx=2.$$

（方法 2）直接代入 $f(x)$ 利用二次积分来计算即可（需要交换积分次序），过程略.

D_1

注：考察二重积分的性质，对称性。



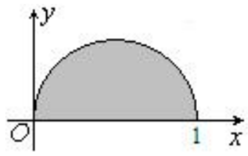
解：用辅助线 $y=-x$ 将积分区域 D 分成两块 S_1 与 S_2，其中 S_1 关于 y 轴对称，S_2 关于 x 轴对称，由于 xy 既是变量 x 的奇函数、也是变量 y 的奇函数，$\cos x\sin y$ 是变量 x 的偶函数、变量 y 的奇函数，所以

$$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\iint\limits_{S_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，选（B）.

注：考察二重积分极坐标换元法。

解：由累次积分知，在极坐标系下积分区域 D：$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，$0 \le r \le \cos\theta$，它在直角坐标系下为 D：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le \sqrt{x - x^2}$.



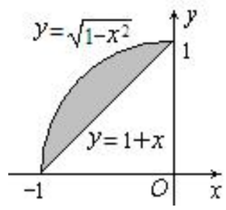
改回直角坐标系下的二次积分有如下两个：

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r\mathrm{d}r = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,\ y)\mathrm{d}y，$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,\ y)\mathrm{d}x，$$ 只有（D）可选.

注：考察二重积分的运算，确定积分限。

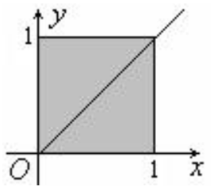
解：积分区域如图所示，直角坐标系下的方程 $y - x = 1$ 在极坐标系下改写为 $r\sin\theta - r\cos\theta = 1$，即 $r = \dfrac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$，所以二次积分化为极坐标系下的二次积分为：



$$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r\mathrm{d}r，$$ 选(B) .

注：考察二重积分的计算，对称性。

解：由于积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称，则



$$\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y，$$ 于是

$$\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (a + b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(a + b).$$ 选（D）.

注：考察二重积分的运算，极坐标。

解：$$F(t) = \iint_D [x^2 + f(x^2 + y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^t [r^2\cos^2\theta + f(r^2)] r\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^t r^3 \mathrm{d}r + 2\pi \int_0^t r f(r^2)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}t^4 + 2\pi\int_0^t r f(r^2)\mathrm{d}r .$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{\pi}{4}t^4+2\pi\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}{t^4}=\dfrac{\pi}{4}+\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\pi t f(t^2)}{2t^3}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t^2)}{t^2}$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}f'(0)=\frac{3\pi}{4}\neq 0.$$

所以 $t\to 0^+$ 时，函数 $F(t)$ 是 t 的四阶无穷小，选（D）.

注：考察积分中值定理。

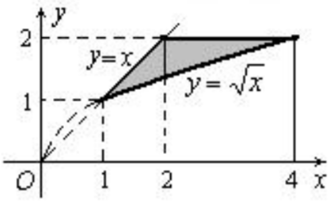
解：由三重积分中值定理，有 $M(\xi,\eta,\varsigma)\in\Omega$（其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le t^2$），使得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=f(\xi,\eta,\varsigma)\frac{4}{3}\pi t^3,$$

于是 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(\xi,\eta,\varsigma)4\pi t^3}{3t^3}=\dfrac{4}{3}\pi f(0,0,0)\neq 0$，所以 $F(t)$ 与 t^3 是同阶无穷小，选（C）.

注：考察二重积分的运算。

解：（1）积分区域如图所示，交换积分次序：



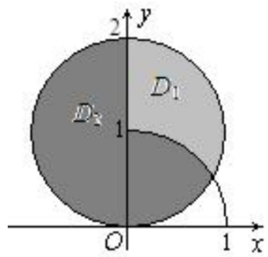
$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=-\frac{4}{\pi^2}y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}.$$

注：考察二重积分的运算，积分区域的确定技巧，极坐标。

解：记 $S=\{x^2+y^2\ge 1,\ x\ge 0$，$D_1=D\cap S$，由 $r=2\sin\theta$ 及 $r=1$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，则



$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\sin\theta}r\theta\mathrm{d}r$$

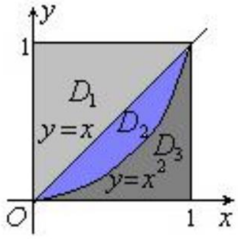
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\theta(4\sin^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\theta(1-2\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\theta^2}{4}\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}-\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{144}+\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{1}{4}(-1-\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{3}{8}.$$

注：考察二重积分的运算，积分域的可分性

解：将区域 D 分成三块 D_1、D_2、D_3（如图）：于是



$$I=\iint_D f(x,y)\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1} y(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3} x(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

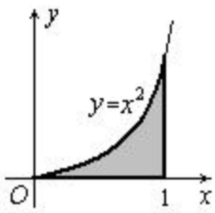
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1(y^2-x^2y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}x(x^2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(2-3x^2-2x^3+3x^4)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-2x^4+x^5)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{11}{40}.$$

注：考察积分方程，设常数。

解：设 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，则 $f(x,y)=xy+a$，于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(xy+a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

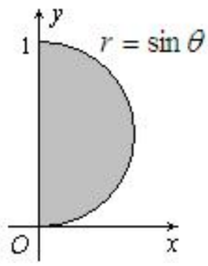


$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(xy+a)\mathrm{d}y=\int_0^1(\frac{x^5}{2}+ax^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}+\frac{a}{3},$$

即 $a=\frac{1}{12}+\frac{a}{3}$，得 $a=\frac{1}{8}$，所以 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

注：考察积分方程，设常数。

解：设 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=a$，则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8a}{\pi}$，于是



$$a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\sqrt{1-x^2+y^2}-\frac{8a}{\pi})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r-\frac{8a}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2\pi=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\theta-a$$

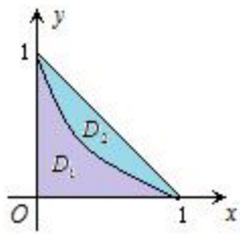
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta-a=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})-a,$$

注：考察三重积分的几何应用和计算。

解：由 $\begin{cases}z=xy,\\x+y+z=1\end{cases}$ 消去 z，得 $x+y+xy=1$，即 $y=\frac{1-x}{1+x}$，于是曲线 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 将 Ω 在 xOy

面上投影区域 D：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1-x$ 分成 D_1、D_2 两部分（如图），则 Ω 的体积

$$V = \iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x-x^2}{1+x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

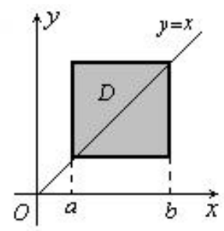
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - 4\ln 2\right) = \frac{17}{12} - 2\ln 2 .$$

注：考察积分放缩证明技巧。

证明：由于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a，b]$ 上具有相同的单调性，于是对于 $\forall x, y \in [a，b]$，恒有

$$[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)] \ge 0 .$$



又区域 D 关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint_D p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D p(y)f(y)p(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

于是

$$\iint_D p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D [p(x)f(x)p(y)g(y) + p(y)f(y)p(x)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(x)g(y) + f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

同理 $\iint_D p(x)f(y)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(y)g(y) - f(x)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注意到 $p(x)p(y) \ge 0$，所以

$$\iint_D p(x)f(y)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(y)g(y)+f(x)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(x)g(y)+f(y)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(y)g(y)+f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0,$$

即 $$\iint_D p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\iint_D p(x)f(y)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$