第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列极限的定义

定义 1　设$\{a_n\}$为数列，a为定数. 若对任给的正数ε，总存在正整数 N，使得当n>N时有$|a_n - a| < \varepsilon$则称**数列**$\{a_n\}$**收敛于**a，定数a称为数列$\{a_n\}$的**极限**，并记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，或$a_n \to a(n\to\infty)$.读作“当$n$趋于无穷大时，$a_n$的极限等于$a$或$a_n$趋于$a$”.

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$为**发散数列**.

例 1　$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

例 2　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$，这里$\alpha$为正数.

证　对$\forall \varepsilon > 0$，要

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$$

只要

$$n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$$（因为幂函数$x^{\frac{1}{\alpha}}(x>0)$是增函数）

取$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right]$，则当$n > N$时，便有

$$n \ge N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}} - 1 + 1 = \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$$

从而

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$$

【注 1】　原始定义中N不一定取正整数，可换成某个正数。

即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists G > 0$，当$n > G$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$。

中国矿业大学理学院胡建华

改成原始定义：只要取 $N=[G]$，则当 $n>N$ 时，便有

$$n\geq N+1=[G]+1>G-1+1=G$$

【注 2】　原始定义中 $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ 可换成 $\left|a_n-a\right|<c\varepsilon$（$c>0$ 为常数）

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<c\varepsilon$。

改成原始定义：$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{c}$，由上定义，对 $\varepsilon_1>0$，$\exists N>0$，

当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<c\dfrac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$。

【注 3】　(1)原始定义中 $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ 可换成 $\left|a_n-a\right|\leq\varepsilon$。

(2)原始定义中 $n>N$ 可换成 $n\geq N$。

（1）即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|\leq\varepsilon$。

改成原始定义：$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}$，由上定义，对 $\varepsilon_1>0$，$\exists N>0$，

当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。

(2)即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n\geq N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$。

当 $n>N$ 时，$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ 当然成立。

【注 4】　原始定义中 $\forall\varepsilon>0$ 可换成 $\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$。

即 $\forall\varepsilon>0$（不妨设 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$），$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$。

如果 $\forall\varepsilon\geq\varepsilon_0$，就取 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$，对 $\varepsilon_1>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<\varepsilon_1<\varepsilon$。

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，这里 $|q|<1$.

证法 1　若 $q=0$，则结果是显然的.

现设 $0<|q|<1$．记 $h=\dfrac{1}{|q|}-1>0$，有

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}$$

由 $(1+h)^n\geq 1+nh$（二项展开或伯努利不等式）得到

$$|q|^n \le \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$

对任给的$\varepsilon > 0,$只要取$N = \frac{1}{\varepsilon h}$,则当$n > N$时，由上式得$|q^n - 0| < \varepsilon$。

证法 2　利用对数函数$y = \lg x$的严格增性来证明。设$0 < |q| < 1$。

对任给的ε>0（不妨设ε<1），为使$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$，只要

$$n\lg|q| < \lg\varepsilon \quad 即 \quad n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$$（注意分子分母都是负数）

于是，只要取$N = \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$即可。

例 4　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$，其中$a$>0。

证　（1）当$a = 1$时，结论显然成立.

（2）当$a > 1$时，记$\alpha = a^{1/n} - 1$，则$\alpha > 0$（因为a^x增，$a^{1/n} > a^0 = 1$）.由

$$a = (1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha = 1 + n(a^{1/n} - 1)$$

得

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n}$$

任给$\varepsilon > 0$，取$N = \frac{a-1}{\varepsilon}$时，则当$n > N$，便有

$$a^{1/n} - 1 \le \frac{a-1}{n} < \varepsilon$$

（3）当$0 < a < 1$时，令$b = \frac{1}{a}$>1，从而

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} \le \sqrt[n]{b} - 1$$

利用（2）的结果，得证。

例 5　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$［P30 例 2］

证　设$n \ge 2$。记

$$h_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

则有（由二项展开）

$$n=\left(1+h_n\right)^n=1+nh_n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}h_n{}^2+\cdots>\frac{n\left(n-1\right)}{2}h_n^2\geq\frac{n^2}{4}h_n^2$$

得

$$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

取 $N=\max\left\{2,\frac{4}{\varepsilon^2}\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$h_n=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$$

二、数列极限定义的变形

原始定义的否形式：

$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in N_+$，$\exists n_0>N$，使得 $\left|a_{n_0}-a\right|\geq\varepsilon_0$。

原始定义的等价定义，见下：

定义 $1'$　任给 ε>0，若在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 之外数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项至多只有有限个，则称数列 $\left\{a_n\right\}$ 收敛于极限 a .

其否定形式：

若存在某 $\varepsilon_0>0$，使得数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项落在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 之外，则 $\{a_n\}$ 一定不以 a 为极限.

例 6　证明 $\left\{(-1)^n\right\}$ 是发散数列.

证　对任何 $a\in\mathbf{R}$，取 $\varepsilon_0=1$，则

则当 $a\geq0$ 时，对所有奇数 n，有 $\left|(-1)^n-a\right|=1+a\geq\varepsilon_0$

当 $a<0$ 时，对所有偶数 n，有 $\left|(-1)^n-a\right|=1+\left|a\right|\geq\varepsilon_0$

以上说明对 $\forall a\in\mathbf{R}$，在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 外有 $\left\{(-1)^n\right\}$ 的无穷多项。

例 7　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，做数列 $\{z_n\}$ 如下：

$$\{z_n\}:x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

证　因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a,$ 故对任给的 $\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中落在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 之外的项都至多只有有限个. 所以数列 $\{z_n\}$ 中落在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 之外的项也至多只有有限个. 故由定义 $1'$ 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

【注】 对数列 $\left\{a_n\right\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$（子列），则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 。

这是以后常用的结论。

例 8　设 $\{a_n\}$ 为给定的数列，$\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列. 证明：数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 同时为收敛或发散，且在收敛时两者的极限相等.

证　设 $\{a_n\}$ 为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 按定义 $1'$，对任给的 ε>0，数列 $\{a_n\}$ 中落在 $\mathrm{U}(a;\varepsilon)$ 之外的项至多只有有限个. 而数列 $\{b_n\}$ 是对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的，故从某一项开始，$\{b_n\}$ 中的每一项都是 $\{a_n\}$ 中确定的一项，所以 $\{b_n\}$ 中落在 $\mathrm{U}(a,\varepsilon)$ 之外的项也至多只有有限个. 这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

现设 $\{a_n\}$ 发散. 倘若 $\{b_n\}$ 收敛，则因 $\{a_n\}$ 可看成是对 $\{b_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列，故由刚才所证，$\{a_n\}$ 收敛，矛盾. 所以当 $\{a_n\}$ 发散时，$\{b_n\}$ 也发散.

三、无穷小与无穷大，有界与无界

在所有收敛数列中，有一类重要的数列，称为无穷小数列，其定义如下：

定义 2　（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为**无穷小数列**.

（2）$\forall G > 0, \exists N \in N_+,$ 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > G$，则称 $\{a_n\}$ 为**正无穷大数列**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 。

类似可定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 。

（3）如果 $\{a_n\}$ 有界（同函数有界），即

$$\exists M > 0\text{，}\forall n \in N_+\text{，都有}\left|a_n\right| \le M$$

则称$\{a_n\}$是**有界数列**。

类似定义：无界数列，有上界，无上界等。

几个显然的结论：

（**1**）　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \{a_n - a\}$为无穷小数列.

（**2**）　$\{a_n\}(a_n \neq 0)$为无穷小$\Leftrightarrow \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是无穷大。

（**3**）　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$无上界，但反之不然。

（**4**）　无穷小数列与有界数列的乘积仍是无穷小数列。[P35 - 3]

例 9　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$。反之不然。［P28 习题 7］

证：设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，据定义$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N_+,$当$n > N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$，从而$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$。

反之，设$\{a_n\}: 1, -1, 1, -1, \cdots$。显然$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 1$，但$\{a_n\}$发散［见例 6］。

注：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$。

例 10　设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = A(A \neq 0, b_n \neq 0)$，如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

证：由例 9，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|b_n|} = |A| > 0$，据定义，对$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}|A| > 0, \exists N_1 \in N_+,$当$n > N_1$时，有

$$|A| - \frac{1}{2}|A| < \frac{|a_n|}{|b_n|} < |A| + \frac{1}{2}|A|$$

即

$$\frac{1}{2}|A||b_n| < |a_n| < \frac{3}{2}|A||b_n|$$

再由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，据定义对$\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 \in N_+,$当$n > N_2$时，有$|a_n| < \varepsilon$。

于是，取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，有

$$\frac{1}{2}|A||b_n| < |a_n| < \varepsilon \Rightarrow |b_n| < \frac{2}{|A|}\varepsilon$$

按定义这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

注：如果

$$c_1\left|b_n\right| \le \left|a_n\right| \le c_2\left|b_n\right| \text{（} c_2 \ge c_1 > 0 \text{为常数）}$$

则有

$$c_1'\left|a_n\right| \le \left|b_n\right| \le c_2'\left|a_n\right|\left(c_1' = \frac{1}{c_2}, c_2' = \frac{1}{c_1}\right)$$

我们称$\{|a_n|\}$与$\{|b_n|\}$“差不多大”。显然，

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|b_n\right| = 0$$

例 11 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ [P40 习题 3（1）].

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，于是有$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \in N_+, \forall n > N_1, \left|a_n - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

从而当$n > N_1$时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le \frac{\left|a_1-a\right|+\left|a_2-a\right|+\cdots+\left|a_{N_1}-a\right|}{n} + \frac{\left|a_{N_1+1}-a\right|+\left|a_{N_1+1}-a\right|+\cdots+\left|a_{N_1}-a\right|}{n}$$

$$< \frac{A}{n} + \frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

其中$A = \left|a_1-a\right|+\left|a_2-a\right|+\cdots+\left|a_{N_1}-a\right|$是一个定数。

再由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n} = 0$，知$\exists N_2 \in N_+$，当$n > N_2$时，有$\dfrac{A}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取$N = \max(N_1, N_2)$，则当$n > N$时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right| < \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

注：反过来不一定成立。例如$a_n = (-1)^n$不收敛，但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$。

§2 收敛数列的性质

【定理 1】(唯一性)　若数列$\{a_n\}$收敛，则它只有一个极限.

证　设a是$\{a_n\}$的一个极限．我们证明：对任何数$b \neq a, b$不是$\{a_n\}$的极限．事实上，若取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|b-a|$，则按定义$1'$，在$\mathrm{U}(a;\varepsilon_0)$之外至多只有$\{a_n\}$中有限项，从而在$\mathrm{U}(b;\varepsilon_0)$内至多只有$\{a_n\}$中有限个项；所以$b$不是$\{a_n\}$的极限．这就证明了收敛数列只能有一个极限.

【定理 2】(有界性)　若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$为有界数列，即存在正数 M，使得对一切正整数　有

$$|a_n| \leq M.$$

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$取$\varepsilon = 1$，存在正数 N，对一切$n$>N 有

$$|a_n - a| < 1 \qquad \text{即} \qquad a-1 < a_n < a+1.$$

记
$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots |a_N|, |a-1|, |a+1|\},$$

则对一切正整数n都有$|a_n| \leq M$.

【定理 3】(保号性)　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则对任何$a' \in (0,a)$，存在正数$N$，使得当$n > N$时有$a_n > a'$(或$a_n < a'$).

证　设$a > 0$．取$\varepsilon = a - a'$(>0)，则存在正数N，使得当$n > N$时有$a_n > a - \varepsilon = a'$，这就证得结果.

类似：$a < 0$时的保号性.

注　在应用保号性时，经常取$a' = \frac{a}{2}$.

【定理 4】(保不等式性) 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列. 若存在正数N_0，使得当$n > N_0$时，有$a_n < b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$任给$\varepsilon > 0,$分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得当$n > N_1$时，

有

$$a-\varepsilon<a_n\,, \qquad (1)$$

当 $n>N_2$ 时有

$$b_n<b+\varepsilon\,. \qquad (2)$$

取　$N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，按假设及不等式(1)和(2)有

$$a-\varepsilon<a_n\le b_n<b+\varepsilon,$$

由此得到 $a<b+2\varepsilon$. 由 ε 的任意性推得 $a\le b$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

【思考】如果把定理中的条件 $a_n\le b_n$ 换成严格不等式 $a_n<b_n$，那么能否把结论换成 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$？.

例如：$a_n=0, b_n=\dfrac{1}{n}$

【例 2.1】　设 $a_n\ge 0(n=1,2,\ldots)$. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}. \qquad (3)$$

证　由保不等式性，$a\ge 0$.

若 $a=0$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，任给 $\varepsilon>0$，存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有 $a_n<\varepsilon^2$，从而 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$ 即 $\left|\sqrt{a_n}-0\right|<\varepsilon$, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$.

若 $a>0$，则有

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\le\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}.$$

任给 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，存在正数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$|a_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon,$$

从而 $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$. (3)式得证.

【定理 6】（迫敛性）　设收敛数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时有

$$a_n \le c_n \le b_n, \tag{4}$$

则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证　任给$\varepsilon > 0$，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得当$n >$

N_1时有

$$a-\varepsilon < a_n, \tag{5}$$

当$n > N_2$时有

$$b_n < a+\varepsilon. \tag{6}$$

取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,，则当$n > N$时,不等式(4)、(5)、(6)同时成立，即有

$$a-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a+\varepsilon.$$

从而有$|c_n - a| < \varepsilon$，这就证得所要的结果.

【例 2.2】 [P36-10]　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = a$;　　(2) 若$a > 0, a_n > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

证：

(1) 因为$na_n - 1 < [na_n] \le na_n$，所以$a_n - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[na_n]}{n} \le a_n$，由迫敛性得证。

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则存在$N > 0$，使得当$n > N$时，有$\dfrac{1}{2}a < a_n < \dfrac{3}{2}a$。

于是 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}a} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}a}$，由$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}a} = 1$和迫敛性得证。

【定理 6】（四则运算法则）　若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列，则$\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - b_n\}$，

$\{a_n . b_n\}$也都是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n.$$

特别当b_n为常数c时有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+c)=\lim_{n\to\infty}a_n+c,\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n.$$

若再假设$b_n\neq 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证　由于$a_n-b_n=a_n+(-1)b_n$及$\dfrac{a_n}{b_n}=a_n.\dfrac{1}{b_n}$，因此我们只须证明关于和、积与倒数运算的结论即可.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$则对任给的$\varepsilon>0,$分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得

$$|a_n-b_n|<\varepsilon,当n>N_1,$$

$$|b_n-b|<\varepsilon,当n>N_2.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\},$则当$n>N$时上述两不等式同时成立，从而有

1．$|(a_n+b_n)-(a+b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<2\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$

2．$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+a(b_n-b)|\leq|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|.$　　（8）

由收敛数列的有界性定理，存在正数M，对一切n有$|b_n|<M$. 于是，当$n>N$时由（8）式可得

$$|a_nb_n-ab|<(M+|a|)\varepsilon.$$

由ε的任意性，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$.

3．由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq 0,$根据收敛数列的保号性，存在正数$N_3$，则当$n>N_3$时有$|b_n|>\dfrac{1}{2}|b|$. 取$N'=\max\{N_2,N_3\},$则当$n>N'$时有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}<\frac{2|b_n-b|}{b^2}<\frac{2\varepsilon}{b^2}$$

由ε的任意性，这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}$.

【例 2.3】［P42-3（2）］　设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$（又问由此等式能否反过来推出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$）；

(2) 若$a_n>0,(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a$。

证　由$a_n>0,(n=1,2,\cdots)$，知$a\geq 0$。

若$a>0$，根据平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a$。

若$a=0$，　$0\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 0$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=0$。

【例 2.4】　[换具体的多项式]求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}$$，[P33 例 4]

【例 2.5】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. [P34 例 6]

解　$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$,

由$1+\frac{1}{n}\to 1(n\to\infty)$及例 2.1 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

【例 2.6 】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.［P35-4(6)］

解： $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

由迫敛性，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$

【注】 错误的做法是把极限取到括号内.

子列

定义 1　设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为正整数集N_+的无限子集，且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,则数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的一个**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$.

注 1　由定义 **1** 可见，$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项都选自$\{a_n\}$，且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序．$\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项，故总有$n_k\ge k$．实际上$\{n_k\}$本身也是正整数列$\{n\}$的子列.

例如，子列$\{a_{2k}\}$由数列$\{a_n\}$的所有偶数项所组成，而子列$\{a_{2k-1}\}$则由$\{a_n\}$的所有奇数项所组成．又$\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列，此时$n_k=k$，$k=1,2$，….

【定理 8】　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：$\{a_n\}$的任何子列都收敛.

证　充分性　$\{a_n\}$也是自身的一个子列。

必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任一子列．任给$\varepsilon>0$，存在正数$N$，使得当$k>N$时有$|a_k-a|<\varepsilon$．由于$n_k\ge k$，故当$k>N$时更有$n_k>N$，从而也有$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$，这就证明了$\{a_{n_k}\}$收敛(且与$\{a_n\}$有相同的极限).

【例 2.7】 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

【例 2.8】（1）证明数列$\left\{(-1)^n\right\}$，（2）证明数列$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散[见 P34-35]

§3 数列极限存在的条件

定义：若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式$a_n \le a_{n+1}$，则称$\{a_n\}$为**递增数列**．若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式$a_n < a_{n+1}$，则称$\{a_n\}$为**严格递增数列**.

类似定义递减与严格递减数列。（严格）递增数列和（严格）递减数列统称为（严格）**单调数列**.

【定理 1】（单调有界定理） 有界的单调数列必有极限.

证　不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列．由确界原理，数列$\{a_n\}$有上确界，记$a = \sup\{a_n\}$．下面证明a就是$\{a_n\}$的极限．事实上，任给$\varepsilon > 0$，按上确界的定义，存在数列$\{a_n\}$中某一项a_N，使得$a - \varepsilon < a_N$．又由$\{a_n\}$的递增性，当$n > N$时有

$$a - \varepsilon < a_N \le a_n.$$

另一方面，由于a是$\{a_n\}$的一个上界，故对一切a_n都有$a_n \le a < a + \varepsilon$．所以当$n > N$时有

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$．同理可证有下界的递增数列必有极限，且其极限即为它的下确界.

【例 1】　[P37 例 1] 设$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1$.证明：$\{a_n\}$收敛.

证　显然$\{a_n\}$是递增的。下证$\{a_n\}$有上界．当$n \ge 2$时，

$$a_{2n} \le 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$$

$$< \left(1 + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$$

$$< \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 + 2\frac{a_n}{2^\alpha}$$

再由$a_n < a_{2n}$，得$a_n < 1 + 2\dfrac{a_n}{2^{\alpha}}$，从而

$$a_n < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$

故$\{a_n\}$有界。由单调有界定理，$\{a_n\}$收敛。

【例 2】　[P4--3（2）]　设$a_1 = \sqrt{c}(c > 0), a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, n = 1, 2, \cdots$

证明$\{a_n\}$极限存在并求其值。

证 首先证明$\{a_n\}$单调增。

$a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c} = a_1$，设$a_n > a_{n-1}$，则$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} > \sqrt{c + a_{n-1}} = a_n$

由数学归纳法知$\{a_n\}$单调增。

其次证明$\{a_n\}$有上界。

$a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$，设$a_{n-1} < \sqrt{c} + 1$，则

$$a_n = \sqrt{c + a_{n-1}} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1$$

由数学归纳法知$\{a_n\}$有上界$\sqrt{c} + 1$。

由单调有界定理$\{a_n\}$必有极限。设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，由保不等式性$A \geq 0$

在$a_{n+1}^2 = c + a_n$两边取极限，得$A^2 = c + A$，解得$A = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$。

（另一根$A = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2} < 0$不合题意）。

注：（1）因为单调有界数列的极限是其确界，所以$\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$是其一个上界，证明的过程中也可以证明它是上界。

（2）上面方法是把这个上界又给予了放大。

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c + (2\sqrt{c})^2}}{2} = \frac{1 + 1 + 2\sqrt{c}}{2} = 1 + \sqrt{c}$$

【例 3】　[P43--7]　设$a > 0, \sigma > 0$,

$$a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a}),a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n}),n=1,2,\cdots \text{。}$$

证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

证： 由$a_n-\sqrt{\sigma}=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{\sigma}{a_{n-1}}-2\sqrt{\sigma})=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}}-\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{a_{n-1}}})^2\ge 0$得

$$a_n\ge\sqrt{\sigma},n=1,2,\cdots,$$

说明$\{a_n\}$有下界。又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n}-2a_n)=\frac{1}{2a_n}(\sigma-a_n^2)\le 0\ ,n=1,2,\cdots$$

得$\{a_n\}$递减。

由单调有界定理$\{a_n\}$的极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。在

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})$$

两边取极限得

$$a=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})$$

解得$a=\sqrt{\sigma}$（$a=-\sqrt{\sigma}$舍掉）。

注：这是求方程$x^2-\sigma=0$正根的Newton迭代法。以$\sigma=2$为例计算结果如下

k	x_k
1	1.50000000000000
2	1.41666666666667
3	1.41421568627451
4	1.41421356237469
5	1.41421356237309

【例4】 设S为有界数集. 证明：若$\sup S=a\overline{\in}S$，则存在严格递增数列$\{x_n\}\subset S$，使得$\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty}x_n=a$.

证 因a是S的上确界，故对任给的$\varepsilon>0,$存在$x\in S,$使得$x>a-\varepsilon$. 又因$a\overline{\in}S$，故$x<a$，从而有$a-\varepsilon<x<a$.

现取$\varepsilon_1 = 1$，则存在$x_1 \in S$，使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a$$

再取$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, a - x_1\right\} > 0$，则存在$x_2 \in S$，使得

$$a - \varepsilon_2 < x_2 < a,$$

且有$x_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - x_1) = x_1$.

一般地，按上述步骤得到$x_{n-1} \in S$之后，取$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right\}$，则存在$x_n \in S$，使得

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

且有$x_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1.}$

上述过程无限地进行下去，得到数列$\{x_n\} \subset$S，它是严格递增数列，且满足

$$a - \varepsilon_n < x_n < a < a + \varepsilon_n \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

【例 5】　证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

【注】可自学，记住：（1）$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$严格增；（2）$(1+\frac{1}{n})^n < 3$

证　由二项式

$$\begin{aligned}
a_n = (1+\frac{1}{n})^n &= 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

故$\{a_n\}$严格递增。再由上式

$$a_n <= 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=2+(1-\frac{1}{2})+\cdots+(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=3-\frac{1}{n}<3$$

故$\{a_n\}$有上界增。由单调有界定理$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在。记

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx 2.718$$

以 e 为底的对数称为<u>自然对数</u>，通常记

$$\ln x=\log_e x$$

【定理 2】（致密性定理）有界数列必有收敛子列。[证明略]

【定理 3】（柯西(Cauchy)收敛准则）　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当$n,m>N$时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon .$$

[证明略]

【例 6】　[P41--5]应用柯西收敛准则,证明以下数列$\{a_n\}$收敛:

（1）$a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$;

（2）$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

证（1）$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2^p})<\frac{1}{2^n}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，

从而当$n>N$时，对$\forall p$，有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$。由柯西准则,$\{a_n\}$收敛。

（2）$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

类同(1)可证$\left\{a_n\right\}$收敛。

【例 7】［P41--9(3)］ 按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的:

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

证：$\{a_n\}$发散的充要条件是$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists m,n>N$,使得$\left|a_m-a_n\right|\geq\varepsilon_0$。

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,对任意大的$N$,取$n>N,m=2n$，则

$$\left|a_m-a_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

【例 8】［几个正无穷大的比较］

$$[\log_a n]^\beta(a>1,\beta>0)\ll n^\alpha(\alpha>0)\ll a^n(a>1)\ll n!\ll n^n$$

证：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ ［P28--2（3）］

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n}$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>1)$ ［P41--3（3）］

记$a_n=\dfrac{a^n}{n!}$，则$a_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}a_n$，取$n_0>a$，当$n>n_0$时，$a_{n+1}<a_n$，$\left\{a_n\right\}$单调减且有下界零，故有极限，记极限为$A$。在$a_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}a_n$两边取极限得$A=0$。

或取$n_0>a$，当$n>n_0$时

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\frac{a}{n_0+1}\frac{a}{n_0+2}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\frac{a}{n}\to 0$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=0(a>1,\alpha>0)$ ［P28--2（5）推广］

令$a=1+\lambda(\lambda>0)$，取正整数$m:\alpha<m-1$

$$a^n=(1+\lambda)^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\lambda^m$$

$$\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}<\frac{n^{m-1}}{a^{n}}<\frac{m!}{\lambda^{m}}\frac{n^{m-1}}{n(n-1)\cdots(n-m+1)}=\frac{m!}{\lambda^{m}}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})}\frac{1}{n}\to 0$$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[\log_{a}n]^{\beta}}{n^{\alpha}}=0(a>1,\beta>0,\alpha>0)$［P42--2（2）推广］

只证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$（其他以后再证）。

$\forall\varepsilon>0$，则$10^{\varepsilon}>1$，再由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$得，存在$N$，当$n>N$时，有

$1<\sqrt[n]{n}<10^{\varepsilon}$，两边取对数得$0<\frac{\lg n}{n}<\varepsilon$，说明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$。