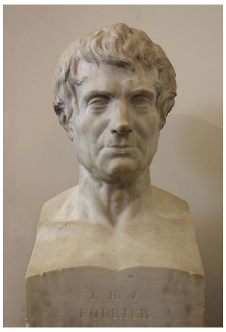
第 15 章 傅里叶级数



傅里叶是法国著名数学家、物理学家．于１７６８年生于法国，幼年父母就去世了。1795 年任巴黎综合工科大学助教，1798 年随拿破仑军队远征埃及，受到拿破仑器重，回国后被任命为格伦诺布尔省省长。傅立叶早在 1807 年就写成关于热传导的基本论文《热的传播》，向巴黎科学院呈交，但经拉格朗日、拉普拉斯和勒让德审阅后被科学院拒绝，1811 年又提交了经修改的论文，该文获科学院大奖，却未正式发表。傅立叶在论文中推导出著名的热传导方程 ，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。傅立叶级数（即三角级数)、傅立叶分析等理论均由此创始。傅立叶由于对传热理论的贡献于 1817 年当选为巴黎科学院院士。1822 年，傅立叶终于出版了专著《热的解析理论》。这部经典著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情形下应用的三角级数方法发展成内容丰富的一般理论，三角级数后来就以傅立叶的名字命名。傅立叶应用三角级数求解热传导方程，为了处理无穷区域的热传导问题又导出了当前所称的"傅立叶积分"，这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究。然而傅立叶的工作意义远不止此，它迫使人们对函数概念作修正、推广，特别是引起了对不连续函数的探讨；三角级数收敛性问题更刺激了集合论的诞生。因此，《热的解析理论》影响了整个 19 世纪分析严格化的进程。傅立叶 1822 年成为科学院终身秘书。【以上来自百度百科】

§1 傅里叶级数

【一】 三角级数

简谐振动（简谐波）

$$y = A\sin(\omega x+\varphi)$$

其中，A 为振幅，φ 为初相角，ω 为角频率，周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

对于复杂的波（复杂的周期运动)，希望用一系列谐波迭加来表示，通过对各个谐波的分析来探讨复杂波的某些性态。

称

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

为**三角级数**．它是由三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{2}$$

产生的函数项级数。

【定义】若两个函数φ与ψ在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0$$

则称函数φ与ψ在$[a,b]$上是**正交**的.

【引理】三角函数系(2)是$[-\pi,\pi]$上的正交函数系，即它们在$[-\pi,\pi]$上两两正交。

验证如下：

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]\mathrm{d}\,x=0\text{（}m\neq n\text{）}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]\mathrm{d}\,x=0\text{（}m\neq n\text{）}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\right]\mathrm{d}\,x=0$$

另外

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot 1\,\mathrm{d}\,x=2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\cos 2nx\right]\mathrm{d}\,x=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1-\cos 2nx\right]\mathrm{d}\,x=\pi$$

【二】 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

若在整个数轴上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3}$$

假设右边的级数可逐项积分。则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx) = a_0\pi$$

得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{4a}$$

现以 $\cos kx$ 乘（3）式两边（k 为正整数），得

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx\cos kx + b_n \sin nx\cos kx)$$

再假设右边级数可逐项积分，则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx) = a_k\pi$$

得

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx(k = 1,2,\cdots) \tag{4b}$$

同理，(3)式两边乘以 $\sin kx$，并假设可逐项积分，得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx(k = 1,2,\cdots) \tag{4c}$$

反之，若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数，则可按公式（4）计算出 a_n 和 b_n，它们称为函数 f 的**傅里叶系数**，以 f 的傅里叶系数为系数的三角级数（1）称为 f 的**傅里叶级数**，记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

问： (5)式中的记号"~"是否可换为等号？

【三】 收敛定理

【定理】（**收敛定理**）若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

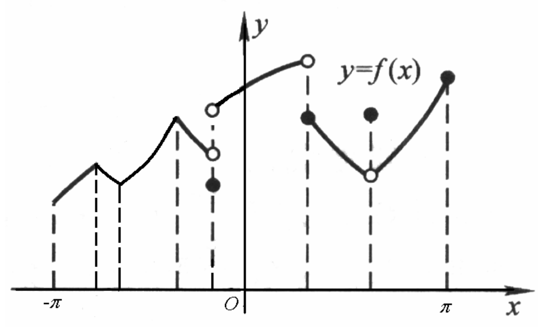
（1）连续或只有有限个第一类间断点；

（2）至多只有有限个极值点。

则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$，f 的傅里叶级数（5）收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{6}$$

注 1　定理中两上条件是指 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点且不作无限次振动。如下图：

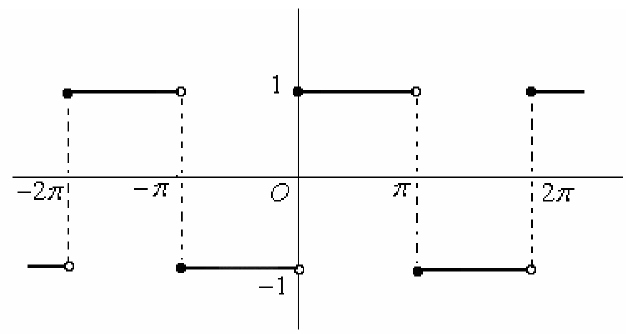


注 2　当 $x\in[-\pi,\pi]$ 为 f 的连续点时，（6）式左为等于 $f(x)$。

【例 1】 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数并指出收敛性。



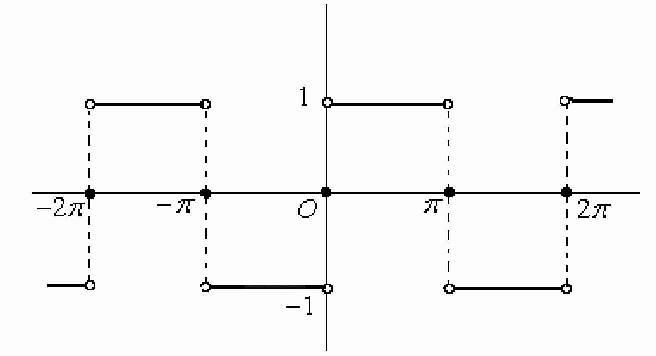
解　$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0$（$n=0,1,2,\cdots$）（奇函数）

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}[-\cos nx]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

因此

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots]=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$$



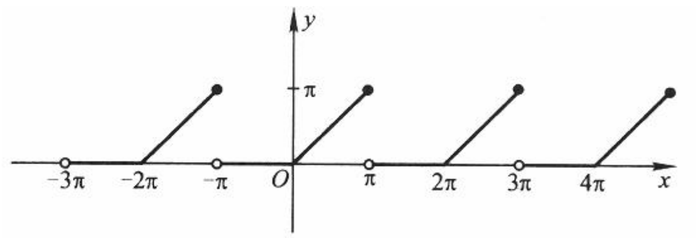
【例 2】设

$$f(x)=\begin{cases}x, 0\le x\le\pi,\\ 0, -\pi<x<0,\end{cases}$$

求 f 的傅里叶级数展开式并指出收敛性，再利用收敛性求

$$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

解　函数 f 及其周期延拓后的图像如图所示.



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{2}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\\ 0, \quad n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

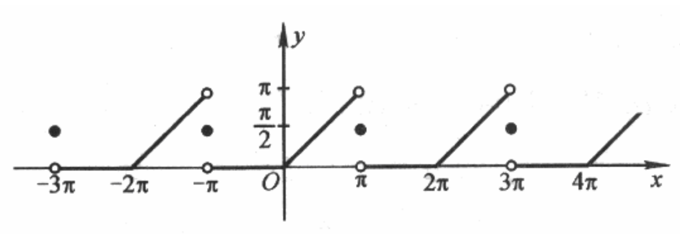
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi+\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\cos nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

所以

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}-(\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x)-\frac{1}{2}\sin 2x-(\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x)\cdots$$

$$=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x<\pi\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi\end{cases}$$



$x=\pi$ 时，由上式

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

又

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}$$

解得

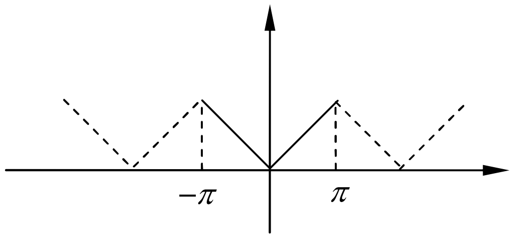
$$\sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24}$$

于是

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{6}$$

【例 3】将 $f(x)=|x|(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为 F−级数。

解 周期延拓



$f(x)$ 为偶函数，故

$$b_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

易求得

$$a_0 = \pi, a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right]$$

注 上式令 $x = 0$，同样可得

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

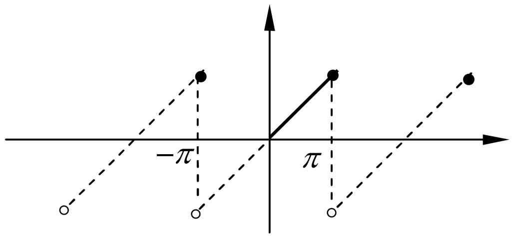
当 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上为奇函数，则 f 的 F-级数只有正弦项，称为**正弦级数**；当 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数，则 f 的 F-级数只有余弦项，称为**余弦级数**。

【例 4】 将 $f(x) = x(0 \le x \le \pi)$ 展开为（1）余弦级数；（2）正弦级数。

解 （1）作偶延拓完全同例 3。

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right](0 \le x \le \pi)$$

（2）作奇延拓：



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$f(x)=2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right](0\le x<\pi)$$

§2 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的函数，通过变量置换

$$\frac{\pi x}{l}=t \text{ 或 } x=\frac{lt}{\pi}$$

可以把 f 变换成以 2π 为周期的 t 的函数 $F(t)=f(\frac{lt}{\pi})$．若 f 在 $[-l,l]$ 上可积，则 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上也可积，这时函数 F 的傅里叶级数展开式是：

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos ntdt,n=0,1,2\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin ntdt,n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{2}$$

因为 $t=\frac{\pi x}{l}$，所以 $F(t)=f(\frac{lt}{\pi})=f(x)$．于是由(1)与(2)是分别得

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})\tag{3}$$

与

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,\cdots\end{aligned}\tag{4}$$

这里(4)式是以 $2l$ 为周期的函数 f 的傅里叶系数，(3)式是 f 的傅里叶级数.

若函数 f 在 $[-l,l]$ 上满足收敛定理中的条件，则同样可由收敛定理知道

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}).\tag{5}$$

【例 1】　把函数

$$f(x)=\begin{cases}0,-5\le x<0\\3,0\le x<5\end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解　根据(4)式，有

$$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_0^5 3dx=3,$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_0^5 3\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\bigg|_0^5=0,n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_0^5 3\sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}[-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}]\bigg|_0^5=\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6}{n\pi},n=1,3,5,\cdots\\0,\quad n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

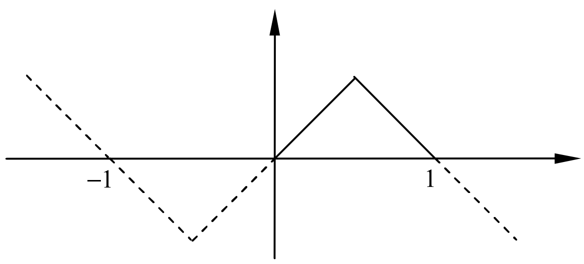
由（5）式得

$$f(x)\sim\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{5}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5}+\cdots)$$

$$=\begin{cases}0,\quad -5<x<0\\3,\quad 0<x<5\\\dfrac{3}{2},\quad x=0,\pm5\end{cases}$$

【例 4 】　把 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\1-x, & \dfrac{1}{2}\le x\le1\end{cases}$ 展开成正弦级数。

解 作奇延拓



$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\sin n\pi xdx\right]$$

其中

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\sin n\pi x dx \overset{t=1-x}{=\!=\!=} -\int_{\frac{1}{2}}^{0} t\sin(n\pi - n\pi t)dt = (-1)^{n+1}\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\sin n\pi t dt$$

因此

$n = 2,4,6,\cdots$ 时，$b_n = 0$

$n = 1,3,5,\cdots$ 时，

$$b_n = 4\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\sin n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^k \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}(k = 0,1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\left[\sin\pi x - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi x + \frac{1}{5^2}\sin 5\pi x + \cdots\right]$$