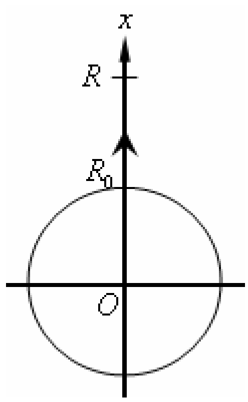
第 11 章　反常积分

§1　反常积分概念

【一】 问题提出

在讨论定积分时有两个最基本的限制：积分区间的有限性和被积函数的有界性。但在很多实际问题中往往需要突破这些限制，考虑无穷区间上的"积分"，或是无界函数的"积分"，这便是本章的主题。

【例 1】（第二宇宙速度问题）　在地球表面垂直发射火箭(如图)，要使火箭克服地球引力无限远离地球，试问初速度 v_0 至少要多大？



设地球半径为 R_0，火箭质量为 m，地面上的重力加速度为 g。按万有引力定律，在距地心 $x(x \ge R)$ 处火箭所受的引力为 $F(x) = k\dfrac{mM}{x^2}$。由于 $mg = k\dfrac{mM}{R_0^2} \Rightarrow k = \dfrac{gR^2}{M}$，代入得

$$F(x) = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

于是火箭从地面上升到距离地心为 $R(R > R_0)$ 处需作的功为

$$W(R) = \int_{R_0}^{R} \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = mgR_0^2\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

当 $R \to +\infty$ 时，其极限

$$\lim_{R\to+\infty} W(R) = mgR_0$$

就是火箭无限远离地球需作的功。我们很自然地会把这极限写作上限为$+\infty$的“积分”：

$$\int_{R_0}^{+\infty} \frac{mgR_0^2}{x^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{R_0}^{R} \frac{mgR_0^2}{x^2} dx = mgR_0.$$

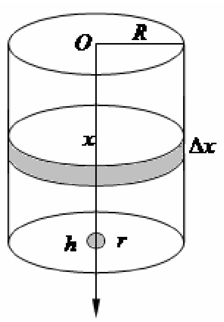
最后，由机械能守恒定律可求得初速度v_0至少应使

$$\frac{1}{2} m{v_0}^2 = mgR_0.$$

用$g = 9.18(m/s^2), R_0 = 6.371\times 10^6 (m)$代人，便得

$$v_0 = \sqrt{2gR_0} \approx 11.2(km/s).$$

【例 2】 圆柱形桶的内壁高为h，内半径为 R，桶底有一半径为r的小孔。试问从盛满水开始打开小孔直至流完桶中的水，共需多少时间?



从物理学知道，在不计摩擦力的情形下，当桶内水位高度为$(h-x)$时，水从孔中流出的流速(单位时间内流过单位截面积的流量)为

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

其中g为重力加速度。(注：上面公式由$\frac{1}{2} mv^2 = mg(h-x)$得)

设在很小一段时间dt内，桶中液面降低的微小量为dx，它们之间应满足

$$\pi R^2 \, \mathrm{d}x = v\pi r^2 \, \mathrm{d}t,$$

由此则有

$$dt = \frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}} dx, x\in[0,h].$$

所以流完一桶水所需时间在形式上亦可写成“积分”：

$$t_f = \int_0^h \frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}} dx 。$$

但是在这里因为被积函数是$[0,h)$上的无界函数，所以它的确切含义应该是

$$t_f=\lim_{u\to h^-}\int_0^u\frac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}dx$$

$$=\lim_{u\to h^-}\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\frac{R^2}{r^2}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})=\sqrt{\frac{2h}{g}}(\frac{R}{r})^2.$$

相对定积分(不妨称之为**正常积分**)而言，上面两例分别提出了两类**反常积分**。

【二】 两类反常积分的定义

【定义 1】　设函数f定义在无穷区间$[a,+\infty)$上，且在任何有限区间$[a,u]$上可积。如果存在极限

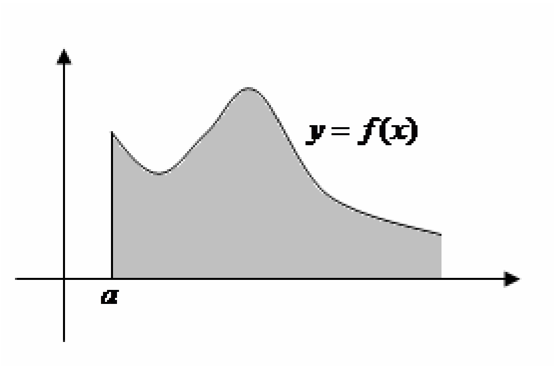
$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx=J\,, \tag{1}$$

则称此极限J为函数f在$[a,+\infty)$上的**无穷限反常积分**(简称**无穷积分**)，记作

$$J=\int_a^{+\infty}f(x)dx\,, \tag{1'}$$

并称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**收敛**。否则，称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**发散**。

几何意义：无穷区域的面积（见下图阴影部分）



类似地，**定义**f在$(-\infty,b]$上的无穷积分：

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx \tag{2}$$

定义f在$(-\infty,+\infty)$上的无穷积分：对任意实数a，当且仅当$\int_{-\infty}^a f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}f(x)dx$都收敛时，则称无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛，并定义$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$的值为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty}f(x)dx \tag{3}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{v\to-\infty}\int_v^a f(x)dx + \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$$

【注 1】　无穷积分(3)的收敛性与收敛时的值，都和实数 a 的选取无关。

不妨设 $a>0, v<0, u>a$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{v\to-\infty}\int_v^a f(x)dx + \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x) \\ &= \lim_{v\to-\infty}\left[\int_v^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx\right] + \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x) \\ &= \lim_{v\to-\infty}\int_v^0 f(x)dx + \lim_{u\to+\infty}\left[\int_0^a f(x)dx + \int_a^u f(x)dx\right] \\ &= \lim_{v\to-\infty}\int_v^0 f(x)dx + \lim_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

【注 2】无穷积分(3)的定义不能改成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)dx$$

例如：$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_{-u}^u xdx = 0$，但$\int_0^{+\infty} xdx$不收敛。

【注 3】定积分的 N.L.公式与分部积分法也可用于无穷积分。如果记

$$F(+\infty) = \lim_{u\to+\infty} F(u)$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = \lim_{u\to+\infty} F(u) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

分部积分法可写为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x)$$

【例 3】　讨论无穷积分（$\boldsymbol{p}$ **－积分**）

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} \tag{4}$$

的收敛性。

解　由于

$$\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1 \\ \ln u, & p=1\end{cases}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p\le 1\end{cases}$$

因此无穷积分(4)当 $p>1$ 时收敛，其值为 $\dfrac{1}{p-1}$；而当 $p\le 1$ 时发散于 $+\infty$.

【例 4】　讨论下列无穷积分的收敛性：

$$(1)\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^p}；\ (2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}$$

解　(1)用换元积分法：$t=\ln x$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{u\to+\infty}\int_2^u\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\lim_{u\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln u}\frac{\mathrm{d}\,t}{t^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,t}{t^p}$$

从例 3 知道，该无穷积分当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散。

(2)由于

$$\lim_{v\to-\infty}\int_v^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{v\to-\infty}(-\arctan v)=\frac{\pi}{2}，\ \lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{u\to+\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

【例 5】计算 $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\,\mathrm{d}\,t, n=0,1,2,\cdots$

解

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}-t^n\,\mathrm{d}\,e^{-t}=-t^ne^{-t}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t=n\Gamma(n)$$

递推得

$$\Gamma(n+1)=n!$$

【定义 2】　设函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上，在点 a 的任一右邻域上无界，在任何内闭区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上有界且可积。如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx=J，\qquad (5)$$

则称此极限为**无界函数** f 在 $(a,b]$ 上的**反常积分**，记作

$$J=\int_a^b f(x)dx,\qquad (5')$$

并称反常积分$\int_a^b f(x)dx$**收敛**。否则，称$\int_a^b f(x)dx$**发散**。

在定义 2 中，被积函数f在点a近旁是无界的，这时点a称为f的**瑕点**，而无界函数反常积分$\int_a^b f(x)dx$又称为**瑕积分**。

类似地，可定义瑕点为b时的瑕积分：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)dx.$$

其中f在$[a,b)$有定义，在点b的任一左邻域内无界，在任何$[a,u]\subset[a,b)$上可积。

若f的瑕点$c\in(a,b)$，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)dx + \lim_{v\to c^+}\int_v^b f(x)dx \tag{6}$$

其中f在$[a,c)\bigcup(c,b]$上有定义，在点c的任一邻域内无界，但在任何$[a,u]\subset[a,c)$和$[v,b]\subset(c,b]$上都可积。当且仅当（6）式右边两个瑕积分都收敛时，左边的瑕积分才是收敛的。

又若a、b两点都是f的瑕点，而f在任何$[u,v]\subset(a,b)$上可积，这时定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{7}$$

其中c为(a,b)内任一实数。当且仅当(7)式右边两个瑕积分都收敛时，左边的瑕积分才是收敛的。

【注 1】定积分的 N.L.公式与分部积分法也可用于瑕积分。以（$5'$）式为例

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^b = F(b) - F(a^+)$$

这里$F(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$。其它情况类似。

【注 2】瑕积分的记号与定积分的记号相同，在计算之前要判别清楚是定积分还是瑕积分。例如$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$是定积分，而$\int_0^1\frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$是瑕积分。

【例 6】　计算$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$的值

解　这是瑕积分，瑕点为$x=1$。

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin u\Big|_0^{1^-} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

【例 7】讨论瑕积分（**$q-$积分**）：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} \quad (q>0) \tag{8}$$

的收敛性。

解　$x=0$ 为被积函数的瑕点。由于

$$\int_u^1 \frac{dx}{x^q}=\begin{cases} \dfrac{1}{1-q}(1-u^{1-q}), & q\neq 1 \\ -\ln u, & q=1 \end{cases} \quad (0<u<1)$$

故当 $0<q<1$ 时，瑕积分(8)收敛，且

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{dx}{x^q}=\frac{1}{1-q}$$

而当 $q\geq 1$ 时，瑕积分(8)发散于 $+\infty$ 。

【注】 对于 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 结论同上。

§2　无穷积分的性质与收敛判别

【一】 无穷积分的性质

由定义知道，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛与否，取决于函数 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $u\to+\infty$ 时是否存在极限。因此可由函数极限的柯西准则

$$\lim_{u\to+\infty} F(u) \text{存在} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists G>0, \forall u_1,u_2>G, \text{有} \left|F(u_1)-F(u_2)\right|<\varepsilon$$

导出无穷积分收敛的柯西准则。

【定理 1】（柯西准则） 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $G\geq a$，只要 $u_1,u_2>G$，便有

$$\left|\int_a^{u_2} f(x)dx-\int_a^{u_1} f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon \text{。}$$

【性质 1】 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛，k_1，k_2 为任意常数，则 $\int_a^{+\infty}\left[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\right]\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}\left[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right]dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx \text{。} \tag{1}$$

由定义立即得证。

【性质 2】 若 f 在任何有限区间$[a,u]$上可积，$a<b$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_b^{+\infty} f(x)dx$同敛态(即同时收敛或同时发散)，且有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx, \tag{2}$$

其中右边第一项是定积分。

由$\int_a^u f = \int_a^b f + \int_b^u f$ 两边取极限即得证。

【注】性质 2 相当于定积分的**积分区间可加性**。

由性质 2 可看出，当$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛时，必有

$$\lim_{u\to+\infty}\int_u^{+\infty} f(x)dx = 0$$

这由$\int_a^{+\infty} f = \int_a^u f + \int_u^{+\infty} f \Rightarrow \int_u^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^u f$ 两边取极限便得。

【性质 3】 若 f 在任何有限区间$[a,u]$上可积，且有$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$亦必收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty}|f(x)|dx \text{。} \tag{3}$$

证 由$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，根据柯西准则(必要性)，任给$\varepsilon>0$，存在$G\ge a$，当$u_2>u_1>G$时，总有

$$\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon \text{。}$$

利用定积分的绝对值不等式，又有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| \le \int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon \text{。}$$

再由柯西准则(充分性)，证得$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

又因$\left|\int_a^u f(x)dx\right| \le \int_a^u|f(x)|dx$，令$u\to+\infty$ 取极限，立刻得到不等式（3）。

当$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛时，称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$为绝对收敛。称收敛而不绝对收敛的无穷积分为条件收敛。

【注】 由性质 3 知，绝对收敛的无穷积分其本身一定收敛。但反之不然，有条件收敛

的无穷积分，例如$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$（后面给出证明）。

【二】　非负函数无穷积分的敛散判别法

设$f(x)$是定义在$[a,+\infty)$上的非负函数，在任何有限区间$\left[a,u\right]$上可积，则

$$\Phi(u)=\int_a^u f(x)dx$$

是单调递增的函数，由函数的单调有界定理，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛（即$\lim\limits_{u\to+\infty}\Phi(u)$存在）的充要条件是$\Phi(u)=\int_a^u f(x)dx$有上界。

【定理 2】（**比较判别法**）　设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数f和g都在任何有限区间$[a,u]$上可积，且满足

$$f(x)\le g(x),x\in[a,+\infty),$$

则当$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$必收敛。等价地，当$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散时，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$必发散。

证　$\int_a^u f(x)dx\le\int_a^u g(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$，$\int_a^u f(x)dx$有上界。

或　由柯西准则证明。$\forall\varepsilon>0,\exists G\ge a,\forall u_1,u_2>G,$有$\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$，于是

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\le\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$$

【注】比较判别法条件可改为：$f(x)\le g(x),x\ge G\ge a$

【例 1】　讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$的收敛性。

解　由于$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2},x\in[0,+\infty]$，以及$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$收敛，根据比较判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$为绝对收敛。

推论 1（**比较原则的极限形式**）　若f和g都在任何有限区间$[a,u]$上可积，$f(x)\ge0$，$g(x)>0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

则有

(i) 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态；

(ii) 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

(iii) 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散。

证 当 $0<c<+\infty$ 时，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$，$\exists G\ge a$，当 $x\ge G$ 时，有

$$c_1 g(x)<f(x)<c_2 g(x)\quad (0<c_1\le c_2)$$

由比较判别法立即得证。

其他两种情况类似可证（作为作业）。

在推论 1 中，选 $g(x)=\frac{1}{x^p}$ 得：

【推论 2】（柯西判别法） 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda 。$$

则有

(i) 当 $p>1, 0\le\lambda<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

(ii) 当 $p\le 1, 0<\lambda\le+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

【例 2】 讨论下列无穷限积分的收敛性：

$$1）\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx；\quad 2）\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx 。$$

解 本例中两个被积函数都是非负的。

1）由于对任何实数 α 都有

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot x^\alpha e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+2}}{e^x}=0，$$

因此 1）对任何实数 α 都是收敛的。

2）由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}=1,$$

因此 2）是发散的。

【三】 一般无穷积分的敛散判别法

为了判别形如 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ 的收敛性，先介绍积分第二中值定理。

【定理 3】（**积分第二中值定理**）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 为单调函数，则存在 $\xi\in\left[a,b\right]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_\alpha^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx .$$

证 由于该定理的证明过程较复杂（详见教材），下面把条件进一步加强来证明。设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 为连续可微的单调函数。

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in\left[a,b\right]$，则 $F'(x)=f(x)$, 于是有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)dx$$

$$= g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx$$

由假设 $g(x)$ 为单调函数, 故 $g'(x)$ 不变号, 从而根据积分第一中值定理, 存在 $\xi\in\left[a,b\right]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)dx - \left[g(b)-g(a)\right]\int_\alpha^\xi f(x)dx = g(a)\int_\alpha^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

【推论】（**Abel 引理**）设 $f(x)$ 在 $[u_1,u_2]$ 上可积，$g(x)$ 为单调函数，则

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| \le 2M\left(\left|g(u_1)\right|+\left|g(u_2)\right|\right)$$

这里 $\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| \le M\ (\forall \xi\in[u_1,u_2])$。

由积分第二中值定理以及

$$\left|\int_\xi^{u_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx - \int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| \le \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| \le 2M$$

立即得证。

【定理 4】（$D-$判别法）设

(1) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调；

(2) $g(x)\to 0(x\to+\infty)$；

(3)$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 在$[a,+\infty)$上有界 。

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛。

证 由条件（3），设$\left|F(u)\right|=\left|\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\le M_1$，则$\forall u_2>u_1\ge a$，$\forall\xi\in[u_1,u_2]$，有

$$\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|=\left|\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}\,x-\int_a^{u_1} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\le 2M_1\triangleq M$$

由条件（2），$\forall\varepsilon>0,\exists G\ge a,$当$x>G$时，有

$$\left|g(x)\right|<\varepsilon$$

再由 Abel 引理，$\forall u_2>u_1>G$

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right|\le 2M\left(\varepsilon+\varepsilon\right)=4M\varepsilon$$

根据柯西准则，得 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛。

【定理 5】($A-$判别法)设

(1) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调；

(2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上有界；

(3)$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛 。

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$收敛。

证 由条件（2），设$\left|\,g(x)\right|\le M_1$。由条件（3），$\forall\varepsilon>0,\exists G\ge a$，$\forall u_2>u_1>G$，有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon$$

当然$\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon\ (\forall\xi\in[u_1,u_2])$。由由 Abel 引理

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right|\le 2\varepsilon\left(\left|g(u_1)\right|+\left|g(u_2)\right|\right)\le 2\varepsilon\left(M_1+M_1\right)=4M_1\varepsilon$$

根据柯西准则，得$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$收敛。

【例 3 】由 D-判别法证明 A-判别法。

证　由 A-判别法的条件（1）和（2），$g(x)$单调有界，故必有极限，设$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$。

令 $g_1(x)=g(x)-A$，则 $g_1(x)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g_1(x)=0$。由 D-判别法，$\int_a^{+\infty}f(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。于是由

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x+A\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

知 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

【例 4 】 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

解　这里只讨论前一个无穷积分，后者有完全相同的结论．下面分两种情形来讨论：

（i）当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛．这是因为

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p},x\in[a,+\infty),$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，故由比较法则推知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 收敛。

（ii）当 $0<p\le1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛．这是因为对任意 $u\ge1$，有

$$\left|\int_1^u\sin xdx\right|=\left|\cos1-\cos u\right|\le2$$

而 $\frac{1}{x^p}$ 当 $p>0$ 时单调趋于 $0(x\to+\infty)$，故由狄利克雷判别法推知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 当 $p>0$ 时总是收敛的．

另一方面，由于

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos2x}{2x},x\in[1,+\infty),$$

其中 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ 满足狄利克雷判别条件，是收敛的，而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ 是发散的，因此当 $0<p\le1$ 时该无穷积分不是绝对收敛的．所以它是条件收敛的．

【例 5】 证明下列无穷积分都是条件收敛的：

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx,\quad\int_1^{+\infty}\cos x^2dx,\quad\int_1^{+\infty}x\sin x^4dx$$

证　前两个无穷积分经换元 $t=x^2$ 得到

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt,$$

$$\int_1^{+\infty}\cos x^2dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt.$$

由例 4 已知它们是条件收敛的.

对于第三个无穷积分，经换元$t=x^2$而得

$$\int_1^{+\infty}x\sin x^4dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin t^2dt \quad ,$$

它也是条件收敛的.

【例 6】讨论$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$的收敛性

证 当$p>1$时，$\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^p}$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，由例 4 知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛，而$\arctan x$在$[1,+\infty)$单调有界，由 A-判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛，但它不是绝对收敛。因为当$x\ge 1$时，

$$\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\ge\frac{|\sin x|\cdot|\arctan x|}{x}\ge\frac{\pi}{4}\frac{|\sin x|}{x}$$

再由例 4 知$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$发散，故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$发散。

从前面的例中可看到，当$x\to+\infty$时，被积函数即使不趋于零，甚至是无界的，无穷积分仍有可能收敛.

【例 7】 若$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

证 不妨设$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$为有限数）。

（1）若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则$\exists M\ge a$，当$x\ge M$时，有$f(x)>1$。于是对$\forall u>M$，有

$$\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+u-M$$

显然$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=+\infty$，这与$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛矛盾。

（2）若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$且$A>0$，则$\exists M\ge a$，当$x\ge M$时，有$f(x)>\frac{A}{2}$。与上面（1）完全类似可推出矛盾。当$A<0$时也类似。

§3　瑕积分的性质与敛散判别

类似于无穷积分的柯西准则以及其后的三个性质，瑕积分同样可由函数极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ 的原意写出相应的命题。

【定理 1】（柯西准则） 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（瑕点为 a）收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 u_1，$u_2\in(a,a+\delta)$，总有

$$\left|\int_{u_1}^b f(x)dx-\int_{u_2}^b f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

【性质 1】 设函数 f_1 与 f_2 的瑕点同为 $x=a,k_1$、k_2 为常数，则当瑕积分 $\int_a^b f_1(x)dx$ 与 $\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛时，瑕积分 $\int_a^b [k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]dx$ 必定收敛，并有

$$\int_a^b [k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]dx=k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx \tag{1}$$

【性质 2】 设函数 f 的瑕点为 $x=a,c\in(a,b)$ 为任一常数。则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^c f(x)dx$ 同敛态，并有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{2}$$

其中 $\int_c^b f(x)dx$ 为定积分。

【性质 3】 设函数 f 的瑕点为 $x=a$，f 在 $(a,b]$ 的任一内闭区间 $[u,b]$ 上可积。则当 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 也必定收敛，并有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx\text{。} \tag{3}$$

同样地，当 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛时，称 $\int_a^b f(x)dx$ 为绝对收敛。又称收敛而不绝对收敛的瑕积分是条件收敛的。

判别瑕积分绝对收敛的比较法则及其推论如下：

【定理 1】（比较判别法） 设定义在 $(a,b]$ 上的两个非负函数 f 与 g，瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上都可积，且满足

$$f(x)\le g(x),x\in(a,b]\text{。}$$

则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 必定收敛。等价地，当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，$\int_a^b g(x)dx$ 亦必发散。

【推论 1】（比较判别法的极限形式） 又若 $f(x)\ge 0, g(x)>0$，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

则有：

（i）当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态；

（ii）当 $c=0$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

（iii）当 $c=+\infty$ 时，$\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 也发散。

在推论 1 中，选用 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^q}$，则得

【推论 2】（柯西判别法） 设 f 是定义在 $(a,b]$ 上的函数，a 为其瑕点，且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积。如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q\left|f(x)\right|=\lambda,$$

则有：

（i）当 $0<q<1$，$0\le\lambda<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

（ii）当 $q\ge 1$，$0<\lambda\le+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散。

【注】对于一般瑕积分也有相应的 D-判别法与 A-判别法。这里从略。

【例 1】 判别下列瑕积分的收散性：

$$1)\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;\qquad 2)\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx.$$

解　1）此瑕积分的瑕点为 $x=0$。由于 $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1]$ 上恒为负，故 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性与 $\int_0^1\left|\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|dx$ 的敛散性一致。

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}}\cdot\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right| = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0^+}(4x^{\frac{1}{4}}) = 0,$$

所以瑕积分 1) 收敛。

2)　此瑕积分的瑕点为 $x=1$。

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x} = 1,$$

推知该瑕积分发散。

【例 2】 讨论 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x$ 的收敛性。

解　$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{1/2}\quad+\int_{1/2}^1$

（1）讨论 $\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x$

$p\ge 1$ 时，是正常积分。$p<1$ 时，是瑕积分，$x=0$ 是瑕点，由

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-p}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1$$

得 $p>0$ 时收敛，否则发散。

（2）$\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}\,x$

$q\ge 1$ 时，是正常积分。$q<1$ 时，是瑕积分，$x=1$ 是瑕点，由

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1-q}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1$$

得 $q>0$ 时收敛，否则发散。

综上，$\mathrm{B}(p,q)$ 只有当 $p>0,q>0$ 收敛。

【例 3】 讨论 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 的收敛性。

解　记 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\quad+\int_1^{+\infty}\quad=I(s)+J(s)$

（1）讨论 $I(s)$

当 $s\ge 1$ 时，是正常积分。当 $s<1$ 时，是瑕积分，$x=0$ 是瑕点。由于

$$\lim_{x\to 0} x^{1-s}x^{s-1}e^{-x}=1$$

所以，当 $1-s<1 \Leftrightarrow s>0$ 时，$I(s)$ 收敛，当 $1-s\ge 1\Leftrightarrow s\le 0$，$I(s)$ 发散。

（2）讨论 $J(s)$

它是无穷积分，由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 x^{s-1}e^{-x}=0$$

所以，对 $\forall s$，$J(s)$ 收敛。

综上，$\varGamma(s)$ 只有在 $s>0$ 时收敛。

【例 4】 讨论反常积分 $\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的收敛性。

解 把反常积分 $\Phi(\alpha)$ 写成

$$\Phi(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=I(a)+J(a)$$

(1) 先讨论 $I(\alpha)$

当 $\alpha-1\geq 0$，即 $\alpha\geq 1$ 时它是定积分；当 $\alpha<1$ 时它是瑕积分，瑕点为 $x=0$。由于

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=1,$$

当 $0<q=1-\alpha<1,$ 即 $\alpha>0$ 时，瑕积分 $I(a)$ 收敛；当 $q=1-\alpha\geq 1$，即 $\alpha\leq 0$ 时，$I(\alpha)$ 发散。

（2） 再讨论 $J(\alpha)$

它是无穷积分。由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=1,$$

当 $p=2-\alpha>1$，即 $\alpha<1$ 时，$J(\alpha)$ 收敛；而当 $p=2-\alpha\leq 1$，即 $\alpha\geq 1$ 时，$J(\alpha)$ 发散。

综上 $\Phi(\alpha)$ 收敛 $\Leftrightarrow I(\alpha)$ 与 $J(\alpha)$ 同时收敛，所以 $\Phi(\alpha)$ 只有当 $0<\alpha<1$ 时才是收敛的。