第 8 章　不定积分

引言　本章将讨论求导运算的逆运算问题。即已知函数 $f(x)$，求函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x),x\in I$$

这个问题在实际中会经常遇到。例如

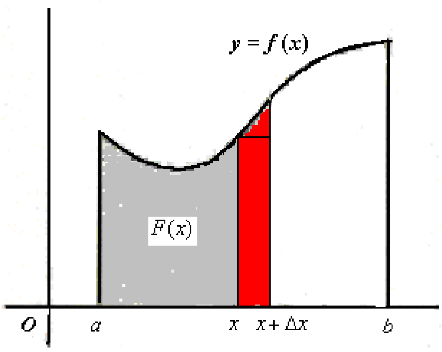
（1）已知速度函数 $v(t)$，求路程函数 $s(t)$；

（2）已知曲线的切线斜率 $k(x)$，求这个曲线 $y=f(x)$。

再来看一个曲边梯形的面积问题（这是下一章要重点讨论的问题，这里只是简单地介绍一下）。

设 $f(x)\in C[a,b],f(x)\geq 0$，由曲线 $y=f(x),x=a,x=b,y=0$ 就围成了一个平面图形，称为 $[a,b]$ 上曲边梯形。下面求这个曲边梯形的面积。

设 $F(x)$ 是区间 $[a,x]$ 上的曲边梯形的面积（$x\in[a,b]$，$F(a)=0$）



则所求的面积为 $S=F(b)$。当 x 有个小增量 Δx 时，面积增量

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\Delta x$$（这是小矩形的面积）

即

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\approx f(x)$$

直观地，Δx 越小，上式近似程度就越高。应有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

中国矿业大学数学学院胡建华

即

$$F'(x)=f(x)$$

因此，只要找到函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x),F(a)=0$，则所求面积为 $S=F(b)$。若 $F(a)\neq 0$，则令 $G(x)=F(x)-F(a)$，则 $G'(x)=f(x),G(a)=0$，因此所求的面积为

$$S=G(b)=F(b)-F(a)$$

上面就是微积分学最重要的公式：牛顿一莱布尼茨公式。

例如：

$f(x)=x^2,[a,b]=[0,1]$（作图）。$F(x)=\frac{1}{3}x^3$，则 $S=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}$

$f(x)=\sin x,[a,b]=[0,\pi]$（作图）。$F(x)=-\cos x$，则 $S=F(\pi)-F(0)=2$

§1　不定积分概念与基本积分公式

【一】 原函数与不定积分

【定义 1】 若 $F'(x)=f(x),x\in I$（I 为一个区间），则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

【注】以后讨论原函数常常把指定的区间 I 省略，默认为 $f(x)$ 的定义区间。

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，显然

$$F(x)+C，\ C\text{ 为任意常数}$$

也是 $f(x)$ 的原函数。

设 $F(x),G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\left(G(x)-F(x)\right)'=f(x)-f(x)\equiv 0$$

根据 Lag 中值定理的推论，有

$$G(x)-F(x)=C\text{ 即 }G(x)=F(x)+C$$

【定理 1】若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的原函数的全体为

$$\{F(x)+C \mid C\in\mathbf{R}\}$$

【定义 2】 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量。

由定理 1，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C\text{，}C\text{ 为任意常数}$$

【注】上式是一个函数族（集合），习惯上不写集合符号。

例如：

$$\int 1dx = x+C, \int xdx=\frac{1}{2}x^2+C, \int \sin xdx = -\cos x + C$$

不定积分的几何意义

（见教材）

【二】 基本积分表

（01）$\int 0dx = C$

（02）$\int 1dx = x + C$

（03）$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1, x>0)$

（04）$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C \ (x\neq 0)$

（05）$\int e^x dx = e^x + C$

（06）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a>0, a\neq 1)$

（07）$\int \cos xdx = \sin x + C$

（08）$\int \sin xdx = -\cos x + C$

（09）$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 xdx = \tan x + C$

（10）$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

（11）$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$

（12）$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$

（13）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos + C_1$

（14）$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arc}\cot x + C_1$

【定理 2】不定积分的具有线性性。即

设 f, g 在区间 I 上都存在原函数，k_1, k_2 为不同时为零的常数，则

$$\int \left[k_1 f(x) + k_2 g(x) \right] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx \tag{1}$$

证 设 $F(x) \in \int f(x) dx, G(x) \in \int g(x) dx$，则

$$\left(k_1 F(x) + k_2 G(x) \right)' = k_1 f(x) + k_2 g(x)$$

（1）式左边$= k_1 F(x) + k_2 G(x) + C$

（1）式右边$= k_1 (F(x) + C_1) + k_2 (G(x) + C_2) = k_1 F(x) + k_2 G(x) + (k_1 C_1 + k_2 C_2)$

由于 k_1, k_2 不同时为零，显然（1）式：左边＝右边。

【思考】如果 $k_1 = k_2 = 0$，（1）式是否成立。

【定理 3】f 在区间 I 上连续，则 f 在区间 I 上必存在原函数。

（证明在第九章中给出）

【例 1】 $p(x) = 2x^3 - x + 3$，$\int p(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 3x + C$

【例 2】 $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 2}{x^2+1} dx = \int (x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}) dx$

$$= \frac{1}{3} x^3 - x + 2 \arctan x + C.$$

【例 3】 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

$$= \int \left(\csc^2 x + \sec^2 x \right) dx = -\cot x + \tan x + C.$$

【例 4 】$\int \cos 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x - \sin 2x) dx$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x) + C = -\frac{1}{8}(\cos 4x - 2\cos 2x) + C.$$

【例 5 】$\int (10^x - 10^{-x})^2 dx = \int (10^{2x} + 10^{-2x} - 2) dx$

$$= \int \left[(10^2)^x + (10^{-2})^x - 2\right] dx = \frac{1}{2\ln 10}(10^{2x} - 10^{-2x}) - 2x + C.$$

【例 6】$\int |x-1| dx$

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ 1-x, & x \le 1 \end{cases}$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，则

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1, & x \ge 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C_2, & x \le 1 \end{cases}$$

因为 $F(x)$ 为连续函数，在 $x=1$ 处连续，因此

$$-\frac{1}{2} + C_1 = \frac{1}{2} + C_2$$

取 $C_1 = 0$，则 $C_2 = -1$。因此，令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x, & x \ge 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x - 1, & x \le 1 \end{cases}$$

则 $\int |x-1| \mathrm{d} x = F(x) + C$。

【思考】$F(x)$ 在 $x=1$ 处可导吗？$F'(1) \overset{?}{=} f(1)$。

【例 7】有第一类间断点的函数存在原函数吗？

答　不存在。因为导函数不可能有第一类间断点。

【例 8】有第二类间断点的函数存在原函数吗？。

答　可能存在。如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

§2　换元积分法与分部积分法

【一】 换元积分法

【定理 1】（积分换元法） 设 $\int f(x)dx=F(x)+C, x\in I$，又 $x=\varphi(t), t\in J$ 可导且复合函数 $F\left(\varphi(t)\right), t\in J$ 有意义（即 $\varphi(J)\subseteq I$）。由复合函数求导法则

$$\left(F\left(\varphi(t)\right)\right)'=F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)=f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$$

于是

$$\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt=F\left(\varphi(t)\right)+C=\left[F(x)+C\right]_{x=\varphi(t)}=\left[\int f(x)dx\right]_{x=\varphi(t)} \tag{1}$$

（1）式称为第一积分换元法。

再假设 $x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$（此时 $\varphi(J)=I$），把（1）式逆过来用

$$\int f(x)dx=\left[\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{2}$$

（2）式称为第二积分换元法。

第一换元法又可写成：

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=}\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

因此第一换元法，也称凑微分法。

下面的例 1 至例 9 使用的是第一换元法。

【例 1】 $\int\cos 2x\,\mathrm{d}\,x=\int\dfrac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)$

$$\overset{u=2x}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int\cos u\,\mathrm{d}\,u=\left[\frac{1}{2}\sin u+C\right]_{u=2x}=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

【例 2】 $\int\tan x dx=\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\dfrac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C.$

【例 3】 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$

说明：以后类似题中总约定 $a>0$。

【例 4】 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0) = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C.$

【例 5】 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\ln x)}{(1+2\ln x)} = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

【例 6】 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C$

【例 7】 $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x dx = \int(\cos^2 x-1)d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

【例 8】求 $\int \sec x dx.$

解法一 $\int \sec x dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d(\sin x)$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\right)+C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.$$

解法二 $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{d(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$

$$= \ln|\sec x+\tan x|+C\ .$$

【思考】如何把上述两种结果统一起来。

【例 9】 $\int \csc x dx$.

仿照例 8，请读者自己完成。

下面的例 10 至例 15 使用的是第二换元法。

【例 10】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \overset{x=t^6}{=\!=\!=} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C\ .$$

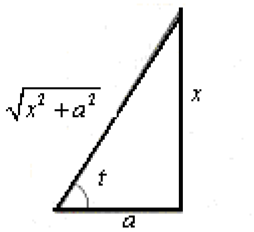
【例 11】 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx \underset{|t|\le\frac{\pi}{2}}{\overset{x=a\sin t}{=\!=\!=\!=}} \int a\cos t d(a\sin t) = a^2\int\cos^2 t dt$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C=\frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2})+C.$$

【例 12】 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=\!=}}\int\frac{a\sec^2 t}{a\sqrt{\tan^2 t+1}}dt=\int\sec tdt=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C.$

借助辅助直角三角形



得 $\tan t=\frac{x}{a}$， $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，因此

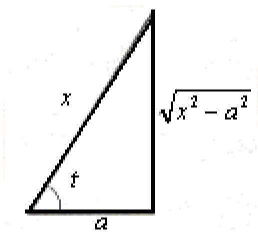
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

【例 13】 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

仅讨论区间 $x>a$ 的情况。令 $x=a\sec t$， $0<t<\frac{\pi}{2}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt=\int\sec tdt=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C.$$

借助辅助直角三角形



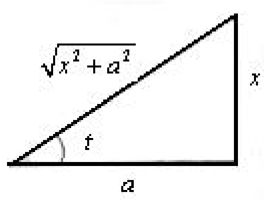
便于求出 $\sec t=\frac{x}{a}$， $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，故

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

【注】当 $x < a$ 时，请记者自己完成。结果与上同。

【例 14】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \overset{x=a\tan t}{\underset{|t|<\frac{\pi}{2}}{====}} \int \frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}dt = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt$

$$= \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C = \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{x^2+a^2}\right)+C.$$



【例 15】 求 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

解法 1　采用第一换元积分法：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}du = \sqrt{1-u^2}+C = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C.$$

解法 2　采用第二换元积分法(令 $x=\sec t$)：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^2 t\cdot\tan t}dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C.$$

【二】 分部积分法

【定理 2】（分部积分法） 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则 $\int u(x)v'(x)dx$ 也存在，并有

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

简写作

$$\int u dv = uv - \int v du$$

证　由 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 得

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$$

对上式两边求不定积分即得证.

【例 16】 $\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

【例 17】 $\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

【例 18】 $\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^4}{4}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^3 dx\right) = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$

【例 19】 $\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

【注】“反对幂指三” 原则.(上课解释)

【例 20】 求 $I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx$ 和 $I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx$.

解　$I_1 = \frac{1}{a}\int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx dx\right)$

$$= \frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx + bI_2),$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}(e^{ax}\sin bx - bI_1).$$

由此得到

$$\begin{cases} aI_1 - bI_2 = e^{ax}\cos bx, \\ bI_1 + aI_2 = e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

解此方程组，求得

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2} + C,$$

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

【例 21】 $\int\sqrt{x^2-a^2}dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int xd\sqrt{x^2-a^2} = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

$$= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}dx-a^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}dx-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

解得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

【例 22】（与上例类似）

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

【例 23】 $\int\sec^3 xdx = \int\sec xd\tan x = \sec x\cdot\tan x-\int\tan xd\sec x$

$$= \sec x\cdot\tan x-\int\tan^2 x\sec xdx = \sec x\cdot\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec xdx$$

$$= \sec x\cdot\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$$

解得

$$\int\sec^3 xdx = \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\int\sec xdx$$
$$= \frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

【例 24】 $\int\cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x)-\int xd\cos(\ln x) = x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$

$$= x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int xd\sin(\ln x) = x\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]-\int\cos(\ln x)dx$$

解得

$$\int\cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+C$$

【例 25】 $I_n = \int x^n\cos xdx = \int x^n d\sin x = x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin xdx$

$$= x^n\sin x+n\int x^{n-1}d\cos x = \cdots = x^n\sin x+nx^{n-1}\cos x-n(n-1)I_{n-2}$$

由 $I_0 = \sin x+C, I_1 = x\sin x+\cos x+C$, 可递推 $I_2 = \cdots, I_3 = \cdots$

【例 26】 $\int|x|e^x dx$

当 $x\ge 0$ 时，$\int |x|e^x dx=\int xe^x dx=(x-1)e^x+C_1$

当 $x\le 0$ 时，$\int |x|e^x dx=\int -xe^x dx=-(x-1)e^x+C_2$

设 $f(x)=|x|e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+C_1, & x\ge 0\\ -(x-1)e^x+C_2, & x\le 0\end{cases}$$

$F(x)$ 要在 $x=0$ 处连续，得 $C_1=2+C_2$。因此

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+2, & x\ge 0\\ -(x-1)e^x, & x\le 0\end{cases}$$

为 $f(x)=|x|e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的一个原函数。故

$$\int |x|e^x dx=F(x)+C=\begin{cases}(x-1)e^x+2+C, & x\ge 0\\ -(x-1)e^x+C, & x\le 0\end{cases}$$

【思考】下面错在哪？

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin x}-\int \sin x d\frac{1}{\sin x}=1+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

因此，$0=1$。

【三】 常用公式

除了基本积分表中的 14 个公式要求记住，下面再补充几个公式也要记住。

（15）$\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

（16）$\int \csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

（17）$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

（18）$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

（19）$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

（20）$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

§3　有理函数和可化为有理函数的不定积分

【一】 有理函数的不定积分

有理函数是指由两个多项式函数的商所表示的函数，其一般形式为

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\cdots+\beta_m}\tag{1}$$

其中$\alpha_0\neq0$，$\beta_0\neq0$． 若$m>n$，则称$R(x)$为**真分式**；若$m\leq n$，则称$R(x)$为**假分式**.

先来了解两个代数方面的结论。

代数学基本定理 设$Q(x)=\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\cdots+\beta_m$是$m$次实系数多项式，则$Q(x)$在复数域上必能分解成一次因式的乘积，在实数域上必能分解成一次因式与二次不可约因式的乘积。即

$$Q(x)=\beta_0(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_2}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{\mu_t}\tag{2}$$

其中$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{j=1}^{t}\mu_j=m;\quad p_j^2-4q_j<0,j=1,2,\cdots,t.$

多项式的带余除法定理　设$P(x)$与$Q(x)\neq0$是两个多项式，则存在多项式$q(x)$及$r(x)$，使得

$$P(x)=Q(x)\cdot q(x)+r(x)$$

其中$r(x)$的次数严格小于$Q(x)$的次数，或者$r(x)=0$。

这一定理告诉我们，如果（1）式$R(x)$为假分式，则$R(x)$必能写成一个多项式与一个真分式的和。即

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}\tag{3}$$

由（3）式知，我们讨论有理函数的不定积分，只需要讨论真分式的不定积分。

部分分式分解定理 设（1）式是真分式，其中$Q(x)$有形如（2）式的分解（不妨$\beta_0=1$），

则 $R(x)$ 必有如下部分分式分解

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{\left(x-a_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_1}}{\left(x-a_1\right)^{\lambda_1}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{B_1}{x-a_s}+\frac{B_2}{\left(x-a_s\right)^2}+\cdots+\frac{B_{\lambda_s}}{\left(x-a_s\right)^{\lambda_s}}$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\cdots+\frac{M_{\mu_1}x+N_{\mu_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^2}+\cdots+\frac{R_{\mu_t}x+S_{\mu_t}}{\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{\mu_t}}$$

【例 1】 $R(x)=\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$

两边同乘 $(x-2)(x-3)$ 得恒等式

$$x+3=A(x-3)+B(x-2)=(A+B)x-3A-2B$$

从而得线性方程组

$$\begin{cases}A+B=1\\-3A-2B=3\end{cases}$$

解得

$$A=-5,B=6$$

或在上面恒等式中令 $x=2$ 得 $A=-5$，令 $x=3$ 得 $B=6$ 。

【例 2】 $R(x)=\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

两边同乘 $x(x-1)^2$ 得恒等式

$$A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1$$

令 $x=0\Rightarrow A=1$， $x=1\Rightarrow C=1$，上式为

$$(x-1)^2+Bx(x-1)+x=1$$

令 $x=2 \Rightarrow B=-1$。

【例 3】 $R(x)=\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$

$$(A+2B)x^2+(B+2C)+(A+C)=1$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4/5 \\ B=-2/5 \\ C=1/5 \end{cases}$$

【例 4】 $R(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}=\dfrac{(x^2-2x+2)+(2x-1)}{(x^2-2x+2)^2}$

$$=\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}$$

一旦完成了部分分式分解，最后求各个部分分式的不定积分．由以上讨论知道，任何有理真分式的不定积分都将归为求以下两种形式的不定积分：

$$\text{(I)} \quad \int\frac{dx}{(x-a)^k}\,; \qquad \text{(II)}\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}dx(p^2-4q<0)$$

对于(I)，

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases} \ln|x-a|+C, & k=1, \\ \dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, & k>1. \end{cases}$$

对于(II)，

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$$

令 $t=x+\dfrac{p}{2}, r^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，则

$$Lx+M=L(t-\frac{p}{2})+M=Lt+\left(M-\frac{p}{2}L\right)\triangleq Lt+N$$

$$\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{Lt+N}{\left(t^2+r^2\right)^k}dt$$

$$=L\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}dt+N\int\frac{dt}{(t^2+r^2)^k}\triangleq L\,\mathrm{II}_1+N\,\mathrm{II}_2$$

当 $k=1$ 时，

$$\mathrm{II}_1=\int\frac{t}{t^2+r^2}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+C\,,$$

$$\mathrm{II}_2=\int\frac{dt}{t^2+r^2}=\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C.$$

当 $k\geq 2$ 时

$$\mathrm{II}_1=\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}dt=\frac{1}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}}+C\,.$$

II_2 用如下递推公式

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+r^2)^k}=\frac{1}{r^2}\int\frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}dt$$

$$=\frac{1}{r^2}I_{k-1}-\frac{1}{r^2}\int\frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}dt$$

$$=\frac{1}{r^2}I_{k-1}+\frac{1}{2r^2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}I_{k-1}+\frac{1}{2r^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}}-I_{k-1}\right].$$

经整理得到

$$I_k=\frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}.$$

【例 5】 求 $\int\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}dx.$

解 $\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{(x^2-2x+2)+(2x-1)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}.$

现分别计算部分分式的不定积分如下：

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}=\arctan(x-1)+C_1.$$

$$\int\frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int\frac{(2x-2)+1}{(x^2-2x+2)^2}dx$$

$$=\int\frac{d(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2}+\int\frac{d(x-1)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2-2x+2}+\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

由递推公式，

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{x-1}{2(x^2-2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x-1)+C_2.$$

于是得到

$$\int\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}dx=\frac{x-3}{2(x^2-2x+2)}+\frac{3}{2}\arctan(x-1)+C.$$

【二】 三角函数有理式的不定积分

由 $u(x)$ 、 $v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u(x)$ 、 $v(x)$ 的有理式，并用 $R(u(x),v(x))$ 表示。

万能替换公式 令变换 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

所以

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt\ .$$

【例 6】 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

解 令$t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【注】 万能替换虽然总是有效的，但并不意味着在任何场合都是简便的．下面几种情况，用所给的替换往往会更简单。

（1）若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令$t=\cos x$

（2）若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令$t=\sin x$

（3）若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，令$t=\tan x$

【注】若$R(-u,v)=-R(u,v)$，则$R(u,v)=uR_1(u^2,v)$。对于第（1）种情况，有

$$R(\sin x,\cos x)dx=\sin xR_1(\sin^2 x,\cos x)=-R_1(1-\cos^2 x,\cos x)d\cos x$$

其它情况类似。

【例 7】 求$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\quad(ab\neq 0).$

解 由于

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x}{a^2\tan^2 x+b^2}dx=\int\frac{d(\tan x)}{a^2\tan^2 x+b^2},$$

故令$t=\tan x$,就有

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{dt}{a^2t^2+b^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(at)}{(at)^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.$$

【注】本题可直接令$t=\tan x$，其解法本质是一样的。请读者自己完成。

【例 8】 求$\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x} dx$

解　$\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\left(\cos^2 x - 2\right)\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x} dx = -\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x} d\sin x$

$$\overset{t=\sin x}{=\!=\!=} -\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} d\sin x = -\int \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} dt$$

$$= -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}} dt = -\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3} dt = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x} + C$$

【三】 某些无理根式的不定积分

【1】　$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 型不定积分

设 $ad - bc \neq 0$（否则$\frac{ax+b}{cx+d} = $常数）。对此只需令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，就可化为有理函数的不定积分.

【例 9】 求$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$.

解　令 $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, 则有 $x = \frac{2(t^2+1)}{t^2-1}, dx = \frac{-8t}{(t^2-1)^2} dt,$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt$$

$$= \int \left(\frac{2}{1-t^2} - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{(x+2)/(x-2)}}{1-\sqrt{(x+2)/(x-2)}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

【例 10】 求$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$.

解　由于

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}},$$

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$，则

$$x=\frac{2t^2-1}{1+t^2},dx=\frac{6t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=\int\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}dx$$

$$=\int\frac{(1+t^2)^2}{9t^4}\cdot t\cdot\frac{6t}{(1+t^2)^2}dt=\int\frac{2}{3t^2}dt=-\frac{2}{3t}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}+C.$$

【2】 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型不定积分

【一】配方法

设 $a>0$ 时，$b^2-4ac\neq0$，$a<0$ 时，$b^2-4ac>0$.

由于

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

若记 $u=x+\frac{b}{2a},k^2=\left|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$，则此二次三项式必属于以下三种情形之一：

$$(1)|a|\left(u^2+k^2\right),\quad(2)|a|\left(u^2-k^2\right),\quad(3)|a|\left(k^2-u^2\right).$$

因此上述无理根式的不定积分也就转化为以下三种类型之一：

$$(1)\int R\left(u,\sqrt{u^2+k^2}\right)du,\quad(2)\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du,(3)\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$$

当分别令

$$(1)u=k\tan t,\quad(2)u=k\sec t,\quad(3)u=k\sin t$$

则它们都化为三角有理式的不定积分.

【例 11】　$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

$1+x-x^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-(x-\dfrac{1}{2})^2$，令 $u=x-\dfrac{1}{2}$，并记 $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{u^2+u+\frac{1}{4}}{\sqrt{r^2-u^2}}du=\int\frac{u^2}{\sqrt{r^2-u^2}}du+\int\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}du+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{r^2-u^2}}du$$

$$=-\int\sqrt{r^2-u^2}du+(r^2+\frac{1}{4})\int\frac{1}{\sqrt{r^2-u^2}}du+\int\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}du$$

$$=-\frac{u}{2}\sqrt{r^2-u^2}-\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{u}{r}+(r^2+\frac{1}{4})\arcsin\frac{u}{r}-\sqrt{r^2-u^2}+C$$

$$=\frac{2r^2+1}{4}\arcsin\frac{u}{r}-(1+\frac{u}{2})\sqrt{r^2-u^2}+C$$

$$=\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x+3}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$$

【二】欧拉变换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} t\pm\sqrt{a}x, & a>0 \\ tx\pm\sqrt{c}, & c>0 \\ t(x-\alpha), & ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \end{cases}$$

【注】上述任一个变换都能解得 $x=R(t)$，从而把 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 化为关于 t 的有理函数。例如，$a>0,\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$，两边平方得 $x=\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$，从而

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\frac{\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{b-2\sqrt{a}t}$$

【例 12】 求 $\mathrm{I}=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$.

解 若令 $\sqrt{x^2-2x-3}=x-t$，则可解出

$$x=\frac{t^2+3}{2(t-1)},dx=\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{t^2+3}{2(t-1)}-t=\frac{-(t^2-2t-3)}{2(t-1)}.$$

于是

$$\mathrm{I}=\int\frac{2(t-1)}{t^2+3}\cdot\frac{2(t-1)}{-(t^2-2t-3)}\cdot\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}dt$$

$$=-\int\frac{2}{t^2+3}dt=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}}+C.$$

本章最后的说明　至此我们已经学过了求不定积分的基本方法，以及某些特殊类型不定积分的求法．需要指出的是，通常所说的“求不定积分”，是指用初等函数的形式把这个不定积分表示出来．在这个意义下，并不是任何初等函数的不定积分都能“求出”来的．例如

$$\int e^{\pm x^2}dx,\int\frac{dx}{\ln x},\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx(0<k^2<1)$$

等等，虽然它们都存在，但却无法用初等函数来表示(这个结论证明起来是非常难的，刘维尔(Liouville)于 1835 年作出过证明)．因此可以说，初等函数的原函数不一定是初等函数．