**一、叙述题【概念、定义、结论等】**

(1) 叙述数集的上确界的定义。

**【**答**】**若数满足：

（i）对一切，有，即是的上界；

（ii）对任何，存在，使得，即又是的最小上界，

则称数为数集的上确界。

【注】（ii）可改成：，，使得。

(2) 叙述数集的下确界的定义。

**【**答**】**若数满足：

（i）对一切，有，即是的下界；

（ii）对任何，存在，使得即又是的最大下界，

则称数为数集的下确界。

【注】（ii）可改成：，，使得。

(3) 叙述数列有界的定义。

**【**答**】**（符号为使得）

(4) 叙述数列无上界的定义。

**【**答**】**

(5) 叙述数列是无穷大量的定义。

【答】当时，有。(记作)

(6) 叙述数列不是无穷大量的定义。

【答】使得。

(7) 叙述是当时的有界量的定义。

【答】当时，有

(8) 叙述是当时的有界量的定义。

【答】当时，有

(9) 叙述是当时的无界量的定义。

【答】，使得

(10) 叙述函数在区间上的上确界的定义。

**【**答**】**值域的上确界，称为在区间上的上确界，记为。

即数满足：

（i）对一切，有；

（ii）对任何，存在，使得，

或，，使得。

(11) 叙述函数在区间上的下确界的定义。

**【**答**】**值域的下确界，称为在区间上的下确界，记为。

即数满足：

（i）对一切，有；

（ii）对任何，存在，使得，

或，，使得。

(12) 叙述的定义。

**【**答**】**，，，使得

【注】趋向可改为其它。

(13) 叙述极限存在的归结原则。

【答】存在,有都存在（且相等）。

【注】趋向可改为其它。

(14) 按Cauchy收敛准则，叙述不存在的充要条件。

【答】不存在，有

【注】趋向可改为其它。

(15) 叙述函数在区间上一致连续的定义。

【答】只要，就有

(16) 叙述函数在区间上不一致连续的定义。

【答】尽管，但是

(17)叙述函数**在点处的导数**的定义。

【答】设函数在点的某邻域内有定义，若极限



存在，则称函数**在点处可导**，并称该极限为函数**在点处的导数**，记作．

令则上式可改写为



（18）叙述函数在点可微的定义

【答】设函数定义在点的某邻域内．当给一个增量，时，相应地得到函数的增量为

.

如果存在常数，使得能表示成，

则称函数在点**可微**，并称上式中的第一项为在点的**微分**，记作

 或 .

（19）叙述闭区间上连续函数的重要定理（最大最小值定理、根的存在定理、介值定理、一致连续性定理等），费马定理和微分学的四个中值定理的条件和结论。

【答】略

（20）历史简述：古希腊，阿基米德（公元前287-212），“穷竭法”；中国，刘徽（公元263年），“割圆术”；16世纪中叶，开普勒（Keoler，1571-1630），三大定律；17世纪下半叶，牛顿（1642-1727）和莱布尼茨（1646-1716）创立微积分学（1665年微积分诞生年）。

叙述函数在区间上可积（或称黎曼可积）的定义。

【答】设是定义在上的一个函数，是一个确定的实数．若对任给的正数，总存在某一正数，使得对的任何分割，以及在其上任意选取的点集，只要，就有



则称函数在区间上**可积**或**黎曼可积**（记为）；数称为在上的**定积分**或**黎曼积分**，记作



**二、证明与计算题**

**1、关于确界的题**

（1）设、皆为非空有界数集，定义数集



证明：.

**【证】** （1）因为、皆为非空有界数集，所以和都存在。

，有

这说明是数集的一个上界。

由上确界的定义，，，使得

， 

于是，使得

根据定义，是数集的上确界。

(2)设为**D**上的有界函数.证明:



**【解】** ，





说明是的一个下界，从而



移项即得证。

【或】

，，使得

又，所以



由的任意性



（3） 设在区间上有界.记，证明:



**【证】** 因为对任意的

从而。所以



另一方面，对任意的，使得



从而



综上根据定义，

**2、关于数列极限的题**

(1) 用“语言”证明：。

【证】 因为



所以对任意，取。当时，有。即

。

(2) 设，求极限。

**【**解**】**取满足，由知，，当时，



从而



上式两边取极限并利用结论(为常数)和迫敛性得



（3）求极限

【解1】 

时，有，，又，是的下界由单调有界定理，有极限设为。在两边令，得，即。

【解2】取，当时



两边取极限，由迫敛性得。

（4）设。证明收敛，并求其极限。

【证】首先证明单调增。，

设，则



其次证明有上界。，

设，则



由单调有界定理,必有极限,设,两边取极限,，解得(另一根不合题意舍去)。



（5）求极限

【解】

，

由迫敛性，

（6）应用柯西收敛准则,证明以下数列收敛。

【证】 





，取，当时，，有



（7）应用柯西收敛准则证明数列发散。

【证】取,对任意大的,取，则



**3、关于函数极限的题**

（1）求极限

【解】



（2）求极限

【解】



（3）求极限。

【解】 

当时有，而，故由迫敛性得：=

当时有故又由迫敛性又可得：

综上，我们求得

(4) 证明如下复合函数极限定理。设

（1）（即在点连续）；

（2）；

则

**【**证**】** 由（1），，当时，有



由（2），对上面，，当时，有



从而



根据定义，。

(5) 设为定义在上的单调有界函数，用确界原理证明：右极限存在．

**【**证**】** 不妨设在上递增．因在上有界，由确界原理，存在，记为．下证．

事实上，任给，按下确界定义，存在，使得．取，则由的递增性，对一切，有



另一方面，由，更有．从而对一切有

，

这就证得．

(6)（P141） 求极限.

**【解】**





1. 求的Mac公式（至项）

**【解】** 





(8) 求极限

**【解】** 





类似地





(9) 求极限

**【解】** 









分子

所以 

（10）．设，证明



【证明】 因为，不妨设（），于是有，，，. 从而当时，有



再由，知存在，使得当时，. 因此取，当时，有



所以

（11） 求极限 

【解】Taylor展开

，









**（12）**求极限

解：由洛必达法则可得







**（13）**设是定义在R上的可导函数，且对任意的都有



如果，证明：

【证**】**

由于，所以不恒为零，由题设有



所以，对任何实数有



令，得



再由，解此方程，即得

**（14）**设在原点的邻域内二次可导，且 ，

（1）求

（2）计算：  **.**

**解：（1）**将在0点展开成带有Peano型余项的Taylor公式



由此，将上式代入已知条件，有



由于该极限存在，所以，必须有。

于是，



，从而，1+=2015，所以=4028。

这样，，=4028 。

（2）以，=4028

代入，类似上面的计算过程，有



**（15）**求

【解】 



上一步用L’Hospital法则和Taylor展开都可以做

用L’Hospital法则: 

用Taylor展开: 

**（16）**设



求，，

【解】1）   

 





**4、关于闭区间连续函数性质的题**

**(1)** 用致密性定理证明有界性定理：若函数在闭区间上连续，则在上有界．

【证】反证。假设在无上界。取，则，使得



显然有。

，有界，由致密性定理，有收敛子列，不妨假设就是它本身。设，显然，再由的连续性得



矛盾。因此在上有上界。同理，在上有下界。

**(2)**  设在上连续，满足



证明：存在，使得.（P80例4）

【证**】**  条件意味着：对任何有，特别有

 以及 ．

若或，则取或．

现设与．令



则，．故由根的存在性定理，存在，使得，即

1. 证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根。

【证】 设实系数奇次方程为

，

不妨。由



知，故存在，

因在上连续，于是由根的存在定理，存在，使得。

**(4)** 由一致连续的定义证明：在上一致连续．

【证**】** 因****，

由定义易得在上一致连续

**(5)** 由一致连续的定义证明：在上不一致连续．

【证**】**取，对无论多么小的正数，只要取与，则虽有 ，但



所以在上不一致连续．

**5、关于微分、积分中值定理复习题、综合题**

**(1)**设在上可导，且

证明：使

 。

【证】令，则。由积分中值定理，存在使



再由条件知。对在上用Rolle中值定理得：

使：



**(2)** 证明：当时，

【证】对在用Lagrange中值定理

,

，



**(3)**证明方程有且仅有一个小于1 的正实根。

【证】 1) 存在性 . 设则在 [0 , 1 ] 连续 , 由介值定理知存在使即方程有小于 1 的正根

2) 唯一性 .假设另有为端点的区间满足罗尔定理条件 , 至少存在一点但矛盾, 故假设不真!

**(4)** 设在上二阶可导。若，则，使得 。

**［方法1］** 不妨假设，则由导数定义和极限保号性可知，存在，使得



而在上连续，故由介值定理可知存在，使得



在上对函数应用由罗尔定理，知存在，使得



那么对函数在再应用罗尔定理，则存在，使得



**［方法2］** 设，不妨，，

则由Lag定理，



又不妨设，对在上用根的存在定理





对在上用Rolle定理



**［方法3］**，在用Rolle定理



对在上用Lag定理





由导数介值定理，，

**(5)**设是定义在上的一个连续周期函数，周期是，

求证： 

【证】对任何，存在自然数与，使得. 于是有

 



所以，

而

 

所以

**(6)**证明：在上一致连续。问函数在内一致连续吗？为什么？

【证】（i）由于在上连续，据一致连续性定理，必在上一致连续。

(ii)当时，



任给，取，对任何，只要，就有

所以在上一致连续

结合（i）（ii）结论，知在上一致连续。

函数在内不一致连续。

按一致连续性的定义，为证函数在某区间上不一致连续，只须证明：存在某，对任何正数(不论多么小)，总存在两点，尽管，但有.

对于函数，可取，对无论多么小的正数，只要取与，则虽有 ，但

，

所以在内不一致连续．

**(6)**若在上连续，求证：，使得



【**证法1**】：设在上的最大值为，最小值为。若，则，可任取。

若，则，有，故，即



同理有



由连续函数的介值定理知：，使得

。

**证法2**：（用拉格朗日中值定理）令，则，在上满足拉格朗日中值定理的条件，故，使得



即



**（7）**设是上的单调递增连续函数，且是它的反函数，求证：



在上述不等式中取，证明：. 其中, .

【**证明**】**:**

当时不等式显然成立.分三种情况.

(1)若,由积分的几何意义,有: 

(2) 若,记, 则,且有





(利用了的单调性)



(3) 若,此时, ,类似于(2)可证.

取,则是上的单调递增连续函数，且



利用上面所证的不等式,有



 证毕

**（7）**求证



并计算下列积分：



【证】





所以，





从而

 